



**HAL**  
open science

# Étude théorique d'un gaz de fermions froids en interaction : aspects dynamiques et effets de polarisation

Pierre-Alexandre Pantel

## ► To cite this version:

Pierre-Alexandre Pantel. Étude théorique d'un gaz de fermions froids en interaction : aspects dynamiques et effets de polarisation. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2014. Français. NNT : 2014LYO10167 . tel-01094476v2

**HAL Id: tel-01094476**

**<https://theses.hal.science/tel-01094476v2>**

Submitted on 30 Jan 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Thèse

présentée devant

l'Université Claude Bernard Lyon 1

École Doctorale de Physique et d'Astrophysique

pour l'obtention du

DIPLÔME de DOCTORAT  
Spécialité : Physique théorique

(arrêté du 7 août 2006)

par

Pierre-Alexandre Pantel

### **Étude théorique d'un gaz de fermions froids en interaction : aspects dynamiques et effets de polarisation**

Soutenue le 22 septembre 2014  
devant la Commission d'Examen

Jury :

Mme	M.	Ericson	Présidente du jury
M.	X.	Leyronas	Rapporteur
M.	C.	Lobo	Rapporteur
Mme	S.	Chiacchiera	Examinatrice
M.	M.	Urban	Examineur
M.	D.	Davesne	Directeur de thèse

# Étude théorique d'un gaz de fermions froids en interaction : aspects dynamiques et effets de polarisation

Pierre-Alexandre Pantel  
de l'Université Claude Bernard – Lyon 1

Pour l'obtention du diplôme de Doctorat  
Physique Théorique



# Résumé

Les progrès techniques réalisés dans le cadre des expériences sur les gaz de fermions ultrafroids ont engendré une émulation particulièrement importante ces dernières années. En effet, ces dispositifs expérimentaux permettent de produire des systèmes gazeux « à la carte », notamment grâce au phénomène de résonances de Feshbach qui permet de contrôler le signe de la longueur de diffusion  $a$  par application d'un champ magnétique extérieur. Il est alors possible de générer aussi bien une interaction attractive ( $a < 0$ ) que répulsive ( $a > 0$ ). La résonance de Feshbach en elle-même se trouve en  $a \rightarrow \pm\infty$ , cette limite correspondant à un régime de fortes corrélations entre les particules. De plus, dans la région où  $a$  est positive, des états liés moléculaires (bosoniques car formés de deux fermions) peuvent se former. En-dessous d'une certaine température, une phase superfluide peut alors apparaître, et une transition de phase continue entre l'état bosonique et l'état fermionique peut être observée (BEC-BCS *crossover*). En fonction de la position dans le diagramme de phases, les modes collectifs posséderont des caractéristiques (fréquence, amortissement) différentes. En ce sens, ils constituent une sonde de l'état de la matière et une connaissance précise de ces modes est par conséquent très importante.

Le travail présenté dans cette thèse comporte une caractérisation détaillée de plusieurs modes collectifs dans la phase normale du système atomique. L'étude repose principalement sur l'équation de Boltzmann, que nous résolvons de deux façons différentes. La première consiste à utiliser une méthode des moments « améliorée » (c'est-à-dire d'ordre supérieur). La seconde est numérique et a nécessité l'écriture d'un programme de simulation permettant l'incorporation de tous les effets de milieu (potentiel de champ moyen et section efficace). Une attention toute particulière a été apportée à la mise en place des simulations afin de reproduire le plus fidèlement possible les conditions expérimentales.

Les techniques expérimentales permettent également désormais la création de gaz polarisés. Nous présenterons donc dans ce travail une étude de ces gaz utilisant notre programme de simulation (mise en évidence des différents régimes de collision), puis une étude plus théorique ayant pour principal objectif d'établir le diagramme de phase encore méconnu de ces gaz particuliers, et enfin de proposer une méthode de calcul des effets de milieu, les techniques habituelles utilisées pour les gaz non polarisés n'étant plus valables.



# Abstract

Technical progress on ultra-cold Fermi gases experiments induced numerous studies for the last few years. Using these experimental setups, it is effectively possible to generate ultra-cold gases with selected properties, in particular through the Feshbach resonances phenomenon. This allows us to set the sign of the scattering length  $a$  using an external magnetic field. It is then possible to have an attractive interaction ( $a < 0$ ) as well as a repulsive one ( $a > 0$ ). The Feshbach resonance itself is defined for infinite values of  $a$  (positive or negative), which corresponds to a strongly interacting regime. Moreover, when  $a > 0$ , molecular bound states (bosonic because they are made with two fermionic atoms) can appear. Thus, below a critical temperature, a superfluid phase can emerge and a crossover can be observed (from the BEC to BCS superfluid states). Depending on the position on the phase diagram, frequency and damping of collective modes will be different. This is why the collective modes are good probes of the system phase. A precise extensive knowledge of their characteristics is thus very important.

This thesis presents a complete study of some of these collective modes in the normal phase. This work mainly relies on the Boltzmann equation which will be solved in two different ways: firstly, with an improved (higher order) version of the so-called moments method; secondly with a numerical solution that has required to write a numerical code in order to take into account the in-medium effects (mean field potential and in-medium cross section). Particular attention has been paid to numerical simulations in order to reproduce as closely as possible the experimental conditions.

Moreover, experimental procedures now allow to create spin unbalanced gases. We have shown in this work a study of these systems using the numerical resolution of the Boltzmann equation. Moreover, we have developed a theoretical approach in order to build the phase diagram of these polarized gases, which is not fully described yet. Finally, we have suggested a method to determine the in-medium effects, with the aim to solve the problem emerging with the usual method used in the balanced case.





# Remerciements

Je tiens avant tout à remercier Dany Davesne, qui a encadré ce travail de thèse ainsi que mes précédents stages. Depuis 5 ans maintenant, il porte une attention soutenue à mon travail, sa disponibilité sans limite m'a permis de travailler dans des conditions idéales. Notre collaboration quotidienne va me manquer terriblement.

Ce travail a été effectué en étroite collaboration avec Michael Urban. Son imagination débordante au sujet des atomes froids est une source de travail et d'apprentissage exceptionnelle. Je le remercie aussi pour les nombreuses visites que je lui ai rendues et pour les nombreux mails que nous avons échangés.

Je remercie aussi tout particulièrement Madame Ericson de me faire l'honneur de présider mon jury de thèse.

Je tiens également à exprimer ma gratitude envers Messieurs Leyronas et Lobo d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse.

Durant les premières années de cette thèse, j'ai eu le plaisir de travailler avec Silvia Chiacchiera, avec qui les mails ne restent jamais sans réponse! Merci d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je dois aussi remercier les membres de l'équipe de 11h40, qui, tous les jours, à leur grand regret, ont dû me regarder finir mon repas car, apparemment, je prends un peu de temps pour manger... Donc Martin, Jibé, Seb++, Anne-Laure, Louhiggs, Nicolas, Nico le chimiste catalan, Guillaume×2, Chris : merci. Je n'oublie pas non plus Mael, qui lui m'a en plus supporté lors des pauses matinales et de l'après-midi. Un mot pour Robin aussi qui a dû faire face à mes intrusions intempestives dans son bureau lorsque j'avais des soucis de programmation.

Enfin, je tiens à remercier les membres de ma famille et de ma belle famille, qui m'ont encouragé lors de ces longues années d'études. Le dernier mot sera évidemment pour ma femme, Maud, qui ne m'a jamais laissé tomber durant les nombreuses péripéties qu'une thèse fait vivre. Cette thèse, c'est aussi un peu la tienne.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1. Cadre de l'étude</b>	<b>5</b>
1.1. Qu'est-ce que le BEC-BCS <i>crossover</i> ?	5
1.1.1. Condensation de Bose–Einstein	6
1.1.2. Superfluidité pour les fermions	7
1.1.3. Passage continu d'une phase à l'autre : le <i>crossover</i>	9
1.2. Le <i>crossover</i> du point de vue expérimental	11
1.2.1. Théorie de la diffusion et résonances de Feshbach	11
1.2.2. Préparation d'un gaz de lithium-6	13
1.3. Les modes collectifs	15
1.3.1. Contexte théorique	15
1.3.2. Images expérimentales : profils de densité et thermométrie	16
<b>2. Le mode de Kohn</b>	<b>19</b>
2.1. Le mode de Kohn	20
2.2. Le piège optique dipolaire et son approximation	20
2.2.1. Forme gaussienne expérimentale	21
2.2.2. Grandeurs caractéristiques	21
2.2.3. Approximation analytique	23
2.3. Interaction effective	24
2.3.1. Approximation de la matrice $\mathcal{T}$	25
2.3.2. Température critique et section efficace dans le milieu	27
2.3.3. Méthode de Nozières–Schmitt-Rink	28
2.4. Dynamique et équation du mode	30
2.4.1. Équation de Boltzmann et linéarisation	31
2.4.2. Fonction réponse du système	34
2.4.3. Physique de la fonction test	36
2.5. Premier ordre	38
2.6. L'ordre supérieur	40
2.6.1. <i>Ansatz</i> et potentiel de perturbation	40

2.6.2.	Brève comparaison entre les deux méthodes . . . . .	41
2.6.3.	Pulsation du mode de Kohn . . . . .	41
2.6.4.	Amortissement – Couplage entre les modes . . . . .	46
2.7.	Modes collectifs dans l'espace des phases d'ordre 3 . . . . .	51
2.7.1.	Mode dipolaire . . . . .	52
2.7.2.	Mode octupolaire . . . . .	56
2.7.3.	Mode <i>z-bending</i> . . . . .	58
2.8.	Discussion et perspectives . . . . .	59
<b>3.</b>	<b>Résolution de l'équation de Boltzmann</b>	<b>61</b>
3.1.	Méthode des particules tests . . . . .	62
3.1.1.	Principe . . . . .	62
3.1.2.	Propagation des particules . . . . .	63
3.1.3.	Utilisation numérique . . . . .	63
3.2.	Présentation du système étudié . . . . .	65
3.2.1.	Polarisation . . . . .	65
3.2.2.	Taux de collision . . . . .	66
3.3.	Méthodes numériques . . . . .	67
3.3.1.	Initialisation du système . . . . .	67
3.3.2.	Propagation des particules . . . . .	69
3.3.3.	Processus de collision . . . . .	70
3.3.4.	Section efficace dans le milieu . . . . .	71
3.4.	Validation du programme . . . . .	72
3.4.1.	Théorème de Kohn et propagation des particules . . . . .	72
3.4.2.	Conservation de l'énergie et pas de temps . . . . .	75
3.4.3.	Précision du taux de collision . . . . .	76
3.5.	Effets de milieu pour le mode quadrupolaire . . . . .	79
3.5.1.	Excitation du mode et réponse attendue . . . . .	80
3.5.2.	Étude sur une plage de températures . . . . .	82
3.6.	Expansion du gaz et pulsation des modes collectifs . . . . .	84
3.6.1.	Contexte théorique . . . . .	84
3.6.2.	Application aux mesures sur le mode quadrupolaire . . . . .	87
3.6.3.	Conclusions à propos de l'expansion . . . . .	91
3.7.	Un pas vers les gaz polarisés . . . . .	91
3.7.1.	Présentation du mouvement . . . . .	91
3.7.2.	Résultats obtenus . . . . .	93
3.7.3.	Et des nuages non polarisés? . . . . .	94
3.8.	Conclusions . . . . .	96
<b>4.</b>	<b>Effets de milieu dans les gaz polarisés</b>	<b>99</b>
4.1.	La phase FFLO . . . . .	100
4.2.	Pathologie de NSR . . . . .	102
4.2.1.	Calcul de la densité . . . . .	102
4.2.2.	Pathologie . . . . .	103
4.3.	Méthode de Zimmermann–Stolz (ZS) . . . . .	104
4.3.1.	Définition de la self-énergie . . . . .	105
4.3.2.	Calcul de la densité . . . . .	105

---

4.3.3. Théorème de Luttinger . . . . .	107
4.4. Diagramme de phase . . . . .	108
4.5. Nombres d'occupation . . . . .	110
4.5.1. Définition . . . . .	110
4.5.2. Quelques résultats . . . . .	111
4.6. Discussion . . . . .	112
<b>Conclusion</b>	<b>113</b>
<b>A. Outils de calculs</b>	<b>117</b>
A.1. Unités de l'oscillateur harmonique . . . . .	117
A.2. Relations sur la fonction de distribution à l'équilibre . . . . .	118
<b>B. Ajustement de la section efficace</b>	<b>119</b>
B.1. Définition de la fonction d'ajustement . . . . .	119
B.2. Méthode d'ajustement . . . . .	120
B.2.1. Introduction . . . . .	120
B.2.2. Définition du $\chi^2$ . . . . .	121
B.3. Traitement des hautes températures . . . . .	122
B.4. Utilisation dans le programme . . . . .	124
<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>



## Les gaz de fermions ultra-froids : de formidables simulateurs quantiques

L'évolution des techniques dans le domaine de la physique des atomes froids a permis de formidables avancées dans la compréhension de phénomènes physiques rarement accessibles d'un point de vue expérimental. La première observation d'un condensat de Bose–Einstein en 1995 a ouvert un domaine de la physique où tout semble possible. Un des aspects qui va nous intéresser tout au long de cette thèse concerne la grande diversité de systèmes que l'on peut créer en utilisant ces techniques nouvelles afin de les confronter aux méthodes issues de la physique théorique, du « problème à  $N$  corps », bien connues des physiciens nucléaires. D'une manière générale, il est souvent possible de comparer les gaz froids à des systèmes rencontrés dans d'autres domaines de la physique, tels que la physique du solide et même la physique des hautes énergies. La grande diversité des systèmes permet par exemple l'étude des effets d'appariement quantiques entre deux particules (utiles pour la physique nucléaire), que ce soit pour des systèmes dont la population de spin est la même ou non, ou des gaz formés de deux types d'atomes n'ayant pas la même masse. De plus, les mélanges bosons/fermions permettent de tester les propriétés quantiques de ces états mixtes, souvent présents dans la matière nucléaire (états de Hoyle du carbone par exemple) jusqu'au passage continu d'état bosonique à fermionique au sein du noyau (*crossover* BEC-BCS). À plus haute énergie, les libertés de configurations permises par les systèmes ultra-froids peuvent simuler des états d'appariement à trois états quantiques (supraconductivité de couleur), ou même d'atteindre les conditions pour tester la limite universelle de la viscosité de cisaillement  $\eta/s$  d'un système en expansion, que l'on retrouve dans l'étude du plasma de quarks et gluons. Tout cela du point de vue des gaz de fermions ultra-froids car les expériences sur ces systèmes présentent l'avantage d'être relativement simples à mettre en œuvre, notamment sur le plan matériel. Par ailleurs, nous verrons que le contrôle des paramètres du système est beaucoup plus direct que dans les expériences sur la matière nucléaire ou dans les accélérateurs. En effet, ces gaz atomiques ultra-froids sont constitués de fermions ou de bosons interagissant fortement, mais contrairement aux systèmes nucléaires, ils offrent l'énorme avantage d'être contrôlables, ce qui nous permet de choisir expérimentalement la nature et la force de l'interaction agissant entre les

particules constituant le système. On a alors la possibilité de configurer expérimentalement le gaz grâce au phénomène de résonances de Feshbach. Cela permet par exemple de passer d'un gaz de fermions à un gaz de bosons par une simple action sur l'intensité d'une grandeur extérieure : un champ magnétique que l'on rajoute aux instruments de piègeage. En effet, celui-ci est relié au signe et à la force de l'interaction (matérialisée par la longueur de diffusion de l'onde  $s$ , que l'on note généralement  $a$ ).

Tournons-nous désormais vers les concepts plus théoriques que ces expériences nécessitent. Depuis toujours en physique, une bonne méthode pour comprendre un système est de lui appliquer une perturbation extérieure et d'étudier la manière dont il répond, c'est-à-dire comment il évolue dans le temps. Cette façon d'expérimenter le monde est formalisée par ce que l'on appelle la théorie de la réponse linéaire. Chaque système ayant sa propre manière de réagir à la perturbation extérieure, cela permet de le caractériser de manière univoque. La théorie de la réponse linéaire nous permettra ainsi d'étudier les différents mouvements collectifs des nuages d'atomes piégés, objets d'une partie importante de la thèse. Cependant, dans un premier temps nous reviendrons en détails sur la physique des systèmes ultra-froids, notamment les résonances de Feshbach et la transition continue entre condensation de Bose–Einstein<sup>1</sup> et phase superfluide de fermions, décrits par la théorie BCS établie en 1957 par Bardeen, Cooper et Schrieffer [1]. Nous présenterons les protocoles expérimentaux utilisés afin d'adapter les modèles théoriques dont nous nous servons aux conditions réelles, dans le but de traduire le plus fidèlement possible les résultats obtenus.

Les deux chapitres suivants seront consacrés à l'étude des gaz dans la phase « normale », c'est-à-dire au-dessus de la température critique à laquelle apparaît la phase superfluide. De nombreuses expériences ont déjà été effectuées pour des gaz dans cette phase [2–4]. Les modes collectifs de cet état du système présentent un grand intérêt tant du point de vue expérimental que théorique car il a été montré que leur amortissement augmente sensiblement lorsque la transition à la phase superfluide se produit [3], ce qui constitue une preuve irréfutable du caractère superfluide du système. Ainsi, il est important de caractériser du mieux que l'on peut ces modes collectifs, dans la phase normale ou superfluide, afin d'améliorer notre compréhension de cet état de la matière découvert dans l'hélium liquide au début du 20<sup>ème</sup> siècle. Cette deuxième partie de la thèse portera donc sur les modes collectifs dans les gaz fermioniques non polarisés et non superfluides, au plus près de la résonance de Feshbach. Nous nous concentrerons sur le mode collectif le plus simple, mais très important du point de vue expérimental : le mode de Kohn. Nous estimerons les phénomènes d'anharmonicité liés aux conditions expérimentales du confinement, en utilisant une résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode des moments, développée entre autres par T. Lepers *et al.* [5–9]. Nous pourrons ainsi quantifier les effets du potentiel de confinement expérimental sur la mesure des caractéristiques des mouvements collectifs.

En troisième partie, une autre méthode de résolution de l'équation de Boltzmann nous permettra d'étudier de nouveaux modes collectifs, en tenant compte de la modification de la dynamique des particules induite par les modifications de leurs interactions dans le milieu (potentiel de champ moyen et section efficace de collision calculée dans

---

<sup>1</sup>On l'abrégera par la suite *BEC*, pour *Bose–Einstein Condensate*.



le milieu). Ces interactions seront calculées par le biais de l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  (qui est une resommation de diagrammes en échelle) et de la théorie Nozières–Schmitt-Rink (NSR). C'est un autre pas vers la cohérence entre modèles théoriques et conditions expérimentales. Enfin, guidés par le développement de nouvelles techniques permettant le confinement de gaz polarisés (présentant une population d'atomes d'un spin plus importante que ceux de spins opposés), nous avons adapté notre programme de simulation afin de pouvoir résoudre l'équation de Boltzmann pour ces systèmes, mais sans effets de milieu cette fois.

Enfin, une dernière partie est entièrement consacrée aux gaz polarisés. En effet, P. Fulde, R. A. Ferrel [10] et A. Larkin, Y. N. Ovchinnikov [11] ont montré que la phase superfluide BCS « classique » peut laisser place à une autre phase du même type lorsque le gaz est polarisé, que l'on appelle la phase FFLO ou LOFF, des noms de ces auteurs. Cependant, cette phase n'a pas encore été mise en évidence directe expérimentalement, seuls des diagrammes de phase de la limite de transition superfluide dans le cas de ces gaz ont été élaborés sans pour autant préciser exactement l'état superfluide dont il est question. Par ailleurs, la théorie NSR présente une inconsistance vis-à-vis de ces systèmes. Il a donc fallu trouver une alternative à cette méthode, afin de pouvoir déterminer le diagramme de phase de ces gaz et effectuer des calculs au-delà du champ moyen, dans le but de confirmer les prémices de résultats donnés par les expériences ainsi que d'améliorer la compréhension de ce phénomène, puis par extension de fournir des informations pour la mise en œuvre d'un protocole expérimental.



## Sommaire

---

<b>1.1. Qu'est-ce que le BEC-BCS <i>crossover</i> ?</b> . . . . .	<b>5</b>
1.1.1. Condensation de Bose–Einstein . . . . .	6
1.1.2. Superfluidité pour les fermions . . . . .	7
1.1.3. Passage continu d'une phase à l'autre : le <i>crossover</i> . . . . .	9
<b>1.2. Le <i>crossover</i> du point de vue expérimental</b> . . . . .	<b>11</b>
1.2.1. Théorie de la diffusion et résonances de Feshbach . . . . .	11
1.2.2. Préparation d'un gaz de lithium-6 . . . . .	13
<b>1.3. Les modes collectifs</b> . . . . .	<b>15</b>
1.3.1. Contexte théorique . . . . .	15
1.3.2. Images expérimentales : profils de densité et thermométrie . .	16

---

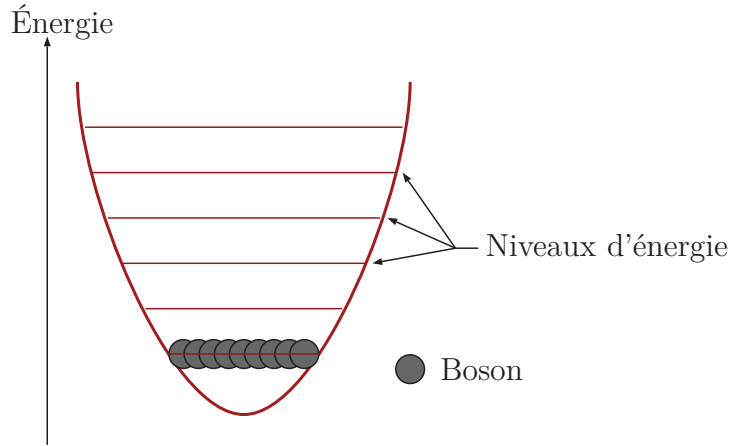
Dans un premier temps, nous allons nous atteler à décrire en détails les systèmes qui sont étudiés dans le cadre de ces expériences prometteuses et qui nous intéresseront tout au long de ce travail de thèse : les gaz de fermions fortement corrélés. Nous verrons notamment que la notion de résonance de Feshbach est primordiale dans l'exploration expérimentale de la transition continue entre les condensats de Bose–Einstein et la phase superfluide fermionique. Nous ferons également un court résumé des techniques utilisées lors de ces expériences (pièges optiques et magnétiques). Cela nous permettra ainsi d'avoir une vue d'ensemble sur les protocoles utilisés, afin de mieux pouvoir les confronter à nos études théoriques. Enfin nous expliquerons en quoi les mouvements collectifs de ces gaz sont si importants tant du point de vue des expériences que de la théorie.

## 1.1. Qu'est-ce que le BEC-BCS *crossover* ?

Le phénomène de BEC-BCS *crossover*<sup>1</sup> est un phénomène commun à plusieurs domaines de la physique. Il a été prédit théoriquement par D. M. Eagles [12] pour des supraconducteurs puis par A. J. Leggett [13] dans les gaz de fermions dilués ; cependant il n'a été observé expérimentalement pour la première fois grâce à un gaz d'atomes

---

<sup>1</sup>Le terme *crossover* désigne une transition de phases continue. Dans notre cas, cette transition se déroule entre un BEC et un état BCS.



**Figure 1.1 :** Illustration de la condensation de Bose–Einstein. Pour une température faible, tous les bosons sont dans le même état d'énergie.

froids qu'en 2005 [14], notamment par la mise en évidence nette de formation de vortex dans le gaz piégé, signatures d'un comportement superfluide (dans cette phase, le flux doit être irrotationnel, ce qui entraîne que le champ de vitesse doit présenter des singularités). Il faudra attendre P. Nozières et S. Schmitt-Rink [15] (1985) afin d'avoir une description complète de cette transition continue entre les théories BCS et BEC à température finie. Voyons de ce pas en détails ces deux acteurs du phénomène que l'on considère.

### 1.1.1. Condensation de Bose–Einstein

La condensation de Bose–Einstein trouve son origine dans le caractère quantique des particules mises en jeu. En effet, elle est le résultat d'un état quantique macroscopique formé par des particules dont le spin est entier. Ces particules devant présenter une fonction d'onde symétrique, celles-ci peuvent alors se trouver sur le même niveau quantique d'énergie, comme cela est illustré par la figure 1.1. La fonction d'occupation des états quantiques d'impulsion  $\mathbf{k}$ , à l'équilibre thermodynamique, est donnée par la distribution de Bose–Einstein :

$$b_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{k}}^{\sigma}) = \frac{1}{e^{\beta\xi_{\mathbf{k}}^{\sigma}} - 1}, \quad (1.1)$$

pour un état de spin  $\sigma$  donné, où  $\xi_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mu_{\sigma}$  est l'énergie d'une particule avec  $\varepsilon_{\mathbf{k}} = k^2/(2m)$  son énergie libre et  $\mu_{\sigma}$  le potentiel chimique. Par ailleurs,  $\beta = (k_{\text{B}}T)^{-1}$  est la température inverse habituellement définie ( $k_{\text{B}}$  la constante de Boltzmann).

Le phénomène de condensation a été prédit parallèlement par A. Einstein et S. N. Bose dans les années 1920 [16]. À l'époque, cette découverte a constitué une véritable révolution dans le monde de la physique de l'infiniment petit : c'est la première fois que l'on annonçait la possibilité d'observer un état quantique de taille macroscopique. Cependant, les techniques expérimentales ne permettaient pas d'atteindre la température

minimale pour laquelle cet état apparaîtrait. Cette température<sup>2</sup> était cependant connue : elle est définie par

$$T_B = \frac{1}{k_B} \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left[ \frac{\rho_{\text{eq}}}{2s+1} \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2})} \right]^{\frac{2}{3}}, \quad (1.2)$$

où  $\rho_{\text{eq}}$  est la densité de particules,  $\Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.612$  sont respectivement les fonctions  $\Gamma$  d'Euler et  $\zeta$  de Riemann,  $\hbar$  la constante de Planck réduite et  $m$  la masse d'une particule du système.

Il a été très difficile d'atteindre ces températures expérimentalement, qui sont généralement de l'ordre du nanokelvin. Il a ainsi fallu attendre les travaux de C. Cohen-Tannoudji, S. Chu et W. D. Phillips sur le refroidissement d'atomes par technique laser<sup>3</sup>, puis les expériences de E. A. Cornell, C. E. Wieman et enfin W. Ketterle de 1995 [17] afin d'observer pour la première fois un BEC dans un gaz constitué d'atomes de rubidium, piégé par des méthodes optiques<sup>4</sup>.

Entretemps, cette théorie a permis d'expliquer les propriétés étonnantes que présente l'hélium-4 à très basse température (notamment vis-à-vis des travaux de P. Kapitza sur l'hélium liquide aux alentours des années 1935). Brièvement, il a été observé qu'un gaz d'atomes d'hélium-4 ne se solidifie pas lorsqu'on diminue continuellement la température (comme c'est le cas pour les liquides « classiques »), mais présente alors des propriétés hydrodynamiques caractéristiques des « superfluides ». La théorie de Bose et Einstein a donc permis de comprendre en détails ce phénomène : cette « superfluidité » tient son origine dans le macro-état quantique qu'est le condensat de Bose–Einstein.

Plus tard, avec la possibilité de contrôler l'interaction entre les particules, il a été possible de former des condensats de Bose–Einstein moléculaires<sup>5</sup> : des condensats de dimères formés par deux fermions dans un état lié. Cela nous ouvre ainsi la voie de l'analogie des BEC appliqué aux fermions.

### 1.1.2. Superfluidité pour les fermions

L'interaction entre des fermions est, par certains aspects, plus contrainte que celle entre les bosons. Cela est dû au fait que les fermions obéissent au principe de Pauli. Nous verrons par la suite (paragraphe 1.2.1) que ces particules à spin demi-entier peuvent créer des états fortement liés constitués de deux entités (ceux que j'ai nommés des dimères dans le paragraphe précédent), ou ressentir une interaction d'appariement lorsque la température du système est assez basse.

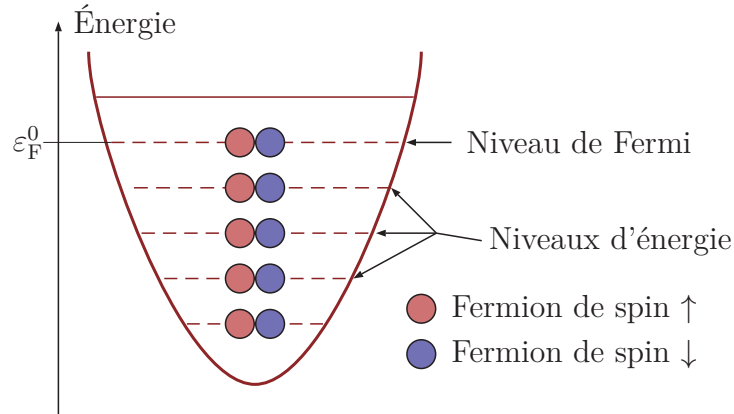
Le comportement superfluide des fermions a été décrit pour la première fois d'un point de vue théorique par J. Bardeen, L. N. Cooper et J. R. Schrieffer [1] dans leur

<sup>2</sup>Souvent appelée « température de Bose ».

<sup>3</sup>Travaux qui leur ont valu le prix Nobel de Physique 1997.

<sup>4</sup>Travaux qui ont conduit à l'attribution du prix Nobel 2001.

<sup>5</sup>Que l'on peut abrégé en mBEC.



**Figure 1.2 :** Illustration de la distribution des fermions à température nulle. Le principe de Pauli empêche d'avoir deux fermions de même spin sur le même niveau d'énergie.

théorie de la supraconductivité<sup>6</sup>. La notion fondamentale introduite par cette description réside dans l'apparition de paires de fermions délocalisées, appelées « paires de Cooper ». Historiquement, cette théorie BCS a été développée dans le but de décrire l'apparition du caractère supraconducteur d'un métal. L'idée était donc de traduire ce phénomène par l'apparition d'un état lié mais délocalisé, se formant entre deux électrons libres du métal dont les spins sont opposés. L'interaction attractive entre les électrons est alors une conséquence de l'échange de « phonons » (résidus issus de la perturbation du réseau cristallin ionique, provoquée par le déplacement de ces électrons libres). Dans le cas qui nous intéresse, ce sont les atomes eux-mêmes qui jouent le rôle des électrons pour former la paire de Cooper.

Le gaz de fermions est décrit par la statistique de Fermi–Dirac, dont la fonction de distribution des états d'énergie  $\xi_{\mathbf{k}}^\sigma$  des particules de même spin (noté  $\sigma \in \{\downarrow, \uparrow\}$ ) est donnée par, à l'équilibre thermodynamique,

$$f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{k}}^\sigma) = \frac{1}{e^{\beta \xi_{\mathbf{k}}^\sigma} + 1}. \quad (1.3)$$

Dans la limite de température nulle, tous les états d'énergie inférieure au niveau de Fermi sont occupés (voir la figure 1.2), contrairement au cas des bosons où tous se trouvent dans l'état fondamental. En effet, à cause du principe d'exclusion de Pauli auquel doivent obéir les fermions, ceux-ci ne peuvent pas se trouver dans le même état quantique. L'état superfluide est donc *a priori* compromis pour ces particules. Il n'en est rien du fait de l'apparition de paires de Cooper. Ce phénomène est en effet l'équivalent de la condensation de Bose–Einstein pour ces particules. Il n'est pas constitué d'un appariement local au sein d'un seul et même état quantique, mais d'un appariement délocalisé, que l'on appelle une paire de Cooper.

Pour une température nulle, la distribution de Fermi tend vers une distribution de Heaviside  $\Theta$  qui permet d'obtenir des échelles en énergie ( $\varepsilon_F^\sigma$ ), moment ( $k_F^\sigma$ ) ou température ( $T_F$ ) constituants des références propres à chaque système. Dans le gaz

<sup>6</sup>Prix Nobel de physique 1972.

uniforme, on définit :

$$\varepsilon_{\text{F}}^{\sigma} = \mu_{\sigma}(T = 0) = \frac{\hbar^2}{2m} \left( 6\pi^2 \rho_{\text{eq}}^{\sigma} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (1.4)$$

$$k_{\text{F}}^{\sigma} = \frac{\sqrt{2m\varepsilon_{\text{F}}^{\sigma}}}{\hbar}, \quad (1.5)$$

où  $\rho_{\text{eq}}^{\sigma}$  est la densité des atomes de spin  $\sigma$  à l'équilibre. Lorsque la température augmente, le potentiel chimique  $\mu_{\sigma}$  prend le relais de l'énergie de Fermi pour représenter le niveau de plus haute énergie occupé par les fermions du système. On détermine la valeur du potentiel chimique comme étant la solution de l'équation :

$$\rho_{\text{eq}}^{\sigma} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}}^{\sigma}). \quad (1.6)$$

D'une manière générale pour les gaz présentant une différence de population entre les particules de spin  $\uparrow$  et celle de spin  $\downarrow$ , nous définirons le potentiel chimique moyen

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_{\uparrow} + \mu_{\downarrow}}{2}, \quad (1.7)$$

ainsi que l'écart entre les deux<sup>7</sup>

$$\delta\mu = \mu_{\uparrow} - \mu_{\downarrow}. \quad (1.8)$$

Par convention lorsque nous étudierons les gaz polarisés, nous considèrerons qu'il y a toujours plus (ou autant) de particules  $\uparrow$  que de  $\downarrow$ , ce qui signifie que  $\rho_{\text{eq}}^{\uparrow} \geq \rho_{\text{eq}}^{\downarrow}$ . Implicitement, lorsque l'on traitera des gaz non polarisés, il arrivera de noter  $\bar{\mu} = \mu$ , et évidemment  $\delta\mu = 0$ . Pour les grandeurs de Fermi, on s'autorisera aussi les raccourcis suivants :

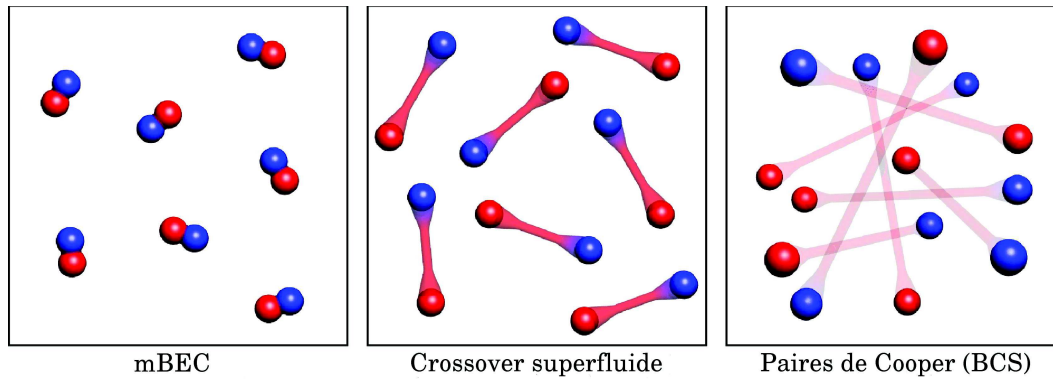
$$k_{\text{F}} = k_{\text{F}}^{\uparrow} = k_{\text{F}}^{\downarrow}, \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_{\text{F}}^0 = \varepsilon_{\text{F}}^{\uparrow} = \varepsilon_{\text{F}}^{\downarrow}. \quad (1.10)$$

### 1.1.3. Passage continu d'une phase à l'autre : le *crossover*

La transition de phase continue (*crossover*) entre les états décrits dans les paragraphes 1.1.1 et 1.1.2 n'est, au premier abord, pas du tout intuitive : les fermions et les bosons constituent deux ensembles, en général, bien distincts en physique. Pourtant le développement des techniques expérimentales en physique atomique a permis de mettre en évidence un phénomène particulièrement intéressant et prometteur : la transition continue entre états fermionique et bosonique, et à plus basse température entre un BEC et une superfluidité BCS.

<sup>7</sup>Quelquefois, l'écart  $\delta\mu$  est appelé « champ magnétique » par analogie avec la physique du solide. De la même façon, la différence de population entre les particules de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  est appelé « aimantation ».



**Figure 1.3 :** Schéma des différents régimes d'interaction lors d'une transition mBEC-BCS. À gauche, les dimères pouvant former le BEC ( $a > 0$ ) et à droite on voit les paires de Cooper potentielles ( $a < 0$ ). Le couplage entre les particules dans la zone du milieu est constitué d'un état lié hybride, dû au régime de forte interaction ( $(k_F|a|)^{-1} \gtrsim 1$ ). Figure issue de [18].

Afin de simplifier les explications, nous considérerons ici un gaz de fermions contenant le même nombre de particules de chaque spin. Par ailleurs, ce phénomène n'est pas réalisable expérimentalement avec tous les systèmes atomiques : il faut que la longueur de diffusion des fermions  $a$  soit directement contrôlable grâce à un champ magnétique extérieur par le biais de résonances de Feshbach<sup>8</sup>, phénomène que l'on décrira en détails dans la suite de ce chapitre, au paragraphe 1.2.1. Cette grandeur est issue de la théorie de la diffusion dans le cadre de la mécanique quantique. Lorsque  $a$  est négatif, l'interaction entre les fermions est attractive ; des paires de Cooper peuvent alors se former si la température devient inférieure à la température critique  $T_C^{\text{SF}}$ . Lorsque  $a$  est positif, l'interaction entre les particules devient répulsive, mais des états liés moléculaires à deux atomes se forment en dessous de la température d'appariement moléculaire  $T^*$  ; le condensat de Bose–Einstein est alors possible si l'on atteint  $T \leq T_B$ . Tant sur le plan expérimental que théorique, la valeur du paramètre adimensionné  $(k_F a)^{-1}$  constitue alors un bon moyen de savoir avec certitude de quelle nature est le gaz. Les limites des deux théories (mBEC du côté  $(k_F a)^{-1} > 0$  et BCS du côté  $(k_F a)^{-1} < 0$ ) se trouvent dans ce qui est appelé la zone de forte interaction, caractérisée par  $(k_F|a|)^{-1} \lesssim 1$  (c'est-à-dire la zone dans laquelle  $a$  prend des valeurs importantes). Dans cette plage de valeurs, les particules ne sont ni des dimères ni des paires de Cooper, il est donc délicat de décrire ce régime avec l'une ou l'autre des théories, voir la figure 1.3.

Ce régime de forte interaction est donc un sujet particulièrement intéressant pour les études théoriques. Par ailleurs, la valeur particulière de la longueur de diffusion donnant  $(k_F a)^{-1} = 0$  constitue ce que l'on appelle la limite unitaire de la résonance. Le système présente alors la particularité d'être dilué et fortement corrélé, car la longueur de diffusion est infinie, elle est donc plus grande que la distance entre les particules. Les seules échelles décrivant le système sont alors la température et le moment de Fermi, la longueur de diffusion n'a plus de signification physique.

<sup>8</sup>Cela est possible par exemple avec beaucoup d'atomes ; les plus couramment rencontrés sont le lithium-6 et le potassium-40.



## 1.2. Le *crossover* du point de vue expérimental

Les principales techniques de refroidissement des atomes sont dues à la technologie des lasers. Il existe deux étapes principales : le ralentissement, puis le refroidissement des particules [19]. Ces étapes s'effectuent la plupart du temps grâce à un piège magnéto-optique (MOT<sup>9</sup>) ou un piège optique dipolaire. Le MOT, contrairement au piège optique, utilise à la fois les techniques optiques (lasers) et magnétiques (bobines) pendant le confinement final des atomes.

### 1.2.1. Théorie de la diffusion et résonances de Feshbach

Nous l'avons vu, la force de l'interaction entre les atomes est directement caractérisée par la valeur de la longueur de diffusion en onde  $s$ , notée  $a$ . Pour des systèmes de basse énergie, cette description est suffisante : les contributions en onde  $p$  et  $d$  ne seront pas significatives. En effet, ce phénomène peut s'expliquer très simplement par le fait que l'énergie cinétique disponible pendant la collision d'atomes de <sup>6</sup>Li ultra-froids ne permet pas d'atteindre des régimes de diffusion plus élevés.

En considérant deux particules (atomes) sans structure interne discernable, il existe un phénomène de diffusion élastique particulier, qui présente une modification de l'interaction entre deux entités en fonction de leur énergie d'entrée  $E_i$ . Si la distance  $r$  entre les deux particules est grande, un potentiel moléculaire de fond  $V_{bg}(r)$  décrit l'interaction entre deux atomes. Lorsque les atomes sont proches, un autre potentiel  $V_f(r)$  permet la description d'un état lié moléculaire. La différence d'énergie entre le seuil de  $V_{bg}(r)$  (donc  $E_i$ ) et de l'état lié, notée  $E^*$  (voir figure 1.4) peut alors être ajustée grâce à un champ magnétique extérieur. C'est cela qui constitue la résonance de Feshbach. La longueur de diffusion  $a$  est alors reliée au champ magnétique  $B$  par la relation [20, 21] :

$$a = a_{bg} \left( 1 - \frac{\Delta B}{B - B_0} \right), \quad (1.11)$$

où  $a_{bg}$  est la longueur de diffusion des atomes piégés dans le potentiel  $V_{bg}(r)$ ,  $\Delta B$  la largeur de la résonance et  $B_0$  correspond au champ magnétique à l'unitarité (divergence de  $a$ ).

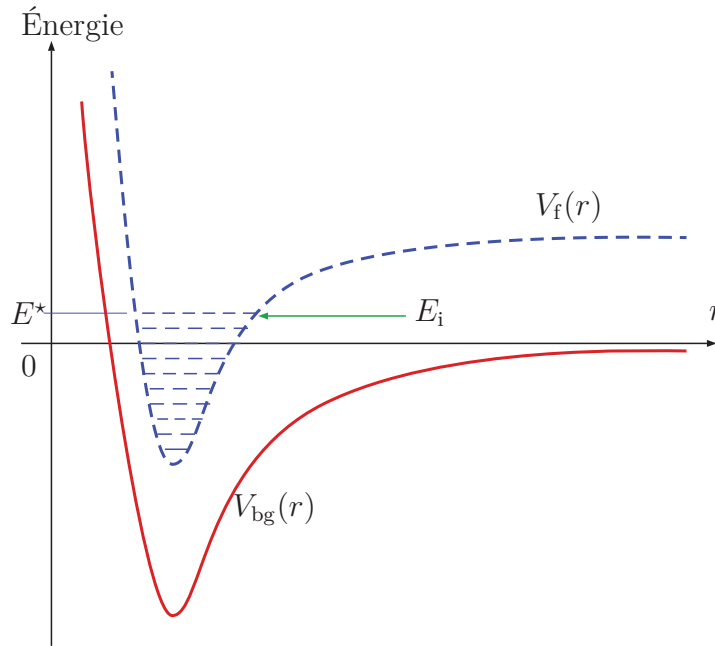
Les systèmes que nous allons étudier sont constitués uniquement d'atomes de <sup>6</sup>Li. Les caractéristiques pour cet élément sont :

$$a_{bg} = -1405 a_0, \quad B_0 = 834.15 \text{ G}, \quad \Delta B = 300 \text{ G}, \quad (1.12)$$

où  $a_0 = 0.0529177 \text{ nm}$  est le rayon de Bohr. Comme les théories d'origine sont limitées aux régions de faible interaction, il a fallu développer de nouvelles approches pour obtenir le diagramme de phase complet de ces systèmes. Les expériences sur les gaz d'atomes froids ont alors permis de vérifier ces approches, principalement à travers

---

<sup>9</sup>Magneto-Optical Trap.

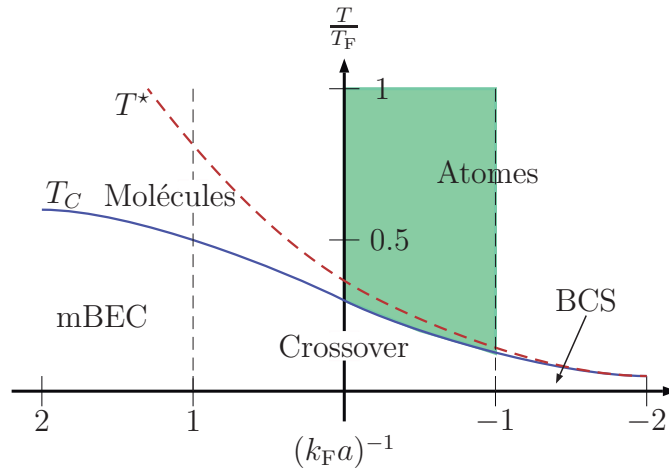


**Figure 1.4 :** Schématisation des potentiels d'interaction entre les atomes dans le cadre d'une résonance de Feshbach. Le potentiel  $V_{bg}(r)$  correspond aux états libres (avant interaction) et le potentiel  $V_f(r)$  présente un état lié moléculaire, d'énergie de liaison  $E^*$ . La différence entre l'énergie incidente  $E_i$  et cette énergie de liaison peut être modifiée par application d'un champ magnétique extérieur. Lorsque celle-ci est très faible, on approche de la résonance de Feshbach ( $a \rightarrow \pm\infty$ ).

l'étude des caractéristiques des modes collectifs et de la mesure des grandeurs physiques du système (telles que la densité du gaz) qui restent continues tout au long de la transition entre les régimes d'interaction, par définition d'un *crossover*.

Le diagramme 1.5 résume les avancées théoriques et expérimentales qui ont été réalisées sur ce sujet. La courbe en trait plein (bleu) représente la température de transition vers une phase superfluide, donc elle représente les valeurs de  $T_B$  pour  $a > 0$  et de  $T_C^{SF}$  pour  $a < 0$ . Des états liés apparaissent lorsque la température du système est inférieure à  $T^*$  (courbe tirets rouges), ce qui conduit à la condensation de Bose-Einstein de dimères du côté gauche. La zone de forte interaction, où ni la théorie BCS ni BEC ne sont valables, est représentée entre les droites en tirets.

Nos études porteront sur la partie colorée de ce diagramme (vert), c'est-à-dire pour des systèmes de fermions fortement corrélés dans une phase normale. Nous nous concentrerons sur le comportement de certains modes collectifs pour des gaz non polarisés. Par la suite nous étendrons l'étude aux cas des gaz présentant une différence de population de spin, notamment pour caractériser la limite de transition à la phase superfluide, et voir l'apparition d'une nouvelle physique pour ces systèmes particuliers. Voyons avant tout comment sont créés expérimentalement les systèmes que nous voulons étudier.



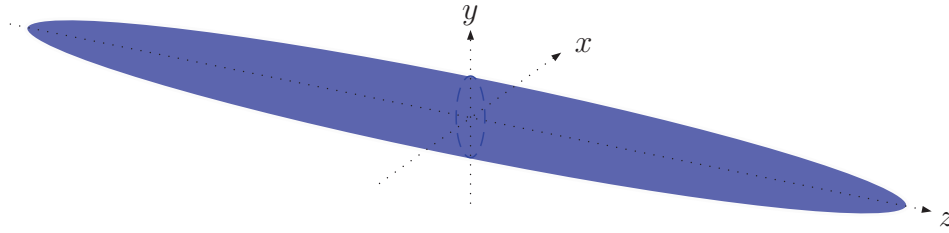
**Figure 1.5 :** Diagramme de phase, représentant la température  $T/T_F$  en fonction de l'interaction  $(k_F a)^{-1}$  pour des gaz non polarisés. La température  $T_C$  est la température de transition à la phase superfluide. La température  $T^*$  la température pour laquelle les atomes de lithium forment des états liés (dimères). La zone colorée (vert) représente les valeurs des paramètres que nous allons considérer tout au long de cette étude.

### 1.2.2. Préparation d'un gaz de lithium-6

Les étapes techniques pour obtenir un gaz de lithium-6 ultra-froid dans l'état que l'on souhaite, avec une interaction que l'on a choisie et présentant ou non une polarisation totale sont nombreuses. Nous nous proposons d'en faire un bref résumé dans ce paragraphe. Nous verrons au cours de ces travaux de thèse que la connaissance de ces méthodes expérimentales vont nous être indispensables pour en analyser leurs résultats. Les détails expérimentaux de ce paragraphe sont extraits du travail de thèse de J. Cubizolles [22].

#### Production du gaz de lithium

Le gaz de lithium est obtenu en chauffant au-dessus de la température de vaporisation du lithium liquide. Le gaz ainsi obtenu est stocké dans une chambre à ultravide (la pression régnant à l'intérieur est de l'ordre de  $10^{-9}$  Pa). La vitesse moyenne des atomes est alors de l'ordre de  $10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Dans un premier temps, cette vitesse est réduite grâce à un ralentisseur Zeeman jusqu'à atteindre une vitesse moyenne de particules permettant la capture du gaz dans un premier piège magnéto-optique (de l'ordre de quelques  $\text{cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ). Un refroidissement est alors amorcé, simplement en réduisant la puissance des lasers confinant, permettant ainsi aux atomes du gaz les plus énergétiques de s'évaporer. À ce stade, les deux isotopes du lithium (6 et 7) sont présents. Par la suite, des techniques avancées d'interaction magnétique permettent de transférer ce gaz dans le piège final (on parle littéralement d'un « ascenseur magnétique ») où, en fonction du champ magnétique appliqué, les atomes de lithium-7 et/ou de lithium-6 sont conservés et refroidis grâce à une évaporation finale, due en partie à ce transfert. Nous obtenons ainsi un gaz constitué d'atomes fermioniques ( ${}^6\text{Li}$ ) ou bosonique ( ${}^7\text{Li}$ ), ou d'un mélange des deux, suivant ce que l'on souhaite étudier.



