



**HAL**  
open science

# Contribution à la modélisation du champ électromagnétique dans les dispositifs basses fréquences par la méthode des moments

Rania Oubaid

► **To cite this version:**

Rania Oubaid. Contribution à la modélisation du champ électromagnétique dans les dispositifs basses fréquences par la méthode des moments. Electromagnétisme. Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse), 2014. Français. NNT: . tel-01096817v1

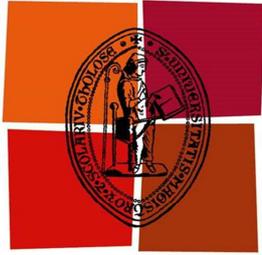
**HAL Id: tel-01096817**

**<https://theses.hal.science/tel-01096817v1>**

Submitted on 18 Dec 2014 (v1), last revised 27 Oct 2023 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université  
de Toulouse

# THÈSE

En vue de l'obtention du  
**DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE**

**Délivré par :**

Institut National Polytechnique de Toulouse (INP Toulouse)

**Discipline ou spécialité :**

Micro-Ondes Electromagnétisme et Optoélectronique (MEMO)

---

**Présentée et soutenue par :**

Mme. Rania OUBAID

le mardi 16 Dec 2014

**Titre :**

Contribution à la modélisation du champ électromagnétique dans les dispositifs  
basses fréquences par la méthode des moments

---

**Jury :**

CHADEBEC Olivier, CR, Rapporteur

TAKORABET Noureddine, Pr, Rapporteur

CLENET Stéphane, Pr, Examineur

JUNWU Tao, Pr, Examineur

LEFEVRE Yvan, CR, Directeur de thèse

POIRIER Jean-René, MDC, Co-directeur de thèse

---

**Ecole doctorale :**

Génie Electrique, Electronique et Télécommunications (GEET)

**Unité de recherche :**

LAPLACE/ENSEEIH

**Directeur(s) de Thèse :**

LEFEVRE Yvan

POIRIER Jean-René

**Rapporteurs :**

CHADEBEC Olivier

TAKORABET Noureddine



## Résumé

La modélisation numérique est devenue incontournable dans le monde de la conception industrielle et de la recherche scientifique. Les problèmes à résoudre étant de plus en plus complexes, il est nécessaire d'adopter une approche adaptée au problème traité.

Dans les domaines d'application de l'électromagnétisme basses fréquences, la méthode des éléments finis (MEF) est la méthode de référence. Actuellement, de plus en plus de dispositifs ouverts comportant de grands entrefers sont développés. Dans ce genre de problèmes, la MEF n'est pas optimale car elle nécessite de mailler un grand volume d'air pour obtenir une bonne précision.

Dans cette thèse nous étudions, au travers de deux applications (représentant respectivement un système ouvert et un système à grands entrefers) une méthode alternative qui ne souffre pas des limitations évoquées : la méthode des moments (MoM) de type intégrale volumique. En effet, cette méthode nécessite de mailler uniquement les milieux magnétiques. Le principe de cette méthode est d'abord de calculer l'aimantation induite dans le milieu linéaire ou non linéaire placé sous l'effet d'un champ extérieur. Pour cela, le milieu magnétique est discrétisé en éléments hexaédriques. Dans chaque élément est localisée une aimantation considérée comme uniforme. Ensuite, la connaissance de cette aimantation induite permet de déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace: interne, proche ou lointain.

Dans un premier temps, un code basé sur la MoM a été développé pour la première application. Il permet de calculer le champ magnétostatique proche ou lointain d'une antenne basse fréquence. Une méthode permettant de calculer l'énergie magnétostatique contenue dans tout l'espace a été également mise au point.

Dans deuxième temps, afin de pouvoir traiter une géométrie complexe, des modifications ont été intégrées au code afin de modéliser la deuxième application : le dispositif de test des propulseurs à effet Hall (PPS-Flex). Il s'agit de prendre en compte des symétries géométriques et physiques caractéristiques de ce dispositif. Les résultats montrent que la MoM permet de calculer le champ magnétique à l'intérieur de son canal et éventuellement au-delà.

Dans les deux exemples étudiés, la méthode des moments a donné des résultats satisfaisants lors de la comparaison avec la méthode des éléments finis 3D et avec les résultats de mesures. Ces résultats montrent des gains potentiellement significatifs sur le plan des temps de calculs.

A l'issue de cette thèse, nous disposons d'un outil de laboratoire permettant de modéliser le comportement du champ magnétostatique dans des systèmes ouverts et/ou à grands entrefers.

## **Mots-clés**

Méthode des moments volumique, magnétostatique, magnétisation, méthode d'intégrale, champ magnétique, énergie magnétostatique, potentiel scalaire, antenne basse fréquence.

# **Contribution to the modeling of the electromagnetic field in low frequency devices by the method of moments**

## **Abstract**

The numerical modeling has become essential in the world of industrial design and scientific research. The problems to be solved are increasingly complex making it necessary to adopt an appropriate approach for the problem addressed.

In the domains of application of low frequency electromagnetic, the finite element method (FEM) is the reference method. Currently, more and more devices having large open gaps are developed. In this kind of problems, the MEF is not optimal as it requires to mesh a large volume of air to get a good accuracy.

In this thesis we study, through two applications (an open system and a large gap system), an alternative method that does not suffer from the limitations discussed: the method of moments (MoM) of volume integral type. Indeed, this method requires to mesh only the magnetic media. The principle of this method is first to calculate the induced magnetization in the linear or nonlinear medium under the effect of an external field. To accomplish this, the magnetic medium is discretized into hexahedral elements. In each element, a uniform magnetization is localized. Then, the determination of this induced magnetization allows to compute the magnetic field at any point in the space: internal, near or far.

In the first step, a code based on the MoM has been developed for the first application. It allows to calculate the magnetostatic field near or far from a low-frequency antenna. A method to calculate the magnetostatic energy in the whole space was also developed.

Meanwhile, in the second step, in order to treat complex geometry, some modifications have been integrated into the code to model the second application: the test device of Hall effect thrusters (PPS-Flex). It consists in taking into account the physical characteristics and geometric symmetry of the device. The results show that MoM allows to calculate the magnetic field inside the channel and possibly beyond.

In both examples studied, the MoM has given satisfactory results when compared with the 3D finite element method and with the results of measurements. These results show potentially significant gains in the computation time.

At the end of this thesis, we have developed a laboratory tool allowing to model the behavior of the static magnetic field in open and/or wide-gap systems.

## **Keywords**

Method of volume moments, magnetostatic, magnetization, integral method, magnetic field, energy magnetostatic, scalar potential, low-frequency antenna.



# **Table des matières**

Table des matières .....	i
Introduction générale.....	- 2 -
Chapitre. I    ETAT DE L'ART .....	- 5 -
I.1)    Introduction .....	- 6 -
I.2)    Problématique.....	- 6 -
I.2.1)    Antenne basse fréquence .....	- 9 -
I.2.2)    PPS-Flex.....	- 10 -
I.3)    Méthode des éléments finis : solution usuelle.....	- 11 -
I.4)    Méthodes Alternatives .....	- 15 -
I.4.1)    Méthode des éléments finis de frontière.....	- 15 -
I.4.2)    Méthodes intégrales volumiques.....	- 15 -
I.4.3)    Méthodes hybrides éléments finis – équations intégrales .....	- 16 -
I.5)    Méthode des moments magnétostatiques : principe et historique .....	- 16 -
I.5.1)    Discrétisation de la structure magnétique .....	- 16 -
I.5.2)    Principe de la méthode des moments magnétiques .....	- 17 -
I.5.3)    Application de la méthode des moments.....	- 18 -
I.5.4)    Avantages de la méthode des moments par rapport aux éléments finis.....	- 18 -
I.5.5)    Inconvénients de la méthode des moments .....	- 19 -
I.5.6)    Méthodes de compression de matrice .....	- 20 -
I.6)    Conclusion .....	- 21 -
Chapitre. II    FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE EN VUE DE LA MODELISATION NUMERIQUE.....	- 22 -
II.1)    Introduction .....	- 23 -
II.2)    Domaine d'étude.....	- 23 -

II.3)	Equations du champ magnétostatique .....	- 24 -
II.4)	Formulation en potentiel dans les problèmes magnétostatiques .....	- 26 -
II.4.1)	Formulation en potentiel vecteur magnétique .....	- 26 -
II.4.1.1)	Approche classique .....	- 26 -
II.4.1.2)	Approche par la méthode des courants équivalents .....	- 27 -
II.4.2)	Formulation en potentiel scalaire magnétique .....	- 32 -
II.4.2.1)	Approche classique .....	- 32 -
II.4.2.2)	Approche par la méthode des charges équivalentes .....	- 33 -
II.5)	Conclusion .....	- 37 -
Chapitre. III    FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS -		
38 -		
III.1)	Introduction .....	- 39 -
III.2)	Discrétisation du milieu magnétique .....	- 39 -
III.3)	Champ d'excitation magnétique au centre d'une maille.....	- 40 -
III.4)	Décomposition sur une base orthonormée .....	- 41 -
III.5)	Intégrale volumique sous forme matricielle.....	- 41 -
III.6)	Intégrale surfacique sous forme matricielle .....	- 49 -
III.7)	Forme générale de la matrice .....	- 54 -
III.8)	Identification de l'aimantation de matériaux ferromagnétiques linéaires.....	- 57 -
III.8.1)	Matériaux ferromagnétiques linéaires .....	- 57 -
III.8.2)	Matériaux ferromagnétiques non linéaires .....	- 57 -
III.9)	Calcul du champ magnétique.....	- 60 -
III.10)	Calcul de l'énergie magnétostatique.....	- 60 -
III.11)	Conclusion .....	- 62 -
Chapitre. IV    MODELISATION D'UNE ANTENNE BASSE FREQUENCE.....		- 63 -
IV.1)	Introduction.....	- 64 -
IV.2)	Antenne basse fréquence (réel) .....	- 64 -

IV.3)	Composants magnétiques pour la modélisation.....	- 65 -
IV.4)	Calcul du champ source par Biot et Savart.....	- 66 -
IV.5)	Analyse par la méthode des éléments finis.....	- 69 -
IV.6)	Etudes paramétriques.....	- 70 -
IV.6.1)	Influence du nombre de points d'intégration de Gauss.....	- 70 -
IV.6.1.1)	Calcul de termes diagonaux (partie singulière).....	- 70 -
IV.6.1.2)	Calcul des termes hors diagonaux.....	- 71 -
IV.6.2)	Influence du nombre de mailles.....	- 76 -
IV.6.2.1)	Calcul du champ à l'intérieur du noyau.....	- 76 -
IV.6.2.2)	Calcul du champ à l'extérieur du noyau.....	- 80 -
IV.6.3)	Influence de la perméabilité.....	- 82 -
IV.7)	Résultats numériques.....	- 84 -
IV.8)	Calcul de l'énergie magnétostatique.....	- 86 -
IV.9)	Conclusion.....	- 94 -
Chapitre. V	MODELISATION DU PPS-FLEX.....	- 95 -
V.1)	Introduction.....	- 96 -
V.2)	PPS-Flex.....	- 96 -
V.3)	Symétries.....	- 97 -
V.3.1)	Définitions générales des grandeurs polaires et axiales.....	- 97 -
V.3.2)	Propriétés de symétrie.....	- 97 -
V.3.3)	Comportement du champ magnétique et de la densité du courant dans les opérations de symétrie.....	- 99 -
V.3.4)	Application des propriétés de symétrie dans le PPS-Flex.....	- 100 -
V.3.5)	Calcul du champ source par Biot et Savart.....	- 105 -
V.3.6)	Illustration de l'intérêt de prendre en compte les symétries.....	- 107 -
V.4)	Résultats numériques.....	- 110 -
V.4.1)	Vérification de la prise en compte des symétries.....	- 113 -

V.4.2) Comparaison avec la méthode des éléments finis .....	- 114 -
V.4.3) Comparaison avec la mesure .....	- 115 -
V.4.4) Détail des temps de calculs .....	- 118 -
V.5) Conclusion .....	- 121 -
Conclusion générale .....	- 124 -
Annexes .....	- 128 -
Bibliographies.....	- 150 -

# *INTRODUCTION GÉNÉRALE*

## Introduction générale

La modélisation numérique est devenue incontournable dans le monde de la conception industrielle et de la recherche scientifique. Les problèmes à résoudre sont de plus en plus complexes. Pour y répondre efficacement, il est nécessaire d'adopter une approche adaptée au problème traité.

