



**HAL**  
open science

# Microstructure et comportement mécanique des milieux granulaires polydispersés fragmentables

Duc-Hanh Nguyen

► **To cite this version:**

Duc-Hanh Nguyen. Microstructure et comportement mécanique des milieux granulaires polydispersés fragmentables. Mécanique [physics]. Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, 2014. Français. NNT : 2014MON20116 . tel-01094275v3

**HAL Id: tel-01094275**

**<https://theses.hal.science/tel-01094275v3>**

Submitted on 10 Jul 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

Pour obtenir le grade de  
**Docteur**

Délivré par **UNIVERSITE MONTPELLIER 2**

Préparée au sein de l'école doctorale  
**INFORMATION, STRUCTURE ET SYSTÈMES**  
Et de l'unité de recherche  
**LABORATOIRE MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL**  
Spécialité : **MÉCANIQUE ET GÉNIE CIVIL**

Présentée par **DUC HANH NGUYEN**

**MICROSTRUCTURE ET COMPORTEMENT  
MÉCANIQUE DES MILIEUX GRANULAIRES  
POLYDISPERSÉS FRAGMENTABLES**

Soutenue le 28/11/2014 devant le jury composé de

Djimédo KONDO, Professeur, UPMC	Examineur
Jean-Noël ROUX, Chercheur, IFSTTAR	Rapporteur
Gaël COMBE, Professeur, Université Grenoble	Rapporteur
Serge Mora, Professeur, UM2	Examineur
Alfredo TABOADA, Maître de Conférences, UM2	Examineur
Farhang RADJAÏ, Directeur de Recherche, CNRS	Directeur de thèse
Émilien AZÉMA, Maître de Conférences, UM2	Encadrant
Philippe SORNAY, Expert senior, CEA-Cadarache	Encadrant
Jean-Yves DELENNE, Directeur de Recherche, INRA	Invité



## *Remerciements*

Ce travail de thèse a été réalisé au sein de l'équipe Physique et Mécanique des Matériaux Divisés du Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (LMGC) de Montpellier et au Laboratoire des Combustibles Uranium (LCU) du CEA-Cadarache.

Tout d'abord, du fond de mon cœur, toute ma gratitude s'adresse à mon directeur de thèse, Farhang Radjaï, un grand chercheur qui veut toujours aller au fond du problème. Merci de sa gentillesse, de sa direction, de ses conseils et pour les nombreuses discussions que nous avons eues ensemble (même dans la voiture). Un grand merci à Emilien Azéma qui est toujours disponible et chaleureux. Il m'a beaucoup aidé tout au long de cette thèse par ses corrections, par la bibliographie et par des articles qui m'ont permis de m'introduire aux milieux granulaires et d'avoir des nouvelles idées. Mes profonds et vifs remerciements s'adressent à Philippe Sornay qui m'a donné l'occasion de travailler sur ce sujet de thèse. Il a été très gentil et toujours disponible pour discuter et répondre rapidement à toutes mes demandes.

Je voudrais remercier Djimédo Kondo qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse, à Jean Noël Roux et Gaël Combe qui ont accepté d'être rapporteur de ma thèse. Je tiens à remercier vivement Serge Mora, Alfredo Taboada et Jean-Yves Delenne qui ont bien voulu faire partie de mon jury de thèse. Je remercie tous les membres du jury pour leurs commentaires, discussions et conseils très constructifs et suggérer des nouvelles perspectives à ces travaux de cette thèse.

Je remercie les membres du LMGc : Reine Cause, Yannick Sussmuth, Frédéric Dubois, Mathieu Renouf,... pour leurs soutiens. Je souhaite également remercier Méryl Brothier, Nicole Buon et Lise Hergon du LCU pour leurs encouragements. J'aimerais remercier tous mes amis au LMGc : Patrick, Nicolas, Lhassan, Thanh Hai, Baptiste, Kajetan, Emna,... pour l'ambiance de travail et pour leurs discussions et conseils. Je souhaite bon courage à mon successeur David Cantor.

Je remercie mes parents pour leur soutien, leurs encouragements et leur confiance tout le long de mes études.

Enfin, je voudrais profiter de cette page pour remercier mon épouse qui a fait tant de sacrifices pour moi avec l'amour et un soutien sans limites. Merci Thanh Thanh.





*à mes parents*

«Công cha như núi thái sơn  
Nghĩa mẹ như nước trong nguồn chảy ra»

*à mon épouse Thanh Thanh et à mes fils  
Thái An – Tường Văn*

«Của chồng công vợ»



# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>13</b>
<b>I. Contexte scientifique et applicatif</b>	<b>17</b>
<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1. Procédé industriel</b>	<b>21</b>
1.1. Quelques caractéristiques des poudres d'UO <sub>2</sub>	22
1.2. Fabrication du combustible nucléaire	22
1.2.1. Remplissage des matrices de presses	23
1.2.2. Compaction	23
1.2.3. Décharge et éjection du comprimé cru	24
<b>2. Polydispersité</b>	<b>25</b>
2.1. Effet de la forme des particules sur la microstructure et la tenue mécanique	26
2.2. Effet de la distribution granulométrique	32
<b>3. Fragmentation des particules</b>	<b>35</b>
3.1. Mécanique de la rupture	36
3.2. Fragmentation d'une seule particule	37
3.3. Effet de la pression de confinement	39
3.4. Fragmentation d'un assemblage de particules	40
<b>4. Méthodes numériques discrètes</b>	<b>45</b>
4.1. DEM	46
4.2. Dynamique des contacts	47

4.3. Modélisation numérique de la fragmentation des particules . . . . .	49
<b>Conclusion</b>	<b>53</b>
<b>II. Matériaux granulaires polydisperses en taille et forme</b>	<b>55</b>
<b>Introduction</b>	<b>57</b>
<b>5. Forme vs taille pour l'état d'équilibre statique</b>	<b>59</b>
5.1. Procédures numériques . . . . .	60
5.1.1. Paramètres de taille et de forme . . . . .	60
5.1.2. Génération des assemblages de particules . . . . .	61
5.2. Compacité et distributions radiales . . . . .	62
5.2.1. Compacité . . . . .	62
5.2.2. Distribution radiale . . . . .	66
5.3. Réseaux de contacts et de forces . . . . .	68
5.3.1. Connectivité des particules . . . . .	70
5.3.2. Clusters de particules liés par des contacts coté/coté . . . . .	73
5.3.3. Distribution des efforts . . . . .	77
<b>6. Rhéologie quasi-statique</b>	<b>83</b>
6.1. Procédure numérique . . . . .	84
6.2. Comportement macroscopique . . . . .	84
6.2.1. Variable de contrainte et de déformation . . . . .	84
6.2.2. Résistance au cisaillement et compacité . . . . .	86
6.3. Analyse de la microstructure dans l'état critique . . . . .	86
6.3.1. Topologie du réseau de contacts . . . . .	87
6.3.2. Chaines de force et mobilisation du frottement . . . . .	93
6.3.3. Anisotropies du réseau de contacts . . . . .	98
<b>Conclusions</b>	<b>103</b>
<b>III. Fragmentation</b>	<b>105</b>
<b>Introduction</b>	<b>107</b>
<b>7. Modèle de cellules liées (BCM)</b>	<b>109</b>
7.1. Principe du modèle et mise en oeuvre . . . . .	110
7.2. Essai de compression uniaxiale (essai brésilien) . . . . .	111
7.2.1. Description et conditions aux limites . . . . .	111
7.2.2. Caractéristiques de la rupture . . . . .	112
7.3. Etude paramétrique . . . . .	115

---

7.3.1. Variabilité de la résistance . . . . .	115
7.3.2. Effet du maillage . . . . .	117
<b>8. Compression uniaxiale et processus de fragmentation</b>	<b>121</b>
8.1. Introduction . . . . .	122
8.2. Procédés numériques . . . . .	122
8.2.1. Formes et tailles des particules . . . . .	122
8.2.2. Les échantillons numériques . . . . .	123
8.3. Compaction . . . . .	123
8.3.1. Relation contrainte-déformation . . . . .	124
8.3.2. Endommagement des particules . . . . .	128
8.4. Fragmentation des particules . . . . .	133
8.5. Distributions des tailles des particules . . . . .	136
8.6. Evolution des formes des particules . . . . .	140
<b>9. Rhéologie des matériaux granulaires composés de particules fragmen- tables</b>	<b>143</b>
9.1. Introduction . . . . .	144
9.2. Procédés numériques . . . . .	144
9.3. Comportement macroscopique . . . . .	145
9.4. Analyse micromécanique . . . . .	147
9.4.1. Réseau des contacts . . . . .	148
9.4.2. Réseau des forces . . . . .	151
9.4.3. Anisotropies des contacts et des forces . . . . .	155
9.5. Evolution des tailles et des formes des particules . . . . .	157
<b>Conclusions</b>	<b>163</b>
<b>Conclusion générale</b>	<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>170</b>

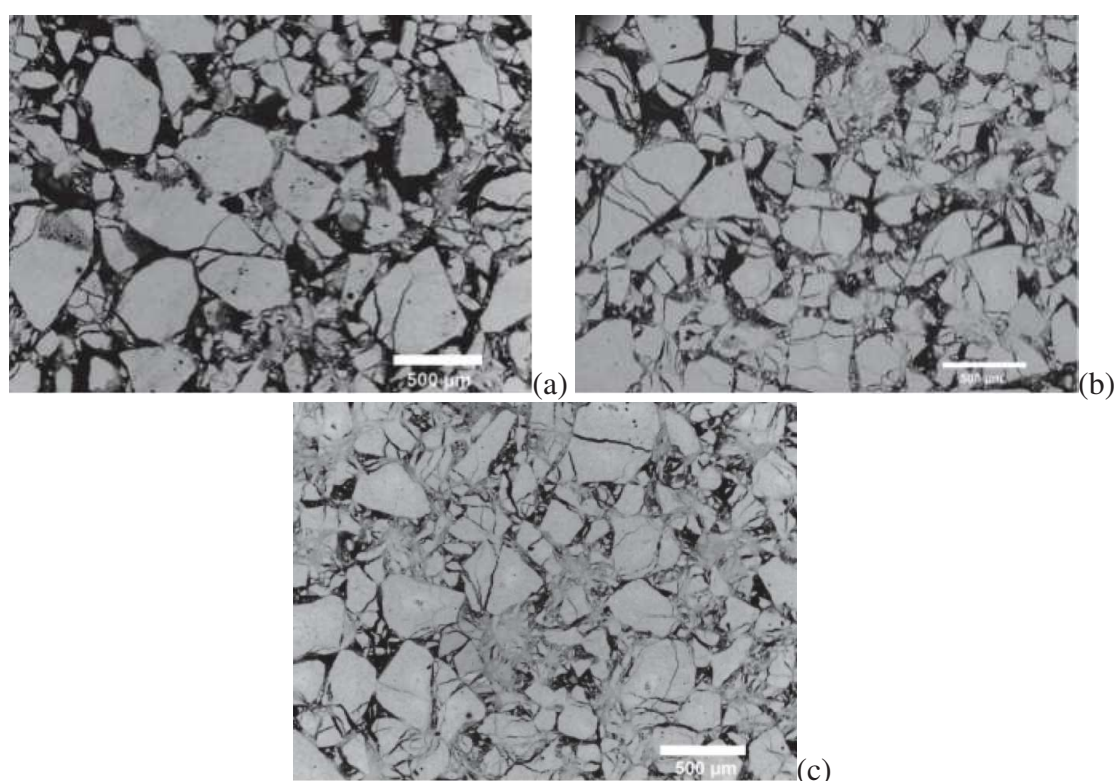


# **Introduction générale**



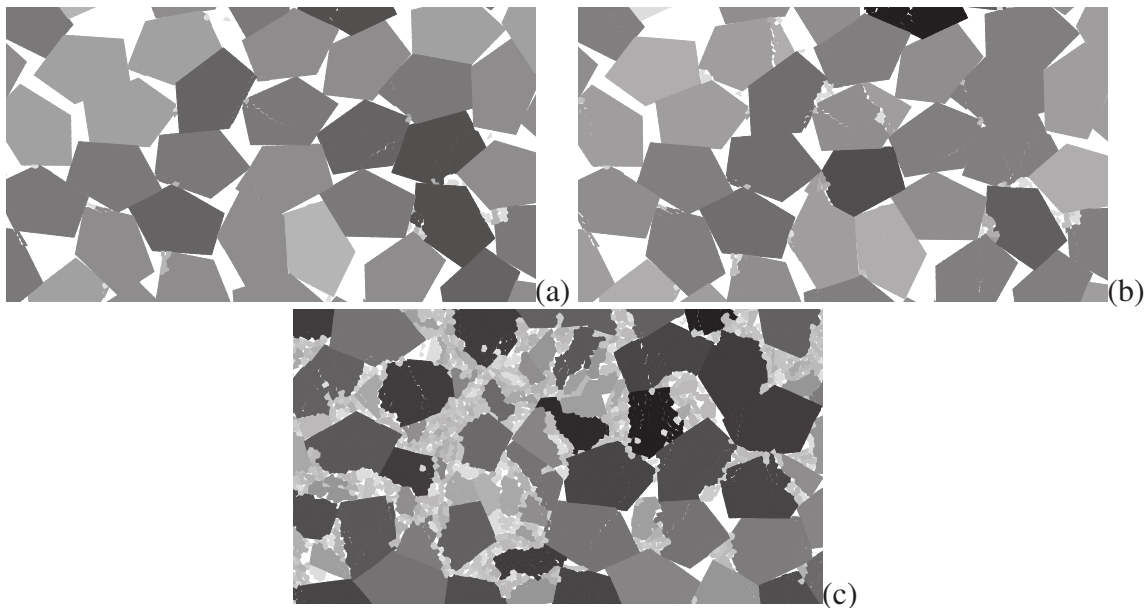


Le procédé de métallurgie des poudres est mis en oeuvre pour obtenir des objets solides à partir de matériaux qui présentent une température de fusion élevée ou pour éviter les étapes de fusion/solidification. Ce procédé consiste à compacter des poudres et à appliquer un traitement thermique, appelé frittage, qui conduit à la formation d'un solide continu. Ainsi des objets directement à la cote et/ou de masse maîtrisée peuvent être obtenus. La maîtrise des dimensions et de la forme impose celle de l'empilement granulaire déposé dans le moule de presse pour obtenir une distribution homogène en tout point. Par ailleurs, le remplissage des moules de presse étant réalisé par écoulement gravitaire, sans pesée préalable du milieu granulaire, la masse du compact est fonction du volume du moule et également de l'empilement granulaire obtenu à l'issue du remplissage. Ainsi, la maîtrise de la masse et de la quantité de matière en tout point impose un écoulement du milieu granulaire maîtrisé lors du remplissage et un empilement granulaire du lit de poudre déposé dans le moule reproductible globalement et localement.



**FIGURE 0.1.** – Sections céramographiques des compacts de granules obtenues à : a) 5 MPa, b) 20 MPa et c) 60 MPa [65].

Après remplissage, le lit de particules est compacté pour former une ébauche crue capable d'être manipulée sans se dégrader. Sous l'effet de la contrainte de mise en forme, l'augmentation de la compacité est consécutive à des réarrangements à l'échelle locale, à des fragmentations et, pour les matériaux ductiles, à des déformations des particules ; voir figure 0.1. La microstructure obtenue, qui est fonction de ces différents mécanismes, va conduire à une tenue mécanique des compacts plus ou moins importante. De plus, suivant la nature des particules mises en oeuvre, la



**FIGURE 0.2.** – Trois clichés de la microstructure d'un échantillon granulaire simulé à trois niveaux de contrainte lors d'une compression uniaxiale :  $\sigma_a = \sigma_c$  (a),  $\sigma_a = 2\sigma_c$  (b) et  $\sigma_a = 10\sigma_c$  (c), où  $\sigma_c$  est la cohésion interne des particules. Les niveaux de gris sont proportionnels à la contrainte moyenne sur chaque particule.

structure interne des frittés conservera plus ou moins l'image de l'empilement granulaire obtenu après remplissage.

Une meilleure compréhension des phénomènes physiques qui régissent l'écoulement et les déformations quasi-statiques des milieux granulaires ainsi que la maturation des méthodes numériques discrètes pour la simulation des procédés durant les deux dernières décennies permettent aujourd'hui d'étudier le procédé de fabrication des compacts à l'échelle de particules en prenant en compte les tailles et les formes des particules et leur fragmentation. Les simulations numériques permettent d'accéder à la texture granulaire et aux forces entre particules et de caractériser l'évolution spatio-temporelle des empilements. Cette thèse s'inscrit dans ce cadre et vise plus particulièrement à étudier

1. l'influence de l'étalement granulométrique et la forme des particules sur la texture et la rhéologie quasi-statique,
2. les déformations et la fragmentation des granulés lors du compactage,
3. l'influence de la fragmentation des particules sur la compaction et la rhéologie quasi-statique.

Pour ces études, nous avons considéré un matériau granulaire composé de particules pentagonales. Ces particules sont caractérisées par deux paramètres : 1) leur degré d'irrégularité, qui constitue un paramètre de *polydispersité de forme*, et 2) l'étalement granulométrique, qui définit la polydispersité de taille. Nous avons réalisé une étude numérique détaillée par la méthode de Dynamique des Contacts (Contact Dynamics) de l'effet combiné de ces deux paramètres

---

sur la microstructure granulaire sans frottement à l'état isotrope et sur l'évolution de la microstructure et la rhéologie quasi-statique dans le cas frottant. Nous avons ensuite développé un modèle numérique pour la fragmentation des particules dans le cadre de la méthode de Dynamique des Contacts. Ce modèle consiste simplement à permettre à chaque particule de se diviser en fragments prédéfinis dans le volume des particules sous la forme de cellules collées. Nous avons étudié les prédictions de ce modèle pour la rupture d'une seule particule et nous l'avons appliqué ensuite pour la simulation de la compression uniaxiale et biaxiale des assemblages de particules fragmentables. A titre d'exemple, la figure 0.2 montre trois clichés d'une portion d'un assemblage simulé soumis à la compression uniaxiale. Comme dans les clichés céramographiques de la figure 0.1, on observe ici un processus de fragmentation très hétérogène dans lequel certaines particules n'ont subi aucun ou peu d'endommagement tandis que d'autres sont complètement pulvérisées.

Ce mémoire est organisé en trois parties. La première partie est une synthèse bibliographique du contexte applicatif et des milieux granulaires avec l'accent sur le rôle des formes et des distributions des tailles des particules. La deuxième partie est consacré à l'étude numérique de l'effet de la forme et des tailles des particules sur la microstructure et la rhéologie des milieux granulaires. La troisième partie décrit le modèle de fragmentation et les études numériques de la compression uniaxiale et puis biaxiale des milieux composés de particules fragmentables. Les principaux résultats de ces travaux et leurs perspectives sont présentés dans la Conclusion Générale.



**Première partie .**  
**Contexte scientifique et applicatif**



# Introduction

Dans cette première partie, nous allons présenter les contextes industriel et scientifique des travaux réalisés au cours de cette thèse. L'objectif de ces travaux est de mieux comprendre les phénomènes physiques qui contribuent à la compaction des poudres lors d'un pressage uniaxial. La connaissance des mécanismes microscopiques de la compaction des poudres peut fournir des éléments clés pour la mise au point de procédés innovants pour un meilleur contrôle de la texture des comprimés.

Un autre aspect de ces travaux de thèse est le développement d'une approche numérique précise et efficace pour la simulation de la compaction des poudres. Même si les méthodes numériques discrètes constituent aujourd'hui un outil bien accepté et utilisé pour l'étude des milieux granulaires, leur application au problème de compaction avec notamment la prise en compte des phénomènes de fragmentation des particules reste encore un champ largement ouvert à la fois sur le plan méthodologique et sur le plan de l'efficacité numérique. La polydispersité de taille et le traitement numérique des particules de forme anguleuse font partie des enjeux inhérents à ce travail.

Nous allons d'abord brièvement présenter dans cette partie le contexte industriel. Ensuite, nous allons discuter de l'importance des distributions de taille et de forme des particules dans les matériaux granulaires. Les processus qui contribuent à la fragmentation des particules et l'effet de celle-ci sur le comportement en compaction et en cisaillement seront plus particulièrement discutés à partir des travaux récents dans ce domaine. Enfin, nous allons brièvement présenter la méthode Contact Dynamics employée dans le cadre de cette thèse.





# CHAPITRE 1

## Procédé industriel

### Sommaire

---

<b>1.1. Quelques caractéristiques des poudres d'UO<sub>2</sub></b> . . . . .	<b>22</b>
<b>1.2. Fabrication du combustible nucléaire</b> . . . . .	<b>22</b>
1.2.1. Remplissage des matrices de presses . . . . .	23
1.2.2. Compaction . . . . .	23
1.2.3. Décharge et éjection du comprimé cru . . . . .	24

---

## 1.1. Quelques caractéristiques des poudres d'UO<sub>2</sub>

Les poudres d'UO<sub>2</sub> sont élaborées selon un procédé en voie humide (précipitation puis calcination) ou en voie sèche (réaction solide-gaz). Comme le montre la figure 1.1, les poudres d'UO<sub>2</sub> provenant de l'un ou l'autre des procédés d'élaboration (P1 ou P2) forment un système granulaire complexe constitué de trois types de particules [56] :

- les cristallites, particules monocristallines de forme ovoïdale, et de taille généralement comprise entre 0,05 et 0,2  $\mu\text{m}$ ,
- les agrégats formés de cristallites reliées entre elles par des liaisons fortes (pont solide). Leur forme est généralement dendritique et elle résulte du pré-frittage se produisant pendant l'élaboration de la poudre. Leur taille fluctue généralement de 0,2  $\mu\text{m}$  à quelques microns,
- les agglomérats constitués d'ensembles d'agrégats de cristallites formés naturellement en fonction des caractéristiques physicochimiques de la poudre (surface spécifique, force de van der Waals, pont liquide, ...). Ces agglomérats peuvent évoluer en fonction de leurs conditions de stockage et de transport (atmosphère, température, humidité, ...). Ce sont des assemblages fragiles d'agrégats, caractérisés par des liaisons faibles. Leur taille généralement variable est comprise entre quelques dizaines et centaines de  $\mu\text{m}$ . Leur forme dépend fortement de la technologie employée dans le procédé d'élaboration. Elle peut être proche de celle d'une sphère pour des particules obtenues par atomisation-séchage ou dans un lit fluidisé. Par contre, elle peut être moins bien définie pour les poudres calcinées directement dans un four tournant.

La taille moyenne des cristallites de la poudre P1 est légèrement plus petite que celle des cristallites de la poudre P2, ce que traduisent également les différences sur les valeurs de surface spécifique. Par ailleurs, on voit qualitativement que les agrégats de la poudre P1 sont de forme plus irrégulière/dendritique que ceux de la poudre P2. La poudre P1 présente des agglomérats sphériques de taille relativement monodisperse alors que ceux de la poudre P2 présentent une distribution granulométrique beaucoup plus étalée et des formes très variées. Les caractéristiques des agglomérats influencent fortement les densités apparente et tassée des poudres.

## 1.2. Fabrication du combustible nucléaire

La fabrication du combustible nucléaire à base de dioxyde d'uranium (UO<sub>2</sub>) repose sur un procédé de métallurgie des poudres. A partir de l'UO<sub>2</sub> sous forme pulvérulente, ce procédé permet d'obtenir un objet solide mis en forme par pressage uniaxial puis consolidé par frittage (c'est-à-dire traité thermiquement en dessous de la température de fusion de la matière constitutive). Il comporte trois grandes étapes :

- la première concerne la préparation des poudres pour qu'elles soient manipulables dans un procédé industriel. En particulier, elles doivent s'écouler facilement dans les trémies d'alimentation pour répondre aux cadences industrielles. Selon les poudres mises en oeuvre, un broyage ou une granulation est réalisée. Très souvent, un produit organique se décomposant au frittage et un agent lubrifiant sont ajoutés. L'ajout de produits orga-

niques permet de maîtriser la densité après frittage des comprimés crus tandis que l'agent lubrifiant facilite entre autres le glissement des particules contre les parois du moule de presse lors de l'étape de mise en forme,

- la deuxième concerne la mise en forme de la poudre sous forme de comprimés. Nous détaillerons plus particulièrement cette étape dans le paragraphe ci-dessous car elle a trait à la problématique de cette thèse.
- la dernière étape consiste à traiter thermiquement les comprimés afin de les consolider et de les densifier. La résorption de la porosité du comprimé dépend entre autres de la texture de l'empilement granulaire résultant de la mise en forme du compact.

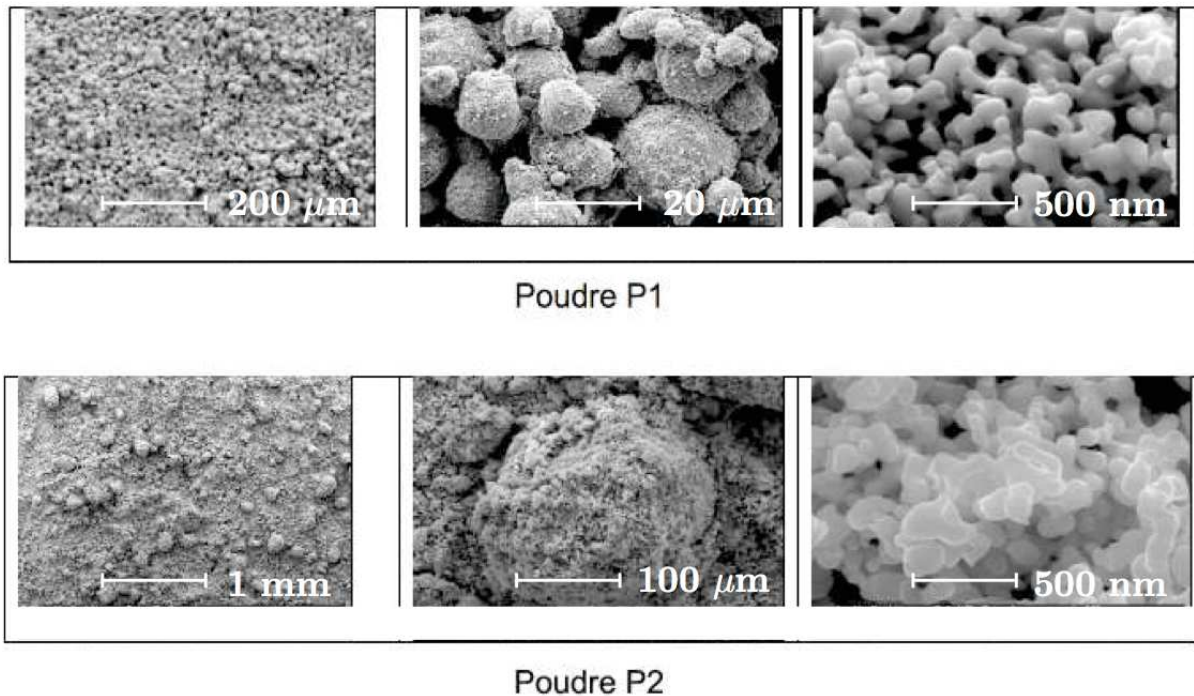
Les poudres d' $\text{UO}_2$  sont mises en forme par pressage uniaxial à température ambiante. Un comprimé vert (cru) est obtenu. Cette phase se décompose en trois étapes : le remplissage des matrices de presse, le pressage uniaxial et l'éjection du comprimé cru facilitée par la réduction de la contrainte appliquée.

### 1.2.1. Remplissage des matrices de presses

Lors de la phase de remplissage, les poudres d' $\text{UO}_2$  sont déversées dans les matrices de presse. Le remplissage des matrices doit éviter la formation de "défauts d'empilement" tels que les voûtes et macro-pores. La phase de remplissage fait intervenir essentiellement les propriétés d'écoulement de la poudre. Ces propriétés de remplissage d'espace sont avant tout contrôlées par la distribution des tailles des particules, mais aussi par la forme des particules et les forces d'adhésion entre les particules.

### 1.2.2. Compaction

Lors du compactage, les agglomérats se déforment et se fragmentent en partie. Les particules solides peuvent également se fragmenter. Toutefois, les liaisons étant des liaisons solides, leur fragmentation demande beaucoup plus d'énergie que la fragmentation des agglomérats. Le compactage des poudres conduit à l'évolution des particules et des porosités qui leur sont associées. Pour les poudres céramiques telles que les poudres d' $\text{UO}_2$ , les mécanismes de densification par déformation plastique des particules peuvent être négligés compte tenu de leur dureté. L'évolution de la porosité des compacts résulte alors essentiellement du réarrangement et de la fragmentation des particules. Les contraintes nominales de mise en forme sont comprises généralement entre 300 et 600 MPa. De nombreux auteurs ont essayé de relier les différentes phases de densification d'un lit de poudre au comportement mécanique des différentes populations de grains (cristallites, agrégats, agglomérats ...) [155, 76]. Le réarrangement et la fragmentation des agglomérats sont prépondérants lors des premiers instants de la compaction. Puis, les agrégats se réarrangent et quelques uns se fragmentent comme en témoignent les faciès de rupture observés au microscope à balayage électronique. Toutefois, s'il demeure difficile de dénombrer exactement le nombre d'agrégats fragmentés. Ils sont peu nombreux pour les poudres mises en oeuvre. Le mécanisme de densification est donc le résultat du réarrangement des agrégats qui dépend fortement de la nature des interactions entre eux, de leur état de surface et de leur morphologie.



**FIGURE 1.1.** – Observations au MEB à plusieurs grossissements de deux exemples de poudres d' $UO_2$  obtenues à l'aide d'un procédé en voie humide (P1) et en voie sèche (P2)

### 1.2.3. Décharge et éjection du comprimé cru

Suite à l'étape de compaction, la contrainte est réduite jusqu'à 10% environ de la contrainte maximale. Dans cette phase, le comprimé restitue une partie de l'énergie élastique emmagasinée lors de la compaction en se déformant dans la direction de compression. La phase d'éjection proprement dite consiste en un accompagnement de l'extraction du comprimé par un déplacement relatif des poinçons et de la matrice. Cette phase est critique dans la mesure où le comprimé doit avoir une cohésion suffisante lui permettant d'accommoder au mieux l'effort de cisaillement induit par l'expansion radiale de la partie du comprimé hors de la matrice par rapport à la partie qui se trouve encore à l'intérieur de la matrice.

Contrairement à la plupart des industries qui ajoutent des liants pour obtenir plus aisément des ébauches crues solides et sans défauts, la tenue mécanique des comprimés crus de poudres d' $UO_2$  repose entièrement sur les caractéristiques des poudres et du cycle de mise en forme. En résumé, si l'on prend les précautions nécessaires lors du remplissage pour éviter la formation de voûtes et/ou de zones à densité apparente différente, la tenue mécanique des comprimés crus est très majoritairement due à l'empilement des agrégats et aux forces qui agissent entre eux. Autrement dit, les deux principales caractéristiques macroscopiques des comprimés crus qui sont la densité et la tenue mécanique, dépendent presque exclusivement des caractéristiques des agrégats et des forces qui les lient.

## CHAPITRE 2

# Polydispersité

### Sommaire

---

- 2.1. Effet de la forme des particules sur la microstructure et la tenue mécanique 26
  - 2.2. Effet de la distribution granulométrique . . . . . 32
-

## 2.1. Effet de la forme des particules sur la microstructure et la tenue mécanique

La forme des particules est une caractéristique intrinsèque qui joue un rôle important dans la microstructure et le comportement mécanique des milieux granulaires. Plusieurs études de l'effet de forme ont été récemment réalisées pour une forme angulaire [140, 135, 142, 8, 14, 93], des particules allongées [44, 45, 46, 10, 9, 1, 77, 124, 158, 162], des plaquettes [25], des formes complexes [163, 103] et des formes non-convexes [125, 11], ainsi que pour des "superboules" [73].

Les formes de grains sont très diverses et ont fait l'objet de nombreuses classifications dont on ne retiendra ici les aspects les plus essentiels. Plusieurs auteurs ont utilisé le rapport d'aspect  $w$  comme paramètre de forme pour étudier l'effet de l'élongation [1, 77, 124, 158, 162, 163, 92]. Le rapport d'aspect  $w$  d'une particule est définie comme le rapport entre sa longueur et sa largeur. La figure 2.1 présente un exemple d'échantillons de spherocylindres monodisperses avec trois valeurs différentes du rapport d'aspect.

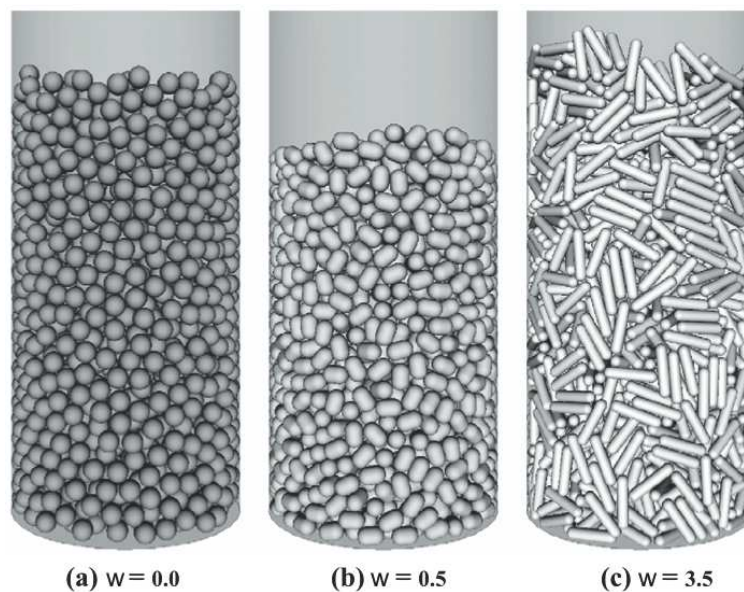


FIGURE 2.1. – Exemple d'empilements de spherocylindres monodisperses avec valeurs différentes du rapport d'aspect  $w$  [1].

Plusieurs études montrent que la compacité  $\rho$  d'un assemblage granulaire augmente initialement avec le rapport d'aspect, atteint une valeur maximale pour  $w \simeq 0,6$  puis elle diminue vers des valeurs nettement plus faibles lorsque  $w$  continue à augmenter ; voir Fig. 2.2. Même si la compacité suit une évolution non-monotone avec l'allongement, ces mêmes études montrent que la résistance au cisaillement augmente avec l'allongement, comme on peut le voir sur la Fig. 2.3 [9, 105, 104]. Azéma et al.[9] ont expliqué cette augmentation à partir d'une décomposition additive du tenseur de contrainte. Ils ont montré que la mobilisation progressive de la force de

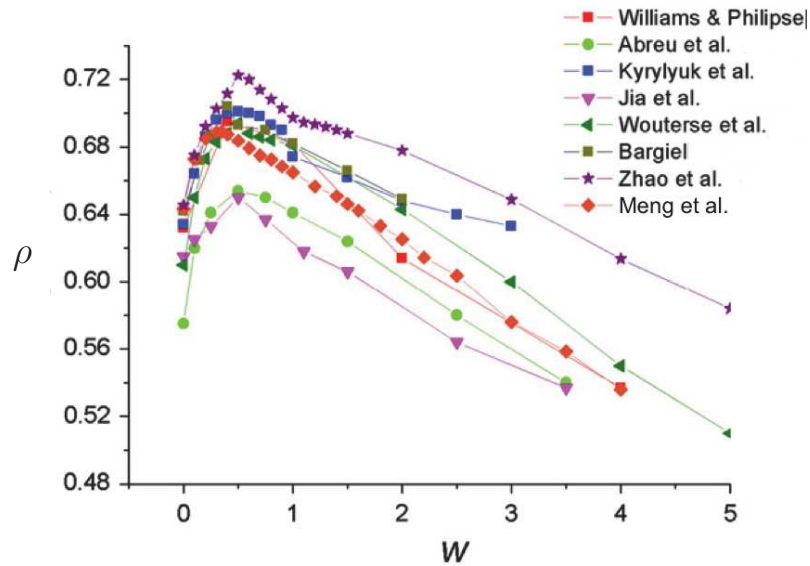


FIGURE 2.2. – Compacité en fonction du rapport d'aspect pour des empilements des spherocylinders [92].

frottement et de son anisotropie sont les principales causes de l'augmentation de la résistance au cisaillement avec le rapport d'aspect.

Plusieurs études ont montré que l'angularité des particules avait une influence significative sur le comportement de matériaux granulaires [93, 142, 8]. Azéma et al. [8] ont étudié l'effet de l'angularité par simulation du cisaillement des particules polygonales avec un nombre croissant de sommet de 3 à 60. L'angularité est définie par l'angle  $\alpha = 2\pi/n_s$ , où  $n_s$  est le nombre de sommets. Ces études montrent que la résistance au cisaillement augmente avec l'angularité jusqu'à une valeur maximale et sature lorsque les particules deviennent très anguleuses (Fig. 2.4). La compacité diminue vers une valeur constante comme on peut voir sur la Fig. 2.5). Ainsi,

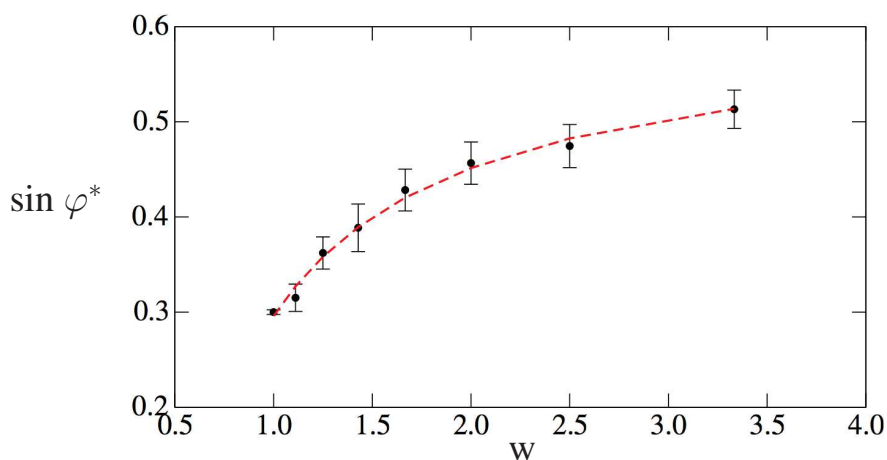


FIGURE 2.3. – Évolution de l'angle de frottement interne en fonction du rapport d'aspect  $w$  [9].



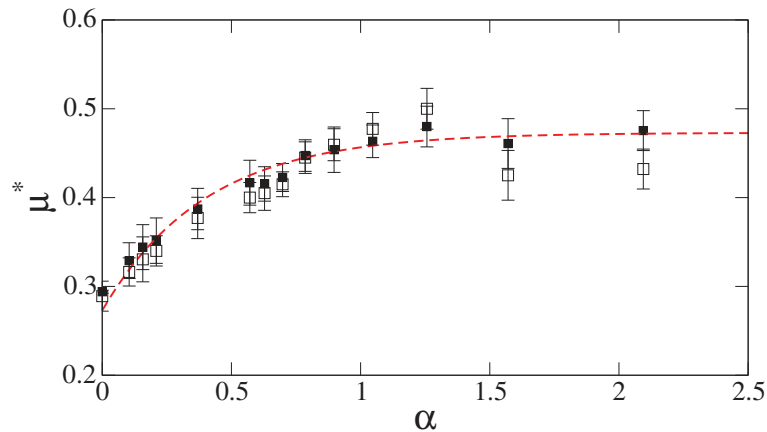


FIGURE 2.4. – Coefficient du frottement interne  $\mu^*$  en fonction de l'angularité  $\alpha$  des particules [8].

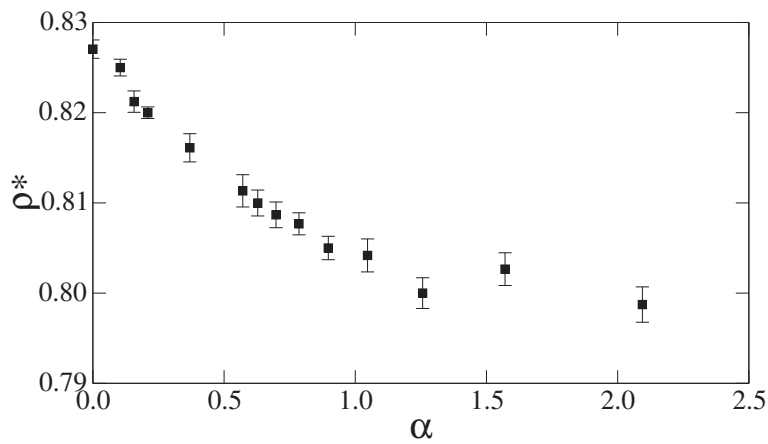


FIGURE 2.5. – Compacité à l'état critique  $\rho^*$  en fonction de l'angularité  $\alpha$  des particules [8].

les empilements de particules angulaires sont plus lâches, mais ont une plus grande résistance au cisaillement. L'augmentation de la résistance au cisaillement à faible angularité est due à une augmentation de l'anisotropie des orientations des contacts et de l'anisotropie des forces normales. La saturation de la résistance au cisaillement pour des angularités supérieures est une conséquence de la décroissance rapide de ces anisotropies compensée par une augmentation de l'anisotropie des forces tangentielles, qui est très liée à la mobilisation des forces de frottement. Cette transition reflète clairement les propriétés géométriques assez particulières de ces formes très angulaires, qui impliquent que la stabilité de l'assemblage repose fortement sur les contacts côté-côté ou face-face et sur la mobilisation des forces de frottement.

Une étude collaborative autour de l'influence de la forme des particules sur la rhéologie des matériaux granulaires a été réalisée au sein du réseau CEGEO (Changement d'Echelle dans les GEOMatériaux) regroupant plusieurs laboratoires (voir le site [granuloscience.com/CEGEO](http://granuloscience.com/CEGEO)). Le paramètre de forme  $\eta = \Delta R/R$  dans cette étude a été défini à partir du cercle circonscrit de rayon  $R$  et du cercle inscrit de rayon  $R - \Delta R$  des particules, comme on peut voir sur la Fig. 2.6. Pour chaque valeur de  $\mu$  plusieurs formes ont été introduites et les propriétés de leurs

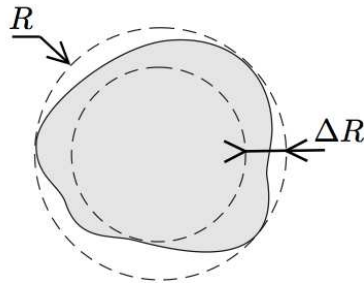


FIGURE 2.6. – Définition générale du paramètre  $\eta$  [31].

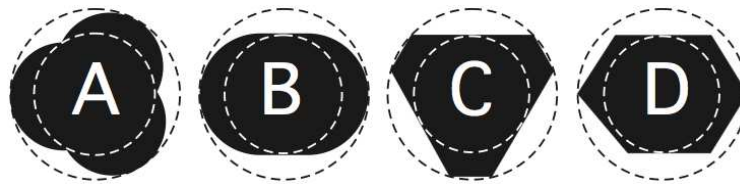


FIGURE 2.7. – Différentes formes de particules simulées par le groupe CEGEO pouvant être caractérisées par le même paramètre  $\eta$

assemblages étudiées. Les différentes formes simulées sont présentées sur la Fig. 2.7. Chaque participant a réalisé une simulation de cisaillement biaxiale avec des disques ( $\eta = 0$ ) et d'autres simulations avec  $\eta$  variant jusqu'à 0,5. La forme A correspond à un agrégat de trois cercles. Cette forme a été étudiée à la fois par la méthode de dynamique des contacts dans le cadre de la thèse de B. Saint-Cyr [126] et par la méthode de dynamique moléculaire par G. Combe et K. Szarf [137] du laboratoire 3S-R de Grenoble.

La forme B est un rectangle à deux bouts arrondis (sphéro-ligne) caractérisé par son élongation qui peut s'exprimer également en fonction du paramètre  $\eta$ . Les simulations avec cette forme ont été effectuées par E. Azéma [9] par la méthode dynamique des contacts. La forme C est un hexagone régulier tronqué avec trois côtés astreints à toucher le cercle inscrit et tous les sommets astreints à rester sur le cercle circonscrit. Il faut remarquer que cette forme n'est pas définie pour toutes les valeurs de  $\eta$ . La valeur la plus petite de  $\eta$  pour laquelle cette forme est définie, est 0,13. Cette forme a été simulée par G. Combe [137] en utilisant la méthode de dynamique moléculaire. La forme D est un hexagone allongé irrégulier avec seulement deux côtés astreints à toucher le cercle inscrit et deux sommets astreints à appartenir au cercle circonscrit. Cette forme a fait l'objet de simulations par la méthode de dynamique des contacts par C. Nouguier [105, 104] du laboratoire LTDS de l'école Centrale de Lyon.

Afin de pouvoir comparer les données issues des simulations, le benchmark définit précisément l'ensemble des paramètres numériques et physiques du problème (granulométrie, coefficient de frottement, coefficient de restitution entre particules, le nombre d'inertie  $I$ , ...). Tous les échantillons ont été préparés par une compression isotrope avec un coefficient de frottement nul entre particules et ensuite soumis à une compression biaxiale. La Fig. 2.8 montre une vue d'une portion de chaque échantillon dans l'état isotrope dense. Les données relatives à la connectivité des particules indiquent que cet état est pratiquement isostatique pour tous les

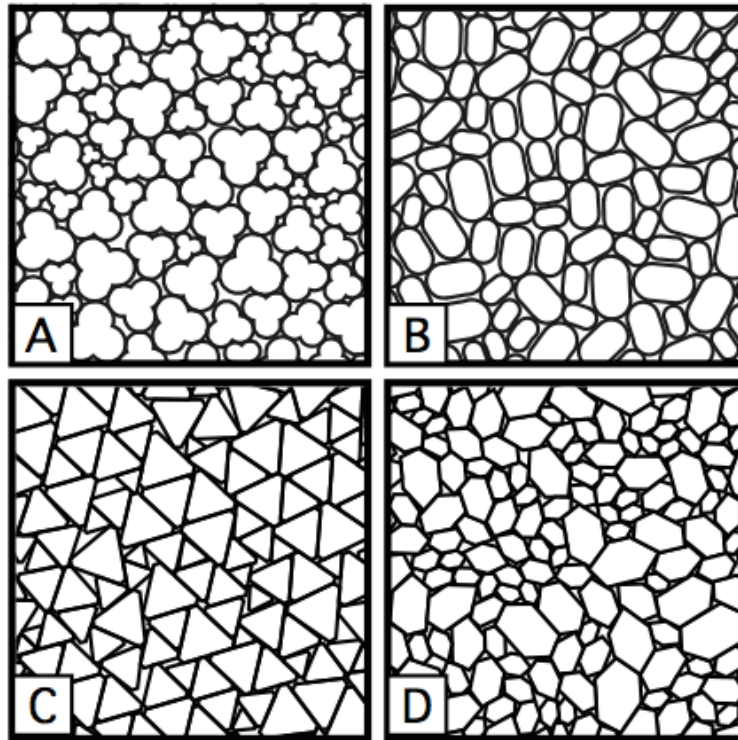


FIGURE 2.8. – Exemples d'assemblages simulés avec quatre formes différentes de particules [31].

échantillons à condition de comptabiliser chaque contact côté-côté dans le cas des formes B, C et D comme deux contacts.

La Fig. 2.9(a) représente la contrainte déviatorique  $q^*/p$  normalisée par la contrainte moyenne dans l'état critique en fonction de  $\eta$ . Il est remarquable que dans la gamme des valeurs étudiées de  $\eta$  (entre 0 et 0,5),  $q^*/p$  augmente linéairement avec  $\eta$  pour toutes les formes. Le taux de variation est le même pour toutes les formes et les données coïncident pour les formes A et B, d'une part, et pour les formes C et D, d'autre part. Il faut noter que le caractère commun des formes C et D est leur angularité et ces formes présentent pour cette raison une résistance au cisaillement plus importante à une valeur donnée de  $\eta$ . Ce résultat suggère que le paramètre  $\eta$  représente un bon candidat comme paramètre de forme à l'ordre le plus bas en lien avec le comportement mécanique des empilements. Des paramètres d'ordre supérieur permettent ensuite de raffiner la description de la forme et du comportement mécanique qui en résulte.

La figure 2.9(b) montre la compacité  $\rho_{iso}$  en fonction de  $\eta$  pour toutes les formes dans l'état isotrope. Pour toutes les formes, on observe la même dépendance non-monotone. C'est un résultat d'autant plus intéressant qu'il souligne que ce comportement non-monotone est une propriété générique des matériaux granulaires et le paramètre  $\eta$  apparaît encore une fois ici comme un paramètre pertinent pour comparer les différentes formes pour leur effet sur la compacité. Ce point et d'autres aspects du comportement ont été étudiés ou sont en cours d'étude.

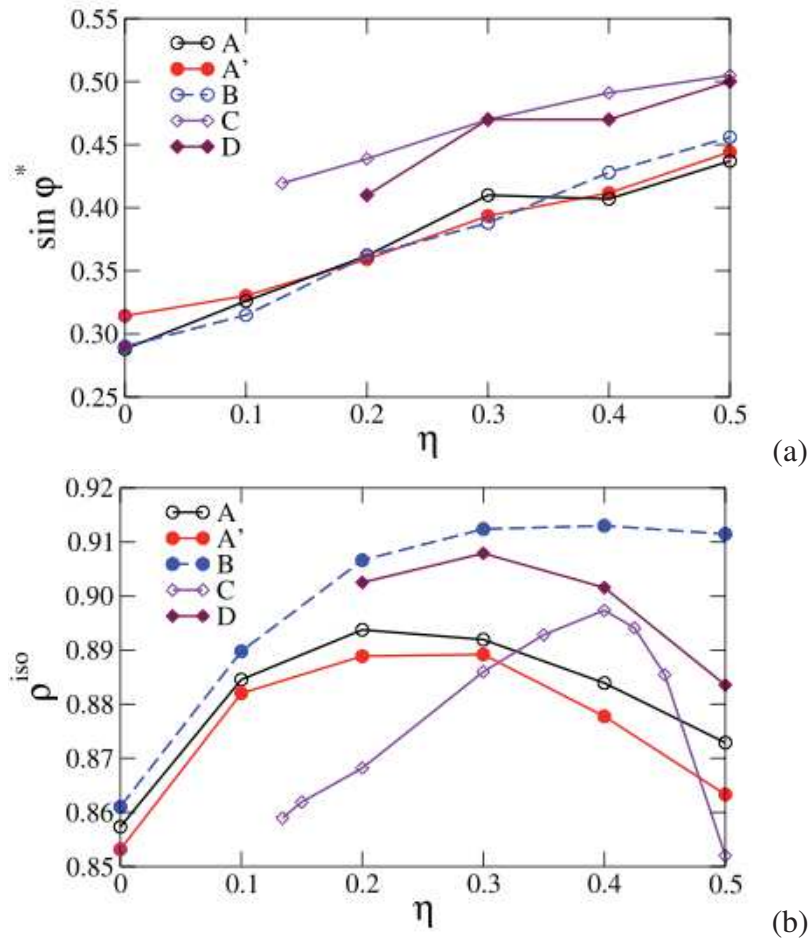


FIGURE 2.9. – Contrainte déviatorique normalisée par la contrainte confinement dans l'état critique (a) et la compacité de l'état isotrope (b) en fonction du paramètre  $\eta$  pour les différents assemblages préparés par compression isotrope [31].

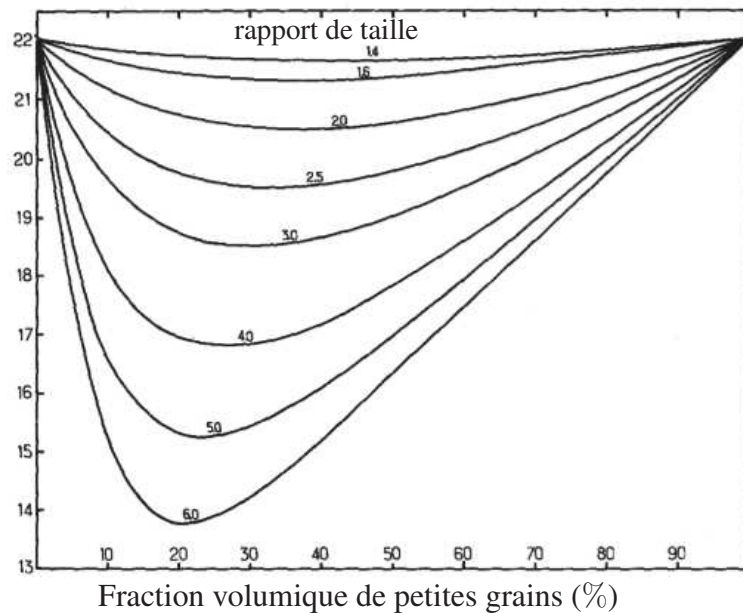


FIGURE 2.10. – Porosité des mélanges binaires de grains sphériques [43].

## 2.2. Effet de la distribution granulométrique

L'effet de la distribution des tailles des particules sur la structure des matériaux granulaires a fait l'objet des études variées en physique et en mécanique [6, 5, 24, 67, 74, 154, 2, 128]. Cependant, la plupart de ces études ont porté principalement sur la compacité des empilements. Par exemple, les systèmes bi-disperses (mélanges de particules de deux tailles différentes), ont été modélisés dans ce cadre [43, 128, 36, 26, 27]. Pour un rapport de taille donné, la compacité augmente initialement en fonction de la proportion de petites particules puis diminue ; voir Fig. 2.10.

Les sols granulaires sont souvent caractérisés par la masse cumulée des particules en fonction de leur taille [94]. Mais en raison du grand nombre de paramètres intervenant dans le comportement du sol (les formes des particules et leur rugosité de surface, le comportement général des grains de sol, ...), il n'existe pas actuellement de modèle général pour la prédiction des propriétés mécaniques d'un sol à partir de la distribution en taille des particules. Il est évident qu'un étalement plus important conduit à une compacité supérieure en permettant aux pores de chaque classe de taille d'être partiellement remplis par les particules d'une classe de taille inférieure. Les assemblages dits Apolloniens sont constitués d'une infinité de classes de taille avec une structure hiérarchique des tailles [67].

Cependant, au-delà de la compacité, les propriétés mécaniques générales tels que les modules d'élasticité, la contrainte de cisaillement et la compressibilité dépendent essentiellement de la texture au sens du réseau de contacts et de forces plutôt que la compacité, bien qu'il y ait des corrélations entre la variation de volume et la contrainte de cisaillement [121, 118, 116, 115]. Récemment, Voivret et al. [151, 152] ont étudié des assemblages très polydisperses de particules

circulaires. Pour un spectre de diamètres variant de  $d_{min}$  à  $d_{max}$ , l'étalement est défini par

$$s = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}}. \quad (2.1)$$

Le cas  $s = 0$  correspond à une distribution monodisperse tandis que  $s = 1$  correspond à une distribution "infiniment" polydisperse. Ces simulations indiquent que, pour tous les étalements, la compacité la plus élevée se produit pour la distribution uniforme par fractions volumiques. Fait intéressant, les mêmes auteurs ont également montré que le nombre de particule flottants, c'est-à-dire des particules qui ne sont pas impliquées dans la transmission des forces, augmente avec l'étalement, et les plus grandes forces sont principalement portées par les grosses particules. Lorsque l'étalement  $s$  augmente, les petites particules insérées entre les plus grosses ont tendance à homogénéiser le système, donc l'anisotropie de l'orientation des contacts  $a_c$  diminue ; voir Fig. 2.11(b). Par contre, les particules de plus grandes tailles s'organisent avec une anisotropie des longueurs  $a_l$  croissante. Pour cette raison, la résistance au cisaillement d'un matériau granulaire non cohésif est pratiquement indépendante de l'étalement  $s$  ; voir Fig. 2.11(a). les mêmes auteurs ont montré que, contrairement au frottement interne du matériau, la cohésion de Coulomb augmente avec  $s$ .

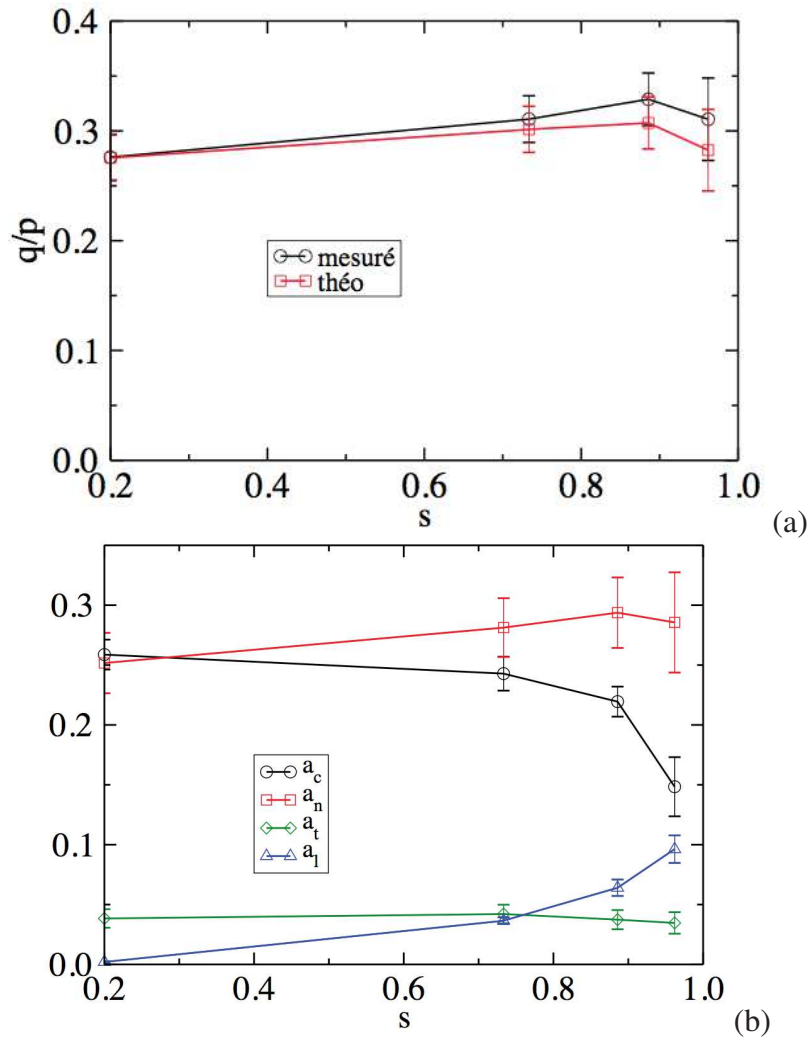


FIGURE 2.11. – En fonction de l'étalement  $s$  (a) déviateur de contrainte normalisé  $q/p$  et (b) valeurs moyennes des anisotropies à l'état critique des orientations des contacts  $a_c$ , des forces normales  $a_n$ , des forces tangentielle  $a_t$  et des longueurs intercentres  $a_l$  [151].

# Fragmentation des particules

## Sommaire

---

3.1. Mécanique de la rupture . . . . .	36
3.2. Fragmentation d'une seule particule . . . . .	37
3.3. Effet de la pression de confinement . . . . .	39
3.4. Fragmentation d'un assemblage de particules . . . . .	40

---



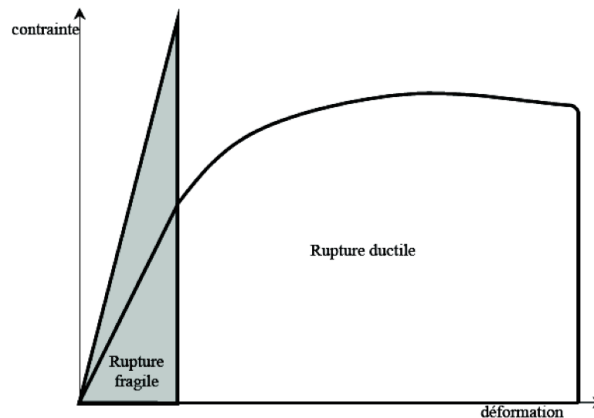


FIGURE 3.1. – Courbe contrainte déformation dans le cas des ruptures fragile et ductile [16].

La fragmentation des particules est un phénomène courant dans les industries qui manipulent les particules et les poudres et pendant la déformation des milieux granulaires naturels tels que les sols. La réduction de la taille des particules est souvent indésirable ou non contrôlée (processus d'attrition). En revanche, la fragmentation des particules dans des conditions contrôlées est utilisée dans les processus de fragmentation tel que le broyage de produits végétaux ou des matières minérales. L'évolution de la distribution des tailles des particules et de la dissipation d'énergie dans ces processus dépend de nombreux facteurs tels que les propriétés particules (forme), la distribution granulométrique initiale, l'histoire de chargement et la mobilité des grains au cours du processus de broyage. Dans cette section, nous allons brièvement présenter certains concepts liés et des études réalisés pour la description de la fragmentation des particules.

### 3.1. Mécanique de la rupture

La rupture d'une particule survient lorsque la cohésion du matériau n'est pas suffisante pour équilibrer les contraintes externes qu'elle subit. La rupture est généralement initiée par la création de discontinuités surfaciques ou volumiques au sein de la particule. Il s'agit de microfissures de l'ordre du micron, qui deviennent des macro-fissures en atteignant des dimensions comparables à celle de la particule.

On distingue la rupture fragile de la rupture ductile. La première est caractérisée par une cassure sans déformation plastique préalable. La déformation avant rupture est donc presque exclusivement élastique. L'énergie de rupture, qui est représentée par l'aire sous la courbe contrainte-déformation (obtenue par essai de traction), est faible comme le montre la figure 3.1. La rupture ductile, au contraire, s'accompagne d'une plastification du matériau. Une fissure est définie comme la surface séparant localement un solide en deux parties. Le champ de déplacement est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité forment les trois modes de rupture [28, 57, 79, 119] schématisés sur la figure 3.2. Le mode I est le mode d'ouverture où les déplacements aux lèvres de la fissure sont

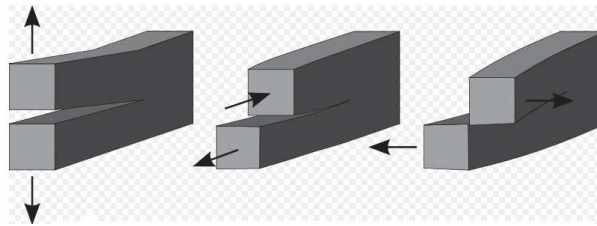


FIGURE 3.2. – Les trois modes de rupture.

perpendiculaires à la direction de propagation. Le mode II est le mode de cisaillement dans le plan où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation. Enfin, le mode III est le mode de cisaillement où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure.