**Figure 1.6 :** Illustration de la forme de cigare du gaz pour laquelle nous allons étudier les modes collectifs.

Les systèmes expérimentaux que nous considérerons pour l'étude des modes collectifs concernent tous des gaz de lithium-6 confinés par un piège optique dipolaire dont les pulsations<sup>10</sup> dans les trois directions de l'espace ( $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$ ) donnent à ce gaz une forme de cigare allongé suivant la direction axiale  $z$ , voir figure 1.6. cela entraîne sur les pulsations le caractérisant la condition :

$$\omega_x, \omega_y \gg \omega_z, \quad (1.13)$$

la contrainte optique (ou magnétique) est donc plus importante dans les directions radiales, ce qui a pour effet de compresser le gaz.

## État de spin

Un élément qui n'a pas été décrit précédemment est que les résonances de Feshbach de l'atome de lithium-6 se trouvent entre des états du niveau hyperfin fondamental. Cependant, le refroidissement des fermions se déroule lorsque ceux-ci sont dans leur état excité  $|F, M_F\rangle = |\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle$ . Afin d'obtenir des états de spin opposé, on prépare le gaz dans deux niveaux quantiques différents, ce qui aura pour effet de simuler l'apparition de deux états de spin distincts.

Les systèmes dont la polarisation totale est non nulle (différence de population entre ces deux états) sont créés en utilisant l'effet Stern et Gerlach : on applique un gradient de champ magnétique pendant un très court instant après cette étape, ce qui a pour effet de dissiper des atomes de même état quantique en dehors du piège. Nous aurons alors moins d'atomes dans l'état dont l'énergie augmente avec le gradient.

## Champ magnétique et résonance

La dernière étape est alors d'utiliser des bobines afin de produire un champ magnétique qui va pouvoir agir directement sur la valeur de l'interaction  $a$ . Le *crossover* entre l'état bosonique BEC et l'état fermionique BCS peut alors s'observer en ne modifiant que la valeur de ce champ magnétique, comme le montre l'équation (1.11). En jouant à la fois sur la température et l'interaction, il est alors aisé de comprendre l'éten-

<sup>10</sup>Obtenues en assimilant le potentiel de piège à un potentiel harmonique.

due des possibilités offertes par ces protocoles expérimentaux, notamment vis-à-vis de l'élaboration de diagrammes de phase pour des systèmes de plus en plus complexes.

### 1.3. Les modes collectifs

Nous savons maintenant comment est produit un gaz d'atomes ultra-froids et il est facile de comprendre l'enthousiasme scientifique qu'ils provoquent. Nous savons aussi que ces gaz ne sont pas dans la même phase de la matière suivant les valeurs de la température ou de l'interaction et que ces paramètres peuvent être ajustés presque directement du point de vue pratique. Lorsque la température devient faible, un régime superfluide apparaît, pouvant être décrit assez aisément par les théories d'hydrodynamique, dans la limite de température nulle. Il est cependant encore compliqué de rendre compte théoriquement de tous les phénomènes physiques intervenant dans le comportement des systèmes expérimentaux, notamment vis-à-vis des effets de milieu dans ces systèmes fortement corrélés.

#### 1.3.1. Contexte théorique

Les modes collectifs jouent un rôle déterminant dans la compréhension du diagramme de phase 1.5. En pratique, ils constituent une sonde de la phase de la matière, dans la mesure où certains présentent des modifications brutales de pulsation et d'amortissement lorsqu'un changement de régime se produit. On utilise cette méthode indirecte pour déterminer alors les températures de transition. D'un point de vue physique, les différents régimes sont caractérisés par la compressibilité du gaz, entre autres. Comme le mode de respiration résulte d'une compression du gaz suivant la direction radiale, on peut donc directement relier sa pulsation et son amortissement à cette grandeur physique. Il constitue donc un très bon capteur de la phase du gaz. Des expériences ont permis non seulement de vérifier ce comportement à très basse température avec une grande précision [23–25], mais nous fournissent aussi des repères pour élaborer une description théorique du système sur la totalité du diagramme de phase.

Dans la phase normale, celle qui nous intéresse ici, près d'une résonance de Feshbach, le gaz est dans un régime de collisions. On peut alors le décrire par un calcul d'hydrodynamique. Lorsque la température augmente, ce régime disparaît et laisse place à un gaz présentant un comportement sans collisions, du fait de la dilatation. Au cours de cette transition, les modes collectifs du gaz sont fortement amortis et leur fréquence dépend de la température. Le système est donc dans un état de transition entre ces deux régimes, et une des méthodes les plus efficaces pour l'étudier est la résolution de l'équation de Boltzmann, dans laquelle nous considérerons les effets de milieu, pour nous rapprocher le plus possible des conditions réelles. La finalité de l'étude est de reproduire les résultats expérimentaux obtenus en résolvant de différentes manières cette équation de transport dans le but d'obtenir les pulsations et les amortissements des mouvements collectifs qui semblent importants dans l'étude des gaz de fermions ultra-froids non polarisés.

Il est donc évident qu'une connaissance précise du comportement des mouvements collectifs, sur l'ensemble de la phase normale de forte interaction, est nécessaire. Le travail effectué au cours de cette thèse concernant ce sujet comporte deux parties. La première tend à étudier un mode collectif dont le comportement constitue une méthode expérimentale à part entière : le mode de Kohn. Celui-ci est caractérisé par l'oscillation du centre de masse du gaz dans une direction définie. Sa pulsation sert de référence pour les mesures sur les autres modes collectifs. Comme la précision est primordiale pour ces études, il est donc nécessaire de connaître exactement son comportement vis-à-vis des conditions expérimentales de confinement. Deuxièmement, en utilisant une autre méthode de résolution de l'équation de Boltzmann, nous aurons ensuite pour objectif d'extraire d'un code de simulation les valeurs de la pulsation et de l'amortissement du mode quadrupolaire en tenant compte des effets de milieu.

### 1.3.2. Images expérimentales : profils de densité et thermométrie

Une autre notion importante à connaître à propos des techniques expérimentales concerne la méthode d'imagerie utilisée pour reconstituer le profil de densité du gaz. Malheureusement, il n'est pas possible de piéger un gaz et en même temps d'obtenir son profil de densité ou sa température : les systèmes sont généralement trop petits pour obtenir une bonne résolution sur l'imagerie. La détermination de ces grandeurs doit en effet débiter par un « zoom » sur le système : une coupure totale du confinement. Dans ce cas, le gaz de fermions rentre alors dans une phase d'expansion, dont les caractéristiques dépendent du régime dans lequel il se trouvait au sein du piège. Il est ensuite possible d'obtenir le profil de densité dilaté de ce gaz, par imagerie d'absorption. On retrouvera alors la distribution d'origine grâce aux loi d'expansion balistique si nous sommes dans le régime sans collision, ou hydrodynamique lorsque le nombre de collisions est important. Dans le même temps, le profil de densité permet d'obtenir la température du piège juste avant le début du processus d'expansion. Cependant, la reconstruction du gaz à cet instant nécessite l'utilisation de modèles théoriques de l'expansion. Ceux-ci sont différents suivant la nature des collisions dans le gaz, et comporte quelques approximations.

#### Profils de densité des gaz « simples »

Le comportement du gaz lors de ce processus trouve son origine dans la forme de la distribution d'impulsion à l'instant où le piège est éteint. Lorsque les fermions interagissent peu entre eux ( $(k_F a)^{-1} < -1$ ) une expansion balistique isotrope commence à  $t = t_0$ . Les profils de densités finals sont alors assimilés à des gaussiennes dont les largeurs pour les trois directions ( $i \in \{x, y, z\}$ ) sont données par :

$$\sigma_i(t \geq t_0) = \sigma_{0,i} \sqrt{1 + \omega_i^2 (t - t_0)^2}, \quad (1.14)$$

où  $\sigma_{0,i} = \sqrt{k_B T / (m \omega_i^2)}$  est la largeur avant l'expansion. Cette expression découle directement du fait que la position d'un atome dans le piège se trouvant en  $\mathbf{r}_0$  avec une

vitesse  $\mathbf{v}_0$  à  $t = t_0$  va voir sa position évoluer librement suivant l'expression classique  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + (t - t_0)\mathbf{v}_0$ . Il apparaît alors que l'ajustement du profil donné par les images finales du système permettent directement d'établir le profil de densité initial ainsi que la valeur de la température, en déterminant  $\sigma_{0,i}$ . Seulement, ces résultats ont été établis pour un gaz classique.

Il s'avère cependant qu'ils restent vrais dans le cas de gaz quantiques [26], il faut seulement prendre en compte une mise à l'échelle de la valeur de la position et de la vitesse des particules suivant les formules :

$$r_i \longrightarrow R_i(t) = \frac{r_i}{b_i(t)}, \quad (1.15)$$

$$v_i \longrightarrow V_i(t) = b_i(t)v_i - \dot{b}_i(t)r_i, \quad (1.16)$$

où les coefficients  $b_x(t)$ ,  $b_y(t)$  et  $b_z(t)$  sont de simples facteurs d'échelle dépendant du temps d'expansion. Ces relations entraînent alors une modification de la densité suivant la forme :

$$\rho(\mathbf{r}, t > t_0) = \frac{\rho(\mathbf{R}(t), t = t_0)}{b_x(t)b_y(t)b_z(t)}. \quad (1.17)$$

Cependant, il n'existe pas de calculs sur ce sujet dans le cadre du régime d'interaction transitoire, à l'interface entre le régime sans collision et le régime hydrodynamique. On sait qu'un régime initial hydrodynamique provoquera une expansion anisotrope, dont l'origine se trouve à la fois dans les forces de pressions engendrées par le champ moyen (qui est donc important lorsque les particules sont fortement corrélées), ainsi que dans les collisions qui restent encore présentes lorsque les atomes sont relâchés. Dans le cas d'un gaz classique, il existe cependant une loi d'échelle du type (1.17) qui permet aussi d'obtenir le profil de densité dans le piège [27].

## Gaz de fermions dégénérés et de forte interaction

Lorsqu'un gaz de fermions est piégé en-dessous de la température de Fermi  $T_F$ , la loi d'expansion du gaz doit prendre en compte les effets liés au fort taux de collision et à la pression engendrée par le principe de Pauli, ainsi qu'à la possible apparition d'une phase superfluide. Par ailleurs, il n'est plus possible de relier directement le profil de densité à la température, car il est nécessaire de tenir compte de l'extension due à la statistique de Fermi. On doit alors se rapporter aux échelles typiques de Fermi, notamment l'énergie  $\varepsilon_F^0$ , qui est reliée au rayon de Thomas–Fermi par :

$$R_{\text{TF},i} = \sqrt{\frac{2\varepsilon_F^0}{m\omega_i^2}}, \quad (1.18)$$

qui représente la taille caractéristique du gaz dans la direction  $i$ . Ainsi, la température n'est plus une donnée directe extraite de la mesure du profil de densité, mais intervient comme un paramètre d'un ajustement numérique d'un développement de Sommerfeld

de la densité [22]. Cela permet donc d'obtenir, de la même façon que précédemment, les largeurs  $\sigma_i(t)$  du nuage de gaz dans les trois directions.

Ces dernières sont un outil indispensable dans l'étude des modes collectifs, car elles peuvent être facilement reliées aux observables qui caractérisent le mouvement. À titre d'exemple, l'observable  $\langle x^2 - y^2 \rangle(t_0)$ , caractérisant le mode quadrupolaire radial, est reliée directement aux valeurs des largeurs des gaussiennes sous la forme :

$$\langle x^2 - y^2 \rangle(t_0) \propto \sigma_x^2(t_0) - \sigma_y^2(t_0). \quad (1.19)$$

En faisant plusieurs mesures, il sera alors possible de voir l'évolution temporelle de la valeur de cette observable. Ainsi, on pourra en extraire les valeurs de la pulsation et de l'amortissement du mode, en utilisant les lois d'échelle pour obtenir les valeurs de  $\langle x^2 - y^2 \rangle(t_0)$  à partir de celles de  $\langle x^2 - y^2 \rangle(t_{\text{mes}})$ , où  $t_{\text{mes}}$  est l'instant auquel on a mesuré les profils de densité après l'expansion.



## Le mode de Kohn

### Sommaire

---

<b>2.1. Le mode de Kohn . . . . .</b>	<b>20</b>
<b>2.2. Le piège optique dipolaire et son approximation . . . . .</b>	<b>20</b>
2.2.1. Forme gaussienne expérimentale . . . . .	21
2.2.2. Grandeurs caractéristiques . . . . .	21
2.2.3. Approximation analytique . . . . .	23
<b>2.3. Interaction effective . . . . .</b>	<b>24</b>
2.3.1. Approximation de la matrice $\mathcal{T}$ . . . . .	25
2.3.2. Température critique et section efficace dans le milieu . . . . .	27
2.3.3. Méthode de Nozières–Schmitt-Rink . . . . .	28
<b>2.4. Dynamique et équation du mode . . . . .</b>	<b>30</b>
2.4.1. Équation de Boltzmann et linéarisation . . . . .	31
2.4.2. Fonction réponse du système . . . . .	34
2.4.3. Physique de la fonction test . . . . .	36
<b>2.5. Premier ordre . . . . .</b>	<b>38</b>
<b>2.6. L'ordre supérieur . . . . .</b>	<b>40</b>
2.6.1. <i>Ansatz</i> et potentiel de perturbation . . . . .	40
2.6.2. Brève comparaison entre les deux méthodes . . . . .	41
2.6.3. Pulsation du mode de Kohn . . . . .	41
2.6.4. Amortissement – Couplage entre les modes . . . . .	46
<b>2.7. Modes collectifs dans l'espace des phases d'ordre 3 . . . . .</b>	<b>51</b>
2.7.1. Mode dipolaire . . . . .	52
2.7.2. Mode octupolaire . . . . .	56
2.7.3. Mode <i>z-bending</i> . . . . .	58
<b>2.8. Discussion et perspectives . . . . .</b>	<b>59</b>

---

Cette partie de la thèse a pour objectif de décrire le plus fidèlement possible le comportement du mode collectif le plus simple, mais important d'un point de vue expérimental : le mode de Kohn, l'évolution de sa fréquence et son amortissement en fonction des différents paramètres du système. Afin de pouvoir confronter nos résultats à des données [2], nous avons dû modéliser un système ayant les mêmes caractéristiques que celles utilisées dans ces expériences, réalisées à Innsbruck. Nous nous baserons

sur une technique de résolution de l'équation de Boltzmann qui a déjà démontré son efficacité [7,8] : la méthode des moments d'ordre supérieur. Il sera par ailleurs introduit dans les calculs une interaction effective, sensée tenir compte des interactions internes apparaissant dans le gaz.

Dans un premier temps, une description détaillée du mode de Kohn puis du piège expérimental seront présentées. Nous verrons ensuite la méthode de calcul des effets de milieu considérée, ainsi que l'équation de Boltzmann et la méthode des moments. Enfin, les résultats obtenus au premier ordre, puis à l'ordre supérieur seront présentés. Il découle de ces derniers qu'il est nécessaire de compléter ces travaux par l'étude du couplage du mode de Kohn à d'autres modes collectifs pouvant apparaître spontanément dans le gaz. Ces travaux ont donné lieu à une publication [28].

## 2.1. Le mode de Kohn

Le mode de Kohn doit son nom à W. Kohn qui le décrit pour la première fois en 1961 dans le cadre d'électrons piégés dans un accélérateur cyclotron [29] dont il approxima la forme à un potentiel harmonique. Il démontra ainsi que le mouvement de l'ensemble de ces électrons suivant un axe défini peut être caractérisé par une pulsation égale à celle caractérisant le piège dans la direction du mouvement, quels que soient les paramètres extérieurs. Il montra aussi que ce mouvement n'est pas amorti et ce, indépendamment de la nature de l'interaction entre les particules. Ce résultat est connu sous le nom de « théorème de Kohn », et le mouvement collectif relié est appelé « mode de Kohn ». Il est caractérisé par une oscillation du centre de masse du gaz suivant une direction.

L'information importante dans cette définition est que ces résultats ont été établis en considérant un potentiel de piège harmonique. Or, d'un point de vue expérimental, dans le cas des systèmes qui nous intéressent, les méthodes de piégeage ne permettent pas d'obtenir un potentiel optique exactement harmonique. Dans le cas qui nous occupe, le gaz est confiné par un piège optique dipolaire : ces derniers présentent une anharmonicité, principalement suivant la direction radiale. Par abus de langage, nous parlerons toujours de « mode de Kohn » même dans le cas d'une excitation du centre de masse dans un piège non harmonique.

## 2.2. Le piège optique dipolaire et son approximation

Nous avons décrit au chapitre 1 la méthode globale utilisée pour piéger le gaz. Nous allons ici développer les détails concernant les caractéristiques du piège optique dipolaire permettant le confinement.

### 2.2.1. Forme gaussienne expérimentale

Pour des expériences telles que celles réalisées dans la référence [2], le potentiel décrivant les actions combinées des lasers et de la bobine magnétique (voir la section 1.2 du chapitre 1) s'écrit sous la forme [21] :

$$V_{\text{exp}}(\mathbf{r}) = V_0 \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \exp \left[ -\frac{2}{1 + \frac{z^2}{z_0^2}} \left( \frac{x^2}{w_0^2} + \frac{y^2}{w_0^2} \right) \right] \right] + \frac{1}{2} m \omega_{z,\text{mag}}^2 z^2, \quad (2.1)$$

où  $V_0$  représente la profondeur maximale du potentiel,  $m$  est la masse d'une particule,  $w_0$  est le col du faisceau<sup>1</sup>, c'est-à-dire la largeur minimale du laser dans la direction radiale et  $z_0$  est ce que l'on appelle la longueur de Rayleigh. Par ailleurs,  $\omega_{z,\text{mag}}$  est la pulsation du piège magnétique suivant l'axe  $z$ . Il est alors courant de définir la pulsation du piège optique axial par la relation :

$$\omega_{z,\text{opt}} = \sqrt{\omega_z^2 - \omega_{z,\text{mag}}^2}. \quad (2.2)$$

### 2.2.2. Grandeurs caractéristiques

Les grandeurs modulables expérimentalement sont les pulsations du piège dans les trois directions  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$ , de part leur dépendance dans la longueur d'onde  $\lambda$  et de la largeur  $w_0$  des lasers.

Par ailleurs, la longueur de Rayleigh  $z_0$  est une grandeur très utilisée pour caractériser les faisceaux lasers gaussiens. Elle est définie par la relation :

$$w(z_0) = w_0 \sqrt{2}. \quad (2.3)$$

En effet, la largeur du laser dépend de la coordonnée axiale  $z$ . Elle a pour expression [21] :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}. \quad (2.4)$$

Ces grandeurs sont par ailleurs reliées à la longueur d'onde du faisceau par la relation :

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (2.5)$$

Enfin, pour déterminer  $V_0$ , on doit utiliser les grandeurs que l'on vient de définir. Pour cela, on se place dans le cas particulier où le confinement est très grand<sup>2</sup> et présente une section radiale circulaire (soit  $\omega_{\perp} = \omega_x = \omega_y$ ) [5, 21] : un développement

<sup>1</sup>En anglais, *waist*.

<sup>2</sup>C'est-à-dire pour des  $|x|, |y| \ll w_0$  et  $|z| \ll z_0$ .

limité de l'expression du potentiel de piège (2.1) nous permet d'obtenir :

$$V_0 = \frac{mw_0^2\omega_\perp^2}{4}. \quad (2.6)$$

À noter que l'on peut aussi exprimer la longueur de Rayleigh en fonction de la profondeur du piège, suivant la relation :

$$z_0 = \sqrt{\frac{2V_0}{m\omega_z^2}}. \quad (2.7)$$

Cette formule nous donne en outre la valeur de la pulsation du piège d'origine optique :

$$\omega_{z,\text{opt}} = \frac{\lambda}{\pi w_0^2} \sqrt{\frac{2V_0}{m}}, \quad (2.8)$$

ce qui nous permet de connaître la valeur de  $\omega_{z,\text{mag}}$ . Grâce à ces informations, nous pouvons maintenant construire un potentiel de piège qui reproduit le plus fidèlement possible la forme réelle du piège.

En pratique, l'expérience [2] utilise :

$$\omega_\perp = 2\pi \times 1100 \text{ Hz}; \quad \omega_z = 2\pi \times 26 \text{ Hz}; \quad w_0 = 47 \text{ }\mu\text{m}. \quad (2.9)$$

Dans le cadre du problème lié à l'anharmonicité, les auteurs de cet article ont démontré que les effets du potentiels sont directement liés à la grandeur sans dimension  $\varepsilon_F^0/V_0$ . En effet, plus la valeur de ce paramètre sera petite, moins les effets liés à l'anharmonicité se feront sentir. Et lorsque  $\varepsilon_F^0/V_0 \rightarrow 0$ , c'est-à-dire  $V_0 \rightarrow +\infty$ , le piège sera dans une configuration harmonique. Pour le cas qui nous intéresse, ceux-ci ont mesuré :

$$\frac{\varepsilon_F^0}{V_0} = 9.657 \times 10^{-2}. \quad (2.10)$$

Cela peut paraître faible, mais nous verrons que c'est suffisant pour entraîner des effets anharmoniques. Nous savons par ailleurs que le système est composé d'environ  $N = 6 \times 10^5$  atomes de lithium-6, dont la masse vaut  $m = 6.015$  u. Le gaz n'étant pas polarisé, nous aurons donc  $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$ . Toutes ces données nous permettent ainsi de calculer la valeur numérique du maximum du potentiel, donnée en unité de l'oscillateur harmonique (voir annexe A, section A.1) :

$$V_0 = 1259.65 E_{\text{ho}}, \quad (2.11)$$

ce qui nous fournit  $z_0 = 6.74$  mm. Ces informations nous donnent donc une bonne idée de l'ordre de grandeur de la taille et de la température de ces systèmes gazeux. En moyenne, le volume de gaz étudié est de  $7 \times 10^{-4}$  mm<sup>3</sup> pour une température de Fermi d'environ 2  $\mu$ K !

Hormis la valeur du ratio  $\varepsilon_F^0/V_0$ , nous voulons mettre en évidence l'influence d'autres paramètres rentrant en compte dans les effets d'anharmonicité. Le théorème de Kohn

n'étant valable que dans les pièges harmoniques, il est en effet important de savoir si la température, l'interaction ou les régimes de collision influencent les valeurs de la pulsation du mode pour un confinement non harmonique.

### 2.2.3. Approximation analytique

Le potentiel de piège, sous sa forme (2.1), n'est pas adapté aux calculs numériques. Le fait qu'il tende lentement vers une valeur fixe  $V_0$  pour  $x$  ou  $y$  devenant de plus en plus grands constitue une difficulté liée aux intégrations numériques suivant la coordonnée radiale. Il est en effet impossible d'obtenir un nombre de particules fini lorsque le potentiel les confinant tend vers une constante. Pour résoudre ce problème, nous avons décidé d'utiliser une forme approchée de ce potentiel, de symétrie cylindrique, constituée d'un développement limité de (2.1) jusqu'à l'ordre 6 dans la direction radiale et jusqu'à l'ordre 2 dans la direction axiale. Le résultat peut alors se mettre sous la forme :

$$V_{\text{six}}(r_{\perp}, z) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 \alpha(r_{\perp}) + \frac{1}{2}m\omega_z^2 z^2, \quad (2.12)$$

où  $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$  et nous avons défini la correction d'anharmonicité

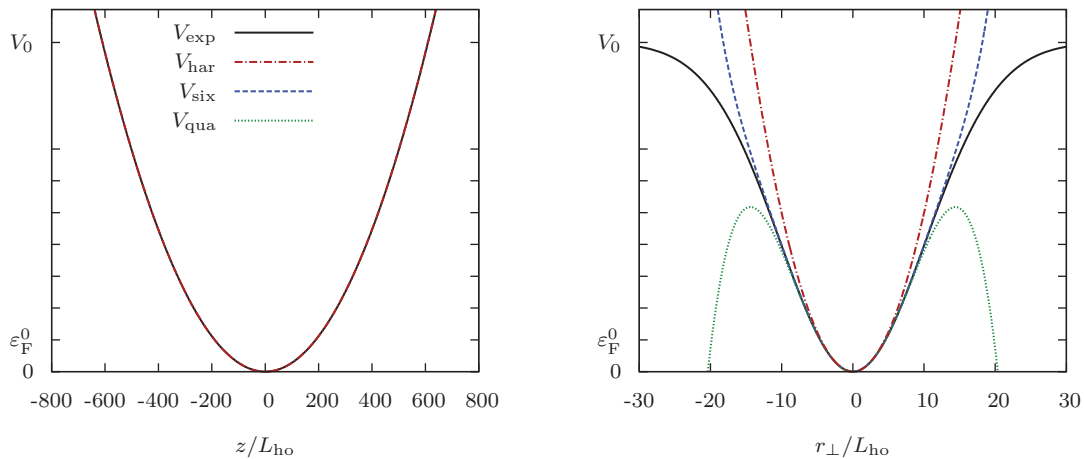
$$\alpha(r_{\perp}) = 1 - \frac{1}{4V_0}m\omega_{\perp}^2 r_{\perp}^2 + \frac{1}{24V_0^2}m^2\omega_{\perp}^4 r_{\perp}^4, \quad (2.13)$$

présentant une dépendance radiale. Dans le cas harmonique, nous aurons simplement  $\alpha(r_{\perp}) = 1$  pour tout  $r_{\perp}$ . Nous considérons un potentiel harmonique dans la direction axiale car la fréquence du piège optique au carré  $\omega_{z,\text{opt}}^2$  est négligeable devant celle du piège magnétique  $\omega_{z,\text{mag}}^2$ . Typiquement, pour le système étudié, nous avons :

$$\omega_{z,\text{opt}} = 0.0172 \bar{\omega}, \quad \omega_{z,\text{mag}} = 0.0802 \bar{\omega}, \quad (2.14)$$

où  $\bar{\omega} = (\omega_{\perp}^2 \omega_z)^{1/3}$  est la moyenne géométrique des pulsations. De ce fait, les contributions provenant de l'exponentielle présente dans  $V_{\text{exp}}$  seront très faibles devant celles données par la deuxième partie de la formule. On peut vérifier cela grâce à la figure 2.1a qui représente la forme du potentiel pour  $x = y = 0$ .

Afin de justifier la validité de l'approximation pour la partie radiale, la figure 2.1b représente l'allure des différents potentiels que l'on a considéré à  $z = 0$ . Nous voyons que  $V_{\text{six}}$  est en accord quasi-parfait avec le potentiel gaussien  $V_{\text{exp}}$ , jusqu'à environ  $5 \varepsilon_{\text{F}}^0$ . Pour ne pas sortir du domaine de validité de cette approximation, nous limiterons notre étude à des énergies de l'ordre de  $\varepsilon_{\text{F}}^0$ . Cela se traduira par des températures initiales du système relativement peu élevées (jamais au-delà de  $T = 1.2 T_{\text{F}}$ ). Par ailleurs, on pourra s'apercevoir que l'approximation harmonique présente un écart non négligeable avec la forme expérimentale, déjà à  $2 \varepsilon_{\text{F}}^0$ . Comme cette approximation est très souvent utilisée, on peut alors d'ores et déjà se poser la question de sa légitimité, surtout pour des mesures aussi précises que celles nécessaires dans ce domaine.



(a) Représentation du potentiel suivant la direction axiale  $z$ .

(b) Représentation du potentiel suivant la direction radiale  $r_{\perp}$ .

**Figure 2.1 :** Le potentiel expérimental (trait plein noir), l'approximation à l'ordre 6 (tirets bleus) et l'approximation harmonique (tirets mixtes rouges) pour les paramètres de [2] sont tracés suivant les directions axiale et radiale (respectivement). Suivant cette dernière, on voit que la validité du développement limité jusqu'à l'ordre 6 s'étend jusqu'à environ  $5 \varepsilon_F^0$ , alors que celui à l'ordre 4 (pointillés verts) commence à diverger dès  $2 \varepsilon_F^0$ . Par ailleurs, l'approximation harmonique suivant la direction axiale est clairement justifiée.

Le fait que nous ayons effectué le développement jusqu'à l'ordre 6 sans nous limiter à l'ordre quartique  $V_{qua}$  s'explique par la forme d'un tel potentiel. La contribution de l'ordre 4 (terme quadratique dans l'expression (2.13)) devient négative pour de grandes valeurs de  $r_{\perp}$  : il en résulte que ce potentiel présente la même pathologie que le potentiel réel. En outre, les particules les plus énergétiques auront la possibilité de s'échapper d'un tel piège, ce qui pose un problème évident de consistance du système.

## 2.3. Interaction effective

Nous allons inclure dans les calculs des termes traduisant les corrections issues des effets de milieu que ressentent les atomes. La prise en compte de ces effets se fait généralement par le biais de l'approximation de Hartree. Cependant, il a déjà été montré que celle-ci ne constitue pas une théorie exploitable – dans le cas considéré ici – dans la mesure où elle prédit une instabilité du gaz lorsqu'on s'approche de l'unitarité [5]. Il faut donc utiliser une méthode de calcul au-delà du champ moyen, l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$ .

Les calculs suivants ont déjà été effectués dans le cadre de la thèse de T. Lepers [5]. Nous n'entrerons pas ici dans les détails. Bien que l'on considère un gaz comportant autant de particules de spin  $\uparrow$  que de  $\downarrow$  pour l'étude du mode de Kohn, nous ferons apparaître les indices de spin tout au long du calcul, car la dernière partie de cette

thèse porte sur les systèmes présentant un déséquilibre de population entre les spins. C'est pourquoi nous répétons ici brièvement le calcul en généralisant les notations.

### 2.3.1. Approximation de la matrice $\mathcal{T}$

L'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  consiste en une resommation de diagrammes en échelle (*ladder diagrams*). Celle-ci obéit à l'équation de Lippmann-Schwinger :

$$(2.15)$$

où  $\mathbf{k} = \mathbf{p}_\uparrow + \mathbf{p}_\downarrow$  est l'impulsion totale,  $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_\uparrow - \mathbf{p}_\downarrow)$  l'impulsion du centre de masse, et  $E$  l'énergie totale et  $\omega$  l'énergie du centre de masse. Les lignes de fermion du haut sont, par exemple des particules de spin  $\uparrow$ , tandis que celles du bas sont de spin  $\downarrow$ . En effet, en accord avec le principe d'exclusion de Pauli, les atomes de même spin n'interagissent pas entre eux.

Dans ce paragraphe, on se propose d'exprimer la valeur de l'amplitude de la matrice  $\mathcal{T}$ , notée  $\Gamma$ . Cela nécessite d'exprimer le propagateur à deux particules. Nous pourrons alors en tirer une définition de potentiel de champ moyen.

#### Définition

Dans le formalisme de Matsubara pour les températures finies [30], on peut représenter chaque fermion libre d'état de spin  $\sigma \in \{\uparrow, \downarrow\}$  et d'énergie  $\xi_{\mathbf{k}}^\sigma = \frac{k^2}{2m} - \mu_\sigma$  par un propagateur  $\mathcal{G}_0^\sigma$  tel que :

$$\mathcal{G}_0^\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{i\omega - \xi_{\mathbf{k}}^\sigma}. \quad (2.16)$$

Formellement, l'équation (2.15) entraîne que l'on peut écrire la matrice  $\mathcal{T}$ , notée  $\Gamma$ , sous la forme suivante :

$$\Gamma(\omega, \mathbf{k}) = \frac{g}{1 - gJ(\omega, \mathbf{k})}, \quad (2.17)$$

pour laquelle nous définissons  $J$  comme le propagateur de deux particules à température finie

$$J(i\omega_N^b, \mathbf{k}) = -\beta^{-1} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \sum_n \mathcal{G}_0^\downarrow(\omega_n^f, \frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}) \mathcal{G}_0^\uparrow(\omega_N^b - \omega_n^f, \frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}). \quad (2.18)$$

Les pulsations (discrètes) de Matsubara  $\omega_n^f$  et  $\omega_n^b$  (respectivement fermionique et bosonique) sont définies, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , par :

$$\omega_n^f = \frac{(2n+1)\pi}{\beta}, \quad (2.19)$$

$$\omega_n^b = \frac{2n\pi}{\beta}. \quad (2.20)$$

Dans le plan complexe ( $\text{Re } \omega, \text{Im } \omega$ ), celles-ci représentent les pôles sur l'axe imaginaire des distributions de Fermi–Dirac et de Bose–Einstein (resp.). Par ailleurs, la valeur de la constante de couplage  $g$  peut être obtenue grâce au calcul de la matrice  $\mathcal{T}$  pour deux particules interagissant dans le vide. Dans le but de contourner la divergence de (2.18), une renormalisation permet d'obtenir [5] la valeur de la constante de couplage :

$$g = \frac{4\pi a}{m}, \quad (2.21)$$

pour laquelle  $a$  représente la longueur de diffusion et  $m$  la masse des particules.

### Fonction de Green à deux particules

Nous allons maintenant détailler l'expression de la fonction de Green à deux particules. En effectuant l'intégrale dans le plan imaginaire en partant de (2.18), puis en effectuant un prolongement analytique  $i\omega \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \omega + i\eta$ , on obtient la forme plus connue :

$$J(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1 - f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}}^\sigma) - f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}}^{\bar{\sigma}})}{\omega - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}}^\sigma - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}}^{\bar{\sigma}} + i\eta}, \quad (2.22)$$

qui sera elle-aussi renormalisée afin de contourner sa divergence. Cette équation peut alors se décomposer en deux contributions : une dite libre ( $J_0$ ) et une ne traduisant que les effets de milieu ( $\tilde{J}$ ). Formellement :

$$J_0(\omega, \mathbf{k}) = \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}}^\sigma - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}}^{\bar{\sigma}} + i\eta}, \quad (2.23)$$

et

$$\tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}}^\sigma) + f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}}^{\bar{\sigma}})}{\omega - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} + \mathbf{q}}^\sigma - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2} - \mathbf{q}}^{\bar{\sigma}} + i\eta}. \quad (2.24)$$

On peut reconnaître dans ces relations les facteurs de blocage de Pauli. En effet, le terme en  $1 - f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\uparrow}^\sigma) - f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\downarrow}^{\bar{\sigma}})$  n'est qu'une transformation de  $[1 - f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\uparrow}^\sigma)][1 - f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\downarrow}^{\bar{\sigma}})]$ , interaction particule-particule, à laquelle on a soustrait  $f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\uparrow}^\sigma)f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}_\downarrow}^{\bar{\sigma}})$ , correspondant à l'interaction trou-trou.



Concernant la contribution libre  $J_0$ , il sera utile de définir l'impulsion dans le centre de masse

$$q_{\text{cm}} = \sqrt{mE_{\text{cm}}}, \quad (2.25)$$

où l'énergie  $E_{\text{cm}}$  est définie par :

$$E_{\text{cm}} = \omega - \frac{k^2}{4m} + 2\bar{\mu}. \quad (2.26)$$

En effectuant le calcul de  $J_0$ , on trouve alors l'expression simple suivante :

$$J_0(\omega, \mathbf{k}) = -i \frac{m}{4\pi} q_{\text{cm}}. \quad (2.27)$$

Maintenant, intéressons-nous aux effets de milieu, que l'on a regroupés dans le terme  $\tilde{J}$ . Après intégration de (2.24) et en utilisant les relations de dispersion pour la partie imaginaire, la forme de la contribution du milieu est :

$$\text{Im } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{m^2}{4\pi\beta k} \sum_{\sigma} \ln \frac{1 + e^{-\beta\xi_{\sigma}^{\sigma}}}{1 + e^{-\beta\xi_{\pm}^{\sigma}}}, \quad (2.28)$$

les  $\xi_{\pm}^{\sigma}$  sont définis comme suit :

$$\xi_{\pm}^{\sigma} = \frac{1}{2m} \left( \frac{k}{2} \pm q_{\text{cm}} \right)^2 - \mu_{\sigma}. \quad (2.29)$$

Une relation de dispersion nous permettra d'obtenir la partie réelle

$$\text{Re } \tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = -\mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im } \tilde{J}(\omega', \mathbf{k})}{\omega' - \omega}, \quad (2.30)$$

où  $\mathcal{P}$  désigne la valeur principale au sens de Cauchy.

### 2.3.2. Température critique et section efficace dans le milieu

La détermination précise de ces grandeurs nous permet de connaître la valeur de la matrice  $\mathcal{T}$ . Cette dernière contient la description de l'ensemble des phénomènes d'interaction. La transition à une phase superfluide, par exemple, est directement donnée par les positions des pôles de la matrice  $\mathcal{T}$  en fonction de la température (critère de Thouless) :

$$\text{Re } \Gamma^{-1}(\omega = 0, \mathbf{k} = \mathbf{0}, T = T_{\text{C}}^{\text{SF}}) = 0. \quad (2.31)$$

La température  $T_{\text{C}}^{\text{SF}}$  est définie comme la température limite pour laquelle la matrice  $\mathcal{T}$  ne contient pas de pôle. Comme notre théorie n'est pas valable pour la phase superfluide,

nous ne pourrions donc pas franchir cette limite. Des paires de Cooper se forment alors, avec une impulsion totale nulle ( $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ ).

### 2.3.3. Méthode de Nozières–Schmitt-Rink (NSR)

En 1985, P. Nozières et S. Schmitt-Rink [15] ont développé une théorie au-delà du champ moyen pour un gaz d'électrons non polarisé. Le but était de calculer les températures de transition à la phase superfluide du côté BCS ainsi que du côté BEC du diagramme de phase. Une partie du travail calculatoire de la thèse a consisté à généraliser cette approximation au cas de gaz de fermions polarisés. Pour cela, on se base sur l'équation de Dyson limitée au premier ordre :

$$\mathcal{G}^\sigma = \mathcal{G}_0^\sigma + \mathcal{G}_0^\sigma \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma \mathcal{G}_0^\sigma, \quad (2.32)$$

où  $\Sigma_{\text{NSR}}^\sigma$  est la self-énergie d'une particule de spin  $\sigma$  due à l'interaction avec les particules  $\bar{\sigma}$  définie dans le cadre de la théorie NSR. Dans le cas général, on écrira :

$$\Sigma^\sigma = \overbrace{\mathcal{T}}^{\bar{\sigma}}, \quad (2.33)$$

où le trait épais représente un propagateur de Green habillé de l'interaction,  $\mathcal{G}^{\bar{\sigma}}$ . Cependant, nous considérerons ce fermion comme libre. Schématiquement, nous avons donc :

$$\Sigma_{\text{NSR}}^\sigma = \overbrace{\mathcal{T}}^{\bar{\sigma}}. \quad (2.34)$$

De ce fait, il est important de remarquer ici que la méthode NSR fait appel à un calcul de self-énergie ne contenant pas de formule auto-cohérente, tout comme notre équation de la matrice  $\mathcal{T}$ .

#### Définition de la self-énergie

Dans le formalisme de Matsubara, on note (2.34) sous la forme :

$$\Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(i\omega_n^f, \mathbf{k}) = - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_m \mathcal{G}_0^{\bar{\sigma}}(\omega_m^f, \mathbf{p}) \Gamma(i\omega_n^f + i\omega_m^f, \mathbf{k} + \mathbf{p}). \quad (2.35)$$

En utilisant le résultat d'analyse complexe pour une fonction holomorphe  $\phi(z)$ , où  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\beta^{-1} \sum_n \phi(i\omega_n^f) = \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2i\pi} \phi(\omega) f_{\text{eq}}(\omega), \quad (2.36)$$

on peut obtenir l'expression de la partie imaginaire :

$$\text{Im } \Sigma_{\text{NSR}}^{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} [f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}}^{\bar{\sigma}}) + b_{\text{eq}}(\omega + \xi_{\mathbf{p}}^{\bar{\sigma}})] \text{Im } \Gamma(\omega + \xi_{\mathbf{p}}^{\bar{\sigma}}, \mathbf{k} + \mathbf{p}), \quad (2.37)$$

où  $b_{\text{eq}}$  est la distribution de Bose à l'équilibre.

Cette expression met en évidence le fait que cette énergie est directement liée aux particules de spin opposé : seuls les indices  $\bar{\sigma}$  apparaissent dans cette intégrale. Il est évident que nous ne pouvons pas obtenir une expression analytique pour cette intégrale, c'est pourquoi il faudra avoir recours à un calcul numérique. L'apparition de la distribution de Bose est aussi quelque chose de remarquable : celle-ci est là pour traiter du couplage entre les deux fermions interagissant, qui forment un état lié de spin entier.

Par ailleurs, il faudra aussi calculer une relation de dispersion afin d'obtenir la valeur de la partie réelle de la self-énergie :

$$\text{Re } \Sigma_{\text{NSR}}^{\sigma}(\omega, \mathbf{k}) = - \mathcal{P} \int \frac{d\omega'}{\pi} \frac{\text{Im } \Sigma_{\text{NSR}}^{\sigma}(\omega', \mathbf{k})}{\omega - \omega'}. \quad (2.38)$$

## Interaction de champ moyen

Dans le cadre de cette étude des modes collectifs, nous allons utiliser l'équation de Boltzmann. L'expression de la self-énergie nous permettra alors de définir un champ moyen grâce à l'utilisation de l'énergie de quasi-particules proches de la surface de Fermi. On pourra alors ajouter ce champ  $U^{\sigma}$  issu des interactions à  $V_{\text{six}}$ , potentiel représentant le piège extérieur. Cependant, il est bon de remarquer ici que l'on s'affranchit de la dépendance en  $\mathbf{k}$  pour ce potentiel : cela constitue une approximation. On le définit par :

$$U^{\sigma} = \text{Re } \Sigma_{\text{NSR}}^{\sigma}(0, k_{\text{F}}^{\sigma}), \quad (2.39)$$

qui, dans ce cas-là, sera le même pour les particules de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . On notera :

$$U_0 = U^{\uparrow} = U^{\downarrow}. \quad (2.40)$$

Ce terme supplémentaire s'additionnera à l'énergie des particules libres,  $\xi_{\mathbf{k}} + U_0$ , et dépendra de la position  $\mathbf{r}$  par le biais du potentiel chimique (approximation de densité locale). De ce fait, lorsque l'on parlera du système tenant compte du champ moyen, les particules libres deviendront des quasi-particules. Cette expression de champ moyen a déjà fait ses preuves dans les cas non polarisés [5, 7, 8] pour l'étude des modes collectifs, et notamment dans son utilisation avec la méthode des moments de l'équation de Boltzmann.

### Section efficace dans le milieu

Pour finir, afin d'être complet sur la prise en compte des effets dus à l'environnement dans lequel se propagent les particules entrant en collision, nous pourrions aussi remplacer l'expression de la section efficace libre  $\sigma_0$ ,

$$\sigma_0(\mathbf{q}) = \frac{a^2}{1 + a^2 q^2}, \quad (2.41)$$

par la section efficace calculée dans le milieu,  $\tilde{\sigma}$ . On la définit grâce à l'amplitude de la matrice  $\mathcal{T}$  :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = m \left| \Gamma \left( \frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\bar{\mu}, \mathbf{k} \right) \right|^2. \quad (2.42)$$

Une dépendance en  $\mathbf{k}$  apparaît alors, ce qui augmente le temps de calcul. Il ne faut pas perdre de vue le fait que  $\Gamma$  contient deux intégrales numériques.

## 2.4. Dynamique et équation du mode

Maintenant, afin de décrire la dynamique globale du système gazeux, nous allons utiliser le fait que nous étudions des fermions (nous avons donc la distribution des états d'énergie à l'équilibre, voir 1.1.2) pour écrire une équation de Boltzmann linéarisée autour de cette valeur. Nous allons introduire la distribution de Fermi locale à l'équilibre  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  identique pour les deux états de spin, par :

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}}^{\uparrow} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r})) = f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{p}}^{\downarrow} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r})). \quad (2.43)$$

Autrement dit, la distribution d'équilibre dans le piège est donc :

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp \left[ \beta \left( \frac{p^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \right) \right] + 1}, \quad (2.44)$$

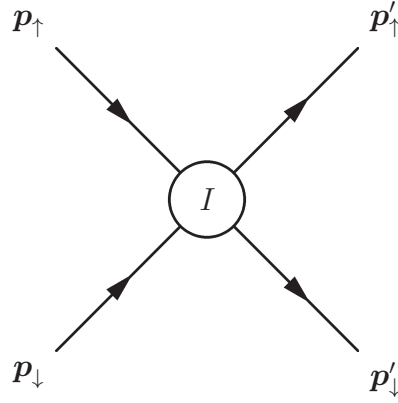
où  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  est le potentiel de piège (lorsqu'il sera noté ainsi, sa forme est totalement générale),  $U_0(\mathbf{r})$  le potentiel de champ moyen à l'équilibre et  $\bar{\mu}$  le potentiel chimique, défini par la condition de normalisation

$$N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow} = 2 \int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}), \quad (2.45)$$

où on a défini la densité du gaz par état de spin  $\rho$  comme

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (2.46)$$

Les paragraphes qui suivent ont pour ambition d'introduire toutes les notions nécessaires à la description dynamique du gaz de fermions : la méthode de résolution de



**Figure 2.2 :** Schéma du processus de collision entre une particule de spin  $\uparrow$  d'impulsion  $\mathbf{p}_\uparrow$  et une particule de spin  $\downarrow$  d'impulsion  $\mathbf{p}_\downarrow$ . La collision est décrite directement par  $I$ .

l'équation de Boltzmann par la méthode des moments couplée aux outils fournis par la théorie de la réponse linéaire.

### 2.4.1. Équation de Boltzmann et linéarisation

Afin de décrire l'état du système lorsqu'il est hors-équilibre, nous avons utilisé l'équation de Boltzmann. Définie pour une distribution  $f_\sigma$  (hors équilibre), elle s'écrit :

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}}_\sigma \cdot \frac{\partial f_\sigma}{\partial \mathbf{p}_\sigma} = -I[f_\sigma], \quad (2.47)$$

où  $I[f_\sigma]$  est l'intégrale décrivant le processus d'interaction à deux corps :

$$I[f_\sigma] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\bar{\sigma}}}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{|\mathbf{p}_\sigma - \mathbf{p}_{\bar{\sigma}}|}{m} [f_\sigma f_{\bar{\sigma}} (1 - f'_\sigma)(1 - f'_{\bar{\sigma}}) - f'_\sigma f'_{\bar{\sigma}} (1 - f_\sigma)(1 - f_{\bar{\sigma}})]. \quad (2.48)$$

Dans cette expression, les grandeurs avec des primes désignent les quantités sortantes, voir la figure 2.2. On a utilisé les notations  $f_\sigma = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}_\sigma, t)$  et  $f'_\sigma = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}'_\sigma, t)$  par souci de clarté. Les coordonnées de l'espace des phases, quant à elles, satisfont les équations classiques du mouvement. On a ainsi :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \right] = \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (2.49)$$

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \left[ \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}) - \bar{\mu} \right] = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (V_{\text{trap}} + U_0), \quad (2.50)$$

où nous omettons les indices de spin, car les expressions sont les mêmes quelle que soit sa valeur, ce qui valable aussi pour la suite de ce chapitre.

En l'état, l'équation de Boltzmann ne peut être résolue analytiquement, dans la mesure où l'on ne connaît pas l'expression de la distribution de Fermi  $f$  pour tous les temps  $t$ . Afin de pouvoir exploiter cette théorie cinétique, nous allons considérer que  $f$

ne présente qu'un petit écart à sa valeur d'équilibre  $f_0$ . On notera ainsi :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) + \delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (2.51)$$

où  $\delta f$  est l'écart à l'équilibre  $f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  (que l'on notera  $f_0$  pour ne pas surcharger les expressions). Nous allons définir cet écart grâce à une fonction test  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , suivant :

$$\delta f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0 \bar{f}_0 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (2.52)$$

où  $\bar{f}_0 = 1 - f_0$ . Il est intéressant ici d'expliquer que cette forme tire son origine dans le fait que cette perturbation doit être très piquée autour de la surface de Fermi. Comme nous allons choisir une forme quelconque pour  $\Phi$ , on tient compte de cet aspect en multipliant par  $f_0 \bar{f}_0$ , qui présente une forme adéquate. Ainsi en insérant (2.51) dans l'équation de Boltzmann (2.47), on obtient une équation ne dépendant que de la fonction de distribution à l'équilibre et de la fonction test :

$$f_0 \bar{f}_0 \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \left\{ \Phi, \frac{p^2}{2m} + V_{\text{trap}} + U_0 \right\} + \beta \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (\delta V + \delta U) \right] = -I[\Phi], \quad (2.53)$$

qui sont deux fonctions que l'on connaît analytiquement. Nous avons défini  $\{.,.\}$  comme les crochets de Poisson<sup>3</sup>. Il est bon de remarquer ici que le champ moyen à l'équilibre créé par les particules dans le milieu est noté  $U_0(\mathbf{r})$ , tandis que la perturbation du piège afin de créer le mode collectif que l'on veut étudier est notée  $\delta V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Celle-ci entraînera une perturbation de l'interaction prise en compte par le terme  $\delta U(\mathbf{r}, t)$ . La modification de l'intégrale collisionnelle suit la forme suivante :

$$I[\Phi_{\uparrow}] = \int \frac{d^3 \mathbf{p}_{\downarrow}}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \left| \frac{\mathbf{p}_{\uparrow}}{m} - \frac{\mathbf{p}_{\downarrow}}{m} \right| f_{0,\uparrow} f_{0,\downarrow} \bar{f}'_{0,\uparrow} \bar{f}'_{0,\downarrow} [\Phi_{\uparrow} + \Phi_{\downarrow} - \Phi'_{\uparrow} - \Phi'_{\downarrow}]. \quad (2.54)$$

Nous avons ainsi obtenu une équation de Boltzmann dont nous connaissons tous les paramètres, cela nous permettra ainsi, si l'on choisit la bonne fonction test, d'obtenir des systèmes d'équations fermés afin d'obtenir la pulsation du mode décrit par  $\Phi$ . Cette méthode de résolution est la méthode des moments de l'équation de Boltzmann. On parle de « moments » dans le sens où l'on prend la moyenne sur l'espace des phases des deux membres de l'équation. Cela donne des équations où apparaissent des valeurs moyennes calculés à l'équilibre<sup>4</sup>, définies par

$$\langle x^{2\alpha} y^{2\gamma} \dots p_z^{2\zeta} \rangle_0 = \frac{2}{N} \int d^3 \mathbf{r} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 x^{2\alpha} y^{2\gamma} \dots p_z^{2\zeta}, \quad (2.55)$$

pour des  $\alpha, \gamma, \dots, \zeta \in \mathbb{N}$ .

