

Spécialité :

PHYSIQUE THÉORIQUE

présentée par

Christophe TEXIER

Titre :

**Désordre, localisation et interaction
Transport quantique dans
les réseaux métalliques**

Soutenue le 4 Octobre 2010.

JURY :	Benoît Douçot (LPTHE, UPMC, Paris)	rapporteur
	Marc Gabay (LPS, Univ. Paris-Sud, Orsay)	président
	Jean-Marc Luck (IPhT, CEA-Saclay)	
	Hugues Pothier (SPEC, CEA-Saclay)	
	Boris Shapiro (Technion, Haifa)	rapporteur
	Jan von Delft (LMU, München)	rapporteur

Hyllus

Where congealed the northern streams,
Bound in icy fetters, stand ;
Where the sun's intenser beams
Scorch the burning Lybian sand :
By honour, love and duty led,
With advent'rous steps I'll tread.

Hercules, G.F. Haendel.



Table des matières

Aperçu	1
Liste des publications	5
1 Introduction	9
1.1 Introduction : physique mésoscopique	9
1.2 Conducteurs mésoscopiques	11
1.2.1 Introduction	11
1.2.2 Transport – Formule de Landauer-Büttiker	12
1.2.3 Le bruit du courant : Johnson-Nyquist <i>versus</i> Shottky	21
1.2.4 Relation entre spectre (DoS) et matrice \mathcal{S} , injectivités et émissivités . . .	27
1.2.5 Transport non linéaire et interaction entre électrons	34
1.2.6 Transport dynamique, résistance de relaxation de charge, décohérence . .	39
1.2.7 En guise de conclusion : construire la matrice \mathcal{S}	43
Annexe A : Un modèle de constriction	46
2 Théorie de la diffusion dans les graphes	51
2.1 Introduction	51
2.2 Opérateur de Laplace dans un graphe métrique	53
2.3 Scattering dans les graphes métriques	56
2.4 Matrice \mathcal{S} , DoS et courants	60
3 Functional determinants in metric graphs	63
3.1 Motivations	63
3.1.1 Introduction	63
3.1.2 Motivations	64
3.1.3 Coherence in weakly disordered metals	65
3.2 Arc-determinant	67
3.2.1 Analysis on each bond : Useful basis of solutions	67
3.2.2 Arc determinant (1)	69
3.2.3 Arc determinant (2)	72
3.3 Vertex-determinant	73
3.3.1 Path integral approach	73
3.3.2 Functions continuous at the vertices (δ -couplings)	74
3.3.3 Function whose derivative is continuous at the vertices (δ'_s -couplings) . . .	77
3.4 Zeta functions and trace formulae	78
3.4.1 Introduction	78
3.4.2 Arc determinant (3), scattering matrices and ζ -function	80
3.4.3 Trace formula – Continuous boundary conditions	82
3.4.4 Trace formula – Continuous derivative boundary conditions	83

3.4.5	ζ -functions for combinatorial graphs	84
3.5	Fonctionnelles du mvt brownien	86
3.6	Zeta regularisation of the spectral determinant	87
3.7.1	A simple regularisation	87
3.7.2	Zeta regularisation	87
Annexe A : Intégrale de chemin pour l'oscillateur harmonique		92
3.A.1	Intégrale de chemin dans l'espace réel	92
3.A.2	Intégrale de chemin dans l'espace des impulsions	93
Annexe B : Attachement de graphes		94
3.B.1	Traitement des bras morts	94
3.B.2	Contribution des boucles	95
3.B.3	Exemple	95
3.B.4	Attachement de graphes par un point	96
Annexe C : Bethe lattice		99
Annexe D : Articles		100
A. Comtet, J. Desbois & C. Texier, <i>Functionals of the Brownian motion, localization and metric graphs</i> , J. Phys. A : Math. Gen. 38 , R341–R383 (2005)		101
C. Texier, <i>On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach</i> , J. Phys. A : Math. Theor. 41 , 085207 (2008)		102
4	Transport quantique dans les métaux	103
4.1	Introduction	103
4.2	Perturbation et potentiel aléatoire	106
4.3	Approximation de Drude	109
4.4	Corrélations entre fonctions de Green	111
4.4.1	Diffuson	112
4.4.2	Cooperon et localisation faible	114
Annexe A : Some useful relations in metals		119
5	Quantum transport in metallic networks	121
5.1	Classical and quantum nonlocality	121
5.1.1	Background and motivation	121
5.1.2	Weak localisation correction to the conductance matrix	124
5.2	Electronic interactions in complex geometry	131
5.2.1	Introduction	131
5.2.2	Altshuler-Aronov correction	136
5.2.3	Decoherence by electron-electron interaction	139
5.3	Universal conductance fluctuations	148
5.3.1	UCF in regular networks	150
5.3.2	AB <i>versus</i> AAS oscillations	151
Annexe A : Electronic interactions in metals – Screening		153
Annexe B : Few remarks on Fermi liquid theory in metals		155
B.1.	Interaction parameters	155
B.2.	Validity of the Fermi liquid theory in disordered metals	156
Annexe C : Articles		158
C. Texier & G. Montambaux, <i>Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires</i> , Phys. Rev. Lett. 92 , 186801 (2004)		159

M. Ferrier, L. Angers, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier, G. Montambaux & D. Mailly, <i>Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network</i> , Phys. Rev. Lett. 93 , 246804 (2004)	160
C. Texier & G. Montambaux, <i>Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion</i> , J. Phys. A : Math. Gen. 38 , 3455–3471 (2005)	161
C. Texier & G. Montambaux, <i>Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring</i> , Phys. Rev. B 72 , 115327 (2005)	162
C. Texier, <i>Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring</i> , Phys. Rev. B 76 , 153312 (2007)	163
C. Texier & G. Montambaux, <i>Altshuler-Aronov correction to conductivity of a large metallic square network</i> , Phys. Rev. B 76 , 094202 (2007)	164
F. Schopfer, F. Mallet, D. Mailly, C. Texier, G. Montambaux, L. Saminadayar & C. Bäuerle, <i>Dimensional crossover in quantum networks : from mesoscopic to macroscopic physics</i> , Phys. Rev. Lett. 98 , 026807 (2007)	165
M. Ferrier, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier & G. Montambaux, <i>Geometrical dependence of decoherence by electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network</i> , Phys. Rev. Lett. 100 , 146802 (2008)	166
C. Texier, P. Delplace & G. Montambaux, <i>Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction in metallic networks and hollow cylinders</i> , Phys. Rev. B 80 , 205413 (2009)	167
6 Localisation d’Anderson 1D	169
6.1 Généralités sur la localisation d’Anderson ($\forall d$)	169
6.1.1 Le phénomène de localisation d’Anderson : onde et désordre	169
6.1.2 Critères de localisation	172
6.1.3 Des variations intéressantes	176
6.1.4 La théorie d’échelle	184
6.1.5 Équation de Dirac avec désordre	190
6.1.6 Fluctuations	197
6.1.7 Expériences	198
6.2 Quelques modèles unidimensionnels connus	199
6.2.1 Motivation	199
6.3 Méthodes	205
6.4 Quelques questions	214
Annexe A : Continuum limits of the disordered 1D Anderson model	222
6.4.1 The bottom of the free band	222
6.4.2 The middle of the free band	223
Annexe B : Modèle supersymétrique désordonné	225
Annexe C : Single Parameter Scaling dans le modèle d’impuretés δ 1D	228
Annexe D : β function of the quasi-1D weakly disordered wire	230
Annexe D : Articles	232
C. Texier, <i>Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder</i> , J. Phys. A : Math. Gen. 33 , 6095–6128 (2000)	233
C. Hagendorf & C. Texier, <i>Breaking of supersymmetry in one-dimensional a random Hamiltonian</i> , J. Phys. A : Math. Theor. 41 , 405302 (2008)	234
T. Bienaimé & C. Texier, <i>Localization for one-dimensional random potentials with large local fluctuations</i> , J. Phys. A : Math. Theor. 41 , 475001 (2008)	235
C. Texier & C. Hagendorf, <i>One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers</i> , Europhys. Lett. 86 , 37011 (2009)	236

C. Texier & C. Hagendorf, <i>Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian</i> , J. Phys. A : Math. Theor. 43 , 025002 (2010)	237
A. Comtet, C. Texier and Y. Tourigny, <i>Products of random matrices and generalised quantum point scatterers</i> , J. Stat. Phys. 140 (3), 427–466 (2010) . . .	238
7 Conclusions et perspectives	239
A Annexe	247
A.1 Diffusion anormale le long d’une ligne de pièges	247
A.2 Few properties of the complete elliptic integrals	248
B Networks of classical resistances	249
B.1 Algorithm	249
B.2 Square network of resistances	250
B.3 Networks with broken wires	253
Bibliographie	255
Articles de revue	296
Livres	298
Thèses	300
Résumé	308

Aperçu

Ce mémoire d'habilitation à diriger des recherches décrit mes travaux de recherche depuis l'année 2000, qui a correspondu à la fin de mon séjour à l'Université de Genève et mon arrivée à l'Université Paris-Sud.

Mon passage par Genève avait été l'occasion d'opérer un glissement depuis la physique de la localisation forte en basse dimension vers la physique mésoscopique. Mon premier travail dans ce domaine avait concerné l'étude du bruit de grenaille dans une structure multiterminal dans le régime de l'effet Hall quantique entier [633] (*cf.* § page 25). Plus précisément nous nous étions intéressés avec Markus Büttiker à l'effet de la redistribution de charges entre plusieurs canaux ($\nu \geq 2$) sur les corrélations de courant (bruit de grenaille). Sensibilisé par les techniques (approche Landauer-Büttiker,...) et les problématiques de la physique mésoscopique (cohérence de phase, rôle particulier de l'interaction entre électrons,...), je me suis engagé dans l'étude du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques à mon arrivée à Orsay comme maître de conférences. Cette étude a connu deux temps bien distincts :

A. Dans une série de quatre articles (quelque peu formels) j'avais abordé l'étude de la diffusion (scattering) dans les réseaux de fils unidimensionnels. De tels modèles simples ignorent les effets d'interaction, en principe particulièrement important en $d = 1$ puisqu'ils peuvent briser l'image de liquide de Fermi sur laquelle repose en général l'approche de scattering.¹ Bien qu'ils négligent des aspects aussi importants ils sont couramment utilisés en physique mésoscopique, principalement pour étudier les phénomènes d'interférence induit par la topologie. Dans ce cas on admet qu'il n'y pas de différence qualitative entre un canal (ou plutôt deux canaux avec le spin), où en principe l'effet des interactions ne devrait pas être négligé, et plusieurs canaux de conduction (où les interactions affectent quantitativement les propriétés de transport, mais pas qualitativement). Il m'avait paru intéressant d'obtenir quelques résultats généraux rendant l'étude de ces modèles plus systématique et plus simple. Ces résultats seront discutés dans le chapitre 2.

B. Les premiers travaux que je viens de mentionner s'appliquent plutôt à des réseaux balistiques dont les fils supportent peu de canaux de conduction. Dans un deuxième temps, notamment motivé par un contexte expérimental très favorable, je me suis intéressé au transport quantique dans des réseaux de fils métalliques faiblement désordonnés ayant un grand nombre de canaux de conduction.² Bien que rien n'interdise d'introduire des potentiels arbitraires dans les travaux décrits dans le § A (la formulation générale permet de les inclure), les résultats obtenus n'étaient pas très adaptés à une étude analytique poussée de l'effet d'un potentiel désordonné. D'une part si l'on en reste à la situation un petit peu académique strictement 1D sans tenir compte

¹ Notons que l'approche de la diffusion peut également apparaître dans certains problèmes avec interactions (par exemple *cf.* travaux sur certains modèles intégrables décrivant les états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire [240]).

² Dans les réseaux étudiés expérimentalement, la frontière entre régime balistique et régime diffusif n'est pas aussi nette, comme nous le verrons, *cf.* table 1.1 page 10.

des interactions, on s'attend à des effets de localisation forte à l'échelle du fil (peu intéressant) ou à l'échelle du pas du réseau (dans ce cas considérer un réseau de fils 1D ne semble qu'une complication d'un problème déjà ardu). D'autre part la généralisation de ce formalisme au cas multicanal devient assez lourde et perd de son intérêt. L'analyse des réseaux de fils métalliques faiblement désordonnés, sans changer fondamentalement les objets étudiés (conductance,... dans l'approche de scattering pour la formulation de Landauer-Büttiker) part donc sur des bases très différentes. Nous avons utilisé l'approche diagrammatique pour étudier les contributions quantiques aux coefficients de transport (conductance) en ayant particulièrement en ligne de mire les effets propres aux réseaux (dus à leur topologie non triviale). Ce cadre nous a permis d'aborder la question fondamentale de l'étude des effets de l'interaction entre électrons dans des géométries complexes : décohérence et correction Altshuler-Aronov. Si des méthodes plus sophistiquées de théorie des champs ont été développées pour étudier les systèmes désordonnés, la méthode des répliques [746] ou la méthode supersymétrique [752], notons que ces approches ne sont pas adaptées à la modélisation microscopique de la décohérence due aux interactions électroniques par les techniques de fonctionnelles d'influence que nous avons employées.

Le chapitre 4 propose une introduction basique mais détaillée à l'étude du transport quantique dans les métaux faiblement désordonnés. Dans le chapitre 5 je donnerai une vue d'ensemble des différents articles.

À partir de l'année 2008, je me suis de nouveau intéressé à des questions reliées à la localisation (forte) unidimensionnelle ; ces travaux seront décrits dans le chapitre 6.

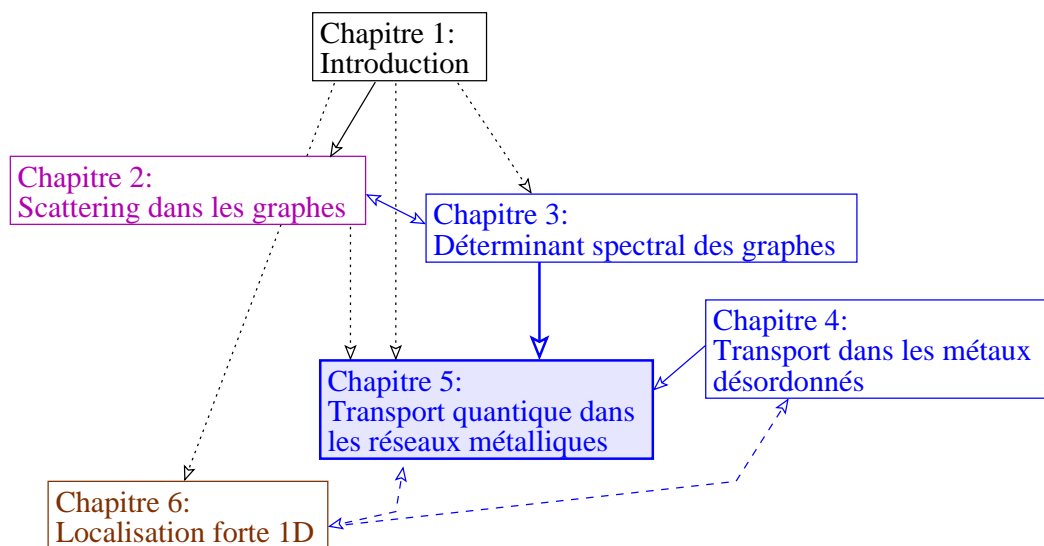



FIGURE 1 : Structure du document et relations logiques entre les chapitres.

Avertissement

Les chapitres sont relativement indépendants. Le chapitre 5 forme le cœur du document et lui a donné son titre. Une introduction à la thématique qui y est développée est donnée dans le chapitre 4. Les résultats du chapitre 3 ont été utilisés pour les travaux décrits dans le chapitre 5 (figure 1).

J'ai choisi de faire une sélection des articles reproduits dans les annexes afin de limiter (un peu) le volume du présent document. Le texte qui suit cherche à placer ces travaux dans un contexte plus large et à montrer comment ils s'articulent. J'ai inséré de très brefs résumés des

articles, signalés par le symbole . Tous les détails pourront être trouvés dans les articles reproduits dans les annexes.

Remerciements

Les articles évoqués dans le L^AT_EXuscrit ont été cosignés avec plusieurs collègues théoriciens que je remercie chaudement pour ces collaborations : Éric Akkermans, Tom Bienaimé (étudiant stagiaire en M2), Markus Büttiker, Alain Comtet, Pascal Degiovanni, Pierre Delpace (étudiant en thèse), Jean Desbois, Christian Hagendorf (étudiant en thèse avec Pierre Le Doussal au LPT-ENS, Paris) et Yves Tourigny. Je suis tout particulièrement reconnaissant à Gilles Montambaux pour notre longue collaboration enrichissante et extrêmement fructueuse.

Comme je le mentionnais, l'étude du transport électronique dans les réseaux de fils faiblement désordonnés a été motivée par un contexte expérimental on ne peut plus favorable puisque deux équipes, avec qui j'ai eu un très grand plaisir à collaborer, ont effectué des mesures : l'équipe d'Hélène Bouchiat, Meydi Ferrier et Sophie Guéron à Orsay (LPS) et l'équipe de Christopher Bäuerle et Laurent Saminadayar à Grenoble dans le cadre des thèses de Félicien Schopfer puis François Mallet (CRTBT→Institut Néel).

Je remercie vivement les membres du jury qui m'ont fait l'honneur d'y participer : Marc Gabay, Jean-Marc Luck et Hugues Pothier, et surtout Benoît Douçot, Boris Shapiro et Jan von Delft à qui est incombée la lourde tâche de produire chacun un rapport.

J'ai eu la chance d'avoir un début de carrière dans un endroit exceptionnel sur le plan scientifique. Tout au long de ces années j'ai bénéficié de très nombreuses interactions, pour la recherche ou pour l'enseignement, avec mes collègues du LPS et du LPTMS à qui j'adresse de très chaleureux remerciements.

Ajouts en 2014

Après la soutenance, j'avais commencé à corriger le manuscrit sur quelques points mais m'étais fait aspirer par d'autres projets et avais laissé de côté le texte. Après quelques années, j'ai donc finalement nettoyé le document (corrections de coquilles, quelques petites réorganisations, clarification de quelques points, ajout de quelques figures...). Bien évidemment certaines des idées et travaux évoqués dans le manuscrit avait progressé entre temps et il m'aurait paru étrange de n'en faire aucunement mention : j'en ai donc profité pour ajouter quelques références et on trouvera à plusieurs endroits des mentions à des développements postérieurs à mon HDR sous la forme de quelques « Note added in 2014 ».

Voici la liste des changements :

Chapitre 1

- * Footnote « Analyse semiclassique (...) » p. 16 transférée dans le texte.
- * Nouvelle figure : Fig. 1.6.
- * Nouveau § « Full counting statistics » p. 26.
- * Footnote « Modèle universel de QD », p. 34 transférée dans le texte.
- * Eqs. (1.80,1.81) en footnote transférées dans le texte.
- * Nouveau § « Beyond BPT (...) » p. 43, discutant la validité du traitement des interactions par Büttiker.

Chapitre 2

- * Nouvelle figure pour illustrer la question des conditions aux limites aux vertex : Fig. 2.3.

Chapitre 3

- * § 3.1.3 déplacé de la fin du chapitre (ancien § 3.6) vers l'introduction.
- * Le § « Basis 1 » p. 67 a été ajouté (son absence était un oubli).
- * L'annexe « Zeta regularisation of the spectral determinant » est devenue le § 3.6. Une référence a été ajoutée à la fin à notre article récent avec Jon Harrison & Klaus Kirsten.

Chapitre 4

- * Des formules utiles ont été regroupées dans la nouvelle annexe « Some useful relations in metals », p. 119.

Chapitre 5

- * Le § p. 144 (ancien « 0D case » devenu « The (incorrect) results of Takane ») a été réécrit.
- * Une mention à la généralisation de notre fonctionnelle d'influence a été ajoutée p. 145 : cette extension (cf. notre article Treiber, Texier *et al*, 2011) permet de décrire le régime de décohérence dominée par le bruit quantique.
- * § « New experiments in a single rings » pour évoquer les dernières expériences réalisées à Grenoble sur un anneau isolé, p. 147.
- * Nouvelle figure : Fig. 5.17.
- * Nouvelle annexe B, p. 155, donnant quelques précisions sur les paramètres d'interaction apparaissant dans le texte ; discussion de la validité de la théorie des liquides de Fermi en présence de désordre.

Chapitre 6

- * § d'introduction 6.1 étoffée (réorganisations, nouveaux items, nouvelles figures).
- * § sur l'analyticité ajouté, p. 208.
- * Nouvelle remarque « Mesoscopic versus microscopic LDoS », p. 212.
- * Tableau 6.2 p. 220 étoffé.
- * Nouvelle annexe A sur la limite continue du modèle de liaisons fortes, p. 222.
- * Nouvelle annexe D sur le calcul de la fonction β dans des fils quasi-1D, p. 230.

Liste des publications (2000-2010)

Je dresse la liste des publications, regroupées thématiquement, touchant les sujets abordés dans ce manuscrit.

Théorie de la diffusion dans les graphes (chapitre 2).

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Scattering theory on graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 10307–10326 (2001).
- Christophe Texier, *Scattering theory on graphs (2) : the Friedel sum rule*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3389–3407 (2002).
- Christophe Texier & Markus Büttiker, *Local Friedel sum rule in graphs*, Phys. Rev. B **67**, 245410 (2003).
- Christophe Texier & Pascal Degiovanni, *Charge and current distribution in graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 12425–12452 (2003).

Déterminant spectral, formules de trace (chapitre 3)

- Eric Akkermans, Alain Comtet, Jean Desbois, Gilles Montambaux & Christophe Texier, *Spectral determinant on quantum graphs*, Ann. Phys. (N.Y.) **284**, 10–51 (2000).
- Christophe Texier, *On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 085207 (2008).
👉 page 102
- Christophe Texier, *ζ -regularised spectral determinants on metric graphs*, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 425203 (2010).

Transport quantique dans les réseaux de fils faiblement désordonnés (chapitre 5)

◇ Propriétés de la diffusion, nonlocalité du transport

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires*, Phys. Rev. Lett. **92**, 186801 (2004).
👉 page 159
- Meydi Ferrier, Lionel Angers, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Christophe Texier, Gilles Montambaux & Dominique Mailly, *Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **93**, 246804 (2004).
👉 page 160

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *How to increase a transmission with weak localization ? A geometrical effect*, in *Quantum information and decoherence in nanosystems*, edited by Christian Glattli, Marc Sanquer and Jean Trân Thanh Vân, the Gioi publishers, Vietnam, p. 279 (2004), proceedings of the XXXIXth Moriond conference, La Thuile, Italy, january 2004 (preprint cond-mat/0404716).

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **38**, 3455–3471 (2005).

👉 page 161

- Félicien Schopfer, François Mallet, Dominique Mailly, Christophe Texier, Gilles Montambaux, Laurent Saminadayar & Christopher Bäuerle, *Dimensional crossover in quantum networks: from mesoscopic to macroscopic physics*, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 026807 (2007).

👉 page 165

◇ Rôle de l'interaction entre électrons, décohérence

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring*, *Phys. Rev. B* **72**, 115327 (2005) ; Erratum : *Phys. Rev. B* **74**, 209902 (2006).

👉 page 162

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Altshuler-Aronov correction to conductivity of a large metallic square network*, *Phys. Rev. B* **76**, 094202 (2007).

👉 page 164

- Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Magnetoconductance oscillations in series of diffusive rings & decoherence due to electron-electron interaction*, in *Nanophysics: from fundamentals to applications*, edited by D. Mailly, T. Martin, N. Van Hiêu, B. Plaçais and J. Trân Thanh Vân, Thê Gioi, Vietnam, p. 89 (2007), proceedings of the Hanoi conference, 6-12 August 2006 (preprint cond-mat arXiv:0704.0742).

- Christophe Texier, *Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring*, *Phys. Rev. B* **76**, 153312 (2007).

👉 page 163

- Meydi Ferrier, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Geometrical dependence of decoherence by electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 146802 (2008).

👉 page 166

- Christophe Texier, Pierre Delplace & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction in metallic networks and hollow cylinders*, *Phys. Rev. B* **80**, 205413 (2009).

👉 page 167

Diverses propriétés des systèmes désordonnés unidimensionnels (chapitre 6)

- Christophe Texier, *Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **33**, 6095–6128 (2000).

👉 page 233

- Christian Hagendorf & Christophe Texier, *Breaking of supersymmetry in one-dimensional a random Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 405302 (2008).
☞ page 234
- Tom Bienaimé & Christophe Texier, *Localization for one-dimensional random potentials with large local fluctuations*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 475001 (2008).
☞ page 235
- Christophe Texier & Christian Hagendorf, *One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers*, Europhys. Lett. **86**, 37011 (2009).
☞ page 236
- Christophe Texier & Christian Hagendorf, *Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 025002 (2010).
☞ page 237
- Alain Comtet, Christophe Texier and Yves Tourigny, *Products of random matrices and generalised quantum point scatterers*, J. Stat. Phys. **140**(3), 427–466 (2010).
☞ page 238

Autres travaux

◇ Bruit de grenaille et diffusion incohérente dans le régime de l'effet Hall quantique entier (chapitre 1, page 25)

- Christophe Texier & Markus Büttiker, *Effect of incoherent scattering on shot noise correlations in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **62**(11), 7454–7458 (2000).

◇ Un article de revue touchant les thèmes des chapitres 3, 5 & 6

- Alain Comtet, Jean Desbois and Christophe Texier, *Functionals of the Brownian motion, localization and metric graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, R341–R383 (2005).
☞ page 101

Chapitre 1

Introduction : morceaux choisis de physique mésoscopique

1.1 Introduction : physique mésoscopique

La physique mésoscopique est née au début des années 80 de la conjonction de deux progrès technologiques : 1) la miniaturisation des conducteurs électriques à des échelles microscopiques, 2) les progrès dans le refroidissement de ces structures et la sensibilité de la détection. ¹

1) *Du macroscopique au mésoscopique : du classique au quantique.* – En partant de l'échelle macroscopique, la réduction de la taille des conducteurs électriques est intéressante, du point de vue de la recherche fondamentale, car se manifeste la nature quantique des porteurs de charge (électrons ou lacunes d'électrons). La dualité onde/corpuscule s'y illustre de différentes manières. Par exemple, la nature corpusculaire des porteurs de charge est explicite dans le phénomène de blocage de Coulomb, qui caractérise la quantification de la charge isolée dans une boîte quantique faiblement couplée à des contacts. Elle est également démontrée par les mesures de bruit de grenaille à travers un conducteur cohérent. La nature ondulatoire des électrons a de nombreuses conséquences sur le processus de transport. On peut observer des phénomènes d'interférences quantiques en faisant passer un courant dans un anneau de taille microscopique (figure 2.1 p. 51) ; comme dans l'expérience des trous d'Young en optique, les deux bras de l'anneau définissent deux chemins pour l'onde électronique. La figure d'interférence est obtenue en faisant varier la phase relative, par exemple par application d'un champ magnétique (effet Aharonov-Bohm) : figure 5.14 p. 148. Un autre phénomène d'interférences quantiques est la localisation faible, petite correction au coefficient de transport classique venant des interférences entre trajectoires électroniques renversées lors de la diffusion par un potentiel désordonné (figure 4.4 p. 117). Ces phénomènes d'interférences induisent par exemple des violations des lois macroscopiques de l'électrocinétique comme la loi de composition des résistances de deux éléments mis en série ou en parallèle.

L'intérêt de la miniaturisation rencontre des limites en deçà desquelles on perd l'*universalité* pour rencontrer une physique fortement dépendante des détails microscopiques. La physique *mésoscopique* ² est bien une physique des échelles *intermédiaires* entre le macroscopique et l'Ångströmscopique ou le nanoscopique, *i.e.* l'échelle atomique ou moléculaire [40, 767].

2) *Le refroidissement.* – La physique mésoscopique ne procède pas seulement d'une réduction de la taille du conducteur mais requiert également un refroidissement efficace pour atteindre des

¹l'un ne va pas sans l'autre puisqu'en mesurant un système on le sonde en y déposant de l'énergie. En particulier le courant traversant un conducteur le chauffe par effet Joule, effet d'autant plus redoutable que le conducteur est petit.

²terminologie due à Van Kampen, selon Y. Imry [762]

températures de quelques Kelvin. L'observation d'effets d'interférences quantiques nécessite en effet d'abaisser la température afin de limiter les processus d'activation thermique. Il s'agit à la fois de limiter l'activation thermique des électrons eux-mêmes, qui les promouvrait dans des états de haute énergie et faciliterait le transport, mais aussi de l'activation des autres degrés de liberté interagissant avec les électrons limitant la *cohérence de phase*.

Nous voyons donc que l'accès au domaine mésoscopique requiert un **double confinement** : confinement **spatial** par la réduction de la taille, mais aussi un confinement **énergétique** par le refroidissement en limitant les énergies accessibles.

Pour terminer cette petite introduction, donnons quelques ordres de grandeur des échelles importantes mises en jeu dans les conducteurs mésoscopiques. Je me concentre sur les deux types de systèmes qui m'ont partiellement intéressés, à savoir des métaux, fils d'argent ou d'or, ou des métaux bidimensionnels réalisés par confinement d'un gaz d'électrons à l'interface de deux semiconducteurs GaAs/GaAl_xAs_{1-x} (chapitre 5).³

	metal (Ag)	2DEG (GaAs/GaAlAs)
dimensionality d	3D	2D
effective mass m^*	1.1	0.067
geometry	square	square
wire length	$a = 640$ nm	$a = 1000$ nm
width	$W = 60$ nm	$W = 170$ nm *
thickness	$b = 50$ nm	frozen
electron density n_e	$2s \frac{k_F^3}{6\pi^2} = 5.9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$	$2s \frac{k_F^2}{4\pi} = 4.4 \cdot 10^{15} \text{ m}^{-2}$
Fermi wavelength $k_F^{-1} = \lambda_F/(2\pi)$	0.083 nm	6 nm
Fermi velocity v_F	$1.39 \cdot 10^6$ m/s	$0.29 \cdot 10^6$ m/s
Fermi energy ϵ_F	4.8 eV	16 meV
DoS $\nu_d = 2\rho_0 \equiv \nu_d$	$18 \text{ eV}^{-1}\text{nm}^{-3}$	$0.28 \text{ eV}^{-1}\text{nm}^{-2}$
# of channels N_c	$\frac{k_F^2 W b}{4\pi} = 34600$	$\frac{k_F W}{\pi} = 9$
elastic m.f.p. ℓ_e	22 nm (*)	220 nm *
$k_F \ell_e$	265	37
diffusion constant $D = \frac{v_F \ell_e}{d}$	$0.01 \text{ m}^2/\text{s}$	$0.03 \text{ m}^2/\text{s}$
Thouless energy $E_{\text{Th}} = \hbar D/(4a)^2$	1 μeV	1.3 μeV
$g_{\text{wire}} = \alpha_d N_c \ell_e / a$	1590	3
spin-orbit : L_{so}	$\sim 0.5 \mu\text{m}$ (\ddagger)	negligible
$L_T = \sqrt{\hbar D/k_B T}$	$0.27 \times T^{-1/2}$	$0.46 \times T^{-1/2}$
$L_\varphi^{\text{ee}} = \sqrt{2} L_N$	$4.05 \times T^{-1/3}$	$0.84 \times T^{-1/3}$
T_* at which $L_T = L_\varphi^{\text{ee}}$	0.09 μK	27 mK
$L_\varphi^{\text{e-ph}}$	$12 \times T^{-3/2}$ (\ddagger)	

TABLE 1.1 : Orders of magnitude in two square networks made in different materials studied in Refs [576] and [241]. The lengths marked with a $\ll \star \gg$ are extracted from WL fit. Temperature are expressed in K and lengths in μm . More information on T_* can be found in the appendix page 155. (*) : It is worth stressing that this short mean free path is mostly due to the boundaries in these thin films or wires. For example, the elastic mean free path in pure gold in bulk is $\ell_e^{\text{bulk}} \simeq 4 \mu\text{m}$. (\ddagger) : data from [787].

³ Useful quantities $1\text{K} = 86 \mu\text{eV}$, $\phi_0 = h/e = 41.4 \text{ Gauss} \cdot \mu\text{m}^2$ & $e^2 = 1.44 \text{ eV} \cdot \text{nm}$.

1.2 Cohérence de phase dans les conducteurs mésoscopiques : de la formule de Landauer à la boîte à outils büttikerienne

L'objectif de cette section est de faire une petite revue de quelques problèmes de la physique mésoscopique pour illustrer l'étendue du champ d'application de l'approche de diffusion. Je commencerai par discuter quelques grands classiques incontournables avant d'introduire quelques développements plus récents. Comme le titre du chapitre l'indique, je ne vise pas l'exhaustivité, loin de là, mais plutôt à illustrer l'intérêt d'une approche en discutant brièvement quelques problèmes variés.

1.2.1 Introduction

L'approche de la théorie de la diffusion ⁴ est un outil central de la physique mésoscopique. L'idée de relier la résistance d'un conducteur à des probabilités de réflexion et de transmission est due à Rolf Landauer. Le développement de ce qui porte aujourd'hui le nom de "formule de Landauer" est également associé aux noms de E. Abrahams, P. W. Anderson, M. Ya. Azbel, M. Büttiker, E. N. Economou, D. S. Fisher, Y. Imry, D. C. Langreth, P. A. Lee, R. Landauer, C. M. Soukoulis et D. J. Thouless. Par la suite l'approche de scattering a trouvé en Markus Büttiker un de ses plus efficaces développeurs, pour en avoir poussé le champ d'application à de nombreuses autres quantités physiques comme nous le verrons.

Commençons par des choses simples et rediscutons brièvement la formule de Landauer, qui permet d'exprimer la conductance d'un système quantique **cohérent**. L'idée proposée par Landauer [391] est de décrire un conducteur mésoscopique (cohérent) comme un diffuseur de l'onde électronique. Cette dernière est canalisée dans les contacts, décrits dans l'approche comme des guides d'onde dans lesquels les électrons sont injectés. On manipule des états stationnaires de diffusion. Une base naturelle, et utile pour la suite, est formée des états décrivant une onde incidente par un des canaux (et donc diffractée dans tous les autres). Notons $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ la fonction d'onde d'énergie E correspondant à l'injection par le canal/contact α (figure 1.2).

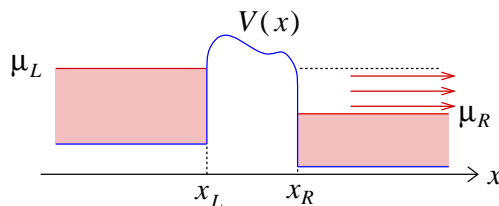


FIGURE 1.1 : *Transport à travers une barrière de potentiel. Les états à gauche de la barrière sont occupés jusqu'à l'énergie μ_L et à droite jusqu'à μ_R . Le courant des états gauches de l'intervalle $[\mu_R, \mu_L]$ n'étant pas compensé par celui des états droits, il y a un courant net vers la droite.*

Dans ce cadre, l'approche de Landauer-Büttiker formule une hypothèse forte sur la manière dont sont occupés les états électroniques dans une situation *hors équilibre* où du courant circule d'un contact l'autre. L'équilibre thermodynamique des différents contacts n'est pas perturbé et chaque contact est décrit par une fonction de distribution de Fermi-Dirac $f_\alpha(E) = f_{\text{eq}}(E - \mu_\alpha)$, où $f_{\text{eq}}(E)$ est la fonction de distribution d'équilibre et μ_α le potentiel chimique du contact α (ajusté en appliquant une différence de potentiel au contact). L'hypothèse à la base du modèle ⁵ est que

⁴ J'utiliserai parfois l'anglicisme "scattering" pour pallier à une imprécision de la langue française qui utilise le mot "diffusion" pour désigner aussi bien la notion de "scattering" (qu'on traduit aussi par "collision") que la notion de "diffusion" (au sens de la diffusion brownienne).

⁵ L'approche de Landauer-Büttiker ne peut être qu'un modèle phénoménologique puisqu'elle utilise comme ingrédient de base pour décrire une situation hors-équilibre un résultat obtenu dans une situation à l'équilibre

l'occupation des états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ incidents du contact α est donnée par la fonction de Fermi-Dirac d'équilibre $f_\alpha(E)$.

Ce qui rend cette hypothèse non triviale est que les états stationnaires $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ sont délocalisés dans *tous* les contacts. Il conviendra de discuter moyennant quelle(s) condition(s) les électrons dans les états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ (donc associés au potentiel chimique μ_α) arrivant dans le contact β n'en perturbent pas l'équilibre thermodynamique, en particulier le potentiel chimique μ_β .

1.2.2 Transport – Formule de Landauer-Büttiker

Conducteur 1D à deux contacts (formule de Landauer)

Pour introduire l'approche de diffusion nous considérons le cas le plus simple : la situation unidimensionnelle de la diffusion d'un électron par un potentiel $V(x)$, variant dans l'intervalle $[x_L, x_R]$ et constant ailleurs, $V(x < x_L) = V_L$ et $V(x > x_R) = V_R$ (figure 1.1). Il s'agit de la situation à deux canaux de conduction puisque l'onde électronique peut être injectée soit par la gauche (canal G) soit par la droite (canal D). Les propriétés du système sont codées dans les états stationnaires de diffusion $\psi_E^{(\alpha)}(x)$, décrivant un état incident de la gauche ($\alpha = L$) ou de la droite ($\alpha = R$). La normalisation des états est choisie de façon à satisfaire

$$\langle \psi_E^{(\alpha)} | \psi_{E'}^{(\beta)} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E') \quad (1.1)$$

(ce qui signifie que la mesure associée à ces états est simplement $\sum_\alpha \int dE \dots$). Le comportement asymptotique de l'état gauche est :

$$\psi_E^{(L)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v_L}} \left(e^{ik_L(x-x_L)} + r e^{-ik_L(x-x_L)} \right) \quad \text{pour } x < x_L \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar v_R}} t e^{ik_R(x-x_R)} \quad \text{pour } x > x_R \quad (1.3)$$

où $v_\alpha(E) = \frac{\hbar k_\alpha(E)}{m}$ est la vitesse de groupe dans le contact $\alpha \in \{L, R\}$; $k_\alpha(E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - V_\alpha)}$. Le choix d'introduire la constante de normalisation $1/\sqrt{\hbar v}$ dans la fonction d'onde conduit à la proportionnalité entre les modules carrés des coefficients r et t et les *courants de probabilité*. L'introduction de la petite complication consistant à introduire différentes vitesses de groupes à gauche et à droite n'est pas gratuite mais vise à insister sur le fait que la matrice de scattering au cœur de l'approche de Landauer-Büttiker regroupe les *amplitudes de probabilité de réflexion et de transmission* (et non les coefficients des ondes planes apparaissant dans la fonction d'onde) dans la matrice unitaire :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où r' et t' sont les amplitudes correspondant à l'état droit ⁶ $\psi_E^{(L)}(x)$ (la matrice \mathcal{S} est appelée la matrice de scattering ("on-shell"); elle possède une dépendance en énergie implicite dans les amplitudes de réflexion/transmission). Calculons la contribution au courant de probabilité des états de $[E, E + dE]$: pour $x \rightarrow -\infty$, la densité de courant ⁷ associée aux états gauche

(les distributions de Fermi-Dirac).

⁶ Dans le cas strictement 1D, la propriété $t = t'$ se déduit de l'uniformité du Wronskien des deux solutions. Ce ne serait pas vrai pour des guides en dimension $d > 1$ pour lesquels un seul canal est ouvert. Toutefois on a toujours égalité des modules $|t| = |t'|$.

⁷ $J_E^{(L)}$ est une densité de courant (par unité de surface, 1 en 1D) et par unité d'énergie puisque le spectre est continu.

est $J_E^{(L)} = \frac{\hbar}{m} \text{Im}[\psi_E^{(L)}(x)^* \frac{d}{dx} \psi_E^{(L)}(x)] = \frac{\hbar}{m} \frac{1}{2\pi\hbar v_L} k_L (1 - |r|^2) = \frac{1}{2\pi\hbar} (1 - |r|^2)$. Puisqu'il s'agit du courant associé à un état stationnaire, celui-ci est uniforme. Finalement

$$J_E^{(L)} = \frac{1}{h} |t|^2 \quad (1.5)$$

Pour l'instant nous n'avons fait qu'introduire l'information sur le problème à un électron. Nous l'utilisons maintenant pour calculer le courant d'un gaz d'électrons dans la situation hors équilibre. Nous faisons maintenant appel à l'hypothèse centrale de l'approche de Landauer-Büttiker : les états $\psi_E^{(L)}$ sont occupés selon la fonction de distribution $f_L(E)$ et apportent une contribution au courant électrique total $I_L = 2_s e \int dE f_L(E) J_E^{(L)} = 2_s \frac{e}{h} \int dE f_L(E) |t(E)|^2$, où le facteur 2_s est ajouté pour tenir compte de la dégénérescence de spin. De même la contribution au courant des états droits est $I_R = 2_s e \int dE f_R(E) J_E^{(R)} = -2_s \frac{e}{h} \int dE f_R(E) |t(E)|^2$. Finalement le courant total traversant le système est $I = I_L + I_R$:

$$I = 2_s \frac{e}{h} \int dE [f_L(E) - f_R(E)] |t(E)|^2 \quad (1.6)$$

À température nulle et pour $\mu_L - \mu_R = eV > 0$, le courant des états $\psi_E^{(L)}$ de l'intervalle $[\mu_R, \mu_L]$ n'est pas compensé par un courant gauche (figure 1.1). Dans le régime linéaire nous obtenons

$$I \underset{V \rightarrow 0}{\simeq} G V \quad \text{avec} \quad G = \frac{2_s e^2}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} \right) |t(E)|^2 \quad (1.7)$$

Si la transmission varie peu à l'échelle de $k_B T$ on obtient plus simplement $G \simeq \frac{2_s e^2}{h} |t(E_F)|^2$ où E_F est l'énergie de Fermi. La conséquence de l'éq. (1.6) la plus surprenante est l'existence d'une résistance finie $1/G = \frac{h}{2_s e^2}$, et donc de dissipation, dans le cas d'une barrière transmettant parfaitement l'onde ($T = 1$). Nous discuterons plus bas comment ce résultat est habituellement interprété et ce qui se cache dans l'hypothèse sur l'occupation des états de scattering.

Le cas multicanal et multiterminal (formule de Büttiker)

La notion de canal de conduction d'un fil mésoscopique est analogue à celle de mode propre d'un guide d'onde en électromagnétisme. Considérons l'équation de Schrödinger pour un Hamiltonien $H = -\frac{1}{2m} \Delta + W(y)$ où $W(y)$ est un potentiel confinant. L'hamiltonien décrit un fil non désordonné homogène. Nous notons $\{\varepsilon_n, \chi_n(y)\}$ le spectre de $-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + W(y)$. Une base d'états propres de l'hamiltonien est $\phi_{k,n}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \chi_n(y)$ où $k \in \mathbb{R}$; l'énergie de l'état est $E_{k,n} = \frac{k^2}{2m} + \varepsilon_n$. Choisissons plutôt d'indicer les états selon d'autres nombres quantiques : le vecteur d'onde k est remplacé par l'énergie E à laquelle on doit alors adjoindre un indice discret $\alpha = L, R$ spécifiant l'origine de l'onde (le signe de k ici). Les états ont maintenant la forme

$$\psi_E^{(\alpha,n)}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_n}} e^{ik_n x} \chi_n(y) \quad (1.8)$$

où $v_n(E) = \frac{k_n(E)}{m} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\frac{2(E - \varepsilon_n)}{m}}$ est la vitesse de groupe du canal.⁸ Puisque seuls les états d'énergie $E < \varepsilon_F$ sont occupés, nous voyons que seul un nombre fini N_c de modes interviennent dans le transport : $\varepsilon_{N_c} < \varepsilon_F < \varepsilon_{N_c+1}$.

⁸ Les états $\phi_{k,n}$ sont associés à une mesure $\sum_n \int dk$, *i.e.* la normalisation des états est choisie de telle sorte que $\langle \phi_{k,n} | \phi_{k',n'} \rangle = \delta_{n,n'} \delta(k - k')$. De même la normalisation des états $\psi_E^{(\alpha,n)}$ est choisie de telle sorte à leur associer une mesure $\sum_{\alpha,n} \int dE$.

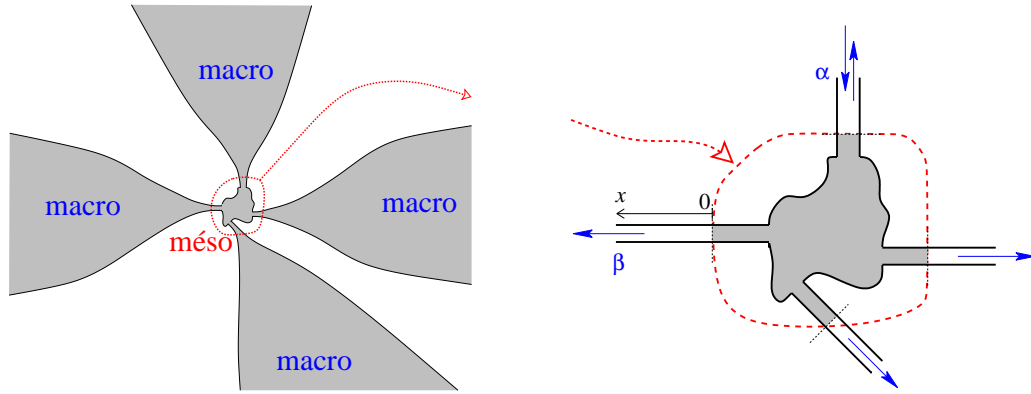


FIGURE 1.2 : À gauche : L'hypothèse que les états $\psi_E^{(\alpha)}$ sont occupés avec une distribution d'équilibre $f_\alpha(E) = f_{\text{eq}}(E - \mu_\alpha)$ suppose que l'approche s'applique à une situation où le système mésoscopique est en contact avec des conducteurs macroscopiques par lesquels le courant est injecté. Les contacts sont adiabatiques de telle sorte que la réflexion de l'onde ne se produise que dans le conducteur mésoscopique. À droite : Représentation de l'état stationnaire $\psi_E^{(\alpha)}$ décrivant l'injection de courant au contact α du conducteur. Les lignes en pointillés délimitent la région de scattering (choix en partie arbitraire), Éq. (1.9).

Si nous considérons maintenant une situation où le fil est soumis à un potentiel, les ondes planes incidentes par le fil sont transmises ou réfléchies et les états propres ont la forme asymptotique d'une superposition de telles ondes planes. Par commodité nous associons à chaque guide d'onde son propre système de coordonnées, où la direction des x croissants s'éloigne de la zone de diffusion. L'origine de l'axe est choisie sur le bord de la région de diffusion, comme dans la définition (1.2,1.3) (cette remarque est importante pour la discussion de la règle de Krein-Friedel ci-dessous). L'état stationnaire correspondant à l'injection de l'onde dans le canal n du contact α s'écrit dans le contact β :

$$\psi_E^{(\alpha,n)}(\vec{r} \in \text{contact}\beta) = \delta_{\alpha,\beta} \frac{e^{-ik_{\alpha n}x}}{\sqrt{2\pi v_{\alpha n}}} \chi_{\alpha n}(y) + \sum_{m=1}^{N_\beta} \frac{e^{ik_{\beta m}x}}{\sqrt{2\pi v_{\beta m}}} \chi_{\beta m}(y) \mathcal{S}_{\beta m, \alpha n}, \quad (1.9)$$

où nous avons indiqué les fonctions d'onde transverses et la vitesse de groupe par l'indice de contact pour décrire la situation où les guides d'onde ont des largeurs variables. La somme sur m porte sur les N_β canaux ouverts du fil. $\mathcal{S}_{\beta m, \alpha n}$ désigne l'amplitude de probabilité pour être transmis du canal n du contact α au canal m du contact β . Nous regroupons les $N_\alpha \times N_\beta$ amplitudes dans une matrice notée $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$. Le choix de normalisation est analogue à celui de (1.2,1.3).

La diffusion d'un canal à l'autre peut être due à un potentiel extérieur supplémentaire. Elle peut également provenir d'un changement de géométrie dans la situation parfaitement balistique. Par exemple un rétrécissement ou élargissement du guide (*cf.* annexe p. 46) ou un coude [234]. Enfin notons que l'écriture de l'état stationnaire de diffusion est maintenant parfaitement adaptée à une situation multiterminal (figure 1.2).

La généralisation de la formule (1.6) au cas multicanal a été développée par Fisher & Lee [250], puis au cas d'un conducteur mésoscopique multiterminal par Büttiker [132, 117] (une excellente revue est celle de Büttiker de 1988 [120]). Elle consiste assez naturellement à remplacer l'amplitude de probabilité de transmission t par la matrice $\mathcal{S}_{\alpha\beta}$ caractérisant la transmission du contact β au contact α . Le module $|t|^2$ est remplacé par un coefficient de transmission $T_{\alpha\beta} = \text{Tr}\{\mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger \mathcal{S}_{\alpha\beta}\}$, où la trace porte sur les canaux ouverts à la conduction. L'éq. (1.6) se généralise

donc comme

$$I_\alpha = \frac{2_s e}{h} \sum_\beta \int dE \operatorname{Tr} \{ \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger(E) \mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) \} f_\beta(E) \quad (1.10)$$

(le facteur 2_s tient compte du spin). Dans le régime linéaire,

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta, \quad (1.11)$$

les éléments de la matrice des conductances sont donnés par la formule, appelée formule de Landauer-Büttiker,

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2_s e^2}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} \right) \operatorname{Tr} \{ \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger(E) \mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) \} \quad (1.12)$$

L'unitarité de la matrice \mathcal{S} assure les deux conditions $\sum_\alpha G_{\alpha\beta} = \sum_\beta G_{\alpha\beta} = 0$ traduisant respectivement la conservation du courant et la nullité des courants à l'équilibre (lorsque tous les potentiels appliqués sont égaux).

- Par exemple dans le cas à deux contacts L et R sans diffuseur, $\mathcal{S}_{RR} = \mathcal{S}_{LL} = 0$ & $\mathcal{S}_{RL} = \mathcal{S}_{LR} = e^{i\Theta}$ où Θ est une matrice $N_c \times N_c$ encodant les déphasages, la formule donne $G_{LL} = G_{RR} = -G_{LR} = -G_{RL} \equiv G = \frac{2_s e^2}{h} N_c$.
- Toujours dans le cas deux terminaux mais avec des canaux imparfaitement transmis, la formule de température nulle, $G = \frac{2_s e^2}{h} \operatorname{Tr} \{ \mathcal{S}_{LR}^\dagger \mathcal{S}_{LR} \}$ nous donne la célèbre formule

$$G = \frac{2_s e^2}{h} \sum_{n=1}^{N_c} T_n \quad (1.13)$$

où les T_n sont les valeurs propres de la matrice $\mathcal{S}_{LR}^\dagger \mathcal{S}_{LR}$. Les T_n sont les probabilités de transmission associées aux modes propres de transmission.

Équilibration dans les contacts et résistance de Sharvin

Bien qu'assez naturelle à première vue, l'hypothèse de Landauer-Büttiker sur l'occupation des états est loin d'être évidente. Elle suppose en particulier une équilibration dans les contacts. Précisons : les états $\psi_E^{(\alpha)}(x)$ sont des états de diffusion, donc étendus dans tout l'espace. Si $\mu_L > \mu_R$ les états $\psi_E^{(L)}$ étendus dans le contact sont occupés par des électrons d'énergies $E > \mu_R$. L'approche admet que ceci ne perturbe pas l'équilibre thermodynamique du contact droit, *i.e.* que la présence d'électrons de potentiel chimique μ_L dans le contact R n'en affecte pas le potentiel chimique. Décrire les contacts, qui jouent le rôle de réservoirs d'électrons, comme des fils strictement unidimensionnels est donc une facilité de la modélisation et *l'hypothèse de Landauer-Büttiker semble physiquement justifiée pour des contacts très grands comparés au système* (de plus des processus inélastiques sont supposés à l'œuvre dans les contacts pour assurer la relaxation vers l'équilibre thermodynamique); le lecteur intéressé trouvera une discussion détaillée dans l'ouvrage de Datta [750]. On comprend alors mieux l'existence d'une résistance finie lorsque la probabilité de transmission est $|t|^2 = 1$: un fil mésoscopique à N_c canaux de conduction est caractérisé par une conductance finie $G = \frac{2_s e^2}{h} N_c$ trouvant son origine dans la résistance à faire passer une onde (ou un fluide) d'un "grand" conducteur par un "trou" mésoscopique. De plus la nature du contact entre le conducteur mésoscopique et le conducteur macroscopique est telle que la diffusion des ondes traversant le conducteur a lieu essentiellement dans le conducteur mésoscopique : ce qui semble justifié si les contacts macroscopiques sont

branchés *adiabatement*, comme représenté sur la figure 1.2. On parle de résistance de “contact” entre le conducteur macroscopique et le conducteur mésoscopique. Cette résistance est parfois appelée “résistance de Sharvin” puisque ce dernier en a donné une image hydrodynamique très intuitive [596] : considérons deux fluides d’électrons séparés par une barrière percée d’un petit trou d’aire A par lequel les fluides échangent de la matière. Si une différence de potentiel V est appliquée entre le contact gauche et le droit, à cause du principe de Pauli, seuls les électrons d’énergie proche de l’énergie de Fermi du contact gauche peuvent aller dans le contact droit. En passant d’un contact à l’autre, les électrons voient leur énergie cinétique augmenter/diminuer de $\delta E_c = \pm eV$ ce qui correspond à une variation de leur vitesse de $\delta v \simeq \pm eV/p_F$ où p_F est l’impulsion de Fermi. On obtient finalement un courant $I \sim e\delta v n A = e^2 V n A/p_F$, où n est la densité d’électrons. En dimension d , la densité d’électrons dans un métal est donnée par $n^{(d)} \sim (p_F/\hbar)^d$. Finalement la conductance du contact est

$$G_{\text{Sharvin}} \sim \frac{e^2 n A}{p_F} \sim \frac{e^2}{h} N_c \quad (1.14)$$

où l’on a utilisé que $N_c = n^{(d-1)} A$ (terme de Weyl). La quantification de la conductance a été vérifiée expérimentalement dans la célèbre expérience de van Wees *et al* [665, 664] réalisée sur une constriction gravée dans un gaz d’électrons bidimensionnel (2DEG) (*cf.* annexe p. 46). On peut observer les palliers de conductance sur l’insert de la partie gauche de la figure 1.4 (fil 1D obtenu avec la technique Cleaved Edge Overgrowth) et sur la figure 1.7, gauche (QPC).

Analyse semiclassique du transport à travers un trou balistique.— Le calcul plus précis de théorie cinétique est le suivant. Soit $f(\epsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{e^{\beta\epsilon} + 1}$. Le courant à travers le trou est

$$I = 2_s e A N_\beta \int_{p_z > 0} d\vec{p} \frac{p_z}{m} \left[f\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_L\right) - f\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_R\right) \right] \quad (1.15)$$

où $N_\beta = \frac{2n}{(2m)^{d/2} S_d} \left[\int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{d/2-1} f(\epsilon - \mu) \right]^{-1}$ est une constante de normalisation, $S_d = V_d d$ est la surface de la sphère unité, V_d son volume et $n = 2_s \frac{V_d}{(2\pi)^d} (p_F/\hbar)^d$ la densité électronique où 2_s est la dégénérescence de spin. À $T = 0$ on a $N_\infty = n/V_d p_F^d$. Plaçons-nous dans le régime linéaire à $T = 0$: la conductance est donnée par $G_{\text{Sharvin}} = \frac{2_s e^2 n A}{V_d p_F^d} \int_{p_z > 0} d\vec{p} \frac{p_z}{m} \delta\left(\frac{\vec{p}^2}{2m} - \epsilon_F\right)$. En utilisant $d\vec{p} = p^{d-1} dp d\Omega_d$ avec $d\Omega_d = \sin^{d-2} \theta_1 d\theta_1 \sin^{d-3} \theta_2 d\theta_2 \cdots \sin \theta_{d-2} d\theta_{d-2} d\theta_{d-1}$, on aboutit finalement à

$$G_{\text{Sharvin}} = 2_s e^2 \frac{n A}{\alpha_d p_F} = \frac{2_s e^2}{h} N_c \quad (1.16)$$

comme il se doit. On a introduit

$$\alpha_d \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2}{d \langle |x_d| \rangle_{|\vec{x}|=1}} = V_d/V_{d-1} \quad \text{où} \quad \frac{1}{2} \langle |x_d| \rangle_{|\vec{x}|=1} = \int_{x_d > 0} \frac{d^d \vec{x}}{S_d} x_d \delta(|\vec{x}| - 1). \quad (1.17)$$

Trou diffusif.— La résistance du « trou diffusif », i.e. tel que $\ell_e \ll w$ où w est la dimension transverse et ℓ_e le libre parcours moyen, était connue depuis la fin du XIXième siècle (J. C. Maxwell). La conductance d’un trou circulaire de diamètre w est donnée par $G_{\text{Maxwell}} = w\sigma_0 \sim \frac{e^2}{h} N_c \frac{\ell_e}{w}$; *cf.* [494] pour une référence récente et une étude de la transition entre G_{Sharvin} et G_{Maxwell} . Il est intéressant de remarquer que le crossover entre ces deux résultats n’est pas sans rappeler celui entre le fil long balistique (conductance G_{Sharvin}) et le fil long diffusif (conductance $G_{\text{Drude}} \sim \frac{e^2}{h} N_c \frac{\ell_e}{L}$ où $L \gg \ell_e$ est la longueur du fil).

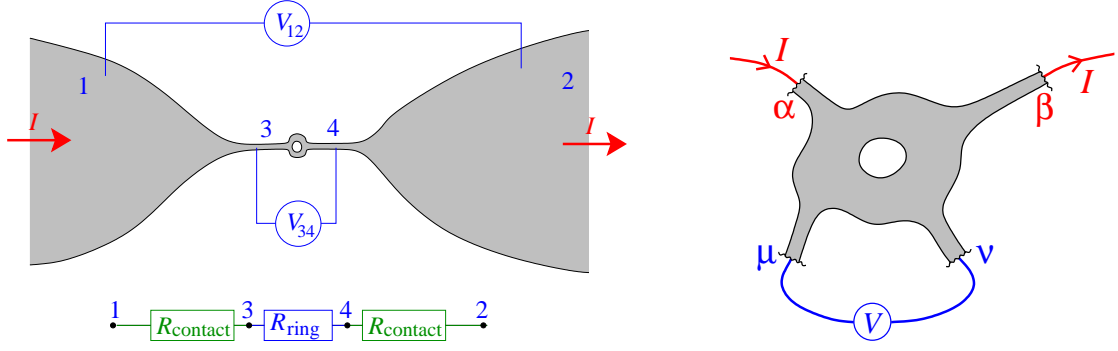


FIGURE 1.3 : Gauche : Une mesure de la chute de tension aux bornes de l’anneau mésoscopique, $\mathcal{R}_{12,34} = (V_3 - V_4)/I(1 \rightarrow 2)$ (résistance 4-fils) ne prend pas en compte les résistances de contact $\mathcal{R}_{\text{contact}} = h/(4N_c e^2)$, comme c’est le cas si les tensions sont mesurées dans les contacts $\mathcal{R}_{12,12} = (V_1 - V_2)/I(1 \rightarrow 2)$ (résistance 2-fils). N_c est le nombre de canaux des fils séparant l’anneau des contacts. Droite : La résistance à 4 terminaux d’un système mésoscopique est définie comme $\mathcal{R}_{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{V_\mu - V_\nu}{I(\alpha \rightarrow \beta)}$.

Résistance à deux/quatre terminaux

Nous avons vu que, d’une part l’hypothèse nontriviale de l’approche de diffusion suppose le système mésoscopique contacté à des contacts adiabatiques macroscopiques. D’autre part le travail de Sharvin montre que ce contact produit une résistance $\mathcal{R}_{\text{contact}} = h/(2_s \times 2e^2)$ par contact et par canal (les canaux étant en parallèle, les résistances se combinent de manière idoine). L’existence de la résistance de contact est fortement liée au vif débat des années 80 sur la formule de Landauer, que je résume plus bas, ayant pour objet de savoir si la “bonne” formule était $\mathcal{R} = \frac{h}{2_s e^2} \frac{1}{T}$, saturant à $h/2_s e^2$ pour le conducteur parfait ($T = 1$), ou $\mathcal{R} = \frac{h}{2_s e^2} \frac{R}{T}$ qui s’annule pour le conducteur parfait. Cette discussion est clarifiée par l’introduction de la notion de résistance à 4 terminaux par Büttiker en 1986 [117]. Il distingue des “contacts sources de courant” des “contacts prises de tension” et obtient une formule pour la résistance $\mathcal{R}_{\alpha\beta,\mu\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{V_\mu - V_\nu}{I(\alpha \rightarrow \beta)}$ mesurant la chute de potentiel entre les contacts μ et ν alors que le courant est injecté au contact α et extrait au contact β . Lorsque le conducteur est cohérent (partie droite de la figure 1.3), il peut être décrit par une matrice de scattering et des coefficients de transmission $T_{\alpha\beta}$; la résistance est alors donnée par [117]

$$\mathcal{R}_{\alpha\beta,\mu\nu} = \frac{h}{2_s e^2} \frac{T_{\mu\alpha} T_{\nu\beta} - T_{\mu\beta} T_{\nu\alpha}}{\mathcal{D}} \quad \text{pour } \alpha, \beta, \mu \text{ \& } \nu \text{ tous différents} \quad (1.18)$$

où \mathcal{D} est un des mineurs de la matrice $N_\alpha \delta_{\alpha\beta} - T_{\alpha\beta}$ (la matrice de conductance adimensionnée). Si le couplage des contacts sonde de tension est suffisamment faible, s’est une manière d’isoler la contribution du système mésoscopique de celle des contacts (figure 1.3). On s’attend alors à ce que $\mathcal{R}_{12,12} = (V_1 - V_2)/I(1 \rightarrow 2) = \frac{h}{2_s e^2} \frac{1}{T}$ et $\mathcal{R}_{12,34} = (V_3 - V_4)/I(1 \rightarrow 2) = \frac{h}{2_s e^2} \frac{R}{T}$. La différence entre les deux résistances correspond bien à la résistance de contact de Sharvin $\mathcal{R}_{12,12} = \frac{h}{2_s e^2} + \frac{h}{2_s e^2} \frac{1-T}{T} = 2\mathcal{R}_{\text{contact}} + \mathcal{R}_{12,34}$. Ces idées clarifient le paradoxe apparent de l’existence d’une résistance finie pour le système de transmission $T = 1$. Une excellente présentation en est donnée par leur promoteur dans la référence [120].

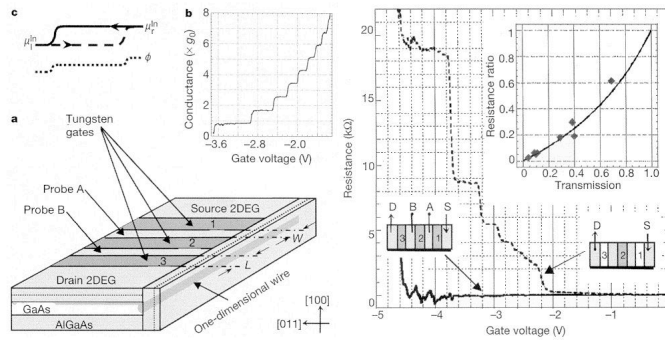


FIGURE 1.4 : À gauche le schéma de l'expérience. Les prises de tension sont repérées par les lettres "A" et "B". L'insert montre les paliers de la conductance. À gauche les résistances 2 fils $\mathcal{R}_{2\text{fils}} = \mathcal{R}_{SD,SD}$ (pointillés) et 4 fils $\mathcal{R}_{4\text{fils}} = \mathcal{R}_{SD,AB}$ (continu) en fonction de la tension de grille. Cette dernière reste nulle alors que les premiers paliers de conductance apparaissent sur la résistance 2 fils. Tiré de : de Picciotto et al [184].

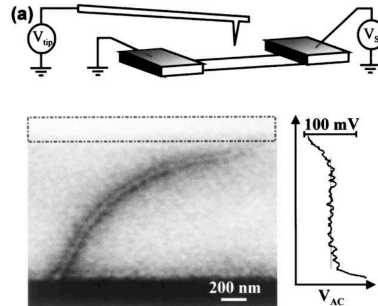


FIG. 3. An ac-EFM image of the same bundle of SWNTs shown in Fig. 1 before breaking. The bundle is metallic, with a total circuit resistance of 40 kΩ. An ac potential of 100 mV is applied to the lower electrode. The ac-EFM signal is flat along the length of the SWNT bundle. A trace of the potential as a function of a vertical position in the image is also shown.

FIGURE 1.5 : À droite le potentiel (abscisse) en fonction de la distance (ordonnée) le long du nanotube. La chute de potentiel se produit sur les bords du fil, au niveau des contacts, comme le montre la figure de droite. Tiré de : Bachtold et al [53].

Expériences

Ces idées ont été validées expérimentalement par de Picciotto *et al* dans des fils unidimensionnels réalisés grâce à la technique du Cleaved Edge Overgrowth⁹ [185, 184] (figure 1.4). D'autres expériences réalisées sur des nanotubes de carbone ont permis, par une mesure du potentiel local, de vérifier que la chute du potentiel dans ces systèmes très purs se produit aux deux contacts [53] (figure 1.5).

Sur le transport à deux terminaux, des expériences validant la formule de Landauer-Büttiker-Fisher-Lee $G = \frac{2s e^2}{h} \sum_n T_n$ sont les mesures du "mesoscopic pin code" dans des breakjunctions entre supraconducteurs. Dans ce cas la caractéristique $I(V)$ est fortement non linéaire et dépend non trivialement des probabilités de transmission T_n . Ceci peut être utilisé pour extraire celles-ci, le "mesoscopic pin code" $\{T_n\}$ [570, 569] (figure 1.6).

⁹ La technique CEO consiste à casser une hétérojonction piégeant un 2DEG pour faire croître un autre semiconducteur sur le bord. Les gaps des semiconducteurs sont tels que le potentiel piège les électrons le long d'une ligne en gelant leurs degrés de liberté dans deux directions perpendiculaires.

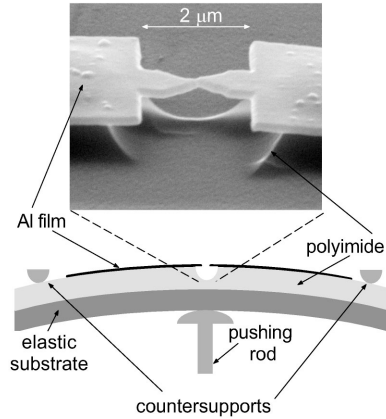


FIG. 2. Three-point bending mechanism. The pushing rod bends the phosphorbronze substrate. The distance between the two countersupports was 12 mm, and the substrate was 0.3 mm thick. The micrograph shows a suspended Al microbridge (sample #2). The insulating polyimide layer was etched to free the bridge from the substrate.

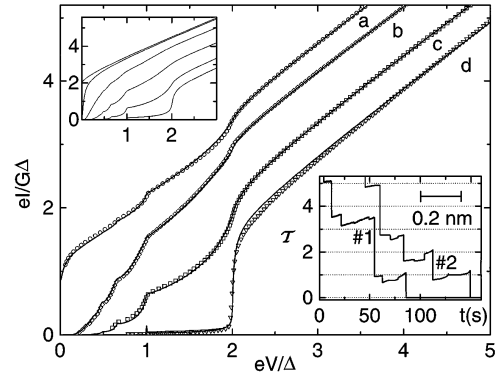


FIG. 1. Measured current-voltage characteristics (symbols) of four different configurations of sample #1 at 30 mK and best numerical fits (lines). The individual channel transmissions and total transmission \mathcal{T} obtained from the fits are (a) $\tau_1 = 0.997$, $\tau_2 = 0.46$, $\tau_3 = 0.29$, $\mathcal{T} = 1.747$; (b) $\tau_1 = 0.74$, $\tau_2 = 0.11$, $\mathcal{T} = 0.85$; (c) $\tau_1 = 0.46$, $\tau_2 = 0.35$, $\tau_3 = 0.07$, $\mathcal{T} = 0.88$; and (d) $\mathcal{T} = \tau_1 = 0.025$. Voltage and current are in reduced units. The measured superconducting gap was $\Delta/e = 182.5 \pm 2.0 \mu\text{V}$. Left inset: Theoretical IVs for a single channel superconducting contact for different values of its transmission coefficient τ (from bottom to top: 0.1, 0.4, 0.7, 0.9, 0.99, 1) after [12]. Right inset: Typical total transmission traces measured at $V \geq 5 \Delta/e$, while opening the contact at around 6 pm/s, for samples #1 and #2. The bar indicates the distance scale.

FIGURE 1.6 : À gauche : *Dispositif expérimental*. À droite : *Caractéristique $I(V)$ dont le fit permet d'extraire les premières probabilités de transmission*. Dans l'insert est représentée la conductance en fonction du temps pendant la rupture de la jonction. Les paliers correspondent à la fermeture des canaux de conduction. Tiré de : Scheer, Joyez, Estève, Urbina & Devoret [570].

Petite histoire de la formule de Landauer

Faisons une petite revue des travaux à l'origine de la formule de Landauer.

- *Préhistoire.* – La préhistoire de la formule de Landauer commence avec l'article de 1957 de Landauer [391] qui montre que la conductivité d'un métal est reliée à la probabilité de réflexion dans la direction θ par une impureté $r_{\text{imp}}(\theta)$: $\sigma \propto \int d\theta \cos \theta \frac{1-r_{\text{imp}}(\theta)}{r_{\text{imp}}(\theta)}$ (un parfum de T/R).¹⁰ On peut également ranger dans la préhistoire l'article de Sharvin de 1965 [596] montrant l'existence de la résistance de contact $G_{\text{Sharvin}} \sim \frac{e^2 n A}{p_F} (\sim N_c \frac{e^2}{h})$.

- *Landauer, 1970.* – L'histoire commence avec l'article de Landauer de 1970 [392], qui introduit l'idée de décrire le transport à travers le système à l'aide d'une probabilité de réflexion R du conducteur, en fonction de laquelle il exprime la résistivité ρ du conducteur de longueur L

$$\frac{1}{\rho} = \frac{e^2 v_F L}{2} \frac{1-R}{R} \frac{1}{\left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)_T} \quad (\text{Landauer, 1970})$$

Comme c'est précisé dans le titre de l'article [392], la formule est valable dans une situation unidimensionnelle. On vérifie que le conductance correspondante est $G = \frac{\text{section}}{\rho L} = \frac{2s e^2 T}{h R}$ (section = 1 en $d = 1$).

- *1980 : Azbel - Anderson et al et l'utilisation pour la théorie d'échelle de la localisation.* – Azbel publie un article en Juillet 1980 [52] dans lequel il rediscute la formule de Landauer, écrite

¹⁰Landauer oppose son résultat au résultat bien connu de l'étude semiclassique donnant $\sigma \propto \int d\theta \cos \theta \frac{1}{r_{\text{imp}}(\theta)}$. Landauer résout le problème d'électrostatique au voisinage de l'impureté et montre qu'il apparaît une densité induite pour assurer l'électronneutralité et corrélativement un dipole (appelé le dipole de Landauer) au niveau de l'impureté.

$G = \frac{e^2}{\pi h} \frac{T}{R}$ pour la première fois, et aborde la question des dimensions supérieures. La même année, la formule de Landauer trouve une application importante et permet de développer la théorie d'échelle de la localisation (octobre 1980) [38] (*cf.* chapitre 6); la distinction entre résistance à deux et quatre terminaux est cruciale dans ce contexte, puisqu'il est en effet important de séparer la contribution « intrinsèque », associée à la région désordonnée, de la contribution des contacts.¹¹

- *Economou & Sokoulis, 1981 et la controverse T ou T/R ?* – 1981 est l'année d'une certaine effervescence autour de la controverse initiée par le travail d'Economou & Sokoulis (mars 1981) [215]. En utilisant la théorie de la réponse linéaire ces auteurs obtiennent deux expressions de la conductance : $G_p = \frac{e^2}{\pi h} T$ lorsque le système est connecté à un “perfect 1D conductor” et $G_c = \frac{e^2}{\pi h} \frac{T}{R}$ lorsqu'il est contacté à des “current sources”.

Quelques mois plus tard (juin 1981), Fisher & Lee publient leur célèbre article [250] étudiant un fil à N_c canaux de conduction.¹² En suivant l'approche d'Economou & Sokoulis ils aboutissent à la formule $G = \frac{2s e^2}{h} \text{Tr} \{t^\dagger t\}$ où t est une matrice $N_c \times N_c$ regroupant les amplitudes de transmission des canaux du contact gauche vers les canaux du contact droit. Ils établissent la relation, qui porte leurs noms, entre les éléments de matrice de t et la fonction de Green, que nous rappelons plus loin pour les besoins du texte.

Le mois suivant voit la publication d'un travail d'Engquist & Anderson (juillet 1981) [223] motivé par le fait que “*the exact experimental conditions leading to Fisher & Lee formula [$G = \frac{2s e^2}{h} T$] have remained unclear*”. Ils suggèrent l'idée importante d'introduire des sondes de tension, idée qui sera formalisée efficacement par Büttiker en 1986.

On peut également mentionner un autre travail la même année de Langreth & Abrahams (septembre 1981) [394] qui reprennent la démonstration en partant également de Kubo. Ce même mois de septembre, le débat prend une tournure plus vive avec la virulente attaque de Thouless [650] des travaux d'Economou & Sokoulis et Fisher & Lee. Sous un titre provocateur “*Why Landauer's formula for resistance is right*” il commence son article : “*It is the purpose of this note to point out what these authors have done wrong, and show how a careful use of Kubo formula leads to the Landauer result*”. Comment aussitôt suivi d'un Reply [214].¹³

Rolf Landauer semble avoir joué un rôle stimulant en coulisse puisqu'il est remercié dans la plupart de ces travaux (dans les références [215, 250, 394, 650]).

- *1985 : l'argument autocohérent à la Landauer.* – Un travail important est celui de Büttiker, Imry, Landauer & Pinhas [132] où un argument autocohérent incluant l'écrantage est développé pour expliquer la différence entre potentiel de part et d'autre du système mésoscopique et dans les réservoirs. Le cas multicanal est également discuté.

- *La fin de l'histoire ? - Les résistances à 4 terminaux de Büttiker, 1986.* – C'est finalement

¹¹ Le point de départ de [38] est de chercher la loi de composition pour la résistance à quatre terminaux $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R}{T} = \frac{1}{T} - 1$ pour deux conducteurs 1 et 2 en série. $T = \frac{T_1 T_2}{1 + R_1 R_2 - 2\sqrt{R_1 R_2} \cos \theta}$ où θ est une phase associée aux coefficients de réflexion. La résistance à quatre terminaux moyennée sur la phase est $\bar{\rho}^\theta = \overline{1/T}^\theta - 1 = \rho_1 + \rho_2 + 2\rho_1 \rho_2$. (on verra au chapitre 6 que cette moyenne a du sens dans une limite énergie \gg désordre). On en déduit que l'évolution de la résistance de la région désordonnée de taille L obéit à $\frac{d\rho(L)}{dL} \approx \frac{1}{L_0} (1 + 2\rho(L))$ où L_0 est une échelle “microscopique”, définie par $\rho(\delta L \rightarrow 0) = \delta L/L_0$. Finalement on obtient $\rho(L) \approx \frac{1}{2} [e^{2L/L_0} - 1]$ (*cf.* page 184).

Pour obtenir le comportement exponentiel de la résistance, caractéristique de la phase localisée, il est crucial de considérer la loi de composition pour des conducteurs *cohérents* donnée ci-dessus, la moyenne sur la phase s'interprétant comme une moyenne sur une variable rapide (chapitre 6). En revanche le calcul de la conductance deux terminaux moyenne $\bar{T}^\theta = \frac{T_1 T_2}{1 - R_1 R_2}$ conduit à la loi de composition $\bar{\rho} \stackrel{\text{def}}{=} 1/\bar{T}^\theta - 1 = \rho_1 + \rho_2$ décrivant des conducteurs *incohérents* et conduit à la loi d'Ohm $\tilde{\rho}(L) = L/L_0$ (*cf.* discussion de la Réf. [79]).

¹² “*The argument given by Landauer is a heuristic one and not easily generalized to higher dimensions*” [250].

¹³ L'histoire n'a pas donné raison à Thouless : Economou, Sokoulis, Fisher & Lee n'avaient ni raison ni tort. Il existe deux formules décrivant deux situations physiques différentes.

Büttiker qui développe en 1986 [117] le formalisme approprié pour comprendre la distinction entre les deux résultats d'Economou & Sokoulis. Il montre comment construire les résistances à 4 terminaux en fonction de la matrice de scattering. On pourra se reporter à l'excellent article de revue de 1988 [120] dans lequel la formule est appliquée pour retrouver les deux conductances $G = \frac{2s e^2}{h} T$ (mesure à 2 fils) et $G = \frac{2s e^2}{h} \frac{T}{R}$ (mesure à 4 fils, avec deux fils de prises de tension très faiblement couplés au système).

Kubo (local) versus Landauer (non local)

La relation entre l'approche de scattering, par essence non locale puisqu'elle implique des propriétés globales du système mésoscopique, et l'approche de Kubo, plus souvent présentée à travers le calcul d'une conductivité locale, a été établie précisément par Fisher & Lee [250] pour une géométrie simple (guide d'onde à plusieurs canaux) puis pour des géométries arbitraires (multiterminal) par Baranger, Stone & Szafer [617, 56] en présence de champ magnétique. Nous reviendrons précisément sur cette relation plus loin puisqu'elle nous servira de point de départ pour l'analyse du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques.

1.2.3 Le bruit du courant : Johnson-Nyquist versus Shottky

Au delà des mesures des coefficients de transport (les conductances) qui restent essentiellement liées à des processus de transition à une particule,¹⁴ les mesures de fluctuations/corrélations des courants (le bruit) apportent des informations supplémentaires liées aux corrélations entre particules [390]. À cause de la contrainte du théorème fluctuation-dissipation, les effets à deux particules ne se manifestent sur le spectre de bruit à $\omega = 0$ que dans le régime hors de l'équilibre du bruit de grenaille. On peut alors mettre en évidence des propriétés importantes des porteurs de charge, comme la charge des porteurs¹⁵ où la nature bosonique/fermionique [123] : les corrélations quantiques entre photons ont été mises en évidence dans le célèbre article de Hanbury Brown & Twiss (HBT) [313] par une mesure de corrélations croisées positives ; l'observation de corrélations négatives pour des électrons dans des dispositifs de matière condensée a été rapportée dans les travaux de Oliver *et al* [503] puis de Henny *et al* [324] (équipe de Schönberger). Dans les années 90 une très grande quantité de travaux théoriques et expérimentaux se sont concentrés sur le bruit des conducteurs mésoscopiques (voir la revue de Blanter & Büttiker [710]).

La formule de Landauer-Büttiker utilise l'information sur la diffusion par le conducteur pour calculer un courant moyen. On peut suivre la même idée afin de caractériser les fluctuations du courant. L'intérêt pour le bruit de grenaille dans un conducteur mésoscopique remonte aux travaux [365, 407, 122]. Pour cela nous allons considérer le spectre de bruit du courant donné par la transformée de Fourier de la fonction de corrélation¹⁶ :

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \hat{I}_{\alpha}(t) \hat{I}_{\beta}(0) \rangle_c e^{i\omega t} \quad (1.19)$$

où $\hat{I}_{\alpha}(t)$ est l'opérateur de courant dans le contact α . La moyenne $\langle \dots \rangle$ est statistique et quantique. Une première remarque : tout d'abord rien n'interdit de s'intéresser également aux cumulants d'ordre plus élevés ; c'est l'objet de ce qu'on appelle la "full counting statistics" dont l'étude

¹⁴ il faut nuancer : il existe des manifestations spectaculaires de l'interaction entre électrons directement au niveau de la conductance. On peut bien sûr penser au phénomène de blocage de Coulomb ou au transport dans les systèmes hybrides, normal/supra. L'assertion est vraie pour des bons métaux bien contactés.

¹⁵ Pour les électrons [578] dans une lampe à vide, pour des paires de Cooper [348, 347] ou même pour des excitations de charge fractionnaire de l'effet Hall quantique fractionnaire de charge $e/3$ [555] ou $e/5$ [541].

¹⁶ $\langle AB \rangle_c \stackrel{\text{def}}{=} \langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle$.

initiée par le travail de Levitov, Lee & Lesovik [410] a généré une grande quantité de travaux ces dernières années. Seconde remarque : lorsque le courant est représenté par un opérateur, l'ordre des deux opérateurs importe. Dans les travaux originaux de Büttiker [123], le corrélateur avait été symétrisé ¹⁷ cependant la question de la symétrisation du corrélateur a été examinée en détail plus tard et il a été montré que la question de savoir lequel du corrélateur symétrisé ou non intervient dans une expérience dépend du processus de détection : selon la détection et la chaîne d'amplification (selon qu'on est capable de distinguer l'absorption de l'émission) [276]. Il a en effet été démontré expérimentalement qu'il est possible de résoudre le spectre en fréquences ¹⁸ et de distinguer l'émission ($\omega > 0$) de l'absorption ($\omega < 0$) : cf. expérience de Richard Deblock menée pendant son séjour chez Kouwenhoven [187]. Cette remarque ne jouera pas de rôle ici car nous nous limiterons à une discussion du bruit à fréquence nulle.

Une façon efficace pour calculer le spectre de bruit est d'utiliser le formalisme de "seconde quantification" ¹⁹ : on introduit l'opérateur de champ

$$\hat{\psi}(x, t) = \sum_{\beta} \int dE \psi_E^{(\beta)}(x) \hat{a}_{\beta}(E) e^{-iEt} . \quad (1.20)$$

L'hypothèse sur l'occupation des états prend ici la forme $\langle \hat{a}_{\alpha}^{\dagger}(E) \hat{a}_{\beta}(E') \rangle = f_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \delta(E - E')$ où f_{α} est la distribution de Fermi du contact ²⁰. On obtient alors la valeur du corrélateur à fréquence nulle [122, 123]

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\omega = 0) = \frac{2s_e e^2}{h} \int dE \sum_{\gamma, \lambda} \mathcal{I}_{\gamma\lambda}^{\alpha} \mathcal{I}_{\lambda\gamma}^{\beta} f_{\gamma}(1 - f_{\lambda}) \quad (1.21)$$

où le facteur 2_s vient de la dégénérescence de spin et

$$\mathcal{I}_{\gamma\lambda}^{\alpha}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\alpha\lambda} - \mathcal{S}_{\alpha\gamma}^{\dagger}(E) \mathcal{S}_{\alpha\lambda}(E) \quad (1.22)$$

est l'élément de matrice de l'opérateur courant I_{α} entre les états stationnaires $\psi_E^{(\gamma)}$ et $\psi_E^{(\lambda)}$.

Pour plusieurs canaux par contact. – Nous avons donné l'expression du bruit de grenaille dans le cas d'un canal par contact. La formule dans le cas général est facile à obtenir en utilisant l'analogie entre canaux et contacts (on peut traiter les différents canaux d'un contact comme différents contacts au même potentiel). On aura alors une trace supplémentaire $\sum_{\gamma, \lambda} \text{Tr}\{\mathcal{I}_{\gamma\lambda}^{\alpha} \mathcal{I}_{\lambda\gamma}^{\beta}\} f_{\gamma}(1 - f_{\lambda})$ portant sur les canaux de conduction ($\mathcal{I}_{\gamma\lambda}^{\alpha}$ est alors une matrice $N_{\gamma} \times N_{\lambda}$). Remarquons que le courant moyen (1.10) met en jeu $\text{Tr}\{\mathcal{I}_{\beta\beta}^{\alpha}\}$, cf. Eq. (1.63) plus bas.

¹⁷ Le corrélateur considéré par Büttiker dans [123] est la TF de $\langle \hat{I}_{\alpha}(t) \hat{I}_{\beta}(0) \rangle_c \rightarrow \langle [\hat{I}_{\alpha}(t) \hat{I}_{\beta}(0) + \hat{I}_{\beta}(0) \hat{I}_{\alpha}(t)] \rangle_c$. Le bruit à fréquence nulle est doublé par rapport à notre définition, ce qui correspondrait classiquement à sommer les contributions des fréquences positives et négatives.

¹⁸ L'étude du spectre de bruit $\mathcal{S}(\omega)$ de courant à travers un conducteur a une histoire intéressante : c'est en 1951 que Callen & Welton [141] ont proposé la généralisation quantique du théorème de Nyquist : $\langle |V_{\omega}|^2 \rangle = \text{Re } Z(\omega) \hbar\omega \coth \frac{\hbar\omega}{2k_B T}$ où $Z(\omega)$ est l'impédance du conducteur. Contrairement à ce qui avait été conjecturé par Nyquist [499] la température dans $\langle |V_{\omega}|^2 \rangle = 2 \text{Re } Z(\omega) k_B T$ n'est pas simplement remplacé par l'énergie pondérée par le facteur de Bose-Einstein $\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}$, mais il y a également une contribution de l'énergie du vide, responsable d'un comportement linéaire $\langle |V_{\omega}|^2 \rangle \simeq \text{Re } Z(\omega) |\omega|$ du spectre de bruit à haute fréquence (coupé par l'impédance en pratique). Ce comportement traduit le fait que le bruit provient des processus d'émission (limités par l'énergie disponible) mais aussi des processus d'absorption. Ce comportement a été observé expérimentalement dans [370] (le principe de l'expérience avait été proposé par les mêmes auteurs dans [369]). On pourra se reporter au livre de Gardiner & Zoller [756]. On a assisté à un rafraîchissement de ces idées récemment dans le contexte de l'étude des Qubits, en particulier pour la compréhension fine du processus de mesure, du rôle de l'amplificateur et du bruit sur la décohérence. On peut aussi mentionner l'idée intéressante d'utiliser un système à deux niveaux pour résoudre le spectre de bruit [573].

¹⁹ Une alternative utilisant un langage de paquets d'onde a été développée par T. Martin & R. Landauer [442].

²⁰ La moyenne de opérateurs est $\langle a_1^{\dagger} a_2 a_3^{\dagger} a_4 \rangle = \langle a_1^{\dagger} a_2 \rangle \langle a_3^{\dagger} a_4 \rangle + f_1(1 - f_3) \delta_{14} \delta_{23}$, où chaque numéro indique un couple d'indices de contact/canal et d'énergie.

Bruit thermique (Johnson-Nyquist)

Dans la limite où la température est beaucoup plus grande que les différences de potentiels, on vérifie que le corrélateur est proportionnel à la conductance

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\omega = 0) = 2k_B T G_{\alpha\beta} \quad \text{pour } V_\alpha = 0 \quad (1.23)$$

Puisqu'on décrit là une situation d'équilibre, nous avons retrouvé le résultat du théorème fluctuation-dissipation s'appliquant au cas où les fluctuations thermiques (bruit de Johnson-Nyquist) dominant. L'étude du bruit à l'équilibre n'apporte pas plus d'information que celle des propriétés de transport, cependant sa mesure n'est pas sans intérêt et est utilisée comme moyen de calibration des expériences de mesure de bruit.

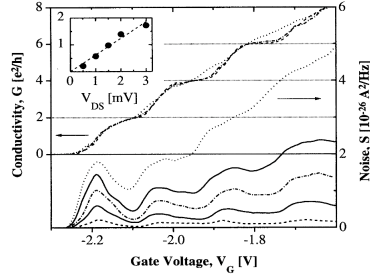


FIG. 2. Noise spectral density $S(\nu)$ and normalized linear conductance G vs gate voltage V_G . The noise is measured for $V_{DS} = 0.5, 1, 1.5, 2,$ and 3 mV. Inset: Dependence of the first peak height (same scale as in main figure) on injection voltage V_{DS} . The dashed straight line is the predicted behavior. The conductance is shown for $V_{DS} = 0.5, 1.5,$ and 3 mV.

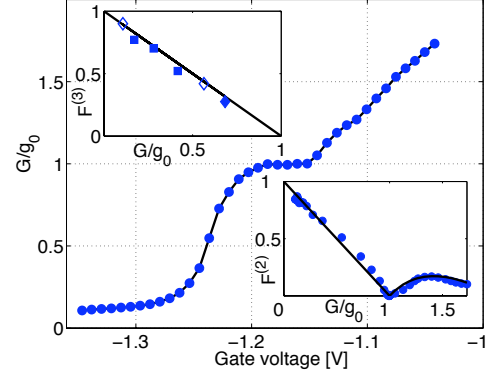


FIGURE 1.7 : À gauche : conductance à travers un QPC en fonction de la tension de grille. Les paliers de conductance à $G = \frac{2s_e^2}{h} N_c$ correspondent à l'ouverture progressive des canaux. Corrélativement on observe une réduction du bruit de grenaille coïncidant avec les "plateaux" de conductance; tiré de : Reznikov et al [542]. À droite : Facteur de Fano en fonction de la conductance dans l'encadré en bas à droite. La courbe théorique (ligne continue) est donnée par l'éq. (1.26) : $F = 1 - T_1$ pour $G < \frac{2s_e^2}{h}$ et $F = \frac{T_2(1-T_2)}{1+T_2}$ pour $\frac{2s_e^2}{h} < G < \frac{2 \times 2s_e^2}{h}$. Tiré de : Gershon et al [281].

Bruit de grenaille (Shottky)

Dans la limite inverse où la température est faible devant le biais de tension, les fluctuations de courant sont dominées par la nature corpusculaire des porteurs de charge (bruit de Shottky). Dans le cas à deux contacts [407] on trouve

$$\mathcal{S}_{LL}(\omega = 0) = \frac{2s_e^2}{h} |eV| \text{Tr} \left\{ t^\dagger t (1 - t^\dagger t) \right\} = \frac{2s_e^2}{h} |eV| \sum_{n=1}^{N_c} T_n (1 - T_n) \quad \text{pour } T = 0 \quad (1.24)$$

où les T_n sont les transmissions des modes propres de transmissions (les N_c valeurs propres de $t^\dagger t$ où $t \equiv \mathcal{S}_{RL}$). La quantité $P \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=1}^{N_c} T_n (1 - T_n)$, appelée "noise power" est parfois introduite. La limite où les probabilités de transmission sont très faibles correspond à la limite du bruit dit "poissonien" où les électrons passent rarement et peuvent être considérés comme indépendants : les corrélations quantiques dues à la statistique de Fermi sont négligeables et l'on retrouve le bruit de Shottky proportionnel au courant ²¹

$$\mathcal{S}_{\text{Poisson}} = |e \langle I \rangle|. \quad (1.25)$$

²¹ Le bruit de Poisson correspond au bruit de charges arrivant de façon décorrélée (dans l'expérience originelle il s'agit du bruit à travers une lampe à vide). Bien qu'il révèle la nature corpusculaire des porteurs de charge le bruit poissonien n'est pas sensible à la statistique fermionique, c'est un résultat classique.

La mesure indépendante du courant et du bruit permet de déduire la charge des porteurs $e = \mathcal{S}_{\text{Poisson}} / \langle I \rangle$, ce qui est utilisé pour mesurer la charge électrique des excitations de l'effet Hall quantique fractionnaire [555, 541]. Dans le régime où les transmissions sont de l'ordre de l'unité on observe une *réduction* du bruit, due à la statistique fermionique, par rapport au bruit poissonnien, ce qui est codé dans le facteur de Fano

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathcal{S}_{LL}(\omega = 0)}{\mathcal{S}_{\text{Poisson}}} = \frac{\sum_n T_n(1 - T_n)}{\sum_n T_n} \quad (1.26)$$

À la limite où les transmissions sont égales à l'unité on obtient une suppression totale du bruit ²² traduisant un flot d'électrons rendu régulier par la statistique fermionique (des paquets d'onde séparés temporellement de $\delta t = h/|eV|$). Le produit $T_n(1 - T_n)$ est caractéristique du "bruit de partition" induit par la diffusion stochastique des charges au niveau du conducteur. Le comportement (1.26) a été vérifié expérimentalement dans des mesures réalisées sur une constriction (QPC) ²³ par deux équipes, celle de Heiblum, Reznikov *et al* au Weizmann institute [542] et celle de Glattli au CEA à Scalay [384] : les canaux de conduction à travers le QPC sont ouverts les uns à la suite des autres en élargissant la constriction à l'aide d'une tension de grille. D'après (1.24,1.26) seul le dernier mode contribue au bruit, alors que tous les modes contribuent à la conductance, ce qui est illustré sur la figure 1.7.

La transition entre les régimes de bruit thermique et de bruit de grenaille se produit pour $eV \sim k_B T$ (la transition est décrite avec précision dans plusieurs articles ; on pourra se reporter à la revue de Blanter & Büttiker [710] sur le bruit de courant dans les conducteurs mésoscopiques).

Faisons quelques remarques pour clore ce paragraphe.

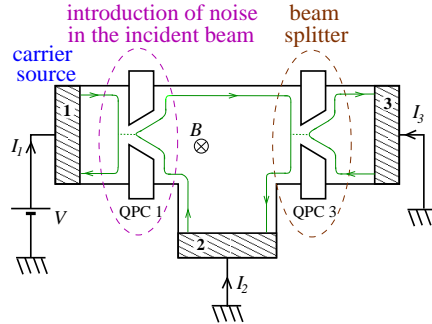


FIGURE 1.8 : Intérêt du dispositif expérimental utilisé dans [501].

Signe des corrélations croisées du bruit de grenaille en présence de diffusion élastique

Rappelons une propriété importante des corrélations croisées (1.21) (pour $\alpha \neq \beta$) dans un système complètement **cohérent**. Considérons un faisceau de particules séparé en plusieurs faisceaux par un diffuseur (le conducteur distribuant le courant incident dans les différents contacts). Les corrélations quantiques liées à l'indiscernabilité des particules affectent le signe des corrélations croisées : pour des bosons les corrélations sont positives $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\omega = 0) > 0$ (bunching) alors que pour des fermions elles sont négatives $\mathcal{S}_{\alpha\beta}(\omega = 0) < 0$ (antibunching) [123] (pour des particules classiques les corrélations croisées sont nulles : les particules détectées dans différents contacts sont indépendantes). Nous touchons ici une différence importante entre le transport et le bruit qui mettent respectivement en jeu des processus à une et deux particules.

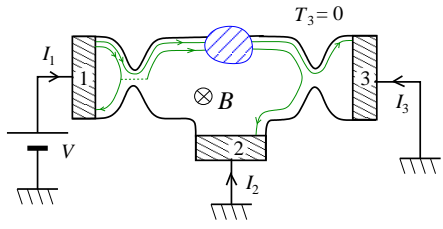
²² "le silence de la mer de Fermi", pour reprendre la jolie expression de Christian Glattli (Aussois, 2004).

²³ cf. annexe p. 46.

...et en présence de diffusion inélastique

[633] Christophe Texier & Markus Büttiker, *Effect of incoherent scattering on shot noise correlations in the quantum Hall regime*, Phys. Rev. B **62**(11), 7454–7458 (2000).— Pour terminer, notons que la relation entre la statistique quantique et le signe des corrélations croisées repose fortement sur la nature du scattering responsable de la séparation du faisceau : elle n’est valable que lorsque la diffusion est *élastique*. Lorsque tel n’est pas le cas il est possible d’observer un changement de signe des corrélations ainsi que nous l’avons prédit dans [633] en considérant une structure dans le régime de l’effet Hall quantique.²⁴

Discutons plus en détail cette idée. Des mesures de transport dans des barres de Hall par Alphenaar *et al* [14] et Komiyama *et al* [371] avaient démontré l’existence d’une redistribution de charge significative entre états de bord sur des distances de l’ordre de 100 μm . Une question qui était apparue intéressante est d’analyser l’effet d’une telle redistribution sur les corrélations de bruit. Pour cela un dispositif expérimental approprié est celui utilisé dans l’expérience de type HBT par Oberholzer *et al* [501], dont l’intérêt est illustré sur la figure 1.8. Nous avons étudié les corrélations de bruit dans cette situation lorsque plusieurs états de bord transportent le courant (figure voisinant la table 1.2). Selon la nature du mécanisme qui assure la redistribution (élastique ou inélastique²⁵) le signe des corrélations croisées, $S_{23}(\omega = 0)$ peut changer de signe.



	S_{23}	S_{22}	S_{33}
no scattering	0	$2R_1T_1$	0
coherent (with $\varepsilon = 1/2$)	$-\frac{R_1^2}{2}$	$\frac{1+T_1}{2}R_1$	$\frac{1+T_1}{2}R_1$
quasi-elastic	$-\frac{R_1^2}{2}$	$\frac{1+3T_1}{2}\frac{R_1}{2}$	$\frac{1+3T_1}{2}\frac{R_1}{2}$
inelastic	$+\frac{R_1T_1}{2}$	$\frac{R_1T_1}{2}$	$\frac{R_1T_1}{2}$

TABLE 1.2 : Dispositif expérimental discuté dans l’article [633] : effet de la diffusion inter-canaux sur les corrélations croisées et leur possible changement de signe. Dans le cas cohérent, ε désigne la probabilité de transmission d’un canal à l’autre.

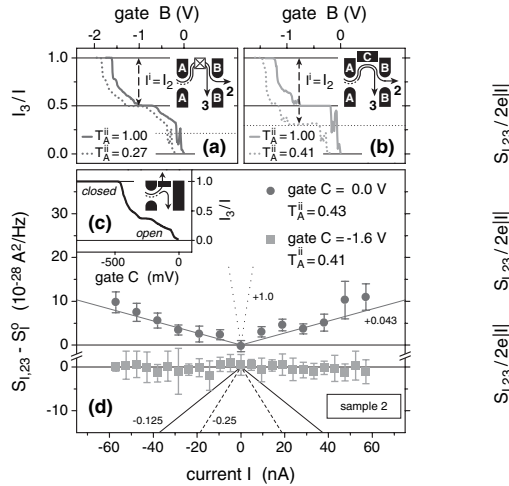


FIGURE 1.9 : Corrélation croisées positives. Tiré de Oberholzer *et al* [500]

²⁴ Mentionnons le travail récent de Rychkov & Büttiker qui [552] qui reexaminent l’idée pour considérer des situations plus générales

²⁵ Dans [633] la redistribution causée par une diffusion inélastique est décrite par le modèle de Büttiker des “voltage probe” [118].

L'effet que nous avons prédit dans [633] a été vérifié expérimentalement récemment [500] (figure 1.9).

Pour finir, mentionnons que le changement de signe des corrélations peut également être induit par des corrélations supraconductrices [655, 557] ou des effets dynamiques [441] (ces différents effets sont discutés dans la revue de Büttiker [128]).

Effet AB à deux particules

Le bruit de grenaille décrit bien de la physique à *deux particules* : cette remarque est au cœur de la discussion de la Réf. [559] dans laquelle est analysé un effet Aharonov-Bohm à deux particules : il y est proposé un interféromètre tel qu'aucun chemin de diffusion ne tourne autour de la région centrale traversée par un flux magnétique, comme la figure 1.10.b l'illustre : L'encerclement du flux ne peut être réalisé que par une paire de particules empruntant deux chemins de diffusion distincts. Dans cette situation les conductances sont indépendantes du flux magnétique et l'effet Aharonov-Bohm ne se manifeste que sur certaines corrélations croisées (du bruit de grenaille). La réalisation pratique de l'interféromètre met en jeu les états de bord d'un conducteur à 8 contacts dans le régime de l'effet Hall quantique entier, une prouesse technologique réalisée récemment dans l'équipe de Heiblum au Weizmann institute [488] (voir la revue de Samuelsson, Neder & Büttiker [558]). Le dispositif est représenté sur la figure 1.10.

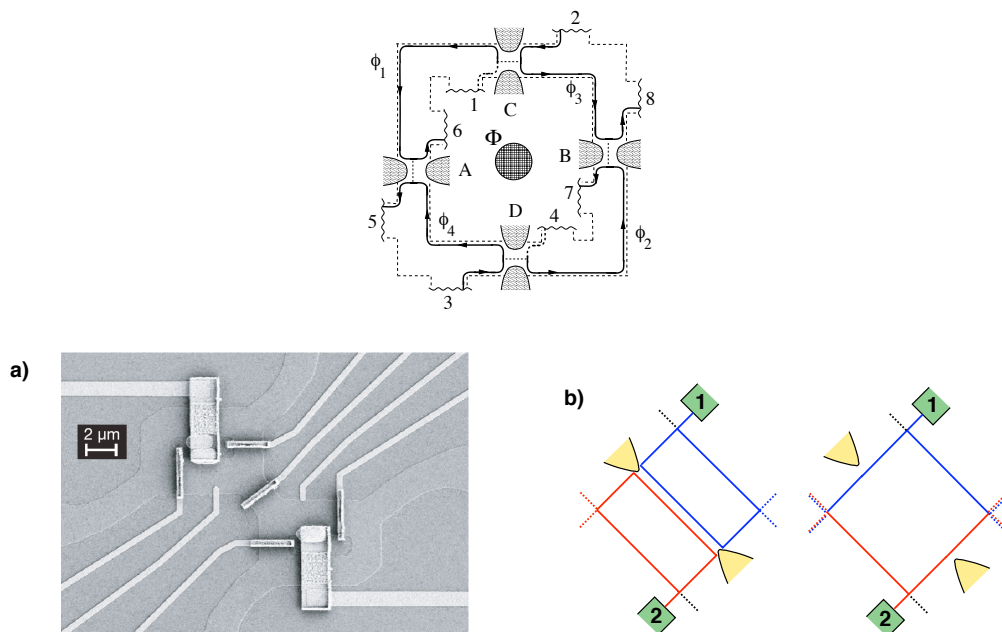


FIGURE 1.10 : Schéma de l'interféromètre à deux particules proposé par Samuelsson & Büttiker. Réalisation expérimentale et principe du dispositif : à gauche en mode “deux interféromètres MZ à une particule découplés” et à droite en mode “un MZ à deux particules”. Figures tirées des articles Samuelsson et al [559] et Neder et al [488].

Statistique de la charge (Full counting statistics)

Pour clore ces remarques sur les fluctuations du courant, notons qu'il est possible de caractériser les moments supérieurs à deux du courant : c'est l'objet de la théorie de la “full counting statistics” qui a suscité un grand intérêt à partir de la fin des années 90, suite au résultat remarquable de Lee, Levitov, Yakovets et Lesovik. Ceux-ci ont montré qu'il est possible d'obtenir une formule analogue aux formules (1.13) et (1.24), exprimant respectivement le courant moyen

et ses fluctuations en fonction du spectre des transmissions $\{T_n\}$, pour la fonction génératrice de la charge Q transférée pendant un temps Δt à travers le conducteur mésoscopique. Nous introduisons la fonction caractéristique des moments de Q :

$$\chi(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{i\phi Q} \rangle \quad (1.27)$$

où $\langle \dots \rangle$ est la moyenne statistique et quantique (sur Q). Levitov *et al* ont montré que son logarithme, i.e. la fonction génératrice des *cumulants* $\langle Q^N \rangle_c$ de la charge Q , est [401, 410] (ici à température nulle) :

$$\ln \chi(\phi) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(i\phi)^N}{N!} \langle Q^N \rangle_c = \frac{2s e}{h} V \Delta t \sum_n \ln [1 + T_n (e^{i\phi} - 1)] . \quad (1.28)$$

On vérifie facilement qu'on retrouve (1.13) et (1.24) : $\frac{\langle Q \rangle}{\Delta t} = \frac{2s e^2}{h} V \sum_n T_n$ et $\frac{\langle Q^2 \rangle_c}{\Delta t} = \frac{2s e^3}{h} V \sum_n T_n (1 - T_n)$. On peut également obtenir le cumuland d'ordre 3 :

$$\frac{\langle Q^3 \rangle_c}{\Delta t} = \frac{2s e^4}{h} V \sum_n T_n (1 - T_n) (1 - 2T_n) . \quad (1.29)$$

1.2.4 Relation entre spectre (DoS) et matrice \mathcal{S} , injectivités et émissivités

Jusqu'à présent la matrice \mathcal{S} a été utilisée afin d'analyser des propriétés "globales" du système : le courant ou ses fluctuations. Une remarque qui a permis de pousser plus avant l'utilisation de l'approche de scattering est qu'il est possible de relier également des propriétés locales du système à la matrice \mathcal{S} . La plus connue de telles relations est la règle de somme de Krein-Friedel qui relie la matrice \mathcal{S} caractérisant les propriétés de diffusion (propriété d'un système "ouvert"), à la densité d'états dans la région d'interaction (plutôt une propriété d'un système "fermé") [259, 383, 260, 180].

Relation de Krein-Friedel

Bien que la présentation des articles originels ait été donnée dans l'espace 3D pour une diffusion isotrope, considérons la situation 1D plus simple (je reprends l'annexe de mon article [629]).²⁶ On trouve deux versions de la règle de somme de Friedel qui dépendent de la définition choisie pour la matrice \mathcal{S} .

Version 1 : formule de Krein.— Nous supposons que le potentiel s'annule à l'infini $V(x \rightarrow \pm\infty) = 0$. Nous définissons l'état stationnaire de diffusion gauche comme $\varphi^{(L)}(x \rightarrow -\infty) \propto e^{ikx} + \tilde{r} e^{-ikx}$ et $\varphi^{(L)}(x \rightarrow +\infty) \propto \tilde{t} e^{ikx}$. De même l'état droit met en jeu deux amplitudes de probabilité \tilde{r}' et \tilde{t}' . Les quatre amplitudes sont regroupées dans la matrice $\tilde{\mathcal{S}}$ et ne diffèrent de celles entrant dans (1.4) que par des phases. En effet, la nouvelle définition de l'état stationnaire diffère de (1.2,1.3) par une phase $\varphi^{(L)}(x) = e^{ikx_L} \psi_E^{(L)}(x)$, d'où

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} e^{ikx_L} & 0 \\ 0 & e^{-ikx_R} \end{pmatrix} \mathcal{S} \begin{pmatrix} e^{ikx_L} & 0 \\ 0 & e^{-ikx_R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r e^{2ikx_L} & t' e^{ik(x_L - x_R)} \\ t e^{ik(x_L - x_R)} & r' e^{-2ikx_R} \end{pmatrix} . \quad (1.30)$$

La relation de Krein [383] relie la matrice \mathcal{S} à la variation de la densité d'états *totale* due à l'introduction du potentiel de diffusion [629, 775] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx [\rho(x; E) - \rho_0(x; E)] = \frac{1}{2i\pi} \text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{S}}^\dagger \frac{d\tilde{\mathcal{S}}}{dE} \right\} = \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dE} \ln \det \tilde{\mathcal{S}} \quad (1.31)$$

²⁶ La règle de Friedel a également été démontrée dans une géométrie quasi-unidimensionnelle (un guide d'onde) [609].

où $\rho(x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x | \delta(E - H) | x \rangle$ est la densité d'états locale (LDoS). $\rho_0(x; E)$ est la LDoS en l'absence de $V(x)$. Une généralisation de cette relation au cas quasi 1D à plusieurs canaux est obtenue dans [609]. Dans sa version 3D où les différents canaux correspondent aux ondes sphériques, la relation est une variante de la relation ancienne, obtenue par Beth & Uhlenbeck [81], exprimant le second coefficient du viriel d'un gaz de particules en interaction (le §77 de [766] donne une discussion détaillée). Les deux relations sont reliées par une transformée de Laplace.

Version 2 : relation de Friedel-Smith.— Nous faisons une hypothèse plus forte sur le potentiel et supposons que celui-ci s'annule (ou reste constant) hors d'un intervalle $[x_L, x_R]$. Les amplitudes de probabilité de réflexion et de transmission sont définies par (1.2,1.3). Les deux couples d'amplitudes ne diffèrent que par des phases. La seconde version de la relation de Krein-Friedel, que j'ai dénommée "relation de Friedel-Smith" en référence aux articles [259, 260, 606] dans lesquelles elle est obtenue dans la situation 3D, considère la DoS de la région où a lieu la diffusion :

$$\int_{x_L}^{x_R} dx \rho(x; E) = \int_{x_L}^{x_R} dx \left(|\psi_E^{(L)}(x)|^2 + |\psi_E^{(R)}(x)|^2 \right) \quad (1.32)$$

$$(1.33)$$

d'où [629]

$$\int_{x_L}^{x_R} dx \rho(x; E) = \frac{1}{2i\pi} \left(\text{Tr} \left\{ \mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{dE} \right\} + \frac{1}{4E} \text{Tr} \left\{ \mathcal{S} - \mathcal{S}^\dagger \right\} \right). \quad (1.34)$$

La relation (1.31) peut également être exprimée en terme de la matrice \mathcal{S} : si l'on utilise (1.30), on obtient $\text{Tr} \left\{ \tilde{\mathcal{S}}^\dagger \frac{d\tilde{\mathcal{S}}}{dE} \right\} = \text{Tr} \left\{ \mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{dE} \right\} - \frac{i(x_R - x_L)}{\sqrt{E}}$. La matrice $\mathcal{Q} = -i\mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{dE}$ est la matrice des *temps de Wigner* que nous rencontrerons ailleurs.²⁷

L'intérêt des relations discutées précédemment est de fournir une relation entre la DoS dans la région de diffusion, *i.e.* la densité électronique dans le système mésoscopique, et la matrice \mathcal{S} , l'objet au centre de l'approche de scattering. Toutefois il manque encore un pas pour les utiliser dans la situation hors équilibre : identifier les contributions des états stationnaires issus des différents contacts. À cette fin Büttiker a défini différents outils [137, 275] que nous introduisons dans la situation simplifiée où les fils de contact sont 1D ce qui allégera les notations. Tout d'abord nous rappelons le lien entre fonction de Green et matrice \mathcal{S} qui nous donnera un moyen de manipuler les concepts büttikiériens.

Relation de Fisher et Lee : matrice \mathcal{S} et fonction de Green

L'état stationnaire de diffusion est solution de $(E - H)\psi_E = 0$ et la fonction de Green de $(E - H)G_E = \delta$. Dans cette dernière équation le δ joue le rôle d'un terme de source et la fonction de Green retardée $G_E^R(x, x')$ se comporte asymptotiquement comme une onde sortante. En exploitant cette remarque nous pouvons exprimer la fonction de Green lorsque les deux coordonnées sont sur le fil α comme $G_E^R(x, x') = -i\sqrt{\frac{2\pi}{v_\alpha}} e^{ik_\alpha x} \psi_E^{(\alpha)}(x_<)$, où $x_>$ et $x_<$ désignent respectivement $\max(x, x')$ et $\min(x, x')$. Par continuité on peut donc écrire que pour x n'importe où dans le conducteur

$$G_E^R(x, x' \in \text{fil } \alpha) = -i\sqrt{\frac{2\pi}{v_\alpha}} e^{ik_\alpha x'} \psi_E^{(\alpha)}(x) \quad (\text{si } x \in \text{fil } \alpha \Rightarrow x < x') \quad (1.35)$$

²⁷ L'étude de la distribution du temps de Wigner a suscité un grand intérêt dans le contexte des systèmes chaotiques et la théorie des matrices aléatoires : on pourra se reporter aux travaux de Gopar, Mello & Büttiker [292], de Fyodorov & Sommers [270] et de Savin, de Brouwer, Frahm & Beenakker [105, 106] ou plus récemment dans notre travail [640]. L'étude de la diffusion et du temps de Wigner a également été menée pour les systèmes désordonnés (cf. Texier & Comtet [635] ou notre revue [714] reproduite page 101).

avec toutefois la restriction que si x est pris dans le fil α alors il ne peut excéder x' (figure 1.2). Si nous exprimons l'état stationnaire à l'abscisse $x = 0$ du contact β , d'après (1.9) nous obtenons $\psi_E^{(\alpha)}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_\alpha}}(\delta_{\alpha\beta} + \sqrt{\frac{v_\alpha}{v_\beta}} \mathcal{S}_{\beta\alpha})$. Cette relation nous permet de retrouver immédiatement la relation de Fisher & Lee [250] ²⁸

$$\boxed{\mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) = -\delta_{\alpha\beta} + i\sqrt{v_\alpha v_\beta} G_E^R(\alpha, \beta)} \quad (1.36)$$

où l'argument "α" de la fonction de Green correspond à prendre la coordonnée $x = 0$ dans le fil α , *i.e.* au bord de la région de diffusion (cela correspond aux x_L et x_R des équations (1.2,1.3)) (*cf.* figure 1.2).

De l'unitarité $\mathcal{S} \mathcal{S}^\dagger = \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S} = 1$, nous déduisons la relation qui sera utile

$$G^A(\alpha, \beta) - G^R(\alpha, \beta) = i \sum_{\mu} v_{\mu} G^A(\alpha, \mu) G^R(\mu, \beta) = i \sum_{\mu} v_{\mu} G^R(\alpha, \mu) G^A(\mu, \beta) \quad (1.37)$$

où la somme porte sur les différents contacts.

Büttiker a cherché à étendre l'utilisation de la matrice \mathcal{S} pour la faire intervenir dans des quantités locales. Un premier exemple d'une quantité locale est obtenu en considérant la dérivée fonctionnelle des éléments de la matrice \mathcal{S} . Nous relierons cet objet à des quantités physiques intéressantes. D'après la relation de Fisher & Lee nous obtenons facilement ²⁹

$$\boxed{\frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}}{\delta V(x)} = i\sqrt{v_\alpha v_\beta} G^R(\alpha, x) G^R(x, \beta)} \quad (1.38)$$

La relation entre fonction de Green et matrice \mathcal{S} nous permet d'écrire

$$-\frac{1}{2i\pi} \frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}}{\delta V(x)} = \psi_E^{t.r.(\alpha)}(x) \psi_E^{(\beta)}(x) \quad (1.39)$$

où $\psi_E^{t.r.(\alpha)}(x)$ est l'état stationnaire injecté par le contact α de l'hamiltonien décrivant la situation obtenue par renversement du temps ³⁰ (*i.e.* l'inversion du champ magnétique, ce qui transforme la fonction de Green selon $G^R(x, x') \rightarrow G^R(x', x)$); la relation de Fisher & Lee nous permet de retrouver que la transformation correspondante pour la matrice de scattering est la transposition $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}^T(\mathcal{B}) = \mathcal{S}(-\mathcal{B})$.

Contributions à la densité d'états locale

La densité d'états locale partielle. – Une première quantité introduite par Büttiker est [137, 275]

$$\rho(\underline{\alpha}, x, \underline{\beta}; E) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{4i\pi} \left[\mathcal{S}_{\alpha\beta}^* \frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}}{\delta V(x)} - \frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}^*}{\delta V(x)} \mathcal{S}_{\alpha\beta} \right] \quad (1.40)$$

(avec trace sur les canaux s'il y en a plusieurs), qui s'interprète comme la contribution à la densité d'états locale d'un électron injecté par le contact β et émergeant du conducteur par le contact α , ce qui est justifié dans le § suivant.

²⁸ Dans le cas multicanal on a $\mathcal{S}_{\alpha n, \beta m} = -\delta_{\alpha\beta} \delta_{nm} + i\sqrt{v_{\alpha n} v_{\beta m}} G_{nm}^R(x_\alpha, x_\beta)$ où $G_{nm}(x, x') = \int dy dy' \chi_n^*(y) G(x, y; x', y') \chi_m(y')$.

²⁹ Rappelons qu'un moyen pratique de calculer la dérivée fonctionnelle est l'emploi de la définition $\frac{\delta}{\delta f(x_0)} F[f] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} (F[f + \lambda \delta_0] - F[f])$ où $\delta_0(x) \equiv \delta(x - x_0)$. En pratique il suffit donc de calculer perturbativement $F[f + \lambda \delta_0]$ à l'ordre λ . La fonction de Green est modifiée par l'introduction du δ_0 comme $G^\lambda(x, x') = G(x, x') + \lambda \frac{G(x, x_0) G(x_0, x')}{1 - \lambda G(x_0, x_0)}$ ce qui nous donne immédiatement la dérivée fonctionnelle.

³⁰ Ne pas confondre $\psi_E^{t.r.(\alpha)}(x)$ avec l'état obtenu en faisant agir le renversement du temps sur $\psi_E^{(\alpha)}(x)$. Rappelons que l'opération de renversement du temps sur une fonction d'onde $\varphi(x, t)$ est $\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi^*(x, -t)$.

L'injectivité. – Une sommation sur le contact sortant nous donne immédiatement ³¹

$$\rho(x, \underline{\alpha}; E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta} \rho(\underline{\beta}, x, \underline{\alpha}; E) = -\frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} \right)_{\alpha\alpha} \quad (1.41)$$

(en présence de plusieurs canaux on rajoute une trace sur les canaux). La relation avec la fonction de Green permet d'écrire

$$\rho(x, \underline{\alpha}; E) = \frac{v_\alpha}{2\pi} |G^R(x, \alpha; E)|^2 = |\psi_E^{(\alpha)}(x)|^2 \quad (1.42)$$

Écrite sous cette forme, le sens physique de l'injectivité est parfaitement clair : elle représente la contribution de l'état stationnaire incident du contact α à la densité d'états locale $\rho(x; E) = \langle x | \delta(E - H) | x \rangle = \sum_{\alpha} |\psi_E^{(\alpha)}(x)|^2 = \sum_{\alpha} \rho(x, \underline{\alpha}; E)$. Cette remarque justifie *a posteriori* notre interprétation de (1.40).

L'émissivité. – Si nous sommons plutôt l'éq. (1.40) sur les canaux entrants nous obtenons

$$\rho(\underline{\alpha}, x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\beta} \rho(\underline{\alpha}, x, \underline{\beta}; E) = -\frac{1}{2i\pi} \left(\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} \mathcal{S}^\dagger \right)_{\alpha\alpha} \quad (1.43)$$

$$= \frac{v_\alpha}{2\pi} |G^R(\alpha, x; E)|^2 = |\psi_E^{t.r.(\alpha)}(x)|^2 \quad (1.44)$$

Émissivité et injectivité sont donc reliées par renversement du temps comme

$$\rho_{\mathcal{B}}(\underline{\alpha}, x; E) = \rho_{-\mathcal{B}}(x, \underline{\alpha}; E) \quad (1.45)$$

où \mathcal{B} désigne le champ magnétique.

L'intérêt de ces définitions est manifeste si l'on cherche à exprimer la densité d'électrons dans une situation hors équilibre. Suivant la prescription de l'approche de scattering, nous devons pondérer la contribution à la densité d'états venant des états stationnaires associés au contact α par la fonction de Fermi décrivant l'équilibre dans le contact :

$$n(x) = \int dE \sum_{\alpha} f_{\alpha}(E) \rho(x, \underline{\alpha}; E) = \int dE \sum_{\alpha} f_{\alpha}(E) \frac{-1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} \right)_{\alpha\alpha} \quad (1.46)$$

Nous pouvons donc relier une propriété *locale* à l'intérieur du conducteur à la matrice \mathcal{S} . Ce type de relation se révélera utile pour traiter l'effet de l'interaction entre électrons.

Application : fonction de distribution locale dans un fil métallique hors équilibre. – Dans une approche simple nous pouvons relier l'injectivité à la fonction de distribution locale, une quantité qui a pu être mesurée par un dispositif astucieux (figure 1.11). La fonction de distribution locale $f(x; E)$ est une quantité semiclassique indiquant avec quelle probabilité un électron en x occupe un état d'énergie E (cette quantité est semi-classique puisque nous spécifions à la fois position et énergie). Cette notion intervient dans l'approche semi-classique dite de Boltzmann-Langevin permettant l'analyse du transport et du bruit [484, 182, 619]. La notion d'injectivité nous permet d'exprimer $f(x; E)$ dans une situation *hors équilibre*, lorsque les contacts sont portés à des tensions différentes :

$$f(x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{\alpha} f_{\alpha}(E) \rho(x, \underline{\alpha}; E)}{\rho(x; E)} \quad (1.47)$$

³¹ On peut écrire plus généralement $-\frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} \right)_{\alpha\beta} = \psi_E^{(\alpha)}(x) * \psi_E^{(\beta)}(x)$ à partir des équations données ci-dessus. On en trouvera une démonstration dans [126] où dans [634] dans le contexte des graphes.

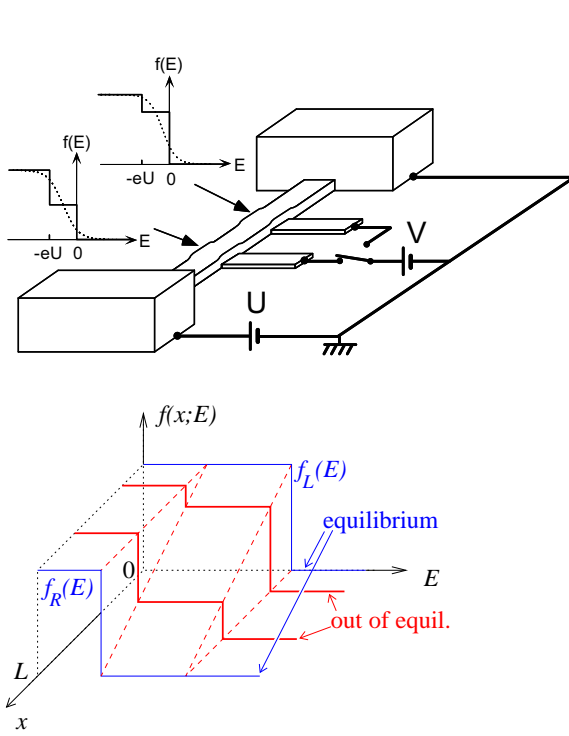


FIGURE 1.11 : À gauche : Mesure de la fonction de distribution locale dans le fil, superposition des fonctions de distribution des deux contacts. Dispositif expérimental : des fils supra (sous le fil) sont contactés avec le fil mésoscopique via des jonctions tunnel. La température du réfrigérateur à dilution est $T = 25 \text{ mK}$; les fils ont une largeur $w = 110 \text{ nm}$ et une épaisseur $b = 45 \text{ nm}$; le fil 1 a une longueur de $L = 1.5 \mu\text{m}$ et les fils 2 et 3 $L = 5 \mu\text{m}$. Le courant tunnel à travers la jonction formée entre le fil (normal) et le doigt (supra) est directement proportionnel à la fonction de distribution dans le fil. On a représenté les distributions hors équilibre schématisant l'interpolation entre les distributions aux deux contacts f_L et f_R . À droite : fonction de distribution en fonction de E/eU . Les différentes courbes correspondent à différents paramètres d'interaction pour les différents fils. En haut à gauche on peut voir une belle distribution à deux marches. Tiré de : Pothier et al [534].

La quantité $u_\alpha(x) = \frac{\rho(x, \alpha; E)}{\rho(x; E)}$ sera introduite plus tard. Par exemple, dans un fil métallique (faiblement désordonné) de longueur L contacté à ses deux extrémités, les conditions aux limites $u_L(0) = 1$ et $u_L(L) = 0$ conduisent à $u_L(x) \simeq 1 - x/L$. De même $u_R(x) \simeq x/L$. Dans le cas du fil métallique nous obtenons $f(x; E) = \sum_\alpha f_\alpha(E) u_\alpha(x)$ soit $f(x; E) = f_L(E)(1 - \frac{x}{L}) + f_R(E)\frac{x}{L}$ (figure 1.11). Une telle fonction à double marche suppose l'absence de processus de diffusion inélastiques redistribuant les électrons dans des états d'autres énergies. En revanche si l'interaction entre électrons, par exemple, est suffisamment efficace, elle fait relaxer la fonction de distribution locale vers une fonction de distribution d'équilibre pour une température effective supérieure à celle des contacts (Joule heating) [182]. Cette remarque montre l'intérêt que peut avoir l'étude de la fonction de distribution locale : elle fournit une sonde locale de l'efficacité de l'interaction entre électrons. Dans le fil diffusif, si le temps de Thouless $\tau_D = L^2/D$ est inférieur au temps de diffusion entre électron τ_{ee} on observe une distribution hors équilibre (double marche). À l'inverse si $\tau_D \gg \tau_{ee}$, les électrons subissent de nombreuses collisions lors de leur traversée du fil et on observe une fonction de distribution de type Fermi-Dirac pour une température effective variant dans le fil. De telles fonctions de distribution ont en effet été observées au CEA (SPEC, Saclay) par Pothier, Guéron, Birge, Estève et Dévoret [534], puis

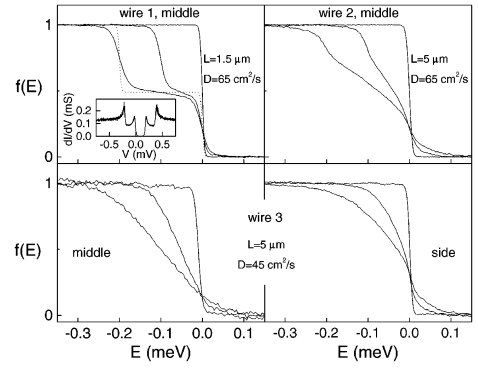


FIG. 2. Inset of the top left panel: Measured $dI/dV(V)$ of the tunnel junction to wire 1 for $U = 0.2 \text{ mV}$. In the four panels, distribution functions, obtained from the deconvolution of such $dI/dV(V)$ curves, for $U = 0, 0.1, \text{ and } 0.2 \text{ mV}$ in the middle of a $1.5\text{-}\mu\text{m}$ -long wire with a diffusion constant $D \sim 65 \text{ cm}^2/\text{s}$ (wire 1, top left); in the middle of a $5\text{-}\mu\text{m}$ -long wire with the same diffusion constant (wire 2, top right); in the middle (bottom left) and at $1.1 \mu\text{m}$ from the grounded reservoir electrode (bottom right) of a $5\text{-}\mu\text{m}$ -long wire (wire 3) with $D \sim 45 \text{ cm}^2/\text{s}$. Also plotted as a dotted line in the top left panel is the prediction for the noninteracting distribution function [Eq. (2)] for $U = 0.2 \text{ mV}$. All measurements were performed at 25 mK . The cross-sectional area of the three wires is nominally the same: $45 \times 110 \text{ nm}^2$. The tunnel resistances of the junctions were $R_T = 10 \text{ k}\Omega$ for wires 1 and 2, $R_T = 200 \text{ k}\Omega$ for the middle junction on wire 3, and $R_T = 75 \text{ k}\Omega$ for the side junction on wire 3.

la technique a également été utilisée au cours des thèses de Frédéric Pierre, Anne Anthore et Benjamin Huard [528, 791, 778, 786].

Bound states in the continuum (BIC)

Il est intéressant de noter que la relation entre le spectre et la matrice \mathcal{S} a toutefois quelques limitations. Dans certains problèmes de diffusion des états localisés (normalisables selon $\int dx |\varphi(x)|^2 = 1$) peuvent coexister avec les états de diffusion, *aux mêmes énergies*. On parle de “bound states in the continuum (BIC)”. Cette éventualité a été discutée il y a longtemps par von Neumann & Wigner [675]. Depuis il a été reexaminé dans de nombreux travaux [616], en particulier dans le contexte de la physique mésoscopique (par exemple [504, 553]). Le spectre possède donc une composante singulière *superposée* à la composante continue ³² $\rho(E) = \rho_{\text{reg}}(E) + \rho_{\text{BIC}}(E)$ (l’absence de couplage entre les deux provient en général de symétries du problème comme je l’avais souligné dans [629]). Dans une telle situation, la matrice de scattering ne donne aucune information sur la contribution des BIC à la densité d’états ou toute autre quantité physique (comme le courant). Une situation physique présentant des BICs est proposée sur la figure 1.16 page 45. Je reviendrai sur ce point dans le chapitre 2 et donnerai une illustration (*cf.* page 60).

Q : Une question intéressante serait de clarifier la relation entre l’existence des BIC dans certaines géométries et l’apparition de “phase slips”, une question ayant suscité un intérêt certain [694, 307, 579, 402, 625, 412, 368, 599].

Généralisation du théorème de Feynman-Hellmann pour un problème de diffusion

La relation (1.46) pose la question générale du calcul de n’importe quelle quantité physique en terme de la matrice \mathcal{S} .

Spectre discret.— Rappelons tout d’abord une relation très utile permettant de calculer les moyennes d’opérateurs dans un système fermé. Dans ce cas l’opérateur de Schrödinger \hat{H} possède un *spectre discret* $\{E_n, \varphi_n(x)\}$ d’états normalisés selon $\int dx \varphi_n^*(x) \varphi_m(x) = \delta_{m,n}$. Si nous souhaitons calculer la valeur moyenne d’un opérateur \hat{X} , une manière simple consiste à introduire un terme supplémentaire dans l’hamiltonien $\hat{H} \rightarrow \hat{H}_f = \hat{H} - f\hat{X}$ où f est la force conjuguée de X ; ou plus généralement $\hat{X} = -\frac{\partial}{\partial f} \hat{H}_f$ (si \hat{H}_f n’est pas linéaire dans l’observable ou la force). Le théorème de Feynman-Hellmann se démontre aisément (*cf.* chapitre 5 de [775]).

$$\langle \varphi_n | \hat{X} | \varphi_n \rangle = -\frac{\partial E_n(f)}{\partial f} \quad (1.48)$$

(j’ai gardé la même notation pour désigner les spectres de \hat{H} et de \hat{H}_f). Un premier exemple de couple (X, f) : la densité locale $\hat{X} \rightarrow \hat{\rho}(x) = \delta(x - \hat{x}) = |x\rangle\langle x|$ et le potentiel $f \rightarrow -V(x)$, ce qui conduit à la relation évidente $\langle \varphi_n | \hat{\rho}(x) | \varphi_n \rangle = \frac{\delta}{\delta V(x)} E_n$. Un autre exemple est le courant permanent $X \rightarrow I$ et le flux $f \rightarrow \phi$:

$$I_n(\phi) = -\frac{\partial E_n(\phi)}{\partial \phi} \quad \text{où} \quad I_n = \langle \varphi_n | \hat{I} | \varphi_n \rangle. \quad (1.49)$$

Spectre continu.— Puisque nous nous intéressons à des systèmes ouverts, la question est de savoir par quoi remplacer la relation (1.48) dans le cas où le spectre est continu ? Puisque la matrice \mathcal{S}

³²à ne pas confondre avec une composante singulière venant d’états liés d’énergie $E < 0$ pour une spectre de diffusion dans \mathbb{R}^+ .

concentre l'information sur le système, il faut donc chercher comment en extraire l'information sur les moyennes d'observables. Dans [636] je donnais

$$\langle \psi_E^{(\alpha)} | \hat{X} | \psi_E^{(\beta)} \rangle = \frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial f} \right)_{\alpha\beta} \quad (1.50)$$

Bien que je n'ai pas donné de démonstration générale de cette relation, l'éq. (1.41) en est un cas particulier. Cette relation a été prouvée dans les réseaux de fils 1D pour différentes quantités physiques (densité totale, densité locale, courants dans les fils). L'intérêt de ce type de relation est de permettre d'identifier les contributions des états stationnaires de diffusion à la moyenne statistique et quantique de la quantité physique. C'est donc une des briques de base pour étudier la moyenne ou les fluctuations d'une quantité physique dans une situation hors équilibre.