L'objet de la mécanique de la rupture est l'étude des évolutions des surfaces de rupture, c'est-à-dire la propagation de la fissure en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau. Les facteurs qui influencent le comportement à la rupture par fissuration sont de deux natures : mécaniques et matériels. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, de déformations et de contraintes, et les conditions d'environnement telles que la température. Les facteurs matériels concernent les impuretés, la taille de grains, les états de surface, . . .

## 3.2. Fragmentation d'une seule particule

L'essai brésilien consiste à rompre des éprouvettes cylindriques en appliquant une force suivant deux génératrices opposées ; voir Fig. 3.3. Il est largement accepté que la rupture d'une particule dans cet essai est en fait une rupture en traction [91]. En effet, pour deux forces égales et opposées de grandeur  $F$  appliquée diamétralement sur un disque de rayon  $R$ , la contrainte de traction principale moyenne est horizontale et elle est donnée par

$$\sigma_t = \frac{F}{\pi R}. \quad (3.1)$$

En supposant que la rupture du disque est initiée pour cette contrainte,  $\sigma_t$  est proportionnelle à la contrainte compressive appliquée  $\sigma_{zz} = F/(2R) = \pi\sigma_t/2$ . L'essai brésilien peut donc être considéré comme une méthode indirecte pour déterminer la résistance à la traction des matériaux quasi-fragiles.

La figure 3.4 montre la résistance à la traction moyenne en fonction de la taille des particules dans des essais brésiliens réalisés par Lee [82] sur le sable de Leighton Buzzard, le calcaire oolithique et le calcaire carbonifère. Pour des particules d'une taille et d'une minéralogie données, la résistance à la traction n'est pas constante mais a un écart-type autour certaine valeur moyenne. En outre, il trouve que la résistance à la traction moyenne est une fonction de la taille des particules. Ses données sont bien approximées par une loi de puissance :

$$\sigma_t \propto d^{-b} \quad (3.2)$$

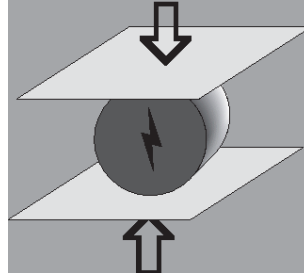


FIGURE 3.3. – Schéma de l'essai brésilien.

où des valeurs typiques de l'exposant  $b$  sont 0.357, 0.343 et 0.420 pour les trois matériaux utilisés. les petites particules sont ainsi plus résistantes que les grandes particules.

Cette propriété s'explique par le fait que les matériaux contiennent des défauts qui, d'après la mécanique de la rupture, constituent des lieux de forte concentration des contraintes et donc des points de départ des fissures. Or, les petites particules ont moins des défauts que les grandes particules, ce qui leur permet d'avoir une résistance moyenne à la rupture plus grande. Cet effet est plus rigoureusement quantifié par McDowell et al. [91] en utilisant la statistique de Weibull, qui est largement accepté pour décrire la résistance à la traction des céramiques fragiles.

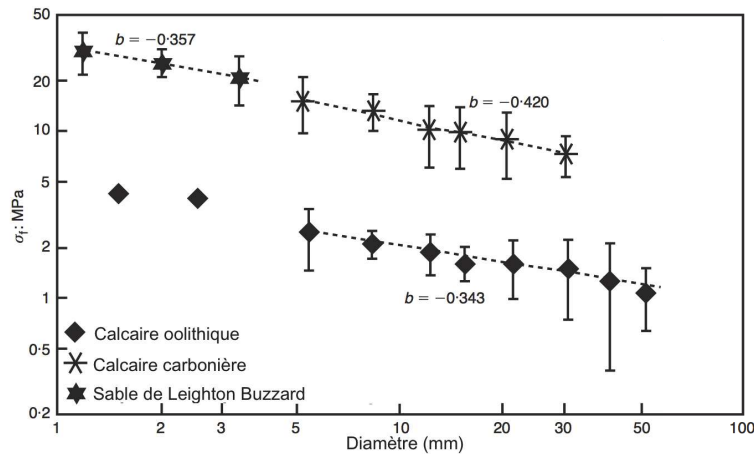


FIGURE 3.4. – Résistance à la traction moyenne en fonction de la taille des particules [91].

La distribution de Weibull décrit la variabilité de la résistance des particules [157]. En général, cette variabilité est décrite par la probabilité de survie  $P_s(V)$  d'une particule de volume  $V$ , sous une contrainte de traction appliquée  $\sigma$ . Elle est donnée par

$$P_s(V) = \exp \left[ - \frac{V}{V_0} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (3.3)$$

où  $V_0$  est un volume de référence de matériau de telle sorte que

$$P_s(V_0) = \exp \left[ - \left( \frac{\sigma}{\sigma_w} \right)^m \right] \quad (3.4)$$

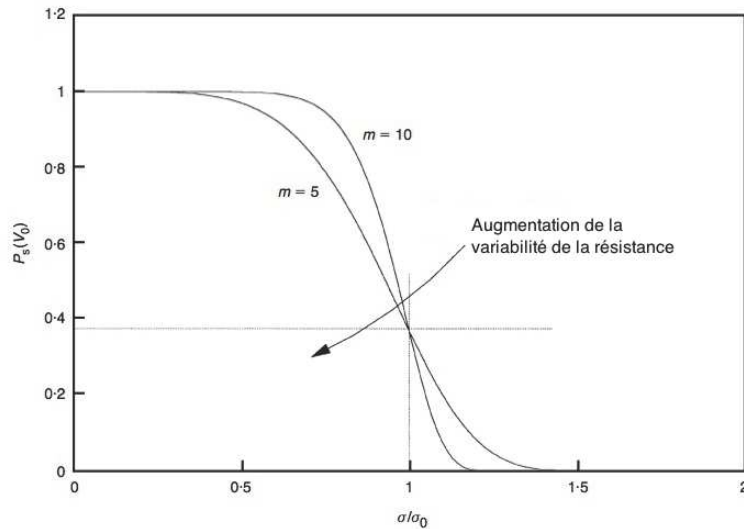


FIGURE 3.5. – Distribution Weibull de la résistance [91].

La figure 3.5 montre un exemple de cette fonction. Le paramètre  $\sigma_w$  est la valeur de la contrainte à la traction de telle sorte que 37% (soit  $100e^{-1}\%$ ) du nombre total de particules testées survivent. L'exposant  $m$  est le module de Weibull ou le paramètre de forme de la distribution. Ce paramètre diminue avec l'augmentation de la variabilité de la résistance à la traction. Pour la craie, la pierre, la poterie et le ciment  $m$  est d'environ 5. Une valeur similaire serait prévue pour les sables carbonatés, qui ont des valeurs similaires de porosité. Les céramiques techniques tels que  $Al_2O_3$  ont des valeurs pour  $m$  de l'ordre de 10, et la variation de leur résistance est beaucoup moins grande. Pour les sols,  $m$  varie entre 5 et 10. Il est facile à montrer que si le nombre de défauts augmente proportionnellement avec le volume des particules, la résistance à la traction moyenne  $\sigma_f$  diminue avec la taille des particules selon la relation  $\sigma_t \propto d^{-3/m}$  qui est équivalente à l'équation (3.2) [91]. Apparemment, les valeurs de  $m$  dans la gamme de 5 – 10 couvrent les données de Lee [82] pour les roches, comme on peut le voir sur la figure 3.4.

### 3.3. Effet de la pression de confinement

L'influence de la pression de confinement a été étudiée par des essais triaxiaux sur des marbres [75, 108], des calcaires [147] et des grès [47, 130, 160]. En général, le seuil de résistance augmente avec la pression de confinement. La figure 3.6 montre les courbes contrainte-déformation en compression triaxiale du marbre de Wombeyan avec l'augmentation de la pression du confinement [107]. On observe une transition du comportement fragile vers un comportement ductile en fonction de la pression de confinement. La figure 3.7 montre des images des échantillons à la fin de l'essai. Le mode de rupture dépend de la pression de confinement. À la pression atmosphérique, l'échantillon est fragmenté par fendage axiale ; on observe une rupture par cisaillement unique pour une contrainte de confinement de 3,5 MPa, une rupture en cisaillement sur plans conjugués à 35 MPa et un comportement ductile à 100MPa.

Hobbs [69] a constaté que l'angle d'inclinaison du plan de cisaillement par rapport à l'axe de l'échantillon augmente avec l'augmentation de la pression de confinement. Schrodt et Holder [133] ont observé une petite augmentation de la limite d'élasticité des marbres avec l'augmentation de la pression de confinement, tandis que Fredrich et al. [58] ont montré que la limite d'élasticité des marbres de Carrare est constante pour les confinements supérieurs à 85 MPa.

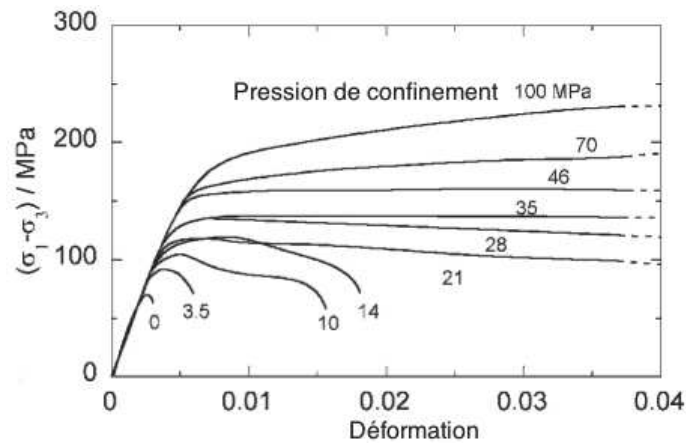


FIGURE 3.6. – Variation de la nature de la courbe contrainte-déformation en compression triaxiale du marbre Wombeyan avec la pression de confinement [108].

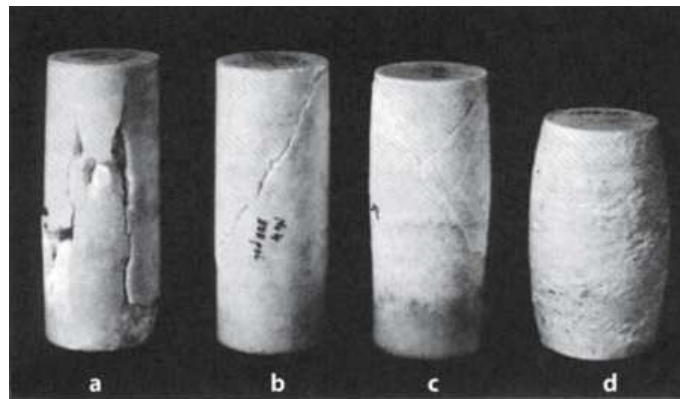


FIGURE 3.7. – Types de fractures en marbre Wombeyan à différentes pressions de confinement : a) rupture par fendage axial à la pression atmosphérique ; b) rupture par cisaillement unique à 3,5 MPa ; c) cisaillements conjugués à 35 MPa ; d) comportement ductile à 100 MPa [108].

### 3.4. Fragmentation d'un assemblage de particules

Il y a eu de nombreuses études théoriques [145, 90, 81, 48, 49, 71] expérimentales [83, 64, 63, 91, 101, 102, 34, 35, 38, 4, 55, 29] et numériques [7, 144, 110, 32, 146, 51] de la

fragmentation des particules lors d'une compression uniaxiale ou au cours de la déformation d'un milieu granulaire. La rupture des particules dépend clairement du réseau de contacts et de la distribution des forces de contact au sein du matériau. De même, la distribution initiale des tailles et des formes des particules, l'indice initial des vides, l'état de contrainte moyen et le chemin de contraintes appliquées joue un rôle important dans le processus de comminution [64, 29].

Les données expérimentales disponibles [64, 63, 101, 102, 34, 35] semblent indiquer que les sols polydispersés ne se fragmentent pas aussi facilement que les sols monodispersés. La Fig. 3.8(a) présente les évolutions de l'indice des vides en fonction de la contrainte verticale dans un essai de compression uniaxiale pour un sable polydispersé et un sable monodispersé [101]. La limite d'élasticité donnée par le point de la courbure maximum (point P) est plus grande (22 MPa) pour le sable polydispersé par rapport au sable monodispersé (14 MPa). Avec l'augmentation de la densité relative, on observe une diminution du nombre de particules fragmentées. La Fig. 3.8(b) montre l'évolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte verticale dans un essai de compression uniaxiale pour des spécimens lâches et denses de sable d'Ottawa. On voit que la valeur de la contrainte à la rupture augmente avec la densité relative [63]. Ces deux observations sont cohérentes avec le fait que la force moyenne de contact diminue avec le nombre de particules entourant chaque particule.

Plusieurs études montrent que la proportion des particules fragmentées est plus faible dans des conditions de chargement isotrope que sous cisaillement [80, 86, 100]. En ce qui concerne les caractéristiques des particules, il est bien établi que, lorsque la taille des particules augmente, le nombre des particules fragmentées augmente, comme également démontré dans les essais brésiliens. Par ailleurs, la fragmentation des particules augmente avec l'angularité des particules, ce qui peut s'expliquer par l'augmentation des contraintes déviatoriques par rapport aux contraintes dans un assemblage de particules sphériques. En effet, les configurations locales des particules sont beaucoup plus variées dans le cas des particules anguleuses et le nombre de coordination peut être plus faible. Le chargement appliqué peut donc conduire à des contraintes en compression mais aussi en cisaillement.

Plusieurs auteurs ont montré que dans le processus de fragmentation, la distribution des tailles des fragments de n'importe quelle distribution initiale tend vers une distribution auto-similaire en loi de puissance [145, 91]. Le nombre de fragments  $N(r)$  qui ont un diamètre (ou autre dimension linéaire) supérieure à  $r$  est donné par

$$N(r) \sim r^{-D} \quad (3.5)$$

où  $D$  est parfois interprété comme la dimension fractale du système [89]. Turcotte [145] a étudié les tailles des fragments pour une large gamme de matériaux brisés et broyés. Il a montré que la distribution des tailles de fragments est une loi de puissance. La Fig. 3.9 présente un exemple de la distribution des tailles des fragments pour le charbon brisé [22], le granit fragmenté dans une explosion nucléaire souterraine [132], et le basalte fragmenté par un l'impact de projectiles [59]. Les études de Turcotte indiquent que l'exposant  $D$  est une mesure de la fragilité des matériaux fragmentés et que les matériaux fragiles ont un exposant plus faible. A ce jour, les mécanismes qui conduisent à une distribution en loi de puissance de tailles ne sont pas totalement expliqués.

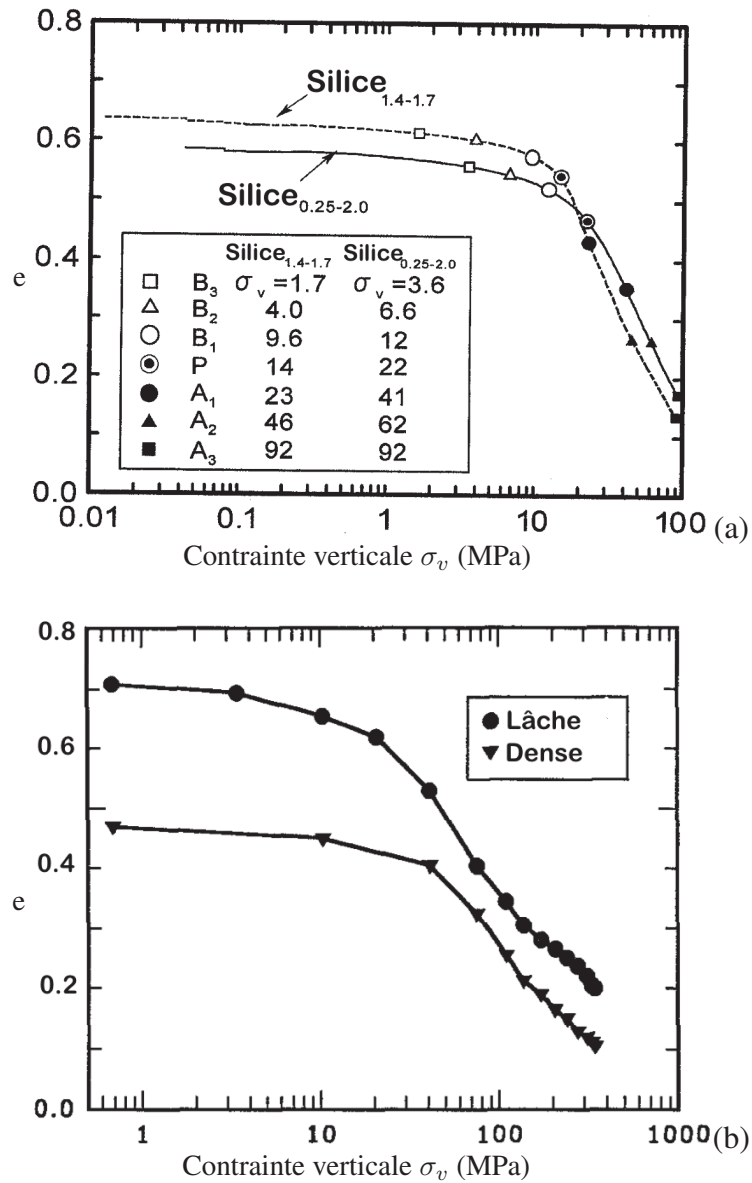
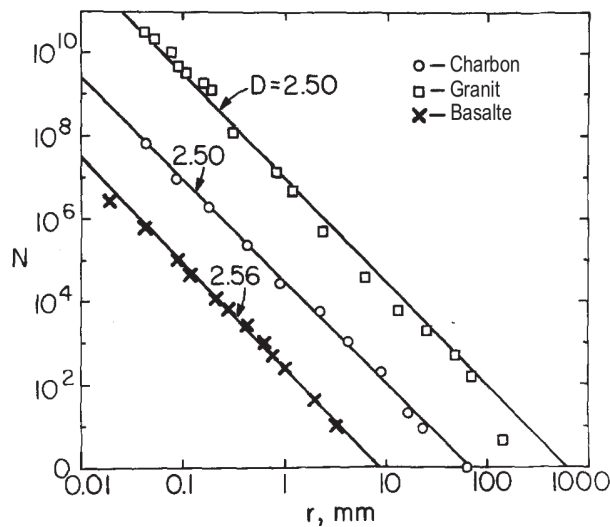


FIGURE 3.8. – Indice des vides  $e$  en fonction de la contrainte verticale  $\sigma_v$  dans l'essai compression uniaxiale pour les sables de grand étalement granulométrique et pour les sables de faible étalement [101] (a) et pour les spécimens lâches et denses de sable d'Ottawa [63] (b).



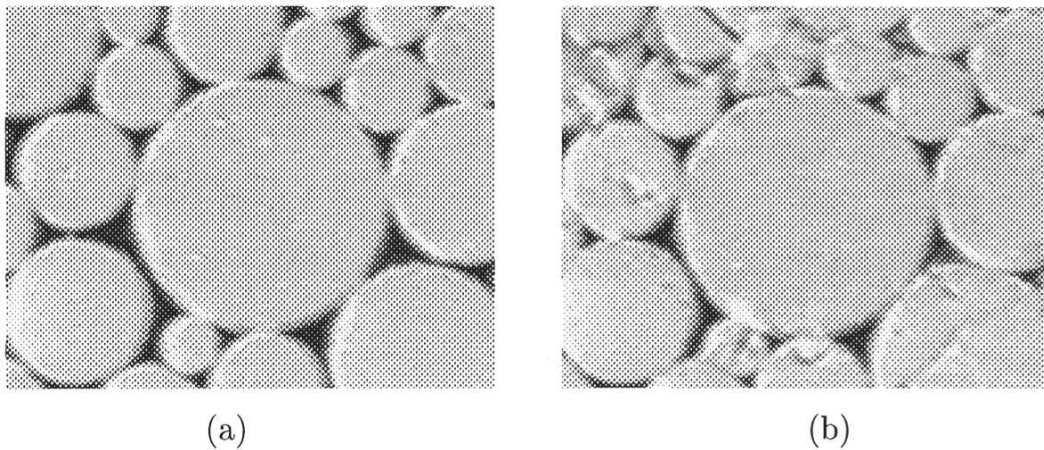
**FIGURE 3.9.** – Relation entre le nombre de fragments  $N$  ayant une dimension linéaire supérieure à  $r$  et  $r$  [145]. Données pour le charbon brisé [22], granit fragmenté dans une explosion nucléaire souterraine [132], et le basalte fragmenté par un impact projectile [59].

Vallejo et al. [148] attribuent cette distribution à la distribution fractale des chaînes de force. Or, les forces de contact ne présentent pas une distribution fractale [113, 114, 88].

Plusieurs études [127, 144, 148] ont également permis de montrer que l'effet prédominant de la fragmentation des particules est d'augmenter la proportion de fragments de tailles de plus en plus petites sans modifier de manière significative la taille des plus grosses particules. Selon Tsoungui [144], la fragmentation commence avec des particules ayant peu de contacts, i.e. les particules sous une compression quasi-uniaxiale. Ce problème se produit généralement sur des particules de petite taille. Pour les grandes particules, la fragmentation est plus difficile en raison de leur grand nombre de contacts, ce qui crée un effet hydrostatique dominant autour de ces particules ; voir Fig. 3.10.

Un certain nombre d'études récentes portent sur la relation entre la fragmentation des particules et le comportement mécanique des sols [4, 32, 30, 78, 38, 55, 86, 91, 100, 138]. Du point de vue de la modélisation constitutive, la question qui se pose est de savoir comment l'évolution de la microstructure sous l'effet de la fragmentation des particules influe sur les courbes déformation-contrainte et sur les grandeurs macroscopiques qui caractérisent un agrégat granulaire [91]. L'effet de la fragmentation intervient dans ce type de modélisation à travers l'énergie dissipée [49], la compacité et la texture, ce qui modifie les déformations et la résistance au cisaillement dans l'état critique [123, 161]. De même, les résultats numériques de Wang et al. [156] montrent que la rupture des particules conduit à la réduction de la dilatation. Par ailleurs, les bandes de cisaillement et de compaction constituent les deux modes de rupture d'un assemblage dense. Les réarrangements des particules induisent la dilatance tandis que la fragmentation favorise la compression. Les importances relatives de ces deux effets déterminent ainsi le mode de rupture.





**FIGURE 3.10.** – *a) L'élargissement d'une portion d'un matériau granulaire présentant l'effet hydrostatique sur une grosse particule entourée de petites particules ; (b) Malgré l'augmentation de la pression externe, la fragmentation des grosses particules devient impossible à cause de cet effet hydrostatique. [144].*

# Méthodes numériques discrètes

## Sommaire

---

4.1. DEM . . . . .	46
4.2. Dynamique des contacts . . . . .	47
4.3. Modélisation numérique de la fragmentation des particules . . . . .	49

---

Dans cette partie, nous allons brièvement présenter la méthode Contact Dynamics (CD) que nous avons utilisée pour les simulations numériques de cette thèse en 2D. Cette méthode fait partie de la classe des méthodes par éléments discrets, appelées Discrete Element Method (DEM), basées sur la résolution des équations du mouvement des particules, décrites comme des corps rigides, en prenant en compte les conditions aux limites et les interactions de contact entre particules.

## 4.1. DEM

La première mise en pratique d'une approche par éléments discrets pour les matériaux granulaires est réalisée par Cundall à la fin des années soixante [40]. Les approches discrètes sont cohérentes avec la nature divisée et le comportement complexe des milieux granulaires. En effet, la complexité du comportement des milieux granulaires résulte de la nature des interactions de contact entre particules. Ces approches constituent un appui non négligeable à l'expérimentation dans le sens où elles permettent d'accéder à des informations difficilement accessibles (force de contacts, orientation des contacts, ...) par expérimentation. Enfin, les approches discrètes permettent de multiplier les expériences numériques dans le but d'étudier l'influence de certaines caractéristiques physiques des particules (granulométrie, morphologie, ...) sur le comportement local et collectif du système. Elles permettent au final de tenir compte d'une certaine réalité physique du comportement à l'échelle des particules nécessaire à la compréhension des milieux granulaires.

Les approches par éléments discrets reposent sur deux familles de méthodes numériques : les méthodes régulières (Smooth Methods) dont la méthode aux éléments distincts de Cundall fait partie et les méthodes non-régulières (Nonsmooth Methods). La méthode de dynamique moléculaire (Molecular Dynamics ou MD) [40, 109, 85] et la méthode de dynamique des contacts (Contact Dynamics ou CD) [95, 96, 99, 72, 117] sont respectivement les méthodes régulière et non-régulière les plus employées à ce jour.

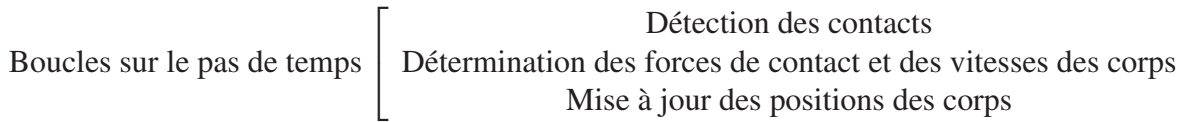
La différence essentielle entre les approches régulière et non-régulière réside dans la modélisation des interactions de contacts. Dans les approches régulières, les interactions sont décrites de manière explicite. En d'autres termes, il existe une loi de force qui lie les forces de contact à la configuration géométrique des particules en contact. Par exemple, la réaction normale qui s'oppose à la pénétration de deux corps est prise comme proportionnelle à cette distance de pénétration. Ce modèle d'interaction permet de rendre compte des déformations élastiques au contact des particules. Le mouvement des particules peut alors être deux fois différentiables et, par conséquent, les équations de la dynamique s'écrivent sous forme d'équations différentielles ordinaires qui peuvent être intégrées par des méthodes classiques. Ces approches utilisent des schémas d'intégration explicites avec un pas de temps faible devant le temps de réponse élastique du contact.

Dans les approches non-régulières, en particulier la méthode CD, les interactions de contact sont décrites par des *lois de contact* non-régularisées. Ces lois de contact sont la condition d'interpénétrabilité des corps, et le frottement sec de Coulomb. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire des fonctions régularisantes pour le contact comme dans les méthodes régulières.

Par conséquent, le temps caractéristique du système est fixé par la dynamique des particules. Le mouvement des particules n'est plus régulier, mais comporte des sauts de vitesse traduisant les collisions multiples et des frottements collectifs entre les particules. En raison de ces discontinuités, les équations du mouvement sont écrites sous une forme intégrée et nécessitent un schéma d'intégration implicite pour les résoudre. En conséquence directe, la CD admet des pas de temps bien plus grands que la MD. Dans un très grand nombre d'applications, la modélisation des interactions de contact suivant l'approche CD constitue une très bonne approximation. C'est en particulier le cas des particules qui se déforment peu avant de se fragmenter.

## 4.2. Dynamique des contacts

Le principe général de la méthode de Dynamique des Contacts peut être résumé par le diagramme suivant :



L'ensemble des équations du mouvement des degrés de liberté des particules (translations et rotations des particules) peut se mettre sous la forme de l'équation matricielle suivante :

$$M\ddot{q}(t) = Q(q, \dot{q}, t) + P(t) + r \quad (4.1)$$

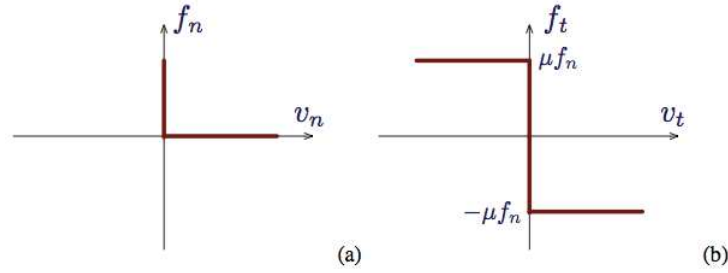
où  $q, \dot{q}, \ddot{q}$  correspondent respectivement à la position, la vitesse, et l'accélération des corps à un instant donné.  $M$  représente la matrice de masse du système,  $Q(q, \dot{q}, t)$  représente les termes gyroscopique et centrifuges,  $P(t)$  les efforts extérieurs explicitement connus en l'absence de contact et  $r$  les forces de contacts. En présence de conditions unilatérales, il se produit des chocs entre particules. Des discontinuités du champ de vitesses peuvent alors apparaître et l'accélération n'est ainsi pas définie. Pour prendre en compte ces considérations, on préfère alors écrire l'équation (4.1) en termes de mesures différentielles. Le système différentiel s'écrit :

$$Md\dot{q}(t) = Q(q, \dot{q}, t)dt + P(t)dt + r dv \quad (4.2)$$

où  $dt$  est une mesure de Lebesgue,  $dv$  est une mesure réelle positive et  $dq$  représente la mesure différentielle de  $q$ . Le terme  $r$  représente la densité d'impulsions de contact, c'est-à-dire la contribution locale des impulsions exercées lors de la présence de contacts [97, 72].

Les particules sont considérées comme rigides et exercent des forces normales et tangentielles  $f_n$  et  $f_t$ , respectivement, les unes sur les autres. Par convention, les forces normales de compression sont positives. Ainsi, la condition géométrique de contact s'écrit :

$$\begin{cases} f_n > 0 \text{ si } v_n = 0 \\ f_n = 0 \text{ si } v_n > 0 \end{cases} \quad (4.3)$$



**FIGURE 4.1.** – Graphs des conditions de Signorini (a) et de Coulomb (b) liant la vitesse normale, respectivement tangentielle, à la force normale, respectivement, tangentielle.

où  $v_n$  est la vitesse relative normale comptée positivement lorsque les particules s'éloignent l'une de l'autre, voir Fig. 4.1.

De la même manière, la loi de frottement sec de Coulomb, représentée sur la Fig. 4.2, s'écrit par les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} f_t = -\mu f_n \text{ si } v_t > 0 \\ |f_t| < \mu f_n \text{ si } v_t = 0 \\ f_t = \mu f_n \text{ si } v_t < 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

où  $v_t$  est la vitesse relative tangente et  $\mu$  le coefficient de frottement. Pour un intervalle de temps  $dt$ , les vitesses  $v_n$  et  $v_t$  sont les vitesses à la fin de l'intervalle. En d'autres termes, il est nécessaire que la solution du problème à chaque pas respecte la condition de non-interpénétration entre les particules à la fin du pas. Mais, Moreau a montré qu'il était possible également de remplacer  $v_n$  et  $v_t$  dans les graphes de Signorini et de Coulomb par une combinaison linéaire des vitesses avant et après le choc :

$$\begin{cases} v_n = \frac{u_n^+ + \rho_n u_n^-}{1 + \rho_n} \\ v_t = \frac{u_t^+ + \rho_t u_t^-}{1 + \rho_t} \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $u_n^+$ ,  $u_n^-$ ,  $u_t^+$ ,  $u_t^-$  sont les vitesses relatives normales et tangentielles des particules au contact au début et à la fin de chaque pas. La condition de contact ou de collision correspond alors à  $u_n = 0$ , ce qui correspond à  $u_n^+ = -\rho_n u_n^-$ . Ainsi, les paramètres  $\rho_n$  et  $\rho_t$  introduits dans l'équation (4.5) coïncident avec les coefficients de restitution normal et tangentiel définis habituellement pour les chocs binaires. La dynamique des contacts permet ainsi de généraliser les coefficients de restitution du cas des collisions binaires au cas des collisions multiples ou aux systèmes multi-contacts [97, 111, 117]

Remarquons aussi que ces lois de contact et de frottement peuvent être modifiées ou complétées par la prise en compte d'autres interactions telles que la cohésion entre les particules. Par exemple, les forces normales aux contacts peuvent alors prendre des valeurs négatives jusqu'à un certain seuil correspondant à la rupture. La figure 4.2 représente les graphes de la condition de Signorini et la loi de Coulomb pour un contact adhésif de seuil  $f_c$ .

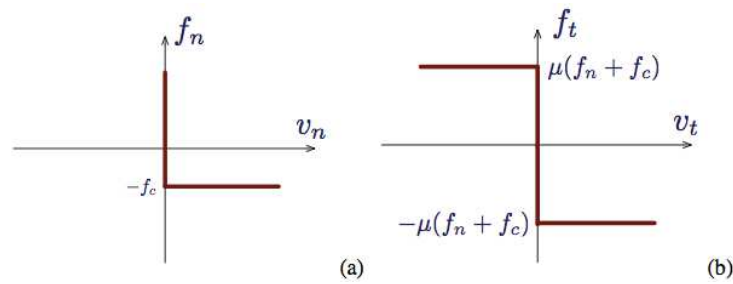


FIGURE 4.2. – Graphes de Signorini (a) et de Coulomb (b) pour un contact adhésif de seuil  $f_c$ .

Pour la résolution des équations de mouvement simultanément pour tous les degrés de liberté, on utilise un solveur basé sur la méthode de Gauss-Seidel non-linéaire [97, 72]. De manière générale, l'unicité de la solution n'est pas garantie pour les particules parfaitement rigides. Cependant, en initialisant chaque étape de calcul avec les forces calculées dans l'étape précédente, l'ensemble de solutions admissibles se rétrécit aux seules fluctuations autour de la solution numérique.

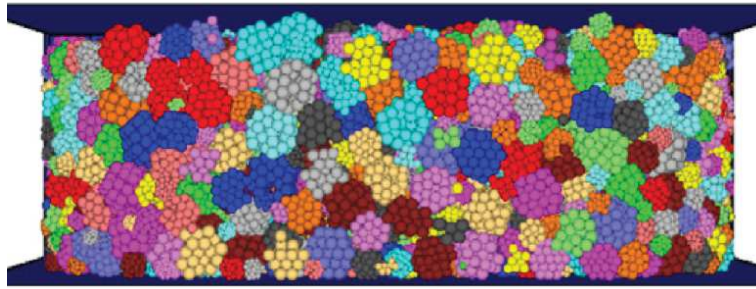
Un avantage majeur de la méthode CD par rapport aux autres méthodes DEM est de ne pas impliquer une loi de force. C'est d'autant plus crucial que les contacts entre particules de formes quelconques sont différents des contacts entre sphères utilisés souvent comme modèle de base. En particulier, les contacts face-face en 3D et côté-côté en 2D impliquent respectivement au moins 3 et 2 contraintes unilatérales. Chaque contact côté-côté doit donc être décrit comme composé de deux points de contact. En CD, il suffira de fixer les points et d'appliquer l'algorithme tandis qu'en DEM une loi de force spécifique est nécessaire [117]. Le choix des points est arbitraire puisque les particules sont rigides. Chaque point de contact porte une force de réaction, mais seule la résultante des forces sur chaque contact est physiquement observable et sera donc considérée comme étant la force de contact.

### 4.3. Modélisation numérique de la fragmentation des particules

Pour modéliser un milieu granulaire fragmentable dans le cadre de DEM, l'approche utilisée par plusieurs auteurs consiste à considérer chaque grain comme un agrégat de plusieurs grains sphériques liés ensemble par des forces de cohésion [110, 33, 3, 84, 139, 159, 146, 70]. Même si la représentation des grains par des assemblages collés des grains est une simplification du matériau, elle a permis d'étudier tous les aspects précédemment discutés liés à la problématique des grains fragmentables et d'obtenir parfois des résultats très proches des expériences. Cette approche, que nous allons appeler Bonded-Particle Model (BPM), permet de mettre en évidence, par exemple, l'effet de la variation de la granulométrie sur le comportement. Il faut aussi remarquer que ces agrégats peuvent représenter de vrais agrégats tels que les compacts constitué de micro-boulettes. La Fig. 4.3 montre un exemple de ce type de simulations.

Un défaut important de la BPM est la perte de volume pendant la fragmentation. En fait, un





**FIGURE 4.3.** – *Un exemple de matériau granulaire fragmentés dont les grains sont des agrégats de sphères [70].*

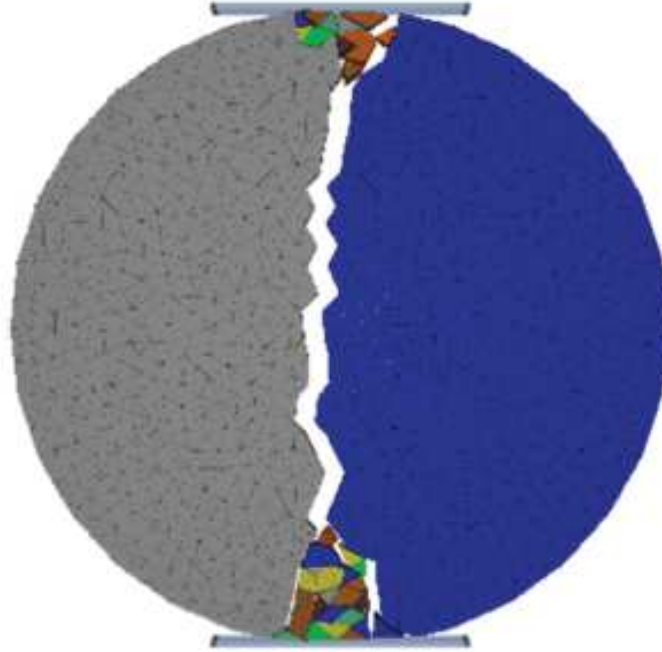
agrégat de grains sphériques comporte des pores qui, lors de la fragmentation, vont modifier la distribution de la porosité entre les agrégats et conduire ainsi à une perte de volume. Cette perte peut aller jusqu'à 20% en 2D et 40% en 3D. Pour palier ce problème, plus récemment Addette et Galindo -Torres [42, 60] ont remplacé des agrégats de sphères par des agrégats de polygones liés entre eux par des ressorts. Les grains sont donc divisés en cellules à l'aide d'une tessellation de Voronoï et les interfaces entre cellules sont traitées comme des plans de rupture potentielle. Dans cette approche, que nous allons appeler Bonded-Cell Model (BCM), lors de la fragmentation les cellules sont traitées comme des objets rigides. Ce modèle peut être aussi considéré comme un modèle des matériaux polycristallins. Mais l'objectif de ces modèles est principalement de rendre compte de l'effet de la fragmentation sur le comportement d'un matériau granulaire. La Fig. 4.4 montre un exemple de matériau granulaire fragmenté avec des particules divisées en cellules.

La mise en œuvre d'un modèle de cellules collées dans le cadre d'une approche numérique discrète exige la prise en compte des interfaces entre cellules. Comme discuté plus haut, le traitement de ces interfaces exige un modèle de contact différent de celui des contacts entre sphères. Or, dans toutes applications rapportées jusqu'à présent, ces interfaces sont modélisés par un seul ressort linéaire reliant les deux surfaces en contact avec un seuil de rupture qui représente la cohésion interne du matériau. L'approche CD est donc mieux adaptée pour la prise en compte de ces aspects. Les formes des particules initiales ou issues de la fragmentation étant alors des juxtapositions de cellules, il est également nécessaire d'utiliser un algorithme de détection efficace des contacts.

L'objectif de l'algorithme de détection est de déterminer s'il y a contact entre deux corps et donner des informations sur le type, la position et l'orientation du contact. Dans le cas d'objets ayant une géométrie complexe, comme une enveloppe polygonale, il faut d'abord déterminer si il y a contact, et dans ce cas calculer la position de points de contact. Une contrainte majeure est le temps de calcul puisque, en général, il faut traiter des interactions entre plusieurs milliers de grains. Deux méthodes permettent de répondre à ces questions :

1. la méthode Shadow Overlap introduite par J.J Moreau [129] ;
2. la méthode Common Plane introduite par P.A. Cundall [41].

Dans tous les cas, afin de limiter les tests, une première détection dite "grossière" est réalisée :



**FIGURE 4.4.** – *Un exemple de matériau granulaire fragmentés dont les grains sont des agrégats de cellules [60].*

partant d'informations géométriques grossières, comme par exemple une distance d'alerte qui consiste à estimer la proximité de deux grains, des situations où il n'y a pas de contacts sont éliminées rapidement. Sinon, il faut tester au cas par cas les situations où il pourrait y avoir contact.

Lorsqu'une situation de contact est détectée, une étape supplémentaire consiste à déterminer de quel type de contact il s'agit. Concrètement, en 2D seules deux possibilités sont envisagées : soit un contact côté-sommet, soit un contact côté-côté [15]. Suivant le cas, la stratégie adoptée est de considérer des points de contacts :

- Si un sommet s'avère rencontrer un côté, comme illustré sur la Fig. 4.5(a), la ligne de contact est la ligne qui passe par le côté. En projetant orthogonalement le sommet sur cette ligne, on détermine la profondeur de pénétration. On choisit le point de contact "effectif" comme étant le point au centre de cette distance. Ce type de contact "côté-sommet" est un contact "simple".
- Dans le cas où un côté rencontre un côté d'un autre polygone, comme illustré sur la Fig. 4.5(b), la ligne de contact est donnée par la ligne commune. L'impénétrabilité entre les deux particules qui ont un tel contact est assurée en appliquant les lois de contact à deux points distincts appartenant à la ligne de contact. Pour cette raison, les contacts côté-côté sont des contacts "doubles".



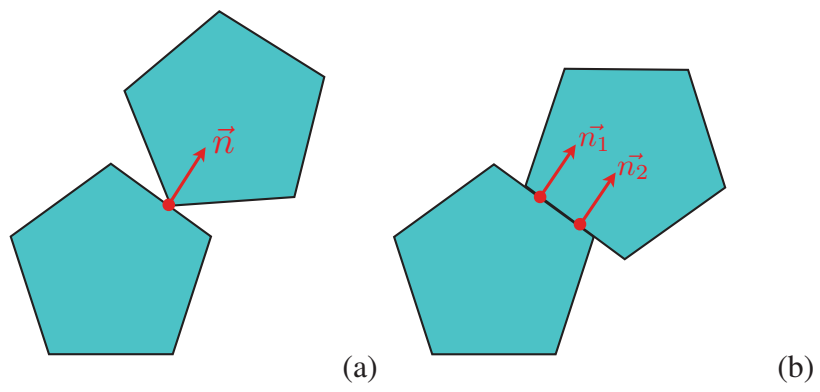


FIGURE 4.5. – Représentation des contacts simple (a) et double (b).

# Conclusion

Les éléments bibliographiques brièvement présentés dans cette partie permettent de situer les travaux de cette thèse dans le contexte actuel des études des milieux granulaires. L'influence de la forme et de l'étalement granulométrique des particules sur la compacité et la texture des milieux granulaires fait partie des thématiques importantes que nous avons étudié au cours de cette thèse avec les particules polygonales en 2D. La variabilité de forme est aussi comme un paramètre qui a été considéré dans ces études. Par ailleurs, la mise en place d'un modèle de fragmentation par *cellules collées* dans le cadre de la méthode Contact Dynamics est une approche nouvelle qui nous a permis de mener des études numériques systématiques de la fragmentation d'une particule et d'un assemblage de particules en compression uniaxiale et biaxiale. Certaines analyses que nous allons présenter dans les chapitres qui suivent sont cohérentes avec des résultats rapportés déjà dans la littérature, ce qui constitue une validation de l'approche mise en œuvre.

Il faut noter que les concepts et résultats présentés dans ce chapitre ne couvrent que ceux qui sont les plus directement liés aux travaux de cette thèse. Nous n'avons pas abordé les aspects rhéologiques et les nombreuses études de la microstructure des milieux granulaires. Certains aspects seront introduits dans les chapitres concernés. De même, les milieux granulaires avec fragmentation des particules ont fait l'objet des modélisations théoriques que nous n'avons pas abordées dans cette partie. L'essence de ces modèles est de rendre compte du processus de fragmentation d'une seule particule en générations successives de particules de plus en plus réduites en taille. Mais la fragmentation des particules est un processus collectif qui dépend de la distribution très large et hétérogène des forces. Inversement, le réseau des forces au niveau des particules dépend de la microstructure et du degré de fragmentation des particules. Il paraît donc difficile de modéliser ce processus à partir de la valeur moyenne des contraintes et ou des forces ou pour un moment particulier de la distribution granulométrique. L'intérêt de l'approche numérique discrète est précisément de permettre d'étudier ces mécanismes et l'impact des paramètres physiques et mécaniques sur l'évolution du matériau. A partir de ces ingrédients, il sera possible à plus long terme de construire des modèles réalistes du processus de fragmentation et

de la loi de comportement des matériaux granulaires constitué de particules sécables.

**Deuxième partie .**

**Matériaux granulaires polydisperses  
en taille et forme**



# Introduction

Cette partie est consacrée à l'étude de l'effet combiné des polydispersités de forme et de taille des particules sur les propriétés mécaniques d'un assemblage granulaire dense (Chap. 5) et en cisaillement quasi-statique (Chap. 6). La taille des particules est définie par le diamètre du disque circonscrit à chaque polygone et la polydispersité en taille est définie à partir de l'étalement des diamètres pour une distribution uniforme par fractions volumiques. La polydispersité en forme est définie à partir d'un pentagone régulier déformé de manière continue en polygone irrégulier.

Dans un premier temps, les systèmes sont construits par compression uniaxiale sans frottement afin d'atteindre le niveau de compacité maximum (RCP ou Random Close Packing). Les systèmes ainsi construits sont analysés en termes de différents descripteurs de la texture granulaire en fonction des paramètres de polydispersité. En particulier, outre l'évolution de la compacité ou des fonctions de distributions en fonction des paramètres de polydispersité, nous nous emploierons à décrire la distribution et le rôle des contacts côté/côté et en particulier leur agrégation en termes de clusters de particules connectées par des contacts coté/sommet. Puis, dans une seconde partie, ces systèmes denses et isotropes seront soumis à une compression biaxiale. L'aspect mécanique est analysé à travers la résistance au cisaillement à l'état critique. Très récemment, il a été mis en évidence pour des empilements de disques, que la résistance au cisaillement est indépendante de la polydispersité de taille [152]. En présence de contacts multiples entre particules (i.e coté/coté et coté/sommet), la généralisation aux cas de grains non-sphériques n'est *a priori* peu claire. De plus, une question encore ouverte et que nous souhaitons aborder ici, est de savoir si un système composé de polygones réguliers présente un comportement singulier par rapport à un système composé de particules de forme irrégulière.



# Forme vs taille pour l'état d'équilibre statique

## Sommaire

---

<b>5.1. Procédures numériques</b>	<b>60</b>
5.1.1. Paramètres de taille et de forme	60
5.1.2. Génération des assemblages de particules	61
<b>5.2. Compacité et distributions radiales</b>	<b>62</b>
5.2.1. Compacité	62
5.2.2. Distribution radiale	66
<b>5.3. Réseaux de contacts et de forces</b>	<b>68</b>
5.3.1. Connectivité des particules	70
5.3.2. Clusters de particules liés par des contacts coté/coté	73
5.3.3. Distribution des efforts	77

---



## 5.1. Procédures numériques

### 5.1.1. Paramètres de taille et de forme

Pour étudier de manière systématique les effets combinés de la taille et du degré d'irrégularité des particules, des procédures strictes doivent être définies afin de contrôler précisément chacun de ces deux paramètres. A partir d'un polygone régulier, chaque sommet peut être repéré par l'angle  $\theta^i = \theta_0 + k^i 2\pi/n$ , où  $\theta_0$  est la position du sommet de référence,  $n$  est le nombre de sommets et  $k \in [0, n - 1]$ . Un polygone régulier sera transformé en polygone irrégulier en introduisant une perturbation sur la position de chaque sommet de la manière suivante :

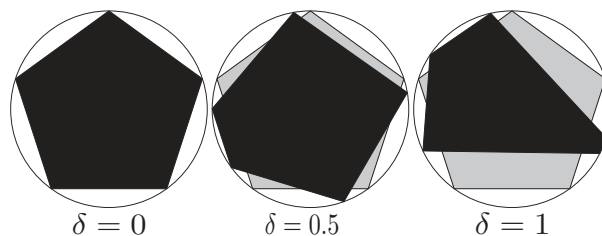
$$\theta^i = \theta_0 + k^i \frac{2\pi}{n} \pm \delta \frac{\pi}{n} I[0, 1], \quad (5.1)$$

où  $\delta$  est un paramètre qui peut varier dans l'intervalle  $[0, 1]$  et  $I[0, 1]$  est un nombre aléatoire entre 0 et 1. Ce paramètre reflète le degré d'irrégularité du polygone, ou de manière plus général le paramètre de "polydispersité de forme". En d'autres termes, les sommets des polygones irréguliers s'écartent des positions angulaires des sommets du polygone régulier d'un angle aléatoire entre 0 and  $\delta\pi/n$ . Dans ce travail, le pentagone sera utilisé comme polygone régulier de référence. La figure 5.1(b,c) montre deux pentagones irréguliers obtenus à partir du pentagone régulier.

La taille d'une particule pentagonale est définie par le diamètre  $d$  du disque circonscrit. Dans les assemblages granulaires qui seront présentés ci-dessous, le diamètre des particules varie entre une valeur minimale  $d_{min}$  et maximale  $d_{max}$  suivant une distribution uniforme en fractions volumiques. Plus de détails sont présentés dans [151]. Dans ce qui suit, nous définissons l'étalement  $s$  de la distribution en taille des particules par :

$$s = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} \quad (5.2)$$

Le cas  $s = 0$  correspond à un système monodisperse, et  $s = 1$  correspond à une polydispersité "infinie". Dans nos études,  $s$  varie systématiquement dans l'intervalle  $[0; 0,9]$ .



**FIGURE 5.1.** – Exemple de pentagone régulier  $\delta = 0$  transformé en pentagones irréguliers pour  $\delta = 0,5$  et  $\delta = 1$ .

### 5.1.2. Génération des assemblages de particules

Afin d'obtenir les systèmes les plus denses possibles, la procédure suivante a été adoptée. Pour un couple de paramètres  $s$  et  $\delta$ , 5000 particules initialement placées de manière aléatoire dans une boîte rectangulaire sont déposées sous l'effet de la gravité. Le frottement entre les particules et entre les parois est fixé à 0. La figure 5.2 montre un instant de la phase de dépôt gravitaire dans le cas  $s = \delta = 0$ . Une fois l'équilibre atteint, la gravité est à son tour fixée à 0, et l'échantillon est soumis à une compression verticale par l'application d'une contrainte  $\sigma_0$  sur le mur supérieur. Les trois autres murs restent toujours fixes. Les systèmes ainsi construits sont considérés comme stables dès que le réseau de contacts devient persistant dans le temps, et les fluctuations de la compacité et de la connectivité du réseau autour de leur valeur moyenne restent inférieures à 0,01%. De cette manière, nous obtenons des assemblages denses et isotropes.

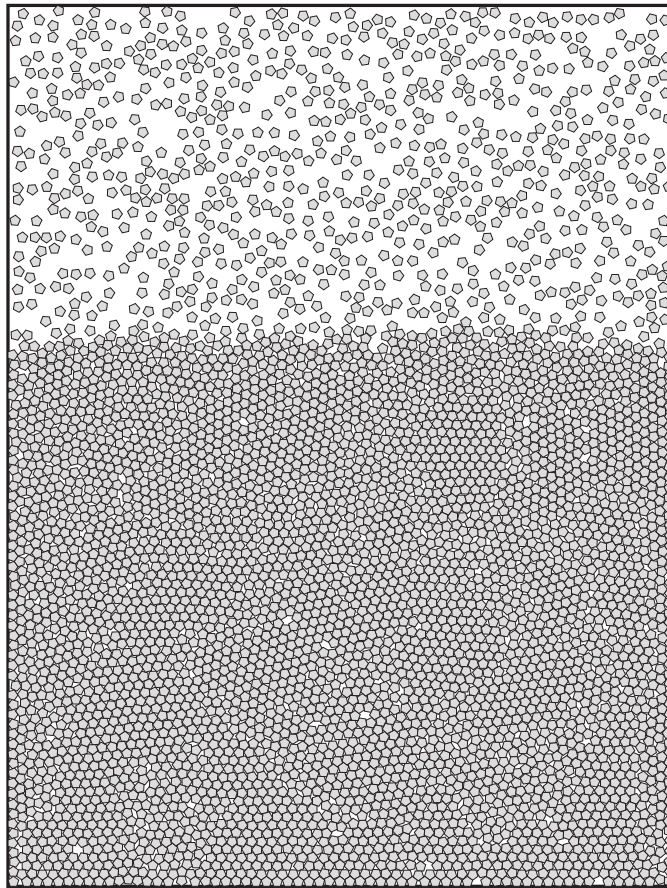


FIGURE 5.2. – Configuration de l'échantillon au cours du dépôt gravitaire.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les particules sont initialement placées aléatoirement dans une boîte avant d'être déposées. Ainsi, pour s'assurer de la représentativité de nos essais, trois simulations indépendantes sont réalisées pour chaque couple  $(s, \delta)$ . Le comportement moyen pour chaque jeu de paramètres  $(s, \delta)$  est obtenu en faisant la moyenne sur les trois

échantillons indépendants. Au total, 108 échantillons ont été préparés pour six valeurs différentes de l'étalement  $s \in [0, 01; 0, 90]$  et pour six valeurs différentes du degré d'irrégularité  $\delta \in [0; 1]$ . Des vues rapprochées des échantillons sont présentées pour  $s = \{0, 01; 0, 9\}$  et  $\delta = \{0; 1\}$  sur la figure 5.3.

## 5.2. Compacité et distributions radiales

Dans cette section, nous nous intéressons au remplissage de l'espace en fonction des paramètres  $s$  et  $\delta$ . Nous considérons plus particulièrement les trois principaux descripteurs que sont la compacité  $\rho$ , la fonction de distribution radiale  $g(r)$  des distances  $r$  des centres des particules et la fonction de distribution radiale des volumes  $\rho(r)$ .

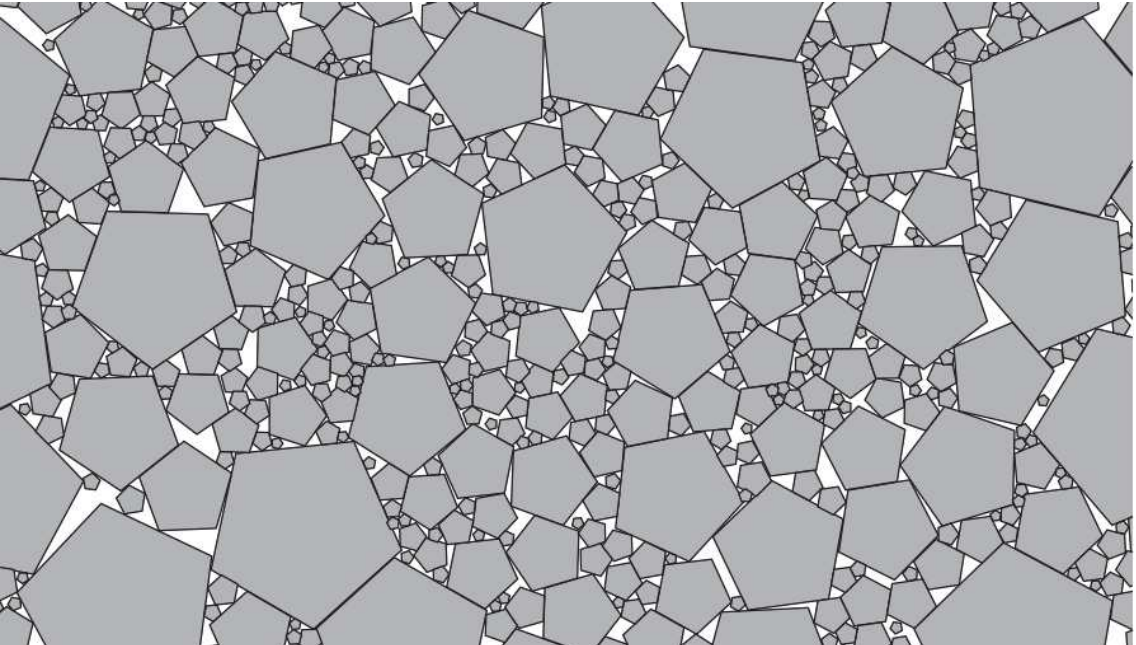
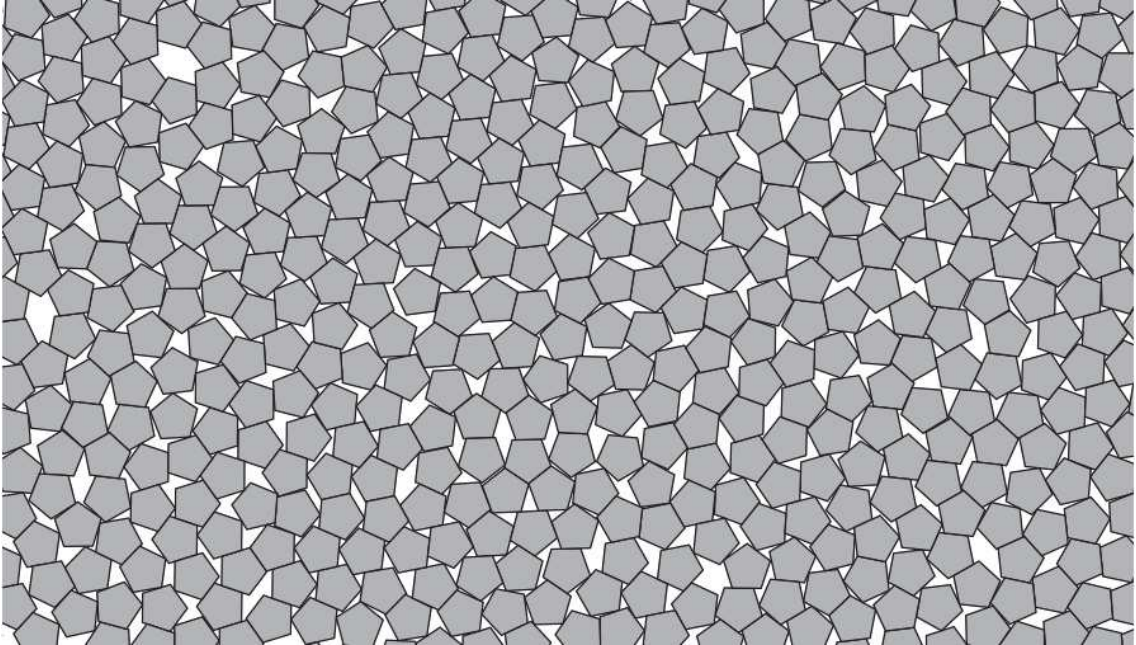
### 5.2.1. Compacité

La figure 5.4 montre la variation de la compacité  $\rho$  en fonction de l'étalement  $s$  pour toutes les valeurs du degré d'irrégularité  $\delta$ . Quel que soit  $\delta$ , nous observons que la compacité augmente avec  $s$ , en particulier de 0,85 à 0,89 pour  $\delta = 0$  et de 0,87 à 0,90 pour  $\delta = 1$ . Ce résultat étend les résultats d'une étude précédente faites avec des disques [152]. Ce qui est intéressant ici est le fait que la compacité augmente également avec l'augmentation de l'irrégularité des grains. Plus précisément, nous pouvons voir que les effets de forme dominant aux faibles étalements (i.e  $s < 0.4$ ) mais deviennent moins fort aux grands étalements. En outre, des compacités plus grandes sont atteintes en augmentant  $s$  plutôt que  $\delta$ .

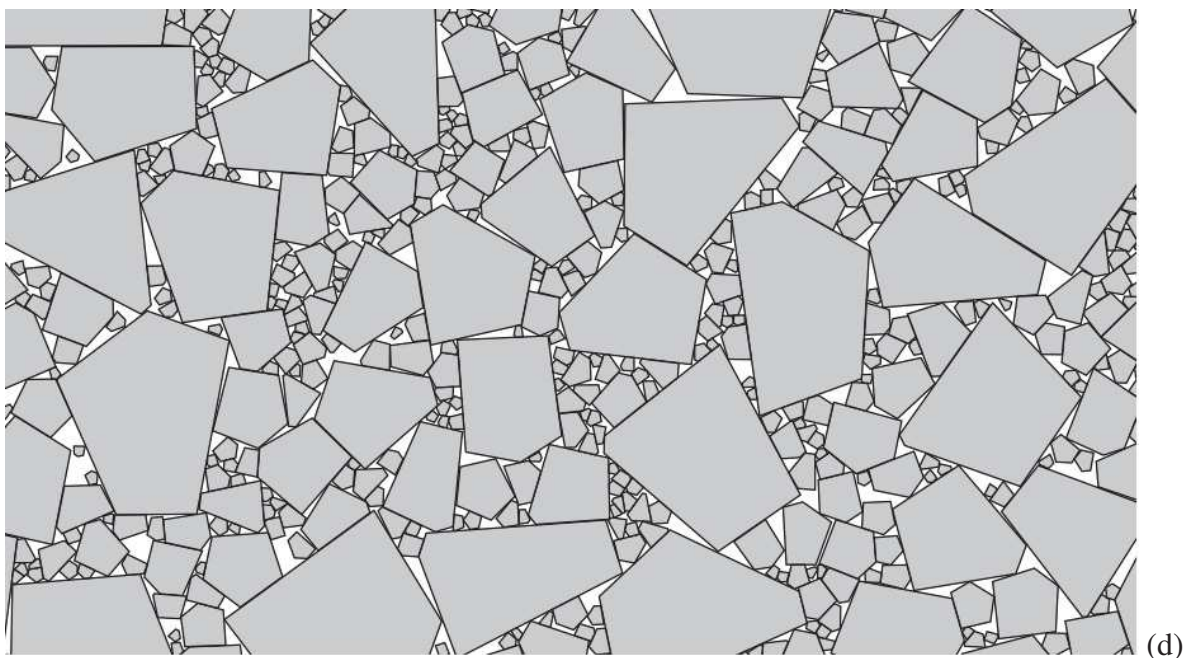
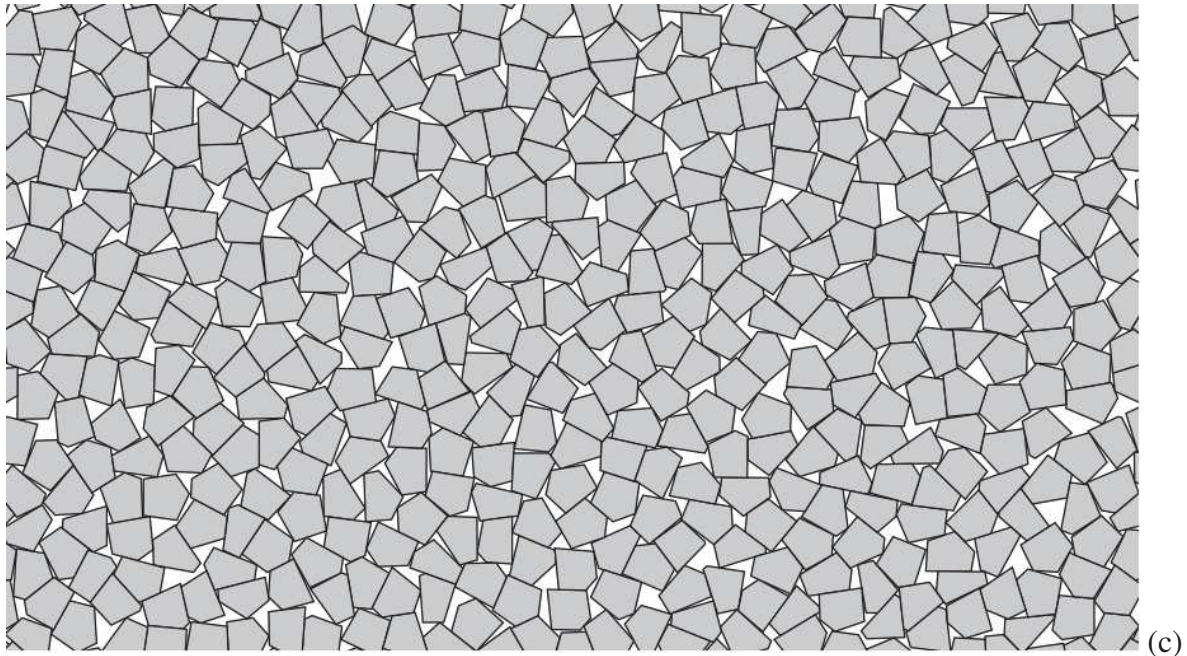
Cette dissymétrie entre  $s$  et  $\delta$  est bien mise en évidence sur la figure 5.5 où la compacité est représentée en niveau de gris en fonction des deux paramètres  $s$  et  $\delta$ . Pour les faibles valeurs de  $s$ , les lignes d'iso-valeurs sont presque symétriques par rapport à la ligne  $s = \delta$  mais sont très asymétriques et parallèles à l'axe  $\delta$  aux plus grandes valeurs de  $s$ .