<sup>3</sup> Plus en détails, on aura pour deux fonctions  $f, g$  de l'espace des phases,

$$\{f(\mathbf{r}, \mathbf{p}), g(\mathbf{r}, \mathbf{p})\} \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{r}}.$$

<sup>4</sup>Cela signifie que les moments d'ordre impair seront nuls.

Afin de faciliter les calculs, la méthode des moments de l'équation de Boltzmann a été écrite pour la première fois sous forme matricielle dans la référence [9]. Ainsi, l'obtention des équations des modes peut s'effectuer en diagonalisant une matrice. Nous allons ici généraliser cette formulation pour une expression du piège  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  quelconque et en présence d'un champ moyen ne dépendant que de la position  $U_0(\mathbf{r})$ . On notera par ailleurs la fonction test sous la forme d'un polynôme de l'espace des phases, composé de  $n$  termes, et dont les coefficients dépendent du temps :

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j(t) \phi_j, \quad (2.56)$$

où les  $\phi_j$  sont des monômes de l'espace des phases  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ .

En multipliant (2.53) par  $\phi_i$  et en intégrant sur les positions et les impulsions, puis en effectuant une transformation de Fourier sur  $t$ , on pourra ainsi écrire l'équation sous la forme

$$\sum_{j=1}^n A_{ij}(\omega) c_j(\omega) = a_i, \quad (2.57)$$

où l'on a défini la matrice  $A_{ij}(\omega)$  comme

$$A_{ij}(\omega) = -i\omega M_{ij} + A_{ij}^{\text{cro}} + A_{ij}^{\text{cm}} + A_{ij}^{\text{coll}}. \quad (2.58)$$

Les matrices qui sont définies dans l'équation précédente proviennent des différents termes de (2.53). Par ailleurs, le fait de se placer dans l'espace des pulsations nous permettra d'obtenir plus directement les informations qui nous intéressent concernant les caractéristiques des modes collectifs.

Par exemple,

$$M_{ij} = \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \bar{f}_0 \phi_i \phi_j \quad (2.59)$$

est la partie provenant de la dérivée temporelle. Aussi,

$$A_{ij}^{\text{cro}} = -\frac{N}{2\beta} \langle \{ \phi_i, \phi_j \} \rangle_0, \quad (2.60)$$

est la réexpression des crochets de Poisson, après avoir effectué une intégration par parties en utilisant les relations définies en annexe (section A.2). Ensuite, la matrice

$$A_{ij}^{\text{cm}} = \frac{N}{2} \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta U_j \right\rangle_0 \quad (2.61)$$

représente la variation du champ moyen<sup>5</sup> par rapport à l'équilibre. Il est noté, en accord avec [7, 28] :

$$\delta U_j(\mathbf{r}, t) = \left. \frac{\partial U_0}{\partial \rho} \right|_{\rho(\mathbf{r}), T} \delta \rho_j, \quad (2.62)$$

où

$$\delta \rho_j = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \bar{f}_0 \phi_j. \quad (2.63)$$

De la même façon, on exprime le terme de collision comme

$$A_{ij}^{\text{coll}} = \int d^3 \mathbf{r} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \phi_i I[\phi_j], \quad (2.64)$$

et le vecteur traduisant l'influence de la perturbation extérieure par

$$a_i = -\frac{N}{2} \left\langle \frac{\partial \phi_i}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta V \right\rangle_0. \quad (2.65)$$

Désormais, nous avons la possibilité de résoudre l'équation de Boltzmann par la méthode des moments en utilisant ces calculs matriciels, et ceci est valable quelle que soit l'expression des potentiels de piège et de champ moyen. Par ailleurs, le choix de la fonction test est lui-aussi libre. Cependant, il n'est pas possible de construire une fonction  $\Phi$  pouvant retranscrire toutes les fluctuations autour de l'équilibre apparaissant dans le système : il est nécessaire de la définir en connaissant les phénomènes dominants intervenant dans les mouvements collectifs que l'on souhaite étudier.

Il faut ainsi résoudre le système (2.57). Pour cela, nous allons utiliser la méthode de la fonction réponse, qui consiste à obtenir, pour chaque valeur propre du système, sa contribution  $c_j(\omega)$  au mouvement collectif produit par  $\delta V$ .

### 2.4.2. Fonction réponse du système

L'essence même de l'étude d'un système donné réside dans les perturbations que l'on va induire sur le-dit système, afin de caractériser sa réaction. Lorsque la perturbation est faible, ce principe est traduit analytiquement par la théorie de la réponse linéaire et ce que l'on appelle la réponse spectrale.

Pour un opérateur d'excitation  $q(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  quelconque, l'observable naturelle sera définie comme sa moyenne sur l'espace des phases. Formellement :

$$\langle \tilde{q} \rangle(t) = \frac{2}{N} \int d^3 \mathbf{r} \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) q(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (2.66)$$

---

<sup>5</sup>Un indice  $j$  apparaît en raison du fait que l'on soit passé à la décomposition en monômes de la fonction test (2.56).



Le lien entre l'opérateur d'excitation et le potentiel perturbatif  $\delta V$  sera prise de la forme :

$$\delta V(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \alpha q(\mathbf{r}, \mathbf{p})\delta(t), \quad (2.67)$$

où  $\alpha$  est un facteur d'amplitude réel et  $\delta$  la distribution de Dirac usuelle. La présence de cette distribution constitue une approximation vis-à-vis du temps d'apparition du mode : nous supposons que celui-ci est nul (d'un point de vue expérimental, les mouvements collectifs sont excités de manière adiabatique). Cependant, l'origine de la distribution de Dirac peut aussi se comprendre analytiquement : si l'on considère une perturbation constante, sa réponse temporelle sera un delta de Dirac, d'après sa transformée de Fourier.

Lorsque la perturbation extérieure est nulle, l'équation (2.57) n'a de solutions que si

$$\det A(\omega) = 0. \quad (2.68)$$

Les solutions de cette équation sont les valeurs propres de la matrice  $A$ . On les notera  $\Omega_i \in \mathbb{C}$ , où  $i \in \{1, n\}$ . Dans le cas où celles-ci sont uniques, leur partie réelle représente la pulsation du mode propre et leur partie imaginaire l'amortissement de celui-ci [2, 7, 28].

Toutefois, lorsque la méthode des moments est poussée aux ordres supérieurs, il arrive que plusieurs valeurs propres décrivent le même mode avec des poids différents [8]. C'est dans ces cas-là que la réponse spectrale nous donne des informations indispensables : celle-ci définit la contribution  $c_j(\omega)$  de toutes les valeurs propres  $\Omega_j$  au mouvement collectif étudié par le biais de la définition de l'opérateur  $q$ .

Définissons  $\langle q \rangle(\omega)$  la transformée de Fourier de l'observable  $\langle \tilde{q} \rangle(t)$ . La fonction réponse sera alors donnée par

$$\delta \langle q \rangle(\omega) = \alpha(\langle q \rangle(\omega) - \langle q \rangle_0), \quad (2.69)$$

si et seulement si  $\delta V$  est défini comme (2.67). Ainsi, la réponse spectrale du système sera donnée par  $-\text{Im} \delta \langle q \rangle(\omega)$ . Celle-ci présentera un ou plusieurs pics, avec ou sans largeur, dont la forme nous donnera la pulsation et l'amortissement du mode dont l'observable est  $\langle q \rangle$ .

Pour obtenir cette distribution spectrale, nous venons de voir que nous avons besoin de connaître l'expression des coefficients  $c_j(\omega)$  de l'expression (2.56). Pour l'obtenir, il faut utiliser l'équation des modes qui nous est fournie par l'équation de Boltzmann,

$$(-i\omega M + B)c(\omega) = a(\omega), \quad (2.70)$$

où  $B \equiv A^{\text{cro}} + A^{\text{cm}} + A^{\text{coll}}$ , ce qui nous permet d'écrire :

$$(-i\omega + M^{-1}B)c(\omega) = M^{-1}a(\omega). \quad (2.71)$$

La diagonalisation évoquée précédemment devra alors être effectuée selon :

$$-i\omega + M^{-1}B = PDP^{-1}, \quad (2.72)$$

où  $P$  est la matrice de passage et  $D = -i \operatorname{diag}(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ , c'est-à-dire (en notant  $\operatorname{Re} \Omega_j = -\omega_j$  et  $\operatorname{Im} \Omega_j = \Gamma_j$ ) :

$$D = \operatorname{diag}(\Gamma_1 + i\omega_1, \dots, \Gamma_n + i\omega_n). \quad (2.73)$$

Nous avons ainsi la possibilité d'écrire les coefficients sous la forme :

$$c_j(\omega) = i \sum_{k=1}^n \frac{P_{jk}(P^{-1}M^{-1}a)_k}{\omega - \omega_k + i\Gamma_k}. \quad (2.74)$$

La dernière étape est de calculer la réponse spectrale du système, donnée par l'équation :

$$\delta\langle q \rangle(\omega) = {}^t b c(\omega), \quad (2.75)$$

où on définit

$$b_i = \frac{2}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \bar{f}_0 \phi_i q(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2.76)$$

qui provient de la linéarisation de l'équation (2.66).

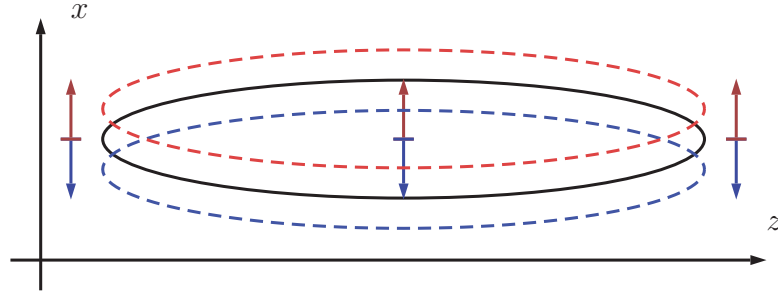
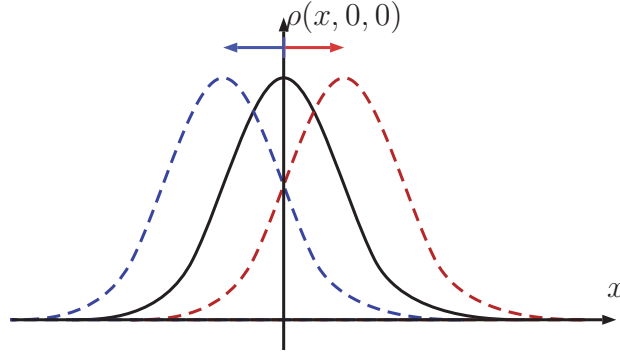
Les relations introduites ci-dessus nous permettent de décrire tous les modes collectifs que le gaz peut présenter, il suffit de définir en conséquence les informations que la fonction test doit contenir.

Par ailleurs, dans la mesure où ces définitions tiennent compte d'une forme du potentiel totalement générale, cette formulation de la résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode des moments peut être adaptée quelle que soit la configuration expérimentale. De plus, la seule restriction vis-à-vis du champ moyen est qu'il ne dépende que de la position, par le biais de l'approximation de densité locale (donc par le biais du potentiel chimique).

### 2.4.3. Physique de la fonction test

Chaque choix de fonction test est propre au mode que l'on veut étudier. Ces fonctions sont des combinaisons de variables de l'espace des phases donnant, après insertion dans l'équation linéarisée (2.53), un système composé d'autant d'équations que ce que la fonction test comporte de termes. Généralement, la puissance maximale des monômes  $\phi_i$  composant  $\Phi$  désigne l'ordre de la méthode utilisée.

Lorsque le mode de Kohn est excité suivant la direction  $x$  (figure 2.3a) par l'application de  $\delta V_K$ , il va en résulter une oscillation du gaz dans sa totalité suivant cette direction. En raison de la force  $-\nabla \delta V_K$  créée par ce potentiel, un champ de vitesse  $\mathbf{u}$

(a) Mode de Kohn dans le plan  $(xOz)$ .

(b) Modification du profil de densité au cours du temps.

**Figure 2.3 :** Représentation du mode de Kohn suivant la direction  $x$ . Il est constitué d'une oscillation globale du gaz. Tiré de la référence [28].

proportionnel à cette force apparaît dans le gaz. Dans le cas du mode de Kohn, nous avons simplement :

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{u}(t) \propto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

et il influe sur la fonction d'équilibre en modifiant l'impulsion et la position :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{r} - \mathbf{d}(t), \mathbf{p} - m\mathbf{u}(t)), \quad (2.78)$$

où  $\mathbf{d}(t)$  est le déplacement engendré par le champ de vitesse  $\mathbf{u}(t)$ . Les coordonnées en  $x$  vont alors fluctuer au cours du temps. Sous l'effet du potentiel confinant, il va résulter de ce déplacement une modification de la vitesse de toutes les particules  $p_x$  afin que le gaz retrouve sa position d'équilibre, au centre du piège. La fonction test  $\Phi$  la plus simple (l'ordre 1 de la méthode) pouvant décrire cette perturbation est alors de la forme :

$$\Phi_{1st}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = x\tilde{c}_1(t) + p_x\tilde{c}_2(t). \quad (2.79)$$

Dans un piège harmonique, toutes les particules oscillent à la même fréquence : celle du piège  $\omega_x$ , d'après le théorème de Kohn. La position d'équilibre ne sera alors jamais

atteinte, et le gaz présentera ce mouvement oscillatoire indéfiniment. L'*ansatz*  $\Phi_{1st}$  donne, par insertion dans l'équation de Boltzmann linéarisée, un système d'équations fermé (grâce au fait que le terme de collision soit nul). Dans ce cas, l'espace des phases d'équilibre est modifié suivant  $x$  et  $p_x$ , d'où leur importance dans l'expression de la fonction test du premier ordre (2.79). Il en résulte évidemment une modification du profil de densité du gaz, comme l'illustre la figure 2.3b.

## 2.5. Premier ordre

Pour commencer, nous allons nous pencher sur les résultats donnés par la méthode des moments à l'ordre le plus bas. Comme nous l'avons vu précédemment, la fonction test est de la forme (2.79) si l'on veut étudier le mode de Kohn dans la direction  $x$ . En appliquant le formalisme décrit précédemment avec cette définition de fonction test, la condition  $\det A(\omega_K) = 0$  entraîne que :

$$\omega_K^2 = \frac{1 - C}{1 - C - C'} \omega_x^2, \quad (2.80)$$

où les paramètres

$$C = \frac{2\beta}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \bar{f}_0 x \frac{\partial U_0}{\partial x} \quad (2.81)$$

et

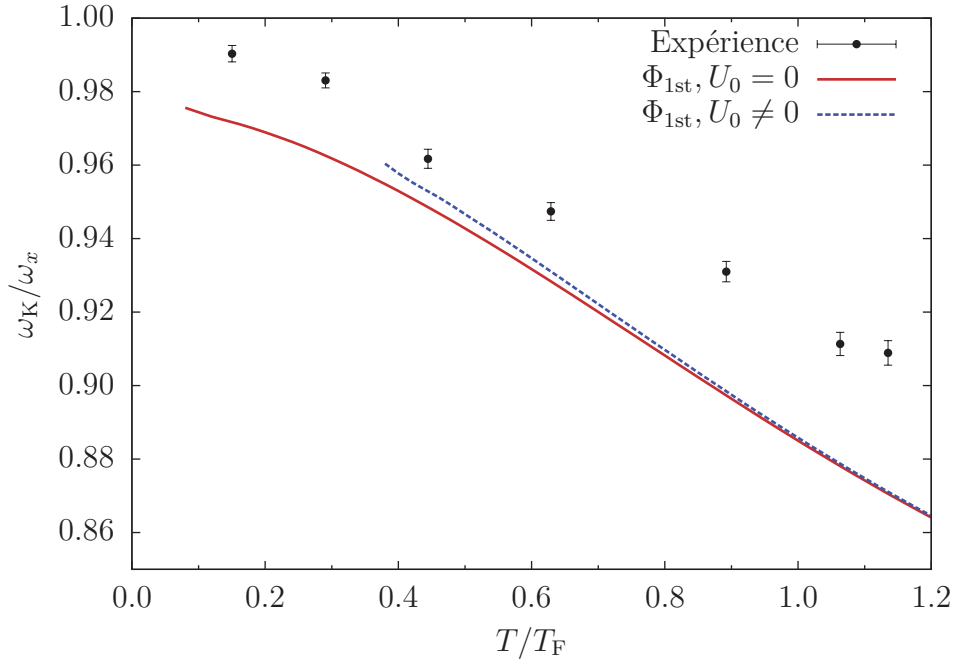
$$C' = -\frac{2\beta}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \bar{f}_0 x \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) \right) \quad (2.82)$$

décrivent, respectivement, les contributions du champ moyen et de l'anharmonicité du potentiel. La forme (2.82) traduit explicitement cela : si le potentiel est harmonique en  $x$ , nous aurons :

$$\frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.83)$$

Dans ce cas-là, et ce quelle que soit la valeur de  $C$ , la pulsation du mode sera la même que celle du piège. On retrouve alors le résultat énoncé par W. Kohn : l'interaction (le champ moyen) n'a aucune influence sur les effets d'anharmonicité lorsque nous sommes en présence d'un piège optique harmonique.

En revanche, dès que ce potentiel présente une forme différente, le champ moyen a sa propre contribution aux effets non-harmoniques. Dans notre cas, nous pouvons même nous attendre à ce que le champ moyen induise une réduction de la différence entre  $\omega_K$  et  $\omega_x$ . En effet, nous sommes toujours dans le cas où  $a$  est négatif : l'interaction est donc attractive. La prise en compte des effets de milieu provoque ainsi un resserrement du profil de densité du gaz vers le centre du piège. Il est donc moins facile pour les particules d'aller explorer les états d'énergie du piège présentant une grande anharmonicité.



**Figure 2.4 :** Évolution de la pulsation du mode de Kohn en fonction de la température pour les paramètres utilisés dans l'expérience [2] (points noirs) pour le potentiel de piège  $V_{\text{trap}} = V_{\text{six}}$  sans champ moyen (trait plein rouge). Les effets de milieu sont aussi représentés (tirets bleus). Ces résultats débutent pour  $T > T_C^{\text{SF}}$ , car notre calcul du champ moyen ne permet pas de décrire la phase superfluide.

Numériquement, nous pouvons établir la courbe des pulsations du mode de Kohn en fonction de la température (figure 2.4), pour les paramètres de l'expérience de la référence [2]. Nous noterons tout d'abord que les résultats numériques présentent la même tendance que les résultats obtenus par le groupe de Innsbruck : la pulsation du mode diminue lorsque la température augmente. Cependant il y a un écart non négligeable entre les deux études. Cela provient tout d'abord de l'ordre de la méthode utilisée [8] : celui-ci n'est pas suffisant pour décrire en détails la réalité du gaz<sup>6</sup>. En outre, l'*ansatz*  $\Phi_{1st}$  n'est pas complet car sa forme ne permet pas de rendre compte de l'effet des collisions. En effet, le terme  $A^{\text{coll}}$  est nul lorsque  $\phi_j$  est égal à  $x$  ou  $p_x$ . De plus, après discussion avec des chercheurs du groupe de Innsbruck [31], il apparaît que plusieurs paramètres définis dans [2] n'ont pas été déterminés de manière précise. Il se pourrait notamment qu'il y ait des imprécisions dans la thermométrie, ou sur la détermination même de la pulsation du piège  $\omega_x$  car il est nécessaire de connaître la pulsation du mode de Kohn pour la déterminer. La méthode expérimentale utilisée (extrapolation de  $\omega_K$  jusqu'à  $T = 0$  en considérant que les effets d'anharmonicité sont négligeables dans cette limite) n'est pas en accord avec la tendance montrée par nos résultats.

Une autre chose à souligner est la contribution du champ moyen : on voit que celle-ci est plutôt faible, alors que nous sommes dans le régime de fortes interactions. Cela peut surprendre, mais le faible impact du champ moyen sur les résultats liés aux modes

<sup>6</sup>Il faut se rappeler que la méthode des moments de l'équation de Boltzmann est une approximation.

collectifs a déjà été montré [8]. D'autre part, on remarquera que lorsque la température augmente, l'effet du champ moyen diminue ; on peut même remarquer qu'à partir de  $T = T_F$ , les courbes avec et sans champ moyen se confondent. Cela peut s'interpréter par le phénomène de dilatation thermique du gaz : plus le gaz est chaud, plus les particules sont éloignées. Dans ce cas, le champ moyen sera plus faible, et celui-ci aura alors encore moins d'impact.

Enfin, d'une manière générale, la conclusion principale que l'on peut tirer de ces résultats réside dans le fait que l'action du champ moyen est de réduire (faiblement) les effets anharmoniques et que ceux-ci augmentent avec la température. La première remarque est en accord avec nos espérances. La deuxième trouve son origine dans la dilatation du gaz provoquée par les températures plus élevées. Cela se traduit, d'un point de vue énergétique, comme la possibilité pour les atomes d'aller explorer des états où l'anharmonicité est plus importante (voir section 2.2.3).

Globalement, les résultats donnés par le premier ordre sont donc cohérents avec les principes physiques, mais ne décrivent pas encore complètement le comportement du système tel qu'il a été mesuré. Ainsi nous allons donc pousser l'étude à l'ordre supérieur de la méthode [5, 8] afin d'augmenter la précision de nos calculs et ainsi de nous rapprocher des données expérimentales.

## 2.6. L'ordre supérieur

### 2.6.1. Ansatz et potentiel de perturbation

Nous allons donc maintenant utiliser la fonction test de l'ordre supérieur afin d'étudier le mode de Kohn, toujours suivant l'axe  $x$ . Dans ce cas, le nombre de termes  $n$  dans  $\Phi$  passe de 2 à 18. On écrit ainsi :

$$\Phi_{3rd}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{18} c_i(t) \phi_i, \quad (2.84)$$

où nous définissons les composantes  $\phi_i$  comme :

$$\phi_1 = x ; \quad \phi_2 = p_x ; \quad (2.85)$$

$$\phi_3 = x^3 ; \quad \phi_4 = x^2 p_x ; \quad \phi_5 = x p_x^2 ; \quad \phi_6 = p_x^3 ; \quad (2.86)$$

$$\phi_7 = x y^2 ; \quad \phi_8 = y^2 p_x ; \quad \phi_9 = x y p_y ; \quad \phi_{10} = y p_x p_y ; \quad (2.87)$$

$$\phi_{11} = x p_y^2 ; \quad \phi_{12} = p_x p_y^2 ; \quad \phi_{13} = x z^2 ; \quad \phi_{14} = z^2 p_x ; \quad (2.88)$$

$$\phi_{15} = x z p_z ; \quad \phi_{16} = z p_x p_z ; \quad \phi_{17} = x p_z^2 ; \quad \phi_{18} = p_x p_z^2. \quad (2.89)$$

Nous remarquons d'ores et déjà que les termes  $\phi_1$  et  $\phi_2$  coïncident avec ceux déjà utilisés dans  $\Phi_{1st}$ . Les autres proviennent de toutes les combinaisons possibles de termes de troisième ordre de l'espace des phases satisfaisant les symétries du modes, c'est-à-

dire impaire suivant la transformation  $(x, p_x) \rightarrow (-x, -p_x)$  et paire suivant  $(y, p_y) \rightarrow (-y, -p_y)$  et  $(z, p_z) \rightarrow (-z, -p_z)$ .

Notons que désormais, contrairement à la fonction test à l'ordre le plus bas, celle-ci engendre un terme de collision non nul. Cela nous permet de tenir compte des effets des collisions. Ils sont importants dans la mesure où le phénomène de collision représente une voie de dissipation d'énergie. Un amortissement du mode peut donc apparaître. Pour pouvoir obtenir sa valeur, nous allons maintenant étudier la fonction réponse donnée par le potentiel de perturbation engendrant le mode de Kohn, dont la forme est donnée par :

$$\delta V_K(\mathbf{r}, t) = \alpha x \delta(t), \quad (2.90)$$

où  $\alpha$  est l'amplitude de la perturbation (un déplacement soudain à  $t = 0$  dans la direction  $x$ ). L'opérateur décrivant l'excitation est :

$$q_K(\mathbf{r}, \mathbf{p}) \equiv x. \quad (2.91)$$

La fonction réponse (2.69) se traduira donc par l'étude de  $\delta \langle q_K \rangle(\omega) = \alpha \langle x \rangle(\omega)$ , car la valeur moyenne de l'opérateur d'excitation à l'équilibre  $\langle x \rangle_0$  est nulle par définition : le gaz se situe au centre du piège lorsqu'il est à l'équilibre.

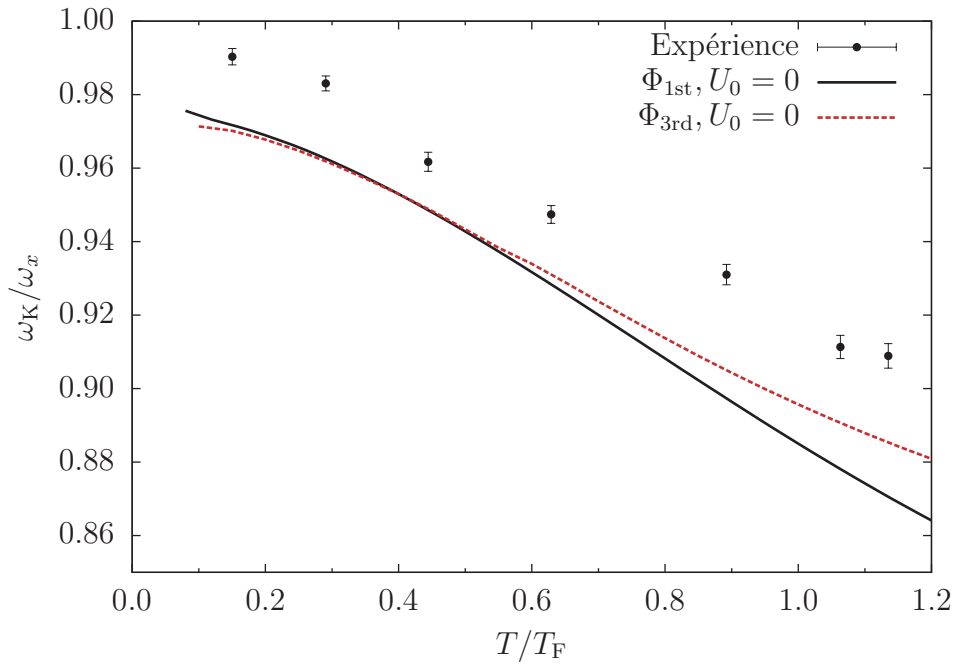
## 2.6.2. Brève comparaison entre les deux méthodes

Afin de comprendre ce qu'apporte l'approximation de plus haut ordre, nous avons tracé sur la figure 2.5 les résultats donnés par la méthode des moments aux deux ordres utilisés, et ce sans effets de milieu. On voit nettement une diminution des effets d'anharmonicité à haute température donnés par l'ordre supérieur : en admettant que celui-ci est plus précis que le premier, on peut en conclure que la méthode au plus bas ordre surestime les effets d'anharmonicité. Par ailleurs, la courbe pleine présente la même tendance que les résultats expérimentaux, bien qu'il n'y ait pas encore un accord parfait entre les données et nos résultats.

Maintenant, afin de décrire complètement le système (n'oublions pas que nous sommes dans le régime de forte interaction, au plus près de la résonance), il semble indispensable d'inclure dans les calculs les effets de milieu. Pour cela, nous allons rajouter le champ moyen ainsi que l'expression de la section efficace dans le milieu, paragraphe 2.3.

## 2.6.3. Pulsation du mode de Kohn

Dans ce paragraphe, il est donc question d'exciter le mode de Kohn  $q = x$ , et de regarder l'observable qui lui est propre  $\langle q \rangle(\omega) = \langle x \rangle(\omega)$ .



**Figure 2.5 :** Comparaison des deux ordres de la méthode : en trait plein l'ordre supérieur et en tirets l'ordre 1 présenté tout à l'heure. Nous n'avons pas inclus les effets de milieu dans ce graphe. On voit que le premier ordre surestime les effets d'anharmonicité du piège, surtout à haute température. Données expérimentales de [2].

### Fonction spectrale au troisième ordre

Comme désormais l'*ansatz* comporte 18 termes, il est probable que plusieurs valeurs propres contribuent à l'expression de la pulsation du mode. Afin de savoir lesquelles de ces 18 valeurs rentrent en jeu et avec quel poids, il est préférable d'utiliser la méthode de la fonction réponse, décrite dans la section 2.4.2, en considérant la définition (2.90).

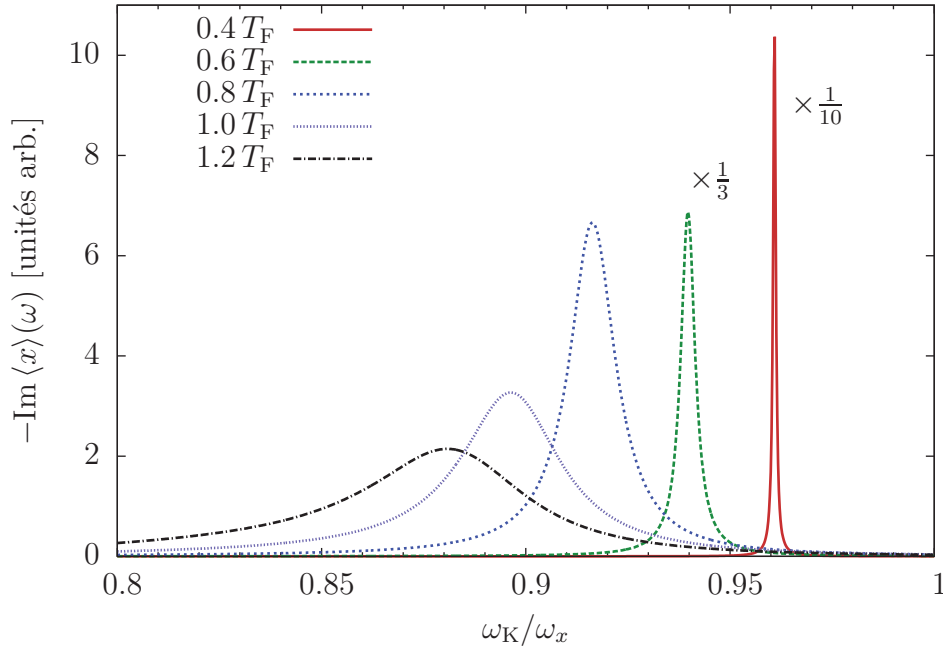
Les résultats numériques sont présentés dans la figure 2.6. Ceux-ci ont été obtenus en considérant le champ moyen et la section efficace modifiée par le milieu. Comme pour l'ordre le plus bas, on voit là aussi une diminution du rapport  $\omega_K/\omega_x$  lorsque la température augmente. La forme des fonctions nous montre aussi l'apparition d'un amortissement du mode (représenté par la largeur des pics), ce que l'on attendait en raison de la prise en compte des collisions.

### Effets de milieu

Afin de voir de quelle manière l'inclusion du champ moyen modifie la pulsation donnée par les calculs, on peut se référer aux figures 2.7 qui met en avant les fonctions réponses calculées pour deux températures différentes en utilisant ou non l'inclusion dans le calcul du champ moyen et de la section efficace.

La première constatation que l'on peut faire en observant la figure 2.7a est la forme de la réponse sans potentiel d'interaction : on observe deux pics distincts. On voit





**Figure 2.6 :** Fonction spectrale du mode de Kohn excité suivant  $x$  en présence des effets de milieu (champ moyen et section efficace), toujours dans les conditions expérimentales.

cependant qu’après l’ajout de  $U_0$  aux calculs, il ne subsiste qu’un seul pic. Il est important de noter ici que certaines valeurs propres donnent des résultats non physiques lorsqu’elles sont considérées individuellement. C’est pourquoi il est nécessaire d’utiliser la réponse spectrale globale, afin de connaître le poids de chacune de ces contributions.

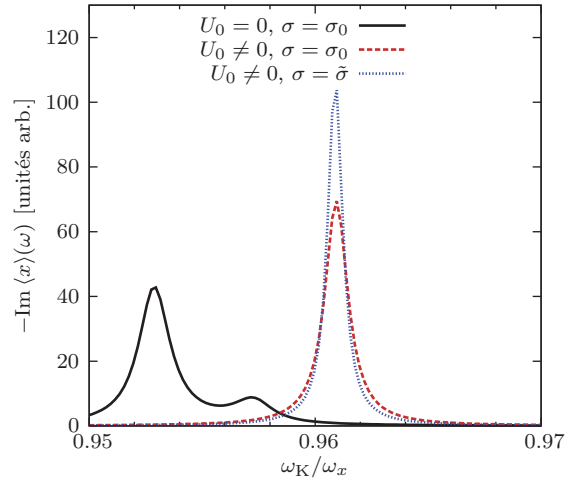
Il est par ailleurs important de souligner le fait que l’inclusion de la section efficace dans le milieu  $\tilde{\sigma}$  n’influe que faiblement sur la pulsation du mode. En revanche, à basse température, une modification significative de l’amplitude de la fonction spectrale est observée : cela peut alors traduire une variation de la largeur du pic, c’est-à-dire de l’amortissement. Nous verrons cela dans le prochain paragraphe.

Enfin, l’évolution des modifications avec la température nous montre que le champ moyen, comme prédit précédemment, n’a qu’un faible effet à haute température. On a la possibilité d’expliquer cela en se rappelant que le gaz se dilate lorsque la température augmente.

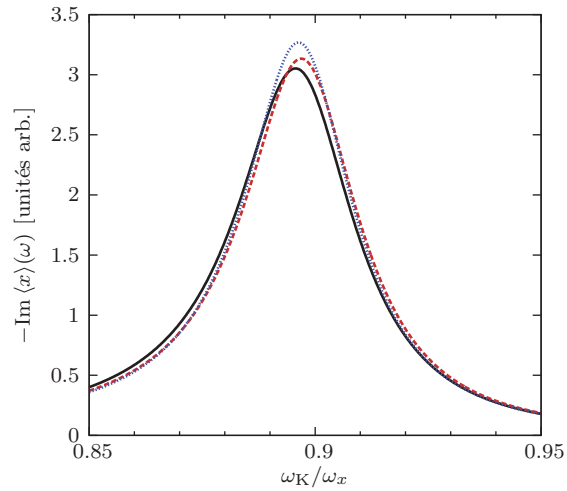
### Pulsation et amortissement

Afin d’obtenir la pulsation et l’amortissement du mode étudié, nous nous sommes inspirés des méthodes qu’utilisent les groupes de recherche expérimentaux afin de traiter les données récoltées [28]. Nous allons ainsi ajuster les courbes ne présentant qu’un pic à l’aide de lorentziennes de la forme :

$$L(\omega) = \frac{A}{\Gamma_K^2 + (\omega - \omega_K)^2}, \quad (2.92)$$

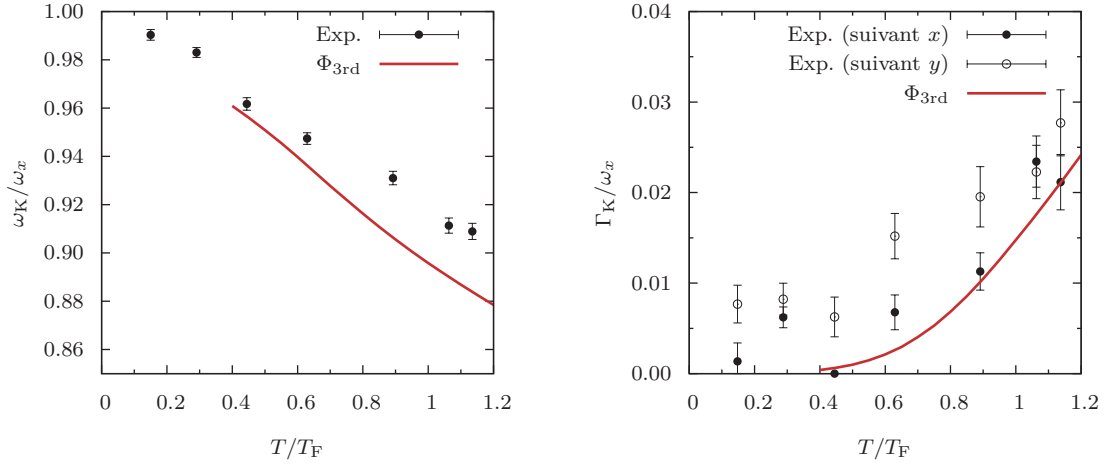


(a) Fonctions spectrales du mode de Kohn à  $T = 0.4 T_F$ .



(b) Fonctions spectrales du mode de Kohn à  $T = T_F$ .

**Figure 2.7:** Comparaison des résultats numériques avec et sans effets de milieu. La courbe en trait plein (noir) a été obtenue sans aucun effet de milieu, la courbe en tirets (rouge) avec seulement l'inclusion du champ moyen et la section efficace libre  $\sigma_0$ , et en pointillés (bleue), les valeurs avec champ moyen et section efficace dans le milieu  $\tilde{\sigma}$ . On voit qu'à température plus importante (b), ces effets sont minimes.



(a) Résultat de l'ajustement des fonctions spectrales pour les pulsations  $\omega_K$  du mode de Kohn.

(b) Résultat de l'ajustement des fonctions spectrales pour l'amortissement  $\Gamma_K$  du mode de Kohn.

**Figure 2.8 :** Résultats des ajustements effectués sur les fonctions spectrales données par le calcul numérique tenant compte des effets de milieu. Les résultats expérimentaux suivant les directions  $x$  (cercles pleins) et  $y$  (cercles vides) proviennent de [2, 31]. Les pulsations du mode obtenues analytiquement semblent surestimer les effets de l'anharmonicité, alors que les résultats sur l'amortissement présentent un bon accord.

où  $A$  est un paramètre d'amplitude,  $\Gamma_K$  l'amortissement que l'on veut déterminer et  $\omega_K$  la pulsation du mode, sur laquelle est centrée cette lorentzienne.

Cet ajustement a été réalisé pour différentes températures, les résultats sont présentés en figure 2.8. La température mesurée lors des expériences est une température relative [32, 33], couramment notée  $\tilde{T}$ , qui est par la suite convertie à la grandeur sans dimension  $T/T_F$ . Cependant, il se pourrait qu'il y ait quelques incertitudes dans la détermination du coefficient reliant les deux grandeurs. Ces informations peuvent donc expliquer les différences de valeur que l'on obtient entre les points expérimentaux et les calculs pour la pulsation ; la température des données serait surestimée. Comme évoqué précédemment, la détermination de la pulsation du piège joue elle aussi un rôle déterminant dans les résultats finals. Il faudra cependant noter que globalement, l'évolution en fonction de la température est bien reproduite par notre modèle.

Par ailleurs, il est bon de noter que les résultats sur l'amortissement présentent non seulement la même tendance, comme précédemment, mais en outre les valeurs trouvées sont en accord avec les mesures. Cela nous permet de penser que notre modèle donne des résultats corrects.

Enfin, une circonstance non négligeable peut aussi conforter nos résultats : le mode de Kohn est utilisé afin de définir les pulsations des lasers dans les trois directions,  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$ . Or nous venons de voir que la fréquence de ce mode dépend de la température : le rapport  $\omega_K/\omega_x$  dépendant explicitement de  $\omega_x$ , il est ainsi très incertain, d'un point de vue expérimental, de donner le rapport réel. En effet, les résultats présentés dans [2] ont été normalisés en utilisant un ajustement linéaire des données de  $\omega_K(T)$  [31]. Or on

peut s'apercevoir que la dépendance en température de la fréquence n'est pas linéaire, et nécessite une théorie beaucoup plus détaillée, ce qui est l'objet de notre travail. Du fait de cette extrapolation à  $T = 0$ , la fréquence  $\omega_x$  aurait été légèrement surestimée par le groupe de Innsbruck.

## Discussion

Il est bon à ce stade de l'étude de faire un point sur les résultats obtenus. Nous venons de mettre en évidence une dépendance de la pulsation du mode de Kohn en la température dans les pièges optiques utilisés lors des expériences. Cela apporte ainsi une première information : bien que cet effet ne s'écarte de la valeur prédite que de quelques pourcents, les méthodes utilisées afin de corriger les données expérimentales sont encore très aléatoires. Cela peut entraîner des incertitudes de mesures sur les autres modes (notamment le mode quadrupolaire qui permet de mettre en évidence la transition de phase attendue) [3].

L'autre point important à ce stade de l'étude est l'apparition d'un amortissement du mode de Kohn. On a vu que celui-ci augmente avec la température : aux alentours de  $T = 0.4 T_F$ , l'amortissement est de l'ordre de  $\Gamma_K/\omega_x \sim 10^{-3}$ , ce qui signifie qu'il faudra plusieurs centaines d'oscillations du centre de masse pour voir diminuer son amplitude d'un facteur e, alors qu'à  $T = 1.2 T_F$  nous avons déjà  $\Gamma_K/\omega_x = 2.5 \times 10^{-2}$ . Il ne faudra qu'environ sept oscillations<sup>7</sup> avant la fin du mouvement périodique ! L'origine physique de cet amortissement se trouve dans les nouvelles possibilités offertes par le caractère non-harmonique du potentiel confinant. En effet, le théorème de Kohn prédit un mouvement du centre de masse à la pulsation du piège et non amorti, à la condition que les particules évoluent dans un potentiel extérieur confinant harmonique. Cette évolution ne présente alors aucune modification de la taille ou de la forme du nuage [34]. Nous avons ainsi mis en avant une deuxième particularité des pièges expérimentaux.

L'amortissement de ce mode peut donc être compris comme une certaine dissipation de l'énergie des particules. Nous allons tout de suite voir comment ce phénomène apparaît au cours du mouvement.

### 2.6.4. Amortissement – Couplage entre les modes

Dans la limite sans collision et du point de vue des particules du système, la différence entre un potentiel harmonique et le potentiel de piège se trouve dans le fait que ce dernier permet aux atomes de vibrer à des pulsations différentes. Plus précisément, les particules évoluant dans un potentiel quadratique au sein d'un système présentant un mouvement collectif du type du mode de Kohn auront toutes la même pulsation,  $\omega_x$ . Lorsqu'on passe au potentiel optique réel, des différences apparaissent désormais entre les fréquences individuelles : la pulsation globale, on l'a vu, en est alors modifiée et

<sup>7</sup> On part donc d'une base de diminution de l'amplitude d'un facteur e. Le nombre d'oscillations  $n$  est alors donné simplement par  $n = \left\lceil \frac{\omega_x}{2\pi\Gamma_K} \right\rceil$ , ce qui donne  $n = 7$  lorsque  $\frac{\Gamma_K}{\omega_x} = 2.5 \times 10^{-2}$ .

un amortissement apparaît, dû à la dissipation d'énergie désormais possible entre les particules.

On peut illustrer cette perte d'énergie en voyant l'anharmonicité du potentiel comme une augmentation des degrés de libertés de l'espace des phases. Il en résulte alors des dissipations d'énergie, notamment en raison de ces collisions qui sont désormais autorisées. En influant sur la vitesse de chaque particule, des irrégularités dans l'oscillation de chacun des atomes apparaissent, ce qui permet à d'autres modes collectifs d'être excités.

Lorsque les mouvements ne sont plus sans collision, il est très difficile de pouvoir suivre la trajectoire d'une particule. C'est pourquoi on doit étudier le comportement de l'ensemble du système. La modification de la forme du piège peut provoquer des distorsions du système pendant le mouvement, ce qui permet l'émergence de ces autres mouvements collectifs. Toutefois, il est important de remarquer que ces effets ne peuvent pas être traduits par l'*ansatz* du premier ordre; des termes linéaires en  $x$  et  $p_x$  ne peuvent pas représenter de changement de forme du nuage de l'espace des phases. Il en résulte donc que l'étude que nous allons faire sur les asymétries du gaz avec  $\Phi_{3rd}$  seront en réalité des résultats du premier ordre pour ces modes caractéristiques<sup>8</sup>. On poursuit un double objectif : décrire le mode de Kohn à l'ordre supérieur mais les modes auxquels il se couple à celui le plus bas.

### Compression dipolaire radiale

Penchons-nous dans un premier temps sur la déformation possible suivant la direction radiale. Ce mode se traduit par l'oscillation de la valeur du diamètre dans les directions  $x$  puis  $y$ , en opposition de phase, voir la figure 2.9. Pour obtenir le bon opérateur, il faut partir de la définition habituelle de l'asymétrie<sup>9</sup>, qui est proportionnelle à  $\langle (x - \langle x \rangle_0)^3 \rangle_0$ , pour en dériver deux composantes principales (en ne gardant que les termes linéaires) : la partie dipolaire et la partie octupolaire.

Après linéarisation, on arrive à :

$$\langle q_{\text{comp}} \rangle = \langle (x - \langle x \rangle_0)^3 \rangle_0 \simeq \langle x^3 - 3x\langle x^2 \rangle_0 \rangle_0, \quad (2.93)$$

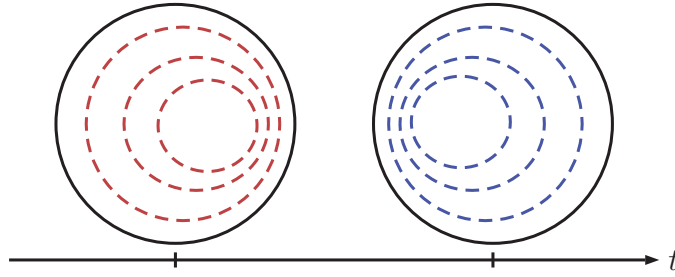
ce que l'on décomposera en

$$\langle q_{\text{comp}} \rangle = \frac{3}{4} \langle q_{\text{dip}} \rangle + \frac{1}{4} \langle q_{\text{oct}} \rangle, \quad (2.94)$$

---

<sup>8</sup>En effet, seuls les termes d'ordre supérieurs ou égaux à trois sont aptes à décrire une distorsion de la sphère des impulsions.

<sup>9</sup>En général, ce mode est appelé *skewness*.



**Figure 2.9 :** Illustration du mode de compression dipolaire radial dans le plan  $(xOy)$ , pour deux étapes du mouvement. Le trait plein représente la limite du gaz dans le plan radial. Les tirets sont des lignes d'isodensité du gaz lorsque la déformation est extrême. Il est important de noter que le centre de masse du système n'est pas modifié lors de l'excitation de ce mode.

avec<sup>10</sup>

$$q_{\text{dip}} = (r_{\perp}^2 - 2\langle r_{\perp}^2 \rangle_0) r_{\perp} \cos \varphi = x(x^2 + y^2 - 2\langle r_{\perp}^2 \rangle_0), \quad (2.96)$$

et

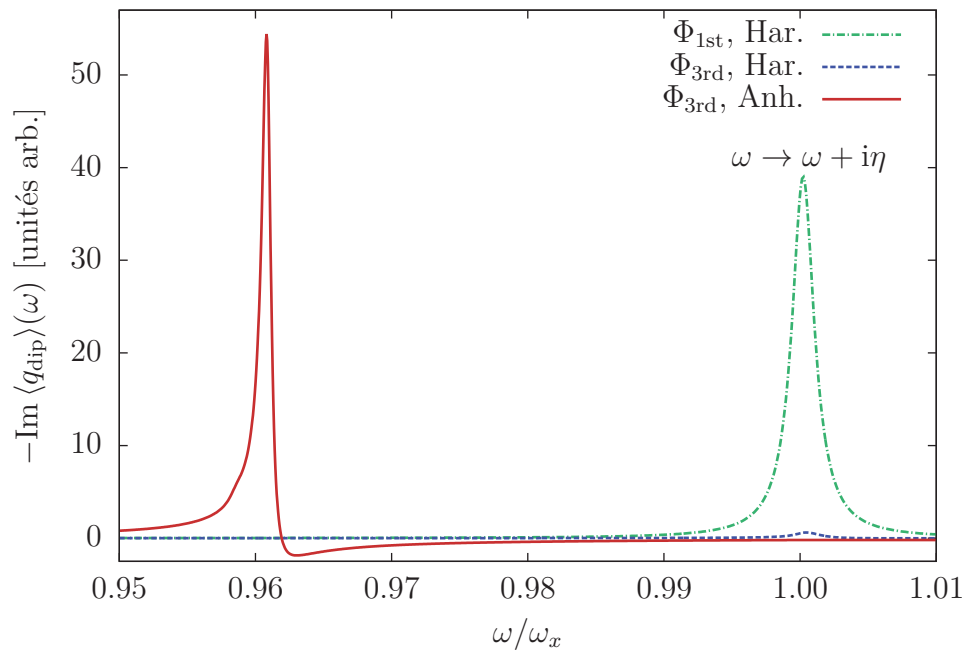
$$q_{\text{oct}} = r_{\perp}^3 \cos(3\varphi) = x(x^2 - 3y^2). \quad (2.97)$$

Il est important de noter ici que seule la composante dipolaire  $\langle q_{\text{dip}} \rangle$  aura la possibilité de se coupler à l'oscillation du centre de masse du système. En effet, seuls les modes de même symétrie ont la possibilité de se coupler entre eux. Par exemple, le mode de Kohn est un mode dont la projection du moment angulaire  $\ell$  (le nombre de pôles présentés par le mouvement) sur l'axe  $z$  est égal à 1. Il en est de même pour le mode dipolaire radial, mais pas du mode octupolaire, qui est à  $\ell = 3$ .