La littérature propose différentes méthodes fondées sur des approches numériques pour évaluer le comportement électromagnétique de dispositifs complexes qui peuvent être employés pour modéliser les champs électromagnétiques : la méthode des éléments finis, la méthode des volumes finis, les méthodes des intégrales de frontière, la méthode des moments magnétostatiques,...

Parmi ces méthodes numériques, la méthode des éléments finis est celle qui est aujourd'hui la plus employée pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques en basses fréquences. En effet, cette méthode permet de modéliser des géométries ayant des formes complexes constituées de matériaux hétérogènes et un comportement linéaire ou non linéaire.

Actuellement, il y a de plus en plus de dispositifs électromagnétiques basses fréquences ouvrant aux problèmes magnétostatiques où les milieux amagnétiques sont prépondérants par rapport aux milieux magnétiques : antennes basses fréquences, transformateurs à grand entrefer,.... etc. Ce genre de problèmes nécessite de mailler un grand volume.

Une des solutions alternatives est la méthode des moments magnétostatiques. Cette méthode ne nécessite pas de mailler l'espace libre et peut facilement prendre en compte le comportement linéaire et non linéaire des matériaux magnétiques. Aujourd'hui, la méthode des moments peut être une alternative intéressante à la méthode des éléments finis classique pour calculer le champ lointain produit par un circuit magnétique avec une géométrie complexe notamment dans le cas non linéaire.

Le travail présenté dans cette thèse est réalisée en collaboration entre le groupe GRE (Groupe de Recherche en Electromagnétisme) et le groupe GREM3 (Groupe de Recherche en Electrodynamique) du Laboratoire LAPLACE (Laboratoire Plasma et Conversion d'Energie - UMR5213) de l'Université de Toulouse. Il est financé par l'université d'Alep en Syrie. Son objectif consiste à mettre en œuvre un code, basé sur la méthode des moments, permettant de prédire le comportement du champ magnétostatique dans des dispositifs à grands entrefers de forme simple ou complexe.

De nombreux développements au cours de ce travail (symétrie, géométries complexes, matériaux linéaires, matériaux non linéaires, énergie) ont abouti à un code de calcul, capable de simuler des structures de formes complexes et arbitraires, avec des temps de calcul potentiellement courts par rapport à la méthode des éléments finis.

Ce mémoire est organisé en quatre chapitres :

Le premier chapitre décrit la problématique magnétostatique. Il s'agit de problèmes ouverts ou à grand entrefer pour lesquels les milieux amagnétiques sont prépondérants par rapport les milieux magnétiques. Deux exemples représentant ce genre de problèmes sont étudiés: le calcul du champ lointain produit par une antenne basse fréquence et le calcul du champ magnétique produit par un dispositif spécifique dédié à l'étude expérimentale des propulseurs à effet Hall (PPS-Flex). Ensuite, la deuxième partie présente les avantages de la méthode des éléments finis classique qui est la plus utilisée dans le domaine magnétostatique ainsi que ses inconvénients pour résoudre ce type de problèmes. Une des méthodes alternatives les mieux adaptées à ces problèmes et proposées dans ce chapitre est la méthode des moments de type volumique pour modéliser le champ magnétique à l'extérieur des dispositifs (problème ouvert). La dernière partie de ce chapitre est consacrée à la description de la méthode des moments. Elle présente son principe et ses applications dans le domaine basses fréquences. Elle présente également les propriétés de cette méthode par rapport à la méthode des éléments finis justifiant ainsi notre choix. A la fin de cette partie, les inconvénients et les solutions proposées dans la littérature pour les surmonter sont exposés.

Au niveau du second chapitre, le problème magnétostatique est défini. Il est composé d'un ou de plusieurs matériaux ferromagnétiques sous l'effet d'un champ extérieur (bobines alimentées par des courants constants). Ensuite, les équations du champ magnétostatique sont développées ainsi que les deux principales formulations de la méthode d'intégrale volumique. Dans l'une de ces formulations, la formulation en potentiel scalaire magnétique qui dépend de l'approche par la méthode des charges équivalentes, le champ d'excitation magnétique est décomposé en deux champs : le champ d'excitation magnétique dû aux courants dans les bobines et le champ d'excitation magnétique dû aux matériaux. En fin de ce chapitre, le champ magnétique total est exprimé en fonction de l'aimantation qui est calculée par la méthode des moments volumiques.

Le troisième chapitre détaille la méthode des moments magnétiques. La première partie est dédiée au calcul de l'aimantation induite dans le milieu magnétique par cette méthode. Pour cet objectif, le milieu magnétique est discrétisé en éléments « hexaédriques », à l'intérieur de chacun desquels est localisée une aimantation induite considérée comme une source uniforme. Chacune des sources interagit avec elle-même et aussi avec toutes les autres. Puis, en utilisant le principe de la superposition, une matrice nommée « matrice d'interaction globale » est obtenue. En prenant en compte l'ensemble des différentes sources du champ (bobines et matériaux), un système linéaire d'équation algébrique est parvenu. Au niveau de la deuxième partie, des méthodes permettant de résoudre ce système seront décrites en tenant compte de la nature des matériaux utilisés (linéaires ou non linéaires). La résolution du système permet alors de déterminer les composantes de l'aimantation induite dans chaque hexaèdre. Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, après avoir calculé l'aimantation par la méthode des moments, les relations qui permettent de calculer le champ magnétique et l'énergie magnétostatique à partir de cette aimantation sont présentées.

Dans le quatrième chapitre, la méthode des moments est appliquée à une antenne basse fréquence comme un exemple pour mettre au point le code du calcul. D'abord, un modèle est

présenté mettant en jeu une pièce magnétique et une bobine de forme simple. Le matériau est maillé par des éléments hexaédriques réguliers simples. Ensuite, les facteurs affectant la méthode des moments sont discutés. Nous notons par exemple, le nombre d'éléments dans le noyau magnétique, les valeurs de la perméabilité et les facteurs concernant le calcul des coefficients des matrices élémentaires par des intégrales volumiques (points d'intégration,...). Puis, les résultats sont comparés à ceux obtenus à partir d'un code de calcul par éléments finis 3D et à partir de la solution analytique. A la fin de ce chapitre, le calcul de l'énergie magnéto-statique de l'antenne basse fréquence est fait par la méthode des moments et les résultats sont comparés par rapport aux résultats de la méthode des éléments finis.

Le dernier chapitre expose une nouvelle application de la méthode des moments : le PPS-Flex qui représente un système à grand entrefer avec des géométries assez complexes. Un code, basé sur la méthode des moments, a été développé afin de calculer les intégrales dans une géométrie complexe et, également, de prendre en compte des symétries géométriques et physiques du circuit magnétique pour simplifier le domaine d'étude afin de réaliser des gains notables en termes de temps de calcul et de mémoire. Par conséquent, un huitième de la structure est étudié. Ce chapitre commence par l'illustration de la symétrie dans la méthode des moments. Ensuite, les résultats concernant le calcul du champ magnétique à l'intérieur du canal du PPS-Flex sont exposés. A la fin de ce chapitre, les résultats sont comparés d'une part avec la méthode des éléments finis et d'une autre part avec la mesure.

## Chapitre . I **ETAT DE L'ART**

### **I.1) Introduction**

Dans ce chapitre introductif, la première partie expose la problématique magnétostatique. Il s'agit des problèmes ouverts ou à grands entrefers pour lesquels les milieux amagnétiques sont prépondérants par rapport aux les milieux magnétiques. Pour illustrer ces problèmes, nous présentons deux exemples : une antenne basse fréquence et le PPS-Flex.

Ensuite, la deuxième partie présente les avantages de la méthode des éléments finis classique qui est la plus utilisée dans le domaine magnétostatique ainsi que ses inconvénients pour résoudre ce genre de problèmes.

La troisième partie propose un aperçu global des méthodes alternatives les mieux adaptées à ces problèmes telles que la méthode des éléments de frontière, la méthode hybride élément finis-intégrale de frontière et la méthode des moments de type volumique. Notre choix s'est porté sur la dernière méthode pour modéliser le champ magnétique à l'extérieur des dispositifs (problème ouvert).

Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à la méthode des moments. Elle présente son principe et ses applications dans le domaine des basses fréquences. Elle présente également les propriétés de cette méthode par rapport à la méthode des éléments finis justifiant ainsi notre choix. A la fin de cette partie, les inconvénients et les solutions proposés dans la littérature pour les surmonter sont exposés.

### **I.2) Problématique**

Pour illustrer les problèmes que nous voulons résoudre, nous avons pris deux exemples. Ce sont deux exemples qui ont des applications industrielles.

- Une antenne basse fréquence: cet exemple met en jeu une pièce magnétique et une bobine de forme relativement simple et nous a permis de mettre au point le code de calcul.
- Le circuit magnétique du PPS-Flex qui a été mis au point au Laplace. Nous avons pris cet exemple car il est vraiment représentatif d'un système à grand entrefer.

Avant de les introduire, nous allons illustrer le comportement de ces matériaux ferromagnétiques lors qu'ils sont soumis à l'influence d'un champ magnétique produit par des sources externes.

#### *Aimantation du matériau ferromagnétique*

Les matériaux ferromagnétiques se divisent spontanément en domaines, appelés domaine de Weiss, portant tous une aimantation constante et majoritairement parallèle. Ces domaines sont séparés par les parois de Bloch, au sein desquelles l'orientation des moments varie progressivement d'un domaine à l'autre. Le corps est localement aimanté à saturation.

Pourtant, la grandeur  $M$  telle que nous la connaissons est une grandeur continûment variable. Il s'agit, en fait, d'une grandeur statistique à l'échelle macroscopique [1].

Pour illustrer le phénomène d'aimantation d'un matériau ferromagnétique. Supposons que nous disposions d'un matériau parfaitement désaimanté, ce qui revient à dire que ses domaines de Weiss ne présentent aucune direction privilégiée. Macroscopiquement, leurs effets se compensent et s'annulent comme le montre la figure (Fig. I.1) [2] [3]. Si nous appliquons à cet échantillon un champ croissant, les domaines vont suivre des comportements distincts suivant trois phases comme le montre la figure (Fig. I.1). La première phase est un déplacement réversible des parois. Les parois vont se déformer pour privilégier la direction du champ magnétique interne  $H$ . Ce déplacement est qualifié de réversible car si nous annulons le champ inducteur, le matériau revient dans son comportement initial (phase 1). Si le champ augmente de façon conséquente, les parois vont subir des déplacements irréversibles. L'aimantation va toujours croître mais rencontrer des minima locaux d'énergie (phase 2). Si le champ est annulé, l'aimantation va se stabiliser dans un de ces minima. Si nous appliquons de nouveau une faible augmentation, les domaines de Weiss vont se redéformer réversiblement puis acquérir une nouvelle configuration irréversible. Enfin, pour des champs très forts, les parois disparaissent, une augmentation du champ n'a plus aucun effet sur l'aimantation. C'est ce qu'on appelle communément la saturation (phase 3).