L'augmentation de  $\rho$  avec  $s$  est simplement attribuée au remplissage des pores entre les particules les plus grosses par les particules les plus petites. L'augmentation de  $\rho$  avec  $\delta$  est moins trivial. Ce comportement peut être attribué à l'angularité des particules. En effet, les pentagones irréguliers ont au moins un angle interne bien en dessous de  $\pi/5$  ce qui permet au sommet correspondant de "mieux" s'introduire dans le volume libre entre deux particules. C'est aussi pourquoi un système désordonné de disques non frottants a une compacité ( $\sim 0.82$ ) inférieure à celle d'un système composé de pentagones mono-disperses (0.85) [153].

Un système dense désordonné composé de pentagones monodisperses, comme celui de la figure 5.3(a) peut être vu comme l'état RCP de pentagones. En particulier, de nombreux systèmes "cristallins" de pentagones monodisperses peuvent être construits géométriquement, mais pour la plupart d'entre eux ils sont singuliers et/ou mécaniquement instables [66]. Cependant, la figure 5.3(a) montre clairement que des structures locales cristallines peuvent se former avec une compacité qui peut supérieure à la compacité moyenne. Deux phases cristallines sont mises en évidence sur la figure 5.6. La première a une compacité de  $\sim 0.92$  et est décrite comme étant la phase cristalline la plus compacte d'un système 2D de pentagones [66]. La seconde phase cristalline est une variante de la phase cristalline construite géométriquement et est illustrée







**FIGURE 5.3.** – Vues d'échantillons obtenus à la fin de la compression. Ici pour  $(s; \delta) = (0, 01; 0)(a)$ ,  $(s; \delta) = (0, 9; 0)(b)$ ,  $(s; \delta) = (0, 01; 1)(c)$  and  $(s; \delta) = (0, 9; 1)(d)$

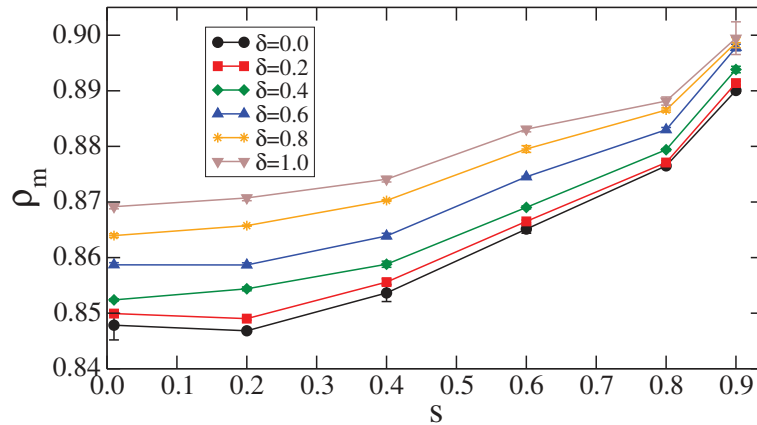


FIGURE 5.4. – Variation de la compacité  $\rho$  en fonction de l'étalement  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

dans l'insert de la figure 5.6. La compacité est d'environ 0,854. Dans les deux cas, le centre des particules mais aussi l'orientation des particules induisent un ordre de longue portée.

Mises à part les deux phases cristallines mentionnées plus haut, des structures à symétrie triangulaire mais sans orientation particulière des pentagones sont observées également sur la figure 5.6. Ces structures ont été observées expérimentalement [66] et peuvent être obtenues à partir des structures cristallines denses en orientant aléatoirement les pentagones. Bien que ces structures tendent à augmenter la compacité, l'absence de correspondance entre les structures ayant une symétrie d'ordre 5 avec celles d'ordre 6 conduit à diminuer de manière globale la compacité de 0.92 à 0.85

Une inspection visuelle des figures 5.3(a) et (c) semble aussi suggérer que les systèmes composés de pentagones irréguliers sont plus homogènes que ceux composés de pentagones réguliers. La forme symétrique des particules combinée aux exclusions stériques conduit à augmenter l'effet d'arche et donc la création de pores plus grands. De nombreuses méthodes ont été employées dans le passé pour décrire quantitativement l'homogénéité et le désordre de la microstructure. Dans ce qui suit, nous employons la méthode de fluctuation des densités introduite et utilisée par Saint-Cyr et al. Dans cette méthode, les systèmes sont divisés en  $n_c^2$  cellules via une grille carrée, où  $n_c$  est le nombre de cellules le long de chaque direction. La taille  $\ell_c$  de chaque cellule varie entre  $\ell_c = 2d$  et  $\ell_c = \ell_0 = 60d$ . Pour une taille donnée, on calcule  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  définis comme, respectivement, le minimum et le maximum des compacités calculées dans les cellules. Le rapport  $\rho_{max}/\rho_{min}$  mesure le degré d'homogénéité en fonction de  $\ell_c$ . La figure 5.7 montre la variation de  $\rho_{max}/\rho_{min}$  en fonction de  $\ell_c$  pour  $\delta = 0$ (a) et  $\delta = 1$  (b).

On voit que, quelques soient  $\delta$  et  $s$ ,  $\rho_{max}/\rho_{min}$  diminue vers une valeur constante égale à l'unité quand  $\ell_c$  augmente. On peut constater aussi que  $\rho_{max}/\rho_{min} < 2$  avec  $s < 0.8$ , alors que pour  $\ell_c \simeq 2d$ ,  $\rho_{max}$  peut être 10 fois plus élevée que  $\rho_{min}$  pour des grandes valeurs de  $s$ . Ceci peut être attribué au fait que de grosses particules peuvent être complètement incluses dans une cellule aux grandes valeurs de  $s$ . Cette évolution résulte de la diminution de  $\rho_{max}$  et l'augmentation de  $\rho_{min}$  avec  $\ell_c$ . Plus généralement, ce qui est remarquable ici, c'est que pour toutes les valeurs de  $s$  et  $\delta$ , nous pouvons distinguer deux régimes : 1) Une diminution rapide

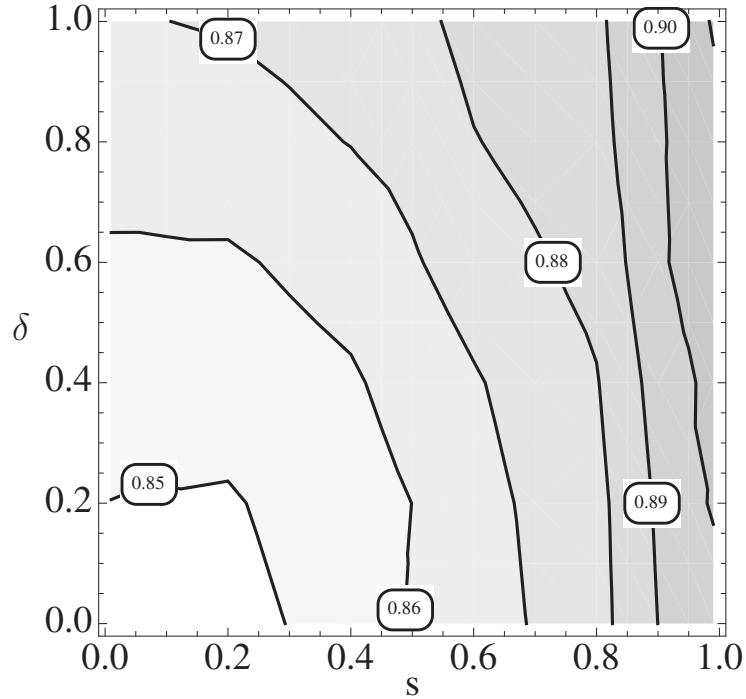


FIGURE 5.5. – Carte d'iso-compacité  $\rho$  en fonction de  $s$  et  $\delta$ .

autour de la valeur moyenne jusqu'à  $\ell_c \sim 5d$  et 2) une diminution lente de  $\rho_{max}/\rho_{min}$  jusqu'à une valeur constante de 1. Ces deux échelles semblent correspondre aux échelles intrinsèques du système (i.e. échelle de la particule) et à l'échelle de l'hétérogénéité due à des exclusions stériques renforcées par des contacts côté-côté. Ce point sera discuté avec plus de détails dans la section 5.3. Le degré d'hétérogénéité  $\eta$ , défini comme le rapport de l'écart-type  $\Delta\rho$  à la valeur moyenne  $\rho$  de la compacité, est de l'ordre de 3 % pour  $\ell_c = 5d$  et 1 % pour  $\ell_c = 10d$ . Ainsi, le resserrement entre  $\rho_{min}$  et  $\rho_{max}$  montre que tous les systèmes peuvent être considérés comme homogène pour  $\ell_c = 5d$  et très homogène à partir de  $\ell_c = 10d$ .

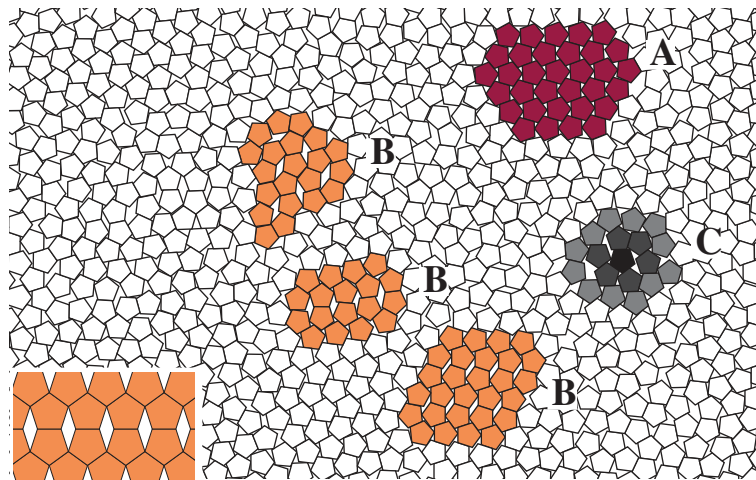
### 5.2.2. Distribution radiale

L'ordre ou le désordre spatiaux induits par la dispersion de forme et la variation de taille peuvent être évalués au moyen de la distribution radiale  $g(r)$  des positions radiales  $r$  des centres de particules :

$$g(r) = \frac{n(r)}{n}, \quad (5.3)$$

où  $n(r)$  est la densité numérique qui est définie par le nombre moyen de centres de particules par unité de surface à la distance  $r$  du centre de la particule donnée et  $n$  est la densité numérique moyenne de l'assemblage.

La variation de  $g(r)$  pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 1$  est présentée sur les figures 5.8 (a) et (b), pour toutes les valeurs de  $s$ . Les figures 5.8 (c) et (d) montrent également  $g(r)$  pour  $s = 0,01$  et  $s = 0,9$ ,



**FIGURE 5.6.** – (Couleur en ligne) Exemples de noyaux cristallins ou quasi-cristallins dans un assemblage des pentagones réguliers mono-disperse : (A-en rouge) configuration la plus dense (compacité  $\simeq 0,92$ ) impliquant à la fois les ordres de position et d’orientation des pentagones ; (B-en orange) configurations “glissés” ou exemples légèrement randomisés de la configuration complètement ordonné montré dans l’encart en bas à gauche avec une compacité  $\simeq 0,85$  ; (C-en gris) environnement typique des pentagones caractérisés par une symétrie locale de position triangulaire et des orientations aléatoires des voisins.

pour toutes les valeurs de  $\delta$ . En général, pour  $s < 0,4$  nous observons des pics réguliers espacés avec une période de  $0,8d$  et d’amplitude décroissante. Ces pics sont la signature d’un ordre local. L’augmentation de  $\delta$  (figure 5.8c) conduit à la diminution de l’amplitude et de la longueur de corrélation. Un fait intéressant est qu’aux faibles valeurs de  $s$  et  $\delta$ , i.e. pour des assemblages quasi-monodispersés et quasi-réguliers, nous voyons un deuxième pic intermédiaire très proche du premier pic. Ces deux pics sont répétés dans la deuxième période, et au-delà seul le premier pic persiste, faisant ainsi apparaître une échelle de longueur intermédiaire. Ces deux sous-pics se produisent pour  $r/d \propto \cos \pi/5 \sim 0,8$  et  $r/d \propto 0,5(1 + \cos \pi/5) \sim 0,9$  respectivement, ce qui correspond à la distance entre deux centres de pentagones connectés par des contacts côté-côté et côté-sommet, respectivement. Pour  $s > 0,4$ , seul le premier pic survit et, avec l’augmentation de la polydispersité de taille, il augmente et apparaît à des distances inférieures à  $d$ .

L’augmentation de l’amplitude du pic aux grandes polydispersités peut être attribuée à la distribution uniforme en volume des particules. En effet, avec l’augmentation de  $s$ , le nombre de particules dans les classes les plus petites augmente rapidement et conduit à l’augmentation de l’ordre local des petites particules dans les pores entre les plus grosses. Ainsi,  $s = 0,4$  est le point de transition entre une polydispersité gouvernée par une seule taille, et une polydispersité gouvernée par deux, puis trois et plus classes de tailles. Il n’est d’ailleurs pas inutile de noter que, aux grandes polydispersités, la distribution radiale est similaire pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Cela signifie que, comme pour la compacité, la polydispersité de forme joue un rôle mineur aux grandes polydispersités de taille.



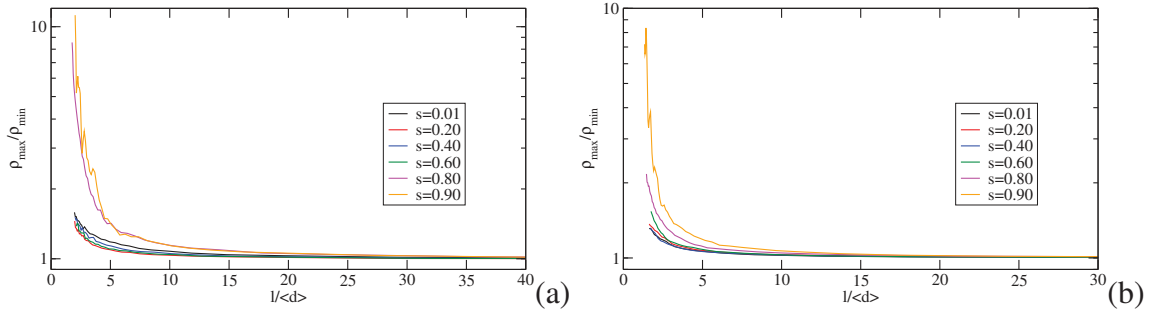


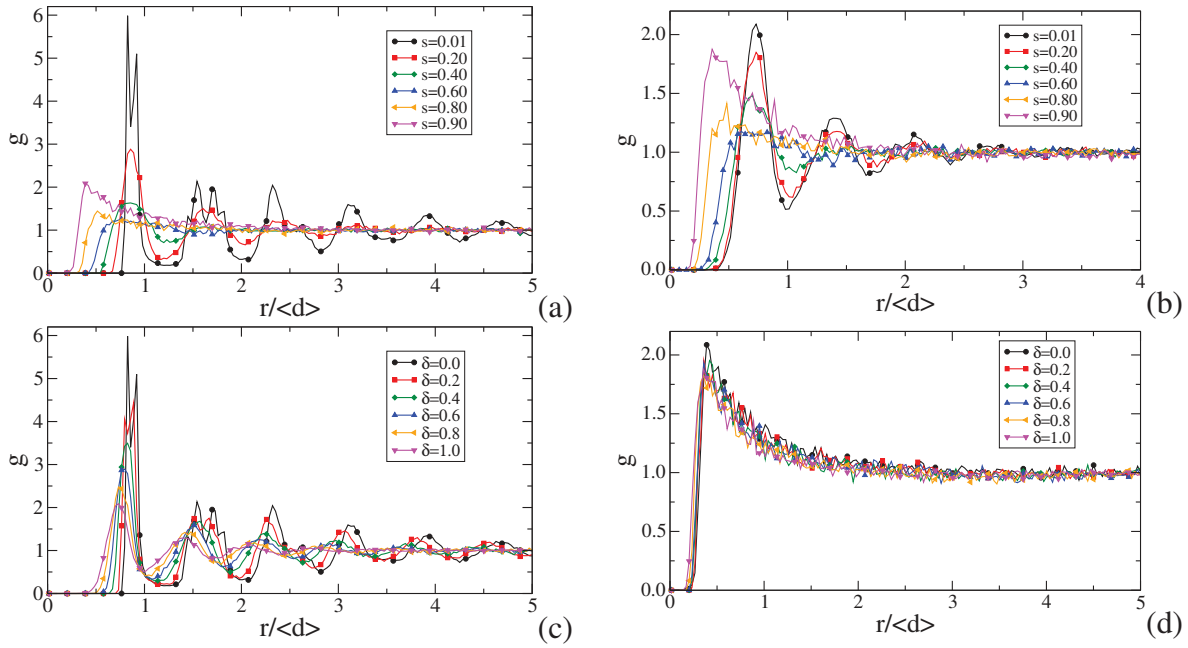
FIGURE 5.7. – Variation du ratio  $\rho_{\max}/\rho_{\min}$  en fonction du pas de la grille normalisée pour  $\delta = 0$ (a) et  $\delta = 1$  (b).

Dans le cas des matériaux granulaires polydisperses, on peut se demander si la fonction de distribution radiale est le meilleur descripteur des corrélations entre paires de particules. En effet, la densité numérique  $n(r)$  paraît être un descripteur naturel si les constituants ont le même volume. Dans le cas polydisperse, une description plus riche peut être obtenue en prenant en compte la distribution de tailles à travers les différents volumes des particules. Il paraît alors pertinent d’analyser les corrélations spatiales en considérant la compacité  $\rho(r)$  en fonction de la position radiale  $r$ . De manière similaire au calcul de la distribution radiale, on calcule la compacité dans des couronnes concentriques de rayons croissants centrés sur les centres des particules.

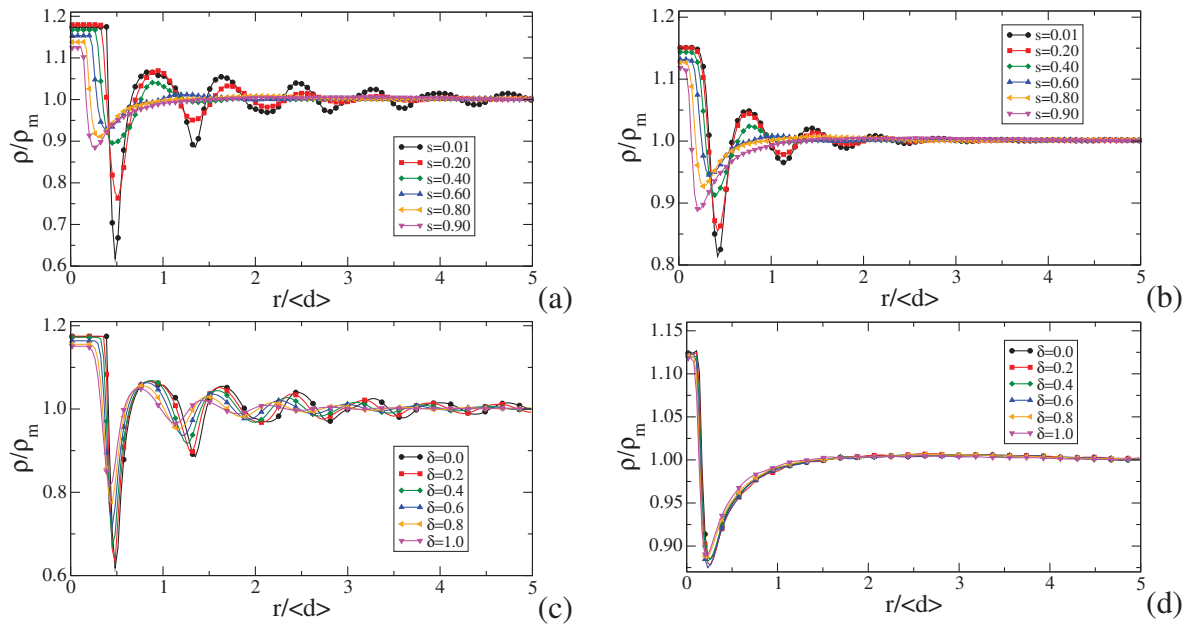
Les figures 5.9(a) et (b) montrent  $\rho(r)/\rho_m$  pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 1$ , respectivement, et pour toutes les valeurs d’étalement  $s$ . Les figures 5.9(c) et (d) montrent  $\rho(r)/\rho_m$  pour  $s = 0,01$  et  $s = 0,90$  et pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Le plateau aux faibles valeurs de  $r$  correspond naturellement au cas où la couronne est inférieure aux particules (i.e.  $\rho(r) = 1 > \rho_m$ ). La distribution des volumes varie entre pics et creux avec une amplitude qui décroît avec  $r$ . Les creux représentent le vide entre les particules et ces voisins proches. On peut voir que  $\rho(r)$  tend vers la compacité moyenne  $\rho_m$  aux grandes valeurs de  $r$ . Mais, la convergence vers  $\rho_m$  est d’autant plus rapide (et donc la corrélation des longueurs est d’autant plus petite) que  $\delta$  et  $s$  augmentent. Pour les grandes valeurs de  $s$ , nous observons principalement un seul creux juste après le plateau et une augmentation lente vers  $\rho_m$ .

### 5.3. Réseaux de contacts et de forces

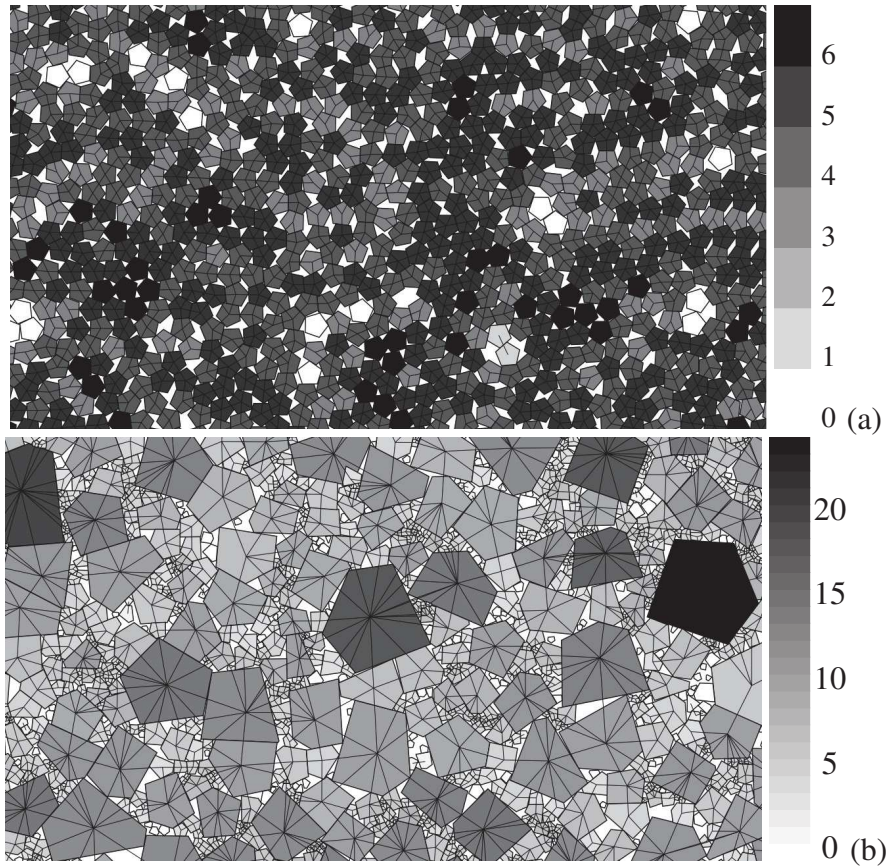
La compacité et les fonctions de distribution radiale ont permis d’évaluer l’influence de la distribution de taille et de forme des particules sur le désordre métrique. Cependant, la plupart des propriétés mécaniques des matériaux granulaires comme la transmission de forces ou la dilatance, dépendent fortement de la topologie du réseau de contacts. La microstructure de matériaux granulaires, i.e, l’organisation des particules et de leurs contacts dans l’espace, est essentiellement contrôlée par les exclusions stériques entre les particules et les conditions d’équilibre des forces [141]. La microstructure peut être décrite en termes de divers descripteurs statiques tels que le nombre de coordination  $Z$  (le nombre moyen des voisins par particule), la fonction



**FIGURE 5.8.** – Fonction de distribution radiale  $g$  en fonction de la distance radiale  $r$  normalisée par le diamètre moyen  $\langle d \rangle$  avec  $\delta = 0$  (a),  $\delta = 1$  (b) pour toutes les valeurs de  $s$  et avec  $s = 0,01$ (c) et  $s = 0,9$ (d) pour toutes les valeurs de  $\delta$ .



**FIGURE 5.9.** – Compacité  $\rho(r)$  normalisée par la compacité moyenne de l'assemblage en fonction de la distance radiale  $r$  normalisée par le diamètre moyen des particules avec  $\delta = 0$  (a),  $\delta = 1$  (b) pour toutes les valeurs de  $s$  et avec  $s = 0,01$ (c) et  $s = 0,9$ (d) pour toutes les valeurs de  $\delta$ .



**FIGURE 5.10.** – Carte en niveaux de gris représentant la connectivité des particules pour ( $s = 0,01; \delta = 0$ ) (a) et ( $s = 0,9; \delta = 1$ ) (b). Le niveau de gris est proportionnel au nombre de coordination.

de connectivité  $P(c)$  (la proportion des particules ayant exactement  $c$  voisins) et le PDF (la densité de probabilité) des forces.

### 5.3.1. Connectivité des particules

La figure 5.10 montre différentes vues de l'échantillon pour ( $s = 0,01; \delta = 0$ ) et ( $s = 0,9; \delta = 1$ ). Le niveau gris des particules est proportionnel au nombre de voisins. Nous voyons que la topologie du réseau de contact varie fortement avec  $s$  et  $\delta$ . Par exemple, des pores peuvent être remplis par une ou deux particules flottantes dans le cas où les particules sont régulières et de même taille ( $s = 0,01, \delta = 0,0$ ), alors que dans le cas très polydisperse nous observons beaucoup de particules flottantes (en blanc). En outre, le réseau de contact semble être de plus en plus interconnecté pour les grandes valeurs de  $\delta$ .

La proportion des particules ayant  $c$  contacts est représentée sur la figure 5.11. On a  $\sum_c P_c = 1$  et  $\sum_c cP_c = Z$ . Nous pouvons voir que  $P_c$  est presque indépendant de  $\delta$  pour toutes les valeurs de  $s$ .  $P_3$  augmente avec  $s$  de 0.1 à 0.5, alors que  $P_4$  et  $P_5$  décroissent de 0.4 à 0.2 et 0.1

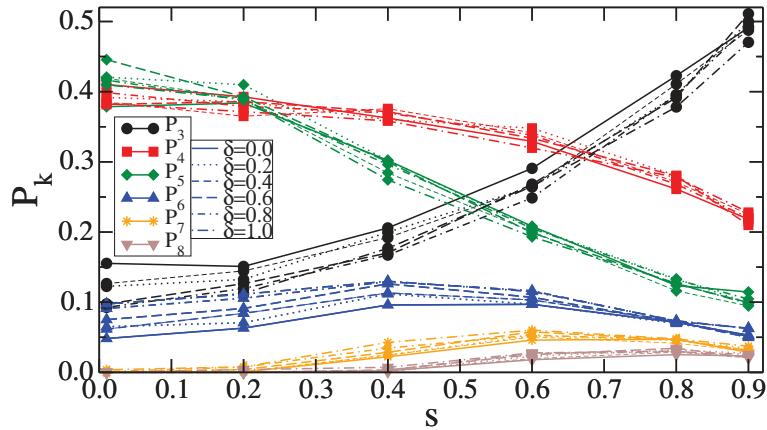


FIGURE 5.11. – Proportion  $P_c$  des particules ayant  $c$  voisins en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

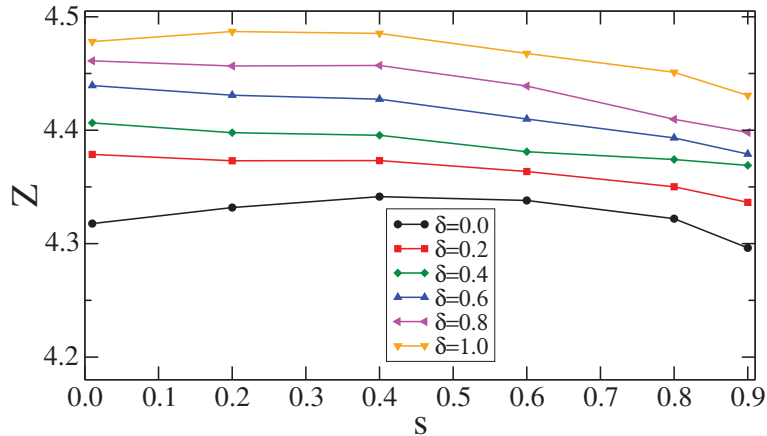


FIGURE 5.12. – Nombre de coordination  $z$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$

respectivement.  $P_7$  et  $P_8$  augmentent avec  $s$  mais restent faibles aux faibles valeurs de  $s$ . De la même manière,  $P_2 \simeq 0$  quels que soient  $s$  et  $\delta$  et il n'est pas présenté sur cette figure. Ainsi, l'augmentation de  $s$  induit un nombre grandissant de particules équilibrées par trois forces dont au moins un contact est un contact côté-côté comme nous le verrons plus loin.

La figure 5.12 montre l'évolution de  $Z$  avec  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Il est intéressant de voir que quel que soit  $\delta$ ,  $Z$  est constant tant que  $s < 0.4$ , et décroît faiblement ensuite. Au contraire, pour une valeur fixe de  $s$ ,  $Z$  augmente avec  $\delta$ . Cette observation est cohérente avec le fort niveau d'enchevêtrement des particules pour les grandes valeurs de  $\delta$ .

Le fait que  $Z$  reste relativement constant bien que  $s$  augmente, est un fait qui peut paraître surprenant. Il est également notable que cette valeur soit bien inférieure à 6, valeur de la coordination attendue pour un système dense non-frottant composé de particules non-circulaires (i.e. avec 3 degrés de liberté) [122]. Un résultat similaire a été observé pour des ellipses [45] et des tétraèdres [17] où le nombre de coordination moyen, à l'état isostatique, est aussi inférieur à 6. Pour les ellipses ce comportement a été attribué à la présence des états mous (*floppy modes*)

alors que pour les tétraèdres il résulterait des différents niveaux de contraintes en fonction des types de contacts.

Ici, nous souhaitons introduire une interprétation différente. En réalité, les contacts côté-côté n'ont pas le même statut que les contacts côté-sommet. La force normale a un seul point d'application pour un contact sommet-côté, alors que dans le cas d'un contact côté-côté, le point d'application de la force est inconnu et déterminé par l'équilibre des forces. En d'autres termes, les contacts côté-côté représentent deux contraintes géométriques et de ce point de vue ils doivent être compté deux fois. Soit  $k_{ss}$  la proportion des contacts côté-côté,  $N_f$  le nombre de degrés de liberté par particule et  $Z$  le nombre de contacts par particule. En moyenne,  $k_{ss}Z/2$  contacts par particule sont des contacts côté-côté alors que  $(1 - k_{ss})Z/2$  contacts sont des contacts sommet-côté. Ainsi, le nombre total des contrainte par particule est  $k_{ss}Z + (1 - k_{ss})Z/2 = (1 + k_{ss})Z/2$ . Pour un système isostatique, le nombre de contraintes est égal au nombre de degrés de liberté. Ainsi,

$$Z = \frac{2N_f}{1 + k_{ss}} \quad (5.4)$$

Cette relation prédit correctement  $Z = 6$  si  $k_{ss} = 0$ , mais sa valeur est bien inférieure à 6 autrement. La figure 5.13 montre la proportion des contacts côté-côté en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Nous avons  $k_{ss} \simeq 1/3$ . Il est plus faible aux fortes valeurs de  $\delta$  et augmente légèrement avec  $s$ . Etant donnée l'équation (5.4), l'évolution de  $k_{ss}$  est cohérente avec la variation de  $Z$  en fonction de  $s$ .

Ainsi, de manière équivalente, on peut introduire le "nombre de connectivité"  $Z_c$  défini comme le nombre de contraintes par particule en comptant deux fois les contacts côté-côté :

$$Z_c = (1 + k_{ss})Z. \quad (5.5)$$

En considérant l'équation (5.4), dans le cas isostatique nous avons  $Z_c = 2N_f$ . Ce nombre de connectivité est  $\simeq 6$  dans tous nos échantillons à l'état isostatique.

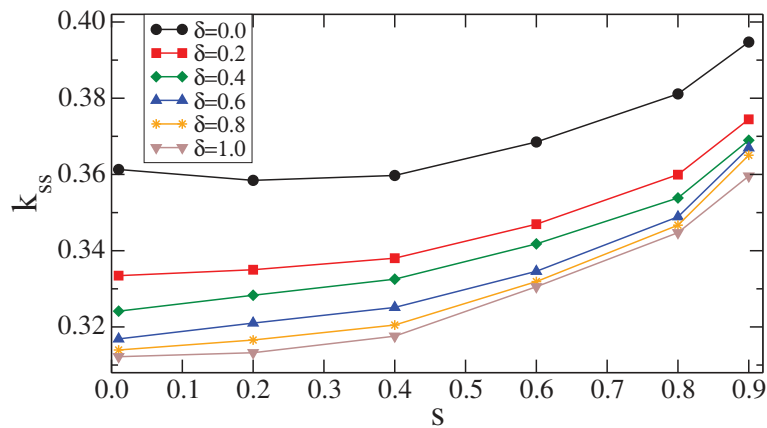


FIGURE 5.13. – Proportion  $k_{ss}$  des contacts côté-côté en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

La corrélation entre la taille des particules et leur connectivité peut être obtenue plus finement en considérant le nombre moyen  $Z(d_r)$  de voisins dans une classe de particules ayant une taille

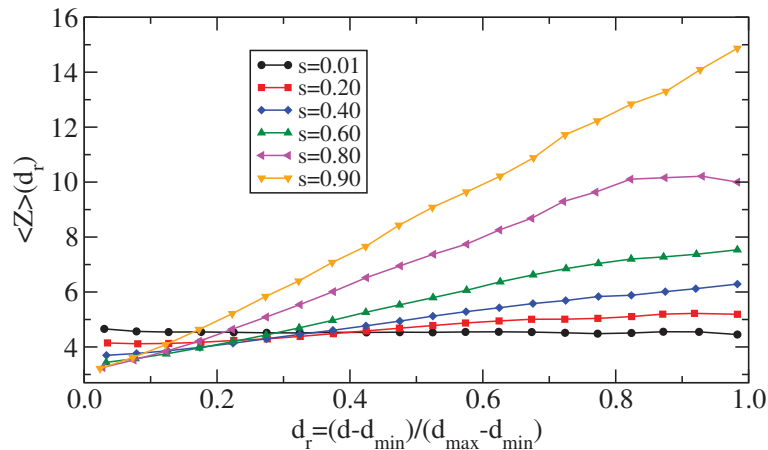


FIGURE 5.14. – Nombre moyen de voisins  $\langle Z \rangle$  dans chaque classe des particules en fonction du diamètre réduit  $d_r$ .

comprise dans l'intervalle  $[d_r - \Delta d_r/2, d_r + \Delta d_r/2]$ , où  $d_r = (d - d_{\min}) / (d_{\max} - d_{\min})$  est la taille réduite dans chaque classe. La figure 6.6 montre  $Z(d_r)$  pour toutes les valeurs de  $s$  à  $\delta = 0$ . Pour les faibles valeurs de  $s$ , la polydispersité est négligeable et toutes les classes ont pratiquement le même nombre de coordination  $\simeq 4,2$ . Pour les fortes polydispersités,  $Z$  augmente presque linéairement avec  $d_r$ . Les particules les plus petites ont un nombre de voisins inférieur à 4,2 alors qu'il peut être de 13 pour  $s = 0,9$

Dans toutes les analyses faites ici, seules les particules ayant au moins un contact ont été considérées. Les particules ayant zero contact, ou "particules flottantes", ont été exclues de la statistique. Cependant, la proportion  $P_f$  des particules flottantes est un descripteur intéressant car il donne une indication sur l'effet de voûte présent dans les matériaux granulaires. Dans un matériau très polydisperse l'effet de voûte est naturellement plus important et on s'attend à voir un très grand nombre de particules ne participant pas au réseau de contacts. La figure 5.15 montre  $P_f$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . On voit que  $P_f$  est faible tant que  $s < 0,4$  mais augmente ensuite rapidement jusqu'à 0,25 lorsque  $s$  varie de 0,4 à 0,9. Il est remarquable aussi que  $P_f$  est indépendant de  $\delta$ . Comme on peut voir sur la figure 5.10(b), les particules flottantes sont essentiellement des petites particules.

### 5.3.2. Clusters de particules liés par des contacts coté/coté

Le rôle des contacts côté-côté a été analysé rapidement dans la section précédente en lien avec la connectivité des particules et les sous-structures cristallines. Puisque près d'un tiers des contacts sont des contacts côté-côté, la question que l'on peut se poser maintenant est de comprendre comment ces contacts sont organisés dans l'espace. Est-ce que les contacts côté-côté percolent ? Comment la polydispersité en taille et en forme affecte leur distribution dans l'espace ? Pour cela, nous considérons maintenant des particules liées entre elles par au moins un contact côté-côté et, de cette manière, nous identifions des clusters de particules dans lesquels chaque particule a au moins un contact côté-côté. Deux clusters sont disjoints s'ils n'ont pas



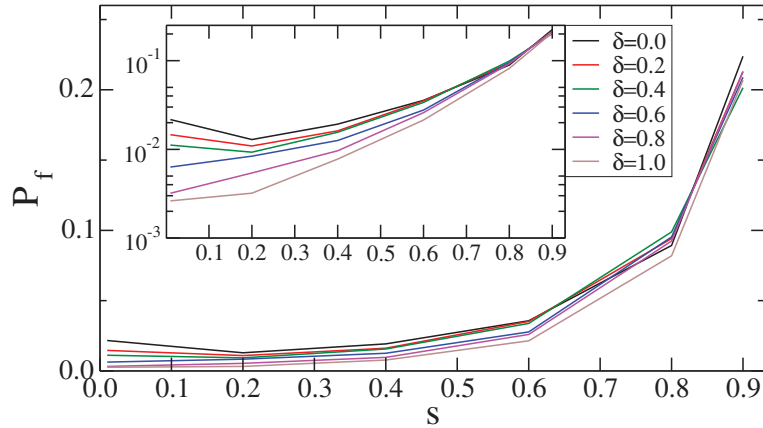


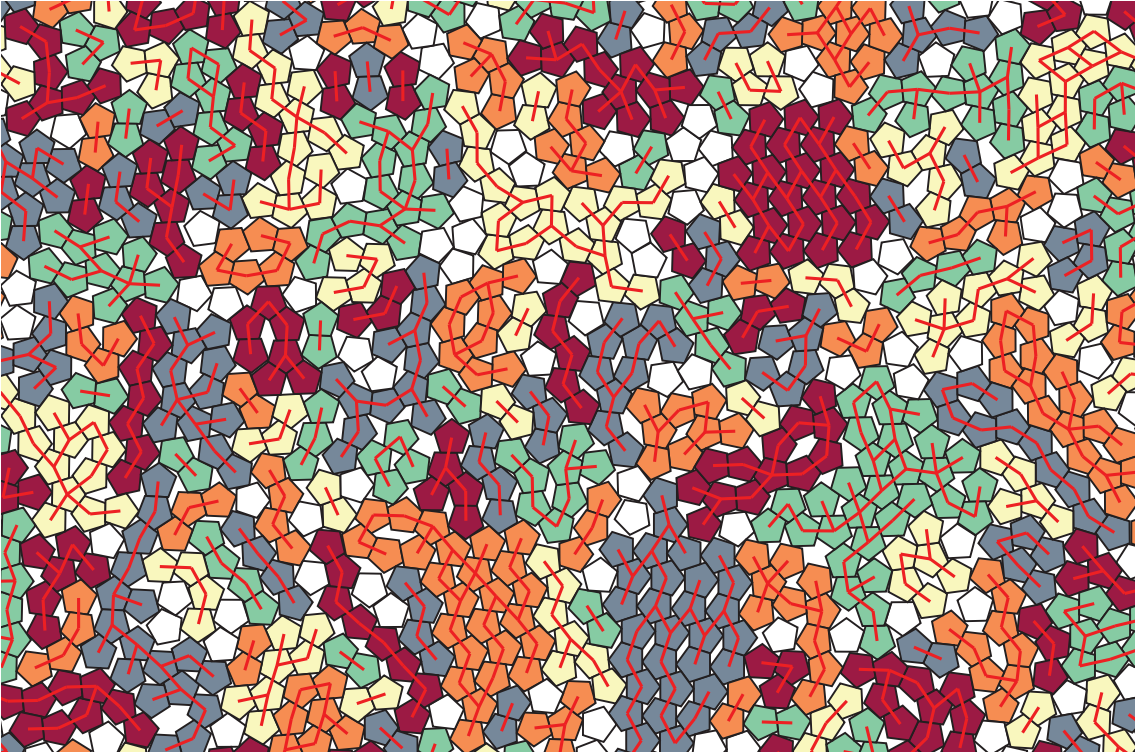
FIGURE 5.15. – Proportion  $P_f$  des particules flottantes (0 ou 1 contact) en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

un contact côté-côté en commun. Dit autrement, un cluster est connecté à un autre cluster via uniquement des contacts sommet-côté.

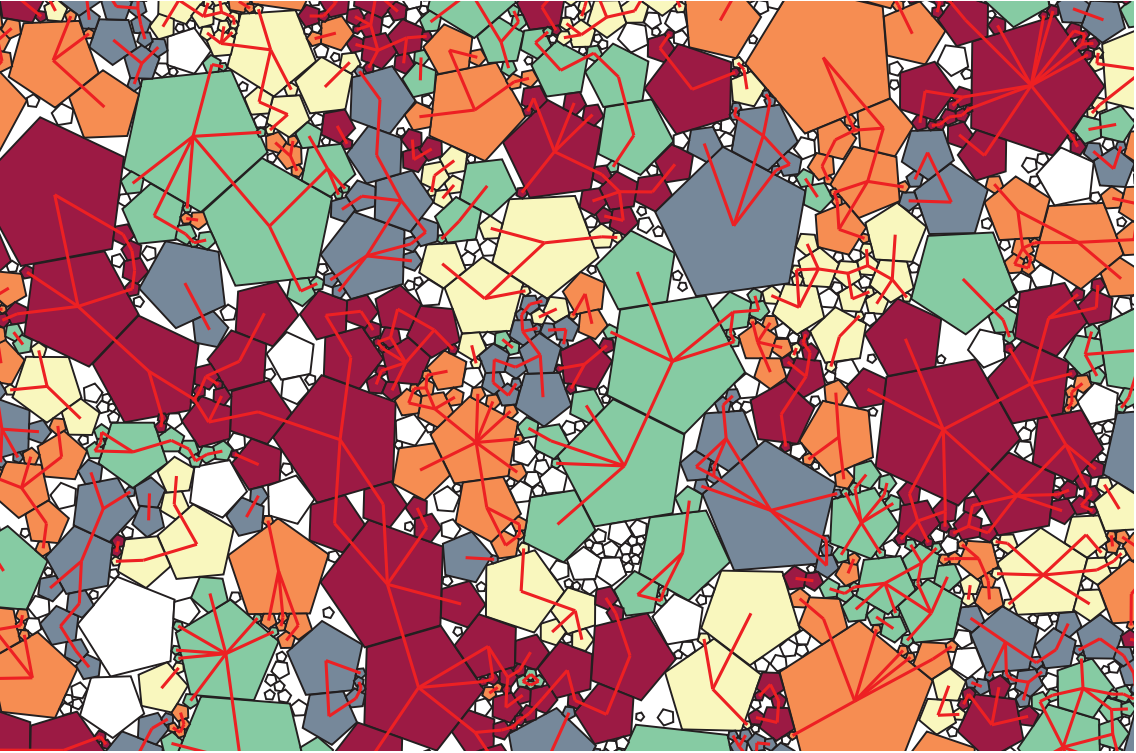
Quatre exemples de ces types de clusters sont présentés sur la figure 5.16 pour quatre paires de valeurs des paramètres  $s$  et  $\delta$ . Les contacts côté-côté sont marqués par une ligne joignant leurs centres. Mises à part quelques rares exceptions, la majeure partie des particules appartient à un cluster. Une autre remarque est qu'aucun cluster ne remplit tout l'espace, ce qui montre que les contacts côté-côté ne percolent pas. Aux faibles valeurs de polydispersité de taille et de forme, deux types de clusters peuvent être observés : 1) des clusters identifiés à des domaines cristallins comme ceux présentés sur la figure 5.6, et 2) de longues chaînes en forme de zig-zag. Pour une polydispersité de taille faible mais de forme élevée, les clusters semblent être plus petits.

La figure 5.17 montre le nombre de clusters  $N_c$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Nous pouvons voir que, indépendamment de  $\delta$ ,  $N_c$  reste constant tant que  $s < 0.4$ , et décroît rapidement vers une valeur plus faible lorsque  $s$  augmente. Nous pouvons voir aussi que, pour une valeur donnée de  $s$ ,  $N_c$  augmente avec  $\delta$ . En même temps, le nombre moyen de particules par cluster  $\langle N_p \rangle$  augmente avec  $s$ , comme on peut voir dans l'encadré de la figure 5.17. Puisque la forme et la taille des clusters varient avec la polydispersité, il est intéressant de quantifier l'évolution des dimensions maximale  $\ell_{max}$  et minimale  $\ell_{min}$  de ces clusters en fonction de la polydispersité.

La figure 5.18(a) montre  $\ell_{max}$  et  $\ell_{min}$  normalisées par le diamètre maximum  $d_{max}$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Nous voyons que, en raison du désordre,  $\ell_{max}$  et  $\ell_{min}$  décroissent avec l'augmentation de  $s$  et  $\delta$ .  $\ell_{max}$  est de l'ordre de 13 fois le diamètre moyen pour les systèmes les plus réguliers (i.e  $s = 0.01$  et  $\delta = 0$ ) et seulement de 5 diamètres pour les moins réguliers (i.e  $s = 0.9$  et  $\delta = 1$ ). Nous pouvons voir aussi que la polydispersité de forme affecte de manière notable la taille moyenne des clusters pour de faibles polydispersités de taille. Comme cela était le cas pour la compacité, l'effet de la polydispersité en forme devient moins fort au fur et à mesure que la polydispersité en taille augmente. En effet, pour des systèmes quasi-monodisperses,  $\ell_{max}/d_{max}$  décroît de 13 à 7 avec  $\delta$  qui varie de 0 à 1 alors qu'il



(a)



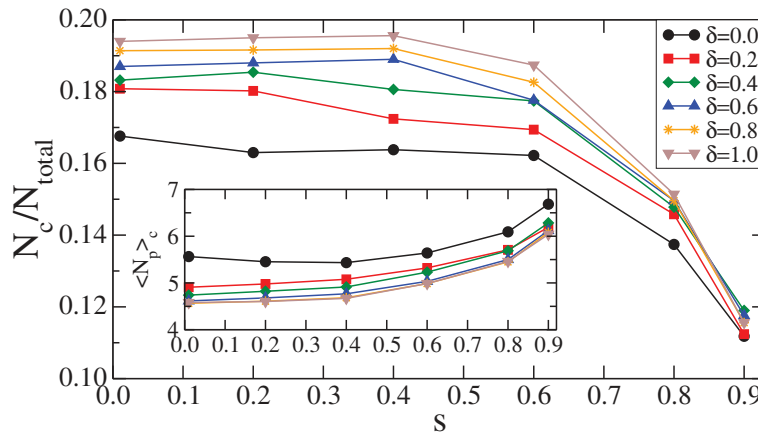
(b)





**FIGURE 5.16.** – Clusters des particules connectées par contacts côté-côté pour  $(s, \delta) = (0, 01, 0)$ (a),  $(s, \delta) = (0, 9, 0)$ (b),  $(s, \delta) = (0, 01, 1)$ (c) et  $(s, \delta) = (0, 9, 1)$ (d). Les clusters sont représentés par différentes couleurs (vert, orange, pourpre et rouge cardinal). Les contacts côté-côté sont aussi représentés par une ligne rouge reliant les centres des deux particules. Les particules flottantes sont en blanc.

décroit de 5 à 3 si  $s = 0,9$ .



**FIGURE 5.17.** – Nombre des clusters côté-côté  $N_c$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . L'encadré montre le nombre moyen des particules dans un cluster côté-côté  $\langle N_p \rangle_c$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

La sphéricité moyenne des clusters peut être aussi évaluée en considérant le rapport d'aspect  $\alpha = \ell_{max}/\ell_{min}$ . Le rapport d'aspect moyen des clusters,  $\langle \alpha \rangle$ , est présenté sur la figure Fig.5.18(b). Nous pouvons voir que  $\langle \alpha \rangle$  décroît avec à la fois  $s$  et  $\delta$ , ce qui indique que les clusters deviennent de moins en moins anisotrope au fur et à mesure que le désordre structural augmente. La figure 5.18(b) montre aussi clairement que la forme anisotrope des clusters (même à faible polydispersité) est une conséquence de l'agencement des grains en colonnes rigides.

### 5.3.3. Distribution des efforts

La description faite précédemment de la microstructure donne une image de base de l'effet de la polydispersité de taille et de forme. Mais cette image est clairement insuffisante du point de vue mécanique. En particulier, les contacts côté-côté capturent l'essentiel des forces fortes et jouent donc un rôle majeur dans l'équilibre local des forces. Ainsi, on peut très bien supposer que l'anisotropie des clusters identifiés précédemment résulte des forces les plus fortes. Pour tester cela, nous traçons sur la figure 5.19 les forces moyennes  $\langle f_{ss} \rangle$  et  $\langle f_{sv} \rangle$ , portées respectivement par les contacts côté-côté et sommet-côté en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Dans un premier temps, on peut voir que les forces moyennes sont indépendantes de  $\delta$ . De même, bien que la proportion des contacts côté-côté est moitié moindre que celle des contacts sommet-côté,  $\langle f_{ss} \rangle$  est bien plus grande que  $\langle f_{sv} \rangle$ . Ainsi, il est plausible de relier l'anisotropie des clusters à l'anisotropie induite par les chaînes de force fortes qui s'organisent en colonnes. La différence  $\langle f_{ss} \rangle - \langle f_{sv} \rangle$  décroît alors que  $s$  augmente, ce qui est en accord avec la décroissance de l'anisotropie des clusters.

La figure 5.20 montre une carte des forces de contacts et des clusters côté-côté, pour deux valeurs extrêmes de polydispersité. Les forces normales sont représentées par un trait joignant

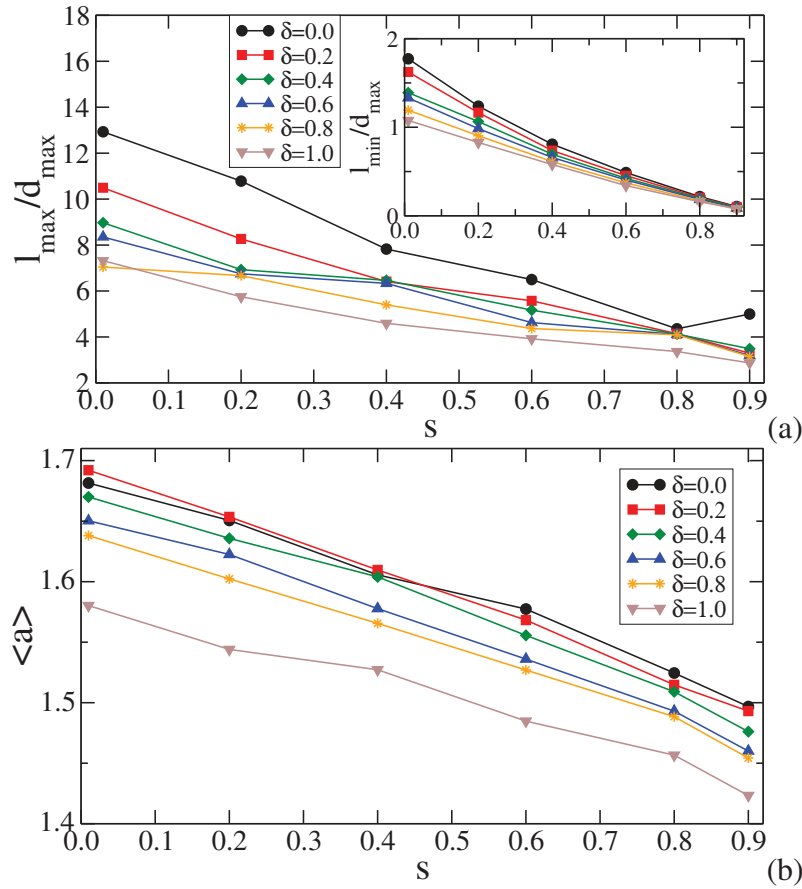
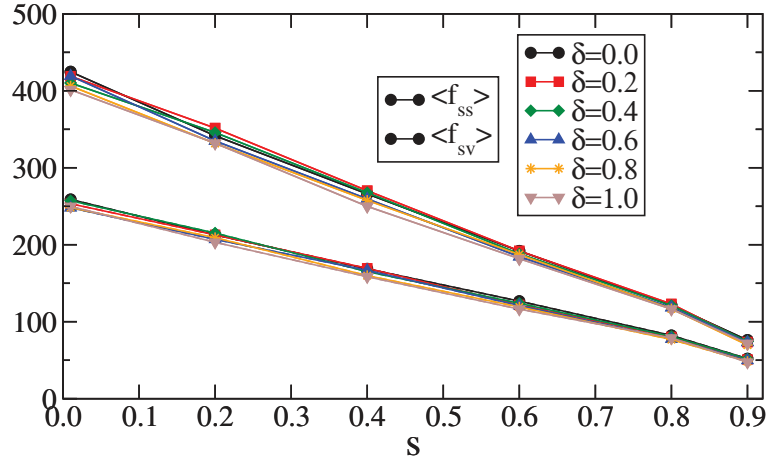


FIGURE 5.18. – (a) Longueurs principales maximale et minimale ( $a$ ) et le rapport d'aspect moyen  $\langle \alpha \rangle$  (b) de clusters côté-côté en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

le centre des deux particules en contact et dont l'épaisseur dépend de l'intensité de la force. L'impression qui ressort de ces deux cartes est cohérente avec l'idée donnée plus haut, à savoir que les clusters les plus anisotropes, le sont le long des chaînes de forces les plus fortes. La figure 5.20(b) nous fournit de surcroît une illustration encore plus parlante de la nature multi-échelle de la distribution des forces pour un système très polydisperse, comme cela a d'ailleurs déjà été analysé dans [152] pour des systèmes composés de disques. La force moyenne  $\langle f_n \rangle(d_r)$  par classe de taille de particules en fonction de  $d_r$  est présentée sur la figure 5.21 pour toutes les valeurs de  $s$  et pour  $\delta = 0$  et 1. Cette force moyenne est linéaire en fonction de  $d_r$  quel que soit  $s$ , mais avec une pente qui augmente au fur et à mesure que  $s$  augmente. Autrement dit, les forces sont capturées par les particules les plus grosses. De plus, la taille moyenne  $d_r = 0.5$  est le point de séparation entre les forces inférieures et supérieures à la force moyenne.

Ainsi, l'effet de la polydispersité est de renforcer les nombres à la fois des forces fortes et faibles. Cela peut être mieux apprécié si l'on regarde les probabilités de distributions (pdf) des forces normalisées par la force moyenne  $\langle f_n \rangle$ , comme cela est présenté sur la figure 5.22 pour deux valeurs de  $s$  à  $\delta = 0$ . On constate que la distribution est bien plus large pour  $s = 0.9$  que pour  $s = 0.01$ . Pour le système faiblement polydisperse, les forces inférieures à la moyenne



**FIGURE 5.19.** – Force moyenne portée par les contacts côté-côté  $\langle f_{ss} \rangle$  et sommet-côté  $\langle f_{sv} \rangle$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

décroissent en nombre quand  $f_n \rightarrow 0$ . Au contraire, un système très polydisperse présente une loi de puissance pour les forces faibles. Dans les deux cas, cependant, le pdf des forces pour les forces supérieures à la force moyenne est caractérisé par une décroissance presque exponentielle, comme cela est observé habituellement dans la littérature [113, 39, 18, 134, 12, 10, 54]. La forme exponentielle est clairement mieux définie dans le cas polydisperse.

La forme des pdf des forces est habituellement approchée par la relation suivante :

$$P(f_n) \propto \begin{cases} \left(\frac{f_n}{\langle f_n \rangle}\right)^{-\alpha} & \text{for } f_n < \langle f_n \rangle, \\ e^{-\beta f_n / \langle f_n \rangle} & \text{for } f_n > \langle f_n \rangle, \end{cases} \quad (5.6)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions de  $s$  et  $\delta$  comme cela est indiqué sur la figure 5.23. On peut voir que  $\beta$  est presque constant avec  $s$  jusqu'à 0.4, puis il décroît de  $\simeq 2$  vers  $\simeq 1$  alors que  $s$  augmente. Dans le cas où  $s < 0.4$ , l'effet de  $\delta$  est d'augmenter  $\beta$ , ce qui est contre-intuitif puisque cela signifie que l'augmentation de la polydispersité de forme implique que la distribution des forces est plus homogène. Ceci est néanmoins cohérent avec l'augmentation de la compacité avec  $\delta$  dans la même gamme de valeurs de  $s$ , comme observé sur la figure 5.4, mais contraste avec la diminution de  $Z$  avec  $\delta$  comme observé aussi sur la figure 5.12.

Concernant l'exposant  $\alpha$ , sa valeur est négative est presque constante dans la gamme de  $s < 0.4$ , et augmente avec  $s$  après. En fait, puisque le pdf est une fonction normalisée, et puisque la force moyenne est le point de séparation des deux comportements, on a [112] :

$$\beta^2 = (1 - \alpha)(2 - \alpha). \quad (5.7)$$

Cette relation est approximativement vérifiée pour nos données.



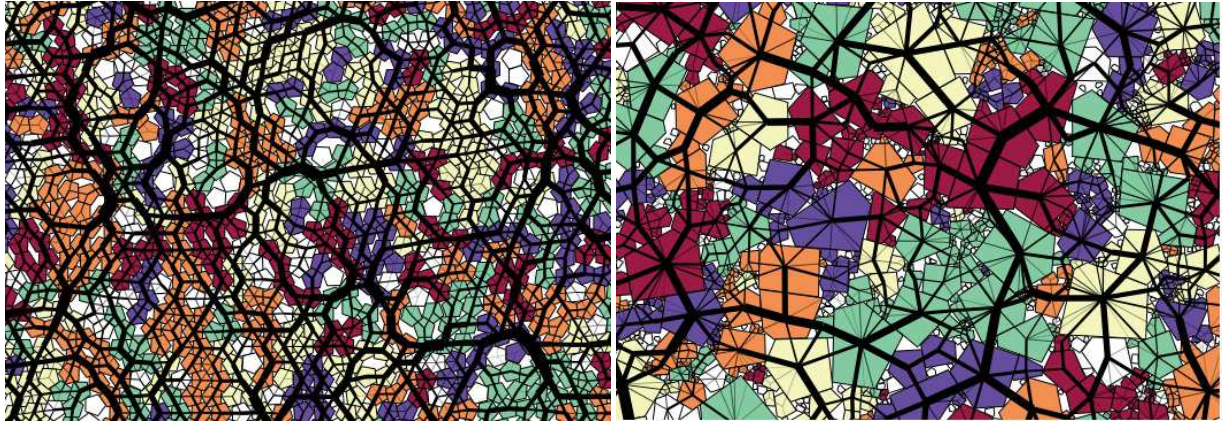


FIGURE 5.20. – Carte des chaînes de forces pour  $(s, \delta) = (0.01, 0)$ (a) et  $(s, \delta) = (0.9, 1)$ (b). Les chaînes de forces sont représentées par un trait liant les centres des particules et dont l'épaisseur est proportionnelle à l'intensité de la force. Les clusters sont aussi représentés.