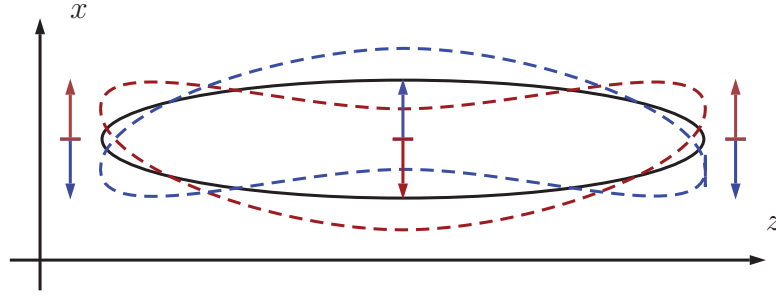
Afin de tester la validité de notre approche, nous avons réalisé des calculs en considérant les potentiels harmonique et  $V_{\text{six}}$ . Si nos calculs sont justes, nous devons trouver une fonction réponse du mode dipolaire  $-\text{Im} \langle q_{\text{dip}} \rangle$  nulle pour une excitation du mode de Kohn lorsque le potentiel est purement quadratique. Les résultats obtenus sont visibles en figure 2.10. Il est clair que la différence d'amplitude dans la fonction spectrale conforte la validité de notre modèle. En effet, bien qu'il existe une réponse non nulle pour le cas harmonique, celle-ci n'est pas physique : en s'appuyant sur les résultats de la fonction test à l'ordre 1, on peut penser que ce pic est un artefact dû à l'*ansatz* utilisé, déjà bien corrigé par l'ordre supérieur. Cet effet provient de l'inclusion du potentiel de champ moyen, qui a pour effet de déformer le nuage. Cependant, aucune déformation du système n'est permise dans la description du mode de Kohn dans un potentiel harmonique. Par ailleurs, le cas anharmonique produit une fonction spectrale dont l'amplitude est au moins dix fois supérieure à ces effets négligeables : le mode de Kohn se couple sans aucun doute avec la compression radiale dipolaire. Notons aussi

<sup>10</sup> Nous utilisons ici les notations dans le repère cylindrique  $(r_{\perp}, \varphi, z)$ , ce qui entraîne que  $x = r_{\perp} \cos \varphi$  et  $y = r_{\perp} \sin \varphi$ . Aussi,

$$\cos^3 x = 3 \cos x + \cos(3x). \quad (2.95)$$



**Figure 2.10:** Réponse du mode dipolaire à l'excitation du mode de Kohn pour les cas harmoniques au premier et troisième ordre (tirets mixtes verts et tirets bleus, resp.) et le cas anharmonique au troisième ordre (trait plein rouge) pour une température de  $T = 0.4 T_F$ . Nous avons rajouté une largeur artificielle  $\eta \equiv \omega_x/1000$  dans les cas harmonique (aucun amortissement). Le fait que l'amplitude de la réponse dans le cas harmonique au 3<sup>ème</sup> ordre soit vingt fois plus faible que dans le cas anharmonique est très satisfaisant.



**Figure 2.11 :** Représentation schématique de la flexion du nuage dans le plan  $(xOz)$  pour un potentiel de confinement gaussien.

un décalage de la position du pic vers une valeur de la pulsation inférieure à  $\omega_x$ . Cela suit la tendance déjà mise en avant pour le mode de Kohn (figure 2.8).

Ce résultat nous permet donc d'expliquer une partie de la dissipation de l'énergie du mode de Kohn lorsque celui-ci a lieu dans un potentiel expérimental. Cependant, nous avons identifié un autre mode responsable de cet amortissement.

### Flexion suivant l'axe $z$ ou $z$ -bending

Lorsque nous avons représenté le potentiel de piège expérimental en figure 2.1b, nous l'avons tracé pour  $z = 0$ . Or, la particularité de la forme de cigare du nuage réside aussi dans le fait qu'elle n'est pas la même tout au long de l'axe  $z$ . Alors il peut apparaître un déphasage entre les particules se trouvant aux alentours de  $z = 0$  et celles excentrées à grandes valeurs de  $|z|$ . Cette particularité est aussi une conséquence de l'anharmonicité du potentiel confinant et constitue une autre cause de l'amortissement du mode de Kohn.

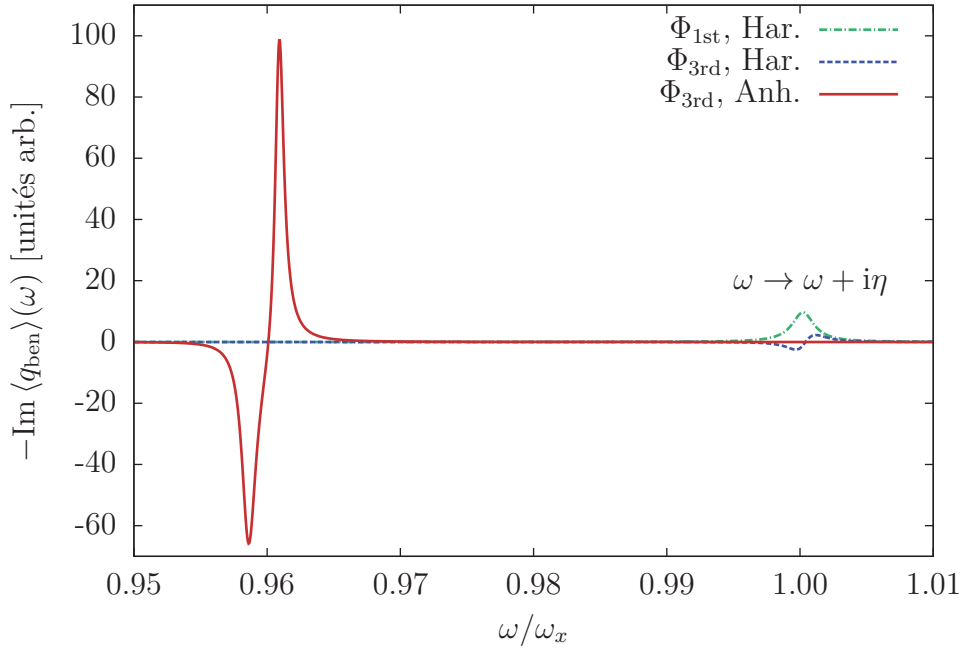
La force due au potentiel de piège, le long de l'axe  $z$ , n'est donc pas égale pour toutes les particules : cela peut alors engendrer une flexion du nuage d'atomes suivant cet axe, comme présenté par la figure 2.11. Un mouvement en opposition de phase entre les particules du centre et celle du bord apparaît alors.

Comme pour le mode de compression radiale, nous avons effectué les calculs de la réponse  $-\text{Im} \langle q_{\text{ben}} \rangle(\omega)$  pour une excitation du mode de Kohn dans les cas harmonique et anharmonique, afin de confirmer les calculs. On définit

$$q_{\text{ben}} = x(z^2 - \langle z^2 \rangle_0). \quad (2.98)$$

La figure 2.12 présente les résultats obtenus pour ce mode. On constate là aussi que le cas harmonique n'est pas significatif, et résulte de l'inconsistance de l'*ansatz*, comme nous l'avons mentionné précédemment à propos du mode dipolaire. Le mode  $z$ -bending est donc présent seulement lorsque le potentiel de confinement est anharmonique : nous avons donc là une mise en évidence de son apparition, ce qui coïncide avec l'augmentation de la valeur de l'amortissement du mode de Kohn.





**Figure 2.12 :** Réponse du mode  $z$ -bending à l'excitation du mode de Kohn pour les cas harmoniques (tirets verts et bleus) et anharmonique (plein rouge) à  $T = 0.4 T_F$ . Nous avons là aussi rajouté une largeur artificielle  $\eta \equiv \omega_x/1000$  dans les cas harmonique. Il existe un facteur 20 entre les deux cas, ce qui est satisfaisant.

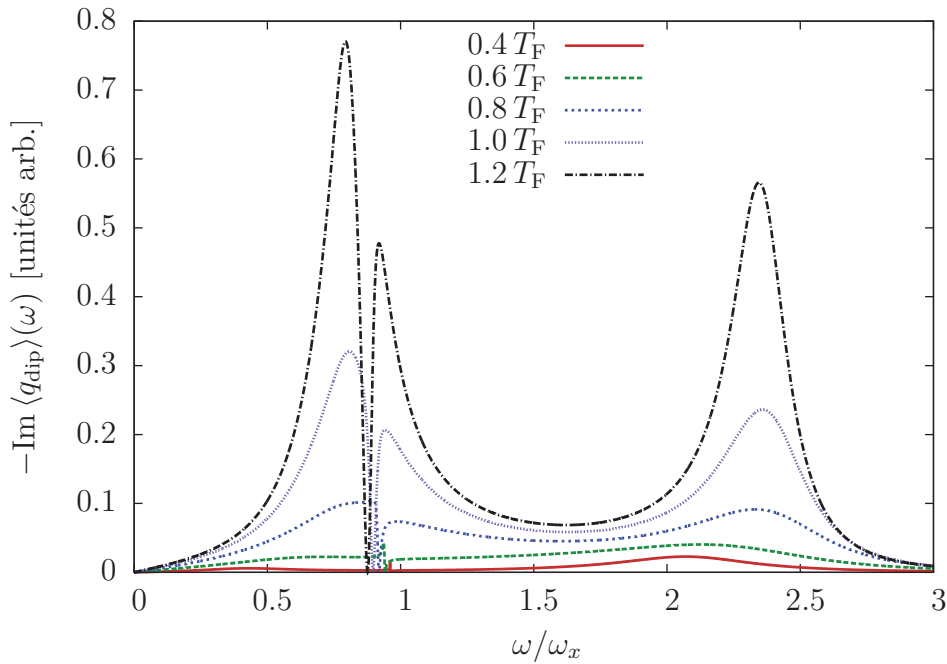
Il est bon de remarquer l'apparition d'un décalage vers les valeurs plus petites de la pulsation, en raison de l'anharmonicité.

Comme nous l'avons décrit lors de la présentation des calculs de l'amortissement, le potentiel expérimental ouvre l'espace des phases et permet ainsi l'apparition de modes venant perturber la vibration du centre de masse. Afin de mieux comprendre comment ces modes se comportent, nous allons maintenant calculer leur réponse spectrale totale, afin de les décrire entièrement.

## 2.7. Modes collectifs dans l'espace des phases d'ordre 3

L'*ansatz* (2.84) contient les termes nécessaires à l'étude complète des modes se couplant au mode de Kohn. De ce fait, nous allons les étudier plus précisément, d'une part afin d'identifier les différentes manières dont ces modes contribuent à l'amortissement du mode de Kohn et d'autre part pour connaître, grâce à notre modèle, les modifications des pulsations que l'anharmonicité engendre.

Maintenant, nous allons exciter le mode que l'on veut étudier. Par exemple, pour le mode dipolaire, nous avons désormais  $\delta V = \alpha q_{\text{dip}} \delta(t)$  et on regardera la fonction spectrale de ce même mode,  $-\text{Im} \langle q_{\text{dip}} \rangle(\omega)$ , toujours en incluant les effets de milieu.



**Figure 2.13 :** Fonction de réponse à l'excitation dipolaire dans le cas anharmonique, avec les effets de milieu et dans les caractéristiques de piège expérimentales. On constate, comme dans le cas harmonique, deux modes à des fréquences séparées de  $2\omega_x$  environ. Ceci dit, ils ne sont plus aux valeurs théoriques attendues ( $\omega/\omega_x = 1$  et  $3$ ). Le décrochement pour le mode à basse fréquence est significatif d'un couplage avec un autre mode, en l'occurrence ici le mode de Kohn.

### 2.7.1. Mode dipolaire

#### Fonction de réponse

Dans la limite sans collision [35], des calculs permettent d'extraire la pulsation de ce mode dans le cas d'un potentiel extérieur harmonique : on trouve  $\omega/\omega_x = 1$  et  $3$ . Ces valeurs constituent donc une référence pour le test de la méthode numérique, mais aussi un point de repère permettant d'évaluer l'effet du potentiel expérimental sur les caractéristiques du mode. Nous avons tracé la fonction de réponse à l'excitation dipolaire dans le cas expérimental en figure 2.13.

La première remarque que l'on peut faire vis-à-vis de ces résultats est que les fréquences de ce mode sont décalées vers des valeurs plus faibles : il est évident que l'anharmonicité a un effet sur le comportement de l'excitation dipolaire.

Dans la limite sans collisions (à haute température), on retrouve très distinctement deux modes. Cependant, ceux-ci sont très amortis contrairement au mode de Kohn. Lorsque la température diminue, l'amortissement devient tellement important que ces deux vibrations disparaissent complètement (courbe en trait plein rouge), pour une température  $T = 0.4 T_F$ , proche de la température critique.

$i$	$\omega_i$	$\Gamma_i$	$c_{1i}$
1	0.95	$\emptyset$	$\emptyset$
2	1.00	0.30	0.050
3	0.90	0.01	0.005

**Table 2.1** : Paramètres arbitraires utilisés pour tracer les courbes de réponses.

Par ailleurs, aux alentours de la valeur de la pulsation du mode de Kohn, la réponse spectrale présente une chute caractéristique due au couplage avec le mode d'oscillation du centre de masse. Ce curieux « plongeon » est la représentation spectrale de l'origine de l'amortissement du mode de Kohn lorsque le potentiel n'est pas harmonique : l'espace des phases permet alors une dissipation de l'énergie, notamment dans l'excitation parasite du mode dipolaire de basse fréquence (pic aux alentours de  $\omega = \omega_x$ ).

### Modèle simplifié d'un couplage entre trois modes

On peut facilement mettre en évidence l'apparition d'une telle chute brutale dans le cas de deux modes de vibration couplés. Si l'on établit un modèle très schématique représentant le couplage entre trois modes, dénommés 1 (sans amortissement : mode de Kohn), 2 et 3 (présentant un amortissement, respectivement mode dipolaire et *z-bending*), alors on peut définir la matrice  $A(\omega)$  telle que :

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} \omega - \omega_1 & c_{12} & c_{13} \\ c_{12}^* & \omega - \omega_2 + i\Gamma_2 & 0 \\ c_{13}^* & 0 & \omega - \omega_3 + i\Gamma_3 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

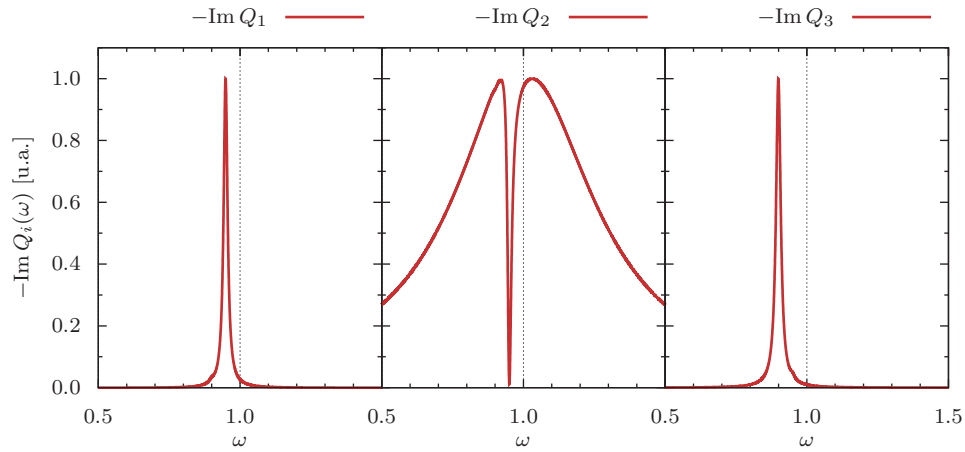
Les  $\omega_i$  sont les pulsations de ces modes,  $\Gamma_i$  les amortissements, et les coefficients  $c_{ij}$  définissent le couplage entre les modes  $i$  et  $j$ . On considèrera qu'il est nul entre les modes 2 et 3. Les réponses en fréquence de chaque modes  $-\text{Im } Q_i$ , avec  $i \in \{1, 2, 3\}$ , sont données par :

$$-\text{Im } Q_i(\omega) = -\text{Im } (A^{-1})_{ii}(\omega), \quad (2.100)$$

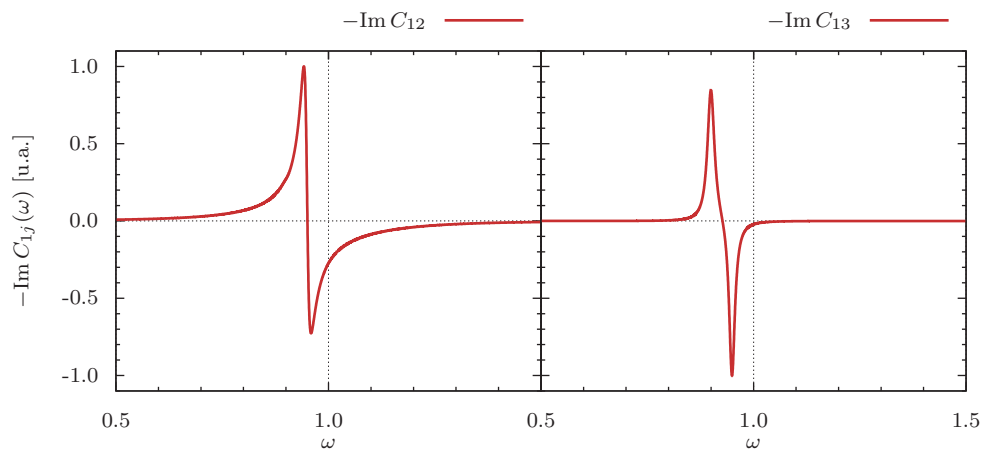
et les réponses croisées (réponse de l'excitation du mode  $j$  sur l'observable de  $i$ , comme nous avons fait au paragraphe 2.6.4), par :

$$-\text{Im } C_{ij}(\omega) = -\text{Im } (A^{-1})_{ij}(\omega). \quad (2.101)$$

En considérant les paramètres arbitraires du tableau 2.1, nous pouvons tracer ces réponses très facilement car elles présentent une solution analytique. Si l'on trace  $-\text{Im } Q_2$  avec un couplage  $c_{12}$  arbitrairement fort, on voit apparaître directement une brisure de

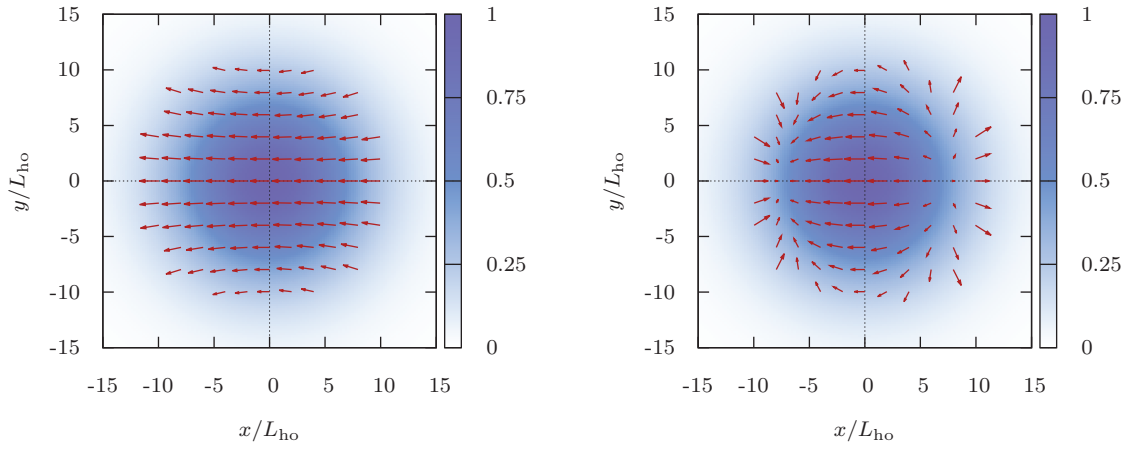


(a) Allure des réponses des modes 1, 2 et 3 à leur propre excitation.



(b) Allure des réponses du mode 1 pour l'excitation de 2 (gauche) et 3 (droite).

**Figure 2.14:** Fonctions de réponse  $-\text{Im } Q_i$  et  $-\text{Im } C_{1i}$  tracées en fonction de la pulsation  $\omega$ . L'apparition du plongeon caractéristique est nettement visible sur la courbe  $-\text{Im } Q_2$ .



(a) Contribution de basse fréquence au mode dipolaire, celui qui est fortement couplé au mode de Kohn. (b) Contribution haute fréquence au mode dipolaire.

**Figure 2.15 :** Champ de vitesse (flèches rouges) pour les deux contributions du mode dipolaire, dans les mêmes conditions que pour la figure 2.13 et à  $T = T_F$ . En bleu est superposé la valeur de la densité intégrée dans la direction radiale, normalisée à la valeur au centre.

la courbe pour  $\omega = \omega_1$ , comme la figure 2.14a le montre très facilement. Par ailleurs, les courbes de la figure 2.14b, qui représentent la réponse du mode 1 à l'excitation des modes 2 puis 3 confirment les résultats obtenus dans le paragraphe 2.6.4. Les spectres ont la même forme.

## Champs de vitesse

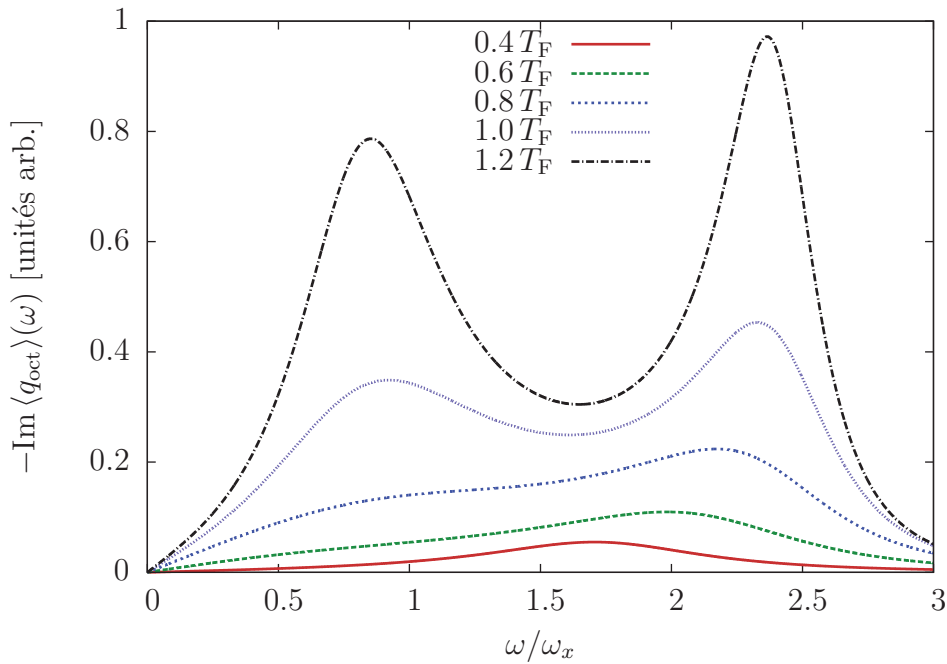
Afin d'illustrer ce qu'il se passe au sein du nuage d'atomes, nous avons tracé les champs de vitesse engendrés par ces deux modes dipolaires à basse fréquence (figure 2.15a) et à haute fréquence (figure 2.15b), dans les mêmes conditions que pour la figure 2.13 et à la température de Fermi. Ceux-ci sont définis par :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\rho} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad (2.102)$$

et dans le cadre de l'étude à l'ordre 3, par l'intégrale :

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\beta\rho} \sum_{j=1}^{18} c_j(\omega) \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0 \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{p}}, \quad (2.103)$$

où les  $\phi_j$  sont les termes nécessaires à la description des modes étudiés.



**Figure 2.16 :** Fonction spectrale du mode octupolaire dans le cas anharmonique, avec les effets de milieu, dans les conditions de l'expérience.

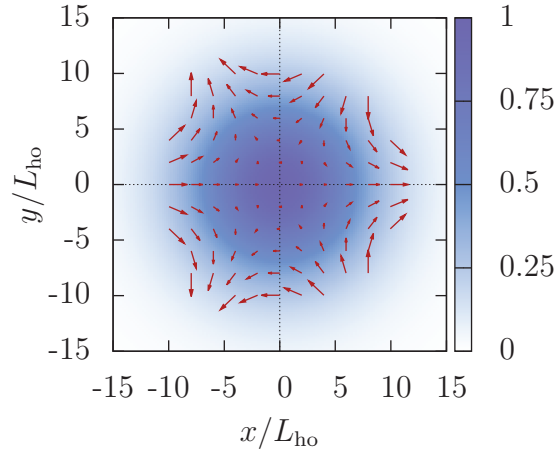
On peut remarquer alors que le mode de basse fréquence est un mode de déplacement, ne comportant pas de nœuds. Il a donc le même comportement que le mode de Kohn : il se couple ! On peut en effet conclure qu'un mouvement parasite dû à ce mode dipolaire de faible fréquence est à l'origine de la violation du théorème de Kohn dans les pièges anharmoniques. Par ailleurs, ce résultat est cohérent avec le décrochement de la fonction réponse constaté pour ce mode dipolaire à basse fréquence (figure 2.13).

À haute fréquence, des zones de compression apparaissent, notamment en surface. De ce fait, bien que ces modes soient excités par le même opérateur, ils présentent des comportements totalement différents, et il ne va pas pouvoir influencer sur le mode de Kohn car son comportement en est trop éloigné. À noter que ce mouvement collectif peut être rapproché d'un mode qui apparaît dans les noyaux atomiques (mode de compression de la résonance géante isoscalaire dipolaire<sup>11</sup>), voir par exemple la figure 6 de l'article très complet de Serr *et al.* [36].

### 2.7.2. Mode octupolaire

Voyons maintenant l'évolution des fréquences du mode octupolaire. Grâce à une étude dans le cas d'un piège harmonique, nous savons que l'opérateur d'excitation octupolaire  $q_{\text{oct}}$  engendre, comme le mode dipolaire, deux modes collectifs : l'un à basse fréquence ( $\omega = \omega_x$ ), l'autre à haute fréquence ( $\omega = 3\omega_x$ ). La figure 2.16 regroupe les résultats obtenus pour les fonctions réponses calculées pour différentes valeurs de la

<sup>11</sup>Isoscalar giant dipole compression mode.



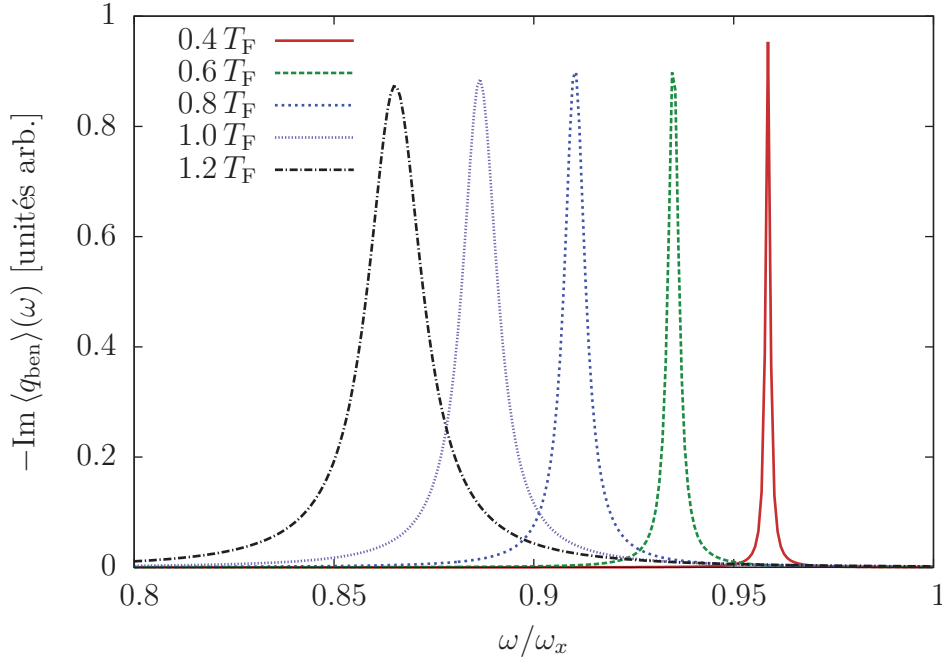
**Figure 2.17:** Champ de vitesse pour l'excitation à haute fréquence du mode octupolaire, pour la courbe à  $T = T_F$  de la figure 2.16. La zone colorée (bleue) représente la densité intégrée dans la direction axiale normalisée à la valeur centrale. En raison d'une multipolarité différente entre les modes de Kohn et octupolaire, ceux-ci ne vont pas se coupler.

température. Le système a subi une excitation octupolaire dans le cadre d'un potentiel anharmonique et en tenant compte des effets de milieu.

Comme pour le cas harmonique et sans collisions, deux pulsations caractéristiques apparaissent. Cependant, l'absence de « plongeon » de la fonction réponse illustre le fait que ceux-ci n'ont pas d'influence sur le mode de Kohn dans les conditions expérimentales. On constate que le caractère anharmonique du piège a pour effet de réduire les fréquences et augmenter les amortissements, comme pour les modes que l'on a étudié précédemment.

On peut cependant discuter de l'évolution des réponses lorsque la température diminue (lorsque le régime hydrodynamique s'installe). Les deux pics constatés précédemment laissent place à un pic unique, présentant un fort amortissement. Cet effet est connu, et dans le cadre d'un piège harmonique dans ces conditions, la valeur centrale attendue est de  $\omega = \sqrt{3}\omega_x$  [37]. Lorsque l'on augmente arbitrairement le facteur de collision, afin d'atteindre artificiellement ce régime (multiplication de la valeur de la section efficace par un facteur 500), nous avons obtenu une valeur de  $\omega \simeq 1.58\omega_x$ . La réduction de cette valeur est toujours liée à l'anharmonicité du piège.

Enfin, la figure 2.17 représente le champ de vitesse pour le mode octupolaire à haute fréquence pour la courbe de la figure 2.16 à  $T = T_F$ , sachant que celui à basse fréquence est très similaire. Une compression au centre du piège apparaît, mais en raison de la différence de multipolarité, ces deux modes ne vont pas se coupler.



**Figure 2.18 :** Fonction spectrale du mode  $z$ -bending dans le cas anharmonique, avec les effets de milieu, toujours dans les conditions expérimentales.

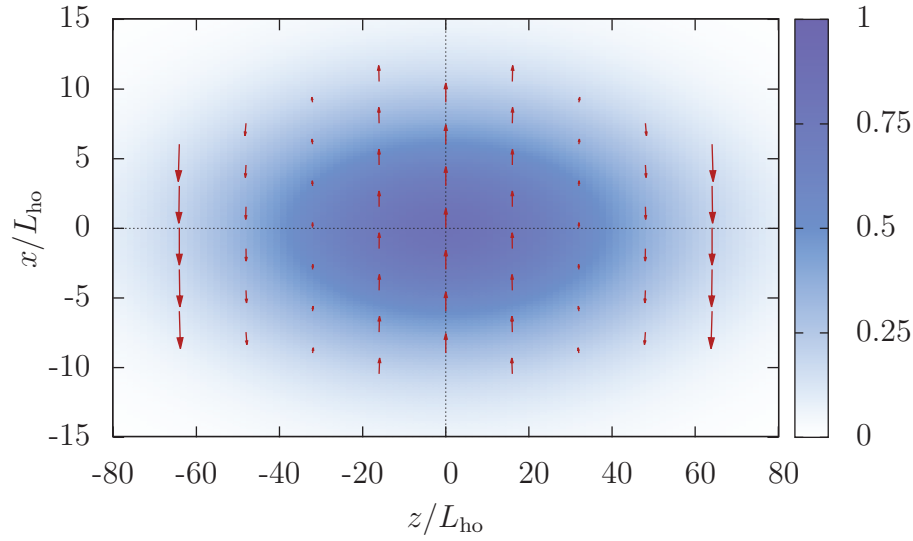
### 2.7.3. Mode $z$ -bending

Notre définition de la fonction test au troisième ordre nous permet d'étudier un dernier mode susceptible d'interagir avec le mode de Kohn. L'excitation  $z$ -bending nous permet ainsi d'obtenir les réponses en figure 2.18, toujours dans les mêmes conditions que précédemment, pour différentes températures. On considère ici l'excitation  $q = q_{\text{ben}}$  et l'observable  $\langle q \rangle = \langle q_{\text{ben}} \rangle$ .

Dans le cas d'un gaz sans collisions piégé par un potentiel harmonique, l'étude théorique d'une excitation engendrée par l'opérateur  $q_{\text{ben}}$  prédit l'apparition de trois modes dont les fréquences sont  $\omega = \omega_x$  et  $\omega = \omega_x \pm 2\omega_z$ . Comme nous sommes en conditions expérimentales, il est évident que les collisions jouent ici un rôle important. De ce fait, les trois pics attendus n'apparaissent pas dans nos résultats. Cependant, le pic prépondérant que nous pouvons observer ici est proche de la valeur de  $\omega_x$ . On voit une fois de plus l'action de diminution de la pulsation due à l'anharmonicité, le spectre ressemble ainsi à celui du mode de Kohn.

Il apparaît par ailleurs que l'amortissement de ce mode est moins important que celui du mode de Kohn, mais nous ne pouvons rien en conclure du fait que notre fonction test ne peut résoudre un autre mode susceptible d'augmenter l'amortissement de celui-ci. Il s'agit d'un mode radial de compression, modulé suivant la direction axiale. Concrètement, l'opérateur est défini par  $(z^2 - \langle z^2 \rangle_0)q_{\text{dip}}$ . Cependant celui-ci n'est pas contenu dans notre fonction-test, mais pourrait éventuellement donner lieu à une étude complémentaire.





**Figure 2.19 :** Champ de vitesse (flèches rouges) pour une température de  $T = T_F$  dans les mêmes conditions que la figure 2.18. La zone bleue représente la densité intégrée dans la direction  $y$  et normalisée à la valeur au centre du piège.

En outre, aucun décrochage caractéristique d'un couplage avec un autre mode, comme le cas du mode dipolaire, n'est présent, ce qui s'avère être un dernier argument en faveur de la faible influence du mode  $z$ -bending sur le mode de Kohn.

Pour finir l'étude, le champ de vitesse est tracé en figure 2.19 pour la température de Fermi. On reconnaît très facilement les mouvements décrits lors de la définition de ce mode, figure 2.11. Le module de la vitesse devient très important pour les valeurs de  $z$  grandes.

## 2.8. Discussion et perspectives

Cette partie du travail a ainsi permis de mettre en évidence des propriétés du mode de Kohn dans des conditions se rapprochant le plus possible des paramètres expérimentaux : potentiel non harmonique, interaction effective et section efficace calculée dans le milieu. La méthode des moments de l'équation de Boltzmann nous a permis d'étudier les mouvements collectifs susceptibles d'intervenir lors de l'excitation du centre de masse, qui est largement utilisée lors des expériences afin d'obtenir la pulsation du piège optique.

La première chose qu'il est important de souligner est que ce mode, dans des conditions réelles, présente une modification non négligeable de sa pulsation propre. La correction à apporter à la pulsation mesurée dépend ainsi à la fois de la température et de l'interaction, ce qui n'est pas le cas dans un potentiel harmonique, comme l'avait

montré W. Kohn. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces effets pour effectuer des mesures de précision sur les fréquences et amortissements d'autres modes collectifs. Nous avons aussi mis en lumière le fait qu'un amortissement, là encore lié à la température et l'interaction, survient dans le potentiel confinant gaussien. Cependant, la faible influence du potentiel de champ moyen dans les calculs nous laisse penser qu'il faut améliorer les théories effectives que l'on a utilisées afin de prendre en compte des corrections plus importantes liées à cela.

L'étude de l'origine de l'anharmonicité a constitué la première partie du travail réalisé sur ce sujet. Nous avons pu mettre en évidence que le mode de Kohn, dans des pièges au potentiel non harmonique, est accompagné d'autres mouvements collectifs inévitables liés à la forme du potentiel de piège. Le déplacement du centre de masse provoque en effet des compressions radiales faisant apparaître un mode dipolaire présentant un fort couplage avec le mode d'origine, ainsi qu'une déformation axiale du nuage provoquant un déphasage dans l'oscillation de celui-ci suivant les valeurs de la coordonnée  $z$ . Ces deux phénomènes, pris en compte dans notre fonction décrivant le système, jouent donc un rôle important dans l'explication de l'amortissement du déplacement du centre de masse.

## Résolution de l'équation de Boltzmann

### Sommaire

---

<b>3.1. Méthode des particules tests</b>	<b>62</b>
3.1.1. Principe	62
3.1.2. Propagation des particules	63
3.1.3. Utilisation numérique	63
<b>3.2. Présentation du système étudié</b>	<b>65</b>
3.2.1. Polarisation	65
3.2.2. Taux de collision	66
<b>3.3. Méthodes numériques</b>	<b>67</b>
3.3.1. Initialisation du système	67
3.3.2. Propagation des particules	69
3.3.3. Processus de collision	70
3.3.4. Section efficace dans le milieu	71
<b>3.4. Validation du programme</b>	<b>72</b>
3.4.1. Théorème de Kohn et propagation des particules	72
3.4.2. Conservation de l'énergie et pas de temps	75
3.4.3. Précision du taux de collision	76
<b>3.5. Effets de milieu pour le mode quadrupolaire</b>	<b>79</b>
3.5.1. Excitation du mode et réponse attendue	80
3.5.2. Étude sur une plage de températures	82
<b>3.6. Expansion du gaz et pulsation des modes collectifs</b>	<b>84</b>
3.6.1. Contexte théorique	84
3.6.2. Application aux mesures sur le mode quadrupolaire	87
3.6.3. Conclusions à propos de l'expansion	91
<b>3.7. Un pas vers les gaz polarisés</b>	<b>91</b>
3.7.1. Présentation du mouvement	91
3.7.2. Résultats obtenus	93
3.7.3. Et des nuages non polarisés ?	94
<b>3.8. Conclusions</b>	<b>96</b>

---

L'équation de Boltzmann est une équation intégral-différentielle ne présentant pas de solution triviale lorsque l'on veut décrire le plus précisément possible l'évolution du

système étudié. Afin de contourner ce problème, nous avons vu précédemment que l'on peut utiliser une forme linéarisée de l'équation, constituant une bonne approximation analytique. Cependant, cette méthode ne peut décrire que des systèmes étant proches de leur état d'équilibre. Afin de décrire la dynamique complète du gaz, il faut donc utiliser une méthode numérique.

## 3.1. Méthode des particules tests

Nous l'avons vu précédemment, l'équation de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -I[f] \quad (3.1)$$

comporte deux contributions. Le terme de gauche traduit la propagation des particules dans le milieu, confinées par le piège optique, par le biais de la modification de la valeur de la fonction de distribution ainsi que de la force résultant de ce potentiel (incluse dans  $\dot{\mathbf{p}}$ ). Le terme de droite quant à lui tient compte des collisions entre les particules du système ( $I$  étant l'intégrale collisionnelle). Afin de résoudre cette équation, nous allons maintenant utiliser la méthode des particules tests qui permet d'obtenir la fonction de distribution au cours du temps, même loin de l'équilibre.

### 3.1.1. Principe

Pour effectuer la résolution, nous allons déterminer tous les termes de l'équation de Boltzmann à chaque pas de temps, en utilisant la méthode des particules tests. En effet, nous ne connaissons pas la forme de la fonction de distribution hors équilibre prise au temps  $t$ ,  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ . Nous avons précédemment linéarisé cette distribution au voisinage de l'équilibre. Cependant, ici nous allons la remplacer par des distributions de Dirac en position et impulsion :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (2\pi)^3 \frac{N}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)), \quad (3.2)$$

où  $N$  est le nombre de particules physiquement présentes dans le système,  $\mathbf{r}_i(t)$  et  $\mathbf{p}_i(t)$  la position et l'impulsion de la particule test  $i$  à l'instant  $t$ . Ces fonctions de Dirac représentent ce que l'on nomme les particules tests, et vont servir à représenter les particules réelles dans le programme de résolution numérique. Cette méthode est généralement utilisée pour décrire des collisions d'ions lourds [38, 39]. Il est habituel de considérer qu'il y a toujours plus de particules tests que de particules réelles ( $\tilde{N} > N$ ), car cela permet d'augmenter la précision des calculs. Cependant, il faut complètement dissocier les deux notions : la valeur de  $N$  traduit la réalité du système tandis que  $\tilde{N}$  ne constitue qu'une astuce numérique afin d'avoir des résultats les plus précis possibles.

La plupart des expériences réalisées sur les gaz d'atomes froids présentent un nombre de particules de l'ordre de  $10^5$ . Il est évident que résoudre un tel système grâce à un code

de résolution numérique de l'équation de Boltzmann avec autant d'atomes nécessiterait un temps de calcul très grand. C'est pourquoi les travaux réalisés par T. Lepers [5] ont été réalisés pour des systèmes constitués de  $10^4$  atomes. Cependant, nous avons décidé de tester le programme dans des conditions similaires à celles des expériences : nous considérons un gaz composé de  $N = 6 \times 10^5$  particules, tandis que nous n'avons que  $\tilde{N} = 5 \times 10^4$  particules tests. Dans cette configuration, une particule test joue le rôle de « superparticule » et en représente 12 en même temps. Cette approximation a déjà été utilisée pour les calculs Monte-Carlo de ce type [40]. Alors, il est important de noter que le nombre réel de particules dans le système n'est représenté que par les valeurs des paramètres d'initialisation du gaz, tels que la température ou le potentiel chimique.

Les observables utiles, telles que la position du centre de masse  $\langle x \rangle(t)$  seront cependant représentées simplement par une somme sur toutes les particules tests. Ainsi, du point de vue numérique, nous aurons par exemple :

$$\langle x \rangle(t) = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} x_i(t), \quad (3.3)$$

où  $x_i(t)$  est la composante suivant l'axe  $x$  du vecteur position  $\mathbf{r}_i(t)$ .

### 3.1.2. Propagation des particules

Afin de pouvoir étudier la dynamique des particules, il est nécessaire de connaître la valeur des positions  $\mathbf{r}_i(t)$  et des impulsions  $\mathbf{p}_i(t)$  pour chaque temps  $t$ . Cela apparaît clairement dans le membre de gauche de l'équation de Boltzmann. Les particules tests, considérées comme ponctuelles, suivent des trajectoires classiques : les équations du mouvement s'écrivent

$$\dot{\mathbf{r}}_i(t) = \frac{\mathbf{p}_i(t)}{m}, \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{p}}_i(t) = -\nabla V(\mathbf{r}_i(t), t). \quad (3.5)$$

Le potentiel  $V$ , considéré uniquement local, traduit à la fois l'action du potentiel de piège extérieur  $V_{\text{trap}}$ , ainsi que le champ moyen créé par le bain de particules interagissant  $U_0$ , si toutefois celui-ci est pris en compte lors de la résolution.

### 3.1.3. Utilisation numérique

Le remplacement de la fonction de distribution hors équilibre par la distribution définie en (3.2) ne peut donner un résultat cohérent pour la valeur de la densité. En effet, une distribution de Dirac ne peut être utilisée pour un calcul numérique. Afin de palier à ce problème, il est courant de remplacer ces distributions par des gaussiennes dont les largeurs sont ajustées en fonction de valeurs d'observables que l'on peut calculer explicitement.

### Extension gaussienne

Afin de pouvoir tenir compte d'une éventuelle déformation du piège due à des fréquences différentes suivant les trois directions (par exemple, la forme de cigare dans le cas de l'étude du mode de Kohn), nous devons nous donner la liberté de choisir différentes valeurs de largeur de gaussienne suivant les trois directions de l'espace. Nous allons ainsi introduire  $w_x$ ,  $w_y$  et  $w_z$  pour l'espace des positions et  $\bar{w}_p$  dans celui des impulsions. Il faut noter ici qu'une déformation de la cellule élémentaire de l'espace des positions n'a pas d'influence sur la discrétisation dans l'espace des impulsions. Ce sont alors ces deux paramètres qui seront arbitraires. Afin de donner une valeur cohérente aux largeurs des gaussiennes dans les trois directions d'espace, le critère :

$$w_i = \frac{\bar{w}}{\omega_i} \bar{w}_r, \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (3.6)$$

sera suffisant ( $\bar{w}_r = (w_x w_y w_z)^{\frac{1}{3}}$ ). Nous utilisons ici l'inverse de la valeur de la pulsation car celle-ci est inversement proportionnelle à la taille du gaz : il doit résulter de l'élongation du système une augmentation de la largeur des gaussiennes représentant les particules tests. La fonction de distribution (3.2) devient ainsi :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (2\pi)^3 \frac{N}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} g_{\bar{w}_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) g_{\bar{w}_p}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)), \quad (3.7)$$

où les gaussiennes  $g_{\bar{w}_r}$  et  $g_{\bar{w}_p}$  sont de la forme :

$$g_{\bar{w}_r}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i(t)) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{w}_r^3} \exp \left[ -\frac{(x - x_i(t))^2}{w_x^2} - \frac{(y - y_i(t))^2}{w_y^2} - \frac{(z - z_i(t))^2}{w_z^2} \right], \quad (3.8)$$

$$g_{\bar{w}_p}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t)) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \bar{w}_p^3} \exp \left[ -\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{p}_i(t))^2}{\bar{w}_p^2} \right]. \quad (3.9)$$

En pratique, les paramètres  $\bar{w}_r$  et  $\bar{w}_p$  doivent être ajustés de manière à ce que la résolution numérique décrive le plus fidèlement possible des observables que l'on peut calculer analytiquement, comme par exemple la densité locale  $\rho$  ou le taux de collision par particule  $\gamma$ .

### Observables extérieures

Ces changements dans la définition de la fonction de distribution des particules hors équilibre engendrent aussi des modifications dans la forme des observables. Par exemple, la densité de particules tests par cellule de l'espace des phase doit correspondre à la densité d'atomes réel  $\rho$  attendue dans cette espace. Ainsi, en utilisant la définition de la densité (2.46) pour notre distribution hors équilibre de particules tests (3.7), nous

obtiendrons une densité de la forme :

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}} \tilde{w}_r^3} \frac{N}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \exp \left[ -\frac{(x - x_i(t))^2}{w_x^2} - \frac{(y - y_i(t))^2}{w_y^2} - \frac{(z - z_i(t))^2}{w_z^2} \right]. \quad (3.10)$$

De la même manière, la force qui agit sur une particule test doit tenir compte du fait que cette particule en représente plusieurs. Il est donc nécessaire de modifier la forme du potentiel confinant de manière à ce que toutes les « parties » de la particule test ne ressentent pas la même force. Pour cela, il suffit de définir le potentiel convolué :

$$\tilde{V}_{\text{trap}}(\mathbf{r}) = \int d^3 \mathbf{s} V_{\text{trap}}(\mathbf{r} - \mathbf{s}) e^{-\frac{s_x^2}{w_x^2} - \frac{s_y^2}{w_y^2} - \frac{s_z^2}{w_z^2}}. \quad (3.11)$$

Cette méthode devra être appliquée à toutes les grandeurs externes, afin que les  $\tilde{N}$  particules tests décrivent la physique des  $N$  atomes que l'on veut réellement dans le piège. Nous utilisons la même méthode que ce qui est détaillé dans [41].

## 3.2. Présentation du système étudié

### 3.2.1. Polarisation

Afin d'avoir une liberté de choix dans le système pour lequel nous résolvons l'équation de Boltzmann, nous avons décidé de nous laisser la possibilité de considérer des gaz n'ayant pas le même nombre d'atomes  $N_{\uparrow}$  de spin  $\uparrow$  que ceux de spin  $\downarrow$ . Par convention, nous considérerons que les spins de projection positive sont en plus grand nombre que ceux de projection opposée,  $N_{\uparrow} \geq N_{\downarrow}$ . Nous pourrions ainsi modéliser des systèmes dont la polarisation globale  $P$  est non nulle. Si le nombre d'atomes total dans le gaz est noté  $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$ , la polarisation totale à l'équilibre est définie par :

$$P = \frac{N_{\uparrow} - N_{\downarrow}}{N}. \quad (3.12)$$

De plus, afin d'avoir une échelle d'énergie, nous utilisons l'énergie de Fermi moyenne du système dans le piège :

$$E_F = \bar{\omega} (3N)^{\frac{1}{3}}. \quad (3.13)$$

Cela nous donne par ailleurs la possibilité de fixer la norme de l'interaction à une valeur de  $(k_F a)^{-1}$ , où  $k_F = \sqrt{2mE_F}$  est le moment de Fermi pour le système piégé non polarisé.

Du point de vue des particules tests, pour une fraction  $\nu = \frac{N_{\uparrow}}{N}$  d'atomes de spin  $\uparrow$ , nous considérerons une quantité  $\tilde{N}_{\uparrow} = \nu \tilde{N}$  de particules tests pour cette espèce, et une quantité  $\tilde{N}_{\downarrow} = (1 - \nu) \tilde{N}$  de particules tests pour les atomes de spin  $\downarrow$ . De ce fait, les particules des deux spins seront représentées par des particules tests dont les largeurs

de gaussienne seront les mêmes. Seul leur nombre sera modifié dans le but de prendre en compte cette polarisation, qui reste égale à celle que présente le système physique. Notons que la relation entre la polarisation  $P$  et la fraction de particules  $\uparrow$  est simple :

$$P = 2\nu - 1. \quad (3.14)$$

Une polarisation nulle revient à dire que le nombre de particules de spin  $\uparrow$  est égal à celui des  $\downarrow$  et vaut  $\frac{N}{2}$  (soit  $\nu = \frac{1}{2}$ ).