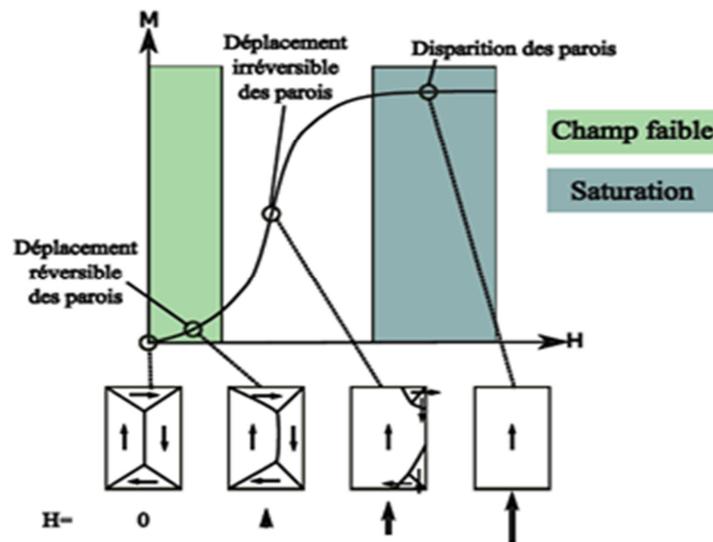


Fig. I.1 : Les phases du processus d'aimantation

Les deux grandeurs  $H$  et  $M$  permettent de connaître l'état magnétique d'un matériau. Pourtant, d'après ce qui précède, la connaissance de ces deux grandeurs n'est pas suffisante, il est également nécessaire de connaître la façon dont l'échantillon a atteint cet état. Seul un passage de l'échantillon par son état saturé peut permettre d'« effacer » son passé magnétique. Les matériaux ferromagnétiques gardent donc la mémoire de tous leurs états d'aimantation.

## § 1 : ETAT DE L'ART

Ce phénomène a été appelé par J-A Ewing «hystérésis ». La fonction  $M(H)$  est une fonction très complexe, impossible à décrire analytiquement. Il existe des modèles mathématiques, donnant des résultats satisfaisants, mais ils ne sont que des approximations.

Il est physiquement possible de trouver tout couple  $(H, M)$  à l'intérieur du cycle d'hystérésis limite. Celui-ci est obtenu par application quasi-statique d'un champ variant entre  $+H_{max}$  et  $-H_{max}$  permettant d'atteindre l'aimantation à saturation (Fig. I.2).

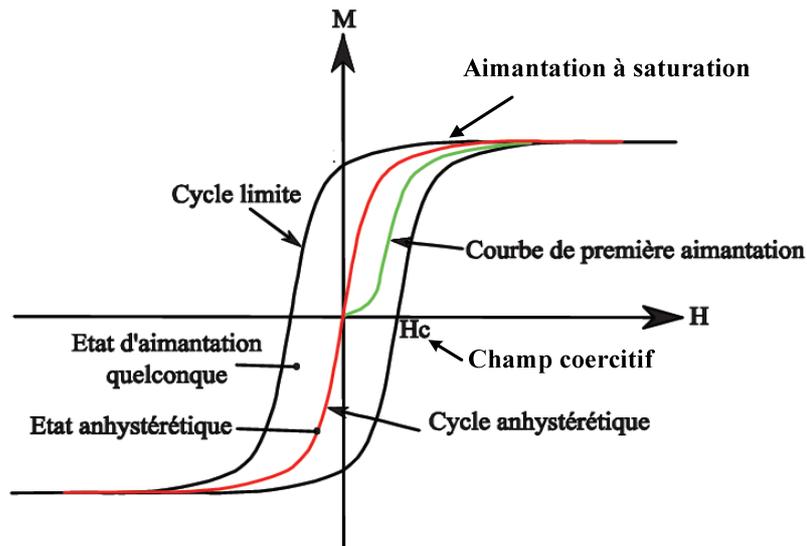


Fig. I.2 : Cycles de l'aimantation en fonction du champ magnétique

En l'absence de phénomène d'hystérésis, donc dans un matériau idéal sans impuretés où le déplacement des parois est réversible, la courbe est anhystérétique comme le montre la figure (Fig. I.3) (la courbe rouge).

Si l'état initial du matériau est désaimanté, le couple  $M(H)$  va décrire la courbe de première aimantation. Dans la limite des champs faibles, l'aimantation varie de manière réversible et le couple  $M(H)$  se situe donc dans une région où cette courbe peut être assimilée à une droite.  $M$  et  $H$  sont alors directement proportionnels suivant la loi :

$$M = \chi H \quad (I.1)$$

où  $\chi$  est la susceptibilité magnétique réversible. Elle est donnée par la pente à l'origine de la courbe de première aimantation (voir (Fig. I.3)) et liée à la perméabilité par une relation :

$$\chi = (\mu - 1) \quad (I.2)$$

En conséquence, il y a plusieurs méthodes pour calculer le champ magnétique à partir de connaître un de ces grandeurs  $H$  et  $M$ , nous allons discuter ces méthodes en détail plus tard.

### I.2.1) Antenne basse fréquence

Les communications électromagnétiques à basses fréquences sont de plus en plus utilisées dans l'identification par radiofréquence (RFID). Dans les systèmes de surveillance de la pression des pneumatiques, une communication RFID est utilisée pour mettre en marche les capteurs de la pression et de la température. Les informations sont alors transmises en temps réel au conducteur comme le montre la figure (Fig. I.3) [4]. Cette communication sans fil (RFID) est composée d'un émetteur et d'un récepteur, le composant principal de ce dernier étant une antenne basse fréquence (ABF) ou low frequency (LFA) en anglais qui fonctionne à 125 kHz. Cette antenne est généralement constituée d'une bobine multi tours enroulée autour d'un noyau de ferrite. Un des principaux défis des fabricants est d'obtenir une puissance très faible. Une des solutions pour résoudre cette difficulté est d'avoir un modèle qui peut rapidement prédire les caractéristiques du champ magnétique de l'ABF [5] [6].

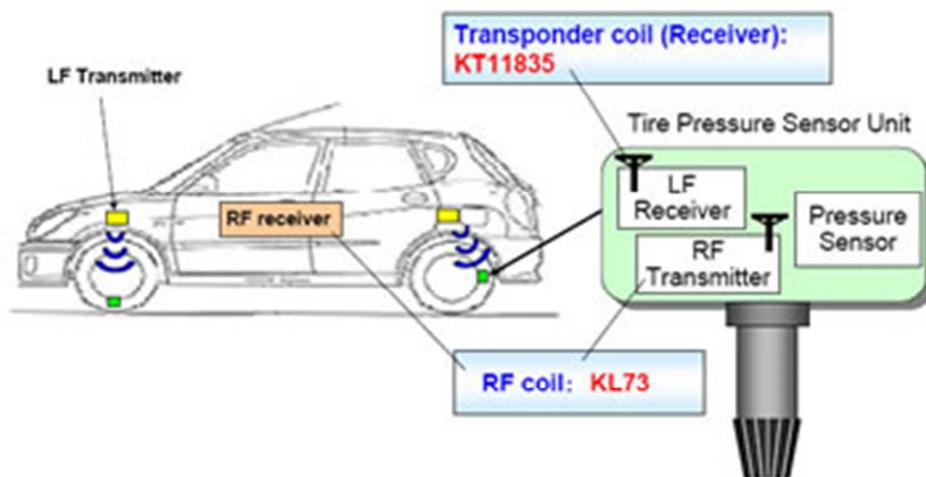


Fig. I.3 : Système de surveillance de la pression des pneus

Dans [7] est présenté une première étape vers cet objectif avec la simulation d'une antenne du noyau du barre cylindrique de ferrite. En utilisant la symétrie axiale, une procédure numérique 2D est développée afin de calculer le champ magnétique à courte et grande distance. Un autre modèle est présenté dans [8], il est composé d'une bobine enroulée sur une partie du noyau et le noyau aimanté est remplacé par une distribution d'aimantation induite  $\vec{M}$ . En supposant que l'aimantation est parallèle à l'axe du noyau de la ferrite cylindrique et uniforme le long de sa section, la barre est réduite à une ligne (problème 1D). Il a été constaté que la variation de  $\vec{M}$  dépend de celle du champ d'excitation. Il est alors nécessaire d'augmenter le nombre de points du maillage pour prendre en compte les variations de  $\vec{M}$ .

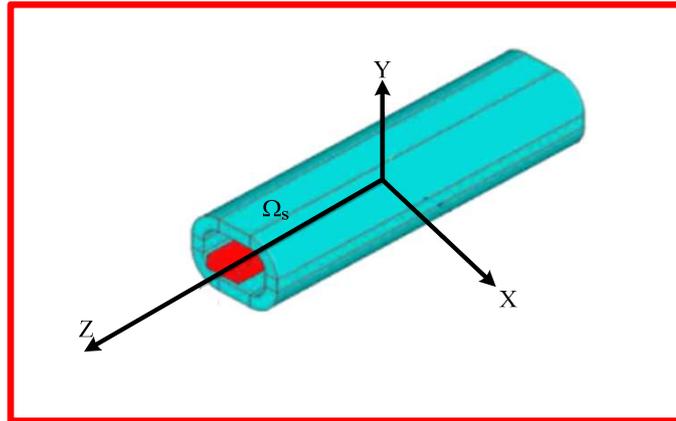


Fig. I.4 : *Modèle antenne basse fréquence. Le noyau en couleur rouge, la bobine en couleur bleu*

Dans ce travail, nous présentons un modèle qui est composé d'une bobine enroulée à peu près sur tout le noyau comme le montre la figure (Fig. I.4). Dans notre dispositif, il n'y a pas de symétrie axiale, et une approche 3D est donc nécessaire pour prendre en compte aussi les variations rapides du champ extérieur. Nous allons montrer que l'aimantation ne peut pas être prise parallèle à un axe, ni uniforme dans une section du noyau. Il ne reste qu'à choisir une méthode efficace et simple pour prédire rapidement l'effet des paramètres de la bobine et le noyau sur le champ magnétique autour de l'antenne.

### I.2.2) PPS-Flex

Un satellite orbite en général entre 450 km et 36000 km d'altitude. Il se déplace naturellement sous l'effet de la gravitation. Toutefois, des forces ou couples perturbateurs peuvent l'écartier de son orbite et agissent sur son attitude (orientation). C'est pourquoi, le système propulsif est essentiel pour compenser ces perturbations. D'autres manœuvres orbitales tels que le passage d'une orbite à une autre (transfert d'orbite) ou la désorbitation pour un satellite en fin de vie opérationnelle sont également assurées par le système propulsif.

Le propulseur à Effet Hall (dit HET pour « Hall Effect Thruster ») est un moteur plasmique sans grille parmi la famille de propulseurs électriques. Sa relativement faible poussée (100 mN) et sa forte impulsion spécifique (vitesse des ions éjectés de 20 km/s) le rendent bien adapté aux tâches de maintien sur orbite des satellites ou de petits transferts d'orbite.

[9] présente un outil efficace pour expérimenter de nouvelles configurations du champ magnétique très différentes de celles existantes dans un HET classique [10]. Le prototype final a été construite en tenant compte des spécifications qui ont été établis à partir d'une grand quantité de données recueillies auprès HET existantes [10]. Un quart du circuit magnétique du PPS-Flex apparaît sur la figure (Fig. I.5). Le champ magnétique est un des paramètres importants conditionnant le fonctionnement de propulseur, il permet de confiner les électrons d'un plasma formé entre deux cylindres coaxiaux diélectriques. Le champ magnétique est obtenu par 20 bobines et canalisé par un circuit magnétique.

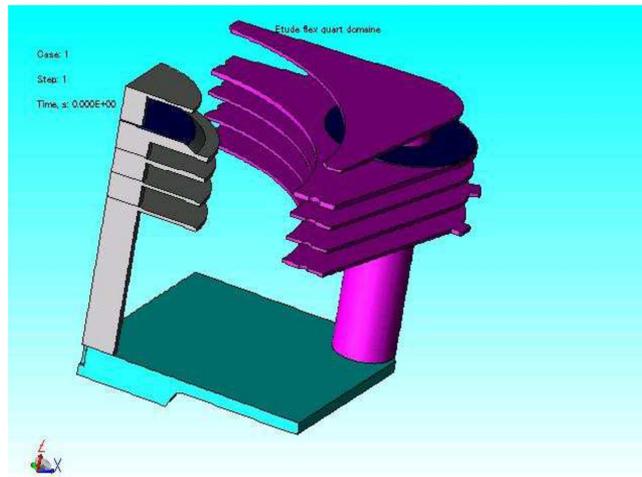


Fig. I.5 : *Un quatrième du circuit magnétique de la PPS-FLEX*

Les études réalisées dans [11] poussent à envisager un problème au niveau de la retranscription en un modèle 2D d'une structure non parfaitement axisymétrique au moyen d'hypothèses simplificatrices. En effet, le circuit magnétique 3D présente un effet non pris en compte dans la modélisation 2D actuelle. Cependant, une simulation 3D permet de vérifier la présence d'éventuels phénomènes non pris en compte et de valider les résultats obtenus.