Q : Il serait intéressant d'avoir une démonstration générale de la relation (1.50) (pour une quantité physique arbitraire et des situations plus générales).

Lorsque l'on considère la trace de cette expression, $\sum_\alpha \langle \psi_E^{(\alpha)} | \hat{I} | \psi_E^{(\alpha)} \rangle$, on retrouve le résultat obtenu par Akkermans, Auerbach, Avron & Shapiro [7]

$$dI(E) = dE \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \det \mathcal{S} \quad (1.51)$$

où $dI(E)$ désigne la contribution au courant des états d'énergie dans $[E, E+dE[$. Cette expression permet de décrire la situation à l'équilibre uniquement. Une illustration de l'intérêt de la relation (1.50) est donnée page 61 [eqs. (2.22) et (2.23)].

Interaction entre électrons – Capacité mésoscopique

La partie du formalisme de Büttiker présentée jusqu'à présent a été formulée pour des électrons sans interaction. Cependant à partir du début des années 90, Büttiker a introduit l'effet de l'interaction entre électrons dans une approximation de champ moyen (de type Hartree-Fock), ce qui a motivé l'introduction des outils que je viens de présenter (injectivité, émissivité,...).³³ Une notion importante apparaissant dans la plupart de ses travaux est celle de capacité mésoscopique (capacité électrochimique³⁴) [136]. Pour en comprendre l'origine, rappelons-nous que le terme de Weyl de la densité d'états d'un électron libre se comporte comme $\rho_0 \propto \text{Vol} \epsilon_F^{d/2-1}$, où Vol est le volume. Le nombre de fermions peut s'exprimer comme $N \propto \text{Vol} \epsilon_F^{d/2}$ et l'énergie des fermions $E_{\text{Ferm}} = \frac{d}{d+2} N \epsilon_F$. D'autre part l'énergie coulombienne d'un conducteur prend la forme $E_{\text{Coul}} = \frac{e^2}{2C} N^2$ où C est la capacité "géométrique" du conducteur (obtenue en résolvant l'équation de Poisson); pour une justification, cf. encadré ci-dessous. On peut donc écrire l'énergie totale du système sous la forme de la somme de ces deux termes : $E_{\text{tot}} = \frac{e^2}{2C} N^2 + \frac{d^2}{2(d+2)\rho_0} N^2$, ce qui suggère d'introduire la "capacité électrochimique"

$$\frac{1}{C_\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C} + \frac{\delta}{e^2} \quad (1.52)$$

³³ L'approche de champ moyen (Hartree-Fock) de Büttiker a trouvé une justification microscopique pour les QD dans [108].

³⁴ Comme nous le verrons, l'étude du transport non linéaire ou du transport dynamique dans une structure mésoscopique montre que le concept pertinent est celui de *capacité électrochimique* caractérisant la réponse de la charge à une variation du potentiel chimique local $C_\mu = e \frac{dQ}{d\mu}$, au lieu de la capacité géométrique caractérisant la réponse à une variation du potentiel électrostatique $C = \frac{dQ}{dV}$ [136].

Notons que la capacité mésoscopique peut être reliée à la compressibilité $C_\mu = -e^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \mu^2}$.

où $\delta \stackrel{\text{def}}{=} 1/\rho_0$ est l'écart moyen entre niveaux (nous nous plaçons dans la situation 2D pour alléger), en terme de laquelle l'énergie s'écrit simplement $E_{\text{tot}} = \frac{e^2}{2C_\mu} N^2$. Comparer les deux contributions à l'énergie revient à comparer l'énergie de charge e^2/C et l'écart moyen entre niveaux δ . Dans les systèmes mésoscopiques où la DoS devient suffisamment faible, le terme de DoS peut dominer dans C_μ . Nous verrons comment cet objet apparaîtra dans l'étude du transport dynamique ou non linéaire. Notons que nous avons légèrement simplifié la présentation. En effet, le terme d'énergie E_{Ferm} dépend du potentiel électrostatique et de la façon dont les électrons du métal se distribuent pour assurer l'électro-neutralité. En principe le problème doit être résolu de façon autocohérente. Nous y reviendrons.

Le modèle universel d'interaction pour les QDs.— La construction du modèle d'interaction universel pour les boîtes quantiques chaotiques est développée dans [701]. En principe l'hamiltonien (de seconde quantification) d'un QD chaotique est de la forme $H = \sum_\alpha \epsilon_\alpha c_\alpha^\dagger c_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} V_{\alpha\beta;\gamma\delta} c_\alpha^\dagger c_\beta^\dagger c_\gamma c_\delta$ où $V_{\alpha\beta;\gamma\delta} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha\beta | V_{\text{Coul}} | \gamma\delta \rangle$ est l'élément de matrice de l'interaction coulombienne. Le point de départ de la construction du modèle universel consiste à supposer les états propres de la partie sans interaction $\{\epsilon_\alpha, |\alpha\rangle\}$ distribués selon la théorie des matrices aléatoires (mesure invariante sous $SU(N)$ où N est la dimension de l'espace de Hilbert). Aleiner, Brouwer et Glazman ont analysé en détail les propriétés statistiques des éléments de matrice du terme d'interaction. Ils concluent que, dans la limite $g = E_{\text{Th}}/\delta \gg 1$ où δ est l'écart moyen entre niveaux et $E_{\text{Th}} = D/L^2$ l'énergie de Thouless, trois classes d'éléments de matrice sont dominants, correspondant à l'appariement des 4 indices par paires :

$$H = \sum_{a,\sigma} \epsilon_a c_{a\sigma}^\dagger c_{a\sigma} + E_C N^2 + J_S \vec{S}^2 + J_C T^\dagger T, \quad (1.53)$$

où $N \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{a,\sigma} c_{a\sigma}^\dagger c_{a\sigma}$, $\vec{S} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{a,\sigma,\sigma'} c_{a\sigma}^\dagger \vec{\sigma}_{\sigma,\sigma'} c_{a\sigma'}$ et $T \stackrel{\text{def}}{=} \sum_a c_{a\uparrow}^\dagger c_{a\downarrow}$. Ces trois termes s'interprètent comme un terme d'énergie de charge, avec $E_C = \frac{e^2}{2C}$, un terme d'énergie magnétique (dot aimanté) et un terme décrivant des corrélations supraconductrices. Dans la limite $g = E_{\text{Th}}/\delta \gg 1$, l'hamiltonien d'interaction universel possède donc uniquement trois paramètres réels.

Ces remarques donnent une justification à la forme de l'énergie de charge qui nous a permis d'introduire la notion de capacité mésoscopique.

1.2.5 Transport non linéaire et interaction entre électrons

Ces dernières années ont vu un nouvel intérêt pour l'étude du transport non linéaire [396, 238] suite à une proposition très intéressante de Spivak & Zyuzin (SZ) [610] et Sánchez & Büttiker (SB) [560] d'utiliser l'asymétrie en champ magnétique de la conductance non linéaire pour sonder l'interaction entre électrons. Plusieurs groupes expérimentaux se sont intéressés à cette question : le groupe de Charles Marcus à Harvard, celui de Klaus Ensslin à Zürich, celui de Richard Taylor à l'Université de l'Oregon, et celui d'Hélène Bouchiat à Orsay, dans le cadre de la thèse de Lionel Angers. J'ai profité de l'intérêt porté par ce problème à Orsay pour me pencher sur cette question.

Commençons par donner une interprétation physique de l'effet. Au lieu de nous arrêter à l'expression du courant (1.11), linéaire dans les potentiels, nous nous intéressons au terme non linéaire :

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} V_\beta + \sum_{\beta,\gamma} G_{\alpha\beta\gamma} V_\beta V_\gamma + O(V^3) \quad (1.54)$$

Notons que la formule (1.10) décrit déjà un régime de transport non linéaire. Ces non linéarités possèdent néanmoins la même symétrie en champ magnétique que la matrice de conductance.

Le point intéressant soulevé par SZ&SB est que l'interaction génère d'autres non-linéarités sans symétrie particulière sous un renversement du champ magnétique, ce qui permet d'une part de les discriminer des premières, mais surtout d'avoir une nouvelle sonde de l'interaction.

L'origine de l'effet est la suivante : lorsqu'un conducteur est traversé par un courant électrique, celui-ci occasionne une redistribution de la densité de charges et une redéfinition du potentiel électrostatique afin d'assurer l'électronéutralité dans le conducteur. Cette modification du potentiel doit être prise en compte de manière autocohérente et affecte les coefficients de transport, ce qui se traduit par une dépendance non-linéaire du courant dans les potentiels extérieurs V_α .

L'étude du transport non linéaire dans un conducteur mésoscopique va nous permettre d'illustrer le traitement de l'interaction entre électrons par Büttiker. Il s'agit d'une approche de champ moyen équivalente à l'approximation de Hartree-Fock décrivant l'écrantage dans les métaux (cf. § « Beyond BPT's (...) » en fin de section 1.2.6). Rappelons les ingrédients de base que le lecteur connaît bien :

1. On écrit la densité d'électrons comme une somme de la densité extérieure, correspondant aux charges injectées, et de la densité induite (de polarisation) assurant l'électronéutralité :

$$n(x) = n_{\text{ext}}(x) + n_{\text{ind}}(x) \quad (1.55)$$

2. La densité induite est donnée par la théorie de la réponse linéaire :

$$n_{\text{ind}}(x) = - \int dx' \chi(x, x') V(x') \quad (1.56)$$

où $\chi(x, x')$ est la fonction de réponse densité-densité caractérisant le système et supposée connue (en général elle dépend également de la fréquence puisque la réponse n'est pas instantanée). V est l'énergie potentielle électrostatique.

3. L'équation de Poisson

$$\Delta V(x) = -4\pi e^2 n(x) \quad (1.57)$$

Le problème est donc : étant donnée une densité de porteurs n_{ext} injectée, comment le système répond-t-il tout en assurant l'électronéutralité ? Les trois inconnues sont donc n_{ind} , n et V .

L'approche est *autocohérente* (équivalente à l'approximation RPA [748]) puisque la réponse, la densité induite (1.56), dépend du potentiel *écranté* V relié à la densité totale n , et non du potentiel extérieur V_{ext} associé à la densité injectée n_{ext} .

Supposant le système homogène, ces équations peuvent être résolues très simplement dans l'espace de Fourier. La densité totale est donnée par $n(q, \omega) = \frac{n_{\text{ext}}(q, \omega)}{\epsilon_{\text{RPA}}(q, \omega)}$ où la constante diélectrique est donnée par $\epsilon_{\text{RPA}}(q, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{q^2} \chi(q, \omega)$. Dans l'approximation de Thomas-Fermi $\chi(q, 0) \simeq \rho_0$ et on retrouve l'écrantage bien connu : $\epsilon_{\text{RPA}}^{\text{TF}}(q, 0) = 1 + \frac{\kappa^2}{q^2}$ où $\kappa^{-1} = 1/\sqrt{4\pi e^2 \rho_0}$ est la longueur d'écran de Thomas-Fermi (cf. annexe page 153).

Afin de décrire la non-linéarité du transport dans les conducteurs mésoscopiques, Büttiker a adapté le raisonnement précédent à une situation hors équilibre [124, 162, 129]. Nous reproduisons ces idées.

Tout d'abord nous devons introduire les *potentiels caractéristiques* [124] $u_\alpha(x)$ définis comme suit. Notons $V_{\text{eq}}(x)$ le potentiel à l'équilibre. Si les potentiels dans les contacts sont modifiés $\mu_\alpha \rightarrow \mu_\alpha + \delta\mu_\alpha$ nous pouvons écrire l'énergie potentielle (à l'approximation linéaire) comme

$$V(x) = V_{\text{eq}}(x) + \sum_{\alpha} u_\alpha(x) \delta\mu_\alpha \quad (1.58)$$

où les fonctions $u_\alpha(x)$ caractérisent la réponse linéaire du potentiel dans le conducteur aux variations des potentiels chimiques dans les contacts. Elles possèdent quelques propriétés évidentes : (i) $u_\alpha(x \rightarrow \text{contact } \alpha) = 1$, (ii) $u_\alpha(x \rightarrow \text{contact } \beta \neq \alpha) = 0$ et (iii) $\sum_\alpha u_\alpha(x) = 1$. Hors de l'équilibre, les trois équations (1.55,1.56,1.57) deviennent, d'après (1.46),

$$n(x) = \sum_\alpha \rho(x, \underline{\alpha}) \delta\mu_\alpha + n_{\text{ind}}(x) \quad (1.59)$$

$$n_{\text{ind}}(x) = - \int dx' \chi(x, x') \sum_\alpha u_\alpha(x') \delta\mu_\alpha \quad (1.60)$$

$$\Delta \sum_\alpha u_\alpha(x) \delta\mu_\alpha = -4\pi e^2 n(x) \quad (1.61)$$

Finalement nous obtenons une équation intégral-différentielle pour les potentiels caractéristiques [162]

$$\boxed{-\Delta u_\alpha(x) + 4\pi e^2 \int dx' \chi(x, x') u_\alpha(x') = 4\pi e^2 \rho(x, \underline{\alpha})} \quad (1.62)$$

où l'injectivité est prise au niveau de Fermi.

Maintenant que nous sommes *en principe* capables de déterminer les potentiels caractéristiques, voyons comment ils interviennent dans l'étude du transport non linéaire. Le point de départ est l'expression du courant (1.10) que nous écrivons en fonction des éléments de matrice diagonaux du courant au contact α (1.22) :

$$I_\alpha = \frac{e}{h} \sum_\beta \int dE \mathcal{I}_{\beta\beta}^\alpha[E; V(x)] f_\beta(E) \quad \text{où} \quad \mathcal{I}_{\beta\beta}^\alpha = \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^* \mathcal{S}_{\alpha\beta} \quad (1.63)$$

Ces éléments de matrice sont des fonctions de l'énergie et des fonctionnelles du potentiel, ce que nous avons explicité dans (1.63). Notons une propriété que sera utilisée dans un instant : un décalage global des énergies n'affecte pas les éléments de matrice $\mathcal{I}_{\beta\gamma}^\alpha[E + E_0; V(x) + E_0] = \mathcal{I}_{\beta\gamma}^\alpha[E; V(x)]$. Lorsque la relation est développée à l'ordre 1 en E_0 , cette remarque conduit à

$$\frac{\partial \mathcal{I}_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial E} + \int dx \frac{\delta \mathcal{I}_{\beta\gamma}^\alpha}{\delta V(x)} = 0 \quad (1.64)$$

Le développement de (1.63) à l'ordre 2 dans les potentiels $V_\alpha = \delta\mu_\alpha/e$ conduit, en utilisant la relation précédente, à l'expression de la conductance non linéaire :

$$\boxed{G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{e^3}{h} \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} \right) \int dx \frac{\delta \mathcal{I}_{\beta\beta}^\alpha}{\delta V(x)} \left(u_\gamma(x) - \frac{1}{2} \delta_{\beta\gamma} \right)} \quad (1.65)$$

(sans prendre en compte la dégénérescence de spin) où la dérivée fonctionnelle est calculée pour $V_{\text{eq}}(x)$. Notons que ces quantités doivent satisfaire $\sum_\alpha G_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\beta G_{\alpha\beta\gamma} = \sum_\gamma G_{\alpha\beta\gamma} = 0$ (conservation du courant et invariance de jauge). Cette expression montre que la non-linéarité a deux origines :

- le terme $-\frac{1}{2}\delta_{\beta\gamma}$ de (1.65) provient de la dépendance de la matrice $\mathcal{S}(E)$ dans l'énergie, i.e. traduit la non-linéarité de la formule de Büttiker (1.10), i.e. du problème *sans interaction*.
- Le terme dépendant du potentiel caractéristique $u_\gamma(x)$ a pour origine l'interaction entre électrons et traduit la redistribution de charges et de potentiel; ne possédant pas de symétrie particulière sous le renversement du champ magnétique, il est responsable de l'asymétrie en champ de la conductance nonlinéaire.

Si $u_\alpha \sim 1$ (écranage efficace), l'effet de l'interaction apporte une contribution du même ordre de grandeur que la simple dépendance en énergie de la matrice \mathcal{S} .

Dans un bon métal.— Dans un bon métal l'écrantage est très efficace : la longueur d'écrantage κ^{-1} est très petite, de l'ordre de l'Å (l'inverse de la longueur d'écrantage de Thomas-Fermi est $\kappa = \sqrt{4\pi\rho_0 e^2}$). À grande distance, $x \gg \ell_e \gg k_F^{-1}$, la fonction de réponse est bien connue ³⁵ $\chi(x, x') = \rho_0 \delta(x - x')$ décrivant un écrantage parfait assurant l'électronneutralité localement $n_{\text{ind}}(x) = -n_{\text{ext}}(x)$ (et non seulement globalement). On obtient $(-\Delta + \kappa^2)u_\alpha(x) = \frac{\kappa^2}{\rho_0}\rho(x, \underline{\alpha})$. La fonction de Green $\langle x | \frac{1}{-\Delta + \kappa^2} | x' \rangle$ a une portée κ^{-1} . Dans la limite $\kappa^{-1} \rightarrow 0$ on peut écrire

$$u_\alpha(x) \simeq \frac{1}{\rho_0}\rho(x, \underline{\alpha}) \quad (1.66)$$

Les injectivités dans un métal ont été étudiées par Gramespacher & Büttiker [300, 301]. Nous introduirons plus tard les outils permettant d'étudier cet objet : dans les chapitres 4 et 5, nous verrons que la moyenne de $|G^{\text{R}}(x, x')|^2$ est solution d'une équation de diffusion $-\Delta P_d = \delta$, de même que l'injectivité.

Relation entre les approches de SZ & SB.— Nous allons discuter dans le paragraphe suivant un aspect intéressant du transport non linéaire, étudié simultanément par Spivak & Zyuzin [610] et Sánchez & Büttiker [560]. J'ai suivi jusqu'à présent l'approche de ces derniers. Je souhaiterais souligner la relation avec le travail des premiers (du moins ce qu'il est possible d'en deviner à la lecture de leur article, qui ne déborde pas de détails!). Considérons $G_{\alpha\beta\gamma}$ à $T = 0$ avec $\alpha \neq \beta$. Exprimons la dérivée fonctionnelle de l'élément de matrice du courant en terme des fonctions de Green :

$$\frac{\delta \mathcal{I}_{\beta\beta}^\alpha}{\delta V(x)} = -\mathcal{S}_{\alpha\beta}^* \frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}}{\delta V(x)} - \frac{\delta \mathcal{S}_{\alpha\beta}^*}{\delta V(x)} \mathcal{S}_{\alpha\beta} \quad (1.67)$$

$$= -v_\alpha v_\beta \left[G^{\text{R}}(\alpha, x) G^{\text{R}}(x, \beta) G^{\text{A}}(\beta, \alpha) + G^{\text{R}}(\alpha, \beta) G^{\text{A}}(\beta, x) G^{\text{A}}(x, \alpha) \right] \quad (1.68)$$

En utilisant l'expression de l'injectivité du métal, Eq. (1.42), nous obtenons

$$G_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{e^3}{h} v_\alpha v_\beta \int dx \left[G^{\text{R}}(\alpha, x) G^{\text{R}}(x, \beta) G^{\text{A}}(\beta, \alpha) + G^{\text{R}}(\alpha, \beta) G^{\text{A}}(\beta, x) G^{\text{A}}(x, \alpha) \right] \\ \times \left[\frac{v_\gamma}{2\pi\rho_0} G^{\text{R}}(x, \gamma) G^{\text{A}}(\gamma, x) - \frac{1}{2}\delta_{\beta\gamma} \right] \quad (1.69)$$

Réinsérer les traces sur les canaux transverses ne pose pas de difficulté majeure. Le premier terme de cette expression est représenté diagrammatiquement sur la figure 1.12.

Dans un système diffusif.— En utilisant les techniques diagrammatiques (chapitres 4 et 5) il est possible d'étudier la conductance non linéaire dans un métal. Par exemple dans le cas d'un système à deux contacts, on peut montrer que $\langle G_{111} \rangle = 0$ (le calcul requiert le branchement de diffusons à l'aide d'une boîte de Hikami à 3 entrées de même nature que celles utilisées pour l'analyse des fluctuations de DoS [35, 743]). Pour extraire une information intéressante il faut donc au moins considérer les fluctuations mésoscopiques de la conductance non linéaire $\langle \delta G_{111}^2 \rangle$.

Spivak & Zyuzin utilisent une formulation similaire, à la nuance près qu'ils considèrent un système suffisamment petit pour pouvoir supposer que le potentiel est uniforme. Autrement dit, au lieu de considérer les potentiels caractéristiques (1.66) ils font l'hypothèse de leur uniformité $u_\alpha(x) \rightarrow u_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{V_{\text{ol}}} u_\alpha(x)$.

³⁵ Nous calculerons plus tard la fonction de réponse densité-densité dans un métal : aux grandes distances devant le libre parcours moyen élastique ($q\ell_e \ll 1$), la fonction de corrélation densité-densité est $\tilde{\chi}(q, \omega) = \rho_0 \frac{Dq^2}{-i\omega + Dq^2}$ où D est la constante de diffusion reliée à la conductivité par la relation d'Einstein.

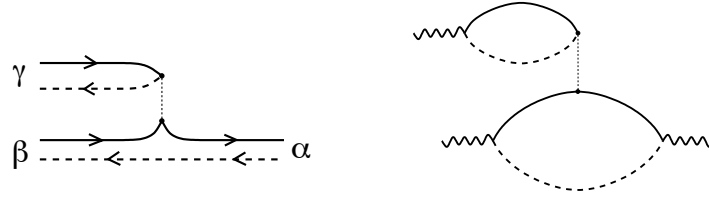


FIGURE 1.12 : À gauche : *diagramme représentant la conductance non linéaire (1.69)*. La ligne pointillée représente l'interaction entre électrons. Les lignes continues (en tirets) représentent les fonctions de Green retardées (avancées). À droite : *diagramme de Spivak & Zyuzin*. La bulle inférieure représente la conductivité. La bulle supérieure signale que le courant affecte la distribution de charge et le potentiel dont dépend la conductivité.

Dans un système mésoscopique balistique.— Dans un système mésoscopique balistique suffisamment petit, on peut négliger les variations spatiales à l'échelle du système ce qui simplifie la formulation du problème [124, 162, 129] : nous notons $\bar{\rho}_\alpha$ l'injectivité moyenne (parfois appelée "injectance").³⁶ L'énergie potentielle est supposée homogène dans le système $V(x) \rightarrow U$. Les potentiels caractéristiques sont également supposés homogènes. La conductance non linéaire (1.65) prend la forme (à $T = 0$) $G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{e^3}{h} \frac{\partial T_{\beta\beta}^\alpha}{\partial U} (u_\gamma - \frac{1}{2}\delta_{\beta\gamma})$. Déterminons les potentiels caractéristiques. Pour cela nous remplaçons les équations (1.55,1.56) par $Q = e^2 \sum_\alpha \bar{\rho}_\alpha V_\alpha - e\rho U$ où $\rho = \sum_\alpha \bar{\rho}_\alpha$ est la densité d'états dans le système. L'équation de Poisson (1.57) est remplacée par $Q = C(U/e - V_g)$ où C est la capacité géométrique et V_g une tension de grille à laquelle le système est couplé. Ces deux équations conduisent à $U/e = \frac{1}{C+e^2\rho} (\sum_\alpha e^2\bar{\rho}_\alpha V_\alpha + CV_g)$ ce qui nous permet d'identifier les potentiels caractéristiques, ici définis par $U = \sum_\alpha u_\alpha eV_\alpha + U_{\text{eq}}$,

$$u_\alpha = \frac{C_\mu}{C} \frac{\bar{\rho}_\alpha}{\rho} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{C_\mu} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{C} + \frac{1}{e^2\rho} \quad (1.70)$$

Nous voyons émerger la capacité électrochimique introduite plus haut par des considérations générales. Nous pouvons distinguer deux cas :

(i) La limite $C \ll e^2\rho$ (qu'il est suggestif d'écrire $1/\rho \equiv \delta \ll \frac{e^2}{C}$, où δ est l'écart entre niveaux et e^2/C l'énergie de charge) décrit un très bon écrantage. Ceci requiert une densité d'états importante pour permettre une bonne redistribution des charges écrantant la charge injectée. Dans ce cas nous retrouvons une relation $u_\alpha \simeq \frac{\bar{\rho}_\alpha}{\rho}$ réminiscente de (1.66).

(ii) La limite inverse $C \ll e^2\rho$ (i.e. $\delta \gg \frac{e^2}{C}$) est la limite mésoscopique pour laquelle la densité d'états est trop faible pour assurer un bon écrantage : $u_\alpha \simeq \frac{e^2\bar{\rho}_\alpha}{C} \ll 1$.

Asymétrie en champ magnétique : l'effet SZSB.— Si nous considérons un système à deux contacts, les règles de somme montrent que seul un des éléments G_{111} est indépendant : $G_{111} = \frac{e^3}{h} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial U} (\frac{C_\mu}{C} \frac{\bar{\rho}_1}{\rho} - \frac{1}{2})$. Spivak & Zyuzin [610] et Sánchez & Büttiker [560] font une remarque très intéressante sur la symétrie en champ magnétique de cette quantité. Il est bien connu que la conductance *linéaire* d'un système à deux contacts est symétrique en champ magnétique $G_{11}(\mathcal{B}) = G_{11}(-\mathcal{B})$, une conséquence des relations de réciprocity d'Onsager (les symétries des coefficients de transport linéaire ont été discutées en détail dans [117, 120]). Puisque cette symétrie repose sur une symétrie locale de la distribution de courant, on pourrait s'attendre à ce que cela soit également vrai pour le transport non linéaire. Toutefois, à cause de l'interaction

³⁶ L'injectivité $\rho(x, \underline{\alpha})$ désigne une quantité locale. Büttiker a introduit l'injectance, désignant la quantité globale correspondante $\bar{\rho}_\alpha = \int_{\text{sys}} dx \rho(x, \underline{\alpha})$. Nous éviterons d'utiliser "émittance" pour désigner $\rho_\alpha = \int_{\text{sys}} dx \rho(\underline{\alpha}, x)$ pour éviter la confusion avec le premier terme du développement de la conductance dynamique $G(\omega) = G(0) - i\omega E + O(\omega^2)$.

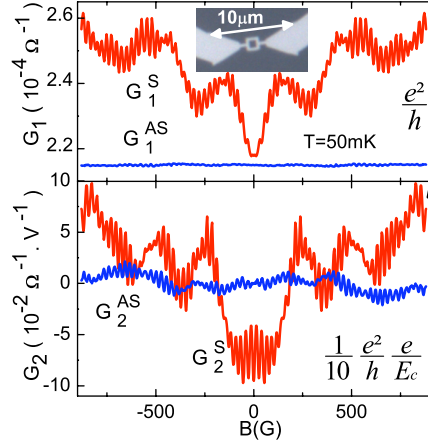


FIGURE 1.13 : *Conductance linéaire (figure du haut) d'un anneau mésoscopique : la partie anti-symétrique en champ est nulle. Figure du bas : la partie antisymétrique de la conductance non linéaire est non nulle en revanche. Tiré de : Angers et al [44, 777].*

entre électrons, le potentiel est sensible au flot du courant (à travers les injectivités), ce qui brise la symétrie en champ magnétique dans (1.65) : $\frac{\delta \mathcal{I}_{\beta\beta}^{\alpha}}{\delta V(x)}$ possède la symétrie en champ usuelle, ³⁷ cependant la présence de $u_{\gamma}(x)$ brise cette symétrie. Ceci génère une asymétrie mesurant directement l'effet de l'interaction entre électrons, ici quantifiée à travers le rapport $\frac{C_{\mu}}{C}$, [560] :

$$\Phi \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}[G_{111}(\mathcal{B}) - G_{111}(-\mathcal{B})] = \frac{e^3}{2h} \frac{\partial \mathcal{I}_{11}^1}{\partial U} \frac{C_{\mu}}{C} \frac{\bar{\rho}_1 - \rho_1}{\rho} \quad (1.71)$$

où ρ_1 est l'émissivité, reliée à l'injectivité par renversement du sens du temps, éq. (1.45). L'effet a été quantifié pour un dot chaotique en utilisant des résultats d'une théorie de matrices aléatoires [103]. Sánchez & Büttiker obtiennent [560, 135] $\langle \Phi \rangle = 0$ et $\sqrt{\langle \Phi^2 \rangle} \sim \frac{e^3}{h} \frac{1}{N_c^2} \frac{C_{\mu}}{C}$ où N_c est le nombre de canaux de chaque contact. La théorie a été enrichie pour décrire d'autres effets (description de la dépendance en champ magnétique, effet de la température, décohérence,...) dans les références [531, 532].

Cette asymétrie en champ magnétique du transport non linéaire a été observée dans plusieurs expériences : par Leturcq (équipe de Klaus Ensslin à Zürich) [408], Marlow *et al* [439], et par les équipes de Charles Marcus (Harvard) et Arthur Gossard (Santa Barbara) [699]. Les théories de Spivak-Zyuzin [610] et Sánchez-Büttiker-Polianski [560, 531] ont été testées plus *quantitativement* au cours de la thèse de Lionel Angers dirigée par Hélène Bouchiat et Sophie Guéron au LPS d'Orsay [44, 777] (anneau balistique) : *cf.* figure 1.13.

1.2.6 Transport dynamique, résistance de relaxation de charge, décohérence

Admittance

L'intérêt s'est porté récemment sur l'analyse du transport dynamique (la conductance à fréquence finie $G(\omega)$), motivé par la demande pour manipuler et mesurer des circuits électriques de dimension microscopique aussi rapidement que possible : deux exemples sont la réalisation d'une source à électron unique [244] et l'étude d'un détecteur pour « flying qubit » [243].

En utilisant les mêmes ingrédients physiques que pour l'étude du transport non linéaire, Büttiker et ses collaborateurs [134, 136, 163, 162] se sont intéressés aux conductances AC caractérisant la réponse du système à des tensions oscillantes : $\delta I_{\alpha}(\omega) = \sum_{\beta} G_{\alpha\beta}(\omega) \delta V_{\beta}(\omega)$. Si on

³⁷ Les relations de Casimir-Onsager conduisent à $G_{\alpha\beta}(-\mathcal{B}) = G_{\beta\alpha}(\mathcal{B})$

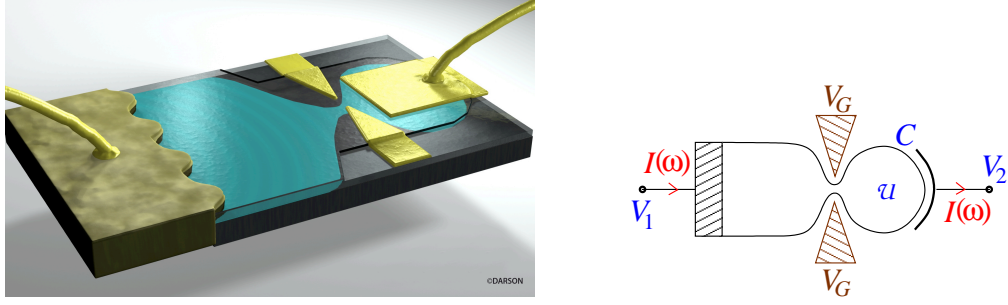


FIGURE 1.14 : *Capacité mésoscopique : grille métallique au dessus d'un dot mésoscopique ; à gauche, vue d'artiste de l'échantillon étudié dans la travail de Gabelli et al [271] (copyright David Darson). À droite : schéma du dispositif.*

ne prend pas en compte l'interaction entre électrons, elle est donnée par [134, 129] $G_{\alpha\beta}^0(\omega) = \frac{e^2}{h} \int dE \text{Tr} \{ \delta_{\alpha\beta} - \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger(E) \mathcal{S}_{\alpha\beta}(E + \hbar\omega) \} \frac{1}{\hbar\omega} [f_{\text{eq}}(E) - f_{\text{eq}}(E + \hbar\omega)]$ (sans la dégénérescence de spin) qui coïncide avec (1.12) à $\omega = 0$. L'interaction, traitée en champ moyen, modifie ce résultat. Les éléments de la matrice de conductance dans la situation générale multiterminal sont données dans [535, 129]. Pour comprendre l'idée nous allons plutôt considérer le système le plus simple : un composant purement capacitif constitué d'un système mésoscopique à un contact au dessus duquel est déposée une grille métallique (figure 1.14). Dans cette situation la conductance $G^0(\omega)$ fait intervenir une matrice \mathcal{S} décrivant la réflexion dans le conducteur

$$G^0(\omega) = \frac{e^2}{h} \int dE \text{Tr} \left\{ 1 - \mathcal{S}^\dagger(E) \mathcal{S}(E + \hbar\omega) \right\} \frac{f_{\text{eq}}(E) - f_{\text{eq}}(E + \hbar\omega)}{\hbar\omega} \quad (1.72)$$

Elle s'annule à fréquence nulle en vertu de l'unitarité de la matrice \mathcal{S} . L'expression peut être développée aux petites fréquences comme ³⁸

$$G^0(\omega) = -ie^2\omega \int dE \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E} - \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\partial^2 f_{\text{eq}}}{\partial E^2} + \mathcal{O}(\omega^2) \right) \times \left[\text{Tr} \{ \mathcal{N} \} + i \frac{\hbar\omega}{2} \text{Tr} \{ \mathcal{N}^2 \} - \frac{(\hbar\omega)^2}{6} \text{Tr} \left\{ \mathcal{N}^3 - \frac{\mathcal{N}'''}{8\pi^2} \right\} \right] + \mathcal{O}(\omega^4) \quad (1.73)$$

où

$$\mathcal{N} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \mathcal{S}^\dagger \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial E} = \frac{1}{h} \mathcal{Q}. \quad (1.74)$$

\mathcal{Q} est la matrice de Wigner-Smith mise en jeu dans la discussion sur la règle de somme de Friedel. D'après (1.34) nous voyons que \mathcal{N} , ou plutôt $\text{Dos} \approx \text{Tr} \{ \mathcal{N} \}$, peut s'interpréter comme la densité d'états du dot. Le premier terme de l'admittance $G^0(\omega) \simeq -i\omega e^2 \text{Tr} \{ \mathcal{N} \}$ décrit un effet capacitif proportionnel au terme de densité d'états. Büttiker, Thomas & Prêtre ont montré dans [136] que la conductance prenant en compte les effets d'interaction correspond à mettre en série la conductance $G^0(\omega)$ avec la conductance associée à la capacité géométrique [136, 134, 127] ³⁹ :

$$\frac{1}{G(\omega)} = \frac{1}{-i\omega C} + \frac{1}{G^0(\omega)} \quad (1.75)$$

³⁸ Le développement donne $\frac{\hbar\omega}{e^2} G^0(\omega) = -\hbar\omega \text{Tr} \{ \mathcal{S}^\dagger \mathcal{S}' \} + \frac{(\hbar\omega)^2}{2} \text{Tr} \{ \mathcal{S}^{\dagger\prime} \mathcal{S}' \} - \frac{(\hbar\omega)^3}{12} \text{Tr} \{ \mathcal{S}^{\dagger\prime\prime} \mathcal{S}''' + \mathcal{S}^{\dagger\prime} \mathcal{S}'' + 2\mathcal{S}'' \mathcal{S}' \} + \mathcal{O}(\omega^4)$. On peut utiliser l'unitarité de \mathcal{S} pour trouver quelques relations : l'hermiticité de la matrice des temps de Wigner $\mathcal{N} = \mathcal{N}^\dagger$, $\mathcal{S}^{\dagger\prime} \mathcal{S}' = 4\pi^2 \mathcal{N}^2$ ou encore $\mathcal{S}^{\dagger\prime} \mathcal{S}'' = 2i\pi \mathcal{N}' - 4\pi^2 \mathcal{N}^2$.

³⁹ L'argument développé dans [136] est le suivant : nous écrivons le courant en fonction de la différence de potentiel entre le contact et le dot $\delta I(\omega) = G^0(\omega) [\delta V_1(\omega) - \delta \mathcal{U}(\omega)]$ d'une part (cette forme découle de l'invariance de jauge). D'autre part la capacité géométrique relie la différence de potentiel entre le dot et l'autre contact et la charge : $\delta \mathcal{U}(\omega) - \delta V_2(\omega) = \frac{\delta I(\omega)}{-i\omega C}$. La conductance est définie par $\delta I(\omega) = G(\omega) [\delta V_1(\omega) - \delta V_2(\omega)]$.

Cette relation suppose le système suffisamment petit pour que le potentiel soit uniforme. En utilisant le développement (1.73) nous obtenons (à $T = 0$)

$$\frac{1}{G(\omega)} = \frac{1}{-i\omega C} + \frac{1}{-i\omega e^2 \text{Tr}\{\mathcal{N}\}} + \frac{h}{2s e^2} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{N}^2\}}{[\text{Tr}\{\mathcal{N}\}]^2} + \mathcal{O}(\omega) \quad (1.76)$$

à température finie les traces dans les deux premiers termes doivent être pondérées par $\int dE (-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E}) \dots$. Le développement arrêté à l'ordre ω s'interprète comme la mise en série d'un élément capacitif, d'un élément résistif et d'un élément inductif :

$$1/G(\omega) = 1/(-i\omega C_\mu) + \mathcal{R}_q - i\omega \mathcal{L} + \dots \quad (1.77)$$

Comme pour l'étude du transport non linéaire, la capacité mise en jeu dans l'admittance est la capacité électrochimique

$$\boxed{\frac{1}{C_\mu} = \frac{1}{C} + \frac{1}{e^2 \text{Tr}\{\mathcal{N}\}}} \quad (1.78)$$

(sans inclure la dégénérescence 2_s de spin). Nous retrouvons bien que cette capacité combine la capacité géométrique avec un terme de densité d'états ($\text{DoS} \sim \text{Tr}\{\mathcal{N}\}$). À température finie, la contribution quantique à la capacité devient $C_q = e^2 \text{Tr}\{\mathcal{N}\} \rightarrow C_q = e^2 \int dE (-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E}) \text{Tr}\{\mathcal{N}\}$. La résistance, que nous notons \mathcal{R}_q , est associée à un temps $\mathcal{R}_q C_\mu$ décrivant la relaxation de la charge dans le système. Elle est appelée *résistance de relaxation de charge* [136]. À température nulle on obtient

$$\boxed{\mathcal{R}_q = \frac{h}{2e^2} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{N}^2\}}{[\text{Tr}\{\mathcal{N}\}]^2}} = \frac{h}{2e^2} \frac{\sum_n \tau_n^2}{[\sum_n \tau_n]^2} \quad (1.79)$$

où les quantités $\tau_n = \frac{d\delta_n}{dE}$ sont les temps de Wigner [690], les valeurs propres de la matrice de Wigner-Smith $\mathcal{Q} = 2\pi\hbar\mathcal{N}$, *i.e.* le dérivées des déphasages δ_n intervenant dans la matrice ⁴⁰ \mathcal{S} . Il n'est pas surprenant que la résistance de relaxation de charge, associé au temps $\mathcal{R}_q C_\mu$ pendant lequel les charges restent dans le dot, fasse intervenir les temps de Wigner qui caractérisent le temps de piégeage de l'onde électronique par le système mésoscopique. Il est plus surprenant de constater que le cas d'un contact à un seul canal ouvert conduit à un résultat *universel*, donné par le *demi* quantum de résistance $\mathcal{R}_{\text{contact}} = h/(2e^2)$ au lieu du quantum de résistance h/e^2 qu'on obtiendrait pour une mesure DC de la constriction ouverte. Le fait que le résultat soit indépendant de la transmission est également surprenant. Büttiker a proposé une interprétation [125] : il suggère que la charge ne peut quitter la capacité que par un contact. Cette résistance universelle a été observée récemment dans le cadre des thèses de Julien Gabelli et Gwendal Fève [785, 783, 271, 272]. Les oscillations de la capacité mésoscopique (figure 1.15) ne sont rien d'autre que les oscillations mésoscopiques de la densité d'états du système connecté (avec un élargissement thermique supplémentaire dans l'expérience).

Terminons par quelques remarques :

- Attention à ne pas confondre le facteur 1/2 dans l'Eq. (1.79) avec la dégénérescence de spin 2_s . Si l'on souhaite réintroduire la dégénérescence de spin, on peut la reporter sur la trace, d'où

$$\mathcal{R}_q = \frac{h}{2_s \times 2e^2} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{N}^2\}}{[\text{Tr}\{\mathcal{N}\}]^2} \quad (1.80)$$

- À $T \neq 0$ les traces dans le développement de $G^0(\omega)$ sont pondérées par des intégrales avec des fonctions de Fermi. On obtient

$$\mathcal{R}_q = \frac{h}{2e^2} \frac{\int dE (-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E}) \text{Tr}\{\mathcal{N}^2\}}{[\int dE (-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial E}) \text{Tr}\{\mathcal{N}\}]^2} \quad (1.81)$$

⁴⁰ La matrice \mathcal{S} étant unitaire possède des valeurs propres de la forme $e^{i\delta_n}$.

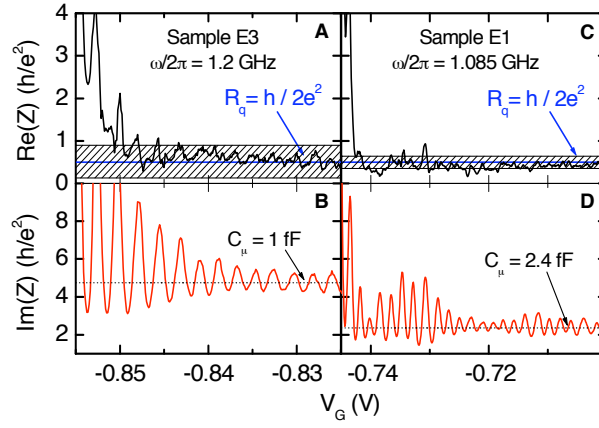


Figure 4: Complex impedance of Sample E3 (A and B) and Sample E1 (C and D) as a function of QPC voltage for $T = 30$ mK and $B = 1.3$ T. The dashed lines in (B and D) correspond to the values of C_μ deduced from calibration. The horizontal solid lines in (A and C) indicate the half-quantum of resistance expected for the coherent regime. Uncertainties on R_q are displayed as hatched areas.

FIGURE 1.15 : Parties réelle et imaginaire de l'impédance dynamique du dispositif de la figure 1.14. Tiré de : Gabelli, Fève, Berroir, Plaçais et al [271].

Résistance de relaxation de charge et décohérence

La résistance de relaxation de charge permet de caractériser les fluctuations de potentiel dans le conducteur : elle est liée au spectre de bruit de tension dans le conducteur par [136, 125] $S_{UU} = 2k_B T (\frac{C_\mu}{C})^2 \mathcal{R}_q$. Dans le cas d'un conducteur à plusieurs contacts, les fluctuations de potentiel (ou de charges) peuvent être soit d'origine thermique soit dues au courant traversant le conducteur. Ceci conduit à généraliser la résistance de relaxation de charge pour décrire la situation hors équilibre [522]. Dans le cas d'un conducteur à deux contacts, on est conduit à introduire la matrice $\mathcal{N}_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2i\pi} \mathcal{S}_{\alpha\beta}^\dagger \frac{\partial \mathcal{S}_{\alpha\beta}}{\partial E}$ décrivant la contribution à la densité d'états des électrons entrant par le contact β et sortant par le contact α (ces matrices correspondent à intégrer la densité d'états locale partielle dans le système). Dans la situation à l'équilibre, les fluctuations de charge $S_{QQ} = 2k_B T C_\mu^2 \mathcal{R}_q$ font intervenir la résistance

$$\mathcal{R}_q = \frac{h}{2e^2} \frac{\sum_{\alpha\beta} \text{Tr}\{\mathcal{N}_{\beta\alpha}\mathcal{N}_{\alpha\beta}\}}{[\sum_{\alpha} \text{Tr}\{\mathcal{N}_{\alpha\alpha}\}]^2} \quad (1.82)$$

Dans la situation hors équilibre dominée par le bruit de grenaille c'est la résistance [522, 125]

$$\mathcal{R}_v = \frac{h}{e^2} \frac{\text{Tr}\{\mathcal{N}_{12}\mathcal{N}_{21}\}}{[\sum_{\alpha} \text{Tr}\{\mathcal{N}_{\alpha\alpha}\}]^2} \quad (1.83)$$

qui est mise en jeu $S_{QQ} = 2|eV| C_\mu^2 \mathcal{R}_v$ (pour $|eV| \gg \hbar\omega, k_B T$).

Résistance dc et résistance de relaxation.— Insistons : aucune des résistances \mathcal{R}_q ou \mathcal{R}_v ne correspond avec la résistance dc du système

$$\mathcal{R}_{dc} = \frac{h}{e^2} \frac{1}{\text{Tr}\{\mathcal{S}_{12}^\dagger \mathcal{S}_{12}\}}. \quad (1.84)$$

L'analyse des comportements pour un système balistique connecté à deux contacts permet de cerner la différence. Considérons un système balistique connecté par deux constriction de $N_1 \gg 1$ et $N_2 \gg 1$ canaux (les contacts restent de petite dimension comparé au système). La résistance du système est dominée par les résistances de contacts : la résistance correspond donc à la mise en *série* des résistances de contact $\mathcal{R}_{dc} = \frac{h}{e^2} \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} \right)$. En revanche, la résistance de relaxation de charge est associée au temps $\mathcal{R}_q C_\mu$ caractérisant l'échelle de temps sur laquelle la charge quitte le système, ce qui explique que la loi d'addition corresponde cette fois-ci à la mise en *parallèle* des résistances de contact $\mathcal{R}_q = \frac{h}{2e^2} \frac{1}{N_1 + N_2}$ [125, 127].⁴¹ Ces résultats sont obtenus par une théorie de matrices aléatoires.

Décohérence dépendant de la manière de contacter un anneau AB.— L'analyse précise des fluctuations de charge joue un rôle très important dans l'étude de la décohérence : le taux de décohérence peut être relié aux fluctuations de charge par la relation $1/\tau_\varphi = \frac{e^2}{2\hbar^2} S_{UU}$ [409, 126]. Une expérience intéressante reliée à cette remarque est celle de Kobayashi : le taux de décohérence est extrait de l'amplitude des oscillations AB d'un anneau balistique. La manière dont l'anneau est contacté (si les contacts par lesquels le courant est injecté sont de part et d'autre de l'anneau ou du même côté, mesure "locale" ou "non locale") affecte les fluctuations de charge dans l'anneau, ce qui se reflète sur le taux de décohérence (*cf.* [367] et [584, 585] pour l'analyse théorique).

Beyond BPT's treatment of electronic interactions

The Büttiker-Prêtre-Thomas (BPT) approach presented in Refs. [136, 134, 137, 535] is essentially a Hartree-Fock treatment of electronic interactions within a Thomas-Fermi approximation. The result, for the expression of the mesoscopic capacitance (1.78), has been supported by a more precise Hartree-Fock calculation in weakly disordered quantum dot, within the universal model for QD (see the frame page 34) [701].

The experimental observation of the universal value $R_q = h/(2e^2)$ for a single spin polarised channel [271], has then stimulated further developments : the universal result was also obtained within a mean-field Hartree-Fock analysis [491, 133, 544] improving the Thomas-Fermi treatment of BPT, and beyond mean field [312, 475], within Matveev formalism [444] of QPC (see also [224]). These treatments have accounted for possible Coulomb blockade effect.

Finally, I quote Nigg and Büttiker, who showed in Ref. [490] that strong enough dephasing inside the cavity can induce the transition from the universal value to the DC resistance $R_q = h/(e^2\mathcal{T})$, where \mathcal{T} is the transmission probability through the QPC.

1.2.7 En guise de conclusion : construire la matrice \mathcal{S}

Cette rapide revue de quelques aspects récents de la physique mésoscopique illustre le rôle central de la matrice \mathcal{S} décrivant la traversée de l'échantillon mésoscopique par un électron, jusque dans l'analyse de propriétés locales ou le traitement de l'interaction entre électrons. La première étape de l'étude d'un problème spécifique requiert donc la construction de \mathcal{S} . Citons quelques situations :

- L'étude d'une constriction quantique (QPC). Il est possible de calculer explicitement la matrice \mathcal{S} , par exemple dans [121] par une approximation quadratique ou dans l'annexe p. 46.

⁴¹ L'argument de Büttiker doit toutefois être nuancé car, contrairement à la résistance DC qui obéit à une loi d'addition simple lorsqu'on augmente le nombre des canaux, tel n'est pas le cas pour la résistance de relaxation de charge. On pourra voir notre travail récent : Grabsch & Texier [298].

- Une autre situation où la matrice \mathcal{S} se construit aisément est le cas d'un conducteur dans le régime de l'effet Hall entier pour lequel le courant est transporté le long des bords de l'échantillon. L'absence de rétrodiffusion, sauf en quelques points permet une construction de la matrice de scattering [119]. Un calcul précis des amplitudes de probabilité entre états de bord au niveau des constriction peut se faire à l'aide de la remarque précédente.
- L'étude des billards chaotiques permet d'utiliser les théories de matrices aléatoires [102, 707, 780, 702]. L'hypothèse que la matrice \mathcal{S} du système est distribuée selon un des ensembles (COE, CUE ou CSE) permet de calculer de nombreuses quantités : la conductance moyenne, sa correction de localisation faible, les fluctuations de conductance, le bruit de grenaille moyen, la correction de localisation faible au bruit [707] (la jolie vérification expérimentale du bruit de grenaille d'un billard chaotique à contacts symétriques $F = 1/4$ [502]). Les quantités que nous avons introduites plus haut requièrent des informations sur la structure en énergie de la matrice \mathcal{S} . Il est également possible d'étendre la théorie de matrices aléatoires présentée dans [707] pour étudier des quantités comme la capacité électrochimique [292, 103] les temps de Wigner [292, 269, 105, 106, 640], où comme nous l'avons déjà mentionné le transport non linéaire [560, 135, 531, 532].

Notons que les théories de matrices aléatoires peuvent également être utilisées pour l'étude d'un fil métallique faiblement désordonné [204, 451, 205] (*cf.* [707] pour une présentation pédagogique). Cette approche a remporté un certain succès et permet de retrouver les résultats de l'approche diagrammatique pour étudier diverses quantités : la correction de localisation faible $\Delta g = \frac{1}{3}(1 - \frac{2}{\beta})$ à la conductance d'un fil ($\beta = 1, 2, 4$ est l'index de Dyson), les fluctuations universelles de conductance $\text{Var}(g) = \frac{2}{15\beta}$ [452], le bruit de grenaille ⁴² $P = G_{\text{Drude}}/3$ (i.e. $F = 1/3$) [67], ⁴³ la correction de localisation faible au bruit de grenaille $\Delta P = \frac{1}{45}(1 - \frac{2}{\beta})$ et ses fluctuations mésoscopiques $\text{Var}(P) = \frac{46}{2835\beta}$ [426]. L'intérêt de l'approche est de décrire également la transition vers le régime de localisation forte, pour des fils longs.

- Depuis les premiers travaux utilisant l'approche semiclassique (pour une revue, voir les ouvrages de Gutzwiller [761, 306]) pour étudier le transport quantique, des progrès récents ⁴⁴ par Richter & Sieber [543] ont redynamisé l'intérêt pour cette approche (on peut citer [687] sur une description de la décohérence dans ce cadre).
- Une autre catégorie de systèmes modèles sont les réseaux de fils. Une situation expérimentale modélisée par un réseau peut être une structure de fils quasi 1D gravés dans un gaz d'électrons bidimensionnel (2DEG). La faible densité électronique des 2DEG assure un faible nombre de canaux de conduction (il peut descendre à quelques unités). ⁴⁵ Si nous

⁴² On définit le "shot noise power" $P = \sum_n T_n(1 - T_n)$ et le facteur de Fano $F = \sum_n T_n(1 - T_n) / \sum_n T_n$.

⁴³ calculé par d'autres méthodes dans [484, 32] et mesuré dans [325].

⁴⁴ Les premiers résultats analytiques utilisant l'approche semiclassique se plaçaient dans le cadre de l'*approximation diagonale*. Si celle-ci est satisfaisante pour de nombreuses quantités (elle permet par exemple de retrouver la conductance de Drude) elle ne permet pas de reproduire quantitativement la correction de localisation faible [55]. Cela n'est que récemment que Richter & Sieber ont compris comment inclure les effets des croisements quantiques (boîte de Hikami) pour inclure des contributions allant au delà de l'approximation diagonale (l'analogie des chemins à boucles que nous considérerons dans les systèmes diffusifs, figure 4.2, p. 112, par exemple). Ils ont ainsi pu reproduire les résultats de l'approche des matrices aléatoires [543] (l'avantage de l'approche semiclassique est d'offrir une description plus microscopique que l'approche des matrices aléatoires qui conduit à des théories phénoménologiques). La floraison de travaux utilisant l'approximation semiclassique illustre la souplesse de l'approche et la possibilité qu'elle offre de décrire la transition vers le régime classique [344, 113] (voir [736, 523] pour des revues récentes).

⁴⁵ Contrairement au cas des réseaux de fils métalliques 3D (Au, Ag, Cu, Mn,...) qui seront discutés plus tard et

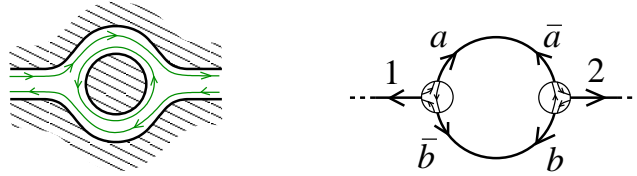


FIGURE 1.16 : A ring in the QHE regime : current is carried by edge states. This is a physical realisation of BIC : the outer edge states are associated with the continuous part of the spectrum whereas the edge state turning around the antidot is quantized. The scattering matrix describing this device was constructed in Ref. [636].

nous intéressons principalement aux effets liés à la topologie du système, comme l'effet AB à travers un anneau, il est parfois suffisant de modéliser le système comme un réseau de fils strictement unidimensionnels. De très nombreuses discussions reposent sur ces hypothèses (par exemple [131, 130, 116, 275]). D'autre part, dans le régime de l'effet Hall quantique entier, si l'on s'intéresse uniquement aux états de bord [311, 119], l'analyse du scattering s'apparente à celle de la diffusion sur un graphe orienté ou en introduisant des diffusions chirales aux vertex (un exemple et discuté dans [636], cf. figure 1.16). Nous discutons ces systèmes dans la section suivante.

qui sont caractérisés par un très grand nombre de canaux. Par exemple, des fils d'argent de section $60 \text{ nm} \times 50 \text{ nm}$ (de l'ordre de la limite technologique actuelle) contiennent $N_c \simeq 35000$ canaux.

Annexe A : Un modèle de constriction

Nous résolvons un petit exercice de mécanique quantique visant à construire explicitement la matrice \mathcal{S} dans le cadre d'un modèle de constriction. Une version simplifiée a été proposée dans [121] où la présence d'un champ magnétique a cependant été prise en compte.

Le potentiel de Pöschl-Teller

Nous commençons par rappeler un problème unidimensionnel soluble bien connu, que nous allons utiliser pour l'analyse du problème de constriction. Nous considérons l'hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \frac{K_0^2}{\cosh^2(x/a)} \right), \quad (1.85)$$

pour lequel l'équation de Schrödinger est soluble (*cf.* le §25 de [765] ou [771]). Posons

$$E = \frac{k^2}{2m} \quad (1.86)$$

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - (2K_0a)^2} \right). \quad (1.87)$$

Remarquons que s est réel si $2K_0a < 1$, i.e. la barrière est "basse/étroite". Dans ce cas l'hamiltonien possède une structure dite supersymétrique [764], ce qui explique l'intégrabilité du problème. En effet, si nous définissons le fonction $\phi(x) = -\frac{s}{a} \tanh\left(\frac{x}{a}\right)$ et l'opérateur $Q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{dx} + \phi(x)$, nous obtenons

$$Q^\dagger Q = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{K_0^2}{\cosh^2(x/a)} + \left(\frac{s}{a}\right)^2, \quad (1.88)$$

donc $H = \frac{1}{2m} [Q^\dagger Q - \left(\frac{s}{a}\right)^2]$.

États stationnaires de diffusion.— L'état stationnaire de diffusion incident par la gauche est donné par une fonction hypergéométrique ⁴⁶ :

$$\boxed{\psi_E^{(L)}(x) = \mathcal{N} (1 - \xi^2)^{-ika/2} F\left(-s - ika, 1 + s - ika; 1 - ika; \frac{1 - \xi}{2}\right)} \quad (1.91)$$

en fonction de la variable $\xi = \tanh(x/a)$. La constante de normalisation est

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2\pi v_k}} 2^{ika} \frac{\Gamma(-s - ika) \Gamma(1 + s - ika)}{\Gamma(1 - ika) \Gamma(-ika)} \quad (1.92)$$

⁴⁶ On rappelle une définition de la fonction hypergéométrique $F \equiv {}_2F_1$ [742, 759, 771]

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad \text{où } (a)_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (1.89)$$

et une propriété utile ici

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b; a+b-c+1; 1-z) \\ &+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-z). \end{aligned} \quad (1.90)$$

où $v_k = k/m$ est la vitesse de groupe. Ce choix assure que la fonction d'onde présente les comportements asymptotiques :

$$\psi_E^{(L)}(x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi v_k}} \left(e^{ikx} + r e^{-ikx} \right) \quad \text{pour } x \rightarrow -\infty \quad (1.93)$$

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi v_k}} t e^{ikx} \quad \text{pour } x \rightarrow +\infty, \quad (1.94)$$

où les amplitudes de réflexion et de transmission sont données par

$$r = \frac{\Gamma(-s - ika) \Gamma(1 + s - ika) \Gamma(ika)}{\Gamma(1 + s) \Gamma(-s) \Gamma(-ika)} \quad (1.95)$$

et

$$t = \frac{\Gamma(-s - ika) \Gamma(1 + s - ika)}{\Gamma(1 - ika) \Gamma(-ika)} \quad (1.96)$$

L'état incident de la droite $\psi_E^{(R)}(x)$ est obtenu en utilisant la symétrie du potentiel :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r \end{pmatrix}. \quad (1.97)$$

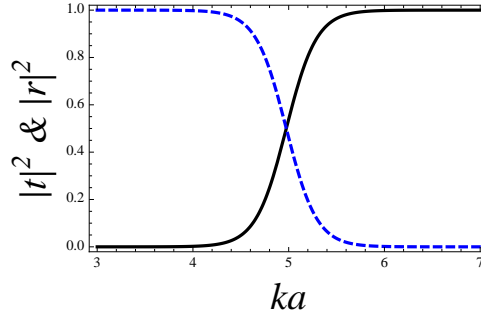


FIGURE 1.17 : Probabilité de transmission et de réflexion à travers une barrière décrite par le potentiel de Pöschl-Teller pour $K_0 a = 5$.

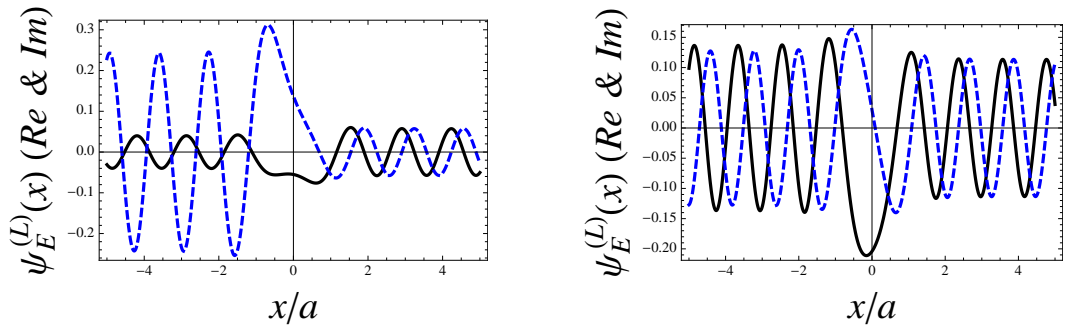


FIGURE 1.18 : État stationnaire de diffusion du potentiel de Pöschl-Teller pour $K_0 a = 5$ avec $ka = 4.75$ (à gauche) et $ka = 5.25$ (à droite).

On peut écrire la probabilité de transmission

$$|t|^2 = \frac{\sinh^2(\pi ka)}{\sinh^2(\pi ka) + \cosh^2[\frac{\pi}{2}\sqrt{(2K_0a)^2 - 1}]} \quad \text{pour } 2K_0a > 1 \quad (1.98)$$

$$= \frac{\sinh^2(\pi ka)}{\sinh^2(\pi ka) + \cos^2[\frac{\pi}{2}\sqrt{1 - (2K_0a)^2}]} \quad \text{pour } 2K_0a < 1 \quad (1.99)$$

Si l'on se place dans la limite $k, K_0 \gg a$ l'expression se simplifie : la probabilité de transmission prend la forme d'une "fonction de Fermi"

$$|t|^2 \simeq \frac{1}{1 + e^{2\pi(K_0 - k)a}} \simeq \frac{1}{1 + e^{\frac{2\pi}{\hbar\omega_0}(V_0 - E)}} \quad \text{pour } K_0a \gg 1. \quad (1.100)$$

Cette forme aurait pu être obtenue plus directement en considérant une barrière quadratique $V(x) = \frac{K_0^2}{2m}(1 - \frac{x^2}{a^2}) = V_0 - \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2$ (cf. le §50 de [765] citant E. C. Kemble [360]).

Puits de potentiel.— Le cas d'un puits est obtenu simplement en faisant $K_0^2 \rightarrow -K_0^2$ dans les expressions : notamment $s = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + (2K_0a)^2}) \in \mathbb{R}^+$ et

$$|t|^2 = \frac{\sinh^2(\pi ka)}{\sinh^2(\pi ka) + \cos^2[\frac{\pi}{2}\sqrt{1 + (2K_0a)^2}]} \quad (1.101)$$

En utilisant les propriétés d'analyticité de l'amplitude de diffusion, nous pouvons trouver le spectre $\{E_n = -\frac{1}{2m}k_n^2\}$ des états liés du puits. En effet le prolongement analytique de l'amplitude de diffusion diverge sur les états liés du puits ⁴⁷ $r(k \rightarrow ik)$ et $t(k \rightarrow ik) \propto \Gamma(-s + ka) = \infty$ pour $k = k_n$ avec

$$k_n = \frac{1}{2a} \left(\sqrt{1 + (2K_0a)^2} - 1 - 2n \right) \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N_b - 1 \quad (1.102)$$

où le nombre d'états liés est donné par $N_b = 1 + \lfloor \frac{1}{2}(\sqrt{1 + (2K_0a)^2} - 1) \rfloor$, i.e. $N_b \sim K_0a$ (figure 1.19).

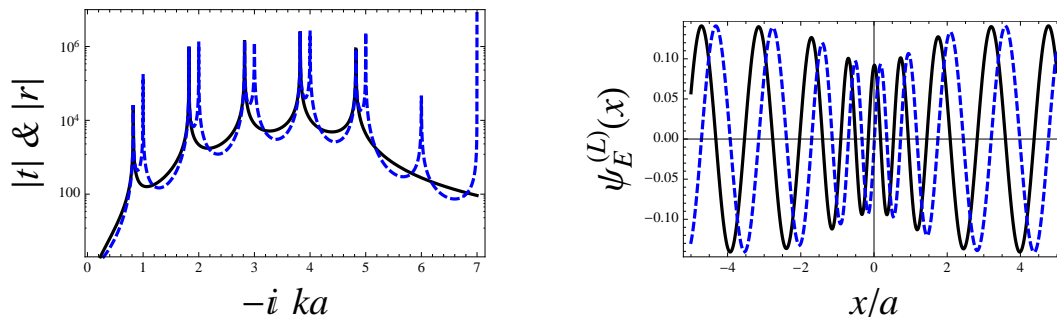


FIGURE 1.19 : À gauche : modules des amplitudes r (dashed blue) et t (black) pour un puits décrit par le potentiel de Pöschl-Teller pour $K_0a = 5$. Les cinq valeurs de ka où r & t divergent ensemble correspondent aux énergies des cinq états liés. À droite : État stationnaire de diffusion pour $K_0a = \sqrt{8(8+1)}$ et $ka = 4$: la transmission est parfaite, $|t| = 1$.

Remarquons que lorsqu'on fait varier la profondeur du puits continûment, le coefficient de réflexion s'annule pour chaque valeur de K_0a correspondant à l'apparition d'un nouvel état lié,

⁴⁷ Avec la substitution $k \rightarrow ik$ les amplitudes r et t divergent sur les états liés pour une amplitude incidente fixée. Autrement dit la fonction d'onde prend la forme $\psi(x \rightarrow \pm\infty) \sim e^{\mp kx}$ d'une solution normalisable.

si $\sqrt{1 + (2K_0a)^2} = 1 + 2n$ i.e. $s = n$ est entier. Dans ce cas le puits transmet parfaitement à toute énergie (cf. l'éq. (1.101)) :

$$|t| = 1 \quad \forall E > 0 \quad \text{pour } K_0a = \sqrt{n(n+1)} \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \quad (1.103)$$

Constriction

Nous considérons un modèle de constriction quantique décrit par le potentiel de confinement :

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega(x)^2 y^2. \quad (1.104)$$

La fonction $\omega(x)$ est prise constante, égale à ω_0 en $\pm\infty$ pour décrire le confinement par le fil, et présente une bosse au voisinage de $x = 0$, pour décrire l'action du potentiel de grille qui ouvre et ferme le point quantique.

Remarque : au lieu de choisir un confinement harmonique on pourrait aussi bien choisir des conditions de bord dur sur une largeur variable $W(x)$. La discussion suivante s'adapterait trivialement.

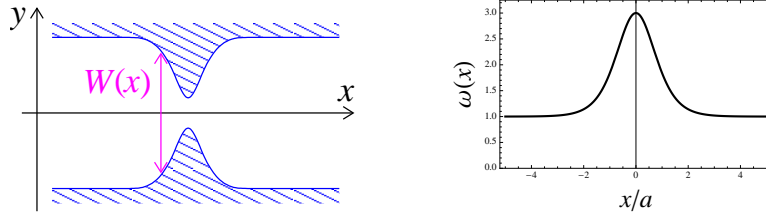


FIGURE 1.20 : Constriction gravée dans un gaz d'électrons bidimensionnel. Le confinement transversal peut être modélisé facilement par une condition de type bord dur ou un confinement harmonique pour $\omega(x) = \frac{\hbar}{mW(x)^2}$ (à droite). En pratique la constriction peut être contrôlée par des grilles de tension latérales.

Hypothèse adiabatique.— Il est possible de résoudre l'équation de Schrödinger dans l'approximation adiabatique supposant des variations lentes du potentiel sur l'échelle de la longueur d'onde de Fermi λ_F . Si $\omega(x)$ varie sur une échelle caractéristique ℓ_ω :

$$\lambda_F \ll \ell_\omega. \quad (1.105)$$

Ceci nous permet de proposer un ansatz de la forme

$$\psi(x, y) = \varphi(x) \chi_x(y) \quad (1.106)$$

où x joue le rôle de paramètre pour la fonction d'onde transverse. Le mode transverse est solution de

$$\left(-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{2} m \omega(x)^2 y^2 \right) \chi_x(y) = \epsilon \chi_x(y). \quad (1.107)$$

Cette dernière équation nous donne les solutions de l'oscillateur harmonique. On injecte l'énergie du mode $\epsilon_n = \omega(x)(n + 1/2)$, avec $n \in \mathbb{N}$, dans l'équation pour $\varphi(x)$:

$$\left[-\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \omega(x) \left(n + \frac{1}{2} \right) \right] \varphi_{E,n}(x) \simeq E \varphi_{E,n}(x). \quad (1.108)$$

Notons l'absence de couplage entre canaux dans l'hypothèse adiabatique, i.e. la matrice des transmissions $t = \mathcal{S}_{RL}$ est diagonale dans cette approximation.

Modèle pour $\omega(x)$: Pöschl-Teller.— Pour aller plus loin on propose la forme suivante pour $\omega(x)$ (figure 1.20)

$$\omega(x) = \omega_0 + \frac{\omega_1}{\cosh^2(x/a)} \quad (1.109)$$

qui conduit à un modèle exactement soluble. Posons

$$E_n(k) = \frac{k^2}{2m} + \omega_0 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \quad (1.110)$$

Le coefficient de transmission à travers le point quantique dans le canal n est alors donné par

$$t_n(E) = \frac{\Gamma(-s_n - ika) \Gamma(1 + s_n - ika)}{\Gamma(1 - ika) \Gamma(-ika)} \quad (1.111)$$

$$\text{où } s_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - (2K_n a)^2} \right) \quad \text{avec} \quad \frac{K_n^2}{2m} \stackrel{\text{def}}{=} \omega_1 \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (1.112)$$

L'approximation adiabatique, $\lambda_F \ll \ell_\omega$, prédit donc que la matrice des transmission est diagonale : $(\mathcal{S}_{RL})_{nm} \simeq t_n \delta_{n,m}$.

Chapitre 2

Théorie de la diffusion dans les réseaux de fils unidimensionnels

2.1 Introduction

Les techniques expérimentales permettent de graver des fils de très petites dimensions dans un gaz d'électrons bidimensionnel (2DEG). La largeur des fils peut atteindre jusqu'à $W \sim 400 - 500$ nm [487, 241]; la largeur effective peut être encore diminuée par application d'une tension sur une grille métallique déposée au dessus du gaz, si bien que le nombre de canaux de conduction par fil peut atteindre quelques unités ($N_c \sim 2 - 10$). Dans un réseau de tels fils, certaines propriétés sont peu sensibles à l'existence d'une dimension transverse des fils ou à la manière précise dont les fils sont connectés, mais davantage à la topologie du système ce qui conduit à modéliser le système comme un réseau de fils strictement unidimensionnels. De tels modèles ne prétendent pas donner une description quantitative mais visent plutôt à décrire qualitativement certains phénomènes liés à la topologie. L'exemple le plus simple est celui de l'étude de l'effet Aharonov-Bohm dans un anneau balistique [131, 130] : prendre en compte la largeur finie des fils affecte le contraste des oscillations AB mais pas leur amplitude qui reste d'ordre e^2/h pour un anneau cohérent.

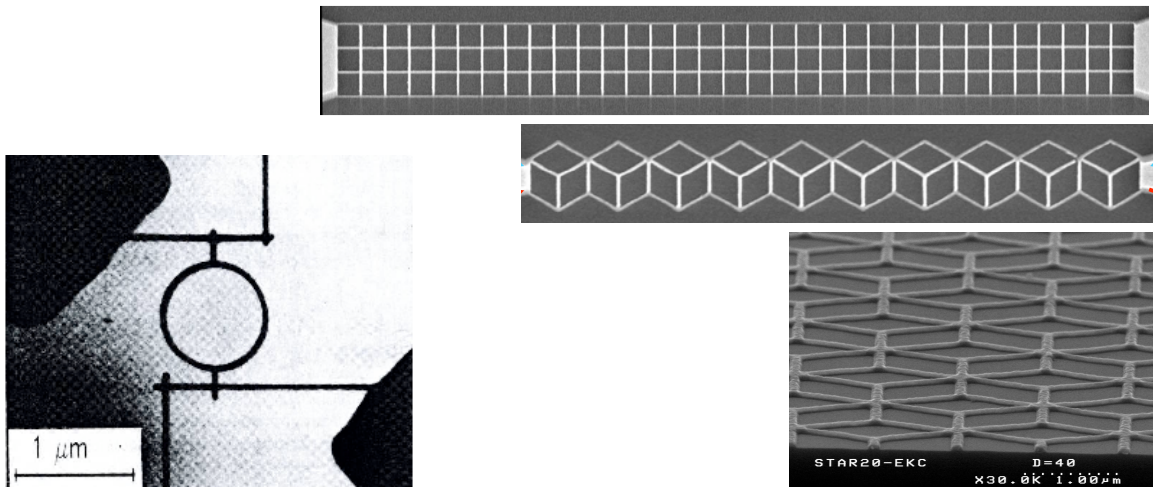


FIGURE 2.1 : Réseaux métalliques. À gauche : un anneau d'or [741]. À droite : réseaux de fils d'argent (C. Bäuerle & L. Saminadayar). Pas du réseaux carré $a \simeq 0.64 \mu\text{m}$ [576].

Expérimentalement les premières observations d'oscillations AB sur la conductance d'an-

neaux d'or (à $N_c \gg 1$) [741, 677] (partie gauche de la figure 2.1) ¹ ont été reproduites sur des anneaux gravés dans des 2DEG possédant peu de canaux. L'anneau AB reste le système incontournable de la physique mésoscopique, adapté à la mise en évidence de la nature cohérente du transport. Une illustration en est donnée par toute la série de travaux initiés par l'expérience de Yacoby *et al* [694] de mesure de conductance à 2 terminal d'un anneau dont un des bras est coupé par deux barrières pour former une boîte quantique (QD). L'observation d'oscillations AB alors que le transport à travers le QD est dans le régime du blocage de Coulomb met en évidence la nature cohérente du transport à travers le QD. Par la suite une mesure de résistance à 4 terminal a été réalisée pour permettre de suivre la phase de la transmission à travers le QD [579]. Ces expériences ont été à l'origine d'un regain d'intérêt pour l'analyse de la phase de l'amplitude de transmission (*cf.* l'article de Levy Yeyati & Büttiker [412] pour une revue) avec notamment la remarque intéressante de la relation entre les sauts de phase abrupts observés dans l'expérience de Schuster [579] et une annulation de la transmission [402, 625]. Le principe de l'expérience de Schuster a été réutilisé à plusieurs reprises (par exemple *cf.* [368, 599]).

Une autre situation où l'effet de la topologie est prédominant et pour laquelle la physique est bien capturée par un modèle de fils 1D est le cas des réseaux présentant un *effet de cage Aharonov-Bohm* [670], un effet de localisation par le champ magnétique ² pour des réseaux tels qu'il y ait toujours deux chemins symétriques pour aller d'un site à son voisin (par exemple le réseau \mathcal{T}_3 de la partie droite de la figure 2.1). Dans ce cas l'allumage d'un champ magnétique peut conduire à des interférences destructives entre ces deux chemins et empêcher la propagation de l'onde dans le réseau. L'étude du transport par Vidal, Montambaux & Douçot [669] a montré que l'effet est résistant à l'introduction de certain type de désordre (désordre de phase). L'effet de cage AB a été observé dans les réseaux balistiques gravés dans un 2DEG au cours de la thèse de Cécile Naud [486, 789, 487] (notons que les conclusions de ces premières expériences ont été par la suite remises en cause dans une la thèse de Joseph Dufouleur [781]). ³

Du côté théorique, l'étude de l'équation de Schrödinger sur un réseau de fils 1D a suscité une quantité considérable de travaux qu'il serait difficile de répertorier de manière exhaustive. À ma connaissance, la première motivation pour étudier l'équation de Schrödinger sur un réseau de fils 1D visait à modéliser des molécules [550]. Ces modèles ont par la suite été utilisés dans une grande variété de contextes : travaux sur la transition de localisation dans les réseaux de B. Shapiro [591, 592], étude du transport à travers un anneau AB [131, 130] ou des chaînes d'anneaux [178, 495]. Mentionnons également l'analyse de réseaux plus exotiques [142], ou même des réseaux fractaux [537] supraconducteurs [13] ou pour l'étude des agrégats métalliques [145].

L'étude du spectre ou de la diffusion sur un réseau a reçu une grande attention. Une formulation assez générale a été développée par Avron *et al* [706, 51, 50]. Elle a trouvé une application très intéressante pour l'étude du chaos quantique dans les graphes à la fin des années 90 [376, 76, 377, 59, 378, 61, 77, 379]. Parmi les travaux théoriques on peut encore citer les travaux d'Exner [235, 231, 233, 232]; mes articles contiennent une bibliographie plus exhaustive sur la question de la diffusion.

¹ la courbe de magnétoconductance obtenue pour ces anneaux est représentée sur la partie droite de la figure 5.14, page 148.

² La possible localisation par la topologie d'une fraction des états avait été étudiée dans [620] pour des réseaux bipartites. L'effet de cage AB étudié par Vidal *et al* [670] conduit à la localisation complète des états pour certaines valeurs du champ magnétique.

³ L'effet de cage a été démontré expérimentalement par des mesures de la dépendance en champ magnétique de la température critique dans des réseaux supraconducteurs. Théoriquement, la température critique T_c est donnée par le niveau fondamental du problème spectral sur le réseau [13]. L'effet de cage est démontré par comparaison des comportements de $T_c(B)$ obtenus pour un réseau carré [517] et un réseau \mathcal{T}_3 [1, 514] au voisinage du demi quantum de flux par plaquette.

2.2 Opérateur de Laplace dans un graphe métrique

L'opérateur de Laplace sur un graphe métrique apparaîtra fréquemment dans les différents travaux qui seront présentés. Nous distinguons deux situations : l'équation de Schrödinger $i\partial_t\psi(x, t) = [-(\partial_x - ieA(x))^2 + V(x)]\psi(x, t)$ dont nous étudierons les états stationnaires de diffusion. L'étude du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques diffusifs fera intervenir la version de la précédente équation en temps imaginaire, l'équation de la diffusion libre $\partial_t P(x, t) = \Delta P(x, t)$ (l'analyse de certaines propriétés du mouvement brownien dans un graphe métrique peut conduire à ajouter un terme potentiel scalaire ou de potentiel vecteur dans l'équation de la diffusion [196, 168, 714]).

Commençons d'abord par introduire quelques notations.

Vertex, liens, arcs.— Un graphe est un ensemble de V vertex, que nous choisirons de repérer par des lettres grecques α, β, \dots , reliés par B liens, que nous notons $(\alpha\beta), \dots$. Il est également utile d'introduire la notion d'*arc* désignant un lien orienté. Nous notons $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ les deux arcs associés au lien $(\alpha\beta)$. Nous utiliserons également les lettres latines pour les repérer et noterons a et \bar{a} les deux arcs renversés. Un invariant topologique permettant de caractériser le graphe est son *rang*

$$r = 1 + B - V, \quad (2.1)$$

i.e. le nombre de cycles indépendants.

Matrice d'adjacence.— Pour caractériser la topologie du graphe on introduit la matrice d'adjacence $a_{\alpha\beta}$ (ou matrice de connectivité) définie comme suit : $a_{\alpha\beta} = 1$ si les deux vertex sont reliés par un lien, $a_{\alpha\beta} = 0$ si les vertex ne sont pas directement reliés. Notons que cette définition semble exclure la possibilité que plusieurs liens relient deux vertex, ou qu'un lien revienne au vertex dont il est issu pour former une boucle. Ceci n'implique aucune restriction sur la topologie du graphe car il est toujours possible d'introduire suffisamment de vertex dans un graphe donné pour éviter cette situation.⁴ Nous introduisons la coordination du vertex α (le nombre de vertex reliés à α par un lien) : $m_\alpha = \sum_\beta a_{\alpha\beta}$. Une ultime sommation nous donne le nombre d'arcs (i.e. le double du nombre de liens) : $\sum_\alpha m_\alpha = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} = 2B$.

Chemins et orbites (ou circuits).— Un chemin est un ensemble ordonné d'arcs tels que la fin d'un arc corresponde au début de l'arc suivant. Une orbite (ou circuit) est la classe d'équivalence de tous les chemins fermés équivalents par permutation circulaire. Une orbite qui n'est pas la répétition d'une orbite plus petite est dite *primitive*.

Fonction scalaire sur un graphe métrique.— Les notions introduites jusqu'à présent définissent un *graphe combinatoire*. Un *graphe métrique* \mathcal{G} est obtenu en associant une longueur à chacun des liens. Nous notons $l_{\alpha\beta}$ la longueur du lien $(\alpha\beta)$. Nous pouvons donc associer à chaque lien un intervalle $[0, l_{\alpha\beta}]$ de \mathbb{R} et définir une fonction scalaire $\varphi(x)$ à valeurs dans \mathcal{G} par l'ensemble de ses composantes $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ pour $x \in [0, l_{\alpha\beta}]$ (la notation $\varphi_{\alpha\beta}(x)$ indique que la position est mesurée dans la direction de l'arc $\alpha\beta$). Nous pouvons définir le produit scalaire entre deux fonctions comme $\langle \varphi | \chi \rangle = \int_{\mathcal{G}} dx \varphi^*(x)\chi(x) = \sum_{(\alpha\beta)} \int_0^{l_{\alpha\beta}} dx \varphi_{\alpha\beta}^*(x)\chi_{\alpha\beta}(x)$.

⁴ Le nombre de vertex V et le nombre de lien B sont en partie arbitraires puisque l'on peut toujours introduire un vertex au milieu d'un lien, augmentant le nombre de liens d'une unité dans le même temps. Un invariant topologique est le "rang" du graphe, $B - V + 1$, qui correspond au nombre de cycles indépendants.

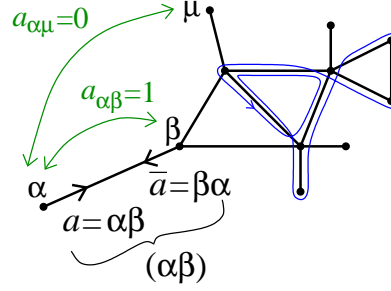


FIGURE 2.2 : Exemple de graphe à $V = 11$ vertex et $B = 13$ liens. Un exemple d'orbite (primitive) est dessiné.

Opérateur de Laplace.— Sur le lien $(\alpha\beta)$, le Laplacien agit sur la composante d'une fonction scalaire $\varphi(x)$ comme le Laplacien unidimensionnel : $(\Delta\varphi)_{\alpha\beta}(x) = \frac{d^2\varphi_{\alpha\beta}(x)}{dx^2}$. Afin d'assurer que l'opérateur de Laplace est auto-adjoint nous devons spécifier des conditions de raccordement aux vertex. Discutons deux cas particuliers simples avant de faire quelques remarques sur le cas général. Nous introduisons une notation spécifique pour les limites que prennent la fonction et sa dérivée lorsque la coordonnée tend vers le vertex $\varphi_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\alpha\beta}(0)$ et $\varphi'_{\alpha\beta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\varphi_{\alpha\beta}}{dx}(0)$.

(A) **Fonction continue.**— Nous considérons l'action du Laplacien sur des fonctions continues $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \forall \beta$ voisin de α , où φ_α désigne la valeur de la fonction au vertex. La condition la plus générale assurant que Δ est auto-adjoint est alors $\sum_\beta a_{\alpha\beta}\varphi'_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha\varphi_\alpha$ avec $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ (la matrice d'adjacence dans la somme assure que celle-ci porte sur les voisins de α). Dans le problème de mécanique quantique, $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ assure la conservation de la probabilité.⁵ Cette condition est parfois appelée “ δ -coupling” par analogie avec la situation 1D (si $m_\alpha = 2$) où la condition décrit le raccordement d'une fonction de part et d'autre d'un δ de Dirac. La limite $\lambda_\alpha \rightarrow \infty$ conduit à l'annulation de la fonction au vertex, *i.e.* une condition de *Dirichlet*. Pour la coordonnée $m_\alpha = 1$ le cas $\lambda_\alpha = 0$ correspond à une condition de *Neumann*.

(B) **Fonction à dérivée continue.**— Une condition duale de la précédente est celle où la dérivée est choisie continue : $\varphi'_{\alpha\beta} = \varphi'_\alpha \forall \beta$ voisin de α . La condition générale assurant que le Laplacien est auto-adjoint est cette fois $\sum_\beta a_{\alpha\beta}\varphi_{\alpha\beta} = \mu_\alpha\varphi'_\alpha$ avec $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$. On parle dans ce cas de “ δ'_s -coupling” [229, 230] (Exner introduit deux types de “couplages” : δ' -coupling et une version symétrisée δ'_s -coupling). La limite $\mu_\alpha \rightarrow \infty$ correspond à l'annulation des dérivées, *i.e.* une condition de *Neumann*. Symétriquement avec le cas précédent, à l'extrémité d'un bras, pour une coordonnée $m_\alpha = 1$ avec $\mu_\alpha = 0$ on obtient une condition de *Dirichlet*.

(C) **Conditions aux limites générales.**— Les deux types de conditions aux limites que nous venons de décrire permettent une simplification importante liée à la possibilité de définir des *variables de vertex*, au nombre de V . Ce type de conditions aux limites peut encore être généralisé [195], notamment pour interpoler entre les deux cas. Les conditions aux limites les plus générales ont été discutées par Kostykin et Schrader [372] et prennent la forme $C\varphi + D\varphi' = 0$ où φ et φ' sont les deux vecteurs colonnes regroupant les $2B$ variables. C et D sont deux matrices $2B \times 2B$ possédant les deux propriétés assurant que le Laplacien est auto-adjoint : (i) CD^\dagger est auto-adjoint. (ii) La matrice $2B \times 4B$ (C, D) a rang maximal (égal à $2B$). Cette situation nécessite donc de travailler avec les $2B$ *variables d'arcs*, en général beaucoup plus nombreuses. Faisons quelques remarques :

- Les matrices C et D caractérisent les propriétés topologiques du graphe.

⁵Dans le problème de diffusion classique le courant de diffusion est $J(x, t) = -\partial_x P(x, t)$. Les conditions ont la forme $-\sum_{\alpha\beta} J_{\alpha\beta} = \lambda_\alpha P_\alpha$. Le membre de droite correspond au courant quittant le graphe, ce qui montre que λ_α est proportionnel à la probabilité pour que la particule atteignant le vertex quitte le graphe.

- Le choix des deux matrices C et D n'est pas unique.
- La situation générale où la formulation du problème requiert des *variables d'arcs* connectées par les matrices C et D (ou la matrice Q définie plus bas) correspond donc à considérer un graphe orienté.

Matrice de scattering de vertex

Les différentes conditions aux limites correspondent à différents types de scattering aux vertex, ce qui en pratique dépend de détails microscopiques (la manière dont les fils du réseau sont raccordés). Considérons l'équation $-\Delta\psi(x) = k^2\psi$. Si nous écrivons la fonction d'onde au bord du fil comme $\psi_j(x) = A_j e^{-ikx} + B_j e^{ikx}$, les $2B$ amplitudes arrivant aux vertex sont reliées aux amplitudes en sortant par la matrice de scattering de vertex $B = QA$. Analysons la matrice Q pour les différents types de conditions aux limites. Pour simplifier nous discutons la structure de la matrice Q au niveau d'un vertex α de coordinnence m_α (i.e. nous considérons un graphe en étoile avec des arêtes infinies). Nous obtenons la matrice $m_\alpha \times m_\alpha$ de diffusion $Q^{(\alpha)}$ par le vertex. La matrice Q complète du graphe est obtenue en regroupant toutes ces matrices, i.e. dans une base appropriée elle présente la structure diagonale par blocs

$$Q = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \cdot & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & Q^{(\alpha)} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & Q^{(\beta)} & & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \hline 0 & 0 & 0 & \cdots & \ddots \end{array} \right) \quad (2.2)$$

Condition de type (A).– Écrivons les m_α composantes de la fonction d'onde sur les m_α arêtes comme $\varphi_j(x) = A_j e^{-ikx} + B_j e^{ikx}$. Lorsque la fonction d'onde satisfait les conditions de type (A) correspondant à la continuité au vertex, on obtient le système de m_α équations $A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = \cdots = A_{m_\alpha} + B_{m_\alpha} = \varphi_\alpha$ et $ik \sum_j (B_j - A_j) = \lambda_\alpha \varphi_\alpha$. En injectant $\varphi_\alpha = \frac{1}{m_\alpha} \sum_j (B_j + A_j)$ dans cette dernière équation on obtient facilement la matrice de scattering au vertex

$$Q^{(\alpha)} = \frac{2}{m_\alpha + i\lambda_\alpha/k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{1}_{m_\alpha} \quad (2.3)$$

où $\mathbf{1}_m$ est la matrice identité $m \times m$. On vérifie facilement l'unitarité $Q^\dagger Q = \mathbf{1}_{2B}$.

Le cas $\lambda_\alpha \rightarrow \infty$ correspond à un vertex impénétrable $Q^{(\alpha)} = -\mathbf{1}_{m_\alpha}$ avec condition de Dirichlet, $\varphi_j(0) = 0 \forall j$.

Notons que le cas $\lambda_\alpha = 0$ peut s'interpréter comme l'absence de potentiel. En particulier, dans le cas d'une coordinnence $m_\alpha = 2$, la matrice de scattering

$$Q^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

décrit l'absence de diffusion. Le vertex avec $\lambda_\alpha = 0$ au milieu d'un fil peut donc être "éliminé" (i.e. $V \rightarrow V - 1$ et $B \rightarrow B - 1$).

Condition de type (B).– Examinons maintenant le cas d'une fonction d'onde à dérivée continue. En procédant comme pour le cas précédant on obtient le système de m_α équations $-A_1 + B_1 =$

$-A_2 + B_2 = \dots = -A_{m_\alpha} + B_{m_\alpha} = \varphi'_\alpha/ik$ et $\sum_j (A_j + B_j) = \mu_\alpha \varphi'_\alpha$. La matrice de scattering est donnée par

$$Q^{(\alpha)} = \frac{2}{-m_\alpha + i\mu_\alpha k} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{1}_{m_\alpha} \quad (2.5)$$

Notons que la limite $\mu_\alpha \rightarrow \infty$ conduit à un vertex impénétrable avec cette fois des conditions de Neumann, $\varphi'_j(0) = 0 \forall j$.

Le cas $\mu_\alpha = 0$ avec une coordinnence $m_\alpha = 2$ correspond à la matrice de scattering

$$Q^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Contrairement au cas des conditions aux limites de type (A) avec $\lambda_\alpha = 0$, le vertex introduit une diffusion correspondant au changement de signe de la fonction d'onde.

Condition générale (C).– Dans le cas général, en partant des conditions aux limites $C\varphi + D\varphi' = 0$, on obtient facilement [372]

$$Q = (ikD - C)^{-1}(ikD + C) \quad (2.7)$$

Sur cette forme on retrouve que la physique au niveau du vertex est inchangée par la transformation $(C, D) \rightarrow (C', D') = (UC, UD)$ pour U inversible.

Expérience : scattering dans une croix balistique.– Les conditions aux limites de type (A) et (B) n'ont que peu de chance de correspondre à une situation physique réelle, sauf dans le problème de la diffusion classique pour lequel le choix (A) d'une probabilité continue aux vertex est naturel. Dans le problème quantique, ce sont seulement des choix commodes pour les problèmes qui nous intéresseront par la suite. Puisque les conditions de type (C) décrivent le cas le plus général, nous pourrions nous poser la question de savoir quelles conditions aux limites correspondraient à une situation physique réelle. Répondre à cette question requiert d'étudier les détails microscopiques au niveau du vertex. Contentons-nous de mentionner une situation quasi-1D pour comprendre comment les détails microscopiques pourraient affecter le scattering au vertex : sur la figure 2.3 on montre les résistances de Hall obtenues pour différentes croix de Hall balistiques. Les schémas montrent les trajectoires semiclassiques pour les différents vertex, ce qui suggère comment le scattering est affecté par les détails microscopiques au niveau du vertex (dans l'expérience le nombre de canaux de conduction est estimé entre $N_c \approx 2$ et 8) [255]. On pourra également consulter la discussion de la revue de Beenakker & van Houten [69].

2.3 Scattering dans les graphes métriques

J'évoque très brièvement quelques points développés dans quatre articles.

Théorie de la diffusion dans les graphes métriques :

✍ [641] Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Scattering theory on graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **34**, 10307–10326 (2001).– Étant donné la fréquence avec laquelle les modèles du type “réseaux de fils 1D” sont utilisés, il nous avait paru intéressant de développer une formulation générale permettant de construire la matrice de scattering d'un graphe métrique connecté à un nombre arbitraire de contacts.

On considère un graphe ayant B liens internes, V vertex et connecté à L fils externes. Deux formulations générales ont été discutées :

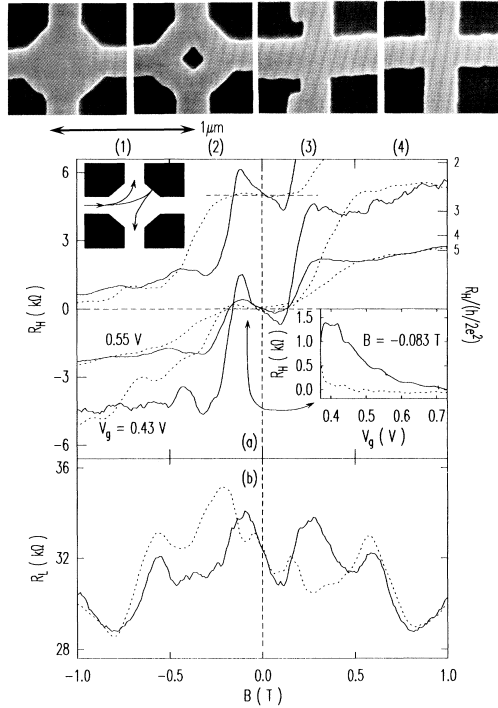


FIG. 1. (Top) Electron micrographs of the following devices: (1) a widened cross, (2) a widened cross with a central dot, (3) a cross with narrow probes, and (4) a “normal” (nominally perfect) cross. (a) R_H vs B for a sample consisting of devices (1) and (4), for several values of V_g . The solid and dotted lines are for the widened and normal crosses, respectively (on the same sample). The trace offset vertically by 5 k Ω shows corresponding results for a different, nominally identical, sample. Inset: A gate-voltage sweep showing that R_H has the wrong sign for all V_g . (b) R_L for $V_g = 0.43$ V, measured on the two sides of the channel. Inset for each figure: The electron paths, as discussed in the text.

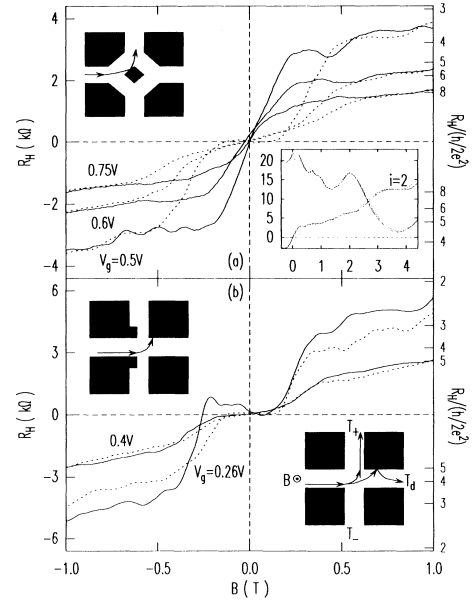


FIG. 2. (a) R_H vs B for various values of V_g . The solid and dotted lines are for the widened cross with a central dot (2) and the normal cross (4) on the same sample. Inset: High-field data which illustrate tracking of the two curves and the usual quantized Hall effect for $V_g = 0.50$ V. (b) R_H vs B for several values of V_g . The solid and dotted lines are for the cross with narrow probes (3) and the normal cross (4) on the same sample.

FIGURE 2.3 : Croix de Hall gravée dans un gaz d'électrons bidimensionnel (à une interface GaAs/GaAlAs). La largeur effective des fils des différents échantillons est comprise dans l'intervalle $90 \text{ nm} < W < 190 \text{ nm}$, ce qui correspond à un nombre de canaux $2 < N_c < 8$. Tiré de Ford et al [255].

(i) une formulation adaptée au cas le plus général en terme des **variables d'arcs**. On introduit la matrice $2B \times 2B$ de scattering de liens R (reliant les amplitudes aux extrémités des liens) et la matrice $(2B + L) \times (2B + L)$ de scattering de vertex Q (reliant les amplitudes des ondes sortant des vertex à celles y arrivant). On obtient assez trivialement la structure

$$\mathcal{S} = Q^{\text{ext}} + \tilde{Q}(R^\dagger - Q^{\text{int}})^{-1}\tilde{Q}^{\text{T}} \quad (2.8)$$

où Q^{int} , resp. Q^{ext} , est la sous matrice de scattering de vertex couplant les arcs internes, resp. externes, entre eux. \tilde{Q} couple les arcs internes aux arcs externes. Notons qu'une formule similaire a été proposée pour étudier les réseaux de fils métalliques supraconducteurs [346].

(ii) Une formulation plus simple en terme des **variables de vertex**, adaptée à la situation où la fonction d'onde est continue dans le graphe (et éventuellement discontinue au niveau de la connection aux fils externes), qui est maintenant discutée.

Couplage entre le graphe et les fils externes.— Nous avons commencé par construire la matrice de scattering d'un vertex couplé à un fil externe (figure 2.4). Nous considérons un fil externe (le fil numéro m sur la figure 2.4) branché au graphe à travers une barrière d'amplitude

de transmission de probabilité $t_\alpha = \frac{2w_\alpha}{1+w_\alpha^2}$ avec $w_\alpha \in \mathbb{R}$ (la matrice de scattering décrivant le lien est donnée dans [641]). Nous obtenons une matrice de scattering pour le vertex ayant une structure assez parlante :

$$Q^{(\alpha)} = \frac{2}{m_\alpha^*} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \cdots & 1 & w_\alpha \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & w_\alpha \\ \hline w_\alpha & \cdots & w_\alpha & w_\alpha^2 \end{array} \right) - \mathbf{1}_{m_\alpha} \quad \text{avec } m_\alpha^* \stackrel{\text{def}}{=} m_\alpha - 1 + w_\alpha^2 + i \frac{\lambda_\alpha}{k}. \quad (2.9)$$

Lorsque $w_\alpha = 1$ (transmission $t_\alpha = 1$), m_α^* fait intervenir la coordinnence m_α et on retrouve la matrice (2.3). Dans la limite inverse, lorsque $w_\alpha = 0$ (transmission nulle $t_\alpha = 0$), la matrice (2.3) apparaît dans le bloc supérieur gauche pour une coordinnence réduite $m_\alpha - 1$, décrivant la diffusion entre les fils internes, découplés du fil extérieur. Remarquons que le paramètre w_α est relié à la discontinuité de la fonction d'onde. Si nous notons $\psi_i(x)$ les composantes de la fonction d'onde sur les m_α arcs, nous avons (partie droite de la figure 2.4) :

$$\psi_1(0) = \cdots = \psi_{m_\alpha-1}(0) = \frac{1}{w_\alpha} \psi_{m_\alpha}(0). \quad (2.10)$$

La matrice (2.9) paramétrise de façon commode le couplage au fil externe. Elle généralise et rend plus transparente une autre paramétrisation proposée par B. Shapiro [592] et utilisée par M. Büttiker dans plusieurs articles (par exemple [130]).

Si L vertex parmi les V sont reliés à l'extérieur par des fils infinis, nous introduisons la matrice $L \times V$ regroupant tous les paramètres de couplage :

$$W_{\alpha\beta} = w_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha \in L \text{ vertex connectés} \\ \beta \in V \text{ vertex} \end{cases} \quad (2.11)$$

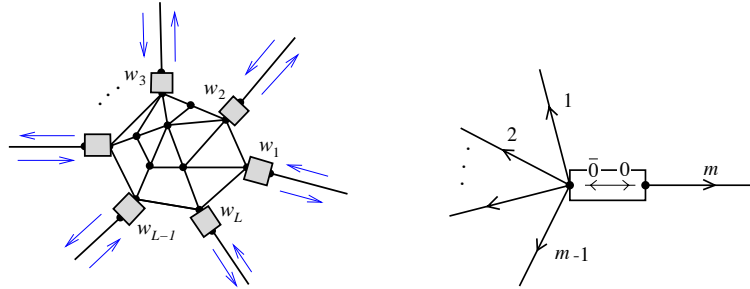


FIGURE 2.4 : Diffusion dans un graphe métrique. Les boîtes représentent des couplages ajustables par les paramètres w_α .

Description des potentiels sur les fils.— Si le potentiel est non nul sur le fil $(\alpha\beta)$, il occasionne une réflexion décrite à travers deux paires de coefficients de réflexion et de transmission $(r_{\alpha\beta}, t_{\alpha\beta})$ et $(r_{\beta\alpha}, t_{\beta\alpha})$ (les coefficients ne sont pas indépendants mais relié par l'unitarité de la matrice de scattering de lien). Les flux magnétiques sont intégrés aux amplitudes de transmission.

Matrice de scattering.— La matrice \mathcal{S} du graphe est de la forme

$$\mathcal{S} = -\mathbf{1}_L + 2W (M + W^T W)^{-1} W^T \quad (2.12)$$

où la matrice M est définie comme

$$M_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(i \frac{\lambda_\alpha}{k} + \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} \frac{(1 - r_{\alpha\mu})(1 + r_{\mu\alpha}) + t_{\alpha\mu} t_{\mu\alpha}}{(1 + r_{\alpha\mu})(1 + r_{\mu\alpha}) - t_{\alpha\mu} t_{\mu\alpha}} \right) - a_{\alpha\beta} \frac{2t_{\alpha\beta}}{(1 + r_{\alpha\beta})(1 + r_{\beta\alpha}) - t_{\alpha\beta} t_{\beta\alpha}} \quad (2.13)$$

où la matrice d'adjacence $a_{\alpha\mu}$ dans la somme contraint cette dernière à ne porter que sur les vertex connectés à α . Dans la situation où la fonction d'onde est continue c'est la façon la plus compacte de coder l'information : sur la topologie du graphe (matrice $a_{\alpha\beta}$), le potentiel (les coefficients $r_{\alpha\beta}$ et $t_{\alpha\beta}$ associés à chaque fil), le champ magnétique (une partie de la phase de $t_{\alpha\beta}$) et la façon dont le graphe est connecté aux contacts externes (les paramètres w_α).

En l'absence de potentiel ($r_{\alpha\beta} = 0$ et $t_{\alpha\beta} = e^{ikl_{\alpha\beta} + i\theta_{\alpha\beta}}$ où $\theta_{\alpha\beta} = -\theta_{\beta\alpha}$ est le flux magnétique) nous retrouvons la forme bien connue [50]

$$M_{\alpha\beta} = i \delta_{\alpha\beta} \sum_{\mu} a_{\alpha\mu} \cotg kl_{\alpha\mu} - a_{\alpha\beta} \frac{ie^{i\theta_{\alpha\beta}}}{\sin kl_{\alpha\beta}} \quad (2.14)$$

Discussion

- L'expression (2.12) a une structure similaire à la formule de Weidenmüller

$$\mathcal{S} = \mathbf{1} - 2\pi i \mathcal{W} \left(E - \mathcal{H} + i\pi \mathcal{W}^\dagger \mathcal{W} \right)^{-1} \mathcal{W}^\dagger \quad (2.15)$$

où \mathcal{H} est l'Hamiltonien du système isolé et \mathcal{W} décrit le couplage à l'extérieur (aux contacts) ; cette expression est très utilisée dans l'approche hamiltonienne du chaos quantique, cf. par exemple [770, 738]. La matrice M joue donc le rôle d'un Hamiltonien effectif pour les variables de vertex, intégrant l'information sur les liens.

- L'intérêt du résultat (2.12,2.13) est de permettre d'ajuster les couplages entre le graphe et les fils externes et de passer ainsi continûment de la situation du graphe isolé à la situation de scattering. En particulier nous avons identifié la "bonne" matrice de diffusion décrivant les boîtes de la figure 2.4 (notamment la paramétrisation de l'amplitude de transmission $t_\alpha = \frac{2w_\alpha}{1+w_\alpha^2}$) qui n'affecte pas la nature du scattering de vertex dans les limites du graphe maximalelement couplé ($w_\alpha = 1$) et la limite du graphe découplé ($w_\alpha = 0$).
- La relation entre spectre discret du graphe isolé et propriétés de la diffusion est particulièrement claire dans la limite de la diffusion résonante, $w_\alpha \rightarrow 0$, analysée dans [636]. Nous notons $\{E_n, \varphi_n(x)\}$ le spectre du graphe isolé (pour $w_\alpha = 0 \forall \alpha$), supposé non dégénéré pour simplifier. Nous considérons un état stationnaire d'énergie E proche de l'énergie d'un état propre du graphe isolé : $E \sim E_n$. Nous introduisons les quantités $\Gamma_{n,\alpha} \simeq \sqrt{E_n} w_\alpha^2 |\varphi_n(\alpha)|^2$; la largeur de la résonance est donnée par $\Gamma_n = \sum_\alpha \Gamma_{n,\alpha}$. L'état stationnaire incident par le contact α à l'intérieur du graphe est proportionnel à l'état propre du graphe isolé [636] :

$$\psi_E^{(\alpha)}(x \in \mathcal{G}) \underset{E \sim E_n}{\simeq} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{iE_n^{1/4} w_\alpha \varphi_n^*(\alpha)}{E - E_n + i\Gamma_n} \varphi_n(x). \quad (2.16)$$

À partir de (2.12), on peut retrouver la structure de Breit-Wigner dans la limite où le graphe est faiblement couplé à l'extérieur

$$\mathcal{S}_{\alpha\beta}(E) \underset{E \sim E_n}{\simeq} -\delta_{\alpha\beta} + \frac{2i\sqrt{E_n} w_\alpha \varphi_n(\alpha) w_\beta \varphi_n^*(\beta)}{E - E_n + i\Gamma_n}. \quad (2.17)$$

2.4 Matrice \mathcal{S} , DoS et courants

Relation de Krein-Friedel dans les réseaux – BIC :

- ☞ [629] Christophe Texier, *Scattering theory on graphs (2) : the Friedel sum rule*, J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3389–3407 (2002). – Ce travail discute la relation de Friedel dans les graphes. Comme il a été mentionné plus haut, la règle de Friedel permet notamment de compter les états dans le graphe, à partir des propriétés de diffusion. Le nombre d'états est $\int_{\mathcal{G}} dx \rho(x; E) \simeq \frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dE} \ln \det \mathcal{S}$. L'article souligne que des graphes suffisamment symétriques peuvent posséder des états localisés ne se couplant pas à l'extérieur, appelés BIC (bound states in the continuum). Différents exemples sont étudiés. Nous analysons le plus simple ci-dessous.

Relation entre la matrice \mathcal{S} et des quantités locales dans les graphes :

- ☞ [634] Christophe Texier & Markus Büttiker, *Local Friedel sum rule in graphs*, Phys. Rev. B **67**, 245410 (2003).
- ☞ [636] Christophe Texier & Pascal Degiovanni, *Charge and current distribution in graphs*, J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 12425–12452 (2003). – Les deux articles discutent la relation entre matrice \mathcal{S} et quantités locales dans le graphe (densité, courant). Nous avons déjà mentionné plus haut que la densité d'états locale peut être exprimée comme une dérivée fonctionnelle de la matrice \mathcal{S} :

$$\rho(x \in \mathcal{G}; E) = \underbrace{\frac{-1}{2i\pi} \frac{\delta}{\delta V(x)} \ln \det \mathcal{S}(E)}_{\text{scattering states}} + \underbrace{\sum_n |\varphi_n(x)|^2 \delta(E - E_n)}_{\text{BIC}} \quad (2.18)$$

Trois remarques :

- La dérivée fonctionnelle peut être construite systématiquement dans un graphe, et ne requiert que des manipulations algébriques.
- Nous avons ajouté la contribution des BIC (cf. chapitre 1), s'il y en a. La condition d'existence des BIC est l'existence de solution(s) à l'équation

$$\det(R^\dagger - Q^{\text{int}}) = 0. \quad (2.19)$$

- L'intégrale de la densité d'états $\int_{\mathcal{G}} dx \rho(x; E)$ présente une décomposition similaire, c'est pourquoi la phase de Friedel $\frac{-1}{2i\pi} \ln \det \mathcal{S}(E)$ ne permet pas toujours de compter les états dans le graphe.

Exemple : Considérons un anneau de périmètre L traversé d'un flux θ et connecté à un fil infini par lequel une onde est envoyée sur l'anneau.

➔ Pour $\theta \neq 0$ et π , $\det(R^\dagger - Q^{\text{int}}) = 0$ n'admet pas de solution pour k réel. La LDoS est donnée par l'état stationnaire :

$$\rho(x \in \text{ring}; E) = |\psi_E(x)|^2 = \left| \frac{w}{\sqrt{\pi k}} \frac{\sin k(L-x) + e^{i\theta} \sin kx}{2(\cos \theta - \cos kL) + iw^2 \sin kL} \right|^2 \quad (2.20)$$

La position $x \in [0, L]$ est mesurée à partir du point de branchement entre le fil infini et l'anneau. Le paramètre w décrit le couplage entre l'anneau et le fil, comme nous l'avons expliqué plus haut.

► Pour $\theta = 0$, $\det(R^\dagger - Q^{\text{int}}) = 0$ admet des solutions, pour $k = k_n = 2n\pi/L$ (pour $\theta = \pi$ l'équation admet également des solutions). La densité d'états locale dans l'anneau se décompose en une contribution de l'état stationnaire et une contribution des BIC.

$$\rho(x \in \text{ring}; E) = \underbrace{\left| \frac{w}{\sqrt{\pi k}} \frac{\cos k(x - L/2)}{2 \sin(kL/2) + iw^2 \cos(kL/2)} \right|^2}_{|\psi_E(x)|^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(k^2 - k_n^2) \left| \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x \right|^2 \quad (2.21)$$

Cette expression appelle quelques remarques

- Insistons : la composante singulière des BIC est *superposée* à la composante continue [675, 616].
- Partons de la situation de l'anneau isolé ($w = 0$). Le spectre de l'anneau est discret et l'on peut toujours choisir une base de fonction paire/impair. Si nous branchons le couplage au fil ($w \neq 0$), seul l'état pair se couple au continuum. L'état impair s'annulant au vertex ne se couple pas. Les deux termes de la densité d'états locale correspondent précisément à ces deux types d'états.
- L'origine des BIC semble donc fortement liée aux symétries du graphe (i.e. à l'existence de dégénérescences dans le spectre du graphe isolé). S'il est possible de construire un état s'annulant à tous les vertex du graphe isolé, alors un tel état ne se couple pas au continuum (états de diffusion) lorsque le graphe est connecté à des fils infinis.
- Notons que tout ce qui brise les symétries élimine les BIC. Par exemple, l'ajout d'un champ magnétique dans l'anneau isolé lève la dégénérescence du spectre et élimine la composante singulière des BIC dans la densité d'états locale.
- Les deux derniers points nous montrent que le cas des graphes avec BIC n'est pas générique.

Courants dans les fils internes.— Discutons l'exemple important du courant permanent, la relation avec la matrice \mathcal{S} avait été discutée pour la première fois dans [7] (*cf.* le comment [173]) : dans une situation à l'équilibre la contribution des états stationnaires de $[E, E + dE]$ au courant est $dI(E) = dE \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \det \mathcal{S}$. Il avait été noté dans [624] qu'il est également possible d'exprimer les fluctuations du courant à l'aide de la matrice \mathcal{S} . Dans notre travail [636] nous avons généralisé cette idée pour considérer des situations hors équilibre. En introduisant θ_a , le flux magnétique réduit (i.e. en unité de $\phi_0 = h/e$) dans le fil a , on obtient l'expression pour le courant moyen dans le fil a

$$\langle J_a \rangle = \int dE \sum_{\beta} f_{\beta}(E) \frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{d\theta_a} \right)_{\beta\beta} \quad (2.22)$$

généralisant le résultat de [7]. Le spectre de bruit (corrélateur des courants dans les fils a et b) est donné par

$$S_{J_a J_b}(\omega = 0) = -\frac{1}{2\pi} \int dE \sum_{\alpha, \beta} f_{\alpha}(E) [1 - f_{\beta}(E)] \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{d\theta_a} \right)_{\alpha\beta} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{d\theta_b} \right)_{\beta\alpha} \quad (2.23)$$

qui généralise l'expression obtenue à l'équilibre dans [624]

$$S_{J_a J_b}^{\text{equil.}}(\omega = 0) = \frac{1}{2\pi} \int dE f(E) [1 - f(E)] \text{Tr} \left\{ \frac{d\mathcal{S}^\dagger}{d\theta_a} \frac{d\mathcal{S}}{d\theta_b} \right\} \quad \text{pour } V_{\alpha} = 0 \forall \alpha \quad (2.24)$$

Contribution des BIC au courant moyen.— Notons que ces expressions s’appliquent pour les graphes ne possédant pas de BIC. Dans le cas contraire le courant reçoit des contributions supplémentaires des états localisés dans le graphe. Par exemple pour le courant moyen dans le fil a devient [636] :

$$\begin{aligned} \langle J_a \rangle &= \int dE \sum_{\beta} f_{\beta}(E) \frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^{\dagger} \frac{d\mathcal{S}}{d\theta_a} \right)_{\beta\beta} \\ &\quad + \int dE f_{\text{int}}(E) \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{d}{d\theta_a} \ln \left(\det(R^{\dagger} - Q^{\text{int}}) \Big|_{E \rightarrow E+i0^+} \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

où Q^{int} est la matrice de scattering de vertex couplant les arcs internes au graphe (à l’exclusion des arcs associés avec les fils de contact) et R la matrice de scattering de lien. $f_{\text{int}}(E)$ est la distribution décrivant l’occupation des états localisés à l’intérieur du graphe.

Densité d’états, densité d’états locale et matrice \mathcal{S}

Nous venons de voir plusieurs applications de l’équation (1.50) reliant les éléments de matrice d’une observable \hat{X} entre états stationnaires à la matrice \mathcal{S} . Pour clore ce chapitre revenons sur le cas de la densité d’états, ce qui nous permettra d’établir des connections avec le chapitre suivant.

Discutons tout d’abord le cas de la densité d’états locale associée à l’opérateur $H = -\Delta + V(x)$. L’opérateur qui doit être moyenné est l’opérateur densité de particule $\hat{X} \rightarrow \hat{\rho}(x) = \delta(x - \hat{x}) = |x\rangle\langle x|$ et la “force” conjuguée le potentiel local $f \rightarrow V(x)$. En l’absence de BIC nous obtenons :

$$\rho(x \in \mathcal{G}; E) = \langle x | \delta(E - \hat{H}) | x \rangle = -\frac{1}{2i\pi} \frac{\delta}{\delta V(x)} \ln \det \mathcal{S} \quad (2.26)$$

qui correspond à la trace de la formule rencontrée au chapitre précédent

$$\psi_E^{(\alpha)}(x) \psi_E^{(\beta)*}(x) = -\frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^{\dagger} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} \right)_{\alpha\beta}. \quad (2.27)$$

Rappelons que les dérivées fonctionnelles de la matrice \mathcal{S} du graphe peuvent être calculées assez facilement par des manipulations algébriques [634].

Cette expression peut être intégrée dans le graphe pour donner la densité d’états du graphe : $\rho_{\mathcal{G}}(E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{G}} dx \rho(x \in \mathcal{G}; E)$. Dans ce cas l’observable est la charge à l’intérieur du graphe $\hat{X} \rightarrow \hat{Q}_{\mathcal{G}} = \theta_{\mathcal{G}}(\hat{x})$ où $\theta_{\mathcal{G}}(x)$ est la fonction indicatrice [$\theta_{\mathcal{G}}(x) = 1$ si $x \in \mathcal{G}$ et 0 sinon]. La “force” conjuguée est un potentiel constant dans le graphe (et nul dans les fils). Nous considérons maintenant l’opérateur $H = -\Delta + V(x) + U\theta_{\mathcal{G}}(x)$:

$$\rho_{\mathcal{G}}(E) = \int_{\mathcal{G}} dx \langle x | \delta(E - \hat{H}) | x \rangle = -\frac{1}{2i\pi} \frac{d}{dU} \ln \det \mathcal{S} \quad (2.28)$$

Notons la légère différence avec la formule de Krein-Friedel donnée plus haut :

$$\rho_{\mathcal{G}}(E) = \frac{1}{2i\pi} \left(\frac{d}{dE} \ln \det \mathcal{S} + \frac{\text{Tr} \{ \mathcal{S} - \mathcal{S}^{\dagger} \}}{4E} \right), \quad (2.29)$$

trace de la relation plus générale [636]

$$-\int_{\mathcal{G}} dx \mathcal{S}^{\dagger} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta V(x)} = -\mathcal{S}^{\dagger} \frac{d\mathcal{S}}{dU} = \mathcal{S}^{\dagger} \frac{d\mathcal{S}}{dE} + \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}^{\dagger}}{4E}. \quad (2.30)$$

Chapitre 3

Functional determinants and trace formulae in metric graphs

3.1 Functional determinants – Motivations

3.1.1 Introduction

Spectral problems are plethoric in physics. When confronted to such a problem, one is faced to the question : what is the « best » manner to encode the spectral information and what is the most efficient way to determine the spectrum $\{E_n\}$ of a given operator ? For example the calculation of the spectral density $\rho(E) = \sum_n \delta(E - E_n)$ may involve first the determination of the Green's function and the analysis of its poles : $G(x, x'; \gamma) = \sum_n \frac{\psi_n(x)\psi_n^*(x')}{\gamma + E_n}$. The precise relation between the two quantities being $\rho(E) = +\frac{1}{\pi} \text{Im} \int dx G(x, x; -E - i0^+)$. In other situations, it might be more convenient to consider the partition function $Z(t) = \sum_n e^{-E_n t}$, i.e. the Laplace transform of the density of states, $Z(t) = \int dE \rho(E) e^{-Et}$. Concerning the spectral properties of metric graphs, we will see that the « best » way to encode the spectral information about the Laplace or Schrödinger operator is to consider a functional determinant, named here the « *spectral determinant* », formally defined by

$$S(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\gamma - \Delta) = \prod_n (\gamma + E_n), \quad (3.1)$$

where γ is a spectral parameter.

Let us start by a very simple concrete example : we consider the Schrödinger operator on a ring pierced by a magnetic flux. We solve the spectral problem

- $-\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E \psi(x)$ for $x \in [0, L]$
- with periodic boundary conditions $\psi(L) = \psi(0) e^{i\theta}$ & $\psi'(L) = \psi'(0) e^{i\theta}$

where the phase θ is the dimensionless magnetic flux. In this case the spectrum of eigenvalues may be straightforwardly obtained : $\text{Spec}(-\Delta \text{ on ring}) = \{E_n = (\frac{2n\pi - \theta}{L})^2 \text{ with } n \in \mathbb{Z}\}$. Finally the spectral determinant may be determined from the knowledge of the spectrum ¹

$$S^{\text{ring}}(\gamma) \propto \prod_n \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{\gamma L^2}{(2n\pi - \theta)^2}\right) = \frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} [\cosh \sqrt{\gamma} L - \cos \theta]. \quad (3.2)$$

This little calculation already raises few questions :

¹From the formula [1.432] of Gradshteyn & Ryzhik [759].

- How can we possibly generalise this result to any metric graph with arbitrary topology?
- Is there a precise procedure to regularise this calculation, i.e. regularise the infinite product $\prod_n(\gamma + E_n)$?
- When the graph possesses a zero mode $E_0 = 0$ (like in the ring when the magnetic flux vanishes $\theta \rightarrow 0$), how can we deal with this?

Finally, let us stress that the logic followed later will be exactly opposite to the discussion of the example : from the (simple) determination of the spectral determinant, we will (possibly) deduce the spectrum.

We now give a partial answer to the second question (a more detailed answer will be given in section 3.6 of this chapter [632, 317]) by noticing that we may relate the *derivative* of the logarithm of the spectral determinant to the trace of the resolvent operator $\text{Tr}\{\frac{1}{\gamma-\Delta}\}$:

$$G(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n \frac{1}{\gamma + E_n} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma). \quad (3.3)$$

This is also the double Laplace transform (i.e. a Hilbert transform) of the density of states

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma) = \int_0^\infty dt Z(t) e^{-\gamma t} = \int_0^\infty dt e^{-\gamma t} \int dE e^{-Et} \rho(E) = \int dE \frac{\rho(E)}{\gamma + E}. \quad (3.4)$$

This possible determination of the spectral determinant $S(\gamma)$ provides the infinite product, *up to a global multiplicative factor independent on γ* . Another regularisation of the infinite product, explained in section 3.6 (the ζ -regularisation), allows to fix this prefactor, however it will play no role in all physical applications (this chapter and chapter 5).

3.1.2 Motivations

The spectral determinant is a transversal tool appearing in each situation where we have to deal with the Laplace or the Schrödinger operator (not only the spectral information as we will see), and it will allow to establish deep connections between the previous chapter on scattering in open graphs and the study of quantum transport in networks of weakly disordered metallic wires presented in chapter 5. The two situations lead to consider respectively

1. the Schrödinger equation on a metric graph

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = [-D_x^2 + V(x)] \psi(x, t) \quad \text{where} \quad D_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - i A(x) \quad (3.5)$$

$A(x)$ is the vector potential.

2. The diffusion equation on a metric graph

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \Delta P(x, t). \quad (3.6)$$

Note that, in this context, introducing a « scalar potential » and/or a « vector potential » in the diffusion equation, $\partial_t P = [D_x^2 - V(x)]P$, allows to study certain functionals of the Brownian motion in graphs. The connection is established through the Feynman-Kac formula [351] (for a recent review on functionals of the BM in metric graphs, cf. our article [714] reproduced p. 101).

Such an analysis emerges in various physical contexts :

- Models for organic molecules [550].
- Networks of superconducting metallic wires [13] (in this case, one interesting quantity is the critical temperature $T_c(B)$, related to the ground state energy of the Laplace operator).
- Metallic aggregates [145].
- Coherent transport in networks of metallic one-dimensional wires [591, 592, 130, 277, 51, 669, 641] (chapter 2).
- Metric graphs as toy models for quantum chaos [376, 76, 377, 59, 378, 61, 77, 379].
- Electronic transport and magnetic properties of networks of quasi-one-dimensional metallic weakly disordered wires [206, 207, 518, 519, 466, 8, 642, 241, 637]. Several general results for spectral determinants have been extensively used for the analysis of quantum transport (chapter 5).

Functional determinants for metric graphs are interesting on their own due to the existence of a particularly compact and elegant formula for the spectral determinant obtained in 1999 by Gilles Montambaux & Michaël Pascaud (PM) [790, 519] in the particular case of the Laplace operator with continuous boundary conditions at the vertices.² PM's result was later generalised by Jean Desbois at the beginning of the 2000s [193, 194, 195]. These results allow to express $S(\gamma)$, i.e. the functional determinant of an operator acting in a space of *infinite* dimension, to the determinant of a *finite* size matrix, where the size of the matrix is either the number of vertices V or twice the number of bonds, $2B$:

$$S(\gamma) = \det(\underbrace{\gamma - \Delta + V(x)}_{\text{"}\infty \times \infty \text{ matrix}"}) \longrightarrow \begin{cases} S(\gamma) \propto \det \underbrace{\mathcal{M}}_{V \times V \text{ matrix}} \\ \text{or} \\ S(\gamma) \propto \det(\underbrace{C + DM}_{2B \times 2B \text{ matrix}}) \end{cases} \quad (3.7)$$

My own interest in these matters appear in the frame of discussions between the authors of Ref. [8], aiming to understand the relation between PM's formula and a trace formula due to Jean-Pierre Roth [548, 547]. Another outcome of these discussions was a new demonstration of PM's formula using path integral, that will be recalled below, and generalised to another set of vertex boundary conditions.

In the remaining part of the chapter, I review several general results on functional determinants on graphs, going from the most general situation (graphs with general boundary conditions and with a potential) to particular cases.

3.1.3 Application to the study of coherent properties of weakly disordered metals

Before discussing technical aspects of functional determinants, let us discuss more into details some important applications of this tool for the analysis of coherent properties of weakly disordered low dimensional metals. Strictly speaking the formulae given below are not restricted to networks of quasi-1D diffusive wires (modeled as metric graphs) but hold in general in low dimension, when $d \leq 2$. We here review several physical quantities directly expressed in terms of the properties of the diffusion equation :

² Note the earlier work of Exner [232] who mentioned an incomplete expression of the spectral determinant, mainly $S(\gamma) \propto \det \mathcal{M}$. This structure was also clear from the works in Refs. [13, 706, 51]. PM have also determined the γ -dependent fonction (in front of $\det \mathcal{M}$), which is important for applications.

- the weak localisation correction to the conductivity $\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{WL}}$ (*cf.* chapters 4 & 5).
- The Altshuler-Aronov correction to the conductivity $\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{ee}}$ arising from interaction among electrons (*cf.* chapter 5).
- The mesoscopic fluctuations of the conductivity $\langle \delta\sigma^2 \rangle$ (*cf.* chapter 5).
- The Aslamazov-Larkin correction to the magnetization $\langle M \rangle_{\text{ee}}$, i.e. to the persistent current, arising from electronic interactions.
- The magnetization fluctuations $\langle \delta M^2 \rangle$ (*cf.* [743], chapter 14).

The calculation of all these quantities within the diagrammatic approach involves some properties of the diffusion operator (through diffusons and/or cooperons), and may be expressed in terms of the spectral determinant, as soon as the system is regular enough [790, 519, 466, 8, 743, 744, 645] (*cf.* chapter 5) :

$$\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{WL}} = -\frac{2e^2}{\pi} \frac{1}{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma) \quad (3.8)$$

$$\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{ee}} = -\lambda_\sigma \frac{e^2}{\pi \text{Vol}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\gamma^2 \frac{\partial^3}{\partial \gamma^3} \ln S(\gamma) \right]_{\gamma=2n\pi/L_T^2} \quad (3.9)$$

$$\langle \delta\sigma^2 \rangle = -\frac{12e^4}{\beta\pi^2} \frac{1}{\text{Vol}^2} \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \ln S(\gamma) \quad (3.10)$$

$$\langle M \rangle_{\text{ee}} = \frac{\lambda_\rho}{\pi} \int_{\gamma}^{1/\ell_e^2} d\gamma' \frac{\partial}{\partial \mathcal{B}} \ln S(\gamma') \quad (3.11)$$

$$\langle \delta M^2 \rangle = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\gamma}^{1/\ell_e^2} d\gamma' (\gamma - \gamma') \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{B}^2} \ln S(\gamma') \Big|_0^{\mathcal{B}}, \quad (3.12)$$

where $S(\gamma) = \delta(\gamma - \Delta)$ is the spectral determinant of the Laplace operator (with continuous boundary conditions at vertices). λ_ρ and λ_σ are interaction parameters (*cf.* chapter 5). The spectral parameter is related to the phase coherence length L_φ as $\gamma = 1/L_\varphi^2$, apart in the case of the Altshuler-Aronov correction, which is controlled by the thermal length $L_T = \sqrt{D/T}$ (although $\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{ee}}$ is a quantum correction due to the electronic interactions, it is not a coherent contribution to the conductivity). The details leading to the derivation of the first formulae will be given in chapter 5. Two remarks concerning the conductivity fluctuations : we have introduced the Dyson parameter $\beta \in \{1, 2, 4\}$ describing the symmetry class, i.e. the presence of a « strong » magnetic field and/or « strong » spin-orbit coupling. Note that more precise expressions of the conductivity fluctuations will be given later, describing properly all possible crossovers. We also stress that the expression of $\langle \delta\sigma^2 \rangle$ is only valid in the limit $L_\varphi \ll L_T$; in the opposite limit, it is rather given by a formula proportional to $\langle \Delta\sigma \rangle_{\text{WL}}$, as we will see in § 5.3. Finally we will see that the three first formulae are only relevant when the network is sufficiently « regular » (a precise definition of this criterion will be provided in chapter 5).

It could seem at first sight that the spectral determinant only allows to express « global » quantities (i.e. physical quantities expressed as uniform integrals over the system, such as $\partial_\gamma \ln S(\gamma) = \int dx \langle x | \frac{1}{\gamma - \Delta} | x \rangle$). We will however show that « local information », like $\langle x | \frac{1}{\gamma - \Delta} | x \rangle$, can be also deduced from the spectral determinant (thanks to functional derivative, $\frac{\delta}{\delta V(x)} \ln S(\gamma) = \langle x | \frac{1}{\gamma - \Delta + V(x)} | x \rangle$).

3.2 General boundary conditions – Arc matrices

The strategy guiding the construction of the Green function consists in solving the differential equation on each bond and then matching all solutions in order to satisfy boundary conditions at vertices. Another method using path integral, valid for particular cases, will also be proposed later.

3.2.1 Analysis on each bond : Useful basis of solutions

Let us consider the Schrödinger equation on the bond (a) for an energy $-\gamma = E = +k^2$:

$$\left[\gamma - \frac{d^2}{dx_a^2} + V_a(x_a) \right] \psi(x_a) = 0 \quad \text{for } x_a \in (0, l_a) \quad (3.13)$$

We introduce three useful basis of solutions of this differential equation.

Basis 1 : scattering states and scattering amplitudes

We will express some of the properties found in this chapter in terms of *scattering information*. Each bond can be described in terms of two reflection and two transmission amplitudes, i.e. each arc a (oriented bond) is associated to one couple of coefficients r_a and t_a . Imagine that Eq. (3.13) is embedded on \mathbb{R} : we introduce the solution

$$\tilde{\psi}_a(x_a) = e^{ikx_a} + r_a e^{-ikx_a} \quad \text{for } x_a \leq 0 \quad (3.14)$$

$$= t_a e^{ik(x_a - l_a)} = t_a e^{-ikx_{\bar{a}}} \quad \text{for } x_a \geq l_a \text{ i.e. } x_{\bar{a}} \leq 0 \quad (3.15)$$

In other terms, this solution coincides with the left stationary scattering state, introduced in chapter 1, Eqs. (1.2,1.3) : $\tilde{\psi}_a(x) \leftrightarrow \sqrt{4\pi k} \psi_E^{(L)}(x)$ for $\gamma = -E - i0^+ = -k^2 - i0^+$. The right stationary state will naturally be associated to $\tilde{\psi}_{\bar{a}}(l_a - x) \leftrightarrow \sqrt{4\pi k} \psi_E^{(R)}(x)$.