### 3.2.2. Taux de collision

Une grandeur physique importante pour tester la résolution numérique de l'équation de Boltzmann est le nombre de collisions se produisant par unité de temps. En effet, pour la plupart des systèmes hors équilibre, les phénomènes collectifs sont indépendants de la valeur du taux de collision. Celui-ci doit donc rester constant au cours du temps. Cela en fait par conséquent un critère primordial pour vérifier l'évolution du gaz.

Le taux de collision par particule  $\gamma$  est donné par l'intégrale sur l'espace des phases de l'intégrale collisionnelle  $I$  :

$$\gamma = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\uparrow}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\downarrow}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{|\mathbf{p}_\uparrow - \mathbf{p}_\downarrow|}{m} f_\uparrow f_\downarrow (1 - f'_\uparrow)(1 - f'_\downarrow). \quad (3.15)$$

À l'équilibre, il est facile d'exprimer cette intégrale en remplaçant les distributions de Fermi. Le calcul donne :

$$\gamma = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{q}{2m} \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \times \left[ \frac{\operatorname{atanh}\left(\tanh\frac{X}{2} \tanh\frac{Y-\beta\delta\mu}{2}\right) + \operatorname{atanh}\left(\tanh\frac{X}{2} \tanh\frac{Y+\beta\delta\mu}{2}\right)}{Y \sinh X} \right]^2, \quad (3.16)$$

où l'on a successivement posé  $\mathbf{k} = \mathbf{p}_\uparrow + \mathbf{p}_\downarrow$ ,  $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_\uparrow - \mathbf{p}_\downarrow)$  puis

$$E = \frac{k^2}{8m} + \frac{q^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}), \quad X = \beta(E - \bar{\mu}), \quad Y = \frac{\beta k q}{2m}. \quad (3.17)$$

Comme l'intégrande ne dépend que des normes de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}$  (y compris dans la section efficace  $\sigma$  en raison de notre interaction de portée nulle), les intégrales de la formule (3.16) ne sont plus qu'au nombre de trois. Elles sont effectuées à l'aide d'un calcul de type Monte-Carlo. Nous pourrions ainsi vérifier que la résolution dynamique de l'équation de Boltzmann donne un résultat en accord avec la valeur de cette intégrale. Dans le but d'effectuer un test complémentaire, on a la possibilité de considérer de la même façon le taux de collision calculé sans blocage de Pauli,  $\gamma_b$ . On le définit par :

$$\gamma_b = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\uparrow}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_\downarrow}{(2\pi)^3} \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{|\mathbf{p}_\uparrow - \mathbf{p}_\downarrow|}{m} f_\uparrow f_\downarrow, \quad (3.18)$$



ce qui peut se mettre sous la forme, en utilisant les notations précédentes :

$$\gamma_b = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{q}{m} \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \times \frac{\operatorname{atanh}\left(\tanh\frac{X}{2} \tanh\frac{Y-\beta\delta\mu}{2}\right) + \operatorname{atanh}\left(\tanh\frac{X}{2} \tanh\frac{Y+\beta\delta\mu}{2}\right)}{Y e^X \sinh X}. \quad (3.19)$$

La détermination de la valeur numérique de cette intégrale constituera une nouvelle base de vérification des résultats produits par le code de simulation.

Afin de représenter le plus fidèlement possible les conditions réelles de l'expérience, nous allons inclure dans la résolution le calcul de la section efficace dans le milieu. En effet, ordinairement on utilise en première approximation, une section efficace calculée pour un gaz de particules n'interagissant pas  $\sigma_0(q)$ , donnée par la théorie de la diffusion :

$$\sigma_0(\mathbf{q}) = \frac{4\pi a^2}{1 + a^2 q^2}, \quad (3.20)$$

où  $a$  est la longueur de diffusion. Cependant, il est possible d'obtenir une valeur tenant compte de l'environnement des atomes. On la calcule grâce à l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) = \left| m\Gamma \left( \frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\bar{\mu}, \mathbf{k} \right) \right|^2, \quad (3.21)$$

où  $\Gamma$  est l'amplitude de diffusion.

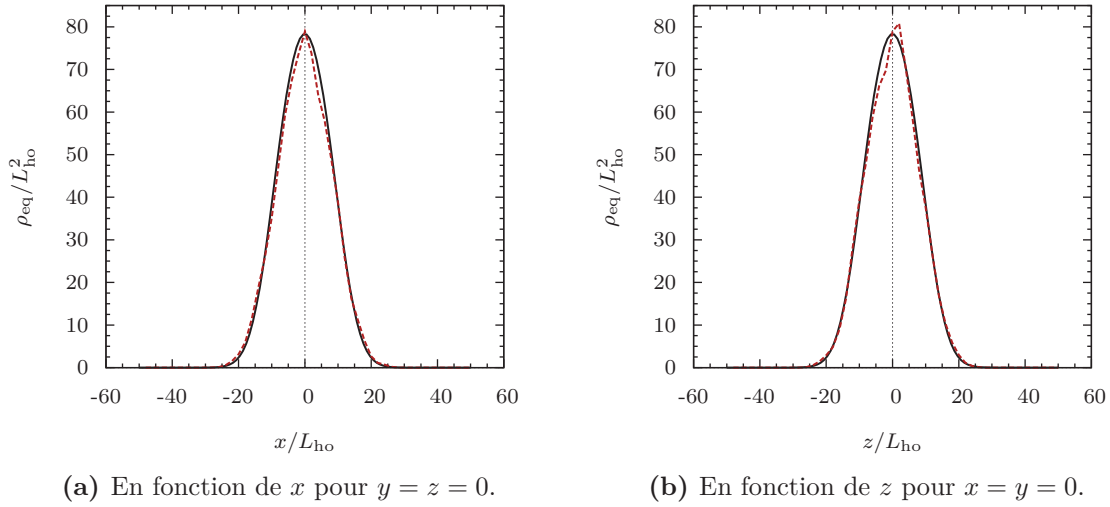
### 3.3. Méthodes numériques

#### 3.3.1. Initialisation du système

Avant de commencer la propagation des particules tests dans l'espace des phases, il est nécessaire de créer un ensemble de  $\tilde{N}$  particules tests ayant les caractéristiques d'un système de  $N$  atomes. À l'état initial, nous considérons que le gaz est à l'équilibre. Les atomes de spin  $\sigma$  sont alors décrits par la distribution de Fermi à l'équilibre

$$f_0^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\frac{p^2}{2m} + V_\sigma(\mathbf{r}) - \mu_\sigma\right)\right] + 1}, \quad (3.22)$$

et distribués de manière aléatoire en espace et en impulsion. C'est dans cette équation que l'on voit apparaître les trois paramètres indispensables à la description du système physique : les potentiels chimiques  $\mu_\uparrow$  et  $\mu_\downarrow$ , définis à partir du nombre de particules  $N_\uparrow$  et  $N_\downarrow$  (resp.), ainsi que la température  $T$ , à travers la valeur de  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ . Le terme  $V_\sigma(\mathbf{r})$  contient à la fois le potentiel confinant optique  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ , mais peut aussi contenir l'effet du milieu défini précédemment,  $U_\sigma(\mathbf{r})$ . Il est bon de remarquer ici que nous ne tiendrons pas compte des effets de masse effective (qui peut entraîner des effets de l'ordre de moins de 10 % [42]). Par ailleurs, dans le but d'avoir une densité initiale cohérente vis-à-vis



**Figure 3.1 :** La densité totale d'atomes  $\rho_{\text{eq}}(\mathbf{r})$  (trait noir) en fonction de la coordonnée  $x$  ou  $z$ , normalisée à la valeur au centre, doit être la référence pour la courbe de la densité de particules tests (tirets rouges) à l'état initial  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t = 0)$ . Ce test permet d'ajuster la valeur de la largeur de gaussienne  $\tilde{w}_r$ .

de l'état d'équilibre, il est nécessaire de tenir compte de la convolution gaussienne également dans les potentiels évoqués précédemment.

Les  $\tilde{N}$  particules tests sont alors distribuées dans l'espace de manière à ce que la densité  $\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t = 0)$  reproduise le plus fidèlement possible la valeur de la densité initiale  $\rho_{\text{eq}}^\sigma(\mathbf{r})$  des  $N_\sigma$  atomes définie par :

$$\rho_{\text{eq}}^\sigma(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0^\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (3.23)$$

La densité totale  $\rho_{\text{eq}}$  est donc la somme de  $\rho_{\text{eq}}^\uparrow$  et  $\rho_{\text{eq}}^\downarrow$ . À titre d'exemple, nous avons tracé en figure 3.1 l'initialisation de la densité sur la grille pour un système de  $N = 6 \times 10^5$  particules, sans polarisation ( $P = 0$ ) et pour un nombre de particules tests de  $\tilde{N} = 5 \times 10^4$ . Nous nous plaçons à une température de  $T = 0.4 T_F$  dans un piège de forme sphérique (les trois pulsations de piège  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  et  $\omega_z$  sont égales à  $\bar{\omega}$ ) et nous ne tenons pas compte du champ moyen ( $U_\uparrow(\mathbf{r}) = U_\downarrow(\mathbf{r}) = 0$ ).

Les fluctuations visibles de la courbe rouge sont d'origine stochastique et dues au caractère aléatoire de l'initialisation. Un des paramètres améliorant la précision est la valeur de  $\tilde{w}_r$ . Il faut noter ici que cette figure représente une coupe selon l'axe  $x$  et  $z$  (resp.). L'impression d'un déficit en particules est fausse : cet écart est compensé par la forme globale de cette fonction.

### 3.3.2. Propagation des particules

Une fois que les particules sont initialisées en position et en impulsion, il est assigné à chaque particule  $i \in \{1, \dots, \tilde{N}\}$  une position  $\mathbf{r}_i(t_n)$ , et une vitesse  $\mathbf{v}_i(t_n)$  qui sont mises à jour à chaque pas de temps  $\Delta t$ , défini par :

$$t_{n+1} = t_n + \Delta t, \quad (3.24)$$

où  $t_n$  est l'instant décrit par le pas de temps numéro  $n$ .

Avant de vouloir rendre compte des collisions, il est nécessaire de faire évoluer le système au cours du temps (terme de gauche de l'équation de Boltzmann, que l'on appelle quelquefois l'opérateur de Liouville). Pour réaliser cela, nous utilisons l'algorithme de Verlet pour les vitesses [43], utilisant les positions  $\mathbf{r}_i(t_n)$  et vitesses  $\mathbf{v}_i(t_n)$  comme point de départ de l'évolution temporelle. La propagation est donc assurée par les  $3\tilde{N}$  équations suivantes, dans l'ordre :

$$\mathbf{v}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) = \mathbf{v}_i(t_n) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t_n)\Delta t, \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{r}_i(t_{n+1}) = \mathbf{r}_i(t_n) + \mathbf{v}_i(t_{n+\frac{1}{2}})\Delta t, \quad (3.25b)$$

puis

$$\mathbf{v}_i(t_n) = \mathbf{v}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2}\mathbf{a}_i(t_{n+1})\Delta t. \quad (3.25c)$$

La valeur  $t_{n+\frac{1}{2}}$  représente un temps intermédiaire introduit pour améliorer la précision numérique. L'utilité de l'étape (3.25b) se trouve dans la définition de l'accélération  $\mathbf{a}_i(t_n)$ . Si la particule  $i$  est de spin  $\sigma$ , alors :

$$\mathbf{a}_i(t_n) = -\frac{1}{m} \frac{\partial V_\sigma}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{r}_i(t_n)), \quad (3.26)$$

et lorsque l'on prend en compte l'effet du potentiel de champ moyen  $U_\sigma$ , celui-ci doit être calculé en connaissant les positions de toutes les  $\tilde{N}_\sigma$  particules tests susceptibles d'en modifier la valeur. Notons tout de même que nous considérons ici que l'accélération ne dépend que de la position et non de la vitesse : les frottements sont donc absents. Cela entraîne aussi que le champ moyen ne peut exclusivement dépendre que de la position. Enfin d'un point de vue numérique, cette méthode permet aussi de ne calculer l'accélération qu'une seule fois par pas de temps, ce qui permet d'augmenter la vitesse d'exécution.

En l'état, le code de simulation permet donc de décrire un gaz dans le régime sans collision : on est dans le cas d'une équation de Vlasov.

### 3.3.3. Processus de collision

La question maintenant est de savoir comment rendre compte de la collision entre la particule  $i$  et la particule  $j$ . En raison du principe d'exclusion de Pauli, il est évident que les particules  $i$  et  $j$  ont des spins opposés. C'est une première restriction.

L'étape suivante est de savoir si les deux atomes en question ont atteint la distance minimale d'approche permise par leur trajectoire respective. En notant l'écart entre ces deux particules à l'itération  $n$

$$\Delta \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_i(t_n) - \mathbf{r}_j(t_n), \quad (3.27)$$

et si celles-ci présentent un écart initial de  $\Delta \mathbf{r}_0$ , alors nous aurons :

$$\Delta \mathbf{r}_n = \Delta \mathbf{r}_0 + t_n \Delta \mathbf{v}_n, \quad (3.28)$$

où  $\Delta \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_i(t_n) - \mathbf{v}_j(t_n)$ . Les deux entités seront ainsi au plus près à l'instant

$$t_{\min} = t_n - \frac{(\Delta \mathbf{r}_n \cdot \Delta \mathbf{v}_n)^2}{(\Delta \mathbf{v}_n)^2}. \quad (3.29)$$

Alors, si  $|t_{\min} - t_n| < \Delta t/2$ , la collision peut avoir lieu. Mais pour que cela soit effectivement le cas, il faut que la distance minimale d'approche

$$d_{\min} = \sqrt{(\Delta \mathbf{r}_n)^2 - \frac{(\Delta \mathbf{r}_n \cdot \Delta \mathbf{v}_n)^2}{(\Delta \mathbf{v}_n)^2}} \quad (3.30)$$

soit inférieure à la somme des rayons géométriques des sections efficaces de la particule  $i$  et de la particule  $j$ .

Si la collision est possible, la deuxième étape débute. Il s'agit alors de propager  $i$  et  $j$  jusqu'à l'instant d'approche minimal puis de définir aléatoirement les directions des nouvelles vitesses, tout en veillant à conserver l'impulsion totale. Soit  $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j$  les impulsions des particules avant la collision et  $\mathbf{p}'_i, \mathbf{p}'_j$  les moments après la collision. Soit  $q = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|$  la norme du moment relatif correspondant. On peut écrire :

$$\mathbf{p}'_i = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j + q\mathbf{u}), \quad (3.31a)$$

$$\mathbf{p}'_j = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j - q\mathbf{u}), \quad (3.31b)$$

où  $\mathbf{u}$  est un vecteur unitaire de direction et sens aléatoires. On peut facilement voir que la conservation de l'énergie et de l'impulsion sont respectées :

$$\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j = \mathbf{p}'_i + \mathbf{p}'_j, \quad (3.32)$$

$$p_i^2 + p_j^2 = (p'_i)^2 + (p'_j)^2. \quad (3.33)$$

La dernière étape est de tester si l'espace des phases de destination est libre, afin de respecter le principe de Pauli. On calcule alors les distributions finales,  $f'_i = f_\sigma(\mathbf{r}'_i, \mathbf{p}'_i, t_n)$  et  $f'_j = f_{\bar{\sigma}}(\mathbf{r}'_j, \mathbf{p}'_j, t_n)$  en utilisant l'équation (3.7). Enfin la collision est autorisée avec une probabilité de  $(1 - f'_i)(1 - f'_j)$ . Si c'est le cas, on garde les valeurs  $\mathbf{r}'_i, \mathbf{r}'_j, \mathbf{p}'_i$  et  $\mathbf{p}'_j$ , sinon on revient aux valeurs initiales, et on continue.

### 3.3.4. Section efficace dans le milieu

Dans le but d'utiliser le calcul de la section efficace dans le milieu (3.21), il va falloir définir un processus d'ajustement de cette valeur en fonction des différents paramètres internes du système, que sont la densité et la densité d'énergie, ainsi que l'interaction entre les particules. Dans le but de limiter, pour l'instant, les calculs nécessaires, l'implémentation de ce calcul dans le milieu ne se fera que pour des gaz non polarisés ( $P = 0$ ). Les variables dont dépend alors le calcul de  $\tilde{\sigma}$  sont  $k, q, a, T$  et  $\bar{\mu} \equiv \mu$ . Notons aussi que la correspondance entre les couples température/potentiel chimique ( $T, \mu$ ) et densité/densité d'énergie ( $\rho, \varepsilon$ ) est très facile à obtenir numériquement. Pour des raisons d'optimisation du programme, nous considérerons donc que la section efficace dépend de  $k, q, a$  puis  $\rho$  et  $\varepsilon$ .

En effet, le calcul de cette section efficace, au cours du processus de collision, va devoir être effectué  $\tilde{N}_\uparrow \tilde{N}_\downarrow$  fois pour chaque pas de temps<sup>1</sup>. D'un point de vue numérique,  $\tilde{\sigma}$  est déterminée par une intégrale (dans la définition de  $\Gamma$ ) qui nécessite un temps de calcul non négligeable. Il est alors important de trouver une paramétrisation de cette section efficace afin de ne pas avoir à refaire le calcul à chaque itération (des détails concernant la méthode sont présentés en annexe B).

La figure 3.2 nous permet de nous rendre compte de la forme de la section efficace dans le milieu normalisée par la section efficace libre. Il apparaît alors une forte augmentation (plus de 40 fois!) de sa valeur aux alentours de  $k = 0$  et de  $q \in [0, k_F]$ . Cette forme est un cas extrême, pour une valeur de  $a$  conditionnant le système proche de la résonance de Feshbach et de densité et densité d'énergie arbitraires correspondant à un cas représentatif de la forme de la section efficace.

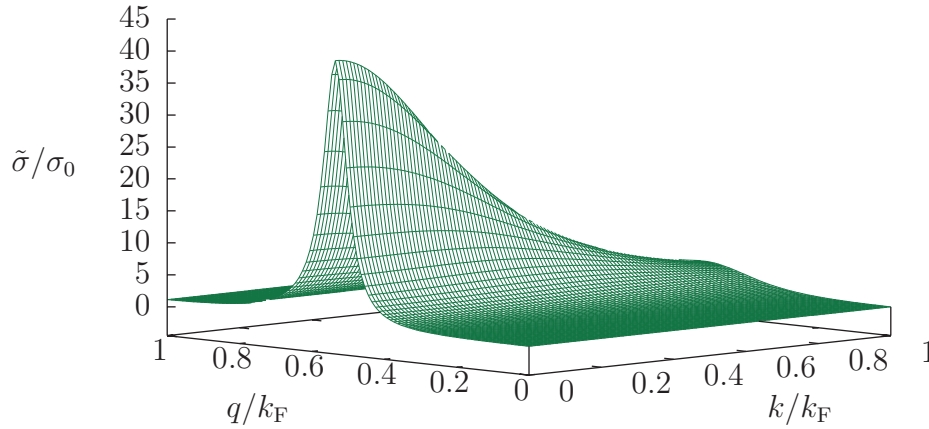
L'étude de la forme de  $\tilde{\sigma}(k, q)$  nous a permis d'établir une fonction à 4 paramètres, dépendants chacun de  $a, \rho$  et  $\varepsilon$ . Nous savons que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma}(k, q)}{\sigma_0(q)} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma}(k, q)}{\sigma_0(q)} = 1, \quad (3.34)$$

et en se servant de la forme de  $\tilde{\sigma}(k, q)$ , nous avons pris pour décrire la section efficace dans le milieu est du type :

$$\sigma_{\text{fit}}(k, q) = \sigma_0(q) \left[ 1 + A \exp\left(-\frac{k^2}{k_0^2}\right) \frac{1}{(q - q_0)^2 + q_1^2} \right], \quad (3.35)$$

<sup>1</sup>Pour chaque pas de temps, il est nécessaire de tester chaque couple de particules tests du système. Pour cela, on utilise la valeur de  $d_{\text{min}}$ , qui est issue du calcul des sections efficaces pour les deux atomes du couple.



**Figure 3.2 :** Forme de la section efficace calculée dans le milieu et normalisée à la section efficace libre, pour une valeur de  $a \rightarrow -\infty$  et une température et potentiels chimiques arbitraires. La dépendance en  $q$  peut être représentée par une lorentzienne et la dépendance en  $k$  par une gaussienne centrée en zéro.

où les paramètres  $A$ ,  $k_0$ ,  $q_0$  et  $q_1$  sont déterminés par une méthode de minimisation de  $\chi^2$  pour chaque valeur de  $a$ ,  $\rho$  et  $\varepsilon$ . À haute température ( $T \gtrsim T_F$ ), cette méthode est trop imprécise. Nous avons donc utilisé un développement haute température de  $\tilde{\sigma}$ .

Si des écarts à la valeur exacte apparaissent, cela sera directement mis en évidence lors du calcul du taux de collision, qui sera utilisé pour tester à la fois le processus numérique de collision et la précision de cette méthode d'ajustement.

## 3.4. Validation du programme

Maintenant que nous connaissons les principales méthodes utilisées pour résoudre numériquement le problème, il est important de les valider en confrontant les résultats obtenus à des valeurs repères (que l'on calcule indépendamment de cette méthode) ou à des principes physiques basiques (tel que la conservation de l'énergie).

### 3.4.1. Théorème de Kohn et propagation des particules

Un test très rapide et efficace pour valider la méthode de propagation des particules consiste à étudier le mode de Kohn sans terme de collision. Comme nous l'avons vu dans le chapitre dédié à ce mouvement collectif (chapitre 2), celui-ci a la particularité

d'osciller à la pulsation du piège, si toutefois ce dernier présente une forme purement harmonique.

Nous résolvons donc l'équation de Vlasov en excitant le mode de Kohn à un instant donné  $t_{\text{exc}}$ . Si on l'excite suivant l'axe  $x$  avec une amplitude  $\alpha$  :

$$x_i(t_{\text{exc}}) \rightarrow x_i(t_{\text{exc}}) + \alpha, \quad i \in \{1, \dots, \tilde{N}\}, \quad (3.36)$$

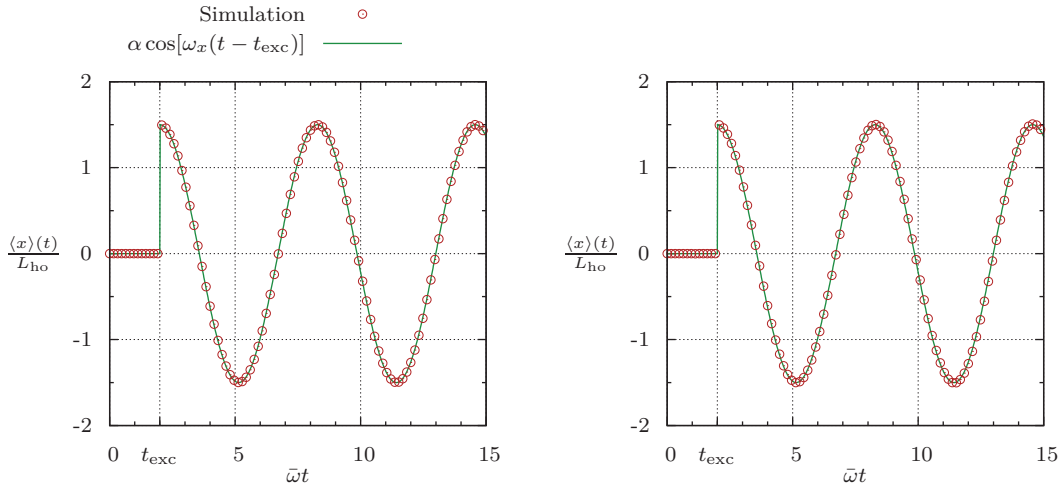
l'évolution de l'observable  $\langle x \rangle(t)$  est simple :

$$\langle x \rangle(t) = \alpha \cos[\omega_x(t - t_{\text{exc}})], \quad t \geq t_{\text{exc}}. \quad (3.37)$$

Le premier cas concerne un gaz dont l'effet du champ moyen n'est pas pris en compte. La figure 3.3a représente l'évolution de la coordonnée du centre de masse  $\langle x \rangle(t)$  suivant l'axe  $x$  donné par la résolution numérique (croix rouges) et ce que l'on attend (3.37) (trait vert), pour un gaz dans un potentiel harmonique sans effet de champ moyen, soit  $V(\mathbf{r}) = V_{\uparrow}(\mathbf{r}) = V_{\downarrow}(\mathbf{r}) = V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$ . On voit nettement que le déplacement du centre de masse présente une pulsation qui est égale à la pulsation de confinement. La figure 3.3b a été établie dans les mêmes conditions, mais cette-fois en tenant compte du potentiel de champ moyen, soit  $V(\mathbf{r}, t) = V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_0(\mathbf{r}, t)$  : il dépend cette-fois du temps, car la valeur du champ moyen est modifiée avec le mouvement des particules. Là encore, les résultats concordent parfaitement avec ce qui est attendu : l'interaction effective ne modifie pas la pulsation ; les particules vibrent avec la même pulsation. Ce test est concluant pour différentes températures, ce qui constitue donc une preuve de la bonne description de la propagation des particules. Par ailleurs, le calcul avec le champ moyen montre que la convolution de celui-ci avec la gaussienne donne aussi des résultats acceptables. Si ce n'était pas le cas, nous ne trouverions pas que la fréquence du mode de Kohn est exactement celle du piège.

Pour s'en convaincre, il est possible de faire un autre test, consistant à fixer la valeur du potentiel de champ moyen à sa valeur d'équilibre et alors à laisser le gaz évoluer dans ce qui peut être considéré comme un potentiel de piège déformé, comme représenté sur la figure 3.4a. Le caractère harmonique du piège (tirets noirs) est donc modifié par la valeur du champ moyen local d'équilibre. Comme ce dernier est négatif dû au fait que l'interaction entre les particules est attractive, il engendre une modification de la courbure du potentiel vers les valeurs négatives lorsque l'on est proche du centre du piège (trait rouge). Le résultat, représenté en figure 3.4b, est sans surprise : on constate effectivement que les résultats de la simulation (cercles rouges) présentent une oscillation dont la pulsation est légèrement supérieure à celle du piège (trait vert). Par ailleurs on constate l'apparition d'un amortissement du mouvement. Celui-ci trouve son origine dans la déformation du piège optique : le caractère non harmonique du potentiel confinant crée une vibration n'ayant pas la même pulsation que le piège et l'apparition d'un amortissement, comme nous avons pu le voir dans le chapitre 2 consacré à ce mode collectif.

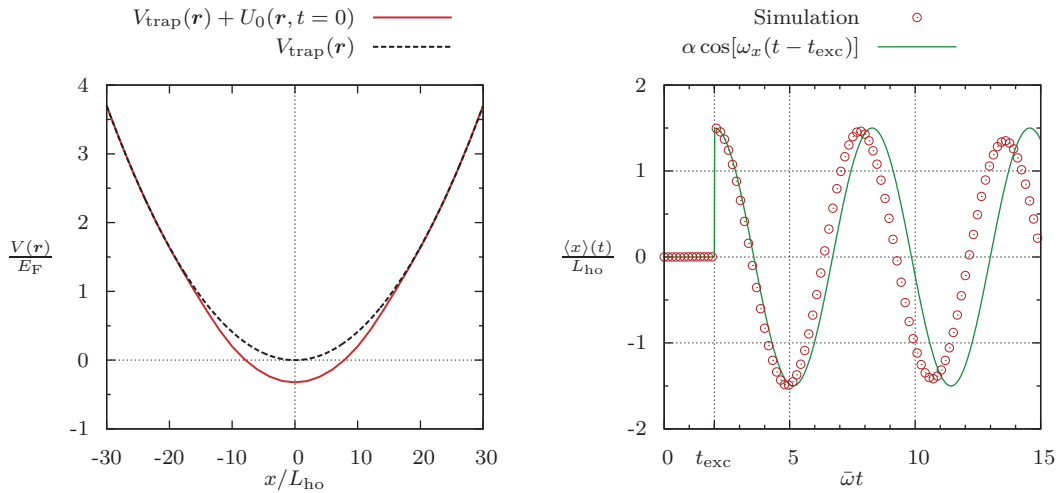
Nous savons désormais que la propagation des  $\tilde{N}$  particules tests est correctement implémentée dans le code de résolution, cela signifie que le terme de gauche de l'équa-



(a) Mode de Kohn sans l'effet du champ moyen.

(b) Mode de Kohn avec l'effet du champ moyen.

**Figure 3.3 :** Évolution de l'observable  $\langle x \rangle(t)$  pour un gaz de  $N = 6 \times 10^5$  atomes, à une température de  $T = 0.4 T_F$  et une polarisation nulle. Les résultats du programme sont les croix rouges et la valeur attendue est le trait vert. La fréquence du mode de Kohn correspond parfaitement à la fréquence du piège, que soit avec ou champ moyen, comme ce qui est prédit par le théorème de Kohn.

(a) Potentiel de piège déformé en fonction de la coordonnée radiale  $x$ .(b) Évolution de la position du centre de masse suivant l'axe  $x$  en fonction du temps.

**Figure 3.4 :** Test complémentaire utilisant un potentiel de piège déformé par la valeur du champ moyen à l'équilibre. Celui-ci étant négatif (l'interaction est attractive), la forme présente une courbure plus prononcée (fig. (a), trait rouge). De ce fait, la pulsation du mode de Kohn est légèrement plus importante que celle du piège (fig. (b), cercles rouges).



tion de Boltzmann est bien résolu numériquement. Il faut maintenant vérifier le terme lié aux collisions.

### 3.4.2. Conservation de l'énergie et pas de temps

Un des paramètres numériques importants de la résolution de l'équation de Boltzmann est le pas de temps  $\Delta t$ . La procédure de propagation des particules via l'algorithme de Verlet nécessite de faire l'hypothèse que la force ne varie pas trop pendant l'instant  $\Delta t$ . Dans ce cas, la valeur du pas de temps ne doit pas être trop importante. D'autre part, une valeur de  $\Delta t$  trop faible entraîne une augmentation importante du temps d'exécution du programme. Il faut donc déterminer la valeur optimale de ce paramètre.

Pour cela, la méthode utilisée repose sur la variation des valeurs des énergies potentielle  $\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{1}{2}m\bar{\omega}^2 \langle r^2 \rangle$  et cinétique  $\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m}$  totales<sup>2</sup>. À l'équilibre, ces deux valeurs sont égales compte tenu du théorème du viriel. Si l'on considère cependant une variation temporelle, on obtient facilement les deux relations :

$$\frac{d}{dt} [\langle E_{\text{kin}} \rangle - \langle E_{\text{pot}} \rangle] = -2\bar{\omega}^2 \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle, \quad (3.38a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle = 2 [\langle E_{\text{kin}} \rangle - \langle E_{\text{pot}} \rangle]. \quad (3.38b)$$

En définissant alors la grandeur  $\delta E(t) = \langle E_{\text{kin}} \rangle - \langle E_{\text{pot}} \rangle$ , on obtient dans ce cadre la solutions aux équations précédentes. Ainsi :

$$\delta E(t) = \delta E(0) \cos(2\bar{\omega}t) - \bar{\omega} \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle_0 \sin(2\bar{\omega}t), \quad (3.39a)$$

$$\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle(t) = \langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle_0 \cos(2\bar{\omega}t) + \frac{\delta E(0)}{\bar{\omega}} \sin(2\bar{\omega}t). \quad (3.39b)$$

Maintenant que nous connaissons les expressions analytiques de ces grandeurs, il est alors important de vérifier si les valeurs du programme de résolution suit les mêmes équations. En définissant

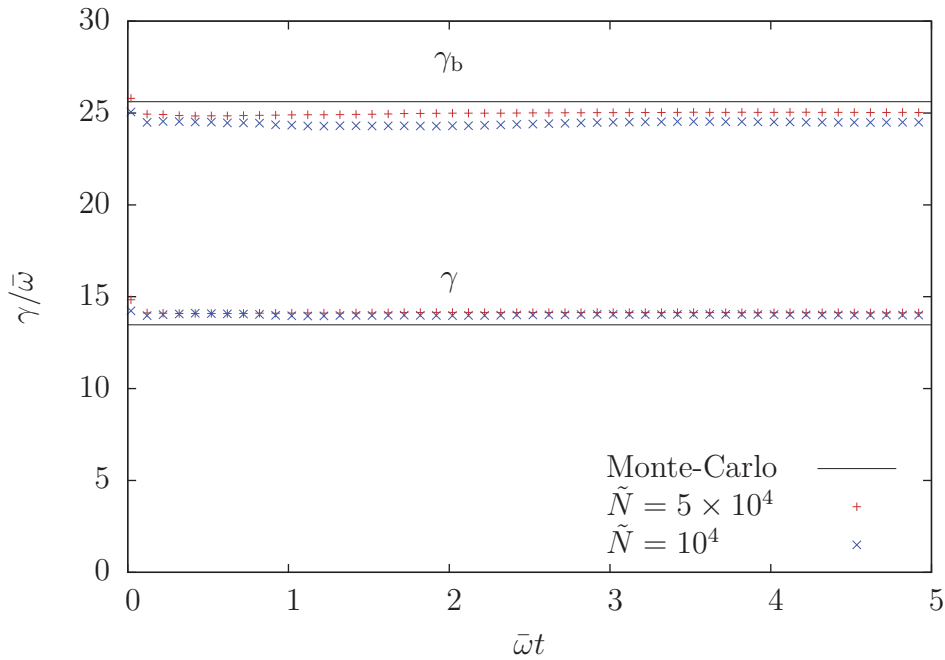
$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2m\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} [(\mathbf{p}_i)_x^2 + (\mathbf{p}_i)_y^2 + (\mathbf{p}_i)_z^2], \quad (3.40)$$

$$\langle E_{\text{pot}} \rangle = \frac{m\bar{\omega}^2}{2\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2), \quad (3.41)$$

il est possible d'ajuster la valeur de  $\Delta t$  pour que l'accord entre les résultats du programme et ceux issus des équations définies précédemment. Les tests ont convergé vers une valeur de ce pas de temps de  $\Delta t = 0.02/\bar{\omega}$ .

---

<sup>2</sup>Ce test s'effectue pour des systèmes dont on néglige les effets de milieu et dont le piège harmonique est de forme sphérique de pulsation  $\bar{\omega}$ . En présence de champ moyen, la conservation de l'énergie est plus difficile à étudier.



**Figure 3.5 :** Valeurs du taux de collision  $\gamma$  et du taux de collision sans blocage  $\gamma_b$ , calculées théoriquement (traits pleins noirs) pour  $T = 0.4 T_F$ ,  $(k_F a)^{-1} = -0.1$  et  $N = 6 \times 10^5$ . On doit alors comparer ces résultats à ceux donnés par le code Boltzmann dans les mêmes conditions (points). Lorsque le nombre de particules tests est augmenté, on voit une amélioration de l'écart entre la valeur attendue et celle obtenue.

### 3.4.3. Précision du taux de collision

La description du processus de collision (paragraphe 3.3.3) est la partie la plus complexe et lente à réaliser. Pour chaque temps  $t_n$ , il est nécessaire de vérifier si chacune des  $\tilde{N}_\uparrow$  particules tests a la possibilité d'entrer en collision avec les  $\tilde{N}_\downarrow$  particules tests de spin opposé. Cela nous donne la valeur du taux de collision  $\gamma$ . Afin de tester l'efficacité de cette résolution, la méthode la plus efficace est de calculer la valeur théorique attendue, grâce à l'expression (3.16).

Dans notre cas, ce test est double : il permet à la fois de vérifier la précision de la résolution du processus en fonction du nombre de particules tests et d'estimer l'erreur commise sur l'ajustement de la fonction  $\sigma_{\text{fit}}$ , représentant la section efficace dans le milieu  $\tilde{\sigma}$ .

#### Nombre de particules tests

Lorsque le gaz à l'équilibre évolue librement, le taux de collision doit rester constant tout au long de la simulation numérique, et égal à la valeur d'équilibre. Par ailleurs, il est aussi intéressant de vérifier la valeur du taux de collision calculé sans le terme de blocage de Pauli,  $\gamma_b$  (équation (3.19)). Cela nous permet d'avoir deux valeurs à comparer aux résultats issus du programme.

L'évolution du taux de collision au sein du programme Boltzmann est tracée en figure 3.5. Les effets de milieu ne sont pas pris en compte pour l'instant, le système est composé de  $N = 6 \times 10^5$  atomes, à une température de  $T = 0.4 T_F$  et une interaction de  $(k_F a)^{-1} = -0.1$ . Les valeurs attendues sont données par les intégrales (3.16) et (3.19), calculées grâce à une résolution Monte-Carlo. L'augmentation du nombre de particules tests à  $\tilde{N} = 5 \times 10^4$  permet un meilleur accord avec la valeur de  $\gamma_b$ , l'erreur entre les deux est réduite à environ 2%. Cette valeur de  $\tilde{N}$  représente cependant une limite technique qu'il n'est pas possible de franchir. L'augmentation de ce nombre entraîne une très grande augmentation du temps de calcul du programme, pour un gain de précision minime. Finalement, la faible diminution du taux de collision juste après l'initialisation illustre l'effet de relaxation du gaz mentionnée dans le paragraphe 3.4.1. Cependant, on voit que cet effet est très court en comparaison avec les temps finals que l'on considère, qui sont de l'ordre de  $\bar{\omega}t = 50$  (soit environ 5 ms).

### Test de l'ajustement pour la section efficace dans le milieu

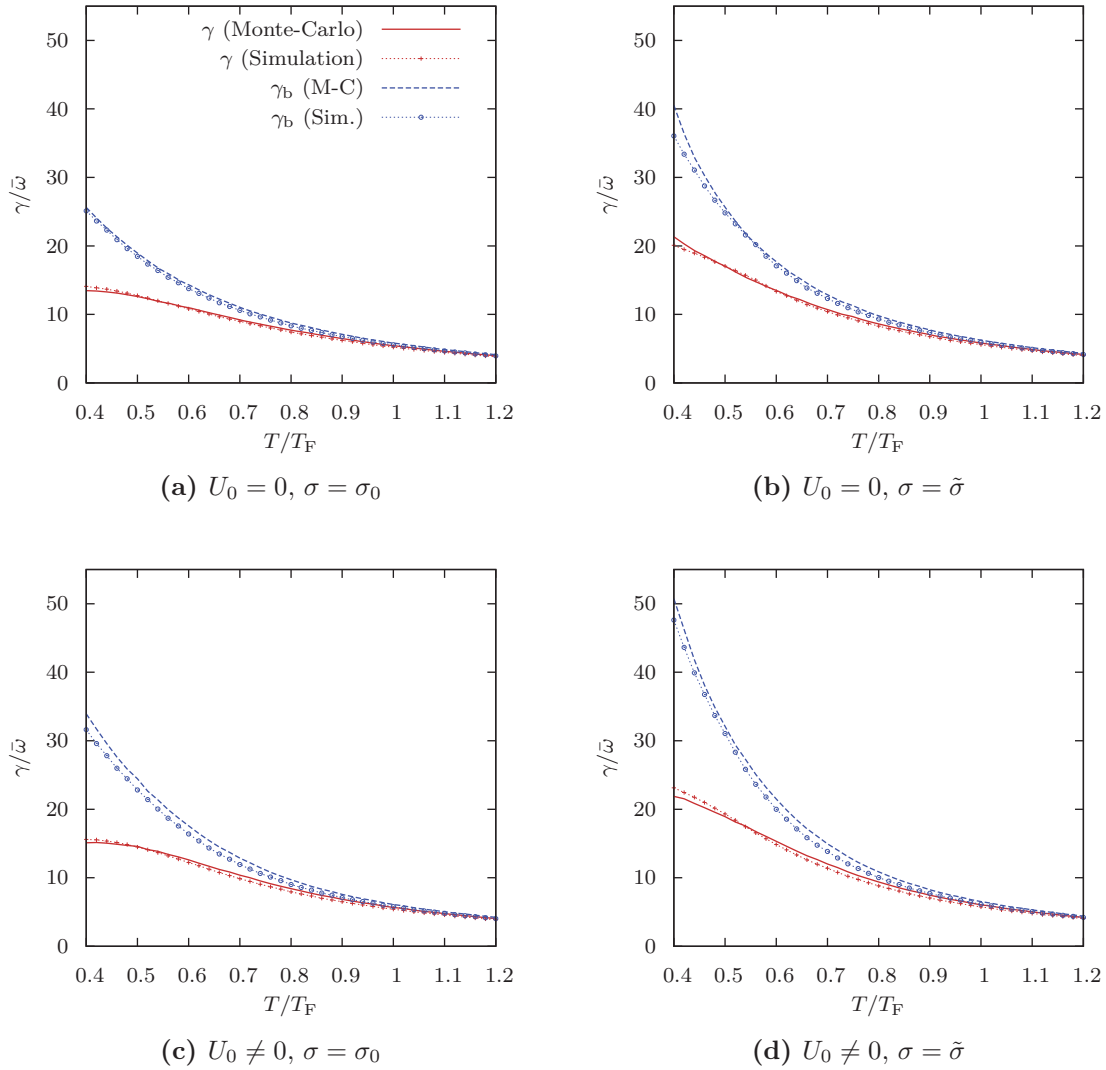
Le nombre de particules tests optimal étant désormais fixé, il est nécessaire de valider la procédure d'ajustement des paramètres de la section efficace dans le milieu définie dans le paragraphe 3.3.4.

La méthode la plus radicale pour évaluer cela est d'étudier la valeur du taux de collision (avec et sans blocage) pour différentes températures, et de confronter ces résultats à ceux donnés par l'intégrale Monte-Carlo.

La figure 3.6 représente donc l'évolution du taux de collision théorique (avec et sans blocage de Pauli) en fonction de la température à l'équilibre du système, calculés grâce à une intégration Monte-Carlo (respectivement trait plein rouge et tirets bleus). Les valeurs obtenues à partir du code de résolution de l'équation de Boltzmann sont représentées par les points (respectivement croix rouges et ronds bleus). Les quatre figures permettent de rendre compte de l'influence des effets de milieu : le potentiel de champ moyen  $U_0$  ainsi que le calcul de la section efficace dans le milieu  $\tilde{\sigma}$ , implémentée dans le programme grâce à l'expression de  $\sigma_{\text{fit}}$ .

Tout d'abord, l'évolution de  $\gamma$  et  $\gamma_b$  en fonction de  $T/T_F$  sans tenir compte des effets de milieu (fig. 3.6a) démontre une très bonne précision du programme Boltzmann pour cette plage de températures initiales et cette valeur de l'interaction. La diminution du taux de collision lorsque la température augmente s'interprète facilement : une température plus élevée est synonyme d'un gaz plus dilué. De ce fait, les atomes seront moins susceptibles d'entrer en collision, le taux de collision diminue donc. Par ailleurs, la valeur de  $\gamma_b$  tend vers celle de  $\gamma$  : lorsque la température devient importante, les nombres d'occupation deviennent très petits : il a de moins en moins de blocage de Pauli.

Voyons maintenant l'influence de la valeur de la section efficace calculée dans le milieu (fig. 3.6b). Globalement, on voit que la contribution de  $\tilde{\sigma}$  est importante à basse température ( $\gamma$  augmente de 50 % à  $T = 0.4 T_F$ ). La tendance générale de la courbe est cohérente, ce qui signifie que la détermination des paramètres de  $\sigma_{\text{fit}}$  est satisfaisante.



**Figure 3.6 :** Évolution du taux de collision (avec et sans blocage) en fonction de la température, pour un système de  $N = 6 \times 10^5$  particules, et une interaction de  $(k_F a)^{-1} = -0.1$ . Respectivement, les résultats ont été obtenus sans effet de milieu (a), avec seulement l'effet de la section efficace (b) ou du champ moyen (c), puis avec les deux contributions (d).

Cependant, l'écart entre le code Boltzmann et le calcul Monte-Carlo devient important à basse température : cela peut s'expliquer par le fait que l'on ne considère les effets de milieu que dans le membre de droite de l'équation de Boltzmann. Le potentiel chimique local devient alors important, notamment au centre du piège. Une phase superfluïde peut alors se créer, mais notre théorie ne peut pas la décrire. Afin de contrer cela, il est important d'inclure dans la résolution les effets dus au champ moyen attractif créé par les atomes.

En isolant cet effet (fig. 3.6c), on reconnaît encore la forme du taux de collision précédemment obtenue. Les deux grandeurs ont aussi augmenté, ce qui est cohérent dans la mesure où le champ moyen provoque un resserrement du profil de densité d'équilibre, comme celui-ci est attractif. Ainsi, les particules étant plus proches les unes des autres, elles entrent en collision plus souvent.

Finalement, le cas complet, avec section efficace dans le milieu et potentiel de champ moyen (fig. 3.6d) est celui qui présente le moins de fluctuations vis-à-vis des valeurs attendues. On voit nettement que les effets de milieu engendrent, à basse température, une très forte augmentation du nombre de collisions. De plus, à basse température, les valeurs sont de l'ordre de celles obtenues sans ces effets : le gaz étant dilué, le champ moyen joue un rôle limité, et la section efficace est très proche de la section efficace de particules libres. On constate cependant que l'écart constaté dans le cas de la figure 3.6b est fortement réduit, ce qui conforte l'hypothèse que l'on avait avancée. De ce fait, nous avons confirmé notre méthode d'ajustement des paramètres de la fonction  $\sigma_{\text{fit}}$  utilisée pour décrire la valeur de la section efficace modifiée par le milieu  $\tilde{\sigma}$ .

## Résumé

Grâce aux tests réalisés sur la conservation de l'énergie, le nombre de particules tests ainsi que sur le taux de collision, le terme de collision tel qu'il est décrit dans le paragraphe 3.3.3 est maintenant validé, et ce pour une gamme de températures significatives généralement explorée lors des diverses expériences (entre  $0.2$  et  $1.2 T_F$ ). Le programme de résolution de l'équation de Boltzmann nous permettra ainsi d'obtenir des résultats dépendant de la température, et notamment ceux concernant l'évolution des caractéristiques d'un mouvement collectif lorsque la température d'équilibre augmente. Par ailleurs, un autre point important de notre étude, l'inclusion des effets de milieu dans le programme de simulation, est validé pour cette gamme de températures.

## 3.5. Effets de milieu pour le mode quadrupolaire

Le travail de T. Lepers effectué au cours de sa thèse a conduit à la conclusion que la résolution numérique de l'équation de Boltzmann présente un accord très satisfaisant avec la méthode des moments calculés à l'ordre supérieur [8]. Cependant, les effets de milieu n'étaient pas encore implémentés dans la résolution numérique. Ce paragraphe a ainsi pour but de comparer les résultats donnés par le code de résolution et les calculs issus de la méthode des moments en tenant compte de l'effet de l'interaction. Afin

de pouvoir également comparer aux résultats expérimentaux [2], nous avons décidé de nous pencher sur l'étude du comportement du gaz piégé dans la limite unitaire lorsque le mode quadrupolaire est excité.

Le gaz que nous allons simuler contient  $N = 6 \times 10^5$  atomes de  ${}^6\text{Li}$ , avec une interaction de  $(k_{\text{F}}a)^{-1} = -0.1$ . Les pulsations caractéristiques du piège sont :

$$\omega_x = \omega_y = 2\pi \times 1800 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad \omega_z = 2\pi \times 32 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (3.42)$$

ce qui nous donne une échelle de temps de  $1/\bar{\omega} = 1/2951.7 \text{ s}$ .

### 3.5.1. Excitation du mode et réponse attendue

Nous avons déjà vu la procédure d'initialisation du gaz sur la grille. Examinons maintenant l'excitation d'un mode collectif à partir de cet état initial, que l'on réalise à l'instant  $t = t_{\text{exc}}$ .

#### Excitation

Le mode quadrupolaire radial est caractérisé par une compression de la section du gaz suivant les directions  $x$  et  $y$  alternativement. L'observable servant à le caractériser est définie par  $q_{\text{Q}}(t) = x^2 - y^2$ . Comme la dimension du gaz en  $x$  est proportionnelle à  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$ , il est donc trivial de comprendre l'origine de l'observable  $\langle q_{\text{Q}} \rangle(t)$  : elle traduit la différence entre les diamètres du gaz suivant les axes  $x$  et  $y$ .

Numériquement, on provoque l'apparition de cette vibration en modifiant directement les valeurs des impulsions de chaque particule en appliquant le potentiel de perturbation suivant :

$$\delta V_{\text{Q}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\alpha}{2}(x^2 - y^2)\delta(t - t_{\text{exc}}), \quad (3.43)$$

où  $\alpha$  est un paramètre arbitraire nécessaire pour obtenir une excitation assez grande pour être supérieure aux fluctuations numériques du programme. Toutefois, si celle-ci est choisie trop élevée, nous ne sommes plus dans le cadre de la réponse linéaire. Chaque particule test  $i$  du système voit alors son impulsion modifiée suivant :

$$\mathbf{p}_i \longrightarrow \mathbf{p}_i + \left. \frac{\partial \delta V_{\text{Q}}}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_i, \mathbf{p}=\mathbf{p}_i, t=t_{\text{exc}}}. \quad (3.44)$$

Lorsque le mode est excité, on observe donc une discontinuité dans la distribution en impulsion proportionnelle à la position des particules (dans le cas du mode de Kohn, cette discontinuité est la même pour toutes les particules tests). On a en effet :

$$(p_i(t_{\text{exc}}))_x \rightarrow (p_i(t_{\text{exc}}))_x + \alpha x_i(t_{\text{exc}}), \quad (3.45)$$

$$(p_i(t_{\text{exc}}))_y \rightarrow (p_i(t_{\text{exc}}))_y - \alpha y_i(t_{\text{exc}}). \quad (3.46)$$

Les impulsions suivant la direction axiale ne sont pas modifiées. Une fois que cette excitation est provoquée, on laisse alors le gaz évoluer dans le temps. À chaque itération, la valeur de  $q_Q(t)$  est calculée à l'aide de :

$$\langle x^2 \rangle(t) = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (x_i(t) - \langle x \rangle(t))^2, \quad (3.47)$$

$$\langle y^2 \rangle(t) = \frac{1}{\tilde{N}} \sum_{i=1}^{\tilde{N}} (y_i(t) - \langle y \rangle(t))^2. \quad (3.48)$$

Dans les expressions ci-dessus, les valeurs moyennes  $\langle x \rangle$  et  $\langle y \rangle$  sont soustraites afin de limiter l'influence des fluctuations numériques issues de l'oscillation du nuage pouvant apparaître lorsque le gaz est revenu à l'équilibre (celles-ci peuvent atteindre environ 5% de la valeur de  $\alpha$ ).