Dans un premier temps, un modèle 3D a été utilisé par la méthode des éléments finis MEF. Comme le PPS-Flex est constitué des plaques ferromagnétiques ayant des dimensions géométriques très hétérogènes (à épaisseur faible par rapport à la largeur et/ou à la longueur par exemple (voir (Fig. I.5))), très difficile à mailler. Aussi, un nombre important d'éléments sera utilisé pour la discrétisation du volume de l'air environnant, car certains entrefers entre les pièces ferromagnétiques sont très grands (voir (Fig. I.5)).

L'étude dans ces travaux de thèse porte sur un modèle 3D qui est extrêmement couteux en temps de calcul, il est donc nécessaire de trouver une méthode adaptée pour calculer le champ magnétique à n'importe quelle distance de ces dispositifs avec une certaine précision.

### **I.3) Méthode des éléments finis : solution usuelle**

La méthode des éléments finis (MEF) est la méthode la plus connue et la plus utilisée dans le domaine de la simulation numérique. En électromagnétisme, cette méthode est très employée dans le domaine des basses fréquences. Elle est basée sur la formulation variationnelle des équations de Maxwell dans laquelle les champs sont discrétisés dans tout l'espace.

Le principe de la méthode des éléments finis consiste à restreindre la détermination de ce champ à un nombre fini de points du milieu, appelés « nœuds » comme le montre la figure (Fig. I.6) [12].

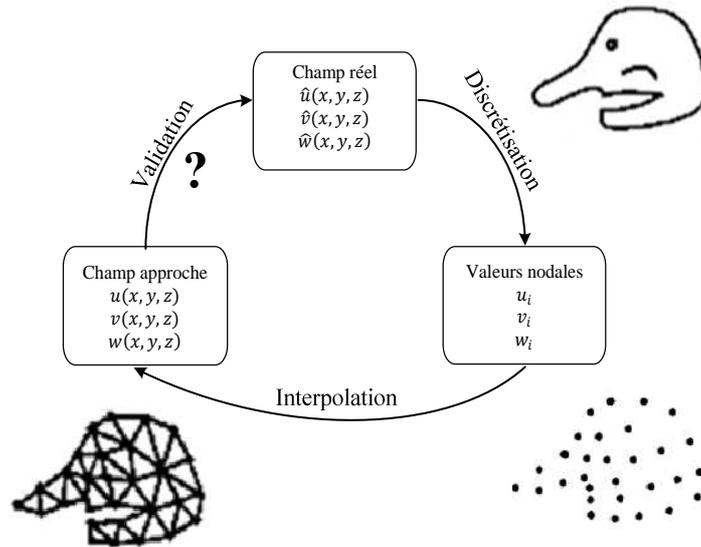


Fig. I.6 : De la réalité au maillage en passant par la discrétisation

Le processus de passage du champ continu aux valeurs nodales est appelé « discrétisation ». La discrétisation du domaine de calcul se fait grâce à des éléments géométriques adaptés : éléments linéiques (à une dimension) [13], éléments plans (2D) [14] ou éléments volumiques (3D) comme les montrent respectivement les figures (Fig. I.7), (Fig. I.8) et (Fig. I.9). La résolution du système est ainsi effectuée dans le but de déterminer les valeurs du champ en ces nœuds, c'est ce qu'on appelle « valeurs nodales ». Pour l'instant, le champ reste inconnu dans le domaine entre les nœuds. La solution consiste naturellement à définir le champ approché (et continu) par interpolation des valeurs nodales. Pour cela, nous utilisons les fonctions de forme pour l'interpolation à l'intérieur de chaque maille joignant un groupe de nœuds. La structure finale est ainsi reconstituée en considérant toutes les mailles du système.

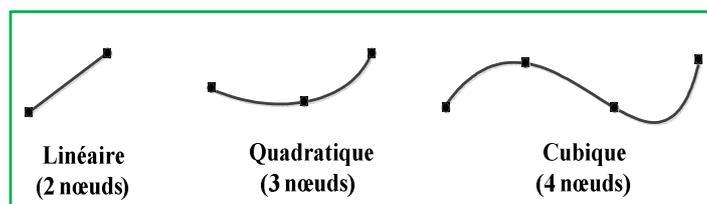


Fig. I.7 : Eléments linéiques

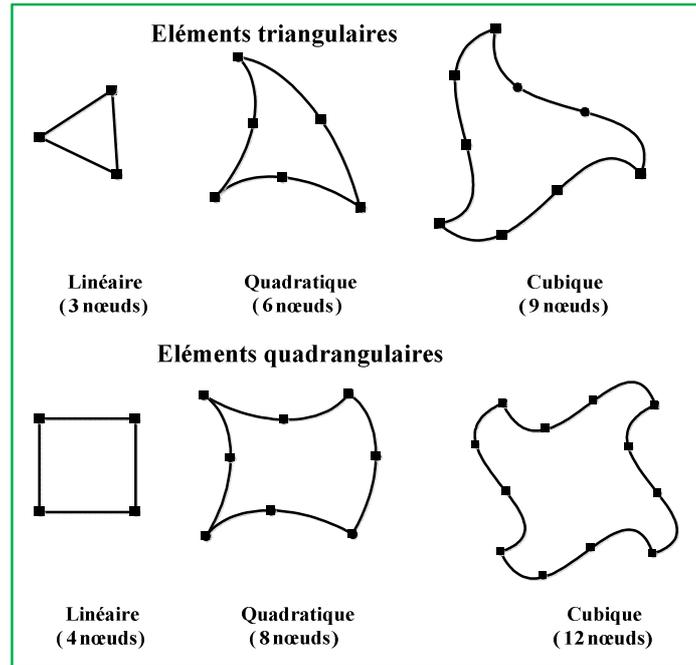


Fig. I.8 : *Eléments plans*

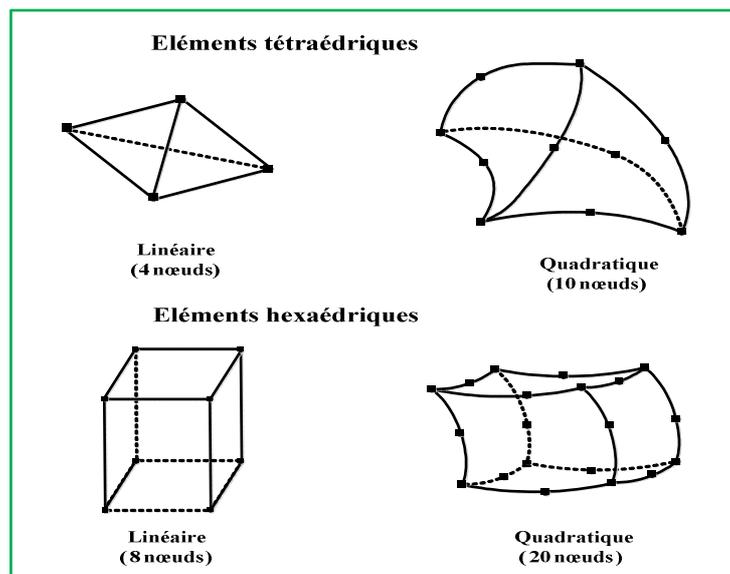


Fig. I.9 : *Eléments volumiques*

Cette méthode était la seule permettant de traiter des problèmes possédant plusieurs millions de degrés de liberté avec une mémoire informatique admissible, elle conduit à des matrices creuses.

De point de vue théorique, en utilisant la méthode des éléments finis MEF dans les problèmes non bornés, le maillage de l'espace environnant devrait s'étendre à l'infini pour une solution exacte. Ceci n'étant pas possible, il est donc nécessaire de borner le domaine

## § 1 : ETAT DE L'ART

d'étude par une frontière artificielle  $\Sigma$  où  $\Sigma = \Sigma_H \cup \Sigma_B$ . Comme le montre la figure (Fig. I.10), il faut imposer des conditions aux limites au bord du domaine borné obtenu. Ces conditions aux limites s'énoncent, pour les champs magnétiques, sous les formes suivantes :

$$n \times H|_{\Sigma_H} = 0 \quad (I.3)$$

$$n \cdot B|_{\Sigma_B} = 0 \quad (I.4)$$

Comme nous allons le voir dans le deuxième chapitre, les équations de Maxwell sont rarement résolues en utilisant comme inconnues les champs magnétiques  $B$  et  $H$ . Nous avons généralement recours à la notion de potentiel qui permet de rendre implicite certaines propriétés des champs. Dans ce cas, les conditions aux limites imposent que ces potentiels s'annulent à l'infini.

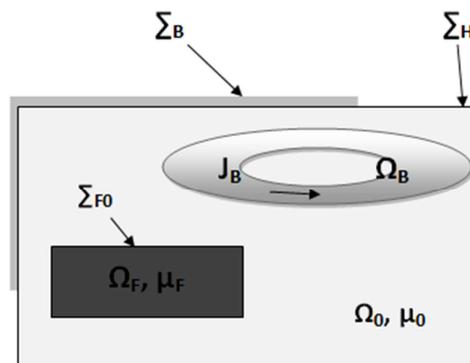


Fig. I.10 : *Domaine d'étude et conditions aux limites*

Nous avons donc deux difficultés dans le problème ouvert qui influent sur la précision numérique de la solution. D'une part ou placer la frontière artificielle qui tronque le domaine et d'autre part comment modéliser les conditions aux limites

Nous devons garder alors à l'esprit que la méthode des éléments finis est généralement utilisée pour calculer des inductions magnétiques à l'intérieur des dispositifs tels que les moteurs [15], [16], les générateurs électriques ou les transformateurs. Dans ces dispositifs, les milieux magnétiques sont prépondérants et les entrefers sont relativement petits.

Malgré la faible grandeur des entrefers dans certains problèmes de transformateur ou d'inductance, nous sommes parfois amenés à modéliser le champ magnétique dans l'air environnant ces dispositifs. Actuellement, il y a de plus en plus de dispositifs électromagnétiques basses fréquences ouvrant aux problèmes magnétostatiques où les milieux amagnétiques sont prépondérants aux milieux magnétiques : antennes basses fréquences, transformateurs à grand entrefer,.... etc. Pour ce genre de problèmes, la méthode des éléments finis est de moins en moins efficace car elle nécessite de mailler un grand volume d'air [17].

À la vue de ces difficultés, il est nécessaire d'envisager des méthodes alternatives. Ces méthodes sont décrites dans la section suivante.

## **I.4) Méthodes Alternatives**

Une solution alternative consiste à utiliser des formulations intégrales bien connues soit de type intégrale de frontière ou de type intégrale volumique [18], [19], [20], [21]. Leur avantage essentiel réside évidemment dans l'absence de maillage de l'air environnant les dispositifs. Il est également possible de les coupler avec les éléments finis afin de concilier les points forts de chaque méthode [22] [23] [24]. Dans cette section, nous allons présenter ces méthodes.

### **I.4.1) Méthode des éléments finis de frontière**

La méthode des éléments finis de frontière (en anglais "BEM : Boundary Element Method") permet de résoudre un système d'équations aux dérivées partielles dans un domaine infini en ne maillant que la frontière du domaine à distance finie. Nous n'avons donc pas besoin de mailler l'air environnant les dispositifs. Ceci représente un gain considérable en nombre de variables à calculer [25] [26].

Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il est possible de remplacer les matériaux magnétiques par un milieu amagnétique auquel on ajoute des sources magnétiques induites appelées distributions de charges équivalentes. Dans le cas linéaire (la perméabilité du matériau est constante) ces matériaux peuvent être remplacés par des charges surfaciques [25]. Ainsi la méthode des éléments finis de frontière devient plus efficace que la méthode des éléments finis car la taille des systèmes est plus petite et le temps de calcul est relativement réduit. Les inconvénients de cette méthode dus à l'utilisation des méthodes intégrales sont liés principalement au calcul d'intégrales singulières nécessitant un traitement particulier et un système d'équations plein et non symétrique. Ainsi lorsque l'aire de la surface devient importante, l'occupation mémoire du système croît plus rapidement que celle des éléments qui conduisent à une matrice creuse [25].