We have seen in the previous chapter that the two states obeys

$$\int_0^{l_a} dx \psi_E^{(\alpha)}(x)^* \psi_E^{(\beta)}(x) = \frac{1}{2i\pi} \left(\mathcal{S}^\dagger \frac{d\mathcal{S}}{dE} + \frac{\mathcal{S} - \mathcal{S}^\dagger}{4E} \right)_{\alpha\beta}, \quad (3.16)$$

where

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} r_a & t_{\bar{a}} \\ t_a & r_{\bar{a}} \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Basis 2

Let us introduce the solution $f_a(x_a)$ satisfying the boundary conditions

$$f_a(0) = 1 \quad \text{and} \quad f_a(l_a) = 0. \quad (3.18)$$

It follows that $f_a(x)$ is a real function for $\gamma \in \mathbb{R}$.

Example ($V(x) = 0$) : When the potential vanishes, the function reads $f_a(x) = \frac{\sinh \sqrt{\gamma}(l_a - x)}{\sinh \sqrt{\gamma}l_a}$.

Another independent solution of this differential equation is naturally denoted $f_{\bar{a}}(l_a - x_a) = f_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})$ and take the values 0 for $x_a = 0$ and 1 for $x_a = l_a$ (do not confuse the two functions f_a and $f_{\bar{a}}$ with the components of a scalar function). The Wronskian of the two solutions is

$$W_a = \mathcal{W}[f_a(x), f_{\bar{a}}(l_a - x)] = -f_a'(l_a) = -f_{\bar{a}}'(l_a). \quad (3.19)$$

Sum rules can be obtained as follows [193] : we remark that $\partial_\gamma f_a(x)$ is solution of the differential equation $[\gamma - \frac{d^2}{dx^2} + V_a(x)]\partial_\gamma f_a(x) = -f_a(x)$ for the boundary conditions $\partial_\gamma f_a(0) = \partial_\gamma f_a(l_a) = 0$. Integration straightforwardly gives

$$\partial_\gamma f_a(x) = -\frac{1}{W_a} \left[f_a(x) \int_0^x dx' f_a(x') f_{\bar{a}}(l_a - x') + f_{\bar{a}}(l_a - x) \int_x^{l_a} dx' f_a^2(x') \right]. \quad (3.20)$$

We deduce

$$\int_0^{l_a} dx f_a(x)^2 = -\partial_\gamma f_a'(0) \quad (3.21)$$

$$\int_0^{l_a} dx f_a(x) f_{\bar{a}}(l_a - x) = \partial_\gamma f_a'(l_a). \quad (3.22)$$

They replace the Krein-Friedel sum rule like formulae given in the previous chapters for scattering states, like (3.16).

One can establish the relation between the two basis of solutions $\{\tilde{\psi}_a(x_a), \tilde{\psi}_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})\}$ and $\{f_a(x_a), f_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})\}$ [641] :

$$f_a(x_a) = \frac{(1 + r_{\bar{a}})\tilde{\psi}_a(x_a) - t_a\tilde{\psi}_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})}{(1 + r_a)(1 + r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}}. \quad (3.23)$$

The two following relations follow

$$f_a'(0) = -\sqrt{\gamma} \frac{(1 - r_a)(1 + r_{\bar{a}}) + t_a t_{\bar{a}}}{(1 + r_a)(1 + r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}} \quad (3.24)$$

$$f_a'(l_a) = -\sqrt{\gamma} \frac{2t_a}{(1 + r_a)(1 + r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}} \quad (3.25)$$

where we have performed some analytic continuation to negative energies $\gamma = -k^2 - i0^+$. Let us introduce the 2×2 block in the matrix M related to the two arcs a and \bar{a} :

$$M_{(a)} = \begin{pmatrix} f_a'(0) & -f_{\bar{a}}'(l_a) e^{i\theta_{\bar{a}}} \\ -f_a'(l_a) e^{i\theta_a} & f_{\bar{a}}'(0) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

The relations (3.24,3.25) with (3.99) immediately shows that the 2×2 block in the matrix R related to the two arcs a and \bar{a} indeed encodes the reflection and transmission amplitudes :

$$R_{(a)} = \begin{pmatrix} r_a & t_{\bar{a}} e^{i\theta_{\bar{a}}} \\ t_a e^{i\theta_a} & r_{\bar{a}} \end{pmatrix} \quad \text{that is} \quad R_{a,b} = \delta_{a,b} r_a + \delta_{a,\bar{b}} t_{\bar{a}} e^{i\theta_{\bar{a}}}, \quad (3.27)$$

Hence demonstrating that R is the ‘‘bond scattering matrix’’ (or more precisely its analytic continuation to energy $E \rightarrow -\gamma$). We obtain the useful relation

$$-f_a'(l_a) \det(\mathbf{1}_2 + R_{(a)}) = 2\sqrt{\gamma} t_a \quad (3.28)$$

(we recall that $t_a = t_{\bar{a}}$ follows from the one-dimensional character of the wire : it can be demonstrated by computing the Wronski determinant of the two scattering states at the two edges of the interval).

Basis 3

Another useful set of solutions are the functions $g_a(x_a)$ and $g_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})$ whose *derivative* take values 1 and 0 at the two ends of the interval :

$$g_a'(0) = 1 \quad \text{and} \quad g_a'(l_a) = 0. \quad (3.29)$$

Example ($V(x) = 0$) : When $V(x) = 0$, the function reads $g_a(x) = -\frac{\cosh \sqrt{\gamma}(l_a-x)}{\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_a}$.

The Wronski determinant is given by

$$W_a^g = \mathcal{W}[g_a(x), g_{\bar{a}}(l_a - x)] = -g_a(l_a) = -g_{\bar{a}}(l_a). \quad (3.30)$$

Following the method of Ref. [193] and recalled above one can construct the derivative of the function with respect to the spectral parameter $\partial_\gamma g_a(x) = -\frac{1}{W_a^g} [g_a(x) \int_0^x dx' g_a(x') g_{\bar{a}}(l_a - x') + g_{\bar{a}}(l_a - x) \int_x^{l_a} dx' g_a^2(x')]$. Therefore

$$\int_0^{l_a} dx g_a(x)^2 = \partial_\gamma g_a(0) \quad (3.31)$$

$$\int_0^{l_a} dx g_a(x) g_{\bar{a}}(l_a - x) = \partial_\gamma g_a(l_a) \quad (3.32)$$

It is also interesting to relate this basis of solutions to the two other basis :

$$g_a(x_a) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{(1 - r_{\bar{a}}) \tilde{\psi}_a(x_a) + t_a \tilde{\psi}_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})}{(1 - r_a)(1 - r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}} \quad (3.33)$$

from which we obtain

$$g_a(0) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{(1 + r_a)(1 - r_{\bar{a}}) + t_a t_{\bar{a}}}{(1 - r_a)(1 - r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}} \quad (3.34)$$

$$g_a(l_a) = -\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{2 t_a}{(1 - r_a)(1 - r_{\bar{a}}) - t_a t_{\bar{a}}}. \quad (3.35)$$

We also easily demonstrate that

$$g_a(x_a) = \frac{f_{\bar{a}}'(0) f_a(x_a) + f_a'(l_a) f_{\bar{a}}(x_{\bar{a}})}{f_a'(0) f_{\bar{a}}'(0) - f_a'(l_a) f_{\bar{a}}'(l_a)} \quad (3.36)$$

from which

$$g_a(0) = \frac{f_{\bar{a}}'(0)}{f_a'(0) f_{\bar{a}}'(0) - f_a'(l_a) f_{\bar{a}}'(l_a)} \quad (3.37)$$

$$g_a(l_a) = \frac{f_{\bar{a}}'(l_a)}{f_a'(0) f_{\bar{a}}'(0) - f_a'(l_a) f_{\bar{a}}'(l_a)} \quad (3.38)$$

The two matrices introduced above are hence simply related by

$$N_{(a)} = \begin{pmatrix} g_a(0) & g_{\bar{a}}(l_a) e^{i\theta_a} \\ g_a(l_a) e^{i\theta_a} & g_{\bar{a}}(0) \end{pmatrix} = M_{(a)}^{-1}. \quad (3.39)$$

Note also that $\det M_{(a)} = f_a'(l_a)/g_a(l_a)$.

3.2.2 Arc determinant (1)

Let us consider two points x and y belonging to the two arcs a and b , respectively. On the arc a we use the set of independent solutions f_a and $f_{\bar{a}}$ of the differential equation $[\gamma - \frac{d^2}{dx^2} + V_a(x)] f(x) = 0$ such that $f_a(0) = 1$ and $f_a(l_a) = 0$. The Green function, solution of

$$[\gamma - D_x^2 + V(x)] G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{where} \quad D_x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} - i A(x), \quad (3.40)$$

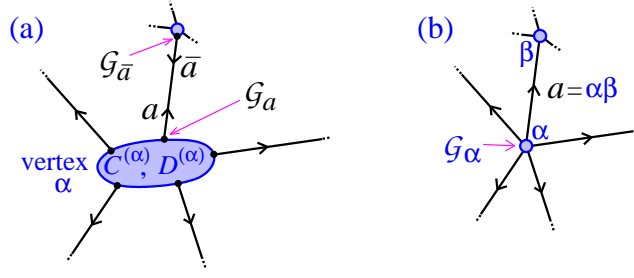


FIGURE 3.1 : *The vertex α . (a) For general boundary conditions, matching of the Green function at the vertex is described through two matrices $m_\alpha \times m_\alpha$ denoted $C^{(\alpha)}$ and $D^{(\alpha)}$ (the blocks of the matrices C and D). One must assign a value of the Green function \mathcal{G}_a to each arc a . (b) For continuous boundary condition at the vertex, the matrices $C^{(\alpha)}$ and $D^{(\alpha)}$ take the form (3.108). In this case one can assign to each vertex α a single “vertex variable” \mathcal{G}_α .*

depends on two coordinates x and y and therefore must be specified by two indices (here a and b) to which arcs they belong to :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,b}(x_a, y_b) = & \mathcal{G}_a f_a(x_a) e^{iA_a x_a} + \mathcal{G}_{\bar{a}} f_{\bar{a}}(x_{\bar{a}}) e^{iA_{\bar{a}} x_{\bar{a}}} \\ & + \delta_{(a),(b)} \frac{e^{iA_a(x_a - y_a)}}{W_a} f_a(\max(x_a, y_a)) f_{\bar{a}}(\max(x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}})), \end{aligned} \quad (3.41)$$

where \mathcal{G}_a and $\mathcal{G}_{\bar{a}}$ denote the values of the Green function at the two ends of the bond (a) (see figure 3.1.a). We have introduced the notation

$$\delta_{(a),(b)} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{a,b} + \delta_{a,\bar{b}}. \quad (3.42)$$

Note that the dependence of \mathcal{G}_a and $\mathcal{G}_{\bar{a}}$ in the coordinate y is implicit. $A_a = A(x)$ for $x \in (a)$ is the (constant) vector potential on the bond ³ and $\theta_a = A_a l_a$ the magnetic flux along the wire. $W_a = -f'_a(l_a)$ is the Wronski determinant of the two linearly independent solutions, Eq. (3.19). All the values of the Green function at the vertices $\mathcal{G}_{a,b}(0, y_b) = \mathcal{G}_a$ (figure 3.1.a) are gathered in the vector $\mathcal{G}(0)$ of size $2B$ and all covariant derivatives $(D_x \mathcal{G})_{a,b}(0, y_b)$ in the vector $\mathcal{G}'(0)$. We obtain

$$\mathcal{G}'(0) = M \mathcal{G}(0) + \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ f_b(y_b) e^{-iA_b y_b} \\ f_{\bar{b}}(y_{\bar{b}}) e^{-iA_{\bar{b}} y_{\bar{b}}} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow b \\ \leftarrow \bar{b} \end{array} \quad (3.43)$$

where the matrix ⁴ M couples an arc a to itself and to the reversed arc \bar{a} :

$$M_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{a,b} f'_a(0) - \delta_{a,\bar{b}} f'_{\bar{a}}(l_a) e^{i\theta_{\bar{a}}} \quad (3.44)$$

Noticing that $f'_{\bar{a}}(l_a) = f'_a(l_a) \in \mathbb{R}$ and $\theta_{\bar{a}} = -\theta_a$ shows that this matrix is Hermitian. Imposing boundary conditions at vertices, $C \mathcal{G}(0) + D \mathcal{G}'(0) = 0$, we obtain all values \mathcal{G}_a , that could be

³ In one dimension, a dependence of the vector potential in the coordinate may always be removed by a convenient gauge transformation.

⁴ **Notations** : The arc matrix M was denoted N in Ref. [195]. The change of notation is motivated by the fact that we have denoted \mathcal{M} the vertex matrices built with the functions f_a (the vertex matrix \mathcal{M} is related to the matrix M of the previous chapter, up to a factor $1/\sqrt{\gamma}$).

reinjecting into Eq. (3.41). The Green function at coinciding points reads :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,a}(x_a, x_a) = & - [(C + DM)^{-1}D]_{aa} f_a^2 - [(C + DM)^{-1}D]_{a\bar{a}} f_a f_{\bar{a}} e^{i\theta_a} \\ & - [(C + DM)^{-1}D]_{\bar{a}a} f_a f_{\bar{a}} e^{i\theta_{\bar{a}}} - [(C + DM)^{-1}D]_{\bar{a}\bar{a}} f_{\bar{a}}^2 + \frac{1}{W_a} f_a f_{\bar{a}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Integration over the Graph may be decomposed as integration over the bonds : $\int_{\text{Graph}} dx \mathcal{G}(x, x) = \sum_{(a)} \int_0^{l_a} dx_a \mathcal{G}_{a,a}(x_a, x_a)$. The integration of product of functions f_a and $f_{\bar{a}}$ is given by equations (3.21,3.22), hence

$$G(\gamma) = \int_{\text{Graph}} dx \mathcal{G}(x, x) = \text{Tr} \{ (C + DM)^{-1} D \partial_\gamma M \} - \partial_\gamma \sum_{(a)} \ln[-f'_a(l_a)], \quad (3.46)$$

where the trace runs over the $2B$ arc indices. Up to now, nothing has been assumed on the nature of the boundary conditions. An expansion of the trace provides a trace formula for $\int_{\text{Graph}} dx \mathcal{G}(x, x)$, where the expansion is interpreted as sum of contributions over cycles (orbits) in the graph.

We now assume that **the matrices C and D do not depend on the spectral parameter γ** . Performing and integration $\ln S(\gamma) = \int^\gamma d\gamma' G(\gamma')$, we obtain the first important result of Desbois :

$$S(\gamma) = (-1)^V \prod_{(a)} \frac{-1}{f'_a(l_a)} \det(C + DM) \quad \text{for } \partial_\gamma C = \partial_\gamma D = 0, \quad (3.47)$$

where the product runs over the B bonds. This provides a general expression of the spectral determinant in terms of $2B \times 2B$ -matrices coupling arcs. We repeat that the matrix M couples reversed arcs and contains local information related to the potential on each bond. On the other hand, the matrices C and D , characterising which arcs arrive and issue from the vertices, encode the information on the topology of the graph. Note that the structure $\det(C + DM)$ was also obtained in [316] in the absence of the potential where the determinant $\det'(-\Delta)$ was analysed (the prime indicates exclusion of zero mode). When $V(x) = 0$ the matrix M takes the form $M_{a,b} = -\sqrt{\gamma}(\delta_{a,b} \coth \sqrt{\gamma} l_a - \delta_{a,\bar{b}} \frac{1}{\sinh \sqrt{\gamma} l_a} e^{i\theta_{\bar{a}}})$.

The prefactor in Eq. (3.47) has been chosen arbitrarily and for convenience for the following. We will come back to this question.

Limit $\gamma \rightarrow \infty$ For large positive spectral parameter we can ignore the potential, therefore $f'_a(0) \simeq -\sqrt{\gamma}$ and $f'_a(l_a) \simeq -\sqrt{\gamma} e^{-\sqrt{\gamma} l_a}$. Hence the matrix M becomes diagonal : $M_{a,b} \simeq -\delta_{a,b} \sqrt{\gamma}$ and we obtain

$$S(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow +\infty}{\simeq} (-1)^V 2^{-B} \gamma^{-B/2} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \det(C - \sqrt{\gamma} D), \quad (3.48)$$

where $\mathcal{L} = \sum_{(a)} l_a$ is the ‘‘total length’’ of the graph.

Example Let us consider a ring of perimeter L pierced by a magnetic flux θ (a graph in which the number of vertices can be reduced to $V = 1$ with $B = 1$ bond). We denote by 1 and $\bar{1}$ the two reversed arcs. Let us consider boundary conditions described by the matrices given below, eq. (3.108) [or more explicitly for the ring considered here eq. (3.147)]. We obtain

$$S(\gamma) = \frac{\lambda - f'_1(0) - f'_{\bar{1}}(0) + 2f'_1(L) \cos \theta}{-f'_1(L)}. \quad (3.49)$$

It is interesting to point that this formula has found a practical physical application for a potential of the form $V(x) \propto x(L - x)$ in the context of the study of decoherence by electron-electron interaction in a phase coherent metallic ring [643] (hence $f_1(x)$ is a Hermite function and $f_{\bar{1}}(x) = f_1(L - x)$ due to the property $V(x) = V(L - x)$).

The case $V(x) = 0$ is analysed below.

3.2.3 Arc determinant (2)

The above derivation has used the variables \mathcal{G}_a giving the value of the Green function at the vertices. Another natural choice is to deal with (covariant) derivatives of the Green function at the vertices. We write

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{a,b}(x_a, y_b) = & \mathcal{G}'_a g_a(x_a) e^{iA_a x_a} + \mathcal{G}'_{\bar{a}} g_{\bar{a}}(x_{\bar{a}}) e^{iA_{\bar{a}} x_{\bar{a}}} \\ & + \delta_{(a),(b)} \frac{e^{iA_a(x_a - y_a)}}{W_a^g} g_a(\max(x_a, y_a)) g_{\bar{a}}(\max(x_{\bar{a}}, y_{\bar{a}})) \end{aligned} \quad (3.50)$$

where the functions g_a and $g_{\bar{a}}$ are solutions of the Schrödinger equation on the bond (a) for fixed values of the *derivative* at the boundaries, $g'_a(0) = 1$ and $g'_a(l_a) = 0$. Following the lines of the previous subsection, we obtain

$$\mathcal{G}(0) = N \mathcal{G}'(0) - \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ g_b(y_b) e^{-iA_b y_b} & \leftarrow b \\ g_{\bar{b}}(y_{\bar{b}}) e^{-iA_{\bar{b}} y_{\bar{b}}} & \leftarrow \bar{b} \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

where we have introduced the arc matrix

$$N_{a,b} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{a,b} g_a(0) + \delta_{a,\bar{b}} g_{\bar{a}}(l_a) e^{i\theta_{\bar{a}}} . \quad (3.52)$$

Imposing the boundary conditions at the vertices we obtain the values \mathcal{G}'_a . Reinjecting these expressions in Eq. (3.50), integration over the coordinate and summation over bonds give another general trace formula for the Green function

$$G(\gamma) = \int_{\text{Graph}} dx \mathcal{G}(x, x) = \text{Tr} \{ (CN + D)^{-1} C \partial_\gamma N \} - \partial_\gamma \sum_{(a)} \ln[-g_a(l_a)] . \quad (3.53)$$

For γ -independent matrices C and D , integration over the spectral parameter leads to

$$\boxed{S(\gamma) = (-1)^V \prod_{(a)} \frac{-1}{g_a(l_a)} \det(CN + D)} \quad \text{for } \partial_\gamma C = \partial_\gamma D = 0 , \quad (3.54)$$

where the γ -independent prefactor was chosen in order to match with (3.47). This expression can be directly related to (3.47) by using the relations

$$N = M^{-1} \quad \text{and} \quad \det M = \frac{1}{\det N} = \prod_{(a)} \frac{f'_a(l_a)}{g_a(l_a)} . \quad (3.55)$$

Example We consider again the very simple case of a ring, but this time we choose to consider boundary conditions of the type described below by Eq. (3.116) We obtain

$$S(\gamma) = \frac{\mu - g_1(0) - g_{\bar{1}}(0) - 2g_1(L) \cos \theta}{-g_1(L)} . \quad (3.56)$$

In the absence of potential we obtain

$$S(\gamma) = \mu \sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} L + 2(\cosh \sqrt{\gamma} L + \cos \theta) . \quad (3.57)$$

The limit $\mu \rightarrow \infty$ gives the Neumann determinant of the bond : $S(\gamma) \rightarrow \mu\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma}L = \mu L \gamma \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{\sqrt{\gamma}L}{n\pi})^2)$.

To close this section, let us emphasize that the representations (3.47,3.54,3.102) are remarkable in the sense that, despite the Laplace operator acts on a space of infinite dimension, its spectral determinant may be related to determinants of *finite* size matrices : all above expressions have involved *arc* matrices of size $2B \times 2B$. We will now see that we can express the spectral determinant in terms of $V \times V$ vertex matrices in general smaller. ⁵

3.3 Functions continuous at the vertices or whose derivative is continuous – Vertex matrices

In this section we discuss two particular cases of boundary conditions : the case of functions continuous at the vertices and the case of functions whose derivative is continuous at the vertices. These two cases are of particular interest because they allow to assign a variable to each vertex, whereas the most general case has required to attribute a variable to each arc. Hence it will be possible to obtain some compact expressions of the spectral determinant in terms of vertex-matrices (smaller than arc-matrices).

3.3.1 Path integral approach

I start the section by recalling a path integral approach introduced in Ref. [8]. This approach allows to recover rapidly the result of Montambaux & Pascaud [519] corresponding to continuous boundary conditions. A generalisation of the path integral allowing to deal with the second kind of boundary conditions is given afterwards.

The starting point is the following representation of the determinant in term of a path integral

$$S(\gamma) = \det(\gamma - \Delta) = (2\pi)^{V-B} \left(\int_{\text{all } \phi \text{ on } \mathcal{G}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} dx \bar{\phi}(-\Delta + \gamma)\phi} \right)^{-1} \quad (3.58)$$

running over complex fields $\phi(x)$ living in the graph \mathcal{G} and satisfying boundary conditions to be specified later. The factor $(2\pi)^{V-B}$, where V and B are the number of vertices and the number of bonds, respectively, is arbitrary and has been introduced for convenience.

If we isolate the contribution of the bond (a) to the action in the exponential

$$\int_{\mathcal{G}} dx \bar{\phi}(-\Delta + \gamma)\phi = \sum_{(a)} \int_{(a)} dx \bar{\phi}_a(x) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) \phi_a(x), \quad (3.59)$$

an integration by parts produces the following boundary terms :

$$\int_0^{l_a} dx \bar{\phi}_a(x) \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \gamma \right) \phi_a(x) = - \left[\bar{\phi}_a(x) \frac{d\phi_a(x)}{dx} \right]_0^{l_a} + \int_0^{l_a} dx \left(\left| \frac{d\phi_a}{dx} \right|^2 + \gamma |\phi_a|^2 \right). \quad (3.60)$$

Using the redundancy of the notation $\phi_a(x) = \phi_{\bar{a}}(l_a - x)$, the boundary terms might be written under the more symmetrical form $- \left[\bar{\phi}_a(x) \frac{d\phi_a(x)}{dx} \right]_0^{l_a} = \bar{\phi}_a(0)\phi'_a(0) + \bar{\phi}_{\bar{a}}(0)\phi'_{\bar{a}}(0)$. We obtain the following representation

$$S(\gamma)^{-1} = (2\pi)^{B-V} \int_{\text{all } \phi \text{ on } \mathcal{G}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\frac{1}{2} \sum_a \bar{\phi}_a(0)\phi'_a(0)} e^{-\frac{1}{2} \int_{\mathcal{G}} dx \left(\left| \frac{d\phi}{dx} \right|^2 + \gamma |\phi|^2 \right)} \quad (3.61)$$

⁵The spectral determinant can only be expressed in term of vertex matrices when boundary conditions at the vertices are such that it is possible to assign a unique variable to each vertex. This can only be done for “permutation invariant” boundary conditions [195]. Two such particular cases are discussed in the two following sections.

where \sum_a runs over the $2B$ arcs, i.e. we have used $\sum_{(a)} [\bar{\phi}_a(0)\phi'_a(0) + \bar{\phi}_{\bar{a}}(0)\phi'_{\bar{a}}(0)] = \sum_a \bar{\phi}_a(0)\phi'_a(0)$. This expression will be the starting point of the treatments proposed in the two following sections, when the potential $V(x)$ vanishes. The results in the general case $V(x) \neq 0$ will also be mentioned.

3.3.2 Functions continuous at the vertices (δ -couplings)

In this paragraph we consider the case of the Laplace operator acting on functions satisfying the following boundary conditions at the vertices :

$$\phi_i(0) = \phi_\alpha \text{ if arc } i \text{ issues from } \alpha \quad (3.62)$$

$$\sum_{i \text{ issuing from } \alpha} \phi'_i(0) = \lambda_\alpha \phi_\alpha \text{ with } \lambda_\alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.63)$$

Using the continuity of the field, we rewrite the boundary terms in (3.61) as

$$\sum_i \bar{\phi}_i(0)\phi'_i(0) = \sum_\alpha \bar{\phi}_\alpha \sum_{i \text{ issuing from } \alpha} \phi'_i(0) = \sum_\alpha \lambda_\alpha |\phi_\alpha|^2. \quad (3.64)$$

A straightforward path integral derivation for the case of the Laplace operator ($V(x) = 0$)

We decompose the path integral (3.61) in B path integrals over bonds by fixing the values of the field at the vertices, over which we integrate in a second time

$$S(\gamma)^{-1} = (2\pi)^{B-V} \int \prod_{\text{vertices } \alpha} \left(d\phi_\alpha d\bar{\phi}_\alpha e^{-\frac{1}{2}\lambda_\alpha |\phi_\alpha|^2} \right) \prod_{\substack{\text{bonds} \\ (\alpha\beta)}} \int_{\phi(0)=\phi_\alpha}^{\phi(l_{\alpha\beta})=\phi_\beta} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\frac{1}{2} \int_0^{l_{\alpha\beta}} dx (|\frac{d\phi}{dx}|^2 + \gamma|\phi|^2)} \quad (3.65)$$

where $d\phi d\bar{\phi} \stackrel{\text{def}}{=} d\text{Re } \phi d\text{Im } \phi$.

This path integral corresponds to the propagator for the 2D harmonic oscillator for a frequency $\omega = \sqrt{\gamma}$ [754]

$$\int_{\phi(0)=\phi_\alpha}^{\phi(l_{\alpha\beta})=\phi_\beta} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\bar{\phi} e^{-\frac{1}{2} \int_0^{l_{\alpha\beta}} dx (|\frac{d\phi}{dx}|^2 + \gamma|\phi|^2)} = \langle \vec{\phi}_\beta | e^{-\frac{l_{\alpha\beta}}{2} (-\vec{\nabla}_\phi^2 + \gamma\vec{\phi}^2)} | \vec{\phi}_\alpha \rangle \equiv G_{l_{\alpha\beta}}(\vec{\phi}_\beta, \vec{\phi}_\alpha) \quad (3.66)$$

where $\vec{\phi} = (\text{Re } \phi, \text{Im } \phi)$. The propagator is given by

$$G_x(\vec{\phi}, \vec{\phi}_0) = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi \sinh(\sqrt{\gamma}x)} e^{-\frac{\sqrt{\gamma}}{2 \sinh(\sqrt{\gamma}x)} [\cosh(\sqrt{\gamma}x)(|\phi|^2 + |\phi_0|^2) - \bar{\phi}\phi_0 - \phi\bar{\phi}_0]}. \quad (3.67)$$

Finally

$$S(\gamma)^{-1} = (2\pi)^{B-V} \int \prod_\alpha \left(d\phi_\alpha d\bar{\phi}_\alpha e^{-\frac{1}{2}\lambda_\alpha |\phi_\alpha|^2} \right) \prod_{(\alpha\beta)} G_{l_{\alpha\beta}}(\vec{\phi}_\beta, \vec{\phi}_\alpha) \quad (3.68)$$

It remains the trivial work to compute a Gaussian integral in \mathbb{C}^V :

$$S(\gamma)^{-1} = (2\pi)^{B-V} \prod_{(\alpha\beta)} \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi \sinh(\sqrt{\gamma}l_{\alpha\beta})} \int \left(\prod_\alpha d\phi_\alpha d\bar{\phi}_\alpha \right) e^{-\frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \bar{\phi}_\alpha \mathcal{M}_{\alpha\beta} \phi_\beta} \quad (3.69)$$

where we have defined the matrix ⁶

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(\lambda_\alpha + \sqrt{\gamma} \sum_\mu a_{\alpha\mu} \coth \sqrt{\gamma} l_{\alpha\mu} \right) - a_{\alpha\beta} \frac{\sqrt{\gamma} e^{-i\theta_{\alpha\beta}}}{\sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}. \quad (3.70)$$

⁶ Cf. footnote 7.

We have reintroduced the magnetic fluxes (this point does not present any difficulty and is related to a gauge transformation of the field; it has been discussed precisely in Ref. [8]). Finally we obtain PM's result [519]

$$S(\gamma) = \prod_{(\alpha\beta)} \frac{\sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma}} \det \mathcal{M} \quad (3.71)$$

Dirichlet determinant

Generalisation : spectral determinant of $-[\mathbf{d}_x - \mathbf{iA}(x)]^2 + V(x)$

This rapid derivation of the PM's result using path integral can be extended in order to account for the potential, as was shown by Jean Desbois in Ref. [194]. We propose in this paragraph another derivation, also due to Jean Desbois [193], whose spirit is closer to the one given in section 3.2 to deal with the general case.

The two functions $f_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta})$ and $f_{\beta\alpha}(x_{\beta\alpha})$ introduced above, independent solutions of the Schrödinger equation on the bond $(\alpha\beta)$, allow to write the Green function $G(x, y) = \langle x | \frac{1}{\gamma + H} | y \rangle$ where $H = -D_x^2 + V(x)$. For $x \in (\mu\nu)$ and $y \in (\alpha\beta)$:

$$G(x, y) = G_\mu f_{\mu\nu}(x_{\mu\nu}) e^{iA_{\mu\nu}x_{\mu\nu}} + G_\nu f_{\nu\mu}(x_{\nu\mu}) e^{iA_{\nu\mu}x_{\nu\mu}} + \delta_{(\mu\nu),(\alpha\beta)} \frac{e^{iA_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}-y_{\alpha\beta})}}{\mathcal{W}_{\alpha\beta}} f_{\alpha\beta}(\max(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta})) f_{\beta\alpha}(\max(x_{\beta\alpha}, y_{\beta\alpha})) \quad (3.72)$$

where G_μ designates the value of the Green function at the vertex (the y dependence is implicit). The vector potential on the bond is denoted $A_{\alpha\beta} = -A_{\beta\alpha}$ (it can always be chosen constant in 1D) and the flux accumulated along the wire $\theta_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}$. The boundary condition must obviously involve the covariant derivative $\sum_\beta a_{\alpha\beta} (D_x \psi)_{\alpha\beta}(0) = \lambda_\alpha \psi_\alpha$. We introduce the $V \times V$ matrix ⁷

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(\lambda_\alpha - \sum_\mu a_{\alpha\mu} f'_{\alpha\mu}(0) \right) + a_{\alpha\beta} e^{-i\theta_{\alpha\beta}} f'_{\beta\alpha}(l_{\alpha\beta}) \quad (3.73)$$

It is straightforward to check that this expression leads to (3.70) in the absence of the potential when $f_{\alpha\beta}(x) = \frac{\sinh \sqrt{\gamma}(l_{\alpha\beta}-x)}{\sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}$. Imposing boundary conditions lead to the system of V equations

$$\sum_\nu \mathcal{M}_{\mu\nu} G_\nu = \delta_{\mu\alpha} f_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}) e^{-iA_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}} + \delta_{\mu\beta} f_{\beta\alpha}(y_{\beta\alpha}) e^{-iA_{\beta\alpha}y_{\beta\alpha}} \quad (3.74)$$

whose solution reads

$$G(x, y) = (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\alpha} f_{\mu\nu}(x_{\mu\nu}) f_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}) e^{iA_{\mu\nu}x_{\mu\nu} - iA_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}} + (\mathcal{M}^{-1})_{\mu\beta} f_{\mu\nu}(x_{\mu\nu}) f_{\beta\alpha}(y_{\beta\alpha}) e^{iA_{\mu\nu}x_{\mu\nu} - iA_{\beta\alpha}y_{\beta\alpha}} + (\mathcal{M}^{-1})_{\nu\alpha} f_{\nu\mu}(x_{\nu\mu}) f_{\alpha\beta}(y_{\alpha\beta}) e^{iA_{\nu\mu}x_{\nu\mu} - iA_{\alpha\beta}y_{\alpha\beta}} + (\mathcal{M}^{-1})_{\nu\beta} f_{\nu\mu}(x_{\nu\mu}) f_{\beta\alpha}(y_{\beta\alpha}) e^{iA_{\nu\mu}x_{\nu\mu} - iA_{\beta\alpha}y_{\beta\alpha}} + \delta_{(\mu\nu),(\alpha\beta)} \frac{e^{iA_{\alpha\beta}(x_{\alpha\beta}-y_{\alpha\beta})}}{\mathcal{W}_{\alpha\beta}} f_{\alpha\beta}(\max(x_{\alpha\beta}, y_{\alpha\beta})) f_{\beta\alpha}(\max(x_{\beta\alpha}, y_{\beta\alpha})). \quad (3.75)$$

⁷ This matrix corresponds to the one introduced in the previous chapter, eq. (2.13), $\mathcal{M} = \sqrt{\gamma} M$, up to $E = k^2 = -\gamma - i0^+$ [641]. Do not confuse the arc matrix M introduced in the beginning of the present chapter, with the vertex matrix (2.13) of the previous chapter. I am sorry for this unfortunate choice (I have used the notations introduced in the articles).

It is worth noticing that the Green function taken at two vertices is simply related to the matrix

$$\boxed{G(\alpha, \beta) = (\mathcal{M}^{-1})_{\alpha\beta}}. \quad (3.76)$$

This remark turns out to be very useful reminding that it is always possible to introduce a vertex on a wire (for continuous boundary conditions with $\lambda_\alpha = 0$) without changing its properties. (3.76) shows that the Green function $G(x, y)$ may be obtained from a purely algebraic calculation (the inversion of a matrix) by considering the points x and y as two vertices. The price to pay is an increase of the number of vertices $V \rightarrow V + 2$ and the number of bonds $B \rightarrow B + 2$.

Integration $\int_{\text{Graph}} dx G(x, x)$ takes the form

$$\int_{\text{Graph}} dx G(x, x) = \sum_{(\alpha\beta)} \left[-(\mathcal{M}^{-1})_{\alpha\alpha} \partial_\gamma f'_{\alpha\beta}(0) + \left((\mathcal{M}^{-1})_{\alpha\beta} e^{i\theta_{\alpha\beta}} + (\mathcal{M}^{-1})_{\beta\alpha} e^{-i\theta_{\alpha\beta}} \right) \partial_\gamma f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta}) - (\mathcal{M}^{-1})_{\beta\beta} \partial_\gamma f'_{\beta\alpha}(0) + \frac{1}{W_{\alpha\beta}} \partial_\gamma f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta}) \right] = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln \left[\prod_{(\alpha\beta)} \frac{-1}{f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})} \det \mathcal{M} \right] \quad (3.77)$$

where the last step was a conversion of the sum over bonds into a sum over vertices. Finally the spectral determinant reads [193, 631]

$$\boxed{S(\gamma) = \prod_{(\alpha\beta)} \underbrace{\frac{-1}{f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})}}_{\text{Dirichlet det.}} \det \mathcal{M}} \quad (3.78)$$

Setting $V(x) = 0$, we recover (3.71). As in this case, the product over bonds coincides with the Dirichlet determinant of the graph, i.e. the functional determinant obtained by setting Dirichlet boundary conditions at all vertices.

Green function at coinciding points, trace of the Green function and the spectral determinant.— Below Eq. (3.76), we have noticed that the Green function $G(x, y)$ may be computed through a simple algebraic calculation. We now point out that the calculation of the Green function at coinciding points $G(x, x)$ can be obtained from a spectral determinant if we introduce a mixed boundary condition, Eqs. (3.62,3.63), for parameter λ_x at the point x . This also establishes some connections with the relations discussed in the previous chapter. We have [644, 714]

$$G(x, x) = \frac{d}{d\lambda_x} \ln S^{(\lambda_x)}(\gamma) \Big|_{\lambda_x=0}. \quad (3.79)$$

This relation can be of a great practical interest (see Refs. [644, 714, 637]). Noticing that the mixed boundary condition may be understood as the presence of a Dirac potential $\lambda_x \delta$ at x , we may use $\frac{d}{d\lambda_x} \Big|_{\lambda_x=0} = \frac{\delta}{\delta V(x)}$ (cf. footnote n°29 page 29) to rewrite :

$$\boxed{G(x, x) = \langle x | \frac{1}{\gamma + H} | x \rangle = \frac{\delta}{\delta V(x)} \ln S(\gamma)}. \quad (3.80)$$

This relation obtained for an isolated graph is analogous to the one obtained for connected graphs, Eq. (2.26), interpreted as a local version of the Friedel sum rule :

$$\text{Im} \langle x | \frac{1}{-E - i0^+ + H} | x \rangle = -\frac{1}{2i} \frac{\delta}{\delta V(x)} \ln \det \mathcal{S}(E), \quad (3.81)$$

where $\mathcal{S}(E)$ is the scattering matrix of the graph. This suggests that the logarithm of the spectral determinant of the isolated graph is related to the Friedel phase $\theta_f(E) \stackrel{\text{def}}{=} -i \ln \det \mathcal{S}(E)$ of the connected graph.

Equation (3.80) may be integrated in the graph. We get the analogous of the relations (2.28) and (2.29) :

$$\boxed{\int_{\text{Graph}} dx \langle x | \frac{1}{\gamma + H} | x \rangle = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma)} . \quad (3.82)$$

A last example of such relations is briefly discussed in the conclusion (Eqs. (7.1) and (7.2) page 239).

3.3.3 Function whose derivative is continuous at the vertices (δ'_s -couplings)

We now consider the dual case, when the derivative of the field is continuous at the vertices. This constraint leads to the boundary conditions

$$\phi'_i(0) = \phi'_\alpha \text{ if arc } i \text{ issues from } \alpha \quad (3.83)$$

$$\sum_{i \text{ issuing from } \alpha} \phi_i(0) = \mu_\alpha \phi'_\alpha \text{ with } \mu_\alpha \in \mathbb{R} . \quad (3.84)$$

Path integral approach (case $V(x) = 0$)

We now develop a variant of the method of the above section. This requires the use of a path integral in which the values of the derivative of the field is fixed (*cf.* appendix page 92). Boundary terms of (3.61) take the form

$$\sum_i \bar{\phi}_i(0) \phi'_i(0) = \sum_\alpha \phi'_\alpha \sum_{i \text{ issuing from } \alpha} \bar{\phi}_i(0) = \sum_\alpha \mu_\alpha |\phi'_\alpha|^2 \quad (3.85)$$

Introducing the notation $\pi(x) = \frac{d\phi(x)}{dx}$ we write

$$\begin{aligned} S(\gamma)^{-1} &= (2\pi)^{B-V} \int \prod_{\text{vertices } \alpha} \left(d\phi'_\alpha d\bar{\phi}'_\alpha e^{-\frac{1}{2}\mu_\alpha |\phi'_\alpha|^2} \right) \\ &\quad \times \prod_{\substack{\text{bonds} \\ (\alpha\beta)}} \int_{\pi(0)=\phi'_\alpha}^{\pi(l_{\alpha\beta})=-\phi'_\beta} \tilde{\mathcal{D}}\pi \tilde{\mathcal{D}}\bar{\pi} e^{-\frac{1}{2} \int_0^{l_{\alpha\beta}} dx (|\pi(x)|^2 + \frac{1}{\gamma} |\frac{d\pi(x)}{dx}|^2)} \end{aligned} \quad (3.86)$$

$$= (2\pi)^{B-V} \int \prod_{\text{vertices } \alpha} \left(d\phi'_\alpha d\bar{\phi}'_\alpha e^{-\frac{1}{2}\mu_\alpha |\phi'_\alpha|^2} \right) \prod_{\substack{\text{bonds} \\ (\alpha\beta)}} \tilde{G}_{l_{\alpha\beta}}(-\vec{\phi}'_\beta, \vec{\phi}'_\alpha) \quad (3.87)$$

A special care must be taken with the signs : the variable ϕ'_α is defined as the value of the derivative for an orientation of the axis *issuing* from the vertex, hence the minus sign in the upper bond of the integral. We have used the notation of the appendix in order to represent the harmonic oscillator propagator in momentum space :

$$\tilde{G}_x(\vec{\pi}, \vec{\pi}_0) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma}x)} e^{-\frac{1}{2\sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma}x)} [\cosh(\sqrt{\gamma}x)(|\pi|^2 + |\pi_0|^2) - \vec{\pi}\pi_0 - \pi\vec{\pi}_0]} . \quad (3.88)$$

The remaining Gaussian integral (3.87) is straightforwardly calculated. Introducing the matrix

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(\mu_\alpha + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \sum_\mu a_{\alpha\mu} \coth \sqrt{\gamma} l_{\alpha\mu} \right) + a_{\alpha\beta} \frac{e^{-i\theta_{\alpha\beta}}}{\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}} , \quad (3.89)$$

in which we have reinserted the magnetic fluxes, we get

$$S(\gamma) = \underbrace{\prod_{(\alpha\beta)} \sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}_{\text{Neumann determinant}} \det \mathcal{N}, \quad (3.90)$$

which is the relation symmetrical of (3.71).

Generalisation : case $V(x) \neq 0$

In the presence of a potential we follow the same logic as for field continuous at vertices. The Green function is now expressed in terms of the couple of functions $g_a, g_{\bar{a}}$. We introduce the vertex matrix

$$\mathcal{N}_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \left(\mu_\alpha - \sum_\nu a_{\alpha\nu} g_{\alpha\nu}(0) \right) - a_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta}) e^{-i\theta_{\alpha\beta}}. \quad (3.91)$$

(we may easily check that we recover (3.89) when $V(x) = 0$ since $g_{\alpha\beta}(x) = -\frac{\cosh \sqrt{\gamma}(l_{\alpha\beta}-x)}{\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}$).

We get [631]

$$S(\gamma) = \underbrace{\prod_{(\alpha\beta)} \frac{-1}{g_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})}}_{\text{Neumann det.}} \det \mathcal{N} \quad (3.92)$$

The product over bonds corresponds with the Neumann determinant of the graph (product of spectral determinants of each wire with Neumann boundary conditions).

3.4 Zeta functions and trace formulae

3.4.1 Introduction

ζ -functions

ζ -functions (also called « L -functions » in the mathematical literature) are powerful mathematical tools used in number theory and graph theory. Their fundamental nature comes from their interpretation as generating functions of *primitive* elements : in the case of interest in the present chapter, these are the *primitive periodic orbits*, i.e. the smallest periodic closed paths in the graph which are not the repetition of a smallest orbit (figure 3.2). The most famous example of zeta function is the Riemann ζ -function

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{for } \text{Re } s > 1, \quad (3.93)$$

playing the role of a generating function for the prime integer numbers.

In general, ζ -functions satisfy several properties :

1. They are « factorisable » under « rational » form. For instance, it is well known that the Riemann ζ -function may be rewritten under the form of an infinite product over the prime integers

$$\zeta(s)^{-1} = \prod_{\text{prime } p} (1 - p^{-s}) \quad (3.94)$$

This property is probably the most fundamental one. In particular it allows to analyse the distribution of the prime objects (like the distribution of prime integers).

2. They satisfy functional relations. For example (formula [9.535] of [759])

$$\tilde{\zeta}(s) = \tilde{\zeta}(1 - s) \quad \text{wher } \tilde{\zeta}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-s/2} \Gamma(s/2) \zeta(s) \quad (3.95)$$

3. A Riemann-like conjecture is sometimes verified. We remind that the Riemann hypothesis is that all non trivial zeros of the Riemann ζ -function lay on the axis $\text{Re } s = 1/2$ (cf. § on combinatorial graphs at the end).

We will show below that the spectral determinantis is indeed a zeta function. As it was already evoked, the understanding of this point was my primary motivation for entering the topics of metric graphs, in order to clarify [8] the relation between the PM formula [790, 519] and the Roth trace formula [548, 547] (this trace formula was poined out to one of us by Yves Colin de Verdière).

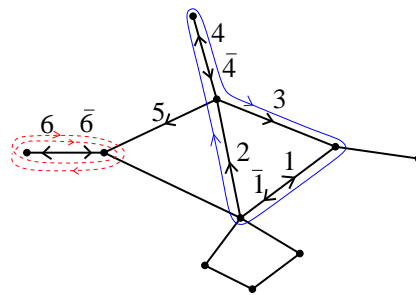


FIGURE 3.2 : **Examples of orbits.**— We denote by \bar{i} the reversed arc. The blue orbit $\mathcal{C} = (4, \bar{4}, 3, \bar{1}, 2)$ is primitive; its weight is $\alpha(\mathcal{C}) = Q_{\bar{4}\bar{4}} Q_{43} Q_{\bar{3}\bar{1}} Q_{12} Q_{24} = (\frac{2}{1} - 1) \frac{2}{4} \frac{2}{3} \frac{2}{5} \frac{2}{4}$. The red dashed orbit $\mathcal{C} = (6, \bar{6}, 6, \bar{6})$ is a repetition of the primitive orbit $(6, \bar{6})$; its weight is $\alpha(\mathcal{C}) = [(\frac{2}{1} - 1) (\frac{2}{3} - 1)]^2$.

Trace formulae

The expansion of ζ -functions produces other types of formulae named « trace formulae », or « Poisson formulae », the most basic example being the Poisson formula

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2\pi n x) \quad (3.96)$$

which may be interpreted as a decomposition of the density of intergers, since the right hand side corresponds to an expansion of the (singular) density of integers in regular terms. The first term, named the « Weym term », corresponds to the average density of integers, which is one. The following terms are interpreted as repetitions of a single fundamental « orbit » of action 2π , and reconstruct the δ -peaks of the density.

Beside their mathematical interest, trace formulae are of great importance in physics since they allow to formulate some semi-classical expansions and help to build the bridge between quantum and classical. In order to illustrate this point, let us start from the Poisson formula (3.96) and write

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(x - n) = \frac{1}{2} \delta(x) + \theta(x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(x - n) \quad (3.97)$$

where the first term accounts for the value of the Heaviside function $\theta(0) = \frac{1}{2}$. This can be put in a physical context by setting $x = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}$, hence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(E - E_n) = \underbrace{\frac{1}{\hbar\omega} \theta\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right)}_{\text{Weyl}} + \frac{1}{2} \delta\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) + \underbrace{\frac{2}{\hbar\omega} \theta\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n \left(\frac{2\pi E}{\hbar\omega} + \pi\right)}_{\text{periodic orbits contribution}} \quad (3.98)$$

where $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ are the eigenvalues of the quantum harmonic oscillator. The first « Weyl term » corresponds to the semiclassical density of states $\rho_{\text{Weyl}} = \frac{1}{\hbar\omega}$ involved in the thermodynamic properties. The infinite series is interpreted as the contribution of the repetitions of a fundamental (primitive) classical orbit of energy E whose action is $\mathcal{S}(E) = \int dx p(x) = 2\pi E/\omega$.⁸ Interest in such formulae, whose analogue for graphs will be discussed below, Eq. (3.115), is to establish a relation between an object of *quantum* nature (the spectral density encoding the result of quantification) and classical dynamics. The Weyl term being a classical contribution to which mesoscopic fluctuations are added.⁹ Two famous examples of such formulae are the Selberg trace formula [586] for the density of states of a polygone on the hyperbolic plane (surface of constant negative curvature) and the Gutzwiller trace formula for billiards with chaotic classical dynamics [761]. A short and pedagogical introduction on semiclassical expansions and Gutzwiller trace formula may be found in the introduction of Ullmo's recent review article [736].

We have already mentioned that the primitive objects for which the spectral determinant plays the role of generating function are the primitive orbits (figure 3.2). Periodic orbit on metric graph which will play the role of « classical » trajectories associated on the graph (see Ref. [60] for a detailed discussion of the classical dynamics in metric graphs). Looking for a representation of the ζ -functions in terms of orbits, made of « arcs », the expressions $S(\gamma)$ in terms of « arc matrices » seem well suited.

3.4.2 Arc determinant (3), scattering matrices and ζ -function

The result (3.47) can be reorganised more conveniently by introducing the arc matrix

$$R = (\sqrt{\gamma} + M)(\sqrt{\gamma} - M)^{-1} \quad (3.99)$$

i.e. $M = \sqrt{\gamma}(R + \mathbf{1}_{2B})^{-1}(R - \mathbf{1}_{2B}) = \sqrt{\gamma}(R - \mathbf{1}_{2B})(R + \mathbf{1}_{2B})^{-1}$, where $\mathbf{1}_{2B}$ is the $2B \times 2B$ identity matrix. We denote its matrix elements

$$R_{a,b} = \delta_{a,b} r_a + \delta_{a,\bar{b}} t_{\bar{a}} e^{i\theta_a}. \quad (3.100)$$

These matrix elements have a clear physical meaning : r_a and t_a are analytic continuations (to negative energies $E \rightarrow -\gamma$) of reflection and transmission probability amplitudes through the potential $V_a(x)$: R is therefore the analytic continuation of the bond scattering matrix. We also introduce the analytic continuation of the vertex scattering matrix (scattering matrix interpretation is discussed in Refs. [372, 641, 634])

$$Q = (-C + \sqrt{\gamma} D)^{-1}(C + \sqrt{\gamma} D), \quad (3.101)$$

⁸ The phase π is related to the Maslov index and has its origin into the phase shifts $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ induced by the reflections on the soft edges of the potential.

⁹ in order to make this point clear, it is more convenient to analyse the integrated density of states

$$N(E) = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(E - E_n) = \theta\left(E - \frac{\hbar\omega}{2}\right) \left[\frac{E}{\hbar\omega} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \sin n \left(\frac{2\pi E}{\hbar\omega} + \pi\right) \right]$$

(for instance we can check that Q is unitary for $\sqrt{\gamma} = -ik$, reflecting current conservation at the vertex). We obtain another interesting result of Desbois [195] :

$$\boxed{S(\gamma) = (-1)^V \prod_{(a)} \frac{-1}{f'_a(l_a)} \frac{\det(C - \sqrt{\gamma} D)}{\det(\mathbf{1}_{2B} + R)} \det(\mathbf{1}_{2B} - QR)} \quad (3.102)$$

Let us describe the structure of this result : the product over bonds $\prod_{(a)} f'_a(l_a)$ and the determinant $\det(\mathbf{1}_{2B} + R)$ involve (local) information about the potential on the bonds (recall that R couples an arc to itself and its reversed arc, only). This is even more clear from Eq. (3.28) that leads to

$$\prod_{(a)} [-f'_a(l_a)] \det(\mathbf{1}_{2B} + R) = 2^B \gamma^{B/2} \prod_{(a)} t_a = (4\gamma)^{B/2} \left[\prod_a R_{a,\bar{a}} \right]^{1/2}, \quad (3.103)$$

where the first product runs over the B bonds and the last one over the $2B$ arcs. Now let us consider the determinant $\det(C - \sqrt{\gamma} D)$: organising the arcs by gathering arcs issuing from the same vertex, the matrices C and D take some block diagonal structure, hence $\det(C - \sqrt{\gamma} D)$ encodes some (local) informations about the vertices. The last determinant $\det(\mathbf{1}_{2B} - QR)$ mixes informations about potential and the connection of arcs to vertices in a nontrivial way, and characterises the (global) information about the topology.

This last part of the spectral determinant vanishes on the spectrum of $-D_x^2 + V(x)$, i.e. for $\gamma = -E_n$. Because Q and R have the meaning of scattering matrices, the equation $\det(\mathbf{1}_{2B} - QR) = 0$ may be understood as a quantisation condition à la Bohr-Sommerfeld.

ζ -function on graphs

It is well known that the determinant $\det(\mathbf{1}_{2B} - QR)$ can be expanded in terms of *primitive cycle* contributions, with the structure of a ζ -function. We recall that a cycle (a periodic orbit) is the equivalence class of all ordered sets of arcs $\mathcal{C} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ identical by cyclic permutations and such that $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ $\text{end}(a_{i-1}) = \text{beginning}(a_i)$ (with $a_0 \equiv a_n$). An orbit is said primitive, and denoted $\tilde{\mathcal{C}}$, if it cannot be decomposed as a repetition of a smaller orbit. We can define the weight of the orbit \mathcal{C} as $\varpi(\mathcal{C}) \stackrel{\text{def}}{=} (QR)_{a_1 a_2} (QR)_{a_2 a_3} \dots (QR)_{a_n a_1}$: moreover we can split the weight as

$$\varpi(\mathcal{C}) = v(\mathcal{C}) b(\mathcal{C}) \quad (3.104)$$

where we have identified the parts related to the scattering by the vertices

$$v(\mathcal{C}) = Q_{a_1 b_1} Q_{a_2 b_2} \dots Q_{a_n b_n} \quad (3.105)$$

and the scattering by the bonds

$$b(\mathcal{C}) = R_{b_1 a_2} R_{b_2 a_3} \dots R_{b_n a_1}, \quad (3.106)$$

respectively (we recall that R only couples an arc to itself or to the reversed arc, i.e. $b_{i-1} \in \{a_i, \bar{a}_i\}$). The determinant may be rewritten as an *infinite* product over primitive orbits

$$\boxed{\det(\mathbf{1}_{2B} - QR) = \prod_{\tilde{\mathcal{C}} \text{ primitive}} (1 - \varpi(\tilde{\mathcal{C}}))} \quad (3.107)$$

(the standard argument leading to this result is recalled in the section 6 of Ref. [8]). This relation emphasizes that the spectral determinant may be interpreted as a ζ -function (or L -function) for primitive orbits of graphs.

3.4.3 Trace formula – Continuous boundary conditions

It is possible to go further by considering the particular choice of continuous boundary conditions (3.62,3.63), described by the $m_\alpha \times m_\alpha$ boundary matrices

$$C^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\lambda_\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

It will be useful to remark that $\det(C^{(\alpha)} - \sqrt{\gamma} D^{(\alpha)}) = -(\lambda_\alpha + m_\alpha \sqrt{\gamma})$. The vertex “scattering matrix” for the vertex $Q^{(\alpha)} = (-C^{(\alpha)} + \sqrt{\gamma} D^{(\alpha)})^{-1}(C^{(\alpha)} + \sqrt{\gamma} D^{(\alpha)})$ takes the form ¹⁰ [8]

$$Q^{(\alpha)} = \frac{2}{m_\alpha + \lambda_\alpha / \sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} - \mathbf{1}_{m_\alpha}. \quad (3.109)$$

The limit $\lambda_\alpha = \infty$, for which $Q^{(\alpha)} = -\mathbf{1}_{m_\alpha}$ corresponds to Dirichlet boundary conditions $\psi(\alpha) = 0$. For $\gamma = 0$ we recognise the weights introduced by Roth [548] :

$$Q_{ii} = \frac{2}{m_\alpha} - 1 \quad \text{with } i \text{ issuing from the vertex } \alpha \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad i \end{array} \quad (3.110)$$

$$Q_{ij} = \frac{2}{m_\alpha} \quad \text{with } i \neq j \text{ both issuing from the vertex } \alpha \quad \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \alpha \quad i \quad j \end{array} \quad (3.111)$$

Moreover let us consider the case $V(x) = 0$, then $r_a = 0$ and $t_a = e^{-\sqrt{\gamma} l_a}$ (note that this latter is the analytic continuation of the transmission probability amplitude through a free interval $t_a = e^{ikl_a}$ for $\sqrt{\gamma} = \sqrt{-k^2 - i0^+}$). Starting from (3.102) and using (3.28) we get

$$S(\gamma) = 2^{-B} \prod_{\alpha} \left(m_\alpha + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{\gamma}} \right) \gamma^{\frac{V-B}{2}} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \underbrace{\prod_{\tilde{\mathcal{C}}} \left(1 - \alpha(\tilde{\mathcal{C}}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) + i\theta(\tilde{\mathcal{C}})} \right)}_{\det(\mathbf{1}_{2B} - QR)} \quad (3.112)$$

where the first product runs over the V vertices. $\mathcal{L} = \sum_{(a)} l_a$ is the total length of the graph. The weights of the orbit $\mathcal{C} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ is now denoted

$$v(\mathcal{C}) \longrightarrow \alpha(\mathcal{C}) = Q_{a_1 \bar{a}_2} Q_{a_2 \bar{a}_3} \cdots Q_{a_n \bar{a}_1}$$

for Q given by gathering the blocks (3.109), i.e. by (3.110,3.111). The notations $\ell(\mathcal{C})$ and $\theta(\mathcal{C})$ designate the length of the orbit and the magnetic flux enclosed by it, respectively. Thanks to the simple structure of the matrix R for $V(x) = 0$, the bond scattering part of the weight of the orbit is simply $b(\mathcal{C}) \rightarrow e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\mathcal{C}) + i\theta(\mathcal{C})}$.

If we choose moreover vertex scattering with $\lambda_\alpha = 0$, the weights $\alpha(\tilde{\mathcal{C}})$ become γ -independent, what allows a simple Laplace inversion of the derivative $\frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma) = \int_0^\infty dt Z(t) e^{-\gamma t}$. We obtain the trace of the Green function in a first step

$$G(\gamma) = \int dx \langle x | \frac{1}{\gamma - D_x^2} | x \rangle = \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma) = \frac{\mathcal{L}}{2\sqrt{\gamma}} + \frac{V-B}{2\gamma} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma}} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\mathcal{C}) + i\theta(\mathcal{C})} \quad (3.113)$$

¹⁰ this is the analytic continuation of the matrix (2.3) for $\sqrt{\gamma} = -ik$.

where the sum now runs over all periodic orbits \mathcal{C} , where $\tilde{\mathcal{C}}$ is the primitive orbit related to the orbit \mathcal{C} . Then the inverse Laplace transform is easy to compute : we recover the Roth's trace formula [548] :

$$\boxed{Z(t) = \frac{\mathcal{L}}{2\sqrt{\pi t}} + \frac{V-B}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) e^{-\frac{\ell(\mathcal{C})^2}{4t} + i\theta(\mathcal{C})}} \quad \text{for } \lambda_\alpha = 0 \forall \alpha, \quad (3.114)$$

Another Laplace inverse transform leads to the trace formula for the density of states ¹¹ :

$$\boxed{\rho(E) = \frac{\mathcal{L}}{2\pi\sqrt{E}} + \frac{V-B}{2} \delta(E) + \frac{1}{2\pi\sqrt{E}} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) \cos[\sqrt{E} \ell(\mathcal{C})] e^{i\theta(\mathcal{C})}} \quad (3.115)$$

that could also be obtained more directly from (3.113) thanks to $\rho(E) = \frac{1}{\pi} \text{Im} G(-E - i0^+)$. The first term is the Weyl term, proportional to the volume of the system. The argument of the cosine corresponds to the action of classical trajectories $\text{Action}(\mathcal{C}) = \sqrt{E} \ell(\mathcal{C})$ (the classical dynamics in graphs was properly defined in Ref. [61]).

3.4.4 Trace formula – Continuous derivative boundary conditions

The dual case of boundary conditions describing a field whose derivative is continuous at the vertices, Eqs. (3.83,3.84), is also of interest. In this case the $m_\alpha \times m_\alpha$ boundary condition matrices are given by

$$C^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D^{(\alpha)} = \begin{pmatrix} -\mu_\alpha & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.116)$$

that gives $\det(C^{(\alpha)} - \sqrt{\gamma} D^{(\alpha)}) = (-1)^{m_\alpha+1} \gamma^{m_\alpha/2} (\mu_\alpha + m_\alpha/\sqrt{\gamma})$. From (3.101), we get the vertex « scattering matrix » for the vertex ¹² α :

$$Q^{(\alpha)} = \frac{-2}{m_\alpha + \mu_\alpha \sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} + \mathbf{1}_{m_\alpha} \quad (3.117)$$

therefore the limit $\mu_\alpha = \infty$ corresponds to Neumann boundary conditions $\psi'_i(0) = 0$.

Starting again from Eq. (3.102), a little bit of algebra gives the spectral determinant in the absence of potential

$$S(\gamma) = 2^{-B} \prod_{\alpha} (m_\alpha + \sqrt{\gamma} \mu_\alpha) \gamma^{\frac{B-V}{2}} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \prod_{\tilde{\mathcal{C}}} \left(1 - \beta(\tilde{\mathcal{C}}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) + i\theta(\tilde{\mathcal{C}})} \right) \quad (3.118)$$

where the weights $v(\mathcal{C}) \rightarrow \beta(\mathcal{C})$ are computed with matrix elements of (3.117). It is interesting to point that these weights may be simply related to the weights $\alpha(\mathcal{C})$ of the previous section thanks to the substitution $\lambda_\alpha \rightarrow \gamma \mu_\alpha$ and adding a sign $(-1)^{\#\text{arcs of } \mathcal{C}}$.

¹¹ It is possible to symmetrise the expression with respect to orbit reversing : $\rho(E) = \frac{\mathcal{L}}{2\pi\sqrt{E}} + \frac{V-B}{2} \delta(E) + \frac{1}{2\pi\sqrt{E}} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) \cos[\sqrt{E} \ell(\mathcal{C})] \cos \theta(\mathcal{C})$
¹² this is the analytic continuation of the matrix (2.5) for $\sqrt{\gamma} = -ik$.

If we moreover set $\mu_\alpha = 0$, the weights are

$$\beta(\mathcal{C}) = (-1)^{\#\text{arcs of } \mathcal{C}} \alpha(\mathcal{C}) \quad (3.119)$$

and we may obtain the trace formula for the partition function

$$\boxed{Z(t) = \frac{\mathcal{L}}{2\sqrt{\pi t}} + \frac{B-V}{2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \beta(\mathcal{C}) e^{-\frac{\ell(\mathcal{C})^2}{4t} + i\theta(\mathcal{C})}} \quad \text{for } \mu_\alpha = 0 \forall \alpha, \quad (3.120)$$

that generalises the result of Roth to the case of the Laplace operator acting on functions whose derivative is continuous at the vertices. Compare to the case of functions continuous at the vertices discussed in the previous section, Eq. (3.114), only the constant term and the weights of the orbits have changed in sign.

3.4.5 ζ -functions for combinatorial graphs

The study of ζ -functions (L -functions) in graphs has attracted a lot of interest in the mathematical community and the physical community as well. We have been discussing the case of metric graphs above, that was studied in his pioneering work by Jean-Pierre Roth [548, 547, 549]. His main result was recovered later by Kottos & Smilansky (up to the $\frac{V-B}{2}$ term) [376]. We may also quote few works [256, 165, 166, 159, 373, 261, 374] with a mathematical background. The Roth's trace formula has found later several practical applications

- for the study of quantum chaos. Metric graphs (or quantum graphs) are used as toy models to test general ideas developed in other contexts like the study of quantum billiards. It was shown that quantum graphs are good candidates for the occurrence of spectral statistics of pseudo-integrable systems (for star graphs) [76, 75, 358] or chaotic ones [376, 377, 378, 568, 59, 624, 61, 60, 77, 379, 285, 626].
- The Roth trace formula has also found another application in the analysis of quantum (coherent) transport in networks of weakly disordered quasi-one-dimensional wires. It was used to provide some understanding of the magnetoconductance in the weakly coherent limit for the experimental analysis of Ref. [241].

The results exposed above are closely connected to earlier works on combinatorial graphs. References (of the mathematical community) are [334, 6, 318, 319, 65, 667, 612, 165, 62]. The ζ -function for combinatorial graphs has found recently some application in the context of quantum chaos [505, 506]; a brief recent review on mathematical aspects may be found in the introduction of the article of Mizuno & Sato [463]. We show in this appendix that the general trace formula for combinatorial graphs (the Bartholdi's formula [62] generalising Bass [65] and Ihara [334] trace formulae) may be deduced from the trace formula obtained in Ref. [8] for metric graphs. This latter is itself a particular case of the general trace formula obtained by Desbois [195] recalled above.

We consider the trace formula for the Laplace operator acting on functions continuous at the vertices. Our starting point is the equality, Eqs. (3.102) and (3.78),

$$\boxed{(-1)^V \underbrace{\frac{\det(C - \sqrt{\gamma} D)}{\det(\mathbf{1}_{2B} + R)} \det(\mathbf{1}_{2B} - QR)}_{\text{arc matrices}} = \underbrace{\det \mathcal{M}}_{\text{vertex matrix}}} \quad (3.121)$$

We recall that for continuous boundary conditions $(-1)^V \det(C - \sqrt{\gamma} D) = \prod_\alpha (\lambda_\alpha + m_\alpha \sqrt{\gamma})$.

Note that (3.121) is related to the spectral determinant of the metric graph when boundary condition matrices C and D are γ independent. However, having established the relation between the vertex determinant and the arc determinant, Eq. (3.121) also holds when the parameters λ_α depend on γ (the case considered below). In this case, Eq. (3.121) is however not anymore straightforwardly related to the spectral determinant of the metric graph.

Let us consider the case with no potential $V(x) = 0$ and set all the lengths of the wires equal : $l_a = l \forall a$. For convenience, we introduce the notation

$$e^{-\sqrt{\gamma}l} = wu, \quad (3.122)$$

where u and w are two real or complex numbers. The bond scattering matrix elements are $R_{ij} = wu \delta_{i,\bar{j}}$ and therefore $\det(\mathbf{1}_{2B} + R) = [1 - (uw)^2]^B$. We consider the case where the boundary condition parameters λ_α are related to the valencies of the vertex by the relation

$$m_\alpha + \frac{\lambda_\alpha}{\sqrt{\gamma}} = 2w. \quad (3.123)$$

The matrix QR has elements : $(QR)_{ij} = u$ if the arc j terminates at the vertex from which issues the arc i (with $\bar{j} \neq i$) ; $(QR)_{i\bar{i}} = u(1-w)$; all other matrix elements are zero. We write (notations reminiscent of those of Refs. [62, 463])

$$QR = u(\mathcal{B} - w\mathcal{J}) \quad (3.124)$$

where $\mathcal{B}_{ij} = 1$ if $\text{end}(j) = \text{beginning}(i)$, $\mathcal{B}_{ij} = 0$ otherwise ; the matrix \mathcal{J} couples reversed arcs $\mathcal{J}_{ij} = \delta_{i,\bar{j}}$.

On the other hand, from (3.70) we find

$$\mathcal{M}_{\alpha\beta} = \frac{2\sqrt{\gamma}}{1 - (uw)^2} \{ \delta_{\alpha\beta} [w + (m_\alpha - w)(uw)^2] - uw a_{\alpha\beta} \} \quad (3.125)$$

Bartholdi's formula.— Using that $(-1)^V \det(C - \sqrt{\gamma}D) = (2w\sqrt{\gamma})^V$ we deduce the Bartholdi's formula for the zeta function [62, 195, 463, 505]

$$Z(u, w)^{-1} = \prod_{\tilde{C}} \left(1 - (1-w)^{n_R(\tilde{C})} u^{\ell(\tilde{C})} \right) \quad (3.126)$$

$$= \det(\mathbf{1}_{2B} - u(\mathcal{B} - w\mathcal{J})) = (1 - (uw)^2)^{B-V} \det(\mathbf{1}_V(1 - (uw)^2) - u\mathcal{A} + wu^2\mathcal{Y}), \quad (3.127)$$

where $\ell(\tilde{C})$ is the length of the orbit (number of wires visited) and $n_R(\tilde{C})$ the number of reflections of the orbit on vertices. \mathcal{A} denotes the adjacency matrix with matrix elements $a_{\alpha\beta}$. The matrix \mathcal{Y} is the diagonal matrix gathering the valencies : $\mathcal{Y}_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta}$. Once again it is worth emphasizing the beauty of such relation providing some representations of the ζ -function, an infinite product, in terms of determinants of arc matrices or vertex matrices, i.e. polynomials of the variable u . This formula was used in Ref. [195, 714] as a generating function for counting of the orbits with finite number of reflections. It has also found some interesting application in the context of quantum chaos in combinatorial graphs [505, 506].

Note that combinatorial graphs are related to metric graphs when all lengths are equal and for permutation invariant boundary conditions at the vertices. It follows that only two weights can be attributed to an orbit passing at a vertex (u for no reflection and $u(1-w)$ for a reflection) and therefore (3.126) is the most general trace formula for combinatorial graphs (up to the straightforward addition of magnetic fluxes in matrices \mathcal{A} and \mathcal{B}). As a consequence all the trace formulae obtained for metric graphs with permutation invariant boundary conditions at the vertices (we have consider the particular case of continuous boundary conditions here) would lead to the Bartholdi formula when lengths are taken to be equal and potential vanishes.

Bass formula.— For $w = 1$ we recover the Bass formula [65, 612] (this was also discussed in Refs. [195, 714])

$$Z(u, 1)^{-1} = \prod_{\tilde{\mathcal{C}}_B} (1 - u^{\ell(\tilde{\mathcal{C}}_B)}) \quad (3.128)$$

$$= \det(\mathbf{1}_{2B} - u(\mathcal{B} - \mathcal{J})) = (1 - u^2)^{B-V} \det(\mathbf{1}_V - u\mathcal{A} + u^2(\mathcal{Y} - \mathbf{1}_V)) \quad (3.129)$$

for the ζ -function over the backtrack-less orbits $\tilde{\mathcal{C}}_B$ (orbits with no reflection).

Ihara's formula.— The Bass formula generalises the Ihara formula [334] applicable to $q + 1$ -regular graphs (all vertices with the same coordination number $q + 1$) :

$$Z(u, 1)^{-1} = (1 - u^2)^{B-V} \det(\mathbf{1}_V(1 + qu^2) - u\mathcal{A}). \quad (3.130)$$

Remarks

- **Functional relations.**— Some functional relations are given for the Ihara ζ -function (3.130) of regular graph in Ref. [612].
- **Riemann hypothesis.**— If the graph is a Ramanujan graph ¹³ it is shown in Ref. [612] that $Z(q^{-s}, 1)$ satisfies a Riemann hypothesis (nontrivial zeros are on the axis $\text{Re } s = 1/2$).
- An interesting use of the computation of the ζ -function for graphs with generalized boundary was proposed in Ref. [195] (see also [714]) : Bartholdi's identity (3.126) allows to enumerate random walk with a finite number of backtrackings. Note that it would be straightforward to introduce parameters $w \rightarrow w_\alpha$ depending of the vertices, what would allow to count the number of reflections on a definite vertex of the trajectories of a certain number of steps.
- It was an important assumption that the vertex scattering matrix of metric graphs is γ independent. This was needed in order to simplify the trace formula for the Green function (3.46) to some compact expression of the spectral determinant (3.47). In a generic physical situation the vertex scattering matrix should depend on the energy, i.e. on the γ parameter.
- Finally let us mention the generalisation of Roth's work to the case of graphs with some infinitely long edges [549], what corresponds to the scattering situation.
- The trace formula for the graph scattering matrix has also been used in Ref. [377] and later works in order to analyse the chaotic scattering.

3.5 Functionals of the Brownian motion in graphs

A very interesting application of spectral determinant is to permit the analysis of some functionals of the Brownian motion in graphs, via the Feynman-Kac formula [351].

¹³ A Ramanujan graph is a regular graph of coordination number $z = q + 1$ such that all eigenvalues λ of the adjacency matrix satisfy $|\lambda| \leq 2\sqrt{z-1}$, except the eigenvalue $\lambda_0 = z$ associated with the uniform eigenvector $(1, 1, \dots, 1)$. Let us recall that $(-2\sqrt{z-1}, +2\sqrt{z-1})$ is the spectrum of the Bethe lattice (see last appendix of the chapter, p. 99).

- Distribution of the occupation time in a wire [196] (i.e. a generalisation of the famous Lévy’s arcsine law [411]).
- Distribution of the local time [168].
- Winding properties [644, 714, 637] (as we will see in chapter 5 this problem is closely related to the analysis of magnetoconductance oscillations in metallic networks).

The spectral determinant plays the role of the *generating function* for several functionals. The interest of the remark lies in the possible systematic construction of the spectral determinant, through formula like (3.71) or its generalisations. This idea is summarised and illustrated in Ref. [714].

3.6 Zeta regularisation of the spectral determinant

✍ [632] Christophe Texier, *ζ -regularised spectral determinants on metric graphs*, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 425203 (2010).– The problem to give a precise meaning to the spectral determinant “ $S(\gamma) = \prod_n (\gamma + E_n)$ ” requires a regularisation of the infinite product. This regularisation for example only affects the formula (3.71) through a global γ -independent prefactor. We discuss two possible regularisations (the section reproduces the main message of the article).

We recall that in expressions (3.47), (3.54), (3.102), (3.112), (3.78), (3.118) and (3.92), the prefactor was fixed arbitrarily, *a posteriori*, in order to ensure that all these formulae coincide when changing continuously the boundary conditions; the matching was done by inspection of the asymptotic behaviour for $\gamma \rightarrow \infty$. Our aim is now to determine the prefactor *a priori*.

3.7.1 A simple regularisation

A trivial proposal is to replace the infinite product by the ratio of two products for different spectral parameters

$$S^{\text{trivial}}(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_n \frac{\gamma + E_n}{\gamma_0 + E_n} = \exp \int_{\gamma_0}^{\gamma} d\gamma' \sum_n \frac{1}{\gamma' + E_n} \quad (3.131)$$

in the absence of a zero mode, we can eliminate one parameter by setting $\gamma_0 = 0$.

As an illustration, let us consider the spectral determinant of the Laplacian on $[0, L]$ with Neumann boundary conditions. The spectrum is $E_n = (\frac{n\pi}{L})^2$ for $n \in \mathbb{N}$. Using $\sinh x = x \prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\frac{x}{n\pi})^2)$, this simple regularisation gives $S^{\text{trivial}}(\gamma) = \frac{\sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma}L)}{\sqrt{\gamma_0} \sinh(\sqrt{\gamma_0}L)}$, to compare with $S(\gamma) = \sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma}L)$ deduced from Eq. (3.71).

3.7.2 Zeta regularisation

A popular regularisation procedure is the so-called zeta-regularisation, whose starting point is the definition of a « ζ -function »

$$\zeta(s, \gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n (\gamma + E_n)^{-s}. \quad (3.132)$$

Whereas the PM formula involves an *integration* which leaves the lower bound arbitrary

$$S(\gamma) = \exp \int_{???}^{\gamma} d\gamma' \zeta(1, \gamma'), \quad (3.133)$$

the ζ -regularised determinant is given by a *derivation*

$$S^\zeta(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \exp \left\{ -\frac{d\zeta}{ds}(0, \gamma) \right\}. \quad (3.134)$$

Using $A^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-At}$, we see that the ζ -function is a Laplace-Mellin transform of the partition function

$$\zeta(s, \gamma) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-\gamma t} Z(t). \quad (3.135)$$

We will make use of this relation in the following.

The ζ -regularised spectral determinant has been constructed recently by Friedlander [261] for continuous boundary conditions. In the next paragraph, we will recover Friedlander's result by a different approach starting from the Roth's trace formula for the partition function. This method will allow us to extend the result to another type of boundary conditions and conjecture a general form for the most general boundary conditions.

Functions continuous at the vertices

Let us first consider the simplest case of the Laplace operator acting on functions continuous at the vertices in the absence of potential. Moreover we set the parameters $\lambda_\alpha = 0$, when the Roth's trace formula for the partition function holds. Mellin transform of the Roth's partition function (3.114) reads

$$\begin{aligned} \zeta(s, \gamma) = & -\mathcal{L} \frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(-1/2)\Gamma(s)} \gamma^{-s+1/2} + \frac{V-B}{2} \gamma^{-s} \\ & + \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(s)} \gamma^{-s+1/2} \sum_{\mathcal{C}} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) e^{i\theta(\mathcal{C})} \left(\frac{2}{\sqrt{\gamma} \ell(\mathcal{C})} \right)^{-s+1/2} K_{\frac{1}{2}-s}(\sqrt{\gamma} \ell(\mathcal{C})) \end{aligned} \quad (3.136)$$

where $K_\nu(z)$ is the MacDonald function¹⁴ (modified Bessel function of third kind) [759]. First and third terms are of the form $\frac{1}{\Gamma(s)} h(s)$ for a function $h(s)$ regular for $s \rightarrow 0$, therefore we can use $\lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Gamma(s)} h(s) \right]' = h(0)$. The analysis of the third term requires the formula $\left[\frac{\partial K_\nu(z)}{\partial \nu} \right]_{\nu=1/2} = -\sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^z \text{Ei}(-2z)$ [759]. We get¹⁵

$$\frac{d\zeta}{ds}(0, \gamma) = -\sqrt{\gamma} \mathcal{L} - \frac{V-B}{2} \ln \gamma + \sum_{\mathcal{C}} \frac{\ell(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C})}{\ell(\mathcal{C})} e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\mathcal{C}) + i\theta(\mathcal{C})} \quad (3.137)$$

Sum over orbits can be decomposed as a sum over primitive orbits and their repetitions $\sum_{\mathcal{C}} = \sum_{\tilde{\mathcal{C}}} \sum_{n=1}^\infty$. Using $\ell(\mathcal{C}) = n \ell(\tilde{\mathcal{C}})$, $\theta(\mathcal{C}) = n \theta(\tilde{\mathcal{C}})$ and $\alpha(\mathcal{C}) = \alpha(\tilde{\mathcal{C}})^n$. Therefore

$$\frac{d\zeta}{ds}(0, \gamma) = -\sqrt{\gamma} \mathcal{L} - \frac{V-B}{2} \ln \gamma - \sum_{\tilde{\mathcal{C}}} \ln \left(1 - \alpha(\tilde{\mathcal{C}}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) + i\theta(\tilde{\mathcal{C}})} \right) \quad (3.138)$$

that is

$$S^\zeta(\gamma) = \gamma^{\frac{V-B}{2}} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \prod_{\tilde{\mathcal{C}}} \left(1 - \alpha(\tilde{\mathcal{C}}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) + i\theta(\tilde{\mathcal{C}})} \right) = \gamma^{\frac{V-B}{2}} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \det(\mathbf{1}_{2B} - QR) \quad (3.139)$$

¹⁴ Une représentation intégrale utile : $K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \int_0^\infty \frac{dt}{t^{\nu+1}} e^{-t-z^2/4t}$

¹⁵We use $K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}$

We recognise part of the expression (3.112) (see also Eq. (65) of Ref. [8]). We have related above Eq. (3.112) to another representation in terms of a vertex matrix, Eq. (3.71), hence

$$S^\zeta(\gamma) = \prod_{(\alpha\beta)} \frac{2 \sinh \sqrt{\gamma} l_{\alpha\beta}}{\sqrt{\gamma}} \frac{\det \mathcal{M}}{\prod_\alpha m_\alpha} = \frac{2^B}{(\prod_\alpha m_\alpha)} S(\gamma) \quad \text{for } V(x) = 0 \ \& \ \lambda_\alpha = 0 \ \forall \alpha. \quad (3.140)$$

The previous formula may be easily generalised to the case of the Schrödinger equation for continuous boundary condition with arbitrary parameters λ_α . Using the observation that various regularisations only differ by a γ -independent prefactor, we conclude that $S^\zeta(\gamma) = 2^B / (\prod_\alpha m_\alpha) S(\gamma)$ also holds in the presence of the potential

$$S^\zeta(\gamma) = \prod_{(\alpha\beta)} \frac{-2}{f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})} \frac{\det \mathcal{M}}{\prod_\alpha m_\alpha} \quad (3.141)$$

This is precisely Friedlander's result [261] (*cf.* Ref. [631], where the correspondence of notations is discussed). The product $\prod_{(\alpha\beta)} [-2/f'_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})]$ is the Dirichlet determinant of the graph (determinant when Dirichlet boundary conditions are chosen at all vertices that make all wires independent).

Example 1 : wire Let us consider a wire of length L ($B = 1$ bond and $V = 2$ vertices) with no potential $V(x) = 0$. Matrices C and D for boundary conditions of type (3.108) are

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

where λ_1 and λ_2 describe the boundary conditions at the two vertices. Eq. (3.154) gives

$$S_{\text{wire}}^\zeta(\gamma) = 2\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} L + (\lambda_1 + \lambda_2) 2 \cosh \sqrt{\gamma} L + \lambda_1 \lambda_2 \frac{2 \sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.143)$$

This result can also be obtained straightforwardly from (3.141).

- For $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ we recover the Neumann determinant

$$S_{\text{wire}}^{\zeta, \text{Neu/Neu}}(\gamma) = 2\sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} L = 2\gamma L \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right) = \text{“ } 2L \frac{\prod_{n=0}^{\infty} (\gamma + E_n)}{\prod_{n=1}^{\infty} E_n} \text{”} \quad (3.144)$$

where $E_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ with $n \in \mathbb{N}$ are the eigenvalues of the Laplace operator on $(0, L)$ for Neumann boundary conditions.

- Note that the second term corresponds to the Neumann/Dirichlet determinant

$$S_{\text{wire}}^{\zeta, \text{Neu/Dir}}(\gamma) = 2 \cosh \sqrt{\gamma} L = 2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right) \quad (3.145)$$

(Neumann at $x = 0$ and Dirichlet at $x = L$ or vice versa) retained for $\lambda_1 = 0$ and $\lambda_2 = \infty$ (with $\lambda_1 \lambda_2 = 0$).

- The last term is the Dirichlet determinant ($\lambda_1 = \lambda_2 = \infty$)

$$S_{\text{wire}}^{\zeta, \text{Dir/Dir}}(\gamma) = \frac{2 \sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} = 2L \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right) \quad (3.146)$$

Example 2 : ring We consider a ring of perimeter L ($B = 1$ bond and $V = 1$ vertex) with no potential $V(x) = 0$ and pierced by a flux θ . Matrices C and D for boundary conditions of type (3.108) are

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.147)$$

therefore (3.154) gives

$$S_{\text{ring}}^{\zeta}(\gamma) = 2(\cosh \sqrt{\gamma}L - \cos \theta) + \lambda \frac{\sinh \sqrt{\gamma}L}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.148)$$

It may also be obtained from (3.141) knowing how a loop contributes to \mathcal{M} (see Ref. [8]).

For $\lambda = 0$ we obtain

$$S_{\text{ring}}^{\zeta}(\gamma) = 2(\cosh \sqrt{\gamma}L - \cos \theta) = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \prod_{n \in \mathbb{Z}} \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right) \quad (3.149)$$

where $E_n = \left(\frac{2n\pi - \theta}{L}\right)^2$ with $n \in \mathbb{Z}$ is the spectrum of the ring. It is worth pointing that the $\theta \rightarrow 0$ limit is well defined : $S_{\text{ring}}^{\zeta}(\gamma) = \gamma L^2 \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\gamma}{E_n}\right)^2$ where the product runs over all the degenerate eigenvalues $E_n = (2n\pi/L)^2$ with $n \in \mathbb{N}^*$, except the zero mode $E_0 = 0$.

Example 3 : star graph We consider a star graph with B arms (then $V = B + 1$) with no potential $V(x) = 0$. We introduce a parameter λ at the central vertex and set all other boundary parameters equal to zero, $\lambda_{\alpha} = 0$. We have computed above the spectral determinant in this case

$$S_{\text{star}}^{\zeta}(\gamma) = \frac{2^B}{B} \prod_{a=1}^B \cosh \sqrt{\gamma}l_a \left(\lambda + \sqrt{\gamma} \sum_{a=1}^B \tanh \sqrt{\gamma}l_a \right). \quad (3.150)$$

If we consider the case $\lambda = 0$ and take the limit $\gamma \rightarrow 0$ we recover the result of Ref. [316]

$$S_{\text{star}}^{\zeta}(\gamma) \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2^B \mathcal{L}}{B} \gamma = \gamma \det'(-\Delta) \quad (3.151)$$

where $\det'(-\Delta) = 2^B \mathcal{L}/B$ is the determinant when the zero mode contribution has been excluded.

Functions with derivative continuous at the vertices

The reader has remarked that there is very little difference between the Roth trace formula (3.114) and its generalisation (3.120) : the second term proportional to $V - B$ is changed in sign and the definition of the weights are changed : when $\lambda_{\alpha} = 0$ and $\mu_{\alpha} = 0$ we have simply $\beta(\tilde{\mathcal{C}}) = (-1)^{\#\text{arcs of } \tilde{\mathcal{C}}} \tilde{\mathcal{C}}_{\alpha}(\tilde{\mathcal{C}})$. We can therefore perform a similar calculation and get in the case $V(x) = 0$ and $\mu_{\alpha} = 0$:

$$S^{\zeta}(\gamma) = \gamma^{\frac{B-V}{2}} e^{\sqrt{\gamma} \mathcal{L}} \prod_{\tilde{\mathcal{C}}} \left(1 - \beta(\tilde{\mathcal{C}}) e^{-\sqrt{\gamma} \ell(\tilde{\mathcal{C}}) + i\theta(\tilde{\mathcal{C}})}\right) \quad (3.152)$$

By a similar continuity argument as in the previous subsection we get for $V(x) \neq 0$ and $\mu_{\alpha} \neq 0$:

$$S^{\zeta}(\gamma) = \prod_{(\alpha\beta)} \frac{-2}{g_{\alpha\beta}(l_{\alpha\beta})} \frac{\det \mathcal{N}}{\prod_{\alpha} m_{\alpha}} \quad (3.153)$$

the first term (product over the bonds) coincides now with the Neumann determinant of the graph (product of spectral determinants for all disconnected wires with Neumann boundary conditions). This latter expression hence provides some generalisation of Friedlander's result to another kind of boundary conditions.

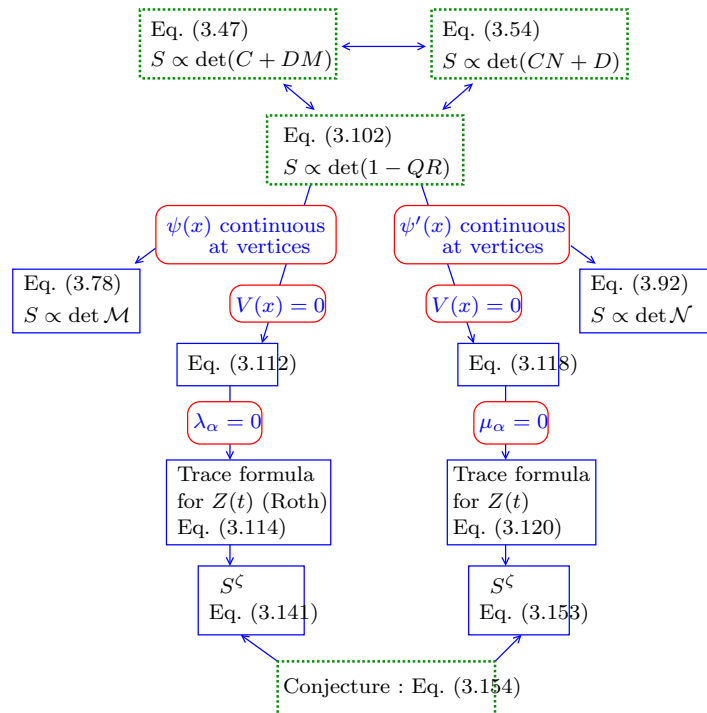


FIGURE 3.3 : Relations between the several expressions derived in the article. The dotted green boxes indicate results valid in the most general case whereas blue boxes are valid in particular cases.

Conjecture for the general case


The equations (3.47,3.54,3.102), allows in principle to go continuously from one to the other of these two situations by modifying continuously the boundary condition matrices C and D . Therefore, by continuity this leads us to conjecture that the ζ -regularised spectral determinant of the Schrödinger operator for the most general boundary conditions is given by

$$S^\zeta(\gamma) = \frac{(-1)^V}{\prod_\alpha m_\alpha} \prod_{(a)} \frac{-2}{f'_a(l_a)} \det(C + DM) = \frac{\det(\gamma^{-1/4}C - \gamma^{1/4}D)}{\prod_\alpha (-m_\alpha) \sqrt{\prod_a R_{a,\bar{a}}}} \det(\mathbf{1}_{2B} - QR) \quad (3.154)$$

where \prod_α runs over the V vertices, $\prod_{(a)}$ over the B bonds and \prod_a over the $2B$ arcs.

Final Remark (note added in 2014)

Further developments, with a more direct determination of the ζ -regularised spectral determinant, was provided in :

-  [317] Jon M. Harrison, Klaus Kirsten & Christophe Texier, *Spectral determinants and Zeta functions of Schrödinger operators on metric graphs*, J. Phys. A: Math. Theor. **45**, 125206 (2012).– The conjecture (3.154) I made in [632] was re-examined. In particular it was pointed out that (3.154) is not invariant under the change of boundary condition matrix $(C, D) \rightarrow (UC, UD)$, as it should. Hence, my conjecture (3.154) is correct only for particular choices of the boundary condition matrices, like (3.108), (3.116) or continuous deformations of these boundary condition matrices. The conjecture (3.154) should thus be replaced by a more general formula, given in Theorem 1 of our Ref. [317].

Annexe A : Intégrale de chemin pour l'oscillateur harmonique

Considérons un oscillateur harmonique unidimensionnel dont la dynamique est décrite par le hamiltonien

$$H = \frac{1}{2}p^2 + V(q) \quad \text{où} \quad V(q) = \frac{1}{2}\omega^2 q^2 \quad (3.155)$$

Nous nous intéressons dans cette section au propagateur

$$K(q, t|q_0, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle q | e^{-t\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (3.156)$$

où $|q\rangle$ est un état localisé spatialement.

3.A.1 Rappel : intégrale de chemin dans l'espace réel

Nous coupons l'intervalle de temps t en N intervalles de largeurs égales τ , et introduisons $N - 1$ relations de fermetures

$$K(q_N, t|q_0, 0) = \int dq_1 \cdots dq_{N-1} \langle q_N | e^{-\tau\hat{H}} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-\tau\hat{H}} | q_{N-2} \rangle \cdots \langle q_1 | e^{-\tau\hat{H}} | q_0 \rangle \quad (3.157)$$

Nous utilisons la formule de Glauber $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \cdots$ où les \cdots indiquent des commutateurs d'ordres supérieurs ($[A, [A, B]]$ etc). Dans la limite $N \rightarrow \infty$ (i.e. $\tau \rightarrow 0$ si t est fixé) nous pouvons écrire que $e^{-\tau\hat{H}} \simeq e^{-\tau\hat{H}_0} e^{-\tau V(\hat{q})}$ où $H_0 = \frac{1}{2}p^2$. L'action du terme potentiel est élémentaire :

$$\langle q_n | e^{-\tau\hat{H}} | q_{n-1} \rangle \simeq \langle q_n | e^{-\tau\hat{H}_0} | q_{n-1} \rangle e^{-\tau V(q_{n-1})} \simeq e^{-\tau V(q_n)} \langle q_n | e^{-\tau\hat{H}_0} | q_{n-1} \rangle \quad (3.158)$$

En utilisant l'expression du propagateur libre

$$\langle q | e^{-\tau\hat{H}_0} | q_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\tau}} \quad (3.159)$$

nous obtenons

$$K(q_N, t|q_0, 0) \simeq \underbrace{\int dq_1 \cdots dq_{N-1} \left(\frac{1}{2\pi\tau} \right)^{N/2}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{D}q(u)} \exp - \underbrace{\sum_{n=1}^N \left[\frac{(q_n - q_{n-1})^2}{2\tau} + \tau V(q_n) \right]}_{\stackrel{N \rightarrow \infty}{\simeq} \int_0^t du \left[\frac{1}{2} \dot{q}(u)^2 + V(q(u)) \right]} \quad (3.160)$$

ce que nous écrivons sous la forme d'une intégrale de chemin

$$K(q, t|q_0, 0) = \int_{q(0)=q_0}^{q(t)=q} \mathcal{D}q(u) e^{-\int_0^t du \left[\frac{1}{2} \dot{q}(u)^2 + V(q(u)) \right]} \quad (3.161)$$

où la somme porte sur tous les chemins $q(u)$ allant de q_0 à q en un temps t .

Dans le cas de l'oscillateur harmonique on obtient [754]

$$K(q, t|q_0, 0) = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi \sinh \omega t}} \exp - \frac{\omega}{2 \sinh \omega t} [\cosh \omega t (q^2 + q_0^2) - 2qq_0] . \quad (3.162)$$

3.A.2 Intégrale de chemin dans l'espace des impulsions

Il est possible d'introduire une écriture similaire pour le propagateur dans l'espace des impulsions, i.e. la transformée de Fourier

$$\tilde{K}(p, t|p_0, 0) \stackrel{\text{def}}{=} \langle p | e^{-t\hat{H}} | p_0 \rangle = \int \frac{dq dq_0}{2\pi} e^{-iqp+iq_0p_0} K(q, t|q_0, 0) \quad (3.163)$$

où $|p\rangle$ est une onde plane (un état localisé dans l'espace des impulsions). La double intégrale se calcule aisément :

$$\tilde{K}(p, t|p_0, 0) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\omega \sinh \omega t}} \exp -\frac{1}{2\omega \sinh \omega t} [\cosh \omega t (p^2 + p_0^2) - 2pp_0], \quad (3.164)$$

ce qui reflète la symétrie $p \leftrightarrow q$ de l'oscillateur harmonique.

Le propagateur peut être découpé d'une manière analogue à ce que nous avons fait dans l'espace réel :

$$\tilde{K}(p_N, t|p_0, 0) = \int dp_1 \cdots dp_{N-1} \langle p_N | e^{-\tau\hat{H}} | p_{N-1} \rangle \langle p_{N-1} | e^{-\tau\hat{H}} | p_{N-2} \rangle \cdots \langle p_1 | e^{-\tau\hat{H}} | p_0 \rangle \quad (3.165)$$

Nous utilisons cette fois :

$$\langle p_n | e^{-\tau\hat{H}} | p_{n-1} \rangle \simeq e^{-\frac{\tau}{2}p_n^2} \langle p_n | e^{-\tau V(\hat{q})} | p_{n-1} \rangle \quad (3.166)$$

La partie faisant intervenir le potentiel peut être obtenue en principe en résolvant

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + V \left(i \frac{\partial}{\partial p} \right) \right] \langle p | e^{-\tau V(\hat{q})} | p_0 \rangle = 0 \quad (3.167)$$

pour la condition initiale $\langle p | e^{-\tau V(\hat{q})} | p_0 \rangle |_{\tau=0} = \delta(p-p_0)$, équation qu'il n'est possible de résoudre que pour des potentiels particuliers, par exemple

$$\langle p | e^{-\tau \frac{1}{2} \omega^2 \hat{q}^2} | p_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\omega^2\tau}} e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2\omega^2\tau}}. \quad (3.168)$$

Ceci conduit à écrire

$$\tilde{K}(p_N, t|p_0, 0) \simeq \int \underbrace{dp_1 \cdots dp_{N-1} \left(\frac{1}{2\pi\omega^2\tau} \right)^{N/2}}_{\stackrel{\text{def}}{N \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{D}}p(u)} \exp - \underbrace{\sum_{n=1}^N \left[\frac{\tau}{2} p_n^2 + \frac{(p_n - p_{n-1})^2}{2\omega^2\tau} \right]}_{\stackrel{\simeq}{N \rightarrow \infty} \int_0^t du \left[\frac{1}{2} p(u)^2 + \frac{1}{2\omega^2} \dot{p}(u)^2 \right]} \quad (3.169)$$

i.e.

$$\tilde{K}(p, t|p_0, 0) = \int_{p(0)=p_0}^{p(t)=p} \tilde{\mathcal{D}}p(u) e^{-\int_0^t du \left[\frac{1}{2} p(u)^2 + \frac{1}{2\omega^2} \dot{p}(u)^2 \right]}, \quad (3.170)$$

ce qui fournit une intégrale sur des chemins dont les valeurs de la dérivée sur les bords est fixée. Notons que si $p(u)$ est la solution de l'équation du mouvement classique, $\dot{p}(u) = -\omega^2 q(u)$, alors le terme d'énergie potentielle est bien $\frac{1}{2\omega^2} \dot{p}(u)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 q(u)^2$.

Annexe B : Attachement de graphes

3.B.1 Traitement des bras morts

Nous illustrons l'intérêt de la formulation en intégrale de chemin en considérant le cas d'un graphe \mathcal{G} possédant un "bras mort" (figure 3.4). Le graphe avec bras est noté $\tilde{\mathcal{G}}$. Cette question avait déjà été partiellement discutée par Pascaud dans sa thèse [790]. Nous en proposons une analyse simplifiée grâce à l'intégrale de chemin. Les résultats de Pascaud sont généralisés.

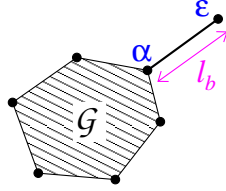


FIGURE 3.4 : Un graphe \mathcal{G} auquel est attaché un "bras mort" au vertex α . La zone hachurée représente le graphe.

Nous considérons le cas où l'opérateur de Laplace agit sur des fonctions continues. Dans la formulation intégrale de chemin, il est facile d'isoler la contribution du bras mort à $S_{\tilde{\mathcal{G}}}(\gamma)^{-1}$ dans l'éq. (3.65) ou l'éq. (3.68); celle-ci est donnée par

$$\int d\phi_\epsilon d\bar{\phi}_\epsilon e^{-\frac{1}{2}\lambda_\epsilon|\phi_\epsilon|^2} \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi \sinh \sqrt{\gamma}l_b} e^{-\frac{\sqrt{\gamma}}{2\sinh \sqrt{\gamma}l_b} [\cosh \sqrt{\gamma}l_b(|\phi_\alpha|^2+|\phi_\epsilon|^2)-\bar{\phi}_\alpha\phi_\epsilon-\phi_\alpha\bar{\phi}_\epsilon]} \quad (3.171)$$

$$= \frac{1}{\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b} \exp -\frac{1}{2}|\phi_\alpha|^2 \sqrt{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \cosh \sqrt{\gamma}l_b}{\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b} \quad (3.172)$$

Nous en déduisons immédiatement

$$S_{\tilde{\mathcal{G}}} = \left(\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b \right) \times S_{\mathcal{G}} \Big|_{\lambda_\alpha \rightarrow \lambda_\alpha + \sqrt{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \cosh \sqrt{\gamma}l_b}{\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b}} \quad (3.173)$$

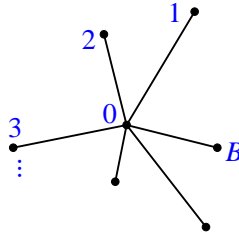


FIGURE 3.5 : Graphe étoile. $V = B + 1$.

Application : graphe étoile.— À titre d'illustration nous montrons que cette formule permet d'obtenir (sans aucun calcul!) le déterminant spectral du graphe en étoile (figure 3.5). Le graphe \mathcal{G} est le point central, avec paramètre λ_0 , i.e. $S_{\mathcal{G}} = \mathcal{M} = \lambda_0$. On attache B bras morts :

$$S_{\text{star}}(\gamma) = \prod_{b=1}^B \left(\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_b}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b \right) \times \left[\lambda_0 + \sqrt{\gamma} \sum_{b=1}^B \frac{\sinh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_b}{\sqrt{\gamma}} \cosh \sqrt{\gamma}l_b}{\cosh \sqrt{\gamma}l_b + \frac{\lambda_b}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma}l_b} \right] \quad (3.174)$$

Lorsque $\lambda_\alpha = \infty \forall \alpha$, on obtient le produit des déterminants de Dirichlet des fils $\prod_{b=1}^B \frac{\sinh \sqrt{\gamma} l_b}{\sqrt{\gamma}}$. Dans le cas où $\lambda_\alpha = 0 \forall \alpha$ on retrouve le résultat (l'équation donnant le spectre est bien connue [76, 75, 316])

$$S_{\text{star}}(\gamma) = \left(\prod_{b=1}^B \cosh \sqrt{\gamma} l_b \right) \sqrt{\gamma} \sum_{b=1}^B \tanh \sqrt{\gamma} l_b \quad (3.175)$$

3.B.2 Contribution des boucles

Il est possible de traiter la contribution d'une boucle (figure 3.6) par le même procédé (*cf.* [8]). Nous avons montré que, si la boucle de périmètre L traversée d'un flux θ est attachée au vertex α , le déterminant spectral du graphe $\tilde{\mathcal{G}}$ contenant la boucle est relié au déterminant spectral du graphe \mathcal{G} en l'absence de boucle par

$$S_{\tilde{\mathcal{G}}} = \frac{\sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} \times S_{\mathcal{G}} \Big|_{\lambda_\alpha \rightarrow \lambda_\alpha + 2\sqrt{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{\gamma} L - \cos \theta}{\sinh \sqrt{\gamma} L}} \quad (3.176)$$

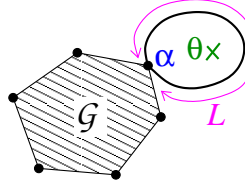


FIGURE 3.6 : Un graphe \mathcal{G} auquel est attaché une boucle de périmètre L traversée par un flux magnétique θ . La zone hachurée représente le graphe.

Remarque : Le traitement de ces « excroissances » peut clairement être abordé en considérant la procédure d'attachement de graphes évoquée plus bas et s'appliquant à des cas plus généraux. Si on note $S_{\text{ext}}(\gamma)$ le déterminant spectral du graphe extérieur attaché au vertex α (le bras mort ou l'anneau dans les deux cas discutés) et $S_{\text{ext}}^{\text{Dir}}(\gamma)$ le déterminant de ce graphe pour une condition de Dirichlet au vertex attaché, alors les règles (3.173) et (3.176) prennent la forme plus générale

$$S_{\tilde{\mathcal{G}}}(\gamma) = S_{\text{ext}}^{\text{Dir}}(\gamma) \times S_{\mathcal{G}}(\gamma) \Big|_{\lambda_\alpha \rightarrow \tilde{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha + \frac{S_{\text{ext}}(\gamma)}{S_{\text{ext}}^{\text{Dir}}(\gamma)}} \quad (3.177)$$

qui coïncide avec la relation (3.181) obtenue dans [631]. Le poids effectif $\tilde{\lambda}_\alpha$ joue le rôle d'un défaut « ponctuel », dans le sens où la continuité de la fonction d'onde reste assurée au vertex, mais avec une « structure interne » caractérisée par la dépendance du poids effectif $\tilde{\lambda}_\alpha$ dans la paramètre spectral γ .

3.B.3 Exemple

À titre d'illustration nous calculons le déterminant spectral d'un anneau sur lequel est branché un bras (figure 3.7).

Nous partons du graphe « vertex unique » avec paramètre $\lambda_0 : S^{\text{vertex}}(\gamma) = \lambda_0$. Nous utilisons la règle (3.176) pour obtenir le déterminant de l'anneau

$$S^{\text{vertex}}(\gamma) = \lambda_0 \longrightarrow S^{\text{ring}}(\gamma) = \frac{\sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} \left[\lambda_0 + 2\sqrt{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{\gamma} L - \cos \theta}{\sinh \sqrt{\gamma} L} \right] \quad (3.178)$$

$$= 2 \left(\cosh \sqrt{\gamma} L - \cos \theta \right) + \lambda_0 \frac{\sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} \quad (3.179)$$

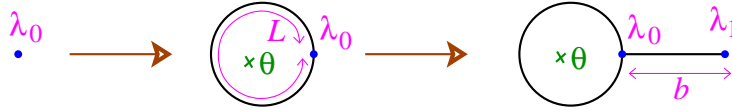


FIGURE 3.7 : Construction d'un graphe par étapes.

Nous utilisons ensuite la règle (3.173) :

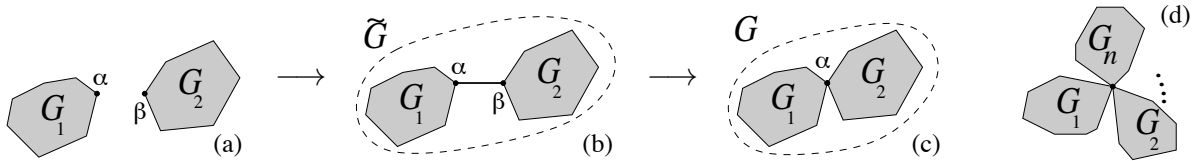
$$S^{\text{ring}}(\gamma) \longrightarrow S^{\text{ring/arm}}(\gamma) = \left(\cosh \sqrt{\gamma} b + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma} b \right) \quad (3.180)$$

$$\times \left[2 \left(\cosh \sqrt{\gamma} L - \cos \theta \right) + \frac{\sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}} \left(\lambda_0 + \sqrt{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{\gamma} b + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\gamma}} \cosh \sqrt{\gamma} b}{\cosh \sqrt{\gamma} b + \frac{\lambda_1}{\sqrt{\gamma}} \sinh \sqrt{\gamma} b} \right) \right]$$

Lorsque $\lambda_0 = 0$, nous retrouvons des expressions qui ont été utiles dans [644] : $S = \cosh b [2(\cosh L - \cos \theta) + \sinh L \tanh b]$ si $\lambda_1 = 0$ et $\lim_{\lambda_1 \rightarrow \infty} \frac{S}{\lambda_1} = \frac{\sinh b}{\sqrt{\gamma}} [2(\cosh L - \cos \theta) + \sinh L \coth b]$ si $\lambda_1 = \infty$.

3.B.4 Attachement de graphes par un point

☞ [631] Christophe Texier, *On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 085207 (2008). – Lorsqu'un graphe est obtenu par attachement de sous graphes attachés par un unique vertex, il est possible de construire le déterminant spectral en fonction de déterminants des sous graphes.

FIGURE 3.8 : (a) to (c) : Attachement de deux graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 . (d) attachement de n graphes par un point.

Fonction continue aux vertex. – On considère d'abord le cas des conditions aux limites continues, conditions aux limites (3.62,3.63). On note $S_{1,2}$ les déterminants spectraux des deux graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 , donnés par l'équation (3.78). On introduit également les déterminants de Dirichlet $S_1^{\text{Dir}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_\alpha \rightarrow \infty} \frac{S_1}{\lambda_\alpha}$ (déterminant pour une condition de Dirichlet au vertex α) et S_2^{Dir} . Le déterminant spectral du graphe \mathcal{G} obtenu par attachement des deux sous graphes est donné par [631]

$$S_{\mathcal{G}} = S_1 S_2^{\text{Dir}} + S_1^{\text{Dir}} S_2 \quad (3.181)$$

La formule se généralise sans difficulté au cas de l'attachement de plusieurs graphes [631] (figure 3.8.d) :

$$S_{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{S_1^{\text{Dir}} \cdots S_{k-1}^{\text{Dir}}}_{\text{Dirichlet}} S_k \underbrace{S_{k+1}^{\text{Dir}} \cdots S_n^{\text{Dir}}}_{\text{Dirichlet}}. \quad (3.182)$$

Notons que la définition du préfacteur du déterminant spectral est ici importante.

Exemple : encore le graphe étoile.— Pour illustrer la formule (3.182) nous pouvons considérer à nouveau le graphe étoile de la figure 3.5. Nous cherchons à retrouver le résultat (3.175) (pour simplifier nous fixons les $\lambda_\alpha = 0$). Afin d'attacher les fils nous avons besoin du déterminant du fil de longueur l_b avec conditions de Neumann aux deux extrémités $S^{\text{Neu/Neu}} = \sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_b$, et avec une condition de Dirichlet $S^{\text{Neu/Dir}} = \cosh \sqrt{\gamma} l_b$. Nous appliquons (3.182) :

$$S^{\text{star}} = \sum_{b=1}^B \cosh \sqrt{\gamma} l_b \times \prod_{b'(\neq b)} \sqrt{\gamma} \sinh \sqrt{\gamma} l_{b'} \quad (3.183)$$

i.e. nous avons retrouvé (3.175).

Bohr-Sommerfeld quantization interpretation (case $n = 2$).— In the case of the attachment of two graphs, we may give a simple scattering interpretation (cf. conclusion of Ref. [631]). If our general formula (2.12) for the scattering matrix of a graph connected to L semi-infinite wires is applied to the particular case of a graph connected to a single lead ($L = 1$), it gives the formula for the reflection phase shift of a plane wave of energy E :

$$\cotg(\delta/2) = -\sqrt{E} S^{\text{Dir}}(-E)/S(-E), \quad (3.184)$$

obtained in our article Akkermans *et al* [8].

Using this observation, we can interpret the representation (3.181) as follows : the spectrum of the graph $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ is given by $S_{\mathcal{G}}(-E) = 0$, leading to the condition

$$\frac{S_1^{\text{Dir}}(-E)}{S_1(-E)} = -\frac{S_2^{\text{Dir}}(-E)}{S_2(-E)}. \quad (3.185)$$

Denoting by $\delta_1(E)$ and $\delta_2(E)$ the reflection phase shifts characterizing the two graphs (Fig. 3.9), when each connected to an infinite lead, we obtain $\cotg(\delta_1/2) = -\cotg(\delta_2/2)$, i.e.

$$\delta_1(E_m) + \delta_2(E_m) = 2 m \pi \quad (3.186)$$

where m is an integer, which is of the form of the Bohr-Sommerfeld quantization condition.

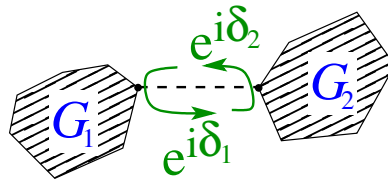


FIGURE 3.9 : Scattering interpretation of formula (3.181).

Fonction à dérivée continue aux vertex.— Dans le cas des conditions aux limites (3.83,3.84) pour lesquelles correspondant à (3.92), nous pouvons obtenir un résultat analogue. Pour cela nous introduisons les déterminants de Neumann $S_k^{\text{Neu}} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mu_\alpha \rightarrow \infty} \frac{S_k}{\mu_\alpha}$ des n sous-graphes (déterminant pour une condition de Neumann au vertex α). Nous aboutissons à [631]

$$S_{\mathcal{G}} = \sum_{k=1}^n \underbrace{S_1^{\text{Neu}} \cdots S_{k-1}^{\text{Neu}}}_{\text{Neumann}} S_k \underbrace{S_{k+1}^{\text{Neu}} \cdots S_n^{\text{Neu}}}_{\text{Neumann}} \quad (3.187)$$

Peut-on déduire le spectre de $\mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ d'informations spectrales sur \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 seulement?— La question sous-jacente à mon travail [631] était : peut-on obtenir le spectre du graphe \mathcal{G} uniquement à partir d'informations spectrales sur les sous-graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 ? Il pourrait sembler que oui d'après les expressions (3.181,3.182,3.187), cependant la réponse est un peu plus subtile : nous avons noté que la définition précise du préfacteur du déterminant spectral est ici importante. Pour aboutir à ces résultats le préfacteur γ -indépendant a été choisi selon un choix implicite conduisant aux équations (3.78) et (3.92). Or il n'est pas clair d'associer un critère précis à ce choix (plus haut nous avons seulement pris soin à ce que les différentes expressions du déterminant coïncident *a posteriori* lorsqu'on change continûment les conditions aux limites). Plus précisément : quelles propriétés du graphe sont implicitement derrière le choix de préfacteur de $S(\gamma)$? Cette question est reliée au problème de la régularisation du déterminant spectral qui a été discutée dans la section 3.6. En particulier y est montré que le préfacteur du déterminant ζ -régularisé dépend du nombre de liens et des coordinences, Éqs. (3.141,3.153). Cela nous permet de conclure que le spectre du graphe \mathcal{G} est obtenu en utilisant des informations spectrales sur les deux sous-graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 , les déterminants spectraux, mais également des informations topologiques. Nous notons m_α et m_β les coordinences des deux vertex des graphes \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 confondus pour former le graphe \mathcal{G} (figure 3.8). Nous pouvons relier les déterminants ζ -régularisés [voir plus Eq. (3.140)], d'après (3.181) nous obtenons

$$(m_\alpha + m_\beta) S_{\mathcal{G}}^\zeta = m_\alpha m_\beta \left(S_1^\zeta S_2^{\zeta, \text{Dir}} + S_1^{\zeta, \text{Dir}} S_2^\zeta \right) \quad (3.188)$$

ce qui montre que le spectre du graphe $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2$ est donné par les spectres des deux sous graphes, mais aussi par une information sur la topologie du graphe, précisément les coordinences aux vertex fusionnés.

Annexe C : Bethe lattice

Because I got interested into the Bethe lattice in several of my papers [473, 644], I thought it might be useful to recall here a well know result [751] for the Green's function in the Bethe lattice of coordination number z , i.e. on an infinite Cayley tree. Let us denote by \mathcal{A} the adjacency matrix

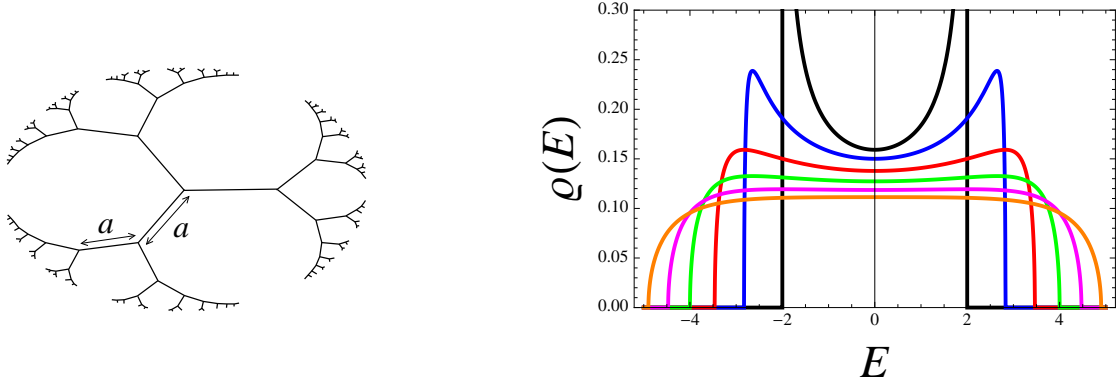


FIGURE 3.10 : Left : *Bethe lattice with coordination number $z = 3$* . Right : *DoS on the Bethe lattice for coordinnce ranging from $z = 2$ to $z = 7$* .

whose elements are $a_{\alpha\beta}$. Our aim is to construct the Green's function $\mathcal{G}(\alpha, \beta; E) \stackrel{\text{def}}{=} (E \mathbf{1} - \mathcal{A})_{\alpha\beta}^{-1}$. « Translation » invariance allows us to write the solution under the form of a function of the distance between two nodes $\mathcal{G}(\alpha, \beta; E) = G(d(\alpha, \beta))$, where $d(\alpha, \beta)$ is the shortest distance between α and β . Using « rotational » invariance, we are now led to the « radial » equation $\sum_{\beta} (E \delta_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) \mathcal{G}(\beta, 0; E) = \delta_{\alpha,0}$, i.e.

$$-(z-1)G(n+1) + EG(n) - G(n-1) = 0 \quad \text{for } n \geq 1 \quad (3.189)$$

$$-zG(1) + EG(0) = 1 \quad (3.190)$$

where $n = d(\alpha, 0) \in \mathbb{N}$ [0 corresponds to the vertex chosen for origin]. We look for the solution of this equation under the form $G(n) \propto r^n$, where r is solution of $(z-1)r^2 - Er + 1 = 0$. Roots are real for $E \notin \text{Spec}(\mathcal{A})$, what shows that the spectrum is the interval ¹⁶

$$\text{Spec}(\mathcal{A}) = (-2\sqrt{z-1}, +2\sqrt{z-1}). \quad (3.191)$$

Let us consider an energy E not in the spectrum. We choose the solution $r < 1$, ensuring the vanishing of the Green's function at infinity. Equation (3.190) allows to determine the prefactor of the Green's function. We conclude that

$$\mathcal{G}(\alpha, \beta; E) = \frac{2(z-1)}{(z-2)E + z\sqrt{E^2 - 4(z-1)}} \left[\frac{E - \sqrt{E^2 - 4(z-1)}}{2(z-1)} \right]^{d(\alpha, \beta)} \quad \text{for } E \notin \text{Spec}(\mathcal{A}) \quad (3.192)$$

from which we can now deduce the spectral density by analytic continuation

$$\varrho(E) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \mathcal{G}(\alpha, \alpha; E + i0^+) = \frac{z\sqrt{4(z-1) - E^2}}{2\pi(z^2 - E^2)} \quad \text{for } |E| \leq 2\sqrt{z-1}. \quad (3.193)$$

This result is known as the Kesten-McKay law [361, 446]. Note that the spectral density presents van Hove singularities only in the one-dimensional case ($z = 2$): $\varrho(E) = \frac{1}{\pi\sqrt{4-E^2}}$ (Figure 3.10).

¹⁶ Note that, apart for $z = 2$, the spectrum is narrower than the spectrum of the hypercubic lattice with same coordination $z = 2d$: $\text{Spec}(\mathcal{A}) = (-z, +z)$.

Annexe D : Articles

Les deux articles suivants sont reproduits :

Page 101 : Alain Comtet, Jean Desbois and Christophe Texier, *Functionals of the Brownian motion, localization and metric graphs*, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, R341–R383 (2005).

Page 102 : Christophe Texier, *On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach*, J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 085207 (2008).

Article

A. Comtet, J. Desbois & C. Texier,
Functionals of the Brownian motion, localization and metric graphs,
J. Phys. A : Math. Gen. **38**, R341–R383 (2005),
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0504513>.

Article

C. Texier,

On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach,

J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 085207 (2008),

<http://arxiv.org/abs/0706.0120>.

Chapitre 4

Transport quantique dans les métaux faiblement désordonnés


Le texte qui suit est un morceau de mes notes de cours ¹ sur la réponse linéaire que je donne au parcours de physique quantique depuis l'année universitaire 2007-2008. Il donne une description succincte suivant l'approche diagrammatique telle qu'on la trouve présentée dans la plupart des revues (théorie de perturbation dans l'espace réciproque). Nous utiliserons dans le prochain chapitre une approche moins courante basée sur l'analyse de la conductivité non locale dans l'espace réel, plus adaptée à l'étude des réseaux.

4.1 Introduction

L'analyse des propriétés de transport est essentiellement basée sur la théorie des bandes de Bloch, ou sur sa version simplifiée (le modèle des électrons libres), qui suppose une structure cristalline parfaite. En pratique l'existence de défauts structurels ou la présence d'impuretés brise l'invariance par translation dans le cristal, ce qui a des conséquences importantes sur les propriétés de transport. La modélisation de ces défauts se fait via l'introduction d'un potentiel aléatoire $\mathcal{V}(r)$. Insistons : ce potentiel n'a pas de dynamique, à un échantillon correspond une configuration du potentiel désordonné. On parle de désordre *gelé* (quenched). Dans une situation expérimentale donnée, les quantités physiques dépendent elle-même de la configuration du désordre $\mathcal{V}(r)$. Nous ne serons capables de calculer que des quantités moyennes (ou de caractériser leurs fluctuations). Dans une situation expérimentale il faudra se poser la question de savoir comment la moyenne sur le désordre est réalisée.

La première question est donc : que devons-nous calculer ? La distribution de la conductivité $\mathcal{P}(\sigma)$? Sa valeur moyenne $\bar{\sigma}$? Évidemment la réponse n'est pas unique et dépend de la situation (et du courage du physicien). Dressons un panorama pour avoir une idée du comportement d'une onde électronique dans un métal désordonné. ³ Nous introduisons quelques échelles pour cela. Rappelons que le transport est une propriété de surface de Fermi, une première échelle d'énergie est l'énergie de Fermi ϵ_F . Il faudra lui comparer une échelle d'énergie liée au potentiel désordonné. ⁴ Nous introduisons plutôt le vecteur de Fermi k_F (l'inverse de la longueur d'onde de Broglie) et le libre parcours moyen élastique ℓ_e , la distance entre collisions sur le désordre.

¹ Le polycopié complet est disponible à l'adresse

 http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/ dans la rubrique « Enseignement → Master ».

² Nous notons $\overline{\dots}$ la moyenne sur le désordre et gardons $\langle \dots \rangle$ pour la moyenne statistique/quantique.

³ Si nous parlons de transport quantique, les aspects ondulatoires sont importants : nous sommes ici intéressés par la question de la propagation d'une onde dans un milieu désordonné.

⁴ Par exemple l'intégrale de la fonction de corrélation $w = \int dr \mathcal{V}(r)\mathcal{V}(0)$ est une échelle pertinente.

Le régime de faible désordre ($k_F \ell_e \gg 1$).– La conductance adimensionnée ⁵ est grande $g \gg 1$ (c’est le cas d’un bon métal). La conductance est donnée par le résultat classique (Drude) à de petites corrections quantiques près : $g = g_{\text{Drude}} + \Delta g$ avec $g_{\text{Drude}} \gg 1$ et $\Delta g \lesssim 1$. Les fluctuations relatives de la conductance sont faibles (dans un échantillon macroscopique $g_{\text{Drude}} \gg 1 \gg \overline{\Delta g} \gg (\overline{g} - \overline{g})^2$). Les fluctuations sont maximales dans le régime mésoscopique où l’échantillon est complètement cohérent ; dans ce cas $g_{\text{Drude}} \gg \overline{\Delta g} \sim (\overline{g} - \overline{g})^2 \sim 1$; le régime “mésoscopique” est défini ci-dessous).

Le régime de fort désordre ($k_F \ell_e \lesssim 1$).– Lorsque le désordre est trop important le système devient isolant. Ce phénomène d’interférences est appelé *localisation forte* [39]. Dans ce cas la conductance varie fortement d’un échantillon à l’autre (certaines configurations rares des impuretés peuvent favoriser le transport et augmenter énormément la conductance). La distribution de la conductivité est une loi large et la donnée de $\overline{\sigma}$ n’a pas forcément un grand intérêt.

Le critère $\lambda_F \sim \ell_e$ permettant de séparer les deux régimes de localisation est appelé “critère de Ioffe-Regel” [337].

Le rôle de la dimensionnalité.– La dimensionnalité est un paramètre essentiel dans le problème de propagation d’une onde en milieu désordonné et l’effet du désordre est renforcé en allant vers les basses dimensions. ⁶ Dans un échantillon tridimensionnel, la transition de localisation se produit en augmentant la force du désordre. Dans la situation unidimensionnelle le régime de localisation forte peut être observé pour un désordre faible ($k_F \ell_e \gg 1$). Si on considère un fil quasi-unidimensionnel, de longueur L et de section W t.q. $N_c \sim (k_F W)^{d-1} \gg 1$ (le nombre de canaux ⁷). En faisant varier la longueur du fil à désordre (faible) fixé, nous observons trois régimes (a) $L \lesssim \ell_e$ correspond au régime balistique, (b) $\ell_e \lesssim L \lesssim \ell_{\text{loc}} \sim N_c \ell_e$ au régime diffusif et (c) $L \gtrsim \ell_{\text{loc}}$ au régime localisé. ⁸ Le cas extrême montrant le rôle de la dimension est la situation strictement unidimensionnelle pour laquelle le régime intermédiaire de faible désordre n’existe pas car $\ell_{\text{loc}} \sim \ell_e$. Enfin, mentionnons l’approche de la théorie d’échelle [5] : en postulant l’existence d’un unique paramètre d’échelle (la conductance) et moyennant quelques hypothèses minimales, les auteurs montrent que la transition de localisation n’existe que pour $d > 2$ (cf. introduction du chapitre 6).

La décohérence.– Nous avons discuté des propriétés de la diffusion d’une onde électronique dans un environnement désordonné. En pratique, les phénomènes d’interférences sont limités car l’électron interagit avec d’autres degrés de liberté : il subit des collisions *inélastiques* (collisions entre électrons ou avec les phonons) qui modifient son énergie et donc sa phase de manière aléatoire. Dans une situation réelle les phénomènes d’interférences quantiques ne sont observables qu’en deçà d’une certaine échelle de longueur caractérisant l’efficacité des processus inélastiques pour détruire les phénomènes d’interférences. Cette longueur est appelée *longueur de cohérence de phase* L_φ . Nous définissons le régime *mésoscopique* comme le régime où le système est complètement cohérent : $L \lesssim L_\varphi$ où L est la taille typique du système. L_φ dépend fortement de la température. Typiquement $L_\varphi(T = 1 \text{ K}) \sim 1 \mu\text{m}$ et peut atteindre 10 ou 20 μm vers 10 mK. Les phénomènes d’interférences ne sont donc observables qu’aux très basses températures et le

⁵ Dans une expérience de transport on mesure une résistance ou une conductance $G = 1/R$. La conductance adimensionnée est donnée par le rapport de la conductance par le quantum de conductance : $g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G}{e^2/h}$ (si on prend en compte la dégénérescence de spin une meilleure définition est $g \stackrel{\text{def}}{=} \frac{G}{2e^2/h}$; dans cette fin de chapitre nous ignorerons le spin qui ne joue aucun rôle dans la discussion). Le quantum de conductance vaut $e^2/h = 1/(25.8 \text{ k}\Omega)$.

⁶ Par exemple, en dimension 1, le régime diffusif de faible désordre n’existe pas et tout potentiel aléatoire à corrélations de portée finie conduit à la localisation de toutes les fonctions d’onde [768].

⁷ Un fil balistique se comporte comme un guide d’onde et est caractérisé par un certain nombre de modes transverses. On parle de “canaux”.

⁸ Ici nous avons introduit la longueur de localisation calculée dans le contexte de la théorie des matrices aléatoires [205, 451] $\ell_{\text{loc}} \sim N_c \ell_e$. On pourra se référer à l’article de revue très pédagogique de Carlo Beenakker [707].

phénomène de localisation forte difficile à observer [280]. Bien que l'étude du problème soit grandement compliquée par l'interaction électron-électron [753], puisque celle-ci détruit la cohérence de phase assez vite, nous nous retrouvons *de facto* dans le régime de faible désordre, même en basse dimension (quasi 1D). Pour formuler les choses autrement, disons que le phénomène de localisation forte, un phénomène cohérent, ne peut être observé que pour $L \gtrsim \ell_{\text{loc}}$ mais qu'en pratique il est très difficile que le système soit cohérent à cette échelle : on a en général $L_\varphi(T) \lesssim \ell_{\text{loc}}$.

Toutes ces remarques montrent qu'en ce qui concerne les métaux, il est pertinent de se limiter au problème de l'étude du transport quantique dans un bon conducteur dans le régime de faible désordre et nous nous attacherons à calculer la conductivité *moyennée* sur le potentiel aléatoire.

Le seconde question est d'ordre méthodologique : comment effectuer la moyenne sur le désordre dans le calcul d'une quantité (la conductivité) ? Nous avons souvent décomposé la conductivité sur le spectre de l'hamiltonien ; il est exclu de résoudre l'équation de Schrödinger pour une configuration du potentiel puis de réinjecter le spectre dans une formule de type Kubo-Greenwood

$$\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{\pi e^2}{\text{Vol}} \sum_{\alpha, \beta} \frac{f(\epsilon_\alpha) - f(\epsilon_\alpha + \hbar\omega)}{\omega} |v_{\alpha\beta}|^2 \delta(\hbar\omega + \epsilon_\alpha - \epsilon_\beta) \quad (4.1)$$

où la somme porte sur le spectre des états quantiques individuels $\{\epsilon_\alpha, |\varphi_\alpha\rangle\}$ et $v_{\alpha\beta} = \langle \varphi_\alpha | v_x | \varphi_\beta \rangle$ est l'élément de matrice de l'opérateur vitesse. Vol est le volume et $f(\epsilon)$ la distribution de Fermi-Dirac. Il devient donc essentiel de manipuler un objet compact contenant toute l'information sur le spectre, qui sera directement calculé en présence du potentiel désordonné. Un tel objet est la fonction de Green $\mathcal{G}(r, r'; E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle r | \frac{1}{E - H} | r' \rangle = \sum_n \frac{\psi_n(r) \psi_n^*(r')}{E - E_n}$, dont les pôles correspondent au spectre des valeurs propres et les résidus aux fonctions d'onde. La conductivité peut en effet être reliée à la fonction de Green

$$\boxed{\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega) = \frac{\pi e^2}{\text{Vol}} \int d\epsilon \frac{f(\epsilon) - f(\epsilon + \hbar\omega)}{\omega} \text{Tr} \left\{ \hat{v}_x \delta(\epsilon + \hbar\omega - \hat{H}) \hat{v}_x \delta(\epsilon - \hat{H}) \right\}} \quad (4.2)$$

où la trace est prise sur les états à une particule (dans l'expression H est l'hamiltonien d'un électron). Nous introduisons les fonctions de Green retardée et avancée $G^{\text{R,A}}(r, r'; E) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}(r, r'; z = E \pm i0^+)$ qui peuvent être reliées aux opérateurs de la trace : $\Delta G(r, r'; E) \stackrel{\text{def}}{=} G^{\text{R}}(r, r'; E) - G^{\text{A}}(r, r'; E) = -2i\pi \langle r | \delta(E - H) | r' \rangle$. L'étude du transport dans les métaux nous suggère de travailler plutôt dans une base d'ondes planes $|k\rangle$ (états propres du problème non désordonné). Nous introduisons

$$G^{\text{R,A}}(k, k'; E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle k | \frac{1}{E - H \pm i0^+} | k' \rangle \quad (4.3)$$

en terme de laquelle (4.2) devient :

$$\text{Re } \tilde{\sigma}(\omega) = -\frac{e^2}{4\pi m^2} \int d\epsilon \frac{f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)}{\omega} \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{k, k'} k_x k'_x \Delta G(k, k'; \epsilon + \omega) \Delta G(k', k; \epsilon) \quad (4.4)$$

La méthode ? Maintenant que nous avons introduit le “bon” objet, reste à savoir comment le manipuler, *i.e.* comment effectuer la moyenne sur le désordre de produits de fonctions de Green, supposant donnée la distribution $\mathcal{DVP}[\mathcal{V}]$ du désordre. La difficulté vient notamment de la présence du potentiel au dénominateur dans $G(E) = \frac{1}{E - H}$. Deux méthodes utilisent un “truc” pour exponentier le dénominateur et faire apparaître la fonctionnelle caractéristique du

potentiel : la méthode des répliques [341]⁹ et la méthode supersymétrique [679, 752]. La mise en œuvre de ces deux approches nécessite des techniques de théorie des champs assez sophistiquées.