### Réponse du mode et grandeurs physiques

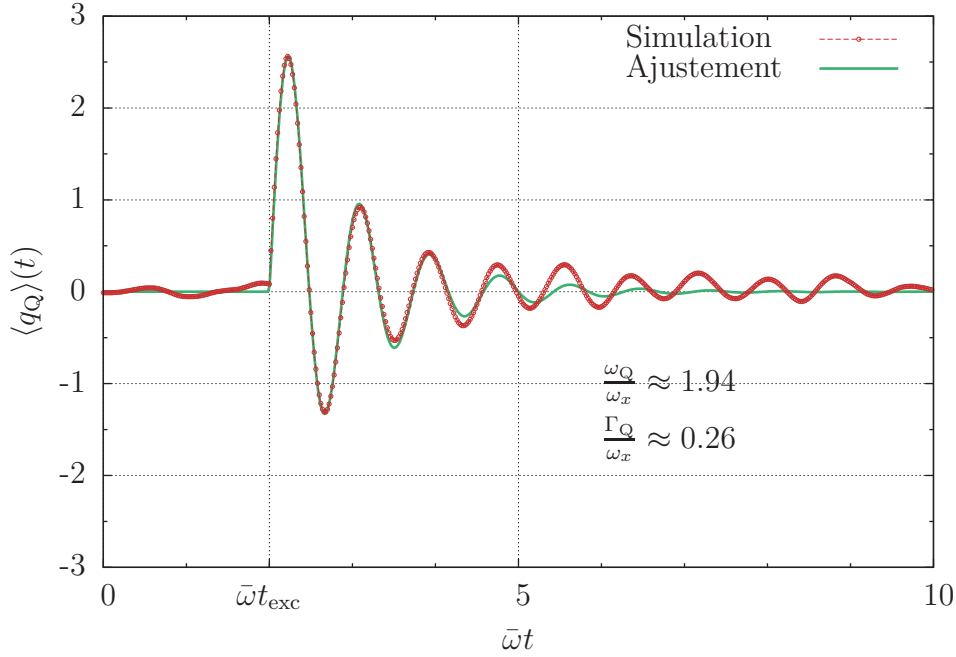
Le mode quadrupolaire radial est caractérisé par un mouvement amorti dans le plan ( $xOy$ ). L'évolution de  $\langle q_Q \rangle$  en fonction du temps, pour chaque valeur de la température, nous permet ainsi d'obtenir la valeur de la pulsation  $\omega_Q$  et de l'amortissement  $\Gamma_Q$ . Comme l'a montré T. Lepers [5, 9] au cours de l'étude détaillée de ce mode collectif, il n'est pas possible d'obtenir les grandeurs qui nous intéressent en considérant que cette réponse est simplement une sinusoïde amortie, surtout dans le cas où le gaz est fortement hydrodynamique : l'amortissement devient très grand. Afin d'ajuster les résultats, nous considérerons donc la fonction de réponse temporelle suivante (formule utilisée pour l'ajustement des données expérimentales [24] et issue de la méthode des moments [9]) :

$$\langle q_Q \rangle(t) = -A e^{-\Gamma_Q t} \sin(\omega_Q t) + B \left[ e^{-\Gamma_Q t} \cos(\omega_Q t) - e^{-\Gamma_1 t} \right]. \quad (3.49)$$

Il s'agit principalement d'une oscillation de pulsation  $\omega_Q$  amortie par  $\Gamma_Q$ . Cependant, une contribution en décroissance exponentielle de coefficient  $\Gamma_1$  est aussi prise en compte. Les facteurs  $A$  et  $B$  définissent l'amplitude de ces deux mouvements. Cette forme coïncide de plus avec la méthode des moments à l'ordre le plus bas.

Un exemple du procédé utilisé est illustré en figure 3.7. Nous sommes dans les conditions expérimentales, pour une température initiale choisie à  $T/T_F = 0.7$ . Les cercles rouges sont le résultat de l'évolution de  $\langle q_Q \rangle(t)$  en fonction du temps donné par le code Boltzmann. La fonction tracée en trait plein (vert) est un ajustement de la fonction (3.49) via les paramètres  $\omega_Q$ ,  $\Gamma_Q$ ,  $A$ ,  $B$  et  $\Gamma_1$ .

Ces résultats confirment d'ores et déjà le caractère amorti de ce mouvement collectif : dans les conditions de la figure, le mouvement s'est dissipé au bout de 4 unités de temps, ce qui correspond à environ 1.4 ms. Par ailleurs, on peut voir que les fluctuations numériques du signal restent importantes lorsque le mode s'estompe : la perturbation créée par celui-ci augmente la difficulté d'identifier les mouvements propres au mode collectif. Cela entraîne donc une imprécision sur les valeurs de la pulsation et de l'amor-



**Figure 3.7 :** Évolution de l'observable  $\langle q_Q \rangle(t)$  en fonction du temps obtenue avec le code de résolution Boltzmann (cercles rouges) sans considérer les effets de milieu, pour une température de  $T/T_F = 0.7$ . Le résultat donné par la fonction d'ajustement (3.49) est tracé en trait plein (vert).

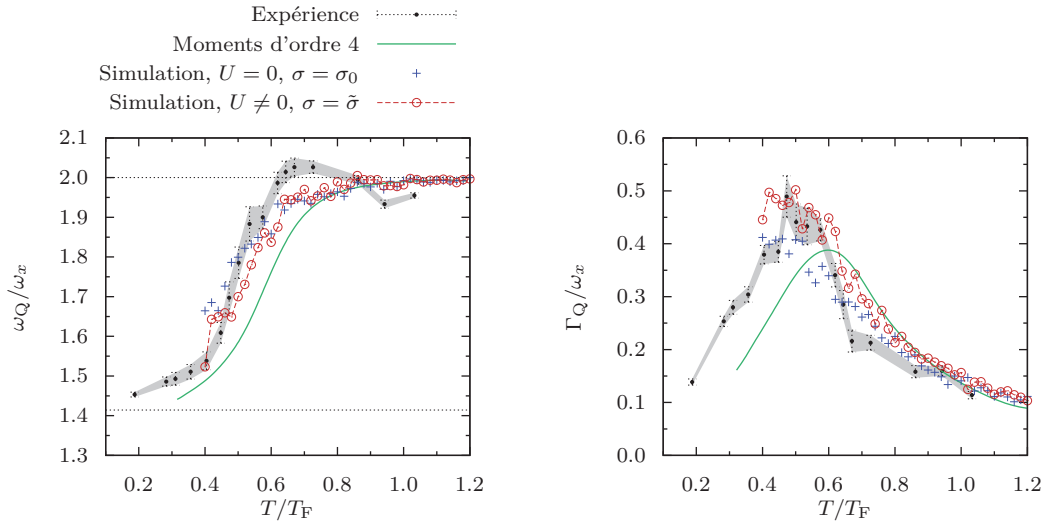
tissement tirées de l'ajustement. Par ailleurs, les résultats finals obtenus dépendent de la forme de la fonction d'ajustement. Au cours de l'élaboration du protocole, nous avons fait des tests d'ajustement sur des transformations de Fourier numériques du spectre  $\langle q_Q \rangle(t)$ , nous permettant ainsi d'avoir une distribution dans l'espace des pulsations. Cela n'a malheureusement pas atténué les fluctuations numériques des résultats, la transformation de Fourier en engendrant elle-même également.

### 3.5.2. Étude sur une plage de températures

Maintenant que nous avons vu la méthode d'extraction des caractéristiques du mode de vibration, nous pouvons appliquer ce protocole aux spectres obtenus en faisant varier la température initiale, afin de connaître l'évolution de  $\omega_Q$  et  $\Gamma_Q$ . Nous allons ainsi utiliser le programme Boltzmann pour des températures initiales allant de  $0.4 T_F$ , au-dessus de la température critique pour laquelle une phase superfluïde peut apparaître, jusqu'à  $1.2 T_F$ , valeur qui plonge déjà le gaz dans un régime présentant peu de collision.

De nombreuses études préliminaires de ce mode ont été effectuées, tant sur le régime hydrodynamique que sans collision. Pour un gaz piégé dans un piège optique harmonique, les calculs dans le régime hydrodynamique (basses températures) donnent une valeur de  $\omega_Q = \sqrt{2}\omega_x$ . Par contre, lorsqu'on atteint le régime sans collision (hautes températures), la valeur de la pulsation du mode devient  $2\omega_x$ . Ces valeurs sont représentées par des lignes pointillées sur la figure 3.8a. Nous proposons ici de donner un aperçu de





(a) Fréquence du mode quadrupolaire  $\omega_Q/\omega_x$  en fonction de la température initiale du gaz  $T/T_F$ .

(b) Amortissement du mode quadrupolaire  $\Gamma_Q/\omega_x$  en fonction de la température initiale du gaz  $T/T_F$ .

**Figure 3.8 :** Pulsation et amortissement du mode quadrupolaire calculés grâce au code de résolution Boltzmann avec (o) ou sans (⊕) tenir compte des effets de milieu. Nous sommes au plus proche des paramètres utilisés pour l'expérience de Riedl *et al.* [2] (points noirs) :  $N = 6 \times 10^5$  atomes, pour  $(k_F a)^{-1} = -0.1$ . Les calculs par la méthode des moments sont issus de [8] (trait plein vert).

l'évolution de la pulsation et de l'amortissement de la vibration quadrupolaire dans les régimes d'interaction intermédiaires et de montrer l'influence des effets de milieu dans l'équation de Boltzmann. Les calculs récents sur la méthode des moments à l'ordre supérieur [8] nous fournissent aussi une dernière possibilité de comparaison des résultats obtenus, bien que ceux-ci aient été effectués sans tenir compte du potentiel de champ moyen, mais seulement de la section efficace calculée dans le milieu<sup>3</sup>.

La figure 3.8a regroupe les résultats obtenus pour la pulsation. Nous avons ajouté les résultats de la méthode des moments à l'ordre supérieur incluant les effets liés à la section efficace calculée dans le milieu (trait plein vert). Enfin, les données extraites des ajustements des résultats du code de résolution avec (cercles rouges) et sans (croix bleues) effets de milieu. La figure 3.8b est construite suivant le même modèle, mais pour les résultats concernant les amortissements.

Pour les deux figures, on peut se rendre compte des irrégularités dans l'extraction des valeurs par l'ajustement, comme nous l'avons dit précédemment. On peut toutefois en déduire clairement une tendance générale, qui présente un accord très satisfaisant avec les résultats obtenus par les autres méthodes, notamment les points expérimentaux.

L'influence de la section efficace calculée dans le milieu combinée à l'ajout du potentiel de champ moyen sur la valeur de la pulsation du mode collectif est infime. On notera

<sup>3</sup>En effet, les auteurs ont considéré que l'effet du champ moyen était faible sur la valeur finale des pulsations et amortissement des modes collectifs.

cependant que les données obtenues à l'aide du programme Boltzmann se rapprochent considérablement des résultats expérimentaux. Par ailleurs, à haute température, la limite sans collision est atteinte ( $\omega \approx 2\omega_x$ ) de manière satisfaisante.

Les résultats concernant l'amortissement du mode nous montrent l'influence du calcul avec les effets de milieu : à faible température, on voit nettement l'augmentation de  $\Gamma_Q$  vis-à-vis du résultat sans effets de milieu. Comme le régime hydrodynamique provoque une diminution de l'amortissement, nous pouvons dire que les effets de milieu que l'on a considérés retarde l'apparition de ce régime.

Globalement, nous avons vu que l'inclusion des effets de milieu dans la résolution de l'équation de Boltzmann ne présente qu'une influence limitée sur les valeurs finales. Il semblerait que, bien que l'on soit dans un régime où l'interaction est forte, les effets de milieu ont une influence limitée sur la valeur de la pulsation du piège. On a pu cependant rendre compte du fort amortissement à faible température, comme les expériences l'ont mesuré. Cependant, comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, le phénomène d'expansion du gaz joue un rôle crucial du point de vue expérimental, dans la mesure où celui-ci est indispensable pour mener à bien les mesures de densité et de température. Nous allons donc étudier l'influence de cette expansion sur la valeur finale de la pulsation et de l'amortissement du mode quadrupolaire.

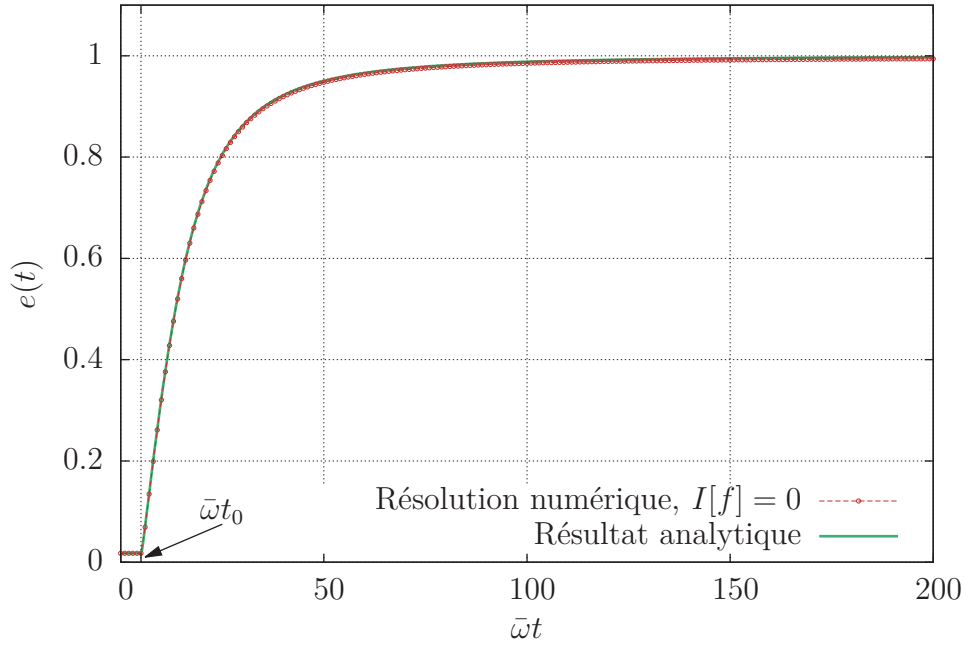
## 3.6. Expansion du gaz et pulsation des modes collectifs

Plusieurs calculs pour les différents régimes collisionnels ont déjà été réalisés [26, 27, 44–46] dans le cadre de gaz en forme de cigare, notamment pour des condensats de Bose–Einstein en expansion. Par ailleurs, des mesures expérimentales ont aussi été effectuées, afin de confirmer le comportement des gaz en expansion [47, 48]. Dans ce paragraphe nous allons voir comment un gaz dont la longueur axiale est très importante devant la dimension radiale se comporte lors d'une phase d'expansion. Nous considérerons pour cela les mêmes caractéristiques du gaz que dans le paragraphe précédent.

### 3.6.1. Contexte théorique

Typiquement, l'expansion d'un gaz avec une forme de cigare présente une particularité évoquée succinctement dans le paragraphe 1.3.2 : les forces de pressions étant plus importantes le long de la direction radiale, le gaz va de ce fait s'étendre beaucoup plus rapidement suivant cette direction. Une des observables physiques permettant de caractériser ce phénomène est alors le rapport entre la dimension radiale et la dimension axiale du gaz, définie par :

$$e(t) = \sqrt{\frac{\langle r_{\perp}^2 \rangle(t)}{\langle z^2 \rangle(t)}}. \quad (3.50)$$



**Figure 3.9 :** À l'instant  $t = t_0$ , le potentiel harmonique piégeant les atomes est éteint. L'expansion du gaz de  $N = 6 \times 10^5$  atomes débute. L'interaction est  $(k_F a)^{-1} = -0.1$  et les particules n'entrent pas en collision. La température est fixée à  $T = 0.4 T_F$ . Le résultat analytique (équation (3.51)) est tracé en trait plein (vert). On voit distinctement l'accord entre cette formule et la résolution numérique effectuée dans le même cas (cercles rouges).

### Régime sans collision

Dans un premier temps, voyons le comportement dans ce cas lorsque les collisions entre les particules sont rares. Une expansion balistique commence alors à  $t = t_0$ , instant où le piège est éteint. Les calculs [45, 49] montrent que l'observable  $e(t)$  suit la relation simple :

$$e(t) = \frac{\omega_z}{\omega_x} \sqrt{\frac{1 + \omega_x^2 t^2}{1 + \omega_z^2 t^2}}. \quad (3.51)$$

Clairement, nous voyons que l'expansion d'un tel système présente une forme finale sphérique :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e(t) = 1. \quad (3.52)$$

Cela signifie que pour des temps longs, la distribution des vitesses devient naturellement isotrope pour un gaz sans collision et que le gradient de pression engendre une expansion isotrope.

Le programme numérique reproduit parfaitement ce comportement, comme nous pouvons le voir en figure 3.9. Ces résultats, obtenus pour un gaz à  $T = 0.4 T_F$  représentent l'expression (3.51) (trait plein vert), calculée pour un gaz présentant les mêmes

propriétés que celui considéré pour l'étude du mode quadrupolaire précédente (paragraphe 3.5). Les cercles rouges sont issus de la résolution de l'équation de Boltzmann sans terme de collision. Il est clair que cette expansion du gaz est de nature balistique, d'après ce que nous avons exposé précédemment. À noter que nous avons vérifié ce comportement pour toute la plage de températures (entre 0.4 et  $1.2T_F$ ). Dans le cas que nous venons de présenter, le temps final ( $\bar{\omega}t = 200$ ) correspond à environ 65 ms. Si l'on compare ce temps à celui utilisé pour les mesures expérimentales sur les modes collectifs (environ 2 ms [24]) il est clair que cette relaxation vers un état isotrope ne sera pas atteint au cours des mesures sur les modes collectifs.

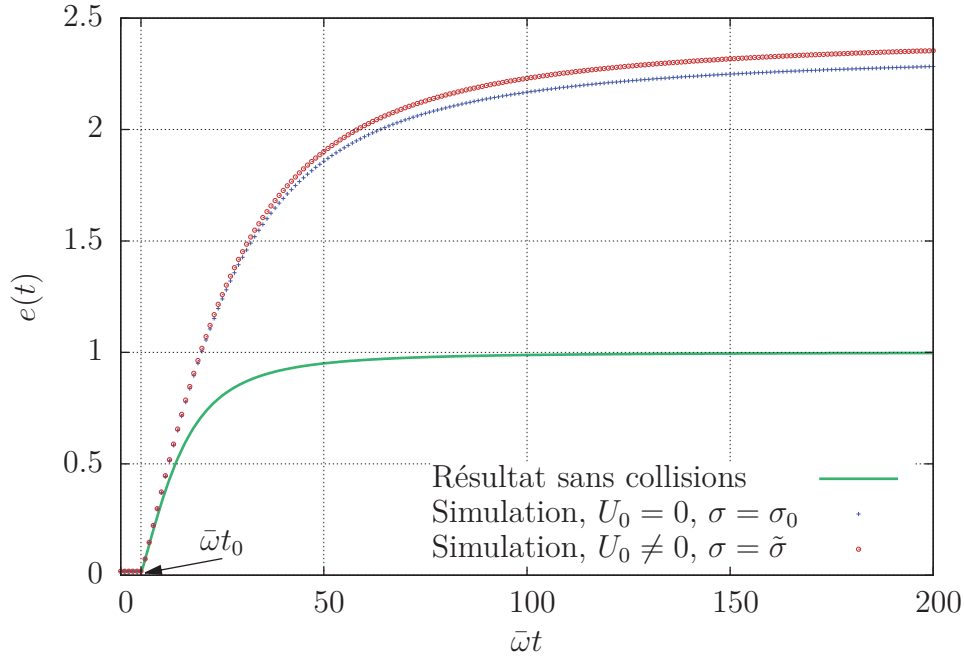
### Expansion avec collisions

Bien évidemment, ce travail sur les gaz sans collision ne concerne que les systèmes expérimentaux à haute température. Cependant, ce comportement simple peut servir de cas auquel on peut se référer, notamment pour tester la résolution de l'équation.

Comme nous l'avons dit, les collisions entraînent l'apparition d'effets hydrodynamiques qui engendreront une anisotropie dans la distribution d'impulsions du gaz après un temps d'expansion élevé. Dans ce cas, la limite de l'observable  $e(t)$  aux grands temps ne tendra plus vers l'unité. Cela a été confirmé par les expériences réalisées à l'université de Duke [47]. Alors, C. Menotti *et al.* [45] ont effectué un calcul du point de vue hydrodynamique, qui permet ainsi de voir l'évolution de  $e(t)$  lorsque le gaz est superfluide, ou classique mais dans un régime de forte interaction. Ce calcul fait appel à une mise à l'échelle des positions et des vitesses de chaque particules, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.3.2. Cette méthode de renormalisation provient de l'étude des gaz bosoniques [27, 46].

À l'aide du programme Boltzmann, nous pouvons obtenir l'allure de  $e(t)$  en tenant compte des effets de milieu pour tous les régimes présentés par le gaz de fermions. La figure 3.10 montre l'effet des collisions sur la valeur de l'observable  $e(t)$ . On voit nettement que les résultats du code sans (croix bleues) ou avec (cercles rouges) effets de milieu présentent une valeur limite aux grands temps qui n'est pas égale à l'unité. Ce résultat pour la phase normale du gaz était attendu et est en accord avec [45]. La forme finale du nuage, lorsque celui-ci est dans un régime d'interaction hydrodynamique, ne tend donc pas vers une sphère : cela traduit l'influence du gradient de pression. Les vitesses individuelles sont modifiées et il en résulte que la dimension du nuage suivant la direction radiale deviendra plus grande que la direction axiale : la forme finale du nuage est alors aplatie.

L'étude de l'expansion hydrodynamique ne permet malheureusement pas de savoir si le gaz est dans une phase superfluide. Néanmoins, des calculs tenant compte de l'effet des collisions par le biais de l'approximation du temps de relaxation ont montré que l'expansion ne modifie pas la détermination des caractéristiques des modes collectifs [50].



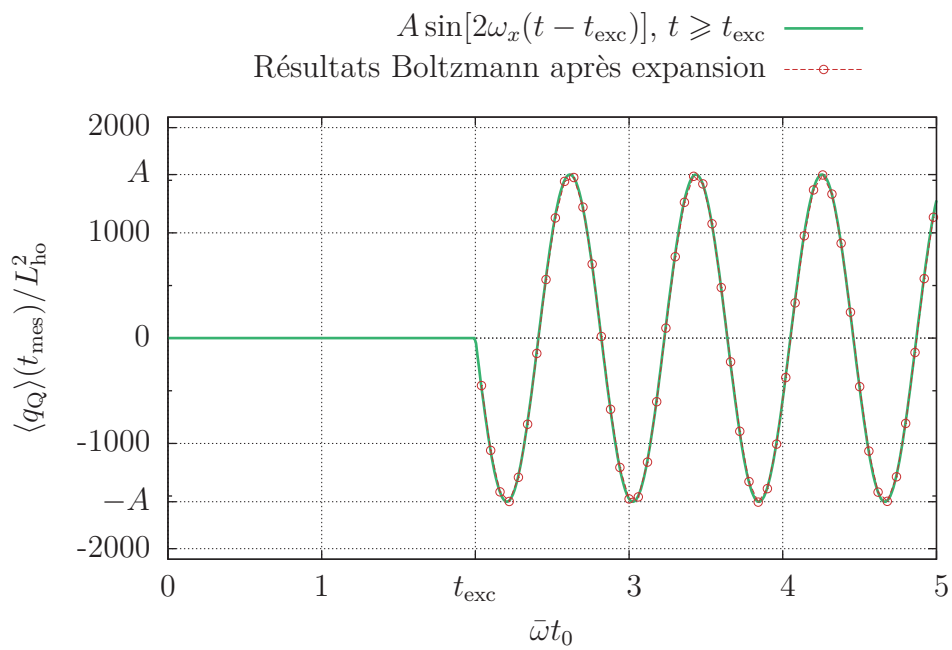
**Figure 3.10 :** À l'instant  $t = t_0$ , le potentiel harmonique piégeant les atomes est éteint. Le gaz est dans les mêmes conditions que pour la figure 3.9, mais cette fois-ci, les collisions sont prises en compte. La limite après un long temps d'expansion n'est clairement plus 1 : en raison des collisions, le gaz ne présente plus une forme sphérique. Par ailleurs, on voit que les effets de milieu modifient la valeur finale.

### 3.6.2. Application aux mesures sur le mode quadrupolaire

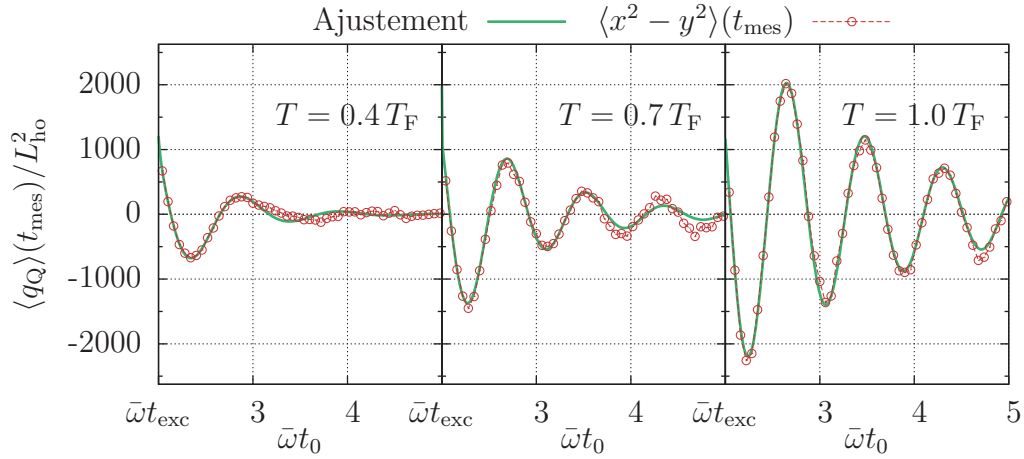
Le but de ce paragraphe est d'appliquer le même protocole de détermination des pulsations et amortissements que ce qui est utilisé lors de leur mesure expérimentale. Cela est décrit en détails dans l'article [24], la valeur de la pulsation d'un mode collectif s'effectue grâce à la mesure de la taille du nuage, donnant accès aux observables intéressantes : dans ce cas,  $\langle x^2 - y^2 \rangle(t)$ . Lorsque le gaz est piégé et stabilisé dans les conditions que l'on souhaite, un laser sert à compresser le gaz dans une des directions radiales. Ensuite, la contrainte est relâchée à l'instant  $t = t_{\text{exc}}$  et le mode quadrupolaire apparaît. Si l'on veut obtenir la valeur de l'observable  $\langle x^2 - y^2 \rangle$  à l'instant  $t = t_0$ , il est nécessaire de couper le confinement afin de laisser le gaz s'étendre pendant un temps  $\Delta t_{\text{ToF}} = t_{\text{mes}} - t_0$  (*ToF* signifiant *Time of Flight*), où  $t_{\text{mes}}$  est l'instant auquel l'image du profil de densité est mesurée. À partir de cette image, il est facile d'extraire les dimensions du nuage dans les directions  $x$  et  $y$ , et ainsi d'avoir accès à  $\langle x^2 \rangle(t_{\text{mes}})$  et  $\langle y^2 \rangle(t_{\text{mes}})$ . Nous considérerons un  $\Delta t_{\text{ToF}}$  d'environ 2 ms, soit  $\bar{\omega} \Delta t_{\text{ToF}} = 6$ , comme ce qui a été considéré dans la référence [24].

#### Test du protocole pour un gaz sans collision

Dans le but de valider notre protocole, dans un premier temps nous considérerons un gaz dans le régime sans collision, dans les mêmes conditions que l'étude précédente.



**Figure 3.11 :** Pour un gaz de  $N = 6 \times 10^5$  atomes initialement à  $T = 0.4 T_F$  et en négligeant le terme de collisions, nous avons excité le mode quadrupolaire à  $t = t_{\text{exc}}$ . Ensuite, au lieu de mesurer directement les valeurs de  $\langle q_Q \rangle(t)$ , nous avons éteint le piège pour différentes valeurs de  $t = t_0$ . Ainsi, après un temps d'expansion de ce gaz de  $\bar{\omega}\Delta t_{\text{ToF}} = 6$ , nous avons à chaque fois sauvegardé les valeurs de  $\langle q_Q \rangle(t_{\text{mes}})$ , où  $t_{\text{mes}} = t_0 + \Delta t_{\text{ToF}}$  (cercles rouges). La sinusoïde de pulsation  $2\omega_x$  attendue dans ce cas est en parfait accord (trait plein vert).



**Figure 3.12 :** Évolution de l'observable du mode quadrupolaire en fonction du temps de piégeage du gaz, pour différentes valeurs de la température initiale. L'ordre de grandeur des valeurs de  $q_Q$  devient alors très important. Aussi, à faible température, on constate l'importance des fluctuations numériques.

Pour une température initiale fixée à  $T = 0.4 T_F$ , nous allons exciter le mode quadrupolaire à  $\bar{\omega}t_{\text{exc}} = 2$ . Puis nous éteindrions le piège pour différentes valeur de  $\bar{\omega}t_0$ , afin d'obtenir suffisamment de points pour pouvoir tracer l'évolution de l'observable  $\langle q_Q \rangle(t)$ , mesurée à l'instant  $t_{\text{mes}} = t_0 + \Delta t_{\text{ToF}}$ . D'après les lois d'échelle vues précédemment, seule l'amplitude de l'oscillation doit être modifiée, en raison de l'augmentation de la taille du gaz. La figure 3.11 présente les résultats. Par souci de clarté, les valeurs de  $\langle q_Q \rangle(t_{\text{mes}})$  ont été tracées en fonction de  $t_0$  : de cette manière, il est facile de se rendre compte du temps de piégeage effectif des atomes excités par le mode quadrupolaire (soit  $t_0 - t_{\text{exc}}$ ).

Pour un gaz sans collision, le mode quadrupolaire ne présente pas d'amortissement et sa pulsation tend vers une valeur de  $2\omega_x$ . Le trait plein (vert) représente ce résultat analytique simple ; l'amplitude du mouvement ( $A$ ) a été ajustée en conséquence. On sait aussi que l'expansion de ces gaz suit une loi balistique simple (équation (3.51)). Les cercles (rouges) sont les résultats obtenus avec le programme de résolution de l'équation de Boltzmann. L'accord entre les deux est probant : l'expansion balistique conserve la valeur de la pulsation du mode de vibration dans lequel était le gaz juste avant qu'il ne commence son expansion. Nous allons donc maintenant effectuer la même étude en prenant en compte des collisions.

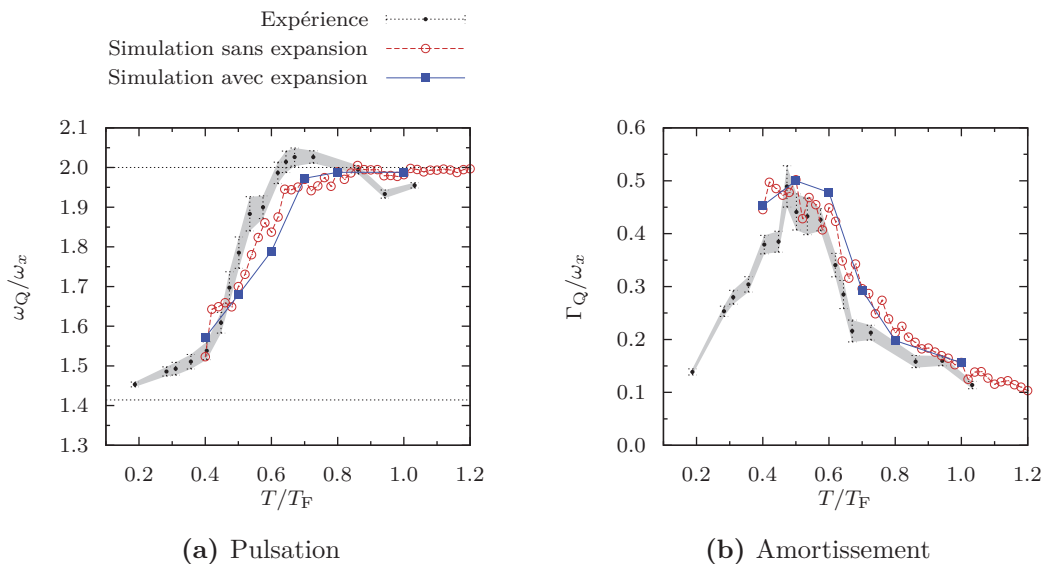
### Résultats en conditions réelles

Comme cette méthode demande énormément de temps de calcul, nous avons décidé de ne l'appliquer qu'à une plage de températures restreintes.

Les valeurs de  $\langle x^2 \rangle$  et  $\langle y^2 \rangle$  après l'expansion du gaz deviennent grandes (facteur  $\approx 500$  par rapport au gaz piégé, ce qui correspond à une augmentation de la taille du nuage d'un facteur 20 environ). Les figures regroupées en 3.12 montrent les résultats obtenus pour différentes valeurs de la température, toujours dans les mêmes conditions qu'auparavant. Les cercles (rouges) représentent les valeurs de  $\langle x^2 - y^2 \rangle$  mesurées après

$T/T_F$	$\omega_Q/\omega_x$	$\omega_Q^{\text{exp}}/\omega_x$	$\Gamma_Q/\omega_x$	$\Gamma_Q^{\text{exp}}/\omega_x$
0.4	1.523	1.572	0.446	0.453
0.5	1.700	1.679	0.502	0.500
0.6	1.837	1.789	0.449	0.478
0.7	1.970	1.973	0.296	0.293
0.8	1.990	1.988	0.213	0.198
1.0	1.982	1.988	0.156	0.156

**Table 3.1** : Comparaison des valeurs des pulsations et amortissements obtenues par les deux méthodes.



**Figure 3.13** : Valeurs de la pulsation et de l'amortissement du mode quadrupolaire obtenues grâce aux deux méthodes.

un temps de vol de  $\bar{\omega}\Delta t_{\text{ToF}} = 6$ . Les effets du champ moyen ainsi que de la section efficace calculée dans le milieu ont été pris en compte. L'ajustement des valeurs (trait plein vert) a été effectué en utilisant la même fonction que dans le paragraphe 3.5 (équation (3.49)), ce qui nous permet d'extraire (voir le tableau 3.1) les valeurs de  $\omega_Q^{\text{exp}}$  et  $\Gamma_Q^{\text{exp}}$ , pulsation et amortissement du mode quadrupolaire déterminés après l'expansion.

À basse température (fig. 3.12), on voit malheureusement que les fluctuations numériques sont importantes. Lorsque ce phénomène inévitable est couplé à un fort amortissement du mode, il est alors difficile d'obtenir des résultats précis. L'ajustement des données est donc très imprécis, et ne peut être effectué que sur une oscillation. Il faudra donc considérer les résultats à cette température avec précautions. En revanche,



lorsque la température devient plus importante, on voit que les résultats sont plus réguliers. L'ajustement des paramètres  $\omega_Q^{\text{exp}}$  et  $\Gamma_Q^{\text{exp}}$  est alors plus précis : il conduit à des valeurs très proches de celles obtenues par la méthode précédente, comme cela est démontré par la figure 3.13. Les carrés (bleus) sont les données obtenues par cette méthode d'expansion, et sont comparés aux résultats donnés par la méthode « classique » (cercles rouges). Dans l'ensemble, on peut donc dire que l'expansion n'influe pas sur la détermination des valeurs finales de la pulsation et de l'amortissement.

### 3.6.3. Conclusions à propos de l'expansion

Nous venons de voir que le programme que nous avons développé peut reproduire les deux régimes différents possibles lors de l'expansion du gaz. Dans le régime sans collision, l'expansion est balistique et la forme du gaz après l'expansion devient une sphère. Dans le régime hydrodynamique, les gradients de pression influencent la forme finale du système : la vitesse d'expansion suivant la direction radiale est plus importante que celle suivant l'axe  $z$ .

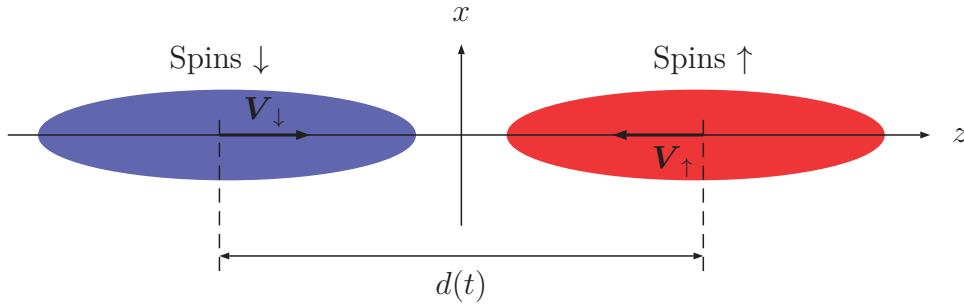
Par ailleurs, nous avons vu que la détermination des caractéristiques des modes collectifs (pulsation, amortissement) effectuée après une expansion – identique à celle des expérimentateurs – sont les mêmes que celles que l'on a déterminées directement. De ce fait, après un temps d'expansion court, aucune correction due à cette expansion ne doit être pris en compte.

## 3.7. Un pas vers les gaz polarisés

Déjà évoqué en introduction, un autre aspect de ces travaux de thèse concerne l'étude des gaz dont les populations de spin ne sont pas égales. C'est pourquoi le programme résolvant l'équation de Boltzmann a été construit dans l'optique de simuler des gaz polarisés. Cependant, les effets de milieu, notamment le potentiel de champ moyen, ne peuvent être implémentés pour l'instant. En effet, la méthode NSR que l'on a utilisée pour les systèmes précédents donnent des résultats incohérents pour ces systèmes. Nous proposerons d'ailleurs une alternative à NSR dans le chapitre suivant.

### 3.7.1. Présentation du mouvement

Dans le cas polarisé, nous avons la possibilité d'étudier de nouveaux modes collectifs. Nous avons décidé de nous pencher sur les différents phénomènes constatés lors de collisions entre deux nuages de gaz entièrement polarisés. Le principe est de créer comme précédemment un nuage à l'équilibre et non polarisé, puis ensuite de le séparer d'une distance  $d_0$  (suivant l'axe  $z$ ) en deux parties totalement polarisées : les spins  $\uparrow$  d'un côté et les spins  $\downarrow$  de l'autre. Ensuite on les laisse évoluer dans le piège optique. Ces systèmes ont été étudiés expérimentalement [51, 52], puis d'un point de vue théorique en



**Figure 3.14:** Illustration de la collision de deux nuages d'atomes totalement polarisés, à droite les spins  $\uparrow$  (rouge) et à gauche les spins  $\downarrow$  (bleu). Ce schéma montre bien la définition de l'observable  $d(t)$ . À l'état initial, les vitesses totales  $V_\sigma$  sont considérées nulles.

utilisant une résolution numérique de l'équation de Boltzmann [53, 54] ou une approche hydrodynamique [55]. Ces études ont conduit à montrer plusieurs choses.

Tout d'abord, une des observables les plus importantes est la position relative des deux parties du système. Nous la noterons  $d(t)$ , et elle est définie par :

$$d(t) = \langle z_\uparrow - z_\downarrow \rangle(t), \quad (3.53)$$

où  $\langle z_\sigma \rangle(t)$  est la position du centre de masse des particules de spin  $\sigma$ . D'après nos définitions, elle a pour expression :

$$\langle z_\sigma \rangle(t) = \frac{1}{\tilde{N}_\sigma} \sum_{i=1}^{\tilde{N}_\sigma} z_i(t). \quad (3.54)$$

Les deux nuages présentent alors plusieurs processus dynamiques, dont le comportement dépend de l'interaction entre les particules mais aussi des paramètres initiaux (respectivement  $d_0$  et  $\dot{d}_0$ ). Comme nous l'avons vu en étudiant le mode quadrupolaire (paragraphe 3.5), la température initiale du système modifie elle aussi le régime de collision. Dans l'étude qui suit, nous allons limiter cette dépendance en fixant la température initiale à  $T = 0.4 T_F$ . Cependant, le fait de déplacer les nuages loin du centre du piège signifie que l'on modifie l'énergie du système. Il en résulte que le système va tendre vers un équilibre différent de l'initialisation. Les valeurs de la température et du taux de collision, entres autres, se trouvent donc modifiées.

On peut tout de même définir les trois régimes observés de la manière suivante :

- (a) Lorsque  $(k_F a)^{-1}$  est grand (voir le tableau 3.2), les nuages vont rebondir l'un contre l'autre, donnant des valeurs de  $\langle z_\sigma \rangle(t)$  ne pouvant atteindre zéro – la valeur à l'équilibre donc – qu'à de très grands temps d'évolution. La valeur de  $d(t)$  va présenter des oscillations, traduisant les rebonds de chaque nuage l'un sur l'autre. C'est ce que l'on appelle le mode « bouncing ».
- (b) Dans le régime intermédiaire, les deux nuages vont se déplacer chacun vers le centre du piège : la valeur de  $d(t)$  va alors décroître de manière exponentielle, sans osciller, jusqu'à atteindre une valeur nulle. Les deux nuages se rassemblent jusqu'à atteindre l'équilibre. D'après [53], ce régime est indépendant de la valeur

Cas	$n_z$	$(k_F a)^{-1}$
(a)	5	-0.1
(b)	2	-2.5
(c)	12	-5.0

**Table 3.2 :** Paramètres utilisés afin d'obtenir les trois régimes de collisions entre les nuages totalement polarisés pour une température initiale de  $T = 0.4 T_F$ .

de  $d_0$  et n'est qu'une conséquence du changement du temps de relaxation du système à l'équilibre.

- (c) Enfin, lorsque l'interaction est faible entre les atomes, les collisions ne pourront pas suffisamment ralentir les nuages et ceux-ci vont se traverser l'un l'autre. Il en résultera que  $d(t)$  va présenter une oscillation amortie autour de la valeur nulle, jusqu'à ce que les nuages atteignent la position d'équilibre, au centre du piège. On parle alors de « transmission ».

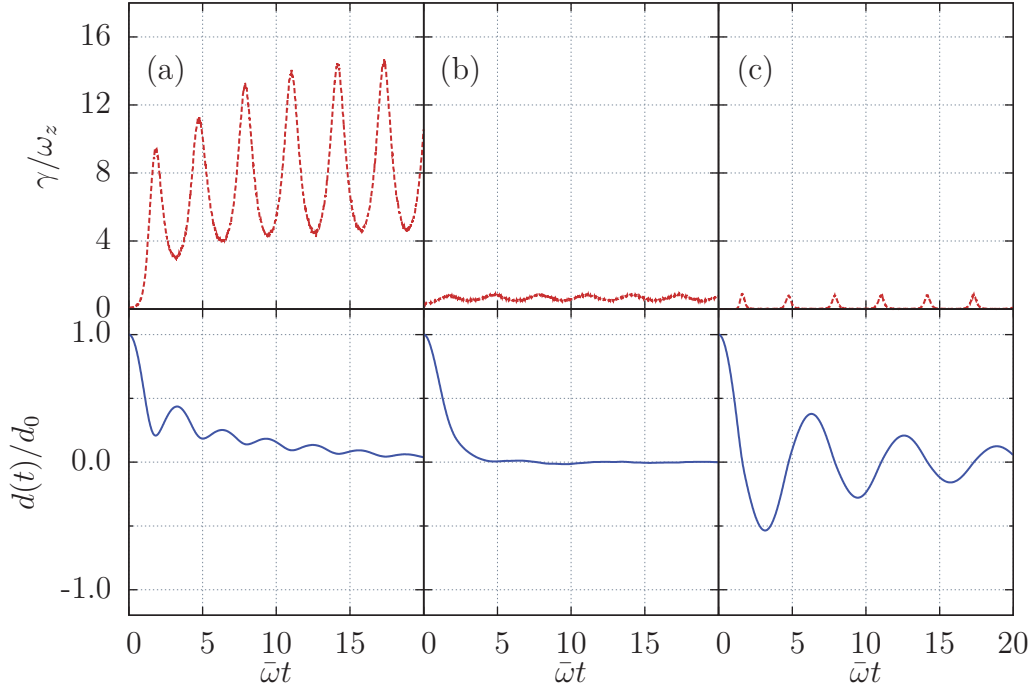
### 3.7.2. Résultats obtenus

Dans ce paragraphe, nous utilisons le programme de simulation Boltzmann afin de reproduire les résultats de O. Goulko *et al.* [53]. Nous avons pour objectif de retrouver les mêmes régimes dynamiques que ceux que les auteurs de cette référence ont mis en évidence, mais en considérant un nombre de particules proche de la réalité, afin de tester l'utilisation des particules tests dans le cas où  $N < \tilde{N}$  pour des systèmes loin de l'équilibre. Nous allons donc simuler un gaz dont la population est distribuée équitablement entre les deux états de spin :  $N_\uparrow = N_\downarrow = 3 \times 10^5$ . Par ailleurs, nous prenons pour valeur de  $d_0$  un multiple  $n_z$  du rayon thermique  $\sigma_z$ , défini par :

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{T}{m\omega_z^2}}, \quad (3.55)$$

et ainsi  $d_0 = n_z \sigma_z$ .

La figure 3.15 montrent les résultats obtenus avec le code de simulation sans effet de milieu et dans un piège sphérique, en considérant les paramètres du tableau 3.2. Les trois régimes de collision sont bien reproduits par le programme. Nous pouvons remarquer que l'oscillation du mode *bouncing* présente une pulsation égale à  $2\omega_z$ , ce qui est en accord avec [53]. Par ailleurs, le régime de transmission est obtenu pour une valeur de l'interaction très faible, alors que le régime *bouncing* apparaît dans un gaz proche de l'unitarité. Il est important de faire le lien entre ces observations et les différents régimes hydrodynamiques dont on a parlé précédemment. En effet, il est



**Figure 3.15 :** Taux de collision (haut) et  $d(t)$  (bas) pour les trois différents régimes de collision pour des nuages totalement polarisés. Les résultats présentent des formes analogues à ce qui a été obtenu dans [53].

nécessaire que les atomes entrent peu en collision pour qu'un tel phénomène se produise. À l'opposé, le régime de rebond est caractéristique d'un gaz hydrodynamique.

### 3.7.3. Et des nuages non polarisés ?

Nous nous sommes posés la question de connaître l'origine de ces mouvements collectifs. Une première étude [55] a confirmé l'existence des trois modes dans le cas des gaz polarisés. Nous allons donc étendre cette étude au cas de deux nuages de polarisation nulle et essayer de voir si ces modes subsistent. Si c'est effectivement le cas, cela signifiera que ce n'est pas la polarisation mais le régime de collision du système (hydrodynamique ou sans collision) qui peut provoquer l'apparition de ces modes.

Juste après l'équilibre, nous allons déplacer la moitié des particules de spin  $\uparrow$  et  $\downarrow$  d'une distance  $+d_0/2$  suivant l'axe  $z$  : celles-ci forment alors le nuage « 1 ». On déplace ensuite les particules restantes d'une distance  $-d_0/2$ , ce qui nous donne le nuage « 2 ». Nous avons donc deux nuages non polarisés séparés d'une distance  $d_0$ .

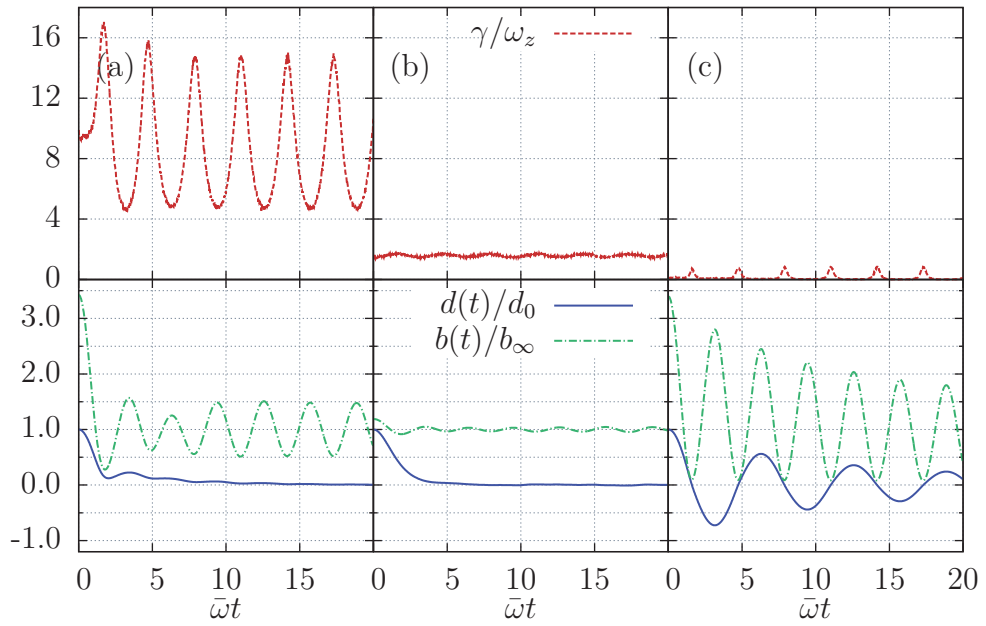
L'observable considérée est alors :

$$d(t) = \langle z_1 - z_2 \rangle(t), \quad (3.56)$$

où  $\langle z_i \rangle$  désigne la valeur moyenne des particules dans le nuage  $i$ . Si ce système obéit aux mêmes régimes que ceux que l'on a vu pour les gaz polarisés, alors la valeur de  $d(t)$  va présenter les mêmes comportements que ceux de la figure 3.15. Cependant, cette

Cas	$n_z$	$(k_F a)^{-1}$
(a)	5	-0.1
(b)	1	-1.5
(c)	12	-5.0

**Table 3.3 :** Paramètres utilisés afin d'obtenir les trois régimes de collisions entre les nuages non polarisés.



**Figure 3.16 :** Taux de collision (tirets rouges),  $d(t)/d_0$  (trait bleu) et  $b(t)/b_\infty$  (tirets mixtes verts) pour les trois différents régimes de collision obtenus avec des nuages non polarisés. Les résultats présentent des formes très similaires aux données obtenues avec les gaz polarisés.

observable n'est valable que pour une étude numérique. D'un point de vue expérimental, il n'est pas possible de savoir si une particule donnée appartient au nuage 1 ou 2. Toutefois, on peut caractériser le régime de la collision des nuages en regardant l'évolution d'une autre observable (dont le comportement pour le cas polarisé est décrit dans [53]) :

$$b(t) = \langle (z - \langle z \rangle)^2 \rangle (t). \quad (3.57)$$

Celle-ci est directement reliée à la valeur du rayon du système global dans la direction axiale. Elle présente une pulsation de  $2\omega_z$  dans les régimes de rebond et de transmission. Cependant, l'amplitude de son oscillation est beaucoup plus importante dans ce dernier régime.