Par ailleurs ces méthodes ne sont pas adaptées pour traiter des matériaux non linéaires puisque le domaine qui n'est pas maillé doit être homogène. Les matériaux doivent être remplacés par des charges surfaciques et volumiques [27] et l'on se ramène alors à une formulation de type volumique dans la formulation intégrale ce qui implique un effort supplémentaire de discrétisation du volume.

Ainsi, l'avantage majeur de la formulation intégrale de frontière, (discrétisation de la surface de l'objet seulement) est alors réduit. En outre, le temps de calcul nécessaire pourrait être prohibitif à cause de l'augmentation de l'occupation de la mémoire [27] [28].

### **I.4.2) Méthodes intégrales volumiques**

Cette méthode ne nécessite pas de mailler l'espace libre et peut facilement prendre en compte le comportement non linéaire des matériaux magnétiques. Ses avantages ne sont pas limités à des problèmes non linéaires. Aujourd'hui, la méthode des moments peut être une alternative intéressante à la méthode des éléments finis classique pour calculer le champ lointain produit par un circuit magnétique avec une géométrie complexe dans le cas non

linéaire. Comme notre choix s'est porté sur cette méthode, nous lui consacrons la section suivante.

### **I.4.3) Méthodes hybrides éléments finis – équations intégrales**

Dans la littérature, l'utilisation des méthodes intégrales de frontière se limitent donc à des problèmes linéaires, Nous avons également constaté qu'une difficulté liée à l'utilisation de la méthode des éléments finis, lorsque la structure étudiée est en interaction avec un domaine infini [29]. Pour traiter convenablement les problèmes comportant des frontières à l'infini, l'utilisation d'éléments discrets " infinis " est maintenant souvent délaissée au profit de la méthode des éléments de frontière. La mise en œuvre du couplage entre la méthode des éléments finis et la méthode des éléments de frontière apparaît donc comme particulièrement intéressante [22] [23] [24], car elle permet de traiter les problèmes non linéaires par la méthode des éléments finis tout en permettant de représenter les domaines infinis à l'aide de la méthode des éléments de frontière.

## **I.5) Méthode des moments magnétostatiques : principe et historique**

### **I.5.1) Discrétisation de la structure magnétique**

Les structures que nous allons étudier dans cette thèse seront composées de matériaux ferromagnétiques. Le matériau ferromagnétique subit une aimantation  $\vec{M}$  lorsque qu'il est soumis à un champ magnétique extérieur. La méthode des moments magnétiques est une formulation qui consiste à calculer cette aimantation  $\vec{M}$ , puis à en déduire le champ dans n'importe quel point de l'espace.

La modélisation par la méthode des moments implique le découpage de la structure en sous-domaines appelées " éléments ". Ils peuvent être volumiques (hexaèdre ou tétraèdre [30]) et dans ce cas chaque élément possède trois inconnues. Donc, les formulations spécifiées à cette méthode sont de type intégrale volumique. Pour certaines géométries particulières, la direction de l'aimantation dans le dispositif peut être connue. Ainsi la formulation volumique de la méthode MoM peut être simplifiée en transformant l'intégrale volumique en une intégrale surfacique ou intégrale linéaire [30] [31]. Le nombre d'inconnues est alors considérablement réduit.

En conséquence, il faut garder à l'esprit le fait que le nombre d'inconnues est relatif à l'élément utilisé. A titre d'exemple : un élément de barre possède une inconnue [8], alors qu'un élément surfacique a deux inconnues [32] et un élément de volume en a trois [30].

La technique de la méthode des moments MoM, appliquée à des problèmes dans la théorie électromagnétique, a été présentée par Harrington en 1967 [33] pour modéliser des régions volumiques. Ensuite, cette méthode a été développée par Chadebec pour prendre en compte des régions surfaciques et linéiques.

Le tableau (Tab. I.1) résume les éléments utilisés pour résoudre des problèmes magnétostatiques par cette méthode [34].

Types de régions	Auteurs	Nombre d'inconnues
<b>Régions volumiques ferromagnétiques</b>	R.F. Harrington [33] O. Chubar [35] O. Chadebec [30]	3 par élément
<b>Régions surfaciques ferromagnétiques</b>	O. Chadebec [30] K. Sugahara [36] [37] K. Urata [38]	2 par élément
<b>Régions linéiques ferromagnétiques</b>	O. Chadebec [30] K. Urata [38]	1 par élément

Tab. I.1 : *Bibliographie sur les éléments utilisés pour résoudre des problèmes magnétostatiques par MoM*

### I.5.2) Principe de la méthode des moments magnétiques

La méthode des moments est une technique d'approche numérique qui permet de résoudre efficacement le système d'équations intégrales en le transformant en un système linéaire sous forme matricielle<sup>1</sup>. Elle consiste à trouver l'aimantation magnétique  $\vec{M}$  par une collocation au barycentre de chaque élément associée à des fonctions de forme d'ordre 0. Cette approche très simple est fondée sur l'interaction à distance qui existe entre différents éléments magnétiques placés à proximité (aimants, matériaux ferromagnétiques, courants, ...). Dans le présent travail, nos exemples contiennent seulement des matériaux ferromagnétiques et des courants. Dans ce cas, le système linéaire lie le champ résultant des courants aux composantes discrétisées de ces aimantations par le biais d'une "matrice d'interaction globale de la méthode MoM".

La taille de cette matrice est relative d'un côté au nombre des éléments du maillage  $N_e$  et de l'autre côté, au nombre d'inconnues dans chaque élément. Autrement dit, la taille de la matrice de la méthode des moments volumiques est  $(3N_e \times 3N_e)$ . En revanche, la taille de cette matrice devient  $(2N_e \times 2N_e)$  lorsqu'il s'agit des formulations de type surfaciques.

---

<sup>1</sup> Nous signalons au lecteur qu'il s'agit ici d'une brève description de la méthode des moments. Les détails de cette méthode sont donnés dans le chapitre suivant.

### **I.5.3) Application de la méthode des moments**

La première application de la méthode des équations intégrales remonte au début des années 1970, lorsque le code de GFUN a été développé [39]. Ensuite plusieurs codes académiques comme CALMAG3D [40], RADIA [35] [41] et LOCAPI [30] ont déjà montré la fiabilité de l'approche : l'aimantation est constante au barycentre de chaque élément. Ces codes ont appliqué la méthode des moments magnétostatiques pour résoudre deux genres des problèmes :

#### *1- Problème direct*

Dans le problème direct, nous déterminons des sources (aimantation  $\vec{M}$ ) d'abord, ensuite nous calculons de l'effet (le champ magnétique [8], la force [30] [42],...).

Durant la thèse, nous allons utiliser la méthode de MoM pour calculer le champ magnétique et l'énergie magnétostatique à partir de la connaissance de l'aimantation. Comme nos problèmes sont portés sur ce genre des problèmes, nous lui consacrons une grande section de la thèse détaillée plus tard (Chapitre . III).

#### *2- Problème inverse*

Bien que, nous allons appliquer la méthode de MoM durant la thèse pour résoudre des problèmes directs, il ne faut pas renier les applications intéressantes de la méthode de MoM pour résoudre le problème inverse comme par exemple : une plaque placée dans un champ extérieur [30] [43] et l'identification de l'aimantation totale du navire [44] [45]. Dans ces applications l'aimantation  $\vec{M}$  a été déterminée en connaissant le champ magnétique mesuré sur un nombre limité de capteurs placés autour de ces dispositifs. Les applications de cette méthode ont donné des résultats encourageants dans la résolution de problème inverse magnétostatique. Ils ajoutent un autre avantage de la méthode de MoM par rapport à la méthode de MEF : elle est permet de faire la modélisation numérique inverse de façon plus facile qu'avec la méthode traditionnelle MEF.

### **I.5.4) Avantages de la méthode des moments par rapport aux éléments finis**

Dans cette section, nous résumons les avantages de la méthode de MoM. Grâce à ses avantages, cette méthode peut être une alternative intéressante à la méthode des éléments finis classique MEF, citons :

- Seuls les matériaux actifs et les bobines ont besoin d'être maillés ce qui simplifie grandement la description des géométries et plus particulièrement leur discrétisation. Les systèmes matriciels obtenus comportent donc moins d'inconnues que leurs homologues issus des éléments finis classiques. Ce point peut conduire à des gains notables en temps de calcul si les géométries restent simples.

- Il n'y a pas besoin de borner le domaine d'étude par une frontière artificielle pour imposer les conditions aux limites ce qui permet une plus grande précision numérique des calculs.
- les opérations algébriques peuvent être appliqués au système linéaire obtenu telle que la multiplication et l'addition. Cette propriété rend cette méthode est plus pratique dans les problèmes qui requièrent le calcul d'une partition du champ total dans le problème, par exemple les champs de courants de Foucault, de sources de fer induits et de courant présentés peuvent être tous calculés indépendamment [46].
- La discrétisation n'a pas nécessairement besoin d'être «conforme» comme le montre la figure (Fig. I.11. a), ce qui signifie que n'importe quelle paire d'éléments adjacents ne doit pas partager un nœud, une arête ou une face comme le montre la figure (Fig. I.11. b) [47]. En principe des maillages non conformes ou même des maillages hybrides réalisés par l'assemblage des éléments de types différents (tétraèdres, prismes triangulaires, des briques, des hexaèdres, etc.) peuvent être utilisés comme le montre la figure (Fig. I.11. b) [30].

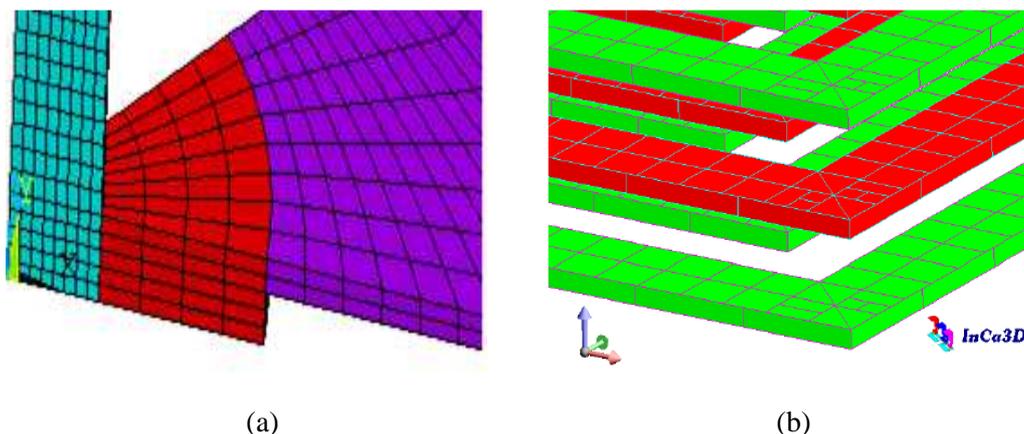


Fig. I.11 : (a) Maillage obtenu par un logiciel utilisant la méthode de MEF. (b) Maillage non conforme

- Dans certaines méthodes de résolution des problèmes non-linéaires comme la méthode du point fixe, la matrice de coefficient ne change pas au cours de la procédure de résolution itérative et n'a pas besoin d'être recalculée à chaque itération.
- Cette méthode est plus facile à paralléliser [47].
- Elle est plus facile à appliquer pour la résolution du problème inverse que la méthode de MEF.

### I.5.5) Inconvénients de la méthode des moments

La méthode de MoM présente moins d'intérêt dans certain cas :

- matériaux linéaires (la perméabilité du matériau est indépendante du champ).

## § 1 : ETAT DE L'ART

- les surfaces du domaine d'étude sont petites par rapport au volume de ce domaine.

Dans ce cas, le calcul de l'intégrale dans le domaine se réduit à un calcul de l'intégrale sur la surface du domaine. Donc, la méthode des éléments finis de frontière peut être utilisée, ce qui simplifie le maillage et diminue considérablement le coût.