La troisième méthode, que nous suivrons, est l'approche perturbative où nous développons perturbativement $G(E)$ avant de le moyenner sur le désordre. Comme nous l'avons déjà souligné, les résultats intéressants sont non perturbatifs dans le désordre. Cette approche n'est intéressante que si nous pouvons resommer les corrections perturbatives. Le cas unidimensionnel permet une resommation complète des corrections perturbatives dans le cas où le potentiel est un bruit blanc [72, 73]. En vérité ces techniques assez lourdes ne sont pas indispensables et peuvent être évitées au profit de méthodes non perturbatives probabilistes plus élégantes [768, 769] (au moins à mon goût, par exemple cf. [714]). Dans les problèmes à plusieurs dimensions nous devons nous contenter de resommations partielles qui ne seront valables que dans le domaine de *faible désordre*. Nous précisons cette remarque par la suite.

4.2 Méthode des perturbations et choix d'un modèle de désordre

Nous avons expliqué plus haut que l'objet de base codant l'information sur le système est la fonction de Green. Celle-ci peut être calculée perturbativement. Si on pose $G = \frac{1}{E-H}$ avec $H = H_0 + \mathcal{V}$ on a $G = G_0 + G_0 \mathcal{V} G_0 + G_0 \mathcal{V} G_0 \mathcal{V} G_0 + \dots$ où $G_0 = \frac{1}{E-H_0}$. La fonction de Green libre est diagonale dans l'espace de Fourier

$$\langle k | \frac{1}{E-H_0} | k' \rangle = \delta_{k,k'} G_0(k) \quad \text{avec } G_0(k) = \frac{1}{E - \epsilon_k} \quad (4.5)$$

où $\epsilon_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k^2}{2m}$. (Tant que cela n'est pas nécessaire nous ne spécifions pas s'il s'agit de la fonction de Green avancée ou retardée). Pour aller plus loin il nous faut savoir comment modéliser les défauts (impuretés, défauts structurels) et le choix du modèle a-t-il une influence sur la physique ? En général la réponse est oui, évidemment, toutefois nous nous intéresserons à un régime de faible désordre (encore à caractériser) et seul le second cumulant de \mathcal{V} sera important. Pour cette raison nous pouvons nous limiter au choix d'une distribution gaussienne, entièrement caractérisée par la fonction de corrélation $\mathcal{V}(r)\mathcal{V}(r')$. En pratique il est raisonnable de supposer que les corrélations du potentiel désordonné sont à courte portée, nous les prendrons de portée nulle pour simplifier. En conclusion, pour l'étude des propriétés de transport dans les métaux faiblement désordonnés il est suffisant de choisir le modèle minimal :

$$\mathcal{D}\mathcal{V}P[\mathcal{V}] = \mathcal{D}\mathcal{V} \exp -\frac{1}{2w} \int dr \mathcal{V}(r)^2 \quad (4.6)$$

Afin de comprendre comment fonctionne la méthode des perturbations, calculons les premiers termes de la fonction de Green moyenne \overline{G} .

Vertex.— Comme nous travaillons dans l'espace réciproque le calcul fera intervenir la moyenne des éléments de matrice de \mathcal{V} (le vertex élémentaire décrivant l'interaction entre un électron et

⁹ La méthode des répliques [216, 222] repose sur le truc suivant. On écrit : $\frac{1}{A} = \lim_{n \rightarrow 0} \int d\vec{\phi} \frac{\phi^2}{n} e^{-\frac{1}{2}A\phi^2}$, où $\vec{\phi}$ est un "champ" à n composantes (les n répliques). On transforme le calcul de $\langle \frac{1}{A} \rangle$ (difficile) en $\langle e^{-kA} \rangle$ (facile). Le prix à payer est de faire tendre le nombre de composantes n vers 0 ! Appliquons le truc au calcul de la fonction de Green moyenne : $\langle x | (H-E)^{-1} | x' \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \int \mathcal{D}\vec{\phi} \frac{\vec{\phi}(x) \cdot \vec{\phi}(x')}{n} e^{-S}$ où $\vec{\phi}(x)$ est un champ à n composantes. La moyenne sur un désordre gaussien, $\mathcal{D}\mathcal{V}P[\mathcal{V}] = \mathcal{D}\mathcal{V} \exp -\frac{1}{2w} \int dx \mathcal{V}(x)^2$, génère une action $S = \int dx L$ pour une théorie des champs en interaction $L = \frac{1}{2}(\partial_x \vec{\phi})^2 - \frac{E}{2}\vec{\phi}^2 - \frac{w}{8}\vec{\phi}^4$ (chapitre 9 du tome 2 de l'ouvrage d'Itzykson & Drouffe [341]). Si on considère un problème invariant par translation (au moins après moyenne sur le désordre) on peut encore simplifier le calcul en écrivant $\langle x | (H-E)^{-1} | x \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{2}{n} \frac{\partial}{\partial E} \int \mathcal{D}\vec{\phi} e^{-S}$ de laquelle on peut extraire la DoS en faisant $E \rightarrow E + i0^+$.

le potentiel désordonné pour le calcul de quantités moyennées) :

$$\overline{\langle k_g | \mathcal{V} | k_d \rangle \langle k'_g | \mathcal{V} | k'_d \rangle} = \frac{w}{\text{Vol}} \delta_{k_g+k'_g, k_d+k'_d} \quad (4.7)$$

où k_d et k'_d sont des impulsions entrantes et k_g et k'_g des impulsions sortantes. Cette expression, la TF de la fonction de corrélation $\overline{\mathcal{V}(r)\mathcal{V}(r')} = w\delta(r-r')$, montre que **l'invariance par translation est restaurée après moyenne sur le désordre**. On peut interpréter physiquement le corrélateur comme une double interaction avec un défaut localisé.¹⁰ Cette diffusion par le défaut permet de transférer de l'impulsion d'une fonction de Green à une autre.

Nous commençons par calculer le premier terme non nul en moyenne : $\overline{G_0 \mathcal{V} G_0 \mathcal{V} G_0}$. Le terme d'ordre 2 de $\overline{G(k, k')}$ s'écrit :

$$\overline{\langle k | G_0 \mathcal{V} G_0 \mathcal{V} G_0 | k' \rangle} = G_0(k) \sum_{k''} \frac{w}{\text{Vol}} \delta_{k, k''} G_0(k'') G_0(k') = \delta_{k, k'} G_0(k)^2 \frac{w}{\text{Vol}} \sum_q G_0(q) \quad (4.8)$$

D'après la remarque sur l'invariance par translation et la conservation des impulsions au niveau du vertex, il était clair que le résultat avait la structure $\overline{G(k, k')} \equiv \delta_{k, k'} \overline{G(k)}$. Le premier terme du calcul perturbatif de la fonction de Green moyenne est finalement

$$\overline{\delta^2 G(k)} = G_0(k) \left[\frac{w}{\text{Vol}} \sum_q G_0(q) \right] G_0(k) = \begin{array}{c} \text{w} \\ \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ k-q \quad k-q \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ k \quad q \quad k \end{array} \quad (4.9)$$

La petite représentation graphique nous permet de déduire facilement les règles de Feynman.

Règles de Feynman.

1. À l'ordre $2n$ des perturbations en \mathcal{V} , on dessine les $(2n-1)!!$ diagrammes : une ligne continue représente une fonction de Green libre $G_0(k)$, une ligne pointillée une double interaction avec un défaut.
2. On associe des impulsions de façon à respecter la conservation de l'impulsion à chaque vertex.
3. Chaque double interaction est associée à un poids $\frac{w}{\text{Vol}}$.
4. On somme sur toutes les impulsions libres selon \sum_q .

Nous dessinons les trois diagrammes obtenus à l'ordre suivant :

$$\overline{\delta^4 G(k)} = \begin{array}{c} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \times \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \times \quad \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \times \quad \times \end{array} \quad (4.10)$$

Self énergie.— Nous pouvons remarquer que le premier des diagrammes de (4.10) correspond à une répétition du bloc de la première correction (4.9), que nous notons :

$$\Sigma_2 = \begin{array}{c} \times \\ \swarrow \quad \searrow \\ \times \quad \times \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad \leftarrow \\ \times \quad \times \end{array} = \frac{w}{\text{Vol}} \sum_q G_0(q) \quad (4.11)$$

¹⁰ Si nous avons choisi un modèle plus général de désordre, le cumulatif d'ordre p serait associé à p interactions avec un défaut. Pour clarifier cette remarque, considérons le modèle de potentiel désordonné $\mathcal{V}(r) = v_0 \sum_i \delta(r-r_i)$ où les positions sont distribuées selon la loi de Poisson (positions décorréelées pour une densité moyenne n_i). Le calcul du second moment $\overline{\mathcal{V}(r)\mathcal{V}(r')} = v_0^2 \sum_{i \neq j} \delta(r-r_i)\delta(r'-r_j) + v_0^2 \delta(r-r') \sum_i \delta(r-r_i) = (n_i v_0)^2 + n_i v_0^2 \delta(r-r')$ montre que le second cumulatif s'interprète comme une double interaction avec une même impureté. Le cumulatif $\overline{\mathcal{V}(r_1) \cdots \mathcal{V}(r_n)}^C = n_i v_0^n \delta(r_1-r_2) \cdots \delta(r_1-r_n)$ correspond à n interactions avec une impureté.

à chaque ordre, certaines des corrections contiendront également ce bloc et un des $(2n - 1)!!$ termes sera n répétitions de ce bloc. Il y a un moyen très simple de resommer tous ces termes (c'est une série géométrique) :

$$\frac{1}{G_0(k)^{-1} - \Sigma_2} = \text{---} + \text{---} \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \triangle \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \triangle \triangle \triangle \text{---} + \dots \quad (4.12)$$

Nous pouvons donc regrouper dans un objet que nous appelons la *self énergie* et notons $\Sigma(E)$, tous les blocs insecables par un seul "coup de ciseau" dans une ligne de fonction de Green. Outre que cette remarque permet de resommer une infinité de diagrammes sans effort, l'intérêt d'introduire cet objet est de conduire à une fonction de Green moyenne présentant une structure similaire à la fonction de Green libre, donc plus facile à analyser :

$$\bar{G}(k) = \frac{1}{E - \epsilon_k - \Sigma(E)} \quad (4.13)$$

Le calcul du terme d'ordre n de $\Sigma(E)$ présente moins de diagrammes que celui de $G(E)$. Considérer le développement perturbatif de $\Sigma(E)$ est une manière de prendre en compte des corrections d'ordre n de $G(E)$ se déduisant de manière évidente des ordres $n' < n$. Par exemple, à l'ordre w^2 , Σ_4 sera donné par le diagramme de Σ_2 plus deux diagrammes d'ordre w^2 correspondant aux deux derniers termes de (4.10) :

$$\Sigma_4 = \text{---} \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \triangle \text{---} + \text{---} \triangle \triangle \text{---} \quad (4.14)$$

Exercice 4.1 : Dessiner tous les diagrammes de Σ_6 (la self-énergie à l'ordre w^3). Comparer avec $\delta^2 \bar{G}(k) + \delta^4 \bar{G}(k) + \delta^6 \bar{G}(k)$.

Les deux échelles du problème sont l'énergie de Fermi ϵ_F (rappelons-nous que la conductivité longitudinale fait intervenir les fonctions de Green à $E = \epsilon_F$) et le désordre w . Dans la limite de faible désordre nous pouvons rester à l'approximation $\Sigma(E) = \Sigma_2(E) + O(w^2)$. La partie imaginaire est importante car elle décale le pôle de la fonction de Green ¹¹

$$\frac{1}{2\tau_e} = -\text{Im} \Sigma^R(E) \simeq -\text{Im} \Sigma_2^R(E) = -\frac{w}{\text{Vol}} \sum_q \text{Im} G_0^R(q) = \pi \rho_0 w \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\tau_e} = 2\pi \rho_0 w} \quad (4.15)$$

où ρ_0 est la densité d'états par unité de volume. Nous oublions sa partie réelle (si elle est constante elle peut être absorbée dans un changement de zéro des énergies). À cette approximation

$$\boxed{\bar{G}^R(k; \epsilon_F) = \frac{1}{\epsilon_F - \epsilon_k + \frac{i}{2\tau_e}}} \quad (4.16)$$

τ_e s'interprète comme la durée de vie de l'onde plane, *i.e.* le temps pendant lequel la direction de l'impulsion est conservée (le module de l'impulsion est conservé au cours des processus de collision sur le désordre statique). Il s'agit donc du *temps de parcours moyen élastique*. On peut lui associer le libre parcours moyen élastique

$$\ell_e = v_F \tau_e, \quad (4.17)$$

¹¹ Nous jetons un voile pudique sur la partie réelle de la self énergie. A priori celle-ci est une fonction régulière de l'énergie et elle pourrait être éliminée par une reparamétrisation du spectre des énergies. En y regardant de plus près nous constatons que $\text{Re} \Sigma$ diverge en dimension $d > 1$. Ce problème vient de la nature singulière des corrélations du potentiel en δ de Dirac. La même difficulté apparaît dans l'analyse de l'hamiltonien $-\Delta + v \delta(r)$ en dimension $d > 1$. Une manière de donner un sens au problème a été proposée dans l'article [343].

où v_F est la vitesse de Fermi. Nous pouvons maintenant définir précisément le critère de *faible désordre* : l'échelle d'énergie $1/\tau_e$ caractérise la "force" du désordre (le taux de diffusion d'un électron par le potentiel désordonné), le régime de faible désordre correspond donc à

$$\epsilon_F \tau_e \gg 1 \quad \text{ou} \quad \boxed{k_F \ell_e \gg 1} \quad (4.18)$$

📖 **Exercice 4.2** : Montrer que, dans la limite de faible désordre, la fonction de Green dans l'espace réel présente la structure

$$\overline{G}^R(r, r') \simeq G_0^R(r, r') e^{-R/2\ell_e} \propto \frac{1}{R^{(d-1)/2}} e^{ik_F R - R/2\ell_e} \quad (4.19)$$

où $R = ||r - r'||$. (Le calcul est simple en $d = 1$ et $d = 3$; en $d = 2$ il n'est valable que pour $k_F R \gg 1$).

📖 **Exercice 4.3** : Dans cet exercice on souhaite resommer une classe particulière de diagrammes pour calculer la self énergie :

$$\Sigma_{\text{emp}} = \begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \end{array} = \begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \diagdown \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \times \quad \diagdown \\ \times \end{array} + \begin{array}{c} \times \\ \diagup \quad \times \quad \times \quad \diagdown \\ \times \end{array} + \dots \quad (4.20)$$

Dans l'espace de Fourier, écrire une équation de récurrence pour Σ_{emp} . En déduire l'expression de la self énergie. Montrer que $\Sigma_{\text{emp}} \simeq \Sigma_2$ pour $\epsilon_F \tau_e \gg 1$.

4.3 La conductivité à l'approximation de Drude

Nous commençons par plusieurs remarques permettant de simplifier (4.4). (i) Dans la pratique les fréquences correspondant à une situation expérimentale sont toujours t.q. $\omega \ll T$ (rappelons nous que $T = 1 \text{ K}$ correspond à 140 GHz). Nous procédons à la substitution $\frac{f(\epsilon) - f(\epsilon + \omega)}{\omega} \rightarrow -\frac{\partial f}{\partial \epsilon}$. (ii) D'autre part l'élargissement thermique ne joue aucun rôle dans le calcul de la conductivité moyenne (ceci ne serait pas vrai si nous étudions les fluctuations de la conductivité). Nous fixons $T = 0$. (iii) Dans le produit $\Delta G \Delta G = (G^R - G^A)(G^R - G^A)$, on peut montrer que seuls les termes $G^R G^A$ et $G^A G^R$ apportent des contributions importantes, après moyenne. Finalement, notre point de départ est ¹² :

$$\overline{\sigma(\omega)} = \frac{e^2}{2\pi m^2} \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{k, k'} k_x k'_x \overline{G^R(k, k'; \epsilon_F + \omega) G^A(k', k; \epsilon_F)} \quad (4.21)$$

La conductivité est donnée par un produit de fonctions de Green. La première chose la plus simple à faire consiste à négliger les corrélations entre les deux fonctions de Green : $\overline{G^R G^A} \simeq \overline{G^R} \overline{G^A}$. En utilisant $\overline{G^R(k, k')} = \delta_{k, k'} \overline{G^R(k)}$, nous obtenons

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{Drude}} = \frac{e^2}{2\pi m^2} \frac{1}{\text{Vol}} \sum_k k_x^2 \overline{G^R(k; \epsilon_F + \omega)} \overline{G^A(k; \epsilon_F)} \quad (4.22)$$

Le calcul de ce type de quantité est tout à fait standard et des expressions similaires apparaîtront par la suite. Nous remplaçons k_x^2 par k^2/d (isotropie de la relation de dispersion) puis k^2 par k_F^2 pour le sortir de la somme (ce qu'on peut justifier plus soigneusement en calculant la somme dans l'exercice ci-dessous).

¹² Notons que ces trois hypothèses conduisent à $\overline{\text{Re } \sigma(\omega)} \propto \sum_{k, k'} k_x k'_x \text{Re}[G^R(k, k'; \epsilon_F + \omega) G^A(k', k; \epsilon_F)]$, ce qui est un petit peu plus faible que (4.21), sauf dans le cas $\omega = 0$.

✎ **Exercice 4.4** : Montrer que $\frac{w}{V_{\text{ol}}} \sum_k \bar{G}^R(k; \epsilon_F + \omega) \bar{G}^A(k; \epsilon_F) = \frac{1}{1 - i\omega\tau_e}$.

Indication : justifier $\frac{1}{V_{\text{ol}}} \sum_k \rightarrow \rho_0 \int_{\mathbb{R}} d\epsilon_k$, où ρ_0 est la densité d'états par unité de volume au niveau de Fermi, puis utiliser le théorème des résidus.

Finalement nous aboutissons à :

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{Drude}} = \frac{e^2}{2\pi m^2} \frac{k_F^2}{d} 2\pi\rho_0\tau_e \frac{1}{1 - i\omega\tau_e} = \frac{e^2\tau_e}{m} \frac{2\epsilon_F\rho_0}{d} \frac{1}{1 - i\omega\tau_e} \quad (4.23)$$

Nous reconnaissons la densité électronique, $n = \frac{2\epsilon_F\rho_0}{d}$, et finalement

$$\boxed{\overline{\sigma(\omega)}^{\text{Drude}} = \frac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau_e}} \quad \text{où} \quad \sigma_0 = \frac{ne^2\tau_e}{m} \quad (4.24)$$

Nous avons bien retrouvé le résultat du modèle semi-classique de Drude-Sommerfeld. Alors que la conductivité du système balistique présente une divergence à $\omega \rightarrow 0$, $\sigma(\omega) \propto i/\omega$, que nous avons interprétée,¹³ les collisions sur les défauts sont responsables d'une conductivité finie à fréquence nulle.

✎ **Exercice 4.5** : Montrer que la conductivité de Drude peut également se réécrire sous la forme $\sigma_0 = e^2\rho_0 D$ (relation d'Einstein) où $D = \ell^2/(\tau_e d)$ est la constante de diffusion. On donne $k_F^{-1} = 0.83 \text{ \AA}$ (argent), quelle est la distance parcourue par un électron balistique en 1 s ? On donne $\ell_e \simeq 30 \text{ nm}$ (Ag6N, argent très pur). Calculer D . Quelle est la distance parcourue par un électron diffusif en 1 s ?

Effet de la température : à $T \neq 0$, le résultat (4.24) doit être convolué par la dérivée d'une fonction de Fermi $-\partial f/\partial\epsilon$. Comme le résultat à $T = 0 \text{ K}$ dépend faiblement de l'énergie (à travers n et τ_e), la convolution est sans effet. Toutefois la température n'est pas sans effet. En effet, nous venons de montrer que les collisions (élastiques) sur le désordre, induisent une conductivité finie. Si les électrons sont soumis à d'autres processus de collision¹⁴ (électron-phonon,...) la self énergie de la fonction de Green reçoit les contributions des différentes perturbations : désordre, interaction électron-phonon, etc. Cela correspond à ajouter les taux de relaxation¹⁵ selon la loi de Matthiessen

$$\frac{1}{\tau(T)} = \frac{1}{\tau_e} + \frac{1}{\tau_{e\text{-ph}}(T)} + \dots \quad (4.25)$$

Le calcul de la conductivité conduit à $\sigma_{\text{Drude}} = \frac{ne^2\tau(T)}{m}$.

¹³ elle correspond à un comportement de la réponse impulsionnelle $\sigma(t) \propto \theta(t)$, traduisant l'apparition d'un courant constant (i.e. la conservation de l'impulsion des électrons) suite à une impulsion de champ électrique.

¹⁴ autres que électron-électron qui conserve le courant total,

¹⁵ **Temps de vie et temps de transport.**— Nous devons ici apporter une petite précision sur la nature du temps de relaxation intervenant dans la conductivité. Nous avons introduit le temps de vie des états électroniques comme : $1/\tau = -2\text{Im}\Sigma^R = 2\pi\rho_0\langle C(\theta)\rangle_\theta$, où $C(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \int dr e^{-i(k'-k)r} \overline{\mathcal{V}(r)\mathcal{V}(0)}$ où θ est l'angle entre les deux vecteurs k et k' sur la surface de Fermi, $\|k\| = \|k'\| = k_F$ (à l'approximation de Born, $C(\theta)$ est proportionnelle à la section efficace de diffusion dans la direction θ). Le temps qui intervient dans la conductivité n'est en général pas ce temps mais le temps de relaxation de la vitesse [773, 743, 744] : $\sigma = \frac{ne^2\tau_{\text{tr}}}{m}$ (ceci est lié à la présence de $k_x k'_x$ dans les relations (4.4,4.21)); ce temps est appelé *temps de transport* $\boxed{1/\tau_{\text{tr}} = 2\pi\rho_0\langle C(\theta)(1 - \cos\theta)\rangle_\theta}$. Dans le cas de la diffusion isotrope, $C_{\text{isotrope}}(\theta) = w$ n'a pas de structure et les deux temps coïncident. Dans le cas de diffusion anisotrope (lorsque la fonction de corrélation de \mathcal{V} présente une structure), les deux temps peuvent toutefois différer notablement $\tau_{\text{tr}} > \tau$. Cette discussion s'applique au cas de la diffusion électron-phonon (chap. 26 de [747]) : le temps de collision électron-phonon est $\tau_{e\text{-ph}} \propto T^{-3}$ mais la diffusion est fortement anisotrope à basse température ($\ll \omega_D$, la coupure de Debye) et le temps de transport correspondant est $\tau_{e\text{-ph, tr}} \propto T^{-5}$ ce qui conduit à $\sigma(T) \sim 1/T^5$ pour $T \ll \omega_D$.

4.4 Corrélations entre fonctions de Green

Nous avons retrouvé le résultat semi-classique en négligeant les corrélations entre les fonctions de Green dans l'équation (4.21). Nous souhaitons maintenant étudier l'effet des corrélations sur la conductivité moyenne. Cette discussion repose sur l'analyse des corrections perturbatives de (4.21), qui sera menée en analysant physiquement différents types de contributions. À cette fin nous commençons par donner la représentation diagrammatique de (4.21), que nous dessinons comme une bulle (figure 4.1) constituée par les deux fonctions de Green. Les lignes ondulées représentent les éléments de matrice de l'opérateur courant moyen, ek_x/m et ek'_x/m , et nous rappellent que la conductivité est une fonction de corrélation courant-courant.

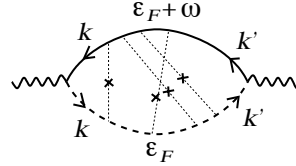


FIGURE 4.1 : Représentation diagrammatique d'une correction perturbative pour la conductivité moyenne donnée par l'équation (4.21). Les lignes continues (tirées) représentent des fonctions de Green retardées \bar{G}^R (avancées \bar{G}^A). Les lignes ondulées représentent l'opérateur de courant (ek_x/m et ek'_x/m). Les lignes pointillées reliant les lignes retardées et avancées correspondent à corréler les fonctions de Green G^R et G^A dans l'équation (4.21).

Dans le cas du terme de Drude les lignes de fonctions de Green sont les fonctions de Green moyennes \bar{G}^R et \bar{G}^A . Les corrélations entre fonctions de Green sont représentées par des diagrammes dans lesquels les lignes de fonctions de Green retardée et avancée sont couplées par des lignes d'impureté (figure 4.1).

**** Légère modification des règles de Feynman pour la conductivité ****.— Dans les diagrammes, les lignes de fonctions de Green seront désormais des fonctions de Green moyennes, \bar{G}^R et \bar{G}^A (au lieu des fonctions de Green libres), ce qui est une manière de resommer une partie des diagrammes ne couplant pas les fonctions retardées et avancées.

Transport classique et localisation faible : présentation heuristique Nous avons déjà noté au cours du calcul de la conductivité à l'approximation de Drude que les résultats intéressants sont non perturbatifs et correspondent à resommer certaines classes de diagrammes. La question est donc d'identifier les classes de diagrammes qui apportent les corrections dominantes. Pour cela nous faisons une petite digression et donnons une image plus qualitative de l'étude du transport dans un métal diffusif. Lorsqu'on étudie la conductance d'un système relié à deux contacts, on peut montrer que la conductance est reliée à la probabilité de traverser le système. Cette probabilité s'exprime comme le module carré d'une somme d'amplitudes de probabilité :

$$G = \frac{e^2}{h} g \sim \frac{e^2}{h} \left| \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{\mathcal{C}} \right|^2 \quad (4.26)$$

où la somme porte sur tous les chemins \mathcal{C} allant d'un contact à l'autre, pour un électron d'énergie ϵ_F . La conductance adimensionnée est notée g . Cette formulation des propriétés de transport peut être rendue rigoureuse, c'est l'approche de Landauer-Büttiker. La relation avec la formule de Kubo se comprend en remarquant que l'amplitude $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}$ est associée à la fonction de Green retardée, et l'amplitude conjuguée $\mathcal{A}_{\mathcal{C}}^*$ à la fonction de Green avancée (formule de Fisher & Lee $G^R(\text{contact 1} \leftarrow \text{contact 2}; \epsilon_F) \sim \sum_{\mathcal{C}} \mathcal{A}_{\mathcal{C}}$) : cette expression de la conductance possède la structure $g \sim |G^R(\text{contact 1} \leftarrow \text{contact 2}; \epsilon_F)|^2 \sim G^R G^A$.

Dans le cas d'un métal faiblement désordonné ($k_F \ell_e \gg 1$), la somme porte sur les chemins classiques décrivant des collisions sur les impuretés (rappelons qu'avec notre choix de modèle désordonné, après moyenne, l'interaction avec le désordre s'interprète comme une double interaction avec une impureté localisée). La phase d'une amplitude est donc proportionnelle à la longueur ℓ_C du chemin de diffusion : $\mathcal{A}_C \propto e^{ik_F \ell_C}$.

La conductance moyenne est donnée en moyennant l'expression :

$$\bar{g} \sim \underbrace{\sum_C |\mathcal{A}_C|^2}_{\text{classique}} + \underbrace{\sum_{C \neq C'} \mathcal{A}_C \mathcal{A}_{C'}^*}_{\text{quantique}} \quad (4.27)$$

On peut montrer que le premier terme, la somme des probabilités, correspond au terme classique (Drude). C'est le terme dominant car donné par une somme de termes positifs. En revanche le terme d'interférences (quantique) est une somme de termes portant des phases $\mathcal{A}_C \mathcal{A}_{C'}^* \propto e^{ik_F(\ell_C - \ell_{C'})}$. On comprend que ce type de contributions a d'autant plus de mal à survivre à la moyenne sur le désordre que la différence $\ell_C - \ell_{C'}$ est grande (le terme classique $|\mathcal{A}_C|^2$ domine car les deux chemins correspondent à la même séquence de collisions (figure 4.2)). Une façon de minimiser la différence des longueurs est de considérer une séquence de collisions identiques au milieu de laquelle on introduit un croisement. Cette construction fait apparaître une boucle à l'intérieur de laquelle une des trajectoires est renversée (figure 4.2). Ce terme décrit l'interférence entre deux trajectoires diffusives renversées : les deux trajectoires subissent les collisions dans l'ordre inverse, ce qui correspond aux *diagrammes maximallement croisés* (figure 4.3) que nous analyserons. À cause du croisement les phases des deux amplitudes diffèrent légèrement et cette contribution est petite (une bonne introduction est donnée au chapitre 1 de [743, 744]).

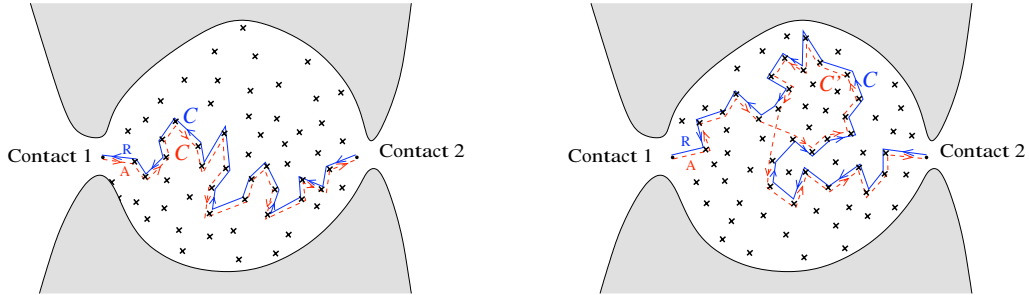


FIGURE 4.2 : À gauche : contribution au terme classique $\sum_C |\mathcal{A}_C|^2$. À droite : contribution au terme quantique $\sum_{C \neq C'} \mathcal{A}_C \mathcal{A}_{C'}^*$, qui minimise $\ell_C - \ell_{C'}$. La boucle décrit l'interférence quantique de trajectoires renversées.

4.4.1 Diffuson (contribution non cohérente)

Nous venons de montrer par des arguments heuristiques que les séquences de collisions identiques jouent un rôle important. Avant d'étudier les diagrammes maximallement croisés de la figure 4.3, il est instructif de commencer par étudier les diagrammes en échelle :

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{diff}} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \dots \quad (4.28)$$

Chaque contribution peut être analysée facilement à l'aide des règles de Feynman énoncées plus haut.

Exercice 4.6 : Donner l'expression (sans les calculer) des deux premiers termes de (4.28) en fonctions des \overline{G}^R et \overline{G}^A .

✎ **Exercice 4.7** : Nous introduisons la quantité

$$\Lambda(q, \omega) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{w}{\text{Vol}} \sum_k \overline{G}^{\text{R}}(k+q; \epsilon_F + \omega) \overline{G}^{\text{A}}(k; \epsilon_F) = \begin{array}{c} \xleftarrow{k+q} \\ \times \\ \xrightarrow{k} \end{array} \quad (4.29)$$

que nous calculons dans la limite $q \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$.

Vérifier que $\overline{G}^{\text{R}}(k+q; \epsilon_F + \omega) = \overline{G}^{\text{R}}(k) + (v_k \cdot q - \omega)[\overline{G}^{\text{R}}(k)]^2 + (v_k \cdot q)^2[\overline{G}^{\text{R}}(k)]^3 + \dots$ où toutes les fonctions de Green du membre de droite sont prises à énergie de Fermi; $v_k = k/m$ (on admettra que le terme $\epsilon_q[\overline{G}^{\text{R}}(k)]^2$ d'ordre q^2 peut être négligé, ainsi que le terme ω^2). Comme nous l'avons signalé, les quantités $\frac{w}{\text{Vol}} \sum_k [\overline{G}^{\text{R}}(k)]^n [\overline{G}^{\text{A}}(k)]^m$ se calculent aisément en faisant $\frac{1}{\text{Vol}} \sum_k \rightarrow \rho_0 \int_{\mathbb{R}} d\epsilon_k$ puis en utilisant le théorème des résidus. En déduire que

$$\Lambda(q, \omega) = 1 + i\omega\tau_e - q^2\ell_e^2/d + \dots \quad (4.30)$$

Ce résultat sera utilisé à plusieurs reprises.

Nous isolons la série apparaissant au milieu des corrections à la conductivité (4.28) :

$$\Gamma_d(q, \omega) = \begin{array}{c} \xleftarrow{k+q} \\ \times \\ \xrightarrow{k} \end{array} + \begin{array}{c} \xleftarrow{k'+q} \\ \times \\ \xrightarrow{k'} \end{array} + \dots + \begin{array}{c} \xleftarrow{k_1+q} \\ \times \\ \xrightarrow{k_1} \end{array} + \begin{array}{c} \xleftarrow{k_1+q} \xrightarrow{k_2+q} \\ \times \\ \xrightarrow{k_1} \times \end{array} + \dots \quad (4.31)$$

(une impulsion supplémentaire q a été introduite dans les fonctions de Green retardées). Cet objet est appelé *diffuson*. Il est facile de voir qu'il obéit à l'équation (de Bethe-Salpether)

$$\Gamma_d(q, \omega) = w + \Lambda(q, \omega)\Gamma_d(q, \omega) \quad (4.32)$$

où $\Lambda(q, \omega)$ est la quantité introduite dans l'exercice précédent. Autrement dit, Γ_d correspond à une série géométrique que nous resomons :

$$\Gamma_d(q, \omega) = \frac{w}{1 - \Lambda(q, \omega)} \quad (4.33)$$

Pôle de diffusion.— D'après le résultat de l'exercice nous voyons que, dans la limite $q \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$, le diffuson coïncide avec la fonction de Green de l'équation de diffusion :

$$\Gamma_d(q, \omega) \simeq \frac{w}{\tau_e} \frac{1}{-i\omega + Dq^2} \quad (4.34)$$

Nous comprenons qu'il n'est pas possible de tronquer la série perturbative (4.31) à un ordre donné car la limite $q \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow 0$ nous conduit au bord du domaine de convergence de la série géométrique $\Gamma_d = w \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^n$.

Le comportement de Γ_d est la signature de la nature diffusive des trajectoires électroniques dans le métal (on pourrait s'en convaincre en calculant la fonction de réponse densité-densité du métal qui est reliée au diffuson $\chi_0(q, \omega) \simeq +\rho_0 \frac{Dq^2}{-i\omega + Dq^2}$ (cf. annexe p. 153); cette remarque permet de relier le pôle de diffusion à la conservation du nombre de particules [672]).

Nous sommes en mesure de calculer la contribution des diagrammes en échelle à la conductivité

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{diff}} = \frac{e^2}{2\pi m^2} \frac{1}{\text{Vol}^2} \sum_{k, k'} k_x k'_x |\overline{G}^{\text{R}}(k)|^2 \Gamma_d(0, \omega) |\overline{G}^{\text{R}}(k')|^2 \quad (4.35)$$

L'isotropie de la relation de dispersion conduit à $\frac{1}{\text{Vol}} \sum_k k_x |\overline{G^R}(k)|^2 = 0$ et donc

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{diff}} = 0 \quad (4.36)$$

Ce résultat s'interprète facilement : rappelons-nous que la conductivité est reliée à constante de diffusion, *i.e.* à la fonction de corrélation de la vitesse $\sigma \sim D = \int_0^\infty dt \langle v_x(t) v_x \rangle$ (ce que nous rappelle la présence de $k_x k'_x$ dans (4.21)). Le diffuson (4.31) décrit une séquence de collisions arbitrairement grande, après laquelle la mémoire de la direction initiale de la vitesse est perdue.¹⁶

Exercice 4.8 : Limite $\lim_{q \rightarrow 0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \sigma(q, \omega)$. – On admet que la conductivité moyenne à $q \neq 0$ est donnée par : $\overline{\sigma_{xx}(q, \omega)} = \frac{e^2}{2\pi m^2} \frac{1}{\text{Vol}} \sum_{k, k'} k_x k'_x \overline{G^R(k+q, k'+q; \epsilon_F + \omega) G^A(k', k; \epsilon_F)}$. Montrer que la contribution des diagrammes en échelle (le diffuson) est $\overline{\sigma_{xx}(q, 0)}^{\text{diff}} = -\sigma_0 \frac{q_x^2}{q^2}$ (qui diffère donc de $\overline{\sigma_{xx}(0, \omega)}^{\text{diff}} = 0$).

Indication : En utilisant les mêmes approximations que dans l'exercice 4.7, montrer que $\frac{w}{\text{Vol}} \sum_k k_x \overline{G^R}(k+q) \overline{G^A}(k) \simeq -i \frac{k_F \ell_e}{d} q_x$.

4.4.2 La localisation faible : une correction quantique (cohérente)

Sur la base d'arguments heuristiques, nous avons montré quelle classe particulière de corrections perturbatives domine après moyenne sur le désordre : les lignes d'impuretés maximales croisés (figure 4.3). Cette correction à la conductivité moyenne s'appelle la *correction de localisation faible*. Physiquement elle trouve son origine dans les interférences quantiques entre trajectoires électroniques symétriques par renversement du sens du temps (ce que les figures 4.2 et 4.3 suggèrent). Ces interférences conduisent à une augmentation *cohérente* de la rétrodiffusion des électrons, *i.e.* une diminution de la conductivité.

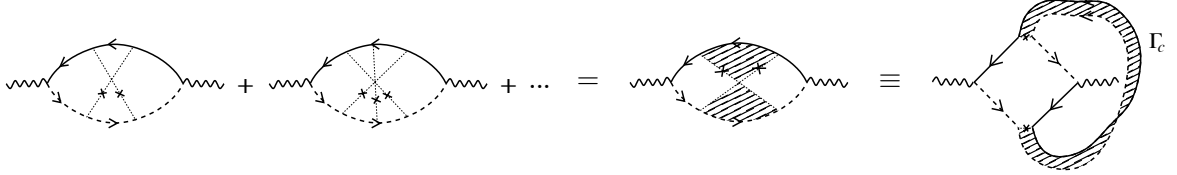


FIGURE 4.3 : Diagrammes maximales croisés : correction de localisation faible $\overline{\sigma(\omega)}^{\text{coop}}$.

La structure du bloc central apparaissant sur la figure est très similaire au diffuson, seul le sens des lignes des fonctions de Green avancées a été changé. Lorsque nous retournons les fonctions de Green avancées nous constatons que le vecteur d'onde q du diffuson (4.31) remplacé par $k + k'$:

$$\Gamma_c(Q = k + k', \omega) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \leftarrow k & \leftarrow k' & \leftarrow k \\ \leftarrow k & \leftarrow k' & \leftarrow k \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \rightarrow k & \rightarrow k' & \rightarrow k \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \leftarrow k & \leftarrow k' & \leftarrow k \\ \leftarrow k & \leftarrow k' & \leftarrow k \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \rightarrow k & \rightarrow k' & \rightarrow k \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \end{array} + \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \leftarrow k_1 & \leftarrow k_1 & \leftarrow k_1 \\ \leftarrow k_1 & \leftarrow k_1 & \leftarrow k_1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \rightarrow k_1 & \rightarrow k_1 & \rightarrow k_1 \end{array} \end{array} + \dots \quad (4.37)$$

Cet objet porte le nom de “cooperon” et présente également un pôle de diffusion pour $Q \rightarrow 0$:

$$\Gamma_c(Q, \omega) = \frac{w}{1 - \Lambda(Q, \omega)} \simeq \frac{w}{\tau_e - i\omega + DQ^2} \quad (4.38)$$

À la différence du diffuson, la contribution $\overline{\sigma(\omega)}^{\text{coop}}$ à la conductivité moyenne est *cohérente* : elle décrit les interférences quantiques entre trajectoires électroniques renversées par sens du temps.

¹⁶ Notons que dans le cas où la diffusion est anisotrope, la contribution du diffuson est non nulle. Elle fait apparaître le temps de transport τ_{tr} lorsqu'elle est ajoutée à la contribution de Drude [743, 744].

Pour tenir compte de cette remarque, nous introduisons un cutoff $1/\tau_\varphi$ dont le rôle est d'éliminer les contributions des boucles de tailles supérieures à $L_\varphi = \sqrt{D\tau_\varphi}$ (*i.e.* des $Q \lesssim 1/L_\varphi$) :

$$\Gamma_c(Q, \omega) \simeq \frac{w}{\tau_e} \frac{1}{\frac{1}{\tau_\varphi} - i\omega + DQ^2} \quad (4.39)$$

Ici l'introduction de L_φ est purement phénoménologique mais elle peut être justifiée un peu plus rigoureusement (on pourra se reporter au chapitre 6 de [743, 744] par exemple, ou plus directement aux articles [37, 23, 713] présentant une description plus microscopique de la décohérence par l'interaction entre électrons ; celle-ci sera détaillée dans le chapitre 5). Finalement la contribution des diagrammes maximales croisés à la conductivité prend la forme :

$$\overline{\sigma(\omega)}^{\text{coop}} = \frac{e^2}{2\pi m^2 \text{Vol}^2} \sum_{k, k'} k_x k'_x |\overline{G}^{\text{R}}(k)|^2 \Gamma_c(k+k', \omega) |\overline{G}^{\text{R}}(k')|^2. \quad (4.40)$$


À la différence de la contribution du diffuson où l'introduction du diffuson dans (4.21) conduit à une décorrélation des impulsions k et k' (décorrélation de la direction de l'impulsion après une séquence de collisions), le cooperon introduit une forte corrélation entre les impulsions k et k' : les intégrales de l'équation (4.21) sont dominées par $k+k'=0$ (ce qui correspond à la rétrodiffusion). Le découplage entre petites et grandes échelles (dans l'espace réel \overline{G}^{R} décroît sur des distances courtes $\sim \ell_e$ alors que Γ_c décroît sur de grandes distances $\sim L_\varphi$) nous permet d'écrire

$$\sum_{k, k'} k_x k'_x |\overline{G}^{\text{R}}(k)|^2 \Gamma_c(k+k', \omega) |\overline{G}^{\text{R}}(k')|^2 \simeq -\frac{k_F^2}{d} \sum_k |\overline{G}^{\text{R}}(k)|^4 \sum_Q \Gamma_c(Q, \omega) \quad (4.41)$$

Finalement, en utilisant le résultat de l'exercice 4.9, nous aboutissons à :

$$\overline{\Delta\sigma(\omega)} = -\frac{e^2}{\pi\hbar \text{Vol}} \sum_Q \frac{1}{1/L_\varphi^2 - i\omega/D + Q^2} \quad (4.42)$$

où ¹⁷ $\overline{\Delta\sigma(\omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\sigma(\omega)}^{\text{coop}} \simeq \overline{\sigma(\omega)} - \overline{\sigma(\omega)}^{\text{Drude}}$. Le signe de la correction est négatif, d'où le nom de correction de *localisation faible*. Une condition de validité de ce résultat est $L_\varphi \gg \ell_e$ puisque $\overline{\Delta\sigma(\omega)}$ décrit des effets d'interférences quantiques sur des échelles sur lesquelles le mouvement de l'électron est diffusif, *i.e.* dans un régime de collisions multiples. ¹⁸ Par la suite on fixe $\omega = 0$: $\overline{\Delta\sigma} \equiv \overline{\Delta\sigma(\omega = 0)}$

 **Exercice 4.9** : Montrer que $\frac{w}{\text{Vol}} \sum_k |\overline{G}^{\text{R}}(k)|^4 = 2\tau_e^2$.

L'expression de la localisation faible est plus aisée à manipuler si nous retournons dans l'espace réel. Nous remarquons que la somme correspond à la trace de la fonction de Green du Laplacien : $\sum_Q \frac{1}{1/L_\varphi^2 + Q^2} = \text{Tr} \left\{ \frac{1}{1/L_\varphi^2 - \Delta} \right\}$. Nous pouvons donc écrire

$$\overline{\Delta\sigma} = -\frac{e^2}{\pi\hbar} \int_0^\infty dt \mathcal{P}_c(t) e^{-t/L_\varphi^2} \quad \text{où} \quad \mathcal{P}_c(t) = \langle r | e^{t\Delta} | r \rangle \quad (4.43)$$

¹⁷ La contribution du cooperon n'est que la contribution dominante au terme d'interférences quantiques $\overline{\sigma} - \overline{\sigma}^{\text{Drude}}$.

¹⁸ En pratique L_φ décroît lorsque la température augmente. Pour des températures t.q. $L_\varphi \lesssim \ell_e$, les effets d'interférences se manifestent dans un régime où le mouvement de l'électron est balistique. C'est pourquoi on parle de *régime diffusif* pour $L_\varphi \gg \ell_e$ et de *régime balistique* lorsque $L_\varphi \lesssim \ell_e$.

$\mathcal{P}_c(t)$ s'interprète comme une probabilité de retour à l'origine (nous avons supposé l'invariance par translation). Elle mesure le nombre de boucles renversées pour une échelle t (la constante de diffusion D avait disparu de nos expressions à $\omega = 0$. Nous ne l'avons pas réintroduite et le "temps" t a donc la dimension d'une [longueur]²). Cette expression montre plus clairement que l'introduction de L_φ correspond bien à l'élimination des boucles s'étendant sur des distances supérieures à L_φ .

Correction de localisation faible du fil et du plan.— On utilise l'expression bien connue de la probabilité en dimension d : $1/(4\pi t)^{d/2}$. Pour un fil de longueur $L \gg L_\varphi$, on vérifie facilement que :

$$\overline{\Delta\sigma}_{\text{fil}} = -\frac{e^2}{h} \frac{L_\varphi}{s} \quad (4.44)$$

où s est la section du fil (si on tient compte de la dégénérescence de spin, le résultat est multiplié par 2). Il est remarquable de noter que, contrairement au terme classique de Drude, ce résultat est indépendant de propriétés telles que la densité n ou le libre parcours moyen élastique. On peut montrer que dans le régime mésoscopique ($L_\varphi \gg L$) la correction de localisation faible à la conductance adimensionnée est *universelle* ^{19,20} $\overline{\Delta g} = -\frac{1}{3}$.

Pour un film mince (un plan) l'intégrale de (4.43) présente une divergence aux petits temps, que nous coupons à $t \sim \ell_e^2$ (temps en deçà duquel le mouvement n'est plus diffusif).

$$\overline{\Delta\sigma}_{\text{plan}} = -\frac{e^2}{\pi h b} \ln(L_\varphi/\ell_e) \quad (4.45)$$

où b est l'épaisseur du film métallique.

Dimensionnalité effective.— Si on considère un film métallique mince d'épaisseur finie b et de largeur finie W la dimension effective est donnée en comparant la longueur de cohérence de phase L_φ à la longueur, comme on peut s'en convaincre à l'aide de (4.42). $L_\varphi \gg W$, b correspond à la situation (quasi) unidimensionnelle. $W \gg L_\varphi \gg b$ correspond à la situation bidimensionnelle.

Magnétoconductance positive (anormale).— Quel est l'intérêt à étudier une petite correction quantique (de l'ordre ou inférieure au 1% dans une situation typique, *cf.* figure 4.4)? La réponse est fournie par les deux expressions que nous venons d'obtenir : **$\overline{\Delta\sigma}$ fournit une mesure de la longueur de cohérence de phase.** Elle permet donc de sonder l'efficacité des processus inélastiques (électron-électron, électron-phonon, etc) à détruire la cohérence quantique dans un métal. Elle donne accès à des informations fondamentales du point de vue du transport quantique. En pratique la mesure de la correction de localisation faible est rendue possible grâce

¹⁹ Nous partons de l'équation (4.42) : $\overline{\Delta g} = -\frac{2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1/L_\varphi^2 + (n\pi/L)^2}$ où la somme sur le vecteur Q est remplacée par une somme sur les modes propres de l'opérateur de diffusion sur $[0, L]$. La connection du fil à des contacts à ses deux extrémités est prise en compte en considérant des conditions de Dirichlet, ce qui exclut le mode zéro de l'opérateur de diffusion (l'hypothèse semble naturelle, cependant elle touche à un point plus subtil qu'il n'y paraît et mériterait d'être discutée plus en détail, *cf.* [743, 642, 744, 646]).

Le résultat peut être obtenu encore plus directement en utilisant le formalisme du chapitre 3 (§ 3.1.3) : $\overline{\Delta g} = \frac{1}{L} \Delta\tilde{\sigma}$ où $\Delta\tilde{\sigma} = -2\partial_\gamma \ln S(\gamma)$. Pour le fil connecté le déterminant spectral est donné par $S(\gamma) = \frac{\sinh \sqrt{\gamma} L}{\sqrt{\gamma}}$ et nous obtenons immédiatement $\overline{\Delta g} = -\frac{L_\varphi}{L} \left(\coth \frac{L}{L_\varphi} - \frac{L_\varphi}{L} \right)$ qui est le résultat de la sommation donnée ci-dessus, et interpole bien entre $-1/3$ et $-L_\varphi/L$.

²⁰ La transition entre $\overline{\Delta g} \simeq -\frac{1}{3}$ et $\overline{\Delta g} \simeq -\frac{L_\varphi}{L}$ peut se comprendre de la manière suivante. Dans la limite complètement cohérente, $L_\varphi \gg L$, la correction est d'ordre $\overline{\Delta g}_{\text{coh}} \sim -1$ (rappelons que $g_{\text{cl}} \gg 1$). Si on considère maintenant un échantillon beaucoup plus long que la longueur de cohérence de phase, $L_\varphi \ll L$, nous pouvons le "découper" en $\mathcal{N} = L/L_\varphi$ tranches de tailles L_φ , incohérentes entre elles, dont nous ajoutons les résistances : $\mathcal{R} \simeq \frac{\mathcal{N}}{g_{\text{cl}} + \overline{\Delta g}_{\text{coh}}} \simeq \frac{\mathcal{N}}{g_{\text{cl}}} \left(1 - \frac{\overline{\Delta g}_{\text{coh}}}{g_{\text{cl}}} \right)$. Nous obtenons la correction de localisation faible à la résistance $\Delta\mathcal{R} \simeq -\mathcal{N} \overline{\Delta g}_{\text{coh}} / g_{\text{cl}}^2$, i.e. $\Delta g = -\Delta\mathcal{R} / \mathcal{R}^2 = \frac{1}{\mathcal{N}} \overline{\Delta g}_{\text{coh}} \sim -\frac{L_\varphi}{L}$. QED.

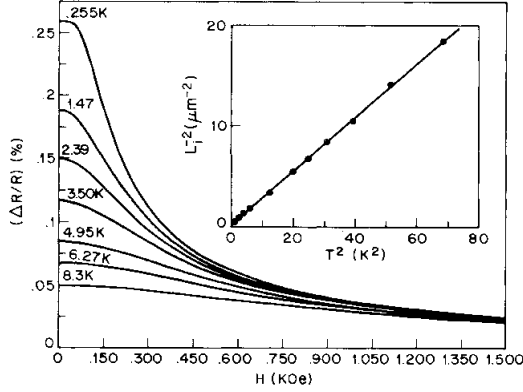


FIG. 3. Detailed fits of magnetoresistance data at various temperatures for $W=0.074 \mu\text{m}$. Except for the elimination of noise, the fitted curves are indistinguishable from the data. Inset: Values for the quantity $\bar{L}_i(T)^{-2}$ as a function of T^2 for part of our temperature range.

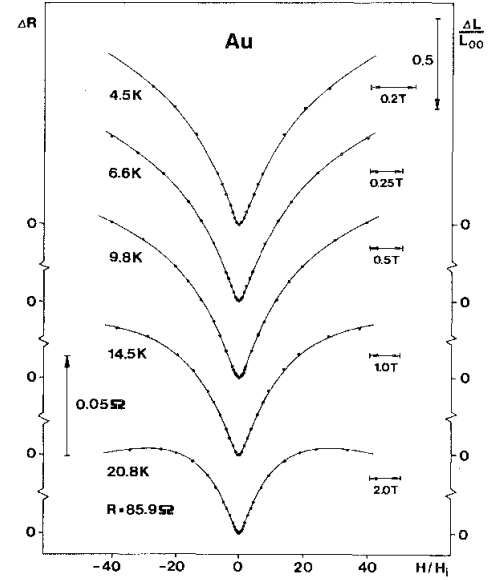


FIG. 4. Magnetoresistance (or $[L(H)-L(0)]/L(0)$) of a Au film as a function of the field H measured in units of the inelastic field $H_i(T)$. The points represent the experimental results. The solid curves are calculated using the characteristic fields plotted in Fig. 5.

FIGURE 4.4 : À gauche : Magnétorésistance $\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\sigma}$ d'un fil quasi 1D de Lithium. Tiré de : Licini, Dolan & Bishop [413]. À droite : Magnétorésistance de film d'or (situation 2D). L'inversion de la magnétorésistance s'explique par l'existence d'un fort couplage spin-orbite dans les métaux lourds. Tiré de : Bergmann [74]

à sa sensibilité au champ magnétique. Pour comprendre cela rappelons nous que $\overline{\Delta\sigma}$ décrit l'interférence entre trajectoires renversées par le sens du temps. En présence du champ magnétique, chaque trajectoire porte une phase $e^{ie\Phi_C/\hbar}$ où $\Phi_C = \int_C dr A(r)$ est le flux magnétique à travers la trajectoire fermée, où $A(r)$ est le potentiel vecteur. Parce qu'une des trajectoires est renversée, les deux flux magnétiques s'ajoutent et le terme d'interférence est pondéré par $e^{2ie\Phi_C/\hbar}$. On a donc un doublement du couplage au champ. L'écriture de $\mathcal{P}_c(t)$ sous forme d'intégrale de chemin permet de prendre facilement en compte cette phase magnétique :

$$\mathcal{P}_c(t) = \int_{r(0)=r}^{r(t)=r} \mathcal{D}r(\tau) e^{-\int_0^t d\tau [\frac{\dot{r}^2}{4} + 2ieA(r)\cdot\dot{r}]} \quad (4.46)$$

On peut vérifier que la correction de localisation faible du fil de largeur W devient [20] :

$$\overline{\Delta\sigma}_{\text{fil}} = -\frac{e^2}{h} \frac{1}{s} \left[\frac{1}{L_\varphi^2} + \frac{1}{L_B^2} \right]^{-1/2} \quad \text{où} \quad \frac{1}{L_B} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{eBW}{\sqrt{3}\hbar} \quad (4.47)$$

à fort champ la correction décroît comme $\overline{\Delta\sigma} \propto -1/B$. La conductivité augmente avec le champ magnétique (le comportement inverse de la conductivité de Drude) : on parle de *magnétoconductance positive* ou *anormale*. Le champ magnétique introduit donc un cutoff supplémentaire comme on peut le comprendre facilement à l'aide de l'argument suivant. Pour une échelle de temps t l'aire algébrique typique des trajectoires browniennes fermées est $W\sqrt{t}$ (la largeur du fil W \times la distance typique explorée le long du fil \sqrt{t}). Le flux correspondant est $\Phi_C \sim BW\sqrt{t}$ (il est de signe aléatoire). Pour les trajectoires associées à des temps courts $t \ll \tau_B = (\phi_0/BW)^2$,

où $\phi_0 = h/e$ est le quantum de flux, la présence de la phase magnétique est sans importance : $e^{4i\pi\Phi_C/\phi_0} \simeq 1$. En revanche si $t \gg \tau_B$ les contributions des trajectoires sont affectées par une phase importante $\Phi_C/\phi_0 \gg 1$. Le champ magnétique introduit donc un cutoff à $t = \tau_B$ et la correction de localisation faible a la structure $\overline{\Delta\sigma} \sim - \int_0^{\min(\tau_B, \tau_\varphi)} \frac{dt}{\sqrt{4\pi t}}$ (ici $\tau_\varphi = L_\varphi^2$).

Exercice 4.10 : Magnétoconductance classique et magnétoconductance anormale (d'un fil).— On rappelle que la conductivité de Drude varie à “bas” champ comme $\Delta\sigma_{\text{class}}(B)/\sigma_0 \simeq -(B\mu)^2$ où $\mu = \frac{e\tau_e}{m}$ est la mobilité. On considère de l'argent avec $\ell_e = 30 \text{ nm}$ (on rappelle que $k_F^{-1} = 0.83 \text{ \AA}$). Vérifier que $\Delta\sigma_{\text{class}}(B)/\sigma_0 \simeq -10^{-5}B^2$ (B en Tesla).

On considère un fil d'argent de section $S = W \times a = 60 \text{ nm} \times 50 \text{ nm}$ soumis à un champ magnétique perpendiculaire. Calculer la longueur L_B pour $B = 1 \text{ T}$. Vérifier que la localisation faible décroît comme $\overline{\Delta\sigma}/\sigma_0 \simeq -10^{-5}/B$ (B en Tesla).

La figure 4.4 (gauche) présente un résultat expérimental pour un fil de Lithium. La mesure est effectuée à différentes températures : on observe une disparition de cette correction quantique lorsque la température augmente, due à une augmentation de la fréquence des collisions inélastiques, *i.e.* une diminution de L_φ . L'analyse des données avec (4.47) permet de déduire la dépendance de L_φ avec la température.

Le résultat expérimental pour le film mince (situation 2d) est représenté sur la partie droite de la figure 4.4 et montre bien la dépendance logarithmique aux forts champs. Notons que le résultat expérimental de [74] présente une variation avec le signe opposé ($\frac{\Delta R}{R} = -\frac{\overline{\Delta\sigma}}{\sigma} \propto \ln(B)$ sur la figure). Ce changement de signe, ainsi que le changement de signe de la dérivée de $\frac{\Delta R}{R}$ à fort champ pour $T = 20.8 \text{ K}$, s'expliquent par la présence d'un fort couplage spin-orbite dans les métaux lourds tels que l'or.

Annexe A : Some useful relations in metals

We recall few useful relations in metals obtained within the model of the degenerate free electron gas.

Density of states The electronic density reads

$$n_e = 2_s \frac{V_d}{(2\pi)^d} k_F^d \quad (4.48)$$

where $V_d = \pi^{d/2}/\Gamma(\frac{d}{2} + 1)$ is the volume of the unit sphere. The density of states at Fermi level per spin channel is

$$\rho_0 = \frac{1}{2_s} \frac{dn_e}{d\epsilon_F} = \frac{V_d d}{(2\pi)^d} \frac{k_F^{d-1}}{v_F} = \begin{cases} \frac{m}{\pi k_F} & \text{in } d = 1 \\ \frac{m}{2\pi} & \text{in } d = 2 \\ \frac{m}{2\pi^2} k_F & \text{in } d = 3 \end{cases} \quad (4.49)$$

The notation $\nu_d = 2_s \rho_0$ is commonly used.

Classical transport The disorder is characterised by the diffusion constant

$$D = \frac{v_F \ell_e}{d} \quad (4.50)$$

The Drude conductivity is given by the Einstein relation

$$\sigma_0 = e^2 \nu_d D = e^2 2_s \rho_0 D = \frac{2_s e^2}{h} \times \begin{cases} \text{“}2\ell_e\text{”} & \text{in } d = 1 \\ \frac{k_F \ell_e}{2} & \text{in } d = 2 \\ \frac{k_F^2 \ell_e}{3\pi} & \text{in } d = 3 \end{cases} \quad (4.51)$$

The commas are here to remind us that the diffusive regime does not exist in $d = 1$.

Quasi-1D wire The number of conducting channels in a quasi-1D wire is

$$N_c = \frac{V_{d-1}}{(2\pi)^{d-1}} k_F^{d-1} \times \text{section} = \begin{cases} 1 & \text{in } d = 1 \\ \frac{k_F \times \text{width}}{\pi} & \text{in } d = 2 \\ \frac{k_F^2 \times \text{section}}{4\pi} & \text{in } d = 3 \end{cases} \quad (4.52)$$

(without spin degeneracy).

The Drude conductance of a wire of length L is given by $G_D = \frac{2_s e^2}{h} g_D = \sigma_0 W^{d-1}/L$, where W^{d-1} is the section of the wire, and g_D is the dimensionless conductance

$$g_D = \frac{\alpha_d N_c \ell_e}{L} = \begin{cases} \frac{\text{“}2\ell_e\text{”}}{L} & \text{in } d = 1 \\ \frac{k_F \times \text{width}}{2} \frac{\ell_e}{L} & \text{in } d = 2 \\ \frac{k_F^2 \times \text{section}}{3\pi} \frac{\ell_e}{L} & \text{in } d = 3 \end{cases} \quad \text{where } \alpha_d = V_d/V_{d-1} = \begin{cases} 2 & \text{in } d = 1 \\ \frac{\pi}{2} & \text{in } d = 2 \\ \frac{4}{3} & \text{in } d = 3 \end{cases} \quad (4.53)$$

Plane or thin film The classical transport in a thin film or in a plane is conveniently encoded in the sheet resistance R_\square (resistance of a square). It is related to the Drude conductivity by $R_\square = 1/\sigma_0$ in a plane and $R_\square = 1/(\sigma_0 b)$ in a film of thickness b . The sheet resistance is more conveniently related to the dimensionless Drude conductance $g = (h/2_s e^2)/R_\square$. We have

$$g_D = \begin{cases} \frac{1}{2} k_F \ell_e & \text{in } d = 2 \text{ (plane)} \\ \frac{1}{3\pi} k_F^2 \ell_e b & \text{in } d = 3 \text{ (film)} \end{cases} \quad (4.54)$$

Chapitre 5

Quantum transport in networks of weakly disordered metallic wires

After a brief review of the motivations and some experimental results for metallic networks, I will give an overview and sketch the works discussed in detail in my articles.

5.1 Effect of geometry : classical and quantum nonlocality

5.1.1 Background and motivation

The study of quantum transport in networks of weakly disordered metallic wires was considered in the early years of the theory of weak localisation, motivated by the fact that networks are natural devices for observing quantum interference effects. The first simple case analysed in a seminal paper of Altshuler, Aronov & Spivak [25] was the case of an isolated ring. Following this seminal paper, various simple networks have been considered by several authors, accounting for their particular topology and the effect of the contacts : the weak localisation of a ring in a four terminal configuration, relevant for experiments, was studied in Refs. [339, 564, 156]. The weak localisation of a wire in a four-terminal configuration was analysed in Ref. [563] (finite size effects and effect of contacts have also been studied in Ref. [27]); the universal conductance fluctuations for this latter arrangement were considered in several articles [429, 354, 328, 327, 156], motivated by the interesting experiments described in Refs. [71, 604] (other devices are discussed in the review article by Spivak & Zyuzin [611]). The first attempt to develop a systematic theory for weak localisation in metallic networks was the work of Douçot & Rammal (DR) [206, 207]. This work was stimulated by the beautiful experiments performed in the group of Pannetier (Grenoble) [515, 516] which were analysed with the help of DR's theory. A significant improvement of the formalism was brought by Pascaud & Montambaux [790, 519] (PM) who have shown how the result of Douçot & Rammal can be rewritten in a compact way, allowing for more efficient calculations. In spite of its efficiency the framework of DR&PM does not account for the fact that the weak localisation correction to the local conductivity $\Delta\sigma(x)$, when integrated in a network, must be properly weighted in order to get a quantity relevant from an experimental point of view. This point makes the formalism of DR&PM applicable to "regular" enough networks only.

Experiments

Besides its fundamental interest, an important motivation for studying weak localisation is practical : being a phase coherent property, the weak localisation furnishes a direct way to

define and measure the phase coherence length in weakly disordered metals.¹ Other quantities, such as Aharonov-Bohm oscillations could also be analysed, however the weak localisation offers the advantage to depend on fewer parameters : AB oscillations (i.e. UCF) are smeared out by thermal averaging, and depend on both the thermal length L_T and the phase coherence length L_φ , whereas AAS oscillations (weak localisation) depend on L_φ only (see § 5.3 below).

Among the several quantum corrections to the conductivity, the weak localisation may be identified through its magnetic field dependence. Repeating the measurement at several temperatures permits to extract the temperature dependence of the phase coherence length $L_\varphi(T)$ and possibly identify the microscopic mechanisms behind decoherence.

This analysis has been performed on quasi 1D wires (and thin films ; for thin films *cf.* Bergman's review article [708]). Among the first works in which the weak localisation correction was identified from its magnetic field dependence : [685] in a wire etched in a 2DEG and [565] in aluminium wires. Such magnetoconductance measurements have been reproduced in many experiments with wires of different dimensionality ($d = 2$ or 3) and materials (Li, Al, Cu, Ag, Au,...).

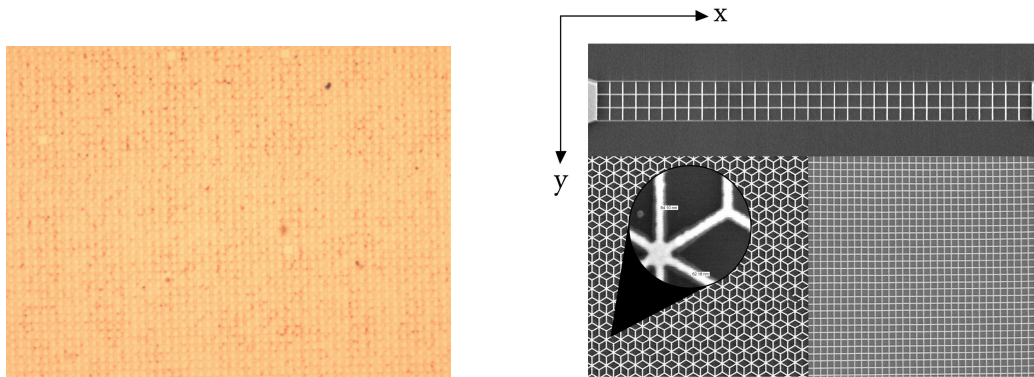


FIGURE 5.1 : Few examples of large networks. Left : square network etched in a two dimensional electron gas (2DEG) studied in Orsay [782, 241, 242]. Lattice spacing $a \simeq 1 \mu\text{m}$. Right : networks of silver wires studied in Grenoble [576]. One small square network and parts of a large \mathcal{T}_3 network and a square network (lattice spacing of square network is $a \simeq 0.64 \mu\text{m}$). See table 1.1 page 10 for properties of these networks.

Measurements on metallic networks may be separated in two groups :

- **Mesoscopic networks.**– Few pictures of mesoscopic metallic networks are on figure 2.1 page 51. WL was observed in short wires [153, 431] (figure 5.15). Rings have been extensively studied : rings made of gold and silver wires in [678, 676, 154, 662, 456, 526] and ring etched in a 2DEG at a GaInAs/AlInAs interface [388]. On a single ring the signal is dominated by mesoscopic fluctuations and the magnetoconductance oscillations are Aharonov-Bohm oscillations (figure 5.14). In certain cases it is however possible to observe AAS oscillations at low magnetic field in a single ring [154] (Al) [662] (Au) while AB oscillations are visible at high field (figure 5.2). The T -dependence of the amplitude

¹ **Definition of the phase coherence length ?**– The phase coherence length L_φ is not a physical observable. It can only be obtained through the analysis of a physical quantity sensitive to phase coherence, that is a quantity to which quantum interferences contribute. Weak localisation or UCF, that are transport properties, provide such quantities. The extraction of the phase coherence length L_φ from the experimental data thus requires a good theoretical understanding on how the measured quantities depend on it. Another widely studied quantity is persistent current (magnetisation) of a ring, a thermodynamic property, induced by the magnetic phase of the wave function. Persistent currents were recognize to exist in disordered metallic ring by Büttiker, Imry & Landauer [131] (see chapter 14 of Ref. [743, 744] for references and discussion).

of the AB oscillations was analysed in Refs. [676, 456]. Ref. [388, 526] have pushed this analysis in order to extract the phase coherence length, what requires the knowledge of their L_φ dependence; these authors have used the formula [741] $\delta g_{AB} \sim \frac{L_T}{L} \sqrt{\frac{L_\varphi}{L}} \exp -\frac{L}{2L_\varphi}$ (a formula which is in principle not correct when decoherence is due to electron-electron interaction [420, 643]). In Ref. [388] the temperature dependence of L_φ was extracted in the temperature range 0.4–9 K but did not present a very clear temperature dependence.

- **Large networks.**— Other series of experiments have considered networks with large numbers of rings. This realizes disorder averaging and permits a clear observation of weak localisation correction.² The first experiments were performed in the group of Bernard Pannetier at Grenoble, on large ($\sim 10^6$) honeycomb networks made of Mg wires [515] and Cu and Au wires [516]. These experiments were successfully analysed with the theory of Douçot & Rammal [206], what allowed to obtain L_φ , however its temperature dependence was not analysed in these papers. Other networks made of lithium wires were studied by Bishop, Dolan & Licini at the Bell Laboratories : ladders [86] chains of diamonds and large square networks [203] (see figure 5.7 below).

The interest in weak localisation measurements on large networks was renewed later in two groups : the team of H. Bouchiat, M. Ferrier & S. Guéron [241, 782, 242] with analysis of square networks etched at a GaAs/GaAlAs interface, and the group of C. Bäuerle & L. Saminadayar that has considered Au and Ag square and \mathcal{T}_3 networks [577, 787, 576].

Some of these early works are reviewed in the articles by Washburn & Webb [741] and Aronov & Sharvin [705].

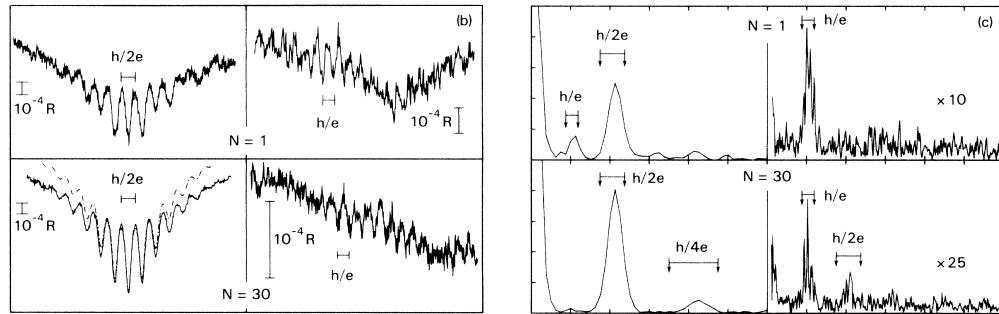


FIG. 1. (a) Transmission electron micrograph of the three-loop sample. (b) Magnetoresistance data at $T = 0.32$ K. Clockwise from the lower right-hand corner: the thirty-loop sample for $0.2 < H < 0.3$ T; the thirty-loop sample for $-0.02 < H < 0.02$ T (the dash-dotted line is the fit by the AAS theory); the single-loop sample for $-0.02 < H < 0.02$ T; the single-loop sample for $0.15 < H < 0.25$ T. (c) The Fourier transforms of the data in (b). The arrows in the figure indicate the bounds for the flux periods h/e and $h/2e$ based on the measured inside and outside areas of the loop.

FIGURE 5.2 : Left : *MC curves*. Right : *Corresponding Fourier transforms*. Top : *the MC of a single metallic gold ring around zero (left curve) field shows $h/(2e)$ AAS oscillations. Right curve at high field shows h/e AB oscillations*. Bottom : *MC of a chain of 30 identical rings*. From Umbach et al [662].

² For example the figure 5.2 shows that the AAS and AB oscillations are of the same order for one ring, whereas AB oscillations (UCF) are smaller than AAS (WL) for the chain of 30 rings.

Motivations

The initial motivation that has driven us into the study of quantum transport in networks was to provide a generalisation of the formalism of DR&PM, in order to allow to consider networks of arbitrary topology and connections to external contacts. This generalisation has required to understand how the cooperon must be properly integrated in an inhomogeneous system like a network [642] and more generally to analyse the nonlocal nature of quantum transport in this context. This will be exposed in section 5.1.2.

At the same time, the collaboration with the experimental group of the LPS at Orsay (Hélène Bouchiat, Meydi Ferrier & Sophie Guéron) has emphasized that the phase coherence length could be extracted efficiently from the analysis of magnetoconductance harmonics. This has led us to search for a better understanding of the behaviour of the harmonics as a function of the phase coherence in networks, and more precisely its relation to the windings properties [644, 714, 637].


This first collaboration with experimentalists and the contemporary work of Ludwig & Mirlin have driven us to study the specificity of decoherence by electron-electron interaction, the dominant process at low temperature. In particular Ludwig & Mirlin have shown that the geometrical properties of networks (a single weakly coherent ring in their work) affect the nature of decoherence by electron-electron interaction. This has motivated us to analyse this problem more into detail, and in particular provide a description that might allow to extend these ideas to another regime (coherent ring) and other networks [643, 630, 637]. This will be the subject of the section 5.2.3.

A deep understanding of the interplay between disorder and electronic interactions is a fundamental issue of condensed matter theory. The study of this question has motivated an enormous amount of works, mainly focusing on homogeneous systems (wires, planes,...); however much less effort, on both experimental and theoretical sides, has been devoted to analyse electronic interactions in the presence of disorder in complex geometries, such as networks or cylinders. Our work intends to fill this gap.

5.1.2 Weak localisation correction to the conductance matrix

In chapter 4, we have introduced the most standard presentation of the diagrammatic method in the reciprocal space [708, 729]. In networks with complex geometry, the absence of translation invariance requires to formulate the perturbation theory in the real space [22, 743, 744] with a special emphasis on the question of current conservation and short/long range nature of the contributions to the nonlocal conductivity [356, 589, 327, 611, 737, 642].

We have analysed the weak localisation to the conductivity and have obtained the standard expression (4.43), however we have not considered its dependence on the spatial coordinate. This was not important for simple homogeneous systems to which it was applied (a wire and a film). In an inhomogeneous system, like a network, it is however not obvious to relate this *local* quantity to the transport coefficients measured experimentally. In particular, it is not clear if the quantity obtained by a uniform integration of the cooperon $\int dx \Delta\sigma(x)$ (DR&PM) is a relevant quantity; this point was already noticed by DR in their remarkable article [207]. A study of transport properties of a mesoscopic device usually deals with two- or four-terminal resistances : for instance we can see that the square network shown in the right part of figure 2.1 was studied in a two-terminal configuration, whereas the ring (left part of figure 2.1, page 51) is probed in a four-terminal configuration. For these reasons the most natural point of view in order to provide a quantitative description of quantum transport is to consider the conductance matrix describing the multiterminal situation (figure 5.3).

 [642] Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires*, Phys. Rev. Lett. **92**, 186801 (2004).– The relation between conductance matrix

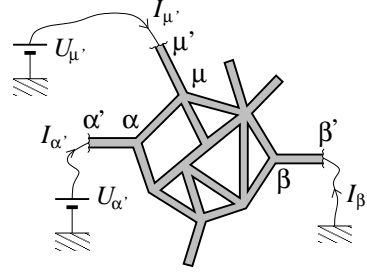


FIGURE 5.3 : A network connected at several contacts.

elements and *nonlocal* conductivity $\sigma(r, r')$ was studied in detail in Refs. [617, 56]. In our article we have provided the expression for the current conserving weak localisation correction to the nonlocal conductivity. This was achieved by following a procedure originally proposed by Kane, Serota & Lee [356] necessary to cure the divergences in perturbation theory and provide the current conserving correction.³ The structure of the nonlocal conductivity, or equivalently of the conductance matrix elements, is represented diagrammatically on figure 5.4. This representation of the correction obtained within the diagrammatic method is reminiscent of the picture of figure 4.2 obtained within the heuristic presentation of the problem (chapter 4). The diagram contains several parts that we now discuss.

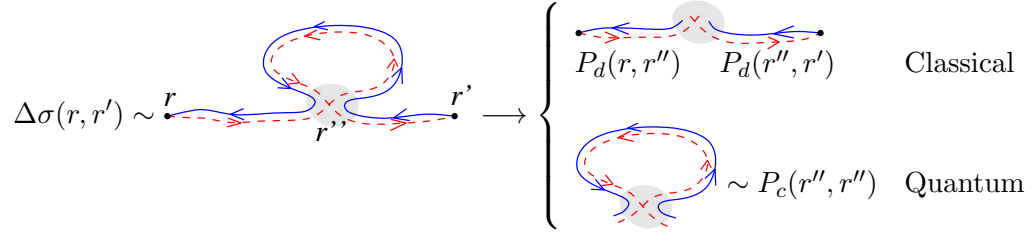


FIGURE 5.4 : Weak localisation correction : two kinds of nonlocality.

Diffuson.— The diffuson gathers all ladder diagrams (see chapter 4). In the diffusion approximation, describing scales much larger than ℓ_e , it is solution of the diffusion equation $-\Delta P_d(r, r') = \delta(r - r')$.

Cooperon.— The cooperon gathers the maximally crossed (fan) diagrams with a (reversed) ladder structure (see chapter 4). In the diffusion approximation, it is solution of the diffusion like equation $[\gamma - (\nabla - 2ieA)^2] P_c(r, r') = \delta(r - r')$ with $\gamma = 1/L_\varphi^2$.

³ **Divergence in the perturbation method and current conservation.**— The contributions to the non-local conductivity at higher order in $1/k_F \ell_e$, constructed with Hikami box [329], contain divergent unphysical parts [642, 646]. The origin of the problem is related to current conservation (i.e. Ward identity between self energy and irreducible vertex function). The set of current conserving diagrams for weak localisation correction was obtained in the elegant paper [320] (therefore the diagrams of higher order in $1/k_F \ell_e$ to be added). This set is however not of great use for practical purpose, being the reason why we have followed the idea of Kane, Serota & Lee [356]. Note that current conservation problems of the perturbation theory might be cured by functional approaches like non linear- σ model [382, 589] or the Baym-Kadanoff method [737] (see the Efetov's book [752] and Lerner's review [405]).

The diagram of figure 5.4 can be obtained from the classical conductance (or nonlocal conductivity), which is given by the Drude short range contribution plus the long range ladder diagrams : $\sigma_{ij}^{\text{class}}(r, r') = \sigma_0 [\delta_{ij} \delta(r - r') - \nabla_i \nabla'_j P_d(r, r')]$, where $P_d(r, r')$ is the diffuson. This contains a long range contribution to the nonlocal conductivity. The dominant quantum correction to the nonlocal conductivity is obtained by the introduction of a *quantum crossing*, reversing the diffusive electronic trajectories inside a loop. Physically it describes the quantum interference of reversed electronic trajectories. The plugging of the cooperon onto the diffuson is ensured by a so-called Hikami box [329] represented here by the small dashed part. The cooperon is directly related to the weak localisation correction to the *local* conductivity $\Delta\sigma(r) \sim -P_c(r, r)$. Finally it turns out that the structure of the weak localisation correction to the conductance matrix elements $G_{\alpha\beta} = -\frac{2s e^2}{h} T_{\alpha\beta}$, where $T_{\alpha\beta}$ is the transmission coefficient (or dimensionless conductance), is ⁴

$$\Delta T_{\alpha\beta} \sim \Delta\sigma(\text{contact } \alpha, \text{contact } \beta) \quad (5.1)$$

$$\sim \int dr \nabla_r P_d(\text{contact } \alpha, r) \underbrace{P_c(r, r)}_{-\frac{1}{2}\Delta\tilde{\sigma}(r)} \nabla_r P_d(r, \text{contact } \beta). \quad (5.2)$$

The gradients originate from the Hikami box. ⁵ This expression provides the answer to the initial question, “*how the cooperon must be weighted when it is integrated in an inhomogeneous geometry?*” Moreover it suggests that the nonlocality of the $\Delta T_{\alpha\beta}$ has two origins :

- (i) the diffusons, whose nonlocal character is related to those of the classical transport coefficients, hence we will denote it by “classical nonlocality”.
- (ii) The cooperon encodes interfering trajectories exploring distance $\sim L_\varphi$, giving raise to the “quantum nonlocality”.

In our article [642], we have constructed the diffuson and the cooperon in an arbitrary network. As a result, it was shown that the weak localisation correction of the conductance matrix element $T_{\alpha\beta}$ may be written in the form :

$$\Delta T_{\alpha\beta} = \frac{2}{\alpha_d N_c \ell_e} \sum_a \frac{\partial T_{\alpha\beta}^{\text{class}}}{\partial l_a} \int_{\text{wire } a} dx P_c(x, x), \quad (5.3)$$

where the summation runs over all wires of the networks and l_a is the length of the wire a . The dimensionless parameter α_d was given in the appendix page 119 and in the § page 16. Noticing that the classical coefficient

$$T_{\alpha\beta}^{\text{class}} = \alpha_d N_c \ell_e / \mathcal{L}_{\alpha\beta} \quad (5.4)$$

can be related to some effective length $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ obtained from composition (Kirchhoff) laws of classical resistances, we may rewrite the weak localisation correction in a convenient way

$$\Delta T_{\alpha\beta} = \frac{1}{\mathcal{L}_{\alpha\beta}^2} \sum_a \frac{\partial \mathcal{L}_{\alpha\beta}}{\partial l_a} \int_{\text{wire } a} dx \Delta\tilde{\sigma}(x) \quad \text{where } \Delta\tilde{\sigma}(x) \stackrel{\text{def}}{=} -2 P_c(x, x). \quad (5.5)$$

We have introduced the reduced conductivity $\tilde{\sigma}$, defined by $\sigma = \frac{2s e^2}{h s} \tilde{\sigma}$ where s is the cross section of the wires and 2_s is the spin degeneracy (therefore $\tilde{\sigma}$ has dimension of a length). We discuss below more into detail the nonlocal nature of $\Delta T_{\alpha\beta}$.

⁴ This structure may be also understood starting from the Fisher & Lee relation, Eq. (1.36) p. 29. The transmission is related to the product of Green functions $T_{\alpha\beta} = v_\alpha v_\beta G^R(\alpha, \beta) G^A(\beta, \alpha)$. The average of this quantity over the disorder $\langle T_{\alpha\beta} \rangle$ requires to correlate the two Green functions with a diffuson in order to obtain a long-range contribution ; the contribution of the diffuson is the Drude contribution describing classical transport. Then a quantum crossing and a loop is introduced to produce the weak localisation correction [642].

⁵ Strictly speaking this is not exactly the Hikami box : the Hikami box provides the terms of higher order in $1/k_F \ell_e$ and produces divergences (see footnote n°3 page 125). The procedure of Kane, Serota & Lee [356] used in [642] leaves a contribution reminiscent of the Hikami box of Ref. [329].

Weights of the wires - What are “regular” networks ? The result (5.5) allows to discuss the relevance of a uniform integration of the cooperon inside the network : when is

$$\Delta g \propto \int_{\text{network}} \frac{dx}{\text{Vol}} \Delta \tilde{\sigma}(x) = -\frac{2}{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \ln S(\gamma) \quad (5.6)$$

a relevant quantity? The condition for that is that the weights $\partial T_{\alpha\beta}^{\text{class}}/\partial l_a$ are equal. In order to understand physically this condition we define some classical “internal conductance matrix” $\Upsilon_{\text{wire } a}^{\text{contact } \beta}$ relating the currents in the *internal* wires to the *external* potentials :

$$I_a \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_d N_c \ell_e \sum_{\beta} \Upsilon_a^{\beta} U_{\beta} \quad (5.7)$$

where a is an arc inside the graph and β a vertex connected to some external contact. The weights in (5.3) and (5.5) are related to the Υ_a^{β} 's by [646]

$$\boxed{\frac{\partial T_{\alpha\beta}^{\text{class}}}{\partial l_a} = \alpha_d N_c \ell_e \Upsilon_a^{\alpha} \Upsilon_a^{\beta}.} \quad (5.8)$$

This allows to understand physically the validity of a uniform integration of the cooperon in the network : the topology and the connection must be such that currents are equal in the wires.

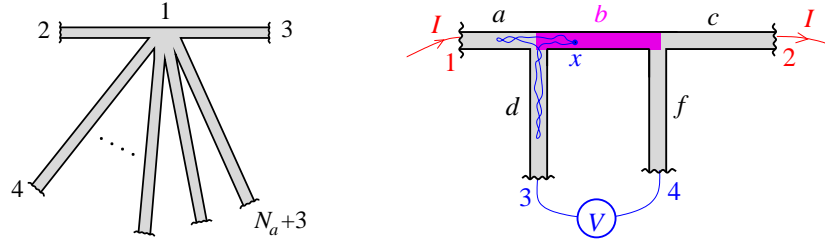


FIGURE 5.5 : *Consequences of the “Classical nonlocality”.* For the device of the left part of the figure the weak localisation correction to the transmission T_{23} may become positive. Right : the weak localisation correction to the four terminal resistance may be large.

Classical nonlocality

An obvious observation is that the conductance matrix elements depend on the full network topology and the way it is connected to external contacts. Because the weights $\partial T_{\alpha\beta}^{\text{class}}/\partial l_a$ involve these classical transport coefficients, this makes the weak localisation dependent on the full network. We denote this as “classical nonlocality” (see figure 5.4). In a multiterminal device this may lead to unexpected effects, like reversing of the AAS oscillations or positive weak localisation correction to some of the transport coefficients [642]. For example if we consider the multiterminal device of figure 5.5, in the coherent limit the **weak localisation correction ΔT_{23} may become positive** for long coherent arms [642] :

$$\Delta T_{23} \simeq -\frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4} N_a \right) \quad (5.9)$$

where N_a is the number of arms (see figure 5.5).

Another interesting fact involving the “classical nonlocality” is obtained by considering the wire in a four terminal configuration (see figure 5.4). The weak localisation correction is given by [646] $\Delta \mathcal{R}_{12,34}/(\mathcal{R}_{12,34}^{\text{class}})^2 = -\int_{\text{wire } b} \frac{dx}{l_b} \Delta \tilde{\sigma}(x)$ (an explicit expression of the integral of the

cooperon over the wire may also be found in Ref. [642]). In the limit of connecting wires much longer than the phase coherence length, one recovers a result of Santhanam [563, 646]

$$\frac{\Delta\mathcal{R}_{12,34}}{(\mathcal{R}_{12,34}^{\text{class}})^2} = \frac{L_\varphi}{l_b} \frac{5 \coth(l_b/L_\varphi) + 4 - 3L_\varphi/l_b}{4 \coth(l_b/L_\varphi) + 5} \simeq \frac{L_\varphi}{l_b} \times \begin{cases} 1 & \text{for } L_\varphi \ll l_b \\ \frac{1}{2} & \text{for } L_\varphi \gg l_b \end{cases} \quad (5.10)$$

Therefore in the coherent limit, $L_\varphi \gg l_b$, the **weak localisation correction becomes large**⁶ due to the possible exploration of the connecting arms by the electronic coherent trajectories (quantum nonlocality). This remark is reminiscent of the effect observed on the resistance fluctuations [71, 604].

2D contacts.— Note that the effect of 1D and 2D contacts on the WL correction has been discussed by Chandrasekhar, Santhanam & Prober [156].

Quantum nonlocality

The classical nonlocality has its origin in the “diffuson” legs of the diagram of figure 5.4. The “cooperon” loop describes quantum interference of reversed electronic trajectory that occurs over the distance L_φ in the network. The best illustration is provided by considering the device of figure 5.6 : a wire on which a ring is plugged. Classically the conductance does not involve the ring (the wires denoted c & d) : $g^{\text{class}} \propto 1/(l_a + l_b)$. Therefore integration of the cooperon $\Delta\sigma(x)$ should be performed along the wires a & b only. Nevertheless, because the diffusive loop may explore the ring, in practice when $L_\varphi \gtrsim l_c + l_d$, the weak localisation correction $\Delta g = \frac{1}{(l_a + l_b)^2} \int_{\text{wires } a \& b} dx \Delta\tilde{\sigma}(x)$ depends on the magnetic flux through the ring.

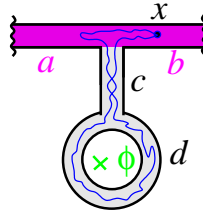



FIGURE 5.6 : A consequence of the “quantum nonlocality” : despite the cooperon is integrated in the wires a and b only, the weak localisation correction depends on the magnetic flux.

Altshuler-Aronov-Spivak (AAS) harmonics

-  [644] Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion*, J. Phys. A: Math. Gen. **38**, 3455–3471 (2005).— The weak localisation correction in a metallic ring, or an ensemble of identical rings, pierced by a magnetic flux, presents some periodic oscillations as a function of the flux with period *half* of the quantum flux (to be compared to the Aharonov-Bohm oscillations of period $\phi_0 = h/e$) : these are the oscillations of the experimental data reproduced⁷ in figure 5.7. The origin of the period $\phi_0/2$ comes from the fact that weak localisation is a manifestation of interference of *reversed* trajectories giving rise to contributions carrying twice the magnetic flux (the two trajectories of the loop (cooperon) of figure 5.4 carry each the magnetic phase $e^{ie\phi_C/\hbar}$, where ϕ_C is the flux through the loop ; the

⁶ by contrast with the weak localisation correction to the two-terminal resistance of the coherent wire $\Delta\mathcal{R}/\mathcal{R}^2 = \frac{1}{3}$ [452].

⁷ The damping of these oscillations at large magnetic field can be explained by the penetration of the magnetic field in the finite transverse dimension of the wires [20]. This point is discussed in detail in [241, 637].

diffuson legs do not carry magnetic flux, as suggested by the arrows. The whole contribution represented on the diagram therefore carries a phase $e^{2ie\phi_C/\hbar}$.

In the original work of Altshuler, Aronov & Spivak [25], the case of an isolated ring ⁸ was considered. AAS have obtained the MC $\Delta\tilde{\sigma}(\theta) = -L_\varphi \frac{\sinh L/L_\varphi}{\cosh L/L_\varphi - \cos\theta}$, whose harmonics ⁹ behave exponentially as a function of the perimeter of the ring

$$\Delta\tilde{\sigma}_n = -L_\varphi e^{-|n|L/L_\varphi} \quad (\text{isolated ring}) \quad (5.11)$$

This result should be also relevant in order to describe the harmonics of an array of rings in the weakly coherent limit, $L_\varphi \ll L$, when they can be considered as independent. However as soon as $L_\varphi \gtrsim L$ (what is a relevant regime in current experiments, for example the silver networks studied in Grenoble [576, 435]) the AAS harmonics are strongly affected by the fact that coherent electronic trajectories enlacing the ring may also explore its surrounding (a manifestation of the “quantum nonlocality”). Modifying the winding properties it affects the L/L_φ dependence of the harmonics.

For example we have obtained in Ref. [644] that the AAS harmonics of a coherent ring connected to N_a long arms behave as

$$\Delta\tilde{\sigma}_n \sim e^{-|n|\sqrt{N_a L/L_\varphi}} \quad (\text{connected ring with } L_\varphi \gtrsim L). \quad (5.12)$$

We have shown that this result may be interpreted in terms of “anomalous winding” of Brownian trajectories around the connected ring.

From the experimental point of view, this remark is important since the temperature dependence of the phase coherence length could be extracted from the AAS (or AB) harmonics, like

$$\frac{L_\varphi^{\text{exp. fit}}(T)}{L} \propto \left[\frac{1}{|n|} \ln(1/|\Delta\tilde{\sigma}_n|) \right]^\varpi \quad \text{where } \varpi = \begin{cases} 1 & \text{for } L_\varphi \ll L \\ 2 & \text{for } L_\varphi \gtrsim L \end{cases} \quad (5.13)$$

Therefore a correct interpretation of experiments, and in particular of the temperature dependence of the phase coherence length obtained from AB or AAS oscillations, requires a good theoretical understanding of the L/L_φ dependence of $\Delta\tilde{\sigma}_n$. Because the crossover to the “coherent regime” occurs rather rapidly, as shown in [644] for $L_\varphi \sim L/N_a$ where N_a is the number of wires plugged on the ring, this regime is relevant in the current experiments on networks at low temperature.

An analysis of the harmonics of other networks has been provided in our more recent work [637] (see below).

Experimental manifestations of the quantum nonlocality

The weak localisation correction is a quantum contribution to the *averaged* transport coefficients. Its observation hence requires some averaging procedure. The most easy way is to consider a large device, much larger than the phase coherence length ¹⁰ L_φ . Therefore it is desirable to

⁸In these work the authors have considered the less academic case of a cylinder, that was studied experimentally and compared with success to the theory [595, 26].

⁹We define $\Delta\tilde{\sigma}_n \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} \Delta\tilde{\sigma}(\theta)$. The n -th harmonic is related to the contributions of reversed loops enclosing n quantum fluxes (see for example [644, 714, 637]).

¹⁰Weak localisation correction and UCF of a coherent device, $L \lesssim L_\varphi$, are of the same order. Increasing the length of the sample, the weak localisation decreases as $\Delta g \propto 1/L$ (*cf.* note 20 page 116) while the UCF decreases faster as $\delta g \propto 1/L^{3/2}$ (see footnote n°2 page 123 and figure 5.2).

This behaviour may be obtained with the results of the last section of the present chapter. We may more simply develop an argument similar to the one of the footnote 20 : The wire of length $L \gg L_\varphi$ should be sliced in $\mathcal{N} = L/L_\varphi$ coherent pieces, incoherent each other, whose resistances are added incoherently; therefore overall

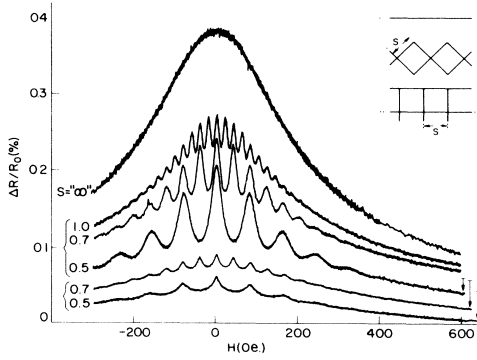


FIG. 1. The magnetoresistance $R(T, H)$ for $T = 0.13$ K for the wire control sample (top), three necklace arrays (next three curves), and two meshes (bottom two curves). The upper-right-hand sketches define the control, necklace, and mesh geometry. The size, S , of the unit-cell side is indicated next to each curve. Some of the curves have been displaced vertically for clarity.

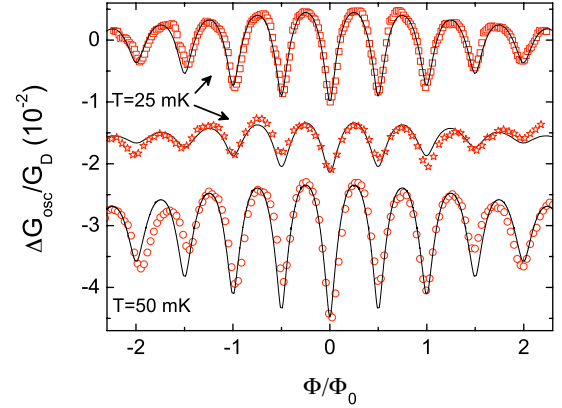


FIGURE 5.7 : Left : *Magnetoconductance for wire, chain of rings and square networks made of Lithium*; from : *Dolan, Licini & Bishop [203]*. Right : *Magnetoconductance of square networks etched in a 2DEG as a function of the flux per ring, denoted Φ on the figure ($\Phi_0 = h/e$ is the flux quantum)*; from : *Ferrier et al [241]*.

consider large networks, like long chains or planar networks made of many rings.¹¹

We have reproduced in figure 5.7 the experimental results of Ref. [203] where a comparison of the magnetoconductance curves for different lithium networks has been made. The top smooth curve is the magnetoconductance of the wire. The three curves below with oscillations are the magnetoconductance curves obtained for three long chains of diamonds (sketch in inset). The last two curves (bottom) are obtained for large square networks (“ S ” = $L/4$ denotes the edge dimension, 0.5, 0.7 or 1 μm in the experiment). We see that under the same conditions the magnetoconductance curve for the square network has an harmonic content richer than the one of the chain. This can be explained easily by a harmonic analysis within the periodic orbit expansion developed in Ref. [8] and reviewed in § 3.4.3 of chapter 3 : when (5.6) holds we use (3.113) to write the weak localisation correction, averaged over the network, as an infinite expansion over the orbits of the graph

$$\Delta\tilde{\sigma} = -\frac{2}{\text{Vol}} \frac{\partial}{\partial\gamma} \ln S(\gamma) = -L_\varphi + (B - V) \frac{L_\varphi^2}{\mathcal{L}} - \frac{L_\varphi}{\mathcal{L}} \sum_{\mathcal{C}} l(\tilde{\mathcal{C}}) \alpha(\mathcal{C}) e^{-l(\mathcal{C})/L_\varphi + i\theta(\mathcal{C})} \quad (5.14)$$

where $\mathcal{L} = \sum_{(a)} l_a$ is the “volume” of the graph. Such expansion allows a simple analysis of the weakly coherent limit $L_\varphi \ll l(\mathcal{C})$.

For the chain we obtain :

$$\Delta\tilde{\sigma}^{(\text{chain})}(\theta) \propto \dots + \cos(\theta) e^{-L/L_\varphi} (1 + \dots) + \cos(2\theta) \frac{3}{4} e^{-2L/L_\varphi} (1 + \dots) + \cos(3\theta) \frac{5}{8} e^{-3L/L_\varphi} (1 + \dots) + \dots \quad (5.15)$$

resistance fluctuation is $\delta\mathcal{R} \simeq \sum_i \delta g_i / g_{\text{cl}}^2$, where g_{cl} is the conductance of a piece of length L_φ . Regions are incoherent therefore $\langle \delta g_i \delta g_j \rangle \sim \delta_{i,j}$ and $\langle \delta g^2 \rangle = \langle \delta\mathcal{R}^2 \rangle / \mathcal{R}^4 \sim \mathcal{N} \times 1/g_{\text{cl}}^4 (g_{\text{cl}}/\mathcal{N})^4 = \mathcal{N}^{-3}$ Finally we obtain $\langle \delta g^2 \rangle \sim (L_\varphi/L)^3$. Note that thermal smearing leads to a different L_φ dependence but the same L dependence.

¹¹Note that averaging by changing the disorder configuration has been realised in the beautiful experiments of Mailly & Sanquer [431] on wires etched in a two dimensional electron gas (see figure 5.15). It is however a difficult task.

whereas we get for the square network

$$\Delta\tilde{\sigma}^{(\text{square})}(\theta) \propto \dots + \cos(\theta) e^{-L/L_\varphi} (1 + \dots) + \cos(2\theta) \frac{3}{4} e^{-3L/2L_\varphi} (1 + \dots) + \cos(3\theta) \frac{3}{4} e^{-2L/L_\varphi} (1 + \dots) + \dots \quad (5.16)$$

where $\theta \stackrel{\text{def}}{=} 4\pi\phi/\phi_0$ is the reduced magnetic flux per ring. The precise periodic orbit expansion for the square network is given in Ref. [241]. The comparison of these two expansions (table 5.1) explains why the square network MC is more anharmonic than the MC of the chain MC, for similar edge size and phase coherence length. This is clear on the left part of figure 5.7.

[241] Meydi Ferrier, Lionel Angers, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, H el ene Bouchiat, Christophe Texier, Gilles Montambaux & Dominique Mailly, *Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **93**, 246804 (2004).– In figure 5.7 we have also plotted the magnetoconductance of the recent experiment [782, 241] where strongly anharmonic AAS oscillations are visible. The experimental data are fitted with the calculation of the weak localisation correction from the spectral determinant (framework of DR&PM). In this article we have emphasized that an efficient way for extracting the phase coherent length is to perform some AAS oscillation harmonics analysis. We have presented a procedure in order to extract directly the phase coherence length (a one parameter fit).

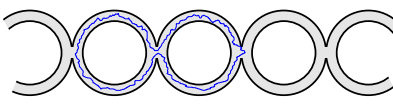
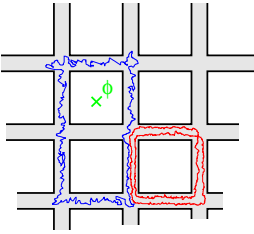
Harmonic 1	Harmonic 2	Harmonic 3
		
e^{-L/L_φ}	$\frac{3}{4} e^{-2L/L_\varphi}$	$\frac{5}{8} e^{-3L/L_\varphi}$
		
e^{-L/L_φ}	$\frac{3}{4} e^{-3L/2L_\varphi}$	$\frac{3}{4} e^{-2L/L_\varphi}$

TABLE 5.1 : *Harmonic content analysis of the magnetoconductance (MC) for two different networks. In the weakly coherent limit $L_\varphi \ll L$, where L is the perimeter of one ring, the n -th harmonic of the AAS oscillations decays exponentially as a function of the ratio L/L_φ . Whereas the first harmonic for the two networks are comparable, the higher harmonics are larger in the square network than in the chain. This explains the stronger anharmonicity of the square network MC compared to the chain MC, visible on the left part of figure 5.7.*

5.2 Electronic interactions in complex geometry

5.2.1 Introduction

Quasiparticle lifetime : ballistic and diffusive regimes.– A deep understanding of the effect of interaction between electrons is a major issue of fundamental interest in condensed

matter physics. The treatment of both the disorder and electronic interactions is a difficult task and has been a subject of intense discussions for more than thirty years [571, 30, 24, 37, 23, 21, 264, 265, 146, 221, 22, 263, 729, 713, 404, 352, 580, 743, 748, 758, 744].¹²

In a metal at high temperature, collisions between electrons are so frequent that the elastic scattering over the defects of the crystal may be treated in the same perturbative footing as other scattering mechanisms (at lowest order). In this case the Fermi liquid theory for a clean metal [772] holds. This regime is denoted the “ballistic regime” since the motion of electrons between two consecutive collisions with other electrons is ballistic¹³ (figure 5.8) : $\tau_{ee} \ll \tau_e$ where τ_e and τ_{ee} are the elastic mean free time and the inelastic electron-electron scattering time, respectively. The quasiparticle decay rate for an electron at some energy ϵ above the Fermi sea is [772] (see also § p. 156)

$$1/\tau_{ee} \sim \epsilon^2/\epsilon_F \ll \epsilon \quad (\text{ballistic}) . \quad (5.17)$$

This small decay rate¹⁴ is due to the Pauli principle that limits the phase space of electrons scattered off (Pauli blocking).

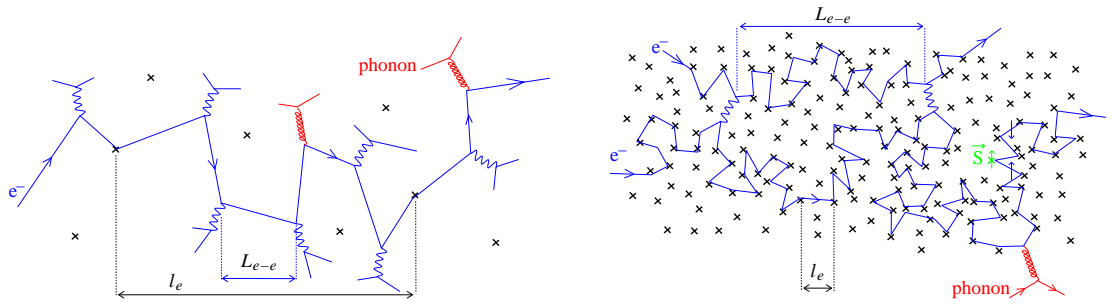


FIGURE 5.8 : Illustration of ballistic regime $L_\varphi \ll l_e$ (left) and the diffusive regime $l_e \ll L_\varphi$ (right). The crosses represent defects over which the electron is elastically scattered (note that the representation is slightly incorrect since l_e may strongly differ with the mean distance between impurities). The wavy lines represent interaction between electrons and the lines in helix interaction between electron and phonons.

If the temperature is diminished, the energy available for an electron decreases and the electron-electron scattering time increases. The metal eventually reaches the “diffusive regime” (illustrated in figure 5.8) where an electron has enough time to experience many collisions on the static disorder between consecutive collisions with other electrons : $\tau_{ee} \gg \tau_e$. In this case the effect of disorder cannot be considered at the lowest order of perturbation theory since an electron experiences a large number of collisions (this explains the need of ladder resummations such as diffuson and cooperon : eqs. (4.28,4.31,4.37)). **Coherent physics** (weak localisation or universal conductance fluctuations for example) **occurs on scales over which the motion of electron is diffusive**. This rather dramatic slow down¹⁵ of the electrons *enhances* the effect of electron-electron interaction because two electrons spend more time close to each other. In

¹² **1D interacting fermions in the presence of disorder.**— We may also quote the recent progresses in the one-dimensional case [295, 296, 297] unifying two different pictures : (1) at high T , classical pinning of charge density waves (bosonic degrees of freedom) in the Luttinger liquid picture [282]. (2) at low T , dephasing and Anderson localisation of fermionic degrees of freedom. See also the very pedagogical paper [454] where a unified field theoretical description is given, allowing to describe the 1D and quasi 1D cases with or without interaction and/or disorder.

¹³ For the sake of simplicity we forget here the inelastic scattering of other nature (electron-phonon,...).

¹⁴ The fact that $1/\tau_{ee} \ll \epsilon$ ensures that the central concept of quasiparticle, at the heart of the Fermi liquid theory, is meaningful (see appendix page 155).

¹⁵ Let us remind that in the networks made of pure silver $D \simeq 0.01 \text{ m}^2/\text{s}$, while $v_F \simeq 1.4 \times 10^6 \text{ m/s}$ (table 1.1 page 10.).

other terms, the motion of electron is slower in the diffusive regime than in the ballistic regime, therefore charges displacement is more difficult hence screening is less efficient and interaction is stronger. The quasiparticle decay rate in the diffusive regime must be computed by taken into account the diffusive nature of the electronic motion ; it is given by [571, 18, 19, 22, 729, 743]^{16,17} :

$$\frac{1}{\tau_{ee}(\epsilon, 0)} \sim \frac{1}{\nu_d} \left(\frac{\epsilon}{D} \right)^{d/2} \quad (\text{diffusive}) \quad (5.18)$$

where $\nu_d = 2_s \rho_0$ is the d -dimensional DoS at Fermi energy per unit volume.

Up to now we have eluded the question of temperature : we have recalled well-known results for the lifetime of an electronic state above the Fermi sea at zero temperature. At finite temperature the lifetime of the electronic state of energy ϵ depends on the temperature as well : $\tau_{ee}(\epsilon, T)$. Because transport properties involve states at the Fermi level, the relevant definition for the electron-electron inelastic time is $\stackrel{\text{def}}{=} \tau_{ee}(\epsilon = 0, T)$ [743].¹⁸ An important point that has lead to some confusion in the literature is that the inelastic scattering time $\tau_{ee}(0, T)$ is not simply given by replacing the energy by the temperature in $\tau_{ee}(\epsilon, 0)$ in the low dimensional cases ($d = 1$ or 2)¹⁹ :

$$\tau_{ee}(0, T) \neq \tau_{ee}(\epsilon \rightarrow T, 0). \quad (5.19)$$

The reason for this discrepancy was clearly pointed out in the book of Akkermans & Montambaux [743, 744]. The inelastic scattering time takes the form :

$$\frac{1}{\tau_{ee}(0, T)} \sim \frac{1}{\nu_d \text{Vol}} \int_{1/\tau_{ee}}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega \sinh(\omega/T)} \left(\frac{\omega}{E_c} \right)^{d/2}, \quad (5.20)$$

where ν_d is the DoS per unit volume and $E_c \sim D/L^2$ is the Thouless energy. The low energy cutoff has been introduced self-consistently (it has the same origin as the broadened $\delta^{(t)}(E)$ -functions of width $\delta E \sim \hbar/t$ ensuring energy conservation in the Fermi golden rule, where t is the ‘‘observation time’’ [765]).

- In dimension $d = 3$ the integral over frequency (5.20) is dominated by $\omega \sim T$, therefore the small frequency cutoff can be replaced by 0 and we obtain $1/\tau_{ee}(0, T) \sim \nu_3^{-1} (T/D)^{3/2}$ that coincides with $1/\tau_{ee}(\epsilon \rightarrow T, 0)$.
- In dimension 2, the integral (5.20) is dominated both by large frequencies $\omega \sim T$ and small frequencies, what makes the presence of the cutoff important : writing $\text{Vol} = L^2 b$, where b is the thickness of the film we have $1/\tau_{ee} \sim \frac{T}{\nu_3 D b} \int_{1/\tau_{ee}}^T \frac{d\omega}{\omega}$, therefore $1/\tau_{ee}(0, T) \sim \frac{T}{\nu_3 D b} \ln(\nu_3 D b)$. In the two-dimensional case, the difference between this inelastic time and $\tau_{ee}(\epsilon \rightarrow T, 0)$ lies only in the logarithmic correction (the 2D case was worked out in Ref. [4]).
- The most striking difference occurs in $d = 1$ when the integral (5.20) is dominated by low frequency contributions. The volume is in this case $\text{Vol} = L s$ where s is the cross-section of the wire and $1/\tau_{ee} \sim \frac{T}{\nu_3 s \sqrt{D}} \int_{1/\tau_{ee}}^T \frac{d\omega}{\omega^{3/2}}$, therefore we find a temperature dependence $1/\tau_{ee}(0, T) \sim T^{2/3}$ different from $1/\tau_{ee}(\epsilon \rightarrow T, 0) \sim T^{1/2}$.

¹⁶ This expression may be rewritten in terms of the Thouless energy $E_c \sim D/L^2$ and the mean level spacing $\Delta = 1/(\nu_d L^d)$ as $1/\tau_{ee} \sim \Delta (\epsilon/E_c)^{d/2}$. It is valid in the diffusive regime $\epsilon \gg E_c$, that is in a regime where the broadening of levels is larger than the level spacing $1/\tau_{ee} \gg \Delta$. In the 0-dimensional limit $\epsilon \ll E_c$, what may be realised in quantum dots, the quasiparticle lifetime is given by [602] $1/\tau_{ee} \sim \Delta (\epsilon/E_c)^2$.

¹⁷ This expression allows us to discuss the validity of the Fermi liquid theory in dirty metals (see appendix page 155).

¹⁸ Therefore the proper definitions for the ballistic (high T) and diffusive (low T) regimes evoked in the begining of this § are given by comparison of τ_e and $\tau_{ee}(0, T)$.

¹⁹The equivalence between $\tau_{ee}(0, T)$ and $\tau_{ee}(\epsilon \rightarrow T, 0)$ is indeed implicit in the famous reference of Altshuler & Aronov [22] where τ_{ee} and τ_φ are distinguished, their Eq. (4.12). Another example is the article of Blanter where this identification is at the heart of the argumentation [87].

These results, obtained from the Fermi Golden Rule, i.e. from the analysis of the self energy of the one-particle Green function, can be summarized as ^{20,21} [743]

$$\frac{1}{\tau_{ee}(0, T)} \sim \begin{cases} \frac{1}{\nu_3} \left(\frac{T}{D}\right)^{3/2} & \text{in } d = 3 \\ \frac{1}{\nu_3 b} \frac{T}{D} \ln(\rho_0 D b) & \text{in } d = 2 \text{ (film of thickness } b) \\ \left(\frac{T}{\nu_3 s \sqrt{D}}\right)^{2/3} & \text{in } d = 1 \text{ (wire of cross-section } s) \end{cases} \quad (5.21)$$

(note that in the 1D situation $\nu_3 s \sim N_c \nu_1$ where N_c is the number of conducting channels). For completeness we recall the result of Sivan, Imry & Aronov [602] describing the 0D situation (coherent quantum dots) :

$$\frac{1}{\tau_{ee}(\epsilon, 0)} \sim \Delta \left(\frac{\epsilon}{E_c}\right)^2 \quad \text{in } d = 0 \text{ (i.e. for } \epsilon \ll E_c) \quad (5.22)$$

where $\Delta = 1/(\nu_d \text{Vol})$ is the mean level spacing. To the best of my knowledge $\tau_{ee}(0, T)$ has not been calculated.

Remarks :

- Remark on the 3D case : note that in bulk materials, the elastic mean free path is rather large ($\ell_e \approx 4 \mu\text{m}$ in gold). Therefore it is unlikely that the diffusive regime ($\ell_e \ll L_\varphi$) is reached in this case.
- We mention the work of Altshuler et al where a nonperturbative perspective on quasiparticle lifetime was given [28].

Quasiparticle lifetime vs phase coherence time.— The loss of phase coherence means destruction of quantum interference effects, like weak localisation : when an electron interacts with other degrees of freedom, like other electrons, this randomizes his phase in a dynamical way and destroys the interference pattern (the AAS oscillations for example). Decoherence is characterised by a time scale called the *phase coherence time* τ_φ . At low temperature ($T \lesssim 1 \text{ K}$) the dominant microscopic process for decoherence is electron-electron interaction ; we denote the corresponding phase coherence time $\tau_\varphi^{ee}(T)$. Having the same microscopic origin, one might expect that the time $\tau_\varphi^{ee}(T)$ coincides with the quasiparticle lifetime $\tau_{ee}(0, T)$ introduced above. This is however far from being obvious for the following reason : the lifetime $\tau_{ee}(0, T)$ characterises **one**-particle properties, in particular it is extracted from the one-particle Green function [4]. On the other hand the decoherence time $\tau_\varphi^{ee}(T)$ measures the efficiency of electron-electron interaction to destroy the interference between **two** electronic reversed trajectories. It controls the cooperon (and the diffusons in UCF), that is the two particle Green function (the analysis of the two-particle Green function in 2D was first given by Fukuyama & Abrahams [264]).

The two characteristic times $\tau_{ee}(0, T)$ and $\tau_\varphi^{ee}(T)$ must be derived separately. This analysis shows that they indeed coincide [743, 744]. We will reproduce this conclusion below.

²⁰ In Ref. [743] the three times are written in terms of the mean level spacing $\Delta = 1/(\nu_3 \text{Vol})$ and the Thouless energy $E_c = D/L^2 : 1/\tau_{ee}^{(3d)} \simeq \Delta \left(\frac{T}{E_c}\right)^{3/2}$ where $\Delta = 1/(\nu_3 L^3)$, $1/\tau_{ee}^{(2d)} \simeq \Delta \left(\frac{T}{E_c}\right) \ln(E_c/\Delta)$ where $\Delta = 1/(\nu_3 L^2 b)$ and $1/\tau_{ee}^{(1d)} \simeq (\Delta T/\sqrt{E_c})^{2/3}$ where $\Delta = 1/(\nu_3 L s)$.

²¹ **Thin films versus 2D plane.**— In the text, we give the 2D formulae for thin films of thickness b . The formulae describing two-dimensional electron gas are obtained by performing the substitution $\nu_3 b \rightarrow \nu_2 = 2s \frac{m}{2\pi}$, hence $\nu_2 D = k_F \ell_e / (4\pi) = \ell_e / (2\lambda_F)$. The rate takes the form $1/\tau_{ee}(0, T) \sim \frac{1}{\nu_2} \frac{T}{D} \ln(\nu_2 D) \sim T \frac{\ell_e}{\lambda_F} \ln(\ell_e/\lambda_F)$.

Influence functionals.— The study of the phase coherence time within the diagrammatic technics is not an easy task because it is related to the analysis of the divergences of the perturbation theory and the way they are regularised (in the section 4.4.2 of chapter 4 the phase coherence time was introduced “by hand” in order to cut off the divergence of the series of maximally crossed diagrams, that is the cooperon). Moreover the nonanalytic behaviour of the cooperon in low dimension (for example its time dependence in $d = 1$ shows a non exponential behaviour [467]) is a manifestation of the difficulties arising in diagrammatic calculations. An alternative formulation, that had turned to be more convenient for inhomogeneous systems such as metallic networks, is the influence functional approach initiated by the seminal paper of Altshuler, Aronov & Khmel'nitskii (AAK) [23].

The idea of influence functionals goes back to Feynman & Vernon [245] (see also [754]) and may be understood as follows : if we consider a system (a particle) interacting with other degree(s) of freedom (a “bath”) whose dynamics is not of interest, it is possible to integrate over the bath variable(s) and get an effective dynamics for the particle. The path integral is the ideal tool for realising this program. The advantage of the method is to relate a problem with many degrees of freedom (system and bath) to an effective problem with few degrees of freedom (the system only), while its disadvantage is that the effect of the bath is hidden in a complicated dynamics for the particle, usually not solvable, apart in simple cases. A famous example illustrating this idea is the Caldeira-Legett model for studying the interplay between classical and quantum fluctuations in the escape from a metastable state [140].

This idea was implemented by AAK in order to analyse coherent properties of electrons in metals by integration over the fluctuating electromagnetic field one electron feels when moving in the metal. This is described in several references [37, 23, 22, 713, 743] (note that Chakravarty & Schmid acknowledge the papers of Khmel'nitskii & Larkin [397, 366] motivating their path integral presentation). The article by Eiler [221] provides an interesting discussion on the relation between the diagrammatic approach and the AAK influence functional approach.

The influence functional approach has seen some revival about ten years ago with the work of Golubev & Zaikin [290, 291]. They conclude with the *controversial statement of an intrinsic saturation of phase coherence time at low temperature*. Despite their main result was strongly criticised by several authors [10, 335, 440, 674, 673],²² it has however stimulated some interesting progresses in the influence functional approach. Let us rephrase the pedagogical article of F. Marquardt, J. von Delft *et al* [440] in order to understand the status of these progresses.

A given electron can exchange energy when interacting with other degrees of freedom (the other electrons) ; this leads to decoherence. Energy exchanges provided by the environmental fluctuations are however limited at low and high frequencies. (1) The “high” frequencies $\omega \gtrsim T$ are cut off by the Pauli principle ; this is naturally taken into account in perturbation theory, as it was illustrated by the case of quasiparticle lifetime, Eq. (5.20). On the other hand, an influence functional describing this Pauli blocking should account for the fact that the system (a given electron) is of the same nature than the bath (the other electrons). Pauli blocking will be included below in the heuristic argument given in page 142 via the introduction (by hand) of some short distance cutoff in eqs. (5.45,5.46). (2) Considering an electronic trajectory of duration t , the environmental fluctuations related to frequencies $\omega < 1/t$ correspond to almost static potential and do not contribute to decoherence. The elimination of low frequencies is well accounted for in the AAK's influence functional describing the effect of classical electromagnetic fluctuations.²³

²² This revival was motivated by the observation of saturation of the phase coherence time at low T [464]. These conclusions were not reproduced later in several experiments with a careful control of the material purity [791, 527, 66, 434, 556, 493].

²³ Note that the influence functional approach of AAK was introduced in order to describe the effect of “small energy transfers”, $\omega \ll T$ [23, 22] : “The e - e interaction involving small energy transfer is equivalent to the interaction of an electron with the fluctuating electromagnetic fields produced by all other electrons. Since the characteristic frequencies are $\omega \sim 1/\tau_\phi \ll T$ these fields may be considered as classical.” In dimensions $d = 2$ and

On the other hand, in perturbation theory, it is taken into account by the introduction (by hand) of low frequency cutoff, like in Eq. (5.20).

J. von Delft and its collaborators have developed some extensions of the influence functional approach in order to account for the proper elimination of both high and low frequencies [440, 673].²⁴ The relation with the diagrammatic approach has been discussed in Ref. [674, 673].

Two effects on the average conductivity.— Above, we have emphasized the importance of electron-electron interaction for decoherence. Electronic interactions are also responsible for another phenomenon, known as DoS anomaly and Altshuler-Aronov correction to the conductivity. A study of the conductivity in the presence of electron-electron interaction must account for two effects²⁵ :

- It brings an additional quantum correction to the conductivity, known as the **Altshuler-Aronov correction**, denoted below by $\Delta\sigma_{ee}(L_T)$. The correction is quantum, dominated by exchange contribution.
- It provides the **dominant microscopic mechanism for decoherence at low temperature** (below ~ 1 K) : $L_\varphi \rightarrow L_\varphi^{ee}(T)$. Therefore it explains the temperature dependence of the phase coherence length controlling the weak localisation correction $\Delta\sigma_{WL}(L_\varphi)$.

This can be summarized by writing the *averaged* conductivity as

$$\langle\sigma\rangle = \sigma_{\text{Drude}} + \Delta\sigma_{\text{WL}}(L_\varphi^{ee}, \mathcal{B}) + \Delta\sigma_{ee}(L_T) + \dots \quad (5.23)$$

where $L_\varphi^{ee}(T) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{D\tau_\varphi^{ee}(T)}$ is the phase coherence length and $L_T \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{D/T}$ the thermal length. The weak localisation can be distinguished due to its magnetic field dependence.²⁶ In the two next paragraphs we discuss the (incoherent) AA correction and then the question of decoherence due to electron-electron interaction. In both cases we put the emphasis on geometrical effects.

5.2.2 Altshuler-Aronov correction

The electron-electron interaction is responsible for a renormalisation of the random static potential and produces additional scattering of the electrons. This causes a small depletion of the density of states around the Fermi level, known as the *Coulomb dip* (or the DoS anomaly). This can be understood from the repulsive nature of the Coulomb interaction : in the absence of interaction the energy cost to add one electron above the Fermi sea is given by the mean level spacing Δ , however in the presence of electronic interactions this cost receives an additional contribution from Coulomb repulsion (figure 5.9). This causes a *diminishing* of the DoS at the

3, when the contribution of “high” frequencies $\omega \sim T$ is also important, the authors add a damping rate $1/\tau_\varphi^*$ in the cooperon to account for “large energy transfers”, where $1/\tau_\varphi^*$ is the rate given by the Fermi golden rule : their Eqs. (4.39) and (4.48). Below, eqs. (5.45,5.46), we will see that “high” frequency contributions are provided by the introduction of a cutoff in AAK’s influence functional describing classical electromagnetic fluctuations.

²⁴ Note that despite Marquardt *et al* criticised Golubev & Zaikin’s conclusions, note that they acknowledged in Ref. [440] that Golubev & Zaikin’s influence functional [290, 291] correctly accounts for the Pauli principle.

²⁵ In certain materials the superconducting fluctuations are important and the conductivity receives other corrections, like the Aslamazov-Larkin contribution (negligible far from T_c) and the Maki-Thomson corrections [395, 22, 705] (this latter presents the same form as the weak localisation correction, with an additional temperature dependent factor [395]; it was taken into account in Aluminium wires in [154, 566]).

²⁶ before the first measurement of the anomalous magnetoconductance [565], there was a certain confusion in experiments due to the fact that the temperature dependence of the conductivity was probed, therefore both the WL and the AA correction were measured (see for example Refs. [283, 157]).

Fermi level, ^{27, 28} as sketched on the figure. This correction to the DoS is expressed as [743] : ²⁹

$$\delta\rho_{ee}(\epsilon, T) = -\lambda_\rho \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dt \frac{\pi T t}{\sinh \pi T t} \cos(\epsilon t) \mathcal{P}_d(t), \quad \text{where } \mathcal{P}_d(t) = \langle x | e^{tD\Delta} | x \rangle \quad (5.25)$$

where λ_ρ is an interaction parameter, function of the Fermi liquid parameter F measuring the average of the interaction on the Fermi surface [22, 729] (some complementary informations on the interaction parameter are given in the appendix of the chapter, page 155). The perturbative ($F \ll 1$) expression is [22, 743]

$$\lambda_\rho \simeq 2 - \frac{3}{2}F \quad \text{in } d = 3, \quad (5.26)$$

where the dominant term (the 2) is the exchange contribution at order F^0 . Non perturbative expressions of λ_ρ for arbitrary dimension are given in the appendix.

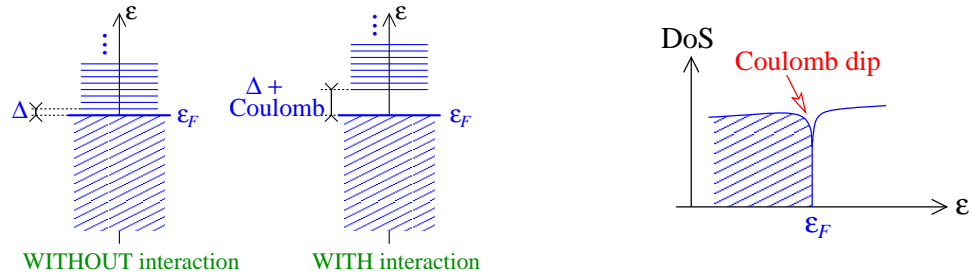


FIGURE 5.9 : Left : The Coulomb repulsion increases the energy cost required to add one electron. Right : Sketch of the DoS anomaly (Coulomb dip).

The number of energy levels available for transport therefore diminishes, which manifests in a small *negative* correction to the conductivity (because the DoS and the conductivity are related through the Einstein relation, $\sigma_0 = 2e^2\rho_0D = e^2\nu_dD$, a similar effect should affect the conductivity). This quantum correction to the conductivity is called the *Altshuler-Aronov (AA) correction* [17, 30, 21, 246, 146, 22, 729]. ³⁰ Contrary to the weak localisation correction, the AA correction is an *incoherent* contribution to the *average* conductivity, controlled by the *thermal length* $L_T \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{D/T}$. Despite electronic interactions limit phase coherence and thus the weak localisation, it brings another *negative* contribution, and therefore enhances the effect of localization by the disorder. The study of the Altshuler-Aronov correction has played an important role in the scaling theory of localisation in order to clarify the role of interaction on localisation properties of metals (see next chapter) [21, 146]. The coulomb dip [530] and the AA correction [686, 213, 527, 66] have been measured in several experiments (for example those of figure 5.10).

²⁷ Note that the argument is slightly incomplete because it does not emphasize the particular role of disorder. In the absence of disorder, the interaction is expected to renormalize the microscopic parameters (like the effective mass), however the density of states remains a regular function near Fermi level. The Coulomb dip is due to the interplay between the interaction *and* the disorder.

²⁸ the Coulomb dip, that manifests in the weakly disordered regime, becomes a Coulomb gap in the strongly localised regime (Efros-Shklovskii regime where transport occurs by thermal jumps among localised states) [218].

²⁹ In Fourier space the exchange contribution reads [22]

$$\delta\rho_{ee}^{(\text{Fock})}(\epsilon, T) = \nu_d \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left[2 - \tanh \frac{\omega + \epsilon}{2T} - \tanh \frac{\omega - \epsilon}{2T} \right] \text{Im} \frac{1}{\text{Vol}} \sum_q \frac{U(q, \omega)}{(-i\omega + Dq^2)^2} \quad (5.24)$$

where $\nu_d = 2_s\rho_0$ is the d -dimensional density of states per unit volume.

³⁰ The relation between the Altshuler-Aronov correction and the dynamical Coulomb blockade [336] has been discussed in Refs. [791, 530, 546].

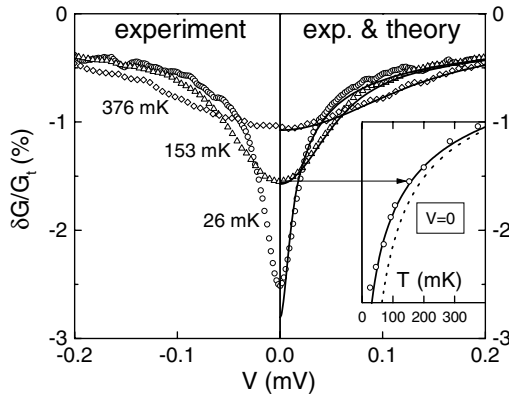


FIG. 3. Symbols in main panel: same experiment as in Fig. 2, but with data near $V = 0$ plotted on linear scale. Solid lines: Predictions for our finite length wire. Solid line: Prediction for our finite length wire. Dotted line: $T^{-1/2}$ dependence expected for an infinite wire.

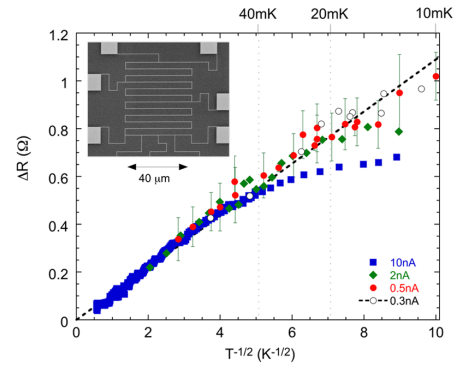


FIG. 2 (color online). Resistance variation of sample Au1 plotted as a function of $1/\sqrt{T}$ for different bias currents. The dotted line corresponds to the theoretical expectation for the resistance correction. The inset shows a scanning electron microscope photograph of the gold wire.

FIGURE 5.10 : Left : *The tunneling conductance of a diffusive wire is proportional to the DoS $\delta\rho_{ee}(eV)$: the depletion is the Coulomb dip of the DoS at the Fermi level due to electron-electron interaction ; from : Pierre, Pothier et al [530].* Right : *Altshuler-Aronov correction to the conductivity of a long wire $\Delta\sigma_{ee} \propto -1/\sqrt{T}$. The deviation of the experimental data from the straight line for the largest current indicates a temperature larger than the fridge temperature, due to Joule heating. From : Bäuerle, Saminadayar et al [66].*

A local thermometer.— From a practical point of view, the analysis of the AA correction furnishes a **local probe** in order to **control the temperature** inside the sample, a question of crucial importance in phase coherent measurements [213, 66]. In order to illustrate this point we have reproduced on figure 5.10 the AA correction, measured in a long wire, as a function of the temperature. The different plots correspond to different values of the current injected in the wire : when the current is too high, it induces some local (Joule) heating which manifests itself in a deviation from the expected $1/\sqrt{T}$ behaviour (the experimental points for the largest current are *below* the straight line, i.e. $T_{\text{wire}}^{-1/2} < T_{\text{fridge}}^{-1/2}$ that is $T_{\text{wire}} > T_{\text{fridge}}$). It is only for the smallest current (0.5 and 0.3 nA) that the measured resistance follows the $1/\sqrt{T}$ until the lowest temperature.