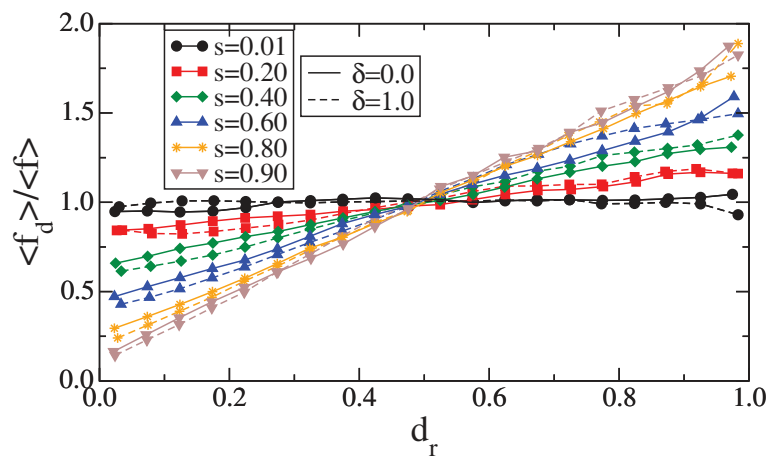


FIGURE 5.21. – Force moyenne  $\langle f_d \rangle$  en fonction du diamètre réduit  $d_r$  pour toutes les valeurs de  $s$  et deux valeurs de  $\delta$ .

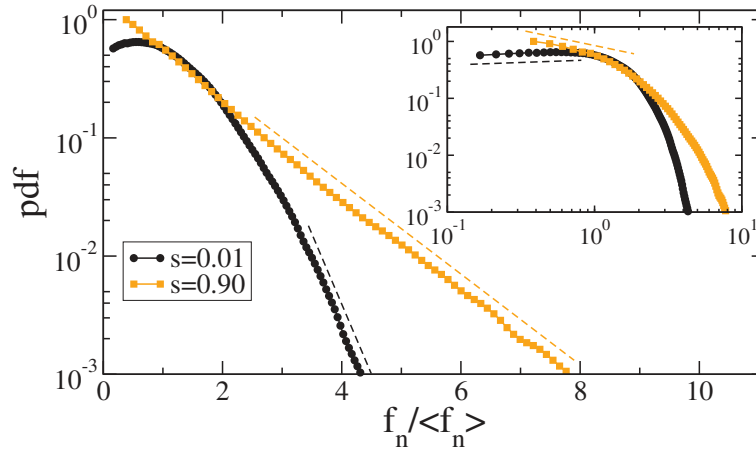


FIGURE 5.22. – Fonctions de la probabilité de densité  $P(f_n)$  de la force normale  $f_n$  pour  $\delta = 0$  et deux valeurs extrêmes de  $s$  dans l'échelle log-linéaire et log-log (encadré). Les lignes en pointillés sont des guides pour les yeux.

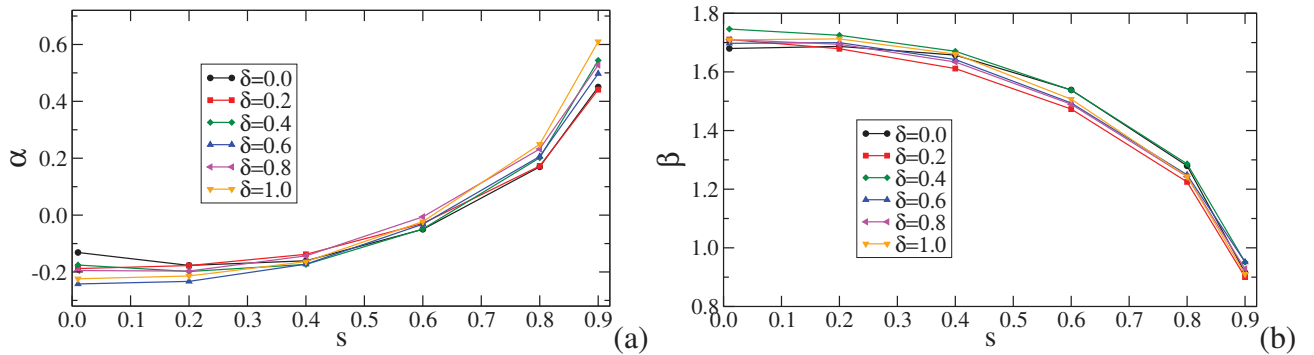


FIGURE 5.23. – Variation des paramètres  $\alpha$ (a) et  $\beta$ (b); voir l'équation 5.6, en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .



# Rhéologie quasi-statique

## Sommaire

---

<b>6.1. Procédure numérique</b>	<b>84</b>
<b>6.2. Comportement macroscopique</b>	<b>84</b>
6.2.1. Variable de contrainte et de déformation	84
6.2.2. Résistance au cisaillement et compacité	86
<b>6.3. Analyse de la microstructure dans l'état critique</b>	<b>86</b>
6.3.1. Topologie du réseau de contacts	87
6.3.2. Chaines de force et mobilisation du frottement	93
6.3.3. Anisotropies du réseau de contacts	98

---



L'étude de l'état d'équilibre statique présentée au chapitre précédent (cf chapitre 5) a permis de mettre en évidence l'influence de la polydispersité de taille et de forme sur les propriétés de remplissage d'espace, la structure granulaire et la transmission des efforts dans l'état RCP. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la compaction biaxiale des assemblages denses isotropes décrits précédemment comme états initiaux. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la rhéologie, c'est-à-dire à l'évolution vers l'état critique en termes de contraintes de cisaillement et de compacité, mais aussi à la texture et la transmission des forces dans l'état critique, dans le but de comprendre l'influence des paramètres de polydispersité de forme et de taille sur la résistance au cisaillement.

## 6.1. Procédure numérique

Les assemblages denses isotropes décrits dans le chapitre 5 sont maintenant soumis à un chargement biaxial en imposant une contrainte de confinement constante  $\sigma_{xx} = p$  sur la paroi de droite et une vitesse verticale constante  $v_y < 0$  sur la paroi supérieure. Le coefficient de frottement entre des particules est posé égal à 0,4. Mais le frottement entre les particules et les parois est nul. Le frottement nul avec les parois permet d'éviter les gradients de contraintes induits par l'effet Janssen [37].

Puisque nous nous intéressons au comportement quasi-statique, le taux de déformation vertical  $\dot{\epsilon}$  doit être assez faible pour que l'énergie cinétique induite par la déformation soit négligeable comparée à la pression statique. En d'autres termes, le paramètre d'inertie  $I$  [62] doit être petit :

$$I = \dot{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{p}} \ll 1, \quad (6.1)$$

où  $m$  est la masse moyenne d'une particule et  $p$  la pression de confinement. Dans nos simulations,  $I$  est en dessous de  $10^{-3}$ . Chaque échantillon est cisailé jusqu'à ce que l'état critique soit atteint avec une compacité presque constante.

Dans ce qui suit, le comportement pour chaque jeu de paramètre  $(s, \delta)$  est obtenu en prenant la valeur moyenne de trois jeux de données indépendantes. Ainsi, 108 échantillons ont été cisailés pour six valeurs différentes de l'étalement  $s \in [0, 01; 0, 9]$  et pour six valeurs différentes du paramètre  $\delta \in [0; 1]$ .

## 6.2. Comportement macroscopique

### 6.2.1. Variable de contrainte et de déformation

Afin de décrire le comportement mécanique, il est nécessaire d'évaluer l'état de contrainte et les déformations cumulées du système à tout instant et dans un élément de volume quelconque. L'état de contrainte est donné par le tenseur de contrainte qui peut être évalué de différentes façons. Pour nos analyses, nous considérons le "moment tensoriel"  $M^i$  défini pour chaque par-

ticule  $i$  [98, 136] :

$$M_{\alpha\beta}^i = \sum_{c \in i} f_{\alpha}^c r_{\beta}^c, \quad (6.2)$$

où  $f_{\alpha}^c$  est la composante  $\alpha$  de la force exercée sur la particule  $i$  au contact  $c$ ,  $r_{\beta}^c$  est la composante  $\beta$  du vecteur position du contact  $c$ , et la sommation est faite sur tous les contacts des particules en contact avec la particule  $i$  (noté brièvement  $c \in i$ ).

On peut montrer que, en raison de l'égalité des efforts d'action et de réaction aux contacts entre particules, le moment tensoriel d'une collection de particules rigides dans un volume  $V$  est la somme des moments tensoriels des particules individuelles. Le tenseur des contraintes  $\sigma_{\alpha\beta}$  pour un volume  $V$  de l'assemblage est simplement donné par [98, 136] :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{i \in V} M_{\alpha\beta}^i = \frac{1}{V} \sum_{c \in V} f_{\alpha}^c \ell_{\beta}^c, \quad (6.3)$$

où  $\ell^c$  est le vecteur branche reliant les centres de deux particules au contact  $c$ . La première sommation s'effectue sur toutes les particules, tandis que la deuxième sommation implique tous les contacts dans le volume  $V$ .

Dans un essai de compression biaxiale, la direction principale majeure des contraintes coïncide avec l'axe de compression et les contraintes principales  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont respectivement orientées suivant les directions de compression (ici verticale) et d'extension (ici horizontale) de telle sorte que  $\sigma_1 = \sigma_{yy}$  et  $\sigma_2 = \sigma_{xx} = p_0$ . Nous allons utiliser la pression moyenne  $p$  et le déviateur des contraintes  $q$  donnés par

$$p = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \quad (6.4)$$

$$q = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \quad (6.5)$$

Les variables de déformation sont données par les déformations de la cellule de simulation. Soient  $h_0$  et  $l_0$  respectivement la hauteur initiale et la largeur initiale de la cellule. La compression étant pilotée suivant la direction verticale, les déformations principales cumulées  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont données par

$$\varepsilon_1 = \int_{h_0}^h \frac{dh'}{h'} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta h}{h_0} \right), \quad (6.6)$$

$$\varepsilon_2 = \int_{l_0}^l \frac{dl'}{l'} = \ln \left( 1 + \frac{\Delta l}{l_0} \right), \quad (6.7)$$

où  $\Delta h = h_0 - h$  et  $\Delta l = l - l_0$ . La déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  est alors donnée par

$$\varepsilon_q = \varepsilon_1 - \varepsilon_2, \quad (6.8)$$

## 6.2.2. Résistance au cisaillement et compacité

La figure 6.1 montre l'évolution du déviateur des contraintes normalisé  $q/p$  et de la compacité  $\rho$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour différentes valeurs du couple  $(s, \delta)$ . Au cours du cisaillement, le déviateur de contrainte augmente rapidement jusqu'à un pic avant de diminuer et se stabiliser à une valeur presque constante  $\sin \varphi$ . La valeur constante  $\sin \varphi$  caractérise l'état critique du matériau. En même temps, l'assemblage se dilate durant le cisaillement et  $\rho$  décroît de sa valeur initiale atteinte après la compaction isotrope  $\rho^{iso}$  (voir Sec. 5) jusqu'à une valeur constante  $\rho$  dans l'état critique. Le matériau se dilate de manière homogène au début et donc  $\rho$  décroît rapidement. Aux grandes déformations la dilatation se produit essentiellement au travers des bandes de cisaillement qui se forment dans le matériau. Comme ces bandes de cisaillement naissent et meurent en différents endroits du matériau, une densité presque homogène est atteinte vers  $\varepsilon_q = 0,4$ .

Pour nos systèmes de particules rigides, la valeur résiduelle de la compacité  $\rho$  est indépendante de la pression de confinement et, comme pour  $\sin \varphi$ , elle est considérée comme une propriété intrinsèque du matériau. Ces deux grandeurs résultent donc naturellement des distributions des formes et des tailles des particules mais aussi du frottement local entre grains.

Les figures 6.2 et 6.3 montrent respectivement les valeurs moyennes de  $\sin \varphi$  et de  $\rho$  en fonction de  $s$  et  $\delta$ . Tout d'abord, nous pouvons voir qu'indépendamment de  $\delta$ , la résistance au cisaillement à l'état critique est constante avec  $s$ . Ce résultat généralise donc aux grains anguleux un résultat précédent obtenu uniquement pour des disques [152]. Mais il est remarquable que la résistance au cisaillement décroît linéairement au fur et à mesure que le degré d'irrégularité des grains augmente. Par exemple,  $\sin \varphi$  varie de 0,50 à 0,46 pour  $s = 0,01$  et  $\delta$  allant de 0 à 1. Ce résultat est assez inattendu car, même si l'angularité moyenne (i.e la moyenne des angles extérieurs) de chaque grain ne varie pas avec  $\delta$ , l'anisométrie géométrique des particules varie. Or, comme cela a été montré récemment, la résistance au cisaillement augmente avec l'augmentation du rapport d'aspect des particules [31, 8]. En revanche, sur la figure 6.3 nous voyons que la compacité augmente avec à la fois  $s$  et  $\delta$ . En d'autres termes, les systèmes les plus denses ont une résistance identique aux systèmes les plus lâches. Ce comportement est relativement contre-intuitive car il est souvent admis que la résistance au cisaillement augmente avec la compacité, ce qui n'est pas le cas ici.

Afin de comprendre les origines de ce comportement quelque peu paradoxal, on va s'intéresser à la microstructure granulaire en terme de la connectivité des particules, l'anisotropie du réseau de force et de contact et de la transmission des efforts.

## 6.3. Analyse de la microstructure dans l'état critique

Nous nous intéressons ici aux descripteurs de la texture dans l'état critique. Certains descripteurs ont été présentés et appliqués dans le chapitre 5 à l'état isotrope. Nous allons considérer les mêmes grandeurs, et en introduire de nouvelles, pour l'état critique afin de caractériser la structure interne de cet état en fonction de  $s$  et de  $\delta$  et par rapport à l'état isotrope.

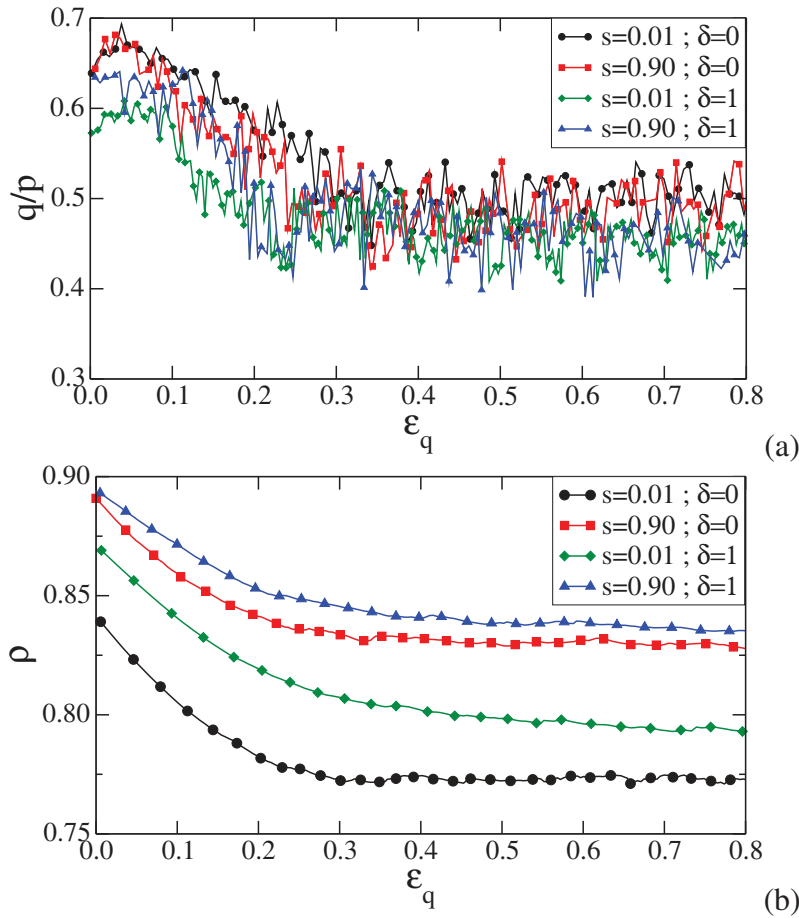
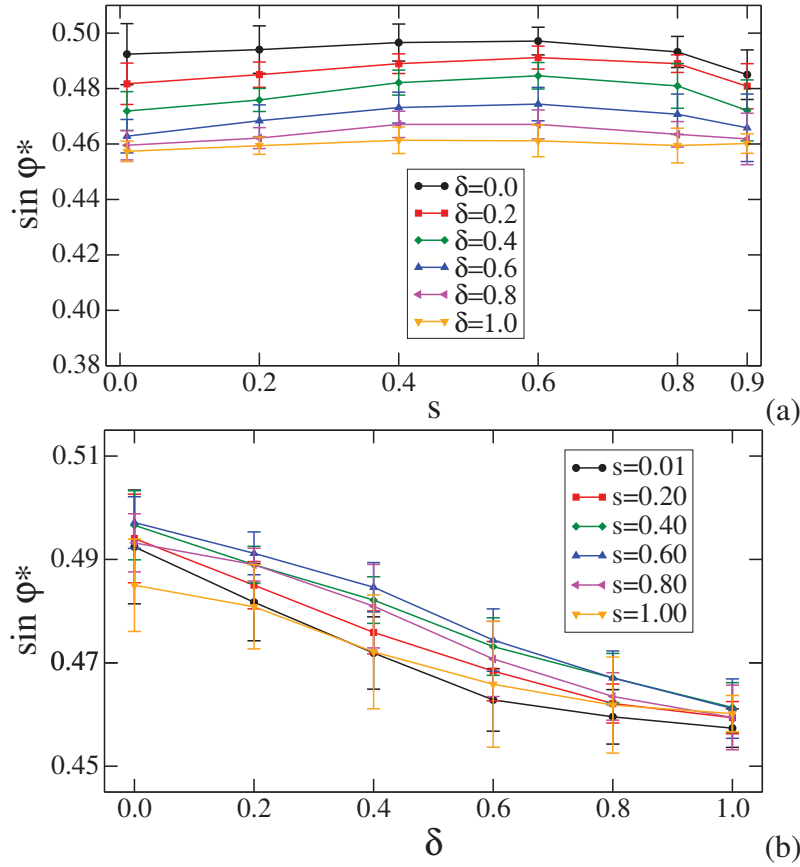


FIGURE 6.1. – Déviateur de contraintes normalisées  $q/p$ (a) et compacité  $\rho$ (b) en fonction de la déformation de cisaillement  $\epsilon_q$  pour différentes valeurs du couple  $(s, \delta)$ .

### 6.3.1. Topologie du réseau de contacts

La figure 6.4 montre des images du réseau de contacts dans l'état critique pour quatre échantillons. Comme nous l'avons observé pour les empilements isotropes dans la section précédente (Sec. 5.3), la topologie du réseau de contact varie aussi fortement avec  $s$  et  $\delta$  dans l'état critique. Une impression générale est que les particules flottantes sont isolées pour les grandes polydispersités de forme, alors qu'elles se regroupent aux faibles polydispersités de forme. De plus, pour les grandes polydispersités de taille, il semble que les particules flottantes soient majoritairement des petites particules.

La figure 6.5(a) montre la proportion des particules flottantes  $P_f$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . On voit que  $P_f$  augmente rapidement avec  $s$  de 0, 15 à 0, 60 sans pour autant être influencée par  $\delta$ . De plus, près de la moitié des particules sont flottantes pour les plus grandes valeurs de  $s$ . Autrement dit, seulement la moitié des particules participent au réseau de force alors que ces systèmes sont les plus denses. Or, une compacité élevée implique un arrangement dense des particules et donc devrait impliquer un plus grand nombre de particules dans le réseau



**FIGURE 6.2.** – Déviateur de contrainte  $\sin \varphi$  moyenné dans l'état résiduel en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ (a) et en fonction de  $\delta$  pour toutes les valeurs de  $s$ (b).

de contact. Nous reviendrons sur ce point plus loin quand nous étudierons la transmission des efforts en fonction de la taille des particules.

La figure 6.5(b) montre la variation de  $Z$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ . Contrairement à  $P_f$ ,  $Z$  reste presque constant lorsque  $s$  varie mais il augmente avec  $\delta$ . En effet, comme nous l'avons expliqué précédemment, les pentagones irréguliers ont au moins un angle interne bien en dessous de  $\pi/5$  ce qui permet au sommet correspondant de "mieux" s'introduire dans le volume libre entre deux particules, ce qui conduit à la création de contacts inaccessibles pour les polygones les moins irréguliers. Pour aller plus loin dans cette description, on trace sur la figure 6.6 le nombre de coordination  $\langle Z \rangle(d_r)$  dans chaque classe des particules en fonction du diamètre réduit  $d_r$  (voir Sec. 5). On voit que, quelque soit  $s$  et  $\delta$ ,  $Z(d_r)$  varie linéairement avec  $d_r$  et a une pente qui augmente rapidement avec  $s$ , et dans une moindre mesure avec  $\delta$ . Cette relation linéaire implique que les plus petites particules ont un faible nombre de contacts et sont donc plus susceptibles d'être exclues du réseau de contact. En revanche, les particules les plus grosses sont les plus connectées. Ainsi, comme cela a été aussi observé pour le cas isotrope, l'augmentation de  $s$  et de  $\delta$  conduit à une plus grande diversification des configurations topologiques. Ceci est illustré sur la figure 6.4 où les petites particules sont pour la plupart

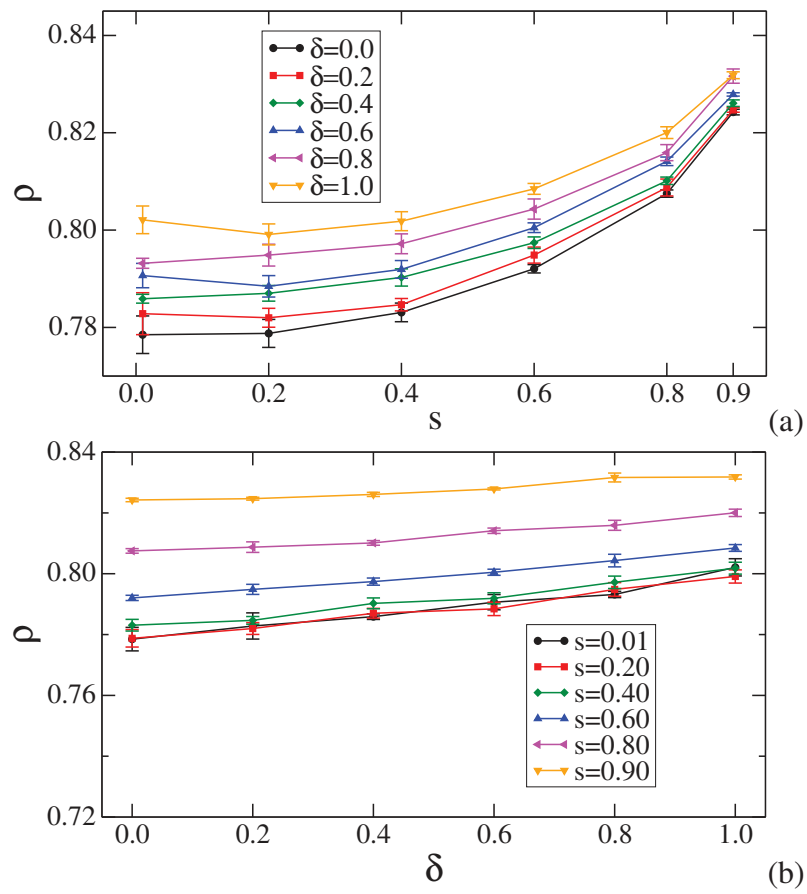
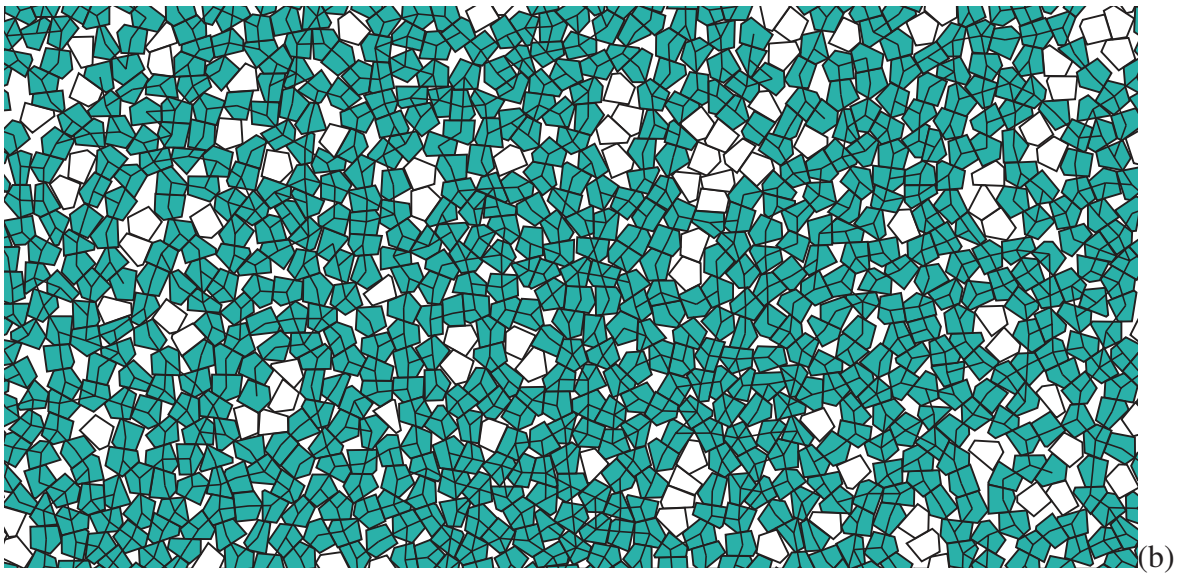
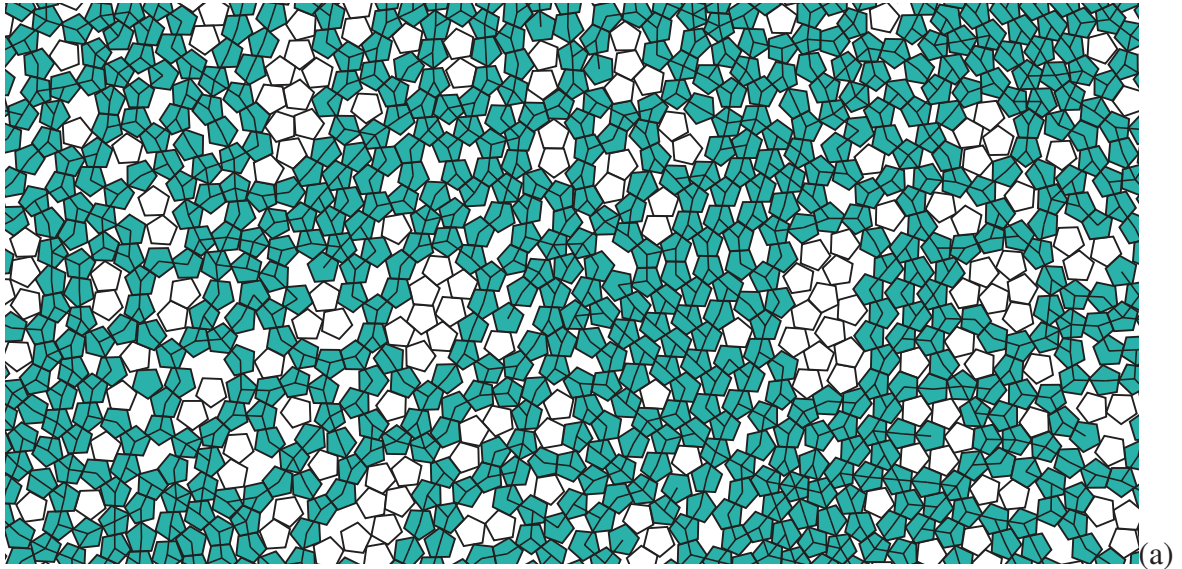
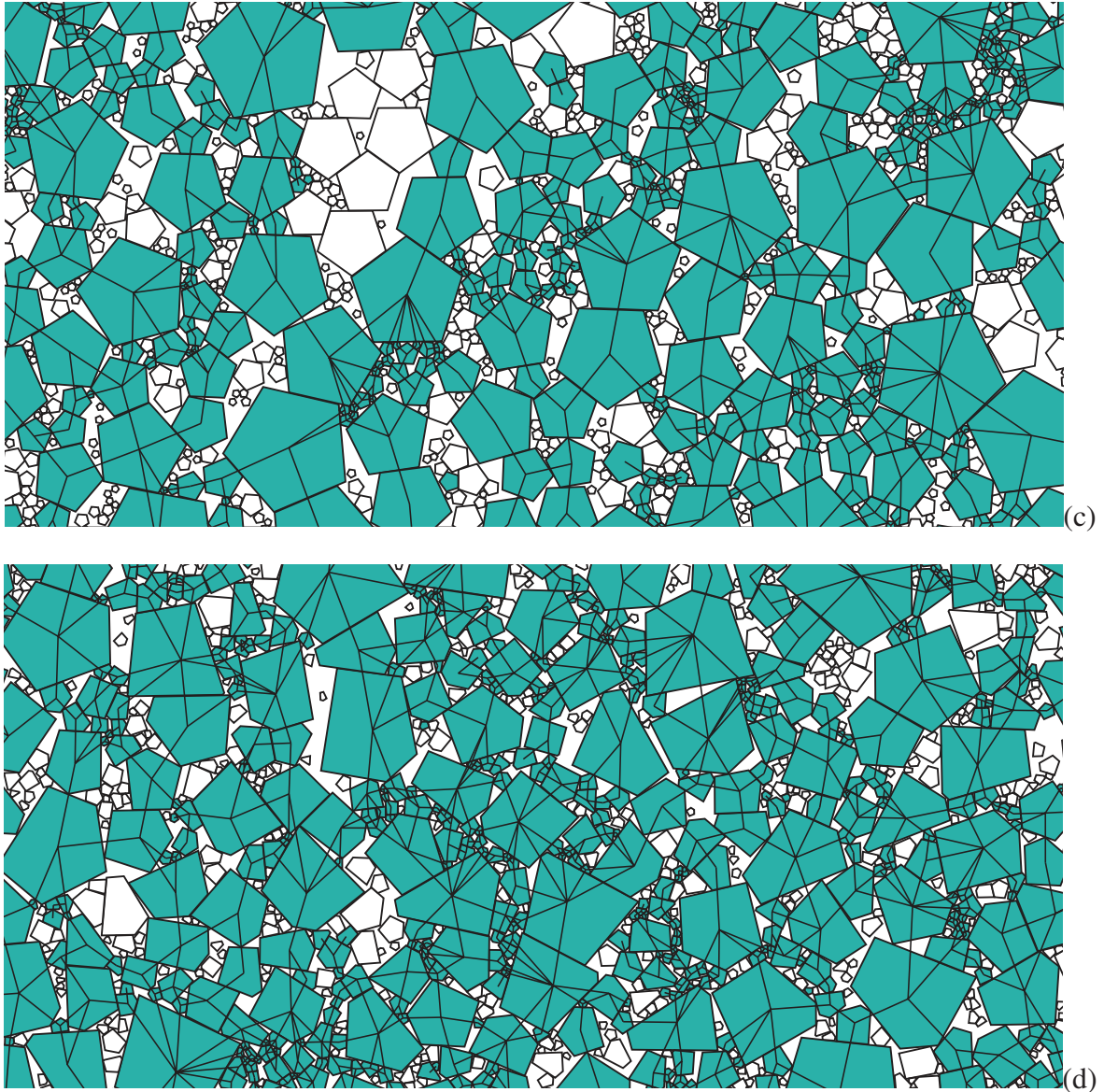


FIGURE 6.3. – Compacité moyenne dans l'état résiduel en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ (a) et en fonction de  $\delta$  pour toutes les valeurs de  $s$ (b).







**FIGURE 6.4.** – Images du réseau de contact pour  $(s, \delta) = (0, 01; 0)(a)$ ,  $(s, \delta) = (0, 9; 0)(b)$ ,  $(s, \delta) = (0, 01; 1)(c)$  et  $(s, \delta) = (0, 9; 1)(d)$  Les particules flottantes (particules ayant 0 ou 1 contact) sont tracées en blanc. Les contacts sont représentés par des segments liant les centres des particules en contact.



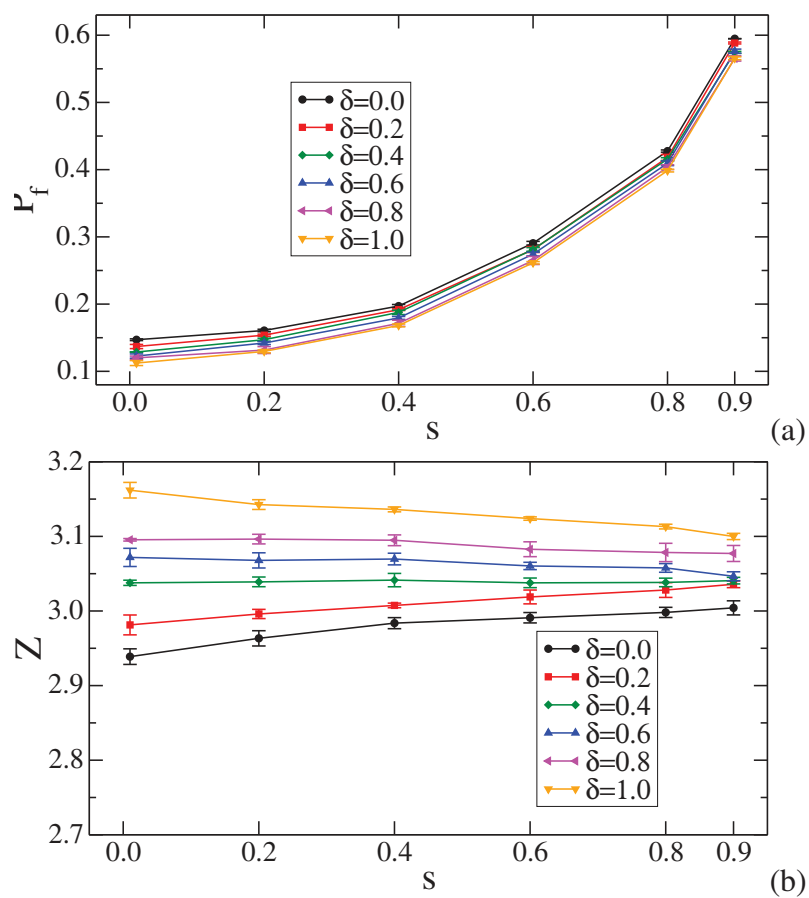


FIGURE 6.5. – (a) Proportion  $P_f$  des particules flottantes et (b) nombre de coordination  $Z$  en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$ .

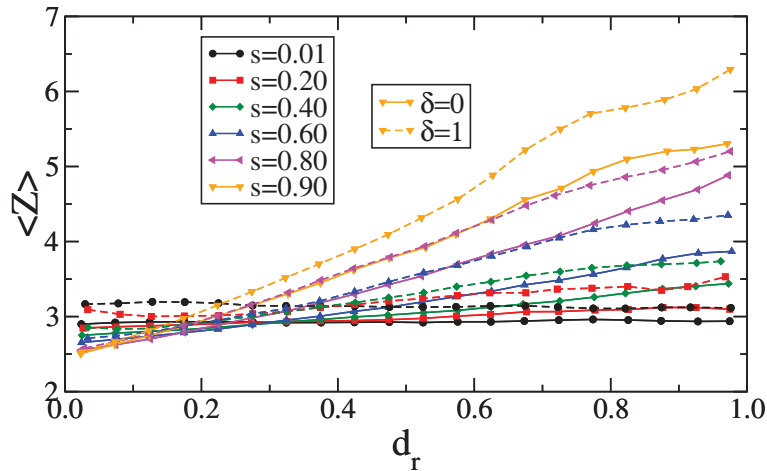


FIGURE 6.6. – Nombre de coordination moyen  $\langle Z \rangle(d_r)$  par classe de particules en fonction du diamètre réduit  $d_r$ .

regroupées dans les pores entre les plus grosses particules. Elles forment des groupes de particules qui peuvent être complètement exclus du réseau de contact, où au contraire être incluses sous forme de structures locales faiblement connectées.

### 6.3.2. Chaines de force et mobilisation du frottement

Les chaines de forces ainsi que la présence des forces de frottement et leur mobilisation sont un mécanisme clé de la résistance au cisaillement des empilements. On va s'intéresser dans cette partie à l'intensité des forces de contact ainsi qu'au lien entre les forces, la taille, et la forme des particules faisant partie du réseau. Dans les milieux granulaires, les forces entre les particules sont intrinsèquement liées au contact. Pour cette raison, définissons d'abord le repère local  $(\mathbf{n}, \mathbf{t})$  attaché à un contact  $c$ , où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal, perpendiculaire au côté impliqué dans le contact, et  $\mathbf{t}$  est le vecteur unitaire tangent ; voir figure 6.7. A un contact on associe la force de contact  $\mathbf{f}$  qui s'exprime en termes de ses composantes normale et tangentielle dans le repère local :  $\mathbf{f} = f_n \mathbf{n} + f_t \mathbf{t}$ . D'après le critère de Morh-Coulomb, le glissement se produit pour les contacts où la force de frottement est égale à la valeur absolue du coefficient de frottement  $\mu$  fois la force normale  $f_n$ . Nous définissons donc l'indice de mobilisation du frottement pour un contact  $c$  par [125, 10, 164] :

$$I_\mu^c = \frac{|f_t^c|}{\mu f_n^c} \quad (6.9)$$

La figure 6.8 montre une carte des forces normales, où les chaines de forces sont représentées par des traits joignant les centres des deux particules en contact avec une épaisseur proportionnelle à la grandeur de force. Nous avons également représenté la mobilisation du frottement à chaque contact  $c$  par des disques rouges dont le diamètre est proportionnel à  $I_\mu^c$ . Une inspection rapide révèle que, pour un grand étalement granulométrique, les forces les plus fortes

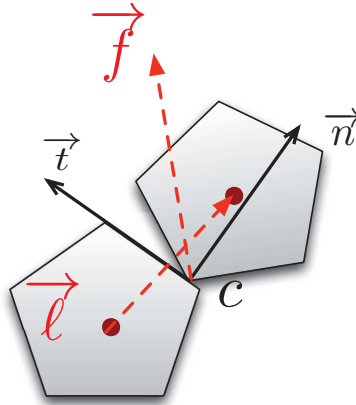


FIGURE 6.7. – Configuration géométrique d'un contact.

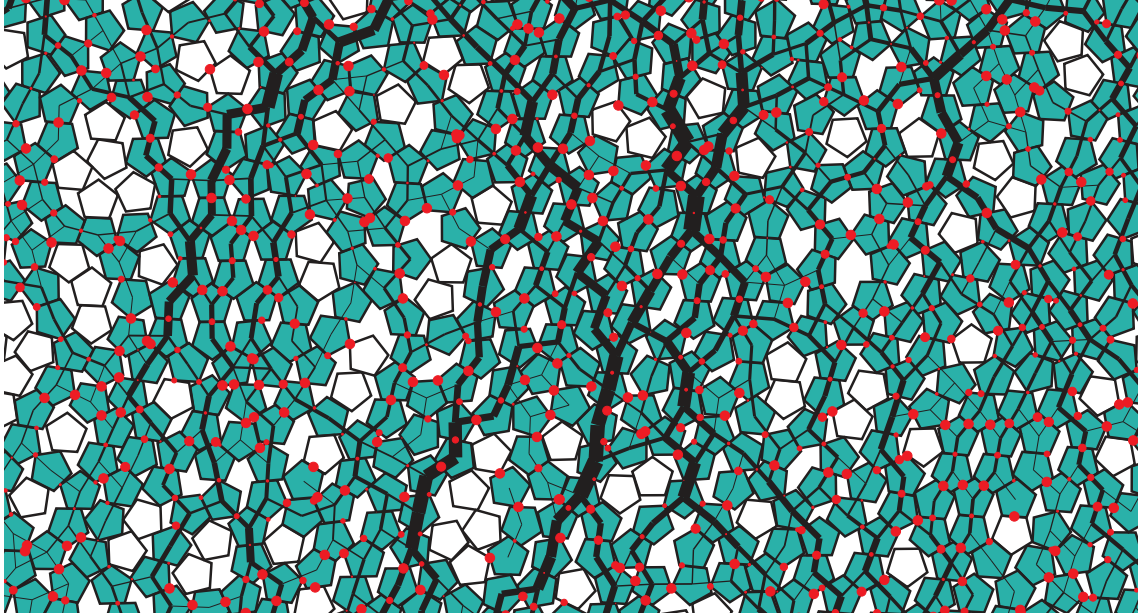
sont portées par les grains les plus gros, alors que les contacts les plus mobilisés en frottement semblent être portés par les particules les plus petites. En revanche, pour un faible étalement granulométrique, il n'y a pas d'organisation particulière des forces et du frottement.

Ainsi, les forces de contact étant associées, par définition, à deux particules de taille éventuellement très différentes, il faut évaluer les couplages entre les forces de contact et la taille du couple de particules, laquelle est représentée par la norme du vecteur branche  $\ell$  (vecteur joignant le centre des deux particules en contact). En effet, une spécificité du réseau de contact est que la norme  $\ell$  du vecteur branche varie fortement en fonction des paramètres  $s$  et  $\delta$ . Par exemple, si on considère le cas d'un assemblage de pentagones réguliers, il est facile de montrer que :

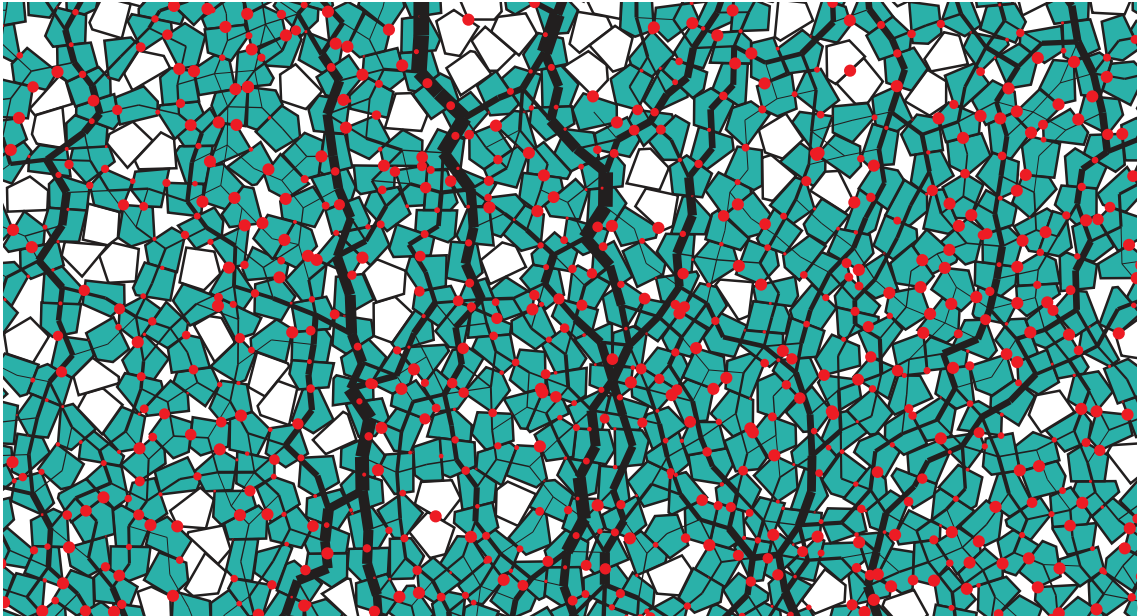
$$\frac{\ell}{R_{max}} \in \left[ 2 \frac{1-s}{1+s} \sin \frac{\pi}{3}; 2 \right], \quad (6.10)$$

avec  $R_{max}$  le rayon maximum. La borne supérieure correspond au cas où deux polygones sont connectés par un contact sommet-sommet. En pratique ce cas n'arrive jamais à cause du désordre d'une part, et du fait qu'un tel contact n'est mécaniquement pas stable. La borne inférieure correspond au cas d'un contact côté-côté entre deux polygones de petites tailles. Ainsi, l'augmentation de  $s$  et de  $\delta$  conduit inévitablement à l'augmentation de la gamme des longueurs qui sont accessibles. L'étude des chaînes de forces en fonction de ces longueurs locales doit nous permettre de mettre en évidence les mécanismes de transmission des forces entre les différentes classes granulométriques d'un système et pour chaque niveau de polydispersité de forme.

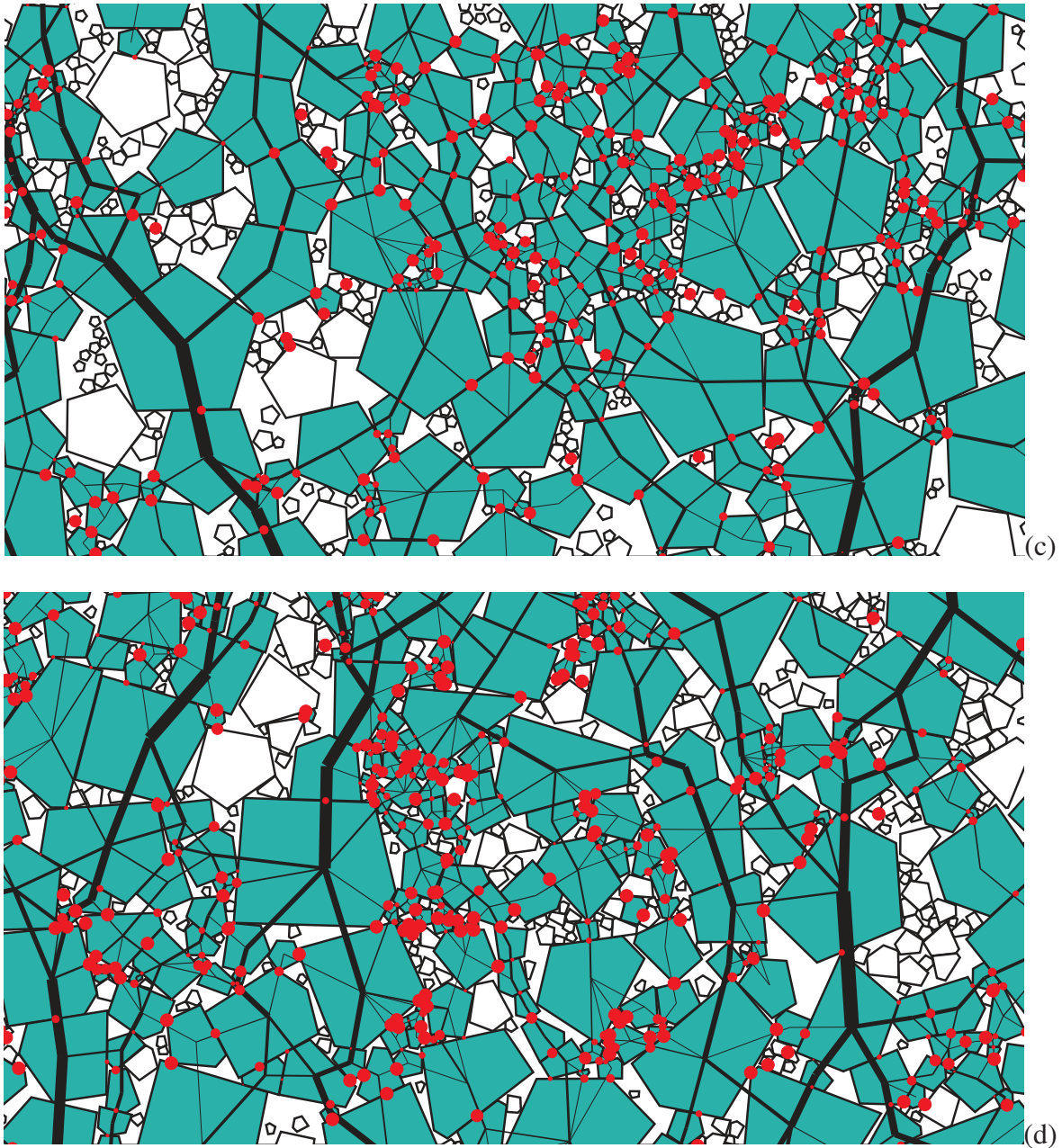
La figure 6.9(a) montre la force normale moyenne  $\langle f_n \rangle_\ell$  calculée en prenant les forces normales dans une classe de contacts dans l'intervalle  $[\ell - \Delta\ell/2, \ell + \Delta\ell/2]$ , en fonction de  $\ell/R_{max}$  pour toutes les valeurs de  $s$  et pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 1$ . Pour  $s < 0.4$  on observe que pour toutes les classes de contact la force normale moyenne  $\langle f_n \rangle_\ell$  est presque égale à la force moyenne globale  $\langle f_n \rangle$ . En revanche, lorsque l'étalement  $s$  est suffisamment grand pour permettre des petites particules entre les plus grandes, nous observons deux zones bien définies : 1) Une classe regroupant les branches les plus petites  $\ell < R_{max}$ , qui en moyenne concentre les forces en des-



(a)

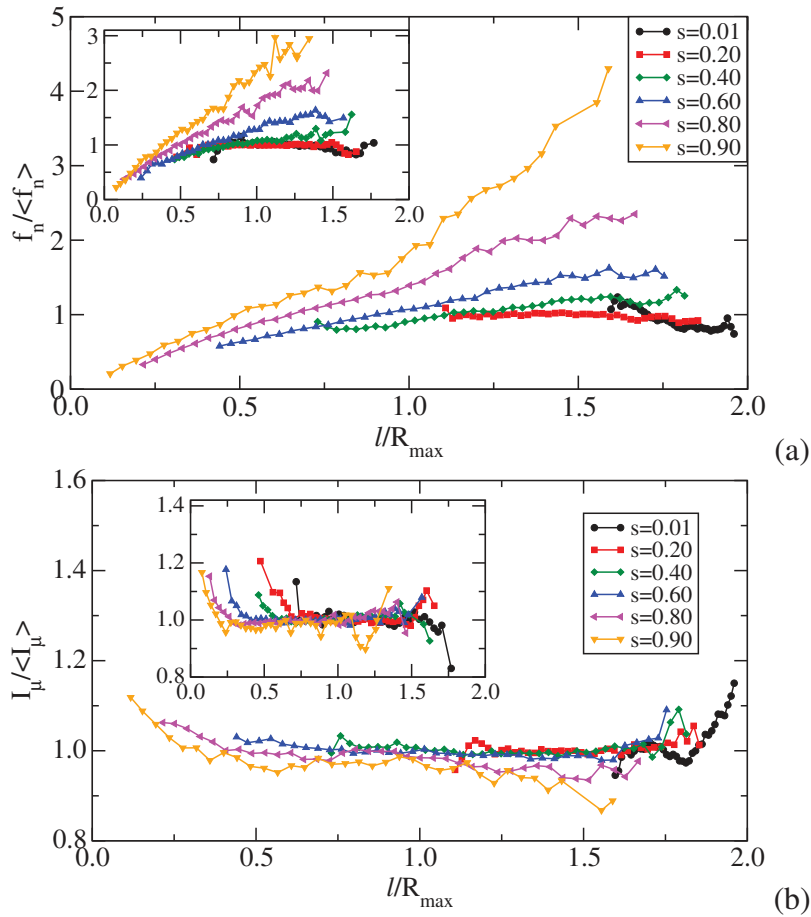


(b)



**FIGURE 6.8.** – Le réseau des forces pour  $(s, \delta) = (0, 01; 0)(a)$ ,  $(s, \delta) = (0, 9; 0)(b)$ ,  $(s, \delta) = (0, 01; 1)(c)$  et  $(s, \delta) = (0, 9; 1)(d)$ . Les particules flottantes (particules ayant 0 ou 1 contact) sont en blanc, les forces sont représentées par l'épaisseur des segments reliant les centres des particules en contact. Les diamètres des cercles rouges sont proportionnelles à  $|f_t^c|/(\mu f_n^c)$  aux contacts.





**FIGURE 6.9.** – (a) Force normale normalisée par la force normale moyenne  $\langle f_n \rangle$  et (b) Indice de mobilisation  $I_\mu$  normalisé par l'indice de mobilisation moyen  $\langle I_\mu \rangle$  en fonction de la norme du vecteur branche normalisé par le rayon de la plus grande particule  $\ell/R_{\max}$ . Les données sont présentées pour  $\delta = 0$  et pour  $\delta = 1$  dans l'insert.

sous de la force moyenne  $\langle f_n \rangle$  et 2) les classes des forces de plus longue branche ( $\ell > R_{max}$ ), qui supportent un nombre croissant de forces fortes au fur et à mesure que  $\ell$  augmente. En d'autres termes, les particules les plus grosses, qui constituent les branches les plus longues, capturent les forces les plus fortes, alors que les forces les plus faibles sont portées par les plus petites particules.

Ce constat est une réminiscence du caractère bi-modal de la transmission des forces, où deux réseaux de forces existent avec différentes fonctions mécaniques clairement identifiées [112, 53, 10]. Ici, on montre que le réseau des forces faibles est porté, en moyenne, par un mélange de particules dont les plus grosses sont exclues, alors que le réseau des forces fortes est porté par un mélange des plus grosses particules. Il est à noter également que le caractère plus ou moins irrégulier des grains n'affecte quasiment pas ce mécanisme, et des valeurs de forces identiques par classe sont obtenues quel que soit  $\delta$ .

La figure 6.9(b) montre l'indice de mobilisation du frottement  $I_\mu(\ell)$  en fonction de la longueur de  $\ell/R_{max}$  pour toutes les valeurs de  $s$  et pour  $\delta = 0$  et  $\delta = 1$ . Nous pouvons voir qu'aux faibles polydispersités de taille et de forme, toutes les classes de contacts sont identiquement mobilisées. L'indice de mobilisation est égal à l'indice de mobilisation global, excepté pour ( $s = 0,01, \delta = 0$ ) où seule la classe des branches les plus grandes est légèrement plus mobilisée en frottement avec une valeur de 1,2 fois la valeur moyenne. Mais, il est remarquable que cette tendance est progressivement renversée au fur et à mesure que l'étalement granulométrique augmente, et la classe des branches les plus petites est de plus en plus mobilisée en frottement, i.e.  $\langle I_\mu \rangle_\ell > \langle I_\mu \rangle$ . En outre, cet effet sur les petites branches est renforcé avec la polydispersité de forme. En effet, on voit même apparaître une classe de contacts très mobilisée pour les plus petites branches pour le couple ( $s = 0,01, \delta = 1$ ). Comme nous l'avons vu précédemment, ces contacts appartiennent au réseau des forces faibles. Il est à noter aussi qu'une classe de très faibles forces mobilisées en frottement a également été mise en évidence dans des assemblages de disques déposés par gravité et inclinés jusqu'à leur limite de stabilité [165, 68], ou encore dans des assemblages de particules allongées soumises à un cisaillement [10].

Cette augmentation de la mobilisation moyenne du frottement implique que la mise en équilibre des particules est plus complexe que dans un système composé disques mono-disperses. De plus, les grandeurs présentées ici bien que donnant une description très fine de la distribution des forces et du frottement au sein du matériau en fonction des paramètres  $s$  et  $\delta$ , ne peuvent pas rendre compte, en l'état, du niveau de contrainte en cisaillement observé. En effet, comme on voit bien sur la figure 6.8, les forces tendent à s'organiser en une structure anisotrope en termes d'orientations des contacts et des forces. Il convient alors, d'enrichir cette description en prenant en compte les propriétés orientationnelles du réseau des forces et les relier à l'état de contraintes moyen du système.

### 6.3.3. Anisotropies du réseau de contacts

Les descripteurs de base pour quantifier l'anisotropie de structurel et des forces sont la distribution angulaire des normales  $P(\mathbf{n})$  et les distributions angulaires moyennes des vecteurs branches  $\langle \ell \rangle$  et des forces  $\langle \mathbf{f} \rangle$  en fonction du vecteur  $\mathbf{n}$  [121, 106, 12, 13, 9, 14]. En dimension 2, le vecteur  $\mathbf{n}$  est simplement décrit par un angle  $\theta$ . Les vecteurs branches et forces quant à eux

peuvent être représentés par leurs composantes normale  $\ell_n$  et  $f_n$ , et tangentielle  $\ell_t$  et  $f_t$ . Ainsi, la densité de probabilité  $P_\theta(\theta)$  des contacts orientés suivant l'angle  $\theta$ , les fonctions angulaires des composantes normales et tangentielles du vecteur branche  $\langle \ell_n \rangle(\theta)$ ,  $\langle \ell_t \rangle(\theta)$ , et des forces  $\langle f_n \rangle(\theta)$  and  $\langle f_t \rangle(\theta)$  en fonction de l'angle  $\theta$ , nous donnent toutes les informations nécessaires pour décrire statistiquement l'anisotropie du réseau de contact et des forces.

Dans un matériau granulaire cisailé, ces fonctions prennent en général une forme simple, unimodale, qui peut être approchée par un développement de Fourier tronqué [121, 12, 9] :

$$\begin{cases} P(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \{1 + a_c \cos 2(\theta - \theta_c)\} (a) \\ \langle \ell_n \rangle(\theta) &= \langle \ell_n \rangle \{1 + a_{ln} \cos 2(\theta - \theta_{ln})\} (b) \\ \langle \ell_t \rangle(\theta) &= \langle \ell_n \rangle a_{lt} \sin 2(\theta - \theta_{lt}) (c) \\ \langle f_n \rangle(\theta) &= \langle f_n \rangle \{1 + a_{fn} \cos 2(\theta - \theta_{fn})\} (d) \\ \langle f_t \rangle(\theta) &= \langle f_n \rangle a_{ft} \sin 2(\theta - \theta_{ft}) (e), \end{cases} \quad (6.11)$$

où  $a_c$  est l'anisotropie d'orientation des contacts,  $a_{ln}$  est l'anisotropie de la composante normale du vecteur branche,  $a_{lt}$  est l'anisotropie de la composante tangentielle du vecteur branche,  $a_{fn}$  est l'anisotropie des forces normales, et  $a_{ft}$  l'anisotropie des forces tangentielles. Les angles  $\theta_c$ ,  $\theta_{ln}$ ,  $\theta_{lt}$ ,  $\theta_{fn}$  et  $\theta_{ft}$  sont les directions privilégiées correspondantes. Ces directions peuvent être toutes différentes, mais elles coïncident avec la direction de contrainte principale  $\theta_\sigma$ , comme cela est illustré sur la figure 6.10 pour les différentes valeurs de  $s$  et de  $\delta$ .

Toutes les anisotropies peuvent donc être facilement évaluées par l'ajustement des fonctions données dans Eq.6.11. Néanmoins, il est plus commode d'utiliser les tenseurs de fabrique et de forces définis par :

$$\begin{cases} F_{\alpha\beta} &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi n_\alpha n_\beta P_\theta(\theta) d\theta, \\ \chi_{\alpha\beta}^{ln} &= \frac{1}{\langle \ell \rangle} \int_0^\pi \langle \ell_n \rangle(\theta) n_\alpha n_\beta P_\theta(\theta) d\theta, \\ \chi_{\alpha\beta}^{lt} &= \frac{1}{\langle \ell \rangle} \int_0^\pi \langle \ell_t \rangle(\theta) n_\alpha t_\beta P_\theta(\theta) d\theta, \\ \chi_{\alpha\beta}^{fn} &= \frac{1}{\langle f_n \rangle} \int_0^\pi \langle f_n \rangle(\theta) n_\alpha n_\beta P_\theta(\theta) d\theta, \\ \chi_{\alpha\beta}^{ft} &= \frac{1}{\langle f_n \rangle} \int_0^\pi \langle f_t \rangle(\theta) n_\alpha t_\beta P_\theta(\theta) d\theta, \end{cases} \quad (6.12)$$

Ainsi, en injectant les équations (6.11) dans les équations (6.12), on obtient les relations suivantes pour les paramètres d'anisotropie :

$$\begin{cases} a_c &= 2(F_1 - F_2)/(F_1 + F_2), \\ a_{ln} &= 2(\chi_1^{ln} - \chi_2^{ln})/(\chi_1^{ln} + \chi_2^{ln}) - a_c, \\ a_{lt} &= 2(\chi_1^l - \chi_2^l)/(\chi_1^l + \chi_2^l) - a_c - a_{ln}, \\ a_{fn} &= 2(\chi_1^{fn} - \chi_2^{fn})/(\chi_1^{fn} + \chi_2^{fn}) - a_c, \\ a_{ft} &= 2(\chi_1^f - \chi_2^f)/(\chi_1^f + \chi_2^f) - a_c - a_{fn}, \end{cases} \quad (6.13)$$

avec  $\chi^l = \chi^{ln} + \chi^{lt}$ ,  $\chi^f = \chi^{fn} + \chi^{ft}$  et où les indices 1 and 2 se réfèrent aux valeurs principales de chaque tenseur. Par construction,  $(F_1 + F_2) = (\chi_1^l + \chi_2^l) = (\chi_1^f + \chi_2^f) = 1$ .