La méthode MoM, comme c'est le cas pour toutes les autres méthodes intégrales, conduit à la résolution d'un système linéaire plein (à coefficients tous non nuls). En effet, la méthode des moments est une méthode à interactions totales, chaque élément du maillage interagit avec tous les autres et sur lui-même. La résolution de tels systèmes est très coûteuse en temps de calcul et difficile à stocker dans la mémoire vive de l'ordinateur. Par exemple [47], un PC standard en 2012 est équipé d'une quantité de mémoire vive de l'ordre de 8 Go, ce qui limite le nombre de degrés de liberté d'un problème à 30.000 (matrice pleine en double précision). Les méthodes intégrales sont donc incapables en l'état de résoudre un problème de complexité industrielle qui comporte généralement un nombre de degrés de liberté de l'ordre de 100.000, ce qui nécessiterait alors une centaine de Go de mémoire vive. Pour cette raison, la communauté basses fréquences s'est éloignée de la méthode de MoM dans les années 80-90 au profit des méthodes par éléments finis malgré le maillage de l'air.

Récemment, des techniques ont été développées pour aborder ce problème qui limite leur utilisation à des géométries très simples. Ces techniques sont présentées dans la section suivante.

### **I.5.6) Méthodes de compression de matrice**

Le principe de base de la plupart des méthodes de compression consiste à dissocier les interactions proches des interactions lointaines. Les interactions lointaines peuvent être approximées sans introduire d'erreurs significatives [48] [49]. Nous citons par exemple :

- Méthode multipolaire rapide (MMR) : elle procède à l'expansion de la fonction de Green du système par une expansion multipolaire, le groupement des sources voisines permettant de les traiter comme une source unique. En traitant les interactions différemment par la MMR, il n'est pas nécessaire de stocker les éléments de matrices correspondants, ce qui réduit beaucoup la quantité de mémoire nécessaire. Si la MMR est appliquée de manière hiérarchique, elle réduit la complexité des produits de matrices et de vecteurs dans un solveur itératif en la faisant passer de  $O(N^2)$  à  $O(N)$  ou  $O(N \log N)$  où  $N$  le nombre des inconnues. Cet outil a élargi le domaine d'application de la méthode des moments à de plus grands problèmes qu'auparavant. Son algorithme est l'un des dix meilleurs algorithmes du XX<sup>ème</sup> siècle [50]. Elle a été utilisée pour résoudre des problèmes magnétostatiques non linéaires [51] , [52]. Par ailleurs, cette méthode présente certaines difficultés en ce qui concerne la parallélisation de l'algorithme et le préconditionnement du solveur. C'est une méthode est très utilisée dans beaucoup de domaines tels que le domaine d'hautes fréquences et le domaine d'hyperfréquences [53].

- ACA (Adaptive Cross Approximation): elle compresse les blocs d'interactions lointaines en les représentant par un produit de deux matrices de rangs inférieurs [54]. Elle a été appliquée avec succès aussi bien aux méthodes intégrales surfaciques [55], [56] que volumiques [57]. Cette approche est moins intrusive dans le code source, plus facilement parallélisable et permet en outre de construire en même temps un préconditionneur [58] [59].

## I.6) Conclusion

Au niveau de ce chapitre introductif, nous avons tout d'abord présenté la problématique magnétostatique concernant les problèmes ouverts ou dispositifs à grands entrefers. Pour illustrer ces problèmes, nous avons présenté deux exemples, le premier est l'antenne basse fréquence représentant un exemple simple avec une source pour mettre au point le code de calcul, le deuxième exemple est le PPS-Flex qui est représentatif d'un système à grand entrefers.

Nous avons vu que la méthode de MEF, la plus utilisée pour la modélisation des structures employées en électromagnétisme basses fréquences, n'est pas préférable dans ces cas, parce qu'elle a besoin de mailler l'air environnant les matériaux actifs.

Ensuite, la deuxième partie de ce chapitre a exposé la méthode des éléments de frontière, la méthode hybride élément finis-intégrale de frontière et la méthode des moments magnétostatique comme des méthodes alternatives pour remédier à la difficulté de la méthode MEF.

Enfin, la dernière partie de ce chapitre a été consacrée à la méthode des moments qui est une bonne alternative pour modéliser les deux dispositifs étudiés durant cette thèse. Cette partie a introduit le principe de la méthode MoM, puis, ses applications pour résoudre les problèmes directs et les problèmes inverses. Comme il n'existe pas de méthode universelle, chacune des méthodes numériques présentées des avantages et des inconvénients propres aux dispositifs selon le contexte, la nécessité,.....etc. Les inconvénients de la méthode de MoM sont également représentés. Son inconvénient principal est le fait qu'elle se caractérise par une matrice dense et pleine, qui nécessite une compression par des méthodes comme la méthode de MMR et la méthode de ACA.

**Chapitre . II FORMULATION DES EQUATIONS  
DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE EN VUE DE  
LA MODELISATION NUMERIQUE**

## II.1) Introduction

Rappelons que les dispositifs que nous étudions dans cette thèse, sont composés de matériaux ferromagnétiques et de bobines alimentées par des courants constants. Dans ce cas, les équations à résoudre sont les équations de la magnétostatique. Les problèmes que nous voulons résoudre concernent le calcul des champs magnétiques produits par ces différentes sources (Matériaux et bobines).

Dans la première partie de ce chapitre, nous commençons par définir le problème magnétostatique et les équations qui lui sont associées. Ensuite, nous présentons les deux principales formulations de la méthode intégrale volumique. À travers l'une de ces formulations, la formulation en potentiel scalaire magnétique, nous exprimerons le champ magnétique en fonction de l'aimantation qui sera calculée par la méthode des moments volumiques.

## II.2) Domaine d'étude

Considérons un domaine constitué d'un corps  $\Omega_F$  ferromagnétique de perméabilité magnétique  $\mu_F$ . Ce corps est entouré par un milieu amagnétique, l'air ambiant  $\Omega_0$  comme le montre la figure (Fig. II.1). L'inducteur est une bobine comportant  $n_S$  spires parcourues, chacune par un courant  $I_S$  imposé et constant. Dans les modèles numériques, cette bobine est modélisée par un milieu homogène  $\Omega_S$  parcouru par une densité de courant  $\vec{J}_S$ . En statique, nous négligeons les courants de Foucault et nous supposons que la densité de courant dans les conducteurs est homogène. L'homogénéisation de la bobine consiste à ce que les ampères-tours produits soient les mêmes. Ainsi si  $S_S$  est une section de la bobine, nous avons :

$$S_S J_S = n_S I_S \quad (II.1)$$

Dans un souci de simplification, nous considérons dans un premier temps que le corps  $\Omega_F$  est simplement connexe.

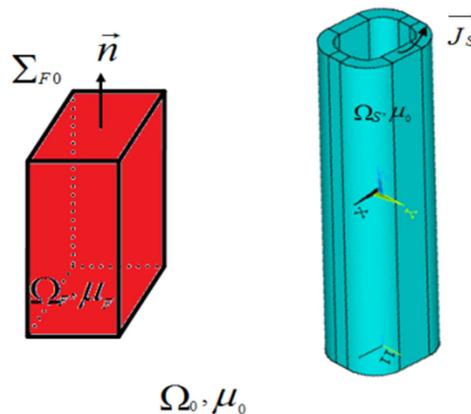


Fig. II.1 : Exemple d'un problème magnétostatique

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Le domaine d'étude (voir (Fig. II.1)) modélisant la situation typique en magnétostatique est donc formé :

- d'un milieu ambiant  $\Omega_0$  de perméabilité magnétique égale à celle du vide ( $\mu_0$ ).
- de milieux magnétiques  $\Omega_F$  de perméabilité magnétique ( $\mu_F$ ).
- de milieux amagnétiques  $\Omega_S$  de perméabilités magnétiques égaux à celle du milieu ambiant, chacun étant parcouru par un courant caractérisé par un vecteur de densité de courant donné  $\vec{J}_S$ .

Nous avons :

$$\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_F \cup \Omega_S \quad (\text{II.2})$$

### Interfaces entre deux milieux de perméabilités magnétiques différentes :

Il faut tenir compte des conditions de passage entre deux milieux de perméabilités différentes. Ces conditions concernent les interfaces  $\Sigma_{F0}$  entre les milieux  $\Omega_F$  et le milieu ambiant  $\Omega_0$  :

$$\Sigma_{F0} = \Omega_F \cap \Omega_0 \quad (\text{II.3})$$

### II.3) Equations du champ magnétostatique

Les phénomènes magnétostatiques sont régis par les équations de Maxwell suivantes :

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H} = \vec{J}_S \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

Ces deux équations sont complétées par la relation constitutive des matériaux linéaires et isotropes écrite sous la forme :

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (\text{II.5})$$

Afin de résoudre les équations de Maxwell, il est nécessaire de donner la définition des différents opérateurs différentiels utilisés en électromagnétisme tel que le gradient, le rotationnel et la divergence d'un vecteur. Il est également nécessaire de connaître quelques formules importantes (Annexe (A.1)).

#### Conditions de passage :

Sur la surface qui sépare deux milieux magnétiques de perméabilités différentes, et en l'absence de courants de surface, la composante normale du champ magnétique  $\vec{B}$  ainsi que la composante tangentielle du champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$  doivent être continues [60] :

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

$$\begin{cases} (\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0 & \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \vec{n}_{F0} \times (\vec{H}_0 - \vec{H}_F) = \vec{0} & \text{sur } \Sigma_{F0} \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

où  $\vec{n}_{F0}$  est le vecteur unité normal à la surface de séparation, dirigé du milieu ( $F$ ) vers le milieu(0), ( $F$ ) et (0) étant les indices spécifiant le milieu dans lequel les champs  $\vec{B}$  ou  $\vec{H}$  sont définis, tel qu'il est illustré par la figure (Fig. II.1) représentant un cas magnétostatique.

Les équations (II.4) à (II.6) sont résumées dans le tableau (Tab. II.1). Compte tenu du fait que le domaine d'étude est fait de milieux de perméabilités différentes, elles sont habituellement résolues par la méthode numérique classique : la méthode des éléments finis (MEF). La littérature concernant cette méthode est très abondante [61], c'est pourquoi nous ne nous attarderons pas sur sa formulation. En revanche, les caractéristiques de la méthode MEF ont été étudiées avec soin dans le premier chapitre. Rappelons que cette méthode présente des inconvénients dans les problèmes ouverts ou à grand entrefer car cela nécessite de mailler un grand volume d'air. On utilise alors une formulation intégrale de type surfacique ou volumique qui est une bonne alternative.

<b>Champs inconnus</b>	$\vec{B}, \vec{H}$
<b>Champs sources</b>	$\vec{j}$
<b>Relations constitutives des milieux</b>	$\vec{B} = \mu \vec{H}$
<b>Equations de Maxwell</b>	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
<b>Conditions de passage sur</b> $\Sigma_{F0}$	$(\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0$ $\vec{n}_{F0} \times (\vec{H}_0 - \vec{H}_F) = \vec{0}$
<b>Condition aux limites</b>	$\vec{B}$ s'annule à l'infini

Tab. II.1 : Les équations associées au problème magnétostatique (Fig. II.1)

Le principe des formulations intégrales de volume que nous allons utiliser repose sur la possibilité de remplacer les matériaux magnétiques par un milieu amagnétique auquel nous ajoutons des sources magnétiques induites appelées sources magnétiques équivalentes. Il existe plusieurs manières d'introduire ces sources induites ou équivalentes. Nous allons présenter les deux principales approches qui sont les plus utilisées :

- Une première approche conduisant à considérer des distributions de courants équivalents.
- Une deuxième approche conduisant à considérer des distributions de charges équivalentes.

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Ces approches conduisent donc à un problème magnétostatique où il n'y a qu'un seul milieu de perméabilité égale à celle du vide contenant différentes sources, réelles ou équivalentes. Il existe plusieurs formulations possibles applicables pour calculer les champs électromagnétiques, mais les plus utilisées sont les potentiels scalaire et vecteur.

### II.4) Formulation en potentiel dans les problèmes magnétostatiques

#### II.4.1) Formulation en potentiel vecteur magnétique

L'élimination de  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  dans les relations du tableau (Tab. II.1) donne la formulation magnétostatique en potentiel vecteur magnétique qui permet de simplifier ces équations.