[645] Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Altshuler-Aronov correction to conductivity of a large metallic square network*, Phys. Rev. B **76**, 094202 (2007).— The AA correction takes the form

$$\Delta\sigma_{ee} = -\lambda_{\sigma} \frac{e^2 D}{\pi} \int_0^{\infty} dt \left(\frac{\pi T t}{\sinh \pi T t} \right)^2 \mathcal{P}_d(t), \quad \text{where } \mathcal{P}_d(t) = \langle x | e^{t D \Delta} | x \rangle \quad (5.27)$$

is the diffuson (in time representation). λ_{σ} is another interaction parameter. The d -dimensional perturbative expression ($F \ll 1$) is [22]

$$\lambda_{\sigma} \simeq \frac{4}{d} - \frac{3}{2} F. \quad (5.28)$$

Non perturbative expression is given appendix of the chapter, page 155, however it remains close to the perturbative one over the full range $F \in [0, 1]$. The AA correction may be rewritten in terms of the spectral determinant as

$$\Delta\sigma_{ee} = -\lambda_{\sigma} \frac{e^2}{\pi \text{Vol}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\gamma^2 \frac{\partial^3}{\partial \gamma^3} \ln S(\gamma) \right]_{\gamma=2n\pi/L_T^2} \quad (5.29)$$

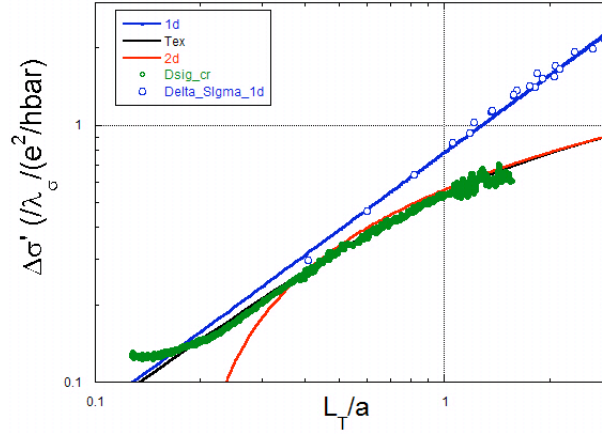


FIGURE 5.11 : *Experimental results (C. Bäuerle, F. Mallet & L. Saminadayar) : Altshuler-Aronov correction against the thermal length. Blue line is obtained with a long wire and green line with a large square network of lattice parameter $a = 0.64 \mu\text{m}$; black line is our prediction that crosses over between the linear 1D behaviour and the logarithmic 2D behaviour (red line is the logarithmic behaviour); note that the dimensional crossover occurs surprisingly early, for $L_T/a \sim 0.5$. Since the thermal length $L_T = \sqrt{D/T} = 0.27 \times T^{-1/2}$ is known, the only adjustable parameter to fit the experimental data to the theoretical result (5.29) is the prefactor λ_σ . The deviation of the green line for $L_T/a < 0.2$ (high T) is explained by the contribution of electron-phonon scattering to the conductivity; this corresponds to $T > 4.4 \text{ K}$.*

We have studied in detail this quantity in a large square network. In the limit $L_T \ll a$ the result is reminiscent of the 1D result

$$\Delta\sigma_{ee} \simeq -\lambda_\sigma \frac{e^2}{h} \frac{3\zeta(3/2)}{4\sqrt{2\pi}} L_T \quad (5.30)$$

with $\frac{3\zeta(3/2)}{4\sqrt{2\pi}} \simeq 0.782$.

In the limit $L_T \gg a$ the result presents a 2D logarithmic dependence in the thermal length

$$\Delta\sigma_{ee} \simeq -\lambda_\sigma \frac{e^2}{h} a \left[\frac{1}{\pi} \ln(L_T/a) + C_{ee} \right] \quad (5.31)$$

The constant is estimated numerically. We find $C_{ee} \simeq 0.56$.

We have argued that despite the AA correction may present a 2D dependence in L_T , it involves a 1D interaction parameter,

$$\lambda_\sigma^{\text{network}} \simeq 4 - \frac{3}{2}F, \quad (5.32)$$

which is confirmed very well experimentally in measurements on silver networks (with the same devices as the one studied in Ref. [576]) : see the discussion in our article [645].

5.2.3 Decoherence by electron-electron interaction

A precise description of the model for decoherence can be found in the two articles [643, 637]. We sketch the main idea.

Let us consider a network of rings of same area submitted to a magnetic field, such that each ring is pierced by the same flux ϕ . The experimental work [241] has shown the interest of the AAS harmonic analysis $\Delta\tilde{\sigma}_n$ for a phase coherence length measurement. The harmonics is given

by the contributions of the diffusive loops (interfering reversed electronic trajectories) winding n magnetic fluxes, which is written :

$$\Delta\tilde{\sigma}_n(x) = -2 \int_0^\infty dt \mathcal{P}_n(x, x; t) \underbrace{\langle e^{i\Phi_V[\mathcal{C}_t^n]} \rangle_{V, \mathcal{C}_t^n}}_{\text{decoherence}} \quad (5.33)$$

where \mathcal{C}_t^n is a closed diffusive electronic trajectory for time t winding n fluxes. Let us discuss the different parts of this expression.

Return probability for winding n : $\mathcal{P}_n(x, x; t)$ is the return probability in a time t conditioned to wind n fluxes. After summation over the time t , it counts the number of interfering reversed trajectories.

Decoherence : The function $\langle e^{i\Phi_V[\mathcal{C}_t]} \rangle_{V, \mathcal{C}_t}$ describes decoherence (and/or dephasing); it decays in time and cut off the large time contributions in the integral. Let us explain the complicated notation : the cooperon characterises the interference of two electrons following the same trajectory in opposite directions (the same sequence of scattering events in reversed order). Moving in a time dependent potential $V(x, t)$, the fluctuating electric potential due to the other electrons, one electron accumulates a phase $\int_0^t d\tau V(x(\tau), \tau)$ where $x(\tau)$ is the electron trajectory. Therefore the two retarded and advanced Green function lines accumulate the phase ³¹

$$\Phi_V[x(\tau)] = \int_0^t d\tau [V(x(\tau), \tau) - V(x(\tau), t - \tau)]. \quad (5.34)$$

The weak localisation correction is given by the sum of all loop contributions weighted by the phase, which may be achieved by the path integral

$$\Delta\tilde{\sigma}_n(x) = -2 \int_0^\infty dt \left\langle \int_{x(0)=x}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) \delta_{\mathcal{N}[x(\tau)], n} e^{-\int_0^t d\tau \frac{1}{4} \dot{x}(\tau)^2} e^{i\Phi_V[x(\tau)]} \right\rangle_V \quad (5.35)$$

where summation over the diffusive trajectories is done with the Wiener measure of Brownian motion $\mathcal{D}x(\tau) \exp - \int_0^t d\tau \frac{1}{4} \dot{x}(\tau)^2$ with the constraint that the trajectories have a definite winding $\mathcal{N}[x(\tau)] = n$. The additional average $\langle \dots \rangle_V$ stands for averaging over the fluctuations of the electric potential. Introducing the notation \mathcal{C}_t^n to denote a closed trajectory for time t and with winding n , we may rewrite the path integral as (5.33) where $\langle \dots \rangle_{\mathcal{C}_t^n}$ denotes averaging over such trajectories.

We now discuss two possible choices for the decoherence function.

Exponential relaxation of phase coherence.— The first simple choice is to assume an exponential form

$$\langle e^{i\Phi_V[\mathcal{C}_t]} \rangle_{V, \mathcal{C}_t} \longrightarrow e^{-t/\tau_\varphi}. \quad (5.36)$$

This “natural” choice corresponds to the structure of the cooperon (two particle Green function) in momentum space $C(q, \omega) = \frac{1}{1/\tau_\varphi - i\omega + Dq^2}$ (see section 4.4.2 of chapter 4). This exponential form accounts well for several dephasing mechanisms : spin-orbit scattering effect [330, 708], electron-phonon interaction [713],... However such a simple description for relaxation of phase coherence cannot describe correctly electron-electron interaction in complex geometries.

³¹ In general, electromagnetic fluctuations must be characterised by the correlator of the vector potential, however it was argued by AAK that, for the decoherence problem, field pointing across the wire may be ignored [23]. Therefore electromagnetic fluctuations can be more conveniently represented by a scalar field [420, 643].

Decoherence by electron-electron interaction in networks.— In 1982, AAK have constructed their influence functional as follows : using the fluctuation-dissipation theorem, Eq. (5.78), one can average over the (Gaussian) fluctuations of the electric potential : $\langle e^{i\Phi_V[C_t]} \rangle_V = e^{-\frac{1}{2}\langle \Phi_V[C_t]^2 \rangle_V}$. They have been able to compute the path integral for homogeneous systems (wire, plane,...). A reinterpretation of AAK's result for a wire has shown that the complicated functional may be simply replaced by some exponential [791, 467]³²

$$\langle e^{i\Phi_V[C_t]} \rangle_{V,C_t} \Big|_{\text{wire}} \simeq e^{-t/2\tau_N} \quad (5.37)$$

where³³

$$\tau_N \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\hbar^2 \nu_3 s \sqrt{D}}{k_B T} \right)^{2/3} = \frac{L_N^2}{D} \quad \text{i.e.} \quad L_N \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\hbar^2 \nu_3 s D^2}{k_B T} \right)^{1/3} = \left(\frac{\alpha_d}{\pi} N_c \ell_e L_T^2 \right)^{1/3} \quad (5.38)$$

are the Nyquist³⁴ time and the Nyquist length ($\nu_3 = 2_s \rho_0$ is the 3D DoS per unit volume). s is the section of the wire. The dimensionless parameter α_d was defined in appendix A of chapter 4, p. 119. This leads to the conclusion that the decoherence time and the phase coherence length are

$$\tau_\varphi^{\text{ee}} = 2\tau_N \quad \text{where} \quad L_\varphi^{\text{ee}}(T) = \sqrt{2} L_N(T) \propto T^{-1/3}. \quad (5.39)$$

It is only quite recently, in 2004, that it was realised by T. Ludwig & A. Mirlin [420] that decoherence in a ring cannot be accounted for through a unique length scale (i.e. by the simple exponential (5.37)). In this case one should come back to the functional that we write in the following suggesting manner [637]

$$\langle e^{i\Phi_V[C_t]} \rangle_V = e^{-\Gamma[C_t]t} \quad \text{with} \quad \Gamma[x(\tau)] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^2 k_B T}{\hbar^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t} \mathcal{R}(x(\tau), x(t-\tau)) \quad (5.40)$$

where $\mathcal{R}(x, x') = \frac{2}{\sigma_0 s} \left\{ \frac{1}{2} [P_d(x, x) + P_d(x', x')] - P_d(x, x') \right\}$ is the resistance between two points of the network, i.e. the resistance measured between two wires plugged at x and x' . This equation may be understood as a local version of the fluctuation-dissipation theorem. We have introduced the notation $\Gamma[x(\tau)]$ in order to emphasize that the correct description of decoherence by electron-electron interaction does not involve a unique decoherence rate but a *functional* of the trajectory

$$1/\tau_\varphi^{\text{ee}} \longrightarrow \Gamma[x(\tau)]. \quad (5.41)$$

Therefore **decoherence depends on the geometry of the network and also on the trajectory itself** : The WL correction to the AAS harmonics rewrite

$$\Delta \tilde{\sigma}_n(x) = -2 \int_0^\infty dt \int_{x(0)=x}^{x(t)=x} \mathcal{D}x(\tau) \delta_{N[x(\tau)],n} e^{-\int_0^t d\tau \frac{1}{4} \dot{x}(\tau)^2} e^{-t\Gamma[x(\tau)]} \quad (5.42)$$

In a simple geometry such as a wire the AAK functional gives a result similar to the one obtained with a simple exponential relaxation of phase coherence ; this can be understood from the absence of other length scale in the problem. However this is not the case in networks. Let us give now a heuristic argument to understand this point.

³² The precise structure of the function (5.37), which is not strictly exponential, has been obtained in Ref. [467].

³³ The r.h.s. expression is convenient : it relates the Nyquist length (that is the phase coherence length in a wire) to the localisation length $\xi \sim N_c \ell_e$ and the thermal length $L_T = \sqrt{D/T}$. It will be useful for the discussion of the validity of the Fermi liquid picture (appendix page 155).

³⁴ Decoherence by electronic interactions originates from fluctuations of the electric potential, i.e. is due to the Johnson-Nyquist electric noise.

Moving in the fluctuating electric potential the electron accumulates a phase $\Phi(t) \sim \int^t dt' V(t')$. The decoherence rate is therefore related to the power spectrum of the potential given by the fluctuation-dissipation theorem :

$$\boxed{1/\tau_\varphi^{ee} \sim \frac{d}{dt} \langle \Phi^2 \rangle \sim \int d\tau \langle V(\tau)V(0) \rangle \sim e^2 k_B T \mathcal{R}_t \quad \text{where } \mathcal{R}_t \sim \frac{x(t)}{s\sigma_0}} \quad (5.43)$$

is the resistance probed by the trajectory for a time t . An increase of the resistance increases the potential fluctuations and therefore the decoherence rate.

- In a wire the length probed by the trajectories is $x(t) \sim \sqrt{t}$ therefore we find $\langle \Phi^2 \rangle \sim (t/\tau_N)^{3/2}$. Therefore the magnetoconductance of a wire probes the Nyquist length $L_\varphi \rightarrow L_N \propto T^{-1/3}$.
- AAS oscillations of the conductance are related to winding trajectories that probe the perimeter $x(t) \sim L$ and $\langle \Phi^2 \rangle \sim t/\tau_c$ with $\tau_c \propto (LT)^{-1}$. Therefore the AAS oscillations probe the length $L_\varphi \rightarrow L_c \propto (LT)^{-1/2}$.

Quasiparticle lifetime in quantum dot : Sivan, Imry & Aronov.— The first formulation of a similar argument is due to Sivan, Imry & Aronov [602] in their work on quasi-particle lifetime in quantum dots. The authors have indeed noticed that this time may be written as “ $\tau_\Phi^{-1} \approx \varepsilon/g(L_\varepsilon)$ where $g(L_\varepsilon)$ is the conductance on a scale L_ε ” (they have not distinguished τ_{ee} and τ_φ). For the ergodic regime they have obtained “ $\tau_\Phi^{-1} \approx \varepsilon$ ”, reminiscent of the $\tau_\varphi^{-1} \propto T$ of Refs. [420, 643].

The phase coherent time τ_φ^{ee} in dimension d

In this § we consider the case of homogeneous systems (wire, plane,...) in arbitrary dimension and show how it is possible to extract the relevant time scale from the influence functional approach. Our starting point is the expression of the decoherence rate given above :

$$\Gamma[\vec{r}(\tau)] = \underbrace{\frac{2e^2 T}{\sigma_0}}_{T/\rho_0 D} \int_0^t \frac{d\tau}{t} W(\vec{r}(\tau), \vec{r}(t-\tau)) \quad \text{where } W(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{P_d(\vec{r}, \vec{r}) + P_d(\vec{r}', \vec{r}')}{2} - P_d(\vec{r}, \vec{r}') \quad (5.44)$$

and $-\Delta P_d = \delta$ where ρ_0 is the DoS per spin channel. A precise analysis of relaxation of phase coherence requires to study the function $\langle e^{-\Gamma[\mathcal{C}_t]t} \rangle_{\mathcal{C}_t}$, a difficult task in general. However in order to extract the relevant time scale it is sufficient to compute [467, 643] $\langle \Gamma[\mathcal{C}_t] \rangle_{\mathcal{C}_t}$ (that is to consider the small time limit of the function $\langle e^{-\Gamma[\mathcal{C}_t]t} \rangle_{\mathcal{C}_t} \simeq 1 - t \langle \Gamma[\mathcal{C}_t] \rangle_{\mathcal{C}_t}$). Even more simple is to provide scaling arguments, as done below.

3D case.— The diffusion is given by $P_d(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|}$. Following [22] (see also the footnote n°52 of Ref. [637] or Ref. [659]) the divergence of the function $W(\vec{r}, \vec{r}')$ must be cut off at a scale $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \sim L_T$ to account for the fact that energy transfers are limited by Pauli principle $\omega \lesssim T$ (this is made more clear by the formulation of [659, 658], cf. § « Note added in 2014 », at the end of the section). We write $W(\vec{r}, \vec{r}') \sim 1/L_T$ for $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \lesssim L_T$ and $W(\vec{r}, \vec{r}') \sim 1/\|\vec{r} - \vec{r}'\|$ for $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \gtrsim L_T$. The functional is dominated by the cutoff :

$$\Gamma[\mathcal{C}_t] \sim \frac{T}{\nu_3 D} \int_0^t \frac{d\tau}{t} \left(\frac{1}{L_T} - \frac{1}{\sqrt{D\tau}} \right) \sim \frac{T}{\nu_3 D L_T} \sim \frac{1}{\nu_3} \left(\frac{T}{D} \right)^{3/2} \sim 1/\tau_N^{(3d)} \quad (5.45)$$

where $\tau_N^{(3d)}$ is the “3D Nyquist time”.

2D case (thin film).— The diffuson is $P_d(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{2\pi b} \ln \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ where b is the thickness of the film. W must be cut off in the same way as in the 3D situation [23, 22] : $W(\vec{r}, \vec{r}') \sim \ln L_T$ for $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \lesssim L_T$ and $W(\vec{r}, \vec{r}') \sim \ln \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ for $\|\vec{r} - \vec{r}'\| \gtrsim L_T$ (for a more precise justification, cf. § « Note added in 2014 », at the end of the section). Hence

$$\Gamma[\mathcal{C}_t] \sim \frac{T}{\nu_3 b D} \int_0^t \frac{d\tau}{t} \ln(\sqrt{D\tau}/L_T) \sim \frac{T}{\nu_3 b D} \ln(tT) \xrightarrow{t \rightarrow 1/\Gamma} \frac{T}{\nu_3 b D} \ln(\nu_3 b D) \sim 1/\tau_N^{(2d)}, \quad (5.46)$$

where we have introduced a “2D Nyquist time $\tau_N^{(2d)}$ ”. We have replaced the t in the log by $\nu_3 b D/T$ since $t \sim 1/\Gamma[\mathcal{C}_t]$ (note that in principle the decoherence function is not a simple exponential since it behaves as $\langle e^{i\Phi_V[\mathcal{C}_t]} \rangle_{V, \mathcal{C}_t} \sim \exp[-\frac{tT}{\nu_3 b D} \ln(tT)]$, however the difference with an exponential $\exp[-t/\tau_N]$ comes only from a logarithm).

In the plane (real 2D situation), the Nyquist time is given by

$$1/\tau_N^{(2d)} = \frac{T}{2\pi\nu_2 D} \ln(\pi\nu_2 D) = \frac{T}{2\pi} \frac{\lambda_F}{\ell_e} \ln(\pi\ell_e/\lambda_F) = \frac{R_\square}{h/e^2} \frac{k_B T}{\hbar} \ln\left(\frac{h/e^2}{2R_\square}\right) \quad (5.47)$$

The precise definition of the Nyquist time in thin films is obtained by the substitution $\nu_2 \rightarrow \nu_3 b$, leading to $\nu_2 D = \ell_e/\lambda_F \rightarrow \nu_3 b D = (\ell_e/\lambda_F) \times \frac{4}{3}(b/\lambda_F)$. The last expression in terms of the sheet resistance R_\square is valid both for the plane and the thin film.

1D case (narrow wire).— In a long wire of cross-section s , the diffuson is $P_d(r, r') = -\frac{1}{2s}|r - r'|$ therefore

$$\Gamma[\mathcal{C}_t] t \sim \frac{T}{\nu_3 s D} \int_0^t d\tau \sqrt{D\tau} \sim t^{3/2} \frac{T}{\nu_3 s \sqrt{D}} \sim \left(\frac{t}{\tau_N}\right)^{3/2} \quad (5.48)$$

where τ_N is the 1D Nyquist time defined above, Eq. (5.38). The $t^{3/2}$ behaviour signals that the decoherence function is not a simple exponential function. Equation (5.48) shows that it behaves at short times as $\langle e^{-\Gamma[\mathcal{C}_t]t} \rangle_{\mathcal{C}_t} \simeq 1 - \left(\frac{t}{\tau_N}\right)^{3/2}$ (the fact that $\langle \delta\Phi^2 \rangle \sim \left(\frac{t}{\tau_N}\right)^{3/2}$ was pointed out in several Refs. [615, 291, 743, 467]). Its precise form $\forall t$ was obtained in [467] (see also [643, 637]).

Summary.— The results (5.45, 5.46, 5.48) show that for all dimensions the time scale controlling decoherence is the same as the inelastic electron-electron collision time (5.21) [743] :

$$\boxed{\tau_\varphi^{ee}(T) \sim \tau_{ee}(0, T)} \quad (5.49)$$

Dimensional crossovers in confined geometry – Ergodic and 0D regimes

In devices with confined geometry (like quantum dots or rings), as the temperature goes down, the phase coherence length eventually exceeds the system size and the characteristic time and length scale change their temperature dependences. For concreteness, let us consider the case of a ring of perimeter L .

In the “high” temperature regime $L_\varphi \ll L$, the magnetoconductance probes the Nyquist time [23] $\tau_\varphi \sim \tau_N \sim T^{-2/3}$, which reflects the diffusive nature of trajectories $x(t) \sim \sqrt{t}$. The AAS harmonics involves electronic trajectories winding around the ring, which are necessary ergodic $x(t) \sim L$, thus probing electric fluctuations over the length scale L : as explained above, the characteristic time is in this case [420, 643] $\tau_c \sim \tau_N^{3/2} \sqrt{D}/L$. Decoherence involves two scales.

If the temperature is decreased, one enters the regime where $L \ll L_\varphi$. In this case, all coherent trajectories are ergodic and the weak localisation is characterised by the unique scale [643] $\tau_\varphi \sim \tau_c \sim \tau_N^{3/2} \sqrt{D}/L$.

As pointed out above when quoting the work of Sivan, Imry and Aronov [602], another important length scale enters the analysis when going to the ergodic regime, namely the thermal length $L_T = \sqrt{D/T}$ (we recall that $L_T \ll L_N$ in order to ensure the consistency of the Fermi liquid picture, cf. appendix). The ergodic regime previously analysed corresponds to $L_T \ll L \ll L_\varphi$. If the temperature is further decreased, one enters the 0D regime when $L \ll L_T \ll L_\varphi$: as shown recently by Treiber *et al* [659], the phase coherence time of the ring behaves in this case as $\tau_\varphi \sim T^{-2}$, a behaviour reminiscent of the one obtained by Sivan, Imry & Aronov for the quasiparticle lifetime in quantum dots, Eq. (5.22).

We summarize all behaviours :

$$\frac{1}{\tau_\varphi^{\text{ee}}(T)} \sim \begin{cases} \frac{1}{\tau_N} \sim \left(\frac{T}{\nu_3 s \sqrt{D}}\right)^{2/3} \sim \left(\frac{T \sqrt{E_c}}{g}\right)^{2/3} & \text{for } d = 1 \text{ diffusive } \quad L_T \ll L_\varphi \ll L \\ \frac{1}{\tau_c} \sim \frac{TL}{\nu_3 s D} = \frac{T}{g} & \text{for } d = 1 \text{ ergodic } \quad L_T \ll L \ll L_\varphi \\ \frac{T^2 L^3}{\nu_3 s D^2} = \frac{T^2}{E_c g} & \text{for } d = 0 \quad L \ll L_T \ll L_\varphi \end{cases} \quad (5.50)$$

where $E_c = D/L^2$ is the Thouless energy and $g = \nu_3 s D/L = E_c/\Delta$ is the dimensionless conductance of the ring.

The (incorrect) results of Takane.— The phase coherence in a diffusive confined device was first considered by Takane in Ref. [622]³⁵ where both the ergodic regime ($L_T \ll L \ll L_\varphi$) and the 0D regime ($L \ll L_T \ll L_\varphi$). Takane have considered a quantum dot of size L connected to narrow wires of width w . He obtained $1/\tau_\varphi \sim \Delta \frac{L}{w} \frac{T}{E_c}$ (ergodic, $T \gg \frac{w}{L} E_c$) and $1/\tau_\varphi \sim \Delta \left(\frac{L}{w} \frac{T}{E_c}\right)^2$ (0D, $T \ll \frac{w}{L} E_c$). These results are however incorrect as Takane based his analysis on the formula obtained by Fukuyama and Abrahams [264, Eq. 2.19]

$$\frac{1}{\tau_\varphi} = -\frac{2}{\pi} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \overbrace{\frac{1}{\sinh(\beta\omega)}}^{\text{Pauli}} \frac{1}{D\vec{q}^2 - i\omega + 1/\tau_\varphi} \text{Im} U(\vec{q}, \omega) \quad (\text{Fukuyama \& Abrahams}) \quad (5.51)$$

where $U(\vec{q}, \omega)$ is the (dynamically) screened interaction (see appendix). The analysis of Fukuyama and Abrahams considered the effect of interaction on the two particle Green function in the particle-particle channel, however this ignores the vertex corrections due to the conductivity bubble [674, 673, 658]. In other terms, Tanake's analysis starts from a formula involving a single diffuson, (5.51), whereas the correct starting point involves the combination $\mathcal{R}(x, x') = \frac{2}{\sigma_{0s}} \left\{ \frac{1}{2} [P_d(x, x) + P_d(x', x')] - P_d(x, x') \right\}$, Eq. (5.40) and Eq. (5.54) below. In particular the contribution of the (uniform) zero mode of the Laplace operator is cancelled in $\mathcal{R}(x, x')$, which reflects that a uniform potential fluctuation does not dephase, which is absent in (5.51): this is crucial when considering ergodic regimes, thus explaining Tanake's mistake. The correct discussion may be found in our recent article [658].

✍ [643] Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring*, Phys. Rev. B **72**, 115327 (2005) ; Erratum : Phys. Rev. B **74**, 209902 (2006).— In this article we have re-examined the work of Ludwig & Mirlin (LM). We have done several progresses : we have been able to compute *exactly* the path integral in the geometry of the isolated ring. This has led us to the conclusion that, despite LM had obtained correctly the main exponential dependence of the AB harmonics, they have incorrectly applied the instanton

³⁵ In Ref. [621], Takane has used the same ideas to obtain the phase coherence time for a ballistic chaotic quantum dot. He obtained $1/\tau_\varphi \sim \frac{\lambda F}{w} T$ where w is the width of the contact wires. Note that a decrease of w *increases* the dwell time (classical escape time is $\tau_{\text{dwell}} \sim 1/(N_c \Delta) \sim \text{Surf}/(v_F w)$ [707]) whereas it increases the resistance and the potential fluctuations and therefore *decreases* the phase coherence time.

method to predict the prefactor. We have written the AAS harmonics of the magnetoconductivity as

$$\Delta\tilde{\sigma}_n \sim -L_N \exp \left\{ -\frac{\pi}{8}|n| \left(\frac{L}{L_N} \right)^{3/2} \right\} \quad \text{where } L_N \propto T^{-1/3}, \quad (5.52)$$

the Nyquist length $L_N = \sqrt{D\tau_N}$, is the unique characteristic length scale. Note that this result might be interpreted as the occurrence of a new length scale if one forces the harmonics to present to AAS behaviour obtained for exponential relaxation of phase coherence, a point of view taken by LM, and suggested by the heuristic arguments developed above :

$$\Delta\tilde{\sigma}_n \sim -L_N \exp \left\{ -|n| \frac{L}{L_\varphi^{\text{osc}}} \right\} \quad \text{for } L_\varphi^{\text{osc}} = \frac{8}{\pi} \frac{L_N^{3/2}}{L^{1/2}} \propto (LT)^{-1/2}. \quad (5.53)$$

From the experimental point of view this interpretation is probably more natural since an experiment probes the magnetic field dependence (i.e. the scaling with the winding number n) instead of the scaling with the perimeter L .

We have emphasized the relation to the exact result for the wire [23] and have discussed the effect of the penetration of the magnetic field in the wires (i.e. how the decoherence governed by the AAK functional combines with an additional dephasing described by some exponential relaxation of phase coherence).

We have provided a detailed analysis of decoherence in time (i.e. the function $\langle e^{i\Phi_V[C_t^n]} \rangle_{V, C_t^n}$). Using this and our understanding of diffusion in network, we have been able to discuss the regime $L_N \gtrsim L$ for a ring connected to long wires. Finally we have provided in an appendix a rigorous proof of the relation between AB (i.e. UCF) and AAS (i.e. WL) harmonics under the condition of ‘‘regularity’’ of the network.

- ✍ [630] Christophe Texier, *Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring*, Phys. Rev. B **76**, 153312 (2007).– In this short article I have reconsidered in detail the question of the pre-exponential factor incorrectly calculated by LM.
- ✍ [637] Christophe Texier, Pierre Delplace & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction in metallic networks and hollow cylinders*, Phys. Rev. B **80**, 205413 (2009).– In this long article we have considered different networks : a ring connected to long wires, a chain of rings and a square network. The case of cylinders is also considered. After a detailed study of the weak localisation for an exponential relaxation of phase coherence (that is a study of diffusion and winding properties) we have made several predictions for the AAS harmonics in both the weakly coherent limit (high T) and the coherent limit (low T). The various important length scales are discussed in each cases.

Note added in 2014 : Generalization of the influence functional – Classical and quantum noise

- ✍ [658] Maximilian Treiber, Christophe Texier, Oleg M. Yevtushenko, Jan von Delft & Igor V. Lerner, *Thermal noise and dephasing due to electron interactions in non-trivial geometries*, Phys. Rev. B **84**, 054204 (2011).– The influence functional (5.40) obtained by us in [643] does not describe the crossover to the 0D regime. In other terms, our formula (5.40) accounts for decoherence arising from *classical* electric fluctuations (the electrostatic field $V(r, t)$ was described classically above), whereas the 0D regime corresponds to a situation where decoherence is dominated by *quantum noise* (frequency such that $\hbar\omega \sim k_B T$, although limited by Pauli principle $\omega \lesssim T$). With the team of Jan von Delft from the University of München, we have obtained a more general influence functional (the difficulty is to account for the Pauli principle, which limits

energy exchange at scale T , in this space-time representation) : Eq. (5.40) is replaced by [658]

$$\Gamma[x(\tau)] = \frac{e^2 k_B T}{\hbar^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t} \int_0^t d\tau' [\delta_T(\tau + \tau' - t) - \delta_T(\tau - \tau')] \mathcal{R}(x(\tau), x(\tau')) \quad (5.54)$$

where

$$\delta_T(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \pi T F(\pi T \tau) \quad (5.55)$$

is a function of width $\sim 1/T$; $F(x)$ is the Fourier transform of $(\pi T t / \sinh(\pi T t))^2$ given below, see Eq. (5.62). In the regime where classical noise dominates ($\hbar\omega \ll k_B T$, hence $\delta\tau \gg 1/T$), the functions can be replaced by a δ function, hence we recover (5.40) since the resistance vanishes at coinciding points. The finite width of the δ_T functions accounts for the Pauli principle and cut off the contribution of short times related to energy transfer $\omega \gtrsim T$.

Experiments

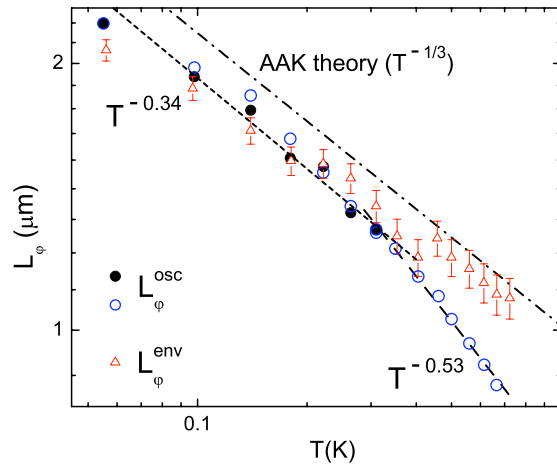



FIGURE 5.12 : Phase coherence length as a function of the temperature obtained from measurements realized by Ferrier *et al* (at the LPS, Orsay) on a large square network [242] of lattice spacing $a = 1 \mu\text{m}$ (perimeter $L = 4 \mu\text{m}$). The length scale $L_\varphi \rightarrow L_\varphi^{\text{env}} \propto T^{-1/3}$ has been extracted from the smooth MC while the length $L_\varphi \rightarrow L_\varphi^{\text{osc}} \propto T^{-1/2}$ has been extracted from harmonics.

Low temperature measurements of weak localisation has been realised in many experiments. The behaviour $L_\varphi \propto T^{-1/3}$ has been verified in many experiments on narrow wires :


- in wires etched in 2DEG : Thornton *et al* [648], Choi, Tsui & Alavi [161], Reulet, Bouchiat & Mailly [540].
- In metallic wires (gold, silver, copper, etc) : Echternach *et al* [212, 213], Pierre *et al* [791, 529, 527], Bäuerle, Saminadayar *et al* [66, 556, 493];

see also the review by Lin & Bird [730].

In contrast, only few experiments have analysed the T -dependence of L_φ in networks. We can mention the two articles by Kurdak *et al* [388] (ring etched in a 2DEG) and Pierre & Birge [526] (Copper ring); the oscillating MC was analysed with the theoretical expression $\delta g_{AB} \sim \left(\frac{L_T^2 L_\varphi}{L^3}\right)^{1/2} e^{-L/2L_\varphi}$ [741] (we recall that this expression is incorrect when decoherence is dominated by electron-electron interaction). More experiments on large square networks etched in 2DEG are the one done in H el ene Bouchiat's group in Orsay : Ferrier *et al* [241, 242].

 ³⁶ [242] Meydi Ferrier, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Geometrical dependence of decoherence by electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **100**, 146802 (2008).— In this article a careful analysis of the AAS oscillations of large square network is realised. The two temperature dependences $L_\varphi^{\text{env}} = \sqrt{2} L_N \propto T^{-1/3}$ and $L_\varphi^{\text{osc}} \propto T^{-1/2}$, predicted by LM [420] and us [643], are extracted from the experimental MC data (figure 5.12).

Note added in 2014 : New experiments in a single ring.

 [143] Thibaut Capron, Christophe Texier, Gilles Montambaux, Dominique Mailly, Andreas D. Wieck & Laurent Saminadayar, *Ergodic vs diffusive decoherence in mesoscopic devices*, Phys. Rev. B **87**, 041307(R) (2013).— More recently, experiments were performed in Grenoble on a *single* mesoscopic ring etched in a 2DEG, by analysis the conductance fluctuations (and not the WL). This analysis has confirmed that transport is controlled by the two length scales $L_\varphi^{\text{env}} = \sqrt{2} L_N$ –obtained from the WL of a long wire– and L_φ^{osc} –obtained from the AB oscillations of a single ring– with different temperature dependences (Fig. 5.13). As for the Orsay experiments [242], we emphasize that our understanding is not only qualitative, but also *quantitative* : we have check that the two measured phase coherence lengths verify well the predicted relation [643, 630]

$$\frac{L_\varphi^{\text{osc}} L^{1/2}}{(L_\varphi^{\text{env}})^{3/2}} = \frac{1}{\pi} 2^{9/4} \quad (5.56)$$

(right part of Fig. 5.13).

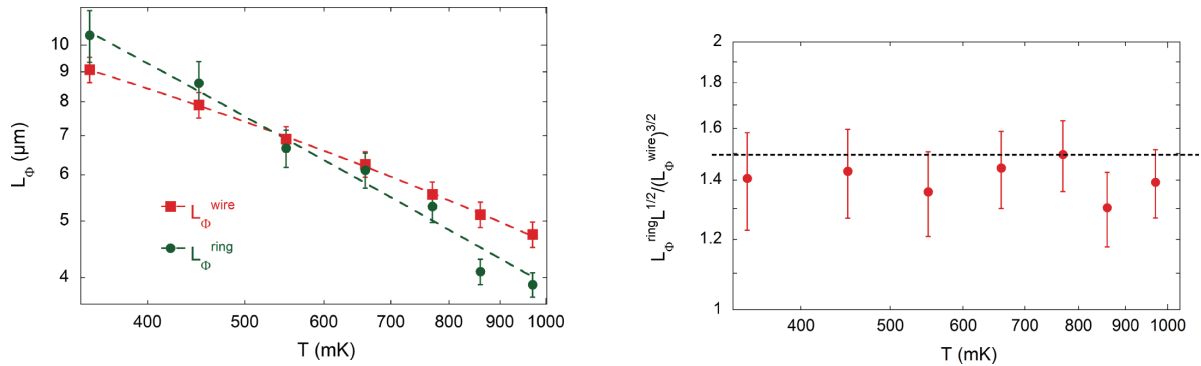


FIGURE 5.13 : Experiments performed at Grenoble. From : Capron et al [143]. The notations are $L_\varphi^{\text{wire}} \equiv L_\varphi^{\text{env}} = \sqrt{2} L_N$ and $L_\varphi^{\text{ring}} \equiv L_\varphi^{\text{osc}}$.

Final remark : ballistic case.— It is worth quoting few references on phase coherence experiment in the ballistic regime in quantum dots. The phase coherence length $L_\varphi \propto 1/T$ was found in [315]. We also refer to the two review papers by Bird and collaborators [730, 709].

³⁶ How to choose an experimental team in order to investigate AAK's theory in networks?
Answer on Hélène Bouchiat's car :



5.3 Universal conductance fluctuations

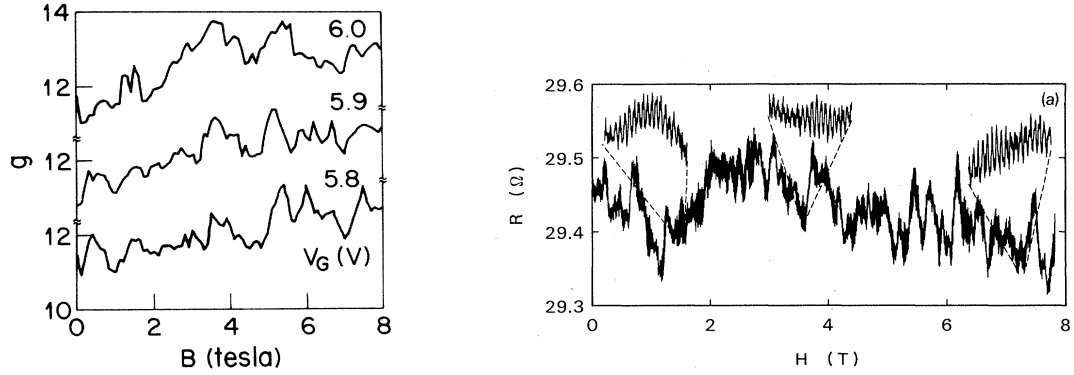


FIGURE 5.14 : Left : Dimensionless conductance as a function of the magnetic field for different gate voltages. The sample is a small wire (length $L = 0.3 \mu\text{m}$ and width $W = 0.1 \mu\text{m}$) etched in a 2DEG (MOSFET). Temperature is $T = 4.2 \text{ K}$. From : Skocpol et al [603]. Right : Resistance as a function of the magnetic field for a thin gold ring of diameter $0.8 \mu\text{m}$ (with a thickness of 38 nm and a width of 41 nm). Dimensionless conductance of the ring is $g \simeq 450$. Temperature is $T = 60 \text{ mK}$. Aperiodic modulations over a large field scale are the universal conductance fluctuations (amplitude $\delta R_{\text{UCF}} \simeq 0.1 \Omega$ which corresponds to fluctuation of dimensionless conductance $\delta g_{\text{UCF}} \simeq 1.5$). The oscillations over the smaller range ($\Delta B \simeq 7.7 \text{ mT}$) are the Aharonov-Bohm oscillations (amplitude $\delta R_{\text{AB}} \simeq 0.02 \Omega$, that is $\delta g_{\text{AB}} \simeq 0.3$). From : Washburn, Umbach et al [676].

The phenomenon of universal conductance fluctuations (UCF), illustrating the existence of mesoscopic fluctuations, was observed at the early stages of mesoscopic physics. UCF are shown on the figure 5.14 where the conductance is represented as a function of the magnetic field for two mesoscopic (coherent) devices. The curves show the interference pattern : it is fully *reproducible* and is characteristic of the disorder configuration in the sample.³⁷ Such curves can be considered as the *magnetofingerprint* of the sample. The most striking feature of UCF is visible on this figure : despite the two curves are obtained with two samples of very different nature, a 2DEG on the left and a ring of 3D gold wires on the right, their conductances differ by almost two orders of magnitude and their geometry differ, the amplitude of the mesoscopic fluctuations are comparable $\delta G \sim \frac{e^2}{h}$. This is why these mesoscopic fluctuations are said to be “universal”. They have been studied theoretically in Refs. [29, 403, 35, 404] ; a nice experimental review is the one by Washburn & Webb [741].

The conductance fluctuations/correlations may be analysed along the same lines as the weak localisation correction. The problem was studied theoretically in several works [356, 202, 354, 328, 327] in order to analyse the resistance fluctuations of a wire in a multiprobe configuration. We provide here some generalisation and simplification of the results obtained in these works and suggest how they can be expressed in a systematic way in networks.

The analysis of conductance fluctuations requires to correlate two conductivity bubbles (i.e. two pairs of R-A Green functions) with diffusons and cooperons. The six diagrams obtained for transmission correlations are represented on the figure 5.16. Remembering that the conductivity is given by the Einstein relation $\sigma_{ab} = 2e^2 \rho D_{ab}$ where D_{ab} is the diffusion constant, we may interpret the two top diagrams as diffusion constant correlation diagrams $\langle \delta D_{ab} \delta D_{cd} \rangle$ and the two bottom diagrams as density of states correlation $\langle \delta \rho^2 \rangle$ diagrams [35].

³⁷ Another beautiful experimental demonstration is provided in the work [431] where conductance is measured for different disorder configurations (figure 5.15).

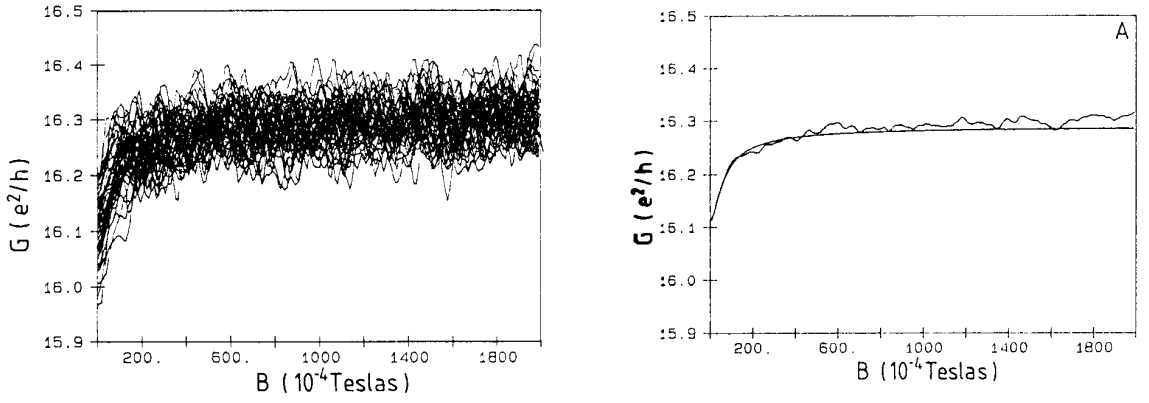


FIGURE 5.15 : Left : *UCF* : 46 MC curves obtained with a short (coherent) wire etched in a 2DEG ($T = 45$ mK). The different curves are obtained by modifying the disorder configuration. Right : Averaging the MC leads to the weak localisation. Figures of Mailly & Sanquer's article [431].

After some calculations we have found the following expressions for the four contributions to the correlator $\langle \delta T_{\alpha\beta}(\mathcal{B}) \delta T_{\mu\nu}(\mathcal{B}') \rangle$ [646]

$$\langle T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} \rangle^{(1)} = \left(\frac{2}{\alpha_d N_c \ell_e} \right)^2 \int \frac{d\omega}{2T} F\left(\frac{\omega}{2T}\right) \sum_{a,b} \frac{\partial G_{\alpha\mu}^{\text{class}}}{\partial l_a} \frac{\partial G_{\beta\nu}^{\text{class}}}{\partial l_b} \int_{\text{wire } a} dx \int_{\text{wire } b} dx' |P_d(x, x'; \omega)|^2 \quad (5.57)$$

$$\langle T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} \rangle^{(2)} = \left(\frac{2}{\alpha_d N_c \ell_e} \right)^2 \int \frac{d\omega}{2T} F\left(\frac{\omega}{2T}\right) \sum_{a,b} \frac{\partial G_{\alpha\nu}^{\text{class}}}{\partial l_a} \frac{\partial G_{\mu\beta}^{\text{class}}}{\partial l_b} \int_{\text{wire } a} dx \int_{\text{wire } b} dx' |P_c(x, x'; \omega)|^2 \quad (5.58)$$

$$\langle T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} \rangle^{(3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha_d N_c \ell_e} \right)^2 \int \frac{d\omega}{2T} F\left(\frac{\omega}{2T}\right) \sum_{a,b} \frac{\partial G_{\alpha\beta}^{\text{class}}}{\partial l_a} \frac{\partial G_{\mu\nu}^{\text{class}}}{\partial l_b} \times \int_{\text{wire } a} dx \int_{\text{wire } b} dx' \text{Re} [P_d(x, x'; \omega) P_d(x', x; \omega)] \quad (5.59)$$

$$\langle T_{\alpha\beta} T_{\mu\nu} \rangle^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha_d N_c \ell_e} \right)^2 \int \frac{d\omega}{2T} F\left(\frac{\omega}{2T}\right) \sum_{a,b} \frac{\partial G_{\alpha\beta}^{\text{class}}}{\partial l_a} \frac{\partial G_{\mu\nu}^{\text{class}}}{\partial l_b} \times \int_{\text{wire } a} dx \int_{\text{wire } b} dx' \text{Re} [P_c(x, x'; \omega) P_c(x', x; \omega)] , \quad (5.60)$$

where $G_{\alpha\beta}^{\text{class}}$ is the dimensionless classical conductance matrix : $G_{\alpha\beta}^{\text{class}} = -T_{\alpha\beta}^{\text{class}}$ for $\alpha \neq \beta$; the diagonal elements have the form $G_{\alpha\alpha}^{\text{class}} = N_c^{(\alpha)} - R_{\alpha\alpha}^{\text{class}}$ where $N_c^{(\alpha)}$ is the number of conducting channels in the wire and $R_{\alpha\alpha}^{\text{class}}$ a reflexion coefficient.³⁸

$$P_{d,c}(x, x'; \omega) = \langle x | \frac{1}{\gamma_{c,d} - i\omega - (\nabla - ie[A(x) \mp A'(x)])^2} | x' \rangle \quad (5.61)$$

where $A(x)$ and $A'(x)$ denote the vector potential associated to the magnetic fields \mathcal{B} and \mathcal{B}' . The spectral parameter are $\gamma_{d,c} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{L_\varphi^2} + \frac{1}{3} e^2 W^2 \left(\frac{\mathcal{B} \mp \mathcal{B}'}{2} \right)^2$ and account for the penetration of

³⁸ Note that we are not able to compute the classical reflexion probabilities in the diffusion approximation [320], however they can be deduced from the transmissions thanks to current conservation.

magnetic field inside the wires. The function

$$F\left(\frac{\omega}{2T}\right) \stackrel{\text{def}}{=} 2T \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\omega t} \left(\frac{\pi T t}{\sinh \pi T t}\right)^2 \quad (5.62)$$

comes from the convolution of the two derivative of Fermi functions (one for each conductivity).³⁹ It is explicitly given by $F(x) = \frac{x \coth x - 1}{\sinh^2 x}$; it decays exponentially at large $|x|$ and satisfies $\int dx F(x) = 1$ & $F(0) = 1/3$. It accounts for thermal averaging (the two conductivities are correlated over energies differing by at most T).

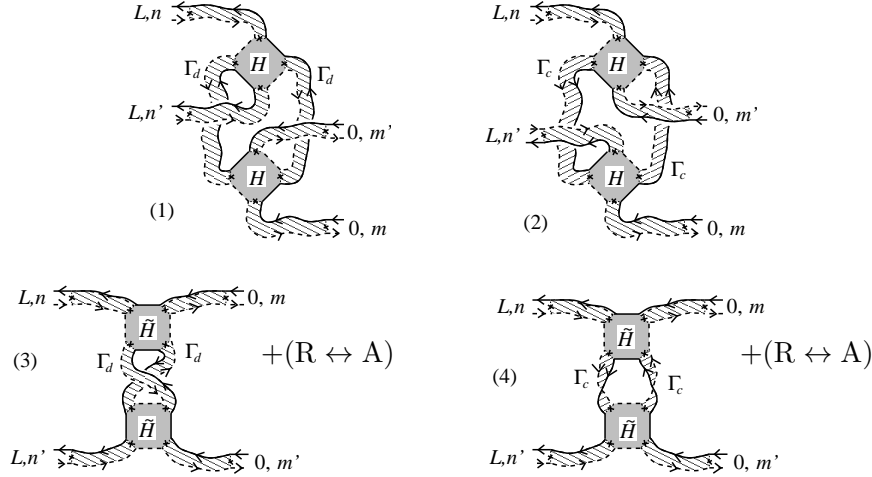


FIGURE 5.16 : The 6 diagrams for correlations of transmission probabilities. The two diagrams not plotted are obtained by interverting retarded lines (R) by advanced line (A) in diagrams 3 and 4. In the presence of dephasing (finite L_φ) only the internal diffusons and cooperons are affected. The diffusons and cooperons are not necessarily affected in the same way by dephasing, depending on its nature.

5.3.1 UCF in regular networks

In regular networks, i.e. assuming equality of the wire weights, these expressions might be simplified and related to the spectral determinant.

Limit $L_T \gg \min(L_\varphi, L)$

This limit corresponds to neglect the effect of thermal averaging. We obtain [8, 646]

$$\langle \delta \tilde{\sigma}_{ab}(\mathcal{B}) \delta \tilde{\sigma}_{cd}(\mathcal{B}') \rangle \simeq -\frac{1}{\text{Vol}^2} \left[(4\delta_{ac}\delta_{bd} + 2\delta_{ab}\delta_{cd}) \frac{\partial^2}{\partial \gamma_d^2} \ln S(\gamma_d) + (4\delta_{ad}\delta_{bc} + 2\delta_{ab}\delta_{cd}) \frac{\partial^2}{\partial \gamma_c^2} \ln S(\gamma_c) \right]. \quad (5.63)$$

The first terms describing nontrivial correlations of conductivity indices are related to correlations of diffusion constants while the second term is related to DoS correlations.

For a coherent connected wire we recover the famous $\langle \delta g(\mathcal{B})^2 \rangle = \frac{2}{15\beta}$ where $\beta = 1$ for $\mathcal{B} = 0$ and $\beta = 2$ for strong \mathcal{B} . This result was also obtained by the RMT [403, 707]. The advantage of the diagrammatic approach is to provide a microscopic description that describes naturally crossovers (as a function of magnetic field, spin-orbit scattering,...).

³⁹ Note that the derivative of the Fermi function is $-\frac{\partial f}{\partial \epsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} e^{i\epsilon t} \frac{\pi T t}{\sinh \pi T t}$

Limit $L_T \ll \min(L_\varphi, L)$

In this case the effect of thermal averaging is important. Note that this regime is realised if L_φ is dominated by electron-electron interaction since we have necessarily $L_T \ll L_\varphi^{\text{ee}}$ [22]. DoS correlation terms are negligible in this limit. We find [646] (see appendix E of Ref. [643] reproduced p. 162)

$$\langle \delta \tilde{\sigma}_{ab}(\mathcal{B}) \delta \tilde{\sigma}_{cd}(\mathcal{B}') \rangle \simeq \frac{2\pi}{3} \frac{L_T^2}{\text{Vol}^2} \left[\delta_{ac} \delta_{bd} \frac{\partial}{\partial \gamma_d} \ln S(\gamma_d) + \delta_{ad} \delta_{bc} \frac{\partial}{\partial \gamma_c} \ln S(\gamma_c) \right]. \quad (5.64)$$

Therefore the UCF can be related to the WL.

Note however that this relation holds for the function of the phase coherent length, however the phase coherent lengths involved in the WL and the UCF do not always coincide. The electron-electron phase coherent length are identical in WL and UCF [11, 643]. For spin-orbit and spin-flip scattering lengths differ in WL [330] and UCF [155].

5.3.2 AB versus AAS oscillations

Having noticed that the UCF and the WL are related in the limit $L_T \ll \min(L_\varphi, L)$ allows us to relate the amplitudes of the Aharonov-Bohm and the Altshuler-Aronov-Spivak oscillations. This remark permits to clarify the interesting question raised in Ref. [11] : does the WL measure the same phase coherence length as the UCF? Aleiner & Blanter have answered yes to this question by comparing the WL and the UCF for a wire and for a plane, when decoherence is due to electron-electron interaction. The relation between AB and AAS amplitudes was mentioned in Ref. [420] and precisely demonstrated for regular networks in Ref. [643].

We remark that such relation is limited to *regular* networks. Let us consider for example a symmetric ring of perimeter $L = l_c + l_d$ ($l_c = l_d$ are the length of the arms) connected to long wires of length l_a and l_b . In this case the current in the connecting wires are twice the current in the arms of the ring.

In the weakly coherent ring limit the integral is dominated by the ring and, using formula (5.57,5.58), we obtain

$$\langle \delta g_n^2 \rangle \simeq -\frac{\pi}{12} \left(\frac{L_T}{l_a + l_c || l_d + l_b} \right)^2 \langle \Delta g_n \rangle \quad \text{for } L_\varphi \ll L \ll l_a, l_b, \quad (5.65)$$

where $\langle \Delta g_n \rangle$ denotes the AAS harmonics and δg_n the AB harmonics ($\langle \delta g_n^2 \rangle$ is the harmonics of the term oscillating as a function of $\mathcal{B} - \mathcal{B}'$ in UCF).

In the limit of a coherent ring the integral is dominated by the arms and we get

$$\langle \delta g_n^2 \rangle \simeq -\frac{\pi}{3} \left(\frac{L_T}{l_a + l_c || l_d + l_b} \right)^2 \langle \Delta g_n \rangle \quad \text{for } L \ll L_\varphi \ll l_a, l_b. \quad (5.66)$$

This illustrates that there is no universal relation between AB and AAS amplitudes in arbitrary networks (see a footnote of Ref. [630]).

✎ [576] Félicien Schopfer, François Mallet, Dominique Mailly, Christophe Texier, Gilles Montambaux, Laurent Saminadayar & Christopher Bäuerle, *Dimensional crossover in quantum networks: from mesoscopic to macroscopic physics*, Phys. Rev. Lett. **98**, 026807 (2007).— In this article we have analysed the dependence of the AAS and AB amplitudes of large networks as a function of their size (number of rings N , i.e. the number of plaquettes of the network). One of the networks measured is the one represented on the right part of figure 2.1, page 51. It is usually argued that the AB amplitude vanishes as $\delta g_{\text{AB}} \propto N^{-1/2}$ while the AAS amplitude $\Delta g_{\text{AAS}} \propto N^0$, a manifestation of disorder averaging of incoherent regions of the device [662, 741].

We have considered networks with anisotropic aspect ratio ($L_x/L_y = 10$). In our case, depending on how L_φ compares to L_y , the network may be in a “2D regime” or a “quasi 1D regime” what is reflected on the size dependence of the AB and the AAS amplitudes. It is worth emphasizing that these measurements are the first detailed analysis of AB amplitude in such large networks (up to $N = 10^6$ plaquettes); from the experimental point of view this was a challenge to extract such a tiny signal : the analysis was pushed to size $N = 10^6$ for which AB signal ($\delta R_{AB} \approx 10^{-5} \Omega$) must be extracted from a magnetoresistance curve seven orders of magnitude larger ($R \simeq 100 \Omega$).⁴⁰

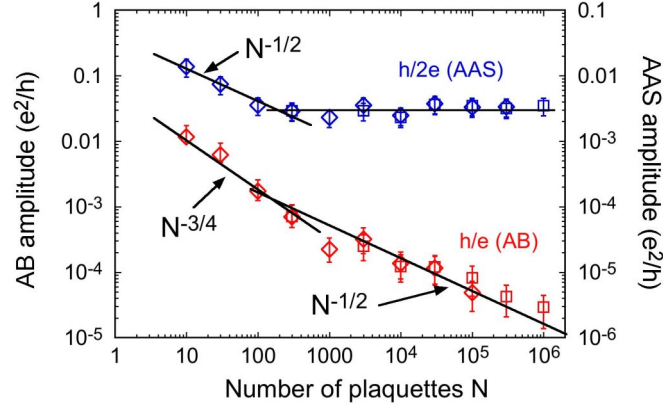


FIG. 3 (color online). AAS amplitude Δg_{AAS} and AB amplitude δg_{AB} as a function of the number N of plaquettes for different networks of various sizes $L_x \times L_y \propto N$, for two topologies, square (squares) and \mathcal{T}_3 (diamonds) [17].

FIGURE 5.17 : Size dependence of AAS (WL) amplitude and AB (UCF) amplitude for metallic networks. As the size is diminished, one crosses over from a « macroscopic » (2D) regime ($L_x, L_y \gtrsim L_\varphi$) to a « semi-mesoscopic » (quasi-1D) regime ($L_x \gtrsim L_\varphi \gtrsim L_y$). From : Schopfer et al [576].

⁴⁰ On figure 2 of Ref. [576] (network with $N = 3000$ plaquettes) we see that $\delta R_{AB} \approx 10^{-3} \Omega$, to be compared to $R \simeq 100 \Omega$.

Annexe A : Electronic interactions in metals – Screening

Density-density correlation function The density-density correlation function characterizes the response of the system at linear order, i.e. the variation of the density, to the introduction of an external potential :

$$\delta n(\vec{r}, \omega) = - \int d\vec{r}' \chi(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) V_{\text{ext}}(\vec{r}', \omega) \quad (5.67)$$

It is given by (linear-response theory) :

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = i \int_0^\infty dt e^{(i\omega - 0^+)t} \langle [\hat{n}(\vec{r}, t), \hat{n}(\vec{r}', 0)] \rangle, \quad (5.68)$$

where $\hat{n}(r)$ is the electron density operator. In the diffusion approximation ($q\ell_e \ll 1$ and $\omega\tau_e \ll 1$) it reads

$$\chi(\vec{r}, \vec{r}'; \omega) = \nu_d \left[\delta(\vec{r} - \vec{r}') + i\omega \langle \vec{r}' | \frac{1}{-i\omega - D\Delta} | \vec{r}' \rangle \right] \quad (5.69)$$

that is [22, 729, 743] (see also [672])

$$\chi(\vec{q}, \omega) = \nu_d \frac{D\vec{q}^2}{-i\omega + D\vec{q}^2}, \quad (5.70)$$

where $\nu_d = 2_s\rho_0$ is the d -dimensional DoS per unit volume.

Dielectric function at RPA approximation Electronic interactions are responsible for screening. The response function accounting from screening can be obtained by solving the self consistent problem (1.55,1.56,1.57) (this procedure is equivalent to the so-called RPA approximation) : we repeat that the self consistency lies in the fact that the linear response equation $n_{\text{ind}} = -\chi V$ involves the *screened* potential, and not the external (bare) potential $n_{\text{ind}} = -\chi_{\text{RPA}} V_{\text{ext}}$. The response function in the RPA approximation is given by [748] :

$$\chi_{\text{RPA}}(\vec{q}, \omega) = \frac{\chi(\vec{q}, \omega)}{1 + U_{\text{Coul}}(\vec{q}) \chi(\vec{q}, \omega)} \quad \text{where } U_{\text{Coul}}(\vec{q}) = \frac{4\pi e^2}{\vec{q}^2} \quad (5.71)$$

is the 3D Fourier transform of the Coulomb potential.⁴¹ The corresponding (RPA) dielectric function, defined by $V = V_{\text{ext}}/\epsilon$, is given by

$$\frac{1}{\epsilon(\vec{q}, \omega)} = 1 - U_{\text{Coul}}(\vec{q}) \chi_{\text{RPA}}(\vec{q}, \omega) \quad \text{i.e.} \quad \epsilon(\vec{q}, \omega) = 1 + U_{\text{Coul}}(\vec{q}) \chi(\vec{q}, \omega) \quad (5.72)$$

In the static limit the dielectric function takes the form $\epsilon(\vec{q}, 0) = 1 + \kappa^2/\vec{q}^2$ describing screening of the charge over the Thomas-Fermi screening length $1/\kappa = 1/\sqrt{4\pi e^2 \nu_3}$.

Dynamically screened interaction The effective interaction between the electrons of the metal is given by the screened Coulomb potential $U(\vec{q}, \omega) = U_{\text{Coul}}(\vec{q})/\epsilon(\vec{q}, \omega)$:

$$U(\vec{q}, \omega) = \frac{1}{U_{\text{Coul}}(\vec{q})^{-1} + \chi(\vec{q}, \omega)} \simeq \frac{1}{\chi(\vec{q}, \omega)} = \frac{1}{\nu_d} \frac{-i\omega + D\vec{q}^2}{D\vec{q}^2} \quad (5.73)$$

⁴¹Note that when the position r of the electron is constrained to low dimensions ($d < 3$), the Fourier transform of the Coulomb potential $U_{\text{Coul}}(\vec{r}) = e^2/|\vec{r}|$ takes the form $U_{\text{Coul}}^{(2)}(q_x, q_y) = \int d^2\vec{r} e^{-i\vec{q}\cdot\vec{r}} \frac{e^2}{r} = \int \frac{dq_z}{2\pi} U_{\text{Coul}}^{(3)}(q_x, q_y, q_z) = \frac{2\pi e^2}{\sqrt{q_x^2 + q_y^2}}$ and $U_{\text{Coul}}^{(1)}(q_x) = \int \frac{dq_y dq_z}{(2\pi)^2} U_{\text{Coul}}^{(3)}(q_x, q_y, q_z) \simeq 2e^2 \ln(1/|q_x|a)$ where the cutoff is provided by the section of the wire a .

where we have used $||\vec{q}|| \ll \ell_e^{-1} \ll k_F, \kappa$. In this limit the screened interaction takes a universal form. Moreover in the static limit the effective interaction between electrons in the metal is *local*: $U(\vec{r}, \omega = 0) \simeq \frac{1}{\nu_d} \delta(\vec{r})$.

We have assumed that the Coulomb interaction $U_{\text{Coul}}(\vec{q})$ can be neglected in the denominator of the screened interaction $U(\vec{q}, \omega)$. Note however that, for the calculation of the interaction correction to the density of states (5.24), the Coulomb interaction term in the interaction cannot be neglected in $d = 1$ and 2. In general one has to consider [22]

$$U(\vec{q}, \omega) = \frac{e^2}{\ln^{-1}(1/q_x^2 a^2) + e^2 \nu_1 \frac{Dq_x^2}{-i\omega + Dq_x^2}} \quad \text{in } d = 1 \quad (5.74)$$

$$= \frac{2\pi e^2}{||\vec{q}|| + \kappa_2 \frac{D\vec{q}^2}{-i\omega + D\vec{q}^2}} \quad \text{with } \kappa_2 = 2\pi e^2 \nu_2 \quad \text{in } d = 2 \quad (5.75)$$

$$= \frac{4\pi e^2}{\vec{q}^2 + \kappa^2 \frac{D\vec{q}^2}{-i\omega + D\vec{q}^2}} \quad \text{with } \kappa = \sqrt{4\pi e^2 \nu_3} \quad \text{in } d = 3 \quad (5.76)$$

where a is the section of the wire in 1D.

Fluctuation-dissipation theorem The (unsymmetrised) correlator $\tilde{C}_{VV}(\vec{q}, \omega) = \text{Fourier}[\langle n_{\vec{q}}(t) n_{-\vec{q}} \rangle]$ may be related to the imaginary (dissipative) part of the response function :

$$\langle |V(\vec{q}, \omega)|^2 \rangle \equiv \tilde{C}_{VV}(\vec{q}, \omega) = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} \text{Im} [\chi_{\text{RPA}}(\vec{q}, \omega)] . \quad (5.77)$$

This expression may be rewritten in order to characterize the potential fluctuations

$$\langle |V(\vec{q}, \omega)|^2 \rangle = \frac{2\hbar}{1 - e^{-\hbar\omega/T}} \frac{4\pi e^2}{\vec{q}^2} \text{Im} \left(\frac{-1}{\epsilon(\vec{q}, \omega)} \right) \quad (5.78)$$

$$= \frac{2\hbar}{1 - e^{-\hbar\omega/T}} \text{Im} [-U(\vec{q}, \omega)] \quad (5.79)$$

$$\simeq \frac{2}{\nu_d D} \frac{T}{\vec{q}^2} = \frac{2e^2}{\sigma_0} \frac{T}{\vec{q}^2} \quad \text{for } T \ll \hbar\omega \text{ \& } ||\vec{q}|| \ll 1/\ell_e, \kappa . \quad (5.80)$$

Note added in 2014.— A detailed discussion of the fluctuation-dissipation theorem in non homogeneous geometries was provided in our article [658].

Annexe B : Few remarks on Fermi liquid theory in metals

B.1. Interaction parameters

We have introduced in the text the Fermi liquid parameter F . It measures the average of the (screened static) interaction over the Fermi surface [729, 743] : ⁴² $F \stackrel{\text{def}}{=} \langle \tilde{U}(\vec{p} - \vec{p}') \rangle / \tilde{U}(\vec{0})$ where \vec{p} and \vec{p}' are two momenta on the Fermi surface, over which average is taken. In a (3D) metal it is given by [22, 743]

$$F^{(3D)} = \left(\frac{\kappa}{2k_F} \right)^2 \ln \left[1 + \left(\frac{2k_F}{\kappa} \right)^2 \right] \quad \text{for } \kappa \ell_e \gg 1 \quad (5.81)$$

where κ is the inverse of the screening length. In general, it varies between $F = 0$ (weak screening, $\kappa \rightarrow 0$) and $F = 1$ (perfect screening, $\kappa \rightarrow \infty$).

Orders of magnitude in silver.— To put numbers let us consider the case of silver for which $k_F^{-1} = 0.083$ nm. The Thomas-Fermi screening length is $\kappa^{-1} = 1/\sqrt{4\pi e^2 \nu_3} = 0.055$ nm (DoS is given in table 1.1 page 10), therefore $F \simeq 0.58$.

DoS anomaly.— We have met the parameter F the first time in the prefactor λ_ρ of the DoS anomaly $\delta\rho_{ee}(\epsilon)$. Note that F corresponds to the ratio between the Hartree and Fock contributions computed with a static screened interaction [24, 22, 743] : $F \simeq \text{Hartree}/\text{Fock}$. The nonperturbative expression (for arbitrary F , i.e. arbitrary κ/k_F) of the interaction parameter introduced above is given in [21] (take care that this article has many misprints!) and [22]

$$\lambda_\rho^{(d)} = \Lambda_\rho^{(j=0)} - \frac{6}{d-2} \left[(1 + F/2)^{(d-2)/2} - 1 \right]. \quad (5.82)$$

The two terms correspond to singlet and triplet channel contributions (for the two spins of the particle-hole propagator) : $\lambda_\rho = \Lambda_\rho^{(j=0)} + \frac{3}{2}\Lambda_\rho^{(j=1)}$. The $d = 2$ case is given by considering $d = 2 + \eta$ with $\eta \rightarrow 0$: $\lambda_\rho^{(2)} = \Lambda_\rho^{(j=0)} - 3 \ln(1 + F/2)$. The singlet term is related to the dominant exchange contribution obtained at lowest order in F : [22]

$$\Lambda_\rho^{(j=0)} \simeq \kappa a \sqrt{\frac{1}{\pi} \ln \frac{D\kappa^2}{\max(\epsilon, T)}} \quad \text{in } d = 1 \quad (5.83)$$

$$\simeq \frac{1}{2} \ln \frac{\max(\epsilon, T)}{\tau_e (D\kappa_2^2)^2} \quad \text{in } d = 2 \quad (5.84)$$

$$= 2 \quad \text{in } d = 3 \quad (5.85)$$

The origin of the universal value in $d = 3$ is related to the above remark (previous appendix) : in this case the Coulomb interaction $U_{\text{Coul}}(q)$ in the denominator of the screened interaction $U(q, \omega)$ can be neglected within the calculation of the DoS anomaly (5.24). Conversely, this is not possible in low dimension where the term $U_{\text{Coul}}(q)^{-1}$ cut off the integrals, being the origin of the non-universal expressions of the interaction parameter in this case.

⁴² In principle the Fermi liquid theory is characterized by a set of parameters $F_\ell^{s,a}$ measuring the interaction between electrons in each channel (ℓ is the orbital momentum and s, a refer to symmetric and antisymmetric spin channels) [758]. Concerning low energy (large scale) properties, only small momenta $\ell = 0, 1$ enter physical properties (mass renormalisation, magnetic susceptibility,...).

Altshuler-Aronov correction to the conductivity.– The calculation of the Altshuler-Aronov correction involves some prefactor that we have denoted λ_σ . We have given above its perturbative expression as a function of the parameter F : $\lambda_\sigma^{(d)} \simeq \frac{4}{d} - \frac{3}{2}F$. The first term is provided by the exchange (Fock) contribution (at lowest order in F), while higher order terms are due to Hartree term and corrections to the Fock term. The non perturbative expression can be found in Ref. [22, 729]

$$\lambda_\sigma^{(d)} = \frac{4}{d} + \frac{48}{d(d-2)} \frac{1 + Fd/4 - (1 + F/2)^{d/2}}{F} \quad (5.86)$$

The two terms also coincide with a singlet/triplet separation $\lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^{(j=0)} + \frac{3}{2}\Lambda_\sigma^{(j=1)}$. Note that the 2D expression originally derived by Finkelstein [246] may be obtained by writing $d = 2 + \eta$ with $\eta \rightarrow 0$. One finds [246, 22, 729] :

$$\lambda_\sigma^{(2)} = 2 + 6 \left[1 - \frac{2}{F}(1 + F/2) \ln(1 + F/2) \right] \quad (5.87)$$

The parameter is rather close to its perturbative expression $\lambda_\sigma^{(d)} \simeq \frac{4}{d} - \frac{3}{2}F$ over the whole range $F \in [0, 1]$ (the agreement is better as d increases).

In the presence of strong spin-orbit or spin-flip scattering, only remains the contributions of the singlet channel (for the DoS anomaly of the AA correction) [21]. In this case the interaction parameter is given by the universal term $\lambda_\sigma = \Lambda_\sigma^{(j=0)} = \frac{4}{d}$.

B.2. Validity of the Fermi liquid theory in disordered metals

Clean metal (ballistic limit)

In a clean metal the fact that the lifetime [772, 748, 743, 758] $1/\tau_{ee}(\epsilon, 0) \sim \epsilon^2/\epsilon_F \ll \epsilon$ is much smaller than the energy ensures the consistency of the concept of quasiparticle.

The precise expressions may be found in the book of Giuliani & Vignale [758] :

- In 3D the finite temperature expression is

$$1/\tau_{ee}(\epsilon, T) \sim \frac{1}{\epsilon_F} \frac{\epsilon^2 + (\pi T)^2}{1 + \exp -\epsilon/T} . \quad (5.88)$$

- In 2D the lifetime is reduced by logarithmic corrections

$$1/\tau_{ee}(\epsilon, 0) \sim \frac{\epsilon^2}{\epsilon_F} \ln(4\epsilon_F/|\epsilon|) \quad \text{and} \quad 1/\tau_{ee}(0, T) \sim \frac{T^2}{\epsilon_F} \ln(4\epsilon_F/T) . \quad (5.89)$$

Disordered metal

We have recalled above the expression (5.18) of the quasiparticle lifetime in a weakly disordered metals (the disparaging expression “dirty metal” is sometimes used). Using the expression of the density of states $\nu_d \sim m^{d/2}\epsilon_F^{d/2-1}$ we may write [19, 22]

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee}(\epsilon, 0)} \sim \left(\frac{\hbar}{mD} \frac{\epsilon}{\epsilon_F} \right)^{d/2} \epsilon_F \quad (5.90)$$

for $d \geq 2$ (the quasi1D case needs some special discussion, see below). The consistency of the quasiparticle concept requires $1/\tau_{ee} \ll \epsilon$, hence

$$\boxed{\left(\frac{\hbar}{mD} \right)^{d/2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_F} \right)^{d/2-1} \ll 1 .} \quad (5.91)$$

Dimension $d = 3$.— The fact that $\epsilon \ll \epsilon_F$ ensures that this condition is fulfilled.

Dimension $d = 2$.— In this case the condition is energy independent $\hbar/mD \ll 1$. Remembering that this coincides with the dimensionless conductance of the 2DEG, $g = (\hbar/2e^2)/R_{\square} = mD/\hbar = k_F \ell_e/2$, this shows that the condition for weak disorder $k_F \ell_e \gg 1$ ensures the stability of the Fermi liquid in this case.

Quasi one-dimensional case.— In a quasi-one-dimensional wire, the 1D DoS ν_1 in equation (5.18) must be replaced by $\nu_1 \rightarrow \nu_3 s \sim N_c \nu_1$, where s is the section of the wire. The decay rate is reduced by the number of channels :

$$\frac{\hbar}{\tau_{ee}(\epsilon, 0)} \sim \frac{1}{N_c} \sqrt{\frac{\hbar}{mD} \frac{\epsilon}{\epsilon_F}} \epsilon_F. \quad (5.92)$$

The inequality (5.91), i.e. $1/\tau_{ee} \ll \epsilon$, rewrites

$$\frac{1}{N_c} \sqrt{\frac{\hbar}{mD} \frac{\epsilon_F}{\epsilon}} \ll 1 \quad (5.93)$$

and gives a *lower* bound for the energy. Replacing the energy of the quasiparticle by the temperature ⁴³ (the available energy) we obtain that the Fermi liquid picture can only be valid for sufficiently large temperature

$$\boxed{T > T_* \sim \frac{1}{N_c^2} \frac{\hbar}{mD} \epsilon_F \sim \frac{\hbar}{N_c^2 \tau_e} \sim \frac{\hbar D}{\xi^2}} \quad (5.94)$$

where $\xi \sim N_c \ell_e$ is the localisation length [707]. Using (5.38), i.e. $L_{\varphi}^{\text{ec}} = \sqrt{2} L_N \sim (\xi L_T^2)^{1/3}$, where $L_T = \sqrt{D/T}$ is the thermal length, we can rewrite this condition in terms of the characteristic length scales :

$$\boxed{L_T \ll L_N \ll \xi} \quad (5.95)$$

At the crossover temperature below which Fermi liquid theory breaks down the three length are of the same order : $L_T \sim L_N \sim \xi$ at $T = T_*$.

⁴³ According to the discussion of the main text, the discussion at finite temperature should involves $1/\tau_{ee}(0, T) \sim 1/\tau_N$. Writing $1/\tau_N \ll T$ gives (5.95).

Annexe C : Articles

- Page 159 : Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires*, Phys. Rev. Lett. **92**, 186801 (2004).
- Page 160 : Meydi Ferrier, Lionel Angers, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Christophe Texier, Gilles Montambaux & Dominique Mailly, *Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **93**, 246804 (2004).
- Page 161 : Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion*, J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 3455–3471 (2005).
- Page 162 : Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring*, Phys. Rev. B **72**, 115327 (2005); Erratum : Phys. Rev. B **74**, 209902 (2006).
- Page 163 : Christophe Texier, *Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring*, Phys. Rev. B **76**, 153312 (2007).
- Page 164 : Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Altshuler-Aronov correction to conductivity of a large metallic square network*, Phys. Rev. B **76**, 094202 (2007).
- Page 165 : Félicien Schopfer, François Mallet, Dominique Mailly, Christophe Texier, Gilles Montambaux, Laurent Saminadayar & Christopher Bäuerle, *Dimensional crossover in quantum networks : from mesoscopic to macroscopic physics*, Phys. Rev. Lett. **98**, 026807 (2007).
- Page 166 : Meydi Ferrier, Alistair C. H. Rowe, Sophie Guéron, Hélène Bouchiat, Christophe Texier & Gilles Montambaux, *Geometrical dependence of decoherence by electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network*, Phys. Rev. Lett. **100**, 146802 (2008).
- Page 167 : Christophe Texier, Pierre Delplace & Gilles Montambaux, *Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction in metallic networks and hollow cylinders*, Phys. Rev. B **80**, 205413 (2009).

Article

C. Texier & G. Montambaux,

Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires,

Phys. Rev. Lett. **92**, 186801 (2004),

<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0312060>.

Article

M. Ferrier, L. Angers, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier,
G. Montambaux & D. Mailly,

Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network,

Phys. Rev. Lett. **93**, 246804 (2004),

<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0402534>.

Article

C. Texier & G. Montambaux,
Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion,
J. Phys. A : Math. Gen. **38**, 3455–3471 (2005),
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0411147>.

Article

C. Texier & G. Montambaux,
Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring,
Phys. Rev. B **72**, 115327 (2005),
<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0505199>.

Article

C. Texier,

Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring,

Phys. Rev. B **76**, 153312 (2007),

<http://arxiv.org/abs/0707.2916>.

Article

C. Texier & G. Montambaux,

Altshuler-Aronov correction to conductivity of a large metallic square network,

Phys. Rev. B **76**, 094202 (2007),

<http://arxiv.org/abs/0704.0741>.

Article

F. Schopfer, F. Mallet, D. Mailly, C. Texier, G. Montambaux, L. Saminadayar & C. Bäuerle,

Dimensional crossover in quantum networks : from mesoscopic to macroscopic physics,

Phys. Rev. Lett. **98**, 026807 (2007),

<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0611127>.

Article

M. Ferrier, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier & G. Montambaux,

Geometrical dependence of decoherence by electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network,

Phys. Rev. Lett. **100**, 146802 (2008),

<http://arxiv.org/abs/0707.3890>.

Article

C. Texier, P. Delplace & G. Montambaux,
*Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction
in metallic networks and hollow cylinders*,
Phys. Rev. B **80**, 205413 (2009),
<http://arxiv.org/abs/0907.3133>.

Chapitre 6

Localisation d'Anderson unidimensionnelle

Pour terminer ce mémoire je discute des travaux portant sur quelques aspects de la physique de la localisation unidimensionnelle. Bien qu'ils se démarquent quelque peu de l'ensemble qui a été présenté jusque là, nous retrouverons certains thèmes rencontrés plus haut : onde, désordre, scattering,.... Le chapitre commence par une introduction générale sur le phénomène de localisation en dimension quelconque afin de donner une vision large du domaine.

6.1 Généralités sur la localisation d'Anderson (d quelconque)

La théorie de la localisation vient de fêter ses 50 ans (l'an zéro étant fixé à 1958, année du célèbre article [39]). Suite au travail initial de P. W. Anderson, elle s'est développée dans de multiples directions, que l'on trouvera décrites dans une pléthore de livres et articles de revue illustrant la vastitude du domaine [340, 734, 721, 708, 753, 729, 713, 741, 768, 769, 732, 723, 752, 457, 727, 744, 719]. La revue la plus complète est probablement l'excellent article de Bernhard Kramer & Angus MacKinnon [726], dans lequel on trouvera d'autres références bibliographiques. Des références plus récentes sont les articles de Kramer, Ohtsuki & Kettemann [727] et de Evers & Mirlin [719] (avec accent mis sur la criticalité à la transition d'Anderson).

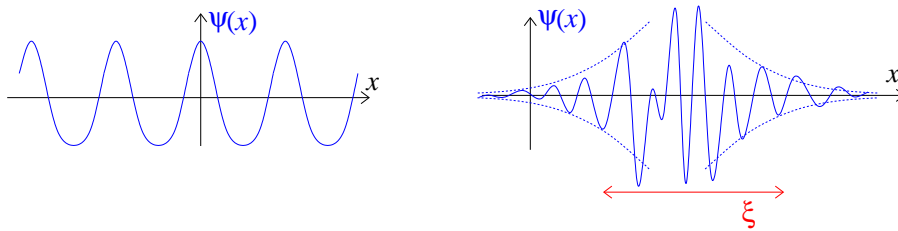


FIGURE 6.1 : À gauche : *allure d'une fonction d'onde délocalisée dans un cristal parfait*. À droite : *fonction d'onde localisée par la présence de désordre*. L'enveloppe de la fonction d'onde $\psi(x)$ décroît exponentiellement sur une échelle typique ξ , appelée *longueur de localisation*.

6.1.1 Le phénomène de localisation d'Anderson : onde et désordre

Les deux ingrédients au cœur du phénomène de localisation d'Anderson sont

- la **nature ondulatoire** du problème (onde lumineuse, onde électronique,...)
- la présence de **désordre** (gelé, i.e. sans dynamique).

Alors que la théorie des bandes de Bloch montre que les états propres du problème d'un électron soumis au potentiel périodique d'un cristal sont des ondes *délocalisées* spatialement, la présence de désordre, sous la forme d'impuretés (désordre de substitution) ou de défauts structurels, peut conduire à la *localisation spatiale* de tout ou une partie des états quantiques.

Afin de donner quelques idées plus précises, plaçons-nous dans le cadre de l'incontournable modèle d'Anderson. Considérons un modèle sur réseau avec désordre sur site, décrit par l'équation de Schrödinger

$$E \psi_r = - \sum_{r'} t_{r,r'} \psi_{r'} + V_r \psi_r, \quad (6.1)$$

où ψ_r est la composante de la fonction d'onde sur le site r . Les couplages sont choisis constants $t_{r,r'} = t$ si les sites sont voisins. Les potentiels V_r sont distribués identiquement et indépendamment avec une loi de largeur W centrée sur l'origine. Plaçons-nous de plus dans la situation tridimensionnelle ; le rôle de la dimension, crucial, sera évoqué plus bas. Supposant le cristal dans une phase métallique (ayant une conductivité finie), la phase localisée peut être atteinte de deux manières :

- Soit à désordre W fixé en diminuant l'énergie de Fermi ε_F (Mott).
- Soit à énergie de Fermi fixée en augmentant le désordre (Anderson).

Au delà d'une valeur critique du désordre, $W > W_c$, tous les états sont localisés et le système se trouve dans une phase isolante $\forall \varepsilon_F$.

- Sur un réseau cubique ($d = 3$) avec distribution des énergies de site $p(V) = \frac{1}{W} \theta(\frac{1}{2}W - |V|)$, la valeur critique du désordre est $W_c/t = 16.3 \pm 0.5$ [726].
- Si $p(V)$ est gaussienne, on obtient $W_c/t = 20.8 \pm 0.5$ [726].

Sous le seuil de localisation, $W < W_c$, on s'attend à la coexistence dans le spectre d'états localisés sur les bords de la relation de dispersion avec des états délocalisés en centre de bande (figure 6.2). L'existence d'un seuil de localisation $E = E_s$ séparant énergétiquement les états localisés et délocalisés, a été suggérée par Mott en 1968 [477]. Le **seuil de localisation** s'interprète comme le point où le libre parcours moyen élastique ¹ coïncide avec la longueur d'onde de Fermi λ_F : $\ell_e \sim \lambda_F$ (critère de Ioffe-Regel [337]).

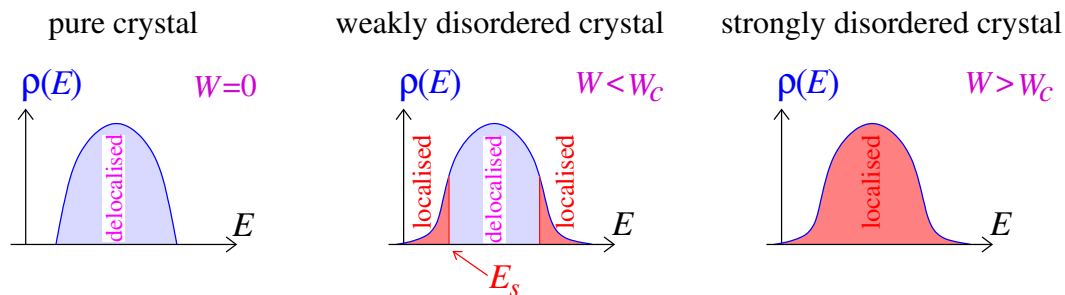


FIGURE 6.2 : Allure schématique de la densité d'états pour le modèle d'Anderson 3D. À gauche : en l'absence de désordre. Au milieu : en présence de désordre, sous le seuil de localisation complète $W < W_c$. À droite : au dessus du seuil $W > W_c$.

On peut appréhender un peu mieux les propriétés de localisation en représentant le diagramme de phase du modèle d'Anderson sur réseau cubique (figure 6.3). Notons que l'analyse

¹ le libre parcours moyen élastique a été défini dans le chapitre 4 : Eqs. (4.15,4.17).

du diagramme de phase et l'identification des phases localisée et isolante se combine à des effets de densité d'états. Si l'énergie des Fermi se trouve sur les bords de bande, dans les zones latérales du diagramme de phase, elle explore des zones de *raréfaction* d'états (DoS faible), voire d'absence complète d'états : dans ces zones, la nature des fonctions d'onde est localisée même pour un désordre W/t faible. À fort désordre W/t il y a localisation des états, même dans la région où la densité d'états est grande (partie supérieure du diagramme de phase).

La transition d'Anderson métal/isolant est une transition du second ordre [719]. On parle de *transition de phase quantique* pour désigner ce type de transition de température nulle.

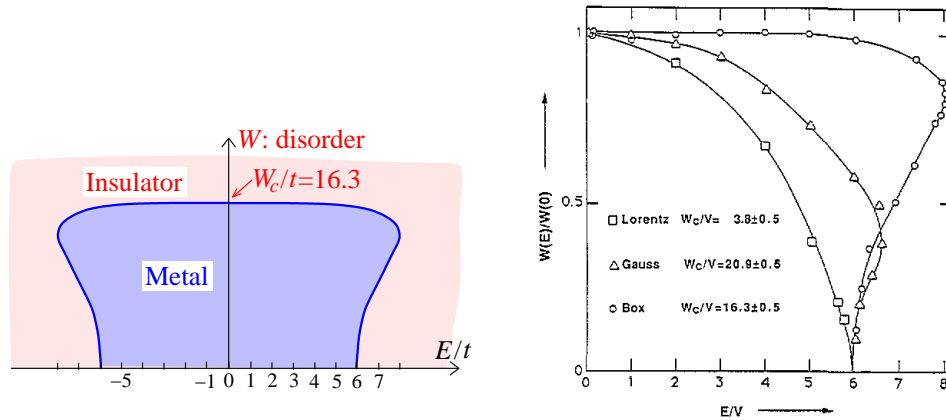


Figure 33. The phase diagram of localization, $W(E_C)$, for the Anderson model with box, Gaussian and Lorentzian distributions of site energies. Energy E is in units of V , the off-diagonal element of the Hamiltonian. $W(0) \equiv W_C$ are the critical disorders for the Anderson transition.

FIGURE 6.3 : À gauche : *Diagramme de phase pour le modèle d'Anderson 3d sur réseau cubique avec énergies sur sites distribuées selon $p(V) = \frac{1}{W}\theta(\frac{1}{2}W - |V|)$ [en l'absence de désordre la bande d'états a pour largeur $12t$, où t est le terme de saut ($\varepsilon_{\vec{k}} = -2t \sum_{\mu} \cos k_{\mu}$)]*. À droite : *Diagrammes de phase obtenus numériquement pour les distributions $p(V) = \frac{1}{W}\theta(\frac{1}{2}W - |V|)$, gaussienne et lorentzienne ; figure tirée de : Kramer & MacKinnon [726].*

En basse dimension, on peut distinguer **deux types d'états localisés** (sans que la frontière entre les deux soit nette) :

- Localisation sur des pièges de basse énergie (des états d'impuretés par exemple) ou par de hautes barrières de potentiel. C'est typiquement la nature attendue pour les états dans les bords de la densité d'états pour le modèle d'Anderson à désordre diagonal (figure 6.2).
- **La dimensionnalité du système est un paramètre crucial.** La discussion précédente s'applique à la situation tridimensionnelle. En basse dimension ($d = 1$ et $d = 2$) l'effet du désordre est renforcé et la localisation se manifeste non seulement dans la limite de fort désordre (faible ε_F ou fort W) mais aussi dans la limite de faible désordre où la particule serait classiquement délocalisée (l'allure attendue de la fonction d'onde est alors celle d'une onde plane qui serait amortie sur de grandes distances, comme il est esquissé sur la figure 6.1 ; cette image peut être justifiée rigoureusement dans la situation unidimensionnelle). Ce point illustre que la localisation d'Anderson est essentiellement un *effet d'interférences*² (quantiques, dans le cas de l'onde électronique dans un cristal) et explique

² De la diffusion d'une onde par des diffuseurs disposés aléatoirement résulte une figure d'interférence extrêmement compliquée.

pourquoi le phénomène est difficile à observer expérimentalement.³

Sur la figure 6.4, on peut voir deux états du modèle d'Anderson 1D illustrant cette remarque.

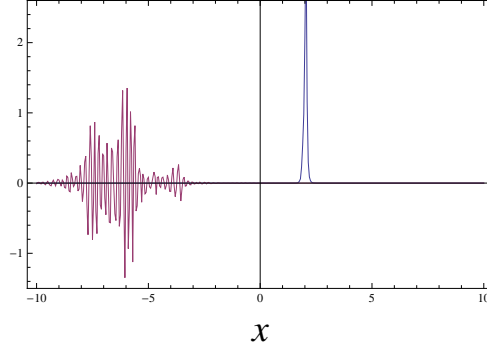


FIGURE 6.4 : *The ground state and some high energy states of the 1D Anderson model with Gaussian random potentials for $W/t = 0.79$.*

6.1.2 Critères de localisation

Plusieurs approches sont possibles afin d'identifier un isolant d'Anderson.

Self-energy distribution.— Following ideas introduced by Anderson [39], Abou-Chacra, Anderson and Thouless [2] proposed to analyse the distribution of the self-energy. Consider a lattice with random potentials V_r and random hoppings. The self energy at the site r is defined by

$$\langle r | \hat{G}(E) | r \rangle = \frac{1}{E - V_r - \Sigma_r(E)} \quad (6.2)$$

where $\hat{G}(E) = 1/(E - \hat{H})$. Introducing a small imaginary part in E we expect :

$$\begin{aligned} \text{Im } \Sigma_r(E) &\xrightarrow{\text{Im } E \rightarrow 0} \text{Cste} && \text{for extended states} \\ \text{Im } \Sigma_r(E) &\xrightarrow{\text{Im } E \rightarrow 0} 0 && \text{for localised states} \end{aligned}$$

Note that this picture has been used in the recent works on many-body localisation (see the review [64]).

Absolute continuous vs pure point spectrum.— Une définition de la localisation d'Anderson populaire dans la communauté mathématique consiste en une analyse fine de la nature du spectre : soit absolument continu dans la phase délocalisée, soit purement ponctuel dans la phase localisée [288]. Pour avoir une intuition de ces notions, considérons la densité d'états locale $\rho(r; E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_n |\varphi_n(r)|^2 \delta(E - E_n)$ d'un système de volume très grand, voire infini. Le spectre est dense (l'écart moyen entre niveau est infiniment petit $\Delta \propto 1/\rho(E) \propto 1/\text{Vol}$) et l'analyse de la densité d'états totale $\rho(E) = \int_{\text{Vol}} dr \rho(r; E)$ dans la limite thermodynamique $\text{Vol} \rightarrow \infty$ ne révèle pas la nature des états. Intégrons la densité d'états locale dans un domaine \mathcal{D} de taille finie $\nu_{\mathcal{D}}(E) = \int_{\mathcal{D}} dr \rho(r; E)$.

Dans la phase délocalisée, les fonctions d'onde sont étendues et tous les états contribuent à $\nu_{\mathcal{D}}(E)$ et donc, quelle que soit la taille du domaine, nous attendons une fonction continue

³L'observation requiert que le système reste *cohérent de phase*, i.e. que les interactions avec d'autres degrés de liberté soient suffisamment faibles, Cf. chapitre 5 et les discussions sur L_{φ} .

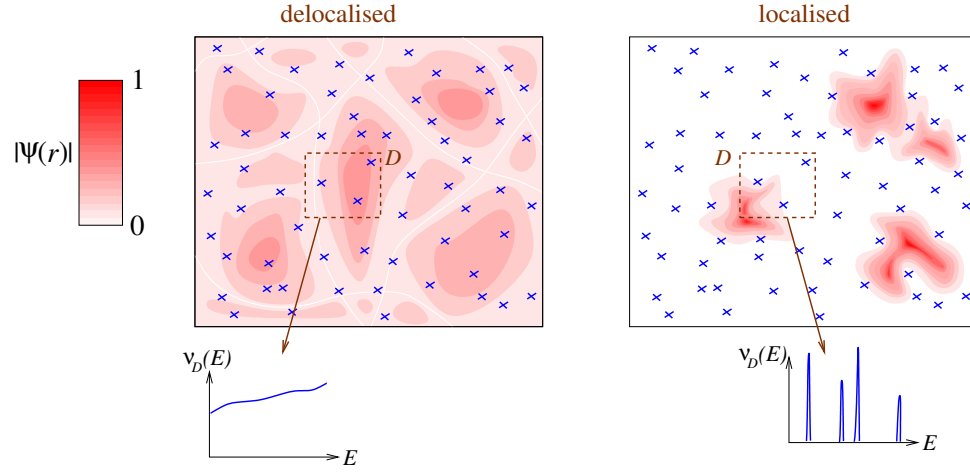


FIGURE 6.5 : **Absolute continuous vs pure point spectrum.** Expected form of the LDoS integrated in a small volume $\nu_{\mathcal{D}}(E) = \int_{\mathcal{D}} dr \rho(r; E)$ when $\text{Vol} \rightarrow \infty$.

de l'énergie E : le spectre est dit « *absolute continuous* ». En revanche dans la phase localisée, $\nu_{\mathcal{D}}(E)$ ne retient que les contributions des fonctions localisées dans le domaine et prend la forme d'une somme de quelques pics $\delta(E - E_n)$ (en d'autant plus petit nombre que le domaine est petit) ; le spectre est dit « *pure point* ».

Critère de Thouless.— Thouless a suggéré de sonder la *sensibilité aux conditions aux limites* (cf. sa revue [734]). Par exemple on impose des conditions aux limites du type $\psi(L) = \psi(0) e^{i\eta}$, avec généralisation évidente en dimension d , ce qui s'interprète comme l'introduction d'un flux magnétique à travers une boucle. Dans la phase localisée, on obtient des grandeurs physiques indépendantes de η alors qu'elles en dépendent dans la phase délocalisée (nous verrons un exemple d'application plus bas, dans l'étude de la sensibilité de la densité d'états moyenne du modèle supersymétrique 1D, [639]).

Conductivité et diffusion.— Un critère naturel permettant de caractériser le régime de transport (localisé/conducteur) est l'analyse de la conductivité $\sigma(\omega)$ ou de la constante de diffusion, reliées par la relation d'Einstein $\sigma = e^2 \nu_d D$. Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, l'approche requiert l'analyse de produit de fonctions de Green $G^R(r, r'; \varepsilon_F + \omega) G^A(r', r; \varepsilon_F)$, qui peut être étudié soit par l'approche diagrammatique (chapitres 4 et 5)⁴ soit par les méthodes fonctionnelles et de théorie des champs [752].

Transmission à travers une région de taille finie et matrices de transfert.— L'approche de Landauer relie la conductance d'un échantillon cohérent de phase aux amplitudes de transmission d'un bord à l'autre. L'étude de la conductance d'un fil désordonné en fonction de sa taille permet donc de caractériser le régime de transport :

- Balistique : g est indépendant de la longueur L .
- Diffusif : g décroît linéairement avec la longueur (Drude) $g \propto 1/L$.
- Localisé : g décroît exponentiellement avec L :

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{-1}{2L} \langle \ln g \rangle = 1/\tilde{\xi} \quad \text{ou} \quad \langle g \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \exp[-2L/\xi]. \quad (6.3)$$

⁴ mentionnons également l'approche auto-cohérente de Vollhardt et Wölfle [672].

En remarquant que la conductance peut être reliée à la fonction de Green par la formule de Fisher & Lee [250] –cf. chapitre 1, Eqs. (1.36)–, nous voyons que ces deux définitions de la longueur de localisation peuvent être présentées sous la forme :

$$1/\tilde{\xi}_E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|\vec{r}-\vec{r}'\| \rightarrow \infty} \frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \langle \ln |G^R(\vec{r}, \vec{r}'; E)| \rangle \quad (6.4)$$

et

$$1/\xi_E \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\|\vec{r}-\vec{r}'\| \rightarrow \infty} \frac{-1}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|} \ln \langle |G^R(\vec{r}, \vec{r}'; E)| \rangle \quad (6.5)$$

La relation avec les définitions précédentes, Éqs. (6.3), est établie en écrivant que \vec{r} et \vec{r}' sont deux points aux extrémités de la barre désordonnée. Dans les travaux numériques la longueur de localisation est extraite de la conductance d'une barre de longueur finie, ou plutôt de la fonction de Green [427, 726], i.e. à partir de la définition (6.4). En général $\tilde{\xi}_E$ et ξ_E ne coïncident pas.⁵

Le critère de la théorie d'échelle.– L'approche numérique dans le cadre de la théorie d'échelle procède d'une analyse de la conductance d'une tranche désordonnée et analyse ses propriétés de scaling (figures 6.12 et 6.14) [726]. La définition de la phase localisée par la théorie d'échelle est la suivante : considérons *l'expérience de pensée* où l'on étudie la conductance $g(L)$ d'un volume hypercubique de taille L^d , par lequel on injecte et on collecte le courant à travers deux faces opposées (Fig. 6.6).

- Le comportement $g(L) \nearrow$ pour $L \nearrow$ signale une phase *métallique*.
- Le comportement $g(L) \searrow$ pour $L \nearrow$ correspond à la phase *isolante d'Anderson*.

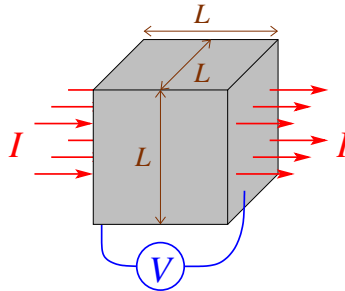


FIGURE 6.6 : **The scaling theory's gedankenexperiment.** One considers the dimensionless conductance $g(L) = \frac{h}{2s e^2} I/V$ of a cubic piece of material.

Analyse de la transition d'Anderson.– Ces deux dernières décennies, l'intérêt pour le phénomène de localisation d'Anderson s'est significativement déplacé vers l'étude des *transitions d'Anderson*, i.e. des transitions de phase quantiques entre phases localisée et métallique (cf. les revues de Mirlin [457, 719]). Notamment la caractérisation des exposants critiques [682, 594, 591, 726, 90], les propriétés de multifractalité des fonctions d'onde [457, 719], ou encore l'analyse des statistiques spectrales (distribution des écarts entre niveaux) [36, 598, 381, 98, 47, 719]. Cette question a été très débattue dans le contexte de l'effet Hall quantique entier où la transition entre plateaux de Hall pour la conductivité Hall s'accompagne d'une transition d'Anderson [150, 419, 723, 727, 719].

⁵ Par exemple dans le modèle DMPK évoqué plus bas, décrivant le transport dans un fil quasi-1D faiblement désordonné, ces deux longueurs diffèrent d'un facteur 4 : $\xi_E = 4\tilde{\xi}_E$ [707] (cf. footnote n°7 p. 177). Dans le modèle supersymétrique désordonné unidimensionnel (cf. fin du § < Type B : Hamiltonien de Dirac désordonné », p. 202), c'est même les dépendances en énergie de ces deux longueurs qui diffèrent et $\xi_E \gg \tilde{\xi}_E$, éq. (6.131).

Multifractal analysis : multifractal spectrum and large deviations.— The particular nature of the wavefunctions at an Anderson transition, characterised by strong fluctuations, was recognised by Wegner [680]. At a critical point some nontrivial scaling properties are expected,

$$|\psi_r|^2 \sim L^{-\alpha} \quad (6.6)$$

where L is the size of the system. The statistical properties of the wave function are conveniently analysed in terms of the scaling exponent α , which is thus a random quantity. For this purpose, one introduces the inverse participation ratios (IPR) $I_q \stackrel{\text{def}}{=} \sum_r |\psi_r|^{2q}$, which corresponds to a *spatial* average of the wave function. Its ensemble average is controlled by the scaling exponent $\tau(q)$:

$$\langle I_q \rangle = \sum_{r \in \text{Vol. } L^d} \langle |\psi_r|^{2q} \rangle = L^d \langle |\psi_r|^{2q} \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} L^{-\tau(q)}, \quad (6.7)$$

with obviously $\tau(0) = -d$ and $\tau(1) = 0$. One may also introduce the fractal dimension $D(q) = \tau(q)/(q-1)$, with $D(0) = d$ indeed coinciding with the dimension of space.

In the metallic phase, wave functions are delocalised, therefore we expect the scaling $|\psi_r| \sim L^{-d/2}$ and a linear behaviour for $\tau(q)$. In the insulating phase the wave function is localised on a finite length (the localisation length ξ), hence $|\psi_r| \sim \xi^{-d/2}$ inside a volume ξ^d , what makes I_q size independent. In summary :

$$\tau(q) = d(q-1) \quad \text{for a metal} \quad (6.8)$$

$$\tau(q) = 0 \quad \text{for an insulator} \quad (6.9)$$

On the contrary a non trivial behaviour is expected at a critical point (Anderson transition), where $\tau(q)$ exhibits a non linear behaviour. For such a situation cf. for example the Monthus & Garel's recent article [471] or the review by Evers & Mirlin [719] for an exhaustive discussion. In order to measure the deviation from the metallic exponent, it is convenient to introduce the anomalous exponent $\Delta(q) = \tau(q) - d(q-1)$. It also controls the scaling of the local density of states [461]

$$\langle [\rho(r; E)]^q \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} L^{-\Delta(q)}. \quad (6.10)$$

The scaling exponent $\tau(q)$ has a clear statistical interpretation : it coincides with the generating function of the cumulants of $\ln |\psi_r|$. We may rewrite (6.7) as

$$w(q) \stackrel{\text{def}}{=} \ln \left\langle e^{-q \ln(1/|\psi_r|^2)} \right\rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} -\check{\tau}(q) \ln L \quad \text{where } \check{\tau}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \tau(q) + d. \quad (6.11)$$

In other terms, the cumulants are given by derivatives of $\tau(q)$ at $q = 0$:

$$\langle [\ln(|\psi_r|^2)]^n \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} -\tau^{(n)}(0) \ln L. \quad (6.12)$$

An inverse Laplace transform leads to the distribution : we see on Eq. (6.6) that it is natural to consider the random exponent

$$\alpha = \frac{\ln(1/|\psi_r|^2)}{\ln L}, \quad (6.13)$$

whose distribution is given by

$$\mathcal{P}_L(\alpha) = \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dq}{2i\pi} L^{q\alpha} e^{w(q)} \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{dq}{2i\pi} e^{[q\alpha - \check{\tau}(q)] \ln L} \quad (6.14)$$

The large L limit of such an integral is usually given by the steepest descent method, leading to the behaviour

$$\boxed{\mathcal{P}_L(\alpha) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left\{ -\ln L \check{f}(\alpha) \right\}} \quad \text{where} \quad \begin{cases} \check{f}(\alpha) = q_* \alpha - \check{\tau}(q_*) \\ \check{\tau}'(q_*) = \alpha \end{cases} \quad (6.15)$$

where q_* is the saddle point. $\check{f}(\alpha)$ is the **large deviation function**, related to the exponent $\check{\tau}(q)$ by a the Legendre transform. It is conventional to rather deal with the **multifractal spectrum** $f(\alpha) = \check{f}(\alpha) + d = q_* \alpha - \tau(q_*)$, which has therefore also the interpretation of a large deviation function. The distribution rewrites :

$$\mathcal{P}_L(\alpha) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} L^{d-f(\alpha)} \quad \text{where} \quad \begin{cases} f(\alpha) = q_* \alpha - \tau(q_*) \\ \tau'(q_*) = \alpha \end{cases} \quad (6.16)$$

We understand from this analysis that $V_\alpha = L^d \mathcal{P}_L(\alpha)$ is the volume where the wave function is characterised by the fractal exponent α , hence the terminology « multifractal spectrum » .

As a simple illustration, consider the parabolic behaviour $\tau(q) = -d + \alpha_0 q - (\alpha_0 - d) q^2$ related to the anomalous exponent $\Delta(q) = (\alpha_0 - d) q(1 - q)$; the coefficient of the quadratic term is constrained by $\tau(1) = 0$, with the variance $\propto (\alpha_0 - d) > 0$. We get $\alpha_0 - 2(\alpha_0 - d)q_* = \alpha$, hence the Gaussian distribution $f(\alpha) = d - \frac{1}{4(\alpha_0 - d)}(\alpha - \alpha_0)^2$. Two examples of such parabolic spectra are : (i) Evers, Mildenberger & Mirlin [227] have obtained a quadratic spectrum for the Chalker-Coddington model, with $\alpha_0 = 2.262 \pm 0.003$. Their numerical calculation of the exactly parabolic spectrum supported some conjecture of Zirnbauer for the description of the IQHE transition by a conformal field theory. (ii) Markos & Schweitzer [438] studied another bidimensional model leading to a parabolic spectrum with $\alpha_0 = 2.107 \pm 0.005$: the Ando model describing the GSE symmetry class (cf. footnote n° 27 p. 188).

It was pointed out by Mirlin *et al* [461] that the multifractal spectrum characterizing the Anderson transition has some symmetry property :

$$f(2d - \alpha) = f(\alpha) + d - \alpha, \quad (6.17)$$

which relates the large fluctuations of the wave function $|\psi_r| \rightarrow \infty$ ($\alpha \rightarrow -\infty$) to the small fluctuations $|\psi_r| \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow +\infty$). This relation rewrites more simply in terms of the anomalous dimensions $\Delta(q) = \Delta(1 - q)$, and expresses the symmetry of the LDoS distribution $P(\rho) = \rho^{-3} P(1/\rho)$. Interestingly, some statistical interpretation of the relation was recently discussed by Monthus, Berche and Chatelain [468], who showed its connection with the Gallavotti-Cohen fluctuation relation.

6.1.3 Des variations intéressantes

Afin d'illustrer la richesse des problématiques liées à la présence du désordre, mentionnons quelques variantes du modèle d'Anderson. Certaines correspondent à des domaines en soi. Les références viennent illustrer les différents points, mais sont loin d'être exhaustives.

Désordre diagonal avec grandes fluctuations.— Des énergies de site V_r distribuées avec une loi large (loi de puissance) [416, 726, 201, 653, 92, 83].

Un désordre corrélé à grande distance.— Le cas où les énergies de sites sont corrélées, $\langle V_r V_{r'} \rangle_c = C(|r - r'|)$, a été étudié dans plusieurs articles.⁶ En particulier l'effet des corrélations à longue portée du potentiel ($C(r)$ décroissant lentement, ou ne décroissant pas) donne lieu à des effets de localisation non standard comme des phénomènes de sous-localisation ou de superlocalisation [177, 183, 114, 551, 417, 274, 338]. Mentionnons l'article de Boosé & Luck [92] dont le formalisme donne une vue d'ensemble sur les phénomènes de sous-localisation ou de

⁶ Notons que loin d'être un problème académique, le problème d'un désordre corrélé a trouvé une réalisation dans le contexte de la localisation des atomes froids [84]. Ces derniers sont soumis à un potentiel proportionnel à l'intensité lumineuse d'une figure de tavelure. Celle-ci possède des corrélations spatiales en $\langle V(x)V(0) \rangle \propto \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$ [743, 744, 561].

super-localisation pour des potentiels corrélés à grande ou courte distance avec ou non large fluctuations.

Désordre non diagonal.— Un désordre de lien (i.e. des $t_{r,r'}$ aléatoires). Dans le cas où les V_r sont nuls et les couplages sont aléatoires, le problème possède une symétrie particule-trou pouvant induire un point en délocalisation en centre de bande (à $E = 0$). Le cas des sauts aléatoires entre plus proches voisins $t_{r,r'}$ a été considéré dans la situation unidimensionnelle (par exemple dans [647, 220, 697]), quasi unidimensionnelle [478, 109, 479, 107, 110, 112, 111] ou bidimensionnelle et tridimensionnelle (par exemple [419, 226]).

PRBM (Power law Random Band Matrices).— Un modèle avec désordre de lien qui a joué un rôle important pour analyser la transition d'Anderson est le modèle PRBM [460, 228, 458, 666, 719]. Le modèle peut être vu comme un problème unidimensionnel avec sauts entre sites éloignés décrits par des termes de saut aléatoires dont l'amplitude décroît en loi de puissance avec la distance : $\langle t_{r,r'} \rangle = 0$ et $\langle |t_{r,r'}|^2 \rangle \propto |r - r'|^{-2\eta}$. C'est un modèle jouet permettant d'étudier la transition d'Anderson qui se produit pour la valeur critique de l'exposant $\eta = 1$.

Modèles multicanaux, matrices de transfert et matrices aléatoires.— Une théorie des matrices aléatoires, dite DMPK [204, 451, 205, 707], a été développée permettant d'obtenir des résultats analytiques. L'idée consiste à découper l'échantillon en "tranches" chacune décrite par une matrice de scattering distribuée selon un des ensembles des matrices aléatoires COE, CUE ou CSE. L'équivalence avec les méthodes diagrammatiques (pour le régime diffusif) et de théorie des champs (pour les régimes diffusifs et fortement localisés) a été établie [104].⁷ Dans la théorie DMPK, l'hypothèse d'entropie maximale pour la matrice \mathcal{S} de chaque tranche, i.e. la redistribution équiprobable parmi tous les canaux de conduction, correspond à une hypothèse de faible désordre $k_F \ell_e \gg 1$. Elle permet d'obtenir une équation de Fokker-Planck pour les valeurs propres de la matrice de transmission T_n (on peut ainsi déduire les propriétés statistiques des grandeurs physiques s'exprimant simplement en fonction des T_n : conductance, bruit de grenaille,...) [707].⁸

Mello & Tomsovic [453], Chalker [149] puis Muttalib et ses collaborateurs [482, 481, 208, 209] ont avancé des propositions afin de relâcher la contrainte d'isotropie et ont formulé une théorie

⁷ Bien que Frahm & Brouwer semblent avoir établi l'équivalence entre les deux approches dans cet article, Mirlin signale de petites différences dans son article [457], par exemple sur les deux premiers moments de la conductance : le modèle σ non linéaire donne $\langle g \rangle \sim (\tilde{\xi}/L)^{3/2} e^{-L/(2\tilde{\xi})}$, où $\tilde{\xi} \sim \beta N_c \ell_e$ est la longueur de localisation et $\beta \in \{1, 2, 4\}$ est l'index de Dyson. La théorie DMPK donne $\langle g \rangle \sim (\tilde{\xi}/L)^{1/2} e^{-L/(2\tilde{\xi})}$ (en utilisant la distribution des probabilités de transmission des modes propres de transmission donnée dans [707, 457] et rappelée dans la note 8).

⁸ Pour étudier la limite localisée, il est commode de paramétrer les probabilités de transmission selon $T_n = \cosh^{-2} x_n$. Dans la limite $L \rightarrow \infty$ les variables x_n se découplent et l'on obtient [707]

$$P(\{x_n\}; L) \simeq \left(\frac{\tilde{\ell}}{2\pi L}\right)^{N_c/2} \prod_{n=1}^{N_c} \exp\left\{-\frac{\tilde{\ell}}{2L}\left(x_n - \frac{L}{\tilde{\ell}}[1 + \beta(n-1)]\right)^2\right\} \quad \text{où } \tilde{\ell} = \alpha_d[2 + \beta(N_c - 1)]\ell_e \quad (6.18)$$

(la constante α_d a été définie dans les chapitres précédents, éq. (1.17) du § page 16). Les variables x_n fournissent le spectre des exposants de Lyapunov $\gamma_n \stackrel{\text{def}}{=} -\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{2L} \ln T_n = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{x_n}{L}$. Le spectre d'exposants de Lyapunov est donc linéaire dans le modèle DMPK

$$\gamma_n = \frac{1}{\alpha_d \ell_e} \frac{1 + \beta(n-1)}{2 + \beta(N_c - 1)} \quad \text{avec } n = 1, \dots, N_c. \quad (6.19)$$

Le plus petit des exposants de Lyapunov nous donne la longueur de localisation $\tilde{\xi} = 1/\gamma_1 \sim \beta N_c \ell_e$. Nous voyons que dans le cas strictement 1D longueur de localisation et libre parcours moyen élastique sont reliés par $\tilde{\xi} = 4\ell_e$ (dans une limite de faible désordre).

DMPK généralisée décrivant le régime de fort désordre.

Localisation in trees.— The study of statistical physics on trees offer the possibility to escape from the strictly one-dimensional situation, keeping the advantage of solvability due to the absence of loops. The study of Anderson localisation on trees was pioneered by Abou-Chakra, Anderson and Thouless [2, 3], who showed the existence of a mobility edge. It has been studied later by other authors [385, 386, 152, 459, 189] (for a recent reference, cf. the article by Monthus & Garel [470]). The result on a tree may be seen as a mean field approximation of the localisation problem, whose upper critical dimension is infinite [719].

Effet de la topologie du réseau.— Même si elle est régulière, la topologie du réseau peut induire des effets de localisation (déjà sans désordre [620]) résistant au désordre en présence d'un champ magnétique [669, 668] (effet de cage AB, cf. chapitre 2).

Un désordre structurel.— Des travaux sur le spectre de réseaux aléatoires : Biroli & Monasson [85].

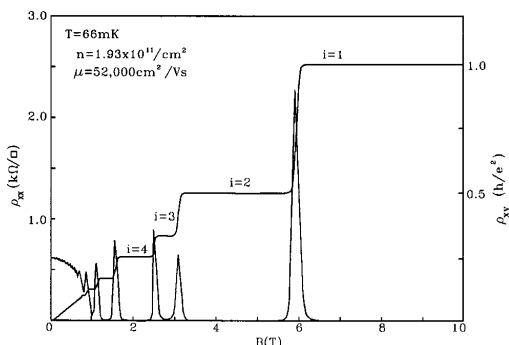


FIG. 2. ρ_{xx} and ρ_{xy} of a relatively low-mobility 2DEG in GaAs/Al_{1-x}Ga_xAs. The plateaus in ρ_{xy} are quantized in the natural conductance unit e^2/h with integer quantum numbers $i=1, 2, \dots$. Data taken by H. P. Wei.

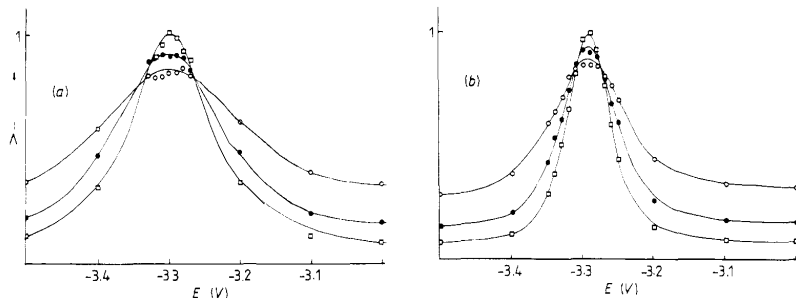


Figure 8. The renormalised exponential decay length $\Lambda = \lambda_M/M$ of the transmission coefficient through a system in cylinder geometry as a function of the energy E in units of V in the region of the lowest magnetic sub-band. Disorder parameters are $W = 1.0V$ (a) and $0.5V$ (b). The width of the system corresponds to $M = 4$ (\circ), 8 (\bullet) and 16 (\blacksquare).

FIGURE 6.7 : Top : Longitudinal and Hall resistivity of a 2DEG. Taken from : Tsui [735]. Anderson transition occurs between Hall plateaux. Bottom : Renormalised Lyapunov exponent $\Lambda = \lambda_M/M$ (inverse localisation length) for different stripes of width M (for periodic boundary condition) submitted to a magnetic field, against energy. The intersecting points correspond to the two mobility edges of the Landau band and separate the delocalised states (band center) from the localised ones (band edges). From : Schweitzer, Kramer & MacKinnon [582].

Désordre scalaire en présence de champ magnétique.— (la physique des effets Hall quantiques entier [739] et fractionnaire ⁹ [728, 733, 735] s'inscrit dans ce contexte) [42, 46, 681, 99, 387, 704, 428, 726, 198, 406]. L'introduction d'un fort champ magnétique en présence de désordre induit une transition d'Anderson en $d = 2$ (σ_{xx} est finie lorsque ε_F coïncide avec le centre d'un niveau de Landau ; l'existence d'une bande d'états délocalisés en centre de bande a été vérifiée numériquement [582], *cf.* figure 6.7 ; le point remarquable est que, bien que le nombre d'états délocalisés varie avec le désordre, la contribution à σ_{xy} d'une bande de Landau reste e^2/h). Des références générales sont les ouvrages de Prange & Girvin [774] ou de Janßen *et al* [763] ou les articles de revue (plutôt centrés sur les approches numériques) Kramer & McKinnon [726], Huckenstein [723] et Kramer, Ohtsuki & Kettmann [727].

Champ de jauge désordonné.— Le cas d'un champ magnétique désordonné a été considéré [363, 278, 419, 197, 199]. Les propriétés de multifractalité du mode zéro pour un champ de jauge non abélien ont été étudiées dans [147]. L'intérêt pour ce problème a été renouvelé dans le cadre de la physique du graphène : dans ce cas les ondulations de la feuille de graphène (ripples) sont responsables du champ de jauge (*cf.* la revue de Vozmediano *et al* [740]).

Des degrés de liberté supplémentaires, de spin par exemple [48, 49], symétrie particule-trou dans une phase supraconductrice désordonnée [107, 111, 91, 779], symétrie chirale (dans un réseau bipartite) [226, 90] (*cf.* les revues [727, 719]).

Modèle de réseau de Chalker–Coddington.— Une approche ayant joué un rôle important pour décrire la transition de l'effet Hall, est celle introduite par Chalker & Coddington [150].

Au lieu de considérer un modèle discret sur réseau comme dans la Ref. [582] (en discrétisant l'équation de Schrödinger par exemple), le modèle de Chalker & Coddington décrit la transition comme un phénomène de percolation de trajectoires cyclotroniques piégées autour des minima ou des maxima du potentiel. Afin de décrire le passage de l'électron au voisinage d'un point col, on introduit une matrice \mathcal{S} , reliant les amplitudes entrantes aux amplitudes sortantes, choisie de la forme (Fig. 6.8) :

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} e^{-i\varphi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r & t \\ t & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi_3} \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

où les phases sont choisies aléatoirement. Pour mener les calculs, il est également commode d'introduire la matrice de transfert \mathcal{T} reliant les amplitudes gauches aux amplitudes droites (Fig. 6.8) :

$$\begin{pmatrix} \psi_4 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \mathcal{T} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi_4} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_2} \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

avec $t = 1/\cosh \theta$ et $r = \tanh \theta$. Le cas $t = 0$ ($\theta = \infty$) correspond à une énergie inférieure à l'énergie du col, i.e. décrit la trajectoire dans un puits de potentiel (trajectoires $-$ en vert), alors que $t = 1$ ($\theta = 0$) décrit une énergie supérieure à l'énergie du col (trajectoires $+$ en bleu pâle). Le paramètre θ permet donc de passer la transition où les orbites sont percolantes. Le choix de l'énergie du point col correspond à $t_c = 1/\sqrt{2}$ i.e. $\theta_c = \ln(\sqrt{2} + 1)$. On pourra trouver une justification microscopique détaillée du modèle de Chalker-Coddington dans la Réf. [727]. ¹⁰

⁹ Alors que l'interaction entre électrons apparaît secondaire dans la physique de l'effet Hall quantique *entier*, l'interaction coulombienne joue un rôle central dans l'effet Hall quantique fractionnaire pour expliquer les gaps supplémentaires dans le spectre et les plateaux correspondants aux facteurs de remplissage fractionnaires.

¹⁰ En particulier y est discutée la relation entre le paramètre phénoménologique θ du modèle de Chalker-Coddington décrivant le scattering au vertex, et les paramètres microscopiques (notamment le facteur de remplissage).

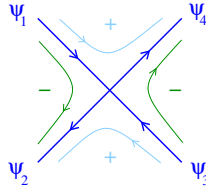


FIGURE 6.8 : **Chalker-Coddington model.** *The Chalker-Coddington model considers a regular network with vertices of this type describing the transmission of an electron through the saddle points of the random potential.*

Le modèle n'est pas un pur modèle de percolation des orbites cyclotroniques dérivant sur des équipotentielles : il est formulé en termes de matrices de scattering, ce qui inclut l'effet du tunneling aux points col. Kramer, Ohtsuki & Kettmann [727] utilisent cette image pour donner une interprétation physique de l'exposant critique de la transition de Hall l'exposant contrôlant la longueur de localisation $\xi(E) \propto |E - E_s|^{-\nu}$. L'exposant $\nu_{\text{QHE}} \simeq 7/3 = 4/3 + 1$ se décompose en une partie venant de la percolation ($\nu_{\text{perc}} = 4/3$, [554]) et une partie venant du tunneling.

Cette approche fructueuse a été suivie pour étudier d'autres classes de symétrie. Ces aspects sont décrits dans la revue de Kramer, Ohtsuki & Kettmann [727].

Les symétries des systèmes désordonnés

La classification des classes de symétries pour les systèmes chaotiques ou désordonnés, proposée par Dyson, a été complétée seulement récemment par Zirnbauer [698, 16], en établissant des relations entre théories de matrices aléatoires (décrivant les systèmes chaotiques et les systèmes désordonnés dans le régime ergodique), modèle σ non linéaire et classification de Cartan des espaces symétriques. Cette classification a conduit à la découverte de nouveaux effets Hall (comme l'effet Hall quantique de spin pour le transport de spin ou l'effet Hall quantique thermique pour le transport d'énergie [587, 588, 480, 601, 355, 719]).

	RMT	Cartan	TRS	SRS	Physical realization
Wigner-Dyson	GOE	AI	yes	yes	metallic QD
	GUE	A	no	indifferent	QD with $\mathcal{B} \gg \phi_0/\text{Surf}$
	GSE	AII	yes	no	QD with $L_{\text{so}} \ll \text{size}$
Chiral classes	ch-GOE	BDI	yes	yes	
	ch-GUE	AIII	no	indifferent	
	ch-GSE	CII	yes	no	
BdG classes		CI	yes	yes	superconducting QD
		C	no	yes	
		DIII	yes	no	
		BD	no	no	

TABLE 6.1 : *Classification des systèmes désordonnés à l'aide de leurs symétries. Les trois classes de Wigner-Dyson sont complétées par trois classes chirales et quatre classes de Bogoliubov-de Gennes (BdG). TRS=“time reversal symmetry” & SRS=“spin rotation symmetry”. Tableau tiré de [719].*

Le tableau dresse la liste des différentes classes de symétrie. Ces nouvelles classes de symétrie sont liées à l'existence de symétries discrètes, ce qui trouve des réalisations dans le cadre de l'étude de l'équation de Dirac en présence de désordre (cf. [78] notamment). Nous ferons plus loin une petite revue des contextes physiques (essentiellement en matière condensée) dans lesquels ce problème est pertinent. En présence d'un degré de liberté interne (un pseudo-spin noté $\vec{\sigma}$ ici)

le désordre peut (ou non) préserver des symétries discrètes. On peut distinguer une symétrie chirale :

$$\sigma_z \mathcal{H} \sigma_z = -\mathcal{H} \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & Q^\dagger \\ Q & 0 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

et une symétrie propre aux hamiltoniens de type Bogoliubov-de Gennes décrivant les excitations dans les supraconducteurs

$$\sigma_x \mathcal{H}^T \sigma_x = -\mathcal{H} \quad \text{i.e.} \quad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} H & \Delta \\ -\Delta^* & -H^T \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H = H^\dagger \\ \Delta = -\Delta^T \end{cases} \quad (6.23)$$

Désordre et interaction

Une compréhension approfondie des rôles conjoints du désordre et de l'interaction est un des problèmes centraux de la matière condensée, dont certains aspects ne sont pas encore parfaitement élucidés aujourd'hui, après plusieurs décennies.

A. Localisation de bosons en interaction.— L'étude de la localisation d'un condensat de bosons a été étudiée par Ma, Halperin et Lee [425]. Fisher, Weichman, Grinstein et Fisher [252] ont étudié la compétition entre interaction, corrélations quantiques et désordre dans le cadre du modèle de Hubbard. Le diagramme de phase présente des transitions entre trois phases : une phase superfluide (SF) dominée par l'effet des corrélations quantiques, une phase isolante de Mott (MI) dominée par l'interaction, et une phase dite « verre de Bose » (Bose glass) dominée par le désordre.

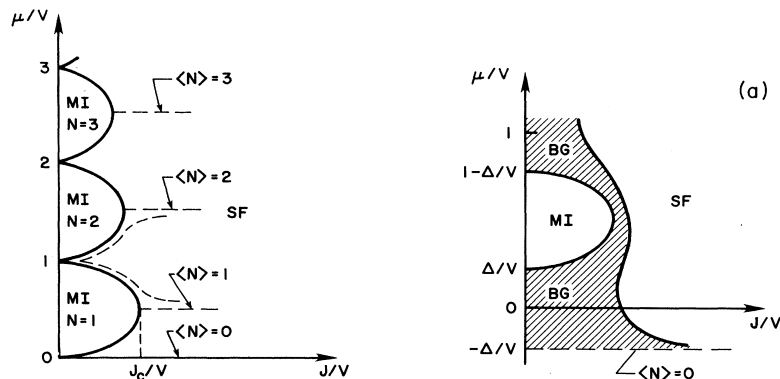


FIGURE 6.9 : **Phase diagram of interaction bosons in the presence of disorder** (Mott-Hubbard model). Left : *In the absence of disorder.*— Transition between a Mott insulator (MI) and a superfluid (SF). Right : *With disorder.*— an intermediate Bose glass (BG) phase is expected. From : Fisher, Weichman, Grinstein & Fisher [252]. V is the hopping, J the interaction, Δ the disorder strength and μ the chemical potential.

Le scénario proposé par Fisher *et al* dans le cadre d'une analyse par le groupe de renormalisation a été confirmé numériquement [533, 305] : il n'y a pas de transition directe entre les phases MI et SF qui sont séparées par la phase isolante compressible BG (figure 6.10).

Cette dernière décennie, l'étude du désordre a été stimulée par d'importants progrès expérimentaux dans le contexte des atomes froids et des condensats de Bose-Einstein, ayant permis la réalisation de pièges, de contrôler la force et les corrélations du potentiel désordonné et même l'interaction entre particules (par le mécanisme de résonance de Feshbach). Mentionnons la très belle observation de la localisation unidimensionnelle par l'équipe de l'Institut d'Optique d'Orsay [84] (figure 6.19). Une approche théorique pour décrire ces systèmes considère l'interaction dans

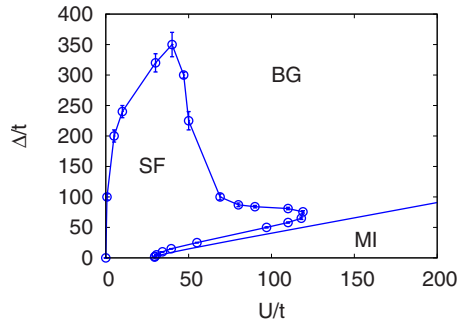


FIGURE 6.10 : Phase diagram of the Bose-Hubbard model with disorder obtained by a finite size scaling analysis with Quantum Monte Carlo simulations. Δ is the disorder strength and U the interaction. From Gurarie et al [305].

un premier temps, via l'équation de Gross-Pitaeski pour une description champ moyen, puis le désordre [521], ce qui établit des relations avec la question de la localisation des ondes non linéaires.

B. Fermions en interaction en présence de désordre.— Dans un gaz de Fermi dégénéré, la force de l'interaction coulombienne est mesurée à l'aide du facteur adimensionné $r_s \propto \frac{m_e e^2}{\hbar^2 n^{1/d}}$, qui mesure, *en l'absence de désordre*, le rapport de l'énergie d'interaction et de l'énergie cinétique, $r_s \propto E_{\text{Coul}}/E_c$. La limite de faible interaction, $r_s \rightarrow 0$, est donc atteinte pour les hautes densités, $n \rightarrow \infty$.

Cas strictement unidimensionnel.— L'étude de rôle conjoint du désordre et des interactions dans la situation *strictement* unidimensionnelle a suscité une très grande quantité de travaux. Dans le cas 1D l'effet des interactions est maximal : la théorie des liquides de Fermi n'est plus valable et la nature des excitations élémentaires est changée (voir par exemple [757]). L'analyse du désordre dans cette situation a été abordée dans [282, 267, 443, 353]. Des progrès plus récents ont été réalisés par Gornyi, Mirlin & Polyakov [295, 296, 297] (voir la note de bas de page n° 12 page 132).¹¹

Faible désordre et faible interaction.— La physique du transport quantique dans les métaux faiblement désordonnés décrite dans les chapitres 4 et 5 correspond à un régime de faible désordre ($k_F \ell_e \gg 1$) avec interaction traitée perturbativement dans un second temps, le point non trivial étant que *l'interaction est elle-même modifiée par le désordre* (i.e. les propriétés d'écrantage dépendent de la présence de désordre, cf. chapitre 5). Le désordre change la dynamique de balistique en diffusive. L'effet de l'interaction entre électrons est alors double : elle brise les phénomènes d'interférence quantique (localisation faible) en limitant la cohérence de phase. D'autre part l'interaction est à l'origine d'une autre contribution quantique *négative* à la conductivité, la correction Altshuler-Aronov (*cf.* discussion du § 5.2), ce qui renforce donc la localisation [21, 246, 146, 22, 729]. Le rôle de cette contribution dans le cadre de la théorie d'échelle de la localisation a été discuté en détail dans [21, 146] (voir plus bas, le § sur la théorie d'échelle).