La figure 3.16 regroupe les résultats obtenus pour ces collisions (on utilise la constante  $b_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} b(t)$ ), dans les conditions présentées dans le tableau 3.2. On retrouve ici d'une manière évidente les trois régimes que l'on a décrit précédemment. On peut remarquer que le taux de collision pour les régimes *bouncing* et intermédiaire n'a pas une valeur initiale nulle. Cela est dû au fait qu'à l'état initial, les deux nuages contiennent des atomes qui entrent en collision. Cela n'est évidemment pas le cas pour les nuages polarisés : constitués uniquement d'atomes de même spin, les collisions ne peuvent pas avoir lieu en raison du principe de Pauli. Nous observons que l'allure de  $b(t)$  présente effectivement une oscillation dont la fréquence est  $2\omega_z$ , comme le taux de collision. Par ailleurs, nous voyons que l'amplitude de cette oscillation est plus grande pour le régime de transmission, comme ce qui était attendu. Notons aussi que  $\gamma/\omega_z$  pour les modes de rebonds observés avec des nuages polarisés ou non (effectués avec les mêmes paramètres initiaux) semble converger vers la même valeur finale, environ  $10\omega_z$  (voir figures 3.15.a et 3.16.a). Cela nous permet de penser que les deux systèmes présentent le même état final.

Nous pouvons alors conclure que l'origine de ces mouvements collectifs trouve *a priori* son origine dans le caractère hydrodynamique ou sans collision du gaz. Cela signifie alors que les résultats de la référence [55] peuvent se généraliser aux cas de gaz non polarisés. Il serait alors intéressant de reproduire expérimentalement ce protocole, afin de confirmer ce comportement. À ce jour, les seules expériences avec ce type de nuages ont été réalisées afin d'étudier les ondes de choc lors de la collision [56]. Cela ne permet pas d'observer les régimes décrits ci-dessus : il est en effet nécessaire de couper le confinement du gaz pour former l'onde de choc.

## 3.8. Conclusions

Nous avons construit un code de résolution numérique de l'équation de Boltzmann qui prend en compte les effets du potentiel de champ moyen et du calcul de la section efficace calculée dans le milieu.

Nous avons pu tester les procédures mises en jeu à travers plusieurs comparaisons avec des résultats issus d'autres méthodes, ce qui a permis d'évaluer la précision de notre résolution. Ainsi, en s'inspirant de l'intérêt que suscite le mode quadrupolaire, nous avons mis à profit notre code afin de tester si les méthodes théoriques utilisées sont conformes aux procédures expérimentales. Il s'avère que les résultats sont proches. Cependant, il est clair que l'apport quantitatif des effets de milieu sur ces résultats est très limité. Par souci de fidélité avec les procédures expérimentales, nous avons ensuite procédé à la mesure des observables après une expansion du gaz, comme cela est indispensable d'un point de vue pratique. Nous pouvons conclure d'après cette étude que les effets des collisions et les effets de milieu n'influent pas sur les résultats des pulsations et amortissements des modes collectifs, lorsque les observables sont mesurées après un temps d'expansion caractéristique de celui utilisé lors d'expériences [24].

Enfin, nous avons décidé d'étudier les collisions de nuages totalement polarisés afin de voir si les modes collectifs découverts dans ces systèmes sont dus à la polarisation

ou à un autre paramètre, tel que l'interaction. Après avoir réalisé nos calculs dans les deux cas, il s'avère que les nuages non polarisés entrant en collision présentent eux aussi les mêmes mouvements collectifs. L'origine de ces derniers n'est donc pas reliée à la polarisation.

Cependant, nous n'avons pas pu inclure les effets de milieu dans l'étude de ces systèmes car la théorie NSR, utilisée pour extraire le potentiel de champ moyen, présente une pathologie. Une étude des gaz polarisés est donc développée dans le chapitre suivant. Nous verrons notamment en quoi la théorie NSR n'est plus valable, puis nous nous consacrerons ensuite à présenter une première solution à ce problème. Cela nous permettra entre autres d'établir le diagramme de phase de ces gaz polarisés.





## Effets de milieu dans les gaz polarisés

### Sommaire

---

<b>4.1. La phase FFLO</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>4.2. Pathologie de NSR</b> . . . . .	<b>102</b>
4.2.1. Calcul de la densité . . . . .	102
4.2.2. Pathologie . . . . .	103
<b>4.3. Méthode de Zimmermann–Stolz (ZS)</b> . . . . .	<b>104</b>
4.3.1. Définition de la self-énergie . . . . .	105
4.3.2. Calcul de la densité . . . . .	105
4.3.3. Théorème de Luttinger . . . . .	107
<b>4.4. Diagramme de phase</b> . . . . .	<b>108</b>
<b>4.5. Nombres d’occupation</b> . . . . .	<b>110</b>
4.5.1. Définition . . . . .	110
4.5.2. Quelques résultats . . . . .	111
<b>4.6. Discussion</b> . . . . .	<b>112</b>

---

Les progrès croissants sur les méthodes expérimentales permettent désormais de piéger des gaz fermioniques de plus en plus complexes, très intéressants d’un point de vue théorique. Cela va de systèmes composés d’une différence de population de spin entre les atomes du système [57–60], à des gaz comportant plusieurs types d’atomes, engendrant alors une asymétrie de masse [61–63]. Il est même possible de créer des systèmes hybrides, constitués à la fois de particules bosoniques et fermioniques [64, 65]. Dans ce chapitre, nous nous sommes concentrés sur les gaz présentant une asymétrie de spin, suite aux résultats présentés dans les références [66, 67] démontrant que la théorie NSR donne des résultats incohérents pour les gaz de fermions polarisés.

La polarisation  $P$  du système s’écrit :

$$P = \frac{\rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow}}{\rho_{\uparrow} + \rho_{\downarrow}}, \quad (4.1)$$

où  $\rho_{\sigma}$  est la densité des atomes de spin  $\sigma$ . Par convention,  $P \geq 0$  car on considère que les atomes de spin  $\uparrow$  sont majoritaires : leur densité est donc plus grande que la densité

des particules  $\downarrow$ . Les corrections de corrélation à ces densités (calculées pour  $\mu_{\uparrow} > \mu_{\downarrow}$ ) peuvent entraîner une valeur de  $\rho_{\uparrow}$  inférieure à celle de  $\rho_{\downarrow}$  : la polarisation devient alors négative. Ce résultat s'explique par la surestimation de la valeur de  $\rho_{\downarrow}$ , issue d'un mauvais traitement des effets de corrélation. Plus généralement, cette pathologie peut se définir par l'apparition de valeurs négatives de la susceptibilité de spin

$$\chi = \frac{\partial \delta \rho}{\partial \delta \mu}, \quad (4.2)$$

où l'on définit  $\delta \rho = \rho_{\uparrow} - \rho_{\downarrow}$ .

D'autre part, de nombreuses études théoriques ont été réalisées dans le but d'établir le diagramme de phase de ces systèmes, que ce soit à température nulle ou à température finie. On peut par exemple mentionner l'utilisation de calculs Monte-Carlo [68], ou du groupe de renormalisation de Wilson [69]. Comme nous l'avons dit, la théorie NSR telle qu'elle est définie dans le chapitre 2 ne permet pas en l'état de calculer les densités corrélées pour ces gaz. Cependant, l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  (2.17) peut nous fournir une première idée du diagramme de phase et notamment des informations une éventuelle nouvelle phase superfluide permise par ces gaz. La transition de phase est en effet liée à l'apparition d'un pôle dans  $\Gamma$ , fonction qui dépend de la température, de  $\bar{\mu}$  et de  $\delta \mu$ , mais pas des densités.

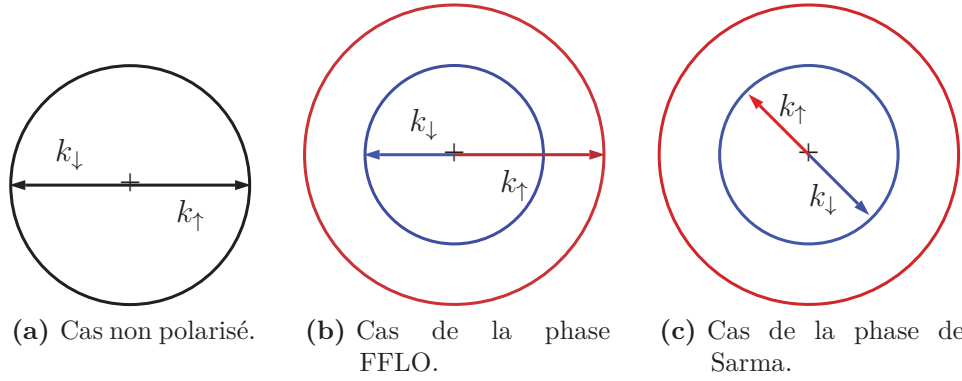
## 4.1. La phase FFLO

Fulde et Ferrel [10], ainsi que Larkin et Ovchinnikov [11] ont démontré en parallèle qu'une différence de population engendre l'apparition de paires délocalisées de fermions – à l'image des paires de Cooper de la théorie BCS – dont le moment total est non nul. Il en résulte ainsi l'apparition d'un nouveau type de phase superfluide, couramment appelée la phase FFLO (ou LOFF). L'apparition de ces paires ne peut s'effectuer que pour des gaz polarisés car elle est issue de la différence de taille entre les sphères de Fermi des particules  $\uparrow$  et  $\downarrow$ . Un schéma simplifié est présenté en figure 4.1. Un autre type de phase, proposée pour la première fois par G. Sarma en 1963 dans le cadre d'une étude sur les superconducteurs [70], a aussi été prédite dans le contexte des atomes froids.

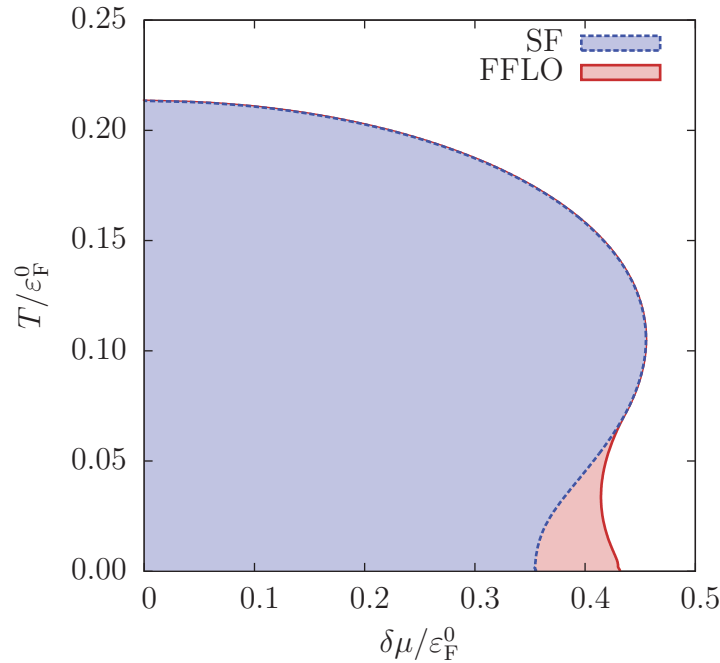
Nous avons vu que le critère de Thouless (équation 2.31) nous permet de déterminer la température de transition  $T_C^{\text{SF}}$  vers une phase superfluide de type BCS. Ceci revient à déterminer la température pour laquelle un pôle dans la matrice  $\mathcal{T}$  apparaît pour une énergie  $\omega$  et une impulsion totale  $\mathbf{k}$  nulles. Comme la phase FFLO est constituée d'une paire de particules à  $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$ , un deuxième critère nous permettra ainsi d'obtenir la température de transition  $T_C^{\text{FFLO}}$  pour cette phase :

$$\text{Re } \Gamma^{-1}(\omega = 0, \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, T = T_C^{\text{FFLO}}) = 0. \quad (4.3)$$

Du point de vue de la théorie BCS, cette phase se traduit par l'apparition d'une dépendance spatiale du gap  $\Delta(\mathbf{r})$ . Fulde, Ferrel, Larkin et Ovchinnikov ont eu l'idée



**Figure 4.1 :** Schématisation du processus d'appariement, les cercles représentent les surfaces de Fermi (en bleu pour les  $\downarrow$  et rouge pour les  $\uparrow$ ). Dans le cas BCS classique sans polarisation (a), les surfaces de Fermi des deux espèces sont confondues. L'impulsion totale de la paire est donc nulle. Dans le cas où la polarisation est non nulle, l'impulsion du centre de masse peut être elle aussi non nulle (b), c'est la phase FFLO. Enfin, dans le dernier cas (c), il existe une phase pour laquelle le moment du centre de masse est nul, c'est la phase de Sarma. Figure inspirée de [71].



**Figure 4.2 :** Diagramme de phase  $(\delta\mu/\varepsilon_F^0, T/\varepsilon_F^0)$  pour un gaz uniforme à l'unitarité ( $a \rightarrow -\infty$  et  $\bar{\mu} = 0.6\varepsilon_F^0$ , où  $\varepsilon_F^0$  est l'énergie de Fermi calculée pour  $\delta\mu = 0$ ). La courbe en pointillés (bleue) représente les valeurs de  $T_C^{\text{SF}}$  (équation (2.31)). La courbe en trait plein (rouge) représente les valeurs de  $T_C^{\text{FFLO}}$  (équation (4.3)) en fonction de  $\delta\mu$ . Les zones non colorées correspondent à un gaz dans la phase normale.

d'ajouter cette dépendance afin de pouvoir justement décrire les corrélations au sein d'un gaz polarisé grâce à cette théorie BCS « améliorée ».

Un résultat important est montré sur la figure 4.2, à savoir le diagramme de phase dans le plan  $(\delta\mu/\varepsilon_F^0, T/\varepsilon_F^0)$  établi pour un système arbitraire proche de l'unitarité. Avant

de le commenter, notons que la normalisation sur les deux axes fait intervenir  $\varepsilon_F^0$ , l'énergie de Fermi du système lorsque la polarisation est nulle ( $\delta\mu = 0$ ) : nous n'avons pas la possibilité de calculer la valeur des énergies de Fermi des deux états de spin en raison de la pathologie NSR. Il est en effet impossible de calculer les densités avec NSR. Par ailleurs, on peut remarquer que lorsque la polarisation est nulle, on retrouve le résultat  $T_C^{\text{SF}}(\delta\mu = 0) \approx 0.23 \varepsilon_F^0$  obtenu grâce à la théorie NSR [72]. Ce diagramme met en évidence l'existence d'une polarisation maximale  $\delta\mu_C$  pour laquelle les phases superfluides sont permises pour toutes les valeurs de la température. Lorsque  $\delta\mu > \delta\mu_C$ , on a alors la possibilité d'étudier un système à très faible température dans une phase normale. Enfin, l'apparition de la zone comprise entre la courbe en pointillés et la courbe pleine (zone rouge) correspond à la zone où il existe une solution à l'équation (4.3) : dans cette zone, une phase de type FFLO est permise. L'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  permet donc de mettre en évidence cette phase superfluide particulière. On peut relier ce diagramme aux travaux de A. Sedrakian *et al.* [73] réalisés au sujet des phase superfluides engendrées par des asymétries d'isospin dans le cadre de la matière nucléaire<sup>1</sup>.

Malgré ces résultats, les variables  $\delta\mu$  et  $T$  ne représentent pas des grandeurs physiques intuitives, notamment du point de vue expérimental. En effet, il est plus facile de mesurer la polarisation  $P$  du gaz plutôt que le  $\delta\mu$ . Il est donc important d'apporter une solution à la pathologie de NSR afin de nous permettre de calculer la valeur des densités  $\rho_\uparrow$  et  $\rho_\downarrow$  tenant compte des effets du milieu pour ces systèmes. La première étape est de présenter l'origine de ce problème.

## 4.2. Pathologie de NSR

Dans un premier temps, nous allons calculer les densités en prenant en compte les effets de milieu comme dans le cadre de la théorie NSR, afin de voir en quoi consiste la pathologie mentionnée par [66, 67].

### 4.2.1. Calcul de la densité

Le calcul de la densité du gaz peut être modifié en raison des interactions que subissent les particules au sein du système. Afin de reproduire avec le plus de fidélité possible l'impact de ces effets sur la densité d'un gaz idéal, il est donc indispensable d'utiliser des théories au-delà du champ moyen (comme NSR)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>La figure 3 de [73] est très similaire à la figure 4.2 : il faut simplement faire l'analogie entre les spins de nos atomes et l'isospin des nucléons.

<sup>2</sup>Les théories de champ moyen (telle Hartree–Fock) présentent déjà une instabilité non réaliste pour les gaz de fermions non polarisés, il est donc nécessaire d'aller au-delà.

D'une manière générale, la valeur de la densité est définie par l'équation auto-cohérente suivante :

$$\rho_\sigma = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_n \mathcal{G}^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k}), \quad (4.4)$$

où le propagateur habillé  $\mathcal{G}^\sigma$  est donné par l'équation de Dyson. Dans le cadre de la théorie NSR (2.32), nous avons ainsi :

$$\rho_\sigma = \rho_0^\sigma + \rho_{\text{NSR}}^\sigma, \quad (4.5)$$

avec :

$$\rho_0^\sigma = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_n \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k}), \quad (4.6)$$

$$\rho_{\text{NSR}}^\sigma = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_n \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k})^2 \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(i\omega_n^f, \mathbf{k}). \quad (4.7)$$

Il est à ce stade aisé de démontrer que  $\rho_0^\sigma$  est équivalente à la densité libre (1.6), en développant le calcul de (4.6) grâce à l'équation (2.36) :

$$\rho_0^\sigma = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{k}}^\sigma). \quad (4.8)$$

D'autre part, la contribution des corrélations sera contenue entièrement dans  $\rho_{\text{NSR}}^\sigma$ , que l'on peut écrire sous la forme

$$\rho_{\text{NSR}}^\sigma = -\frac{\partial \Omega_{\text{corr}}}{\partial \mu_\sigma}, \quad (4.9)$$

où l'on introduit la correction au potentiel thermodynamique  $\Omega_{\text{corr}}$  suivant :

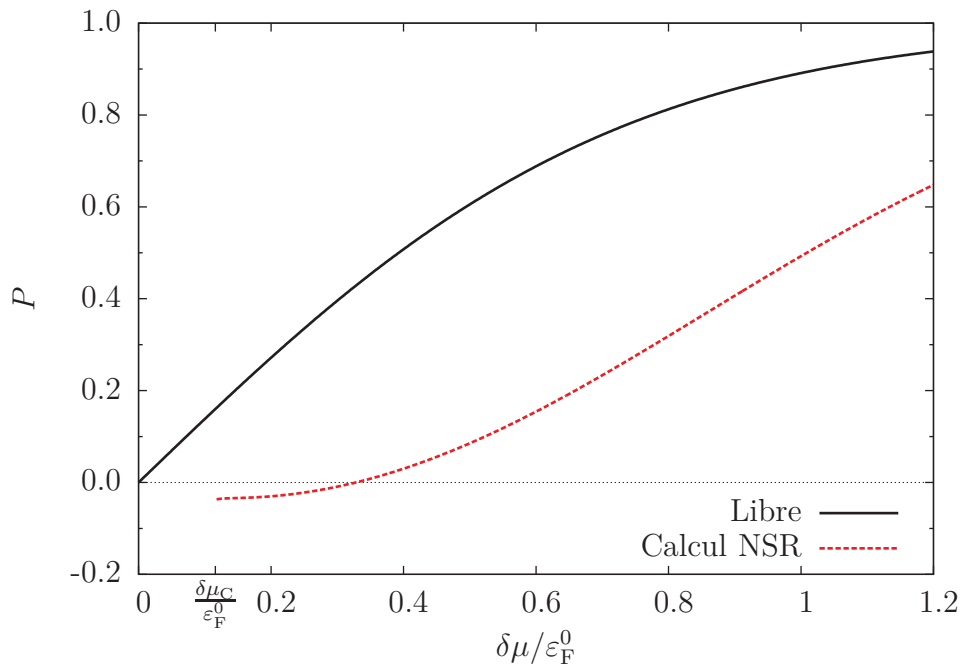
$$\Omega_{\text{corr}} = - \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} b_{\text{eq}}(\omega) \delta(\omega, \mathbf{k}), \quad (4.10)$$

expression dans laquelle intervient la notion de déphasage de l'onde de diffusion calculé dans le milieu [74] :

$$\delta(\omega, \mathbf{k}) = -\text{Im} \ln[1 - gJ(\omega, \mathbf{k})]. \quad (4.11)$$

### 4.2.2. Pathologie

La polarisation, calculée pour des valeurs arbitraires de  $\bar{\mu}$  et  $a \rightarrow -\infty$ , est présentée en figure 4.3 en fonction de la valeur de  $\delta\mu$  (normalisée à la valeur de l'énergie de Fermi  $\varepsilon_F^0$ ). La polarisation calculée à partir des densités issues du calcul NSR devient négative pour des valeurs de  $\delta\mu$  au-dessus de la valeur critique (afin de rester dans la zone de phase normale du gaz). La première conclusion que l'on peut tirer de ces résul-



**Figure 4.3 :** Évolution de la polarisation en fonction de  $\delta\mu/\varepsilon_F^0$  pour un système uniforme proche de l'unitarité ( $a \rightarrow -\infty$ ) avec  $T \approx 0.2\varepsilon_F^0$  et  $\bar{\mu} \approx 0.32\varepsilon_F^0$ . Les résultats commencent à partir de  $\delta\mu_C$ , en-dessous duquel une phase superfluide est susceptible d'apparaître, ce qui nous empêche d'utiliser NSR car on ne peut pas décrire de couplage superfluide.

tats est que la relation entre la polarisation et  $\delta\mu$  n'est pas linéaire. On voit cependant que lorsque  $\delta\mu = 0$ , on obtient évidemment  $P = 0$ . Et lorsque  $\delta\mu$  devient grand, la polarisation tend vers 1. Cette dernière zone nécessite un traitement particulier. On l'appelle la limite du polaron et elle correspond à une seule particule  $\downarrow$  dans un bain de  $\uparrow$ . Cette configuration particulière des gaz polarisés suscite un fort engouement tant sur plan théorique [58, 62, 75–77] qu'expérimental [59, 78, 79].

Le fait qu'il existe une configuration pour laquelle la théorie NSR donne une polarisation négative nous permet de confirmer les informations données dans [66, 67]. Il est donc nécessaire de trouver une méthode de calcul de la self-énergie qui donne des résultats cohérents, notamment dans le but de calculer le diagramme de phases dans le plan  $(T/\varepsilon_F^\uparrow, P)$ , établi au cours de l'expérience de [59], ce qui nous permettra ainsi de confronter notre méthode de calcul.

### 4.3. Méthode de Zimmermann–Stolz (ZS)

En s'inspirant de ce qui a déjà été fait pour la matière nucléaire dense et chaude [80] et pour la matière hadronique [81], nous avons décidé d'utiliser un réajustement de l'expression de la self-énergie. Il s'agit là de séparer l'influence du décalage en énergie  $\tilde{\xi}_k^\sigma$  dû aux quasi-particules et l'effet des corrélations. Ceci a été réalisé pour la première fois par R. Zimmermann et H. Stolz dans des travaux sur les semi-conducteurs [74].

### 4.3.1. Définition de la self-énergie

La self-énergie telle qu'elle est définie par Zimmermann et Stolz (que l'on notera  $\Sigma_{\text{ZS}}^\sigma$ ), est :

$$\Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(\omega, \mathbf{k}) - \text{Re} \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^\sigma, \mathbf{k}). \quad (4.12)$$

Cette soustraction traduit simplement le fait que l'on veut supprimer l'intervention du potentiel de champ moyen (2.39) des quasi-particules d'énergie

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^\sigma = \xi_{\mathbf{k}}^\sigma + \text{Re} \Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^\sigma, \mathbf{k}) \quad (4.13)$$

dans l'expression de la self-énergie. Ainsi :

$$\Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^\sigma, \mathbf{k}) = 0. \quad (4.14)$$

Concrètement, cela signifie que cette approximation ne nous permettra pas d'extraire une valeur pour le champ moyen comme nous l'avons fait dans le chapitre 2 : la valeur de  $U_\sigma$  était reliée à la partie réelle de la self-énergie, qui dans ce cas est nulle. C'est pourquoi l'utilisation de la méthode de Zimmermann et Stolz ne peut qu'être une solution partielle au problème de NSR.

Dans les calculs qui suivent, nous ne considérerons pas l'auto-cohérence, mais nous nous limiterons au cas  $\tilde{\xi}_{\mathbf{k}}^\sigma = \xi_{\mathbf{k}}^\sigma$ .

### 4.3.2. Calcul de la densité

La méthode de calcul de la densité reste analogue à celle utilisée pour la méthode NSR (équation (4.4)), seule l'expression du propagateur habillé va changer. En effet, l'équation de Dyson devient maintenant :

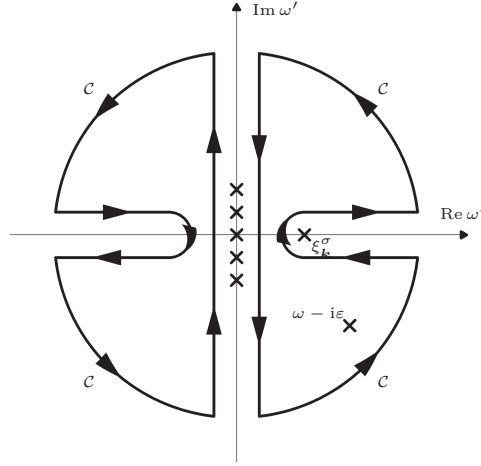
$$\mathcal{G}^\sigma = \mathcal{G}_0^\sigma + \mathcal{G}_0^\sigma \Sigma_{\text{ZS}}^\sigma \mathcal{G}_0^\sigma, \quad (4.15)$$

ce qui entraîne que la densité s'écrira désormais :

$$\rho_\sigma = \rho_0^\sigma + \rho_{\text{ZS}}^\sigma, \quad (4.16)$$

où l'on a toujours la même expression pour  $\rho_0^\sigma$  (éq. (4.6)), tandis que le terme de fluctuation par rapport à l'équilibre devient :

$$\rho_{\text{ZS}}^\sigma = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \beta^{-1} \sum_n \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k})^2 \Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(i\omega_n^f, \mathbf{k}). \quad (4.17)$$



**Figure 4.4 :** Définition du contour  $\mathcal{C}$  dans le plan  $(\text{Re } \omega', \text{Im } \omega')$  pour le calcul des intégrales de la densité corrélée  $\rho_{\text{ZS}}^\sigma$  par le théorème des résidus. Le pôle en  $\omega' = \xi_{\mathbf{k}}^\sigma$  est d'ordre deux. Les pôles situés sur l'axe imaginaire sont ceux de la distribution de Fermi.

En utilisant les relations de dispersion pour l'expression de la self-énergie, ainsi que le résultat d'analyse (2.36), nous obtenons :

$$\rho_{\text{ZS}}^\sigma = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{\pi} \text{Im } \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \oint_{\mathcal{C}} \frac{d\omega'}{2i\pi} \frac{f_{\text{eq}}(\omega')}{(\omega' - \xi_{\mathbf{k}}^\sigma)^2} \left[ \frac{1}{\omega - \omega' - i\epsilon} - \frac{1}{\omega - \xi_{\mathbf{k}}^\sigma} \right]. \quad (4.18)$$

En définissant intelligemment le contour  $\mathcal{C}$  (figure 4.4 [30]), on peut alors utiliser le théorème des résidus, afin d'effectuer l'intégrale sur  $\omega'$ . Ainsi :

$$\rho_{\text{ZS}}^\sigma = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{\pi} \text{Im } \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \frac{f_{\text{eq}}(\omega) - f_{\text{eq}}(\xi_{\mathbf{k}}^\sigma)}{(\omega - \xi_{\mathbf{k}}^\sigma)^2}. \quad (4.19)$$

En utilisant la relation (A.12), ainsi que la définition de la self-énergie NSR (2.37) puis du propagateur à deux particules  $J$  (équation (2.22)), nous obtenons :

$$\rho_{\text{ZS}} = - \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \mathcal{P} \int \frac{d\omega d\omega'}{\pi^2} \text{Im } \Gamma(\omega, \mathbf{k}) \text{Im } J(\omega', \mathbf{k}) \frac{b_{\text{eq}}(\omega) - b_{\text{eq}}(\omega')}{(\omega - \omega')^2}, \quad (4.20)$$

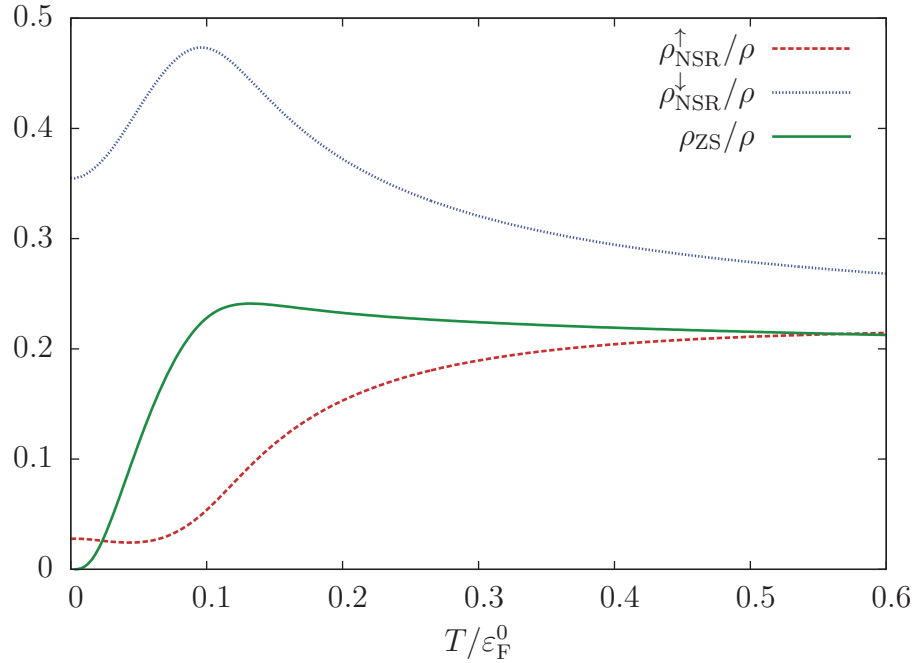
il faut remarquer la disparition de l'indice de spin. Désormais, la contribution des corrélations à la valeur de la densité est la même pour les atomes de spin  $\uparrow$  et ceux de spin  $\downarrow$ .

Finalement, on utilise les relations de dispersion pour  $J$  et on obtient

$$\rho_{\text{ZS}} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{\pi} b_{\text{eq}}(\omega) \frac{d}{d\omega} \left[ \delta - \frac{1}{2} \sin(2\delta) \right], \quad (4.21)$$

où l'on note  $\delta \equiv \delta(\omega, \mathbf{k})$  (cf. équation (4.11)). On peut remarquer que cette expression est très proche de celle obtenue par [80].





**Figure 4.5 :** Évolution de la densité ( $\uparrow, \downarrow$ ) en fonction de la température dans les cas NSR (tirets rouges ( $\uparrow$ ) et pointillés bleus ( $\downarrow$ )) et ZS (trait plein vert). Ces courbes ont été obtenues pour une valeur de  $\delta\mu = 0.5 \varepsilon_F^0$  (éliminant la possibilité d’une phase superfluide, voir la figure 4.2). Dans le cas ZS, on voit que la correction de la densité due aux corrélations tend vers zéro lorsque  $T \rightarrow 0$ .

### 4.3.3. Théorème de Luttinger

L’utilisation de la méthode de Zimmermann–Stolz, au lieu de celle de Nozières–Schmitt-Rink, nous permet d’obtenir une correction à la densité qui est la même pour les deux états de spins du système. Cela constitue une information importante vis-à-vis de la pathologie constatée avec la méthode NSR : désormais nous pouvons être convaincus du fait que la polarisation locale ne sera jamais négative. Cela est très simple à démontrer : d’après la définition de  $P$  (4.1), on obtient maintenant :

$$P = \frac{\rho_0^{\uparrow} - \rho_0^{\downarrow}}{\rho_0^{\uparrow} + \rho_0^{\downarrow} + 2\rho_{\text{ZS}}}. \quad (4.22)$$

Et comme, par définition,  $\rho_0^{\uparrow} \geq \rho_0^{\downarrow}$ , la valeur de  $P$  ne peut être négative.

Un deuxième résultat intéressant vis-à-vis de la méthode ZS est lié au théorème de Luttinger [82] qui stipule que dans la limite de température nulle, l’effet des corrélations doit être nul : la position des surfaces de Fermi ne peut être modifiée par la prise en compte des corrélations. Dans notre cas, cela peut se traduire par le fait que la contribution des corrélations à la densité doit être nulle lorsque la température tend vers zéro. Ainsi, la figure 4.5 montre que, pour des valeurs de  $\bar{\mu}$  et  $\delta\mu$  fixées de façon à ne pas rencontrer de phase superfluide (se référer à la figure 4.2), la correction du milieu à la densité par le calcul de ZS est nulle pour une température proche de zéro.

## 4.4. Diagramme de phase

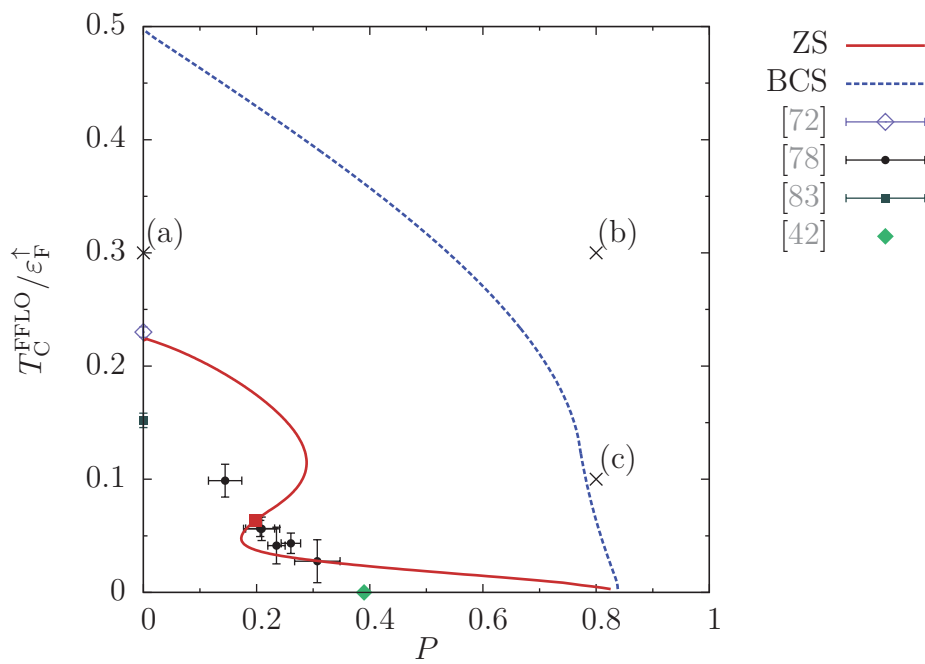
Le but est maintenant de construire le diagramme de phase ( $T/\varepsilon_F^\uparrow, P$ ) afin de tester les prédictions de la méthode ZS en les confrontant aux résultats obtenus par Shin *et al.* [78]. Nos calculs permettent de déterminer la transition de phase entre FFLO et une phase normale. On sait cependant qu'il existe d'autres transitions de phase (du premier ordre) qui surviennent dans ce type de systèmes. À ce jour, seules ces transitions du premier ordre ont été observées expérimentalement. Cette étude a été réalisée pour un gaz de fermions polarisés, et dans la limite unitaire. Ils ont pu déterminer la valeur expérimentale de la température de transition à une phase superfluide pour différentes valeurs de la polarisation. L'objectif de ce paragraphe est donc de situer, à l'aide du calcul par la méthode ZS, l'emplacement de la transition à la phase FFLO.

La figure 4.6 représente le diagramme de phase d'un gaz de fermions libres à l'unitarité ( $1/a \rightarrow 0^-$ ). Le résultat donné par la méthode ZS est représenté en trait plein (rouge). En dessous de cette courbe, le gaz est donc dans une phase superfluide de type FFLO. Le carré (rouge) sur cette courbe représente la position du point tricritique : au-dessus de ce point le long de la courbe rouge, les solutions du critère de Thouless (4.3) à  $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$  n'existent plus. On retrouve uniquement des valeurs à  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$  correspondant à une phase superfluide de type BCS. Les tirets (bleus) sont les résultats obtenus dans une approche de type BCS : on ne considère ici que le champ moyen (l'influence des corrélations  $\rho_{ZS}$  n'est donc pas prise en compte). Les résultats expérimentaux de Shin *et al.* [78] ont été ajoutés, ainsi que les résultats des calculs théoriques obtenus à polarisation nulle par BCS [72] et par un calcul Monte-Carlo [83]. Enfin, la limite de Chandrasekhar–Clogston<sup>3</sup> trouvée pour la transition de phase du premier ordre [42] est représentée par le losange vert.

Dans la limite de polarisation nulle, nos résultats tendent vers la valeur donnée par la méthode NSR : la température de transition à la phase superfluide est d'environ  $T_C^{\text{SF}} = T_C^{\text{FFLO}} \approx 0.23 \varepsilon_F^\uparrow$  [72]. Cependant, cette valeur n'est pas en accord avec les résultats obtenus par la résolution Monte-Carlo [83] qui prédit une transition de phase à  $0.15 \varepsilon_F^\uparrow$  (carré). Cet écart s'explique par le phénomène d'écrantage de l'interaction, évoqué par [86]. Ensuite, les expériences de Shin *et al.* [78] (cercles noirs) ont permis de déterminer qu'une transition de phase du premier ordre (*phase separation*) existe dans une région où la polarisation ne dépasse pas 0.4. Ces résultats semblent cohérents avec la prédiction de Lobo *et al.* [42] situant la polarisation critique pour cette transition à  $P_C = 0.39$  (losange vert). Dans cette limite, notre calcul prédit une valeur critique beaucoup plus élevée ( $P_C \approx 0.84$ ), ce qui signifie que la phase FFLO occuperait une grande zone du diagramme de phase dans la limite de température nulle. On constate par ailleurs que le théorème de Luttinger est vérifié dans la mesure où les calculs ZS et BCS tendent vers la même valeur<sup>4</sup>. Un calcul de la valeur de  $P_C$  pour cette transition de phase du second ordre a été établie à une valeur très proche de 1 [87].

<sup>3</sup>À  $T = 0$ , la limite de Chandrasekhar–Clogston est la valeur de la polarisation pour laquelle la phase superfluide n'est plus permise [84, 85].

<sup>4</sup>Les effets dus aux corrélations deviennent négligeables lorsque la température devient nulle, voir fig. 4.5. Dans ce cas, le résultat ZS tend vers le résultat BCS.



**Figure 4.6 :** Diagramme de phase  $(T/\varepsilon_F^\uparrow, P)$  d'un gaz fermionique libre à l'unitarité ( $1/a \rightarrow 0^-$ ) déterminé par la méthode ZS (trait plein rouge). En dessous de cette limite, le gaz présente une phase FFLO. Les résultats donnés par la méthode BCS (tirets bleus), ainsi que les résultats expérimentaux de [78] (points noirs) sont aussi représentés. Le carré (rouge) représente la position du point tricritique. Les croix (a), (b) et (c) représentent les cas particuliers étudiés dans le paragraphe 4.5.

## 4.5. Nombres d'occupation

Une dernière étude qu'il est possible de réaliser en utilisant la méthode développée ici concerne les nombres d'occupation calculés en tenant compte des corrélations. Nous allons dans un premier temps les calculer dans le cadre de la théorie ZS puis nous étudierons leur forme dans quelques zones caractéristiques du diagramme de phase 4.6.

### 4.5.1. Définition

Le nombre d'occupation  $n_\sigma(k)$  à température finie est défini d'une manière générale par :

$$n_\sigma(k) = \beta^{-1} \sum_n e^{i\omega_n^f \eta} \mathcal{G}^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k}), \quad (4.23)$$

où  $\eta \rightarrow 0$ . L'équation de Dyson, dans le cadre de la méthode ZS, s'écrit :

$$\mathcal{G}^\sigma(\omega, \mathbf{k}) = \mathcal{G}_0^\sigma(\omega, \mathbf{k}) + \mathcal{G}_0^\sigma(\omega, \mathbf{k})^2 [\Sigma^\sigma(\omega, \mathbf{k}) - \text{Re} \Sigma^\sigma(\xi_k^\sigma, \mathbf{k})], \quad (4.24)$$

où  $\Sigma^\sigma \equiv \Sigma_{\text{NSR}}^\sigma$ . L'expression générale (4.23) devient donc dans ce cas :

$$n_\sigma(\mathbf{k}) = \beta^{-1} \sum_n e^{i\omega_n^f \eta} \left[ \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k}) + \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k})^2 \Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(i\omega_n^f, \mathbf{k}) \right]. \quad (4.25)$$

Comme pour la densité, nous allons définir les contributions libre ( $n_\sigma^0$ ) et du milieu ( $n_\sigma^{\text{ZS}}$ ) :

$$n_\sigma^0(\mathbf{k}) = \beta^{-1} \sum_n e^{i\omega_n^f \eta} \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k}), \quad (4.26)$$

$$n_\sigma^{\text{ZS}}(\mathbf{k}) = \beta^{-1} \sum_n e^{i\omega_n^f \eta} \mathcal{G}_0^\sigma(\omega_n^f, \mathbf{k})^2 \Sigma_{\text{ZS}}^\sigma(i\omega_n^f, \mathbf{k}). \quad (4.27)$$

Après intégration analytique dans le plan complexe, on obtient directement :

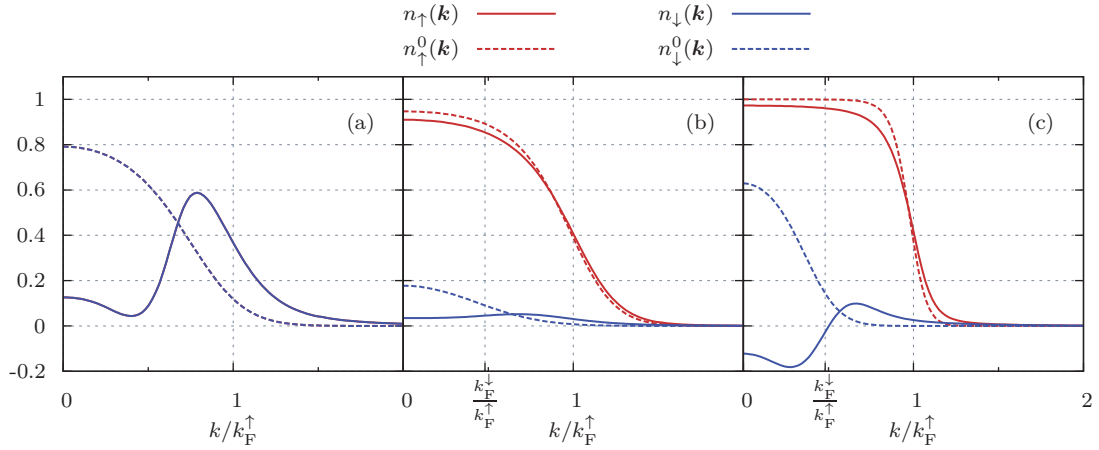
$$n_\sigma^0(\mathbf{k}) = f_{\text{eq}}(\xi_k^\sigma). \quad (4.28)$$

Les calculs concernant la contribution des corrélations ( $n_\sigma^{\text{ZS}}$ ) font intervenir des relations de dispersion pour la self-énergie, et nous donnent finalement l'expression suivante :

$$n_\sigma^{\text{ZS}}(\mathbf{k}) = \int \frac{d\omega}{\pi} \text{Im} \Sigma^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \frac{f_{\text{eq}}(\xi_k^\sigma) - f(\omega)}{(\omega - \xi_k^\sigma)^2}. \quad (4.29)$$

Nous avons donc l'expression du nombre d'occupation calculé dans le cadre de la théorie ZS :

$$n_\sigma(\mathbf{k}) = f_{\text{eq}}(\xi_k^\sigma) + \int \frac{d\omega}{\pi} \text{Im} \Sigma^\sigma(\omega, \mathbf{k}) \frac{f_{\text{eq}}(\xi_k^\sigma) - f(\omega)}{(\omega - \xi_k^\sigma)^2}. \quad (4.30)$$



**Figure 4.7 :** Nombres d'occupation pour le gaz à l'unitarité en fonction du moment  $k$  normalisé au moment de Fermi des particules  $\uparrow$  avec (trait plein) et sans (tirets) corrélation. (a) Pour une polarisation nulle et une température de  $T = 0.3 \varepsilon_F^\uparrow$ , les résultats des deux espèces est le même. (b) Lorsqu'on augmente la polarisation ( $P = 80\%$ ) en ne changeant pas la température, le résultat pour les particules  $\downarrow$  (bleu) est beaucoup plus faible que pour les  $\uparrow$ . (c) Pour la même polarisation que précédemment mais avec une température faible ( $T = 0.1 \varepsilon_F^\uparrow$ ), le nombre d'occupation pour les particules minoritaire devient négatif.

En remplaçant dans cette expression  $\xi_k^\sigma$  par

$$\tilde{\xi}_k^\sigma = \xi_k^\sigma + \text{Re} \Sigma^\sigma(\tilde{\xi}_{k_F}^\sigma, k_F^\sigma), \quad (4.31)$$

il est alors possible d'obtenir des résultats auto-cohérents de première approximation (on néglige la dépendance en  $\mathbf{k}$  de l'énergie des quasi-particules). Cela va nous permettre de détailler l'évolution de ces nombres d'occupation dans des zones spécifiques du diagramme de phase sans avoir recours à un calcul de champ moyen.

#### 4.5.2. Quelques résultats

L'évolution de  $n_\sigma$  (4.31) en fonction du moment des particules est présentée dans la figure 4.7. Ces résultats ont été établis pour un gaz de fermions libres à l'unitarité. Nous considérerons trois points du diagramme de phase 4.6 (croix) qui nous semblent intéressants :

- Pour une polarisation nulle ( $P = 0$ ), juste au-dessus de la transition de phase superfluide FFLO :  $T = 0.3 \varepsilon_F^\uparrow$ .
- Nous avons ensuite augmenté la valeur de la polarisation ( $P = 0.80$ ) jusqu'à atteindre environ la limite  $P_C$  fournie par nos résultats, mais en conservant  $T = 0.3 \varepsilon_F^\uparrow$ . Cela nous permet de voir la modification du nombre d'occupation lorsque la polarisation augmente.
- Le dernier cas conserve cette polarisation importante mais on se place à une température faible ( $T = 0.1 \varepsilon_F^\uparrow$ ). Nous verrons alors l'influence de la température sur la forme de  $n_\sigma(\mathbf{k})$ .

Dans le cas non polarisé (a), les nombres d'occupations sont fortement déformés par l'effet des corrélations, mais ceux-ci restent positifs. Le cas de forte polarisation (b) illustre bien le fait que les particules  $\downarrow$  ne ressentent pas les mêmes effets de milieu que les  $\uparrow$  : la courbe pleine (bleue) présente une faible valeur et un écart par rapport à la valeur libre qui est grand, cela en raison de la forte corrélation avec le grand nombre de particules  $\uparrow$ . Le profil de ces dernières, quant à lui, ne présente qu'un faible écart par rapport au résultat libre. Enfin, le cas (c), à faible température et forte polarisation, nous permet de voir la limite de notre approche. Le fait que le nombre d'occupation devienne négatif est le signe d'une nouvelle pathologie : le calcul des corrélations dans ce cas là est surestimé. Une explication plausible se trouve dans le fait que l'on ne resomme pas les diagrammes dans l'équation de Dyson (4.24) : l'auto-cohérence que l'on a considérée se limite à la self-énergie. Les travaux de Kashimura *et al.* [88], utilisant une resommation des diagrammes à la fois dans l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  (ETMA<sup>5</sup>) et dans la self-énergie, peuvent être une solution au problème lié à cette surévaluation des corrélations.