##### II.4.1.1) Approche classique

Du fait que le champ magnétique est à flux conservatif, sa divergence est nulle. Il existe alors un champ appelé potentiel vecteur magnétique tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot} \vec{A} \quad (II.7)$$

En utilisant le théorème d'Ampère et la loi constitutive des matériaux, nous avons :

$$\overrightarrow{rot} \left( \frac{\overrightarrow{rot} \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{j} \quad (II.8)$$

L'équation précédente ne définit pas le champ de potentiel vecteur de manière unique. Pour se faire, nous ajoutons une jauge et nous prenons généralement la jauge de Coulomb :

$$div \vec{A} = 0 \quad (II.9)$$

Conditions de passage :

Sur les interfaces  $\Sigma_{F0}$ , il faut imposer respectivement la continuité de  $B_n$  et la continuité de  $H_t$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{n_{F0}} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{A}_F = \overrightarrow{n_{F0}} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{A}_0 \quad \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \overrightarrow{n_{F0}} \wedge \frac{\overrightarrow{rot} \vec{A}_F}{\mu_F} = \overrightarrow{n_{F0}} \wedge \frac{\overrightarrow{rot} \vec{A}_0}{\mu_0} \quad \text{sur } \Sigma_{F0} \end{array} \right. \quad (II.10)$$

Dans ce modèle, les conditions aux limites doivent porter sur le potentiel vecteur. celui-ci s'annule à l'infini [62]. Dans cette formulation, nous devons déterminer trois inconnues en chaque point, les composantes de  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  de  $\vec{A}$ . Dans les problèmes tridimensionnels, cela conduit à traiter des systèmes linéaires très volumineux, donc coûteux à résoudre.

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Les équations de (II.7) à (II.10) représentent les équations d'un champ de vecteur (Tab. II.2). Elles sont résolues actuellement dans les logiciels de calcul de champ en 3D par la méthode des éléments finis d'arête.

<b>Champs inconnus</b>	$\vec{A}$ $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$
<b>Champs sources</b>	$\vec{J}$
<b>Equations</b>	$\text{rot} \left( \frac{\text{rot} \vec{A}}{\mu} \right) = \vec{J}$ $\text{div} \vec{A} = 0$
<b>Conditions de passage sur</b> $\Sigma_{F0}$	$\vec{n}_{F0} \cdot \text{rot} \vec{A}_F = \vec{n}_{F0} \cdot \text{rot} \vec{A}_0$ $\vec{n}_{F0} \wedge \frac{\text{rot} \vec{A}_F}{\mu_F} = \vec{n}_{F0} \wedge \frac{\text{rot} \vec{A}_0}{\mu_0}$
<b>Condition aux limites</b>	$\vec{A}$ s'annule à l'infini

Tab. II.2 : Formulation en potentiel vecteur du problème magnétostatique

### II.4.1.2) Approche par la méthode des courants équivalents

Pour un milieu magnétique, le champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$  est lié au champ magnétique  $\vec{B}$  à travers l'aimantation du milieu matériel par la relation suivante [63] :

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (\text{II.11})$$

Autrement dit :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{II.12})$$

En appliquant le rotationnel à la relation (II.12) et en substituant la première équation de (II.4) dans la formule obtenue, nous pouvons écrire :

$$\text{rot} \vec{H} = \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \text{rot} \vec{M} = \vec{J}_s \quad (\text{II.13})$$

Le champ  $\vec{B}$  peut être calculé en résolvant les équations de la magnétostatique que nous écrirons comme suit :

$$\begin{cases} \text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{J}_s + \text{rot} \vec{M} \\ \text{div} \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (\text{II.14})$$

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

En substituant la loi de comportement du matériau (II.12) dans la deuxième relation de (II.6), les conditions de passage (II.6) peuvent être réécrites comme suit :

$$\begin{cases} (\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0 & \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \vec{n}_{F0} \times \left( \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)_F \right) = \vec{0} & \text{sur } \Sigma_{F0} \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

La relation précédente peut s'écrire :

$$\begin{cases} (\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0 & \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \vec{n}_{F0} \times \left( \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_F \right) = \vec{M} \times \vec{n}_{F0} & \text{sur } \Sigma_{F0} \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

Le tableau (Tab. II.3.a) résume les équations associées au problème magnétostatique illustré dans la figure (Fig. II.2. a) et le tableau (Tab. II.3.b) résume les équations (II.14) et (II.16) associées à l'approche par les courants équivalents comme le montre la figure (Fig. II.2. b). D'après le tableau (Tab. II.3.b), nous déduisons que notre problème revient à calculer le champ magnétique créé par trois distributions de courant dans un milieu de perméabilité  $\mu_0$  :

$$\begin{cases} \vec{J}_m = \text{rot } \vec{M} & \text{dans } \Omega_F \\ \vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n} & \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \vec{J}_s & \text{dans } \Omega_S \end{cases} \quad (\text{II.17})$$

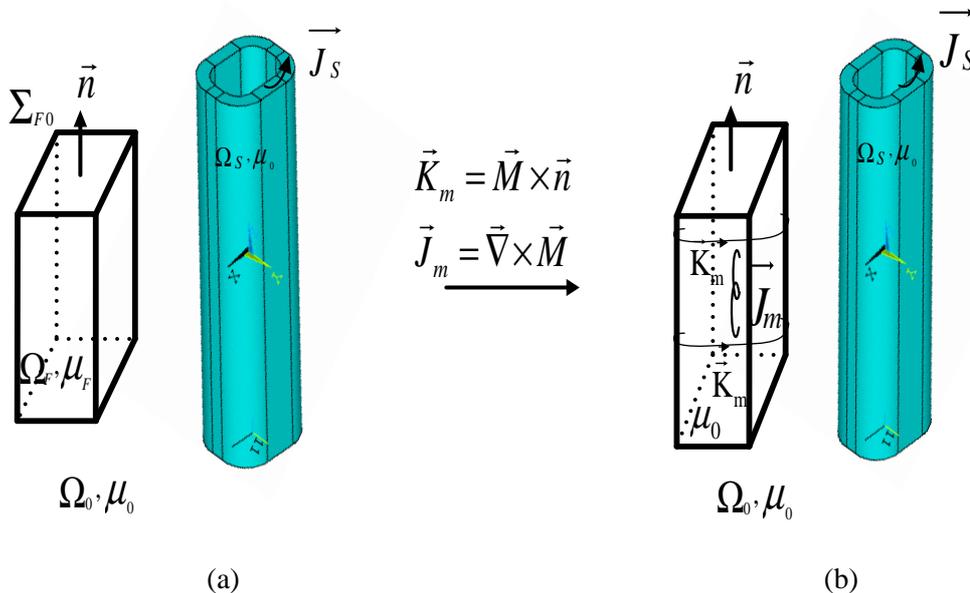


Fig. II.2 : (a) Problème magnétostatique. (b) Approche par courants équivalents

**§ 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE**

<b>Champs inconnus</b>	$\vec{B}, \vec{H}$	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ $\Rightarrow$	<b>Champs inconnus</b>	$\vec{B}, \frac{\vec{B}}{\mu_0}$
<b>Champs sources</b>	$\vec{j}$		<b>Champs sources (réels ou équivalents)</b>	$\vec{j}$ $\vec{J}_m = \text{rot} \vec{M}$ $\vec{K}_m = \vec{M} \times \vec{n}_{F0}$
<b>Equations de Maxwell</b>	$\text{rot} \vec{H} = \vec{j}$ $\text{div} \vec{B} = 0$		<b>Equations</b>	$\text{rot} \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \vec{j}_s + \text{rot} \vec{M}$ $\text{div} \vec{B} = 0$
<b>Conditions de passage sur <math>\Sigma_{F0}</math></b>	$(\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0$ $\vec{n}_{F0} \times (\vec{H}_0 - \vec{H}_F) = \vec{0}$		<b>Conditions de passage sur <math>\Sigma_{F0}</math></b>	$(\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0$ $\vec{n}_{F0} \times \left( \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)_F \right) = \vec{M} \times \vec{n}_{F0}$
<b>Conditions aux limites</b>	$\vec{B}$ s'annule à l'infini		<b>Conditions aux limites</b>	$\vec{B}$ s'annule à l'infini
(a)		(b)		

Tab. II.3 : (a) : Les équations associées au problème magnétostatique, (b) : Les équations obtenues

Le champ  $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$  créé par chacune des sources peut être calculé séparément par la loi de Biot et Savart. Les équations du tableau (Tab. II.2.b) étant manifestement linéaires, nous pourrons alors appliquer le théorème de superposition :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{B}}{\mu_0}(P) = & \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_s} \frac{\vec{j}_s \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Omega_s + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{J}_m \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Omega \\ & + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma_{F0}} \frac{\vec{K}_m \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Sigma_{F0} \end{aligned} \quad (II.18)$$

où  $N$  est le point courant d'intégration,  $P$  est le point de calcul,  $\vec{r}_P$  le vecteur  $\vec{OP}$  et  $\vec{r}_N$  le vecteur  $\vec{ON}$  comme le montre la figure (Fig. II.3).

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

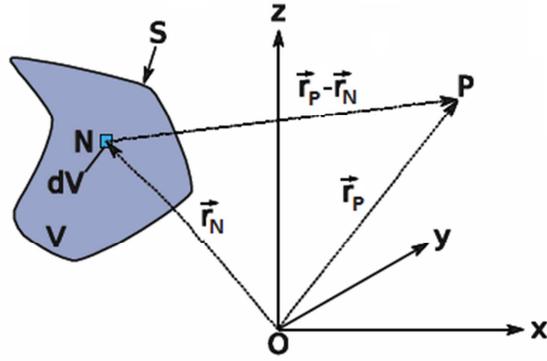


Fig. II.3 : Notations

Le champ magnétique dû à l'aimantation induite dans le milieu magnétique est donc donné par la relation :

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\overrightarrow{rot}_N (\vec{M}(N)) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Omega + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_{F0}} \frac{(\vec{M}(N) \times \vec{n}) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Sigma_{F0} \quad (\text{II.19})$$

Ce champ magnétique se dérive du potentiel vecteur :

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{\Sigma_{F0}} \frac{\vec{M}(N) \times \vec{n}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} d\Sigma_{F0} + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\overrightarrow{rot}_N \vec{M}(N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} d\Omega \quad (\text{II.20})$$

La première intégrale de l'équation (II.20) peut être transformée en une intégrale volumique (Annexe (A.2)), donc nous pouvons récrire (II.20) comme suit :

$$\vec{A}_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \overrightarrow{rot}_N \left( \frac{\vec{M}(N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} \right) dV + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\overrightarrow{rot}_N \vec{M}(N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} d\Omega \quad (\text{II.21})$$

Or nous avons l'identité :

$$\overrightarrow{rot}(f\vec{b}) = (\overrightarrow{grad}f) \times \vec{b} + f\overrightarrow{rot}\vec{b} \quad (\text{II.22})$$

Donc, à l'aide de (II.22) et avec  $f = \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|}$ , la relation (II.21) devient :

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \vec{M}(N) \times \overrightarrow{grad}_N \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} d\Omega \quad (\text{II.23})$$

Cette équation peut être réécrite de la manière suivante [64], [65] :

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M}(N) \times (\vec{r}_P - \vec{r}_N)}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|^3} d\Omega \quad (\text{II.24})$$

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Soit la notation suivante :

$$r = |\vec{r}_P - \vec{r}_N| = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2 + (z_P - z_N)^2} \quad (\text{II.25})$$

Donc, la relation (III.59) peut être réécrite :

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{II.26})$$

Le but de l'écriture du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}_m$  sous la forme précédente est l'obtention de la deuxième expression du champ magnétique produit par l'aimantation induite dans le milieu magnétique.

En prenant le rotationnel de (II.26), nous pouvons trouver :

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \text{rot} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} d\Omega \right) \quad (\text{II.27})$$

Lorsque le point  $P$  est à l'extérieur du milieu magnétique  $\Omega_F$ , cette relation conduit à l'expression suivante de  $\vec{B}_m$  (Annexe (A.3)) :

$$\vec{B}_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{II.28})$$

L'équation (II.28) peut être réécrite sous une autre forme comme l'explique l'annexe (A.4) [64] :

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \left( \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \vec{M} \right) d\Omega \quad (\text{II.29})$$

Nous avons donc deux expressions possibles (II.19) et (II.29) pour le champ magnétique produit par l'aimantation induite dans le milieu magnétique.