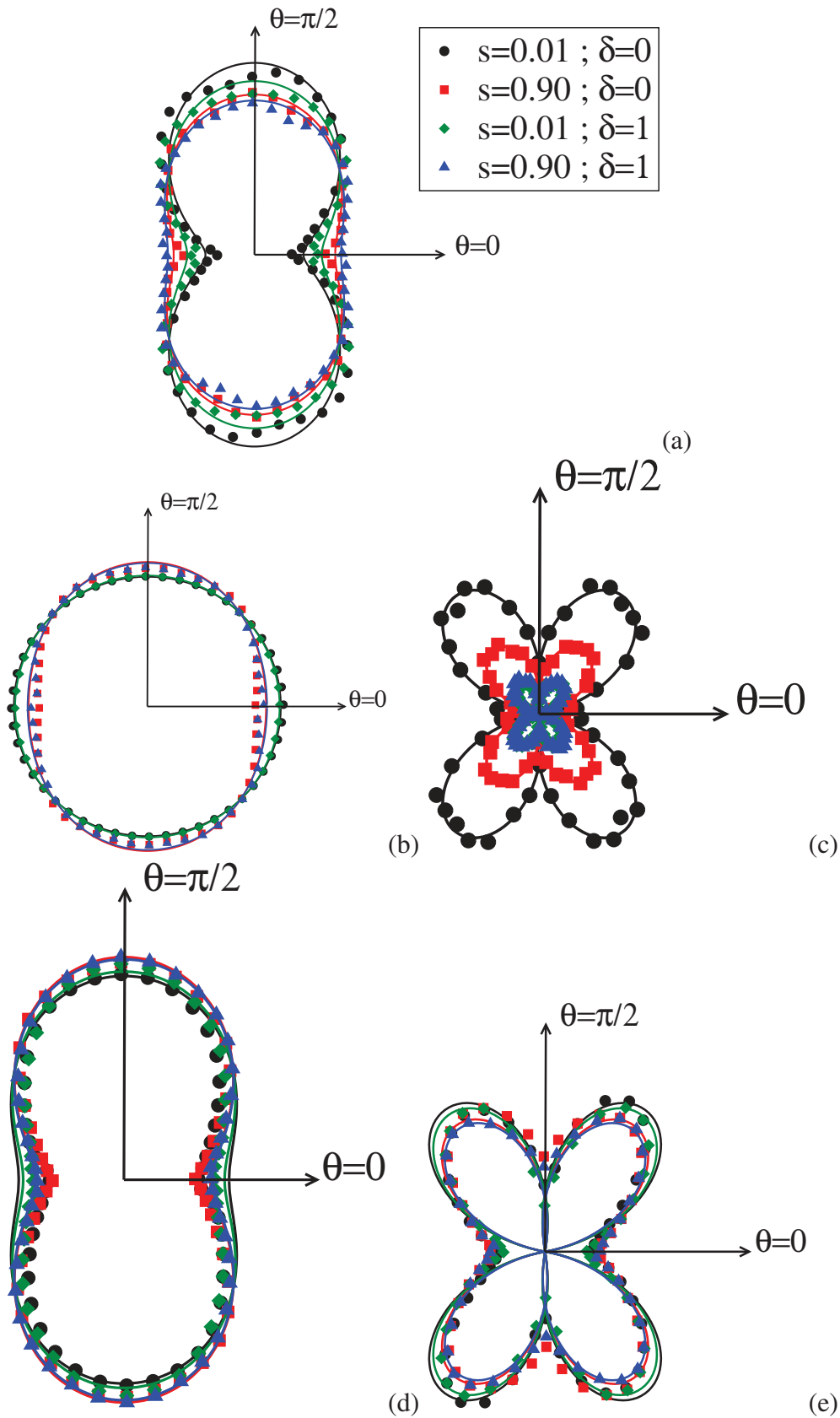
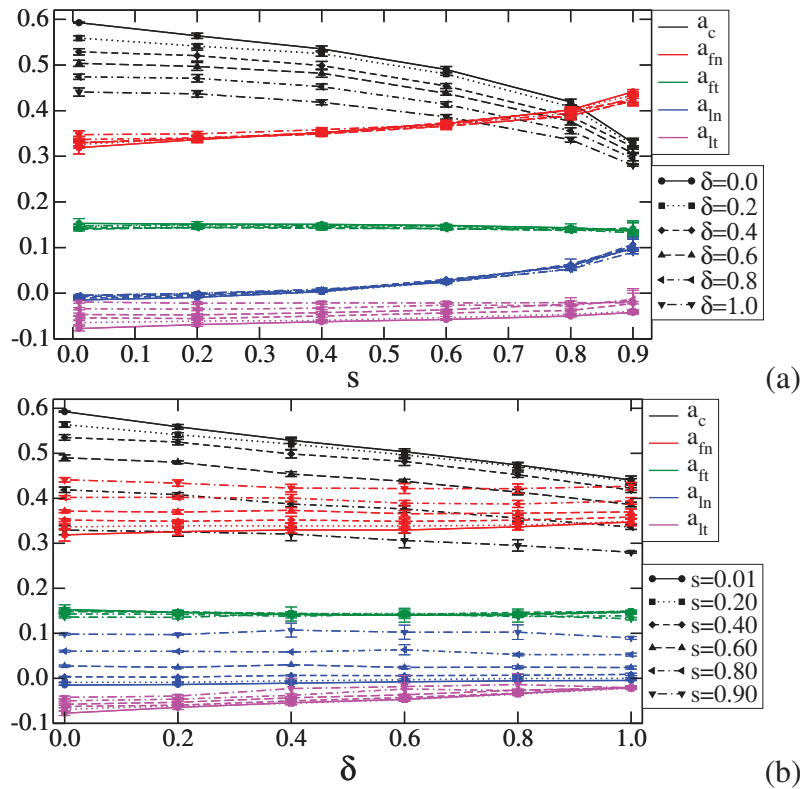


FIGURE 6.10. – Représentation polaire des fonctions  $P(\theta)$ (a),  $\langle \ell_n \rangle(\theta)$ (b),  $\langle \ell_t \rangle(\theta)$ (c)  $\langle f_n \rangle(\theta)$ (d) et  $\langle f_t \rangle(\theta)$ (e) (symboles) ainsi que des approximations harmoniques correspondantes dans l'état critique (lignes); voir l'équation 6.11 pour les différentes valeurs de  $s$  et  $\delta$ .



**FIGURE 6.11.** – Evolution des valeurs moyennes des anisotropies dans l'état critique en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$  (a) et en fonction de  $\delta$  pour toutes les valeurs de  $s$  (b). Les barres d'erreur correspondent à l'écart-type des fluctuations dans l'état critique.

La figure 6.11 montre les valeurs moyennes des anisotropies dans l'état critique en fonction de  $s$  pour toutes les valeurs de  $\delta$  et en fonction de  $\delta$  pour toutes les valeurs de  $s$ . Nous constatons que  $a_c$  diminue à la fois avec  $s$  et  $\delta$ . La diminution de  $a_c$  est compatible avec le fait que 1) les particules les plus grosses sont entourées par un nombre croissant de particules lorsque  $s$  augmente et 2) l'irrégularité croissante de la forme des particules induit une plus grande dispersion des contacts comme observé dans la section 6.3.1. Dans le même temps, on voit que  $a_{ln}$  augmente avec  $s$  mais reste constant lorsque  $\delta$  augmente. Cela montre bien que les branches sont de plus en plus longues au fur est à mesure que  $s$  augmente mais aussi que les branches les plus longues s'orientent en fait le long de la direction principale de cisaillement. Il est remarquable aussi que  $a_{lt}$  soit indépendant de  $s$  et  $\delta$ . Cela peut s'expliquer par la faible asymétrie des particules [9, 25]

En revanche, on voit que  $a_{fn}$  augmente légèrement avec  $s$  mais reste indépendant de  $\delta$ . Ceci est cohérent avec le fait que les chaînes de forces les plus fortes sont portées par les particules les plus grosses quel que soient  $s$  et  $\delta$ . De plus, si on considère la variation de  $a_{fn}$  en lien avec la diminution de  $a_c$ , cela montre que les chaînes de forces sont principalement transmises le long de la direction principale de contrainte, même si le nombre de contacts par grosse particule

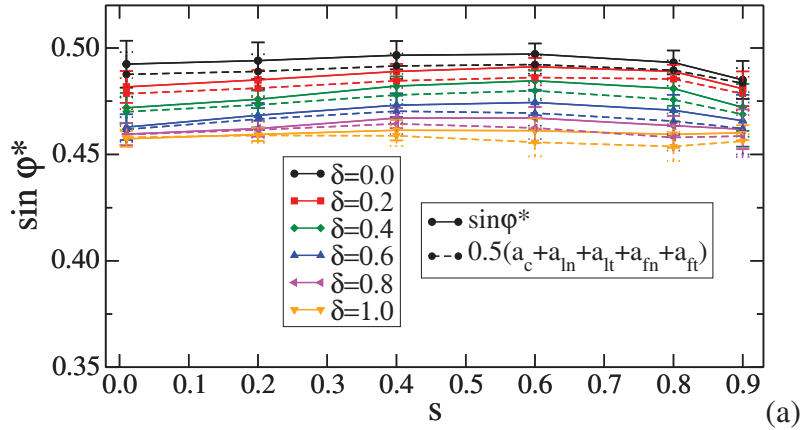


FIGURE 6.12. –  $\sin \varphi^*$  en fonction de  $s$  et pour toutes les valeurs de  $\delta$  (ligne continue) ainsi que l'approximation additive donnée par l'équation 6.14- (traits hachurés).

augmente dans toutes les directions. Enfin, on observe que  $a_{ft}$  reste constant avec à la fois  $s$  et  $\delta$ . En intégrant l'équation 6.11 (e) dans l'intervalle de  $[0, \pi/2]$  on obtient  $\langle I_\mu \rangle = 2a_{ft}/\mu$ . Ceci est compatible avec le fait qu'en moyenne les classes de contacts les plus longs (en terme de longueur du vecteur branche) sont mobilisées en frottement de manière identique. Toutefois, la description de la mobilisation du frottement par uniquement  $a_{ft}$  cache le fait que les particules les petites sont fortement mobilisées en frottement.

L'intérêt physique du calcul de ces anisotropies devient clairs en regard du tenseur de contraintes. En effet, en négligeant les corrélations entre les distances intercentres  $\ell$  et les forces  $f$ , on peut montrer que l'expression générale du tenseur des contraintes (Eq. 6.3) conduit à la relation simple suivante sur la résistance au cisaillement [121, 112, 106, 13, 9, 14] :

$$\sin \varphi^* \simeq \frac{1}{2}(a_c + a_{ln} + a_{lt} + a_{fn} + a_{ft}), \quad (6.14)$$

Les valeurs prédites par l'équation (6.14) et mesurées de  $\sin \varphi^*$  sont présentées sur la figure 6.12. On voit que l'approximation est très bonne pour toutes les valeurs de  $s$  et de  $\delta$ . Ainsi, en vertu de l'équation (6.14),  $\sin \varphi^*$  est indépendant de  $s$  en raison de la compensation mutuelle des évolutions de  $a_c$  et  $a_{ln} + a_{fn}$ . De la même manière, la diminution de  $\sin \varphi^*$  avec  $\delta$  est seulement due à la diminution de  $a_c$  alors que toutes autres anisotropies restent constantes.

# Conclusions de la partie II

Dans cette partie, nous avons présenté une étude numérique détaillée de l'effet combiné des polydispersités des particules en taille et en forme sur la structure de systèmes granulaires 2D composés de pentagones dans les cas 1) non frottants à l'état isotrope (chapitre 5) et 2) frottant et cisailé jusqu'à l'état critique (chapitre 6). La taille des particules est définie par le diamètre du disque circonscrit à chaque polygone et la polydispersité en taille est définie à partir de l'étalement des diamètres pour une distribution uniforme en fractions volumiques. Ce paramètre a été varié de 0,01 (quasi-monodisperse) jusqu'à 0,9 (ce qui correspond à  $d_{max} = 20d_{min}$ ) pour une distribution par fractions volumiques. La polydispersité en forme est définie à partir d'un pentagone régulier déformé de manière continue en polygone irrégulier, et quantifié par un paramètre  $\delta$  variant de 0 (pentagone régulier) jusqu'à 1 (pentagone très irrégulier). Pour chaque jeu de paramètres  $s$  et  $\delta$ , nous avons construit trois systèmes indépendants chacun composés de 5000 particules. Le comportement moyen pour un jeu de paramètre est donné par la moyenne des comportements des trois systèmes indépendant.

Les systèmes non-frottants ont d'abord été soumis à une compression oedométrique afin d'atteindre l'état RCP. Plusieurs tendances ont été mises en évidence :

1. Dans la limite monodisperse, nous avons montré que des structures locales cristallines se forment. Néanmoins, malgré ces arrangements locaux denses, la compacité moyenne est bien inférieure à la compacité de ces structures locales "idéales". L'augmentation de la compacité avec  $\delta$  a été attribuée au fait que les particules les plus irrégulières présentent des pointes pouvant s'infiltrer plus facilement dans les espaces vides.
2. Un résultat intéressant de ce travail est que l'effet de la polydispersité de forme est significatif seulement si  $s < 0,4$ . En dessous de  $s = 0,4$  la distribution des tailles est encore trop grande pour remplir les pores vides. Au contraire, au dessus de 0,4, un nombre croissant de petites particules sont à même de remplir les vides entre les plus grosses particules.

Ainsi, pour  $s > 0,4$ , les propriétés microscopiques résultent des interactions entre les grains mais aussi entre les classes de grains.

3. Nous avons analysé en détail le rôle des contacts côté-côté. Nous avons montré que les réseaux de contact sont isostatiques si on considère qu'en réalité un contact côté-côté représente deux et non une contrainte cinématique. La proportion des contacts côté-côté est faiblement dépendante de la polydispersité. Les contacts côté-côté ne percolent pas mais définissent des clusters comportant un nombre croissant de particules au fur et à mesure que  $s$  augmente ou que  $\delta$  diminue. Ces clusters ont des formes anisotropes dont le rapport d'aspect diminue avec l'augmentation de la polydispersité. Cette spécificité a été attribuée aux forces fortes qui sont transmises essentiellement par les contacts côté-côté.

Les systèmes isotropes ainsi construits ont été ensuite cisailés avec un frottement non-nul entre particules par compression biaxiale jusqu'à atteindre l'état critique. Plusieurs résultats intéressants ont été établis :

1. Nous avons montré que la résistance au cisaillement est indépendante de la polydispersité. Ce résultat étend le résultat de Voivret et al. [152] au cas des particules non-sphériques. Cette extension n'était a priori pas trivial dans le contexte où les contacts côté-côté jouent un rôle majeur dans le mécanisme de transmission des forces. De plus, nous avons montré que la résistance au cisaillement décroît avec la polydispersité de forme.
2. La non variation de la résistance au cisaillement avec  $s$  est expliquée par la décroissance de l'anisotropie géométrique, compensée par l'augmentation de l'anisotropie des forces et des branches. Ce comportement s'explique par le fait que les plus grosses particules sont de plus en plus connectées, ce qui induit une dispersion des contacts et une augmentation des longueurs de branches et des forces supportées par les grosses particules.
3. La décroissance de la résistance au cisaillement lorsque  $\delta$  augmente est expliquée par la décroissance de l'anisotropie géométrique. L'augmentation de  $\delta$  implique que les particules ont des sommets plus pointus lesquels sont plus à même de s'introduire dans les vides entre les autres particules et former des contacts inaccessibles aux faibles valeurs de  $\delta$ . Cela induit donc une plus grande dispersion des contacts.
4. Une analyse détaillée des corrélations des forces et des contacts mobilisés, en fonction des vecteurs branches, révèle l'existence d'une classe de contacts faibles très fortement mobilisés en frottement. Cette classe de contact faible implique les plus petites particules.

# **Troisième partie .**

## **Fragmentation**





# Introduction

Dans la partie précédente, nous avons étudié l'effet combiné de la polydispersité de forme et de taille des particules sur les propriétés mécaniques d'assemblages granulaires denses (Chap. 5) et en cisaillement quasi-statique (Chap. 6). Dans les matériaux granulaires réels, de telles différences en taille et en forme des particules sont souvent le résultat de processus conduisant à la fracturation des grains tels que les écoulements granulaires ou encore certains procédés industriels dont notamment la compaction des poudres. La réduction de taille des particules peut être alors un phénomène indésirable ou incontrôlable. Mais la fragmentation des particules est aussi très souvent l'objectif des opérations tel que le broyage des matières minérales ou végétales.

Dans cette partie, on s'intéresse à la modélisation de la fragmentation des grains et son effet sur le comportement des matériaux granulaires. Dans un premier chapitre, nous proposons un modèle numérique de fragmentation. Dans ce modèle, les particules sont discrétisées en sous-particules, où "cellules", de formes polygonales, via une tessellation de Voronoi. Ces cellules permettent de paver complètement la particule et donc le volume total est conservé durant le processus de fragmentation. Ce modèle de cellules liées (Bonded Cell Model ou BCM) implique des contacts mécaniques entre cellules. Ces contacts doivent être modélisés différemment selon qu'il s'agit d'un contact côté-pointe ou côté-côté. Nous utilisons l'approche BCM combinée avec la méthode de dynamique des contacts pour étudier la fracturation de particules de forme circulaire. Chaque particule étant modélisée comme un agrégat de cellules rigides dont les côtés communs sont des joints collés par une loi cohésive et frictionnelle. Nous nous intéressons à la résistance sous compression uniaxiale d'une seule particule et, en particulier, à l'effet du maillage et de la taille des particules.

Dans le chapitre suivant, l'approche BCM est utilisée pour analyser le processus de fragmentation et l'évolution de la courbe granulométrique d'un système granulaire composé d'un grand nombre de particules et soumis à une compression uniaxiale. L'effet de la forme des particules sur le processus de fragmentation sera également analysé. Enfin, dans le dernier chapitre de cette partie, l'approche BCM est utilisée pour l'étude des systèmes granulaires soumis à une

compression biaxiale.

# Modèle de cellules liées (BCM)

## Sommaire

---

<b>7.1. Principe du modèle et mise en oeuvre</b>	<b>110</b>
<b>7.2. Essai de compression uniaxiale (essai brésilien)</b>	<b>111</b>
7.2.1. Description et conditions aux limites	111
7.2.2. Caractéristiques de la rupture	112
<b>7.3. Etude paramétrique</b>	<b>115</b>
7.3.1. Variabilité de la résistance	115
7.3.2. Effet du maillage	117

---

## 7.1. Principe du modèle et mise en oeuvre

Comme illustré sur la figure 7.1, l'idée principale du modèle est de diviser chaque particule en  $n_v$  cellules selon une tessellation de Voronoï. Chaque cellule représente une sous-particule rigide. Par construction, une particule de surface  $S$  possède un nombre de cellules  $n_v = S/(d_0^2)$ , où  $d_0$  est la taille moyenne d'une cellule.  $n_v$  points sont donc distribués aléatoirement sur la surface de la particule avec une distance imposée  $\ell$  entre les points supérieures à la distance minimale  $\ell_{min} = \lambda d_0$ ; voir Fig.7.1(a). Le paramètre  $\lambda$  représente le degré de régularité du maillage où, dit autrement, la distribution de la taille des fragments. Pour  $\lambda = 1$ , la surface est maillée par des carrées de côté  $d_0$ . Ainsi, pour avoir des cellules à 5 côtés ou plus, il est nécessaire de réduire le paramètre  $\lambda$ . Les figures 7.1 (b) et (c) montrent deux exemples d'un disque maillé avec  $\lambda = 0$  (très irrégulier) et  $\lambda = 0.8$  (régulier). Nous verrons que le paramètre  $\lambda$  affecte de manière significative le comportement.

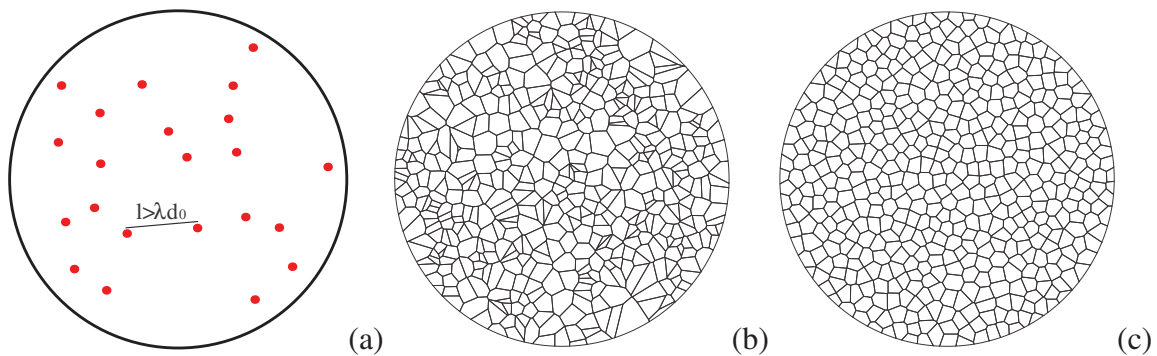


FIGURE 7.1. – Définition du degré de régularité du maillage  $\lambda$  (a) et deux exemples de la tessellation pour  $\lambda = 0$  (b) et  $\lambda = 0,8$ (c).

Une problématique importante dans l'utilisation de la DEM avec des particules fragmentables est la représentativité du système considéré. En effet, par construction, la taille initiale des particules et des cellules représentent, respectivement, la limite supérieure et inférieure de la distribution de taille des débris. La représentativité statistique de la distribution des tailles de particules durant le processus de fragmentation est donc déterminée par leur rapport. Par ailleurs, le comportement mécanique et la rupture d'une particule dépendent du nombre de cellules. A cela s'ajoute une difficulté clairement numérique. Puisque chaque particule est traitée comme un ensemble de sous-particules liées entre elles, les temps de calcul augmentent en fonction du nombre de ses sous-particules. Par conséquent, il faut optimiser le nombre de cellules par particule afin d'être en mesure de simuler un grand nombre de particules.

Les cellules de chaque particule interagissent au travers de contacts cohésifs et frottants le long de leurs côtés communs. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, au moins deux forces répulsives le long des contacts côté-côté sont nécessaires pour éviter toute interpénétration. Un contact côté-côté peut s'ouvrir au niveau de l'un des deux points par le pivotement autour de l'autre point. Il peut également s'ouvrir simultanément aux deux points de contact. Ainsi, l'adhésion normale  $f_c$  entre deux cellules dépend linéairement de la longueur  $L$  du côté. Comme un contact est représenté par deux points, le seuil en traction est donné par  $f_c = \sigma_c L/2$

où  $\sigma_c$  est la contrainte cohésive interne du matériau. Un contact côté-côté peut ainsi perdre sa cohésion si la force normale  $f_n = -\sigma_c L/2$  est atteinte à au moins l'un des deux points de contact. Au contraire, si aucune des deux forces  $f_{1n}$  et  $f_{2n}$  n'atteint cette valeur critique, les cellules restent collées, la force totale continue d'augmenter jusqu'à ce que la force normale totale  $f_{1n} + f_{2n} = -2f_c = -L\sigma_c$ . Cette situation est cependant très rare puisque la plupart du temps les particules sont soumises à des moments tels que le moment total  $(f_{1n} - f_{2n})L \neq 0$ . Un contact côté-côté s'ouvre donc presque toujours lorsque le seuil  $f_n = -f_c$  est atteint à l'un des deux points de contact.

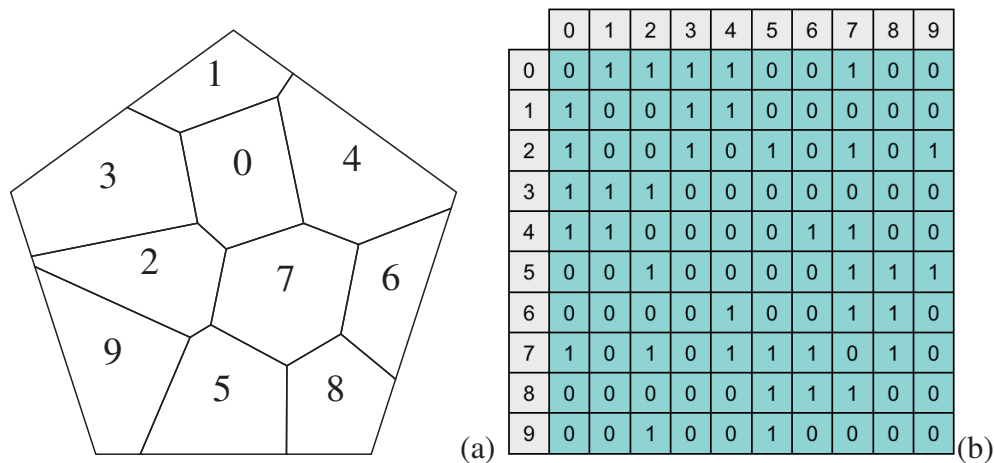


FIGURE 7.2. – a) Une exemple de discrétisation d'un grain en cellules de Voronoi et b) sa matrice de l'état cohésif correspondant.

La résistance au cisaillement le long d'un contact côté-côté est donnée par  $\tau_c = \mu_s \sigma_c$ , où  $\mu_s$  est le coefficient du frottement interne. Un contact côté-côté peut donc perdre sa cohésion lorsque la force tangentielle totale  $f_{1t} + f_{2t}$  atteint le seuil de glissement  $\mu_s(f_{1n} + f_{2n} + 2f_c)$ . Dans ce travail, nous avons choisi une loi de frottement de type Coulomb afin de limiter le nombre de paramètres indépendants. Ce choix n'est évidemment pas unique et l'effet du critère locale pour la décohésion peut être le sujet d'une étude ultérieure. Lorsque la cohésion entre deux cellules est perdue le long d'un contact côté-côté, ces deux cellules interagissent alors uniquement via la loi de frottement. Autrement dit, la perte de cohésion est irréversible. L'état de cohésion entre des cellules est géré par une matrice  $M$  telle que  $M[i, j] = 1$  si les cellules  $i$  et  $j$  sont reliées par un contact cohésif, et  $M[i, j] = 0$  autrement. Cette matrice est mise à jour à chaque pas de temps selon l'évolution des contacts ; voir Fig.7.2.

## 7.2. Essai de compression uniaxiale (essai brésilien)

### 7.2.1. Description et conditions aux limites

L'essai consiste à comprimer des éprouvettes cylindriques en appliquant une force suivant deux génératrices opposées. Cet essai sera utilisé pour étudier les effets des paramètres  $\sigma_c, \mu_s$ ,

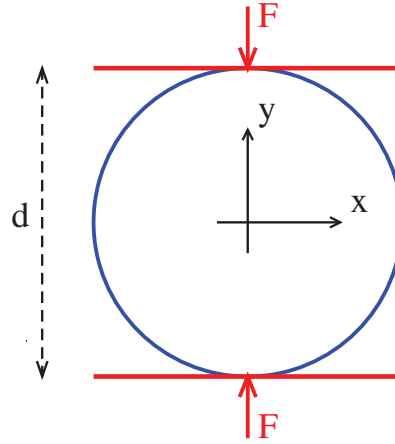


FIGURE 7.3. – Schéma de l'essai brésilien.

$\lambda$  et  $n_v$ .

Dans nos simulations 2D, la particule est un polygone de 1024 côtés dont l'enveloppe est très proche de celle d'un disque. Elle est soumise à une contrainte verticale engendrée par le déplacement lent de deux plateaux horizontaux opposés ; voir la figure 7.3. La contrainte moyenne verticale  $\sigma_a$  sur la particule est donnée par

$$\sigma_a = \langle \sigma_{yy} \rangle = \frac{2F}{\pi d}, \quad (7.1)$$

où  $d$  est le diamètre de la particule et  $F$  la force axiale exercée sur la particule. Nous calculons  $\sigma_a$  directement à partir des forces entre les cellules par :

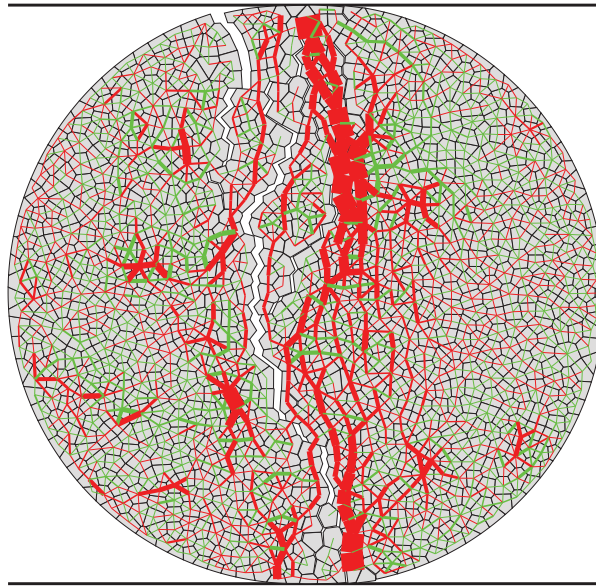
$$\langle \sigma_{yy} \rangle = n_c \langle f_y \ell_y \rangle, \quad (7.2)$$

où  $n_c$  est la densité de contact,  $f_y$  est la composante  $y$  de la force de réaction entre deux cellules et  $\ell_y$  la composante  $y$  du vecteur branche entre deux cellules adjacentes. La contrainte horizontale moyenne  $\langle \sigma_{xx} \rangle$  est nulle. Dans ce qui suit,  $\sigma_a$  est utilisé comme paramètre de contrôle.

La figure 7.4 montre une image instantanée de la particule au début de la fissuration ainsi que les forces en traction et en compression entre des cellules. La fissure principale est verticale et correspond en moyenne à une fracture en mode I comme observé dans diverses expériences [131]. Cependant, l'aspect en zigzag de la fissure principale, reflète le maillage grossier de la particule, ce qui indique que les forces de frottement entre les cellules doivent jouer un rôle important. Nous observons également des fissures secondaires et des petits fragments détachés de la particule.

### 7.2.2. Caractéristiques de la rupture

La figure 7.5 montre la contrainte axiale  $\sigma_a$  en fonction de la déformation axiale  $\varepsilon_a$  pour différentes valeurs de la contrainte de cohésion interne  $\sigma_c$ . Ici, les paramètres sont  $\mu_s = 0,3$ ,



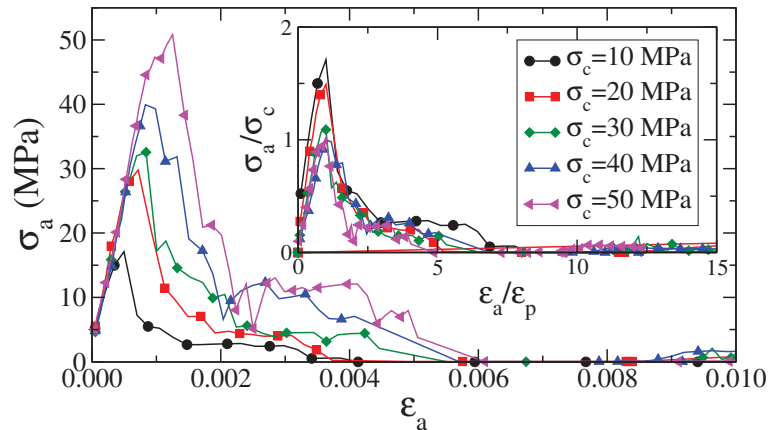
**FIGURE 7.4.** – Particule circulaire soumise à une compression diamétrale (essai Brésilien). Les lignes rouges et vertes représentent les contacts en compression et en traction, respectivement.

$\lambda = 0,8$  et  $n_v = 50$ . On voit que les courbes contrainte-déformation sont similaires, avec la contrainte qui augmente rapidement, puis après un déplacement faible, chute brusquement, ce qui correspond à l'apparition de la fracture. Le pic de contrainte  $\sigma_p$  correspond à la résistance à la compression de la particule. Comme nous pouvons le voir dans l'inset de la figure 7.5, sauf pour les plus faibles valeurs de cohésion, la contrainte se met à l'échelle avec  $\sigma_c$ . Le fait que  $\sigma_p/\sigma_c$  soit plus élevé pour les petites valeurs de la cohésion implique que la résistance à la compression pour une cohésion faible est plutôt déterminée par la rugosité de l'interface et la mobilisation des forces de frottement entre cellules.

Il est important ici de rappeler que la compression diamétrale de la particule est contrôlée ici par le déplacement vertical du plateau du haut. Dans une expérience réelle, la particule subit une déformation élastique s'il n'y pas de plastification interne avant la rupture. Dans notre cas, les cellules sont parfaitement rigides et il n'y a aucune déformation plastique. Le comportement attendu est donc un comportement rigide-fragile. La déformation observée sur la figure ne représente donc qu'une faible interpénétration numérique entre les cellules avant la rupture. En retranchant ces interpénétrations, on récupère le comportement rigide-fragile. Il est clair que de telles interpénétrations peuvent être évitées si la compression est appliquée par des incréments successifs de la contrainte verticale. Mais nous avons choisi la compression par déplacement pour voir la phase post-rupture.

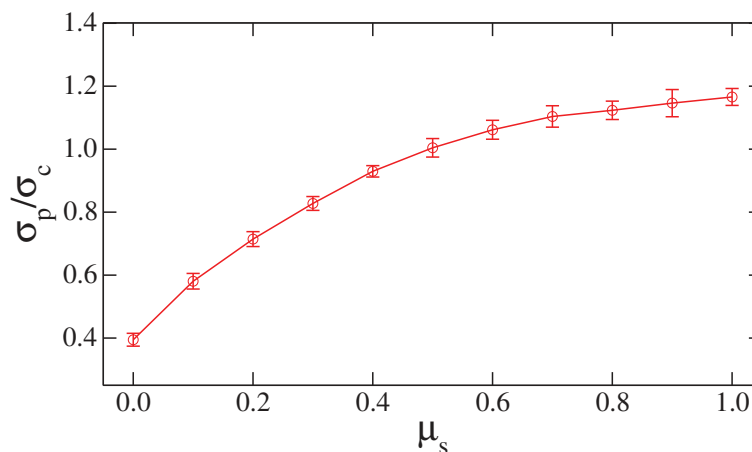
Afin d'étudier l'effet du frottement local, nous réalisons une série de 11 simulations avec  $\mu_s$  variant de 0 jusqu'à 1 avec tous les autres paramètres maintenus constants (i.e  $\sigma_c = 10$  MPa,  $\lambda = 0,8$  et  $n_v = 500$ ). Pour assurer une bonne représentation statistique de nos données, pour chaque valeur de  $\mu_s$ , neuf simulations avec des tessellations indépendantes ont été effectuées.





**FIGURE 7.5.** – Evolution de la contrainte verticale  $\sigma_a$  en fonction de la déformation axiale  $\epsilon_{yy}$  pour différentes valeurs de la cohésion interne  $\sigma_c$ . L'encadré montre la contrainte axiale normalisée par  $\sigma_c$ . Les paramètres sont  $\mu_s = 0,3$ ,  $\lambda = 0,8$  et  $n_v = 50$ .

La figure 7.6 montre la variation de  $\sigma_p$  (pic de contrainte) normalisée par  $\sigma_c$  en fonction de  $\mu_s$ . Comme on pouvait s'y attendre, la résistance à la rupture augmente avec  $\mu_s$ . Cette dépendance est toutefois assez faible puisqu'elle augmente de  $0,4\sigma_c$  à  $1,2\sigma_c$  quand  $\mu_s$  augmente de 0 à 1. Cette dépendance relativement faible peut être attribuée au fait que, pour un essai brésilien, la rupture se produit essentiellement en tension. Mais cet effet du coefficient de frottement montre clairement que la mobilisation des forces du frottement le long du chemin de la fissure est un facteur important pour la résistance à la rupture.



**FIGURE 7.6.** – Evolution de la contrainte à la rupture  $\sigma_p$  en fonction du coefficient de frottement local  $\mu_s$  pour  $\sigma_c = 10$  MPa,  $\lambda = 0.8$  et  $n_v = 500$ . Les barres d'erreur correspondent aux écarts-types de la fluctuation de la contrainte de rupture autour de sa valeur moyenne pour neuf systèmes indépendants.

### 7.3. Etude paramétrique

Un aspect important de la rupture des particules est la dispersion statistique de la résistance à la rupture et son éventuelle dépendance par rapport à la discrétisation du maillage.

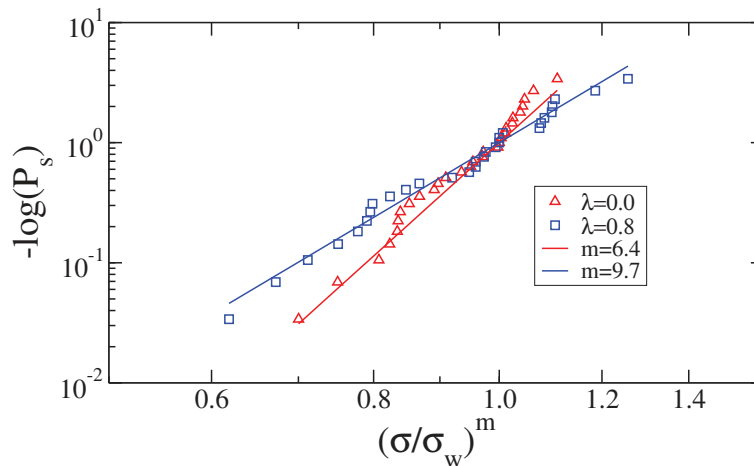
#### 7.3.1. Variabilité de la résistance

Dans cette partie, nous nous proposons d'évaluer le rôle du paramètre  $\lambda$ . Pour cela, nous construisons plusieurs particules avec  $\lambda \in [0, 0.8]$  et pour chaque valeur de  $\lambda$ , nous construisons 30 particules à partir de tessellations de Voronoï indépendantes. Nous fixons  $\sigma_c = 10$  MPa,  $\mu_s = 0,3$  and  $n_v = 500$ . Une telle étude statistique nous permet d'obtenir la variabilité de la résistance à la rupture, exprimée en probabilité cumulative de survie  $P_s$  de la particule en fonction de  $\sigma_a$ . Cette quantité représente la probabilité que la particule résiste sans se rompre pour toutes les contraintes inférieures à  $\sigma_a$ .

La figure 7.7 montre la probabilité cumulée de survie  $P_s$  en échelle log-log en fonction de la contrainte  $\sigma_a$  pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 0,8$ . Les données sont correctement approchées par la fonction de Weibull [157, 91] :

$$P_s(\sigma_a) = e^{-(\sigma_a/\sigma_w)^m}, \tag{7.3}$$

où  $\sigma_w$  est une échelle de contrainte et  $m$  un facteur de forme (ou le module de Weibull). Ces deux paramètres sont calculés directement à partir des données.



**FIGURE 7.7.** – Probabilité de survie d'une particule en fonction de la contrainte appliquée  $\sigma_a$  pour des essais Brésiliens (point) avec  $n_v = 500$  et deux valeurs du degré de régularité du maillage  $\lambda$ . Les lignes continues représentent la distribution de Weibull avec deux valeurs différentes du module  $m$ .

La figure 7.8 montre que  $m \simeq 6$  aux faibles valeurs de  $\lambda$  et augmente jusqu'à  $\simeq 10$  pour la plus grande valeur de  $\lambda$ . Il est remarquable que ces valeurs de  $m$  correspondent aux valeurs observées dans les sols et les poudres bien que notre système soit purement 2D [91]. L'augmentation de  $m$  signifie que la variabilité de la résistance à la rupture diminue, ce qui est cohérent avec le fait que la variabilité diminue également avec l'augmentation de  $\lambda$ .

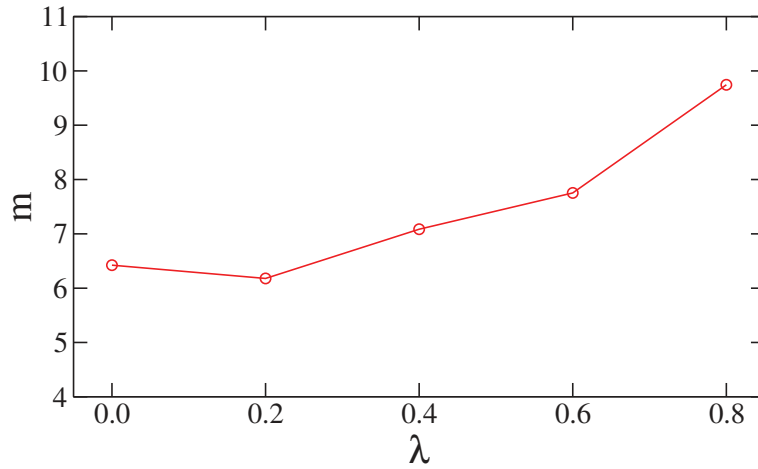


FIGURE 7.8. – Module de Weibull  $m$  en fonction du degré de régularité du maillage  $\lambda$ .

w

On remarque également sur la figure 7.7 que la résistance à la rupture  $\sigma_p$  et l'échelle de contrainte  $\sigma_w$  augmentent avec  $\lambda$ . A partir de la distribution de Weibull, on peut montrer que  $\sigma_p$  et  $\sigma_w$  obéissent à la relation simple suivante :

$$\sigma_p = \sigma_w \Gamma \left( 1 + \frac{1}{m} \right), \quad (7.4)$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma. Cette relation est en excellent accord avec nos données ; voir Fig. 7.9.

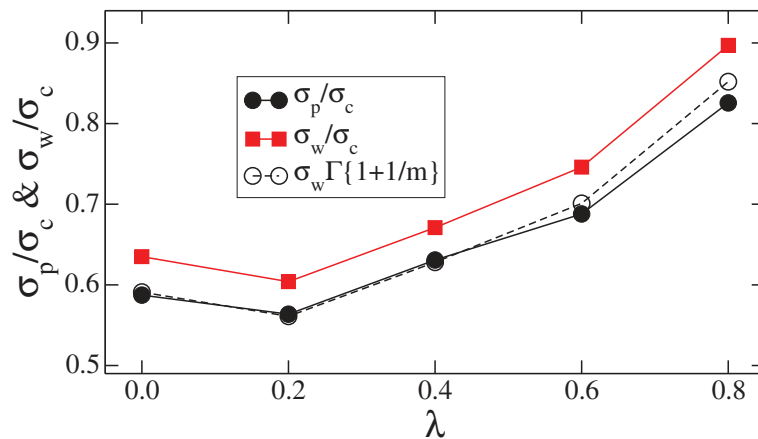


FIGURE 7.9. – Résistance à la rupture  $\sigma_p$  et échelle de contrainte  $\sigma_w$  en fonction de  $\lambda$ . Les symbols vides sont des valeurs de  $\sigma_p$  calculés à partir de l'équation (7.4).

### 7.3.2. Effet du maillage

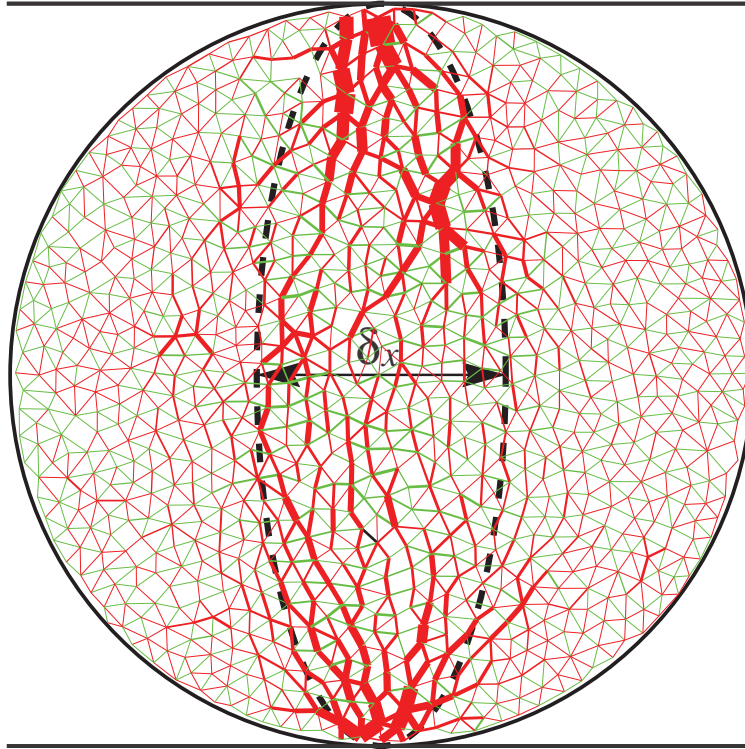
Pour les matériaux fragiles, la statistique de Weibull est généralement attribuée à la présence des défauts dans les grains et l'hypothèse des "faibles liens" entre constituant à une échelle inférieure. Concernant les matériaux quasi-fragiles, l'applicabilité de ces distributions a été remise en question par divers auteurs et des écarts plus ou moins importants par rapport aux statistiques de Weibull ont été observées [149, 61, 102, 23].

Dans notre système, tous les contacts inter-cellulaires peuvent être vus comme des "fissures potentielles" avec un seuil en traction de  $-\sigma_c$ . Notre système est spécifique car les cellules sont parfaitement rigides, et donc leurs déplacements sont soumis aux contraintes stériques entre cellules. Par conséquent, lorsque le seuil en traction  $-\sigma_c$  est atteint à un contact entre deux cellules, il ne sera généralement pas ouvert sauf s'il est atteint simultanément avec d'autres contacts. Comme la force sur un tel contact *critique* ne peut pas dépasser son seuil de traction, les forces sont redistribuées aux contacts voisins. Ainsi, les contacts supportent de plus en plus de forces au fur et à mesure que des nouveaux contacts deviennent critiques. Cette redistribution des efforts continue et s'accélère jusqu'à ce que les contacts critiques percolent à travers la particule. Une fissure se produit alors le long des contacts critiques qui s'ouvrent tous en même temps.

Comme nous l'avons décrit dans la partie 7.1, dans nos simulations la force à un contact critique est  $f_c = -\sigma_c L/2$ . Le seuil en traction  $\sigma_c$  est le même pour tous les contacts, et le contact le plus faible est celui ayant la plus petite longueur  $L$ . Le processus de propagation des forces sur les contacts décrit au dessus, implique que la fissuration n'est pas contrôlée par le contact le plus faible mais au contraire par le contact le plus fort (donc avec la plus grande longueur) qui deviendra critique et donc sera sur le chemin d'une fissure potentielle.

Dans le cas contraire, aucun des contacts critiques ne peut s'ouvrir, justement à cause de l'incompatibilité cinématique. Cette situation contraste radicalement avec l'hypothèse de Weibull sur les liens les plus faibles [19]. Néanmoins, l'argument avancé ici indique également que dans notre système les "défauts" sont équivalents à des chemins de fissure potentiels. En d'autres termes, si on ne considère que les longueurs des contacts, les liens les plus faibles sont sur le chemin des contacts inter-cellulaires ayant la longueur la plus courte. En ce sens, la variabilité de la résistance à la rupture reflète la statistique de tous les chemins (avec leur différentes longueurs et directions), d'une part, et la distribution hétérogène des forces, comme cela est généralement observé dans les matériaux granulaires [113, 20, 120, 150].

Les statistiques des contacts critiques et des chemins des fissures dans notre système peuvent naturellement conduire à des effets de taille comme cela est supposé aussi avec la statistique de Weibull pour la rupture fragile. Ainsi, l'augmentation de la taille  $d$  d'une particule pour une taille de cellule constante  $d_0$ , ou la diminution de  $d_0$  pour un diamètre  $d$  fixe, implique que le nombre des chemins potentiels de contacts critiques augmente avec le nombre  $n_v \propto (d/d_0)^2$  de cellules. Supposons que les fissures se propagent suivant une marche aléatoire de longueur égale à  $d_0$  de l'extérieur vers le centre de la particule. Le chemin moyen de fissuration est une ligne droite joignant les deux points d'application extérieurs. L'écart type de ce chemin varie comme  $\delta_x \propto n_s^{1/2}$ , où  $n_s$  est le nombre de pas. Mais le nombre de pas est simplement proportionnel à  $n_v^{1/2}$ , de sorte que  $\delta_x \propto d_0 n_v^{1/4} \propto (dd_0)^{1/2}$ .



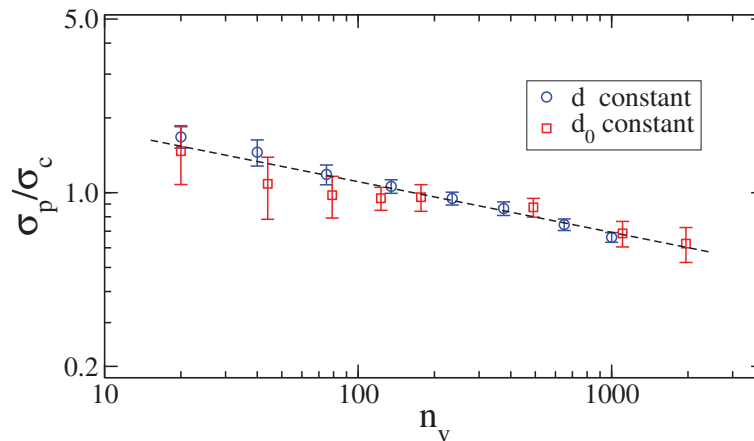
**FIGURE 7.10.** – Réseau des forces normales avant la rupture. Les lignes en pointillés représentent les contours de la zone de concentration de contraintes.

Cette longueur doit être interprétée comme la largeur de la zone sur laquelle les contraintes sont concentrées comme illustré sur la figure 7.10. Par conséquent, la contrainte de compression au centre de la particule est  $F/\delta_x \propto \sigma_a d / (d d_0)^{1/2} = \sigma_a (d/d_0)^{1/2} \propto \sigma_a n_v^{1/4}$ . Au point de fissuration, on a  $\sigma_a = \sigma_p$  qui est équilibrée par une contrainte en traction égale à  $\sigma_c$  dans la réaction  $y$ , et donc  $F/\delta_x \propto \sigma_c$ . Ainsi, nous avons

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_c} \propto n_v^{-1/4} \propto d^{-1/2} \quad (7.5)$$

L'argument ci-dessus prédit une dépendance en taille avec un exposant  $-1/2$ , indépendamment de la valeur de  $m$ . En outre, le même exposant est prévu pour les marches aléatoires de longueur variable et de valeur moyenne  $d_0$ , et donc l'exposant doit être aussi indépendant du paramètre  $\lambda$ .

La figure 7.11 montre  $\sigma_p$  en fonction de  $n_v$  pour  $\lambda = 0.8$  et 16 combinaisons différentes des valeurs de  $d$  et  $d_0$  avec 11 essais indépendants pour chaque combinaison. Avec notre précision statistique, nous observons une loi de puissance  $\sigma_p \propto \sigma_c n_v^{-b}$  avec  $b \simeq 0.24$ , qui est en excellent accord avec l'exposant prédit par l'équation (7.5). L'échelle de contrainte  $\sigma_w$  suit le même comportement en fonction de  $n_v$ . La figure 7.12 montre  $\sigma_p$  en fonction de  $n_v$  pour  $\lambda = 0$  et  $\lambda = 0, 8$ . L'exposant pour  $\lambda = 0$  est  $b \simeq 0, 3$ , qui est légèrement au-dessus l'exposant prédit.



**FIGURE 7.11.** – Résistance à la rupture normalisée par la cohésion interne en fonction du nombre des cellules pour un diamètre  $d$  constant et des tailles de cellule  $d_0$  variables, mais pour  $d_0$  constant et  $d$  variables. Les barres d'erreur représentent l'écart-type pour 11 simulations indépendantes.

Ces observations montrent clairement que la rupture des matériaux composés de cellules est dépendant de l'échelle. Le modèle basé sur des statistiques de chemin de fissures autour d'un chemin moyen, fournit une prédiction quantitative correcte de l'exposant. Qui est plus, ce modèle étend le concept de "plus faible lien" au concept de "plus faible chemin", lequel est gouverné par la percolation de contacts critiques. L'effet de la taille sur la rupture d'une seule particule suggère que dans un assemblage de particules fragmentables les plus grosses particules sont les plus susceptibles de se briser. Toutefois, la taille des particules affecte la distribution locale des forces de contact. En particulier, les grosses particules ont plus de contacts et donc les plus petites contraintes déviatoriques. En raison de ces effets opposés, la fragmentation d'un assemblage granulaire est un processus complexe.

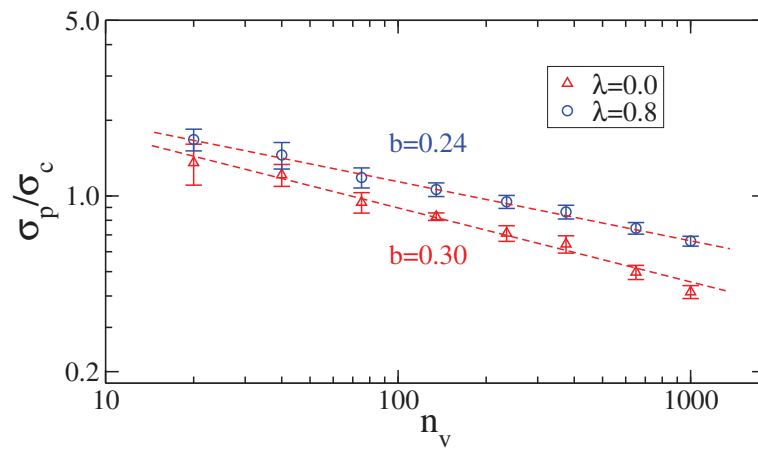


FIGURE 7.12. – Résistance à la rupture normalisée par la cohésion interne en fonction du nombre de cellules pour deux valeurs extrêmes du degré d'irrégularité du maillage  $\lambda$ .



# Compression uniaxiale et processus de fragmentation

## Sommaire

---

<b>8.1. Introduction</b>	<b>122</b>
<b>8.2. Procédés numériques</b>	<b>122</b>
8.2.1. Formes et tailles des particules	122
8.2.2. Les échantillons numériques	123
<b>8.3. Compaction</b>	<b>123</b>
8.3.1. Relation contrainte-déformation	124
8.3.2. Endommagement des particules	128
<b>8.4. Fragmentation des particules</b>	<b>133</b>
<b>8.5. Distributions des tailles des particules</b>	<b>136</b>
<b>8.6. Evolution des formes des particules</b>	<b>140</b>

---

## 8.1. Introduction

Dans ce chapitre, des essais de compression uniaxiale (essai oedométrique) sur des assemblages des particules fragmentables sont effectués en utilisant le modèle BCM décrit dans le chapitre 7. Ces essais ont été effectués sur des assemblages de particules monodisperses ( $s = 0$ ) et polydisperses ( $s = 0, 5$ ) avec des formes différentes dans le but d'étudier la compaction du matériau et l'évolution de la distribution granulométrique et des formes des particules. Nous allons nous intéresser dans ce chapitre à l'effet de la distribution des tailles et du paramètre de forme et à la microstructure.

## 8.2. Procédés numériques

### 8.2.1. Formes et tailles des particules

Dans cette étude, nous allons utiliser des particules de forme pentagonale subdivisées en cellules collées. La fragmentation des particules conserve ainsi la forme polygonale des particules. Il est utile de rappeler que la forme pentagonale a l'avantage de ne pas présenter les propriétés pathologiques des triangles, des carrés et des hexagones. En effet, ces formes ont tendance à développer spontanément de l'ordre longue distance. Par ailleurs, les polygones avec un plus grand nombre de côtés présentent des propriétés d'assemblage proches de celles des cercles.

Les pentagones sont inscrits dans des ellipses comme on peut voir sur la figure 8.1. Chaque sommet  $i$  du pentagone est repéré par un angle  $\theta_i = i2\pi/5$ . L'abscisse  $x_i$  et l'ordonnée  $y_i$  du sommet  $i$  sont donnés par

$$\begin{cases} x_i = a \cos \theta_i \\ y_i = b \sin \theta_i \end{cases} \quad (8.1)$$

où  $a$  et  $b$  sont les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse, respectivement. Le rapport d'aspect  $\alpha$  du pentagone est défini par

$$\alpha = \frac{a}{b}. \quad (8.2)$$

La figure 8.1 illustre trois pentagones avec les rapports d'aspect  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 1,5$  et  $\alpha = 2$ .

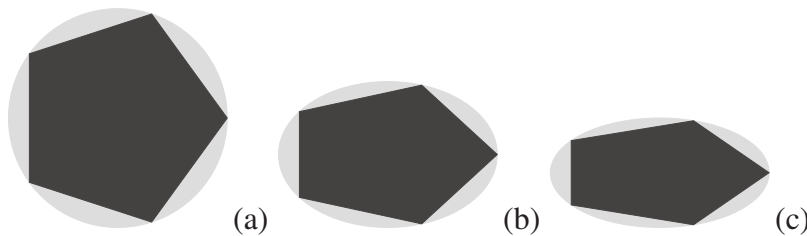


FIGURE 8.1. – Exemple de 3 particules avec les rapports d'aspect  $\alpha = 1$  (a),  $\alpha = 1,5$  (b) et  $\alpha = 2$  (c).

La taille d'une particule pentagonale est définie par la longueur du grand axe  $a$  de l'ellipse. Dans les assemblages granulaires qui seront étudiés ci-dessous, la taille des particules varie entre une valeur minimale  $a_{min}$  et une valeur maximale  $a_{max}$  suivant une distribution uniforme en fraction volumique. Nous rappelons que l'étalement  $s$  de la distribution de taille des particules est donné par l'équation

$$s = \frac{a_{max} - a_{min}}{a_{max} + a_{min}}. \quad (8.3)$$

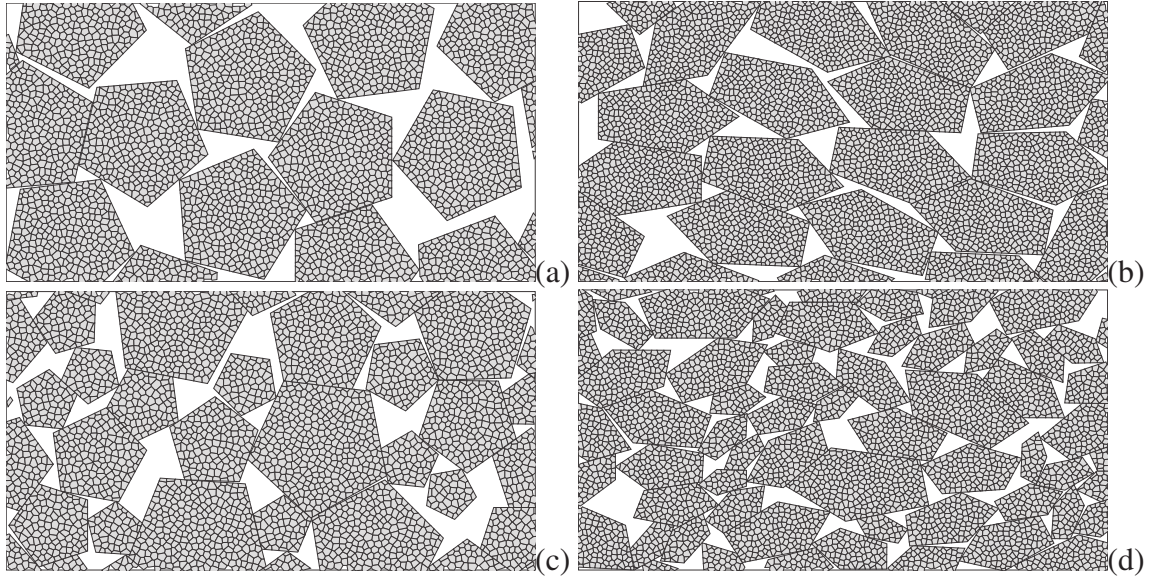
### 8.2.2. Les échantillons numériques

Les essais de compression sont réalisés avec deux valeurs du paramètre  $s$  (0 et 0,5) et trois valeurs du paramètre  $\alpha$  (1 ; 1,5 et 2). Pour un couple fixé de paramètres  $s$  et  $\alpha$ , 200 particules sont initialement placées de manière aléatoire dans une boîte rectangulaire, puis elles sont assemblées par pluviation sous l'effet de la gravité. Le frottement entre les particules est fixé à 0,3 entre les particules et à 0 avec les parois. Une fois l'équilibre atteint, la gravité est annulée, et l'échantillon est soumis à une compression verticale par l'application d'une contrainte  $\sigma_0$  sur la paroi supérieure. Les trois autres parois restent toujours fixes.

Les particules sont ensuite divisées en cellules par tessellation Voronoi en imposant la condition d'avoir au moins 30 cellules par particule et un degré de régularité du maillage  $\lambda = 0,8$ . Nos assemblages contiennent ainsi 18000 cellules pour  $s = 0,5$  et  $\alpha = 2$  et jusqu'à 60 000 cellules pour  $s = 0$  et  $\alpha = 1$ . Le coefficient de frottement  $\mu$  entre les particules et le coefficient du frottement interne entre des cellules  $\mu_s$  sont fixés à 0,3. La contrainte cohésive interne  $\sigma_c$  entre cellules est choisie égale à  $10MPa$ . Mais cette contrainte ne sert qu'à fixer une contrainte de référence puisque les particules sont infiniment rigides et donc seules les rapports de contrainte comptent physiquement. Les échantillons ainsi préparés sont soumis à une compression uniaxiale par l'augmentation incrémentale de la contrainte verticale  $\sigma_a$  de 0 à  $10\sigma_c$ . La figure 8.2 présente des images des échantillons au début de la compression pour quatre assemblages différents.

## 8.3. Compaction

La compression uniaxiale d'un matériau granulaire composé de particules rigides conduit à la compaction du matériau par réarrangements des particules si la compacité initiale est faible. Mais la compaction finit par s'arrêter dans une configuration bloquée si aucun autre mécanisme ne permet au volume de changer. Les forces de contact augmentent alors proportionnellement à l'incrément de contrainte axiale imposé. La fragmentation des particules au contraire permet à l'assemblage de continuer à se compacter par l'effet de polydispersité. Les particules de chaque nouvelle génération de taille plus petite peuvent remplir l'espace poral entre les particules de taille supérieure. Dans cette section, nous sommes intéressés par le processus de compaction sous l'effet des incréments de contrainte.



**FIGURE 8.2.** – Images des échantillons au début de la compression pour quatre assemblages avec (a)  $s = 0$  et  $\alpha = 1$ , (b)  $s = 0$  et  $\alpha = 2$ , (c)  $s = 0,5$  et  $\alpha = 1$  et (d)  $s = 0,5$  et  $\alpha = 2$ .

### 8.3.1. Relation contrainte-déformation

La figure 8.3 montre la déformation axiale  $\varepsilon_a$  en fonction de la contrainte axiale normalisée par la cohésion interne  $\sigma_a/\sigma_c$  pour les six combinaisons différentes de la polydispersité de taille  $s$  et du rapport d'aspect  $\alpha$ . Le processus de fragmentation commence à une contrainte bien inférieure à la cohésion interne  $\sigma_c$ , ce qui reflète une forte concentration des forces sous la forme de chaînes de force fortes. La déformation axiale augmente lentement avec le chargement sans fragmentation suivies de périodes de fragmentation rapide et augmentation soudaine de  $\varepsilon_a$ . Jusqu'à  $\sigma_a = 10\sigma_c$ , la déformation totale est plus grande pour les assemblages monodisperse ( $s = 0$ ) que pour les assemblages polydisperses ( $s = 0,5$ ).