Faible désordre et forte interaction.— Dans la limite de très forte interaction ($r_s \rightarrow \infty$) et en l'absence de désordre, Wigner a proposé l'idée que les électrons s'arrangent pour former

¹¹ Notons également des travaux pour décrire la transition entre le cas strictement 1D et le cas multicanal [562, 474, 454].

un cristal régulier (le cristal de Wigner) afin de minimiser leur énergie potentielle [689]. Le courant électrique correspond à un glissement du cristal dans son ensemble. L'introduction du désordre a donc pour effet d'accrocher le cristal, ce qui est observé dans [287] sous fort champ magnétique.¹²

Fort désordre et interaction.— Cette limite décrit un régime de transport entre états très localisés [218]. Dans ce cas la conductivité est nulle à température nulle et les porteurs de charges ne peuvent évoluer dans l'échantillon que par activation thermique. Ce régime est par exemple réalisé dans un semiconducteur dopé par des impuretés, lorsque l'énergie de Fermi se trouve dans le gap à basse température. On distingue deux régimes : (i) un régime de compétition entre activation thermique et tunneling entre états localisés, décrit par la théorie « Variable Range Hopping », pour lequel la conductivité présente le comportement de Mott $\sigma_{\text{VRH}}(T) \approx \tilde{\sigma} \exp[-(T_0/T)^{1/(d+1)}]$. (ii) Un régime de compétition entre activation thermique et répulsion coulombienne (dans un isolant l'écrantage est très faible), avec ouverture d'un “gap de Coulomb” dans la DoS autour de l'énergie de Fermi.¹³ Ce régime de Efros-Shklovskii est caractérisé par un comportement de la conductivité $\sigma_{\text{ES}}(T) \approx \tilde{\sigma} \exp[-(T_0/T)^{1/2}]$. Notons que ces concepts ont également pu être appliqués récemment à l'étude de cristaux d'électrons unidimensionnels [254].

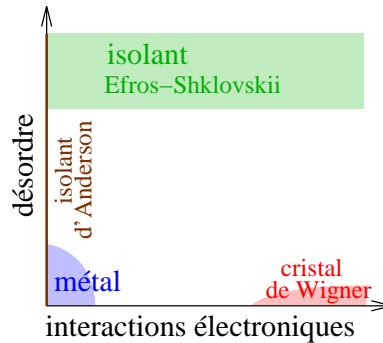


FIGURE 6.11 : Allure schématique du diagramme de phase attendu pour des fermions en interaction en présence de désordre.

Le débat des années 90 : existence ou non d'une transition métal-isolant en 2D ?—

En l'absence d'interaction, le cas bidimensionnel est particulier : toujours localisé, $\beta(g) < 0$, mais marginalement puisque $\beta(g) \rightarrow 0$ lorsque $g \rightarrow \infty$ (avec une longueur de localisation très grande $\xi^{(2d)} \sim \ell_e \exp \frac{\pi}{2} k_F \ell_e$). Des perturbations pourraient modifier cette image et induire une transition de localisation. Par exemple, c'est le cas en présence de fort couplage spin-orbite en l'absence d'interaction (*cf.* ci-dessous). Alors que la stabilité de la phase isolante sous l'introduction de l'interaction faisait consensus [21, 246, 146, 22, 729] (*cf.* le dernier paragraphe de la section 6.1.4), des expériences [380] dans des Si-MOSFET semblèrent remettre en question cette image au milieu des années 1990. Sur cette question on pourra se reporter à la thèse récente de Geneviève Fleury [784] qui fait une excellente revue du problème. Ce travail numérique suggère que le gaz d'électrons fortement corrélé est bien dans une phase isolante à $T = 0$ K. Les données expérimentales [380] sont expliquées par un effet de température finie. *Cf.* § « Théorie d'échelle et interaction entre électrons » page 188.

¹² Sous fort champ magnétique on attribue aux états de Hall fractionnaire la formation d'un cristal de Wigner : *cf.* les travaux expérimentaux [660, 43, 284, 691].

¹³ La correction Al'tshuler-Aronov et le “Coulomb dip” de la DoS du régime métallique est de même nature.

6.1.4 La théorie d'échelle

Une des approches les plus fructueuses qui a probablement connu le développement le plus spectaculaire est l'approche de scaling. Un premier travail qui a joué un rôle dans ce contexte est celui de Landauer [392] où est souligné le rôle de la conductance pour analyser les propriétés de scaling d'un conducteur désordonné. Inspiré par les idées de Thouless [734], Wegner [682] introduisit en 1976 les concepts opérant dans le cadre des phénomènes critiques et des transitions de phases dans le champ de la localisation d'Anderson. L'approche phénoménologique d'Abrahams *et al.* [5] fût mise sur des bases plus rigoureuses grâce à la formulation d'une théorie des champs (modèle σ -non linéaire) via la méthode des répliques [679, 683, 567, 729]¹⁴ ou la méthode supersymétrique [217, 718, 752]. La théorie des champs est utilisée pour mettre en œuvre les idées du groupe de renormalisation.

L'idée centrale de la théorie d'échelle proposée par Abrahams, Anderson, Licciardello & Ramakrishnan en 1979 [5, 294, 41, 38] est basée sur l'**expérience de pensée** consistant à analyser la dépendance de la conductance adimensionnée $g(L)$ d'un hypercube (en dimension d), connecté à deux surfaces opposées par lesquelles passe le courant, en fonction de sa taille L (Fig. 6.6). On **choisit** alors le critère de localisation suivant (déjà introduit plus haut) : si $g(L)$ est une fonction croissante de L le système se trouve dans une phase *métallique*; en revanche, si $g(L)$ est une fonction décroissante de L la phase est *isolante*.

L'hypothèse centrale est que la transition est entièrement contrôlée par un unique paramètre (single parameter scaling),¹⁵ la conductance typique¹⁶ g : on introduit la fonction

$$\beta(g) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d \ln g}{d \ln L} \quad (6.24)$$

qui permet de discriminer les phases conducteur et isolante. Selon le critère de localisation défini plus haut $\beta(g) > 0$ dans la phase métallique alors que $\beta(g) < 0$ dans la phase isolante. Les auteurs de [5] proposent une forme de la fonction $\beta(g)$ pour les dimensions $d \in \{1, 2, 3\}$ en raccordant des résultats connus ou attendus dans les différentes limites. Dans le régime conducteur, la loi d'Ohm (Drude) donne $g(L) = \sigma_0 \frac{\text{section}}{\text{longueur}} = \sigma_0 L^{d-2}$ i.e. $\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} d - 2$. Dans le régime localisé, on attend $g(L) \sim \exp[-2L/\xi]$ i.e. $\beta(g) \underset{g \rightarrow 0}{\simeq} \ln g + \text{cste}$ (figure 6.12). L'analyse du régime de faible désordre montre que le désordre apporte une correction négative au résultat de Drude σ_0 , la correction de localisation faible [294, 5] (chapitres 4 et 5), et suggère un comportement monotone¹⁷ de la fonction $\beta(g)$. Les quatre auteurs concluent à l'existence d'une transition de localisation en $d > 2$, correspondant au point d'annulation de la fonction $\beta(g_c) = 0$, un point fixe répulsif, et à la localisation complète des états en $d \leq 2$ (figure 6.12).

Fonction $\beta(g)$ dans le cas unidimensionnel.— Par exemple dans le cas unidimensionnel, la probabilité de transmission dans la limite $E \gg \text{disorder}$ est de la forme $T \simeq e^{-2\gamma L}$. La résistance à quatre terminal correspondante est $\frac{1}{g} = \frac{1}{T} - 1 \simeq e^{2\gamma L} - 1$ (*cf.* note 11 page 20 où $1/g$ a été

¹⁴ *cf.* note 9 page 106.

¹⁵ **Single parameter scaling.**— Cette hypothèse n'a rien d'évident : toute la dépendance dans le désordre devrait apparaître à travers un unique paramètre, notamment dans la distribution de la conductance. La validité de cette hypothèse a été énormément débattue : par exemple Shapiro a montré qu'elle est justifiée dans la limite de faible désordre [593], alors que la limite de fort désordre requiert une analyse avec deux paramètres d'échelle [164]. Elle a été également discutée récemment dans des situations unidimensionnelles [200, 201, 574] (*cf.* l'annexe page 228).

¹⁶ Dans les calculs numériques [726] on extrait la longueur de localisation du *logarithme* de la conductance. Cette remarque n'est pas sans importance car si $\ln(g)$ est bien automoyennant (dans la limite $L \rightarrow \infty$), la conductance g n'est pas une quantité automoyennante dans tous les régimes. g est automoyennante dans le régime de faible désordre et délocalisé, mais cela n'est pas le cas dans le régime fortement localisé (*cf.* ci-dessous, § "fluctuations").

¹⁷ Cela suppose l'absence de diffusion spin-orbite comme nous allons l'évoquer ci-dessous (*cf.* note 25).

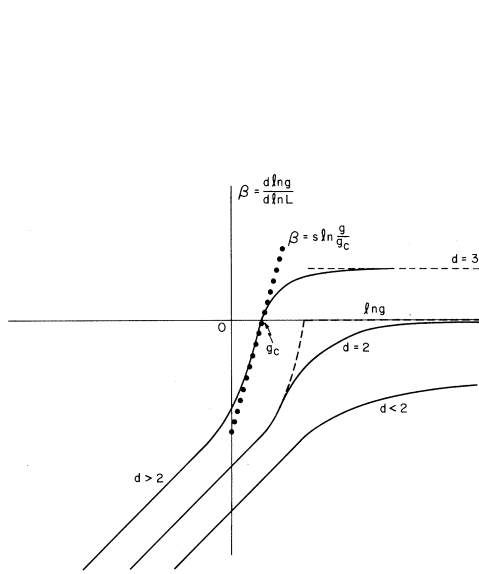


FIG. 1. Plot of $\beta(g)$ vs $\ln g$ for $d > 2$, $d = 2$, $d < 2$. $g(L)$ is the normalized “local conductance.” The approximation $\beta = s \ln(g/g_c)$ is shown for $g > 2$ as the solid-circled line; this unphysical behavior necessary for a conductance jump in $d = 2$ is shown dashed.

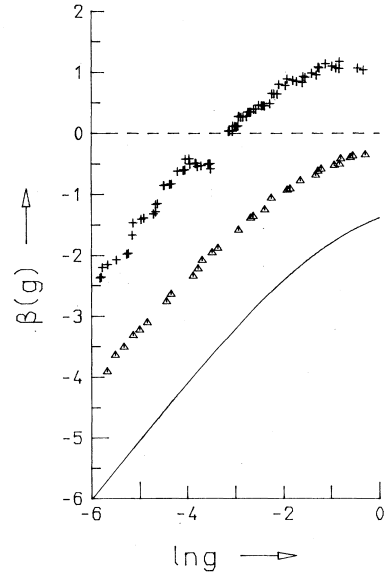


FIG. 2. Scaling function $\beta(g)$ for the conductance g . Full line is for $d = 1$. Triangles and pluses are for $d = 2$ and $d = 3$, respectively, as calculated from the data in Fig. 1.

FIGURE 6.12 : Gauche : *Allure schématique de la fonction $\beta(g)$ d'un conducteur désordonné en dimension d , proposée dans la Réf. [5] (pour un potentiel désordonné scalaire). La transition d'Anderson ne se produit qu'en dimension strictement supérieure à 2. Droite : Résultat obtenu numériquement dans la Réf. [427] pour les dimensions $d = 2$ & 3 et $\beta(g) = -(1 + g) \ln(1 + 1/g)$ pour $d = 1$ [38].*

notée ρ) d'où [38]

$$\beta(g) = -(1 + g) \ln(1 + 1/g). \quad (6.25)$$

Les comportements limites sont $\beta(g) = \ln(g) + O(g \ln g)$ pour $g \rightarrow 0$ et $\beta(g) = -1 - \frac{1}{2g} + O(1/g^2)$ pour $g \rightarrow \infty$. Remarquons que le calcul perturbatif de la fonction β du fil quasi-unidimensionnel faiblement désordonné donne plutôt $\beta(g) = -1 - \frac{1}{3g} + O(1/g^2)$ pour $g \rightarrow \infty$. (*cf.* annexe p. 230).

Le cas marginal bidimensionnel.— La dimension $d = 2$ est la dimension marginale pour la localisation d'Anderson, ce que nous voyons sur $\beta(g) \rightarrow 0$ pour $g \rightarrow \infty$ traduisant que la *conductivité* de Drude $\tilde{\sigma}_0$ est *adimensionnée* [où $\tilde{\sigma} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma / (2e^2/h)$ pour reprendre la notation introduite dans le chapitre précédent]. Autrement dit la conductance d'un hypercube (carré en $d = 2$) $g(L) = \tilde{\sigma}_0 L^{d-2} = \tilde{\sigma}_0$ est indépendante de la taille du système. L'estimation de la fonction $\beta(g)$ dans le régime $g \rightarrow \infty$ requiert donc d'aller au delà du transport classique : Abrahams *et al* font appel au résultat de Langer & Neal sur la contribution des diagrammes maximales croisés [393] (la correction de localisation faible), corrigent une erreur de ces derniers sur le choix du cutoff, et obtiennent le développement [294, 5] $g = \tilde{\sigma}_0 + \Delta\tilde{\sigma} + \dots$ avec $\Delta\tilde{\sigma} \simeq -\frac{1}{\pi} \ln(L/\ell_e)$, d'où

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} -\frac{1}{\pi g} \quad (6.26)$$

(résultat désigné comme “one loop” β function, en référence au modèle σ non linéaire de l'approche de théorie des champs).¹⁸ Dans ce cas marginal la longueur de localisation est exponen-

¹⁸ Notons que l'analyse de la fonction $\beta(g)$ dans le régime métallique [294, 5, 17, 22] a marqué le début de l'étude du régime de localisation faible, dont l'élément précurseur était le travail de Langer & Neal [393].

tiellement grande dans la limite de faible désordre : ¹⁹

$$\xi^{(2d)} \sim \ell_e e^{\frac{\pi}{2} k_F \ell_e} \quad (6.27)$$

(rappelons qu'elle est donnée par $\xi^{(1d)} \sim N_c \ell_e$ dans un fil à N_c canaux de conduction).

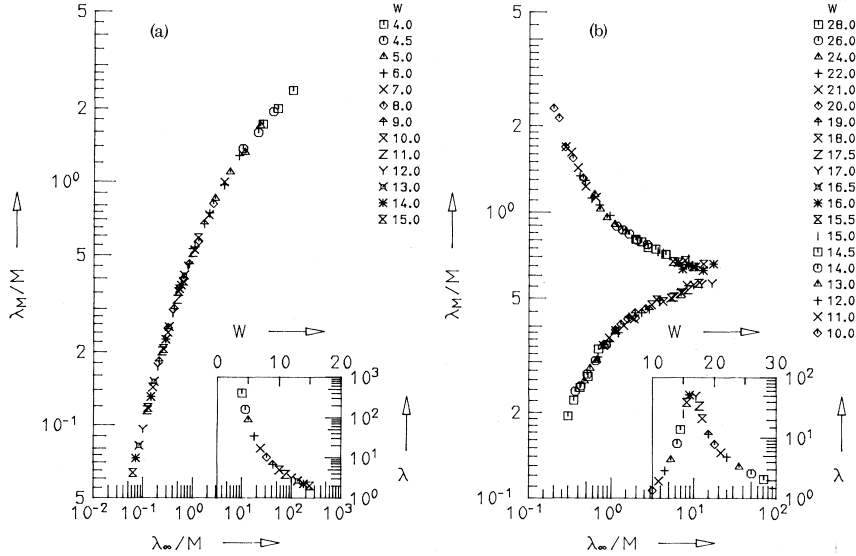


FIG. 1. Scaling function λ_M/M vs λ_∞/M for the localization length λ_M of a system of thickness M for (a) $d=2$ ($M \geq 4$) and (b) $d=3$ ($M \geq 3$). Insets show the scaling parameter λ_∞ as a function of the disorder W .

FIGURE 6.13 : *Scaling analysis of Ref. [427] : left is two dimensional case (localised). Right is obtained for a three dimension bar; the two branches correspond to the insulator and metallic phases.*

Scaling : approche numérique

Les concepts de la théorie d'échelle fondent une partie des approches numériques [427, 524, 525] dont on trouvera une excellente revue dans l'article de Kramer & MacKinnon [726]. La méthode proposée dans [427] est la suivante : on étudie la conductance d'une barre de longueur L et de largeur M . On extrait la longueur de localisation du barreau de largeur finie M comme $\xi_M \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{L \rightarrow \infty} -2L / \ln g$ (le fait que $\ln g$ soit automoyennant ²⁰ permet d'extraire ξ_M d'une unique configuration du désordre). ²¹ La valeur limite ξ_∞ s'interprète soit comme la longueur de localisation, dans la phase localisée, soit comme une longueur de corrélation, dans la phase métallique. Dans ce dernier cas elle peut être reliée à la conductivité par $\xi_\infty = \sigma^{-1/(d-2)}$ pour

L'approche diagrammatique a également permis de développer une théorie auto-cohérente [672] pour traiter le régime de localisation forte.

¹⁹ $\xi^{(2d)}$ est l'échelle pour laquelle l'expression de la conductance moyenne calculée dans la limite $k_F \ell_e \gg 1$, $\bar{g}(L) \simeq g_D - \frac{1}{\pi} \ln(L/\ell_e)$ deviendrait d'ordre $\bar{g}(\xi) \sim 1$. Dans un plan, $g_D = \frac{1}{2} k_F \ell_e$ et donc $\xi^{(2d)} \sim \ell_e e^{\frac{\pi}{2} k_F \ell_e}$. Dans un film mince d'épaisseur b on a plutôt $g_D = \frac{1}{3\pi} k_F^2 \ell_e b$ et donc $\xi^{(2d)} \sim \ell_e e^{k_F^2 \ell_e b/3}$.

²⁰ Cette propriété ($\ln g$ automoyennant) résulte du théorème d'Oseledec sur le produit de matrices aléatoires (ici les matrices de transfert caractérisant les tranches du système) [266, 508].

²¹ Remarquons que Asada *et al* [48] procèdent un peu différemment puisqu'ils analysent le scaling à partir de la *moyenne* de $\ln g$, i.e. sur $\xi_L = -2L / \langle \ln g \rangle$ dans la situation $M = L$.

$d \geq 3$. On étudie alors le scaling de la variable $\Lambda \stackrel{\text{def}}{=} \xi_M/M$ en fonction de ξ_∞/M : ²²

$$\xi_M/M = f_d(\xi_\infty/M) \quad (6.28)$$

La fonction f_d est soit croissante soit décroissante suivant la nature de la phase (localisée ou métallique). Pour comprendre cela, maintenant que $f_d(x)$ a été déterminée nous pouvons revenir à la géométrie cubique ($M = L$), nous écrivons $\xi_L/L = -2/\ln(g) = f_d(\xi_\infty/L)$. Raisonnons à désordre fixé (i.e. ξ_∞ fixé). Supposons que $f_d(x)$ est une fonction *croissante*, en augmentant la taille du cube, $L \nearrow$, alors $g \searrow$, i.e. le système est dans une phase *localisée*, d'après le critère de la théorie d'échelle. Inversement, $f_d(x)$ *décroissante* caractérise une phase métallique. On voit sur la figure 6.13 que dans le cas 2D (gauche) la fonction présente une unique branche croissante (phase localisée) alors que dans le cas 3D (droite) apparaît une autre branche décroissante associée à la phase métallique. Pour terminer notons que la fonction $f_d(x)$ peut être reliée à la fonction $\beta(g)$ [427].

Bien que ces problématiques aient une histoire de plusieurs décennies, elles suscitent encore un intérêt certain, renouvelé périodiquement au gré de l'émergence de nouvelles thématiques en matière condensée et fortement motivé par la recherche de nouvelles classes de phénomènes critiques [719]. Citons quelques développements.

Exposants critiques.— La transition d'Anderson est caractérisée par un ensemble d'exposants critiques gouvernant : l'annulation de la conductivité dans la phase métallique $\sigma \sim (E - E_s)^s$, la divergence de la longueur de localisation dans la phase isolante $\xi \sim (E_s - E)^{-\nu}$, le comportement de la conductivité AC au point critique $\sigma(\omega; E_s) \sim \omega^{1/z}$. ²³ La régularité de la fonction $\beta(g)$ au voisinage de $g = g_c$ conduit à une relation entre les exposants ν et s , proposée par Wegner [682, 5, 726] : $s = \nu(d - 2)$. Cette relation s'obtient par analyse dimensionnelle en ayant posé l'hypothèse de scaling à un paramètre : la conductance adimensionnée est de la forme $g(L) = \text{fct}(L/\xi_\infty)$ où ξ_∞ est l'unique échelle de longueur caractérisant les propriétés de volume. Cette échelle diverge au point critique $\xi_\infty \sim |E - E_s|^{-\nu}$ [si la fonction $\beta(g)$ a une dérivée continue en $g = g_c$ l'exposant est le même à gauche et à droite de la transition]. ²⁴ Dans la phase isolante, on attend $g(L) \sim \exp -2L/\xi_\infty$, où ξ_∞ s'interprète comme la longueur de localisation. Dans la phase métallique, $g(L) \sim (L/\xi_\infty)^{d-2} = L^{d-2}\sigma$, où ξ_∞ a le sens d'une longueur de corrélation, pouvant être également reliée à la conductivité $\sigma = \xi_\infty^{2-d}$ (ce qu'on aurait pu obtenir simplement par analyse dimensionnelle puisque $[\sigma] = L^{2-d}$). On en déduit la relation entre exposants ν et s .

Pour le modèle d'Anderson avec désordre sur site, la valeur de l'exposant obtenue numériquement est [605]

$$\nu = 1.57 \pm 0.02 \quad (\text{in 3D}) \quad (6.29)$$

(à comparer au résultat des développements en $1/g$ à $d = 2 + \epsilon$ de la théorie des champs $\nu = 1 + O(\epsilon)$ [100, 684, 146]).

²² Le fait que les résultats numériques puissent être analysés par une approche de scaling à un paramètre [726] ($\ln(g)$ ou $\Lambda = \xi_M/M$) est parfois considéré comme une vérification de l'hypothèse de *single parameter scaling*. Remarquons toutefois que l'approche numérique analyse $\ln(g)$ qui est une quantité *automoyennante*. L'hypothèse de *single parameter scaling* est plus forte et porte sur la distribution de la conductance (ou de $\ln(g)$) [726]. Cf. note 15 page 184.

²³ La transition d'Anderson est une "transition de phase quantique", i.e. une transition de phase pilotée par un paramètre autre que la température (ici $T = 0$ K). Les exposants critiques ont été définis par rapport à des variations de l'énergie (de Fermi). Nous aurions pu choisir tout autre paramètre physique, comme la force du désordre, etc.

²⁴ Notons une expérience très récente mettant en évidence des exposants critiques différents de part et d'autre du point critique (en $d = 3$) : longueur de localisation $\xi \sim (E_s - E)^{-\nu}$ dans la phase isolante et longueur de corrélation $\xi \sim (E - E_s)^{-\nu'}$ dans la phase métallique [462]. Ce résultat correspondrait à une situation où la pente de $\beta(g)$ est discontinue en $g = g_c$.

Effet Hall quantique.— La détermination précise de l'exposant critique de l'effet Hall quantique a été l'objet de travaux jusqu'au début des années 2000 (cf. les revues de Huckenstein [723] et de Kramer, Ohtsuki & Kettemann [727]). L'exposant critique décrivant la transition de localisation dans l'effet Hall est [727]

$$\nu_{\text{QHE}} = 2.39 \pm 0.01 \simeq 7/3 \quad (6.30)$$

(voir plus haut le § sur le modèle de Chalker-Coddington).

Symétrie symplectique.— Au delà du cas “standard” à désordre scalaire envisagé dans l'article fondateur [5] et évoqué plus haut, l'étude du cas en présence d'un fort couplage spin-orbite,²⁵ et en particulier l'existence ou non d'une transition d'Anderson en $d = 2$ dans ce cas, a suscité une activité jusque récemment (en témoignent les calculs de la fonction β pour des systèmes à symétrie symplectique [225, 48, 49, 438] ; figure 6.14). La valeur de l'exposant critique est dans ce cas [48] :

$$\nu = 2.746 \pm 0.009 \quad (2\text{D with strong spin-orbit scattering}) \quad (6.31)$$

obtenue à l'aide d'un modèle $\text{SU}(2)$ ^{26, 27}

Théorie d'échelle et interaction entre électrons

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, l'étude de la correction Altshuler-Aronov [17, 24, 246, 21, 146, 22] a joué un rôle important pour comprendre le rôle de l'interaction dans la théorie de la localisation. Limitons-nous à une discussion de la limite métallique $g \rightarrow \infty$, pour laquelle les aspects quantiques se manifestent par de petites corrections aux propriétés de transport classique (Drude). Dans le chapitre 5, Nous avons noté que les interactions entre électrons ont deux effets : d'une part elles limitent la cohérence, ce qui affecte la correction de localisation faible $\Delta\sigma_{\text{WL}}(L_\varphi^{\text{ee}})$, d'autre part elles sont responsables d'une seconde correction quantique *negative*, $\Delta\sigma_{\text{ee}}(L_T)$. L'interaction tend donc à *renforcer* la localisation par le désordre.

Une question intéressante a trait au rôle de la diffusion spin-orbite : nous avons vu que celle-ci change le signe de la correction de localisation faible [330]. La conductance adimensionnée est alors donnée par la somme des contributions des canaux singulet et triplet

$$\Delta g_{\text{WL}} = -\frac{1}{2}\Delta g(L_{\text{Sing}}) + \frac{3}{2}\Delta g(L_{\text{Triplet}}) \quad (6.32)$$

où $\Delta g(L_\varphi)$ représente la localisation faible sans prendre en compte le spin ($\Delta g(L_\varphi) = -\frac{L_\varphi}{L}$ en 1D et $\Delta g(L_\varphi) = -\frac{1}{\pi} \ln(L_\varphi/\ell_e)$ en 2D). Les deux longueurs sont données par $\frac{1}{L_{\text{Sing}}^2} = \frac{2}{L_m^2} + \frac{1}{L_\varphi^2}$ et $\frac{1}{L_{\text{Triplet}}^2} = \frac{2}{3L_m^2} + \frac{4}{3L_{so}^2} + \frac{1}{L_\varphi^2}$ où L_{so} la longueur de diffusion spin-orbite et L_m est la longueur de diffusion sur des impuretés magnétiques [708, 743]. En l'absence de ce second effet ($L_m = \infty$) il

²⁵ En présence de diffusion spin-orbite, la correction de localisation faible est positive, on parle “d'antilocalisation” [330]. La fonction $\beta(g)$ ne peut donc pas être une fonction monotone de g s'il existe une phase isolante t.q. $\beta(g) \simeq \ln(g) + \text{cste}$ (figure 6.14). En $d = 2$, $\Delta\tilde{\sigma} \simeq +\frac{1}{2\pi} \ln(L/\ell_e)$ et $\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} +1/(2\pi g)$. La fonction β doit s'annuler, ce qui montre que l'introduction du couplage spin-orbite induit une transition d'Anderson métal/isolant en $d = 2$.

²⁶ Asada, Ohtsuki & Slevin [48] étudient un hamiltonien du type (6.1), avec potentiel V_r (scalaires) aléatoires et hoppings $t \in \text{SU}(2)$ indépendants et identiquement distribués uniformément sur le groupe.

²⁷ Un exposant comparable $\nu = 2.80 \pm 0.04$ est obtenu par Markos & Schweitzer [438] à l'aide du modèle d'Ando, un modèle de liaisons fortes du type (6.1), avec potentiel V_r (scalaires) aléatoires et hoppings décrits par deux matrices de $\text{SU}(2)$ fixées : dans la direction parallèle au courant $t_{\parallel} = \cos \eta + i \sigma_y \sin \eta = e^{i\eta \sigma_y}$ et dans la direction perpendiculaire $t_{\perp} = \cos \eta - i \sigma_x \sin \eta = e^{-i\eta \sigma_x}$, où le paramètre η permet de passer de GOE ($\eta = 0$) à GSE.

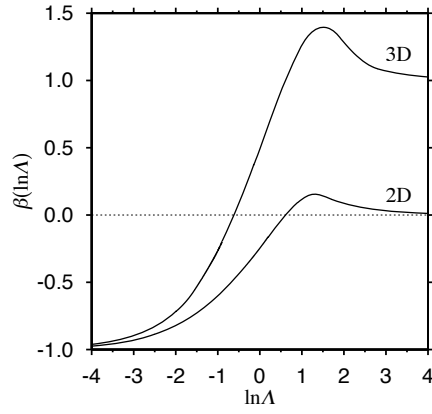


Fig. 5. The β functions for Λ . The β function in 2D is from Ref. 14.

FIGURE 6.14 : Fonctions $\beta(\ln \Lambda) = \frac{d \ln \Lambda}{d \ln L}$ d'un conducteur désordonné (une barre de longueur L et de largeur $M = L$) en présence de couplage spin-orbite en dimensions $d = 2$ et 3 , en fonction de $\ln \Lambda$ où $\Lambda = \xi_M/M$ est le rapport de la longueur de localisation et de la dimension transverse de la barre. Dans [48], ξ_M est obtenue à partir de la conductance selon : $\xi_M \stackrel{\text{def}}{=} -2L / \langle \ln(g) \rangle$ avec $M = L$; Le paramètre Λ est donc directement relié à la conductance : $\Lambda = \xi_L/L = -2 / \langle \ln(g) \rangle$. L'annulation de la fonction β dans la situation bidimensionnelle montre l'existence d'une transition d'Anderson induite par le couplage spin-orbite. Figure tirée de : Asada, Slevin & Ohtsuki [49].

existe donc un régime de forte diffusion spin-orbite (en pratique dans les métaux lourds, comme l'argent ou l'or) pour lequel la correction de localisation faible peut changer de signe, on parle d'antilocalisation : $\Delta g_{\text{WL}}(L_{so} \rightarrow 0, L_m \rightarrow \infty) = -\frac{1}{2} \Delta g(L_\varphi) > 0$. Dans ce cas le comportement de la fonction $\beta(g)$ est

$$\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} d - 2 + \frac{C_d}{g} \quad (\text{strong spin-orbit scattering - no interaction}) \quad (6.33)$$

avec $C_1 = +1/6$ et $C_2 = 1/2\pi$. En l'absence d'interaction, l'analyse perturbative montre que l'introduction d'un fort couplage spin-orbite permet donc d'induire une transition métal-isolant en dimension $d = 2$, comme nous l'avons discuté plus haut.

Nous pouvons nous poser la question de savoir comment cette image est modifiée en présence de l'interaction (i.e. si elle s'applique à une situation réelle !). L'article d'Altshuler & Aronov [21] et celui de Castellani *et al* [146] discutent ce point et montrent que **l'interaction empêche l'apparition de la transition métal-isolant en $d = 2$** . Reprenons cet argument pour les basses dimensions.

Cas 1D.— La correction de localisation faible et la correction Altshuler-Aronov d'un fil long pour un fort couplage spin-orbite sont données par

$$\Delta g_{\text{WL}} = +\frac{1}{2} \frac{L_\varphi}{L} \quad \text{et} \quad \Delta g_{ee} \simeq -1.56 \frac{L_T}{L} \quad (6.34)$$

où $1.56 \simeq \frac{1}{2} \Lambda_\sigma^{(j=0)} \frac{3\zeta(3/2)}{4\sqrt{2\pi}}$ est le paramètre d'interaction introduit dans le chapitre précédent (en présence de fort couplage spin-orbite la correction Altshuler-Aronov ne met en jeu que la contribution du singulet $\Lambda_\sigma^{(j=0)} = 4/d$ au paramètre d'interaction λ_σ [21] ; cf. annexe page 155).

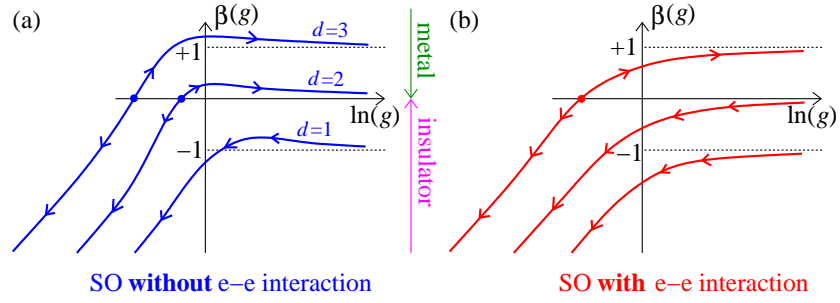


FIGURE 6.15 : Allure attendue de la fonction $\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}$ en présence de forte diffusion spin-orbite ; (a) sans prendre en compte les interactions électroniques ; (b) en les prenant en compte.

Afin de discuter les propriétés d'échelle nous devons considérer la limite du fil cohérent : $L_\varphi \gtrsim L$ et $L_T \gtrsim L$. La correction Altshuler-Aronov dans ce régime est donnée dans la référence [27]

$$\Delta g_{\text{WL}} = +\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \Delta g_{\text{ee}} \simeq -0.36 \quad (6.35)$$

La seconde contribution domine, ce qui conduit à un comportement de la fonction $\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} -1 + \frac{\tilde{C}_1}{g}$ où $\tilde{C}_1 \simeq -0.36 + 1/6 \simeq -0.2$. On s'attend donc à retrouver un comportement monotone de la fonction $\beta(g)$.

Cas 2D.— Il est possible de procéder de manière analogue dans le cas bidimensionnel. Dans le plan nous obtenons

$$\Delta g_{\text{WL}} = +\frac{1}{2\pi} \ln(L_\varphi/\ell_e) \quad \text{et} \quad \Delta g_{\text{ee}} = -\frac{1}{2} \Lambda^{(j=0)} \frac{1}{\pi} \ln(L_T/\ell_e) = -\frac{1}{\pi} \ln(L_T/\ell_e). \quad (6.36)$$

Les expressions correspondantes pour $L_\varphi \gtrsim L$ et $L_T \gtrsim L$ sont données en substituant simplement ces longueurs par L :

$$\Delta g_{\text{WL}} = +\frac{1}{2\pi} \ln(L/\ell_e) \quad \text{et} \quad \Delta g_{\text{ee}} = -\frac{1}{\pi} \ln(L/\ell_e). \quad (6.37)$$

Nous obtenons donc le comportement de la fonction $\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\tilde{C}_2}{g}$ où $\tilde{C}_2 = -1/(2\pi)$.

Conclusion.— Nous voyons donc que l'inversion de la pente de la fonction $\beta(g)$ induite par la diffusion spin-orbite est annulée lorsque l'interaction est prise en compte. En présence de forte diffusion spin-orbite et d'interaction nous obtenons finalement [21]

$$\boxed{\beta(g) \underset{g \rightarrow \infty}{\simeq} d - 2 - \frac{|\tilde{C}_d|}{g}} \quad (\text{strong spin-orbit - with interaction}) \quad (6.38)$$

Cette analyse perturbative est confirmée numériquement [784].

6.1.5 Équation de Dirac avec désordre

Avant de nous focaliser sur l'étude de l'équation de Dirac 1D en présence de désordre, un problème pour lequel j'ai un intérêt assez ancien [174, 715, 628, 639, 538], je souhaiterais donner une vision un peu plus large de cette question. L'étude de l'équation de Dirac en présence de désordre est un problème qui trouve des applications dans des domaines extrêmement variés,

principalement de la matière condensée. Avant d'en citer quelques uns, on peut dégager une motivation théorique qui est de réaliser l'ensemble des dix classes de symétrie des systèmes désordonnés (voir l'article de Bernard & LeClair [78] ou la revue de Evers & Mirlin [719]). Le paragraphe doit plutôt être vu comme une présentation d'une sélection de quelques problèmes, plutôt que comme une revue exhaustive.

Cas unidimensionnel

- L'équation de Dirac 1D fournit modèle de métal désordonné à demi remplissage [293, 286, 513] (voir la revue de Gogolin [721]).

Précisément, considérons un modèle de liaisons fortes 1D dont la relation de dispersion est $\varepsilon_k = -2t \cos k$ en l'absence de désordre. La limite continue décrivant le centre de bande ($\varepsilon_k \sim 0$), i.e. le voisinage du demi remplissage ($\varepsilon_F = 0$) conduit à un spectre linéaire relativiste $\varepsilon_{\pm \frac{\pi}{2} + \kappa} \simeq \pm 2t \kappa$. En présence de désordre $\ll t$, on est naturellement conduit à considérer l'équation de Dirac avec désordre.²⁸ On trouvera une analyse détaillée de la limite continue du modèle de liaisons fortes dans l'annexe page 222.

- Modèle de conducteur organique [623] (pour d'autres références, cf. la thèse de Cécile Monthus [788, 169]).
- Chaînes de spins 1/2 antiferromagnétique avec couplages aléatoires [247, 448, 54].
- Chaînes de spins d'Ising et spins XY en champ magnétique transverse aléatoire [248, 448, 251, 249].
- Chaînes de spins Peierls et échelles de spins désordonnées [597, 614].
- L'équation de Dirac 1D désordonnée se mappe sur le problème de la diffusion *classique* dans un potentiel désordonné, le problème de Sinai [600]. On trouvera des références dans la thèse de Cécile Monthus [788] ou ses travaux avec Le Doussal [249, 400, 472] (voir aussi nos articles : Hagendorf & Texier [308], Texier & Hagendorf [639] reproduits plus loin, p. 234 et p. 237).

Cas bidimensionnel.— Une des motivations pour l'étude des théories de fermions relativistes désordonnés est qu'ils fournissent des modèles continus, représentatifs de certains points critiques. Contrairement au cas unidimensionnel qui ne permet pas de réaliser toutes les classes de symétrie, au moins pour des bispineurs, l'équation de Dirac bidimensionnelle offre la possibilité de construire de tels modèles. À ce titre, l'étude de l'équation de Dirac 2D a souvent été précédée par l'analyse de modèles discrets réalisant le même type de symétries (type réseaux bipartites [273]). Une question récurrente abordée dans un grand nombre de ces études concerne l'existence de singularités spectrales : l'introduction d'une symétrie discrète brise la symétrie par translation en énergie dans le spectre et le désordre génère des comportements de la DoS non triviaux pour $\varepsilon \rightarrow 0$.

- **Modèle d'Ising 2D avec désordre de lien.**— La physique du modèle d'Ising bidimensionnel au voisinage du point critique est décrite par une théorie de fermions libres de masse

²⁸ **Anomalie de Kappus-Wegner.** Cette discussion sur la limite continue de l'Hamiltonien de liaisons fortes en centre de bande montre que le désordre ne peut pas être traité perturbativement en ce point, puisqu'il y a correspondance avec la limite d'énergie nulle pour le modèle continu. Cette remarque explique les anomalies dans les développements de faible désordre des diverses grandeurs physiques, comme « l'anomalie de Kappus-Wegner » [179, 357]. Ces anomalies sont expliquées comme des effets de commensurabilité [188]. Voir aussi les articles de Schomerus & Titov [574, 654] ou notre article récent : Ramola & Texier [538].

nulle. Un désordre de lien sur le modèle d'Ising induit un désordre de masse dans le modèle continu. Le problème a été étudié par Cho & Fisher [160] en utilisant un mapping sur un modèle de réseau type Chalker-Coddington (le diagramme de phase du modèle de Cho & Fisher a été obtenu par Chalker *et al* [151]), voir aussi la revue de Kramer *et al* [727]. Un très gros effort a été consacré pour déterminer la nature précise des singularités spectrales au point de Dirac qui contrôlent en particulier des quantités thermodynamiques comme la chaleur spécifique : différents auteurs montrent l'existence de comportements logarithmiques [717, 590, 418, 91, 455].

- **Effet Hall quantique.**– Ludwig, Fisher, Shankar & Grinstein [419] ont proposé de décrire la transition entre plateaux de Hall de l'effet Hall quantique par une théorie de fermions relativistes, en présence d'un terme de masse aléatoire ou de potentiel vecteur aléatoire.

Un autre lien entre équation de Dirac et physique de l'effet Hall a été fourni par le mapping entre modèle de réseau de Chalker-Coddington et l'équation de Dirac (cf. la revue de Kramer, Ohtsuki & Kettmann [727]).

- **Supraconductivité non conventionnelle.**– L'étude des excitations de basse énergie des supraconducteurs avec mécanisme d'appariement à symétrie p ou d peut être formulée en terme de théorie de fermions relativistes. En présence de désordre, ces modèles appartiennent aux quatre classes de symétries BdG évoquées plus haut (notons que ces mécanismes d'appariement non conventionnels apparaissent également dans le contexte de l'effet Hall quantique *fractionnaire* [539]). On pourra se reporter à la revue de Altland, Simons & Zirnbauer [703] (voir également [449] pour le cas de la symétrie p).
- **Graphène.**– L'intérêt pour l'équation de Dirac avec désordre a été fortement renouvelé avec le boom du graphène à partir de 2005 (cf. § plus bas).
- **Isolants topologiques.**– Enfin notons que l'équation de Dirac (1D et 2D) apparaît dans le domaine en expansion des isolants topologiques (cf. la revue de Hasan & Kane [722]) pour décrire les excitations de surface.

Cas tridimensionnel.– Mentionnons des travaux sur des réseaux bipartites 3D (par exemple [226]). Dans un registre assez éloigné, notons que l'équation de Dirac en présence de désordre a également été considérée en relation avec la physique de QCD (voir par exemple les nombreux travaux de Verbaarschot [507]).

Équation de Dirac 2D désordonnée

Des propriétés physiques de l'équation de Dirac unidimensionnelle seront détaillées dans la suite du chapitre. Mentionnons ici quelques résultats obtenus dans le cas bidimensionnel.

Préliminaire : équation de Dirac 2D pour des fermions libres non massifs.– En deux dimensions, l'algèbre de Clifford admet une représentation de dimension minimale égale à deux. L'hamiltonien de Dirac agit sur des *bispineurs* et peut être exprimé à l'aide des matrices de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$. Dans le cas de fermions non massifs, l'hamiltonien prend la forme $\mathcal{H}_0 = \vec{\sigma} \cdot \vec{p}$. Les deux états stationnaires sont

$$\Psi_{\vec{k}, \pm}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \pm 1 \\ e^{i\theta_k} \end{pmatrix} \frac{e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{2\pi} \quad \text{d'énergie } \varepsilon_{\vec{k}, \pm} = \pm ||\vec{k}|| \quad (6.39)$$

où θ_k est la direction du vecteur \vec{k} , i.e. la phase de $k_x + ik_y$.

Diverses formes de désordre.— L'introduction de désordre dans l'hamiltonien conduit à considérer en général

$$\mathcal{H} = \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - \vec{A}) + m \sigma_z + A^0. \quad (6.40)$$

Il est possible d'introduire trois types de désordre : (i) désordre scalaire $A^0(\vec{r})$, (ii) champ de jauge désordonné $\vec{A}(\vec{r})$, (iii) désordre de masse $m(\vec{r})$.

Potentiel scalaire désordonné.— Le spectre du problème libre ($m = 0$ et $A^\mu = 0$) n'étant borné ni supérieurement ni inférieurement, $\varepsilon_{\vec{k}, \pm} = \pm ||\vec{k}||$, on peut s'attendre à des propriétés assez différentes de celles obtenues pour un hamiltonien de Schrödinger. Une seconde observation est que la **chiralité est brisée** à énergie $\varepsilon \neq 0$: les ondes planes d'énergie positive possèdent une chiralité opposée de celle des ondes planes d'énergie négative. Cette observation montre que l'invariance par renversement du temps est brisée pour $\varepsilon \neq 0$ (déjà en l'absence de champ de jauge) : cette remarque avait été faite par Berry & Montdragon dans [80] pour l'étude du spectre de Dirac dans un billard chaotique : les auteurs avaient montré que les propriétés spectrales coïncident avec celles de les matrices aléatoires de GUE. En revanche, lorsqu'on se place au point de Dirac, $\varepsilon = 0$, la symétrie par renversement du temps est restaurée et l'existence du couplage spin-orbite intrinsèque à l'équation relativiste devrait plutôt placer le problème dans la classe de symétrie GSE (rappelons qu'il ne s'agit pas nécessairement du spin électronique).

L'étude de l'équation de Dirac en présence de désordre a été menée par des approches de théorie des champs et des analyses à l'aide du groupe de renormalisation. Plus récemment, le problème a été reconsidéré numériquement par des approches de scaling : la fonction $\beta(g)$ a été obtenue par Nomura *et al* [496] (*cf.* partie gauche de la figure 6.14). Elle est comparée à la fonction $\beta(g)$ du cas normal (non relativiste) avec symétrie symplectique (GSE), avec laquelle elle coïncide dans la limite $g \rightarrow \infty$. Le point intéressant est de noter que la fonction $\beta(g)$ reste toujours positive, ce qui montre que l'équation de Dirac pour des bispineurs avec désordre scalaire décrit une phase *métallique* (les auteurs parlent de phase « *supermétallique* » en référence à la divergence de la fonction $\beta(g) \simeq 1/\pi g \rightarrow +\infty$ pour $g \rightarrow 0$, traduisant le comportement logarithmique $g(L) = \frac{1}{\pi} \ln(L/\ell_0)$ où ℓ_0 est une échelle microscopique).

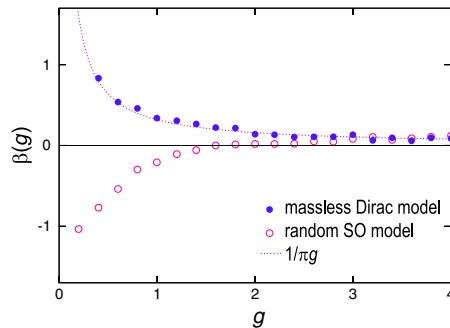


FIG. 1 (color online). The beta functions of the random Dirac Hamiltonian (2) (closed circles) and the random spin-orbit model (6) (open circles). The broken line represents the one-loop beta function of the conventional 2D symplectic class, $\beta(g) \sim 1/\pi g$ [12].

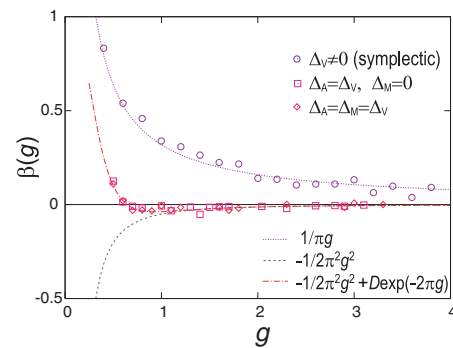


FIG. 4 (color online). The β functions for the random Dirac Hamiltonians (3); $\beta(g)$ is independent of the mean value of V .

FIGURE 6.16 : Gauche : Comparaison de la fonction β pour un métal standard désordonné avec fort couplage spin-orbite et de la fonction β pour l'équation de Dirac 2D avec désordre scalaire ; tirée de : Nomura, Koshino & Ryu [496]. Droite : Fonction β pour l'équation de Dirac 2D en présence de différents type de désordre : Δ_V pour le désordre scalaire (A^0), Δ_A pour le désordre de jauge (\vec{A}) et Δ_M pour le désordre de masse. Figure tirée de : Nomura *et al* [497].

Désordre de jauge.— Le cas du désordre de jauge (classe de symétrie chirale) a été étudié dans plusieurs travaux. Ce problème a été introduit dans le contexte de la physique de l'effet Hall quantique, comme théorie effective décrivant la transition d'Anderson dans un niveau de Landau (Ludwig, Fisher, Shankar & Grinstein [419]), obtenu comme limite continue d'un modèle type liaisons fortes approprié. L'hamiltonien de Dirac avec champ de jauge désordonné peut également être vu comme une limite continue d'un modèle de type Chalker-Coddington bipartite [90].

Du fait de la brisure de renversement du temps (déjà en l'absence de champ de jauge), la conductivité Hall obtenue pour une masse constante $\mathcal{H} = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + m\sigma_z$, change de signe avec la masse : $\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{2h}\text{sign}(m)$. Le changement de signe de la masse occasionne un incrément de conductivité Hall de $\pm e^2/h$, comme la traversée d'un plateau de Hall. Le désordre est introduit sous la forme d'un champ de jauge aléatoire gaussien, nul en moyenne, caractérisé par les corrélations $\langle A_i(\vec{r})A_j(\vec{r}') \rangle = \frac{1}{2}\Delta_A\delta_{ij}\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, choix qui assure que le modèle est critique au point de Dirac, $\varepsilon = 0$.

Ludwig *et al* [419] ont analysé le comportement de basse énergie de la densité d'états, qui présente un comportement en loi de puissance $\rho(\varepsilon) \propto \varepsilon^{2/z-1}$ où l'exposant dynamique peut être obtenu exactement $z = 1 + \frac{\Delta_A}{\pi}$ (voir aussi [331]).

Dans le cas du champ de jauge aléatoire, on peut construire explicitement la fonction d'onde d'énergie nulle et en étudier les propriétés de multifractalité. Écrivons $A_i = -\epsilon_{ij}\partial_j\Phi$. L'hamiltonien de Dirac prend la forme

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 0 & \pi^\dagger \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \pi \stackrel{\text{def}}{=} p_x - A_x + i(p_y - A_y) = -2i(\bar{\partial} + \bar{\partial}\Phi) \\ \pi^\dagger = 2i(\partial - \partial\Phi) \end{cases} \quad (6.41)$$

on a introduit les notations $\partial \equiv \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ et $\bar{\partial} \equiv \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Nous obtenons donc deux modes zéros $\Psi(\vec{r}) \propto \xi_{\pm}e^{\mp\Phi}$, où $\xi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\xi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Le choix des corrélations $\langle \Phi(\vec{r})\Phi(\vec{r}') \rangle = -\frac{\Delta_A}{2\pi} \ln \|\vec{r} - \vec{r}'\|$ correspond aux corrélations $\langle A_i A_j \rangle$ données plus haut. Les propriétés de multifractalité du mode zero ont été considérées par Ludwig *et al* puis par Chamon *et al* [181], problème également considéré dans le cas d'un champ de jauge non abélien [147].

Désordre de masse.— Le cas de la masse aléatoire s'inscrit dans le contexte de l'étude des excitations de basse énergie des supraconducteurs désordonnés avec mécanisme d'appariement non conventionnel (classe BdG). On peut mentionner le travail récent de Medvedyeva *et al* [449] où est étudié un supraconducteur avec mécanisme d'appariement à symétrie p . Le diagramme de phase est obtenu (Fig. 6.17) à l'aide de l'analyse numérique d'un modèle sur réseau de type Cho & Fisher [160] : il sépare une phase isolante où la conductivité thermique décroît exponentiellement $\sigma_T \sim e^{-L/\xi}$ d'une phase « thermal metal » caractérisée par $\sigma_T \sim \ln L$.

La question des singularités spectrales, du type logarithmique dans ce cas, a également été considérée pour ce type de modèles (cf. par exemple [91, 455]).

Cas mixte.— Evers & Mirlin ont suggéré que le cas mixte (deux types de désordre) est identique au cas où tous les désordres sont présents. La fonction $\beta(g)$ a été obtenue numériquement par Nomura *et al* [497]. Elle est représentée sur la partie droite de la figure 6.14 et présente bien un point fixe attractif dans les deux cas : (i) désordre scalaire (A^0) et désordre de jauge (\vec{A}); (ii) désordre scalaire (A^0), désordre de jauge (\vec{A}) et désordre de masse. Le point fixe est du type du point fixe de l'effet Hall quantique (alors que le champ magnétique est ici nul en moyenne).

Graphène en présence de désordre

Ces dernières années, la physique du graphène s'est énormément développée. On pourra consulter les revues de Castro Neto *et al* [712], Vozmediano *et al* [740], Goerbig [720] et Kotov *et al* [725].

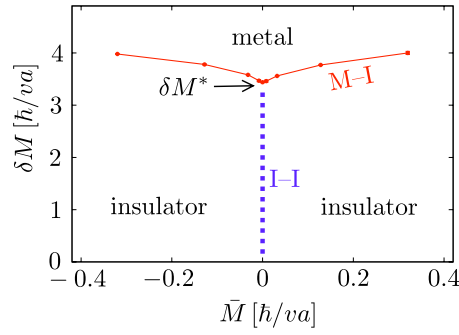


FIGURE 6.17 : *Diagramme de phases pour l'hamiltonien de Dirac avec masse aléatoire : \bar{M} désigne la masse moyenne et δM l'écart type. Figure tirée de Medvedyeva et al [449]. La ligne pointillée en $\bar{M} = 0$ marque la transition entre deux états isolants topologiquement inéquivalents, caractérisés par des conductivités Hall différent de $\pm e^2/h$ (cf. discussion de [419] ci-dessus).*

Faisons quelques remarques en lien avec la discussion de la section.

La feuille de graphène non désordonnée.— Rappelons que la feuille de graphène à une structure cristalline en composée de cellules hexagonales. La cellule de Wigner-Seitz est un losange contenant deux atomes (atome de type A et atome de type B). On obtient aisément la relation de dispersion. Dans la limite de basse énergie (correspondant au demi-remplissage obtenu à dopage nul, $\varepsilon_F = 0$) elle peut être approximée par deux cônes passant aux deux points dits K et K' de la zone de Brillouin. La relation de dispersion est donc analogue au spectre relativiste de l'équation de Dirac bidimensionnelle. La théorie effective de basse énergie est donc décrite par l'hamiltonien

$$\mathcal{H}_0 = v_0 \tau_z \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \quad (6.42)$$

où la vitesse des électrons d'énergie $\varepsilon = 0$ (centre de bande) est $v_0 \simeq 10^6$ m/s. Les matrices de Pauli $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ représentent les deux premières composantes de « l'isospin » et agissent dans l'espace de sous réseau A/B. La matrice τ_z agit dans l'espace de vallées K/K' et correspond à la composante du « pseudospin ». En sus, on pourrait considérer les degrés de liberté liés au spin électronique, ce que nous ne ferons pas. Dans la limite de basse énergie, la feuille de graphène est donc décrite par deux équations de Dirac 2D découplées, différant par le signe du pseudospin. Autrement dit, à une énergie donnée, les états propres associés à chacun des cônes ont des chiralités opposés, ce qui assure la symétrie sous le renversement du temps.

Régime de faible désordre (dopage fini).— L'analyse du rôle du désordre dans le graphène est assez riche car celui-ci peut prendre des formes variées : il peut agir dans l'espace de sous réseau seulement (potentiel d'impuretés de portée grande devant le pas du réseau) ou coupler également les vallées K et K'. En outre, le désordre peut être de type désordre scalaire, ou désordre de jauge, etc. Par exemple des distorsions de la feuille de graphène peuvent générer un terme de jauge aléatoire où les champs de jauge des deux équations de Dirac sont opposés, $\vec{A}_K = -\vec{A}_{K'}$, afin de préserver la symétrie de renversement du temps. Une classification détaillée des différents types de désordre a été proposée par Ostrovsky, Gornyi & Mirlin [510].

Si la feuille de graphène est dopée, i.e. le niveau de Fermi ε_F est « loin » du point de symétrie $\varepsilon = 0$, le désordre peut être traité par les méthodes perturbatives analogues à celles décrites dans les chapitres 4 et 5 pour un métal 2D usuel. À « petite » échelle, i.e. à l'échelle de ℓ_e , les propriétés de transport électronique sont sensibles à la nature relativiste de la théorie effective, cependant à grande échelle $\gg \ell_e$, i.e. dans le régime diffusif, on retrouve une physique de la

diffusion usuelle. La méthode diagrammatique doit être adaptée pour tenir compte des degrés de liberté supplémentaires, i.e. les diffuson et cooperon possèdent des indices supplémentaires liés au sous réseau et aux vallées. Par exemple, en l'absence de couplage entre vallées K/K', la nature relativiste de la théorie effective –deux équations de Dirac 2D découplées– se manifeste de la même manière qu'un fort couplage spin-orbite dans un métal usuel (il s'agit donc de couplage isospin-orbite) ce qui génère un phénomène d'*antilocalisation* (magnéto-conductance négative). Le couplage entre vallées K/K' restaure le phénomène de magnéto-conductance positive, analogue au cas d'un métal normal sans couplage spin-orbite. Cette analyse est détaillée dans les travaux d'Aleiner & Efetov [12], de McCann *et al* [445], Ostrovsky *et al* [510], Altland [15] (voir également la revue Castro Neto, Guinea *et al* [712]).

L'existence de différents régimes a été confirmée récemment par les expériences de Tikhonenko *et al* [651].

Dopage nul.– Une question plus subtile concerne le cas où la feuille de graphène est non dopée ($\varepsilon_F = 0$) et la question de savoir comment le désordre affecte les propriétés au point de Dirac.²⁹ Dans ce cas, le désordre doit être traité non perturbativement. Cette question a été re-examinée principalement numériquement. Tout d'abord dans le cas d'un désordre scalaire (potentiel scalaire A^0), $\mathcal{H} = v_0 \tau_z \otimes \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + A^0(\vec{r})$, ce qui est motivé par la nature du désordre attendu en pratique (sous forme d'impuretés à la surface du graphène par exemple). Bardarson *et al* [57] formulent les conclusions suivantes :

- (i) la conductivité atteint une valeur minimale $\sim e^2/h$ dans la situation non désordonnée.
- (ii) En l'absence de diffusion entre vallées K/K' (i.e. lorsque la portée des corrélations du potentiel désordonné est grande devant le paramètre de maille $a \sim 1 \text{ \AA}$) le système reste dans une phase conductrice pour $L \rightarrow \infty$ (Fig. 6.16, gauche);³⁰
- (iii) En présence de diffusion entre vallées K/K' le système tend vers une phase isolante lorsque $L \rightarrow \infty$ [12].

Si la question de l'effet du désordre à dopage nul est intéressante théoriquement, il n'est pas clair qu'elle soit pertinente du point de vue expérimental. En effet, il est assez vraisemblable que les inhomogénéités des échantillons de graphène induisent des inhomogénéités du dopage. La feuille de graphène présenterait alors de larges zones dopées alternativement en électrons ($\varepsilon_F > 0$) et en trous ($\varepsilon_F < 0$), séparées par des jonctions p-n. Cette idée est à l'origine du modèle de résistances aléatoires proposé par Cheianov, Falko *et al* [158], qui obtiennent des lois d'échelle pour la conductivité en fonction du dopage et du désordre.

Effet Hall quantique dans le graphène.– La physique de l'effet Hall quantique dans le graphène a été discutée par plusieurs auteurs (cf. par exemple Ostrovsky, Gornyi & Mirlin [512] ou la revue de Goerbig [720]). Différents types d'effet Hall se manifestent suivant la nature du désordre :

- (i) En l'absence de couplage entre vallées (K/K'), un effet Hall "anormal" $\sigma_{xy} = 2(2n + 1)\frac{e^2}{h}$ avec $n \in \mathbb{Z}$, caractéristique de fermions relativistes,³¹ est attendu et correspond à ce qui a été observé dans les premières expériences de Novoselov, Geim *et al* [498].
- (ii) Le couplage entre vallées est responsable d'un effet Hall quantique entier usuel $\sigma_{xy} = 2n\frac{e^2}{h}$.
- (iii) La présence de désordre sous forme d'ondulations de la feuille (ripples) ou de dislocations conduit à $\sigma_{xy} = 4n\frac{e^2}{h}$.

²⁹ Expérimentalement on observe que la conductivité de la feuille de graphène atteint une valeur minimale $\sigma_{\min} \sim \frac{e^2}{h}$ à dopage nul. Le facteur numérique précis et son origine physique font encore débat.

³⁰ en particulier les calculs numériques [57, 496] invalident le scénario compliqué proposé par Ostrovsky *et al* [511].

³¹ Cf. le TD5 sur ma page http://lptms.u-psud.fr/christophe_texier/enseignements/enseignements-en-master/m2-theorie-des-champs/.

6.1.6 Fluctuations

Faible désordre/régime métallique.— Jusqu'à présent les propriétés de transport ont été évoquées à travers la conductivité ou la conductance. En général une première analyse considère des quantités *moyennes*. L'étude de la distribution de la conductance est également d'un grand intérêt. Dans le régime métallique (faible désordre) les fluctuations de la densité d'états et de la conductivité ont été largement étudiées [29, 403, 35, 741, 593, 404, 431, 663] la distribution de la conductance est gaussienne [31, 744].^{32,33} Des déviations à la distribution gaussienne de la conductance d'un QD ont été prédites très récemment dans le cadre de la théorie des matrices aléatoires [671].

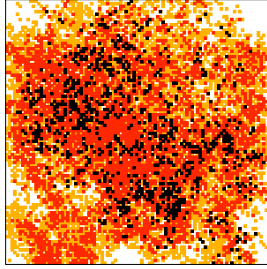


Figure 2: (Color online) Sensitivity of the transmission trough the disordered system to the change of the sign of a single random energy η_0 . Change of the sign of the random energy on orange, red and black sites causes the change of the conductance in more than 1%, 10% and 100%, respectively. The transmission T_0 is 4.998, 0.52 and 0.00084 for the disorder $W/V = 2, 4$ and 6 (from top to bottom). The size of the system is $100a \times 100a$, and the electron propagates from the left side of the sample to the right side.

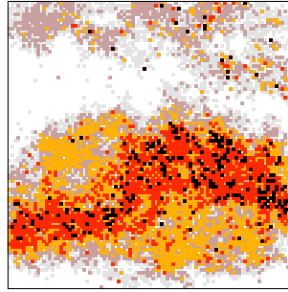


Figure 3: (Color online) The same as in Fig. 2 but with disorder $W/V = 10$. The transmission $T_0 = 9 \times 10^{-15}$, $\langle \ln T \rangle = -33.5$. Shown are also sites where the change of the sign of random energy causes the change of the transmission in 0.01% (gray) and 0.1% (brown).

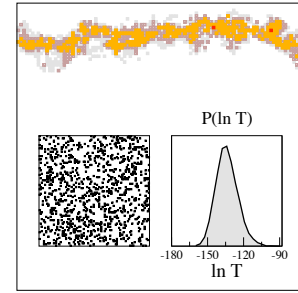


Figure 4: (Color online) The same as in Fig. 2 but for the disorder $W/V = 20$. The transmission of this sample is $\ln T_0 = -96$. Change of the sign of the random energy on gray, brown, orange and red sites causes the change of the logarithm of the transmission in more than 0.01%, 0.1%, 1% and 10% respectively. Left inset shows sites where $|\epsilon(\vec{r})| < 1$. Right inset shows probability distribution $P(\ln T)$ with the mean value $\langle \ln T \rangle = -133$.

FIGURE 6.18 : Les différentes figures montrent la sensibilité de la transmission au changement de signe du potentiel aléatoire sur un site. Soit T la transmission et $T_{\vec{r}}$ la transmission lorsque le signe du potentiel au site en \vec{r} est changé. Les couleurs indiquent les différents niveaux d'intensité de $\eta(\vec{r}) \stackrel{\text{def}}{=} |T_{\vec{r}} - T|/T$ en fonction de la position dans la région désordonnée, à mesure que l'on augmente l'intensité du désordre. Tiré de : Markos [436].

Régime localisé.— En basse dimension ($d \leq 2$), si la taille du système est suffisamment grande, le système se trouve dans la phase localisée (même pour un désordre faible). Dans le cas 1D ou quasi 1D, on montre que la distribution de la conductance est log-normale : voir l'équation (6.94) plus bas pour le cas strictement 1D ; le cas quasi-1D est discuté dans la footnote 8 [707, 457]. Cette propriété repose sur l'observation que le *logarithme* de la conductance $\ln g$ a des propriétés d'additivité lorsqu'on combine des conducteurs en série. Au delà du cas quasi-1D, le comportement log-normal a été donné comme une propriété générale du régime localisé, ce qui a été observé numériquement (cf. revue de Kramer et MacKinnon [726]). Cependant la log-normalité de la distribution pour des situations en $d \geq 2$ a été remise en question récemment par les travaux de Markos & Muttalib [437, 483], et de Ortuño, Prior & Somoza [607, 536]. En dimension $d = 2$, une analyse numérique fine [607, 536] montre que la distribution de $\ln(g)$ est

³² *Stricto sensu* la distribution de la conductance n'est gaussienne que dans la limite $g \rightarrow \infty$ pour laquelle les cumulants d'ordre supérieur à 2 deviennent négligeables [743, 744].

³³ L'analyse de la nature de la distribution de la conductance a donné lieu à une intéressante discussion ayant une certaine importance pratique : pour observer les fluctuations de la conductance, il est plus facile de faire varier un paramètre extérieur comme le champ magnétique ou l'énergie de Fermi dans un 2DEG, plutôt que de modifier la configuration du désordre [431], i.e. de mesurer $\int_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}+\Delta\mathcal{B}} \frac{d\mathcal{B}'}{\Delta\mathcal{B}} g(\mathcal{B}')^2$ plutôt que $\langle g(\mathcal{B})^2 \rangle$. L'existence de corrélations $\langle g(\mathcal{B})g(\mathcal{B}') \rangle$ montre que les deux procédures ne coïncident pas forcément. Ce point a été discuté dans [31, 661] ; on parle de "ergodic hypothesis".

donnée par la distribution de Tracy-Widom,³⁴ avec ³⁵ $\langle \ln g \rangle = -2L/\tilde{\xi}$ et $\text{Var}(\ln g) \propto (L/\tilde{\xi})^{2/3}$. Somoza, Ortuño & Prior appuient leur analyse sur un mapping avec le problème de polymère dirigé en milieu aléatoire. En dimension $d = 3$ l'étude des fluctuations est encore sujette à une certaine controverse.³⁶

Ces travaux soulèvent la question intéressante de l'origine du phénomène de localisation en $d \geq 2$: doit-il s'interpréter comme un *phénomène d'interférences* (destructives) ou un *problème de percolation* (l'électron devant trouver un chemin de percolation pour traverser la région désordonnée) ? Les auteurs concluent en faveur d'un scénario où l'effet dominant vient de la percolation, la mécanique quantique n'intervenant que par une renormalisation des transmissions à cause de l'effet tunnel [536] (ce point est illustré sur la figure 6.18).

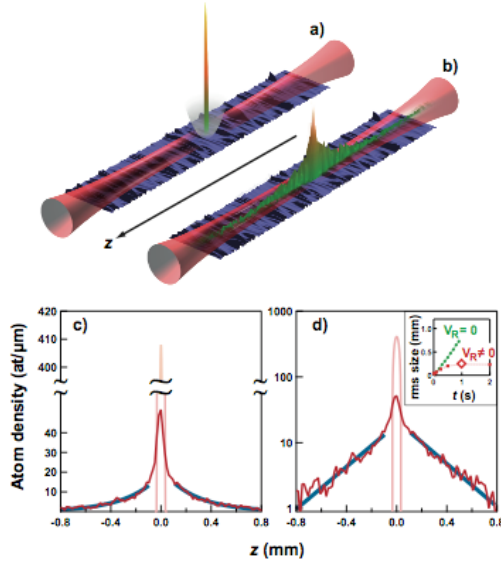


Figure 1. Observation of exponential localization. **a)** A small BEC (1.7×10^4 atoms) is formed in a hybrid trap, which is the combination of a horizontal optical waveguide ensuring a strong transverse confinement, and a loose magnetic longitudinal trap. A weak disordered optical potential, transversely invariant over the atomic cloud, is superimposed (disorder amplitude V_R small compared to the chemical potential μ_{in} of the atoms in the initial BEC). **b)** When the longitudinal trap is switched off, the BEC starts expanding and then localises, as observed by direct imaging of the fluorescence of the atoms irradiated by a resonant probe. On **a** and **b**, false colour images and sketched profiles are for illustration purpose, they are not exactly on scale. **c-d)** Density profile of the localised BEC, 1s after release, in linear or semi-logarithmic coordinates. The inset of Fig d (rms width of the profile vs time t , with or without disordered potential) shows that the stationary regime is reached after 0.5 s. The diamond at $t=1$ s corresponds to the data shown in Fig c-d. Blue solid lines in Fig c are exponential fits to the wings, corresponding to the straight lines of Fig d. The narrow profile at the centre represents the trapped condensate before release ($t=0$).

FIGURE 6.19 : *Observation de la localisation forte dans un gaz d'atomes froids. Image tirée de : Billy et al [84].*

6.1.7 Expériences

Le regain d'intérêt de la dernière décennie pour la localisation d'Anderson a été sans aucun doute motivé par les progrès récents du côté expérimental. Le phénomène de localisation d'Anderson est aujourd'hui établi expérimentalement dans plusieurs contextes physiques :

- Localisation faible et forte d'ondes d'électrons : dans des fils métalliques gravés dans des gaz d'électrons bidimensionnels [280, 364, 493].
- Localisation de lumière traversant des transparents [79] ou des poudres de semiconducteurs [688, 618].

³⁴ **Distribution de Tracy-Widom** : décrit les fluctuations typiques de la plus petite valeur propre d'une matrice aléatoire des ensembles GOE, GUE, GSE ou d'autres ensembles (Laguerre, etc) [656, 657]. Pour une perspective plus large on pourra se reporter à l'article de revue de Majumdar & Schehr [433].

³⁵ Ce résultat est en accord avec l'observation de Cohen *et al* [164] que la limite de fort désordre, et précisément la distribution de g , requiert une analyse à deux paramètres ($\langle \ln(g) \rangle$ et $\text{Var}(\ln g)$), *cf.* note 15.

³⁶ Si nous notons $\text{Var}(\ln(g)) \propto (L/\tilde{\xi})^\alpha$, la référence [608] donne $\alpha = 2/5$ alors que Douglas & Muttalib ont obtenu $\alpha = 2/3$ [208] en résolvant un modèle DMPK généralisé introduit dans [482, 481]. Un article plus récent [209] obtient des corrections logarithmiques, $\text{Var}(\ln(g)) \sim \langle -\ln g \rangle / \ln \langle -\ln g \rangle$, ce qui expliquerait les différences sur les exposants.

- Localisation de micro-ondes [148].
- Localisation de lumière dans des cristaux photoniques [581, 389].
- Localisation des ondes sonores [333].
- Le plus spectaculaire est probablement la très récente observation de la localisation d'ondes d'atomes [84, 545], rendue possible grâce aux prouesses technologiques réalisées en matière de refroidissement des gaz atomiques. Il est possible de contrôler tous les paramètres microscopiques (force du désordre, corrélation,...) et de tester quantitativement la théorie. Il est également remarquable de souligner qu'on observe assez directement la fonction d'onde (ou plus précisément le profil de densité dont les ailes exponentielles sont reliées à la décroissance des fonctions d'onde des états occupés de plus haute énergie).

6.2 Quelques modèles unidimensionnels connus

6.2.1 Motivation

Mon intérêt pour la localisation d'Anderson s'est porté vers l'analyse de la situation unidimensionnelle. Le rôle de la dimensionnalité du système est fondamental et la situation unidimensionnelle un peu particulière, avec la localisation de tous les états quantiques [731, 93, 70, 340, 700, 73, 721, 768] (pour une preuve mathématique, voir les articles de Pastur [288, 520]).³⁷ Néanmoins le cas unidimensionnel offre l'avantage de rendre possible l'utilisation de méthodes puissantes, non perturbatives. Cette situation permet en effet d'obtenir des résultats exacts pour des questions "standard", densité d'états, longueur de localisation,... mais aussi d'analyser des propriétés beaucoup plus fines, comme nous allons le voir.

Commençons par rappeler quelques éléments bien connus sur les systèmes désordonnés unidimensionnels. De nombreux travaux se sont focalisés sur l'étude de modèles discrets (modèles de liaisons fortes), voir les ouvrages de Luck [769] et de Crisanti, Paladin & Vulpiani [749] pour une revue. Afin d'éliminer les aspects propres aux détails de courte portée dus au réseau, je discuterai exclusivement des modèles continus et ferai un rapide tour d'horizon des différents types de singularités spectrales.

Type A : Hamiltonien de Schrödinger désordonné

Considérons un Hamiltonien de Schrödinger avec potentiel aléatoire

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (6.43)$$

Lorsque les corrélations du potentiel sont de portée finie et les fluctuations modérées (existence d'un second moment) ce type d'Hamiltonien présente des caractéristiques assez génériques [45, 768] dont la plus frappante est la **localisation de tous les états**, quelle que soit l'énergie. À haute énergie, l'exposant de Lyapunov (inverse de la longueur de localisation) est relié à la fonction de corrélation du potentiel

$$\boxed{1/\tilde{\xi}_E = \gamma(E) \underset{E \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{8E} \int dx \langle V(x)V(0) \rangle \cos(2\sqrt{E}x)} \quad (6.44)$$

On donnera plus bas, Eq. (6.73), la définition précise de l'exposant de Lyapunov. L'existence d'une telle formule en $d = 1$ démontre la localisation des états quantiques à énergie arbitrairement grande.

³⁷ au moins pour des modèles "standard" pour des potentiels désordonnés avec corrélations à courte portée et à fluctuations bornées.

Un autre phénomène propre aux systèmes désordonnés est l'apparition de singularités spectrales dans le bord du spectre, dont la forme précise dépend de la nature du potentiel aléatoire (cf. tableau 6.2).

$V(x)$ bruit blanc gaussien

Le cas où le potentiel est un bruit blanc gaussien, avec

$$\langle V(x)V(x') \rangle = \sigma \delta(x - x'), \quad (6.45)$$

(la dimension du paramètre contrôlant le désordre est $[\sigma] = [\text{Longueur}]^{d-4}$) a été considéré par Halperin [309] qui en a obtenu la densité spectrale.³⁸ La densité d'états intégrée (IDoS) par unité de longueur présente un comportement exponentiel traduisant l'existence d'états localisés dans des puits profonds mais rares du potentiel

$$N(E) \underset{E \rightarrow -\infty}{\simeq} \frac{1}{\pi} \sqrt{|E|} \exp \left\{ -\frac{8}{3\sigma} |E|^{3/2} \right\}, \quad (6.46)$$

i.e. $\rho(E) \sim (-E) \exp[-\frac{8}{3\sigma}(-E)^{3/2}]$. À haute énergie la densité d'états rejoint la densité d'états libre $N(E) \underset{E \rightarrow +\infty}{\simeq} \frac{1}{\pi} \sqrt{E}$. La localisation fût analysée plus tard [45, 768, 314]. D'après (6.44), l'exposant de Lyapunov de haute énergie est simplement

$$\gamma(E) \underset{E \rightarrow +\infty}{\simeq} \frac{\sigma}{8E} \quad (6.47)$$

(on trouvera des expressions exactes de $N(E)$ et $\gamma(E)$ dans [768]).

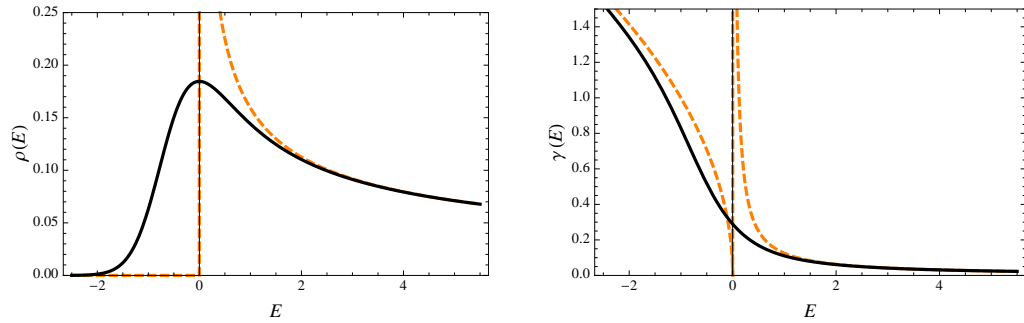


FIGURE 6.20 : À gauche : Densité d'états pour un potentiel bruit blanc gaussien. Courbe en pointillés : densité d'états libre (singularité de van Hove). À droite : Exposant de Lyapunov. En pointillés, $\sqrt{-E}$ et résultat "perturbatif" (6.47).

Le comportement de la densité d'états intégrée en dimension supérieure est connu :

$$N(E) \underset{E \rightarrow -\infty}{\sim} \sigma^{\frac{1-d}{2}} |E|^{-1 + \frac{d(7-d)}{4}} \exp \left\{ -\frac{C_d}{\sigma} |E|^{\frac{4-d}{2}} \right\} \quad (6.48)$$

où C_d est une constante sans dimension. La densité d'états correspondante est [144, 332] $\rho(E) \sim (-E)^{d(5-d)/4} \exp[-\text{cste} \times (-E)^{2-d/2}]$ (ce comportement correspondrait à la queue de la DoS de la figure 6.2 dans une limite d'échelle appropriée). Finalement on peut estimer le nombre d'états ayant migré hors du spectre libre sous l'effet du désordre à

$$N(E=0) \sim \sigma^{\frac{d}{4-d}}. \quad (6.49)$$

³⁸la solution était en réalité déjà contenue dans l'article de Frisch & Lloyd [262] où le cas du bruit blanc gaussien apparaît une certaine limite du modèle discuté dans le paragraphe suivant

$V(x)$ bruit blanc non gaussien

Un autre modèle assez populaire et très largement étudié est le cas d'un potentiel décrivant une superposition d'impuretés δ , de la forme

$$V(x) = \sum_n v_n \delta(x - x_n). \quad (6.50)$$

Ce modèle de désordre a été introduit par Schmidt [572] pour des positions fixées sur un réseau et des poids aléatoires (désordre d'alliage); le cas où les poids v_n sont distribués selon une loi de Cauchy est soluble [416, 340].

De très nombreux auteurs ont analysé le cas des positions aléatoires non corrélées (désordre structurel), ce qui correspond au cas d'un bruit blanc poissonnien, pour des poids fixés [398, 262, 476, 414, 93, 415, 430, 138, 139, 70, 219, 422, 73] ([258, 423, 424] pour les dimensions supérieures).

Le cas où les positions et les poids sont aléatoires a été considéré dans [375, 489, 768]. En particulier Nieuwenhuizen [489] a analysé quelques cas solubles : notamment le cas des positions aléatoires avec poids distribués selon une loi exponentielle [175].

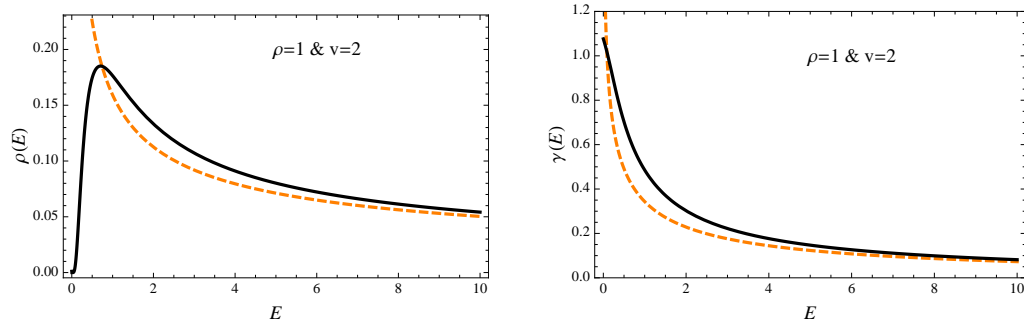


FIGURE 6.21 : *Densité d'états et exposant de Lyapunov pour un potentiel d'impuretés δ distribuées aléatoirement, avec des poids aléatoires distribués par une loi exponentielle de largeur v .*

Le modèle étant nettement plus riche que le précédent, limitons la discussion au cas des poids fixés $v_n = v$ et des positions aléatoires non corrélées pour une densité moyenne ρ .

Limite de haute densité $\rho \rightarrow \infty$.— La limite de haute densité $\rho \gg v$ correspond à la limite du bruit blanc gaussien.

Limite de basse densité $\rho \rightarrow 0$ avec poids positifs.— La limite de basse densité $\rho \ll v$ est plus intéressante et présente une singularité spectrale dite de Lifshits [262, 415]

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \rho \exp \left\{ -\pi \rho E^{-1/2} \right\}. \quad (6.51)$$

L'étude du développement systématique de la DoS pour $1/v \rightarrow 0$ a été discutée dans [138, 139, 422]. Notons l'existence d'une expression généralisant ce résultat au cas d'impuretés de poids aléatoires positifs [375]. L'exposant de Lyapunov pour les poids fixés est donné par [792, 83, 638]

$$\gamma(E) \simeq \rho \times \begin{cases} \ln(v/\rho) - C & \text{pour } \sqrt{E} \ll \rho \\ \ln(v/2\sqrt{E}) & \text{pour } \rho \ll \sqrt{E} \ll v \\ \frac{v^2}{8E} & \text{pour } \sqrt{E} \gg v, \end{cases} \quad (6.52)$$

où $C \simeq 0.577$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

L'argument heuristique de Lifshits³⁹ permet de conjecturer le comportement correspondant en dimension supérieure ; celui-ci a été obtenu dans [415, 258] :

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} \exp \left\{ -\tilde{C}_d \rho E^{-d/2} \right\}, \quad (6.53)$$

où \tilde{C}_d est une constante sans dimension.

Limite de basse densité $\rho \rightarrow 0$ avec poids négatifs égaux : singularité de Halperin.— Dans le cas des poids négatifs $v < 0$ la DoS présente en outre une singularité en loi de puissance, dite de Halperin [414, 310, 139], autour de l'énergie $E_0 = -v^2/4$ correspondant à l'énergie des états liés sur les impuretés :

$$\rho(E) \sim |E - E_0|^{-1+2\rho/|v|}, \quad (6.54)$$

pour un exposant proportionnel à la densité d'impuretés. Insistons : ce comportement, qui s'explique par le faible couplage entre états localisés sur les impuretés, repose sur la dégénérescence en énergie de ces états. Ce type de singularité en loi de puissance disparaît pour des poids d'impuretés aléatoires (cf. notre article récent [299]).

Type B : Hamiltonien de Dirac désordonné

Une autre classe d'Hamiltoniens désordonnés est celle des Hamiltoniens de Dirac. Deux différences fondamentales avec le type A sont d'abord la plus grande liberté dans le choix du modèle de désordre, liée à la structure spinorielle. D'autre part l'existence d'une symétrie particule-trou impose une contrainte dans le spectre, ce qui peut avoir des conséquences *a priori* inattendue dans le cadre de la physique des systèmes désordonnés unidimensionnels, comme l'existence d'un point de délocalisation à énergie nulle.⁴⁰

Le spectre et les propriétés de localisation pour l'Hamiltonien de Dirac le plus général a été étudié par Bocquet [89, 779] pour des combinaisons de bruits blancs gaussiens. Un cas particulièrement intéressant (car présentant un point de délocalisation) est le cas d'une masse aléatoire, en moyenne nulle :

$$\mathcal{H}_D = \sigma_y i \frac{d}{dx} + \sigma_x \phi(x) = \begin{pmatrix} 0 & Q^\dagger \\ Q & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.55)$$

où $\phi(x)$ s'interprète comme la masse ; on a introduit les opérateurs

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d}{dx} + \phi(x) \quad \text{et} \quad Q^\dagger = \frac{d}{dx} + \phi(x). \quad (6.56)$$

Nous remarquons que \mathcal{H}_D est dans la classe de symétrie chirale, i.e. a précisément la structure (6.22). Notons qu'en dimension $d = 1$, une rotation nous permettrait de réécrire l'Hamiltonien comme $\tilde{\mathcal{H}}_D = \sigma_z i \partial_x + \sigma_x \phi(x)$ correspondant à la représentation (6.23). En $d = 1$ et pour l'algèbre de Clifford représentée par des matrices 2×2 , il n'y a donc pas de différence entre les deux classes de symétrie.

Afin de placer la discussion des deux types de modèles (A et B) sur un pied d'égalité, nous relierons l'Hamiltonien de Dirac où σ_i sont les matrices de Pauli, à un Hamiltonien de Schrödinger :

³⁹ **Lifshits argument** : the argument works as follows for a random potential made of a weak concentration $\rho \rightarrow 0$ of impurities. A low energy state of energy $E \sim 1/L^2$ are supported by a large region of size L where the potential vanishes, what occurs with probability $\sim e^{-\rho L^d}$ where d is the dimension, hence the low energy behaviour of the density of states $\rho(E) \sim \exp[-\rho E^{-d/2}]$. The argument may be generalised to other kind of positive disordered potentials (cf. for example our article Comtet, Texier & Tourigny [176]).

⁴⁰ Notons que des phénomènes de délocalisation peuvent également apparaître du fait de l'existence de corrélations de portée finie du potentiel. Par exemple : [253, 210, 97, 693, 342, 792, 627].

$\mathcal{H}_D^2 = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi(x)^2 + \sigma_z \phi'(x)$. Nous faisons ainsi apparaître un couple d'opérateurs isospectraux

$$H_{\pm} = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi(x)^2 \pm \phi'(x) = \begin{cases} Q^\dagger Q & \text{pour } + \\ Q Q^\dagger & \text{pour } - \end{cases}, \quad (6.57)$$

dits supersymétriques. Dans ce cadre, $\phi(x)$ est appelé le « prépotentiel » ou « superpotentiel ».

Quelques résultats exacts sont connus pour ce type d'Hamiltonien. Citons quatre cas solubles :

- le cas où $\phi(x)$ est un bruit blanc gaussien [513, 95],

$$\langle \phi(x) \rangle = \mu g \quad (6.58)$$

$$\langle \phi(x)\phi(x') \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(x') \rangle = g \delta(x - x'), \quad (6.59)$$

- le cas où $\phi(x)$ est un bruit du télégraphe [169], motivé par l'étude des conducteurs organiques [788] et des chaînes de spins [236, 237, 614].
- Le cas où $\phi(x) = \sum_n \lambda_n \delta(x - x_n)$ pour des poids distribués par des lois exponentielles et des positions x_n aléatoires (uniformément distribuées et indépendantes) [175].
- Le cas où $\int_0^x dt \phi(t)$ est un bruit de Lévy [176].

Le cas $\langle \phi \rangle = 0$.— Lorsque $\phi(x)$ est un bruit blanc gaussien nul en moyenne ($\mu = 0$), la densité spectrale de l'Hamiltonien supersymétrique désordonné présente une **singularité** spectrale dite **de Dyson** ⁴¹

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2g}{\ln^2(g^2/E)}. \quad (6.60)$$

Ce comportement de la densité d'états a été originellement obtenu par Dyson dans le cadre d'un modèle *discret* (une chaîne de ressorts avec masses aléatoires) [211], puis pour le modèle continu par Ovchinnikov & Erikmann [513]. Corrélativement l'exposant de Lyapunov s'annule à énergie nulle

$$\gamma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \frac{2g}{\ln(g^2/E)} \quad \Rightarrow \quad \tilde{\xi}_E \sim \frac{1}{g} \ln(g^2/E), \quad (6.61)$$

ce qui suggère (mais ne démontre pas) l'existence d'un point de délocalisation et l'apparition d'un état critique dans le spectre (voir ci-dessous). Comme pour la densité d'états, le comportement logarithmique de l'exposant de Lyapunov a d'abord été obtenu pour un modèle discret de liaisons fortes avec couplages aléatoires par Eggarter & Riedinger [220] et Ziman [697], puis pour le modèle continu par Bouchaud *et al* [94, 95].

Le cas $\langle \phi \rangle \neq 0$.— Lorsque $\mu \neq 0$ on obtient une singularité spectrale en loi de puissance tandis que l'exposant de Lyapunov tend vers une valeur limite à énergie nulle :

$$N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} E^\mu \quad (6.62)$$

$$\gamma(E) \underset{E \rightarrow 0}{\simeq} \mu g. \quad (6.63)$$

Des expressions exactes sont données dans les Réfs. [513, 768, 95] (voir aussi notre article récent [299] pour une analyse détaillée).

⁴¹ cf. la note 45 page 204.

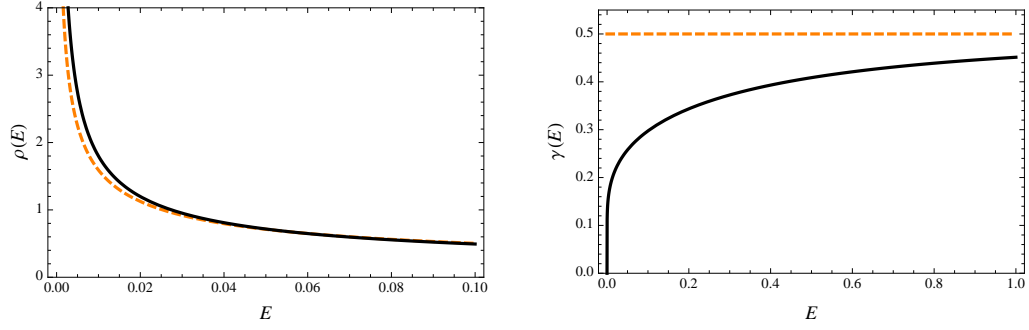


FIGURE 6.22 : Densité d'états et exposant de Lyapunov pour un potentiel supersymétrique $\phi^2 + \phi'$ où ϕ est un bruit blanc gaussien nul en moyenne. La singularité de Dyson est plus forte que la singularité de van Hove.

Délocalisation à $E \rightarrow 0$ dans le cas critique $\langle \phi \rangle = 0$ Dans le cas critique où $\langle \phi(x) \rangle = 0$ nous avons vu que l'exposant de Lyapunov s'annule $\gamma(E = 0) = 0$, ce qui a été interprété comme l'apparition d'un point de délocalisation dans le spectre. Notons toutefois que cette conclusion était prématurée : l'annulation du Lyapunov est une **condition nécessaire mais non suffisante** signalant la délocalisation.⁴² Plusieurs arguments viennent néanmoins étayer l'existence d'un point de délocalisation :

- La structure de la fonction de Green moyenne $\overline{\langle x | \frac{1}{E-H} | x' \rangle}$, obtenue par la méthode des répliques [95], par la méthode supersymétrique [54] et par la méthode diagrammatique des blocs de Berezinskii [614],⁴³ indique l'existence d'une longueur de corrélation divergeant comme $\ell_{\text{corr}} \sim \frac{1}{g} \ln^2(g^2/E)$.
- La conductivité DC de l'hamiltonien de Dirac avec masse aléatoire prend une valeur finie en centre de bande [286, 721].⁴⁴
- Les propriétés statistiques du mode zéro (moments, fonctions de corrélation) montrent l'existence de corrélations de longue portée décroissant en loi de puissance [101, 597, 715]. Par exemple la fonction de corrélation à deux points : $\langle |\psi_0(x)|^2 |\psi_0(x')|^2 \rangle \propto |x - x'|^{-3/2}$ pour $|x - x'| \gg 1/g$.
- À énergie nulle, l'amplitude de transmission à travers un intervalle désordonné de taille L est une fonctionnelle du désordre [613] : $t = 1/\cosh[\int_0^L dx \phi(x)]$. La distribution de la probabilité de transmission (conductance) $T = |t|^2$ s'en déduit immédiatement

$$P(T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi gL}} \frac{1}{T\sqrt{1-T}} \exp\left[-\frac{1}{2gL} \operatorname{argch}^2(1/\sqrt{T})\right]. \quad (6.64)$$

La conductance moyenne décroît plus lentement que dans le régime métallique⁴⁵ (Drude, $\langle T \rangle \propto 1/L$) : $\langle T \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{2/(\pi gL)}$. On peut également montrer que $\langle \ln T \rangle \underset{L \rightarrow \infty}{\propto} -\sqrt{gL}$.

⁴²L'annulation du coefficient de Lyapunov, défini plus bas par (6.73), pourrait avoir pour origine la localisation selon une exponentielle étirée (sous-localisation [92]) $\psi(x) \sim \exp[-|x - x_0|/\xi]^\alpha$ avec $\alpha < 1$.

⁴³notons que le calcul de la fonction de Green moyenne est relié à celui de la probabilité conditionnelle du problème de Sinai [289, 362, 167, 400].

⁴⁴alors que dans la phase localisée la conductivité AC s'annule avec la fréquence selon la formule de Mott [45, 768] $\operatorname{Re} \sigma(\omega) \sim \omega^2 \ln^{d+1} \omega$.

⁴⁵ Il est intéressant de pointer que ce comportement persiste dans les chaînes quasi 1D avec un nombre *impair* de canaux. Brouwer, Mudry & Furusaki ont considéré plusieurs modèles de chaînes quasi 1D avec couplages aléatoires : modèle de liaisons fortes en champ magnétique aléatoire (classe de symétrie chirale) [478], et modèle désordonné avec symétrie particule-trou (supraconducteur désordonné) [107]. Ils montrent que lorsque le nombre de canaux est *impair* la conductance moyenne $\langle g \rangle \sim \sqrt{\xi/L}$ (pour $L \rightarrow \infty$) [478] (pour certaines classes de symétrie

- La distribution du temps de Wigner présente un comportement log-normal [613, 792] : $P_L(\tau) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\tau\sqrt{L}} \exp -\frac{1}{8gL} \ln^2(g\tau)$. L'absence de loi limite pour $L \rightarrow \infty$ indique que l'onde explore la région désordonnée sur une échelle qui croît avec L (contrairement au régime fortement localisé [635], cf. Eq. (6.110) plus bas).
- L'analyse de distributions des énergies indique la présence de corrélations spectrales à la base du spectre [628] (cf. plus bas).
- La densité d'états moyenne du problème en volume fini est sensible à l'effet des bords à suffisamment basse énergie, $E \lesssim g^2 e^{-\sqrt{2g}L}$, [639] (cf. ci-dessous et article reproduit). Sonder la sensibilité aux conditions aux limites correspond au **critère de Thouless**. Cela fournit donc une longueur de localisation

$$\xi_E \sim \frac{1}{g} \ln^2(g^2/E) \gg \tilde{\xi}_E \quad (6.65)$$

Conclusion.— Ces différentes remarques montrent bien la robustesse de la délocalisation pour $E \rightarrow 0$, indépendamment du critère choisi.

Remark (scaling viewpoint) : Despite the many indications of delocalisation, the system is in the « insulating phase » in the sense of the scaling theory (even precisely at $E = 0$). For example, the multifractal exponent of the zero mode was shown to vanish in our article Comtet & Texier [715], $\tau(q) = 0$, which is characteristic of an insulating phase.

Moreover, the behaviour $\langle \ln T \rangle \simeq -C\sqrt{L}$ for $L \rightarrow \infty$ leads to the β -function $\beta(g) = \frac{d\langle \ln g \rangle}{d \ln L} \simeq \frac{1}{2} \langle \ln g \rangle$ corresponding to an insulating phase, although the unconventional factor 1/2.

6.3 Méthodes

Comptage des nœuds

La situation unidimensionnelle offre l'avantage de pouvoir être analysée grâce à une méthode puissante dont l'idée est de relier l'étude des quantités physiques d'intérêt (densité d'états, localisation, temps de Wigner,...) à l'analyse de certains processus stochastiques. Cette méthode porte le nom de *méthode de Dyson-Schmidt* [211, 572, 769] dans le contexte du modèle d'Anderson (discret) et de *formalisme de phase* [70, 45, 768] dans le contexte des modèles continus tels ceux qui vont nous intéresser.⁴⁶

De Sturm-Liouville à Cauchy.— Le point de départ est l'analyse du problème spectral (problème de Sturm-Liouville) $H\varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x)$ pour $\varphi_n(0) = \varphi_n(L) = 0$ par exemple. Le principe de la méthode repose sur le théorème de Sturm-Liouville (ou le théorème d'oscillation) pointant que le nombre de nœuds de la solution $\varphi_n(x)$ correspond au nombre de solutions d'énergies inférieures à E_n (i.e. la densité d'états intégrée $N(E_n)$) : figure 6.23. Cette observation suggère qu'une manière de mesurer $N(E)$ est de compter le nombre de nœuds de la solution de l'équation de Schrödinger. À cette fin le formalisme de phase remplace le

[107] et la densité d'états $\rho(\varepsilon) \sim \frac{1}{\varepsilon |\ln \varepsilon|^3}$ [109] présentent des comportements analogues au cas unidimensionnel. En revanche lorsque le nombre de canaux est *pair* on retrouve une conductance décroissant exponentiellement $\langle g \rangle \sim \exp -2L/\xi$ (pour $L \rightarrow \infty$) et une densité d'états s'annulant pour $\varepsilon \rightarrow 0$ [109].

⁴⁶ La méthode du comptage des nœuds peut être étendue à la situation quasi-unidimensionnelle (multicanal). Dans ce cas on doit suivre l'évolution des valeurs propres de la matrice de scattering. La "phase" du formalisme de phase est remplacée par le spectre de valeurs propres de la matrice \mathcal{S} dont on a vu qu'il est relié à la densité d'états. Le formalisme DMPK [204, 205, 451] suit cette idée en se focalisant sur le spectre des exposants de Lyapunov de la matrice de transfert, cf. note 15.

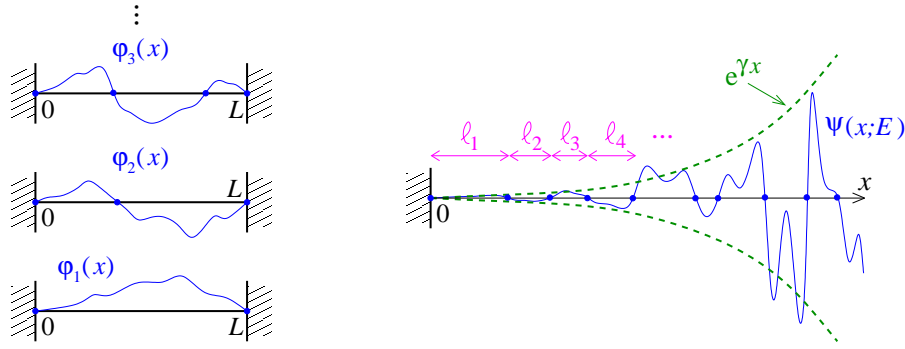


FIGURE 6.23 : À gauche : premières solutions du problème de Sturm-Liouville. À droite : solution du problème de Cauchy.

problème (difficile) de Sturm-Liouville par un problème de Cauchy, i.e. résoudre l'équation de Schrödinger $H\psi(x; E) = E\psi(x; E)$ pour des conditions aux limites imposées sur un seul bord, $\psi(0; E) = 0$ & $\psi'(0; E) = 1$ par exemple. Dans ce cas la solution existe pour toute énergie E , ce qui rend le problème plus simple que celui de Sturm-Liouville. $\psi(x; E)$ obéit à une certaine équation différentielle stochastique, dont le formalisme de phase propose l'analyse. L'idée est donc de remplacer l'analyse des fonctions d'onde (normalisées) solutions du problème de Sturm-Liouville pour des énergies discrètes $\in \{E_n\}$, *a priori* inconnues, par celle de la solution du problème de Cauchy existant $\forall E$. Cette dernière ne coïncide avec les précédentes que sur le spectre $\psi(x; E_n) = \varphi_n(x)$. Cette procédure repose donc crucialement sur l'hypothèse que les propriétés statistiques de $\psi(x; E)$ (l'analyse de ses nœuds, de son enveloppe,...) reflètent celles des $\varphi_n(x)$, autrement dit que ces propriétés ne sont pas sensibles à la seconde condition de bord, $\varphi_n(L) = 0$.

Variable de Riccati

Si nous continuons dans la voix tracée par le formalisme de phase, l'analyse des propriétés statistiques de $\psi(x; E)$, nous introduisons une *variable de Riccati* $z(x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \psi'(x; E)/\psi(x; E)$ présentant l'intérêt d'obéir à une équation différentielle (non linéaire) du premier ordre ⁴⁷

$$\frac{d}{dx}z(x) = -E - z(x)^2 + V(x) \quad (6.66)$$

s'interprétant comme une équation de Langevin décrivant une particule de "position" $z(x)$ au "temps" x soumise à une "force" déterministe $F(z) = -E - z^2 = -U'(z)$ (figure 6.24) et à une "force" de Langevin $V(x)$. Cette analogie a été discutée par exemple par G. Jona-Lasinio [349]. Pour un bruit blanc gaussien, l'équation de Langevin peut être reliée à une équation de Fokker-Planck

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{T}(z; x) = \left[\frac{\partial}{\partial z}(E + z^2) + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \mathcal{T}(z; x) \quad (6.67)$$

pour la distribution $\mathcal{T}(z; x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta(z - z(x)) \rangle$. Le champ de force induit un flux (courant) continu de la variable z à travers \mathbb{R} . Il est utile de réécrire l'équation de Fokker-Planck sous la forme d'une équation de conservation entre densité de probabilité et courant :

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathcal{T}(z; x) = -\frac{\partial}{\partial z}\mathcal{J}(z; x) \quad \text{avec } \mathcal{J}(z; x) = -\left(E + z^2 + \frac{\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial z} \right) \mathcal{T}(z; x) \quad (6.68)$$

⁴⁷ Pour l'analyse du modèle supersymétrique désordonné, une définition plus judicieuse de la variable de Riccati est $z \stackrel{\text{def}}{=} \psi'/\psi - \phi$, conduisant à une équation différentielle linéaire dans le bruit $z' = -E - z^2 - 2z\phi(x)$. Voir l'annexe de ce chapitre.

La densité d'états intégrée par unité de longueur $N(E)$ correspond au nombre de nœuds de la solution $\psi(x; E)$ par unité de longueur, i.e. au nombre de divergences du processus $z(x)$. Celui-ci est également donné par le courant de la variable à travers \mathbb{R} . On écrit donc l'équation pour la distribution stationnaire de la variable de Riccati $\mathcal{T}(z; x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} T(z)$ pour un flux constant $\mathcal{J}(z; x) \underset{x \rightarrow \infty}{=} -N(E)$

$$N(E) = (E + z^2) T(z) + \frac{\sigma}{2} \frac{d}{dz} T(z). \quad (6.69)$$

La résolution de l'équation différentielle donne la solution normalisable :

$$T(z) = \frac{2}{\sigma} N(E) e^{-\frac{2}{\sigma} U(z)} \int_{-\infty}^z dz' e^{\frac{2}{\sigma} U(z')}, \quad (6.70)$$

où $U(z) = Ez + \frac{1}{3}z^3$ est le potentiel dans lequel évolue la variable de Riccati (figure 6.24). En normalisant explicitement cette solution nous obtenons l'expression de la densité d'états intégrée

$$N(E)^{-1} = \frac{2}{\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} dz e^{-\frac{2}{\sigma} U(z)} \int_{-\infty}^z dz' e^{\frac{2}{\sigma} U(z')} = \sqrt{\frac{2\pi}{\sigma}} \int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{y}} e^{-\frac{2}{\sigma} (Ey + \frac{1}{12}y^3)} \quad (6.71)$$

$$= \frac{\pi^2}{(\sigma/2)^{1/3}} \left(\text{Ai} \left[- (2/\sigma)^{2/3} E \right]^2 + \text{Bi} \left[- (2/\sigma)^{2/3} E \right]^2 \right). \quad (6.72)$$

La seconde expression ⁴⁸ s'obtient facilement par un changement de variable $z' = z - y$ puis en permutant les intégrales. La dernière expression en terme des fonctions d'Airy [742] est obtenue par un autre moyen [309] (voir aussi [175]). La densité d'états intégrée est tracée sur la figure 6.20.

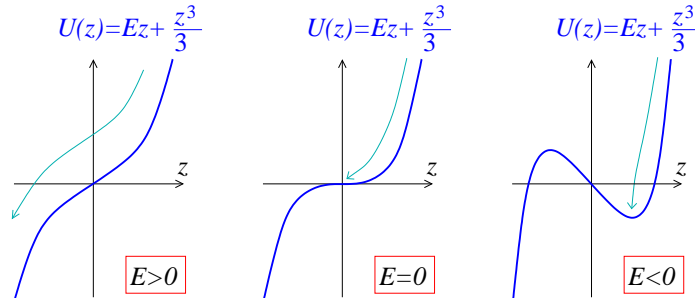


FIGURE 6.24 : Allure du potentiel $U(z)$ dans lequel évolue la variable de Riccati. En l'absence de désordre $V(x)$, la dynamique de la variable de Riccati est donnée par $\frac{dz}{dx} = -U'(z)$ (régime suramorti pour lequel vitesse=force). À $E \leq 0$ le flux du processus s'annule, $N(E) = 0$, ce qui est illustré par les flèches.

Les propriétés de localisation peuvent être analysées en introduisant l'exposant de Lyapunov

$$\gamma(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |\psi(x; E)|}{x}, \quad (6.73)$$

mesurant le taux de croissance de l'enveloppe de la fonction d'onde (figure 6.23). L'exposant de Lyapunov fournit donc une définition possible pour la longueur de localisation :

$$\boxed{\tilde{\xi}_E \stackrel{\text{def}}{=} 1/\gamma(E)}. \quad (6.74)$$

⁴⁸déjà obtenue dans l'article [262] dans l'analyse de la limite de haute densité d'impuretés.

En utilisant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln |\psi(x; E)|}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x dy \frac{d}{dy} \ln |\psi(y; E)| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x dy z(y; E) \quad (6.75)$$

et le fait que la distribution de la variable de Riccati tend vers une distribution limite, nous voyons que γ est directement donné par la moyenne de la variable de Riccati :

$$\boxed{\gamma(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dz z T(z) = \langle z \rangle} \quad (6.76)$$

où $\int_{-\infty}^{\infty} dz f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^{+R} dz f(z) = \int dx \frac{1}{2} [f(z) + f(-z)]$. La partie principale est nécessaire car

$$T(z \rightarrow \pm\infty) \simeq \frac{N(E)}{z^2}. \quad (6.77)$$

Cette relation, qui porte le nom de formule de Rice, traduit le fait que la dynamique de la variable de Riccati est dominée par la force déterministe $-U'(z) = E + z^2$ à l'infini, et donc : Densité de probabilité=Courant de probabilité/Force (puisque Force=Vitesse).

Analytic properties of the complex Lyapunov exponent (note added in 2014)

An important aspect of the theory is the fact that the Lyapunov exponent, or rather the complex Lyapunov exponent

$$\Omega(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi(x; E)}{x}, \quad (6.78)$$

where the energy E is now complex, has some analytic properties (cf. the book by Luck [769]). One has

$$\Omega(E \pm i0^+) = \gamma(E) \mp i\pi N(E). \quad (6.79)$$

For a recent review on Lyapunov exponents, see the special issue of Journal of Physics A « Lyapunov analysis : from dynamical systems theory to applications », in which is our review article :

- ✍ [716] Alain Comtet, Christophe Texier & Yves Tourigny, *Lyapunov exponents, one-dimensional Anderson localisation and products of random matrices*, J. Phys. A: Math. Theor. **46**, 254003 (2013).

Remark – Discrete formulation : The node counting method can be formulated very nicely in the context of the discrete one-dimensional Anderson model (6.1). Consider a *finite* chain of N sites, i.e. $r \in \{1, \dots, N\}$. We impose Dirichlet boundary conditions. Hence, starting from the initial conditions $\psi_0 = 0$ and $\psi_1 = 1$, we may compute the sequence of amplitudes from

$$\psi_{n+1} = (V_n - E)\psi_n - \psi_{n-1}. \quad (6.80)$$

Arriving at the other boundary, ψ_{N+1} is a polynomial in E of degree N :

$$\psi_{N+1} = \prod_{\alpha=1}^N (E_{\alpha} - E) \quad (6.81)$$

where $\{E_{\alpha}\}$ is the spectrum of eigenenergies. The precise prefactor is determined by considering the limit $E \rightarrow \infty$. Considering the limit of the semi-infinite chain we get the Thouless formula [649]⁴⁹

$$\gamma(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln |\psi_{N+1}|}{N} = \int dE' \rho(E') \ln |E' - E| \quad (6.82)$$

⁴⁹ The Thouless relation for continuous models with unbounded spectra has been discussed in an appendix of Ref. [299].

where $\rho(E')$ is the DoS per lattice site. Considering the complex Lyapunov exponent

$$\Omega(E) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \psi_{N+1}}{N} = \int dE' \rho(E') \ln(E' - E) \quad \text{for } E \notin \text{spectrum}, \quad (6.83)$$

it is clear that its imaginary part provides the DoS : $\text{Im}[\Omega'(E \pm i0^\pm)] = \mp \pi \rho(E)$ for $E \in \mathbb{R}$.

This idea has been widely used, for example in works of Jean-Marc Luck (see his book [769]).

Variables angle-enveloppe

Le formalisme de phase est présenté dans la référence [45] en introduisant des variables angle-enveloppe ⁵⁰

$$\psi(x) = e^{\xi(x)} \sin \theta(x) \quad (6.84)$$

$$\frac{d}{dx} \psi(x) = k e^{\xi(x)} \cos \theta(x), \quad (6.85)$$

où $E = k^2$, rendant l'analyse plus directe. On trouve facilement les équations différentielles stochastiques pour les deux variables :

$$\frac{d}{dx} \theta(x) = k - \frac{1}{k} V(x) \sin^2 \theta(x) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (6.86)$$

$$\frac{d}{dx} \xi(x) = \frac{1}{2k} V(x) \sin 2\theta(x) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (6.87)$$

(les équations analogues pour analyser le cas supersymétrique sont données dans [174, 792]). Les équations différentielles sont interprétées dans le sens de Stratonovich, puisque les corrélations locales du potentiel doivent être comprises comme la limite singulière de corrélations de portée finie symétriques [755]. La densité d'états est reliée au nombre de nœuds de la fonction d'onde, i.e. est donnée par

$$N(E) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{\pi x} \quad (6.88)$$

où il est entendu que $\theta(x)$ désigne la phase cumulée. D'après la discussion du paragraphe précédent, $N(E)$ peut également être reliée au courant de $\theta(x)$ modulo π à travers l'intervalle $[0, \pi]$ [puisque $z(x) = k \cotg \theta(x)$]. L'exposant de Lyapunov est donné par

$$\gamma(E) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\xi(x)}{x}. \quad (6.89)$$

À première vue il peut sembler que cette définition diffère de (6.73); montrons qu'il n'en est rien. (6.89) s'écrit en terme de la fonction d'onde

$$\gamma(E) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x} \ln \left[\psi(x)^2 + \frac{1}{k^2} \psi'(x)^2 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\ln |\psi(x)| + \frac{1}{2} \ln [1 + (z(x)/k)^2] \right) \quad (6.90)$$

Puisque $\langle \ln [1 + (z/k)^2] \rangle$ est fini, le second terme est nul ce qui démontre l'équivalence des deux définitions (6.73) et (6.89).

⁵⁰ Attention à ne pas confondre la variable $\xi(x)$ contrôlant l'enveloppe avec la longueur de localisation $1/\tilde{\xi}_E = \langle \xi(x) \rangle / x$.

Distribution de l'enveloppe de la fonction d'onde à haute énergie

On peut relier le couple d'équations (6.86,6.87) à une équation de Fokker-Planck pour la distribution jointe des deux variables : $\partial_x Q(\theta, \xi; x) = \mathcal{F}_{\theta, \xi} Q(\theta, \xi; x)$, où $Q(\theta, \xi; x) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta(\theta - \theta(x)) \delta(\xi - \xi(x)) \rangle$ et $\mathcal{F}_{\theta, \xi}$ désigne le générateur (forward) de Fokker-Planck (l'équation est explicitement donnée dans [792]). Dans la limite de haute énergie, $E \gg \sigma^{2/3}$, on peut montrer que la loi marginale de la variable ξ obéit à l'équation de Fokker-Planck $\partial_x P(\xi; x) \simeq \gamma \left(-\partial_\xi + \frac{1}{2} \partial_\xi^2 \right) P(\xi; x)$ [45, 792], où $\gamma = \sigma/(8E)$ est l'approximation de haute énergie de l'exposant de Lyapunov de haute énergie. Autrement dit le processus $\xi(x)$ est un mouvement Brownien avec dérive :

$$\xi(x) \stackrel{(\text{law})}{=} \gamma x + \sqrt{\gamma} W(x) \quad (6.91)$$

où $W(x)$ est un processus de Wiener, ⁵¹ i.e. distribué selon la loi ⁵²

$$P(\xi; x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi\gamma x}} \exp -\frac{1}{2\gamma x} (\xi - \gamma x)^2 \quad \text{for } E \gg \text{disorder}, \quad (6.92)$$

(dans le cas du modèle (A) avec potentiel bruit blanc la condition de haute énergie est $E \gg \sigma^{2/3}$). Antsygina, Pastur & Slyusarev [45] montrent que ce résultat est de portée très générale, indépendant de la nature du désordre, pourvu que la transformée de Fourier de la fonction de corrélation $\sigma(2k) = \int dx \cos 2kx \langle V(x)V(0) \rangle$ existe (elle remplace alors le paramètre σ). L'égalité des deux premiers cumulants de la variable ⁵³

$$\langle \xi(x) \rangle \simeq \langle \xi(x)^2 \rangle_c \simeq \gamma x \quad (6.93)$$

où $\langle \dots \rangle_c$ est la fonction de corrélation connexe (le cumulante) est une traduction du *single parameter scaling* : la distribution du processus $\xi(x)$ ne fait intervenir qu'une seule échelle γ .

Application 1 : distribution de la conductance Nous considérons une région désordonnée de longueur L finie, connectée à ses deux extrémités à deux régions non désordonnées. La conductance adimensionnée g de la région désordonnée est donnée par la formule de Landauer et s'exprime comme la probabilité de transmission, i.e $g \approx |\psi(L)|^{-2} \approx e^{-2\xi(L)}$, où $\psi(x)$ est la solution du problème de Cauchy. La distribution de la conductance est donc une loi log-normale :

$$\Pi(\ln g) \simeq \frac{1}{\sqrt{8\pi\gamma L}} \exp -\frac{1}{8\gamma L} (\ln g + 2\gamma L)^2 \quad (6.94)$$

Notons qu'en principe l'étude de la transmission devrait être formulée à partir d'un état stationnaire de diffusion décrivant la transmission à travers une tranche de désordre de longueur L (comme c'est fait dans la Ref. [45] ou rappelé dans ma thèse [792]). Cette fonction d'onde satisfait alors des conditions aux limites différentes de la solution du problème de Cauchy $-\psi(0) = 0$ et $\psi'(0) = 1$. Cependant, lorsque $\gamma x \gg 1$, la mémoire des conditions initiales est perdue, ce qui nous permet d'écrire plus directement que $g \approx |\psi(L)|^{-2}$.

⁵¹un mouvement Brownien normalisé, t.q. $W(0) = 0 : \langle W(x) \rangle = 0$ et $\langle W(x)W(x') \rangle = \min(x, x')$.

⁵² On peut également démontrer ce résultat dans le cadre du modèle supersymétrique [174, 792].

⁵³ L'égalité des deux cumulants $\langle \xi(x) \rangle = \langle \xi(x)^2 \rangle_c$ est valable uniquement dans la limite $E/\sigma^{2/3} \rightarrow \infty$ (seuls les termes dominants des développements des deux cumulants en puissances de σ coïncident [792]). (Cf. annexe page 228)

Application 2 : distribution de la densité d'états locale La connaissance de la distribution de $\xi(x)$ donne assez directement accès à la densité d'états locale dans une région désordonnée, un problème analysé par Altshuler & Prigodin [34]. Nous considérons une situation de diffusion où le potentiel désordonné a pour support l'intervalle $[0, L]$ et nous intéressons au cas d'une condition de réflexion à l'origine (figure 6.25). L'onde incidente est entièrement réfléchiée et la matrice \mathcal{S} prend la forme d'un nombre de module 1 : $\mathcal{S} = e^{i\delta}$ où δ est le *déphasage*. Nous pouvons écrire l'état stationnaire de diffusion d'énergie E comme :

$$\psi_E(x) = \frac{e^{i\delta/2}}{\sqrt{\pi k}} e^{\xi(x)-\xi(L)} \sin \theta(x) \quad \text{pour } 0 < x < L \quad (6.95)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi k}} \left(e^{-ik(x-L)} + e^{+ik(x-L)+i\delta} \right) \quad \text{pour } x > L \quad (6.96)$$

où $\theta(x)$ et $\xi(x)$ sont les solutions des équations (6.86,6.87) pour les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\xi(0) = 0$. La résolution de l'équation différentielle (6.86) donne le déphasage

$$\delta = 2\theta(L) + \pi. \quad (6.97)$$

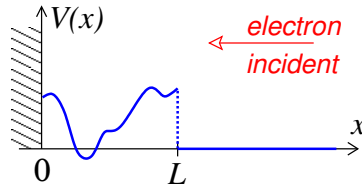


FIGURE 6.25 : Onde envoyée sur une région désordonnée.

Nous considérons maintenant la densité d'états locale (LDoS)

$$\rho(x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \langle x | \delta(E - \hat{H}) | x \rangle = |\psi_E(x)|^2 \quad (6.98)$$

(le choix de normalisation de l'état stationnaire assure qu'il n'y a pas de facteur supplémentaire). Nous éliminons les fluctuations sur l'échelle de la longueur d'onde en définissant :

$$\tilde{\rho}(x; E) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x-\delta x/2}^{x+\delta x/2} \frac{dx'}{\delta x} \rho(x'; E) \quad \text{avec } k^{-1} \ll \delta x \ll \gamma^{-1}, \quad (6.99)$$

(cette définition n'a de sens que dans la limite de faible désordre pour laquelle $\gamma \ll k$). En utilisant l'expression de l'état stationnaire, nous obtenons la LDoS dans la région désordonnée :

$$\tilde{\rho}(x; E) \simeq \rho_0 e^{2[\xi(x)-\xi(L)]}. \quad (6.100)$$

où $\rho_0 = \frac{1}{2\pi k}$ est la DoS du problème libre. En utilisant la propriété du mouvement brownien

$$\xi(L) - \xi(x) \stackrel{(\text{law})}{=} \xi(L - x) \quad (6.101)$$

nous déduisons immédiatement que la distribution de la LDoS au point x est log-normale

$$P(\tilde{\rho}; x) = \frac{1}{\tilde{\rho} \sqrt{8\pi\gamma(L-x)}} \exp - \frac{1}{8\gamma(L-x)} [\ln(\tilde{\rho}/\rho_0) + 2\gamma(L-x)]^2 \quad \text{for } E \gg \text{disorder} \quad (6.102)$$

Nous avons retrouvé assez simplement le résultat d'Altshuler & Prigodin [34], obtenu par la méthode diagrammatique des blocs de Berezinskii [72]. Cette expression montre donc que la LDoS présente de très grandes fluctuations⁵⁴ caractérisées par les moments exponentiels :

$$\langle [\tilde{\rho}(x; E)]^n \rangle = \rho_0^n e^{2n(n-1)\gamma(L-x)} \quad \text{for } 0 < x < L. \quad (6.103)$$

Le fait que le premier moment soit uniforme $\langle \tilde{\rho}(x; E) \rangle = \rho_0 = \frac{1}{2\pi k}$ repose sur l'égalité (6.93). Les fluctuations croissent exponentiellement dans la région désordonnée, en s'éloignant du bord, ce que nous interprétons comme la manifestation de la présence d'états résonants dans la région désordonnée [635].

Mesoscopic versus microscopic LDoS fluctuations.— In the previous paragraph, I considered the « mesoscopic LDoS », i.e. the LDoS averaged over the rapid (microscopic) oscillations of wavevector $k = \sqrt{E}$. In Ref. [575], the authors have also studied the « microscopic LDoS » : using the statistical independence of the smooth envelope and the rapidly oscillating part of the stationary state, they wrote the distribution of the microscopic LDoS

$$P_{\text{micro}}(\rho; x) = \int_0^\infty d\tilde{\rho} P(\tilde{\rho}; x) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \delta(\rho - 2\tilde{\rho} \sin^2 \theta). \quad (6.104)$$

Although the log-normal tails of the two distributions $P(\tilde{\rho}; x)$ and $P_{\text{micro}}(\rho; x)$ are similar, the authors showed that the behaviours for $\rho, \tilde{\rho} \rightarrow 0$ strongly differ :⁵⁵ $P_{\text{micro}}(\rho; x) \sim \rho^{-1/2}$.

Schomerus and collaborators also considered the distribution of the LDoS for a closed system (as Altshuler and Prigodin) : in this case they had to broaden the energy levels by a constant width. The two distributions $P(\tilde{\rho})$ and $P_{\text{micro}}(\rho)$, although different, present similar behaviours for a closed system.

Application 3 : distribution du temps de Wigner La dernière application concerne la distribution du temps de Wigner, une propriété étudiée dans la situation unidimensionnelle désordonnée dans plusieurs articles [345, 322, 239, 174, 635]. Considérons encore une fois la situation décrite par la figure 6.25. Le temps de Wigner est défini comme la dérivée du déphasage par rapport à l'énergie

$$\tau \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\delta}{dE}. \quad (6.105)$$

J'avais analysé en détail ses propriétés statistiques au cours de ma thèse [792]. En utilisant la relation de Friedel-Smith (1.34) nous pouvons écrire :

$$\int_0^L dx \rho(x; E) = \int_0^L dx |\psi_E(x)|^2 = \frac{1}{2\pi} \frac{d\delta}{dE} + \frac{\sin \delta}{4\pi E} \quad (6.106)$$

i.e.

$$\tau = 2\pi \int_0^L dx \rho(x; E) - \frac{1}{2E} \sin \delta \quad (6.107)$$

En utilisant encore une fois les propriétés statistiques obtenues ci-dessus pour l'état stationnaire, nous voyons, qu'à haute énergie, le temps de Wigner prend la forme d'une fonctionnelle exponentielle du mouvement brownien avec dérive [635]

$$\tau \simeq 2\pi \int_0^L dx \tilde{\rho}(x; E) \simeq \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{2[\xi(x) - \xi(L)]} \stackrel{(\text{law})}{=} \frac{1}{k} \int_0^L dx e^{-2\xi(x)} \quad (6.108)$$

⁵⁴ Rappelons que les moments de la distribution log-normale $p(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp -\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}$ sont donnés par $\langle x^n \rangle = \exp(n\mu + \frac{1}{2}n^2\sigma^2)$.

⁵⁵ Schomerus, Titov, Brouwer and Beenakker pointed out that the random phase approximation implies the functional relation $P(1/\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^3 P(\tilde{\rho})$ for the distribution of the mesoscopic LDoS [268].

dont les propriétés statistiques ont été étudiées [695, 469, 776, 172] : distribution du type log-normale à L finie,

$$P_L(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\sim} \exp \left\{ -\frac{1}{8\gamma L} \ln^2 \tau \right\}, \quad (6.109)$$

moments d'ordre supérieur à 2 exponentiels $\langle \tau \rangle = 2\pi\rho_0 L$ et $\langle \tau^n \rangle \simeq \frac{(n-2)!}{(2n-2)!} \left(\frac{\pi\rho_0}{\gamma} \right)^n e^{2n(n-1)\gamma L}$ et existence d'une distribution limite pour $L \rightarrow \infty$:

$$P_\infty(\tau) = \frac{\tau_\xi}{\tau^2} \exp \left\{ -\frac{\tau_\xi}{\tau} \right\} \quad \text{for } E \gg \text{disorder}, \quad (6.110)$$

où $\tau_\xi = 1/2k\gamma = \tilde{\xi}_E/v_k$. Cela montre qu'un paquet d'onde d'énergie $E = k^2$ passe un temps typique τ_ξ dans la région désordonnée, i.e. pénètre sur une distance donnée par la longueur de localisation $\tilde{\xi}_E = 1/\gamma$ à vitesse $v_k = 2k$. Les fluctuations larges de τ sont dominées par des événements rares correspondant au piègeage de l'onde dans des états localisés loin du bord [635].

Universalité Nous avons vu sur trois exemples que l'universalité des propriétés statistiques de trois quantités physiques, la conductance, la DoS locale et le temps de Wigner, repose sur celles du processus $\xi(x)$, l'éq. (6.91) ou l'éq. (6.92). Ces propriétés d'universalité trouvent donc leur origine dans le Single Parameter Scaling.

Distance entre nœuds de la fonction d'onde et distribution des énergies ordonnées

Je rappelle dans cette section quelques idées développées dans mon article [628]. Nous venons de voir que la densité d'états par unité de longueur est directement relié au courant de la variable $z(x)$ à travers \mathbb{R} . Une autre interprétation est basée sur les variables aléatoires ℓ_n désignant les distances entre nœuds successifs de la fonction d'onde (figure 6.23) :

$$\psi(0; E) = \psi(\ell_1; E) = \psi(\ell_1 + \ell_2; E) = \psi(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3; E) = \dots = 0 \quad (6.111)$$

i.e.

$$z(0; E) = z(\ell_1; E) = z(\ell_1 + \ell_2; E) = z(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3; E) = \dots = \infty. \quad (6.112)$$

La longueur ℓ_n s'interprète comme le "temps" mis par la variable de Riccati pour aller de $z = +\infty$ à $z = -\infty$. Ce type de problème est standard dans l'étude des processus stochastiques : il s'agit d'un problème de "first passage time" (la position est fixée et le temps est aléatoire). La fonction génératrice de cette variable s'obtient en résolvant une équation de Fokker-Planck backward [755] :

$$\left[-(E + z^2) \frac{d}{dz} + \frac{\sigma}{2} \frac{d^2}{dz^2} \right] h(z; \alpha) = \alpha h(z; \alpha) \quad (6.113)$$

pour $h(-\infty; \alpha) = 1$ et $\partial_z h(z; \alpha)|_{+\infty} = 0$ où

$$h(z; \alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \langle e^{-\alpha \mathcal{L}_z} \mid z(0) = z \ \& \ z(\mathcal{L}_z) = -\infty \rangle \quad (6.114)$$

est la fonction génératrice du "temps" \mathcal{L}_z mis par $z(x)$ pour aller de z à $-\infty$. Donc $\ell \equiv \mathcal{L}_\infty$. Les moments de \mathcal{L}_z peuvent être obtenus récursivement :

$$\mathcal{L}_n(z) = \langle \mathcal{L}_z^n \rangle = \frac{2n}{\sigma} \int_{-\infty}^z dz' e^{\frac{2}{\sigma} U(z')} \int_{z'}^{+\infty} dz'' e^{-\frac{2}{\sigma} U(z'')} \mathcal{L}_n(z''). \quad (6.115)$$

La distribution $P(\ell)$ est donc donnée par

$$h(+\infty; \alpha) = \int_0^\infty d\ell P(\ell) e^{-\alpha \ell} \quad (6.116)$$

Dans cette formulation, la densité d'états peut être reliée à l'inverse de la distance moyenne entre nœuds (qui est donc égal au flux du processus $z(x)$ à travers \mathbb{R})

$$\boxed{N(E) = \frac{1}{\langle \ell \rangle} = \frac{1}{\mathcal{L}_1(+\infty)}} \quad (6.117)$$

Il est possible d'obtenir, non seulement le premier moment $\langle \ell \rangle = \mathcal{L}_1(+\infty)$, mais la distribution complète $P(\ell)$ qui donne accès à la statistique des valeurs ordonnées (ordered ou extreme value statistics) des valeurs propres de l'Hamiltonien. Pour une configuration du désordre, H possède un spectre de valeurs propres $E_1 < E_2 < E_3 < \dots$. Nous introduisons la distribution de la n ème énergie :

$$\boxed{W_n(E; L) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \delta(E - E_n[V(x)]) \rangle_{V(x)}} \quad \text{pour } n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.118)$$

Alors que la densité d'états

$$\rho(E; L) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(E - E_n) \quad (6.119)$$

indique avec quelle probabilité *une parmi les valeurs propres* coïncide avec l'énergie E , la distribution $W_n(E; L)$ nous indique avec quelle probabilité *la n ème valeur propre* se trouve en E . Il s'agit donc d'une information sur le spectre beaucoup plus fine, ce qui est clair en remarquant que la densité d'états moyenne du système de longueur L s'écrit

$$\langle \rho(E; L) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(E; L) . \quad (6.120)$$

La densité d'états par unité de longueur introduite plus haut est donnée par

$$\rho(E) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \langle \rho(E; L) \rangle . \quad (6.121)$$

Les distributions $W_n(E; L)$ peuvent être reliées à la distribution $P(\ell)$ en notant que

$$E_n = E \quad \text{si} \quad \ell_1 + \dots + \ell_n = L , \quad (6.122)$$

d'où ⁵⁶

$$\boxed{W_n(E; L) \propto \underbrace{(P * \dots * P)}_{n \text{ fois}}(L)} \quad (6.123)$$

Ces distributions ont été analysées dans [628] dans le cadre des deux modèles (6.43) et (6.57). L'intérêt d'analyser ces deux situations repose sur la nature très différentes des états de basse énergie dans les deux cas : des états fortement localisés dans le premier cas et une délocalisation à basse énergie dans le second. Ces résultats ont trouvé récemment deux applications décrites ci-dessous.

6.4 Quelques questions

Les deux classes d'Hamiltoniens, $H_{\text{scalar}} = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ et $H_{\text{susy}} = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi^2(x) + \phi'(x)$, présentent des propriétés très différentes comme des singularités spectrales de natures diverses, mais surtout la possible existence d'un point de délocalisation dans le second cas. Ces différences

⁵⁶Cela repose sur l'invariance statistique des ℓ_n , conséquence de la forme des corrélations $\langle V(x)V(x') \rangle \propto \delta(x - x')$.

sont frappantes si l'on compare les figures 6.20 & 6.21 à la figure 6.22 : les deux premières, comparables qualitativement, montrent des comportements opposés à la dernière figure. Dans un cas on observe une suppression de la DoS de basse énergie, contre une augmentation dans le cas supersymétrique. D'autre part les potentiels aléatoires scalaires conduisent à un exposant de Lyapunov fini à basse énergie puis décroissant à haute énergie alors que l'exposant de Lyapunov du modèle supersymétrique s'annule à basse énergie et croît avec l'énergie.⁵⁷ Ces remarques avaient soulevé diverses questions.

Q1 : Des propriétés plus fines du spectre

Alors que de nombreuses études se sont concentrées sur l'analyse de la densité d'états moyenne et de l'exposant de Lyapunov,⁵⁸ je m'étais intéressé à l'étude de propriétés spectrales plus fines : l'analyse des distributions $W_n(E; L)$.

Statistique spectrale ordonnée pour le spectre d'Hamiltoniens désordonnés

✎ [628] Christophe Texier, *Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 6095–6128 (2000).— Dans ce travail j'avais obtenu les distributions $W_n(E; L)$, généralisant un résultat de MacKean [447] (pour la distribution de l'énergie du fondamental). Ce type d'analyse est appelée un problème de statistique des valeurs ordonnées ou extrêmes : étant donné un certain nombre de variables aléatoires, quelle est la distribution de la plus petite, de la seconde, etc ? Dans le cas des variables non corrélées, toutes distribuées par une même loi $p(x)$, les différentes classes d'universalité ont été classifiées pour des lois à décroissance exponentielle (Gumbel) [303], en loi de puissance (Fréchet) [257] ou à support borné avec comportement en loi de puissance (Weibull) [304, 760]. Le cas de variables corrélées est beaucoup plus difficile à analyser. Il a suscité un grand nombre de travaux ces dernières années : on peut mentionner le célèbre calcul de Tracy & Widom pour les valeurs propres des matrices aléatoires [656, 657] ou quelques autres travaux dans le contexte de la physique statistique [96, 186, 432, 170].