## 4.6. Discussion

Nous avons vu dans ce chapitre que la méthode NSR, souvent utilisée pour décrire les transitions de phases dans le cadre du *crossover* entre BEC et BCS, présente une pathologie forte lorsque le système est polarisé dans la détermination des densités tenant compte des effets du milieu. L'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$  nous a malgré tout permis de mettre en évidence la nouvelle phase superfluide FFLO. Afin de contourner le problème lié à la méthode NSR, nous avons proposé une alternative, en nous basant sur les travaux de Zimmermann et Stolz. En calculant alors les densités corrélées avec cette méthode, nous avons pu constater que la pathologie de NSR disparaissait. Cela nous a alors permis d'établir le diagramme de phase  $(P, T/\varepsilon_F^\uparrow)$  décrivant l'apparition de la phase FFLO dans les gaz polarisés. Nous avons pu compléter les mesures effectuées [78] à propos de la transition de phase du premier ordre en ajoutant nos résultats concernant la phase FFLO, autre transition de phase ayant lieu dans ces systèmes. Nos calculs permettent donc de localiser dans le diagramme la transition entre la phase normale et la phase FFLO, ce qui peut être un autre pas vers l'observation expérimentale de cette dernière. Enfin, la détermination des nombres d'occupation pour différentes zones du diagramme de phase ont permis de montrer les limites du traitement de ce problème à l'aide de l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$ . Les points du diagramme de phase que l'on a utilisés pour le calcul des nombres d'occupation mettent en évidence l'apparition d'une nouvelle pathologie pour la méthode ZS. Une prochaine étape serait d'inclure les effets dus à la masse effective dans ces calculs. De plus, il serait aussi intéressant d'étudier la transition de phase du premier ordre survenant dans la phase superfluide.

---

<sup>5</sup>Extended  $\mathcal{T}$  Matrix Approximation.

## Conclusion

Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié la dynamique des gaz de fermions ultrafroids dans le cadre du *crossover* BEC-BCS. Plus particulièrement, les modes présentés par ces systèmes permettent de caractériser le régime hydrodynamique présent dans le gaz. Cet aspect est important du point de vue expérimental car il permet de savoir si le gaz est dans une phase superfluide ou une phase normale. Une bonne connaissance des mouvements collectifs est donc importante, notamment le mode quadrupolaire, dont l'amortissement présente un fort amortissement lorsque le régime est hydrodynamique mais pas superfluide.

Dans un premier temps, il a été question d'étudier le mode de Kohn, qui présente un grand intérêt du point de vue pratique. Celui-ci est en effet utilisé pour déterminer les pulsations caractéristiques du piège optique expérimental, il était alors nécessaire d'en connaître le comportement pour un gaz d'atomes piégés par un piège optique dipolaire dont on sait qu'il présente un certain degré d'anharmonicité. Bien que ces effets soient faibles, les mesures effectuées sur ces systèmes ultra-froids nécessitent en effet une très grande précision. La résolution de l'équation de Boltzmann par la méthode des moments à l'ordre supérieur nous a ainsi permis de quantifier ces effets d'anharmonicité en incluant les effets du potentiel de champ moyen et de la section efficace. En les déterminant grâce à l'approximation de la matrice  $\mathcal{T}$ , nous avons pu simuler le comportement du système lorsque celui-ci est dans un régime de forte interaction. Il ressort de cette étude que les effets d'anharmonicité pour de tels systèmes dépendent de la température et de l'interaction qui règne au sein du gaz, et deviennent même de l'ordre de 10 % pour une température de l'ordre de la température de Fermi. Par ailleurs, nous avons mis en évidence que le mode de Kohn dans ces conditions voit son mouvement amorti. Une étude concernant le couplage du mode de Kohn à d'autres modes – le mode de compression dipolaire et le mode *z-bending* – a pu fournir une explication théorique à l'apparition de cet amortissement. La forme gaussienne du piège permet des couplages entre les différents modes collectifs. Il en résulte alors une dissipation de l'énergie et le mode de Kohn est amorti. Cette étude s'ouvre finalement sur ces modes, pour lesquels notre méthode des moments à l'ordre supérieur (ordre 3) décrivant le mode de Kohn n'est que l'ordre le plus bas, en raison des symétries qu'ils

présentent. Afin d'étudier leur comportement plus précisément, il est donc envisageable de compléter les résultats en développant la méthode jusqu'à l'ordre 5.

Dans une deuxième partie, nous avons développé une autre méthode de résolution de l'équation de Boltzmann, basée sur la simulation dynamique du gaz utilisant la méthode des particules tests. Ces travaux, inscrits dans la continuité de la thèse de Thomas Lepers [5], ont eu pour objectif d'inclure dans la résolution les effets de milieu (potentiel de champ moyen et section efficace) mais aussi de permettre la simulation d'un gaz composé d'un grand nombre de particules avec un temps de calcul raisonnable grâce à l'utilisation d'un nombre de particules tests inférieur au nombre de particules réelles, comme cela est utilisé dans certains calculs Monte-Carlo. Il a été ensuite important de valider à l'aide d'une étude comparative les résultats donnés par cette méthode en utilisant des grandeurs pouvant être obtenues indépendamment, comme notamment le taux de collision servant de test des facteurs de Pauli (important vis-à-vis du nombre de particules tests), ou encore la conservation de l'énergie ou l'excitation du mode de Kohn dans un potentiel harmonique permettant de valider le processus de propagation des particules. Cela nous a donc permis d'étudier la pulsation et l'amortissement du mode quadrupolaire en tenant compte des effets de milieu calculés pour un nombre d'atomes représentatif des conditions expérimentales. Les résultats obtenus présentent un accord satisfaisant avec les données, notamment les valeurs de l'amortissement permettent de mettre en évidence les régimes hydrodynamiques (faible température) et sans collision (haute température) du système. Cependant il s'est avéré que les effets de milieu présentent une faible contribution sur les valeurs finales. En s'inspirant du protocole de mesure expérimental (nécessitant une expansion du gaz), nous avons ensuite vu que ce dilatation n'a pas de conséquence visible sur la détermination des valeurs de la pulsation et de l'amortissement du mode considéré. Toujours dans le contexte de l'étude des propriétés hydrodynamiques du système, il a été finalement question d'ajouter la possibilité de simuler des gaz polarisés. Cependant, comme la théorie NSR présente une pathologie pour ces systèmes, cela ne nous a pas permis d'inclure les effets de milieu. Nous avons alors effectué une étude de la dynamique de la collision de deux nuages totalement polarisés sans tenir compte des effets de milieu. L'objectif était de mettre en évidence les trois régimes qui ont été observés expérimentalement [52] : le mode de rebond, le mode intermédiaire (relaxation) et le mode de transmission. Il a alors été question de déterminer si ces mouvements sont exclusivement liés au caractère polarisé des gaz ou si leur apparition dépend du régime hydrodynamique présent dans le gaz à l'état initial. Nous avons donc reproduit le même protocole, mais en faisant collisionner des nuages non polarisés. Dans la mesure où les mêmes régimes sont apparus dans ce cas, nous pouvons donc en déduire que les collisions se produisant entre les particules jouent un rôle important dans ce phénomène. Comme aucune expérience n'a été réalisée sur le sujet à ce jour, cela constitue donc un sujet de recherche intéressant.

Enfin, une troisième partie est fondée sur l'étude des systèmes polarisés, notamment à propos d'une nouvelle phase superfluide (FFLO) n'ayant pas encore été mise en évidence expérimentalement. Après avoir présenté les caractéristiques de cette phase FFLO, nous avons développé une méthode de calcul généralisant la théorie NSR, en s'inspirant de la méthode de Zimmermann et Stolz (ZS), cette généralisation est rendue nécessaire de part la présence d'une pathologie apparaissant pour les calculs de la



densité avec la méthode NSR dans un système polarisé. Dans un premier temps, nous avons pu constater que cette théorie, contrairement à NSR, obéit au théorème de Luttinger. Cela nous a permis de compléter le diagramme de phase  $(P, T)$  d'un gaz de fermions polarisé et proche de la résonance de Feshbach avec nos résultats sur la transition à la phase FFLO, tandis que des résultats expérimentaux [78] ont établi l'existence d'une transition de phase du premier ordre dans ces systèmes. Nos résultats sont donc un premier pas vers des méthodes au-delà du champ moyen qui permettront de décrire complètement ces gaz, comme la méthode NSR parvient à le faire pour les systèmes équilibrés. Cependant, nous avons vu que des améliorations dans le traitement des corrélations doivent être réalisées, la matrice  $\mathcal{T}$  considérée sans calcul auto-cohérent ne pouvant pas rendre compte des effets de milieu sur l'ensemble du diagramme de phase. De nouveaux travaux pour un calcul auto-cohérent à la fois dans la self-énergie – comme nous l'avons réalisé – mais aussi dans la détermination de la matrice  $\mathcal{T}$  sont donc souhaitables, comme ce qui a déjà été fait pour les systèmes non polarisés [89].



## A.1. Unités de l'oscillateur harmonique

Afin de simplifier quelques calculs, nous considérerons le système des unités de l'oscillateur harmonique, pour lequel  $\hbar = k_B = m = \bar{\omega} = 1$ . Pour cela, nous établissons les grandeurs-unités de ce système : la longueur  $L_{\text{ho}}$ , l'énergie  $E_{\text{ho}}$  et la température  $T_{\text{ho}}$  de l'oscillateur harmonique, définies par

$$L_{\text{ho}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\bar{\omega}}}, \quad (\text{A.1})$$

$$E_{\text{ho}} = \hbar\bar{\omega}, \quad (\text{A.2})$$

$$T_{\text{ho}} = \frac{\hbar\bar{\omega}}{k_B}, \quad (\text{A.3})$$

où  $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$  est la moyenne géométrique des pulsations,  $\hbar$  la constante de Planck réduite,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $m$  la masse des particules.

Dans le cas des expériences réalisées dans l'article [2], nous considérerons que

$$\omega_x = 2\pi \times 1100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

$$\omega_y = 2\pi \times 1100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \quad (\text{A.5})$$

$$\omega_z = 2\pi \times 26 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{A.6})$$

Cela nous définit

$$\bar{\omega} = 1983.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

De plus, nous avons que  $m = 6.015 \text{ u}$ , c'est-à-dire

$$m = 9.988 \cdot 10^{-27} \text{ kg}. \quad (\text{A.8})$$

C'est alors que nous pouvons écrire que :

$$L_{\text{ho}} = 2.3077 \times 10^{-6} \text{ m}, \quad (\text{A.9})$$

$$E_{\text{ho}} = 2.0926 \times 10^{-31} \text{ J}, \quad (\text{A.10})$$

$$T_{\text{ho}} = 1.5157 \times 10^{-8} \text{ K}. \quad (\text{A.11})$$

Ces unités sont caractéristiques du système étudié, et la plupart des grandeurs seront alors exprimées en multiples de ces trois références, afin que celles-ci soit dans une échelle accessible. Il est évident qu'elles dépendent des pulsations du piège.

## A.2. Relations sur la fonction de distribution à l'équilibre

Pour toute distribution de Fermi et de Bose, on sait que :

$$f_{\text{eq}}(\varepsilon)f_{\text{eq}}(\varepsilon') = b_{\text{eq}}(\varepsilon + \varepsilon')[1 - f_{\text{eq}}(\varepsilon) - f_{\text{eq}}(\varepsilon')]. \quad (\text{A.12})$$

Lorsque l'on utilise l'approximation de densité locale, nous avons par ailleurs :

$$f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\exp \left[ \beta \left( \frac{p^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}) + U_{\text{eq}}(\mathbf{r}) - \mu \right) \right] + 1}. \quad (\text{A.13})$$

Ainsi, nous pouvons écrire ici quelques relations générales souvent utilisées pour effectuer les calculs, notamment les intégrations par parties. Ainsi :

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}} = -\beta \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} (V_{\text{trap}} + U_{\text{eq}}) f_0 \bar{f}_0, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{p}} = -\beta \frac{\mathbf{p}}{m} f_0 \bar{f}_0, \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial \mu} = \beta \left( 1 - \frac{\partial U_0}{\partial \mu} \right) f_0 \bar{f}_0, \quad (\text{A.16})$$

en raison de l'approximation de densité locale

$$\mu(\mathbf{r}) = \mu - V_{\text{trap}}(\mathbf{r}). \quad (\text{A.17})$$

## Ajustement de la section efficace

Nous l'avons vu au chapitre 3, il est nécessaire de faire appel à un ajustement de la section efficace calculée dans le milieu (paragraphe 3.3.4) afin de l'inclure dans la résolution de l'équation de Boltzmann. Sans cela, le temps d'exécution du programme serait beaucoup trop important.

### B.1. Définition de la fonction d'ajustement

La section efficace calculée dans le milieu, pour un gaz non polarisé de température  $T$ , de potentiel chimique  $\mu$  et de longueur de diffusion  $a$ , s'écrit :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; a, T, \mu) = \frac{m}{4\pi} \left| \Gamma\left(\frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\mu, \mathbf{k}; a, T, \mu\right) \right|^2. \quad (\text{B.1})$$

Comme la résolution numérique de l'équation de Boltzmann a été définie de manière à considérer, pour la position  $\mathbf{r}_i$  et l'impulsion  $\mathbf{p}_i$  de chaque particule test, les valeurs de  $\rho_i = \rho(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$  et  $\varepsilon_i = \varepsilon(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$  plutôt que celles de  $T$  et  $\mu$ , nous allons donc écrire :

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}; a, \rho, \varepsilon) = \frac{m}{4\pi} \left| \Gamma\left(\frac{k^2}{4m} + \frac{q^2}{m} - 2\mu, \mathbf{k}; a, \rho, \varepsilon\right) \right|^2. \quad (\text{B.2})$$

Numériquement, il est assez rapide d'obtenir la correspondance entre les valeurs  $(T, \mu)$  et les valeurs  $(\rho, \varepsilon)$ , grâce aux relations :

$$\rho(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (\text{B.3})$$

$$\varepsilon(\mathbf{r}) = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{p^2}{2m} f_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}). \quad (\text{B.4})$$

Par ailleurs, grâce à la figure 3.2, nous avons déterminé la forme de l'ansatz  $\sigma_{\text{fit}}$  que nous utilisons pour ajuster  $\tilde{\sigma}$  sur toute la plage des valeurs de  $a$ ,  $\rho$  et  $\varepsilon$  :

$$\sigma_{\text{fit}}(k, q) = \sigma_0(q) \left[ 1 + A \exp\left(-\frac{k^2}{k_0^2}\right) \frac{1}{(q - q_0)^2 + q_1^2} \right], \quad (\text{B.5})$$

où

$$A = A(a, \rho, \varepsilon), \quad k_0 = k_0(a, \rho, \varepsilon), \quad (\text{B.6})$$

$$q_0 = q_0(a, \rho, \varepsilon), \quad q_1 = q_1(a, \rho, \varepsilon). \quad (\text{B.7})$$

Cette forme reproduit bien le comportement de  $\tilde{\sigma}$  lorsque les impulsions deviennent grandes :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma}(k, q)}{\sigma_0(q)} = \lim_{q \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\sigma}(k, q)}{\sigma_0(q)} = 1. \quad (\text{B.8})$$

Cependant, elle ne permet pas de décrire le comportement de la section efficace lorsque les impulsions sont proches de zéro : dans ce cas, le rapport  $\tilde{\sigma}/\sigma_0$  tend vers des valeurs inférieures à 1. Mais dans la mesure où la fonction  $\tilde{\sigma}/\sigma_0$  croît rapidement, cela aura une incidence très faible sur les résultats.

## B.2. Méthode d'ajustement

### B.2.1. Introduction

La section efficace est utilisée principalement pour le calcul du taux de collision (éq. (3.16), page 66) :

$$\gamma = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2q}{Y^2 m} \tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \left[ \frac{\text{atanh}\left(\tanh\frac{X}{2} \tanh\frac{Y}{2}\right)}{\sinh X} \right]^2, \quad (\text{B.9})$$

où nous utilisons les notations :

$$E = \frac{k^2}{8m} + \frac{q^2}{2m} + V_{\text{trap}}(\mathbf{r}), \quad X = \beta(E - \mu), \quad Y = \frac{\beta k q}{2m}. \quad (\text{B.10})$$

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 3.4.3, il est primordial que notre programme de résolution de l'équation de Boltzmann retranscrive le plus fidèlement les collisions, et donc que la valeur de  $\gamma$  soit très proche du résultat obtenu par le calcul analytique à l'équilibre.

Pour plus de clarté, nous allons définir

$$\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{q}) = \left[ \frac{\operatorname{atanh} \left( \tanh \frac{X}{2} \tanh \frac{Y}{2} \right)}{\sinh X} \right]^2. \quad (\text{B.11})$$

Ce qui nous donne :

$$\gamma = \frac{1}{N} \int d^3\mathbf{r} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{2q}{Y^2 m} \tilde{\sigma}(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \kappa(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{q}). \quad (\text{B.12})$$

Le facteur  $\kappa(\mathbf{r}, \mathbf{k}, \mathbf{q})$  peut être assimilé au facteur de blocage de Pauli. Dans ce contexte, nous n'avons pas ajusté directement la fonction  $\sigma_{\text{fit}}$  à  $\tilde{\sigma}$ , mais la valeur des « moments » de  $\sigma_{\text{fit}}\kappa$  à ceux de  $\tilde{\sigma}\kappa$ , en ajustant les puissances de  $k$  et  $q$  en fonction de ceux qui apparaissent dans la définition de  $\gamma$ . Comme il est aussi nécessaire de conserver le même comportement au sein du système, il est important de s'assurer que le temps de relaxation

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\int d^3\mathbf{r} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} I[p_x p_y] p_x p_y}{\int d^3\mathbf{r} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} f_0(1-f_0) p_x^2 p_y^2} \quad (\text{B.13})$$

calculé avec  $\sigma_{\text{fit}}$  (dans  $I$ ) soit également au plus près de sa valeur réelle, ce qui nous donne un autre moment.

### B.2.2. Définition du $\chi^2$

Nous avons décidé d'utiliser une méthode d'ajustement utilisant une minimisation du  $\chi^2$  (réalisée grâce à la librairie `MINUIT` (écrite en Fortran), développée au CERN). Comme indiqué précédemment, nous n'avons cependant pas directement ajusté  $\sigma_{\text{fit}}$  à  $\tilde{\sigma}$ , mais nous avons considéré un  $\chi^2$  de la forme :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^4 \left( 1 - \frac{f_i}{\tilde{f}_i} \right)^2, \quad (\text{B.14})$$

où nous avons défini les  $f_i$  et les  $\tilde{f}_i$  comme les moments en impulsion  $k$  et  $q$  (s'inspirant de l'équation (B.12)) des sections efficaces d'ajustement  $\sigma_{\text{fit}}$  et exacte  $\tilde{\sigma}$  (respectivement). Il est important de considérer 4 moments différents dans la mesure où  $\sigma_{\text{fit}}$  contient 4 paramètres. Les différentes puissances de  $q$  et  $k$  ont été choisies pour rendre compte du taux de collision ( $f_1$ ) mais aussi du temps de relaxation  $\tau$  du système ( $f_4$ ). Les deux autres sont arbitraires, mais permettent toutefois de limiter la contribution des faibles valeurs de  $q$  dans le calcul du  $\chi^2$  (ce qui nous permet d'atténuer l'impact

du point faible de  $\sigma_{\text{fit}}$  évoqué précédemment). En pratique, nous avons :

$$f_1 = \int dk \int dq \sigma_{\text{fit}}(k, q) \kappa(k, q) q, \quad \tilde{f}_1 = \int dk \int dq \tilde{\sigma}(k, q) \kappa(k, q) q, \quad (\text{B.15})$$

$$f_2 = \int dk \int dq \sigma_{\text{fit}}(k, q) \kappa(k, q) q^3, \quad \tilde{f}_2 = \int dk \int dq \tilde{\sigma}(k, q) \kappa(k, q) q^3, \quad (\text{B.16})$$

$$f_3 = \int dk \int dq \sigma_{\text{fit}}(k, q) \kappa(k, q) q^5, \quad \tilde{f}_3 = \int dk \int dq \tilde{\sigma}(k, q) \kappa(k, q) q^5, \quad (\text{B.17})$$

$$f_4 = \int dk \int dq \sigma_{\text{fit}}(k, q) \kappa(k, q) k^2 q^3, \quad \tilde{f}_4 = \int dk \int dq \tilde{\sigma}(k, q) \kappa(k, q) k^2 q^3. \quad (\text{B.18})$$

La dépendance en  $\mathbf{r}$  du facteur  $\kappa$  provient seulement de la présence de  $V_{\text{trap}}(\mathbf{r})$  dans  $E$ . Comme il est possible de la prendre en compte via l'approximation de densité locale ( $\mu \rightarrow \mu - V_{\text{trap}}$ ), il n'était donc pas nécessaire de la conserver ici.

### B.3. Traitement des hautes températures

La forme de la section efficace est différente suivant le jeu de paramètres considéré. Un point important concerne les hautes températures ( $T \gtrsim T_{\text{F}}$ ) : le pic de la section efficace s'étale alors fortement et l'*ansatz* défini précédemment ne permet pas de décrire correctement  $\tilde{\sigma}$ . À partir de ce constat, nous avons donc décidé d'effectuer un développement haute température de  $\tilde{\sigma}$ , et donc de  $\tilde{J}$  (équation (2.24), page 26) :

$$\tilde{J}(\omega, \mathbf{k}) = - \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} \frac{f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}}) + f_{\text{eq}}(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}})}{\omega - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}} - \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}} + i\eta}, \quad (\text{B.19})$$

où  $\xi_{\mathbf{k}} = k^2/2 - \mu$  (on note dès à présent  $m = 1$ ). Dans la limite des hautes températures, la distribution de Fermi tend vers une distribution de Boltzmann. De ce fait, nous aurons

$$f(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}}) + f(\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}}) \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} 2 e^{-\beta \left( \frac{k^2}{8} + \frac{q^2}{2} - \mu \right)} \cosh \frac{\beta \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2}, \quad (\text{B.20})$$

et aussi :

$$\xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}+\mathbf{q}} + \xi_{\frac{\mathbf{k}}{2}-\mathbf{q}} = \frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu. \quad (\text{B.21})$$

On peut donc exprimer la valeur de  $\tilde{J}$  dans le cas des hautes températures :

$$\tilde{J}_{\text{HT}}(\omega, \mathbf{k}) = -2 \int \frac{d^3 \mathbf{q}}{(2\pi)^3} e^{-\beta \left( \frac{k^2}{8} + \frac{q^2}{2} - \mu \right)} \frac{\cosh \frac{\beta \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{2}}{\omega - \frac{k^2}{4} - q^2 + 2\mu + i\eta} \quad (\text{B.22})$$



Ainsi, en notant la variable d'intégration  $\bar{q}$  et  $\theta = \cos(\mathbf{k}, \bar{\mathbf{q}})$ , puis en se plaçant à  $\omega = \frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu$  (utilisé pour le calcul de  $\tilde{\sigma}$ ), on peut écrire :

$$\tilde{J}_{\text{HT}}\left(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}\right) = -\frac{1}{4\pi^2} \int d\bar{q} \bar{q}^2 e^{-\beta\left(\frac{k^2}{8} + \frac{\bar{q}^2}{2} - \mu\right)} \frac{1}{q^2 - \bar{q}^2 + i\eta} \left[ \frac{\sinh \frac{\beta k \bar{q} \theta}{2}}{\frac{\beta k \bar{q}}{2}} \right]_{-1}^1, \quad (\text{B.23})$$

$$= -\frac{1}{\beta k \pi^2} \int d\bar{q} \bar{q} e^{-\beta\left(\frac{k^2}{8} + \frac{\bar{q}^2}{2} - \mu\right)} \frac{\sinh \frac{\beta k \bar{q}}{2}}{q^2 - \bar{q}^2 + i\eta}, \quad (\text{B.24})$$

$$= \frac{e^{\beta\mu}}{2\beta k \pi^2} \int d\bar{q} \frac{\bar{q}}{q^2 - \bar{q}^2 + i\eta} \left[ e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{q} + \frac{k}{2})^2} - e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{q} - \frac{k}{2})^2} \right], \quad (\text{B.25})$$

$$= \frac{e^{\beta\mu}}{4\beta k \pi^2} \int d\bar{q} \left( \frac{1}{q - \bar{q} + i\eta} - \frac{1}{q + \bar{q} + i\eta} \right) \left[ e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{q} + \frac{k}{2})^2} - e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{q} - \frac{k}{2})^2} \right]. \quad (\text{B.26})$$

Le calcul se poursuit facilement en considérant le résultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{-x^2}}{x - a} = e^{-a^2} \left[ -\pi \operatorname{Erfi}(a) + \ln\left(-\frac{1}{a}\right) + \ln a \right], \quad (\text{B.27})$$

où,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,

$$\operatorname{Erfi}(z) = -i \operatorname{Erf}(iz), \quad (\text{B.28})$$

$$\operatorname{Erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z dt e^{-t^2}. \quad (\text{B.29})$$

On introduit aussi  $D(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , l'intégrale de Dawson, qui est

$$D(x) = e^{-x^2} \int_0^x dt e^{-t^2}. \quad (\text{B.30})$$

À titre d'exemple, on développe le calcul d'une intégrale particulière :

$$I_1 = \int d\bar{q} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}(\bar{q} + \frac{k}{2})^2}}{q - \bar{q} + i\eta}. \quad (\text{B.31})$$

On pose  $q_+ = \bar{q} + \frac{k}{2}$ , soit  $d\bar{q} = dq_+$  :

$$I_1 = \int dq_+ \frac{e^{-\frac{\beta}{2}q_+^2}}{q - q_+ - \frac{k}{2} + i\eta}, \quad (\text{B.32})$$

puis  $\bar{x} = \sqrt{\frac{\beta}{2}}q_+$  et donc  $dq_+ = \sqrt{\frac{2}{\beta}}d\bar{x}$ . En notant  $k = \sqrt{\frac{2}{\beta}}y$ , on arrive à :

$$I_1 = - \int d\bar{x} \frac{e^{-\bar{x}^2}}{\bar{x} - x + \frac{y}{2} - i\eta}. \quad (\text{B.33})$$

On pose  $a_1 = x - \frac{y}{2} + i\eta$ , et donc on obtient finalement :

$$I_1 = e^{-a_1^2} \left[ \pi \operatorname{Erfi}(a_1) - \ln \left( -\frac{1}{a_1} \right) - \ln a_1 \right], \quad (\text{B.34})$$

soit :

$$I_1 = \pi D(x - \frac{y}{2}) - i\pi e^{-(x-\frac{y}{2})^2}. \quad (\text{B.35})$$

En complétant les trois autres intégrales, on obtiendra finalement :

$$\tilde{J}_{\text{HT}}(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}) = -\frac{e^{\beta\mu}}{2\pi y \sqrt{2\beta}} \left[ D(x - \frac{y}{2}) - D(x + \frac{y}{2}) + i \left( e^{-(x+\frac{y}{2})^2} - e^{-(x-\frac{y}{2})^2} \right) \right]. \quad (\text{B.36})$$

En développant la distribution de Fermi aux ordres supérieurs en  $\beta \rightarrow 0$  :

$$\frac{1}{e^{\beta x} + 1} = \frac{e^{-\beta x}}{1 + e^{-\beta x}} \approx e^{-\beta x} \left( 1 - e^{-\beta x} + e^{-2\beta x} - \dots \right), \quad (\text{B.37})$$

il est alors très facile d'écrire ce développement haute température aux ordres supérieurs :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}; T) &\approx \tilde{J}_{\text{HT}}(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}; T) - \tilde{J}_{\text{HT}}(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}; \frac{T}{2}) \\ &\quad + \tilde{J}_{\text{HT}}(\frac{k^2}{4} + q^2 - 2\mu, \mathbf{k}; \frac{T}{3}) - \dots \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

D'un point de vue pratique, nous avons établi qu'il n'était pas nécessaire (numériquement) d'aller au-delà de l'ordre 3.

## B.4. Utilisation dans le programme

Une fois que les valeurs des paramètres  $A$ ,  $k_0$ ,  $q_0$  et  $q_1$  sont correctement déterminées, il est nécessaire de pouvoir les utiliser rapidement dans le programme Boltzmann. Afin de connaître les valeurs de ces paramètres pour n'importe quelle particule test  $i$ , nous avons opter pour une tabulation de ceux-ci en fonction de  $\rho$  et  $\varepsilon$ . Une procédure d'interpolation cubique (`spline`) nous permet alors d'accéder à toutes les valeurs.





## Bibliographie

- [1] J. BARDEEN, L. N. COOPER et J. R. SCHRIEFFER : Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, Déc 1957.
- [2] S. RIEDL, E. R. SÁNCHEZ GUAJARDO, C. KOHSTALL, A. ALTMAYER, M. J. WRIGHT, J. Hecker DENSCHLAG, R. GRIMM, G. M. BRUUN et H. SMITH : Collective oscillations of a Fermi gas in the unitarity limit : Temperature effects and the role of pair correlations. *Phys. Rev. A*, 78:053609, Nov 2008.
- [3] M. J. WRIGHT, S. RIEDL, A. ALTMAYER, C. KOHSTALL, E. R. SÁNCHEZ GUAJARDO, J. Hecker DENSCHLAG et R. GRIMM : Finite-Temperature Collective Dynamics of a Fermi Gas in the BEC-BCS Crossover. *Phys. Rev. Lett.*, 99:150403, Oct 2007.
- [4] D. NAIK, A. TRENKWALDER, C. KOHSTALL, F. M. SPIEGELHALDER, M. ZACCANTI, G. HENDL, F. SCHRECK, R. GRIMM, T. M. HANNA et P. S. JULIENNE : Feshbach resonances in the  ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$  Fermi-Fermi mixture : elastic versus inelastic interactions. *Eur. Phys. J. D*, 65(1), 2011.
- [5] Thomas LEPERS : *Étude dynamique des modes collectifs dans les gaz de fermions froids*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard – Lyon 1, 2010.
- [6] M. URBAN : Damping of collective modes in ultracold trapped Fermi gases with in-medium cross section. volume 321. *Journal of Physics : Conference Series*, 2011.
- [7] Silvia CHIACCHIERA, Thomas LEPERS, Dany DAVESNE et Michael URBAN : Collective modes of trapped Fermi gases with in-medium interaction. *Physical Review A*, 79(3):033613, mars 2009.
- [8] Silvia CHIACCHIERA, Thomas LEPERS, Dany DAVESNE et Michael URBAN : Role of fourth-order phase-space moments in collective modes of trapped Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 84:043634, Oct 2011.
- [9] Thomas LEPERS, Dany DAVESNE, Silvia CHIACCHIERA et Michael URBAN : Nu-

- merical solution of the Boltzmann equation for the collective modes of trapped Fermi gases. *Phys. Rev. A*, 82:023609, Août 2010.
- [10] Peter FULDE et Richard A. FERRELL : Superconductivity in a Strong Spin-Exchange Field. *Physical Review*, 135(3A):A550, 1964.
- [11] Anatoly I. LARKIN et Yuri N. OVCHINNIKOV : *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 47:1136, 1964.
- [12] D. M. EAGLES : Possible Pairing without Superconductivity at Low Carrier Concentrations in Bulk and Thin-Film Superconducting Semiconductors. *Physical Review*, 186(2):456–463, 1969.
- [13] A. J. LEGGETT : Diatomic Molecules and Cooper Pairs. In *Modern Trends in the Theory of Condensed Matter*, pages 13–27. 1979.
- [14] M. W. ZWIERLEIN, J. R. ABO-SHAER, A. SCHIROTZEK, C. H. SCHUNCK et W. KETTERLE : Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 435(7045):1047–1051, 2005.
- [15] P. NOZIÈRES et S. SCHMITT-RINK : Bose condensation in an attractive fermion gas : From weak to strong coupling superconductivity. *Journal of Low Temperature Physics*, 59:195–211, 1985. 10.1007/BF00683774.
- [16] Satyendra Nath BOSE : Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26(1):178–181, 1924.
- [17] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [18] W. KETTERLE et M. W. ZWIERLEIN : Ultracold Fermi Gases, Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”, cours CLXIV. Varenna, Juin 2006.
- [19] Claude COHEN-TANNOUDJI : Conférence “Atomes ultrafroids et ondes de matières”. Université Claude Bernard – Lyon 1, 2010.
- [20] Rudolf GRIMM : Ultracold Fermi gases in the BEC-BCS crossover : a review from the Innsbruck perspective. *arxiv*, pages 1–50, 2006.
- [21] Alexander ALTMAYER : *Collective oscillations of an ultracold quantum gas in the BEC-BCS crossover regime*. Thèse de doctorat, Innsbruck University, 2007.
- [22] Julien CUBIZOLLES : *Fermions et bosons dégénérés au voisinage d’une résonance de Feshbach : production de molécules et solitons d’ondes de matières*. Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2004.
- [23] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, Cheng CHIN, J. H. DENSCHLAG et Rudolf GRIMM : Collective Excitations of a Degenerate Gas at the BEC-BCS Crossover. *Physical Review Letters*, 92(20):90–93, mai 2004.
- [24] A. ALTMAYER, S. RIEDL, C. KOHSTALL, M. J. WRIGHT, R. GEURSEN, M. BAR-

- TENSTEIN, Cheng CHIN, J. H. DENSCHLAG et Rudolf GRIMM : Precision Measurements of Collective Oscillations in the BEC-BCS Crossover. *Physical Review Letters*, 98(4):040401, janvier 2007.
- [25] J. KINAST, A. TURLAPOV et J. E. THOMAS : Breakdown of hydrodynamics in the radial breathing mode of a strongly interacting Fermi gas. *Physical Review A*, 70(5):051401, novembre 2004.
- [26] Georg BRUUN et Charles CLARK : Ideal gases in time-dependent traps. *Physical Review A*, 61(6):061601, mai 2000.
- [27] Yu. KAGAN, E. L. SURKOV et G. V. SHLYAPNIKOV : Evolution of a Bose gas in anisotropic time-dependent traps. *Physical Review A*, 55(1):R18–R21, janvier 1997.
- [28] Pierre-Alexandre PANTEL, Dany DAVESNE, Silvia CHIACCHIERA et Michael URBAN : Trap anharmonicity and sloshing mode of a Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 86:023635, Août 2012.
- [29] Walter KOHN : Cyclotron Resonance and de Haas–van Alphen Oscillations of an Interacting Electron Gas. *Phys. Rev.*, 123:1242–1244, Août 1961.
- [30] Alexander L. FETTER et John D. WALECKA : *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. McGraw-Hill Book Company, 1971.
- [31] Leonid SIDORENKOV et Rudolf GRIMM : Datas on sloshing mode damping from [2]. Échange de mails, Juillet 2012.
- [32] Joseph KINAST, Andrey TURLAPOV, John E. THOMAS, Qijin CHEN, Jelena STAJIC et Kathryn LEVIN : Heat Capacity of a Strongly Interacting Fermi Gas. *Science*, 307(5713):1296–1299, 2005.
- [33] Qijin CHEN, Jelena STAJIC et K. LEVIN : Thermodynamics of Interacting Fermions in Atomic Traps. *Phys. Rev. Lett.*, 95:260405, Déc. 2005.
- [34] John F. DOBSON : Harmonic-Potential Theorem : Implications for Approximate Many-Body Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 73:2244–2247, Oct 1994.
- [35] C. J. PETHICK et H. SMITH : *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [36] F. E. SERR, T. S. DUMITRESCU, T. SUZUKI et C. H. DASSO : Microscopic description of current distributions for collective excitations in spherical nuclei. *Nuclear Physics A*, 404:359–391, 1983.
- [37] A. GRIFFIN, Wen-Chin WU et Sandro STRINGARI : Hydrodynamic Modes in a Trapped Bose Gas above the Bose-Einstein Transition. *Physical Review Letters*, 78(10):1838–1841, mars 1997.
- [38] C. GRÉGOIRE, B. REMAUD, F. SÉBILLE, L. VINET et Y. RAFFRAY : Semi-classical Dynamics of Heavy-ion Reactions. *Nuclear Physics A*, 465:317–338, 1987.

- [39] G. F. BERTSCH et S. DAS GUPTA : A guide to microscopic models for intermediate energy heavy ion collisions. *Physics Reports*, 160(4):189–233, 1988.
- [40] A. C. J. WADE, D. BAILLIE et P. B. BLAKIE : Direct simulation Monte Carlo method for cold-atom dynamics : Classical Boltzmann equation in the quantum collision regime. *Physical Review A*, 84(2):023612, 2011.
- [41] Michael URBAN : Pygmy resonance and torus mode within Vlasov dynamics. *Physical Review C*, 85(3):034322, 2012.
- [42] Carlos LOBO, A. RECATI, S. GIORGINI et S. STRINGARI : Normal State of a Polarized Fermi Gas at Unitarity. *Physical Review Letters*, 97(20):200403, novembre 2006.
- [43] William C. SWOPE, Hans C. ANDERSEN, Peter H. BERENS et Kent R. WILSON : A computer simulation method for the calculation of equilibrium constants for the formation of physical clusters of molecules : Application to small water clusters. *The Journal of Chemical Physics*, 76(1):637–649, 1982.
- [44] Y. CASTIN et R. DUM : Bose-Einstein Condensates in Time Dependant Traps. *Physical Review Letters*, 77(27):5315–5319, 1996.
- [45] C. MENOTTI, P. PEDRI et S. STRINGARI : Expansion of an Interacting Fermi Gas. *Physical Review Letters*, 89(25):250402, décembre 2002.
- [46] D. GUÉRY-ODELIN : Mean-field effects in a trapped gas. *Physical Review A*, 66(3):033613, septembre 2002.
- [47] K. M. O’HARA, S. L. HEMMER, M. E. GEHM, S. R. GRANADE et J. E. THOMAS : Observation of a Strongly Interacting Degenerate Fermi Gas of Atoms. *Science*, 298:2179–2183, 2002.
- [48] E. ELLIOTT, J. A. JOSEPH et J. E. THOMAS : Observation of Conformal Symmetry Breaking and Scale Invariance in Expanding Fermi Gases. *Physical Review Letters*, 112(4):040405, janvier 2014.
- [49] L. VICHI, M. INGUSCIO, S. STRINGARI et G. M. TINO : Quantum degeneracy and interaction effects in spin-polarized Fermi–Bose mixtures. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 31(21):L899, 1998.
- [50] Nicolas THIÉBAUT : Stage de M2 – Oscillation et expansion d’un gaz de fermions ultrafroids dans le cadre de l’équation de Boltzmann. 2010.
- [51] Niels KJÆRGAARD, Angela S. MELLISH et Andrew C. WILSON : Differential scattering measurements from a collider for ultracold atoms. *New Journal of Physics*, 6:146, octobre 2004.
- [52] Ariel SOMMER, Mark J. H. KU, Giacomo ROATI et Martin W. ZWIERLEIN : Universal spin transport in a strongly interacting Fermi gas. *Nature*, 472(7342):201–204, 2011.
- [53] O. GOULKO, Frédéric CHEVY et Carlos LOBO : Collision of two spin-polarized



- fermionic clouds. *Physical Review A*, 84(5):051605, novembre 2011.
- [54] O. GOULKO, Frédéric CHEVY et Carlos LOBO : Spin Drag of a Fermi Gas in a Harmonic Trap. *Physical Review Letters*, 111(19):190402, novembre 2013.
- [55] Edward TAYLOR, Shizhong ZHANG, William SCHNEIDER et Mohit RANDEIRA : Colliding clouds of strongly interacting spin-polarized fermions. *Physical Review A*, 84(6):063622, 2011.
- [56] J. A. JOSEPH, J. E. THOMAS, M. KULKARNI et A. G. ABANOV : Observation of Shock Waves in a Strongly Interacting Fermi Gas. *Physical Review Letters*, 106(15):150401, avril 2011.
- [57] Leo RADZIHOVSKY et Daniel E SHEEHY : Imbalanced Feshbach-resonant Fermi gases. *Reports on Progress in Physics*, 73(7):076501, juillet 2010.
- [58] Alessio RECATI et Sandro STRINGARI : Spin oscillations of the normal polarized Fermi gas at unitarity. *Physical Review A*, 82(1):013635, 2010.
- [59] Ariel SOMMER, Mark J. H. KU et Martin W. ZWIERLEIN : Spin transport in polaronic and superfluid Fermi gases. *New Journal of Physics*, 13(5):055009, mai 2011.
- [60] C. KOHSTALL, M. ZACCANTI, M. JAG, A. TRENKWALDER, P. MASSIGNAN, G. M. BRUUN, F. SCHRECK et Rudolf GRIMM : Metastability and coherence of repulsive polarons in a strongly interacting Fermi mixture. *Nature*, 485(7400):615–618, mai 2012.
- [61] J. E. BAARSMA, J. ARMAITIS, R. A. DUINE et H. T. C. STOOF : Polarons in extremely polarized Fermi gases : The strongly interacting  ${}^6\text{Li}$ - ${}^{40}\text{K}$  mixture. *Physical Review A*, 85(3):033631, mars 2012.
- [62] Zhihao LAN, G. M. BRUUN et Carlos LOBO : Quasiparticle Lifetime in Ultracold Fermionic Mixtures with Density and Mass Imbalance. *Physical Review Letters*, 111(14):145301, octobre 2013.
- [63] Michael JAG, Matteo ZACCANTI, Marko CETINA, Rianne S. LOUS, Florian SCHRECK, Rudolf GRIMM, Dmitry S. PETROV et Jesper LEVINSEN : Observation of a Strong Atom-Dimer Attraction in a Mass-Imbalanced Fermi-Fermi Mixture. *Physical Review Letters*, 112(7):075302, février 2014.
- [64] G. ROATI, F. RIBOLI, G. MODUGNO et M. INGUSCIO : Fermi-Bose Quantum Degenerate  ${}^{40}\text{K}$ - ${}^{87}\text{Rb}$  Mixture with Attractive Interaction. *Physical Review Letters*, 89(15):150403, septembre 2002.
- [65] Taka SOGO, Peter SCHUCK et Michael URBAN : Bose-Fermi pairs in a mixture and the Luttinger theorem within a Nozières-Schmitt-Rink-like approach. *Physical Review A*, 88(2):023613, août 2013.
- [66] Xia-Ji LIU et Hui HU : BCS-BEC crossover in an asymmetric two-component Fermi gas. *Europhysics Letters*, 75(3):364–370, août 2006.

- [67] M. M. PARISH, F. M. MARCHETTI, A. LAMACRAFT et B. D. SIMONS : Finite-temperature phase diagram of a polarized Fermi condensate. *Nature Physics*, 3(2):124–128, janvier 2007.
- [68] S. PILATI et S. GIORGINI : Phase Separation in a Polarized Fermi Gas at Zero Temperature. *Physical Review Letters*, 100(3):030401, janvier 2008.
- [69] K. GUBBELS et H. STOOF : Renormalization Group Theory for the Imbalanced Fermi Gas. *Physical Review Letters*, 100(14):140407, avril 2008.
- [70] G. SARMA : On The Influence of a Uniform Exchange Field Acting on the Spins of the Conduction Electrons in a Superconductor. *J. Phys. Chem. Solids*, 24:1029–1032, 1963.
- [71] Frédéric CHEVY et Christophe MORA : Ultra-cold polarized Fermi gases. *Reports on Progress in Physics*, 73(11):112401, novembre 2010.
- [72] Aurel BULGAC, Joaquín E. DRUT et Piotr MAGIERSKI : Spin 1/2 Fermions in the Unitary Regime : A Superfluid of a New Type. *Physical Review Letters*, 96(9):090404, mars 2006.
- [73] Armen SEDRAKIAN, T. ALM et U. LOMBARDO : Superfluidity in asymmetric nuclear matter. *Physical Review C*, 55(2):582–584, 1997.
- [74] R. ZIMMERMANN et H. STOLZ : The mass action law in two-component fermi systems revisited excitons and electron-hole pairs. *Physica Status Solidi (B)*, 131(1):151–164, 1985.
- [75] R. COMBESCOT, S. GIRAUD et X. LEYRONAS : Analytical theory of the dressed bound state in highly polarized fermi gases. *EPL (Europhysics Letters)*, 88(6):60007, 2009.
- [76] S. GIRAUD et R. COMBESCOT : Interaction between polarons and analogous effects in polarized Fermi gases. *Physical Review A*, 85(1):013605, janvier 2012.
- [77] M. M. PARISH et Jesper LEVINSEN : Highly polarized Fermi gases in two dimensions. *Physical Review A*, 87:033616, 2013.
- [78] Yong-Il SHIN, C. H. SCHUNCK, André SCHIROTZEK et Wolfgang KETTERLE : Phase diagram of a two-component Fermi gas with resonant interactions. *Nature*, 451(7179):689–693, février 2008.
- [79] Marco KOSCHORRECK, Daniel PERTOT, Enrico VOGT, Bernd FRÖHLICH, Michael FELD et Michael KÖHL : Attractive and repulsive Fermi polarons in two dimensions. *Nature*, 485(7400):619–622, mai 2012.
- [80] Meng JIN, Michael URBAN et Peter SCHUCK : BEC-BCS crossover and the liquid-gas phase transition in hot and dense nuclear matter. *Physical Review C*, 82(2):024911, août 2010.
- [81] G. CHANFRAY et M. ERICSON : Fluctuations of the quark densities in nuclei. *The European Physical Journal A*, 16(2):291–297, février 2003.

- [82] J. M. LUTTINGER : Fermi Surface and Some Equilibrium Properties of a System of Interacting Fermions. *Physical Review*, 119(4):1153–1163, 1960.
- [83] Evgeni BUROVSKI, Nikolay PROKOF'EV, Boris SVISTUNOV et Matthias TROYER : Critical Temperature and Thermodynamics of Attractive Fermions at Unitarity. *Physical Review Letters*, 96(16):160402, avril 2006.
- [84] B. S. CHANDRASEKHAR : A Note on the Maximum Critical Field of High Field Superconductors. *Applied Physics Letters*, 1(1), 1962.
- [85] A. M. CLOGSTON : Upper Limit for the Critical Field in Hard Superconductors. *Physical Review Letters*, 9(6):266–267, 1962.
- [86] L. P. GOR'KOV et T. K. MELIK-BARKHUDAROV : *J. Exp. Theor. Phys.*, (40):1452, 1961.
- [87] K. B. GUBBELS, M. W. J. ROMANS et H. T. C. STOOF : Sarma Phase in Trapped Unbalanced Fermi Gases. *Physical Review Letters*, 97(21):210402, novembre 2006.
- [88] Takashi KASHIMURA, Ryota WATANABE et Yoji OHASHI : Spin susceptibility and fluctuation corrections in the BCS-BEC crossover regime of an ultracold Fermi gas. *Physical Review A*, 86(4):043622, octobre 2012.
- [89] R. HAUSSMANN, W. RANTNER, S. CERRITO et W. ZWERGER : Thermodynamics of the BCS-BEC crossover. *Physical Review A*, 75(2):023610, février 2007.

NOM : PANTEL		DATE de SOUTENANCE		
Prénoms : Pierre-Alexandre		22 Septembre 2014		
TITRE : Étude théorique d'un gaz de fermions froids en interaction : aspects dynamiques et effets de polarisation				
Numéro d'ordre : 167-2014				
DIPLOME DE DOCT.	DOCTEUR- INGENIEUR	DOCTORAT D'ETAT	DOCTORAT DE 3e CYCLE	Spécialité : Physique Théorique
X	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
RESUME :				
<p>Les progrès techniques réalisés dans le cadre des expériences sur les gaz de fermions ultrafroids ont engendré une émulation particulièrement importante ces dernières années. En effet, ces dispositifs expérimentaux permettent de produire des systèmes gazeux « à la carte », notamment grâce au phénomène de résonances de Feshbach qui permet de contrôler le signe de la longueur de diffusion <math>a</math> par application d'un champ magnétique extérieur. Il est alors possible de générer aussi bien une interaction attractive (<math>a &lt; 0</math>) que répulsive (<math>a &gt; 0</math>). La résonance de Feshbach en elle-même se trouve en <math>a \rightarrow \pm\infty</math>, cette limite correspondant à un régime de fortes corrélations entre les particules. De plus, dans la région où <math>a</math> est positive, des états liés moléculaires (bosoniques car formés de deux fermions) peuvent se former. En-dessous d'une certaine température, une phase superfluide peut alors apparaître, et une transition de phase continue entre l'état bosonique et l'état fermionique peut être observée (BEC-BCS crossover). En fonction de la position dans le diagramme de phases, les modes collectifs posséderont des caractéristiques (fréquence, amortissement) différentes. En ce sens, ils constituent une sonde de l'état de la matière et une connaissance précise de ces modes est par conséquent très importante.</p> <p>Le travail présenté dans cette thèse comporte une caractérisation détaillée de plusieurs modes collectifs dans la phase normale du système atomique. L'étude repose principalement sur l'équation de Boltzmann, que nous résolvons de deux façons différentes. La première consiste à utiliser une méthode des moments « améliorée » (c'est-à-dire d'ordre supérieur). La seconde est numérique et a nécessité l'écriture d'un programme de simulation permettant l'incorporation de tous les effets de milieu (potentiel de champ moyen et section efficace). Une attention toute particulière a été apportée à la mise en place des simulations afin de reproduire le plus fidèlement possible les conditions expérimentales.</p> <p>Les techniques expérimentales permettent également désormais la création de gaz polarisés. Nous présenterons donc dans ce travail une étude de ces gaz utilisant notre programme de simulation (mise en évidence des différents régimes de collision), puis une étude plus théorique ayant pour principal objectif d'établir le diagramme de phase encore méconnu de ces gaz particuliers, et enfin de proposer une méthode de calcul des effets de milieu, les techniques habituelles utilisées pour les gaz non polarisés n'étant plus valables.</p>				
MOTS-CLES : gaz de fermions froids, équation de Boltzmann, modes collectifs, BEC-BCS cross-over, gaz polarisés, phase FFLO				
Directeur de recherches : Dany Davesne				
Composition du jury : M. Ericson - X. Leyronas - C. Lobo - S. Chiacchiera - M. Urban			133 pages	