La figure 8.4 montre l'évolution de l'indice des vides  $e$  en fonction de  $\sigma_a$ . L'indice des vides suit une évolution en escalier comme la déformation axiale, mais on observe globalement une décroissance logarithmique, comme habituellement observé en mécanique des sols. La loi de compaction s'exprime sous la forme

$$e = e_i - C_c \log \left( \frac{\sigma}{\sigma_i} \right) \quad (8.4)$$

où  $e_i$  est l'indice de vide initial,  $\sigma_i$  est la contrainte de confinement initiale et  $C_c$  est le coefficient de compression. Il faut remarquer que la base expérimentale de cette loi concerne principalement les argiles. Dans le cas des sables, une compaction significative n'est possible que pour les matériaux cohésifs, où le matériau peut être préparé dans un état assez lâche pour que la variation de la compacité soit importante, ou avec la fragmentation des particules, comme c'est le cas ici.

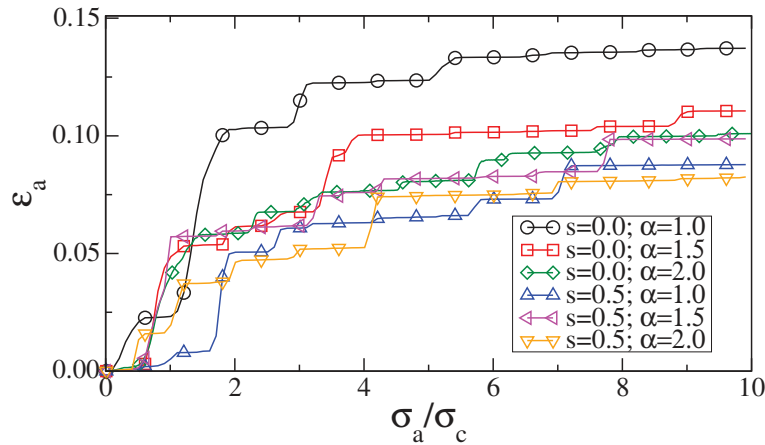


FIGURE 8.3. – Evolution de la déformation axiale  $\epsilon_a$  en fonction de la contrainte axiale normalisée.

L'évolution de l'indice des vides dépend *a priori* de la manière dont les fragments engendrés par la fragmentation se répartissent dans l'espace. Par exemple, si le processus de fragmentation conserve la distribution initiale des tailles, alors la compacité ne peut pas évoluer. De même, dans les zones de l'éclatement des particules la compacité ne peut pas évoluer considérablement puisque les fragments irréductibles forment localement un milieu dont la compacité est la même qu'un assemblage RCP de polygones de même taille. La compacité n'évolue pas non plus dans les zones où les particules se fragmentent peu. La compacité ne peut donc évoluer qu'autour des particules partiellement fragmentées ou à l'interface des zones fragmentées et non-fragmentées. Ces effets de polydispersité et d'hétérogénéité du processus de fragmentation jouent donc un rôle majeur dans la loi de compaction. Nous allons voir plus bas que l'évolution de la distribution des tailles n'est pas auto-similaire, ce qui conduit à une compaction progressive mais lente par incréments de contrainte.

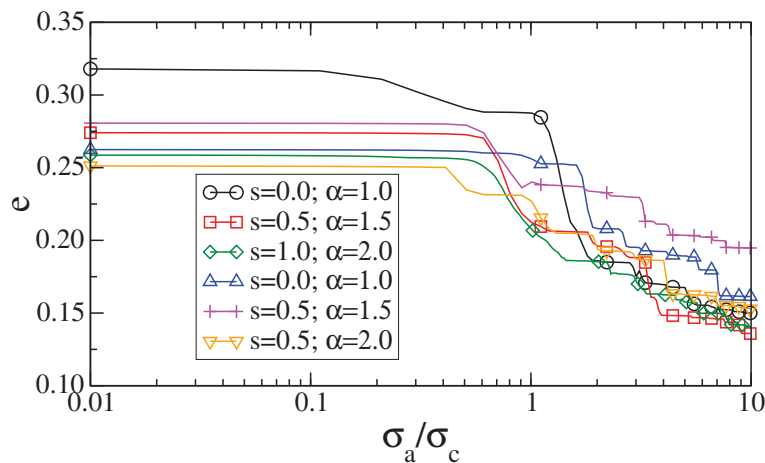


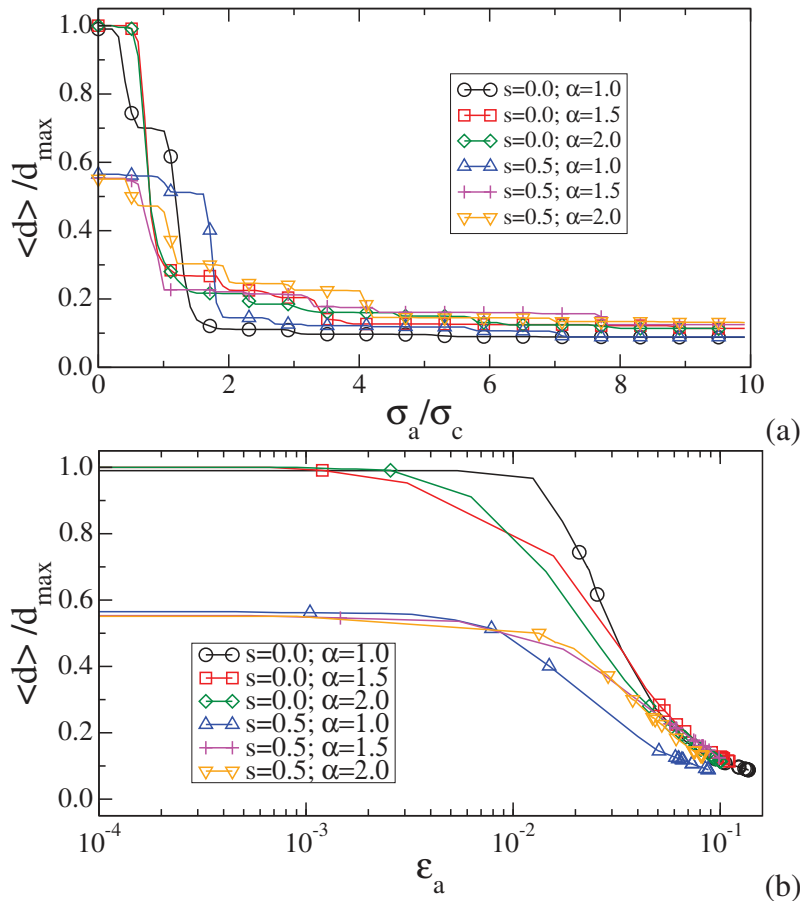
FIGURE 8.4. – Evolution de l'indice des vides en fonction de la contrainte axiale normalisée.

La figure 8.5(a) montre l'évolution du diamètre moyen des particules  $\langle d \rangle$  normalisée par

$d_{max}$  en fonction de la contrainte axiale. L'évolution de  $\langle d \rangle$  sous-tend clairement l'évolution saccadée de la déformation avec des configurations d'équilibre séparées par des périodes de réarrangement liée à la rupture soudaine d'une fraction des particules. Cette corrélation est observée pour toutes les valeurs de  $s$  et  $\alpha$ . En conséquence, quand  $\langle d \rangle$  est porté en fonction  $\varepsilon_a$ , nous observons une relation très lisse comme on peut la voir sur la figure 8.5(b). Pour les très faibles déformations, la taille moyenne évolue très peu. Mais à partir d'une déformation de l'ordre de  $10^{-2}$ , qui correspond aux réarrangements initiaux, on observe une variation presque logarithmique en fonction de la déformation :

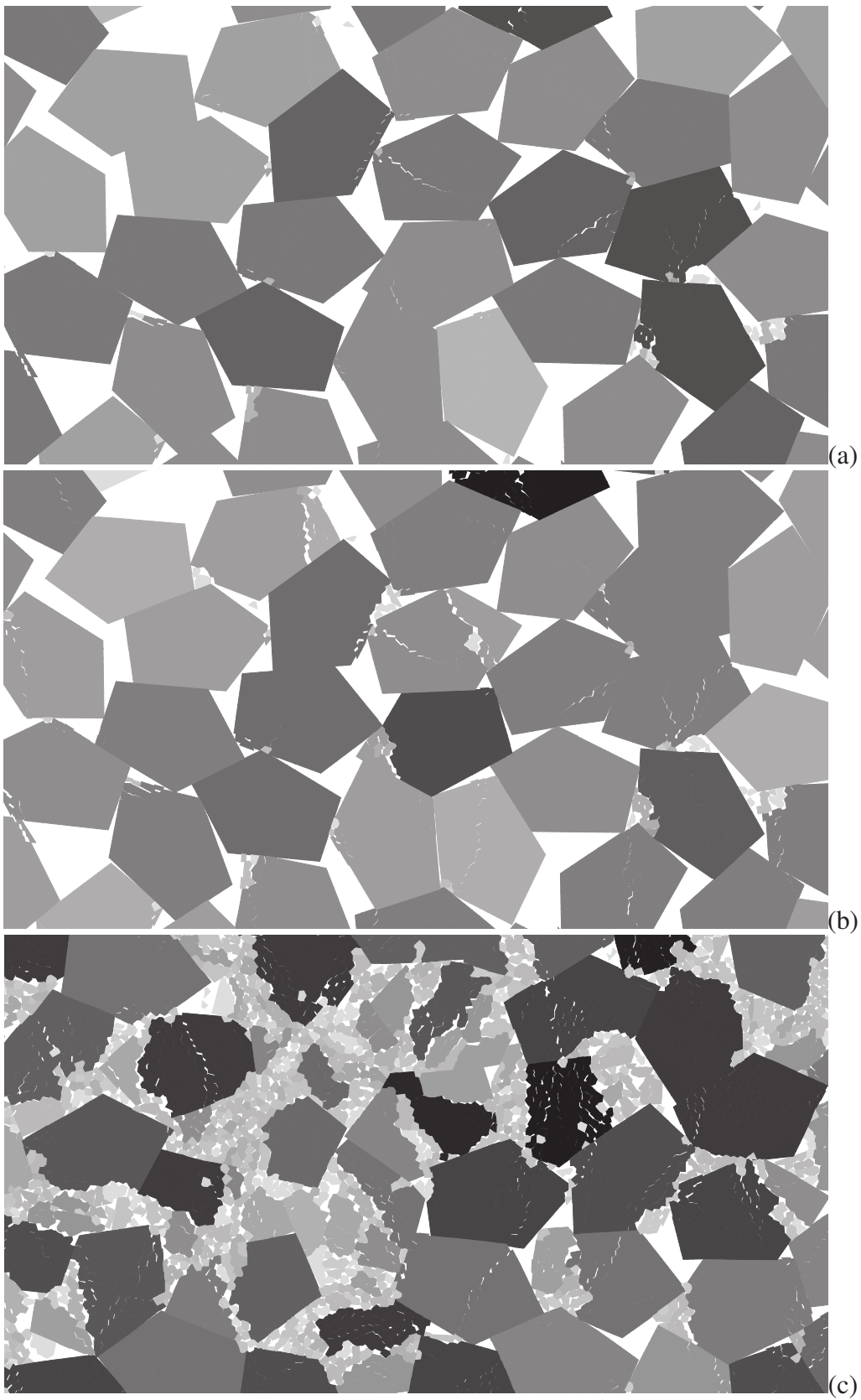
$$d = d_i - C_d \log(\varepsilon_a) \quad (8.5)$$

où  $d_i$  est le diamètre moyen initial et  $C_d \simeq 1$  est la pente. La valeur approximative de  $C_d$  est clairement plus importante pour les échantillons monodisperses.



**FIGURE 8.5.** – Evolution du diamètre moyen normalisé  $\langle d \rangle / d_{max}$  en fonction de la contrainte axiale normalisée (a) et en fonction de la déformation (b).





**FIGURE 8.6.** – Trois clichés d'un échantillon avec  $s = 0$  et  $\alpha = 2$  à trois niveaux de contrainte :  $\sigma_a = \sigma_c$  (a),  $\sigma_a = 2\sigma_c$  (b) et  $\sigma_a = 10\sigma_c$  (c). Les niveaux de gris sont proportionnels à la contrainte moyenne sur chaque particule.

### 8.3.2. Endommagement des particules

La figure 8.7 présente trois clichés d'un échantillon à trois niveaux de contrainte. On observe les fissures et fragments engendrés par la compression. Les fissures apparaissent dans différentes parties de l'assemblage. Ces fissures sont initiées au niveau des contacts entre particules, souvent aux contacts sommet/face. Il est remarquable qu'elles ne se propagent pas aux autres particules. Elles tendent plutôt à rester confinées à l'intérieur des particules endommagées et conduisent à l'éclatement de quelques particules tandis qu'en même temps une proportion des particules restent intactes ou ne sont que superficiellement endommagées. En d'autres termes, très souvent la fragmentation d'une particule au sein de l'assemblage l'affaiblit et accélère sa fragmentation sous l'action des charges locales. Cette pulvérisation de certaines particules a été également observée dans les expériences de compaction des poudres d' $\text{UO}_2$  [65].

La figure 8.8 présente l'évolution de la proportion  $P_b$  des particules endommagées au cours de la compression. On voit que le processus de fragmentation des particules comporte trois phases. Dans la première phase de 0 à  $0,5\sigma_c$ , les particules ne se fragmentent pas. Puis dans la deuxième phase de  $0,5\sigma_c$  à  $5\sigma_c$ , les particules se fragmentent massivement. Dans la troisième phase, la fragmentation continue à une vitesse nettement réduite. A la fin de l'essai pour  $\sigma_a = 10\sigma_c$ , la proportion des particules brisées  $P_b$  pour des assemblages polydisperses ( $s = 0,5$ ) est inférieure à celle des assemblages monodisperses. En d'autres termes, dans les assemblages polydisperses un certain nombre de particules ne subissent aucune fragmentation.

D'une manière plus générale, on peut définir un degré d'endommagement  $D_e$  d'une particule par

$$D_e = \frac{S_a - S_b}{S_a} \quad (8.6)$$

où  $S_a$  est la surface de la particule avant de la fragmentation et  $S_b$  est la surface du plus grand fragment de la même particule après la fragmentation ; voir la figure 8.9. Pour  $S_b = S_a/2$ , on obtient la valeur maximale  $D_e = 0,5$ . Pour une particule pulvérisée, la valeur la plus petite de  $S_b$  est  $S_a/n_v$ , où  $n_v$  est le nombre de cellules dans cette partie.  $D_e$  atteint alors sa valeur la plus élevée  $D_e = \frac{n-1}{n} \simeq 1$ . Différentes valeurs de  $D_e$  entre 0 et 1 correspondent ainsi au degré de réduction de taille de la particule.

La figure 8.10(a) montre le degré d'endommagement moyen de toutes les particules au cours de la compression pour nos six assemblages. La courbe  $D_e$  des assemblages polydisperses ( $s = 0,5$ ) est en-dessous de celle des assemblages monodisperses ( $s = 0$ ). Autrement dit, les assemblages polydisperses sont moins endommagés que les assemblages monodisperses. Par ailleurs, on remarque aussi que les assemblages des particules allongées ( $\alpha = 2$ ) sont moins endommagés comme on peut le voir sur la figure 8.10(b), qui représente  $D_e$  à la fin de l'essai en fonction du rapport d'aspect  $\alpha$  pour  $s = 0$  et  $s = 0,5$ .

Dans le chapitre précédent, nous avons mis en évidence un effet d'échelle dans les essais brésiliens. Comme le seuil de rupture est plus faible pour les fragments de plus grandes tailles, on s'attend *a priori* à ce que les particules de plus grandes tailles se fragmentent plus rapidement et dans une plus grande proportion. La figure 8.11 montre le degré d'endommagement  $D_e$  à la fin de l'essai en fonction des tailles initiales des particules. On voit que le degré d'endommagement est au contraire une fonction décroissante de la taille des particules.



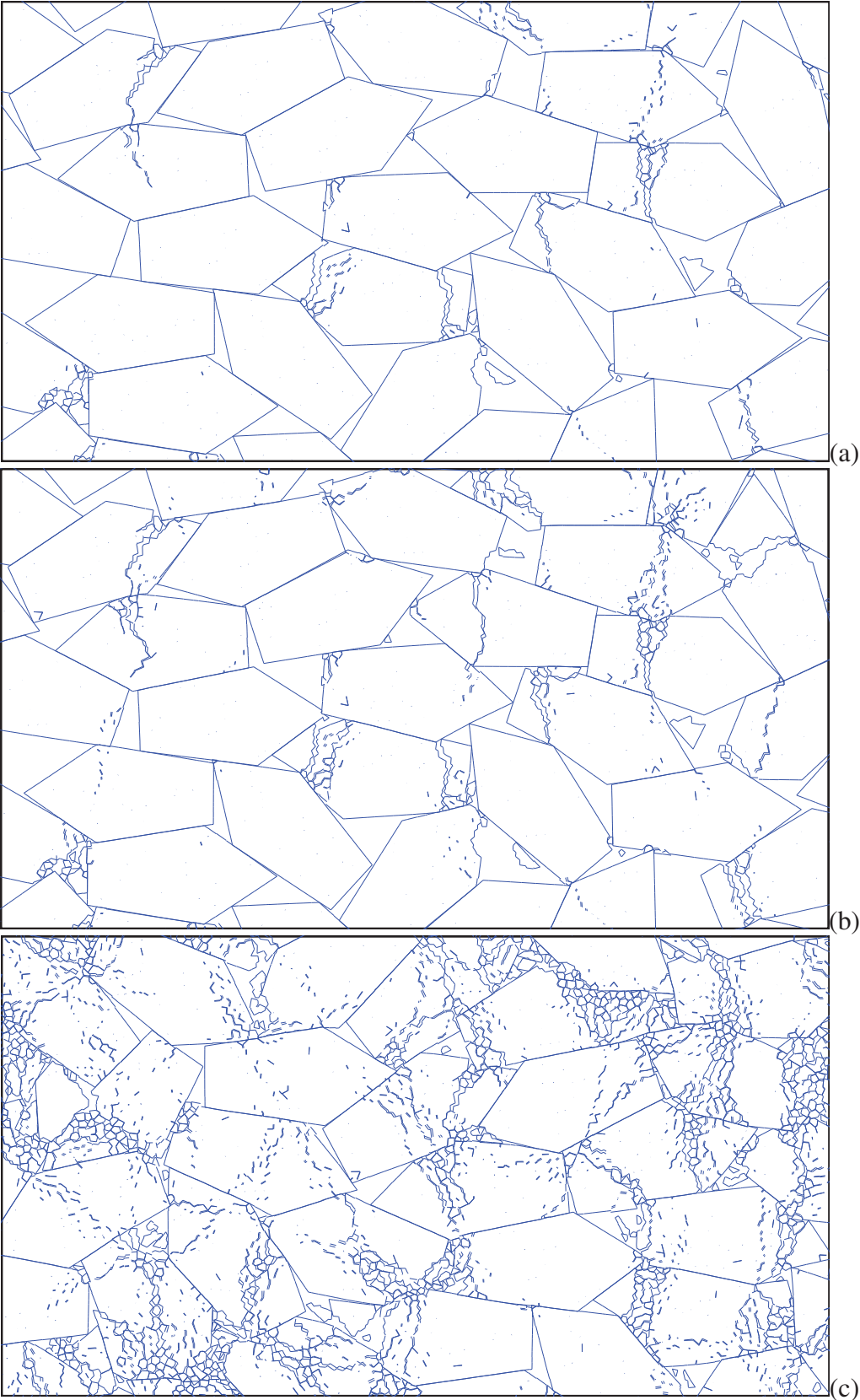


FIGURE 8.7. – Le même échantillon que sur la figure 8.6 mais avec la visualisation des contacts non-cohésifs par des traits.

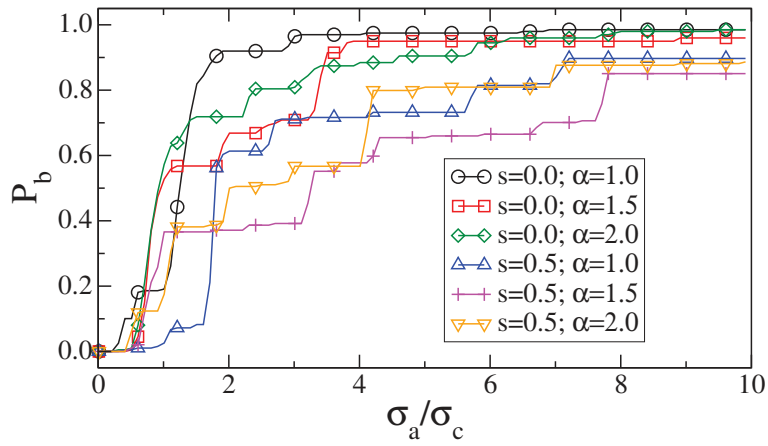


FIGURE 8.8. – Evolution de la proportion  $P_b$  de particules endommagées en fonction de la contrainte verticale normalisée.

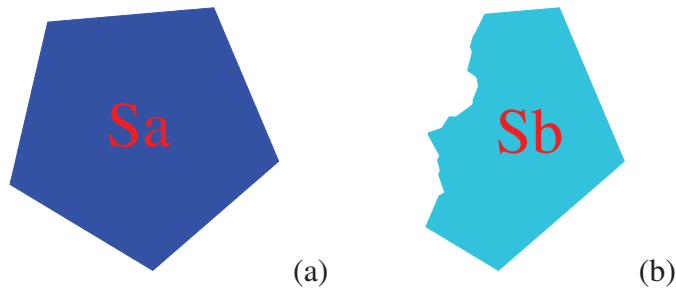


FIGURE 8.9. – La définition du degré d'endommagement des particules : a) la particule initiale ; b) le plus grand fragment après fragmentation.

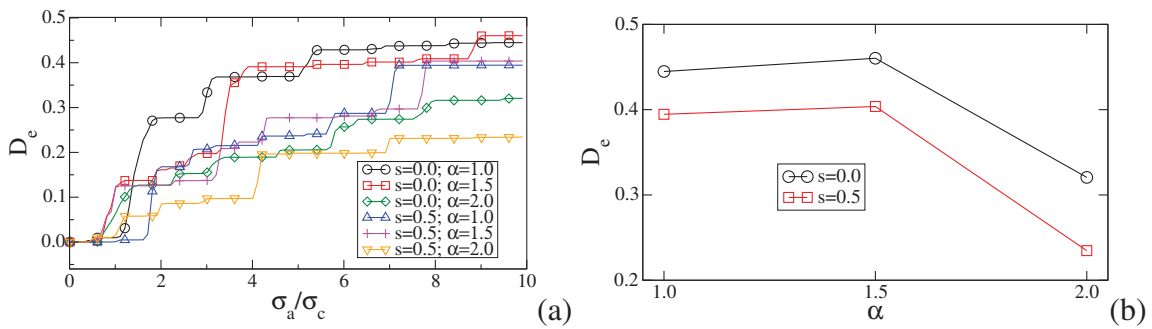
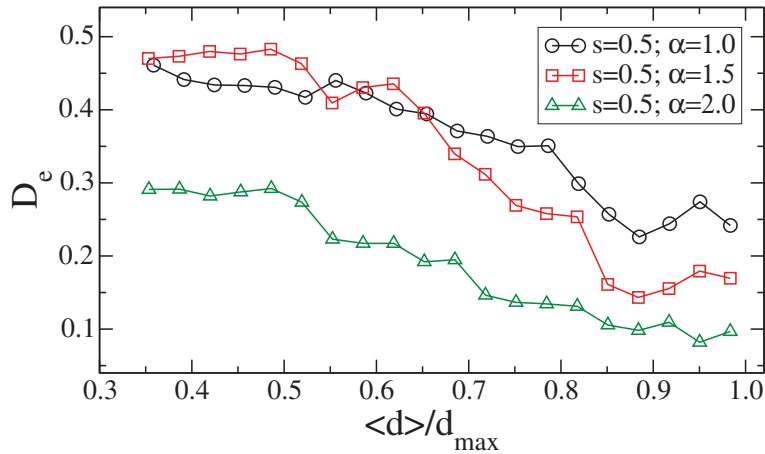


FIGURE 8.10. – a) Evolution du degré d'endommagement  $D_e$  au cours de la compression et b) Le degré d'endommagement à la fin de l'essai en fonction du rapport d'aspect  $\alpha$  pour  $s = 0$  et  $s = 0,5$

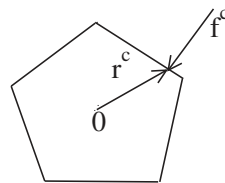


**FIGURE 8.11.** – *Le degré d'endommagement à la fin de la compression uniaxiale en fonction de la taille initiale des particules.*

Ce comportement s'explique par l'état de contrainte interne des particules qui dépend des forces de contact. Le tenseur de contrainte  $\sigma_{\alpha\beta}$  d'une particule est donné par

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{V} \sum_{c=1}^{N_c} f_{\alpha}^c r_{\beta}^c \tag{8.7}$$

où  $V$  est le volume de la particule,  $N_c$  est le nombre de contacts de la particule,  $f_{\alpha}^c$  est la composante  $\alpha$  de la force exercée sur la particule au contact  $c$  et  $r_{\beta}^c$  est la composante  $\beta$  du vecteur position du contact  $c$ ; voir la figure 8.12.

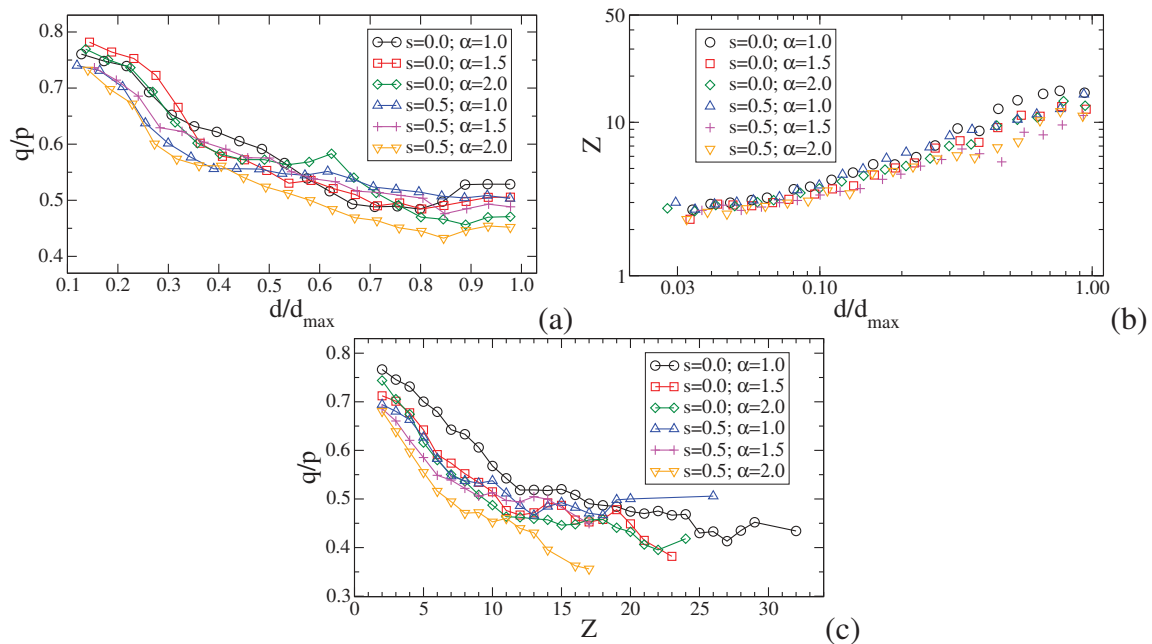


**FIGURE 8.12.** – *Géométrie locale du contact.*

A partir de l'état de contrainte local au niveau de chaque particule, on obtient le déviateur de contrainte normalisé pour chaque particule  $q/p = (\sigma_1 - \sigma_2)/(\sigma_1 + \sigma_2)$ , où  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont les contraintes principales. La figure 8.13 présente  $q/p$  et le nombre de coordination  $Z$  en fonction de la taille des particules, ainsi que  $q/p$  en fonction de  $Z$ . On voit que  $q/p$  diminue en fonction de la taille des particules alors que  $Z$  augmente. C'est donc la raison pour laquelle les particules de plus grande taille sont moins fragmentées que les particules plus petites. Le lien avec le nombre de coordination indique que cet effet est directement induit par les exclusions stériques. En effet, ces exclusions mutuelles se manifestent surtout entre les particules voisines d'une particule. Elle sont plus importantes pour les petites particules et leur imposent un nombre de coordination plus

faible et donc un déviateur de contrainte plus important. Pour la fragmentation des particules, cet effet l'emporte en pratique sur l'effet d'échelle. En d'autres termes, les grosses particules sont protégées par les petites particules qui les entourent en homogénéisant leur contrainte interne. Cela implique aussi qu'une proportion de grosses particules reste intacte, comme nous allons voir dans la section suivante. On observe également que pour les assemblages polydisperses  $q/p$  est toujours inférieur à celui des assemblages monodisperses, ce qui est cohérent avec le fait que les assemblages polydisperses sont plus difficiles à fragmenter que les assemblages monodisperses.

Une autre observation intéressante concerne l'effet de la forme des particules. Le déviateur  $q/p$  est plus faible pour les particules plus allongées, ce qui suggère que le nombre de coordination augmente avec le rapport d'aspect  $\alpha$  des particules. La figure 8.14 montre le nombre de coordination  $Z$  en fonction de la valeur initiale de  $\alpha$  pour les assemblages monodisperses et polydisperses (avec  $s = 0, 5$ ) avant la première fragmentation du système et à la fin de la compression axiale. On voit que  $Z$  augmente à la fois avec  $s$  et  $\alpha$ , ce qui conduit à la distribution plus homogène des forces dans le système. Par conséquent,  $q/p$  et le degré d'endommagement  $D_e$  diminuent en fonction de  $s$  et  $\alpha$ .



**FIGURE 8.13.** – a) Le déviateur de contrainte normalisé des particules en fonction de leur taille ; b) Le nombre de coordination en fonction de la taille des particules ; c) Le déviateur de contrainte normalisé en fonction du nombre de coordination.

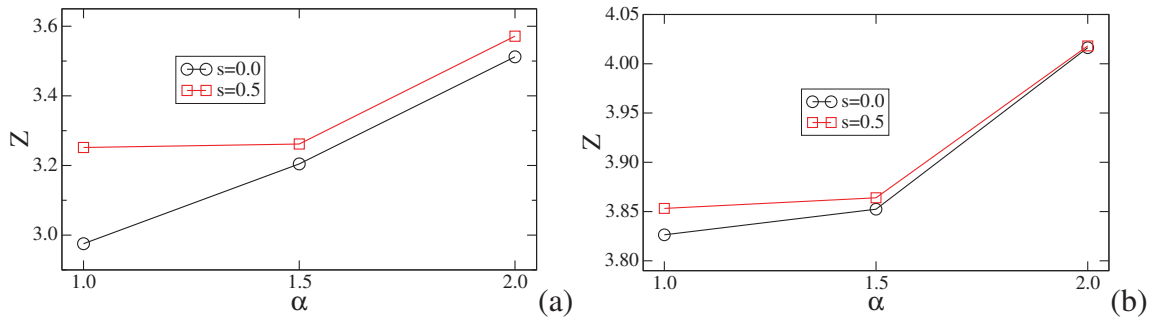


FIGURE 8.14. – Le nombre de coordination en fonction du rapport d’aspect initial  $\alpha$  pour  $s = 0$  et  $s = 0,5$  avant la rupture (pour  $\sigma_a = 0, 3\sigma_c$ ) (a) et à la fin de la compression axiale (b).

## 8.4. Fragmentation des particules

La classe des particules d’une taille donnée  $d$  (à  $\delta d$  près) évolue par deux types d’événements : 1) certaines particules de taille  $d$  se fragmentent pour donner des particules de tailles  $d_i < d$  et 2) certaines particules de tailles  $d_i > d$  se fragmentent pour donner des particules de taille  $d$ . L’évolution de  $P(d)$  dépend donc des probabilités de transition  $P(d \rightarrow d_i)$  ( $\forall d_i < d$ ) et  $P(d_i \rightarrow d)$  ( $\forall d_i > d$ ). Ce processus est complexe dans la mesure où une particule peut se fragmenter en plusieurs fragments à la fois. De même, ces probabilités de transition peuvent évoluer au cours du temps par l’effet d’assemblage. Néanmoins, il existe plusieurs modèles de fragmentation basés sur l’hypothèse qu’une particule se divise toujours en deux fragments et sur l’approximation que la mémoire de l’état initial s’efface par le processus de fragmentation et, par conséquent, la distribution des tailles évolue vers une distribution générique. On peut ainsi obtenir une distribution log-normale ou une distribution en loi de puissance suivant le choix des probabilités de transition. Par ailleurs, dans certains modèles simples de rupture, une particule brisée est remplacée par un groupe de fragments de plus petites tailles auquel cas la distribution finale est conditionnée par le choix de cette division locale des particules [7, 143, 21, 50, 52]. Pour accéder aux probabilités de transition au cours de la compaction uniaxiale, une bonne statistique et donc beaucoup de simulations sont nécessaires. Nous allons nous contenter de présenter ici quelques résultats importants de nos études qui montrent que les approximations utilisées dans des modèles analytiques sont raisonnables mais pas suffisantes.

La figure 8.15 montre la proportion de particules divisées en  $N_f$  fragments entre deux incréments de contrainte pour nos six assemblages. Dans cette statistique sont incluses à chaque pas tous les fragments issus de l’incrément précédent. En d’autres termes, cette statistique représente une moyenne sur tout le processus de fragmentation. Les histogrammes ne dépendent pratiquement pas des paramètres  $s$  et  $\alpha$ . On observe que la grande majorité ( $\simeq 80\%$ ) de particules se fragmentent en deux fragments. Mais la probabilité de division en trois fragments n’est pas négligeable ( $\simeq 10\%$ ). Il faut remarquer que le comportement observé peut varier en fonction de l’incrément de charge. Pour des incréments de charge plus importants, une fraction plus importante de particules se divisent en plus de deux fragments. Il n’est donc pas déraisonnable de considérer que les particules dans un chargement lent se divisent toujours en deux fragments.

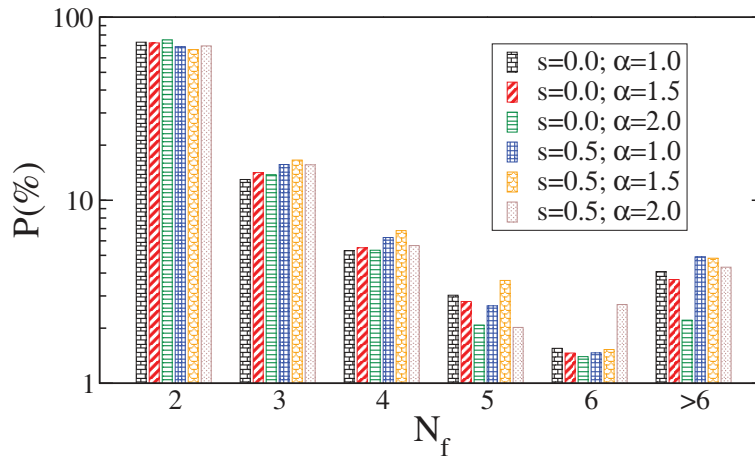


FIGURE 8.15. – Proportion de particules brisées en  $N_f$  fragments pour nos six assemblages.

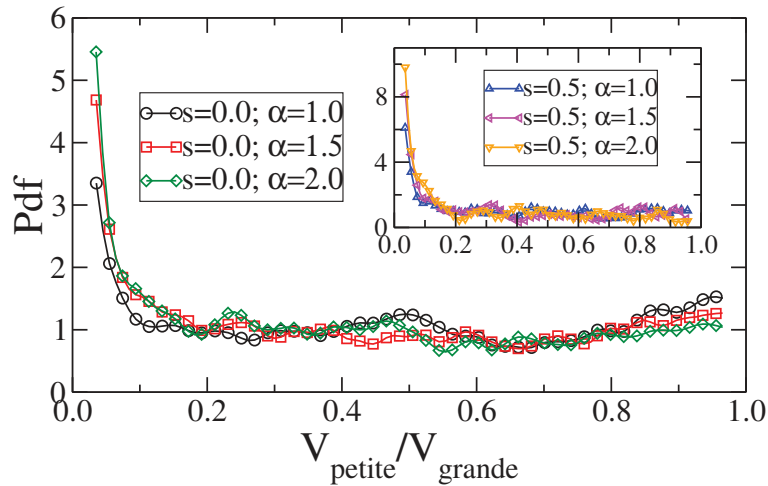


FIGURE 8.16. – La distribution des volumes relatifs des deux fragments issus de la division des particules en deux fragments pour nos six échantillons.

La figure 8.16 montre la distribution des volumes relatifs  $V_{petit}/V_{grand}$  des deux fragments petit et grand des particules qui sont divisées en deux. La distribution diverge aux faibles valeurs de ce rapport, ce qui indique que la division en deux fragments concerne très souvent le détachement des petits fragments. Ceci relativise l'importance du processus de division en deux fragments. On observe aussi un pic pour le rapport 1 qui représente essentiellement les petits fragments composés de deux cellules et qui se fragmentent en deux cellules vers la fin du processus où le nombre des petits fragments augmente. Ces données suggèrent que, si on néglige les fragments les plus petits ("poussières" ou particules d'usure) engendrés au cours de la compaction, les tailles des fragments issus d'une particule ont une distribution pratiquement uniforme en fonction de la taille des particules.

Cette observation suggère qu'un fragment de taille  $d$  peut être issu avec la même probabilité d'une particule de taille  $d_i$  quelconque mais supérieure à  $d$ . Le nombre  $\delta N^+(d)$  de nouveaux

fragments de taille  $d$  engendrés par la fragmentation peut donc être approché par le volume total des particules de tailles  $d_i > d$  divisé par le volume  $d^2$  d'une particule de taille  $d$ . Comme les particules appartiennent à une gamme de tailles avec une limite supérieure  $d_{max}$  et une limite inférieure  $d_{min}$ , il est plus commode de travailler avec les tailles réduites des particules :

$$\lambda(d) = \frac{d - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} \quad (8.8)$$

Le volume total des particules dans l'intervalle  $\delta\lambda$  pour une déformation  $\varepsilon_a$  est donné par  $N(\lambda, \varepsilon_a)\lambda^2\delta\lambda$ , où  $N(\lambda, \varepsilon_a)$  est le nombre de particules de taille  $\lambda$  pour la déformation cumulée  $\varepsilon_a$ . On peut donc écrire :

$$\delta N^+(\lambda, \varepsilon_a) = \frac{1}{\lambda^2} \int_r^1 P_{rup} x^2 N(x, \varepsilon_a) \delta x \delta \varepsilon_a \quad (8.9)$$

où  $P_{rup}$  est la probabilité de rupture d'une particule que nous supposons être constant ici pour simplifier, mais qui peut dépendre de la taille des particules. Par ailleurs, le nombre  $\delta N^-(\lambda, \varepsilon_a)$  de particules de taille  $\lambda$  qui se transforment en particules de tailles plus petites, est proportionnel au nombre total  $N(\lambda, \varepsilon_a)$  de particules de taille  $\lambda$  et à la probabilité de rupture  $P_{rup}$  :

$$\delta N^-(\lambda, \varepsilon_a) = P_{rup} N(\lambda, \varepsilon_a) \delta \varepsilon_a \quad (8.10)$$

L'évolution de  $N(\lambda, \varepsilon_a)$  est donc régie par l'équation bilan suivante :

$$\frac{\delta N(\lambda, \varepsilon_a)}{\delta \varepsilon_a} = \delta N^+(\lambda, \varepsilon_a) - \delta N^-(\lambda, \varepsilon_a) = \frac{1}{\lambda^2} \int_\lambda^1 P_{rup} x^2 N(x, \varepsilon_a) \delta x - P_{rup} N(\lambda, \varepsilon_a) \quad (8.11)$$

L'état stationnaire correspond à la condition  $\delta N(\lambda, \varepsilon)/\delta \varepsilon_a = 0$ , ce qui implique que les deux processus décrits plus haut se compensent pour chaque taille  $\lambda$  :  $\delta N^+(\lambda, \varepsilon_a) = \delta N^-(\lambda, \varepsilon_a)$ . La distribution d'équilibre est donc caractérisée par l'équation :

$$\lambda^2 N(\lambda) = \int_\lambda^1 x^2 N(x) dx \quad (8.12)$$

Il est facile à montrer que l'équation (8.12) admet la solution suivante :

$$N(\lambda) = (e^{-\lambda} - e^{-1}) \lambda^{-2} \quad (8.13)$$

C'est une fonction décroissante qui varie de  $\infty$  pour  $\lambda = 0$  à 0 pour  $\lambda = 1$ . Elle a une forme dominante en  $\propto \lambda^{-2}$  aux faibles valeurs de  $\lambda$  et en  $\propto e^{-\lambda}$  aux valeurs de  $\lambda$  proches de 1.

Il est également possible d'obtenir la fraction volumique cumulée (CVF)  $h(\lambda)$  de cette fonction à partir de l'équation (8.12). La CVF est définie par

$$h(\lambda) = \frac{\int_0^\lambda x^2 N(x) \delta x}{\int_0^1 x^2 N(x) \delta x} \quad (8.14)$$



Or, d'après l'équation (8.12), nous avons

$$\lambda^2 N(\lambda) = \int_{\lambda}^1 x^2 N(x) dx = \int_0^1 x^2 N(x) dx - \int_0^{\lambda} x^2 N(x) dx = \left[ \int_0^1 x^2 N(x) dx \right] [1 - h(\lambda)] \quad (8.15)$$

Etant données l'équation (8.13) et la condition  $h(0) = 0$ , on obtient l'expression suivante pour la CVF :

$$h(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{1 - e^{-1}} \quad (8.16)$$

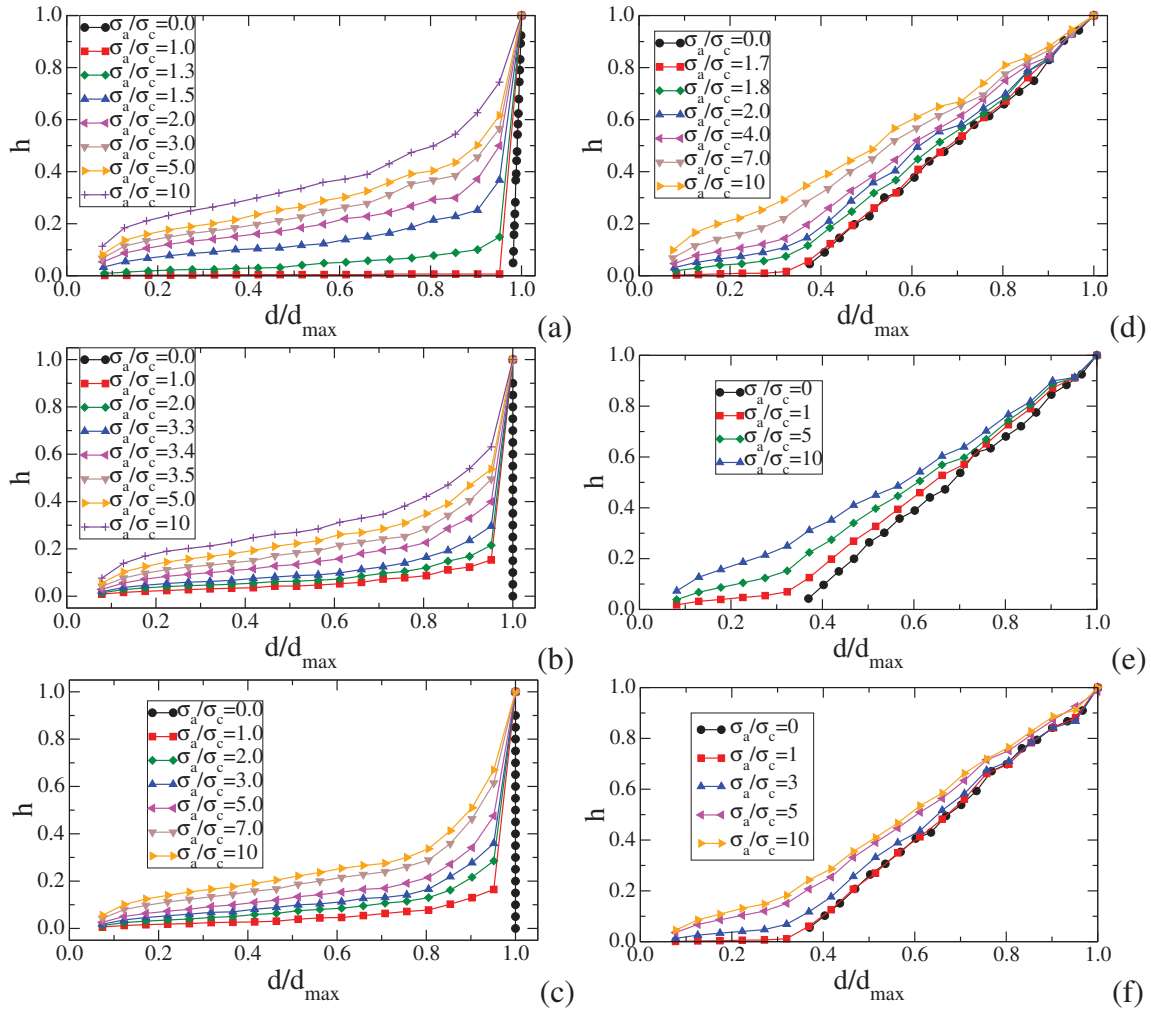
## 8.5. Distributions des tailles des particules

Le modèle présenté plus haut prédit une distribution générique très simple. Même si les processus sous-jacents à l'évolution de la distribution granulométrique sont bien plus complexes, ce modèle permet de mieux comprendre et interpréter les résultats numériques que nous allons présenter dans ce paragraphe.

La figure 8.17 montre les CVF des fragments au cours de la compression uniaxiale pour tous nos assemblages. Les échantillons sont initialement monodisperses dans les cas (a), (b) et (c), et initialement polydisperses, avec une distribution uniforme par fractions volumiques dans les cas (d), (e) et (f). Dans tous les cas, on observe une variation de la courbure de la distribution cumulée sur un intervalle de tailles qui reste la même du début jusqu'à la fin de la compression. On voit qu'il y a un nombre *fini* de fragments de taille égale à la taille des cellules, qui constituent des fragments irréductibles, contrairement au modèle dans lequel aucune limite inférieure n'est imposée sur les tailles des particules. La distribution des tailles des fragments les plus petits est donc influencée par cette limite. D'autre part, la gamme des grandes tailles garde une signature de la distribution de taille initiale. Même si la classe des particules primaires est progressivement réduite avec l'augmentation de la contrainte appliquée, il reste toujours quelques particules primaires intactes dans l'assemblage, dont on peut voir un exemple sur la figure 8.7. Comme on en a discuté précédemment, cet effet s'explique par le fait que les plus grosses particules supportent en moyenne des contraintes déviatoriques faibles lorsqu'elles sont entourées par une population de petites fragments.

Dans tous les cas, on observe que dès les premiers instants de rupture, des fragments de toutes tailles sont engendrés et une distribution bien définie sur toute la gamme de tailles apparaît. Ce comportement est cohérent avec la fragmentation des particules en fragments de toutes les tailles avec une probabilité presque uniforme sauf pour les plus petites tailles. On remarque aussi une différence entre les échantillons monodisperse et polydisperses. Sauf dans la gamme des petites tailles, les échantillons polydisperses, dont la loi de distribution est donnée par  $h \propto \lambda$ , semblent garder une forme presque linéaire  $h \propto \beta_2 \lambda$  avec une pente  $\beta_2$  qui diminue progressivement de 1,5 à 1, comme on peut le voir sur la figure 8.18 qui représente l'évolution de  $\beta_2$  en fonction de  $\sigma_a$ . Ces courbes ne semblent pas tendre vers une distribution générique, l'hypothèse que nous avons fait dans le modèle et qui prédit une distribution stationnaire.

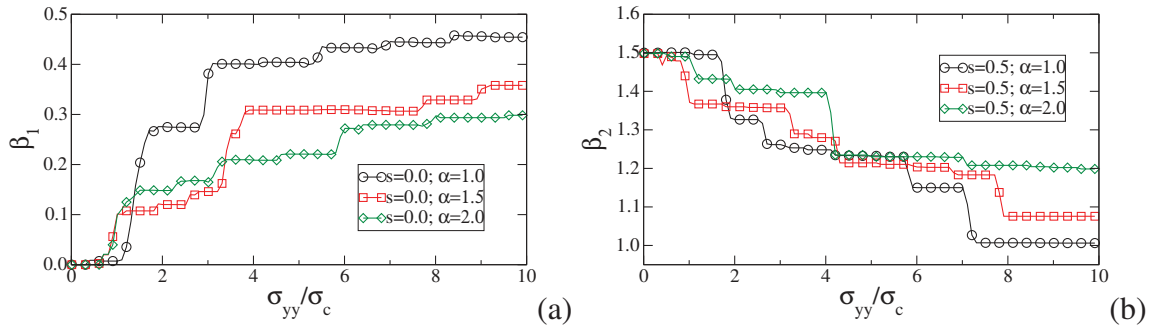
Le cas monodisperse est intéressant dans la mesure où la polydispersité résulte dans ce cas uniquement de la fragmentation des particules. On observe néanmoins que dans la gamme des



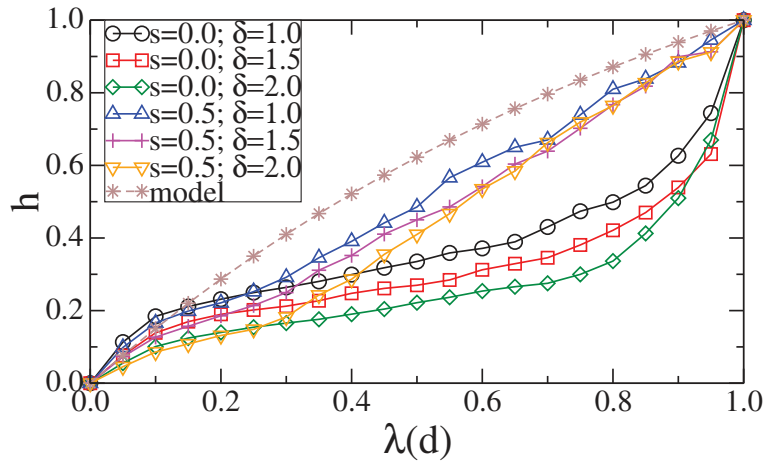
**FIGURE 8.17.** – La fraction volumique cumulée (CVF) des particules au cours de la compression uniaxiale. Les tailles des particules sont normalisées par la taille de la plus grande particule : a)  $s = 0$  et  $\alpha = 1$ , b)  $s = 0$  et  $\alpha = 1, 5$ , c)  $s = 0$  et  $\alpha = 2$ , d)  $s = 0, 5$  et  $\alpha = 1$ , e)  $s = 0, 5$  et  $\alpha = 1, 5$ , f)  $s = 0, 5$  et  $\alpha = 2$ .

tailles intermédiaires, les CVF ont une allure linéaire avec une pente  $\beta_1$  qui augmente pendant la compression axiale, comme on peut la voir sur la figure 8.18. Dans la gamme des grandes tailles, la distribution n'est plus linéaire. Cette partie de la courbe raccorde une distribution monodisperse (état initial) à une fonction exponentielle. Ces exemples montrent que la distribution initiale des tailles ne s'efface pas complètement. Il apparaît aussi que la distribution stationnaire n'est pas atteinte dans ces simulations malgré la fragmentation massive des particules et une déformation axiale importante.

Pour comparer les CVF avec le modèle, nous les avons tracées en fonction de la taille réduite  $\lambda$  des particules pour  $\sigma_a = 10\sigma_c$  sur la figure 8.19, ainsi que la distribution prédite par le modèle. On voit que toutes les courbes sont sous la courbe théorique. Cette dernière peut donc être considérée comme une distribution limite qui ne peut être atteinte qu'à des niveaux



**FIGURE 8.18.** – a) L'évolution de la pente  $\beta_2$  dans la gamme de tailles  $d > 0, 4d_{max}$  de la CVF des assemblages polydisperses au cours de la compression axiale ; b) L'évolution de la pente  $\beta_1$  dans la gamme de tailles intermédiaires de la courbe CVF des assemblages monodisperses.



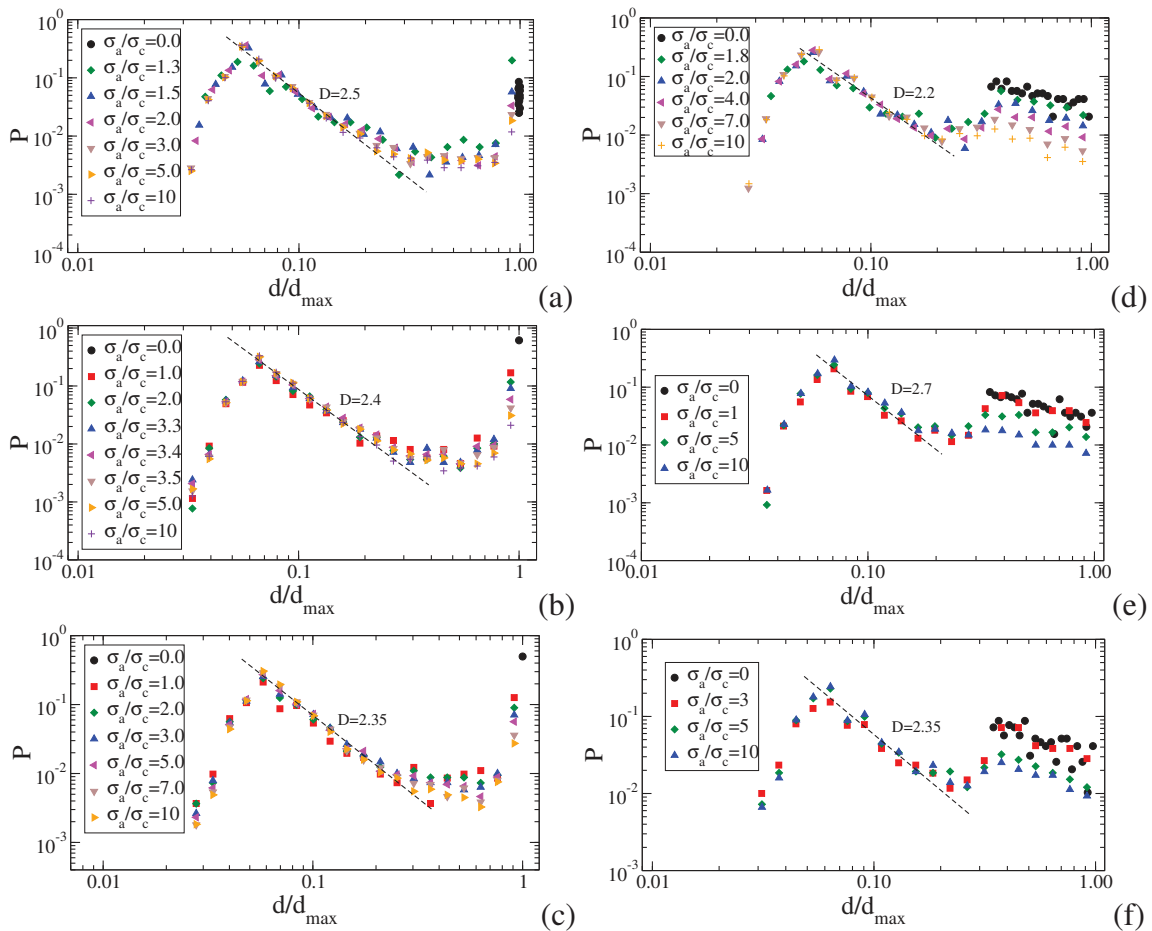
**FIGURE 8.19.** – Les fractions volumiques cumulées à  $\sigma_a = 10\sigma_c$  en fonction de la taille réduite  $\lambda$  des particules pour tous les assemblages soumis à la compaction uniaxiale. La courbe en pointillés représente la distribution stationnaire prédite par le modèle.

de contraintes encore plus élevés ou à partir d'une distribution initiale très polydisperse. En effet, les courbes pour les cas polydisperses sont plus proches de la courbe théorique que les distributions issues des assemblages monodisperses. La courbure de la distribution théorique est conforme à un processus de fragmentation qui engendre plus de petites particules que des grandes particules. Son coefficient d'uniformité est de l'ordre de  $C_u = d_{60}/d_{10} \simeq 9$ , ce qui correspond à une distribution large.

Les figures 8.20 montrent les distributions  $P(d) = N(d)/\sum_i N(d_i)$  des tailles des fragments. Pour les six assemblages considérés ici, la distribution présente une gamme intermédiaire de taille en loi de puissance  $\propto d^{-D}$  avec l'exposant  $D \in [2, 2; 2, 5]$ . Cet exposant est plus grand que l'exposant 2 du modèle. Mais le fait qu'une loi de puissance émerge dans le cas monodisperse suggère que dans cette gamme intermédiaire des tailles la mémoire de la distribution initiale est partiellement effacée. En d'autres termes, les tailles intermédiaires ne sont pas influencées par

les bornes supérieure et inférieure sur les tailles et il n'y donc pas de taille caractéristique.

Il est à noter également que les valeurs de l'exposant  $D$  sont très proches de l'exposant 2,3 dans le cas d'une configuration apollonienne [7]. Or, les considérations liées au remplissage de l'espace n'ont pas été prises en compte dans notre modèle. De telles considérations peuvent néanmoins être prises en compte pour contraindre la fragmentation. Il faut aussi remarquer qu'une distribution des tailles en loi puissance ne signifie pas que la structure de l'assemblage est "fractale". La fractalité de la structure implique une distribution en tailles réparties sur plusieurs ordres de grandeurs de manière à ce que plusieurs classes granulométriques puissent exister et leur répartition dans l'espace forme une structure hiérarchique.



**FIGURE 8.20.** – Distribution  $P(d)$  de la taille des particules au cours de la compression uniaxiale. Les tailles des particules sont normalisées par celle de la plus grande particule avant le début de la rupture.

Il faut noter que les valeurs de l'exposant  $D$  ne concernent qu'un intervalle faible (inférieur à une decade) et sont donc entachées d'erreurs. Nous avons tracé les mêmes données à la fin d'essai en fonction des tailles réduites sur la figure 8.21. La fonction prédite par le modèle est représentée également sur le même graphe. On voit que les données dans l'intervalle des tailles intermédiaires sont bien ajustées par le modèle, alors que celui-ci ne comporte aucun

paramètre d'ajustement. Comme nous allons voir plus loin, cet intervalle coïncide avec celui où les fragments présentent un rapport d'aspect indépendant du rapport d'aspect initial des particules. Par rapport au modèle, on observe un déficit de petites particules et un excès de grosses particules. Ceci laisse penser que si la compaction continue, ou bien si les simulations sont réalisées avec des particules plus finement discrétisées, alors on devrait continuer à réduire le nombre des grosses particules et augmenter le nombre des petites particules.

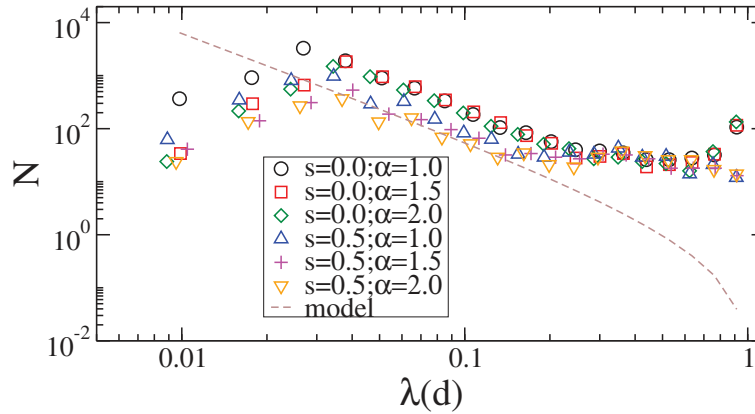


FIGURE 8.21. – Les densités de probabilité des tailles des particules à  $\sigma_a = 10\sigma_c$  en fonction de la taille réduite  $\lambda$  des particules pour tous les assemblages. La courbe en traits représente la distribution stationnaire prédite par le modèle.

## 8.6. Evolution des formes des particules

Des études réalisées sur des échantillons lunaires indiquent que le rapport d'aspect moyen des particules est très proche du *nombre d'argent*  $\sqrt{2}$  [146]. En l'absence de transport alluvial sur la lune et étant donné que la fragmentation des particules est due aux impacts, le processus de fragmentation doit être assez similaire à celui de la compression uniaxiale. Nous avons donc analysé les rapports d'aspect  $\alpha$  des fragments dans nos échantillons. La figure 8.22 montre l'évolution du rapport d'aspect moyen  $\langle\alpha\rangle$  dans nos assemblages soumis à la compression uniaxiale. Dans les assemblages de particules de rapport d'aspect initial égal 1 (pour  $s = 0$  et  $s = 0,5$ ),  $\langle\alpha\rangle$  augmente au cours de la compression. En revanche, il diminue pour le rapport d'aspect initial égal à 2. Dans tous les cas, le rapport d'aspect moyen tend vers 1,6, ce qui n'est pas loin de la valeur 1,4 trouvé pour les échantillons lunaires.