Dans le cadre de la localisation unidimensionnelle, les valeurs propres E_n sont *a priori* corrélées. Cependant dans la phase **fortement localisée** (type A, $\forall E$) les distributions⁵⁹

$$W_n(E; L) \simeq L \rho(E) \frac{[LN(E)]^{n-1}}{(n-1)!} e^{-LN(E)} \quad \text{pour} \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (6.124)$$

coïncident avec les lois de Gumbel de variables *non corrélées*, comme je l'ai montré dans le cas

⁵⁷ notons que la saturation de $\gamma_{\text{susy}}(E)$ à haute énergie est due à la nature singulière du potentiel $\phi^2 + \phi'$ lorsque ϕ est un bruit blanc. Si le bruit est régularisé, i.e. pour des corrélations de portée finie comme c'est le cas pour un bruit du télégraphe, l'exposant de Lyapunov redécroit à haute énergie [169].

⁵⁸ Mentionnons toutefois des travaux sur le facteur de structure (fonction de Green à points non coïncidants) et la conductivité [286, 45, 721, 33], la densité d'états locale [34, 115, 575], la distribution du déphasage dans la situation de scattering [58, 323] le temps de Wigner [345, 239, 350, 279, 635, 652, 509] la distribution de la probabilité de transmission [45, 321, 613], etc. Une revue de certains de ces résultats est donnée dans l'ouvrage de Lifshits, Gredeskul & Pastur [768].

⁵⁹ **Dépliage du spectre (Spectrum unfolding).**— Il est intéressant de pointer que l'écriture des distributions sous la forme $W_n(E; L) = L \rho(E) \times w_n[LN(E)]$, où $N(E)$ est la DoS intégrée par unité de longueur et $\rho(E) = N'(E)$ la DoS, correspond au "dépliage du spectre". I.e. le changement de variable $E_n \rightarrow x_n = LN(E_n)$ conduit à considérer un ensemble de variables aléatoires $\{x_1, x_2, \dots\}$ caractérisé par une densité moyenne égale à l'unité. Dans le cas considéré ici, le fait que les distributions coïncident avec la distribution de Poisson $w_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-x}$ traduit bien que les variables sont non corrélées puisque $w_n(x)$ est reliée à la probabilité de trouver les n premières valeurs dans l'intervalle $[0, x]$. Ce résultat est réminiscent du calcul de Molčanov donnant la distribution du nombre de niveaux dans un intervalle d'énergie [465].

où le potentiel est un bruit blanc gaussien :

$$W_n(E; L) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{1}{\delta E_n} \omega_n \left(\frac{E - E_n^{\text{typ}}}{\delta E_n} \right) \quad \text{où} \quad \omega_n(x) = \frac{n^{n-1/2}}{(n-1)!} e^{\sqrt{n}x - n e^{x/\sqrt{n}}} \quad (6.125)$$

pour une énergie typique et une largeur

$$E_n^{\text{typ}} \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} - \left(\frac{3\sigma}{8} \ln \frac{L\sigma^{1/3}}{2\pi n} \right)^{2/3} \quad \text{et} \quad \delta E_n \sim \frac{\sigma^{2/3}}{\sqrt{n} \ln^{1/3} L}. \quad (6.126)$$

Les distributions de Gumbel avaient été obtenues plusieurs années avant dans [302] pour le modèle d'impuretés δ , sans que la relation avec le problème de statistique de valeurs ordonnées n'ait été pointée : dans le régime fortement localisé, les lois (6.125) sont universelles alors que les scalings (6.126) dépendent des détails du modèle. L'apparition des lois de Gumbel traduit l'absence de corrélations spectrales dans la phase fortement localisée [465].

Le cas du type B est intéressant [628] : dans ce cas les distributions $W_n(E; L)$ ne coïncident pas avec l'une des classes de distributions d'extrême (Gumbel, Fréchet, Weibull), ce qui indique l'existence de corrélations spectrales, attendues au voisinage de la transition de délocalisation (les distributions sont données ci-dessous).

Outre leur intérêt propre, le calcul des distributions $W_n(E; L)$, eq. (6.127), qui a été étendu à un autre modèle dans [308], a trouvé deux applications : pour l'analyse de la sensibilité de la densité d'états moyenne aux conditions aux limites [639] et pour l'étude d'un modèle de diffusion classique en milieu aléatoire en présence d'absorption [638].

La question sous-jacente à l'analyse des distributions $W_n(E; L)$, ou de la sensibilité de la densité d'états aux bords, est de comprendre comment la présence des bords affecte la délocalisation à $E = 0$ puisque la supersymétrie est brisée (i.e. il n'y a plus de solution d'énergie nulle).

Effet des bords sur le spectre au voisinage du point de délocalisation

✎ [639] Christophe Texier & Christian Hagendorf, *Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 025002 (2010).— Ce travail montre que les distributions $W_n(E; L)$ pour l'Hamiltonien supersymétrique (obtenues sous forme intégrale dans [628]) :

$$W_n(E; L) \underset{L \rightarrow \infty}{\simeq} L \rho(E) \pi_{2n} \left(L N(E) \right) \quad \text{pour} \quad N(E) \underset{E \rightarrow 0^+}{\simeq} \frac{2g}{\ln^2(g^2/E)}, \quad (6.127)$$

où $\rho(E) = N'(E)$ désigne la densité d'états moyenne par unité de volume du système *infini*, trouvent une première application. Les distributions de l'énergie rescalée (pour assurer une densité égale à l'unité) sont données, dans la limite de basse énergie $E \ll g^2$, par

$$\pi_n(y) \simeq \int_{\mathcal{B}} \frac{dq}{2i\pi} \frac{e^{qy}}{\cosh^n \sqrt{q}}, \quad (6.128)$$

où \mathcal{B} est un contour de Bromwich (les distributions pour des indices impairs ont un intérêt pour d'autres types de conditions aux limites). Une expression explicite des distributions est obtenue dans cet article par une méthode de fonctions génératrices.

$$\pi_{2k+1}(y) = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi} y^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+k} (2m+1) \binom{m+k}{m-k} e^{-\frac{(m+1/2)^2}{y}} \quad (6.129a)$$

$$\pi_{2k}(y) = \frac{2^{2k}}{\sqrt{\pi} y^{3/2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+k} m \binom{m+k-1}{m-k} e^{-m^2/y} \quad (6.129b)$$

Ces distributions sont utilisées pour obtenir la densité d'états moyenne (6.120) *en volume fini*, i.e. *a priori* sensible aux conditions aux limites.

- Commençons par examiner cette question dans le cadre du modèle (A) : la sommation des distributions (6.124) conduit à $\langle \rho(E; L) \rangle \simeq L \rho(E)$. Dans la phase localisée la densité d'états est insensible aux effets de bord. Le calcul n'a apporté aucune nouvelle information.
- En revanche, pour le modèle (B), au voisinage du point de délocalisation (si $E \rightarrow 0$) la sommation des distributions (6.127) conduit à un résultat non trivial montrant une suppression log-normale de la densité d'états à basse énergie :

$$\langle \rho(E; L) \rangle \simeq \frac{8}{E \sqrt{2\pi gL}} e^{-\frac{1}{2gL} \ln^2(g^2/E)} \quad \text{pour} \quad E \ll E_c = g^2 e^{-\sqrt{2gL}} \quad (6.130)$$

montrant la sensibilité de la DoS aux effets de bord. À plus haute énergie, $E \gg E_c$, on retrouve la densité d'états du bulk, $\langle \rho(E; L) \rangle \simeq L \rho(E)$.

Remarque : Notons que la distribution $\pi_1(x)$ apparaît dans le contexte du problème de Sinai (ou des chaînes de spins désordonnées) et s'interprète comme la distribution de la longueur des liens renormalisés [248] dans la méthode du groupe de renormalisation dans l'espace réel.

Critère de localisation : sensibilité de la DoS aux conditions aux limites L'idée d'étudier l'effet des conditions aux limites pour caractériser la localisation remonte aux travaux de Thouless [734] (en particulier en analysant des conditions aux limites mimant l'effet d'un flux AB dans une géométrie annulaire). Notre analyse fournit une manière de caractériser les propriétés de localisation différente de celle donnée par l'exposant de Lyapunov ⁶⁰ : $\langle \rho(E; L) \rangle$ dévie de $L \rho(E)$ pour $L \lesssim \xi_E$. La longueur de localisation obtenue

$$\xi_E \sim \frac{1}{g} \ln^2(g^2/E) \gg \tilde{\xi}_E \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(E)^{-1} \sim \frac{1}{g} \ln(g^2/E) \quad (6.131)$$

est plus importante que celle donnée par l'exposant de Lyapunov, ce qui s'explique par le rôle des fluctuations (cf. discussion de Daniel Fisher [247] ou [54, 614, 639], ou plus récemment [538]). Cette longueur coïncide avec la longueur de corrélation extraite du calcul de la fonction de Green moyenne à points *non* coïncidants [95, 54]. Nous sommes dans une situation où la longueur de localisation définie par (6.4) (i.e. $\tilde{\xi}_E$) ne coïncide pas avec (6.5) (i.e. ξ_E)

Q2 : Briser la supersymétrie ?

Puisque les deux classes de modèles introduites présentent des propriétés assez différentes (comparer les figures 6.20 et 6.22) on peut se demander s'il est possible de passer continûment de l'une à l'autre. Ceci suggère l'analyse de l'Hamiltonien

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi(x)^2 + \phi'(x) + V(x) \quad (6.132)$$

⁶⁰ Notons une petite nuance sémantique : dans la terminologie "standard" [726] la question de la localisation ou de la délocalisation des états est discutée dans la limite de volume infini (éventuellement par une analyse de scaling finite size effects). Le modèle supersymétrique serait défini comme toujours localisé, sauf exactement à $E = 0$. Nous montrons ici que la discussion des effets de bords est non triviale au voisinage de la transition de délocalisation.

où le potentiel scalaire est choisi aléatoire également. Comment brise-t-on la supersymétrie par introduction d'un désordre scalaire $V(x)$? Quelles sont les échelles pertinentes?

Par un bruit blanc gaussien

✎ [308] Christian Hagendorf & Christophe Texier, *Breaking of supersymmetry in one-dimensional a random Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 405302 (2008).— Ce travail présente l'analyse d'un nouveau cas soluble, lorsque les deux fonctions $\phi(x)$ et $V(x)$ sont deux bruits blancs gaussiens ($\langle \phi\phi \rangle = g\delta$ et $\langle VV \rangle = \sigma\delta$). Nous montrons qu'une fraction

$$N(0) \underset{\sigma \rightarrow 0}{\sim} \frac{g}{\ln^2(g^3/\sigma)} \quad (6.133)$$

des états migrent vers la partie négative du spectre. L'exposant de Lyapunov ne s'annule plus (la délocalisation est brisée) mais atteint une valeur finie $\gamma(0) \sim g/\ln(g^3/\sigma)$. La densité d'états présente un comportement (type de singularité de Lifshits)

$$N(E) \underset{E \rightarrow -\infty}{\sim} \exp -\frac{\pi|E|}{\sqrt{\sigma g}} \quad (6.134)$$

(le préfacteur est étudié en détail). Sous l'effet du potentiel scalaire, les valeurs propres pénètrent dans \mathbb{R}^- sur une échelle d'énergie $\delta E \sim \sqrt{g\sigma}$. L'analyse des statistiques des extrêmes montre que pour une longueur finie L la valeur critique du désordre scalaire modifiant significativement les propriétés du cas supersymétrique est $\sigma_c \sim g^3 e^{-\sqrt{g}L}$, soulignant l'extrême fragilité de la transition de délocalisation sous l'introduction du désordre scalaire [308].

Q : Terminons ce petit paragraphe en soulevant un problème lié au comportement de la densité d'états : une décroissance $\rho(E \rightarrow -\infty) \sim \exp -\frac{\pi}{\sqrt{\sigma g}}|E|$ conduit à une fonction de partition moyenne $Z(t)$ divergente pour $t < \pi/\sqrt{\sigma g}$, i.e. $Z(t)$ divergente à basse température, sous la température $1/t < T_c = \sqrt{\sigma g}/\pi$. La question est de donner une interprétation à ce résultat... Est-ce dû à de grandes fluctuations de l'énergie fondamentale E_0 ?

Par un potentiel d'impuretés δ

✎ [638] Christophe Texier & Christian Hagendorf, *One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers*, Europhys. Lett. **86**, 37011 (2009).— L'étude de l'Hamiltonien H_{susy} est reliée au problème de Sinai [600] de la diffusion classique dans un champ de force aléatoire.⁶¹ Le cas où la supersymétrie est brisée par l'introduction d'un potentiel scalaire d'impuretés δ , plutôt que par un bruit blanc, est plus pertinent dans ce contexte et correspond au problème de diffusion en milieu aléatoire en présence de sites absorbants. L'analyse de la probabilité de retour à l'origine du problème de diffusion classique conduit alors à une analyse du spectre de l'opérateur de Schrödinger

$$H = H_{\text{susy}} + \sum_n \alpha_n \delta(x - x_n) \quad (6.135)$$

où les $\alpha_n > 0$ sont les "taux" d'absorption aux sites x_n , dont la position est aléatoire, pour une densité moyenne ρ .

⁶¹ Le problème de Sinai est l'étude de la diffusion d'une particule brownienne dans un champ de force désordonné. La dynamique peut être décrite au moyen d'une équation de Langevin $\dot{x}(t) = 2\phi(x(t)) + \sqrt{2}\eta(t)$ où $\phi(x)$ est le champ de force gelé et $\eta(t)$ la force de Langevin (bruit thermique). Si $\phi(x)$ est un bruit blanc gaussien, la dynamique de la particule est gouvernée par le franchissement de barrières de potentiels hautes $\int_0^x dx' \phi(x') \sim \sqrt{x}$ sur des temps $t \sim \exp \sqrt{x}$ (loi d'Arrhénius). Le mouvement de la particule est donc sous-diffusif $x(t) \sim \ln^2 t$.

L'idée de l'analyse repose sur la remarque que dans la limite où les taux sont importants $\alpha_n \rightarrow \infty$ et pour une faible densité d'absorbeurs $\rho \rightarrow 0$, la présence des impuretés δ impose des conditions de Dirichlet aux bords d'intervalles $[x_n, x_{n+1}]$ disconnectés. On peut écrire $\text{Spec}(H) = \cup_n \text{Spec}(H_{\text{susy}} \text{ on } [x_n, x_{n+1}])$, ce qui conduit à la densité d'états intégrée

$$\boxed{N(E) \underset{\rho \rightarrow 0}{\simeq} \rho \overline{\langle \mathcal{N}_{\text{susy}}(E; \ell) \rangle}^\ell} \quad (6.136)$$

où $\langle \mathcal{N}_{\text{susy}}(E; \ell) \rangle$ désigne la DoS intégrée de H_{susy} sur $[0, \ell]$ avec conditions de Dirichlet, moyennée sur le désordre, i.e. la quantité étudiée ci-dessus. $\overline{\dots}^\ell$ désigne une moyenne sur la longueur de l'intervalle, distribuée selon la loi de Poisson exponentielle correspondant à des positions d'impuretés non corrélées.

Nous montrons que la singularité de Dyson est convertie en un comportement en loi de puissance de l'IDoS avec un exposant proportionnel à la racine carré de la densité d'absorbeurs ⁶²

$$\boxed{N(E) \underset{E \rightarrow 0}{\sim} E \sqrt{2\rho/g}} \quad (6.137)$$

Ce résultat [638] est une autre application des distributions $W_n(E; L)$ obtenues dans [628]. Il a été confirmé par une autre approche [399] (groupe de renormalisation dans l'espace réel).

Il est intéressant de pointer que nous avons obtenu un nouveau type de singularité spectrale en loi de puissance. Je résume dans le tableau les différents types de singularités spectrales de systèmes 1D connues (par l'auteur de ces lignes).

Note added in 2014 : The exponent $\sqrt{2\rho/g}$ controlling the DoS power law behaviour has been confirmed by identifying an exactly solvable version of the model. This has led us to develop a particular perturbative like method to study more general models by deviation from the solvable point [299].

- ✍ [299] Aurélien Grabsch, Christophe Texier & Yves Tourigny, *One-dimensional disordered quantum mechanics and Sinai diffusion with random absorbers*, J. Stat. Phys. **155**(2), 237–276 (2014).

Q3 : Impuretés ponctuelles généralisées

- ✍ [175] Alain Comtet, Christophe Texier and Yves Tourigny, *Products of random matrices and generalised quantum point scatterers*, J. Stat. Phys. **140**(3), 427–466 (2010). – Le modèle des impuretés δ introduit plus haut a été très largement étudié. Il était bien connu dans la communauté de physique mathématique que la notion d'impureté ponctuelle peut être généralisée [583, 745, 9]. Dans notre article, nous discutons un modèle avec des impuretés ponctuelles généralisées avec poids aléatoires et position aléatoires. La relation avec les problèmes de produits de matrices aléatoires de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ est soulignée.

Note added in 2014 : Le lien avec les produits de matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ nous a amené à reconsidérer le problème du calcul de l'exposant de Lyapunov de manière plus générale. En nous plaçant dans une *limite continue* (matrices proches de l'identité) et en utilisant l'information sur le groupe, nous avons en effet réussi à calculer l'exposant de Lyapunov pour des produits

⁶² Ce résultat a une interprétation dans le cadre du modèle de Sinai : on peut en effet relier la densité spectrale à la probabilité de retour moyennée sur le désordre $\overline{P(x, t|x, 0)}$. L'effet des sites absorbants dans le problème libre est une décroissance de la probabilité $\overline{P(x, t|x, 0)} \sim \exp -(\rho^2 t)^{1/3}$. Dans le problème de Sinai sans absorption, la dynamique ultra lente est caractérisé par une probabilité de retour $\overline{P(x, t|x, 0)} \sim g \ln^{-2}(g^2 t)$. En présence de champ de force aléatoire et de sites absorbants, nous venons de trouver que la probabilité est une loi de puissance $\overline{P(x, t|x, 0)} \sim t^{-\sqrt{2\rho/g}}$.

Model	DoS singularity	Ref.
$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V$		
V : Gaussian	$\rho(E \rightarrow -\infty) \sim E e^{-\frac{8}{3\sigma} E ^{3/2}}$	[309]
V : Poissonian for $\rho \rightarrow 0$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim E^{-3/2}e^{-\pi\rho E^{-1/2}}$	Lifshits [262, 415]
V : Poissonian for $\rho \rightarrow 0$ $v_n = -v \forall n$	$\rho(E \rightarrow -\frac{v^2}{4}) \sim E + \frac{v^2}{4} ^{-1+2\rho/ v }$	Halperin [310]
V : Poissonian for $\rho \rightarrow 0$ $p_V(v_n) = \frac{1}{v}e^{-\frac{v_n}{v}}$ for $v_n < 0$	$\rho(E \rightarrow -\infty) \sim E ^{-1/2}e^{-\frac{2}{v}\sqrt{ E }}$	[176]
$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi^2 + \phi'$		
ϕ : Gaussian for $\langle \phi \rangle = 0$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim \frac{1}{E \ln E ^3}$	Dyson [211, 95]
ϕ : Gaussian for $\langle \phi \rangle = \mu g$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim E^{-1+\mu}$	[95]
ϕ : Poissonian $p_\phi(\eta_n) = qe^{-q\eta_n}$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim E^{-\frac{3+q}{2}}e^{-\frac{\pi}{2}\rho E^{-1/2}}$	[82, 175, 176]
$H = -\frac{d^2}{dx^2} + \phi^2 + \phi' + V$		
V & ϕ : Gaussian ; $\langle \phi \rangle = 0$	$\rho(E \rightarrow -\infty) \propto e^{-\frac{\pi}{\sqrt{\sigma g}} E }$	[308]
ϕ : Gaussian for $\langle \phi \rangle = 0$ V : Poissonian ; $v_n > 0$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim E^{-1+\sqrt{2\rho/g}}$	[638, 399, 176, 299]
ϕ : Gaussian for $\langle \phi \rangle = \mu g$ V : Poissonian ; $v_n > 0$	$\rho(E \rightarrow 0^+) \sim E^{-1+\sqrt{\mu^2+2\rho/g}}$	[399, 176, 299]

TABLE 6.2 : Different behaviours of the DoS $\rho(E) = N'(E)$ for various models with V and ϕ white noises (Gaussian and/or Poissonian).

de matrices aléatoires arbitraires de $SL(2, \mathbb{R})$ et avons donné une classification des solutions en termes des propriétés de la constante de diffusion effective d'un certain processus (la variable de Riccati) :

- ✎ [171] Alain Comtet, Jean-Marc Luck, Christophe Texier & Yves Tourigny, *The Lyapunov exponent of products of random 2×2 matrices close to the identity*, J. Stat. Phys. **150**(1), 13–65 (2013).

Q4 : Des potentiels avec fluctuations larges

- ✎ [83] Tom Bienaimé & Christophe Texier, *Localization for one-dimensional random potentials with large local fluctuations*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 475001 (2008).– Nous avons mentionné que les propriétés de localisation de haute énergie sont spécifiées par l'expression (6.44). Cette expression possède un champ d'application limitée. Citons différentes raisons :

- Pour des corrélations particulières du potentiel, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation peut s'annuler pour certaines énergies (pour une réalisation physique, voir la note de bas de page n°6 page 176). Dans ce cas il est possible de rendre systématique l'approche "perturbative" en exprimant l'exposant de Lyapunov sous la forme d'une série de termes faisant intervenir les fonctions de corrélations à n points du potentiel [421].
- Une autre situation dans laquelle l'expression (6.44) ne peut pas être utilisée est celle où le second moment du potentiel n'existe pas, pour des fluctuations larges. Dans ce cas on observe des phénomènes de superlocalisation (localisation non exponentielle) [417, 92]

(voir le paragraphe écrit plus haut sur cette question). Nous avons également obtenu des dépendances en énergie de l'exposant de Lyapunov différente de (6.44).

Annexe A : Continuum limits of the disordered 1D Anderson model

A very popular one-dimensional disordered model is the Anderson model : we consider a lattice of sites labelled with index $n \in \mathbb{Z}$ on which a particle may set. We denote by ψ_n its wave function on site n . Assuming nearest neighbour hoppings leads to the Schrödinger equation

$$-t_n^* \psi_{n+1} + V_n \psi_n - t_{n-1} \psi_{n-1} = \varepsilon \psi_n \quad (6.138)$$

where $t_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle n+1 | H | n \rangle$ and $V_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle n | H | n \rangle$. Note that the problem may be formulated in terms of transfer matrices as

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_n - \varepsilon}{t_n^*} & -\frac{t_{n-1}}{t_n^*} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.139)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} \psi_{n+1} - \psi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_n - t_n^* - \varepsilon}{t_n^*} & \frac{V_n - t_n^* - t_{n-1} - \varepsilon}{t_n^*} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_n - \psi_{n-1} \\ \psi_{n-1} \end{pmatrix} \quad (6.140)$$

For nearest neighbour hoppings it is always possible to remove the phases of the transition amplitudes thanks to a gauge transformation :

$$\psi_n \longrightarrow \tilde{\psi}_n = \psi_n e^{-i \sum_{m=-\infty}^{n-1} \theta_m} \quad \text{where } t_n / |t_n| = e^{i\theta_n}, \quad (6.141)$$

therefore we will restrict ourselves to real couplings in the following.

The aim of this appendix is to analyze the possible continuum limits of this model and to identify what non trivial models emerge. In the free case (constant hoppings $t_n = t$ and for $V_n = 0$) the solutions are plane wave $\psi_n = e^{ikn}$ with dispersion relation $\varepsilon(k) = -2t \cos k$ where the Brillouin zone is $k \in]-\pi, +\pi]$. It is possible to consider the continuum limit for a slowly varying field (compared to the lattice spacing a) : this is possible if we may restrict to long wave length, i.e. $k \ll 1$. This also requires that the perturbations are sufficiently small :

$$V_n \ll t \quad \text{and} \quad \delta t_n \stackrel{\text{def}}{=} t_n - t \ll t. \quad (6.142)$$

Clearly the bottom of the band ($k \sim 0$) of the free case plays a particular role (and also the top by symmetry, $k \sim \pm\pi$). We will see that it is also possible to obtain a nontrivial limit in the middle of the free band ($k \sim \pm\frac{\pi}{2}$).

6.4.1 The bottom of the free band

We replace the discrete state vector and the potentials by continuous functions :

$$\psi_n \longrightarrow \psi(x = na) \quad (6.143)$$

$$V_n \longrightarrow V(x = na) \quad (6.144)$$

$$\delta t_n \longrightarrow h(x = na + a/2) \quad (6.145)$$

(the additional shift of $a/2$ in the hopping is motivated by symmetry considerations since $t_n \stackrel{\text{def}}{=} \langle n+1 | H | n \rangle$). Expansion of (6.138) in powers of the lattice constant a gives :

$$\begin{aligned} [V(x) - 2h(x)] \psi(x) - a^2 \left[(t + h(x)) \psi''(x) + h'(x) \psi'(x) + \frac{1}{4} h''(x) \psi(x) \right] \\ + \mathcal{O}(a^4) = (\varepsilon + 2t) \psi(x). \end{aligned} \quad (6.146)$$

We obtain a nontrivial limit if $a \rightarrow 0$ by letting the hopping goes to infinity as

$$t = 1/a^2 \rightarrow \infty \quad (6.147)$$

and constraining the energy to remain close to the bottom of the band : $E \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon + 2t$. In this case, the random hopping only contribute to the scalar potential :

$$-\psi''(x) + [V(x) - 2h(x)]\psi(x) = E\psi(x). \quad (6.148)$$

Finally it is worth pointing the structure of the transfer matrix of equation (6.140) :

$$\begin{pmatrix} \psi'(x+a) \\ \psi(x+a) \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & a(V(x) - 2h(x) - E) \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi'(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}. \quad (6.149)$$

6.4.2 The middle of the free band

The importance of commensurability with lattice spacing has been pointed out in many works. This leads to search for a continuum limit in the middle of the free band ($k \sim \pm\frac{\pi}{2}$). For this purpose we rewrite the wave function as

$$\psi_n = (+i)^n \phi_n + (-i)^n \chi_n = i^n [\phi_n + (-1)^n \chi_n]. \quad (6.150)$$

Commensurability allows to set the parameters in (6.138) as

$$V_n = A_0(x) + (-1)^n m_x(x) \quad \text{where } x = na \quad (6.151)$$

$$t_n = t[1 + v(x)] - \frac{1}{2}(-1)^n m_y(x) \quad \text{where } x = na + \frac{a}{2}. \quad (6.152)$$

Replacing the two components by continuous functions :

$$\phi_n \longrightarrow \phi(x = na) \quad (6.153)$$

$$\chi_n \longrightarrow \chi(x = na) \quad (6.154)$$

we get the following expansion as $a \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} & i(-1)^n m_y(x) [\phi(x) - (-1)^n \chi(x)] + [A_0(x) + (-1)^n m_x(x) - \varepsilon] [\phi(x) + (-1)^n \chi(x)] \\ & - 2iat \left([1 + v(x)] [\phi'(x) - (-1)^n \chi'(x)] + \frac{1}{2}v'(x) [\phi(x) - (-1)^n \chi(x)] \right) + \mathcal{O}(a^2) = 0. \end{aligned} \quad (6.155)$$

We obtain a non trivial continuum limit by letting the hopping goes to infinity as

$$t = 1/2a \rightarrow \infty, \quad (6.156)$$

all other functions (A_0 , v , m_x and m_y) being kept finite; note that in the middle of the band, the velocity field $v(x)$ corresponds to an important renormalization of the hoppings, of order t . Imposing the vanishing of the smooth term and the term oscillating as $(-1)^n$ separately, we get two coupled equations

$$\left[A_0 - i(1+v) \frac{d}{dx} - \frac{i}{2}v' \right] \phi + (m_x - im_y)\chi = \varepsilon \phi \quad (6.157)$$

$$(m_x + im_y)\phi + \left[A_0 + i(1+v) \frac{d}{dx} + \frac{i}{2}v' \right] \chi = \varepsilon \chi. \quad (6.158)$$

The bispinor

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \chi(x) \end{pmatrix} \quad (6.159)$$

obeys the Dirac like equation

$$\mathcal{H}\Psi(x) = \varepsilon\Psi(x) \quad (6.160)$$

where

$$\mathcal{H} = -\frac{i}{2}\sigma_z \left(v(x) \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} v(x) \right) + \sigma_x m_x(x) + \sigma_y m_y(x) + A_0(x) \quad (6.161)$$

If the only random field is the velocity field $v(x)$ we may construct two explicit solutions at any energy :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v(x)}} e^{+i\varepsilon \int \frac{dx}{v(x)}} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{v(x)}} e^{-i\varepsilon \int \frac{dx}{v(x)}} \quad (6.162)$$

The case where $v(x) = 0$ and the three functions $A_0(x)$, $m_x(x)$ and $m_y(x)$ has been solved by the supersymmetric method in Ref. [89].

The case with only one mass term, $\mathcal{H} = -i\sigma_z \frac{d}{dx} + \sigma_x m_x(x)$, has been studied by many authors [293, 513, 286] (these articles refer to the work of Keldysh [359] for pointing the relation between the half-filled band metal and the Dirac equation).

Annexe B : Supersymmetric disordered model

We briefly recall the analysis of spectral and localisation properties for the random supersymmetric model when $\phi(x)$ is a white noise of zero mean. The Riccati variable is conveniently defined as $z = \psi'/\psi - \phi$. It obeys the stochastic differential equation (SDE)

$$\frac{d}{dx}z(x) = -E - z(x)^2 - 2z(x)\phi(x) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (6.163)$$

We now map this random process, that obeys a SDE with a *multiplicative* noise, onto a process $\zeta(x)$ in a way that this latter obeys a SDE with a *additive* noise. The transformation reads [628]

$$\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \mp \frac{1}{2} \ln(\pm z/k) \quad \text{for } z \in \mathbb{R}^\pm. \quad (6.164)$$

The new process obeys the SDE

$$\frac{d\zeta(x)}{dx} = k \cosh 2\zeta(x) \pm \phi(x). \quad (6.165)$$

It is also convenient to give the SDE for the variable $\xi(x)$ controlling the envelope of the wave function

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \mp \phi(x) \tanh 2\zeta(x) \quad (\text{Stratonovich}) \quad (6.166)$$

We rewrite this SDE in the Ito sense [755]

$$\frac{d\xi(x)}{dx} = \frac{g}{\cosh^2 2\zeta(x)} \mp \phi(x) \tanh 2\zeta(x) \quad (\text{Ito}) \quad (6.167)$$

Low energy $E \rightarrow 0$ analysis

We recall here some ideas that allow a simple analysis of the SDE in the limit $E \rightarrow 0$ (precisely for $\sqrt{E} = k \ll g$). The key point is the exponential behaviour of the “potential”

$$U(\zeta) = -\frac{k}{2} \sinh 2\zeta \quad (6.168)$$

from which the “deterministic force” of the SDE is obtained. This allows to separate the space in three regions : two regions $(-\infty, \zeta_-)$ and $(\zeta_+, +\infty)$ where the process $\zeta(x)$ is driven by the “deterministic force”, one region (ζ_-, ζ_+) where the “Langevin force” dominates and we can forget the “potential”. The crossover ζ_\pm are the points where the two forces are of the same order $|U'(\zeta_\pm)| \sim g$ therefore

$$\zeta_\pm \simeq \pm \frac{1}{2} \ln(g/k). \quad (6.169)$$

Because the “deterministic force” drives the process from $-\infty$ to ζ_- and from ζ_+ to $+\infty$ in a “short time” $\sim 1/g$, we map the problem onto the **free diffusion** problem on (ζ_-, ζ_+) with a reflection condition at ζ_- and an absorption condition at ζ_+ [628]. It is straightforward to construct the stationary solution of the Fokker-Planck equation $\partial_x P(\zeta; x) \simeq \frac{g}{2} \partial_\zeta^2 P(\zeta; x)$, for a steady current J :

$$P_J(\zeta) \simeq \frac{2J}{g} (\zeta_+ - \zeta) = \frac{2(\zeta_+ - \zeta)}{(\zeta_+ - \zeta_-)^2} \quad \text{for } \zeta \in (\zeta_-, \zeta_+) \quad (6.170)$$

Density of states The DoS is given by the current of the Riccati variable. Because the process $\zeta(x)$ diverges twice for one divergence of $z(x)$ the current of the Riccati is half of the current of $\zeta(x)$. We recover the Dyson singularity

$$N(E) \simeq \frac{1}{2}J \simeq \frac{g}{2 \ln^2(g/k)}. \quad (6.171)$$

Localisation The Lyapunov exponent may be obtained easily in two ways.

From the Ito-SDE (6.167) we obtain that $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dx} \langle \xi(x) \rangle = g \langle \frac{1}{\cosh^2 2\zeta} \rangle$. Knowing the distribution we find

$$\gamma(E) \simeq g \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} d\zeta \frac{P_J(\zeta)}{\cosh^2 2\zeta} \simeq g P_J(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\zeta}{\cosh^2 2\zeta} \simeq \frac{g}{\ln(g/k)} \quad (6.172)$$

From the Stratonovich-SDE (6.166) we have $\gamma = \mp \langle \phi(x) \tanh 2\zeta(x) \rangle$. Most of the time the process $\zeta(x)$ is such that $\tanh 2\zeta(x) \simeq \pm 1$, therefore the average vanishes. If $\zeta(x)$ is in the interval $(-1/2, +1/2)$ we can linearize the tanh and write $\frac{d\xi}{dx} \simeq 2\phi(x) \int^x dx' \phi(x')$. Therefore if the process $\zeta(x)$ spends a “time” δx near the origin, its brings a contribution $g\delta x$ to $\langle \xi(x) \rangle$. Finally the Lyapunov exponent is

$$\gamma \sim g \frac{\delta x}{\Delta x} \quad (6.173)$$

where $\delta x \sim \frac{1}{g} \ln(g/k)$ is the time $\zeta(x)$ spends in $(-1/2, +1/2)$ during its travel from ζ_- to ζ_+ in a time $\Delta x \sim \frac{1}{g} \ln^2(g/k)$.

Q : The real space renormalisation group approach of Refs. [249, 472, 399] is very similar to our analysis. In particular the distribution of length of renormalised valleys corresponds to our $P(\ell)$. It might be an interesting question to relate more precisely the two formulations.

$\beta(g)$ -function near the band center We now compute explicitly the β -function in the band center ($E \ll g^2$). This computation relies on the explicit expression of the transmission probability (two-terminal conductance) for $E = 0$ [613] :

$$T = \left[\cosh \int_0^L dx \phi(x) \right]^{-2}. \quad (6.174)$$

For a mass given by a Gaussian white noise, $\int_0^L dx \phi(x)$ is a Brownian motion, what gives the distribution given in the text p. 204. We now compute the β -function for the corresponding *four-terminal* conductance : ⁶³

$$\beta(\tilde{g}_{\text{four}}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d \ln \tilde{g}_{\text{four}}}{d \ln L} \quad (6.175)$$

where $\ln \tilde{g}_{\text{four}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \ln g_{\text{four}} \rangle$.

- In the ballistic limit $L \ll 1/g$.– In this case we can expand the transmission as $T \simeq 1 - [\int_0^L dx \phi(x)]^2$ from which $g_{\text{four}} = 1/T - 1 \simeq [\int_0^L dx \phi(x)]^{-2}$, therefore $\langle \ln g_{\text{four}} \rangle \simeq \ln(1/gL)$. We obtain $\beta(\tilde{g}_{\text{four}}) \simeq -1$.
- In the limit $1/g \ll L \ll \frac{1}{g} \ln^2(g/k)$.– The $E = k^2 = 0$ expression for T is valid in this window. In this regime $\langle \ln g_{\text{four}} \rangle \simeq \langle \ln T \rangle \propto -\sqrt{gL}$ therefore $\beta(\tilde{g}_{\text{four}}) \simeq \frac{1}{2} \ln \tilde{g}_{\text{four}}$.

⁶³ Remind that in $d = 1$ the contact resistance is important, necessarily larger than the resistance of the sample itself. Therefore it is important to get rid of it by considering the four-terminal resistance $1/T - 1$. In dimensions $d > 1$ the contact resistance scales to zero as $1/L$ when system size is increased, therefore we can use the two terminal or the four terminal resistance in order to compute the β function.

- Limit $L \gg \frac{1}{g} \ln^2(g/k)$.— In this case the conductance decays exponentially as $\ln T \simeq -\gamma L$ with $\gamma \simeq g/\ln(g/k)$ therefore $\beta(\tilde{g}_{\text{four}}) \simeq \ln \tilde{g}_{\text{four}}$.

We see that, in this low energy regime, SPS does not hold which manifests in the present calculation through an energy dependent curve. Despite this fact we conclude that the model is in a insulating phase (even for $E = 0$) since $\beta(\tilde{g}_{\text{four}}) < 0$.

Annexe C : Single Parameter Scaling dans le modèle d'impuretés δ 1D

Une petite note écrite à l'occasion d'un travail de referee ancien (en novembre 1999).

Une formulation du SPS (single Parameter Scaling) est l'égalité des deux cumulants [593, 200, 201] de la variable $\xi(x)$ introduite plus haut dans le cadre du formalisme de phase pour décrire l'évolution de l'enveloppe de la fonction d'onde : $\langle \xi(x) \rangle = \langle \xi(x)^2 \rangle_c$. Une écriture plus parlante consiste à introduire un exposant de Lyapunov pour une taille finie

$$\gamma_L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\xi(L)}{L} \quad (6.176)$$

L'égalité entre cumulants de $\xi(x)$ prend alors la forme

$$\langle \gamma_L \rangle = L \langle \gamma_L^2 \rangle_c \quad (\text{SPS}), \quad (6.177)$$

où $\langle \gamma_L^2 \rangle_c = \langle \gamma_L^2 \rangle - \langle \gamma_L \rangle^2$. Discutons cette égalité dans le cadre du modèle d'impuretés δ , *i.e.* pour l'hamiltonien $H = -\frac{d^2}{dx^2} + v \sum_n \delta(x - x_n)$. La variable $\xi(x)$ est constante entre deux impuretés et fait un saut en traversant l'impureté n [792, 83] :

$$\Delta \xi_n = \xi_n^+ - \xi_n^- = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin 2\theta_n^- + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \theta_n^- \right) \quad (6.178)$$

où $\theta_n^- \stackrel{\text{def}}{=} \theta(x_n^-)$. L'exposant de Lyapunov est donné par

$$\xi(L) = \sum_{n=1}^{N \sim \rho L} \Delta \xi_n \quad (6.179)$$

(pour le calcul numérique, on doit prendre soin à fixer L et donc le nombre N d'impuretés dans l'intervalle $[0, L]$ fluctue).

Considérons le régime de basse densité d'impuretés $k \gg \rho$. On peut alors utiliser l'approximation que les phases θ_i^- sont indépendantes et utiliser le théorème de la limite centrale pour estimer la valeur moyenne de γ_L et ses fluctuations. Nous écrivons : $\langle \gamma_L \rangle = \rho \langle \Delta \xi \rangle$ et $\langle \gamma_L^2 \rangle_c = \frac{\rho}{L} \langle \Delta \xi^2 \rangle_c$.

Haute énergie : $\rho, v \ll k$.— Ce régime est étudié p. 42 de ma thèse [792]. $\langle \Delta \xi \rangle = \frac{v^2}{8k^2} - \frac{v^4}{128k^4} + O(\frac{v^6}{k^6})$ et $\langle \Delta \xi^2 \rangle_c = \frac{v^2}{8k^2} - \frac{3v^4}{128k^4} + O(\frac{v^6}{k^6})$, d'où

$$\langle \gamma_L \rangle \simeq \frac{\rho v^2}{8k^2} - \frac{\rho v^4}{128k^4} \quad (6.180)$$

et

$$\langle \gamma_L^2 \rangle_c \simeq \frac{1}{L} \left(\frac{\rho v^2}{8k^2} - \frac{3\rho v^4}{128k^4} \right) \quad (6.181)$$

À l'ordre dominant, à haute énergie, on a bien $\langle \Delta \xi \rangle = \langle \Delta \xi^2 \rangle_c$, ce qui conduit à $\langle \xi \rangle = \langle \xi^2 \rangle_c$, ou encore $\langle \gamma_L \rangle = L \langle \gamma_L^2 \rangle_c = \frac{\rho v^2}{8k^2}$. Mais nous suspectons qu'en diminuant le rapport k/v , cette relation ne sera plus vérifiée puisqu'à l'ordre suivant en v/k les expressions diffèrent déjà.

Basse énergie : $\rho \ll k \ll v$.— Dans ce régime il est également possible de calculer les deux cumulants de γ_L .

$$\langle \Delta \xi \rangle \simeq \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{v}{k} \sin 2\theta + \frac{v^2}{k^2} \sin^2 \theta \right) \simeq \int_0^\pi \frac{d\theta}{\pi} \ln \left(\frac{v}{k} \sin \theta \right) = \ln \frac{v}{2k}. \quad (6.182)$$

D'où (p. 47 de [792])

$$\langle \gamma_L \rangle \simeq \rho \ln \frac{v}{2k}. \quad (6.183)$$

En utilisant le même type d'approximation pour les fluctuations nous trouvons :

$$\langle \gamma_L^2 \rangle_c \simeq \frac{\rho \pi^2}{L 12}. \quad (6.184)$$

Les fluctuations relatives de l'exposant de Lyapunov sont donc réduites à basse énergie (pour des énergies n'étant pas encore dans la zone de raréfaction des états, i.e. la queue de Lifshits), i.e. il n'y a plus SPS. Nous reproduisons ici la conclusion de Shapiro [593] sur la nécessité d'un scaling à deux paramètres (i.e. la distribution de ξ fait intervenir deux paramètres) dans le régime de fort désordre.

Calcul numérique

programme : idxi2m.f90

fichiers : idxim02.dat et idxim04.dat

Test of SPS for δ scatterers (with $\rho \ll v$)

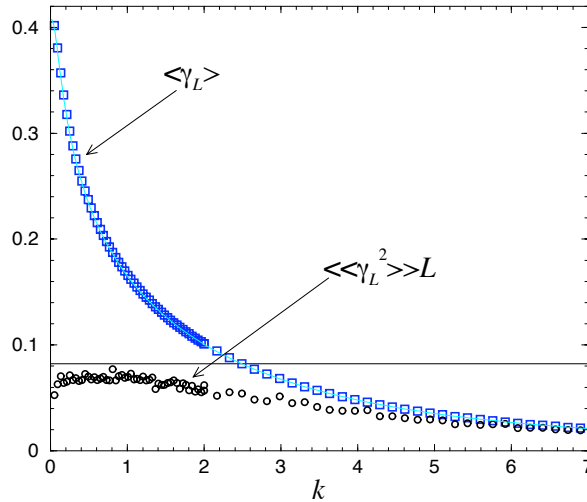


FIGURE 6.26 : Calcul numérique pour $\rho = 0.1$ et $v = 10$. Taille : $L = 10000$ (i.e. 1000 impuretés); statistique : $n_s = 1000$. Lignes continues (bleue et noire) : estimations analytiques.

Annexe D : β -function of the quasi-1D weakly disordered wire

Metallic limit.— We compute the β -function for the quasi-one dimensional disordered wire, based on the results of Macêdo & Chalker obtained within the RMT (describing the weakly disordered regime $k_F \ell_e \gg 1$). These authors obtained the average conductance [426] :

$$\bar{g} = g_D + \frac{1}{3} \Psi(\beta) + \frac{2}{45g_D} \Phi(\beta) + O(g_D^{-2}) \quad (6.185)$$

where $g_D = \alpha_d N_c \ell_e / L$ is the Drude conductance of the wire of length L and the two functions are

$$\Psi(\beta) = 1 - \frac{2}{\beta} \quad \text{and} \quad \Phi(\beta) = \frac{3}{2} - \frac{7}{\beta} + \frac{6}{\beta^2}. \quad (6.186)$$

We recall that the Dyson index $\beta \in \{1, 2, 4\}$ describes disorder in the orthogonal, unitary or symplectic ensembles, respectively. Physically this corresponds to the following regimes :

Dyson index	Regime	Condition
$\beta = 1$	scalar disorder only	
$\beta = 2$	with “strong” \mathcal{B} field	$\mathcal{B} \gg \phi_0 / \text{Surf}$
$\beta = 4$	with “strong” spin-orbit scattering	$L_{\text{so}} \ll L$

where $\text{Surf} = L \times \text{width}$ is the surface of the wire that intercepts the magnetic flux ; L_{so} is the spin-orbit scattering length (these conditions can be discussed within the perturbative approach explained in chapters 4 and 5, with the precise crossovers). More explicitly the $1/g$ expansion for the different symmetry classes reads :

$$\begin{aligned} \beta = 1 : \quad \bar{g} &= g_D - \frac{1}{3} + \frac{1}{45g_D} + \dots \\ \beta = 2 : \quad \bar{g} &= g_D + 0 - \frac{1}{45g_D} + \dots \\ \beta = 4 : \quad \bar{g} &= g_D + \frac{1}{6} + \frac{1}{180g_D} + \dots \end{aligned}$$

We now compute the corresponding β -function of the scaling approach. In the seminal paper [5] it was defined as $\beta(g) = \frac{d \ln g}{d \ln L}$, however it is not discussed whether one should average $\ln g$ or directly the conductance \bar{g} . This is particularly important in the strongly localised regime when the conductance is not self averaging. On the other hand in the numerical approach [726, 723, 727] the information is extracted from $\overline{\ln g}$, therefore we consider the definition

$$\beta(\tilde{g}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d \ln \tilde{g}}{d \ln L} \quad \text{where} \quad \ln \tilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\ln g}. \quad (6.187)$$

If we introduce the fluctuation $\delta g = g - \bar{g}$. Then

$$\overline{\ln g} = \ln \bar{g} - \frac{\overline{\delta g^2}}{2\bar{g}^2} + \dots \quad (6.188)$$

Remind that $\overline{\delta g^2} = O(1)$, precisely : ⁶⁴

$$\overline{\delta g^2} = \frac{2}{15\beta} + O(g_D^{-1}) \quad (6.189)$$

⁶⁴ This result can be obtained by the RMT [452, 426, 707]. It can also be obtained within the diagrammatic approach (see for example [743, 744, 646]); this latter approach expresses naturally the UCF as a function of microscopic parameters interpolating between the three RMT's results.

Let us write the Macêdo & Chalker result as

$$\bar{g} = g_D + a + \frac{b}{g_D} + \frac{c}{g_D^2} + \dots, \quad (6.190)$$

it follows that

$$\ln \tilde{g} = \ln g_D + \frac{a}{g_D} + \frac{1}{g_D^2} \left[b - a^2/2 - \overline{\delta g^2}/2 \right] + \dots \quad (6.191)$$

or $\tilde{g} = g_D + a + \frac{1}{g_D} [b - \overline{\delta g^2}/2] + \dots$. We remark that $\ln g_D = -\ln L + \text{cste}$, therefore $\frac{d \ln \tilde{g}}{d \ln L} = -\frac{d \ln \tilde{g}}{d \ln g_D}$. Using $-\frac{d}{d \ln g} g^{-n} = n g^{-n}$, we obtain

$$\beta(\tilde{g}) = -1 + \frac{a}{g_D} + \frac{2b - a^2 - \overline{\delta g^2}}{g_D^2} + \dots. \quad (6.192)$$

We rather express the right hand side in terms of \tilde{g} by using $g_D = \tilde{g} - a + \frac{1}{\tilde{g}} [\overline{\delta g^2}/2 - b] + \dots$. Finally

$$\beta(\tilde{g}) = -1 + \frac{a}{\tilde{g}} + \frac{2b - \overline{\delta g^2}}{\tilde{g}^2} + \dots, \quad (6.193)$$

that reads explicitly

$\beta = 1 : \quad \beta(\tilde{g}) = -1 - \frac{1}{3\tilde{g}} - \frac{4}{45\tilde{g}^2} + \dots$
$\beta = 2 : \quad \beta(\tilde{g}) = -1 + 0 - \frac{4}{45\tilde{g}^2} + \dots$
$\beta = 4 : \quad \beta(\tilde{g}) = -1 + \frac{1}{6\tilde{g}} - \frac{1}{45\tilde{g}^2} + \dots$

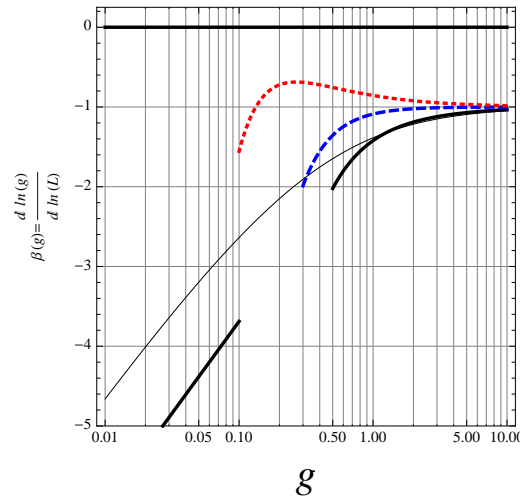


FIGURE 6.27 : *Asymptotic behaviour of the β -function of the quasi-1d wire for the different symmetry classes $\beta = 1, 2$ & 4 . The straight line is $\ln(\tilde{g}/4)$ and the thin black line is $\beta(g) = -(1+g)\ln(1+1/g)$ obtained from $g = e^{-2\gamma L}$ [38].*

Insulating limit.— In the insulating limit, the statistical properties of the conductance are characterised by the distribution given in the footnote 8 page 177. One should compute $\ln \tilde{g} = \langle \ln \sum_n \cosh^{-2} x_n \rangle$, where the variables x_n are uncorrelated Gaussian variables in the limit $L \rightarrow \infty$. Let us further approximate the calculation of $\ln \tilde{g}$ by using the fact that the conductance is dominated by the smallest Lyapunov exponent in this case, $g \simeq 4e^{-2x_1}$, therefore $\ln \tilde{g} \simeq \ln 4 - 2L/\ell$ and therefore $\beta(\tilde{g}) \simeq \ln(\tilde{g}/4)$.

Annexe E : Articles

- Page 233 : Christophe Texier, *Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder*, J. Phys. A: Math. Gen. **33**, 6095–6128 (2000).
- Page 234 : Christian Hagendorf & Christophe Texier, *Breaking of supersymmetry in one-dimensional a random Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 405302 (2008).
- Page 235 : Tom Bienaimé & Christophe Texier, *Localization for one-dimensional random potentials with large local fluctuations*, J. Phys. A: Math. Theor. **41**, 475001 (2008).
- Page 236 : Christophe Texier & Christian Hagendorf, *One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers*, Europhys. Lett. **86**, 37011 (2009).
- Page 237 : Christophe Texier & Christian Hagendorf, *Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian*, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 025002 (2010).
- Page 238 : Alain Comtet, Christophe Texier and Yves Tourigny, *Products of random matrices and generalised quantum point scatterers*, J. Stat. Phys. **140**(3), 427–466 (2010).

Article

C. Texier,

Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder,

J. Phys. A : Math. Gen. **33**, 6095–6128 (2000),

<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0004285>.

Article

C. Hagendorf & C. Texier,
Breaking of supersymmetry in one-dimensional a random Hamiltonian,
J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 405302 (2008),
<http://arxiv.org/abs/0805.2883>.

Article

T. Bienaimé & C. Texier,

Localization for one-dimensional random potentials with large local fluctuations,

J. Phys. A : Math. Theor. **41**, 475001 (2008),

<http://arxiv.org/abs/0807.0772>.

Article

C. Texier & C. Hagendorf,

One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers,

Europhys. Lett. **86**, 37011 (2009),

<http://arxiv.org/abs/0902.2698>.

Article

C. Texier & C. Hagendorf,

Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian,

J. Phys. A : Math. Theor. **43**, 025002 (2010),

<http://arxiv.org/abs/0909.2205>.

Article

A. Comtet, C. Texier and Y. Tourigny,
Products of random matrices and generalised quantum point scatterers,
J. Stat. Phys. **140**(3), 427–466 (2010),
<http://arxiv.org/abs/1004.2415>.

Chapitre 7

Conclusions et perspectives

Deux aspects ont été principalement discutés dans ce mémoire d'habilitation : d'une part la physique des réseaux mésoscopiques (chapitres 2, 3 & 5) et d'autre part des questions reliées à la localisation forte unidimensionnelle (chapitre 6).

A. Transport cohérent dans les réseaux mésoscopiques

Opérateur de Schrödinger dans les graphes métriques.— L'étude des réseaux mésoscopiques a commencé par l'analyse des propriétés de l'opérateur de Laplace (ou de Schrödinger) sur un graphe métrique, (*i*) soit du point de vue des propriétés spectrales lorsque le graphe est **isolé** (construction du déterminant spectral $S(\gamma)$ au chapitre 3), (*ii*) soit du point de vue des propriétés de scattering lorsque le graphe est **connecté** à des fils infinis (construction de la matrice \mathcal{S} au chapitre 2). Des ponts ont été dressés entre les deux problèmes : une relation entre les deux quantités peut être établie (du type règle de Krein-Friedel), les méthodes employées sont évidemment similaires dans les deux cas, mais plus fondamentalement ces deux objets jouent le rôle de générateurs et donnent accès à des propriétés physiques globales ou locales du graphe. Pour bien souligner ce point important, nous pouvons revenir sur la relation discutée dans le § de la page 76 entre déterminant spectral et matrice \mathcal{S} en considérant l'exemple d'une quantité physique : le courant permanent.

- Considérons un graphe **isolé** de topologie quelconque dont une boucle est traversée par un flux magnétique ϕ . Nous définissons la densité de courant (courant des états $\in [E, E + dE[$) dans cette boucle $dI(E) = dE \sum_n I_n \delta(E - E_n)$ où $\{E_n\}$ désigne le spectre de l'opérateur de Schrödinger dans le graphe et $I_n = -\partial_\phi E_n$ est le courant associé à l'état quantique E_n . La densité de courant peut être exprimée à l'aide du déterminant spectral ¹

$$dI(E) = -\frac{dE}{\pi} \operatorname{Im} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln S(\gamma = -E - i0^+) \quad (7.1)$$

- Si le même graphe est maintenant **connecté** à des fils infinis, les propriétés de la diffusion sont caractérisées par la matrice \mathcal{S} . Le courant permanent est alors donné par [7]

$$dI(E) = \frac{dE}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \det \mathcal{S}(E) \quad (7.2)$$

La comparaison entre ces deux expressions n'est pas sans rappeler celle des formules (3.80) et (3.81). Un des intérêts des expressions de ce type réside dans notre capacité à construire $S(\gamma)$

¹ On utilise $\sum_n I_n \delta(E - E_n) = \partial_\phi \sum_n \theta(E - E_n)$ et la représentation $\theta(x) = -\frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \ln(-x - i0^+)$ de la fonction de Heaviside.

et \mathcal{S} dans des réseaux arbitraires. Notons que nous avons développé (chapitre 2) le formalisme permettant de passer continûment de la situation connectée à la situation isolée, ce qui nous avait permis de passer de (7.2) à (7.1) dans la référence [641].

Déterminant spectral et formules de trace.— Bien que les travaux sur le déterminant spectral et les formules de trace (chapitre 3) aient pu paraître quelque peu formels à première vue, soulignons qu'ils ont été motivés par des applications concrètes pour l'étude des propriétés du mouvement brownien dans les graphes métriques : analyse des propriétés d'enroulement, étude des temps locaux ou des temps d'occupation ou encore d'autres fonctionnelles. La clarification de ces questions a elle-même permis une étude du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques faiblement désordonnés (chapitre 5). En pratique le déterminant spectral a joué un rôle de fonction génératrice pour diverses fonctionnelles du mouvement brownien, et nous a permis une construction efficace d'objets directement reliés à des quantités physiques (localisation faible, fluctuations de conductance, correction AA, aimantation,...) tels que $\int_{\text{Graph}} dx \langle x | \frac{1}{\gamma-\Delta} | x \rangle, \langle x | \frac{1}{\gamma-\Delta} | x \rangle, \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} e^{-in\theta} \langle x | \frac{1}{\gamma-D_x^2} | x \rangle$ (où θ est un flux magnétique), etc.

Quelques points mentionnés dans le chapitre 3 ont été laissés en suspens : par exemple la relation entre les deux approches pour la procédure d'attachement de graphes (annexe B, page 94). Soit par combinaison de déterminants spectraux soit en remplaçant les paramètres λ_α décrivant des conditions aux limites mixtes par des fonctions appropriées. Ce dernier point de vue avait par exemple été pris dans un travail permettant de décrire l'effet de contacts bi-dimensionnels [156], une question pertinente pour décrire plus précisément certaines situations expérimentales. D'autre part nous avons vu que la procédure d'attachement de graphes fournit une manière simple de construire le déterminant spectral de graphes plus complexes. Une question naturelle serait de généraliser cette procédure d'attachement par un vertex au cas du collage de deux graphes par plusieurs vertex. Enfin, après avoir construit le déterminant spectral ζ -régularisé pour deux types de conditions aux limites, une expression décrivant le cas le plus général a été conjecturée. Probablement l'approche proposée par Harrison & Kirsten [316] devrait permettre de démontrer ce résultat. ²

Transport quantique dans les réseaux métalliques, interactions électroniques.— Mon activité de ces dix dernières années a principalement concerné l'étude des propriétés quantiques du transport dans les réseaux de fils métalliques faiblement désordonnés. Rappelons que l'intérêt des réseaux dans ce contexte est de fournir des candidats naturels pour l'étude des phénomènes d'interférences quantiques. D'autre part nous avons été fortement motivés par des travaux expérimentaux contemporains des équipes orcéenne et grenobloise. L'analyse de cette problématique a connu deux temps : tout d'abord nous avons clarifié les questions liées à la nonlocalité du transport quantique (section 5.1.2).

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés aux effets des interactions électroniques (décohérence & correction Altshuler-Aronov) dans des géométries complexes (divers réseaux, cylindres). Répétons que la compréhension des rôles conjoints du désordre et des interactions électroniques est une question fondamentale de la matière condensée. Si elle a été énormément étudiée dans des géométries simples (fils, plans,...), on pourra se référer aux références générales [571, 221, 22, 263, 729, 713, 580, 743, 748, 758, 744], des géométries complexes ont été bien moins explorées (ce qui rend le problème non trivial est la sensibilité de l'interaction entre électrons aux propriétés géométriques du système) [602, 622, 580, 420, 643, 645, 242, 637, 659].

Nous avons discuté l'effet de la géométrie du système sur la décohérence par les interactions électroniques, le processus dominant à basse température (section 5.2.3). L'obtention du résultat exact dans notre article [643] nous a été une grande aide pour progresser dans la compréhension

² C'est en effet ce qui a été fait dans notre article commun [317].

du processus de décohérence par les interactions électroniques dans les géométries complexes. D'une part ce résultat nous a permis une analyse temporelle, i.e. de la fonction $\langle e^{i\Phi_V[C_t^n]} \rangle_{V, C_t^n}$, qui s'est révélé utile pour étudier d'autres réseaux ; d'autre part, alors que l'approche de Ludwig & Mirlin ne permet de considérer que la limite faiblement cohérente ($L_N \ll L$, haute T), nous avons pu étudier également le régime cohérent, lorsque L_N devient comparable ou supérieur la taille de(s) anneau(x).

Ce dernier point est important si nous considérons la situation du côté expérimental. Le comportement $\Delta\sigma_n \sim \exp -\frac{\pi}{8}|n|(L/L_N)^{3/2} \sim \exp -|n|L^{3/2}T^{1/2}$ a pour l'instant été observé dans les grands réseaux carrés gravés à une interface GaAs/GaAlAs (à Orsay) [242], une prouesse dans l'analyse des données expérimentales, puisque ce régime correspond à une situation où les harmoniques sont exponentiellement amorties, donc difficiles à extraire de la courbe de magnétoconductance. La nouvelle dépendance en température n'est observable que sur un intervalle de température limité (figure 5.12), d'autant plus que l'effet de l'interaction électron-phonon devient dominant pour $T \gtrsim 1$ K. Pour cette raison nous avons pensé qu'il était important de fournir une analyse détaillée du régime cohérent, $L_N \gtrsim L$, ce qui requiert alors de considérer les différents réseaux puisque les effets de nonlocalités sont alors importants et les oscillations de magnétoconductance dépendent assez fortement du réseau (au moins de sa dimensionalité effective) [637].

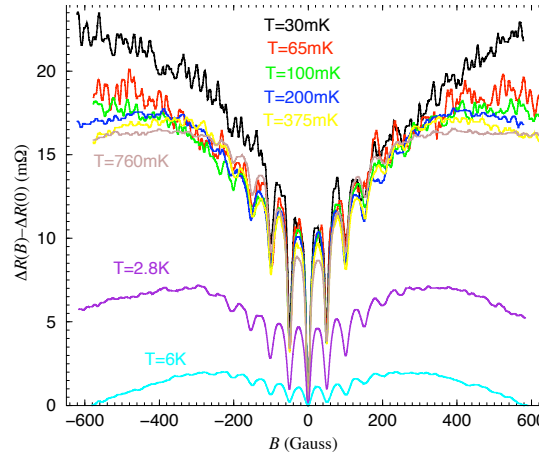


FIGURE 7.1 : *Experimental data from Bäeurle & Saminadayar group (Institut Néel, Grenoble). Square silver networks with $N = 10^6$ plaquettes.*

À ce stade, il serait intéressant de sonder le régime cohérent expérimentalement. Les expériences grenobloises sondent des réseaux d'argent caractérisés par des longueurs de cohérence de phase suffisamment grandes pour que le régime cohérent soit profondément exploré (*cf.* tableau 1.1 page 10). Par exemple, les courbes de magnétoconductance obtenues au cours de la thèse de F. Mallet [787] montrent de très nets effets de nonlocalité propres aux réseaux 2D.³ Toutefois les courbes de magnétoconductance obtenues pour les plus basses températures sont demeurées incompréhensibles jusqu'à présent. Précisément, si nous sommes capables de décrire parfaitement la courbe de magnétoconductance avec la théorie DR&PM aux plus hautes températures,

³ F. Mallet *et al* ont montré que pour des températures $T \gtrsim 1$ K dans lequel la décohérence est dominée par l'interaction électron-phonon, les courbes de MC non triviales (d'autant plus que l'effet du couplage spin-orbite est important dans l'argent) sont parfaitement fittées par la théorie de DR&PM décrivant une relaxation exponentielle de la cohérence, dans des régimes t.q. $L_\varphi \gtrsim a$, i.e. lorsque la WL est sensible à la nature du réseau (anneaux corrélés). En revanche à plus basse température, $T \lesssim 1$ K, lorsque la décohérence est dominée par les interactions électroniques, la MC ne peut plus être fittée par la théorie DR&PM. Cela montre que cette dernière (i.e. une relaxation exponentielle de la cohérence de phase) rend bien compte des expériences lorsque $\tau_\varphi \rightarrow \tau_\varphi^{e-ph}$ mais signale que cela n'est plus le cas lorsque $\tau_\varphi \rightarrow \tau_\varphi^{ee}$.

$T \gtrsim 1$ K ($L_\varphi^{\text{ee}} \sim L_\varphi^{\text{e-ph}}$ pour $T \sim 2.5$ K pour les fils d'Ag de [787]), nous ne savons pas expliquer la surprenante stabilité des courbes à bas champ lorsque l'on varie T aux plus basses températures (figure 7.1) : nous ne voyons pas se creuser la singularité logarithmique $\Delta\sigma(\mathcal{B}) \sim \ln|\mathcal{B}|$. Une autre manière de dire les choses est que nous n'avons pas identifié le mécanisme de régularisation de la singularité logarithmique $\Delta\sigma(\mathcal{B}) \sim \ln|\mathcal{B}|$ aux plus basses températures : ⁴ notre compréhension des phénomènes de décohérence dans le réseau fournit un cutoff à une échelle de champ magnétique trop faible comparativement à ce qui est observé. ⁵ Pour clarifier s'il s'agit d'un effet lié à la physique des réseaux il conviendrait de comparer les mesures sur de très grands réseaux à celles obtenues avec un plan métallique ayant les mêmes caractéristiques (épaisseur, ℓ_e, \dots). ^{6,7}

Bien que les grands réseaux planaires soient les meilleurs échantillons pour réaliser une moyenne sur le désordre, il est malheureux que les échantillons actuellement disponibles (aussi bien à Orsay qu'à Grenoble) soient uniquement des réseaux planaires (carré ou \mathcal{T}_3) pour lesquels les harmoniques de magnétoconductance deviennent peu sensibles à la nature du processus de décohérence pour $L_\varphi \gtrsim L$ (analyse de notre Réf. [637] dans lequel nous avons montré que les harmoniques tendent vers une limite finie pour $L_\varphi \rightarrow \infty$, conséquence du comportement 2D à bas champ $\Delta\sigma(\mathcal{B}) \propto \ln|\mathcal{B}|$). Pour cette raison, de meilleurs candidats pour valider nos résultats théoriques dans une large gamme de températures seraient plutôt des chaînes d'anneaux ou des cylindres [637] (dont les harmoniques divergent avec L_φ , conséquence du comportement à bas champ $\Delta\sigma(\mathcal{B}) \propto 1/|\mathcal{B}|$).

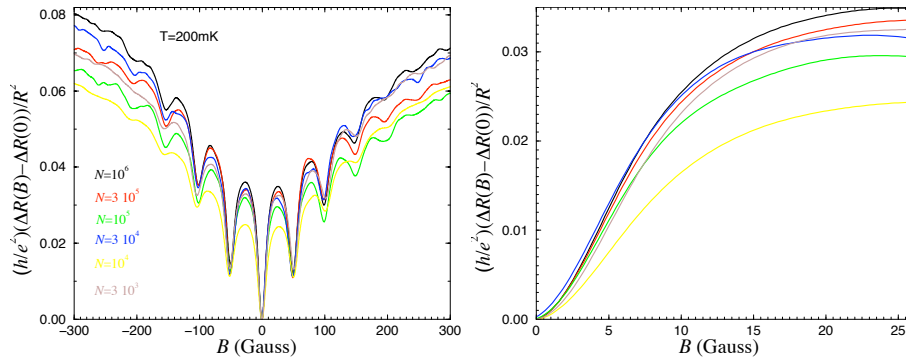


FIGURE 7.2 : *Experimental MR for $T = 200$ mK for different sizes from $N = 3000$ to 10^6 . Note that at $T = 200$ mK we have $\sqrt{2} L_N^{(1d)}/a = 10.7$ while N_y varies between 17 and 300.*

Revenons sur la question du comportement des harmoniques des oscillations de MC dans la limite faiblement cohérente. Si les oscillations AAS ont été analysées par M. Ferrier *et al* [242], il serait également satisfaisant que le comportement correspondant de l'amplitude des oscillations Aharonov-Bohm [420, 643], $\delta\sigma_n^{\text{AB}} \sim \exp -\frac{\pi}{16}|n|(L/L_N)^{3/2} \sim \exp -|n|L^{3/2}T^{1/2}$, soit observé expérimentalement. Du côté théorique, nous avons donné une preuve de la relation entre localisation faible (i.e. oscillations AAS) et fluctuations universelles de conductance (i.e. oscillations AB) dans des réseaux réguliers lorsque la décohérence est dominée par les interactions

⁴ Par exemple dans un plan, la singularité $\Delta\sigma(\mathcal{B}) \sim \ln|\mathcal{B}|$ est coupée à une échelle $\mathcal{B}_c \sim \phi_0/L_\varphi^2$, en deçà de laquelle on a donc $\Delta\sigma(|\mathcal{B}| < \mathcal{B}_c) \sim -\ln(L_\varphi)$. Or on s'attend à retrouver la physique des plans dans les réseaux planaires à bas champ ($|\mathcal{B}| \ll \phi_0/a^2$) et fortement cohérents ($L_\varphi \gg a$).

⁵ Il ne semble que cela soit pas d'un effet de taille finie (figure 7.2) : clairement pas un effet des bords ; il ne semble pas non plus qu'il s'agisse d'un effet de moyennage insuffisant (réseau trop petit) : l'amplitude des UCF restant faible comparativement à la MC.

⁶Notons en effet que les mesures de magnétoconductance sur des plans n'ont jamais été réalisées à d'aussi basses températures, à ma connaissance.

⁷On peut imaginer que ce qui pollue l'analyse des oscillations AAS des réseaux carré soit un effet comme un crossover diffusif/balistique n'ayant rien à voir avec la physique des réseaux.

électroniques [643], cependant il serait heureux de procéder à une analyse supplémentaire de cette question dans des situations plus générales (*cf.* discussion esquissée au § 5.3.2).

Outre l'effet des interactions électroniques sur la décohérence, nous avons également étudié la correction Altshuler-Aronov, qui sonde directement les interactions électroniques, dans un grand réseau carré (section 5.2.2). Certains de nos résultats [645] ont pu être vérifiés expérimentalement par l'équipe grenobloise (C. Bäuerle & L. Saminadayar) : le comportement bidimensionnel $\Delta\sigma_{ee} \propto \ln(L_T/a)$ mais aussi la dépendance du paramètre d'interaction (5.32) dans la dimension. La transition entre les régimes 1D et 2D n'a toutefois pu être observée que sur un faible domaine de température (figure 5.11 page 139). Il serait souhaitable d'observer cette transition plus clairement en considérant des réseaux de pas différents (voir la discussion dans [645]). D'autre part notre étude n'a pu aboutir que grâce à une hypothèse de régularité du réseau ; il n'est pas clair s'il peut être étendu à des réseaux arbitraires (qui ne seraient pas globalement invariant par translation). Cette question mériterait certainement d'être clarifiée. Une autre question technique liée au problème précédent est la suivante : alors que nous avons été capable de donner une description de la correction de localisation faible et des fluctuations de conductance soit dans l'approche de Kubo, en considérant la conductivité nonlocale, soit dans l'approche de Landauer, en considérant des probabilités de transmission, nous ne sommes pas capables de développer ce double langage pour la correction Altshuler-Aronov (que nous avons étudiée via la conductivité locale uniquement). Une question intéressante serait de développer une formulation "Landauer" de la correction Altshuler-Aronov, ou de comprendre mieux les effets de nonlocalité du transport ⁸ (notons l'existence de travaux décrivant l'effet de l'interaction dans la formulation de Landauer [450]).

Enfin, remarquons que si nos résultats théoriques sur la correction Altshuler-Aronov décrivent de manière satisfaisante les données expérimentales dans les réseaux de fils d'argent, tel n'est pas le cas dans les réseaux gravés à l'interface GaAs/GaAlAs [782]. Notons l'existence d'une plaque métallique à $d = 100$ nm du gaz d'électrons bidimensionnel, qui pourrait avoir une influence sur les propriétés d'écrantage. Ce point mériterait d'être éclairci.

Autres questions.— Suite à nos premiers travaux sur la nonlocalité du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques, j'avais commencé des travaux préliminaires sur l'étude du bruit de grenaille dans ces systèmes. L'analyse du bruit de grenaille devrait présenter des effets non locaux intéressants [88]. Je m'étais assez rapidement heurté à des difficultés qui semblent liées à des questions techniques plus profondes sur la conservation du courant dans la méthode perturbative.

Comme il a été mentionné à plusieurs reprises, les prédictions théoriques pour le transport quantique ont été vérifiées expérimentalement soit dans les réseaux métalliques d'argent (ou d'autres métaux : or,...) soit dans des réseaux gravés à une interface GaAs/GaAlAs où se forme un métal bidimensionnel. Alors que les réseaux d'argent grenoblois, en fait fabriqués à Marcoussis au LPN, sont dans un régime assez nettement diffusif $\ell_e \lesssim w \ll a$ (où w est la largeur des fils), tel n'est pas le cas pour les réseaux orcéens gravés dans un 2DEG à une interface GaAs/GaAlAs, également fabriqués dans l'équipe de D. Mailly au LPN, (*cf.* tableau 1.1 page 10) ; des anneaux isolés gravés dans les mêmes conditions sont quasiment balistiques (faiblement diffusifs) [44]. La question de l'étude du crossover diffusif/balistique dans ces systèmes se pose donc naturellement.

Une question liée au crossover balistique/diffusif : ⁹ la théorie de Altshuler, Aronov & Khmel'nitzkiï [23] a été développée dans un fil diffusif de largeur $w \gg \ell_e$. Elle a été soigneuse-

⁸ pour être plus précis : pourquoi n'y-a-t'il pas l'analogue, pour la correction Altshuler-Aronov, des corrections de vertex assurant la conservation du courant lorsque l'on considère la localisation faible [642] ou les fluctuations de conductance [356] ?

⁹ Le crossover diffusif/balistique a été étudié théoriquement en détail pour des gaz 2D dans les travaux [696, 485].

ment vérifiée expérimentalement dans des fils métalliques en aluminium et argent (la dépendance en température, mais aussi en largeur de $1/\tau_\varphi^{ee} \propto (T/w)^{2/3}$) [692] en or [212], en argent, or, cuivre [526, 527] (l'effet des impuretés magnétiques a été analysé en grand détail dans les articles [526, 527, 66, 434, 556]). La théorie AAK a également été testée dans des fils métalliques gravés dans un gaz d'électrons bidimensionnel dès les premiers temps [648, 161, 540]. Ces expériences ont vérifié le comportement en température $1/\tau_\varphi^{ee} \propto T^{2/3}$ dans un régime semi-balistique, tels que $w < \ell_e$ (dans ce régime la correction de localisation faible est sensible aux phénomènes d'annulation de flux [68]); à ma connaissance, la théorie de AAK n'a pas été généralisée dans cette situation ($w < \ell_e$). Pour appuyer cette remarque, notons que très récemment, une étude expérimentale très précise de la dépendance dans le coefficient de diffusion (en utilisant une technique d'implantation d'impuretés dans un 2DEG) a mis en évidence des dépendances en D de τ_φ^{ee} qui n'ont pas trouvé d'explication théorique [492, 493].

À l'occasion de la thèse (expérimentale) de Lionel Angers [777] je m'étais intéressé à l'étude du transport non linéaire dans des systèmes mésoscopiques (cette question avait été ravivée suite à des travaux intéressants prédisant une asymétrie en champ magnétique de la conductance non linéaire, directement reliée à l'interaction entre électrons); ces quelques réflexions ont été consignées dans le chapitre 1, où a en particulier été suggéré une manière d'unifier les descriptions de Spivak-Zyuzin [610] et de Sánchez-Büttiker [560]. Ces travaux avaient considéré l'analyse du transport non linéaire dans des quantum dots chaotiques. L'approche avait été étendue par la suite par Polianski [532] pour considérer une géométrie d'anneau, en branchant un bras sur un dot chaotique. Notre expertise pour étudier les réseaux mésoscopiques devrait nous permettre de donner une description de l'effet de la géométrie plus satisfaisante (notons le travail récent de Hernández & Lewenkopf [326] sur l'anneau balistique à un canal).

B. Localisation unidimensionnelle

Bien que les premiers modèles de localisation unidimensionnelle aient aujourd'hui plus de 50 ans, j'espère avoir convaincu le(a) lecteur(rice) qu'ils recèlent encore un intérêt dépassant leur pure beauté mathématique. On peut classer les travaux originaux présentés au chapitre 6 en deux groupes.

D'une part nous nous sommes concentrés (principalement avec Christian Hagendorf) sur le modèle supersymétrique désordonné. Outre l'intérêt de ce modèle pour l'étude de la diffusion classique en milieu aléatoire (problème de Sinai) et pour divers modèles de matière condensée (chaînes de spins ou conducteurs organiques), le modèle supersymétrique possède une propriété peu habituelle dans le contexte de la localisation unidimensionnelle de présenter un point de délocalisation dans son spectre. Il ne s'agit pas d'un seuil de mobilité (au sens défini par Mott) puisque la délocalisation se produit au bord du spectre. Cette propriété rend très intéressante l'analyse du problème de statistique des valeurs extrêmes pour les valeurs propres de l'énergie [628]. C'est un cas où nous obtenons des distributions $W_n(E)$ non triviales pour des valeurs ordonnées de variables *corrélées* (i.e. des distributions ne coïncidant pas avec une des classes connues pour des variables *décorrélées* : Gumbel, Fréchet ou Weibull). Bien que la délocalisation soit bien caractérisée (*cf.* liste rappelée dans le § page 204) l'analyse des distributions $W_n(E)$ avait révélé l'insuffisance d'une analyse des propriétés de localisation par l'exposant de Lyapunov¹⁰ lorsque l'effet des bords est pris en compte [628]. Autrement dit, si les conditions aux limites brisent la supersymétrie en interdisant la solution d'énergie strictement nulle, comment décrire précisément les propriétés de localisation pour les états de basse énergie? L'analyse de la sensibilité de la densité d'états moyenne $\langle \rho(E; L) \rangle$ [639] a donné une première réponse à

¹⁰ L'exposant de Lyapunov $\tilde{\xi}_E = 1/\gamma(E) \sim \frac{1}{g} \ln(g^2/E)$ suggère un seuil de localisation à $\tilde{E}_* \sim g^2 e^{-gL}$ alors que l'analyse des $W_n(E)$ et de $\langle \rho(E; L) \rangle$ montre qu'il est beaucoup plus haut, pour $E_* \sim g^2 e^{-\sqrt{gL}}$.

cette question. Une image plus complète serait probablement donnée par l'analyse (beaucoup plus ardue) des moments $\langle \rho(E; L)^n \rangle$.

Si nous avons étudié comment la supersymétrie est brisée par l'effet des bords, rappelons que nous avons également analysé dans [308, 638] comment elle est brisée par différents types de potentiels aléatoires.

Une question intéressante serait de clarifier la relation entre l'approche probabiliste utilisée dans mes travaux et l'approche du groupe de renormalisation dans l'espace réel [400, 472, 399]

Le second groupe de travaux vise à l'exploration de nouveaux modèles désordonnés. La recherche de nouveaux modèles solubles est intéressante en soi et révèle parfois des surprises comme l'apparition de nouvelles singularités spectrales [308, 638, 175] ou de propriétés de localisation originales [417, 92, 83]. Plus fondamentalement nous avons insisté au chapitre 6 sur la généralité (l'universalité?) des propriétés de localisation pour les modèles connus et les conséquences sur l'analyse des propriétés statistiques de diverses quantités physiques (conductance, densité d'états locale, temps de Wigner,...) dans le régime de haute énergie/faible désordre. Cette question est reliée au "single parameter scaling" évoqué à plusieurs reprises. Or ces propriétés d'universalité de la localisation (pour être précis la relation $\langle \xi(x) \rangle \simeq \langle \xi(x)^2 \rangle_c$) semblent reposer sur l'hypothèse que $\int dx \langle V(x)V(0) \rangle < \infty$ [45]. Une question intéressante serait de comprendre comment cette relation est modifiée lorsque $\int dx \langle V(x)V(0) \rangle = \infty$, et comment les propriétés statistiques des autres quantités physiques évoquées s'en trouvent affectées. Par exemple, j'avais remarqué en 1999 que dans le modèle des impuretés δ à poids distribués par une loi de Cauchy (dans ce cas c'est même la fonction de corrélation qui diverge $\langle V(x)V(0) \rangle = \infty$) on trouve $\langle \xi(x) \rangle \simeq 2 \langle \xi(x)^2 \rangle_c$ (cf. également [201]) alors que la distribution du temps de Wigner présente la même décroissance algébrique $P(\tau \rightarrow \infty) \propto 1/\tau^2$ (et ce de manière d'autant plus surprenante que l'exposant $2 = 1 + \mu$ avec $\mu = 1$ est directement relié à la relation $\langle \xi(x) \rangle \simeq \mu \langle \xi(x)^2 \rangle_c$ [635]).

Annexe A

A.1 Diffusion anormale le long d'une ligne de pièges

Nous rappelons quelques points développés dans la référence [711], et qui ont été utiles.

On considère des sites le long d'une ligne. Une particule saute de site en site. Chaque site est susceptible de piéger la particule pendant un temps τ distribué par une loi $\psi(\tau)$. Lorsque cette loi décroît plus vite que $1/\tau^2$, la diffusion le long de la ligne est normale, *i.e.* la distance parcourue par la particule se comporte comme $x_t \sim t^{1/2}$. En revanche, si $\psi(\tau)$ est une loi large décroissant comme $1/\tau^2$ à grand temps ou plus lentement encore, la diffusion est dite "anormale".

Dans [644], nous avons considéré deux cas :

- (1) $\psi(\tau) \propto 1/\tau^{3/2}$ (probabilité de premier retour en dimension $d = 1$). On décrit la diffusion anormale le long du squelette d'un peigne.
- (2) $\psi(\tau) \propto 1/\tau \ln^2 \tau$ (probabilité de premier retour dans un plan).

Première remarque : la distance parcourue le long de la ligne scale comme le nombre N de sauts comme : $\langle x^2 \rangle_t \propto N$. On retourne le problème : quel est le comportement du temps T nécessaire pour faire N sauts ?

$$T = \sum_{i=1}^N \tau_i. \quad (\text{A.1})$$

On étudie la fonction caractéristique du temps total T :

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle = \langle e^{-\gamma \tau} \rangle^N \quad (\text{A.2})$$

Dans la limite $\gamma \rightarrow 0$ (limite $T \rightarrow \infty$) on a

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle \simeq \left[1 - \int_0^\infty d\tau (1 - e^{-\gamma \tau}) \psi(\tau) \right]^N \simeq \exp -N \int_0^\infty d\tau (1 - e^{-\gamma \tau}) \psi(\tau). \quad (\text{A.3})$$

La fonction $1 - e^{-\gamma \tau}$ sélectionne la queue de la distribution : pour simplifier, nous la remplaçons par 0 sur $[0, 1/\gamma]$ et par 1 sur $[1/\gamma, \infty[$. Dans la limite $N \rightarrow \infty$ et $\gamma \rightarrow 0$:

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \exp -N \int_{1/\gamma}^\infty d\tau \psi(\tau). \quad (\text{A.4})$$

On utilise cette expression pour trouver la loi d'échelle entre N et T et donc entre $\langle x^2 \rangle_t$ et t . Le cas $\psi(\tau) \propto 1/\tau^2$ est le cas marginal et devra être traité séparément.

- Commençons par considérer le cas $\psi(\tau) \propto 1/\tau \ln^2(\tau)$ (probabilité intégrée de premier retour dans le plan [63]). On trouve immédiatement

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \exp -\frac{N}{\ln(1/\gamma)} \quad (\text{A.5})$$

ce qui indique un scaling $N \sim \ln(T)$ et donc

$$\boxed{x_t \sim \sqrt{\ln t}}. \quad (\text{A.6})$$

- Si la distribution décroît algébriquement comme $\psi(\tau) \propto 1/\tau^{\mu+1}$ avec $0 < \mu < 1$, on obtient :

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \exp -N\gamma^\mu \quad (\text{A.7})$$

ce qui conduit à $N \sim T^\mu$ et donc

$$\boxed{x_t \sim t^{\mu/2}}. \quad (\text{A.8})$$

- Le cas marginal $\psi(\tau) \propto 1/\tau^2$ requiert un traitement moins brutal de l'intégrale $\int_0^\infty d\tau \psi(\tau) (1 - e^{-\gamma\tau})$. Dans la limite $\gamma \rightarrow 0$

$$\langle e^{-\gamma\tau} \rangle = 1 - \int_0^\infty d\tau \psi(\tau) (1 - e^{-\gamma\tau}) \simeq 1 - \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau^2} (1 - e^{-\gamma\tau}) \simeq 1 - \gamma \int_0^\infty d\tau \frac{1}{\tau} e^{-\gamma\tau} \quad (\text{A.9})$$

Finalement $\langle e^{-\gamma\tau} \rangle \simeq 1 - \gamma \ln 1/\gamma$ ce qui conduit à

$$\langle e^{-\gamma T} \rangle \underset{\gamma \rightarrow 0}{\simeq} \exp -N\gamma \ln 1/\gamma. \quad (\text{A.10})$$

Le scaling est donc $N \sim T/\ln T$. On voit apparaître l'exposant 1/2 de la diffusion normale, avec une correction logarithmique :

$$\boxed{x_t \sim \sqrt{\frac{t}{\ln t}}}. \quad (\text{A.11})$$

- Lorsque $\psi(\tau)$ décroît plus vite que $1/\tau^2$, le premier moment existe, $T \simeq N\langle\tau\rangle$. La distance parcourue se comporte comme $x_t \sim t^{1/2}$. La diffusion est normale.

A.2 Few properties of the complete elliptic integrals

The complete elliptic integral of the first and second kind are defined as [759] :

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}} \quad \text{and} \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} d\alpha \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}, \quad (\text{A.12})$$

respectively. The differentiation is performed with the help of :

$$\frac{d}{dk} K(k) = \frac{E(k)}{k k'^2} - \frac{K(k)}{k} \quad \text{and} \quad \frac{d}{dk} E(k) = \frac{E(k) - K(k)}{k} \quad (\text{A.13})$$

where we use the notation $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Limiting behaviours

- The limit $k \rightarrow 0$: $K(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} + \dots\right)$ and $E(k) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} + \dots\right)$
- The limit $k \rightarrow 1^-$: $K(k) = \ln 4/k' + \frac{k'^2}{4} (\ln 4/k' - 1) + \dots$ and $E(k) = 1 + \frac{k'^2}{2} (\ln 4/k' - 1/2) + \dots$

Annexe B

Networks of classical resistances

I compute the classical resistance of a square network of classical resistances. This little work had a very practical motivation for helping the analysis of the experiments of [241, 782, 242]. The most interesting aspects of the model, the analysis of the phase transition (percolation) [724, 191, 192], is not considered.

B.1 Algorithm

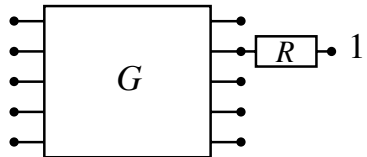
The algorithm was proposed by Derrida and Vannimenus [191, 190, 192] for the study of the percolation transition in random resistor networks. Let me recall this algorithm. The basic object is the conductance matrix G that relates the potentials imposed at the ends of the external wires to the injected currents :

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} U_\beta . \quad (\text{B.1})$$

Note that the conductance matrix obeys $\sum_\alpha G_{\alpha\beta} = \sum_\beta G_{\alpha\beta} = 0$ that express current conservation and gauge invariance, respectively. The algorithm of Derrida and Vannimenus consists in building the network wire by wire. At each step, the modification of the conductance matrix is computed, which only involves elementary operations. The main advantage of the method is to avoid more complicated algebraic calculations (like inversion of matrices).

We distinguish two elementary modifications :

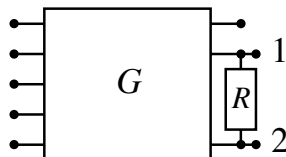
- Rule 1 : adding a resistance in series at contact 1 :



$$G'_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} - \frac{G_{\alpha 1} G_{1\beta}}{G_{11} + 1/R} . \quad (\text{B.2})$$

All conductance matrix elements must be recomputed.

- Rule 2 : connecting the contacts 1 and 2 by a resistance :



$$G'_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} + \frac{1}{R} (\delta_{\alpha 1} - \delta_{\alpha 2}) (\delta_{\beta 1} - \delta_{\beta 2}) . \quad (\text{B.3})$$

In this case the modification is more “simple” in the sense that only 4 matrix elements are affected.

B.2 Square network of resistances

This algorithm is applied to the square network of figure B.1. The network has a size $N_x \times N_y$ (number of vertices). We first consider the case where all the wires have the same resistance R_{fil} . At each corner the network is connected to external contacts by N_c wires, which corresponds to the experimental situation (Ferrier *et al* [241, 782]). The conductance matrix has a size $4N_c \times 4N_c$ (number of external wires).

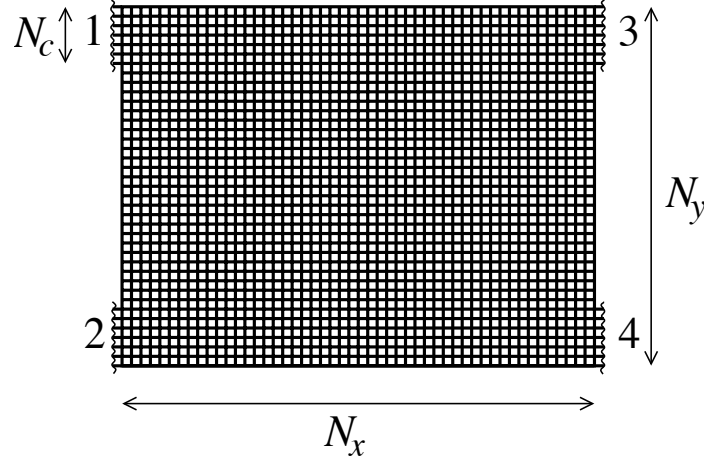


FIGURE B.1 :

- **Left-Right resistance.** We call R_{LR} the resistance obtained by gathering all left wires (the ones of 1 and 2) to one contact (L) and all right wires to the contact R. This is a little test of the algorithm since, for $N_c = N_y/2$, we have

$$R_{\text{LR}} = \frac{N_x + 1}{N_y} R_{\text{fil}}. \quad (\text{B.4})$$

- **4-terminal resistances.** We perform a trace over the indices of the wires corresponding to the same contact to build a 4-terminal conductance matrix \mathcal{G} . The 4-terminal resistance $R_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ measures the potential drop between contacts γ and δ when the current is injected at α and collected at β (see papers of Büttiker, like [117]) :

$$R_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \frac{U_\gamma - U_\delta}{I(\alpha \rightarrow \beta)}. \quad (\text{B.5})$$

The resistances measured experimentally are $R_{12,12}$ and $R_{14,14}$. We have :

$$R_{12,12} = \frac{\mathcal{G}_{33}\mathcal{G}_{44} - \mathcal{G}_{34}\mathcal{G}_{43}}{\mathcal{D}} \quad (\text{B.6})$$

where \mathcal{D} is the determinant obtained by suppressing the line 2 and column 2 in \mathcal{G}

$$\mathcal{D} = \begin{vmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{13} & \mathcal{G}_{14} \\ \mathcal{G}_{31} & \mathcal{G}_{33} & \mathcal{G}_{34} \\ \mathcal{G}_{41} & \mathcal{G}_{43} & \mathcal{G}_{44} \end{vmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Note that all minors of the determinant of the conductance matrix are equal by virtue of $\sum_\alpha \mathcal{G}_{\alpha\beta} = \sum_\beta \mathcal{G}_{\beta\alpha} = 0$ [117]. $R_{14,14}$ is obtained by replacing 4 by 2 in the above expressions.

• **Programs.**–

GRAPHS/SNAAK/NUM/SN/rrdervan.f90 for a single shot.

GRAPHS/SNAAK/NUM/SN/srrdervan.f90 for statistical properties.

• **Computation time.**– At an intermediate step, the program considers the conductance of the network represented on the figure B.2. Adding a line of vertical resistances (rule 2) requires $4(N_y - 1)$ operations. Adding a line of horizontal resistances (rule 1) requires operations on all matrix elements of the conductance matrix, which is a symmetric $(2N_c N_y) \times (2N_c N_y)$ matrix, therefore roughly $N_y(2N_c N_y)^2/2$ operations. The total number of operations behaves as

$$\text{CPU time} \propto (2N_c^2 N_y^3 + 4N_y)N_x \sim 2N_c^2 N_x N_y^3 \quad (\text{B.8})$$

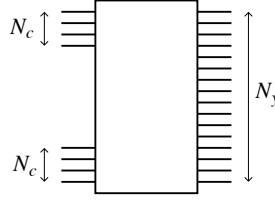


FIGURE B.2 : Network at an intermediate step of the program.

• **Numerical results.**– We first study the resistances as a function of the size of the network when $N_x = N_y = N$ and $N_c = N/10$.

N	R_{LR}	$R_{12,12}$	$R_{14,14}$
10	2.505835	4.787145	5.011670
20	2.118175	3.996381	4.224144
40	1.936170	3.626491	3.855759
80	1.845601	3.442230	3.672435
160	1.798731	3.346601	3.577416
200	1.789002	3.326707	3.557666
400	1.768800	3.285319	3.516606
800	1.758016	3.263168	3.494652

Rq : Another algorithm (cdrmesh.f90 & cd2rmesh.f90).– The first 4 values for $R_{14,14}$ have been calculated with a different algorithm, as a check (with the help of the formula derived in Ref. [642] for the classical transmissions of a network of diffusive wires : $T_{\alpha'\beta'}^{\text{class}} = (\mathcal{M}_0^{-1})_{\alpha\beta}$). This latter algorithm requires the inversion of a matrix of size $(N_x N_y) \times (N_x N_y)$ which only allows to consider networks of size up to $N \sim 100$ (the NAG procedure does not work for larger N). Both algorithms give the same results.

Asymptotic value.– The plot of the resistances as a function of $1/N$ suggests a behaviour like $R_N = R_\infty + b/N$ (the values for R_∞ and b are given on the figure below). The fits of the resistances show that, for $N \rightarrow \infty$, the resistances saturate at the values :

$$R_{12,12}^\infty \simeq 3.25 R_{\text{fil}} \quad (\text{B.9})$$

$$R_{14,14}^\infty \simeq 3.48 R_{\text{fil}} . \quad (\text{B.10})$$

For the experiment [241, 782] : $N = 1000$, then $R_{12,12} \simeq 3.262 R_{\text{fil}}$ and $R_{14,14} \simeq 3.493 R_{\text{fil}}$.

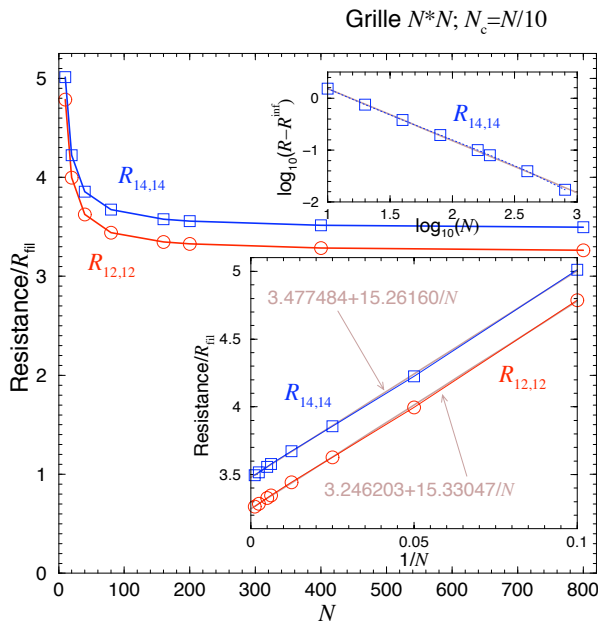


FIGURE B.3 : Resistances $R_{12,12}$ and $R_{14,14}$ as a function of the size of the network.

Connecting the network at two opposite corners with $N_c = 1$

We have seen above that when N_c , N_x and N_y all scale in the same way, the resistances reach finite values as $N_x \rightarrow \infty$.

Here we consider a different situation where $N_c = 1$ and $N_x = N_y$. In this case the resistance keeps increasing as the size of the network increases.

We give below the resistance $\mathcal{R} = R_{14,14} - 2$ (we extract the contributions of the contact wires).

N_x	\mathcal{R}
2	1.00000
3	1.50000
5	2.13636
10	3.01166
20	3.89226
40	4.77431
80	5.65673
160	6.53924

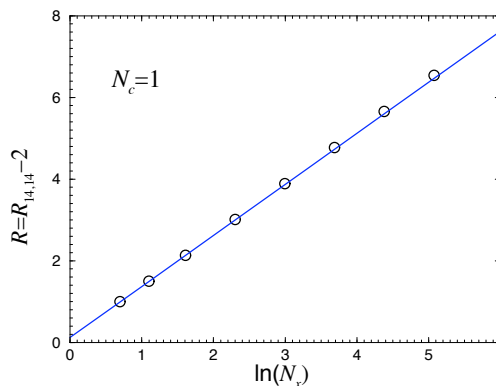


FIGURE B.4 : Resistance $\mathcal{R} = R_{14,14} - 2$ for $N_c = 1$ and $N_x = N_y$.

We see on the figure that the resistance scales as $\ln(N_x)$. We fit the data as :

$$\mathcal{R} \simeq 1.25 \ln(1.1 N_x) \tag{B.11}$$

It is also interesting to plot the potentials at the nodes of the square network. We plot $V(i, j)$, the potential at the node (i, j) for $N_x = 80$.

In order to understand the origin of the logarithmic behaviour of the resistance, let us study the resistance of a conic contact (figure B.6). We very easily solve the Poisson equation $\Delta V = 0$

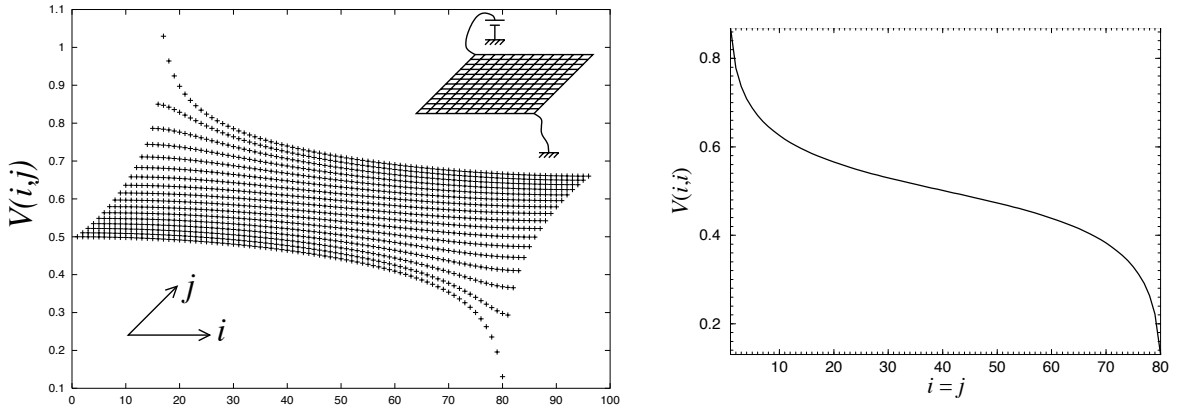


FIGURE B.5 : Potentials at the nodes of the square network. Right : potentials along the diagonal.

where Ohm's law $\vec{j} = \sigma_0 \vec{\mathcal{E}}$ provides the boundary condition : $V(r) = \frac{I}{\sigma_0} \ln r$ therefore the resistance of the contact is

$$R_{\text{contact}} = \frac{V(r_1) - V(r_2)}{I} = R_{\square} \ln(r_1/r_2) \quad (\text{B.12})$$

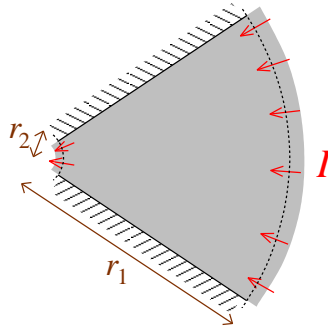


FIGURE B.6 : Current flow through a 2D metallic contact : such a contact is characterised by a logarithmic electric resistance $R_{\text{contact}} = R_{\square} \ln(r_1/r_2)$.

B.3 Networks with broken wires

Next we study the effect of broken wires (binary disorder) : we attribute a vanishing conductance to the wires with a probability p (note that it is preferable, from a numerical point of view, to give a tiny conductance, like 10^{-8}). The resistances are plotted below for different network sizes. The bars correspond to the fluctuations. Each value is computed for a statistic of $N_s = 100$.

- $N_x = N_y = 10N_c = 80$
- $N_x = N_y = 10N_c = 120$
- $N_x = N_y = 10N_c = 160$

As expected the network resistance grows as the probability p is increased (the percolation threshold in $d = 2$ for bond disorder occurs at $p_c = 1/2$ [724, 191]). The fluctuations increase

p	$\langle R_{LR} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{LR}^2 \rangle}$	$\langle R_{12,12} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{12,12}^2 \rangle}$	$\langle R_{14,14} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{14,14}^2 \rangle}$
0	1.8456	0	3.4422	0	3.6724	0
0.05	2.0432	0.02178	3.8106	0.0590	4.0642	0.0577
0.1	2.3002	0.03573	4.2823	0.1150	4.5899	0.1299
0.15	2.6381	0.05542	4.9064	0.1681	5.2667	0.1770
0.2	3.0890	0.08900	5.7328	0.2524	6.1638	0.2773
0.25	3.7790	0.14731	7.0046	0.4334	7.5509	0.4787
0.3	4.8725	0.28511	9.0957	0.8291	9.8297	0.9948
0.325	5.7207	0.41176	10.804	1.5675	11.571	1.5113

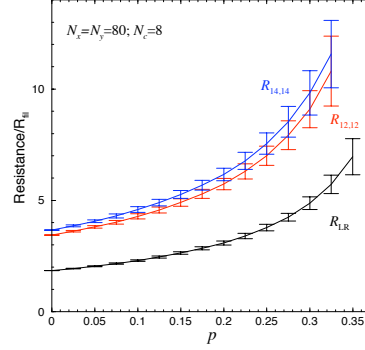


FIGURE B.7 : Resistances as a function of the concentration of broken wires. The bars indicate the amplitude of fluctuations.

p	$\langle R_{LR} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{LR}^2 \rangle}$	$\langle R_{12,12} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{12,12}^2 \rangle}$	$\langle R_{14,14} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{14,14}^2 \rangle}$
0	1.8146	0	3.3790	0	3.6096	0
0.05	2.0125	0.01585	3.7446	0.0420	4.0009	0.0439
0.1	2.2631	0.02938	4.2066	0.0753	4.4980	0.0763
0.15	2.5942	0.04637	4.8226	0.1299	5.1564	0.1291
0.2	3.0575	0.07136	5.6920	0.2014	6.0707	0.2117
0.25	3.7286	0.11483	6.9727	0.3607	7.4263	0.3477
0.3	4.7887	0.18693	8.9927	0.6283	9.5311	0.5676
0.325	5.6041	0.29626	10.605	1.1022	11.138	0.7592

p	$\langle R_{LR} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{LR}^2 \rangle}$	$\langle R_{12,12} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{12,12}^2 \rangle}$	$\langle R_{14,14} \rangle$	$\sqrt{\langle \delta R_{14,14}^2 \rangle}$
0	1.7987	0	3.3466	0	3.5774	0
0.05	1.9960	0.01022	3.7158	0.03199	3.9677	0.02829
0.1	2.2472	0.02346	4.1842	0.06673	4.4653	0.06408
0.15	2.5808	0.04004	4.8218	0.12033	5.1216	0.11769
0.2	3.0411	0.06177	5.6925	0.18400	6.0369	0.19302
0.25	3.7046	0.10143	6.9769	0.32306	7.3555	0.29806
0.3	4.7594	0.19687	9.0026	0.69041	9.4681	0.55941
0.325	5.5487	0.26775	10.507	0.84378	11.051	0.75320

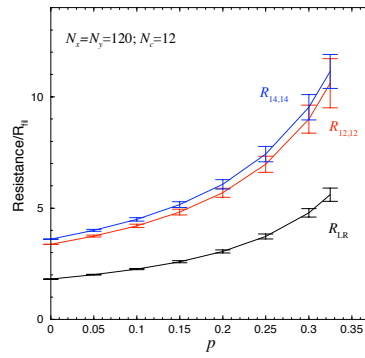


FIGURE B.8 :

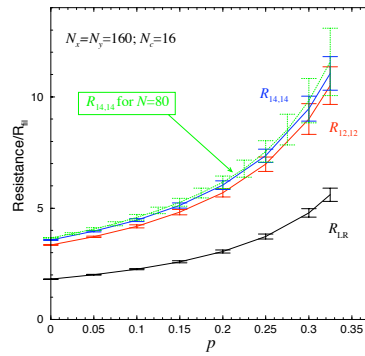


FIGURE B.9 :

as well approaching the percolation threshold. For a fixed p the resistance is almost constant as the size of the network increases, while the fluctuations diminish.

Acknowledgements

I thank Jesper L. Jacobsen and Marc Mezard for having brought to my attention the work of Derrida and Vannimenus.

Bibliographie

- [1] C. C. Abilio, P. Butaud, T. Fournier, B. Pannetier, J. Vidal, S. Tedesco and B. Dalzotto, Magnetic Field Induced Localization in a Two-Dimensional Superconducting Wire Network, *Phys. Rev. Lett.* **83**(24), 5102–5105 (1999).
- [2] R. Abou-Chacra, P. W. Anderson and D. J. Thouless, A selfconsistent theory of localization, *J. Phys. C : Solid State Phys.* **6**(10), 1734–1752 (1973).
- [3] R. Abou-Chacra and D. J. Thouless, Selfconsistent theory of localization. II. Localization near the band edges, *J. Phys. C : Solid State Phys.* **7**(1), 65–75 (1974).
- [4] E. Abrahams, P. W. Anderson, P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Quasiparticle lifetime in disordered two-dimensional metals, *Phys. Rev. B* **24**(12), 6783–6789 (1981).
- [5] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello and T. V. Ramakrishnan, Scaling theory of localization : absence of quantum diffusion in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **42**(10), 673 (1979).
- [6] G. Ahumada, Fonctions périodiques et formule des traces de Selberg sur les arbres, *C. R. Acad. Sc. Paris* **305**(Série I), 709 (1987).
- [7] E. Akkermans, A. Auerbach, J. E. Avron and B. Shapiro, Relation between persistent currents and the scattering matrix, *Phys. Rev. Lett.* **66**(1), 76–79 (1991), Comment in Ref. [173].
- [8] E. Akkermans, A. Comtet, J. Desbois, G. Montambaux and C. Texier, On the spectral determinant of quantum graphs, *Ann. Phys. (N.Y.)* **284**, 10–51 (2000).
- [9] S. Albeverio, L. Dabrowski and P. Kurasov, Symmetries of the Schrödinger operators with point interactions, *Lett. Math. Phys.* **45**, 33–47 (1998).
- [10] I. L. Aleiner, B. L. Altshuler and M. E. Gershenson, Interaction effects and phase relaxation in disordered systems, *Waves Random Media* **9**, 201–239 (1999).
- [11] I. L. Aleiner and Ya. M. Blanter, Inelastic scattering time for conductance fluctuations, *Phys. Rev. B* **65**, 115317 (2002).
- [12] I. L. Aleiner and K. B. Efetov, Effect of Disorder on Transport in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **97**(23), 236801 (2006).
- [13] S. Alexander, Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder, *Phys. Rev. B* **27**(3), 1541 (1983).
- [14] B. W. Alphenaar, P. L. McEuen, R. G. Wheeler and R. N. Sacks, Selective equilibration among the current-carrying states in the quantum Hall regime, *Phys. Rev. Lett.* **64**(6), 677 (1990).

- [15] A. Altland, Low-Energy Theory of Disordered Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **97**(23), 236802 (2006).
- [16] A. Altland and M. R. Zirnbauer, Nonstandard symmetry classes in mesoscopic normal-superconducting hybrid structures, *Phys. Rev. B* **55**(2), 1142–1161 (1997).
- [17] B. L. Al'tshuler and A. G. Aronov, Contribution to the theory of disordered metals in strongly doped semiconductors, *Sov. Phys. JETP* **50**(5), 968 (1979).
- [18] B. L. Al'tshuler and A. G. Aronov, Damping of the one-electron excitations in metals, *JETP Lett.* **30**(8), 482 (1979).
- [19] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Electron density of states and energy relaxation time in magnetic field, *Solid State Commun.* **38**, 11–15 (1981).
- [20] B. L. Al'tshuler and A. G. Aronov, Magnetoresistance of thin films and of wires in a longitudinal magnetic field, *JETP Lett.* **33**(10), 499 (1981).
- [21] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Fermi-liquid theory of the electron-electron interaction effects in disordered metals, *Solid State Commun.* **46**(6), 429–435 (1983).
- [22] B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Electron-electron interaction in disordered conductors, in *Electron-electron interactions in disordered systems*, edited by A. L. Efros and M. Pollak, p. 1, North-Holland (1985).
- [23] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and D. E. Khmelnitsky, Effects of electron-electron collisions with small energy transfers on quantum localisation, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **15**, 7367 (1982).
- [24] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and P. A. Lee, Interaction effects in disordered Fermi systems in two dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **44**(19), 1288 (1980).
- [25] B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov and B. Z. Spivak, The Aaronov-Bohm effect in disordered conductors, *JETP Lett.* **33**(2), 94 (1981).
- [26] B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov, B. Z. Spivak, D. Yu. Sharvin and Yu. V. Sharvin, Observation of the Aaronov-Bohm effect in hollow metal cylinders, *JETP Lett.* **35**(11), 588 (1982).
- [27] B. L. Al'tshuler, A. G. Aronov and A. Yu. Zyuzin, Size effects in disordered conductors, *Sov. Phys. JETP* **59**(2), 415 (1984).
- [28] B. L. Altshuler, Y. Gefen, A. Kamenev and L. S. Levitov, Quasiparticle Lifetime in a Finite System : A Nonperturbative Approach, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 2803–2806 (1997).
- [29] B. L. Al'tshuler and D. E. Khmel'nitzkiĭ, Fluctuation properties of small conductors, *JETP Lett.* **42**(7), 359 (1985).
- [30] B. L. Al'tshuler, D. E. Khmel'nitzkiĭ, A. I. Larkin and P. A. Lee, Magnetoresistance and Hall effect in a disordered two-dimensional electron gas, *Phys. Rev. B* **22**(11), 5142 (1980).
- [31] B. L. Al'tshuler, V. E. Kravtsov and I. V. Lerner, Statistical properties of mesoscopic fluctuations and similarity theory, *JETP Lett.* **43**(7), 441 (1986).
- [32] B. L. Altshuler, L. S. Levitov and A. Yu. Yakovets, Nonequilibrium noise in mesoscopic conductors : A microscopic analysis, *JETP Lett.* **59**(12), 857 (1994).

- [33] B. L. Altshuler and V. N. Prigodin, Dynamical properties of a finite one-dimensional conductor, *JETP Lett.* **47**(1), 43 (1988).
- [34] B. L. Altshuler and V. N. Prigodin, Distribution of local density of states and NMR line shape in a one-dimensional disordered conductor, *Sov. Phys. JETP* **68**(1), 198–209 (1989).
- [35] B. L. Al'tshuler and B. I. Shklovskii, Repulsion of energy levels and conductivity of small metal samples, *Sov. Phys. JETP* **64**(1), 127 (1986).
- [36] B. L. Al'tshuler, I. K. Zharekeshev, S. A. Kotochigova and B. I. Shklovskii, Repulsion between energy levels and the metal-insulator transition, *Sov. Phys. JETP* **67**(3), 625–631 (1988), [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94** 343 (1988)].
- [37] B. L. Altshuler, A. G. Aronov and D. E. Khmel'nitsky, Suppression of localization effects by the high frequency field and the Nyquist noise, *Solid State Commun.* **39**, 619–623 (1981).
- [38] P. Anderson, D. J. Thouless, E. Abrahams and D. S. Fisher, New method for a scaling theory of localization, *Phys. Rev. B* **22**(8), 3519–3526 (1980).
- [39] P. W. Anderson, Absence of diffusion in certain random lattices, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [40] P. W. Anderson, More is different, *Science* **177**(n°4047), 393 (4 August 1972).
- [41] P. W. Anderson, E. Abrahams and T. V. Ramakrishnan, Possible Explanation of Nonlinear Conductivity in Thin-Film Metal Wires, *Phys. Rev. Lett.* **43**(10), 718 (1979).
- [42] T. Ando, Y. Matsumoto and Y. Uemura, Theory of Hall effect in a two-dimensional electron system, *Journal of the Physical Society of Japan* **39**(2), 279 (1975).
- [43] E. Y. Andrei, G. Deville, D. C. Glattli, F. I. B. Williams, E. Paris and B. Etienne, Observation of a Magnetically Induced Wigner Solid, *Phys. Rev. Lett.* **60**(26), 2765–2768 (1988).
- [44] L. Angers, E. Zakka-Bajjani, R. Deblock, S. Guéron, H. Bouchiat, A. Cavanna, U. Gennser and M. Polianski, Magnetic-field asymmetry of mesoscopic dc rectification in Aharonov-Bohm rings, *Phys. Rev. B* **75**, 115309 (2007).
- [45] T. N. Antsygina, L. A. Pastur and V. A. Slyusarev, Localization of states and kinetic properties of one-dimensional disordered systems, *Sov. J. Low Temp. Phys.* **7**(1), 1–21 (1981).
- [46] H. Aoki and T. Ando, Effect of localization on the Hall conductivity in the two-dimensional system in strong magnetic fields, *Solid State Commun.* **38**(11), 1079–1082 (1981).
- [47] A. G. Aronov and A. D. Mirlin, Fluctuations of the number of energy levels at the mobility edge, *Phys. Rev. B* **51**(9), 6131–6134 (1995).
- [48] Y. Asada, K. Slevin and T. Ohtsuki, Numerical estimation of the β function in two-dimensional systems with spin-orbit coupling, *Phys. Rev. B* **70**(3), 035115 (2004).
- [49] Y. Asada, K. Slevin and T. Ohtsuki, Anderson transition in the three dimensional symplectic universality class, *J. Phys. Soc. Jpn.* **74**, Suppl. pp. 238–241 (2005).

- [50] J. E. Avron, Adiabatic quantum transport, in *Quantum Fluctuations*, edited by E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard and J. Zinn-Justin, p. 741, Proceedings of the Les Houches Summer School, Session LXI (1995), Elsevier, Amsterdam.
- [51] J. E. Avron and L. Sadun, Adiabatic quantum transport in networks with macroscopic components, *Ann. Phys. (N.Y.)* **206**, 440 (1991).
- [52] M. Ya. Azbel, Generalized Landauer formula, *Phys. Lett.* **78A**(4), 410 (1980).
- [53] A. Bachtold, M. S. Fuhrer, S. Plyasunov, M. Forero, E. H. Anderson, A. Zettl and P. L. McEuen, Scanned Probe Microscopy of Electronic Transport in Carbon Nanotubes, *Phys. Rev. Lett.* **84**(26), 6082 (2000).
- [54] L. Balents and M. P. A. Fisher, Delocalization transition via supersymmetry in one dimension, *Phys. Rev. B* **56**(20), 12970–12991 (1997).
- [55] H. U. Baranger, R. A. Jalabert and A. D. Stone, Weak localization and integrability in ballistic cavities, *Phys. Rev. Lett.* **70**(25), 3876–3879 (1993).
- [56] H. U. Baranger and A. D. Stone, Electrical linear-response theory in an arbitrary magnetic field : A new Fermi-surface formation, *Phys. Rev. B* **40**(12), 8169–8193 (1989).
- [57] J. H. Bardarson, J. Tworzydło, P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, One-Parameter Scaling at the Dirac Point in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 106801 (2007).
- [58] C. Barnes and J.-M. Luck, The distribution of the reflection phase of disordered conductors, *J. Phys. A : Math. Gen.* **23**, 1717 (1990).
- [59] F. Barra and P. Gaspard, On the level spacing distribution in quantum graphs, *J. Stat. Phys.* **101**, 283 (2000).
- [60] F. Barra and P. Gaspard, Classical dynamics on graphs, *Phys. Rev. E* **63**(6), 066215 (2001).
- [61] F. Barra and P. Gaspard, Transport and dynamics on open quantum graphs, *Phys. Rev. E* **65**(1), 016205 (2001).
- [62] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, *L'Enseignement Mathématique* **45**, 83–131 (1999).
- [63] A. V. Barzykin and M. Tachiya, Diffusion-influenced reaction kinetics on fractal structures, *J. Chem. Phys.* **99**, 9591 (1993).
- [64] D. M. Basko, I. L. Aleiner and B. L. Altshuler, On the problem of many-body localization, in *Problems of condensed matter physics*, edited by A. I. Ivanov and S. G. Tikhodeev. Oxford (2007), available as arXiv : cond-mat/06 02 510.
- [65] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.* **3**, 717 (1992).
- [66] C. Bäuerle, F. Mallet, F. Schopfer, D. Mailly, G. Eska and L. Saminadayar, Experimental Test of the Numerical Renormalization Group Theory for Inelastic Scattering from Magnetic Impurities, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 266805 (2005).
- [67] C. W. J. Beenakker and M. Büttiker, Suppression of shot noise in metallic diffusive conductors, *Phys. Rev. B* **46**(3), 1889–1892 (1992).
- [68] C. W. J. Beenakker and H. Van Houten, Boundary scattering and weak localization of electrons in a magnetic field, *Phys. Rev. B* **38**(5), 3232 (1988).

- [69] C. W. J. Beenakker and H. Van Houten, Quantum transport in semiconductor nanostructures, *Solid State Physics* **44**, 1–228 (1991).
- [70] M. M. Benderskiĭ and L. A. Pastur, Calculation of the average number of states in a model problem, *Sov. Phys. JETP* **30**(1), 158 (1970).
- [71] A. Benoit, C. P. Umbach, R. B. Laibowitz and R. A. Webb, Length-Independent Voltage Fluctuations in Small Devices, *Phys. Rev. Lett.* **58**(22), 2343 (1987).
- [72] V. L. Berezinskiĭ, Kinetics of a quantum particle in a one-dimensional random potential, *Sov. Phys. JETP* **38**(3), 620 (1974), [*Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **65**, 1251 (1973)].
- [73] V. L. Berezinskiĭ and L. P. Gor'kov, On the theory of electrons localized in the field of defects, *Sov. Phys. JETP* **50**(6), 1209 (1979).
- [74] G. Bergmann, Consistent temperature and field dependence in weak localization, *Phys. Rev. B* **28**(2), 515 (1983).
- [75] G. Berkolaiko, E. B. Bogomolny and J. P. Keating, Star graphs and Šeba billiards, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34**, 335 (2001).
- [76] G. Berkolaiko and J. P. Keating, Two-point spectral correlations for star graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **32**, 7827 (1999).
- [77] G. Berkolaiko, H. Schanz and R. S. Whitney, Leading Off-Diagonal Correction to the Form Factor of Large Graphs, *Phys. Rev. Lett.* **88**(10), 104101 (2002).
- [78] D. Bernard and A. LeClair, A classification of 2D random Dirac fermions, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, 2555–2567 (2002).
- [79] M. V. Berry and S. Klein, Transparent mirrors : rays, waves and localization, *Eur. J. Phys.* **18**, 222 (1997).
- [80] M. V. Berry, F. S. R. and R. J. Mondragon, Neutrino billiards : time-reversal symmetry-breaking without magnetic fields, *Proc. R. Soc. Lond. A* **412**, 53–74 (1987).
- [81] E. Beth and G. E. Uhlenbeck, The quantum theory of the non-ideal gas II. Behaviour at low temperatures, *Physica* **4**(10), 915–924 (1937).
- [82] T. Bienaimé, *Localisation pour des hamiltoniens 1D avec potentiels aux fluctuations larges*, Master's thesis, Master CFP, parcours de physique quantique, Université Paris 6 (2008).
- [83] T. Bienaimé and C. Texier, Localization for one-dimensional random potentials with large fluctuations, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41**, 475001 (2008).
- [84] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer and A. Aspect, Direct observation of Anderson localization of matter-waves in a controlled disorder, *Nature* **453**, 891 (2008).
- [85] G. Biroli and R. Monasson, A single defect approximation for localized states on random lattices, *J. Phys. A : Math. Gen.* **32**, L255 (1999).
- [86] D. J. Bishop, J. C. Licini and G. J. Dolan, Lithium quench-condensed microstructures and the Aharonov-Bohm effect, *Appl. Phys. Lett.* **46**, 1000 (1985).
- [87] Ya. M. Blanter, Electron-electron scattering rate in disordered mesoscopic systems, *Phys. Rev. B* **54**(18), 12807–12819 (1996).

- [88] Ya. M. Blanter and M. Büttiker, Shot-noise current-current correlations in multiterminal diffusive conductors, *Phys. Rev. B* **56**(4), 2127–2136 (1997).
- [89] M. Bocquet, Some spectral properties of the one-dimensional disordered Dirac equation, *Nucl. Phys. B [FS]* **546**, 621 (1999).
- [90] M. Bocquet and J. T. Chalker, Network models for localization problems belonging to the chiral symmetry classes, *Phys. Rev. B* **67**(5), 054204 (2003).
- [91] M. Bocquet, D. Serban and M. R. Zirnbauer, Disordered 2d quasiparticles in class D : Dirac fermions with random mass, and dirty superconductors, *Nucl. Phys. B [FS]* **578**, 628 (2000).
- [92] D. Boosé and J.-M. Luck, Statistics of quantum transmission in one dimension with broad disorder, *J. Phys. A : Math. Theor.* **40**, 14045–14067 (2007).
- [93] R. E. Borland, The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems, *Proc. R. Soc. (London)* **A274**, 529–545 (1963).
- [94] J.-P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges and P. Le Doussal, The relaxation-time spectrum of diffusion in a one-dimensional random medium : an exactly solvable case, *Europhys. Lett.* **3**(6), 653 (1987).
- [95] J.-P. Bouchaud, A. Comtet, A. Georges and P. Le Doussal, Classical diffusion of a particle in a one-dimensional random force field, *Ann. Phys. (N.Y.)* **201**, 285–341 (1990).
- [96] J.-P. Bouchaud and M. Mézard, Universality classes for extreme value statistic, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30**, 7997 (1997).
- [97] A. Bovier, Perturbation theory for the random dimer model, *J. Phys. A : Math. Gen.* **25**, 1021 (1992).
- [98] D. Braun and G. Montambaux, Spectral correlations from the metal to the mobility edge, *Phys. Rev. B* **52**(19), 13903–13909 (1995).
- [99] É. Brézin, D. J. Gross and C. Itzykson, Density of states in the presence of a strong magnetic field and random impurities, *Nucl. Phys. B [FS]* **235**, 24 (1984).
- [100] E. Brézin, S. Hikami and J. Zinn-Justin, Generalized non-linear σ -models with gauge invariance, *Nucl. Phys. B [FS]* **165**, 528–544 (1980).
- [101] K. Broderix and R. Kree, Thermal equilibrium with the Wiener potential : testing the replica variational approximation, *Europhys. Lett.* **32**, 343–348 (1995).
- [102] P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, Diagrammatic method of integration over the unitary group, with applications to quantum transport in mesoscopic systems, *J. Math. Phys.* **37**(10), 4904 (1996).
- [103] P. W. Brouwer and M. Büttiker, Charge-relaxation and dwell time in the fluctuating admittance of a chaotic cavity, *Europhys. Lett.* **37**(7), 441–446 (1997).
- [104] P. W. Brouwer and K. Frahm, Quantum transport in disordered wires : Equivalence of the one-dimensional σ model and the Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar equation, *Phys. Rev. B* **53**(3), 1490–1501 (1996).
- [105] P. W. Brouwer, K. M. Frahm and C. W. Beenakker, Quantum mechanical time-delay matrix in chaotic scattering, *Phys. Rev. Lett.* **78**(25), 4737 (1997).

- [106] P. W. Brouwer, K. M. Frahm and C. W. Beenakker, Distribution of the quantum mechanical time-delay matrix for a chaotic cavity, *Waves Random Media* **9**, 91–104 (1999).
- [107] P. W. Brouwer, A. Furusaki, I. A. Gruzberg and C. Mudry, Localization and Delocalization in Dirty Superconducting Wires, *Phys. Rev. Lett.* **85**(5), 1064 (2000).
- [108] P. W. Brouwer, A. Lamacraft and K. Flensberg, Nonequilibrium theory of Coulomb blockade in open quantum dots, *Phys. Rev. B* **72**, 075316 (2005).
- [109] P. W. Brouwer, C. Mudry and A. Furusaki, Density of States in Coupled Chains with Off-Diagonal Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **84**(13), 2913 (2000).
- [110] P. W. Brouwer, C. Mudry and A. Furusaki, Transport properties and density of States of quantum wires with Off-Diagonal Disorder, *Physica E* **9**, 333–339 (2001).
- [111] P. W. Brouwer, C. Mudry and A. Furusaki, Universality of delocalization in unconventional dirty superconducting wires with broken spin-rotation symmetry, *Phys. Rev. B* **67**, 014530 (2003).
- [112] P. W. Brouwer, E. Racine, A. Furusaki, Y. Hatsugai, Y. Morita and C. Mudry, Zero-modes in the random hopping model, *Phys. Rev. B* **66**, 014204 (2002).
- [113] P. W. Brouwer and S. Rahav, Semiclassical theory of the Ehrenfest time dependence of quantum transport in ballistic quantum dots, *Phys. Rev. B* **74**, 075322 (2006).
- [114] A. Bunde, S. Havlin, J. W. Kantelhardt, S. Russ and I. Webman, Localization in a highly correlated potential landscape, *J. Mol. Liq.* **86**(1–3), 151–161 (2000).
- [115] J. E. Bunder and R. H. McKenzie, Derivation of the probability distribution function for the local density of states of a disordered quantum wire via the replica trick and supersymmetry, *Nucl. Phys. B [FS]* **592**, 445 (2001).
- [116] M. Büttiker, Small normal-metal loop coupled to an electron reservoir, *Phys. Rev. B* **32**(3), 1846–1849 (1985).
- [117] M. Büttiker, Four-Terminal Phase-Coherent Conductance, *Phys. Rev. Lett.* **57**(14), 1761 (1986).
- [118] M. Büttiker, Role of quantum coherence in series resistors, *Phys. Rev. B* **33**(5), 3020–3026 (1986).
- [119] M. Büttiker, Absence of backscattering in the quantum Hall effect in multiprobe conductors, *Phys. Rev. B* **38**(14), 9375–9389 (1988).
- [120] M. Büttiker, Symmetry of electrical conduction, *IBM J. Res. Develop.* **32**(3), 317 (1988).
- [121] M. Büttiker, Quantized transmission of a saddle-point constriction, *Phys. Rev. B* **41**(11), 7906–7909 (1990).
- [122] M. Büttiker, Scattering Theory of Thermal and Excess Noise in Open Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **65**(23), 2901 (1990).
- [123] M. Büttiker, Scattering theory of current and intensity noise correlations in conductors and wave guides, *Phys. Rev. B* **46**(19), 12485–12507 (1992).
- [124] M. Büttiker, Capacitance, admittance, and rectification properties of small conductors, *J. Phys. Cond. Matter* **5**, 9361 (1993).

- [125] M. Büttiker, Charge relaxation resistances and charge fluctuations in mesoscopic conductors, *J. Korean Phys. Soc.* **34**, S121–130 (1999), (cond-mat/99 02 054).
- [126] M. Büttiker, Charge fluctuations and dephasing in Coulomb coupled conductors, in *Quantum mesoscopic phenomena and mesoscopic devices*, edited by I. O. Kulik and R. Ellialtıoglu, volume 559, p. 211, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (2000), (cond-mat/99 11 188).
- [127] M. Büttiker, Time-dependent transport in mesoscopic structures, *J. Low Temp. Phys.* **11**(5/6), 519 (2000).
- [128] M. Büttiker, Reversing the sign of current-current correlations, in *Quantum Noise*, edited by Ya. M. Blanter and Yu. V. Nazarov, Kluwer (2002), preprint cond-mat/02 09 031.
- [129] M. Büttiker and T. Christen, Admittance and nonlinear transport in quantum wires, points contacts and resonant tunneling barriers, in *Mesoscopic Electron Transport*, edited by L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven and G. Schön, pp. 259–289, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).
- [130] M. Büttiker, Y. Imry and M. Ya. Azbel, Quantum oscillations in one-dimensional normal-metal rings, *Phys. Rev. A* **30**(4), 1982–1989 (1984).
- [131] M. Büttiker, Y. Imry and R. Landauer, Josephson behavior in small normal one-dimensional rings, *Phys. Lett. A* **96**, 365 (1983).
- [132] M. Büttiker, Y. Imry, R. Landauer and S. Pinhas, Generalized many-channel conductance formula with application to small rings, *Phys. Rev. B* **31**(10), 6207–6215 (1985).
- [133] M. Büttiker and S. E. Nigg, Mesoscopic Capacitance Oscillations, *Nanotechnology* **18**, 044029 (2007).
- [134] M. Büttiker, A. Prêtre and H. Thomas, Dynamic conductance and the scattering matrix of small conductors, *Phys. Rev. Lett.* **70**(26), 4114 (1993).
- [135] M. Büttiker and D. Sánchez, Interaction induced magnetic field asymmetry of nonlinear mesoscopic electrical transport, *Int. J. Quant. Chem.* **105**, 906 (2005).
- [136] M. Büttiker, H. Thomas and A. Prêtre, Mesoscopic capacitors, *Phys. Lett. A* **180**, 364 (1993).
- [137] M. Büttiker, H. Thomas and A. Prêtre, Current partition in multiprobe conductors in the presence of slowly oscillating potentials, *Z. Phys. B* **94**, 133 (1994).
- [138] Yu. A. Bychkov and A. M. Dykhne, Electron spectrum in a one-dimensional system with randomly arranged scattering centers, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **3**(8), 313 (1966).
- [139] Yu. A. Bychkov and A. M. Dykhne, Impurity band in a one-dimensional model, *Sov. Phys. JETP* **24**(6), 1290 (1967).
- [140] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Quantum tunnelling in a dissipative system, *Ann. Phys. (N.Y.)* **149**, 374 (1983).
- [141] H. B. Callen and T. A. Welton, Irreversibility and Generalized noise, *Phys. Rev.* **83**(1), 34 (1951).
- [142] Y. Cao, Z. Hou and Y. Liu, Quantum waveguide properties of a comb structure with a ring, *Phys. Rev. B* **68**(15), 153304 (2003).