La figure 8.23 montre la distribution des rapports d'aspect à la fin de l'essai de compression uniaxiale dans tous les échantillons. Ces distributions sont larges mais présentent un pic principal pour  $\alpha \simeq 1,5$ . La distribution montre plusieurs pic dans le cas polydisperse. La forme assez complexe de la distribution indique encore une fois l'interférence entre la valeur initiale de  $\alpha$  et son évolution par fragmentation. L'existence d'un pic peut être expliquée comme une conséquence de deux processus opposés. D'une part, les grosses particules tendent à générer des fragments anisotropes par fragmentation et, d'autre part, les fragments allongés subissent des

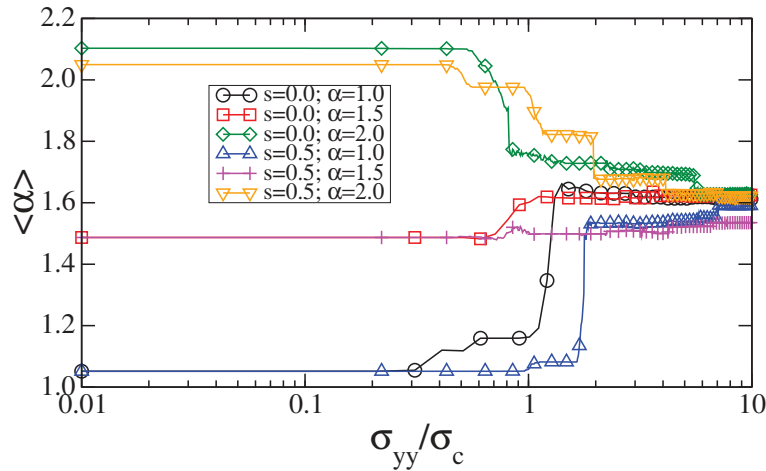


FIGURE 8.22. – Evolution du rapport d'aspect moyen  $\langle \alpha \rangle$  en fonction de la contrainte verticale normalisée pour six assemblages.

déviateurs de contrainte plus importants et tendent à se fragmenter plus facilement en fragments plus courts et donc de rapport d'aspect plus faible. Le bilan de ces ruptures successives entre particules de faible rapport d'aspect et de grand rapport d'aspect peut devenir stable avec plusieurs pics ou une distribution large. En d'autres termes, tant que la fragmentation des particules se poursuit, des particules de grand rapport d'aspect continuent à être créées par fragmentation. C'est par rapport à ce processus que le nombre d'argent trouve son sens. En effet, si une particule de rapport d'aspect égal à  $\sqrt{2}$  se divise en deux fragments égaux perpendiculairement à son axe le plus long, alors chacun de ces fragments aura le même rapport d'aspect  $\sqrt{2}$ . Le pic de la distribution des rapports d'aspect semble donc représenter un point stable avec un seul rapport d'aspect.

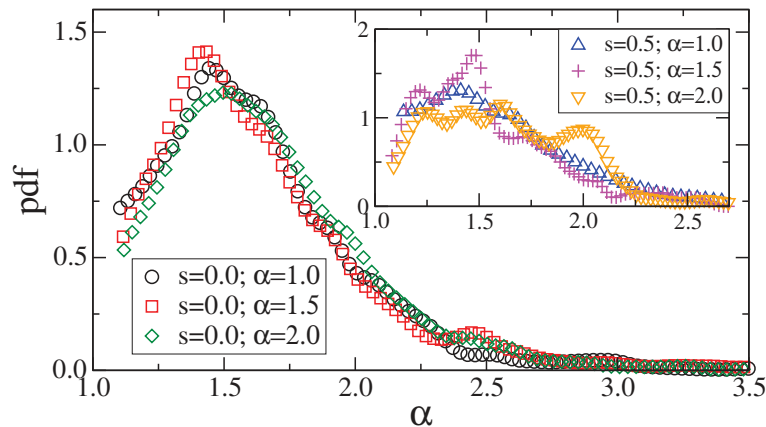
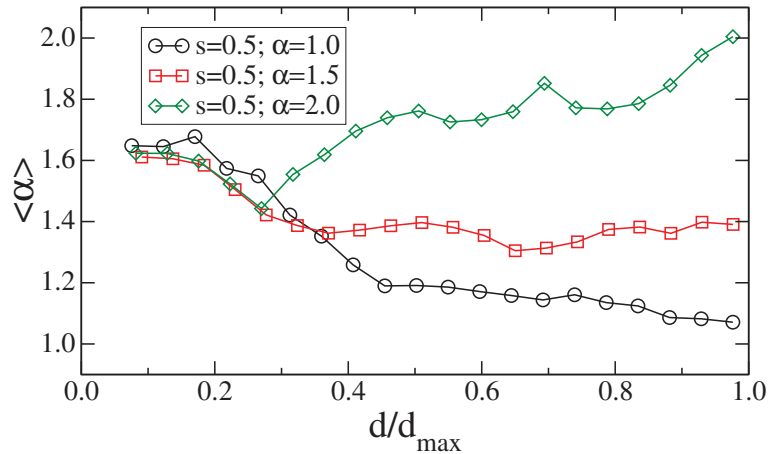


FIGURE 8.23. – Densité de probabilité des rapports d'aspect  $\alpha$  à la fin de l'essai de compression sur les six assemblages.

Il est enfin important de déterminer si les rapports d'aspect sont distribués de la même manière pour toutes les tailles des particules. En pratique, il est statistiquement plus simple de



**FIGURE 8.24.** – Corrélation entre le rapport d'aspect moyen  $\langle \alpha \rangle$  et la taille des particules  $d$  normalisée par la taille de la plus grande particule.

tracer la valeur moyenne des rapports d'aspects en fonction de la taille moyenne des particules. Nous avons tracé ces courbes pour les échantillons polydispersés sur la figure 8.24. On voit que les plus grosses particules ont presque le même rapport d'aspect que le rapport d'aspect de l'échantillon initial. Ce sont des particules qui n'ont subi aucune rupture ou qui sont légèrement endommagées. C'est dans la gamme de petites tailles que les rapports d'aspects tendent à se rapprocher vers la même valeur entre 1,4 et 1,6.

Il est aussi remarquable qu'à partir de  $\sigma_a = 2\sigma_c$ ,  $\langle \alpha \rangle$  n'évolue pratiquement plus alors même que les particules continuent à se fragmenter. Les rapports d'aspect issus de la fragmentation concernent donc essentiellement les particules de tailles inférieures à  $0,3d_{max}$ . Les rapports d'aspect moyens présentés sur la figure 8.22 constituent donc un mélange statistique entre ceux de l'échantillon initial et ceux de fragments de petite taille qui ont oublié leur forme initiale.



# Rhéologie des matériaux granulaires composés de particules fragmentables

## Sommaire

---

<b>9.1. Introduction</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>9.2. Procédés numériques</b> . . . . .	<b>144</b>
<b>9.3. Comportement macroscopique</b> . . . . .	<b>145</b>
<b>9.4. Analyse micromécanique</b> . . . . .	<b>147</b>
9.4.1. Réseau des contacts . . . . .	148
9.4.2. Réseau des forces . . . . .	151
9.4.3. Anisotropies des contacts et des forces . . . . .	155
<b>9.5. Evolution des tailles et des formes des particules</b> . . . . .	<b>157</b>

---

## 9.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats des essais numériques de compression biaxiale sur des assemblages de particules fragmentables. Nous allons analyser l'influence de la fragmentation des particules et de la cohésion interne des particules sur le comportement du milieu granulaire. Comme dans le chapitre précédent, nous allons nous intéresser à la microstructure et à l'évolution de la distribution granulométrique et des formes des particules. Contrairement à la compaction uniaxiale, où la déformation est conditionnée par la fragmentation des particules, les particules au cours de la compression biaxiale peuvent continuer à se réarranger sans rupture. Pour une cohésion interne relativement faible, la fragmentation résulte donc essentiellement de l'action chaînes des forces fortes et des contraintes déviatoriques locales qu'elles exercent sur les particules. De même, le cisaillement continu de l'assemblage permet aux fragments engendrés par la fragmentation de se déplacer et d'occuper plus efficacement les vides disponibles entre les fragments de plus grandes tailles. Il est donc intéressant de voir dans quelle mesure le processus de fragmentation est affecté par ces différences avec la compaction uniaxiale et comment le frottement interne et la dilatance en sont affectés.

## 9.2. Procédés numériques

Des assemblages denses de 1000 particules sont créés selon la procédure décrite dans le chapitre 5, comme on peut voir sur la figure 9.1(a). Les particules sont des pentagones réguliers et la distribution des tailles est uniforme par fraction volumique avec un étalement  $s = 0,5$ . En utilisant l'approche BCM décrite dans le chapitre 7, ces particules sont ensuite discrétisées en 44249 cellules de Voronoi de même taille ; figure 9.1. Nous fixons la cohésion interne  $\sigma_c$  pour chaque simulation, mais dans tous les cas le coefficient de frottement interne est fixé à  $\mu_c = 0,3$  entre les cellules de Voronoi.

Ces assemblages sont soumis à un chargement biaxial en imposant une contrainte de confinement constante  $\sigma_{xx} = 1$  MPa sur la paroi de droite et une vitesse verticale constant  $v_y < 0$  sur la paroi supérieure selon la même procédure que celle décrite dans le chapitre 6. Le coefficient de frottement entre particules est égal à 0,3 tandis que le frottement entre les particules et les parois est maintenu égal à 0 pour favoriser des conditions aux limites homogènes. Les essais sont réalisés avec cinq valeurs différentes de cohésion interne  $\sigma_c = 1, 2, 5, 10$  et 20 MPa. Il est clair que pour la fragmentation des particules l'effet de la cohésion interne se mesure par rapport à la contrainte de confinement  $\sigma_{xx}$ . On définit donc le paramètre sans dimension

$$C_e = \frac{\sigma_c}{\sigma_{xx}} \quad (9.1)$$

qui constitue une "cohésion effective" qui, comme nous allons voir, détermine le taux de fragmentation des particules avec ses valeurs  $C_e = 1, 2, 5, 10$  et 20.

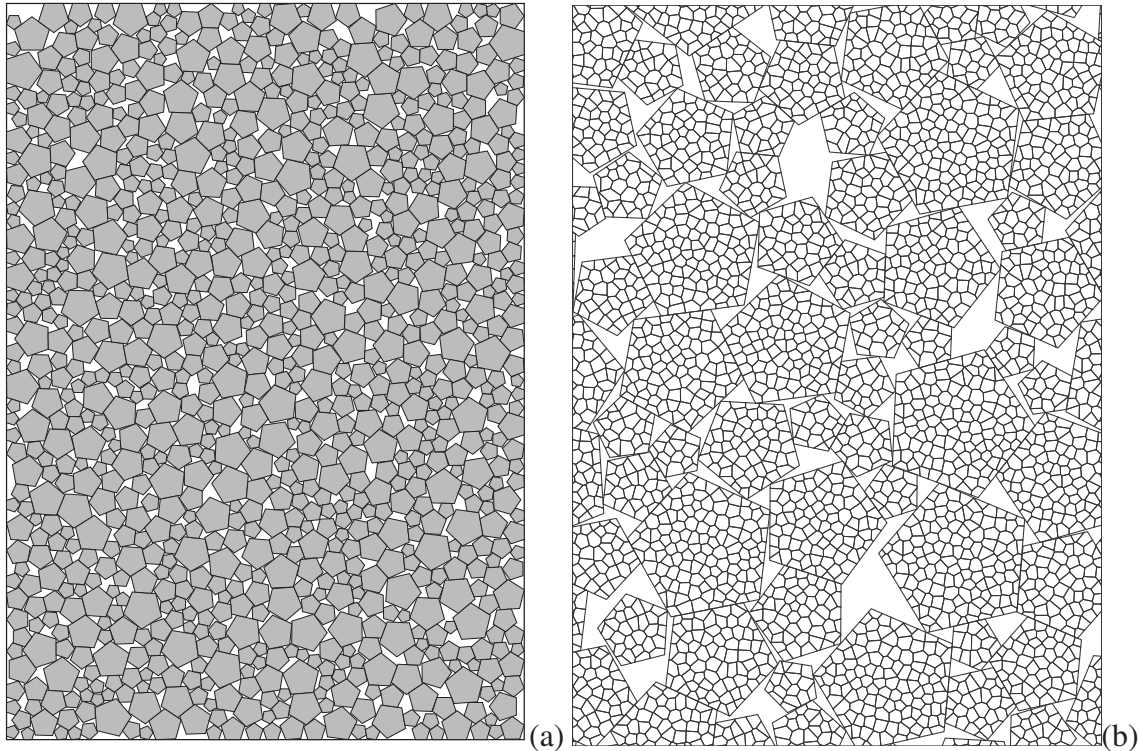


FIGURE 9.1. – Assemblage des particules au début de la compression biaxiale (a); Discretisation de chaque particule en plusieurs cellules par tessellation de Voronoi (b).

### 9.3. Comportement macroscopique

La figure 9.2 présente l'évolution de la contrainte déviatorique normalisée  $q/p$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour les différentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$ . On voit que pour les valeurs élevées de  $C_e$ ,  $q/p$  augmente jusqu'à un pic puis se relaxe pour attendre une valeur constante dans l'état critique tandis que pour les valeurs plus faibles de  $C_e$ ,  $q/p$  évolue vers la même valeur critique sans passer par un pic. La contrainte au pic augmente avec  $C_e$  et les valeurs de la contrainte à l'état critique sont identiques pour toutes les valeurs de  $C_e$ . La figure 9.3 montre que la variation de l'angle de frottement interne entre le pic et l'état critique  $\Delta\phi = \phi_{pic} - \phi^*$  en fonction de  $C_e$  est presque logarithmique. Ceci est en accord avec les résultats des essais triaxiaux sur des échantillons de sable de Leighton Buzzard et de calcaire oolithique réalisés par Lee [82].

La figure 9.4 présente les évolutions de la déformation volumique  $\varepsilon_p$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$ . On voit que pour les faibles valeurs de  $C_e$ , le comportement est contractant au début du cisaillement. Les réarrangements des particules induisent généralement une dilatation puisque nos échantillons sont initialement très denses, mais cette dilatation est contre-balançée ici par la fragmentation des particules qui tendent à faire augmenter la compacité.

La figure 9.5 montre quelques clichés des assemblages au cours du cisaillement pour  $C_e = 5$ .

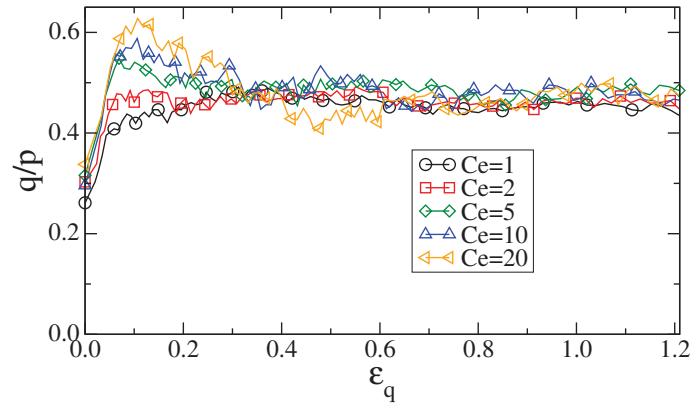


FIGURE 9.2. – Evolution du déviateur de contrainte normalisé  $q/p$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour différentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$ .

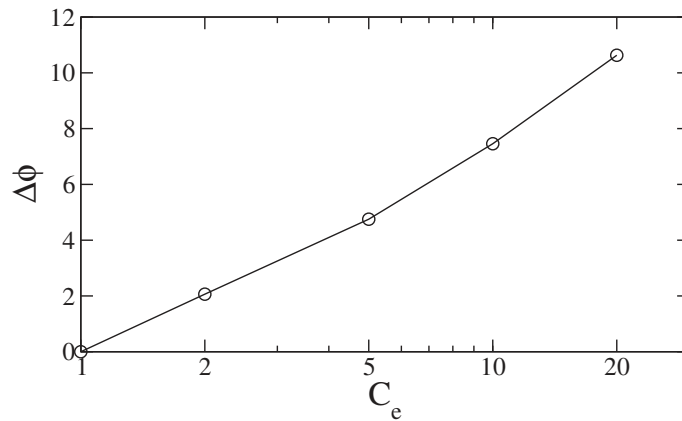
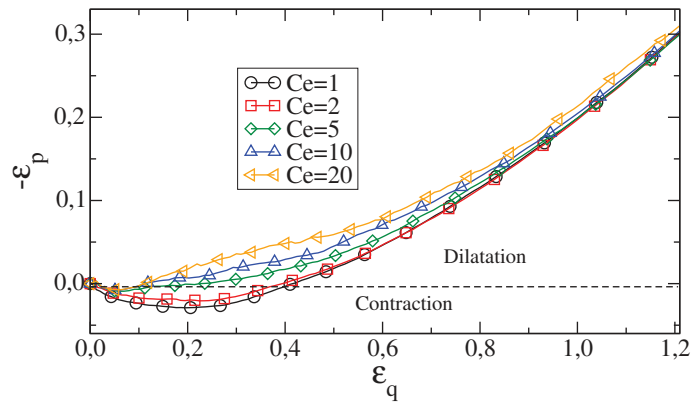


FIGURE 9.3. – Variation  $\Delta\phi$  de l'angle de frottement interne entre le pic de contrainte et l'état critique en fonction du logarithme de la cohésion effective.

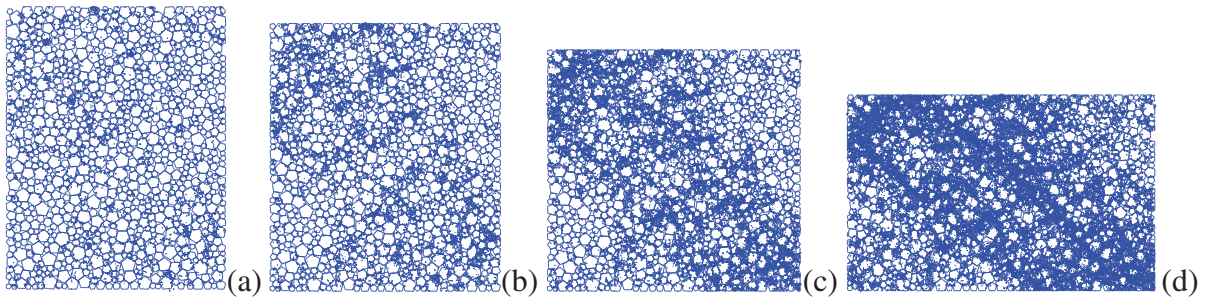
On voit que des ruptures de particules ont lieu au début du cisaillement dans tout le volume, mais se localisent rapidement dans des bandes de cisaillement. Un zoom sur la bande de localisation est présentée pour  $\varepsilon_q = 0,4$  sur la figure 9.6. On observe sur cette figure les fragments et les fissures dans les particules. On remarque que les fissures se trouvent souvent aux frontières des particules ou plus précisément aux contacts entre particules où les contraintes sont concentrées. Comme dans le cas de compression uniaxiale, il existe dans la bande de cisaillement des particules complètement pulvérisées mais aussi des particules quasiment intactes.

La figure 9.7 montre l'évolution de la proportion des particules endommagées au cours du cisaillement. Les particules commencent à se fragmenter dès le début du cisaillement et dans une proportion plus faible pour les valeurs plus élevées de  $C_e$ . Le nombre des particules endommagées augmente rapidement dans la phase initiale, puis diminue à partir de  $\varepsilon_q = 0,4$  à l'approche de l'état critique. Par contre, comme on peut voir sur la figure 9.8, la proportion  $D_f$  des contacts qui ont perdu leur cohésion augmente d'une manière régulière.

Nous avons tracé sur la figure 9.9 la proportion  $\Delta D_f$  des contacts fissurés entre deux états



**FIGURE 9.4.** – Évolution de la déformation volumique  $\varepsilon_p$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour les différentes cohésions effectives  $C_e$



**FIGURE 9.5.** – Images des assemblages au cours du cisaillement (a)  $\varepsilon_q = 0, 1$ , (b)  $\varepsilon_q = 0, 2$ , (c)  $\varepsilon_q = 0, 4$ , (d)  $\varepsilon_q = 0, 8$ . Ici pour la cohésion effective  $C_e = 5$ .

successifs ainsi que la contrainte déviatorique normalisées  $q/p$  en fonction de la déformation de cisaillement pour  $C_e = 20$ . On voit que des pics de  $\Delta D_f$  ont presque toujours lieu à une chute de  $q/p$ . Cette corrélation indique que le réseau des contacts devient instable lors de chaque évènement important de rupture des particules.

## 9.4. Analyse micromécanique

Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'influence de la fragmentation des particules sur les réseaux des contacts et des forces pour mieux comprendre le comportement macroscopique observé. Le comportement mécanique sans fragmentation des particules s'explique par l'évolution des anisotropies de contact et de force. Le problème qui nous intéresse plus particulièrement ici est de voir comment la fragmentation des particules influence ces évolutions et donc le comportement macroscopique jusqu'à l'état critique.



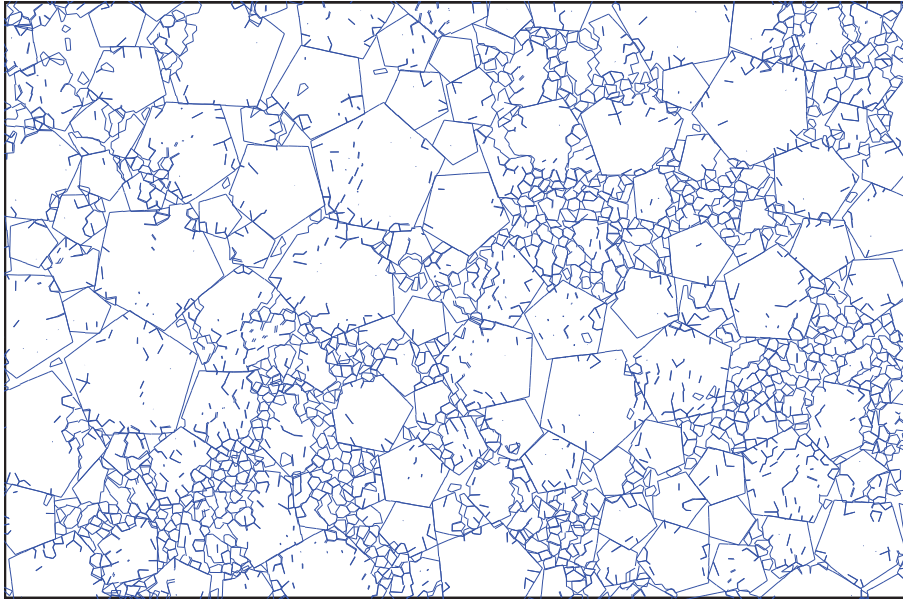


FIGURE 9.6. – Zoom sur la bande du cisaillement pour  $\varepsilon_q = 0,4$ .

#### 9.4.1. Réseau des contacts

La figure 9.10 présente des clichés du réseau des contacts au cours de la déformation. Au cours du cisaillement, la fragmentation des particules se localise rapidement dans des bandes. Par conséquent, ces bandes sont caractérisées par une compacité plus élevée que les autres parties de l'échantillon contrairement au cisaillement sans fragmentation qui conduit généralement à une compacité plus faible dans les bandes de localisation en raison de la dilatace.

La figure 9.11 montre l'évolution du nombre de coordination  $Z$  en fonction de la déformation du cisaillement. Comme pour l'évolution de la déformation volumétrique  $\varepsilon_p$  analysée dans la section 9.3, nous trouvons aussi ici une combinaison entre l'effet de réarrangement et l'effet de

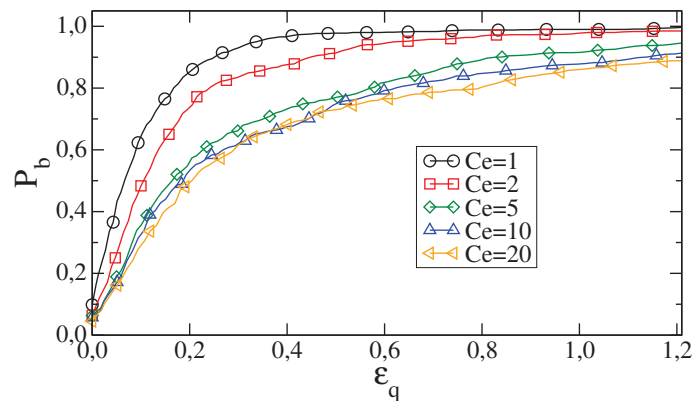


FIGURE 9.7. – évolution de la proportion  $P_b$  des particules endommagées au cours du cisaillement pour différentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$ .

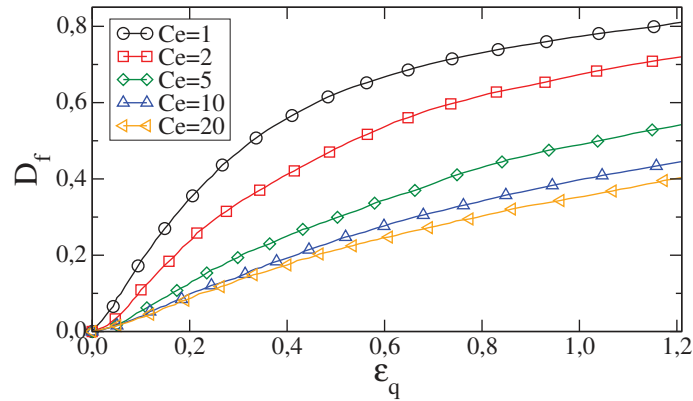


FIGURE 9.8. – évolution de la fraction des contacts  $D_f$  initialement cohésifs et devenus no-cohésifs au cours du cisaillement pour différentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$ .

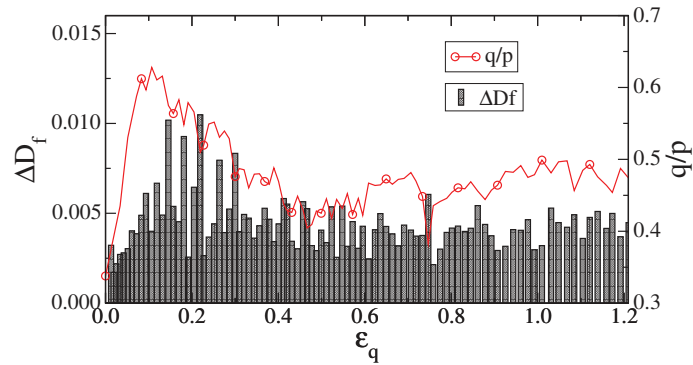
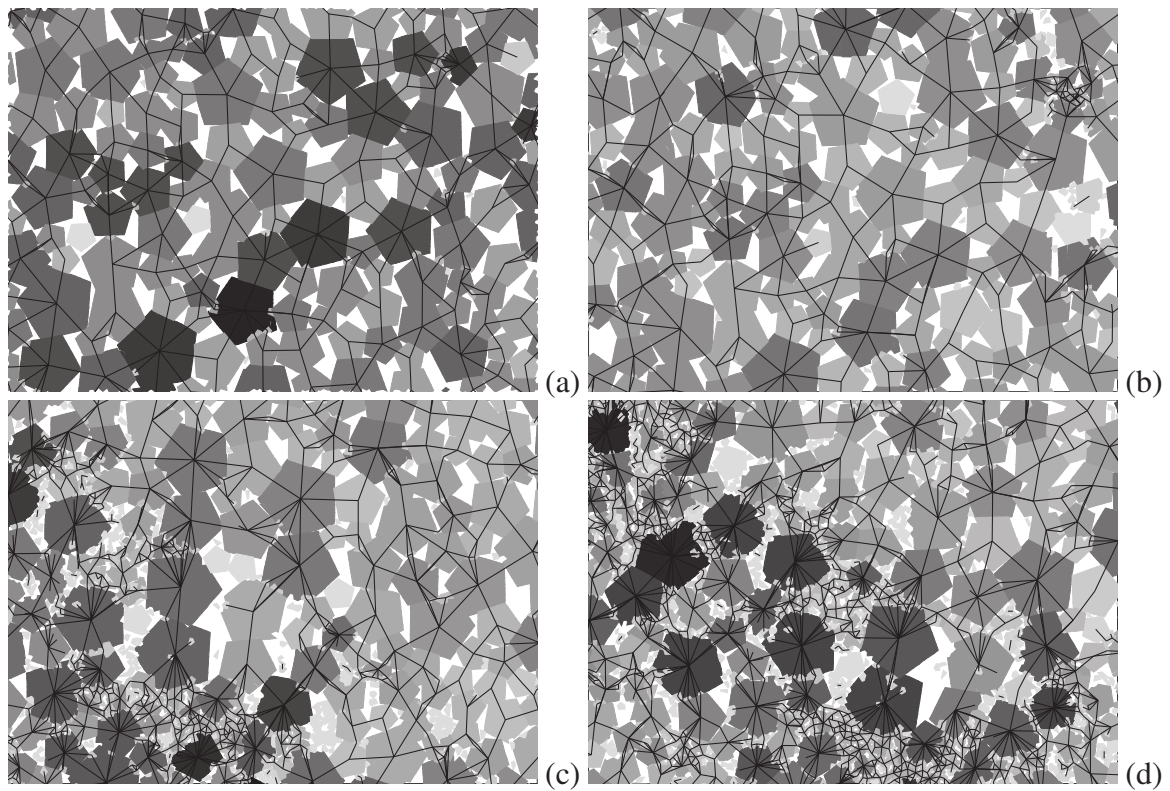


FIGURE 9.9. – évolution de la fraction de contacts  $\Delta D_f$  rompus entre deux états successifs et le déviateur normalisé des contraintes au cours du cisaillement pour la cohésion effective  $C_e = 20$ .

fragmentation. Le réarrangement des particules à partir de l'état initial dense de l'échantillon réduit le nombre de coordination. En revanche, la fragmentation des particules contribue à augmenter le nombre de coordination. Nous observons cette compétition entre les deux effets sur la courbe pour  $C_e = 5$  où  $Z$  diminue rapidement à cause des réarrangements et puis remonte à partir de  $\varepsilon_q = 0,1$  à cause de l'effet de la fragmentation. Pour les échantillons des particules plus rigides ( $C_e = 10$  et  $C_e = 20$ ), l'effet des réarrangements domine et, par conséquent, les valeurs de  $Z$  sont inférieures à celle de  $C_e = 5$ . Pour  $C_e = 1$  et  $C_e = 2$ , l'effet de la fragmentation est prépondérant. On observe aussi une valeur plus faible de  $Z$  pour des valeurs plus élevées de  $C_e$  dans l'état stationnaire alors que le niveau de  $q/p$  est pratiquement le même comme on peut voir sur la figure 9.2. Ceci indique que l'état stationnaire observé même après une grande déformation n'est pas globalement unique même si la valeur de  $q/p$  n'est pas sensible à ces différences des valeurs de  $Z$ . On notera aussi que l'état obtenu n'est pas tout-à-fait stationnaire dans la mesure où les particules continuent à se fragmenter.

La figure 9.12(a) présente les évolutions de la proportion du nombre des particules flottantes  $X_f$  en fonction de la déformation de  $\varepsilon_q$ . Contrairement à l'évolution de  $X_f$  dans le cas sans





**FIGURE 9.10.** – Images du réseau des contacts pour  $C_e = 20$  et les déformations  $\varepsilon_q = 0,1$  (a),  $\varepsilon_q = 0,2$  (b),  $\varepsilon_q = 0,6$  (c) et  $\varepsilon_q = 1,0$  (d). Les contacts sont représentés par des segments qui relient des centres des particules en contact. Le niveau de gris des particules est proportionnel au nombre de coordination.

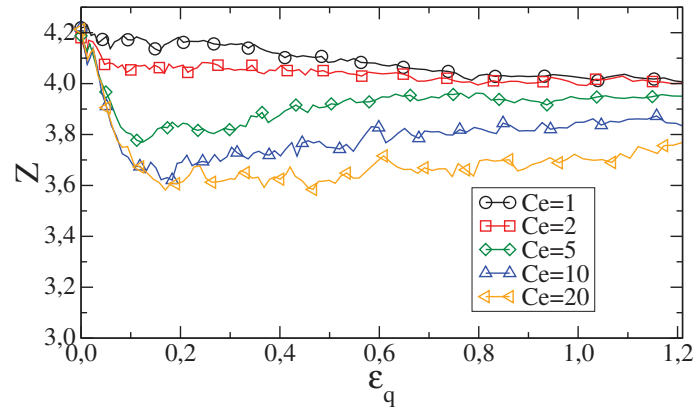


FIGURE 9.11. – Evolution du nombre de coordination en fonction de la déformation de cisaillement pour différentes valeurs de la cohésion effective.

fragmentation (où  $X_f$  augmente et garde une valeur constante dans l'état critique), pour les échantillons des particules fragmentables,  $X_f$  augmente jusqu'à une valeur pic, puis elle diminue. La valeur pic augmente avec  $C_e$ . Cette diminution de  $X_f$  après le pic reflète en réalité l'augmentation du nombre de particules flottantes puisque le nombre total des fragments augmente et la proportion volumique  $V_f$  des particules flottantes augmente comme on peut le voir sur la figure 9.12(b). On notera aussi une augmentation de  $V_f$  avec  $C_e$ .

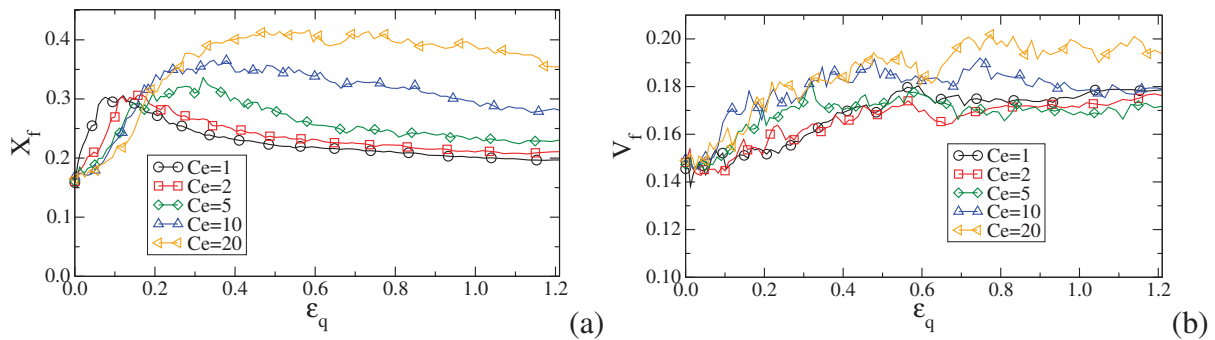
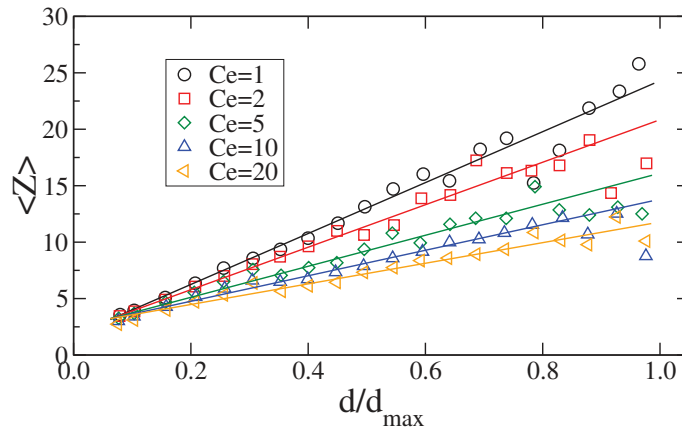


FIGURE 9.12. – Evolution de la proportion  $X_f$  des particules flottantes (a) et de la proportion volumique  $V_f$  des particules flottantes (b) en fonction de la déformation de cisaillement.

La figure 9.13 montre la corrélation entre le nombre moyen de coordination  $\langle Z \rangle$  et le diamètre équivalent des fragments dans l'état stationnaire. Pour toutes valeurs de  $C_e$ , le nombre moyen de voisins dans chaque classe de taille augmente linéairement avec son diamètre, comme observé également dans la compression uniaxiale. Nous trouvons aussi ici que le nombre de coordination moyen dans chaque classe de taille augmente lorsque  $C_e$  diminue.

#### 9.4.2. Réseau des forces

La figure 9.14 montre des clichés du réseau des forces pour  $C_e = 20$  au cours de la compression biaxiale. Les forces sont représentées par des segments orientés selon le vecteur force et

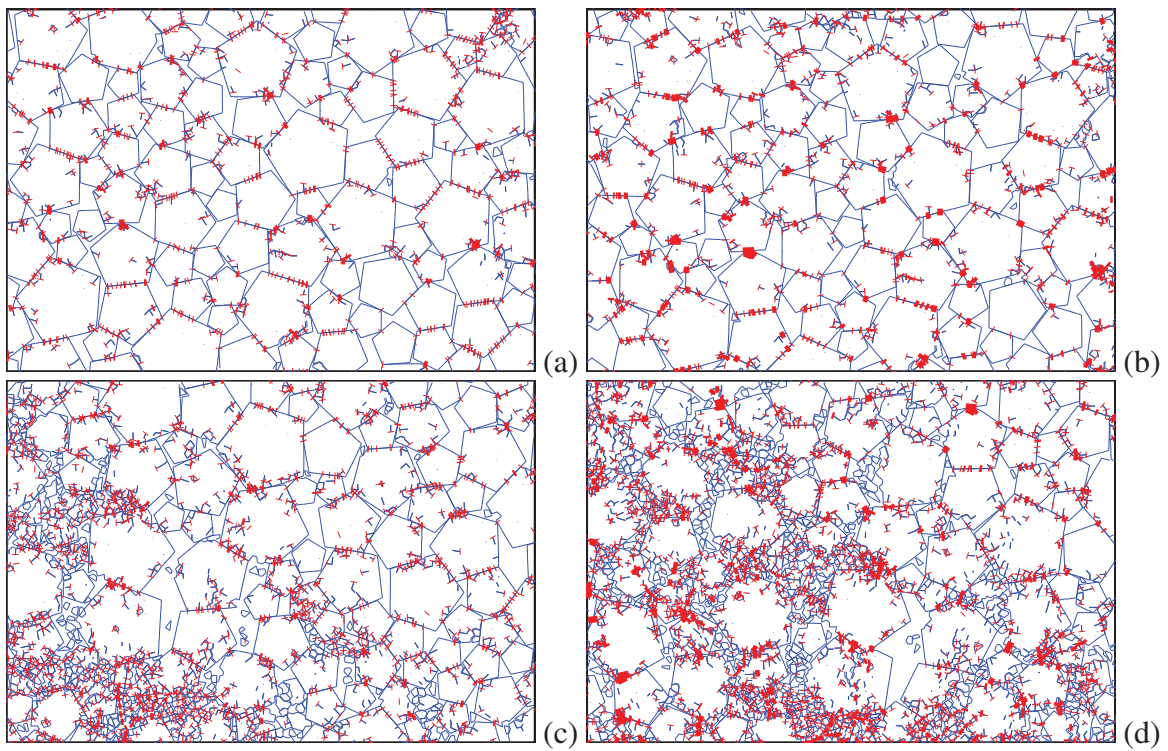


**FIGURE 9.13.** – Corrélation linéaire entre le nombre moyen de coordination  $\langle Z \rangle$  et le diamètre équivalent des fragments normalisé par le diamètre maximum dans l'état stationnaire.

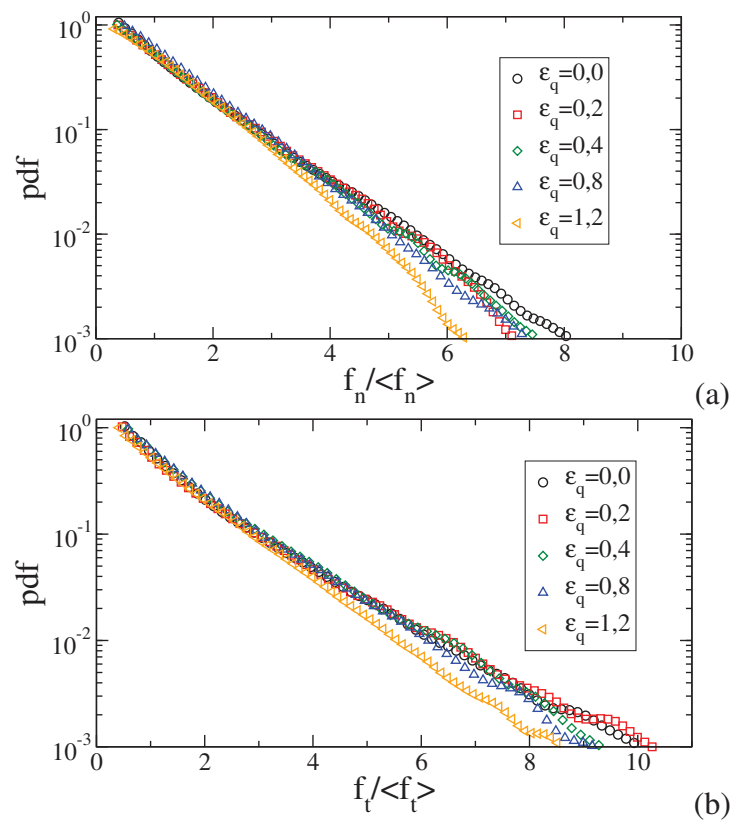
avec une épaisseur et une longueur proportionnelles à la valeur de la force. On voit plusieurs forces le long des contacts côté-côté et une seule force aux contacts côté-sommet. Les valeurs des forces individuelles sur les contacts côté-côté sont inférieures à celles des contacts côté-sommet où la force est concentrée en un seul point de contact (même si la résultante des forces sur un contact côté-côté peut être plus grande). C'est la raison pour laquelle nous observons beaucoup de fissures initiées au niveau des contacts côté-sommet. Contrairement aux essais de compression uniaxiale du chapitre précédent, où nous observions un grand nombre de particules divisées en deux ou trois grands fragments, dans ces essais de compression biaxiale la plupart des grosses particules sont superficiellement endommagées et les petits fragments remplissent mieux les pores entre ces grosses particules. Cette différence est une conséquence des réarrangements au cours de la déformation qui tendent à réorganiser les chaînes de forces de telle sorte qu'elles ne restent pas toujours concentrées sur les mêmes particules.

La figure 9.15 présente la densité de probabilité des forces normales  $f_n$  et des forces tangentielles  $f_t$  au cours du cisaillement pour  $C_e = 2$ . A la fois les forces normales et tangentielles, présentent une distribution exponentielle décroissante. La distribution devient de plus en plus homogène au cours du cisaillement avec une diminution de la proportion des fortes forces. Cette évolution reflète celle de la distribution granulométrique avec une augmentation progressive des fragments de petite taille.

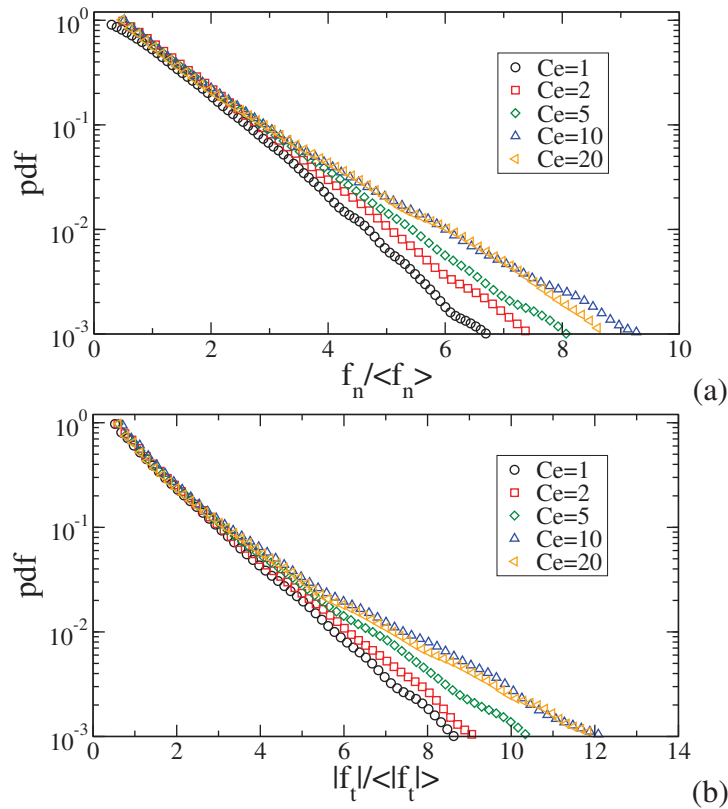
La figure 9.16 montre les densités de probabilité des forces normales et tangentielles pour  $\varepsilon_q = 0,8$  et pour différentes valeurs de  $C_e$ . On voit qu'à la même déformation du cisaillement la distribution des forces est de plus en plus homogène lorsque  $C_e$  diminue. Ce résultat est conforme aux travaux de Ma [87] qui a montré que la distribution des forces dans les assemblages des particules fragmentables est plus homogène que celle dans les assemblages des particules non-fragmentables. Le degré d'homogénéité des forces dépend ainsi de la possibilité des particules à se fragmenter, ce qui est contrôlée ici par le paramètre  $C_e$ .



**FIGURE 9.14.** – Le réseau des forces pour  $C_e = 20$  au cours du cisaillement pour  $\varepsilon_q = 0,1$  (a),  $\varepsilon_q = 0,2$  (b),  $\varepsilon_q = 0,6$  (c) et  $\varepsilon_q = 1,0$  (d). Les forces sont représentées par l'épaisseur et la longueur des segments au niveau des contacts.



**FIGURE 9.15.** – La densité de probabilité de forces normales  $f_n$  normalisées par la force moyenne  $\langle f_n \rangle$  (a) et la densité de probabilité des forces tangentielles  $f_t$  normalisées par la force moyenne  $\langle f_t \rangle$  (b) au cours du cisaillement pour  $C_e = 2$ .



**FIGURE 9.16.** – La densité de probabilité des forces normales  $f_n$  normalisées par la force moyenne  $\langle f_n \rangle$  (a) et la densité de probabilité des forces tangentielles  $f_t$  normalisées par la force moyenne  $\langle |f_t| \rangle$  (b) pour différentes valeurs de la cohésion effectives à  $\varepsilon_q = 0, 8$ .

### 9.4.3. Anisotropies des contacts et des forces

Comme dans le chapitre 6, nous allons considérer ici les anisotropies des contacts et des forces. Mais les formes des fragments étant très variées et leurs contacts complexes, au lieu de considérer les anisotropies des contacts et des forces entre les fragments, nous allons considérer ici les contacts et les forces entre les cellules.

La figure 9.17 montre l'évolution de l'anisotropie d'orientation des contacts  $a_c$  au cours du cisaillement pour  $C_e = 1$ . L'anisotropie d'orientation des contacts  $a_c$  augmente rapidement au début puis continue à augmenter à un taux plus faible à partir de  $\varepsilon_q = 0,4$ . Initialement, les directions des contacts entre les cellules sont isotropes. Au cours du cisaillement, des particules se fragmentent et des directions privilégiées de contact entre cellules apparaissent. Le réseau des contacts perd les contacts initiaux entre cellules et gagne des nouveaux contacts entre les nouveaux fragments. Ainsi, le réseau des contacts devient de plus en plus anisotrope au cours de la fragmentation. La figure 9.18 montre l'évolution de la représentation polaire des orientations des contacts  $P(\theta)$  au cours du cisaillement.

La figure 9.19 présente l'évolution des anisotropies d'orientation des contacts  $a_c$  pour diffé-



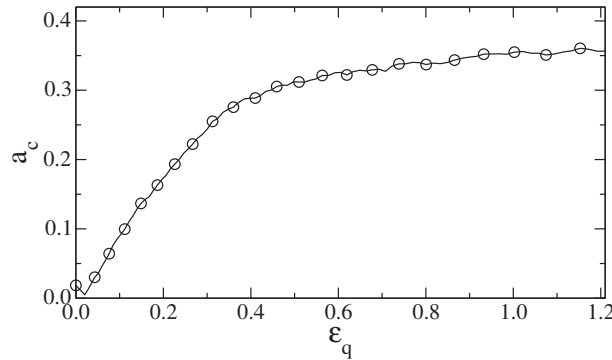


FIGURE 9.17. – Evolution de l'anisotropie d'orientation des contacts  $a_c$  au cours du cisaillement pour  $C_e = 1$ .

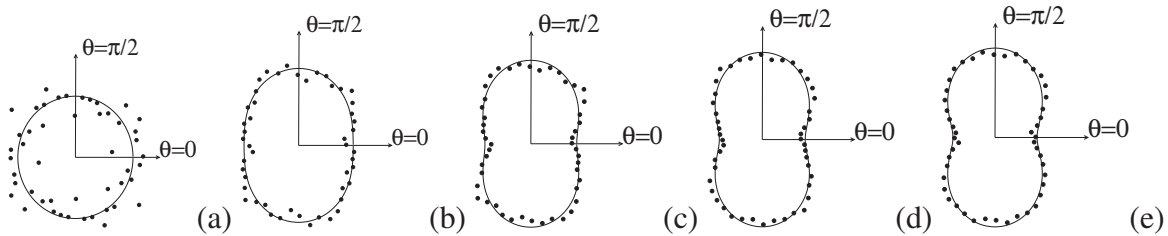


FIGURE 9.18. – Évolution de la représentation polaire des fonctions  $P(\theta)$  au cours du cisaillement (a)  $\epsilon_q = 0$ , (b)  $\epsilon_q = 0, 2$ , (c)  $\epsilon_q = 0, 4$ , (d)  $\epsilon_q = 0, 8$ , (e)  $\epsilon_q = 1, 2$ . Ici pour la cohésion effective  $C_e = 1$ .

rentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$ . Pour toutes les valeurs de  $C_e$ ,  $a_c$  augment au cours de la fragmentation des particules. Pour les échantillons des particules plus cohésives, les particules sont moins fragmentées et donc leurs anisotropies d'orientation des contacts  $a_c$  sont plus faibles.

La figure 9.20 présente l'anisotropie des forces normales  $a_{fn}$  et des forces tangentielles  $a_{ft}$  en fonction de la déformation de cisaillement. Comme l'évolution des déviateurs des contraintes,  $a_{fn}$  et  $a_{ft}$  augmentent jusqu'à un pic, puis diminuent et se stabilisent à une valeur constante dans l'état stationnaire. A tout instant au cours du cisaillement, les anisotropies sont plus élevées pour des valeurs de cohésion effective plus élevées. Ce comportement est cohérent avec le caractère plus hétérogène des forces lorsqu'il y a moins de rupture, comme on l'a vu dans la section 9.4.2.

L'évolution de  $\sin \phi^*$  ainsi que l'approximation additive donnée par l'équation (6.14) sont présentées sur la figure 9.21 (a). On voit que la résistance au cisaillement  $\sin \phi^*$  à l'état critique augmente légèrement avec  $C_e$  de 1 à 5 et puis reste constante. Cette valeur presque invariable de  $\sin \phi^*$  s'explique par l'évolution des valeurs moyennes des anisotropies comme on peut voir sur la figure 9.21 (b). La résistance  $\sin \phi^*$  dépend principalement de  $a_c$ ,  $a_{fn}$  et  $a_{ft}$ . L'anisotropies des forces tangentielles  $a_{ft}$  ne varie presque pas avec  $C_e$ , tandis que la diminution de l'anisotropie d'orientation des contacts  $a_c$  est compensée par l'augmentation de l'anisotropie des forces normales  $a_{fn}$  en fonction de  $C_e$ . Comme ces paramètres d'anisotropie contribuent additivement à  $\sin \phi^*$ , celle-ci varie très peu en fonction de  $C_e$ .



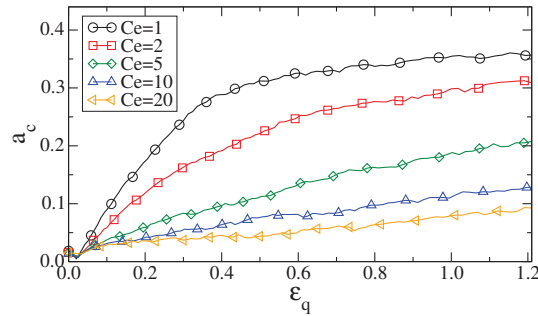


FIGURE 9.19. – Evolution de l'anisotropie d'orientation des contacts  $a_c$  au cours du cisaillement pour différents niveaux de cohésion effective.

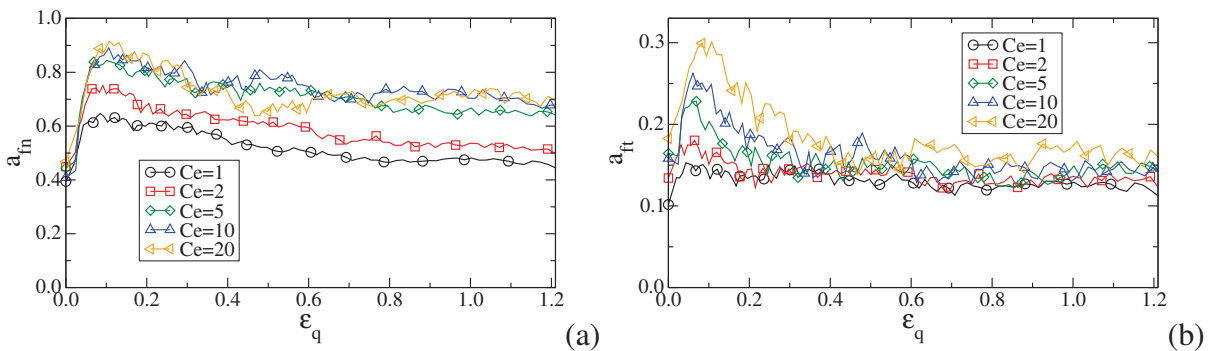


FIGURE 9.20. – Evolution de l'anisotropie des forces normales  $a_{fn}$  (a) et des forces tangentielles  $a_{ft}$  (b) au cours de la compression biaxiale.

On notera que la résistance au cisaillement au pic  $\sin \phi^{pic}$  augmente fortement avec  $C_e$  comme on peut le voir sur la figure 9.22(a). On voit aussi sur la figure 9.22(b) que  $\sin \phi^{pic}$  augmente principalement en lien avec les anisotropies des forces normales  $a_{fn}$  et tangentielles  $a_{ft}$  qui augmentent avec  $C_e$ . Ces analyses sur les évolutions des anisotropies expliquent aussi l'effet de la résistance des particules sur le comportement dilatant des matériaux fragmentables comme on l'a vu sur la figure 9.3.

## 9.5. Evolution des tailles et des formes des particules

Nous avons vu que la fragmentation des particules pendant la compression biaxiale se localise dans des bandes. Mais ces bandes évoluent avec une fraction croissante de particules fragmentées. Il est donc intéressant de comparer l'évolution des distributions des tailles pendant la compression biaxiale avec celle de la compression uniaxiale que nous avons étudiés dans le chapitre précédent. La figure 9.23 montre la fraction volumique cumulée (CVF) des fragments pour toutes les valeurs de  $C_e$  à partir d'une distribution initialement uniforme par fractions volumiques. Les courbes sont très similaires à celles que nous avons obtenues pour la déformation uniaxiale. Mais la fragmentation des particules va bien plus loin ici pour les valeurs faibles de  $C_e$ . Le nombre de petits fragments et notamment ceux qui ont une taille de l'ordre de la taille

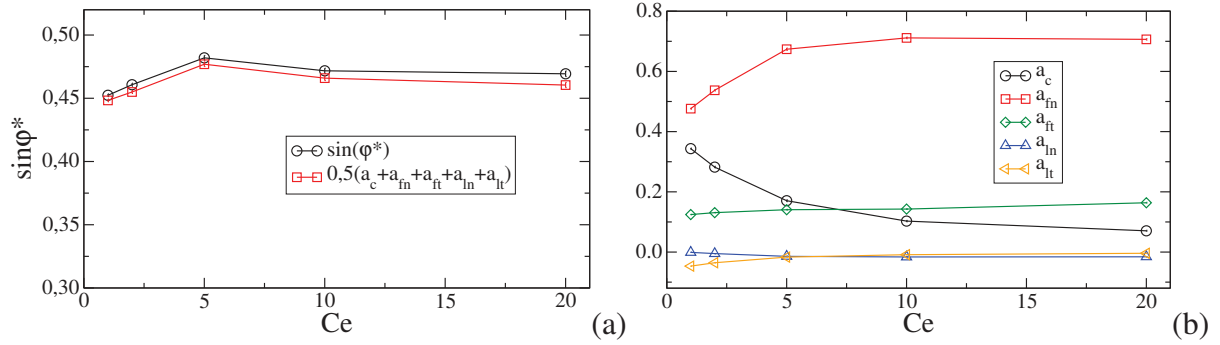


FIGURE 9.21. –  $\sin \phi^*$  et l'approximation additive donnée par l'équation (6.14) (traits hachurés) (a) et des valeurs moyennes des anisotropies à l'état critique en fonction de la cohésion effective  $C_e$ .

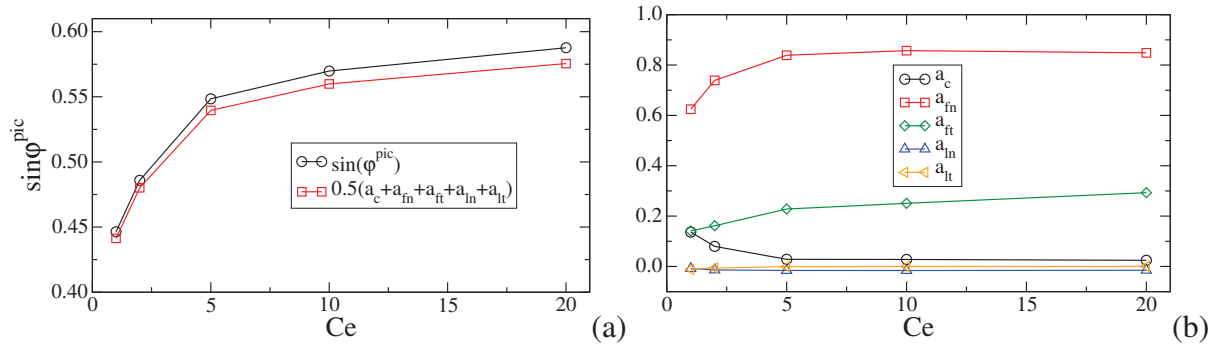


FIGURE 9.22. –  $\sin \phi^{pic}$  et l'approximation additive donnée par l'équation (6.14) (traits hachurés) (a) et les anisotropies au pic de contrainte en fonction de la cohésion effective  $C_e$ .

des cellules irréductibles augmente et la courbure de la distribution devient convexe. Alors que pour la compression uniaxiale les distributions se rapprochent d'une certaine distribution limite, la fragmentation des particules continue indéfiniment en compression biaxiale en raison du réarrangement continu des particules.

La distribution étant uniforme par fraction volumique, dans tous les cas elle prend rapidement une forme similaire à celle observée en compression uniaxiale avec trois parties bien distinctes : 1) linéaire avec une pente  $\beta$  élevée pour  $d/d_{max} \geq 0,3$ , 2) linéaire avec une pente plus faible pour  $0,1 \leq d/d_{max} \leq 0,3$  et 3) une population de particules avec une taille de l'ordre de la taille des cellules soit pour  $d/d_{max} \leq 0,1$ . L'existence de deux régimes linéaires avec des pentes distinctes reflète la mémoire de la distribution initiale des tailles, d'une part, et la perte de la mémoire des tailles initiales pour les particules issues de plusieurs étapes de fragmentation, d'autre part.

La distribution des gros fragments peut être paramétrée par une borne inférieure en taille  $d_1$  :

$$h(d) = h(d_1) + \beta(d - d_1) \quad (9.2)$$

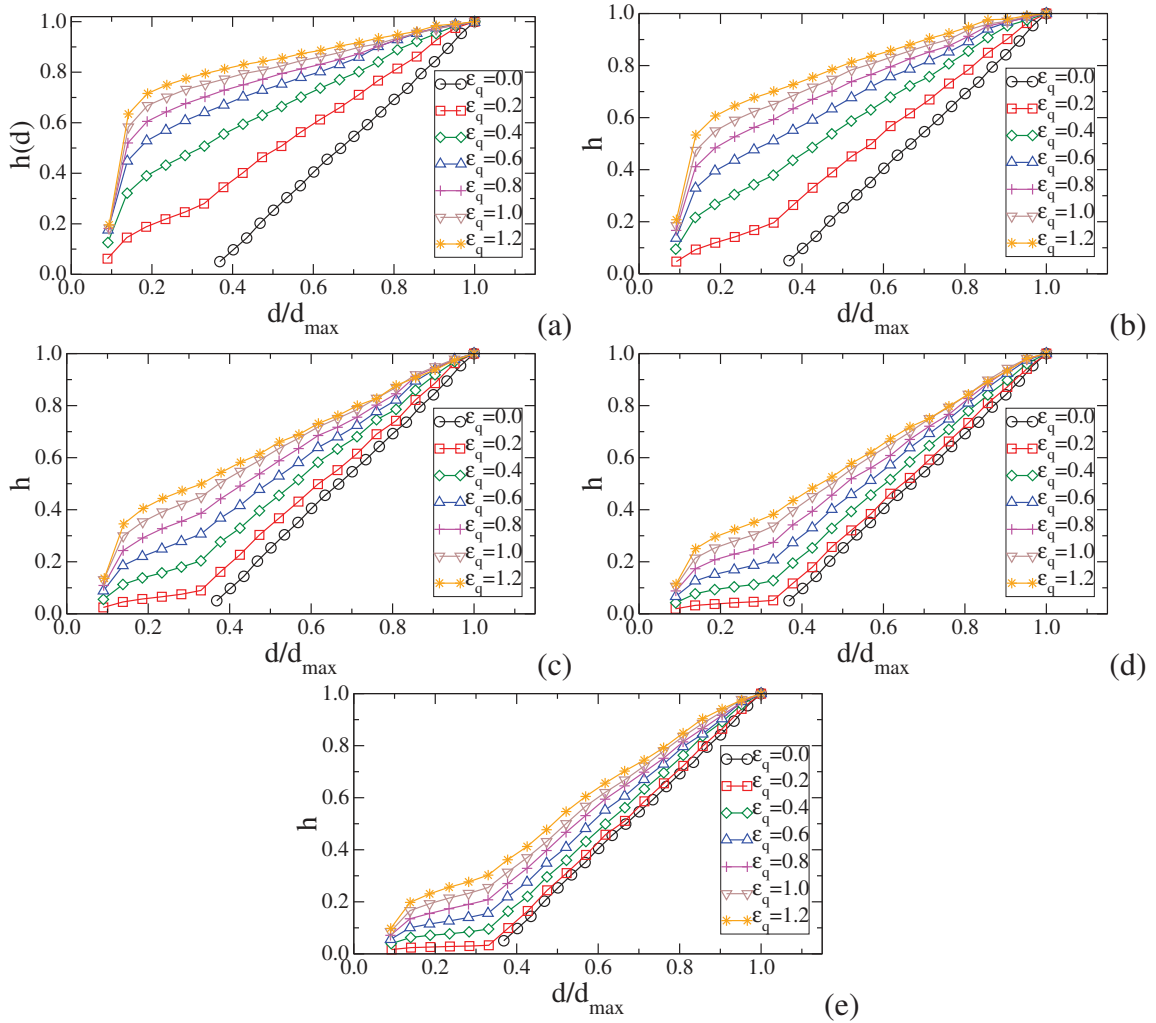


FIGURE 9.23. – Evolution de la distribution volumique cumulée pendant la déformation biaxiale pour  $C_e = 1$  (a),  $C_e = 2$  (b),  $C_e = 5$  (c),  $C_e = 10$  (d) et  $C_e = 20$  (e).

où

$$\beta = \frac{1 - h(d_1)}{d_{max} - d_1} \quad (9.3)$$

Pour une valeur donnée de  $d_1$ ,  $h(d_1)$  augmente avec  $\varepsilon_q$  et diminue lorsque  $C_e$  augmente. La figure 9.24 montre l'évolution de  $\beta$  avec  $\varepsilon_q$  pour différentes valeurs de  $C_e$ . L'évolution de  $\beta$  peut être approximativement caractérisée par une décroissance rapide jusqu'à  $\varepsilon_q \simeq 0,6$  suivie par un régime de décroissance linéaire avec le même taux pour toutes les valeurs de  $C_e$ . Ce taux de décroissance reflète le taux de cisaillement qui contrôle le processus de fragmentation.