- [143] T. Capron, C. Texier, G. Montambaux, D. Maily, A. D. Wieck and L. Saminadayar, Ergodic versus diffusive decoherence in mesoscopic devices, *Phys. Rev. B* **87**, 041307 (2013).
- [144] J. L. Cardy, Electron localisation in disordered systems and classical solutions in Ginzburg-Landau field theory, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **11**(8), L321 (1978).
- [145] F. Carlier and V. M. Akulin, Quantum interference in nanofractals and its optical manifestation, *Phys. Rev. B* **69**(11), 115433 (2004).
- [146] C. Castellani, C. Di Castro, P. A. Lee and M. Ma, Interaction-driven metal-insulator transitions in disordered fermion systems, *Phys. Rev. B* **30**(2), 527–543 (1984).
- [147] J.-S. Caux, N. Taniguchi and A. M. Tsvelik, Termination of Multifractal behavior for Critical Disordered Dirac Fermions, *Phys. Rev. Lett.* **80**(6), 1276–1279 (1998).
- [148] A. A. Chabanov, M. Stoutchev and A. Z. Genack, Statistical signatures of photon localization, *Nature* **404**, 850 (April 20, 2000).
- [149] J. T. Chalker and M. Bernhardt, Scattering theory, transfer matrices, and Anderson localization, *Phys. Rev. Lett.* **70**(7), 982–985 (1993).
- [150] J. T. Chalker and P. D. Coddington, Percolation, quantum tunnelling and the integer Hall-effect, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **21**(14), 2665 (1988).
- [151] J. T. Chalker, N. Read, V. Kagalovsky, B. Horovitz, Y. Avishai and A. W. W. Ludwig, Thermal metal in network models of a disordered two-dimensional superconductor, *Phys. Rev. B* **65**, 012506 (2001).
- [152] J. T. Chalker and S. Siak, Anderson localisation on a Cayley tree : a new model with a simple solution, *J. Phys. Cond. Matter* **2**(11), 2671–2686 (1990).
- [153] V. Chandrasekhar, D. E. Prober and P. Santhanam, Effect of Measurement Geometry on Weak Localization in Short Wires, *Phys. Rev. Lett.* **61**(19), 2253 (1988).
- [154] V. Chandrasekhar, M. J. Rooks, S. Wind and D. E. Prober, Observation of Aharonov-Bohm Electron Interference Effects with Periods h/e and $h/2e$ in Individual Micron-Size, Normal-Metal Rings, *Phys. Rev. Lett.* **55**(15), 1610 (1985).
- [155] V. Chandrasekhar, P. Santhanam and D. E. Prober, Effect of spin-orbit and spin-flip scattering on conductance fluctuations, *Phys. Rev. B* **42**(10), 6823–6826 (1990).
- [156] V. Chandrasekhar, P. Santhanam and D. E. Prober, Weak localization and conductance fluctuations in complex mesoscopic geometries, *Phys. Rev. B* **44**(20), 11203–11220 (1991).
- [157] P. Chaudhari and H.-U. Habermeier, Quantum localization in amorphous W-Re alloys, *Phys. Rev. Lett.* **44**(1), 40 (1980).
- [158] V. V. Cheianov, V. I. Fal’ko, B. L. Altshuler and I. L. Aleiner, Random Resistor Network Model of Minimal Conductivity in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 176801 (2007).
- [159] L. O. Chekhov, A spectral problem on graphs and L -functions, *Russ. Math. Surv.* **54**(6), 1197 (1999).
- [160] S. Cho and M. P. A. Fisher, Criticality in the two-dimensional random-bond Ising model, *Phys. Rev. B* **55**(2), 1025–1031 (1997).

- [161] K. K. Choi, D. C. Tsui and K. Alavi, Dephasing time and one-dimensional localization of two-dimensional electrons in GaAs/Al_xGa_{1-x}As heterostructures, *Phys. Rev. B* **36**(14), 7751 (1987).
- [162] T. Christen and M. Büttiker, Gauge invariant nonlinear electric transport in mesoscopic conductors, *Europhys. Lett.* **35**(7), 523 (1996).
- [163] T. Christen and M. Büttiker, Low-frequency admittance of quantized Hall conductors, *Phys. Rev. B* **53**(4), 2064 (1996).
- [164] A. Cohen, Y. Roth and B. Shapiro, Universal distributions and scaling in disordered systems, *Phys. Rev. B* **38**(17), 12125–12132 (1988).
- [165] Y. Colin de Verdière, *Spectres de Graphes*, Société Mathématique de France (1998).
- [166] Y. Colin de Verdière, Déterminants et intégrales de Fresnel, *Annales de l’Institut Fourier* **49**, 861 (1999).
- [167] A. Comtet and D. S. Dean, Exact results on Sinai’s diffusion, *J. Phys. A : Math. Gen.* **31**, 8595 (1998).
- [168] A. Comtet, J. Desbois and S. N. Majumdar, The local time distribution of a particle diffusing on a graph, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, L687 (2002).
- [169] A. Comtet, J. Desbois and C. Monthus, Localization properties in one-dimensional disordered supersymmetric quantum mechanics, *Ann. Phys. (N.Y.)* **239**, 312–350 (1995).
- [170] A. Comtet, P. Leboeuf and S. N. Majumdar, Level Density of a Bose Gas and Extreme Value Statistics, *Phys. Rev. Lett.* **98**(7), 070404 (2007).
- [171] A. Comtet, J.-M. Luck, C. Texier and Y. Tourigny, The Lyapunov exponent of products of random 2×2 matrices close to the identity, *J. Stat. Phys.* **150**, 13–65 (2013).
- [172] A. Comtet, C. Monthus and M. Yor, Exponential functionals of Brownian motion and disordered systems, *J. Appl. Probab.* **35**, 255 (1998).
- [173] A. Comtet, A. Moroz and S. Ouvry, Persistent current of free electrons in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **74**(5), 828 (1995), Comment on *Phys. Rev. Lett.* **66**, 76 (1991) by Akkermans et al.
- [174] A. Comtet and C. Texier, On the distribution of the Wigner time delay in one-dimensional disordered systems, *J. Phys. A : Math. Gen.* **30**, 8017–8025 (1997).
- [175] A. Comtet, C. Texier and Y. Tourigny, Products of random matrices and generalised quantum point scatterers, *J. Stat. Phys.* **140**(3), 427–466 (2010).
- [176] A. Comtet, C. Texier and Y. Tourigny, Supersymmetric quantum mechanics with Lévy disorder in one dimension, *J. Stat. Phys.* **145**(5), 1291–1323 (2011).
- [177] A. Crisanti, G. Paladin and A. Vulpiani, Localization properties of the one-dimensional Anderson model with a self-similar random potential, *Phys. Rev. B* **35**, 7164–7166 (1987).
- [178] W. Y. Cui, S. Z. Wu, G. Jin, X. Zhao and Y. Q. Ma, Analytic study of electron transmission through a serial mesoscopic metallic rings, *Eur. Phys. J. B* **59**, 47 (2007).

- [179] G. Czycholl, B. Kramer and A. MacKinnon, Conductivity and Localization of Electron States in One Dimensional Disordered Systems : Further Numerical Results, *Z. Phys. B* **43**, 5–11 (1981).
- [180] R. Dashen, S.-K. Ma and H. J. Bernstein, S -matrix formulation of statistical mechanics, *Phys. Rev.* **187**(1), 345–370 (1969).
- [181] C. de C. Chamon, C. Mudry and X.-G. Wen, Localization in two dimensions, Gaussian field theory and Multifractality, *Phys. Rev. Lett.* **77**(20), 4194–4197 (1996).
- [182] M. J. M. de Jong and C. W. J. Beenakker, Semiclassical theory of shot noise in mesoscopic conductors, *Physica A* **230**, 219 (1996).
- [183] F. A. B. F. de Moura and M. L. Lyra, Delocalization in the 1D Anderson Model with Long-Range Correlated Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **81**(17), 3735 (1998).
- [184] R. de Picciotto, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin and K. W. West, Four-terminal resistance of a ballistic quantum wire, *Nature* **411**, 51 (3 May 2001).
- [185] R. de Picciotto, H. L. Stormer, A. Yacoby, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin and K. W. West, 2D-1D Coupling in Cleaved Edge Overgrowth, *Phys. Rev. Lett.* **85**(8), 1730 (2000).
- [186] D. S. Dean and S. N. Majumdar, Extreme Value Statistics of Hierarchically Correlated Variables : Deviation from Gumbel Statistics and Anomalous Persistence, *Phys. Rev. E* **64**, 046121 (2001).
- [187] R. Deblock, E. Onac, L. Gurevich and L. P. Kouwenhoven, Detection of quantum noise from an electrically two-level system, *Science* **301**, 203 (2003).
- [188] B. Derrida and E. J. Gardner, Lyapounov exponent of the one dimensional Anderson model : weak disorder expansions, *J. Physique* **45**, 1283–1295 (1984).
- [189] B. Derrida and G. J. Rodgers, Anderson model on a Cayley tree : the density of states, *J. Phys. A : Math. Gen.* **26**(9), L457 (1993).
- [190] B. Derrida, D. Stauffer, H. J. Hermann and J. Vannimenus, Transfer matrix calculation of the conductivity in three-dimensional random resistor networks at percolation threshold, *J. Physique - Lett.* **44**, L701 (1984).
- [191] B. Derrida and J. Vannimenus, A transfer-matrix approach to random resistor networks, *J. Phys. A : Math. Gen.* **15**, L557 (1982).
- [192] B. Derrida, J. G. Zabolitzky, J. Vannimenus and D. Stauffer, A transfer matrix program to calculate the conductivity of random resistor networks, *J. Stat. Phys.* **36**(1/2), 31 (1984).
- [193] J. Desbois, Spectral determinant of Schrödinger operators on graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **33**, L63 (2000).
- [194] J. Desbois, Time-dependent harmonic oscillator and spectral determinant on graphs, *Eur. Phys. J. B* **15**, 201 (2000).
- [195] J. Desbois, Spectral determinant on graphs with generalized boundary conditions, *Eur. Phys. J. B* **24**, 261 (2001).
- [196] J. Desbois, Occupation times distribution for Brownian motion on graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, L673 (2002).

- [197] J. Desbois, C. Furtlehner and S. Ouvry, Random magnetic impurities and the Landau problem, Nucl. Phys. B [FS] **453**, 759–776 (1995).
- [198] J. Desbois, C. Furtlehner and S. Ouvry, Random magnetic impurities and the δ impurity problem, J. Phys. I (France) **6**, 641–648 (1996).
- [199] J. Desbois, S. Ouvry and C. Texier, Hall conductivity for two-dimensional magnetic systems, Nucl. Phys. B [FS] **500**, 486–510 (1997).
- [200] L. I. Deych, A. A. Lisiansky and B. L. Altshuler, Single Parameter Scaling in One-Dimensional Localization Revisited, Phys. Rev. Lett. **84**(12), 2678 (2000).
- [201] L. I. Deych, A. A. Lisiansky and B. L. Altshuler, Single Parameter Scaling in 1-D Anderson localization. Exact analytical solution, Phys. Rev. B **64**(22), 224202 (2001).
- [202] D. P. DiVincenzo and C. L. Kane, Voltage fluctuations in mesoscopic metal rings and wires, Phys. Rev. B **38**(5), 3006–3015 (1988).
- [203] G. J. Dolan, J. C. Licini and D. J. Bishop, Quantum Interference Effects in Lithium Ring Arrays, Phys. Rev. Lett. **56**(14), 1493 (1986).
- [204] O. N. Dorokhov, Transmission coefficient and the localization length of an electron in N bound disordered chains, JETP Lett. **36**(7), 318–321 (1982).
- [205] O. N. Dorokhov, Solvable model of multichannel localization, Phys. Rev. B **37**(18), 10526–10541 (1988).
- [206] B. Douçot and R. Rammal, Quantum oscillations in normal-metal networks, Phys. Rev. Lett. **55**(10), 1148 (1985).
- [207] B. Douçot and R. Rammal, Interference effects and magnetoresistance oscillations in normal-metal networks : 1. Weak localization approach, J. Physique **47**, 973–999 (1986).
- [208] A. Douglas and K. A. Muttalib, Distribution of conductance for Anderson insulators : A theory with a single parameter, Phys. Rev. B **80**(16), 161102 (2009).
- [209] A. Douglas and K. A. Muttalib, Conductance distribution in three dimensions : Analytic solution of the generalized Dorokhov-Mello-Pereyra-Kumar equation in the strongly disordered regime, Phys. Rev. B **82**(3), 035121 (2010).
- [210] D. H. Dunlap, H.-L. Wu and P. Phillips, Absence of localization in a Random-Dimer Model, Phys. Rev. Lett. **65**(1), 88 (1990).
- [211] F. J. Dyson, The dynamics of a disordered linear chain, Phys. Rev. **92**(6), 1331–1338 (1953).
- [212] P. M. Echternach, M. E. Gershenson, H. M. Bozler, A. L. Bogdanov and B. Nilsson, Nyquist phase relaxation in one-dimensional metal films, Phys. Rev. B **48**(15), 11516–11519 (1993).
- [213] P. M. Echternach, M. E. Gershenson, H. M. Bozler, A. L. Bogdanov and B. Nilsson, Temperature dependence of the resistance of one-dimensional metal films with dominant Nyquist phase breaking, Phys. Rev. B **50**(8), 5748–5751 (1994).
- [214] E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Economou and Soukoulis Respond, Phys. Rev. Lett. **47**(13), 973 (1981).

- [215] E. N. Economou and C. M. Soukoulis, Static conductance and scaling theory of localization in one dimension, *Phys. Rev. Lett.* **46**(9), 618 (1981).
- [216] S. F. Edwards and P. W. Anderson, Theory of spin glasses, *J. Phys. F : Metal Phys.* **5**(5), 965–974 (1975).
- [217] K. B. Efetov, A. I. Larkin and D. E. Khmel'nitskiĭ, Interaction of diffusion modes in the theory of localization, *Sov. Phys. JETP* **52**(3), 568 (1980).
- [218] A. L. Efros and B. I. Shklovskii, Coulomb interaction in disordered systems with localized electronic states, in *Electron-electron interactions in disordered systems*, edited by A. L. Efros and M. Pollak, p. 409, North-Holland (1985).
- [219] T. P. Eggarter, Some Exact Results on Electron Energy Levels in Certain One-Dimensional Random Potentials, *Phys. Rev. B* **5**(10), 3863–3865 (1972).
- [220] T. P. Eggarter and R. Riedinger, Singular behavior of tight-binding chains with off-diagonal disorder, *Phys. Rev. B* **18**(2), 569–575 (1978).
- [221] W. Eiler, Electron-electron interaction and weak localisation, *J. Low Temp. Phys.* **56**(5/6), 481 (1984).
- [222] V. J. Emery, Critical properties of many-component systems, *Phys. Rev. B* **11**(1), 239–247 (1975).
- [223] H.-L. Engquist and P. W. Anderson, Definition and measurement of the electrical and thermal resistances, *Phys. Rev. B* **24**(2), 1151 (1981).
- [224] Y. Etzioni, B. Horovitz and P. Le Doussal, Rings and boxes in dissipative environments, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 166803 (2011).
- [225] S. N. Evangelou, Anderson Transition, Scaling, and Level Statistics in the Presence of Spin Orbit Coupling, *Phys. Rev. Lett.* **75**(13), 2550–2553 (1995).
- [226] S. N. Evangelou and D. E. Katsanos, Spectral statistics in chiral-orthogonal disordered systems, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 3237 (2003).
- [227] F. Evers, A. Mildenerger and A. D. Mirlin, Multifractality of wave functions at the quantum Hall transition revisited, *Phys. Rev. B* **64**, 241303 (2001).
- [228] F. Evers and A. D. Mirlin, Fluctuations of the Inverse Participation Ratio at the Anderson Transition, *Phys. Rev. Lett.* **84**(16), 3690–3693 (2000).
- [229] P. Exner, Lattice Kronig-Penney Models, *Phys. Rev. Lett.* **74**(18), 3503 (1995).
- [230] P. Exner, Contact interactions on graph superlattices, *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**(1), 87 (1996).
- [231] P. Exner, Weakly coupled states on branching graphs, *Lett. Math. Phys.* **38**, 313 (1996).
- [232] P. Exner, A duality between Schrödinger operators on graphs and certain Jacobi matrices, *Ann. Inst. H. Poincaré : Phys. Théor.* **66**, 359 (1997).
- [233] P. Exner, Magneto-resonances on a Lasso Graph, *Found. Phys.* **27**(2), 171 (1997).
- [234] P. Exner and P. Šeba, Bound states in curved quantum waveguides, *J. Math. Phys.* **30**, 2574 (1989).

- [235] P. Exner and P. Šeba, Free quantum motion on a branching graph, *Rep. Math. Phys.* **28**, 7 (1989).
- [236] M. Fabrizio and R. Mélin, Coexistence of antiferromagnetism and dimerization in a disordered spin-Peierls model : exact results, *Phys. Rev. Lett.* **78**(17), 3382 (1997).
- [237] M. Fabrizio and R. Mélin, Enhanced magnetic fluctuations in doped spin-Peierls systems : a single-chain-model analysis, *Phys. Rev. B* **56**(10), 5996–6006 (1997).
- [238] V. I. Fal’ko and D. E. Khmel’niskii, Mesoscopic photovoltaic effect in microjunctions, *Sov. Phys. JETP* **68**(1), 186–191 (1989).
- [239] W. G. Faris and W. J. Tsay, Time delay in random scattering, *SIAM J. Appl. Math.* **54**(2), 443–455 (1994).
- [240] P. Fendley, A. W. W. Ludwig and H. Saleur, Exact Conductance through Point Contacts in the $\nu = 1/3$ Fractional Quantum Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **74**(15), 3005 (1995).
- [241] M. Ferrier, L. Angers, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier, G. Montambaux and D. Mailly, Direct measurement of the phase coherence length in a GaAs/GaAlAs square network, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 246804 (2004).
- [242] M. Ferrier, A. C. H. Rowe, S. Guéron, H. Bouchiat, C. Texier and G. Montambaux, Geometrical dependence of the decoherence due to electronic interactions in a GaAs/GaAlAs square network, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 146802 (2008).
- [243] G. Fève, P. Degiovanni and T. Jolicoeur, Quantum detection of electronic flying qubits in the integer quantum Hall regime, *Phys. Rev. B* **77**(3), 035308 (2008).
- [244] G. Fève, A. Mahé, J.-M. Berroir, T. Kontos, B. Plaçais, D. C. Glattli, A. Cavanna, B. Etienne and Y. Jin, An on-demand coherent single-electron source, *Science* **316**, 1169 (May 25, 2007).
- [245] R. P. Feynman and F. Vernon, Jr., The theory of a general quantum mechanical system interacting with a linear dissipative system, *Ann. Phys. (N.Y.)* **24**, 118–173 (1963).
- [246] A. M. Finkel’shtein, Influence of Coulomb interaction on the properties of disordered metals, *Sov. Phys. JETP* **57**(1), 97 (1983).
- [247] D. S. Fisher, Random antiferromagnetic quantum spin chains, *Phys. Rev. B* **50**(6), 3799 (1994).
- [248] D. S. Fisher, Critical behavior of random transverse-field Ising spin chains, *Phys. Rev. B* **51**(10), 6411–6461 (1995).
- [249] D. S. Fisher, P. Le Doussal and C. Monthus, Random walks, reaction-diffusion and nonequilibrium dynamics of spin chains in one-dimensional random environments, *Phys. Rev. Lett.* **80**(16), 3539 (1998).
- [250] D. S. Fisher and P. A. Lee, Relation between conductivity and transmission matrix, *Phys. Rev. B* **23**(12), 6851–6854 (1981).
- [251] D. S. Fisher and A. P. Young, Distributions of gaps and end-to-end correlations in random transverse-field Ising spin chains, *Phys. Rev. B* **58**(14), 9131–9141 (Oct 1998).
- [252] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein and D. S. Fisher, Boson localization and the superfluid-insulator transition, *Phys. Rev. B* **40**, 546–570 (1989).

- [253] J. Florès, Transport in models with correlated diagonal and off-diagonal disorder, *J. Phys. Cond. Matter* **1**, 8471 (1989).
- [254] M. M. Fogler, S. Teber and B. I. Shklovskii, Variable-range hopping in quasi-one-dimensional electron crystals, *Phys. Rev. B* **69**, 035413 (2004).
- [255] C. J. B. Ford, S. Washburn, M. Büttiker, C. M. Knoedler and J. M. Hong, Influence of geometry on the Hall effect in ballistic wires, *Phys. Rev. Lett.* **62**(23), 2724–2727 (1989).
- [256] R. Forman, Determinants of Laplacians on graphs, *Topology* **32**(1), 35 (1993).
- [257] M. Fréchet, Sur la loi de probabilité de l'écart maximum, *Ann. Soc. Polonaise Math. Cracovie* **6**, 93 (1927).
- [258] R. Friedberg and J. M. Luttinger, Density of electronic energy levels in disordered systems, *Phys. Rev. B* **12**(10), 4460–4474 (1975).
- [259] J. Friedel, The distribution of electrons round impurities in monovalent metals, *Phil. Mag.* **43**, 153 (1952).
- [260] J. Friedel, Metallic alloys, *Nuovo Cimento Suppl.* **7**, 287 (1958).
- [261] L. Friedlander, Determinant of the Schrödinger operator on a metric graph, *Contemporary Mathematics* **415**, 151 (2006).
- [262] H. L. Frisch and S. P. Lloyd, Electron levels in a one-dimensional random lattice, *Phys. Rev.* **120**(4), 1175–1189 (1960).
- [263] H. Fukuyama, Interaction effects in the weakly localized regime of two- and three-dimensional disordered systems, in *Electron-electron interactions in disordered systems*, edited by A. L. Efros and M. Pollak, p. 155, North-Holland (1985).
- [264] H. Fukuyama and E. Abrahams, Inelastic scattering time in two-dimensional disordered metals, *Phys. Rev. B* **27**(10), 5976–5980 (1983).
- [265] H. Fukuyama, Y. Isawa and H. Yasuhara, Higher order effects of interactions in two-dimensional weakly localized regime, *J. Phys. Soc. Jpn.* **52**(1), 16 (1983).
- [266] H. Furstenberg, Noncommuting random products, *Trans. Amer. Math. Soc.* **108**, 377–428 (1963).
- [267] A. Furusaki and N. Nagaosa, Single-barrier problem and Anderson localization in a one-dimensional interacting electron system, *Phys. Rev. B* **47**(8), 4631–4643 (1993).
- [268] Y. V. Fyodorov and A. D. Mirlin, Statistical properties of eigenfunctions of random quasi 1D one-particle hamiltonians, *Int. J. of Mod. Phys. B* **8**(27), 3795–3842 (1994).
- [269] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, Parametric correlations of scattering phase shifts and fluctuations of delay times in few-channel chaotic scattering, *Phys. Rev. Lett.* **76**(25), 4709 (1996).
- [270] Y. V. Fyodorov and H.-J. Sommers, Statistics of resonance poles, phase shift and time delays in quantum chaotic scattering : Random matrix approach for systems with broken time-reversal invariance, *J. Math. Phys.* **38**(4), 1918–1981 (1997).

- [271] J. Gabelli, G. Fève, J.-M. Berroir, B. Plaçaïs, A. Cavanna, B. Etienne, Y. Jin and C. Glattli, Violation of Kirchhoff's laws for a coherent RC circuit, *Science* **313**(5786), 499–502 (2006).
- [272] J. Gabelli, G. Fève, T. Kontos, J.-M. Berroir, B. Plaçaïs, D. C. Glattli, B. Etienne, Y. Jin and M. Büttiker, Relaxation time of a chiral quantum R-L circuit, *Phys. Rev. Lett.* **98**(16), 166806 (2007).
- [273] R. Gade and F. Wegner, The $n = 0$ replica limit of $U(n)$ and $U(n)/SO(n)$ models, *Nucl. Phys. B [FS]* **360**(2–3), 213–218 (1993).
- [274] A. M. García-García and E. Cuevas, Differentiable potentials and metallic states in disordered one-dimensional systems, *Phys. Rev. B* **79**, 073104 (2009).
- [275] V. Gasparian, T. Christen and M. Büttiker, Partial densities of states, scattering matrices and Green's functions, *Phys. Rev. A* **54**(5), 4022 (1996).
- [276] U. Gavish, Y. Imry, Y. Levinson and B. Yurke, What is measured in an excess noise experiment?, in *Quantum Noise*, edited by Ya. M. Blanter and Yu. V. Nazarov, Kluwer (2002), preprint cond-mat/0211646.
- [277] Y. Gefen, Y. Imry and M. Ya. Azbel, Quantum oscillations and the Aharonov-Bohm effect for parallel resistors, *Phys. Rev. Lett.* **52**(2), 129 (1984).
- [278] A. K. Geim, S. J. Bending and I. V. Grigorieva, Ballistic two-dimensional electrons in a random magnetic field, *Phys. Rev. B* **49**(8), 5749 (1994).
- [279] A. Z. Genack, P. Sebbah, M. Stoytchev and B. A. van Tiggelen, Statistics of wave dynamics in random media, *Phys. Rev. Lett.* **82**(4), 715 (1999).
- [280] M. E. Gershenson, Yu. B. Khavin, A. Mikhailchuk, H. M. Bolzer and A. L. Bogdanov, Crossover from Weak to Strong Localization in Quasi-One-Dimensional Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **79**(4), 725 (1997).
- [281] G. Gershon, Yu. Bomze, E. V. Sukhorukov and M. Reznikov, Detection of Non-Gaussian Fluctuations in a Quantum Point Contact, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 016803 (2008).
- [282] T. Giamarchi and H. J. Schulz, Anderson localization and interactions in one-dimensional metals, *Phys. Rev. B* **37**(1), 325–340 (1988).
- [283] N. Giordano, W. Gilson and D. E. Prober, Experimental study of Anderson localization in thin wires, *Phys. Rev. Lett.* **43**(10), 725 (1979).
- [284] D. C. Glattli, E. Y. Andrei and F. I. B. Williams, Thermodynamic measurement on the melting of a two-dimensional electron solid, *Phys. Rev. Lett.* **60**(5), 420–423 (1988).
- [285] S. Gnutzmann and A. Altland, Universal Spectral Statistics in Quantum Graphs, *Phys. Rev. Lett.* **93**(19), 194101 (2004).
- [286] A. A. Gogolin and V. I. Mel'nikov, Conductivity of one-dimensional metal with half-filled band, *Sov. Phys. JETP* **46**, 369–376 (1977).
- [287] V. J. Goldman, M. Santos, M. Shayegan and J. E. Cunningham, Evidence for two-dimensional quantum Wigner crystal, *Phys. Rev. Lett.* **65**(17), 2189–2192 (Oct 1990).
- [288] I. Ya. Gol'dshtein, S. A. Molchanov and L. A. Pastur, A pure point spectrum of the stochastic one-dimensional Schrödinger operator, *Funct. Anal. and App.* **11**(1), 1–10 (1977).

- [289] A. O. Golosov, Localization of random walks in one-dimensional random environments, *Commun. Math. Phys.* **92**, 491–506 (1984), [*Sov. Math. Dokl.* **28**, 18 (1983)].
- [290] D. S. Golubev and A. D. Zaikin, Quantum decoherence and weak localization at low temperatures, *Phys. Rev. B* **59**(14), 9195–9213 (1999).
- [291] D. S. Golubev and A. D. Zaikin, Interactions and weak localization : Perturbation theory and beyond, *Phys. Rev. B* **62**(21), 14061–14098 (2000).
- [292] V. A. Gopar, P. A. Mello and M. Büttiker, Mesoscopic capacitors : a statistical analysis, *Phys. Rev. Lett.* **77**(14), 3005 (1996).
- [293] L. P. Gor’kov and O. N. Dorokhov, Singularities in the density of electronic states of one-dimensional conductors with disorder, *Solid State Commun.* **20**, 789–792 (1976).
- [294] L. P. Gor’kov, A. I. Larkin and D. E. Khmel’nitzkiĭ, Particle conductivity in a two-dimensional random potential, *JETP Lett.* **30**(4), 228 (1979).
- [295] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin and D. G. Polyakov, Dephasing and Weak Localization in Disordered Luttinger Liquid, *Phys. Rev. Lett.* **95**(4), 046404 (2005).
- [296] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin and D. G. Polyakov, Interacting Electrons in Disordered Wires : Anderson Localization and Low- T Transport, *Phys. Rev. Lett.* **95**(20), 206603 (2005).
- [297] I. V. Gornyi, A. D. Mirlin and D. G. Polyakov, Electron transport in a disordered Luttinger liquid, *Phys. Rev. B* **75**(8), 085421 (2007).
- [298] A. Grabsch and C. Texier, Capacitance and charge relaxation resistance of chaotic cavities – Joint distribution of two linear statistics in the Laguerre ensemble of random matrices, preprint arXiv :1407.3302 (2014).
- [299] A. Grabsch, C. Texier and Y. Tourigny, One-dimensional disordered quantum mechanics and Sinai diffusion with random absorbers, *J. Stat. Phys.* **155**(2), 237–276 (2014).
- [300] T. Gramspacher and M. Büttiker, Nanoscopic tunneling contacts on mesoscopic multi-probe conductors, *Phys. Rev. B* **56**(20), 13026 (1997).
- [301] T. Gramspacher and M. Büttiker, Local densities, distribution functions, and wave-function correlations for spatially resolved shot noise at nanocontacts, *Phys. Rev. B* **60**(4), 2375 (1999).
- [302] L. N. Grenkova, S. A. Molčanov and Ju. N. Sudarev, On the basic states of one-dimensional disordered structures, *Commun. Math. Phys.* **90**(1), 101–123 (1983).
- [303] E. J. Gumbel, Les valeurs extrêmes des distributions statistiques, *Ann. de l’Institut Henri Poincaré* **V**, 115 (1935).
- [304] E. J. Gumbel, *Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series **33** (1954), Issued February 12.
- [305] V. Gurarie, L. Pollet, N. V. Prokof’ev, B. V. Svistunov and M. Troyer, Phase diagram of the disordered Bose-Hubbard model, *Phys. Rev. B* **80**, 214519 (2009).
- [306] M. G. Gutzwiller, *Chaos in Quantum Physics*, p. 201, North Holland, Amsterdam (1991), M. J. Gianonni *et al* (eds.).

- [307] G. Hackenbroich and H. A. Weidenmüller, Transmission through a Quantum Dot in an Aharonov-Bohm Ring, *Phys. Rev. Lett.* **76**(1), 110–113 (1996).
- [308] C. Hagedorf and C. Texier, Breaking supersymmetry in a one-dimensional random Hamiltonian, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41**, 405302 (2008).
- [309] B. I. Halperin, Green's Functions for a Particle in a One-Dimensional Random Potential, *Phys. Rev.* **139**(1A), A104–A117 (1965).
- [310] B. I. Halperin, Properties of a particle in a one-dimensional random potential, *Adv. Chem. Phys.* **13**, 123–177 (1967).
- [311] B. I. Halperin, Quantized Hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential, *Phys. Rev. B* **25**(4), 2185–2190 (1982).
- [312] Y. Hamamoto, T. Jonckheere, T. Kato and T. Martin, Dynamic response of a mesoscopic capacitor in the presence of strong electron interactions, *Phys. Rev. B* **81**, 153305 (2010).
- [313] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss, Correlation between photons in two coherent beams of light, *Nature (London)* **177**(4497) (January 7, 1956).
- [314] D. Hansel and J. F. Luciani, On diffusion equations for dynamical systems driven by noise, *J. Stat. Phys.* **54**(3/4), 971–995 (1989).
- [315] A. E. Hansen, A. Kristensen, S. Pedersen, C. B. Sørensen and P. E. Lindelof, Mesoscopic decoherence in Aharonov-Bohm rings, *Phys. Rev. B* **64**, 045327 (2001).
- [316] J. M. Harrison and K. Kirsten, Zeta functions of quantum graphs, *J. Phys. A : Math. Theor.* **44**, 235301 (2011).
- [317] J. M. Harrison, K. Kirsten and C. Texier, Spectral determinants and Zeta functions of Schrödinger operators on metric graphs, *J. Phys. A : Math. Theor.* **45**, 125206 (2012).
- [318] K. I. Hashimoto, Zeta functions of finite graphs and representations of p -adic groups, *Adv. Studies in Pure Math.* **15**, 211 (1989).
- [319] K. I. Hashimoto, On zeta and L-functions of finite graphs, *Int. J. Math.* **1**(4), 381 (1990).
- [320] M. B. Hastings, A. D. Stone and H. U. Baranger, Inequivalence of weak localization and coherent backscattering, *Phys. Rev. B* **50**(12), 8230 (1994).
- [321] J. Heinrichs, Statistics of the transmission coefficient and its dependence on a constant electric field in disordered one-dimensional disordered conductors, *J. Phys. Cond. Matter* **1**, 2651 (1989).
- [322] J. Heinrichs, Invariant embedding treatment of phase randomization and electrical noise at disordered surfaces, *J. Phys. Cond. Matter* **2**, 1559–1568 (1990).
- [323] J. Heinrichs, Resistance and reflection phase distributions in short one-dimensional conductors, *J. Phys. Cond. Matter* **7**, 6291 (1995).
- [324] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk, T. Heinzel, K. Ensslin, M. Holland and C. Schönberger, The Fermionic Hanbury Brown and Twiss Experiment, *Science* **284**, 296 (1999).
- [325] M. Henny, S. Oberholzer, C. Strunk and C. Schönberger, $1/3$ -shot-noise suppression in diffusive nanowires, *Phys. Rev. B* **59**(4), 2871 (1999).

- [326] A. R. Hernández and C. H. Lewenkopf, Nonlinear Conductance in a Ballistic Aharonov-Bohm Ring, *Phys. Rev. Lett.* **103**(16), 166801 (2009).
- [327] S. Hershfield, Current conservation and resistance fluctuations in a four probe geometry, *Ann. Phys. (N.Y.)* **196**, 12 (1989).
- [328] S. Hershfield and V. Ambegaokar, Resistance fluctuations in a four probe geometry with infinite leads, *Phys. Rev. B* **38**(12), 7909 (1988).
- [329] S. Hikami, Anderson localization in a nonlinear- σ -model representation, *Phys. Rev. B* **24**(5), 2671 (1981).
- [330] S. Hikami, A. I. Larkin and Y. Nagaoka, Spin-Orbit Interaction and Magnetoresistance in the Two Dimensional Random System, *Prog. Theor. Phys.* **63**(2), 707 (1980).
- [331] B. Horovitz and P. L. Doussal, Freezing transitions and the density of states of two-dimensional random Dirac Hamiltonians, *Phys. Rev. B* **65**(12), 125323 (2002).
- [332] A. Houghton and L. Schäfer, Higher-order behaviour of zero-component field theories without the $n \rightarrow 0$ limit, *J. Phys. A : Math. Gen.* **12**(8), 1309 (1979).
- [333] H. Hu, A. Strybulevych, J. H. Page, S. E. Skipetrov and B. A. van Tiggelen, Localization of ultrasound in a three-dimensional elastic network, *Nature Physics* **4**, 945 (19 oct. 2008).
- [334] Y. Ihara, On discrete subgroup of the two by two projective linear group over p -adic field, *J. Math. Soc. Japan* **18**(3), 219 (1966).
- [335] Y. Imry, Elementary explanation of the inexistence of decoherence at zero temperature for systems with purely elastic scattering, preprint cond-mat/02 02 044 (2002).
- [336] G.-L. Ingold and Yu. V. Nazarov, Charge tunneling rates in ultrasmall junctions, in *Single charge tunneling*, edited by H. Grabert and M. H. Devoret, pp. 21–106, Plenum Press (1992).
- [337] A. F. Ioffe and A. R. Regel, *Prog. Semicond.* **4**, 237 (1960).
- [338] A. Iomin, Lyapunov exponents in one-dimensional disordered systems with long-range memory, *Phys. Rev. E* **79**, 062102 (2009).
- [339] Y. Isawa, H. Ebisawa and S. Maekawa, Theory of Aharonov-Bohm Effect in Small Normal Metals, *J. Phys. Soc. Jpn.* **55**, 2523 (1986).
- [340] K. Ishii, Localization of eigenstates and transport phenomena in the one dimensional disordered system, *Prog. Theor. Phys. (Suppl.)* **53**, 77–138 (1973).
- [341] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Théorie statistique des champs*, Interéditions–CNRS, Paris (1989), Tomes 1 et 2.
- [342] F. M. Izrailev and A. A. Krokhin, Localization and the Mobility Edge in One-Dimensional Potentials with Correlated Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **82**(20), 4062–4065 (1999).
- [343] R. Jackiw, δ -function potentials in two- and three-dimensional quantum mechanics, in *M. A. B. Bég memorial volume*, edited by A. Ali and P. Hoodbhoy, p. 1, World Scientific, Singapore (1991).

- [344] P. Jacquod and R. S. Whitney, Semiclassical theory of quantum chaotic transport : Phase space splitting, coherent backscattering and weak localization, *Phys. Rev. B* **73**(19), 195115 (2006).
- [345] A. M. Jayannavar, G. V. Vijayagovindan and N. Kumar, Energy dispersive backscattering of electrons from surface resonances of a disordered medium and $1/f$ noise, *Z. Phys. B – Condens. Matter* **75**, 77–79 (1989).
- [346] M. Jeffery, C. Green, S. Tyagi and R. Gilmore, Reproducible magnetic features of high- T_c superconductors in weak fields, *Phys. Rev. B* **39**, 9054–9060 (1989).
- [347] X. Jehl and M. Sanquer, Shot-noise measurements in normal-metal/superconductor junctions and the semiclassical theory, *Phys. Rev. B* **63**, 052511 (Jan 2001).
- [348] X. Jehl, M. Sanquer, R. Calemczuk and D. Mailly, Detection of double shot noise in short normal-metal/superconductor junctions, *Nature (London)* **405**(6782), 50 (May 4, 2000).
- [349] G. Jona-Lasinio, Qualitative theory of stochastic differential equations and quantum mechanics of disordered systems, *Helv. Phys. Act.* **56**, 61 (1983).
- [350] S. K. Joshi and A. M. Jayannavar, Distribution of Wigner delay time from single channel disordered systems, *Solid State Commun.* **106**(6), 363 (1998).
- [351] M. Kac, On the distribution of certain Wiener functionals, *Trans. Am. Math. Soc.* **65**(1), 1–13 (1949).
- [352] A. Kamenev and A. Andreev, Electron-electron interactions in disordered metals : Keldysh formalism, *Phys. Rev. B* **60**(4), 2218–2238 (1999).
- [353] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Thermal Transport in a Luttinger Liquid, *Phys. Rev. Lett.* **76**(17), 3192–3195 (1996).
- [354] C. L. Kane, P. A. Lee and D. P. DiVincenzo, Voltage fluctuations in multilead devices, *Phys. Rev. B* **38**(5), 2995–3005 (1988).
- [355] C. L. Kane and E. J. Mele, Quantum Spin Hall Effect in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).
- [356] C. L. Kane, R. A. Serota and P. A. Lee, Long-range correlations in disordered media, *Phys. Rev. B* **37**(12), 6701–6710 (1988).
- [357] M. Kappus and F. Wegner, Anomaly in the band centre of the one-dimensional Anderson model, *Z. Phys. B* **45**(1), 15–21 (1981).
- [358] J. P. Keating, J. Marklof and B. Winn, Value distribution of the eigenfunctions and spectral determinants of quantum star graphs, *Commun. Math. Phys.* **241**, 421 (2003).
- [359] L. V. Keldysh, Deep levels in semiconductors, *Sov. Phys. JETP* **18**(1), 253 (1964).
- [360] E. C. Kemble, A Contribution to the Theory of the B. W. K. Method, *Phys. Rev.* **48**(6), 549–561 (1935).
- [361] H. Kesten, Symmetric random walks on groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **92**, 336–354 (1959).
- [362] H. Kesten, The limit distribution of Sinai’s random walk in random environment, *Physica* **138A**, 299 (1986).

- [363] A. V. Khaetskii, The Hall effect and magnetoresistance of a two-dimensional electron gas upon scattering on microhomogeneities of a magnetic field, *J. Phys. Cond. Matter* **3**, 5115 (1991).
- [364] Yu. B. Khavin, M. E. Gershenson and A. L. Bogdanov, Strong localization of electrons in quasi-one-dimensional conductors, *Phys. Rev. B* **58**(12), 8009 (1998).
- [365] V. A. Khlus, Current and voltage fluctuations in microjunctions between normal metals and superconductors, *Sov. Phys. JETP* **66**(6), 1243 (1987).
- [366] D. E. Khmel'nitskii, Localization and coherent scattering of electrons, *Physica* **B126**, 235 (1984).
- [367] K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto and Y. Iye, Probe-Configuration-Dependent Decoherence in an Aharonov-Bohm Ring, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**(9), L2094 (2002).
- [368] K. Kobayashi, H. Aikawa, S. Katsumoto and Y. Iye, Mesoscopic Fano effect in a quantum dot embedded in an Aharonov-Bohm ring, *Phys. Rev. B* **68**(23), 235304 (2003).
- [369] R. H. Koch, D. J. van Harlingen and J. Clarke, Quantum-noise theory for the resistively shunted Josephson junction, *Phys. Rev. Lett.* **45**(26), 2132 (1980).
- [370] R. H. Koch, D. J. van Harlingen and J. Clarke, Observation of zero-point fluctuations in a resistively shunted Josephson tunnel junction, *Phys. Rev. Lett.* **47**(17), 1216 (1981).
- [371] S. Komiyama, H. Hirai, S. Sasa and T. Fujii, Influence of disordered contacts on the four-terminal measurements of integral quantum Hall effect, *Solid State Commun.* **73**(2), 91 (1990).
- [372] V. Kostrykin and R. Schrader, Kirchhoff's rule for quantum wires, *J. Phys. A : Math. Gen.* **32**, 595–630 (1999).
- [373] V. Kostrykin and R. Schrader, Generating functions of random walks on graphs, preprint p. arXiv :math/0404467 (2004).
- [374] V. Kostrykin and R. Schrader, Heat Kernel on metric graphs and a trace formula, *Contemporary Mathematics* **447**, 175 (2007).
- [375] S. Kotani, On asymptotic behaviour of the spectra of a one-dimensional Hamiltonian with a certain random coefficient, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **12**, 447–492 (1976).
- [376] T. Kottos and U. Smilansky, Quantum chaos on graphs, *Phys. Rev. Lett.* **79**(24), 4794 (1997).
- [377] T. Kottos and U. Smilansky, Periodic orbit theory and spectral statistics for quantum graphs, *Ann. Phys. (N.Y.)* **274**(1), 76 (1999).
- [378] T. Kottos and U. Smilansky, Chaotic scattering on graphs, *Phys. Rev. Lett.* **85**(5), 968 (2000).
- [379] T. Kottos and U. Smilansky, Quantum graphs : A simple model for chaotic scattering, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 3501 (2003).
- [380] S. V. Kravchenko, G. V. Kravchenko, J. E. Furneaux, V. M. Pudalov and M. D'Iorio, Possible metal-insulator transition at $B=0$ in two dimensions, *Phys. Rev. B* **50**(11), 8039–8042 (1994).

- [381] V. E. Kravtsov, I. V. Lerner, B. L. Altshuler and A. G. Aronov, Universal spectral correlations at the mobility edge, *Phys. Rev. Lett.* **72**(6), 888–891 (1994).
- [382] V. E. Kravtsov, I. V. Lerner and V. I. Yudson, Weak Localization Theory - Role of Higher Derivatives in the Nonlinear Sigma-Model, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94**, 255–263 (1988).
- [383] M. G. Krein, Trace formulas in perturbation theory, *Matem. Sbornik* **33**, 597 (1953).
- [384] A. Kumar, L. Saminadayar, D. C. Glattli, Y. Jin and B. Etienne, Experimental Test of the Quantum Shot Noise Reduction Theory, *Phys. Rev. Lett.* **76**(15), 2778 (1996).
- [385] H. Kunz and B. Souillard, Sur le spectre des opérateurs aux différences finies aléatoires, *Commun. Math. Phys.* **78**(2), 201–246 (1980).
- [386] H. Kunz and B. Souillard, *J. Physique Lett.* **44**, L411 (1983).
- [387] H. Kunz and G. Zumbach, The static Hall conductivity in the presence of a strong magnetic field and random impurities, *Nucl. Phys. B [FS]* **270**, 347 (1986).
- [388] Ç. Kurdak, A. M. Chang, A. Chin and T. Y. Chang, Quantum interference effects and spin-orbit interaction in quasi-one-dimensional wires and rings, *Phys. Rev. B* **46**(11), 6846 (1992).
- [389] Y. Lahini, A. Avidan, F. Pozzi, M. Sorel, R. Morandotti, D. N. Christodoulides and Y. Silberberg, Anderson Localization and Nonlinearity in One-Dimensional Disordered Photonic Lattices, *Phys. Rev. Lett.* **100**(1), 013906 (2008).
- [390] R. Landauer, The noise is the signal, *Nature* **393**, 658 (16 April 1998).
- [391] R. Landauer, Spatial Variation of Currents and Fields Due to Localized Scatterers in Metallic Conduction, *IBM J. Res. Dev.* **1**, 223 (1957).
- [392] R. Landauer, Electrical resistance of disordered one-dimensional lattices, *Philos. Mag.* **21**, 863 (1970).
- [393] J. S. Langer and T. Neal, Breakdown of the concentration expansion for the impurity resistivity of metals, *Phys. Rev. Lett.* **16**(22), 984 (1966).
- [394] D. C. Langreth and E. Abrahams, Derivation of the Landauer conductance formula, *Phys. Rev. B* **24**(6), 2978 (1981).
- [395] A. I. Larkin, Reluctance of two-dimensional systems ¹, *JETP Lett.* **31**(4), 220 (1980).
- [396] A. I. Larkin and D. E. Khmel'niskii, Mesoscopic fluctuations of current-voltage characteristics, *Sov. Phys. JETP* **64**(5), 1075–1077 (1986).
- [397] A. I. Larkin and D. E. Khmel'nitzkii, *Sov. Phys. Usp.* **25**, 185 (1982).
- [398] M. Lax and J. C. Phillips, One-Dimensional Impurity Bands, *Phys. Rev.* **110**(1), 41 (1958).
- [399] P. Le Doussal, Sinai model in presence of dilute absorbers, *J. Stat. Mech.*, P07032 (2009).
- [400] P. Le Doussal, C. Monthus and D. S. Fisher, Random walkers in one-dimensional random environments : Exact renormalization group analysis, *Phys. Rev. E* **59**(5), 4795–4840 (1999).

¹A beautiful translation problem! Read of course “resistance” in place of “reluctance”.

- [401] H. Lee, L. S. Levitov and A. Yu. Yakovets, Universal statistics of transport in disordered conductors, *Phys. Rev. B* **51**(7), 4079–4083 (1995).
- [402] H.-W. Lee, Generic Transmission Zeros and In-Phase Resonances in Time-Reversal Symmetric Single Channel Transport, *Phys. Rev. Lett.* **82**(11), 2358–2361 (1999).
- [403] P. A. Lee and A. D. Stone, Universal Conductance Fluctuations in Metals, *Phys. Rev. Lett.* **55**(15), 1622 (1985).
- [404] P. A. Lee, A. D. Stone and H. Fukuyama, Universal conductance fluctuations in metals : Effects of finite temperature, interactions, and magnetic field, *Phys. Rev. B* **35**(3), 1039 (1987).
- [405] I. V. Lerner, Nonlinear Sigma Model for Normal and Superconducting Systems : A Pedestrian Approach, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi" Course CLI*, edited by B. Altshuler and V. Tognetti, IOS Press, Amsterdam (2003), preprint cond-mat/0307471.
- [406] H. Leschke and S. Warzel, Quantum-Classical Transitions in Lifshitz Tails with Magnetic Fields, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 086402 (2004).
- [407] G. B. Lesovik, Excess quantum noise in 2D ballistic point contacts, *JETP Lett.* **49**, 592 (1989).
- [408] R. Leturcq, D. Sánchez, G. Götz, T. Ihn, K. Ensslin, D. C. Driscoll and A. C. Gossard, Magnetic Field Symmetry and Phase Rigidity of the Nonlinear Conductance in a Ring, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 126801 (2006).
- [409] Y. Levinson, Dephasing in a quantum dot due to coupling with a quantum point contact, *Europhys. Lett.* **39**(3), 299 (1997).
- [410] L. S. Levitov, H. Lee and G. B. Lesovik, Electron counting statistics and coherent states of electric current, *J. Math. Phys.* **37**, 4845 (1996).
- [411] P. Lévy, *Compos. Math.* **7**, 283 (1939).
- [412] A. Levy Yeyati and M. Büttiker, Scattering phases in quantum dots : An analysis based on lattice models, *Phys. Rev. B* **62**(11), 7307–7315 (2000).
- [413] J. C. Licini, G. J. Dolan and D. J. Bishop, Weakly Localized Behavior in Quasi-One-Dimensional Li Films, *Phys. Rev. Lett.* **54**(14), 1585 (1985).
- [414] I. M. Lifshits, Structure of the energy spectrum of impurity bands in disordered solid solutions, *Sov. Phys. JETP* **17**(5), 1159 (1963).
- [415] I. M. Lifshits, Energy spectrum structure and quantum states of disordered condensed systems, *Sov. Phys. Usp.* **18**(4), 549 (1965).
- [416] P. Lloyd, Exactly solvable model of electronic states in a three-dimensional disordered Hamiltonian : non-existence of localized states, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **2**(10), 1717 (1969).
- [417] J.-M. Luck, On the statistics of superlocalized states in self-affine disordered potentials, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 987–1003 (2005).
- [418] A. W. W. Ludwig, Comment on "Exact Critical Behavior of a Random-Bond Two-Dimensional Ising Model", *Phys. Rev. Lett.* **61**(20), 2388 (1988).

- [419] A. W. W. Ludwig, M. P. A. Fisher, R. Shankar and G. Grinstein, Integer quantum Hall transition : An alternative approach and exact results, *Phys. Rev. B* **50**(11), 7526–7552 (1994).
- [420] T. Ludwig and A. D. Mirlin, Interaction-induced dephasing of Aharonov-Bohm oscillations, *Phys. Rev. B* **69**, 193306 (2004).
- [421] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Grémaud, C. A. Müller and C. Miniatura, One-dimensional Anderson localization in certain correlated random potentials, *Phys. Rev. A* **80**, 023605 (2009).
- [422] J. M. Luttinger and H. K. Sy, Low-lying energy spectrum of a one-dimensional disordered system, *Phys. Rev. A* **7**(2), 701–712 (1973).
- [423] J. M. Luttinger and R. Tao, Electronic density of levels in a disordered system, *Ann. Phys. (N.Y.)* **145**, 185 (1983).
- [424] J. M. Luttinger and R. Waxler, Low energy density of states in several disordered systems, *Ann. Phys. (N.Y.)* **175**, 319 (1987).
- [425] M. Ma, B. I. Halperin and P. A. Lee, Strongly disordered superfluids : Quantum fluctuations and critical behavior, *Phys. Rev. B* **34**, 3136–3143 (1986).
- [426] A. M. S. Macêdo and J. T. Chalker, Exact results for the level density and two-point correlation function of the transmission-matrix eigenvalues in quasi-on-dimensional conductors, *Phys. Rev. B* **49**(7), 4695–4702 (1994).
- [427] A. MacKinnon and B. Kramer, One-Parameter Scaling of Localization Length and Conductance in Disordered Systems, *Phys. Rev. Lett.* **47**(21), 1546–1549 (1981).
- [428] N. Macris and J. V. Pulé, Density of states of random Schrödinger operators with a uniform magnetic field, *Lett. Math. Phys.* **24**, 307 (1992).
- [429] S. Maekawa, Y. Isawa and H. Ebisawa, Conductance Fluctuation in Small Metallic Wires, *J. Phys. Soc. Jpn.* **56**, 25 (1987).
- [430] L. I. Magarill and M. V. Entin, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **51**, 1852 (1966).
- [431] D. Mailly and M. Sanquer, Sensitivity of quantum fluctuations and $1/f$ noise to time reversal symmetry, *J. Phys. I (France)* **2**, 357 (1992).
- [432] S. N. Majumdar and P. L. Krapivsky, Extreme Value Statistics and Traveling Fronts : Various Applications, *Physica A* **318**, 161–170 (2003).
- [433] S. N. Majumdar and G. Schehr, Top eigenvalue of a random matrix : large deviations and third order phase transition, *J. Stat. Mech.*, P01012 (2014).
- [434] F. Mallet, J. Ericsson, D. Mailly, S. Ünlübayir, D. Reuter, A. Melnikov, A. D. Wieck, T. Micklitz, A. Rosch, T. A. Costi, L. Saminadayar and C. Bäuerle, Scaling of the low-temperature dephasing rate in Kondo systems, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 226804 (2006).
- [435] F. Mallet, F. Schopfer, J. Ericsson, L. Saminadayar, C. Bäuerle, D. Mailly and C. Texier, Ensemble averaging in metallic quantum networks, in *Controllable quantum states*, edited by J. N. Hideaki Takayanagi and H. Nakano, p. 345. World scientific (2008).
- [436] P. Markos, Electron transport in strongly disordered structures, *Physica B* **405**, 3029 (2010).

- [437] P. Markoš, Dimension dependence of the conductance distribution in the nonmetallic regimes, *Phys. Rev. B* **65**(10), 104207 (2002).
- [438] P. Markoš and L. Schweitzer, Critical regime of the two-dimensional Ando model : relation between critical conductance and fractal dimension of electronic eigenstates, *J. Phys. A : Math. Gen.* **39**, 3221–3230 (2006).
- [439] C. A. Marlow, R. P. Taylor, M. Fairbanks, I. Shorubalko and H. Linke, Experimental Investigation of the Breakdown of the Onsager-Casimir Relations, *Phys. Rev. Lett.* **96**(11), 116801 (2006).
- [440] F. Marquardt, J. von Delft, R. A. Smith and V. Ambegaokar, Decoherence in weak localization. I. Pauli principle in influence functional, *Phys. Rev. B* **76**, 195331 (2007).
- [441] A. M. Martin and M. Büttiker, Coulomb-Induced Positive Current-Current Correlations in Normal Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **84**(15), 3386 (2000).
- [442] T. Martin and R. Landauer, Wave-packet approach to noise in multichannel mesoscopic systems, *Phys. Rev. B* **45**(4), 1742–1755 (1992).
- [443] D. L. Maslov, Transport through dirty Luttinger liquids connected to reservoirs, *Phys. Rev. B* **52**(20), R14368–R14371 (1995).
- [444] K. A. Matveev, Coulomb blockade at almost perfect transmission, *Phys. Rev. B* **51**, 1743–1751 (1995).
- [445] E. McCann, K. Kechedzhi, V. I. Fal’ko, H. Suzuura, T. Ando and B. L. Altshuler, Weak-Localization Magnetoresistance and Valley Symmetry in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **97**(14), 146805 (2006).
- [446] B. D. McKay, The expected eigenvalue distribution of a large regular graph, *Linear Algebra Appl.* **40**, 203–216 (1981).
- [447] H. P. McKean, A Limit Law for the Ground State of Hill’s Equation, *J. Stat. Phys.* **74**(5/6), 1227 (1994).
- [448] R. H. McKenzie, Exact Results for Quantum Phase Transitions in Random XY Spin Chains, *Phys. Rev. Lett.* **77**(23), 4804 (1996).
- [449] M. V. Medvedyeva, J. Tworzydło and C. W. J. Beenakker, Effective mass and tricritical point for lattice fermions localized by a random mass, *Phys. Rev. B* **81**, 214203 (2010).
- [450] Y. Meir and N. S. Wingreen, Landauer formula for the current through an interacting electron region, *Phys. Rev. Lett.* **68**(16), 2512–2515 (1992).
- [451] P. A. Mello, P. Pereyra and N. Kumar, Macroscopic approach to multichannel disordered conductors, *Ann. Phys. (N.Y.)* **181**, 290–317 (1988).
- [452] P. A. Mello and A. D. Stone, Maximum-entropy model for quantum-mechanical interference effects in metallic conductor, *Phys. Rev. B* **44**(8), 3559–3576 (1991).
- [453] P. A. Mello and S. Tomsovic, Scattering approach to quantum transport : Toward a consistent physical picture, *Phys. Rev. Lett.* **67**(3), 342–345 (1991).
- [454] T. Micklitz, A. Altland and J. S. Meyer, Low-energy theory of disordered interacting quantum wires, preprint pp. cond-mat arXiv :0805.3677 (2008).

- [455] A. Mildenberger, F. Evers, A. D. Mirlin and J. T. Chalker, Density of quasiparticle states for a two-dimensional disordered system : Metallic, insulating, and critical behavior in the class-D thermal quantum Hall effect, *Phys. Rev. B* **75**, 245321 (2007).
- [456] F. P. Milliken, S. Washburn, C. P. Umbach, R. B. Laibowitz and R. A. Webb, Effect of partial phase coherence on Aharonov-Bohm oscillations in metal loops, *Phys. Rev. B* **36**(8), 4465 (1987).
- [457] A. D. Mirlin, Statistics of energy levels and eigenfunctions in disordered systems, *Physics Reports* **326**(5–6), 259–382 (2000).
- [458] A. D. Mirlin and F. Evers, Multifractality and critical fluctuations at the Anderson transition, *Phys. Rev. B* **62**(12), 7920–7933 (2000).
- [459] A. D. Mirlin and Y. V. Fyodorov, Localization transition in the Anderson model on the Bethe lattice : Spontaneous symmetry breaking and correlation functions, *Nucl. Phys. B* **366**(3), 507–532 (1991).
- [460] A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, F.-M. Dittes, J. Quezada and T. H. Seligman, Transition from localized to extended eigenstates in the ensemble of power-law random banded matrices, *Phys. Rev. E* **54**(4), 3221–3230 (1996).
- [461] A. D. Mirlin, Y. V. Fyodorov, A. Mildenberger and F. Evers, Exact Relations between Multifractal Exponents at the Anderson Transition, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 046803 (2006).
- [462] R. Misra, A. F. Hebard, K. A. Muttalib and P. Wölfle, Asymmetric Metal-Insulator Transition in Disordered Ferromagnetic Films, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 037201 (2011).
- [463] H. Mizuno and I. Sato, A new proof of Bartholdi’s theorem, *Journal of Algebraic Combinatorics* **22**, 259–271 (2005).
- [464] P. Mohanty, E. M. Q. Jariwala and R. A. Webb, Intrinsic Decoherence in Mesoscopic Systems, *Phys. Rev. Lett.* **78**(17), 3366 (1997).
- [465] S. A. Molčanov, The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator, *Commun. Math. Phys.* **78**(3), 429–446 (1981).
- [466] G. Montambaux, A Few Properties of Disordered Conductors, in *International Workshop on superconductivity, magnetoresistive materials and correlated quantum systems*, p. 207, Hanoi (1999).
- [467] G. Montambaux and E. Akkermans, Non exponential quasiparticle decay and phase relaxation in low dimensional conductors, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 016403 (2005).
- [468] C. Monthus, B. Berche and C. Chatelain, Symmetry relations for multifractal spectra at random critical points, *J. Stat. Mech.*, P12002 (2009).
- [469] C. Monthus and A. Comtet, On the flux distribution in a one-dimensional disordered system, *J. Phys. I (France)* **4**, 635–653 (1994).
- [470] C. Monthus and T. Garel, Anderson transition on the Cayley tree as a traveling wave critical point for various probability distributions, *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**(7), 075002 (2009).
- [471] C. Monthus and T. Garel, Anderson transitions : multifractal or non-multifractal statistics of the transmission as a function of the scattering geometry, *J. Stat. Mech.*, P07033 (2009).

- [472] C. Monthus and P. Le Doussal, Localization of thermal packets and metastable states in the Sinai model, *Phys. Rev. E* **65**, 066129 (2002).
- [473] C. Monthus and C. Texier, Random walk on the Bethe lattice and hyperbolic Brownian motion, *J. Phys. A : Math. Gen.* **29**, 2399–2409 (1996).
- [474] C. Mora, R. Egger and A. Altland, From Luttinger liquid to Altshuler-Aronov anomaly in multichannel quantum wires, *Phys. Rev. B* **75**(3), 035310 (2007).
- [475] C. Mora and K. Le Hur, Universal resistances of the quantum resistance-capacitance circuit, *Nat. Phys.* **6**, 697–701 (2010).
- [476] J. A. Morrison, On the number of electron levels in a one-dimensional random lattice, *J. Math. Phys.* **3**(5), 1023 (1962).
- [477] N. F. Mott, *J. Non-Cryst. Solids* **1**, 1 (1968).
- [478] C. Mudry, P. W. Brouwer and A. Furusaki, Random magnetic flux problem in a quantum wire, *Phys. Rev. B* **59**(20), 13221–13234 (1999).
- [479] C. Mudry, P. W. Brouwer and A. Furusaki, Crossover from the chiral to the standard universality classes in the conductance of a quantum wire with random hopping only, *Phys. Rev. B* **62**(12), 8249–8268 (2000).
- [480] S. Murakami, N. Nagaosa and S.-C. Zhang, Dissipationless Quantum Spin Current at Room Temperature, *Science* **301**(5638), 1348–1351 (September 5, 2003).
- [481] K. A. Muttalib and V. A. Gopar, Generalization of the DMPK equation beyond quasi one dimension, *Phys. Rev. B* **66**(11), 115318 (2002).
- [482] K. A. Muttalib and J. R. Klauder, Generalized Fokker-Planck Equation for Multichannel Disordered Quantum Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **82**(21), 4272–4275 (1999).
- [483] K. A. Muttalib, P. Markoš and P. Wölfle, Conductance distribution in strongly disordered mesoscopic systems in three dimensions, *Phys. Rev. B* **72**(12), 125317 (2005).
- [484] K. Nagaev, On the shot noise in dirty metal contacts, *Phys. Lett. A* **169**, 103 (1992).
- [485] B. N. Narozhny, G. Zala and I. L. Aleiner, Interaction corrections at intermediate temperatures : Dephasing time, *Phys. Rev. B* **65**, 180202 (2002).
- [486] C. Naud, G. Faini and D. Mailly, Aharonov-Bohm cages in 2D normal metal networks, *Phys. Rev. Lett.* **86**(22), 5104 (2001).
- [487] C. Naud, G. Faini, D. Mailly, J. Vidal, B. Douçot, G. Montambaux, A. Wieck and D. Reuter, Aharonov-Bohm cages in the GaAlAs/GaAs system, *Physica E* **12**, 190 (2002).
- [488] I. Neder, N. Ofek, Y. Chung, M. Heiblum, D. Mahalu and V. Umansky, Interference between two indistinguishable electrons from independent sources, *Nature* **448**, 333 (19 jul 2007).
- [489] T. M. Nieuwenhuizen, Exact electronic spectra and inverse localization lengths in one-dimensional random systems, *Physica A* **120**, 468–514 (1983).
- [490] S. E. Nigg and M. Büttiker, Quantum to classical transition of the charge relaxation resistance of a mesoscopic capacitor, *Phys. Rev. B* **77**, 085312 (2008).

- [491] S. E. Nigg, R. López and M. Büttiker, Mesoscopic charge relaxation, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 206804 (2006).
- [492] Y. Niimi, Y. Baines, T. Capron, D. Mailly, F.-Y. Lo, A. D. Wieck, T. Meunier, L. Saminadayar and C. Bäuerle, Effect of Disorder on the Quantum Coherence in Mesoscopic Wires, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 226801 (2009).
- [493] Y. Niimi, Y. Baines, T. Capron, D. Mailly, F.-Y. Lo, A. D. Wieck, T. Meunier, L. Saminadayar and C. Bäuerle, Quantum coherence at low temperatures in mesoscopic systems : Effect of disorder, *Phys. Rev. B* **81**, 245306 (2010).
- [494] B. Nikolić and P. B. Allen, Electron transport through a circular constriction, *Phys. Rev. B* **60**(6), 3963–3969 (1999).
- [495] A. Nomata and S. Horie, Fractal feature of localized electronic states in Fibonacci arrays of Aharonov-Bohm rings, *Phys. Rev. B* **75**(11), 115130 (2007).
- [496] K. Nomura, M. Koshino and S. Ryu, Topological Delocalization of Two-Dimensional Massless Dirac Fermions, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 146806 (2007).
- [497] K. Nomura, S. Ryu, M. Koshino, C. Mudry and A. Furusaki, Quantum Hall Effect of Massless Dirac Fermions in a Vanishing Magnetic Field, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 246806 (2008).
- [498] K. S. Novoselov, A. K. Geim, S. V. Morozov, D. Jiang, M. I. Katsnelson, I. V. Grigorieva, S. V. Dubonos and A. A. Firsov, Two-Dimensional Gas of Massless Dirac Fermions in Graphene, *Nature (London)* **438**, 197–200 (10 November 2005).
- [499] H. Nyquist, Thermal agitation of electric charge in conductors, *Phys. Rev.* **32**(1), 110–113 (1928).
- [500] S. Oberholzer, E. Bieri, C. Schönenberger, M. Giovannini and J. Faist, Positive Cross Correlations in a Normal-Conducting Fermionic Beam Splitter, *Phys. Rev. Lett.* **96**(4), 046804 (2006).
- [501] S. Oberholzer, M. Henny, C. Strunk, C. Schönenberger, T. Heinzel, K. Ensslin and M. Holland, The Hanbury Brown and Twiss Experiment with Fermions, *Physica E* **6**, 314 (2000).
- [502] S. Oberholzer, E. Sukhorukov, C. Strunk, C. Schönenberger, T. Heinzel and M. Holland, Shot noise by quantum scattering in chaotic cavities, *Phys. Rev. Lett.* **86**(10), 2114 (2001).
- [503] W. D. Oliver, J. Kim, R. C. Liu and Y. Yamamoto, Hanbury Brown and Twiss-Type Experiment with Electrons, *Science* **284**, 299 (1999).
- [504] P. A. Orellana, M. L. Ladrón de Guevara and F. Claro, Controlling Fano and Dicke effects via a magnetic flux in a two-site Anderson model, *Phys. Rev. B* **70**, 233315 (2004).
- [505] I. Oren, A. Godel and U. Smilansky, Trace formulae and spectral statistics for discrete Laplacians on regular graphs (I), *J. Phys. A : Math. Theor.* **42**, 415101 (2009).
- [506] I. Oren and U. Smilansky, Trace formulae and spectral statistics for discrete Laplacians on regular graphs (II), preprint arXiv :1003.1445 (2010).
- [507] J. C. Osborn and J. J. M. Verbaarschot, Thouless Energy and Correlations of QCD Dirac Eigenvalues, *Phys. Rev. Lett.* **81**(2), 268–271 (1998).

- [508] V. I. Oseledec, A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic exponents for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.* **19**, 197–231 (1968).
- [509] A. Ossipov and Y. V. Fyodorov, Statistics of delay times in mesoscopic systems as a manifestation of eigenfunction fluctuations, *Phys. Rev. B* **71**, 125133 (2005).
- [510] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi and A. D. Mirlin, Electron transport in disordered graphene, *Phys. Rev. B* **74**, 235443 (2006).
- [511] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi and A. D. Mirlin, Quantum Criticality and Minimal Conductivity in Graphene with Long-Range Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 256801 (2007).
- [512] P. M. Ostrovsky, I. V. Gornyi and A. D. Mirlin, Theory of anomalous quantum Hall effects in graphene, *Phys. Rev. B* **77**, 195430 (2008).
- [513] A. A. Ovchinnikov and N. S. Erikmann, Density of states in a one-dimensional random potential, *Sov. Phys. JETP* **46**, 340–346 (1977).
- [514] B. Pannetier, C. Abilio, E. Serret, T. Fournier, P. Butaud and J. Vidal, Magnetic field induced localization in a two-dimensional superconducting wire network, *Physica C* **352** (2001).
- [515] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal and P. Gandit, Magnetic Flux Quantization in the Weak-Localization Regime of a Nonsuperconducting Metal, *Phys. Rev. Lett.* **53**(7), 718 (1984).
- [516] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal and P. Gandit, First Observation of Altshuler-Aronov-Spivak effect in gold and copper, *Phys. Rev. B* **31**(5), 3209 (1985).
- [517] B. Pannetier, J. Chaussy, R. Rammal and J. C. Villegier, Experimental Fine Tuning of Frustration : Two-Dimensional Superconducting Network in a Magnetic Field, *Phys. Rev. Lett.* **53**(19) (1984).
- [518] M. Pascaud and G. Montambaux, Interference effects in mesoscopic rings and wires, *Phys. Uspekhi* **41**, 182 (1998).
- [519] M. Pascaud and G. Montambaux, Persistent currents on networks, *Phys. Rev. Lett.* **82**(22), 4512 (1999).
- [520] L. A. Pastur and A. L. Figotin, Theory of disordered spin systems, *Teoret. Mat. Fiz.* **35**(2), 193–210 (1978).
- [521] T. Paul, P. Leboeuf, N. Pavloff, K. Richter and P. Schlagheck, Nonlinear transport of Bose-Einstein condensates through waveguides with disorder, *Phys. Rev. A* **72**, 063621 (2005).
- [522] M. H. Pedersen, S. A. van Langen and M. Büttiker, Charge fluctuations in quantum point contacts and chaotic cavities in the presence of transport, *Phys. Rev. B* **57**(3), 1838–1846 (1998).
- [523] C. Petitjean, D. Waltner, J. Kuipers, I. Adagideli and K. Richter, Semiclassical approach to the ac conductance of chaotic cavities, *Phys. Rev. B* **80**, 115310 (2009).
- [524] J.-L. Pichard and G. Sarma, Finite size scaling approach to Anderson localisation, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **14**(6), L127–L132 (1981).

- [525] J.-L. Pichard and G. Sarma, Finite size scaling approach to Anderson localisation : II. Quantitative analysis and new results, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **14**(21), L617–L625 (1981).
- [526] F. Pierre and N. O. Birge, Dephasing by Extremely Dilute Magnetic Impurities Revealed by Aharonov-Bohm Oscillations, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 206804 (2002).
- [527] F. Pierre, A. B. Gougam, A. Anthore, H. Pothier, D. Esteve and N. O. Birge, Dephasing of electrons in mesoscopic metal wires, *Phys. Rev. B* **68**, 085413 (2003).
- [528] F. Pierre, H. Pothier, D. Estève and M. H. Devoret, Energy redistribution between quasi-particles in mesoscopic silver wires, *J. Low Temp. Phys.* **118**, 437 (2000).
- [529] F. Pierre, H. Pothier, D. Esteve, M. H. Devoret, A. B. Gougam and N. O. Birge, Probing interactions in mesoscopic gold wires, Kluwer (2001), Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Size Dependent Magnetic Scattering, Pesc, Hungary, May 28 - June 1st, 2000, preprint cond-mat/0012038.
- [530] F. Pierre, H. Pothier, P. Joyez, N. O. Birge, D. Esteve and M. H. Devoret, Electrodynamic Dip in the Local Density of States of a Metallic Wire, *Phys. Rev. Lett.* **86**(8), 1590 (2001).
- [531] M. L. Polianski and M. Büttiker, Mesoscopic Fluctuations of Nonlinear Conductance of Chaotic Quantum Dots, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 156804 (2006).
- [532] M. L. Polianski and M. Büttiker, Rectification and nonlinear transport in chaotic dots and rings, *Phys. Rev. B* **76**(20), 205308 (2007).
- [533] L. Pollet, N. V. Prokof'ev, B. V. Svistunov and M. Troyer, Absence of a Direct Superfluid to Mott Insulator Transition in Disordered Bose Systems, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 140402 (2009).
- [534] H. Pothier, S. Guéron, N. O. Birge, D. Esteve and M. H. Devoret, Energy Distribution Function of Quasiparticles in Mesoscopic Wires, *Phys. Rev. Lett.* **79**(18), 3490–3493 (1997).
- [535] A. Prêtre, H. Thomas and M. Büttiker, Dynamic admittance of mesoscopic conductors : Discrete-potential model, *Phys. Rev. B* **54**(11), 8130–8143 (1996).
- [536] J. Prior, A. M. Somoza and M. Ortuño, Conductance distribution in two-dimensional localized systems with and without magnetic fields, *Eur. Phys. J. B* **70**(4), 513–521 (2009).
- [537] R. Rammal and G. Toulouse, Spectrum of the Schrödinger Equation on a Self-Similar Structure, *Phys. Rev. Lett.* **49**(16), 1194 (1982).
- [538] K. Ramola and C. Texier, Fluctuations of random matrix products and 1D Dirac equation with random mass, *J. Stat. Phys.* **157**(3), 497–514 (2014).
- [539] N. Read and D. Green, Paired states of fermions in two dimensions with breaking of parity and time-reversal symmetries and the fractional quantum Hall effect, *Phys. Rev. B* **61**(15), 10267–10297 (2000).
- [540] B. Reulet, H. Bouchiat and D. Mailly, Magnetoconductance, Weak Localization and Electron-Electron Interactions in Semi-Ballistic Quantum Wires, *Europhys. Lett.* **31**, 305 (1995).

- [541] M. Reznikov, R. de Picciotto, T. G. Griffiths, M. Heiblum and V. Umansky, Observation of quasiparticles with one-fifth of an electron's charge, *Nature* **399**, 238 (May 1999).
- [542] M. Reznikov, M. Heiblum, H. Shtrikman and D. Mahalu, Temporal Correlation of Electrons : Suppression of Shot Noise in a Ballistic Quantum Point Contact, *Phys. Rev. Lett.* **75**(18), 3340 (1995).
- [543] K. Richter and M. Sieber, Semiclassical Theory of Chaotic Quantum Transport, *Phys. Rev. Lett.* **89**(20), 206801 (2002).
- [544] Z. Ringel, Y. Imry and O. Entin-Wohlman, Delayed currents and interaction effects in mesoscopic capacitors, *Phys. Rev. B* **78**, 165304 (2008).
- [545] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno and M. Inguscio, Anderson localization of a non-interacting Bose-Einstein condensate, *Nature* **453**, 895 (June 12, 2008).
- [546] J. Rollbühler and H. Grabert, Coulomb Blockade of Tunneling between Disordered Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 126804 (2001).
- [547] J.-P. Roth, Le spectre du Laplacien sur un graphe, in *Colloque de Théorie du potentiel - Jacques Deny*, p. 521, Orsay (1983).
- [548] J.-P. Roth, Spectre du Laplacien sur un graphe, *C. R. Acad. Sc. Paris* **296**, 793 (1983).
- [549] J.-P. Roth, Une généralisation de la formule de Poisson, *Publications mathématiques n°23*, Université de Haute Alsace, France (1984).
- [550] K. Rüdénberg and C. W. Scherr, Free-electron network model for conjugated systems. I. Theory, *J. Chem. Phys.* **21**, 1565–1581 (1953).
- [551] S. Russ, J. W. Kantelhardt, A. Bunde and S. Havlin, Localization in self-affine energy landscapes, *Phys. Rev. B* **64**, 134209 (2001).
- [552] V. Rychkov and M. Büttiker, Mesoscopic versus Macroscopic Division of Current Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 166806 (2006).
- [553] A. F. Sadreev, E. N. Bulgakov and I. Rotter, Bound states in the continuum in open quantum billiards with a variable shape, *Phys. Rev. B* **73**, 235342 (2006).
- [554] H. Saleur and B. Duplantier, Exact Determination of the Percolation Hull Exponent in Two Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **58**(22), 2325–2328 (1987).
- [555] L. Saminadayar, D. C. Glatli, Y. Jin and B. Etienne, Observation of the $e/3$ Fractionally Charged Laughlin Quasiparticle, *Phys. Rev. Lett.* **79**(13), 2526 (1997).
- [556] L. Saminadayar, P. Mohanty, R. A. Webb, P. Degiovanni and C. Bäuerle, Phase coherence in the presence of magnetic impurities, *Physica E* **40**, 12 (2007).
- [557] P. Samuelsson and M. Büttiker, Chaotic Dot-Superconductor Analog of the Hanbury Brown-Twiss Effect, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 046601 (2002).
- [558] P. Samuelsson, I. Neder and M. Büttiker, Entanglement at finite temperature in the electronic two-particle interferometer, *Phys. Scr. T* **137**, 014023 (2008).

- [559] P. Samuelsson, E. V. Sukhorukov and M. Büttiker, Two-Particle Aharonov-Bohm Effect and Entanglement in the Electronic Hanbury Brown–Twiss Setup, *Phys. Rev. Lett.* **92**(2), 026805 (2004).
- [560] D. Sánchez and M. Büttiker, Magnetic-Field Asymmetry of Nonlinear Mesoscopic Transport, *Phys. Rev. Lett.* **93**(10), 106802 (2004).
- [561] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov and A. Aspect, Anderson Localization of Expanding Bose-Einstein Condensates in Random Potentials, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).
- [562] N. P. Sandler and D. L. Maslov, Interactions and disorder in multichannel quantum wires, *Phys. Rev. B* **55**(20), 13808–13816 (1997).
- [563] P. Santhanam, Weak localization in short wires : Influence of boundary conditions, *Phys. Rev. B* **35**(16), 8737 (1987).
- [564] P. Santhanam, Weak localization in normal-metal loops : Influence of boundary conditions, *Phys. Rev. B* **39**(4), 2541 (1989).
- [565] P. Santhanam, S. Wind and D. E. Prober, One-dimensional electron localization and superconducting fluctuations in narrow aluminium wires, *Phys. Rev. Lett.* **53**(12), 1179 (1984).
- [566] P. Santhanam, S. Wind and D. E. Prober, Localization, superconducting fluctuations, and superconductivity in thin films and narrow wires of aluminium, *Phys. Rev. B* **35**(7), 3188 (1987).
- [567] L. Schäfer and F. Wegner, Disordered system with n orbitals per site : Lagrange formulation, hyperbolic symmetry, and Goldstone modes, *Z. Phys. B* **38**, 113 (1980).
- [568] H. Schanz and U. Smilansky, Periodic-Orbit Theory of Anderson Localization on Graphs, *Phys. Rev. Lett.* **84**(7), 1427 (2000).
- [569] E. Scheer, J. C. Cuevas, A. Levy Yeyati, A. Martin-Rodero, P. Joyez, M. H. Devoret, D. Esteve and C. Urbina, Conduction channels of superconducting quantum point contacts, *Physica B* **223** (2000).
- [570] E. Scheer, P. Joyez, D. Esteve, C. Urbina and M. H. Devoret, Conduction Channel Transmissions of Atomic-Size Aluminum Contacts, *Phys. Rev. Lett.* **78**(18), 3535–3538 (1997).
- [571] A. Schmid, On the dynamics of electrons in an impure metal, *Z. Phys.* **271**, 251 (1974).
- [572] H. Schmidt, Disordered one-dimensional crystals, *Phys. Rev.* **105**(2), 425–441 (1957).
- [573] R. J. Schoelkopf, A. A. Clerk, S. M. Girvin, K. W. Lehnert and M. H. Devoret, Qubits as spectrometers of quantum noise, in *Quantum Noise*, edited by Ya. M. Blanter and Yu. V. Nazarov, Kluwer (2002), preprint cond-mat/0210247.
- [574] H. Schomerus and M. Titov, Band-center anomaly of the conductance distribution in one-dimensional Anderson localization, *Phys. Rev. B* **67**, 100201 (2003).
- [575] H. Schomerus, M. Titov, P. W. Brouwer and C. W. J. Beenakker, Microscopic versus mesoscopic local density of states in one-dimensional localization, *Phys. Rev. B* **65**, 121101 (2002).

- [576] F. Schopfer, F. Mallet, D. Mailly, C. Texier, G. Montambaux, L. Saminadayar and C. Bäuerle, Dimensional crossover in quantum networks : from mesoscopic to macroscopic physics, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 026807 (2007).
- [577] F. Schopfer, F. Mallet, C. Naud, G. Faini, D. Mailly, L. Saminadayar and C. Bäuerle, Observation of h/e conductance oscillations in disordered metallic T_3 network, in *Quantum information and decoherence in nanosystems*, edited by C. Glattli, M. Sanquer and J. Trân Thanh Vân, p. 267, Vietnam (2005), The Gioi publishers, XXXIXth Moriond conference, La Thuile, Italy, january 2004.
- [578] W. Schottky, Über spontane Stromschwankungen in verschiedenen Elektrizitätsleitern, *Ann. Phys. (Leipzig)* **362**(23) (1918).
- [579] R. Schuster, E. Buks, M. Heiblum, D. Mahalu, V. Umansky and H. Shtrikman, Phase measurement in a quantum dot via a double-slit interference experiment, *Nature* **385**, 417 (January 30, 1997).
- [580] P. Schwab and R. Raimondi, Quasiclassical theory of charge transport in disordered interacting electron systems, *Ann. Phys. (Leipzig)* **12**, 471 (2003).
- [581] T. Schwartz, G. Bartal, S. Fishman and M. Segev, Transport and Anderson localization in disordered two-dimensional photonic lattices, *Nature* **446**, 52 (March 1, 2007).
- [582] L. Schweitzer, B. Kramer and A. MacKinnon, Magnetic field and electron states in two-dimensional disordered systems, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **17**(23), 4111–4125 (1984).
- [583] P. Šeba, The generalized point interaction in one dimension, *Czech. J. Phys.* **36**, 667–673 (1986).
- [584] G. Seelig and M. Büttiker, Charge-fluctuation-induced dephasing in a gated mesoscopic interferometer, *Phys. Rev. B* **64**(24), 245313 (2001).
- [585] G. Seelig, S. Pilgram and M. Büttiker, Decoherence in ballistic mesoscopic interferometers, *Turk. J. Phys.* **27**, 331 (2003), preprint cond-mat/03 11 193.
- [586] A. Selberg, Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces, with applications to Dirichlet series, *J. Ind. Math. Soc.* **20**, 47 (1956).
- [587] T. Senthil, M. P. A. Fisher, L. Balents and C. Nayak, Quasiparticle Transport and Localization in High- T_c Superconductors, *Phys. Rev. Lett.* **81**(21), 4704–4707 (1998).
- [588] T. Senthil, J. B. Marston and M. P. A. Fisher, Spin quantum Hall effect in unconventional superconductors, *Phys. Rev. B* **60**(6), 4245–4254 (1999).
- [589] R. A. Serota, F. Paul Esposito and M. Ma, Current conservation and the nonlinear σ model in mesoscopic systems, *Phys. Rev. B* **39**(4), 2952–2955 (1989).
- [590] R. Shankar, Exact critical behavior of a random bond two-dimensional Ising model, *Phys. Rev. Lett.* **58**(23), 2466–2469 (1987).
- [591] B. Shapiro, Renormalization-Group transformation for the Anderson transition, *Phys. Rev. Lett.* **48**(12), 823 (1982).
- [592] B. Shapiro, Quantum conduction on a Cayley tree, *Phys. Rev. Lett.* **50**(10), 747 (1983).
- [593] B. Shapiro, Probability distribution in the scaling theory of localization, *Phys. Rev. B* **34**(6), 4394 (1986).

- [594] B. Shapiro and E. Abrahams, Scaling for the frequency-dependent conductivity in disordered electronic systems, *Phys. Rev. B* **24**(8), 4889–4891 (1981).
- [595] D. Yu. Sharvin and Yu. V. Sharvin, Magnetic-flux quantization in a cylindrical film of a normal metal, *JETP Lett.* **34**(5), 272 (1981).
- [596] Yu. V. Sharvin, A possible method for studying Fermi surface, *JETP Lett.* **21**, 655 (1965).
- [597] D. G. Shelton and A. M. Tsvelik, Effective theory for midgap states in doped spin-ladder and spin Peierls systems : Liouville quantum mechanics, *Phys. Rev. B* **57**(22), 14242 (1998).
- [598] B. I. Shklovskii, B. Shapiro, B. R. Sears, P. Lambrianides and H. B. Shore, Statistics of spectra of disordered systems near the metal-insulator transition, *Phys. Rev. B* **47**(17), 11487–11490 (1993).
- [599] M. Sigrist, A. Fuhrer, T. Ihn, K. Ensslin, W. Wegscheider and M. Bichler, Transmission phase through two quantum dots embedded in a four-terminal quantum ring, *Physica E* **22**(1-3), 530 (2004).
- [600] Ya. G. Sinai, The limit behavior of random walks in a one-dimensional random environment, *Theory of Prob. and Appl.* **27**(2), 247 (1982).
- [601] J. Sinova, D. Culcer, Q. Niu, N. A. Sinitsyn, T. Jungwirth and A. H. MacDonald, Universal Intrinsic Spin Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **92**(12), 126603 (2004).
- [602] U. Sivan, Y. Imry and A. G. Aronov, Quasiparticle lifetime in a quantum dot, *Europhys. Lett.* **28**(2), 115–120 (1994).
- [603] W. J. Skocpol, P. M. Mankiewich, R. E. Howard, L. D. Jackel, D. M. Tennant and A. D. Stone, Universal Conductance Fluctuations in Silicon Inversion-Layer Nanostructures, *Phys. Rev. Lett.* **56**(26), 2865 (1986).
- [604] W. J. Skocpol, P. M. Mankiewich, R. E. Howard, L. D. Jackel, D. M. Tennant and A. D. Stone, Nonlocal Potential Measurements of Quantum Conductors, *Phys. Rev. Lett.* **58**(22), 2347 (1987).
- [605] K. Slevin and T. Ohtsuki, Corrections to Scaling at the Anderson Transition, *Phys. Rev. Lett.* **82**(2), 382–385 (1999).
- [606] F. T. Smith, Lifetime matrix in collision theory, *Phys. Rev.* **118**(1), 349–356 (1960).
- [607] A. M. Somoza, M. Ortuño and J. Prior, Universal Distribution Functions in Two-Dimensional Localized Systems, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 116602 (2007).
- [608] A. M. Somoza, J. Prior and M. Ortuño, Conductance fluctuations in the localized regime : Numerical study in disordered noninteracting systems, *Phys. Rev. B* **73**, 184201 (2006).
- [609] S. Souma and A. Suzuki, Local density of states and scattering matrix in quasi-one-dimensional systems, *Phys. Rev. B* **65**(11), 115307 (2002).
- [610] B. Spivak and A. Zyuzin, Signature of the electron-electron interaction in the magnetic-field dependence of nonlinear $I - V$ characteristics in mesoscopic systems, *Phys. Rev. Lett.* **93**(22), 226801 (2004).

- [611] B. Z. Spivak and A. Yu. Zyuzin, Mesoscopic fluctuations of current density in disordered conductors, in *Mesoscopic phenomena in solids*, edited by B. L. Altshuler, P. A. Lee and R. A. Webb, p. 37, North-Holland (1991).
- [612] H. M. Stark and A. A. Terras, Zeta functions of finite graphs and coverings, *Adv. Math.* **121**, 124 (1996).
- [613] M. Steiner, Y. Chen, M. Fabrizio and A. O. Gogolin, Statistical properties of localization-delocalization transition in one dimension, *Phys. Rev. B* **59**(23), 14848–14851 (1999).
- [614] M. Steiner, M. Fabrizio and A. O. Gogolin, Random mass Dirac fermions in doped spin-Peierls and spin-ladder systems : one-particle properties and boundary effects, *Phys. Rev. B* **57**(14), 8290–8306 (1998).
- [615] A. Stern, Y. Aharonov and Y. Imry, Phase uncertainty and loss of interference : A general picture, *Phys. Rev. A* **41**(7), 3436–3448 (1990).
- [616] F. H. Stillinger and D. R. Herrick, Bound states in the continuum, *Phys. Rev. A* **11**(2), 446 (1975).
- [617] A. D. Stone and A. Szafer, What is measured when you measure a resistance? - The Landauer formula revisited, *IBM J. Res. Develop.* **32**(3), 384 (1988).
- [618] M. Störzer, P. Gross, C. M. Aegerter and G. Maret, Observation of the Critical Regime Near Anderson Localization of Light, *Phys. Rev. Lett.* **96**(6), 063904 (2006).
- [619] E. Sukhorukov and D. Loss, Noise in multiterminal diffusive conductors : Universality, nonlocality, and exchange effect, *Phys. Rev. B* **59**(20), 13054 (1999).
- [620] B. Sutherland, Localization of electronic wave functions due to local topology, *Phys. Rev. B* **34**(8), 5208 (1986).
- [621] Y. Takane, Dephasing of the quantum interference effect in open ballistic billiards, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71**(11), 2617–2620 (2002).
- [622] Y. Takane, Anomalous behaviour of the dephasing time in open diffusive cavities, *J. Phys. Soc. Jpn.* **72**(2), 233–236 (2003).
- [623] H. Takayama, Y. R. Lin-Liu and K. Maki, Continuum model for solitons in polyacetylene, *Phys. Rev. B* **21**(6), 2388 (1980).
- [624] T. Taniguchi, Charge current density from the scattering matrix, *Phys. Lett. A* **279**, 81 (2001).
- [625] T. Taniguchi and M. Büttiker, Friedel phases and phases of transmission amplitudes in quantum scattering systems, *Phys. Rev. B* **60**(19), 13814 (1999).
- [626] G. Tanner, *From quantum graphs to quantum random walks*, volume 213 of *NATO Science Series II : Mathematics, Physics and Chemistry*, pp. 69–87, Springer Netherlands (2006).
- [627] L. Tessieri and F. M. Izrailev, One-dimensional tight-binding models with correlated diagonal and off-diagonal disorder, *Physica E* **9**(3), 405–417 (2001).
- [628] C. Texier, Individual energy level distributions for one-dimensional diagonal and off-diagonal disorder, *J. Phys. A : Math. Gen.* **33**, 6095–6128 (2000).

- [629] C. Texier, Scattering theory on graphs (2) : the Friedel sum rule, *J. Phys. A : Math. Gen.* **35**, 3389–3407 (2002).
- [630] C. Texier, Effect of connecting wires on the decoherence due to electron-electron interaction in a metallic ring, *Phys. Rev. B* **76**, 153312 (2007).
- [631] C. Texier, On the spectrum of the Laplace operator of metric graphs attached at a vertex – Spectral determinant approach, *J. Phys. A : Math. Theor.* **41**, 085207 (2008).
- [632] C. Texier, ζ -regularised spectral determinants for metric graphs, *J. Phys. A : Math. Theor.* **43**, 425203 (2010).
- [633] C. Texier and M. Büttiker, Effect of incoherent scattering on shot noise correlations in the quantum Hall regime, *Phys. Rev. B* **62**(11), 7454–7458 (2000).
- [634] C. Texier and M. Büttiker, Local Friedel sum rule in graphs, *Phys. Rev. B* **67**, 245410 (2003).
- [635] C. Texier and A. Comtet, Universality of the Wigner time delay distribution for one-dimensional random potentials, *Phys. Rev. Lett.* **82**(21), 4220–4223 (1999).
- [636] C. Texier and P. Degiovanni, Charge and current distribution in graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **36**, 12425–12452 (2003).
- [637] C. Texier, P. Delplace and G. Montambaux, Quantum oscillations and decoherence due to electron-electron interaction in networks and hollow cylinders, *Phys. Rev. B* **80**, 205413 (2009).
- [638] C. Texier and C. Hagendorf, One-dimensional classical diffusion in a random force field with weakly concentrated absorbers, *Europhys. Lett.* **86**, 37011 (2009).
- [639] C. Texier and C. Hagendorf, Effect of boundaries on the spectrum of a one-dimensional random mass Dirac Hamiltonian, *J. Phys. A : Math. Theor.* **43**, 025002 (2010).
- [640] C. Texier and S. N. Majumdar, Wigner time-delay distribution in chaotic cavities and freezing transition, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 250602 (2013), *ibid* **112**, 139902 (2014).
- [641] C. Texier and G. Montambaux, Scattering theory on graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **34**, 10307–10326 (2001).
- [642] C. Texier and G. Montambaux, Weak localization in multiterminal networks of diffusive wires, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 186801 (2004).
- [643] C. Texier and G. Montambaux, Dephasing due to electron-electron interaction in a diffusive ring, *Phys. Rev. B* **72**, 115327 (2005), Erratum : *ibid* **74**, 209902(E) (2006).
- [644] C. Texier and G. Montambaux, Quantum oscillations in mesoscopic rings and anomalous diffusion, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, 3455–3471 (2005).
- [645] C. Texier and G. Montambaux, Altshuler-Aronov correction to the conductivity of a large metallic square network, *Phys. Rev. B* **76**, 094202 (2007).
- [646] C. Texier, G. Montambaux and E. Akkermans, Theory of quantum transport in multiterminal networks of weakly disordered wires, unpublished (2007).
- [647] G. Theodorou and M. H. Cohen, Extended states in a one-dimensional system with off-diagonal disorder, *Phys. Rev. B* **13**(10), 4597 (1976).

- [648] T. J. Thornton, M. Pepper, H. Ahmed, D. Andrews and G. J. Davies, One-Dimensional Conduction in the 2D Electron Gas of a GaAs-AlGaAs Heterojunction, *Phys. Rev. Lett.* **56**(11), 1198 (1986).
- [649] D. J. Thouless, A relation between the density of states and range of localization for one-dimensional random systems, *J. Phys. C : Solid St. Phys.* **5**, 77 (1972).
- [650] D. J. Thouless, Why Landauer's Formula for Resistance is Right, *Phys. Rev. Lett.* **47**(13), 972 (1981).
- [651] F. V. Tikhonenko, A. A. Kozikov, A. K. Savchenko and R. V. Gorbachev, Transition between Electron Localization and Antilocalization in Graphene, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 226801 (2009).
- [652] M. Titov and Y. V. Fyodorov, Time-delay correlations and resonances in one-dimensional disordered systems, *Phys. Rev. B* **61**(4), R2444 (2000).
- [653] M. Titov and H. Schomerus, Anomalous Wave Function Statistics on a One-Dimensional Lattice with Power-Law Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 176601 (2003).
- [654] M. Titov and H. Schomerus, Nonuniversality of Anderson Localization in Short-Range Correlated Disorder, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 126602 (2005).
- [655] J. Torrès and T. Martin, Positive and negative Hanbury-Brown and Twiss correlations in normal metal-superconducting devices, *Eur. Phys. J. B* **12**(3), 319 (1999).
- [656] C. A. Tracy and H. Widom, Level-spacing distribution and the Airy kernel, *Phys. Lett. B* **305**, 115 (1993).
- [657] C. A. Tracy and H. Widom, Distribution functions for largest eigenvalues and their applications, in *Proceedings of the ICM*, volume 1, p. 587, Beijing (2002).
- [658] M. Treiber, C. Texier, O. M. Yevtushenko, J. von Delft and I. V. Lerner, Thermal noise and dephasing due to electron interactions in non-trivial geometries, *Phys. Rev. B* **84**, 054204 (2011).
- [659] M. Treiber, O. M. Yevtushenko, F. Marquardt, J. von Delft and I. V. Lerner, Dimensional Crossover of the dephasing time in disordered mesoscopic rings, *Phys. Rev. B* **80**, 201305(R) (2009).
- [660] D. C. Tsui, H. L. Störmer and A. C. Gossard, Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit, *Phys. Rev. Lett.* **48**(22), 1559–1562 (1982).
- [661] O. Tsypliyatyev, I. L. Aleiner, V. I. Fal'ko and I. V. Lerner, Applicability of the ergodicity hypothesis to mesoscopic fluctuations, *Phys. Rev. B* **68**, 121301 (2003).
- [662] C. P. Umbach, C. van Haesendonck, R. B. Laibowitz, S. Washburn and R. A. Webb, Direct observation of Ensemble Averaging of the Aharonov-Bohm Effect in Normal Metal Loops, *Phys. Rev. Lett.* **56**(4), 386 (1986).
- [663] M. C. W. van Rossum, T. M. Nieuwenhuizen and R. Vlaming, Optical conductance fluctuations : Diagrammatic analysis in the Landauer approach and nonuniversal effects, *Phys. Rev. E* **51**(6), 6158 (1995).
- [664] B. J. van Wees, L. P. Kouwenhoven, H. Van Houten, C. W. J. Beenakker, J. E. Mooij, C. T. Foxon and J. J. Harris, Quantized conductance of magnetoelectric subbands in ballistic point contacts, *Phys. Rev. B* **38**(5), 3625 (1988).

- [665] B. J. van Wees, H. Van Houten, C. W. J. Beenakker, J. Williamson, L. P., Kouwenhoven, D. van der Marel and C. T. Foxon, Quantized conductance of point contacts in a two-dimensional electron gas, *Phys. Rev. Lett.* **60**(9), 848 (1988).
- [666] I. Varga and D. Braun, Critical statistics in a power-law random-banded matrix ensemble, *Phys. Rev. B* **61**(18), R11859–R11862 (2000).
- [667] A. B. Venkov and A. M. Nikitin, The Selberg trace formula, Ramanujan graphs and some problems of mathematical physics, *Peterburg Math. J.* **5**(3), 419 (1994).
- [668] J. Vidal, P. Butaud, B. Douçot and R. Mosseri, Disorder and interactions in Aharonov-Bohm cages, *Phys. Rev. B* **64**(15), 155306 (2001).
- [669] J. Vidal, G. Montambaux and B. Douçot, Transmission through quantum networks, *Phys. Rev. B* **62**(24), R16294 (2000).
- [670] J. Vidal, R. Mosseri and B. Douçot, Aharonov-Bohm Cages in Two-Dimensional Structures, *Phys. Rev. Lett.* **81**(26), 5888 (1998).
- [671] P. Vivo, S. N. Majumdar and O. Bohigas, Distributions of conductance and shot noise and associated phase transitions, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 216809 (2008).
- [672] D. Vollhardt and P. Wölfle, Diagrammatic, self-consistent treatment of the Anderson localization problem in $d \leq 2$ dimensions, *Phys. Rev. B* **22**(10), 4666 (1980).
- [673] J. von Delft, Influence Functional for Decoherence of Interacting Electrons in Disordered Conductors, *Int. J. Mod. Phys. B* **22**, 727 (2008), preprint cond-mat/0510563.
- [674] J. von Delft, F. Marquardt, R. A. Smith and V. Ambegaokar, Decoherence in weak localization. II. Bethe-Salpeter calculation of the cooperon, *Phys. Rev. B* **76**, 195332 (2007).
- [675] J. von Neumann and E. Wigner, Über merkwürdige diskrete Eigenwerte, *Phys. Z.* **30**, 465 (1929).
- [676] S. Washburn, C. P. Umbach, R. B. Laibowitz and R. A. Webb, Temperature dependence of the normal-metal Aharonov-Bohm effect, *Phys. Rev. B* **32**(7), 4789 (1985).
- [677] R. A. Webb and S. Washburn, Quantum interference fluctuations in disordered metals, *Physics Today* pp. 46–53 (December 1988).
- [678] R. A. Webb, S. Washburn, C. P. Umbach and R. B. Laibowitz, Observation of h/e Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings, *Phys. Rev. Lett.* **54**(25), 2696 (1985).
- [679] F. Wegner, The mobility edge problem : continuous symmetry and a conjecture, *Z. Phys. B* **35**(3), 207 (1979).
- [680] F. Wegner, Inverse participation ratio in $2 + \epsilon$ dimensions, *Z. Phys. B* **36**(3), 209–214 (1980).
- [681] F. Wegner, Exact density of states for Lowest Landau Level in white noise potential. Superfield representation for interacting systems, *Z. Phys. B - Condens. Matter* **51**, 279 (1983).
- [682] F. J. Wegner, Electrons in disordered systems. Scaling near the mobility edge, *Z. Phys. B* **25**(4), 327 (1976).

- [683] F. J. Wegner, Disordered system with n orbitals per site : $n = \infty$ limit, *Phys. Rev. B* **19**(2), 783 (1979).
- [684] F. J. Wegner, Relations between non-linear σ -models of various symmetries, *Nucl. Phys. B [FS]* **180**(1), 77–88 (1981).
- [685] R. G. Wheeler, K. K. Choi, A. Goel, R. Wisnieff and D. E. Prober, Localization and electron-electron interaction effects in submicron-width inversion layers, *Phys. Rev. Lett.* **49**(22), 1674 (1982).
- [686] A. E. White, M. Tinkham, W. J. Skocpol and D. C. Flanders, Evidence for interaction effects in the low-temperature resistance rise in ultrathin metallic wires, *Phys. Rev. Lett.* **48**(25), 1752 (1982).
- [687] R. S. Whitney, P. Jacquod and C. Petitjean, Dephasing in quantum chaotic transport : A semiclassical approach, *Phys. Rev. B* **77**, 045315 (2008).
- [688] D. S. Wiersma, P. Bartolini, A. Lagendijk and R. Righini, Localization of light in a disordered medium, *Nature* **390**, 671 (December 25, 1997).
- [689] E. Wigner, On the Interaction of Electrons in Metals, *Phys. Rev.* **46**(11), 1002–1011 (1934).
- [690] E. P. Wigner, Lower limit for the energy derivative of the scattering phase shift, *Phys. Rev.* **98**(1), 145–147 (1955).
- [691] R. L. Willett, H. L. Stormer, D. C. Tsui, L. N. Pfeiffer, K. W. West and K. W. Baldwin, Termination of the series of fractional quantum hall states at small filling factors, *Phys. Rev. B* **38**(11), 7881–7884 (1988).
- [692] S. Wind, M. J. Rooks, V. Chandrasekhar and D. E. Prober, One-Dimensional Electron-Electron Scattering with Small Energy Transfers, *Phys. Rev. Lett.* **57**(5), 633 (1986).
- [693] H.-L. Wu, W. Goff and P. Phillips, Insulator-metal transition in a random lattices containing symmetrical defects, *Phys. Rev. B* **45**(4), 1623 (1992).
- [694] A. Yacoby, M. Heiblum, D. Mahalu and H. Shtrikman, Coherence and Phase Sensitive Measurements in a Quantum Dot, *Phys. Rev. Lett.* **74**(20), 4047 (1995).
- [695] M. Yor, On some exponential functionals of Brownian motion, *Adv. Appl. Probab.* **24**, 509 (1992).
- [696] G. Zala, B. N. Narozhny and I. L. Aleiner, Interaction corrections at intermediate temperatures : Longitudinal conductivity and kinetic equation, *Phys. Rev. B* **64**, 214204 (2001).
- [697] T. Ziman, Localization and spectral singularities in random chains, *Phys. Rev. Lett.* **49**(5), 337 (1982).
- [698] M. R. Zirnbauer, Riemannian symmetric superspaces and their origin in random-matrix theory, *J. Math. Phys.* **37**(10), 4986–5018 (1996).
- [699] D. M. Zumbühl, C. M. Marcus, M. P. Hanson and A. C. Gossard, Asymmetry of Nonlinear Transport and Electron Interactions in Quantum Dots, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 206802 (2006).

Articles de revue

- [700] A. A. Abrikosov and I. A. Ryzhkin, Conductivity of quasi-one-dimensional metal systems, *Adv. Phys.* **27**(2), 147–230 (1978).
- [701] I. L. Aleiner, P. W. Brouwer and L. I. Glazman, Quantum effects in Coulomb blockade, *Phys. Rep.* **358**(5-6), 309–440 (2002).
- [702] Y. Alhassid, The statistical theory of quantum dots, *Rev. Mod. Phys.* **72**(4), 895–968 (2000).
- [703] A. Altland, B. D. Simons and M. R. Zirnbauer, Theories of low-energy quasi-particle states in disordered *d*-wave superconductors, *Phys. Rep.* **359**, 283–354 (2002).
- [704] H. Aoki, Quantised Hall effect, *Rep. Prog. Phys.* **50**, 655 (1987).
- [705] A. G. Aronov and Yu. V. Sharvin, Magnetic flux effects in disordered conductors, *Rev. Mod. Phys.* **59**(3), 755–779 (1987).
- [706] J. E. Avron, A. Raveh and B. Zur, Adiabatic quantum transport in multiply connected systems, *Rev. Mod. Phys.* **60**(4), 873–915 (1988).
- [707] C. W. J. Beenakker, Random-matrix theory of quantum transport, *Rev. Mod. Phys.* **69**(3), 731–808 (1997).
- [708] G. Bergmann, Weak localization in thin films, *Phys. Rep.* **107**(1), 1–58 (1984).
- [709] J. P. Bird, R. Akis, D. K. Ferry, A. P. S. de Moura, Y. C. Lai and K. M. Indlekofer, Interference and interactions in open quantum dots, *Rep. Prog. Phys.* **66**, 583–632 (2003).
- [710] Ya. M. Blanter and M. Büttiker, Shot noise in mesoscopic conductors, *Phys. Rep.* **336**(1-2), 1–166 (2000).
- [711] J.-P. Bouchaud and A. Georges, Anomalous diffusion in disordered media : Statistical mechanisms, models and physical applications, *Phys. Rep.* **195**, 127–293 (1990).
- [712] A. H. Castro Neto, F. Guinea, N. M. R. Peres, K. S. Novoselov and A. K. Geim, The electronic properties of graphene, *Rev. Mod. Phys.* **81**(1), 109–162 (2009).
- [713] S. Chakravarty and A. Schmid, Weak localization : the quasiclassical theory of electrons in a random potential, *Phys. Rep.* **140**(4), 193 (1986).
- [714] A. Comtet, J. Desbois and C. Texier, Functionals of the Brownian motion, localization and metric graphs, *J. Phys. A : Math. Gen.* **38**, R341–R383 (2005).
- [715] A. Comtet and C. Texier, One-dimensional disordered supersymmetric quantum mechanics : a brief survey, in *Supersymmetry and Integrable Models*, edited by H. Aratyn, T. D. Imbo, W.-Y. Keung and U. Sukhatme, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 502, pp. 313–328. Springer (1998), (also available as cond-mat/9707313).
- [716] A. Comtet, C. Texier and Y. Tourigny, Lyapunov exponents, one-dimensional Anderson localisation and products of random matrices, *J. Phys. A : Math. Theor.* **46**, 254003 (2013).
- [717] V. S. Dotsenko and V. S. Dotsenko, Critical behaviour of the phase transition in the 2D Ising model with impurities, *Adv. Phys.* **32**(2), 129–172 (1983).

- [718] K. B. Efetov, Supersymmetry and theory of disordered metals, *Adv. Phys.* **32**(1), 53–127 (1983).
- [719] F. Evers and A. D. Mirlin, Anderson transitions, *Rev. Mod. Phys.* **80**(4), 1355–1417 (2008).
- [720] M. O. Goerbig, Electronic properties of graphene in a strong magnetic field, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1193–1243 (2011).
- [721] A. A. Gogolin, Electron localization and hopping conductivity in one-dimensional disordered systems, *Phys. Rep.* **86**(1), 1–53 (1982).
- [722] M. Z. Hasan and C. L. Kane, Colloquium : Topological insulators, *Rev. Mod. Phys.* **82**(4), 3045–3067 (2010).
- [723] B. Huckestein, Scaling theory of the integer quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **67**(2), 357–396 (1995).
- [724] S. Kirkpatrick, Percolation and Conduction, *Rev. Mod. Phys.* **45**(4), 574–588 (1973).
- [725] V. N. Kotov, B. Uchoa, V. M. Pereira, F. Guinea and A. H. Castro Neto, Electron-Electron Interactions in Graphene : Current Status and Perspectives, *Rev. Mod. Phys.* **84**, 1067–1125 (2012).
- [726] B. Kramer and A. MacKinnon, Localization : theory and experiment, *Rep. Prog. Phys.* **56**, 1469–1564 (1993).
- [727] B. Kramer, T. Ohtsuki and S. Kettemann, Random network models and quantum phase transitions in two dimensions, *Phys. Rep.* **417**, 211–342 (2005).
- [728] R. B. Laughlin, Nobel Lecture : Fractional quantization, *Rev. Mod. Phys.* **71**(4), 863–874 (1999).
- [729] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, Disordered electronic systems, *Rev. Mod. Phys.* **57**(2), 287–337 (1985).
- [730] J. J. Lin and J. P. Bird, Recent experimental studies of electrons dephasing in metal and semiconductor mesoscopic structures, *J. Phys. Cond. Matter* **14**, R501 (2002).
- [731] N. F. Mott and W. O. Twose, The theory of impurity conduction, *Adv. Phys.* **10**, 107 (1961).
- [732] J. B. Pendry, Symmetry and transport of waves in one-dimensional disordered systems, *Adv. Phys.* **43**(4), 461–542 (1994).
- [733] H. L. Störmer, Nobel Lecture : The fractional quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **71**(4), 875–889 (1999).
- [734] D. J. Thouless, Electrons in disordered systems and the theory of localization, *Phys. Rep.* **13C**(3), 93 (1974).
- [735] D. C. Tsui, Nobel Lecture : Interplay of disorder and interaction in two-dimensional electron gas in intense magnetic fields, *Rev. Mod. Phys.* **71**(4), 891–895 (1999).
- [736] D. Ullmo, Many-body physics and quantum chaos, *Rep. Prog. Phys.* **71**, 026001 (2008).
- [737] M. C. W. van Rossum and T. M. Nieuwenhuizen, Multiple scattering of classical waves : microscopy, mesoscopy, and diffusion, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 313 (1999).

- [738] J. J. M. Verbaarschot, H. A. Weidenmüller and M. R. Zirnbauer, Grassmann integration in stochastic quantum physics : The case of compound-nucleus scattering, *Phys. Rep.* **129**(6), 367–438 (1985).
- [739] K. von Klitzing, The quantized Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **58**(3), 519–531 (1986).
- [740] M. Vozmediano, M. Katsnelson and F. Guinea, Gauge fields in graphene, *Phys. Rep.* **496**(4–5), 109–148 (2010).
- [741] S. Washburn and R. A. Webb, Aharonov-Bohm effect in normal metal. Quantum coherence and transport, *Adv. Phys.* **35**(4), 375–422 (1986).

Livres

- [742] M. Abramowitz and I. A. Stegun (editors), *Handbook of Mathematical functions*, Dover, New York (1964).
- [743] É. Akkermans and G. Montambaux, *Physique mésoscopique des électrons et des photons*, EDP Sciences, CNRS éditions (2004).
- [744] E. Akkermans and G. Montambaux, *Mesoscopic physics of electrons and photons*, Cambridge University Press (2007).
- [745] S. Albeverio, S. A. Gesztesy, R. Høegh-Krohn and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, Springer-Verlag, Berlin (1988).
- [746] A. Altland and B. Simons, *Condensed matter field theory*, Cambridge University Press (2006).
- [747] N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College (1976).
- [748] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-body quantum theory in condensed matter physics*, Oxford University Press (2004).
- [749] A. Crisanti, G. Paladin and A. Vulpiani, *Products of random matrices in statistical physics*, Springer-Verlag (1993), Springer Series in Solid-State Sciences vol. **104**.
- [750] S. Datta, *Electronic transport in mesoscopic systems*, Cambridge University Press (1995).
- [751] E. N. Economou, *Green's functions in quantum physics*, Springer-Verlag, Berlin (1990).
- [752] K. Efetov, *Supersymmetry in disorder and chaos*, Cambridge University Press (1997).
- [753] A. L. Efros and M. Pollak (editors), *Electron-electron interactions in disordered systems*, North-Holland (1985).
- [754] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill (1965).
- [755] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the natural sciences*, Springer (1989).
- [756] C. W. Gardiner and P. Zoller, *Quantum noise : a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics*, Springer (2004).

- [757] T. Giamarchi, *Quantum physics in one dimension*, Oxford University Press (2004).
- [758] G. F. Giuliani and G. Vignale, *Quantum theory of the electron liquid*, Cambridge University Press (2005).
- [759] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, Academic Press, fifth edition (1994).
- [760] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes*, Columbia University Press, New York (1958).
- [761] M. G. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, volume 1 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*, Springer Verlag, New York (1990).
- [762] Y. Imry, *Introduction to mesoscopic physics*, Oxford University Press, Oxford (1997).
- [763] M. Janßen, O. Viehweger, U. Fastenrath and J. Hajdu, *Introduction to the theory of the integer quantum Hall effect*, VCH, Weinheim (1994).
- [764] G. Junker, *Supersymmetric methods in quantum and statistical physics*, Springer (1996).
- [765] L. D. Landau and E. Lifchitz, *Mécanique quantique*, Mir (1966), tome 3.
- [766] L. D. Landau and E. Lifchitz, *Physique statistique*, Mir (1966), tome 5.
- [767] R. B. Laughlin, *A Different Universe : Reinventing Physics from the Bottom Down*, Basic Books (2005).
- [768] I. M. Lifshits, S. A. Gredeskul and L. A. Pastur, *Introduction to the theory of disordered systems*, John Wiley & Sons (1988).
- [769] J.-M. Luck, *Systèmes désordonnés unidimensionnels*, CEA, collection Aléa Saclay, Saclay (1992).
- [770] C. Mahaux and H. A. Weidenmüller, *Shell-model approach to nuclear reactions*, North-Holland, Amsterdam (1969).
- [771] A. Nikiforov and V. Ouvarov, *Fonctions spéciales de la physique mathématique*, Mir, Moscou (1983).
- [772] D. Pines and P. Nozières, *The theory of quantum liquids, volume 1*, W. A. Benjamin (1966), reedited by Perseus Books Publishing in 1989.
- [773] N. Pottier, *Mécanique statistique hors équilibre : équation de Boltzmann, réponse linéaire* (1994), cours du DEA de physique des solides, disponible sur le site du CCSD <http://cel.archives-ouvertes.fr/>, référence cel-00092930.
- [774] R. Prange and S. Girvin (editors), *The quantum Hall effect*, Springer-Verlag, New York (1990).
- [775] C. Texier, *Mécanique quantique*, Dunod, Paris, second edition (2015).
- [776] M. Yor (editor), *Exponential functionals and principal values related to Brownian motion*, Biblioteca de la revista matemática iberoamericana, Madrid (1997), ISSN 0213-2230.

Thèses

- [777] L. Angers, *Rectification et supraconductivité de proximité dans des anneaux mésoscopiques*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud (2007), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00156703>.
- [778] A. Anthore, *Mécanismes de décohérence dans les conducteurs mésoscopiques*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2003).
- [779] M. Bocquet, *Chaînes de spins, fermions de Dirac et systèmes désordonnés*, Ph.D. thesis, École Polytechnique (2000), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00001560>.
- [780] P. W. Brouwer, *On the random matrix theory of quantum transport*, Ph.D. thesis, Leiden University (1997).
- [781] J. Dufouleur, *Cohérence quantique et interactions dans les gaz d'électrons bidimensionnels balistiques*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud (2007).
- [782] M. Ferrier, *Transport électronique dans les fils quasi-unidimensionnels : cohérence de phase dans les réseaux de fils quantiques et supraconductivité des cordes de nanotubes de carbone*, Ph.D. thesis, Université Paris-Sud (2004).
- [783] G. Fève, *Quantification du courant alternatif : la boîte quantique comme source d'électrons uniques subnanoseconde*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2006), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00119589>.
- [784] G. Fleury, *Effet de l'interaction coulombienne sur la localisation d'Anderson dans le gaz bidimensionnel d'électrons*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2010), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00516820>.
- [785] J. Gabelli, *Mise en évidence de la cohérence quantique dans des conducteurs en régime dynamique*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2006), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011619>.
- [786] B. Huard, *Interactions between electrons, mesoscopic Josephson effect and asymmetric current fluctuations*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2006), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00119371>.
- [787] F. Mallet, *Effets de cohérence dans les fils et les réseaux quantiques. Étude de l'effet Kondo*, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble (2006) <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00546850>.
- [788] C. Monthus, *Étude de quelques fonctionnelles du mouvement brownien et de certaines propriétés de la diffusion unidimensionnelle en milieu aléatoire*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (1995), *Ann. Phys. (France)* **20**, 341 (1995).
- [789] C. Naud, *Transport quantique dans les nanostructures*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2001).
- [790] M. Pascaud, *Magnétisme orbital de conducteurs mésoscopiques désordonnés et propriétés spectrales de fermions en interaction*, Ph.D. thesis, Université Paris 11 (1998).
- [791] F. Pierre, *Interactions électron-électron dans les fils mésoscopiques*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (2000), *Ann. Phys. (France)* **26**(4), (2001).

- [792] C. Texier, *Quelques aspects du transport quantique dans les systèmes désordonnés de basse dimension*, Ph.D. thesis, Université Paris 6 (1999), <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01088853>.

Index

- Aharonov-Bohm
 - amplitude AB, 122
 - oscillations Aharonov-Bohm, 128, 151
- Aharonov-Bohm (effet), 9, 51
 - à deux particules, 26
 - effet de cage AB, 52, 178
- Altshuler-Aronov-Spivak (oscillations), 128, 151
- Anderson (localisation d'), 169
- Anderson (modèle d'), 170
- Anderson (transition d'), 184
- Anomalie de DoS, 137
- Antilocalisation, 188, 189
- Arbre de Cayley, 99
- Atomes froids, 198

- Bartholdi (formule de), 85
- Bass (formule de), 86
- $\beta(g)$ function
 - quasi-1D wire, 229
- Bethe (réseau de), 99
- Bound states in the continuum (BIC), 32, 60–62
- Breakjunction, 18
- Breit-Wigner, 59
- Bruit
 - de grenaille (Shottky), 1, 21–24, 26, 42
 - de grenaille dans un billard chaotique), 44
 - de grenaille dans un fil diffusif, 44
 - thermique (Johnson-Nyquist), 21, 23, 24, 42

- Canal de diffusion, 13
- Capacité mésoscopique, 33, 38, 41
- Cayley (arbre de), 99
- Chalker Coddington (modèle de), 179
- Chaos
 - graphes chaotiques, 52, 84–86
 - quantum dot, 34, 39, 44
- Classification des symétries, 180
- Cohérence de phase, 1, 9–11, 17, 24, 39, 51, 65, 104, 114, 182
 - longueur de cohérence de phase, 104, 116, 122

- Comptage des nœuds (méthode du), 205
- Conductance
 - conductance de Sharvin, 15
 - conductance dynamique, 39
 - conductance non linéaire, 34, 36
 - distribution de la conductance, 196
 - distribution en $d = 1$, 210
 - fluctuations de conductance, 196
 - formule de Landauer, 12, 13, 15, 19
 - relation Landauer - Kubo, 21
- Conductivité, 173
 - approximation de Drude, 109
 - correction de localisation faible, 114, 115
 - Efros-Shklovskii, 183
 - formule de Kubo-Greenwood, 105
 - Variable Range Hopping, 183
- Constante diélectrique, 35, 153
- Constriction quantique (QPC), 46
- Cooperon, 114
- Coulomb dip, 137
- Coulomb gap, 137, 183
- Courant, 13, 15
 - bruit du courant, 21, 22
 - conservation du courant, 125
 - corrélation des courants dans un réseau, 61
 - courant permanent, 33, 66, 122, 239
 - courants dans les fils d'un réseau, 61
 - éléments de matrice de l'opérateur, 22
 - transport non linéaire, 34, 36

- Décohérence, 22, 39, 42, 104, 115, 134
- Délocalisation (dans le modèle SUSY désordonné), 204
- δ' -coupling, 54
- Densité d'états, 27, 29, 41, 60, 108, 172, 199
 - formule de trace, 80, 83
 - modèle SUSY désordonné 1d, 203
 - pour des impuretés aléatoires 1d, 201
 - pour un désordre aléatoire gaussien 1d, 200
- Densité d'états locale, 27, 29, 60
 - distribution en $d = 1$, 210
- Émissivité, 30

- Injectivité, 30
- Déphasage (phase shift), 210
- Dépliage du spectre, 215
- Déterminant spectral, 63
- Diagrammes
 - règles de Feynman, 107
- Diélectrique (constante), 35, 153
- Diffuson, 113
- Dirac (hamiltonien de), 215
- DMPK (modèle de), 177, 205
 - longueur de localisation, 177
- Dwell time in QD, 144
- Dynamical Coulomb blockade, 137
- Dyson (singularité de), 203
- Dyson index, 229
- Dyson-Schmidt (méthode de), 205

- Écrantage, 35, 36, 41, 153
- Effet Hall quantique, 174, 178–180, 187, 191
 - dans le graphène, 196
- Efros-Shklovskii, 137, 183
- État stationnaire de diffusion, 12, 14, 46, 210
- États de bord (QHE), 25, 45

- Fano (facteur de), 24, 44
- Fermi (liquide de), 156
- Fermions en interaction 1D avec désordre, 132, 182
- Feynman (règles de), 107
- Feynman-Hellmann (théorème de), 32
- Feynman-Kac formula, 64
- Fisher & Lee (relation de), 28, 111
- Fluctuation-dissipation (théorème), 141, 142, 154
- Flux cancellation, 244
- Fonction de distribution locale, 30
- Fonctionnelles d'influences, 135
- Fonctions- ζ (fonctions- L), 78
- Formalisme de phase, 205, 208
- Formules de Poisson, 79
- Formules de trace, 79
- Friedel (règle de somme de), 27, 40, 60, 212
- Full counting statistics, 26

- Graphe
 - arc/lien, 53
 - attachement de graphes, 94
 - chemin, 53
 - conditions aux limites, 54
 - densité d'états locale, 60
 - déterminant spectral, 71, 72, 75, 76, 78
 - déterminant spectral (fonction ζ), 81
 - déterminant spectral (régularisation ζ), 87, 91
 - fonction de Green, 70–72, 75
 - fonctionnelles du mouvement brownien, 86
 - fonctions- ζ , 81
 - formule de trace de Roth, 83
 - formule de trace pour la fonction de Green, 72, 82
 - formules de Poisson, 83, 84
 - formules de trace, 83, 84
 - graphe étoile, 94
 - graphe combinatoire, 53
 - fonctions- ζ , 85
 - formule d'Ihara, 86
 - formule de Bartholdi, 85
 - formule de Bass, 86
 - graphe de Ramanujan, 86
 - graphe métrique, 53
 - intégrale de chemin, 73
 - laplacien dans un graphe métrique, 54
 - matrice \mathcal{S} , 58
 - matrice d'adjacence, 53
 - matrice \mathcal{S} , limite résonante, 59
 - orbite, 53
 - orbite primitive, 53
 - rang, 53
 - scattering de lien, 80
 - scattering de vertex, 55, 80
- Graphène, 195
 - hamiltonien, 195
- Green (fonction de), 28, 63, 105
 - calcul perturbatif, 106
 - corrélations entre fonctions de Green, 111
 - fonction de Green moyenne, 108
 - relation de Fisher & Lee, 28

- Halperin (singularité de), 202
- Hypothèse ergodique, 197

- Ihara (formule d'), 86
- Intégrale de chemin, 73, 92
- Inverse participation ratio (IPR), 175
- Ioffe-Regel (critère de), 104, 170

- Kappus-Wegner (anomalie de), 191
- Kesten-McKay (loi de), 99
- Krein Friedel (relation de), 27, 212

- L (fonctions), 78
- Landauer (formule de), 12, 13, 15, 19

- Libre parcours moyen élastique, 108
 Lifshits (singularité de), 200, 201
 Lifshits argument, 201
 Liquide de Fermi (validité), 156
 Localisation
 critères de localisation, 172, 216
 localisation faible, 9, 44, 66, 103, 104, 111, 112, 114, 115, 184, 185
 localisation faible dans un fil, 116
 localisation faible dans un plan, 116
 localisation forte, 169, 171
 localisation forte : expériences, 198
 localisation forte en $d = 1$, 199, 207, 216
 longueur de localisation, 186, 199, 207, 216
 magnétoconductance anormale, 116
 scaling theory, 184
 Log-normale (distribution), 211
 Longueur de cohérence de phase, 104, 115, 116, 122
 Longueur thermique L_T , 137
 Luttinger (liquide de), 132
 Lyapunov (exposant de)
 définition, 207, 209
 formule perturbative, 199
 modèle d'impuretés, 201
 modèle gaussien, 200
 modèle SUSY désordonné, 203
 Lyapunov exponent, 208

 Magnétoconductance anormale, 116
 Many-body localisation, 172
 Matrice \mathcal{S} , 12, 27
 d'un QPC, 47
 pour un canal de diffusion, 210
 relation avec la fonction de Green, 28
 Matrice \mathcal{S} d'un graphe métrique, 58
 Matrice \mathcal{S} de vertex, 55, 56
 Matrices aléatoires, 34, 39, 43, 44, 104, 177, 180, 197, 219
 Maxwell (résistance de), 16
 Mésoscopique (physique), 9
 Métal/isolant (transition), 184
 Modèle σ non linéaire (NL σ M), 125, 180, 184
 Modèle universel d'interaction dans les QD, 34
 Mott (conductivité de), 204
 Mouvement brownien
 enroulements, 87
 fonctionnelles dans un graphe, 86
 loi d'arcsinus, 87
 temps d'occupation, 87
 temps local, 87
 Multifractal spectrum, 174
 Noise power, 23
 Normalisation des états stationnaires de diffusion, 12
 One-dimensional interacting fermions with disorder, 132, 182
 Oscillations AAS, 128, 151
 Oscillations AB, 128, 151
 Oseledec (théorème), 186
 Percolation, 179, 249
 Phase slip, 32, 52
 Pôle de diffusion, 113
 Pöschl-Teller (potentiel de), 46
 Potentiels caractéristiques, 35
 QCD, 192
 QD (modèle universel d'interaction), 34
 QPC (constriction quantique), 46

 Ramanujan (graphe de), 86
 Régularisation ζ , 87
 Relation de Fisher & Lee, 28, 111
 Relation de Krein Friedel, 27, 60, 212
 Répliques (méthode des), 105, 184
 Réseau de Bethe, 99
 Résistance à 4 terminaux, 17
 Résistance de contact, 15, 17
 Résistance de Maxwell, 16
 Résistance de Sharvin, 15, 17
 Riccati (distribution de la variable de), 206
 Riccati (variable de), 206
 Rice (formule de), 207
 Riemann (hypothèse de), 79, 86
 Roth (formule de trace de), 83
 RPA (approximation), 35, 153

 Scaling theory of localisation, 184
 (1d), 20, 185
 Sharvin (résistance de), 15, 17
 σ (modèle), 125, 180, 184
 Sinai (problème de), 204, 218
 Single Parameter Scaling, 184, 186, 210, 212, 227
 Singularité de Dyson de la DoS, 203
 Singularité de Halperin de la DoS, 202
 Singularité de Lifshits de la DoS, 200, 201
 Spectre absolute continuous, 172
 Spectre pure point, 172

- Stratonovich (sens de), 209
- Supersymétrie
 - hamiltonien supersymétrique, 46, 202, 206, 215, 217
 - méthode supersymétrique, 105, 184
- Temps de libre parcours moyen élastique, 108
- Temps de transport, 110
- Temps de vie, 110
- Temps de Wigner, 41, 44, 204
 - distribution en $d = 1$, 212
 - matrice, 28, 40
- Théorème d'Oseledec, 186
- Théorème de Feynman-Hellmann, 32
- Théorème fluctuation-dissipation, 141, 142, 154
- Tracy-Widom (distribution de), 197, 215
- Transition d'Anderson, 184
- Transition de phase quantique, 187
- Universal conductance fluctuations (UCF), 122, 129, 148, 229
- Variable Range Hopping, 183
- Ward (identités de), 125
- Wigner (cristal de), 182
- Wigner (temps de), 28, 40, 41, 44, 204, 212
- Wigner-Smith (matrice de), 40
- ζ (fonctions), 78
- ζ (régularisation), 87

Résumé

Ce mémoire d'Habilitation à Diriger des Recherches décrit mon activité de recherche entre 2000 et 2010. Après un premier chapitre d'introduction faisant une revue d'une sélection de problèmes en physique mésoscopique, deux chapitres décrivent successivement les propriétés de scattering dans les graphes métriques (graphes quantiques) puis l'étude des déterminants fonctionnels dans ces géométries. Le déterminant fonctionnel de l'opérateur de Schrödinger dans un graphe métrique peut se mettre sous la forme du déterminant d'une matrice de taille finie couplant les liens orientés, ou, dans le cas où il est possible de définir des variables de vertex, du déterminant d'une matrice couplant les vertex.

Ces résultats généraux sur les déterminants fonctionnels sont appliqués dans les chapitres suivants à l'étude du transport quantique dans les réseaux de fils métalliques faiblement désordonnés (correction de localisation faible, correction Altshuler-Aronov due aux interactions, fluctuations de conductances). On insiste en particulier sur les propriétés de cohérence de phase dans les réseaux, et le rôle particulier de l'interaction électronique comme mécanisme de décohérence dominant à basse température en basse dimension. Nous montrons notamment que celui-ci doit être décrit par un formalisme de fonctionnelle d'influence dans ces géométries complexes. Cette étude est motivée par des expériences (équipe d'Hélène Bouchiat à Orsay et équipe de Christopher Bäuerle et Laurent Saminadayar à Grenoble).

Le dernier chapitre du mémoire concerne les propriétés des systèmes strictement unidimensionnels désordonnés. Après une revue générale sur la physique de la localisation d'Anderson, le chapitre présente des travaux sur des propriétés de différents modèles désordonnés 1D. De nouveaux modèles sont étudiés : supersymétrie brisée par le désordre, modèles d'impuretés ponctuelles généralisées, potentiels avec fluctuations larges ($\langle V^2 \rangle = \infty$)... De nouvelles questions sont analysées : effet des bords sur la densité d'état moyenne, statistique ordonnée des valeurs propres,...

Mots clefs : Désordre, localisation faible, interactions électroniques, décohérence, physique mésoscopique, transport quantique, théorie de la diffusion, graphes métriques, déterminants fonctionnels, processus stochastiques, localisation forte

Abstract

The manuscript describes my research activity between 2000 and 2010. The first chapter proposes a review of a selection of problems of mesoscopic physics. The two following chapters present a scattering theory for metric graphs (quantum graphs), and a detailed study of functional determinants in such systems. The functional determinant of the Schrödinger operator in a metric graph may be put under the form of the determinant of a finite size matrix coupling oriented bonds, or, whenever it is possible to introduce vertex variables, it can be expressed as the determinant of a matrix coupling vertices.

These general results are applied to the study of quantum transport in networks of weakly disordered metallic wires (weak localisation correction, Altshuler-Aronov correction arising from electronic interactions, conductance fluctuations). A particular emphasis is put on coherent properties in networks, and the specific role of electronic interaction as the dominant decoherence mechanism at low temperature in low dimension. We show that this latter must be described within an influence functional formalism in these complex geometries. This study has been motivated by experiments performed in two groups : Hélène Bouchiat's group in Orsay and Christopher Bäuerle and Laurent Saminadayar's group in Grenoble.

The last chapter is devoted to the study of localisation in the strictly one-dimensional situation. After a general review of several aspects of the localisation theory, the chapter reviews several results. New models are considered : supersymmetry broken by the disorder, random generalised pointlike impurities, potentials with large fluctuations ($\langle V^2 \rangle = \infty$)... New questions are analysed : effect of the boundary conditions on the averaged density of states, order spectral statistics,...

Keywords : Disorder, weak localisation, electronic interaction, decoherence, mesoscopic physics, quantum transport, scattering theory, metric graphs, functional determinants, stochastic processes, strong localisation