La figure 9.25(a) montre la CVF des fragments pour différentes valeurs de  $C_e$  à  $\varepsilon_q = 0,8$  en fonction des tailles réduites  $\lambda$  des particules, ainsi que la courbe théorique de l'équation (8.16). On voit bien sur cette figure que pour  $C_e < 5$  la CVF dépasse largement la courbe théorique mais, comme dans la courbe théorique, les fragments de petite taille sont favorisés par rapport

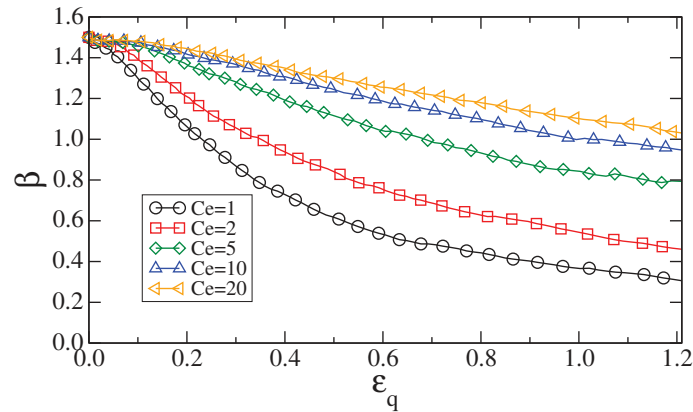


FIGURE 9.24. – Evolution du paramètre  $\beta$  de la distribution granulométrique en fonction de la déformation de cisaillement cumulée pour différentes valeurs de la cohésion effective.

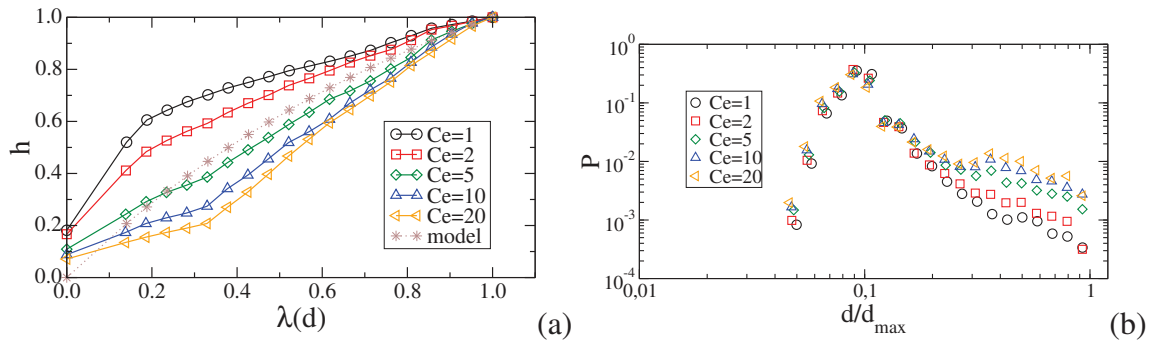
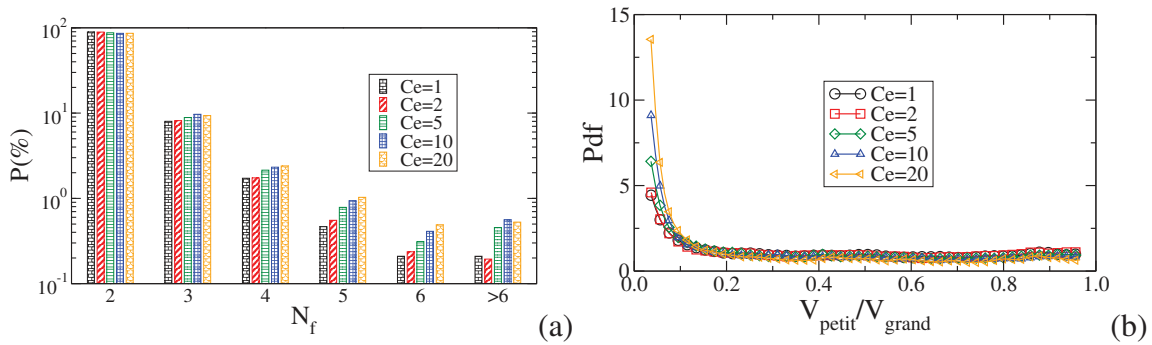


FIGURE 9.25. – (a) La CVF en fonction de la taille réduite  $\lambda$  des particules pour différentes valeurs de la cohésion effective  $C_e$  à  $\varepsilon_q = 0, 8$ ; (b) Les densités de probabilité des tailles des fragments pour différentes valeurs de  $C_e$ .

aux fragments de plus grosses tailles. La figure 9.25(b) est la densité de probabilité des tailles qui, comme dans le cas de la compression uniaxiale, montre bien les trois groupes de tailles. Pour le groupe de tailles intermédiaires, la distribution est en loi de puissance avec un exposant  $D_f \simeq 2, 5$ . Pour le groupe de très petites tailles, toutes les distributions pour différentes valeurs de  $C_e$  coïncident. Pour les groupes de grosses tailles on observe une densité de probabilité qui diminue lorsque  $C_e$  diminue. Cette courbe montre très clairement la transition de la distribution initiale des tailles vers des tailles plus petites avec une distribution indépendante de la distribution initiale.

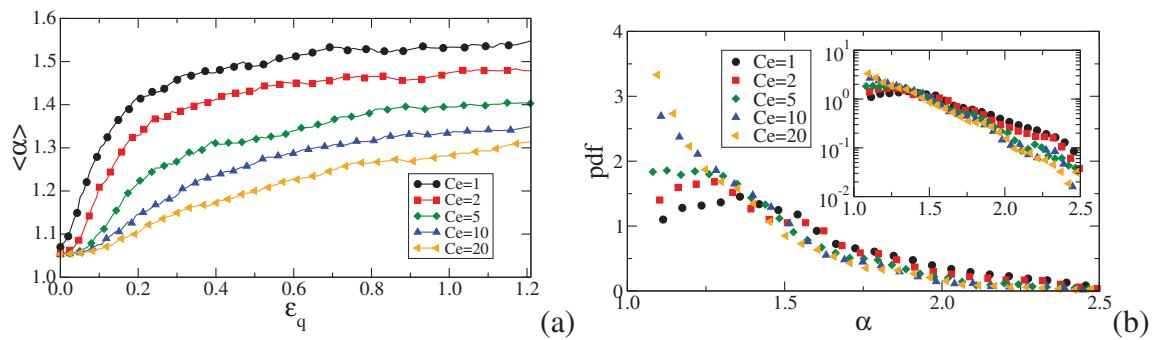
La figure 9.26(a) présente les proportions des particules divisées en  $N_f$  fragments pendant la compression biaxiale. On voit que, comme en compression uniaxiale, la grande majorité des particules se scindent en deux fragments. Néanmoins, une proportion non-négligeables de particules se scindent en plus de fragments, et ceci d'autant plus que  $C_e$  est plus élevée. En d'autres termes, les particules avec une cohésion plus importante tendent davantage de se fragmenter en plusieurs fragments que les particules à cohésion faible. Ceci peut s'expliquer par le fait que la fragmentation des particules à cohésion interne élevée implique des forces plus grandes et



**FIGURE 9.26.** – (a) Les proportions des particules divisées en  $N_f$  fragments pour différentes valeurs de la cohésion ; (b) La proportion des rapports de taille entre les deux fragments lors des divisions en deux fragments.

donc un comportement plus fragile et plus instable au moment de la fragmentation. Par ailleurs, comme on peut voir sur la figure 9.26(b), pour les divisions en deux fragments, il y a plus de fragments de petite taille pour les particules à cohésion plus élevée. Ces particules sont donc érodées davantage à leurs surfaces lorsque les forces sont faibles et ont tendance à se fragmenter en plusieurs particules lorsqu'elles subissent des chaînes de force fortes. Par ailleurs, quelle que soit la cohésion, mis à part les fragments les plus petits, toutes les tailles des fragments engendrés sont équiprobables.

La figure 9.27(a) présente l'évolution du rapport d'aspect moyen des fragments  $\langle \alpha \rangle$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour différentes valeurs de  $C_e$ . Le rapport d'aspect initial est le même et très proche de 1, mais il augmente avec la déformation d'autant plus vite que la cohésion est plus faible. Pour les particules les moins cohésives, il se rapproche de 1,5 comme en compression uniaxiale alors même que la fragmentation des particules est beaucoup plus développée ici. Pour un niveau de cohésion plus important, on observe une croissance continue du rapport d'aspect moyen sans que la valeur de 1,5 soit atteinte. Les densités de probabilité des valeurs de  $\alpha$  sont présentées sur la figure 9.27(b). Les valeurs de  $\alpha$  les plus proches de 1 correspondent aux particules les moins divisées et elles sont plus nombreuses lorsque la cohésion est plus grande même à la fin de la compression biaxiale. Le cas le moins cohésif présente un pic pour  $\alpha \simeq 1,4$ .



**FIGURE 9.27.** – (a) Evolution du rapport d'aspect moyen  $\langle \alpha \rangle$  en fonction de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_q$  pour les différentes valeurs de la cohésion effective ; (b) La densité de probabilité du rapport d'aspect des fragments dans l'état stationnaire pour toutes les valeurs de  $C_e$ .

# Conclusions de la partie III

Dans cette partie, nous avons d'abord présenté un modèle de cellules liées (Bounded Cell Method ou BCM) dans le cadre de la méthode de dynamique des contacts. Nous avons appliqué ce modèle pour étudier la fragmentation des particules circulaires soumises à une compression uniaxiale. Les particules sont modélisées comme des agrégats de cellules polygonales rigides liées par l'action de forces cohésives le long de leurs côtés communs. Notre approche assure à la fois la conservation du volume et un traitement rigoureux des contraintes unilatérales au niveau des contacts intercellulaires.

Une étude paramétrique détaillée sur plusieurs paramètres du modèle a permis de mettre en évidence plusieurs effets :

1. Nous avons montré que la résistance à la rupture se met à l'échelle avec le seuil de cohésion entre cellules et augmente avec le frottement inter-cellulaire.
2. La dispersion statistique des données est bien décrite par la fonction de distribution de Weibull. Cette distribution fournit un bon ajustement à nos données indépendamment de la distribution de la forme des cellules ( $\lambda$ ). Le module de Weibull varie de 6 à 10 selon le degré d'irrégularité des cellules
3. La distribution de Weibull de nos données a été discutée et modélisée en termes de contacts intercellulaires critiques qui percolent au travers de la particule. La fracture est contrôlée par les contacts de plus faibles longueurs.

Nous avons ensuite analysé la fragmentation des particules au cours d'une compression uniaxiale et son effet sur la compaction en utilisant la BCM avec des particules de forme pentagonale. Le processus de fragmentation des particules a lieu par des phases alternées de chargement sans fragmentation et de fragmentation rapide. Cette évolution en escalier caractérise la courbe de déformation-contrainte et la compaction de l'assemblage. La fragmentation des particules est fortement hétérogène : certaines particules sont pulvérisées alors que d'autres sont légèrement endommagées. La survie d'une fraction des particules primaires s'explique par l'effet homogénéisant des petits fragments lorsqu'ils entourent les grosses particules. En raison de ces



effets non-linéaires, la distribution granulométrique conserve une signature de la distribution initiale dans la gamme des gros fragments. Mais la distribution dans la gamme de tailles intermédiaires est cohérente avec une loi de puissance qui indique une perte de mémoire au niveau des particules qui se fragmentent plusieurs fois. La statistique des plus petits fragments est clairement influencée par l'artefact numérique de l'existence d'une taille minimale des fragments (incassables).

L'évolution de la distribution granulométrique se caractérise ainsi principalement par l'évolution de la distribution des plus gros fragments alors qu'elle est stationnaire dans la gamme des tailles intermédiaires en raison de perte de mémoire de la distribution initiale. Nous avons introduit un modèle simple sur la base de trois éléments extraits des simulations : 1) La probabilité de rupture des particules est indépendante de leur taille, 2) la très grande majorité des particules se scindent en deux fragments pour un incrément de déformation suffisamment petit et 3) sauf pour les très petits fragments, qui sont nombreux et représentent en quelque sorte des débris, les tailles des deux fragments issus de la fragmentation sont distribuées d'une manière presque uniforme. Sur cette base, nous avons postulé que la probabilité de créer une particule d'une taille donnée est proportionnelle au volume total des particules de tailles supérieures divisée par le volume de la particule. Nous n'avons pas étudié en détails les prédictions de ce modèle pour l'évolution de la distribution, mais nous avons vu qu'il conduit à une distribution stationnaire convexe (favorisant le nombre de petits fragments) qui colle relativement bien avec la distribution dans la gamme des tailles intermédiaires.

En ce qui concerne les formes de fragments, nous avons vu que le rapport d'aspect tend vers une valeur proche du nombre d'argent ( $\sqrt{2}$ ) qui peut être considéré comme une signature de la nature auto-similaire de la fragmentation en accord avec des observations faites sur des échantillons lunaires dont la distribution granulométrique reflète un processus de fragmentation sous l'effet des collisions avec des météorites. Nous avons également montré que la distribution des rapports d'aspect est très large mais présente un pic précisément pour un rapport d'aspect proche du nombre d'argent. La corrélation entre les tailles des particules et leur rapport d'aspect indique que les valeurs du rapport d'aspect autour du pic concernent essentiellement les fragments dans la gamme des tailles intermédiaires. Ceci montre que la perte de la mémoire de l'état initiale englobe aussi bien les tailles que les formes des fragments.

On notera que le modèle numérique employé dans ces études permet de poursuivre les simulations jusqu'à la fragmentation de toutes les particules. Mais une fragmentation complète de toutes les particules résulte essentiellement de la taille finie des fragments ultimes (les cellules). L'évolution des distributions des tailles et des formes des fragments est donc fiable tant que le nombre cumulé des fragments ultimes ne dépasse pas une fraction faible du nombre total de fragments produits pendant la simulation.

Nous avons enfin étudié numériquement la fragmentation des particules par cisaillement au cours d'une compression biaxiale. Contrairement à la fragmentation par incréments de contrainte dans une géométrie uniaxiale, le rapport entre la contrainte de confinement et la cohésion interne des particules est maintenu fixe et la fragmentation des particules est une conséquence des réarrangements et des contraintes déviatoriques locales liées à la distribution très hétérogène des forces au sein du matériau. Nous avons vu que la contrainte de confinement ou inversement la cohésion interne des particules affecte principalement le taux de fragmentation des particules.

Comme dans le cas de la compression uniaxiale, la distribution granulométrique résulte de la distribution initiale pour les plus grosses particules et de la distribution selon une loi de puissance dans la gamme des tailles intermédiaires où la mémoire de la distribution initiale est perdue par fragmentations successives. Pour les cohésions les plus faibles, la distribution est largement dominée par l'effet de la taille irréductible des plus petits fragments. Pour cette raison, les distributions de tailles des fragments pour les cohésions les plus faibles ne sont pas fiables par rapport à un matériau réel où les particules fines peuvent en principe continuer à se fragmenter et l'étalement granulométrique peut évoluer. Nous avons également mis en évidence une évolution du rapport d'aspect des fragments vers une même valeur proche du nombre d'argent. Cette observation généralise ainsi les résultats de la compression uniaxiale au cas du cisaillement et indique que le rapport d'aspect des fragments peut évoluer vers une valeur proche du nombre d'argent au cours du transport d'un matériau granulaire sous l'effet du cisaillement.

Un autre phénomène observé est la localisation des déformations et des fragmentations dans des bandes. La polydispersité étant plus importante dans ces bandes, contrairement aux bandes de dilatance habituellement observées, ces bandes sont plus compactes et de ce fait ressemblent aux bandes de compaction. La largeur de ces bandes augmente avec le cisaillement. Un effet majeur de la fragmentation des particules est d'atténuer, voire annuler, la dilatance. Dans ce cas, la courbe déformation-contrainte ne passe plus par un pic de contrainte et on observe plutôt une évolution progressive vers un pseudo-état critique. Enfin, nous avons montré que l'angle de frottement interne s'exprime bien en fonction des anisotropies de contact et des forces. L'anisotropie des forces augmente alors que celle des orientations des contacts diminue en fonction de la cohésion interne des particules. Ces deux effets se compensent de telle sorte que l'angle de frottement interne dans l'état critique est presque indépendant de la cohésion interne.



# Conclusion générale

L'objectif de ce travail de thèse était d'étudier l'influence des tailles et des formes des particules, ainsi que leur fragmentation, sur la texture et sur le comportement mécanique des matériaux granulaires par une approche numérique discrète. L'intérêt majeur de cette approche est de permettre d'accéder aux mécanismes sous-jacents aux comportements en compression et en cisaillement à l'échelle des particules et de leurs contacts mais aussi d'étudier systématiquement l'impact des paramètres physiques et/ou mécaniques sur le comportement.

Nous avons tout d'abord étudié l'influence de la forme et de l'étalement granulométrique des particules, définis respectivement via un paramètre de polydispersité de forme  $\delta$  et le paramètre d'étalement  $s$ , sur la compacité et la texture des milieux granulaires. Deux études paramétriques ont été réalisées sur des assemblages de pentagones dans les cas (1) non-frottant à l'état isotrope (chapitre 5) et (2) frottant et cisailé jusqu'à l'état critique (chapitre 6).

Dans l'état isotrope, nous avons montré que des structures locales cristallines se forment. Néanmoins, malgré ces arrangements locaux très denses, la compacité moyenne est bien inférieure à la compacité de ces structures locales "idéales". L'augmentation de la compacité avec  $\delta$  a été attribuée au fait que les particules les plus irrégulières présentent des pointes pouvant s'infiltrer plus facilement dans les espaces vides. Un résultat remarquable de ce travail est que l'effet de la polydispersité de forme est significatif seulement pour  $s < 0,4$ . Au-delà de  $0,4$  un nombre croissant de petites particules sont à même de remplir les pores entre les plus grosses particules. Nous avons analysé en détail le rôle des contacts côté-côté. Nous avons montré que le réseau de contact est isostatique en considérant qu'un contact côté-côté représente deux contraintes cinématiques. Les contacts côté-côté ne percolent pas à travers le réseau des contacts mais définissent des amas comportant un nombre croissant de particules au fur et à mesure que  $s$  augmente ou que  $\delta$  diminue. Ces amas ont des formes anisotropes dont le rapport d'aspect diminue avec l'augmentation de la polydispersité. Ce comportement a été attribué aux forces fortes qui sont transmises essentiellement par les contacts côté-côté.

Dans l'état cisailé, nous avons montré que la résistance au cisaillement est indépendante de la polydispersité. Ce résultat étend une observation similaire dans le cas des particules sphé-

riques au cas des particules non-sphériques. Cette extension n'était à priori pas triviale dans la mesure où les contacts côté-côté jouent un rôle majeur dans la transmission des forces. De plus, nous avons montré que la résistance au cisaillement décroît avec la polydispersité de forme. La quasi-indépendance de la résistance au cisaillement au paramètre  $s$  est expliquée par la décroissance de l'anisotropie géométrique compensée par l'augmentation de l'anisotropie des forces et des longueurs des branches. Ce comportement reflète le fait que les plus grosses particules sont de plus en plus connectées, ce qui induit une dispersion des contacts et une augmentation des longueurs de branches et des forces supportées par les grosses particules. La décroissance de la résistance au cisaillement avec  $\delta$  est expliquée par la décroissance de l'anisotropie géométrique. L'augmentation de  $\delta$  implique que les particules ont des sommets plus pointus lesquels sont plus à même de s'introduire dans les vides entre les autres particules et former des contacts inaccessibles aux faibles valeurs de  $\delta$ . Cela induit donc une plus grande dispersion des orientations des contacts.

Étant donné que dans les matériaux granulaires réels la polydispersité des particules en taille et en forme est une conséquence de la fracturation des particules, dans une seconde partie de ce mémoire nous avons considéré la fracturation des particules. Nous avons introduit un modèle de cellules liées (Bounded Cell Method ou BCM) dans le cadre de la méthode de dynamique des contacts. Dans cette méthode, chaque particule est modélisée comme un agrégat de cellules rigides dont les côtés communs sont des joints collés par une loi cohésive irréversible et frictionnelle. Cette méthode assure à la fois la conservation du volume pendant la fragmentation des particules et un traitement rigoureux des contraintes unilatérales au niveau des contacts intercellulaires. Cette approche nouvelle nous a permis de mener plusieurs études systématiques riches sur la fragmentation (1) d'une particule, (2) d'un assemblage de particules en compression uniaxiale et (3) d'un assemblage de particules en compression biaxiale.

Pour une particule soumise à la compression diamétrale, nous avons montré que la résistance à la rupture se met à l'échelle avec le seuil de cohésion entre cellules et augmente avec le frottement inter-cellulaire et que la dispersion statistique des données est bien décrite par la fonction de distribution de Weibull. Le module de Weibull varie de 6 à 10 selon le degré d'irrégularité des cellules. Cette distribution a été discutée et modélisée en termes de contacts intercellulaires critiques qui percolent au travers de la particule. Ce modèle avec l'hypothèse de marches aléatoires conduit à une décroissance de la résistance comme l'inverse de la racine carrée de la taille de la particule.

Nous avons utilisé la BCM pour étudier la compression uniaxiale d'un matériau granulaire composé de particules de forme polygonale. L'augmentation de la contrainte axiale par petits incréments conduit à la compaction du matériau granulaire d'abord par des réarrangements et puis essentiellement par la fragmentation des particules. Ce processus se poursuit par des phases alternées de chargement sans fragmentation et de fragmentation rapide, qui se traduit par une courbe déformation-contrainte en escalier. La fragmentation des particules est hétérogène avec une population des particules pulvérisées et des particules intacts. Ces dernières sont entourées de petits fragments et donc soumises à des contraintes déviatoriques faibles. Nous avons vu que la distribution granulométrique conserve une signature de la distribution initiale dans la gamme des gros fragments. Mais la distribution dans la gamme de tailles intermédiaires est en loi de puissance, ce qui signifie une perte de mémoire au niveau des particules qui se

fragmentent plusieurs fois. Nous avons introduit un modèle théorique simple qui prédit une distribution stationnaire et qui est cohérente avec la distribution dans la gamme des tailles intermédiaires des fragments. Nous avons également étudié les rapports d'aspect des fragments et montré que quelque soit le rapport d'aspect initial des particules, il tend vers une valeur proche du nombre d'argent ( $\sqrt{2}$ ) qui caractérise un processus auto-similaire de fragmentation comme observé aussi dans les échantillons lunaires.

Nous avons ensuite étudié la fragmentation des particules par cisaillement au cours d'une compression biaxiale. La fragmentation des particules dans cette géométrie est une conséquence des réarrangements et des contraintes déviatoriques locales liées à la distribution très hétérogène des forces au sein du matériau. Comme dans le cas de la compression uniaxiale, la distribution granulométrique est une combinaison de la distribution initiale pour les plus grosses particules et de la distribution selon une loi de puissance dans la gamme des tailles intermédiaires. Nous avons aussi observé une évolution du rapport d'aspect des fragments vers une même valeur proche du nombre d'argent. Un effet important de la fragmentation des particules est de compenser l'effet de la dilataance. La courbe déformation-contrainte ne passe plus par un pic. Nous avons montré que l'angle de frottement interne s'exprime bien en fonction des anisotropies de contact et des forces. L'anisotropie des forces augmente alors que celle des orientations des contacts diminue en fonction de la cohésion interne des particules. Ces deux effets se compensent de telle sorte que l'angle de frottement interne dans l'état critique est presque indépendant de la cohésion interne.

Les résultats présentés dans ce travail de thèse permettent de cerner, en partie, le rôle de la polydispersité et de la fragmentation des particules dans le comportement des milieux granulaires mais ouvrent aussi la porte vers un grand nombre de nouvelles questions. La polydispersité et la fragmentation sont des éléments de complexité majeurs des matériaux granulaires dans la nature et dans les applications industrielles. Un message important est qu'une "forme moyenne" est clairement un paramètre insuffisant pour la modélisation des matériaux granulaires alors qu'au contraire, comme l'étalement granulométrique n'a que peu d'effet sur l'angle de frottement interne, les particules peuvent être représentées par leur "taille moyenne". Ce résultat plutôt contre-intuitif suggère la nécessité de recherches plus larges sur l'effet de la polydispersité en considérant des formes différentes, autre que polygonales, en vue d'une modélisation réaliste. De même, il serait intéressant de considérer des interactions de contact plus complexes telles que la cohésion due, par exemple, aux forces capillaires qui dépendent de la taille et de la distance entre deux particules en contact. Enfin, l'extension du modèle numérique BCM et de ces études à 3D est une perspective majeure pour une plus grande généralisation de nos résultats. A cause du nombre important de particules primaires nécessaires pour obtenir une représentation statistique acceptable, l'extension à 3D nécessite un effort supplémentaire pour rendre les simulations plus efficaces.





# Bibliographie

- [1] Charles R. A. Abreu, Frederico W. Tavares, and Marcelo Castier. Influence of particle shape on the packing and on the segregation of spherocylinders via monte carlo simulations. *Powder Technology*, 134(1-2) :167–180, August 2003. [2.1](#), [2.1](#)
- [2] Riyadh Al-Raoush and Mustafa Alsaleh. Simulation of random packing of polydisperse particles. *Powder Technology*, 176(1) :47 – 55, 2007. [2.2](#)
- [3] Sergiy Antonyuk, Manoj Khanal, Jurgen Tomas, Stefan Heinrich, and Lothar Morl. Impact breakage of spherical granules : Experimental study and dem simulations. *Chemical Engineering and Processing : Process Intensification*, 45(10) :838 – 856, 2006. [Particulate Processes A Special Issue of Chemical Engineering and Processing](#). [4.3](#)
- [4] Haydar Arslan, Gokhan Baykal, and Stein Sture. Analysis of the influence of crushing on the behavior of granular materials under shear. *Granular Matter*, 11(2) :87–97, 2009. [3.4](#), [3.4](#)
- [5] T. Aste. Circle, sphere, and drop packings. *Physical Review E*, 53(3) :2571, 1996. [2.2](#)
- [6] T. Aste and D. Weaire. *The Pursuit of Perfect Packing*. Institute of Physics Publishing, Bristol, 2000. [2.2](#)
- [7] J.A. Astrom and H.J. Herrmann. Fragmentation of grains in a two-dimensional packing. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 5(3) :551–554, 1998. [3.4](#), [8.4](#), [8.5](#)
- [8] E. Azema, N. Estrada, and F. Radjai. Nonlinear effects of particle shape angularity in sheared granular media. *Physical Review E*, 86 :041301, 2012. [2.1](#), [2.1](#), [2.4](#), [2.5](#), [6.2.2](#)
- [9] E. Azéma and F. Radjaï. Stress-strain behavior and geometrical properties of packings of elongated particles. *Phys Rev E*, 81 :051304, 2010. [2.1](#), [2.1](#), [2.3](#), [2.1](#), [6.3.3](#), [6.3.3](#), [6.3.3](#)
- [10] E. Azema and F. Radjai. Force chains and contact network topology in sheared packings of elongated particles. *Phys Rev E*, 85 :031303, 2012. [2.1](#), [5.3.3](#), [6.3.2](#), [6.3.2](#)
- [11] E. Azema, F. Radjai, and F. Dubois. Packings of irregular polyhedral particles : strength, structure and effects of angularity. *Physical Review E*, submitted, 2013. [2.1](#)
- [12] E. Azéma, F. Radjaï, R. Peyroux, and G. Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Physical Review E*, 76(1) :011301, 2007. [5.3.3](#), [6.3.3](#)
- [13] E. Azéma, F. Radjai, R. Peyroux, and G. Saussine. Influence of particle shape on shear stress in

- granular media. *Traffic and Granular Flow 07*, pages 497–505, 2009. [6.3.3](#), [6.3.3](#)
- [14] E. Azema, F. Radjai, B. Saint-Cyr, J.-Y. Delenne, and P. Sornay. Rheology of 3d packings of aggregates : microstructure and effects of nonconvexity. *Phys. Rev. E*, Accepted, 2013. [2.1](#), [6.3.3](#), [6.3.3](#)
- [15] Emilien Azéma. Étude numérique des matériaux granulaires à grains polyédriques : rhéologie quasi-statique, dynamique vibratoire, application au procédé de bourrage du ballast. *PhD, Université Montpellier, 2*, 2007. [4.3](#)
- [16] M Patrice BAILLY. *Etude expérimentale de la fissuration dynamique de plaques : application à la fragmentation de réservoirs*. PhD thesis, Université d'Orléans, 2006. [3.1](#)
- [17] J. Baker and A. Kudrolli. Maximum and minimum stable random packings of platonic solids. *physical review E*, 82 :061304, 2010. [5.3.1](#)
- [18] S. G. Bardenhagen, J. U. Brackbill, and D. Sulsky. Numerical study of stress distribution in sheared granular material in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 62 :3882–3890, 2000. [5.3.3](#)
- [19] SB Batdorf and HL Heinisch. Weakest link theory reformulated for arbitrary fracture criterion. *Journal of the American Ceramic Society*, 61(7-8) :355–358, 1978. [7.3.2](#)
- [20] R. P. Behringer, Karen E Daniels, Trushant S Majmudar, and Matthias Sperl. Fluctuations, correlations and transitions in granular materials : statistical mechanics for a non-conventional system. *Philos Transact A Math Phys Eng Sci*, Aug 2007. [7.3.2](#)
- [21] O. Ben-Nun, I. Einav, and A. Tordesillas. Force attractor in confined comminution of granular materials. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :108001, Mar 2010. [8.4](#)
- [22] J. G. BENNET. Broken coal. *J. Inst. Fuel*, 10 :22–39, 1936. [3.4](#), [3.9](#)
- [23] Zsolt Bertalan, Ashivni Shekhawat, James P Sethna, and Stefano Zapperi. Fracture strength : Stress concentration, extreme value statistics and the fate of the weibull distribution. *arXiv preprint arXiv :1404.4584*, 2014. [7.3.2](#)
- [24] A. Bezrukov, M. Bargieł, and D. Stoyan. Statistical analysis of simulated random packings of spheres. *Particle & Particle Systems Characterization*, 19(2) :111–118, 2002. [2.2](#)
- [25] M. Boton, E. Azema, N. Estrada, F. Radjai, and A. Lizcano. Quasistatic rheology and microstructural description of sheared granular materials composed of platy particles. *Phys. Rev. E*, 87 :032206, 2013. [2.1](#), [6.3.3](#)
- [26] H. J. H. Brouwers. Packing of crystalline structures of binary hard spheres : An analytical approach and application to amorphization. *Phys. Rev. E*, 76 :041304, Oct 2007. [2.2](#)
- [27] H. J. H. Brouwers. Random packing fraction of bimodal spheres : An analytical expression. *Phys. Rev. E*, 87 :032202, Mar 2013. [2.2](#)
- [28] H.D Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. Masson, Paris, 1977. ISBN : 2-225-48312-4. [3.1](#)
- [29] Francesca Casini, Giulia MB Viggiani, and Sarah M Springman. Breakage of an artificial crushable material under loading. *Granular matter*, 15(5) :661–673, 2013. [3.4](#)
- [30] Manuela Cecconi and Giulia Viggiani. Structural features and mechanical behaviour of a pyroclastic weak rock. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 25(15) :1525–1557, 2001. [3.4](#)
- [31] Cegeo, B. Saint-Cyr, K. Szarf, C. Voivret, E. Azéma, V. Richefeu, J.-Y. Delenne, G. Combe, C. Noguier-Lehon, P. Villard, P. Sornay, M. Chaze, and F. Radjai. Particle shape dependence in 2d granular media. *Eur. Phys. Letter*, page 5, 2012. [2.6](#), [2.8](#), [2.9](#), [6.2.2](#)
- [32] Y. P. Cheng, M. D. Bolton, and Y. Nakata. Crushing and plastic deformation of soils simulated using dem. *Géotechnique*, 54 :131–141(10), 2004. [3.4](#), [3.4](#)
- [33] YP Cheng, Y Nakata, and MD Bolton. Discrete element simulation of crushable soil. *Geotech-*

- nique*, 53(7) :633–641, 2003. 4.3
- [34] Fawad A Chuhan, Arild Kjeldstad, Knut Bjørlykke, and Kaare Høeg. Porosity loss in sand by grain crushing—Experimental evidence and relevance to reservoir quality. *Marine and Petroleum Geology*, 19(1) :39–53, 2002. 3.4
- [35] Fawad A Chuhan, Arild Kjeldstad, Knut Bjørlykke, and Kaare Høeg. Experimental compression of loose sands : relevance to porosity reduction during burial in sedimentary basins. *Canadian Geotechnical Journal*, 40(5) :995–1011, 2003. 3.4
- [36] AS Clarke and JD Wiley. Numerical simulation of the dense random packing of a binary mixture of hard spheres : Amorphous metals. *Physical Review B*, 35(14) :7350, 1987. 2.2
- [37] E. Clement. Rheology of granular media. *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, 4(4) :294–299, 1999-08-01T00 :00 :00. 6.1
- [38] MR Coop, KK Sorensen, T Bodas Freitas, and G Georgoutsos. Particle breakage during shearing of a carbonate sand. *Géotechnique*, 54(3) :157–163, 2004. 3.4, 3.4
- [39] S. N. Coppersmith, C.H. Liu, S. Majumdar, O. Narayan, and T. A. Witten. Model for force fluctuations in bead packs. *Phys. Rev. E*, 53(5) :4673–4685, 1996. 5.3.3
- [40] P. A. Cundall and O. D. L. Strack. A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1) :47–65, 1979. 4.1
- [41] Peter A Cundall. Formulation of a three-dimensional distinct element model—part i. a scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, volume 25, pages 107–116. Elsevier, 1988. 2
- [42] GA D’Addetta, F Kun, and E Ramm. On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials. *Granular matter*, 4(2) :77–90, 2002. 4.3
- [43] JA Dodds. The porosity and contact points in multicomponent random sphere packings calculated by a simple statistical geometric model. *Journal of colloid and interface science*, 77(2) :317–327, 1980. 2.10, 2.2
- [44] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E.A. Variano, F.H Stillinger, R. Connelly, S. Torquato, and P.M. Chaikin. Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids. *Science*, 303 :990–994, 2004. 2.1
- [45] A. Donev, R. Connelly, F.H Stillinger, and S. Torquato. Underconstrained jammed packings of nonspherical hard particles : Ellipses and ellipsoids. *Phys Rev E*, 75 :051304–1, 051304–32, 2007. 2.1, 5.3.1
- [46] A. Donev, F.H. Stillinger, P.M. Chaikin, and S. Torquato. Unusually dense crystal packings of ellipsoids. *Phys Rev Lett.*, 92 :255506–1, 255506–4, 2004. 2.1
- [47] JM Edmond and MS Paterson. Volume changes during the deformation of rocks at high pressures. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, volume 9, pages 161–182. Elsevier, 1972. 3.3
- [48] Itai Einav. Breakage mechanics—part i : theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 55(6) :1274–1297, 2007. 3.4
- [49] Itai Einav and Julio R Valdes. On comminution and yield in brittle granular mixtures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(6) :2136–2148, 2008. 3.4, 3.4
- [50] L Elghezal, M Jamei, and I-O Georgopoulos. Dem simulations of stiff and soft materials with crushable particles : an application of expanded perlite as a soft granular material. *Granular Matter*, 15(5) :685–704, 2013. 8.4
- [51] V.P.B. Esnault and J.-N. Roux. 3d numerical simulation study of quasistatic grinding process on

- a model granular material. *Mechanics of Materials*, 66(0) :88 – 109, 2013. 3.4
- [52] VPB Esnault and J-N Roux. 3d numerical simulation study of quasistatic grinding process on a model granular material. *Mechanics of Materials*, 66 :88–109, 2013. 8.4
- [53] N. Estrada, A. Lizcano, and A. Taboada. Simulation of cemented granular materials. ii. micromechanical description and strength mobilization at the onset of macroscopic yielding. *Phys Rev E*, 82 :011304, 2010. 6.3.2
- [54] Nicolas Estrada, Alfredo Taboada, and Farhang Radjai. Shear strength and force transmission in granular media with rolling resistance. *Phys Rev E*, 78 :021301, 2008. 5.3.3
- [55] A Ezaoui, Thibaut Lecompte, H Di Benedetto, and E Garcia. Effects of various loading stress paths on the stress-strain properties and on crushability of an industrial soft granular material. *Granular Matter*, 13(4) :283–301, 2011. 3.4, 3.4
- [56] Julien Fourcade. *Etude de la mise en forme par pressage uni-axial des poudres de combustible nucléaire*. PhD thesis, Montpellier 2, 2002. 1.1
- [57] ZAOUI André FRANÇOIS Dominique, PINEAU André. *Comportement mécanique des matériaux : Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture et mécanique du contact*. Herm es, Paris, 1995. ISBN : 2-86601-348-4. 3.1
- [58] Joanne T Fredrich, Brian Evans, and Teng-Fong Wong. Micromechanics of the brittle to plastic transition in carrara marble. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 94(B4) :4129–4145, 1989. 3.3
- [59] Akira Fujiwara, Goro Kamimoto, and Akimasa Tsukamoto. Destruction of basaltic bodies by high-velocity impact. *Icarus*, 31(2) :277–288, 1977. 3.4, 3.9
- [60] SA Galindo-Torres, DM Pedroso, DJ Williams, and L Li. Breaking processes in three-dimensional bonded granular materials with general shapes. *Computer Physics Communications*, 183(2) :266–277, 2012. 4.3, 4.4
- [61] X Gao, RH Dodds, RL Tregoning, JA Joyce, and RE Link. A weibull stress model to predict cleavage fracture in plates containing surface cracks. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22 :481–494, 1999. 7.3.2
- [62] GDR-MiDi. On dense granular flows. *Eur. Phys. J. E*, 14 :341–365, 2004. 6.1
- [63] MM Hagerty, DR Hite, CR Ullrich, and DJ Hagerty. One-dimensional high-pressure compression of granular media. *Journal of geotechnical engineering*, 119(1) :1–18, 1993. 3.4, 3.8
- [64] Bobby O Hardin. Crushing of soil particles. *Journal of Geotechnical Engineering*, 111(10) :1177–1192, 1985. 3.4
- [65] Lise Hégron, Philippe Sornay, and Nathalie Favretto-Cristini. Compaction of a bed of fragmentable particles and associated acoustic emission. *TRANSACTIONS ON NUCLEAR SCIENCE*, 61(4), 2014. 0.1, 8.3.2
- [66] C. L. Henley. Sphere packings and local environments in penrose tilings. *Phys. Rev. B*, 34, N°2, 1986. 5.2.1
- [67] H. J. Herrmann, R. Mahmoodi Baram, and M. Wackenhut. Searching for the perfect packing. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 330(1-2) :77–82, December 2003. 2.2
- [68] R. C. Hidalgo, I. Zuriguel, D. Maza, and I. Pagonabarraga. Role of particle shape on the stress propagation in granular packings. *Phys. Rev. Lett.*, 103 :118001, 2009. 6.3.2
- [69] DW Hobbs. A study of the behaviour of a broken rock under triaxial compression, and its application to mine roadways. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, volume 3, pages 11–43. Elsevier, 1966. 3.3
- [70] Junyu Huang, Songlin Xu, and Shisheng Hu. Influence of particle breakage on the dynamic

- compression responses of brittle granular materials. *Mechanics of Materials*, 68 :15–28, 2014. 4.3, 4.3
- [71] Bernd Imre, Jan Laue, and Sarah Marcella Springman. Fractal fragmentation of rocks within sturzstroms : insight derived from physical experiments within the eth geotechnical drum centrifuge. *Granular Matter*, 12(3) :267–285, 2010. 3.4
- [72] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999. 4.1, 4.2, 4.2
- [73] Y. Jiao, F. H. Stillinger, and S. Torquato. Distinctive features arising in maximally random jammed packings of superballs. *physical review E*, 81 :041304, 2010. 2.1
- [74] A.R. Kansal, S. Torquato, and F.H. Stillinger. Computer generation of dense polydisperse sphere packings. *The Journal of chemical physics*, 117 :8212, 2002. 2.2
- [75] Th Karman. Von,(1911). *Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck*, pages 1749–1757, 1991. 3.3
- [76] Consuelo Margarita Kong and John J Lannutti. Localized densification during the compaction of alumina granules : The stage iÑii transition. *Journal of the American Ceramic Society*, 83(4) :685–690, 2000. 1.2.2
- [77] A.V. Kyrylyuk and A.P. Philipse. Effect of particle shape on the random packing density of amorphous solids. *physica status solidi (a)*, 208(10) :2299–2302, 2011. 2.1
- [78] Evangelista A.Picarelli L.Evangelista A.Picarelli L., editor. *Physical and structural properties of a pyroclastic soft rock*, LEIDEN, 1998. A.A.Balkema. 3.4
- [79] René Labbens. *Introduction à la mécanique de la rupture*. Pluralis, Paris, 1980. 3.1
- [80] J Lackenby, Buddhima Indraratna, G McDowell, and D Christie. Effect of confining pressure on ballast degradation and deformation under cyclic triaxial loading. *Faculty of Engineering-Papers*, page 387, 2007. 3.4
- [81] Poul V Lade, Jerry A Yamamuro, and Paul A Bopp. Significance of particle crushing in granular materials. *Journal of Geotechnical Engineering*, 122(4) :309–316, 1996. 3.4
- [82] Da-Mang Lee. *The angles of friction of granular fills*. PhD thesis, University of Cambridge, 1992. 3.2, 3.2, 9.3
- [83] Kenneth L Lee and Iraj Farhoomand. Compressibility and crushing of granular soil in anisotropic triaxial compression. *Canadian Geotechnical Journal*, 4(1) :68–86, 1967. 3.4
- [84] L. Liu, K.D. Kafui, and C. Thornton. Impact breakage of spherical, cuboidal and cylindrical agglomerates. *Powder Technology*, 199(2) :189 – 196, 2010. 4.3
- [85] S. Luding and S. McNamara. How to handle the inelastic collapse of a dissipative hard-sphere gas with the TC model. *Granular Matter*, 1(3) :113–128, 1998. cond-mat/9810009. 4.1
- [86] L Luzzani and MR Coop. On the relationship between particle breakage and the critical state of sands. *Soils and foundations*, 42(2) :71–82, 2002. 3.4, 3.4
- [87] Gang Ma, Wei Zhou, and Xiao-Lin Chang. Modeling the particle breakage of rockfill materials with the cohesive crack model. *Computers and Geotechnics*, 61(0) :132 – 143, 2014. 9.4.2
- [88] T. S. Majmudar and R. P. Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435 :1079–1082, 2005. 3.4
- [89] Benoit Mandelbrot. How long is the coast of britain? statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156(3775) :636–638, 1967. 3.4
- [90] G. R. McDowell, M. D. Bolton, and D. Robertson. The fractal crushing of granular materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 44(12) :2079–2102, 1996. 3.4
- [91] GR McDowell and MD Bolton. On the micromechanics of crushable aggregates. *Geotechnique*,



- 48(5) :667–679, 1998. [3.2](#), [3.2](#), [3.4](#), [3.5](#), [3.2](#), [3.4](#), [3.4](#), [3.4](#), [7.3.1](#), [7.3.1](#)
- [92] Lingyi Meng, Peng Lu, Shuixiang Li, Jian Zhao, and Teng Li. Shape and size effects on the packing density of binary spherocylinders. *Powder Technology*, 228(0) :284 – 294, 2012. [2.1](#), [2.2](#)
- [93] A.A Mirghasemi, L. Rothenburg, and E.L Maryas. Influence of particle shape on engineering properties of assemblies of two-dimensional polygon-shaped particles. *Geotechnique*, 52 :N 3, 209–217, 2002. [2.1](#), [2.1](#)
- [94] J.K. Mitchell and K. Soga. *Fundamentals of Soil Behavior*. Wiley, New-York, NY, 2005. [2.2](#)
- [95] J. J. Moreau. Liasons unilatérales sans frottement et chocs inélastiques. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 296 :1473–1476, 1983. [4.1](#)
- [96] J. J. Moreau. Bounded variation in time. In P.D. Panagiotopoulos and G Strang, editors, *Topics in Nonsmooth Mechanics*, pages 1–74. Birkhäuser, Basel, 1988. [4.1](#)
- [97] J. J. Moreau. New computation methods in granular dynamics. In *Powders & Grains 93*, page 227, Rotterdam, 1993. A. A. Balkema. [4.2](#), [4.2](#), [4.2](#)
- [98] J. J. Moreau. Numerical investigation of shear zones in granular materials. In D. E. Wolf and P. Grassberger, editors, *Friction, Arching, Contact Dynamics*, pages 233–247, Singapore, 1997. World Scientific. [6.2.1](#), [6.2.1](#)
- [99] J.J. Moreau. Some numerical methods in multibody dynamics : application to granular. *European J. Mech. A Solids*, 13 :93–114, 1994. [4.1](#)
- [100] Y Nakata, AFL Hyde, M Hyodo, and H Murata. A probabilistic approach to sand particle crushing in the triaxial test. *Geotechnique*, 49(5) :567–583, 1999. [3.4](#), [3.4](#)
- [101] Yukio Nakata, Masayuki Hyodo, Adrian FL Hyde, Yoshinori Kato, and Hidekazu Murata. Microscopic particle crushing of sand subjected to high pressure one-dimensional compression. *Soils and foundations*, 41(1) :69–82, 2001. [3.4](#), [3.8](#)
- [102] Yukio Nakata, Yoshinori Kato, Masayuki Hyodo, Adrian FL HYDE, and Hidekazu Murata. One-dimensional compression behaviour of uniformly graded sand related to single particle crushing strength. *Soils and Foundations*, 41(2) :39–51, 2001. [3.4](#), [7.3.2](#)
- [103] G. T. Nolan and P. E. Kavanagh. Random packing of nonspherical particles. *Powder Technology*, 84(3) :199–205, September 1995. [2.1](#)
- [104] C. Noguier-Lehon. Effect of the grain elongation on the behaviour of granular materials in biaxial compression. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(10) :587–595, 2010. [2.1](#), [2.1](#)
- [105] C. Noguier-Lehon, B. Cambou, and E. Vincens. Influence of particle shape and angularity on the behaviour of granular materials : a numerical analysis. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 27(14) :1207–1226, 2003. [2.1](#), [2.1](#)
- [106] H. Ouadfel and L. Rothenburg. Stress-force-fabric relationship for assemblies of ellipsoids. *Mechanics of Materials*, 33(4) :201–221, 2001. [6.3.3](#), [6.3.3](#)
- [107] Mervyn S Paterson, Teng-fong Wong, Mervyn Silas Paterson, Australia Geologist, Mervyn Silas Paterson, and Australie Géologue. *Experimental rock deformation : the brittle field*, volume 314. Springer, 2005. [3.3](#)
- [108] MS Paterson. Experimental deformation and faulting in wombeyan marble. *Geological Society of America Bulletin*, 69(4) :465–476, 1958. [3.3](#), [3.6](#), [3.7](#)
- [109] T. Pöschel and V. Buchholtz. Static friction phenomena in granular materials : Coulomb law vs. particle geometry. *Phys. Rev. Lett.*, 71(24) :3963, 1993. [4.1](#)
- [110] DO Potyondy and PA Cundall. A bonded-particle model for rock. *International journal of rock mechanics and mining sciences*, 41(8) :1329–1364, 2004. [3.4](#), [4.3](#)
- [111] F. Radjai. *Physics of dry granular media*, chapter Multicontacts dynamics, page 305. Kluwer

- Academic Publishers (Dordrecht/Boston/London), 1997. 4.2
- [112] F. Radjai. Multicontact dynamics. In H. J. Herrmann et al., editor, *Physics of Dry Granular Media*, pages 305–312, Netherlands, 1998. Kluwer Academic Publishers. 5.3.3, 6.3.2, 6.3.3
- [113] F. Radjai, M. Jean, J.-J. Moreau, and S. Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :274–277, Jul 1996. 3.4, 5.3.3, 7.3.2
- [114] F. Radjai, D. E. Wolf, M. Jean, and J.J. Moreau. Bimodal character of stress transmission in granular packings. *Phys. Rev. Letter*, 80 :61–64, 1998. 3.4
- [115] Farhang Radjai and Emilien Azéma. Shear strength of granular materials. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 13(2) :203–218, 2009. 2.2
- [116] Farhang Radjai, J-Y Delenne, Émilien Azema, and Stéphane Roux. Fabric evolution and accessible geometrical states in granular materials. *Granular Matter*, 14(2) :259–264, 2012. 2.2
- [117] Farhang Radjai and Vincent Richefeu. Contact dynamics as a nonsmooth discrete element method. *Mechanics of Materials*, 41(6) :715 – 728, 2009. <ce :title>Advances in the Dynamics of Granular Materials</ce :title>. 4.1, 4.2, 4.2
- [118] Farhang Radjai and Stéphane Roux. Contact dynamics study of 2d granular media : critical states and relevant internal variables. *The physics of granular media*, pages 165–187, 2003. 2.2
- [119] Naman Recho. *Rupture par fissuration des structures*. Hermès, 1995. 3.1
- [120] Vincent Richefeu, Moulay Saïd El Youssoufi, and Farhang Radjai. Shear strength properties of wet granular materials. *Physical Review E*, 73(5) :051304, 2006. 7.3.2
- [121] Leo Rothenburg and RJ Bathurst. Analytical study of induced anisotropy in idealized granular materials. *Geotechnique*, 39(4) :601–614, 1989. 2.2, 6.3.3, 6.3.3
- [122] S. Roux and F. Radjai. Statistical approach to the mechanical behavior of granular media. In *Proceedings of the 20th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics*, 2000. 5.3.1
- [123] Adrian R Russell, David Muir Wood, and Mamoru Kikumoto. Crushing of particles in idealised granular assemblies. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(8) :1293–1313, 2009. 3.4
- [124] S. Sacanna, L. Rossi, A. Wouterse, and AP Philipse. Observation of a shape-dependent density maximum in random packings and glasses of colloidal silica ellipsoids. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 19(37) :376108, 2007. 2.1
- [125] B. Saint-Cyr, C. Voivret, J.-Y. Delenne, F. Radjai, and P. Sornay. Rheology of granular materials composed of nonconvex particles. *Phys Rev E*, 84 :041302, 2011. 2.1, 6.3.2
- [126] Baptiste Saint-Cyr. *Modélisation des matériaux granulaires cohésifs à particules non convexes : Application à la compaction des poudres d’UO2*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2011. 2.1
- [127] Charles Sammis, Geoffrey King, and Ronald Biegel. The kinematics of gouge deformation. *Pure and Applied Geophysics*, 125(5) :777–812, 1987. 3.4
- [128] Erik Santiso and ERICH A MÜLLER. Dense packing of binary and polydisperse hard spheres. *Molecular Physics*, 100(15) :2461–2469, 2002. 2.2
- [129] Gilles Saussine, C Cholet, PE Gautier, Frédéric Dubois, Claude Bohatier, and Jean-Jacques Moreau. Modelling ballast behaviour under dynamic loading. part 1 : A 2d polygonal discrete element method approach. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195(19) :2841–2859, 2006. 1
- [130] RN Schock, HC Heard, and DR Stephens. Stress-strain behavior of a granodiorite and two graywackes on compression to 20 kilobars. *Journal of Geophysical Research*, 78(26) :5922–5941,



1973. [3.3](#)
- [131] Klaus Schönert. Breakage of spheres and circular discs. *Powder technology*, 143 :2–18, 2004. [7.2.1](#)
- [132] JE Schoutens. Empirical analysis of nuclear and high-explosive cratering and ejecta. *Nuclear geophysics sourcebook*, 55(part 2), 1979. [3.4](#), [3.9](#)
- [133] Joseph K Schrodt, Jon T Holder, et al. Temperature and strain rate effects on micromechanical behavior in triaxially compressed marbles. In *The 24th US Symposium on Rock Mechanics (USRMS)*. American Rock Mechanics Association, 1983. [3.3](#)
- [134] Leonardo E Silbert, Gary S Grest, and James W Landry. Statistics of the contact network in frictional and frictionless granular packings. *Phys. Rev. E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 66(6 Pt 1) :061303, Dec 2002. [5.3.3](#)
- [135] K.C. Smith, M.Alam, and T.S. Fisher. Athermal jamming of soft frictionless platonic solids. *Phys. Rev. E*, 82 :051304, 2010. [2.1](#)
- [136] L. Staron and F. Radjai. Friction versus texture at the approach of a granular avalanche. *Phys. Rev. E*, 72 :1–5, 2005. [6.2.1](#), [6.2.1](#)
- [137] K Szarf, G Combe, and P Villard. Polygons vs. clumps of discs : A numerical study of the influence of grain shape on the mechanical behaviour of granular materials. *Powder Technology*, 208(2) :279–288, 2011. [2.1](#), [2.1](#)
- [138] Ae Tarantino and AFL Hyde. An experimental investigation of work dissipation in crushable materials. *Géotechnique*, 55(8) :575–584, 2005. [3.4](#)
- [139] C. Thornton. Coefficient of restitution for collinear collisions of elastic-perfectly plastic spheres. *Journal of Applied Mechanics*, 64 :383–386, 1997. [4.3](#)
- [140] S. Torquato and Y. Jiao. Dense packings of polyhedra : Platonic and archimedean solids. *physical review E*, 80 :041104, 2009. [2.1](#)
- [141] H. Troadec, F. Radjai, S. Roux, and J.-C. Charmet. Model for granular texture with steric exclusions. *Phys. Rev. E*, 66 :041305, 2002. [5.3](#)
- [142] A.T.A. Tsomokos and V.N.G.V.N. Georgiannou. Effect of grain shape and angularity on the undrained response of fine sands. *Canadian Geotechnical Journal*, 47(5) :539–551, 2010. [2.1](#), [2.1](#)
- [143] O. Tsoungui, D. Vallet, and J.C. Charmet. Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials. *Powder Technology*, 105 :190 – 198, 1999. [8.4](#)
- [144] Olivier Tsoungui, Denis Vallet, and Jean-Claude Charmet. Numerical model of crushing of grains inside two-dimensional granular materials. *Powder Technology*, 105(1â ? ?3) :190 – 198, 1999. [3.4](#), [3.4](#), [3.10](#)
- [145] D. L. Turcotte. Fractals and fragmentation. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 91(B2) :1921–1926, 1986. [3.4](#), [3.4](#), [3.4](#), [3.9](#)
- [146] Takao Ueda, Takashi Matsushima, and Yasuo Yamada. Dem simulation on the one-dimensional compression behavior of various shaped crushable granular materials. *Granular Matter*, pages 1–10, 2013. [3.4](#), [4.3](#), [8.6](#)
- [147] Veronika Vajdova, Patrick Baud, and Teng-fong Wong. Compaction, dilatancy, and failure in porous carbonate rocks. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 109(B5), 2004. [3.3](#)
- [148] Luis E Vallejo, Sebastian Lobo-Guerrero, and Zamri Chik. A network of fractal force chains and their effect in granular materials under compression. In *Fractals in Engineering*, pages 67–80. Springer, 2005. [3.4](#), [3.4](#)

- [149] Sybrand van der Zwaag. The concept of filament strength and the weibull modulus. *ASTM J. Test. Eval.*, 17(5) :292–298, 1989. [7.3.2](#)
- [150] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Multiscale force networks in highly polydisperse granular media. *Phys. Rev. Lett.*, 102 :178001, 2009. [7.3.2](#)
- [151] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M.S. El Youssoufi. Space-filling properties of polydisperse granular media. *Phys. Rev. E*, 76 :021301, Aug 2007. [2.2](#), [2.11](#), [5.1.1](#)
- [152] C. Voivret, F. Radjai, J.-Y. Delenne, and M.S. El Youssoufi. Multiscale force networks in highly polydisperse granular media. *Physical review letters*, 102(17) :178001, 2009. [2.2](#), [II](#), [5.2.1](#), [5.3.3](#), [6.2.2](#), [1](#)
- [153] C. Voivret, F. Radjai,  $\frac{1}{2}$ , J.-Y. Delenne, and M. S. El Youssoufi. Space-filling properties of polydisperse granular media. *Phys Rev E Stat Nonlin Soft Matter Phys*, 76(2 Pt 1) :021301, Aug 2007. [5.2.1](#)
- [154] Thai-Son Vu, Guillaume Ovarlez, and Xavier Chateau. Macroscopic behavior of bidisperse suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids. *Journal of Rheology*, 54 :815, 2010. [2.2](#)
- [155] William J Walker and James S Reed. Granule fracture during dry pressing. *American Ceramic Society Bulletin*, 78(6) :53–57, 1999. [1.2.2](#)
- [156] Jianfeng Wang and Haibin Yan. On the role of particle breakage in the shear failure behavior of granular soils by dem. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2011. [3.4](#)
- [157] Waloddi Weibull. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of applied mechanics*, 1951. [3.2](#), [7.3.1](#)
- [158] S. R. Williams and A. P. Philipse. Random packings of spheres and spherocylinders simulated by mechanical contraction. *Phys. Rev. E*, 67 :051301, May 2003. [2.1](#)
- [159] FK Wittel, HA Carmona, F Kun, and HJ Herrmann. Mechanisms in impact fragmentation. *International journal of fracture*, 154(1-2) :105–117, 2008. [4.3](#)
- [160] Teng-fong Wong, Christian David, and Wenlu Zhu. The transition from brittle faulting to cataclastic flow in porous sandstones : Mechanical deformation. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, 102(B2) :3009–3025, 1997. [3.3](#)
- [161] David Muir Wood and Kenichi Maeda. Changing grading of soil : effect on critical states. *Acta Geotechnica*, 3(1) :3–14, 2008. [3.4](#)
- [162] Alan Wouterse, Stephen R Williams, and Albert P Philipse. Effect of particle shape on the density and microstructure of random packings. *Journal of Physics : Condensed Matter*, 19(40) :406215, 2007. [2.1](#)
- [163] Jian Zhao, Shuixiang Li, Peng Lu, Lingyi Meng, Teng Li, and Haiping Zhu. Shape influences on the packing density of frustums. *Powder Technology*, 214(3) :500 – 505, 2011. [2.1](#)
- [164] B. Zhou, R. Huang, H.Wang, and J. Wang. Dem investigation of particle anti-rotation effects on the micromechanical response of granular materials. *Granular Matter*, 15 :315–326, 2013. [6.3.2](#)
- [165] I. Zuriguel, T. Mullin, and J.M. Rotter. Effect of particle shape on the stress dip under a sandpile. *Phys. Rev. Lett.*, 98 :028001, 2007. [6.3.2](#)





**Titre : Microstructure et comportement mécanique des milieux granulaires polydisperses fragmentables**

**Résumé :** L'objectif des travaux présentés dans ce mémoire est de caractériser la texture et la rhéologie des milieux granulaires en fonction de la polydispersité de forme et de taille des particules mais aussi en fonction de la cohésion interne des particules lorsqu'elles sont fragmentables, en vue d'une meilleure compréhension du procédé de fabrication des compacts. Pour ces études, nous avons utilisé la méthode de Dynamique des Contacts avec un modèle de rupture des particules. Nos analyses montrent que la polydispersité de forme peut jouer un rôle important lorsque la polydispersité de taille est faible. Par exemple, la résistance au cisaillement est presque indépendante de la polydispersité de taille mais elle diminue lorsque les formes deviennent plus irrégulières. La fragmentation des particules est fortement hétérogène en raison de la redistribution des contraintes au sein du matériau. Celui-ci garde la mémoire de la distribution granulométrique initiale, mais une classe intermédiaire de tailles se développe avec une distribution en loi de puissance des tailles et un rapport d'aspect moyen proche du nombre d'argent. Au cours du cisaillement, les déformations se localisent dans des bandes avec une compacité supérieure au reste du matériau en raison de la fragmentation des particules. La fragmentation tend également à annuler la dilatance et le pic de contrainte.

**Mots-clés :** Matériaux granulaires, rhéologie, polydispersité, Dynamique des Contacts, fragmentation, texture, anisotropie.

**Title : Microstructure and mechanical behavior of polydisperse and crushable granular media**

**Summary :** The general objective of the work presented in this dissertation is to investigate the microstructure and rheology of granular materials as a function of size and shape polydispersity of the particles, and to analyze the role of particle fragmentation as a function of the internal cohesion of particles in view of a better understanding of the manufacture process of powder compacts. For this work, we used numerical simulations by means of the Contact Dynamics method with a model of particle fracture. Our results suggest that shape polydispersity may play an important role when size polydispersity is low. For example, the shear strength is nearly independent of size distribution but declines when the particles becomes increasingly more irregular in shape. The process of particle fragmentation is found to be highly inhomogeneous as a result of stress redistribution. The memory of the initial size distribution is mainly conserved in the class of larger particles while a class of intermediate sizes develops with a power-law size distribution and a mean aspect ratio close to the silver number independently of the initial size distribution. During shear, the strain is localized in shear bands of large solid fraction as a consequence of particle fragmentation and enhanced size polydispersity. Particle fragmentation tends to reduce dilatancy and the peak shear strength.

**Keywords :** Granular materials, rheology, polydispersity, Contact Dynamics, fragmentation, microstructure, anisotropy.