**Remarque :** Dans un milieu uniformément aimanté comme le montre la figure (Fig. II.4), on peut facilement se convaincre que la présence de moments magnétiques identiques (l'aimantation est uniforme) dans la matière va être équivalente, sur le plan des effets produits, à un courant surfacique qui circulait à la surface de séparation entre le milieu magnétique et le milieu extérieur. Dans ce cas, il ne faut pas prendre en compte l'effet de courants volumiques dans la matière.

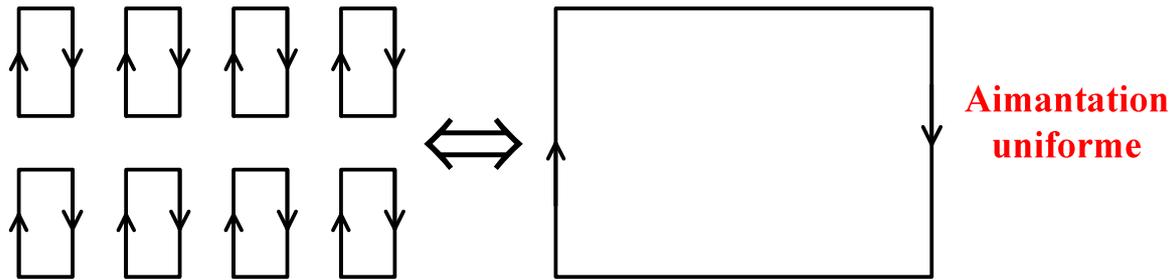


Fig. II.4 : Une aimantation uniforme en surface des charges d'aimantation

## II.4.2) Formulation en potentiel scalaire magnétique

### II.4.2.1) Approche classique

Dans cette formulation, le champ d'excitation magnétique est décomposé en deux champs, le champ d'excitation magnétique dû au courant dans la bobine seule appelé le champ source et le champ d'excitation magnétique induit :

$$\vec{H} = \vec{H}_s + \vec{H}_m \quad (\text{II.30})$$

où  $\vec{H}_s$  est le champ de la source et  $\vec{H}_m$  est le champ induit. Les rotationnels de ces champs sont égaux à :

$$\begin{cases} \text{rot} \vec{H}_s = \vec{j} \\ \text{rot} \vec{H}_m = \vec{0} \end{cases} \quad (\text{II.31})$$

Le champ créé par la bobine dans le vide et en absence de matière aimantée en tout point de l'espace est donné par la loi de Biot et Savart (II.32). Le vecteur  $\vec{r}$  est le vecteur unitaire pointant de l'élément volumique  $d\Omega \in \Omega_s$  où  $\vec{j}$  est non nul au point du calcul  $P$ .

$$\vec{H}_s = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_s} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{II.32})$$

La deuxième équation de (II.31) permet d'introduire le potentiel scalaire magnétique  $\varphi_m$  réduit :

$$\vec{H}_m = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_m \quad (\text{II.33})$$

En substituant (II.30) dans (II.5) et en utilisant la deuxième équation de (II.4) ainsi que la relation (II.33), nous obtenons :

$$\text{div}(\mu \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_m) = \text{div}(\mu \vec{H}_s) \quad (\text{II.34})$$

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

La possibilité d'utiliser un potentiel scalaire rend cette formulation particulièrement adaptée aux études tridimensionnelles, car elle réduit le problème par rapport au cas où une inconnue vectorielle est nécessaire (trois inconnues par point). En trois dimensions, quand il est applicable, nous la préférons donc à la formulation vectorielle que nous avons définie avant dans le paragraphe (II.4.1.1).

Ce modèle magnétostatique scalaire à potentiel réduit est extrêmement intéressant, puisqu'il permet de rendre compte des problèmes avec sources extérieurs ou bien intérieurs, aimants ou courants [62].

### Conditions de passage :

Sur les interfaces  $\Sigma_{F0}$ , nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{n_{F0}} \wedge (\overrightarrow{H_s} - \overrightarrow{grad}\varphi_m)_F = \overrightarrow{n_{F0}} \wedge (\overrightarrow{H_s} - \overrightarrow{grad}\varphi_m)_0 & \text{sur } \Sigma_{F0} \\ \overrightarrow{n_{F0}} \cdot (\overrightarrow{H_s} - \overrightarrow{grad}\varphi_m)_F = \overrightarrow{n_{F0}} \cdot (\overrightarrow{H_s} - \overrightarrow{grad}\varphi_m)_0 & \text{sur } \Sigma_{F0} \end{cases} \quad (II.35)$$

Les équations de (II.30) à (II.35) représentent les équations d'un champ de scalaire. Elles sont résolues actuellement dans les logiciels de calcul de champ 3D par la méthode des éléments finis nodaux.

### **II.4.2.2) Approche par la méthode des charges équivalentes**

En prenant la divergence de la relation (II.11) qui décrit la réaction des matériaux magnétiques, et en tenant compte du fait que le champ magnétique  $\vec{B}$  est à flux conservatif, nous obtenons :

$$div(\vec{H} + \vec{M}) = 0 \quad (II.36)$$

Le champ d'excitation magnétique  $\vec{H}$ , obéit donc aux relations :

$$\begin{cases} div\vec{H} = -div\vec{M} \\ \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} \end{cases} \quad (II.37)$$

Pour le comportement du champ à la traversée  $\Sigma_{F0} = \Omega_F \cap \Omega_0$  :

$$\begin{aligned} (\vec{H} \wedge \overrightarrow{n_{F0}})_F &= (\vec{H} \wedge \overrightarrow{n_{F0}})_0 \\ (\vec{H} \cdot \overrightarrow{n_{F0}})_0 - (\vec{H} \cdot \overrightarrow{n_{F0}})_F &= (\vec{M} \cdot \overrightarrow{n_{F0}})_F \end{aligned} \quad (II.38)$$

Le tableau (Tab. II.4.a) résume les équations associées au problème magnétostatique illustré dans la figure (Fig. II.2. a) et le tableau (Tab. II.4.b) résume les équations (II.37) et (II.38).

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

<b>Champs inconnus</b>	$\vec{B}, \vec{H}$	$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M})$ $\Rightarrow$	<b>Champ inconnus</b>	$\vec{H}, \mu_0\vec{H}$
<b>Champs sources</b>	$\vec{j}$		<b>Champs sources (réels ou équivalents)</b>	$\vec{j}$ $\rho_m = -div(\vec{M})$ $\sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n}_{F0}$
<b>Equations de Maxwell</b>	$\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j}$ $div\vec{B} = 0$		<b>Equations</b>	$rot\vec{H} = \vec{j}$ $div\vec{H} = \rho_m$
<b>Conditions de passage sur <math>\Sigma_{F0}</math></b>	$(\vec{B}_0 - \vec{B}_F) \cdot \vec{n}_{F0} = 0$ $\vec{n}_{F0} \times (\vec{H}_0 - \vec{H}_F) = \vec{0}$		<b>Conditions de passage sur <math>\Sigma_{F0}</math></b>	$(\vec{H} \wedge \vec{n}_{F0})_F - (\vec{H} \wedge \vec{n}_{F0})_0 = \vec{0}$ $(\vec{H} \cdot \vec{n}_{F0})_0 - (\vec{H} \cdot \vec{n}_{F0})_F = \sigma_m$
<b>Conditions aux limites</b>	$\vec{B}$ s'annule à l'infini		<b>Conditions aux limites</b>	$\vec{H}$ s'annule à l'infini

Tab. II.4 : (a) Les équations du problème magnétostatique (b) : Les équations obtenues

D'après le tableau (Tab. II.4.b), nous déduisons que notre problème revient à calculer le champ magnétique créé par trois distributions de sources dans un milieu homogène. Une de ces sources est la distribution de courant initial. Le champ produit par cette distribution est calculé par la loi de Biot et Savart et les champs des deux autres distributions peuvent être calculés à l'aide d'une analogie avec l'électrostatique comme détaillée ci-dessous.

Le champ électrostatique produit par une distribution de charge volumique  $\rho$  et une distribution de charge surfacique  $\sigma$  dans un milieu homogène de permittivité  $\epsilon_0$  obéit aux équations de Maxwell suivantes [1] :

$$\begin{cases} \overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \\ div\epsilon_0\vec{E} = \rho \end{cases} \text{ dans } \Omega \quad (II.39)$$

Nous avons les conditions de passage :

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

$$\begin{cases} \vec{n}_{F0} \times (\vec{E}_0 - \vec{E}_F) = \vec{0} \\ (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n})_0 - (\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n})_F = \sigma \end{cases} \text{ sur } \Sigma \quad (\text{II.40})$$

À partir de la formule de Coulomb, le champ électrique est donné par la relation :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \left( \iiint_{\Omega} \frac{\rho \vec{r}}{r^3} d\Omega + \iint_{\Sigma} \frac{\sigma}{r^3} \cdot \vec{r} d\Sigma \right) \quad (\text{II.41})$$

En comparant les équations (II.39) et (II.40) aux équations du tableau (Tab. II.4.b), les deux autres distributions du problème équivalent peuvent être assimilées à des distributions de charges magnétiques :

$$\begin{cases} \rho_m = -\text{div } \vec{M} & \text{dans } \Omega_m \\ \sigma_m = \vec{M} \cdot \vec{n} & \text{sur } \Sigma_{F0} \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

D'après notre analogie électrostatique, ces deux distributions de charge produisent un champ d'excitation magnétique  $\vec{H}_m$  donnée par l'expression coulombienne :

$$\vec{H}_m(P) = \frac{1}{4\pi} \left( \iiint_{\Omega_F} \frac{-\text{div } \vec{M}(N) \cdot \vec{r}}{r^3} d\Omega + \iint_{\Sigma} \frac{\vec{M}(N) \cdot \vec{n}}{r^3} \cdot \vec{r} dS \right) \quad (\text{II.43})$$

En résumé, nous pouvons remplacer le matériau magnétique dans le problème magnétostatique général (Fig. II.5.a) par un milieu amagnétique auquel on ajoute des sources magnétiques équivalentes ( $\rho_m, \sigma_m$ ) (Fig. II.5.b).

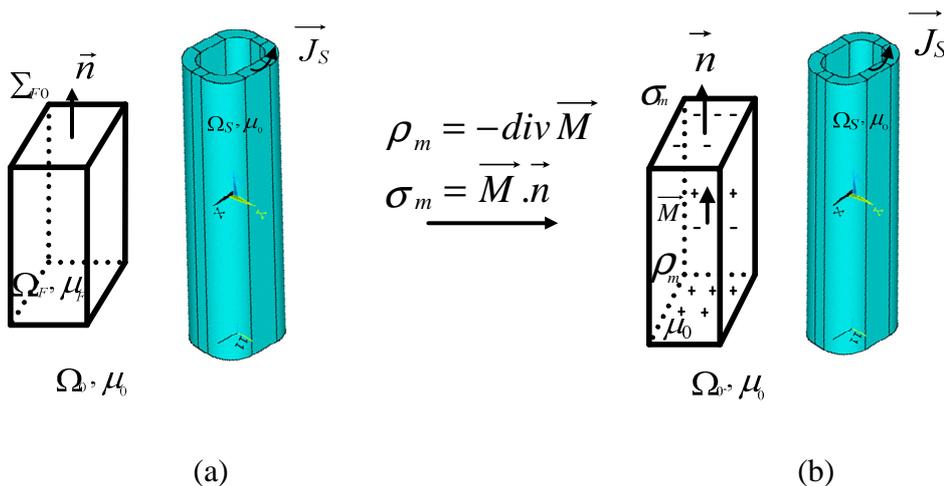


Fig. II.5 : (a) Problème magnétostatique. (b) Approche par aimantation induite en considérant des distributions de charges volumiques et surfaciques

## § 2 : FORMULATION DES EQUATIONS DU CHAMP MAGNETOSTATIQUE

Le champ  $\overrightarrow{H_m}$  dérive du potentiel scalaire magnétique, ce potentiel est calculé par cette équation :

$$\varphi_m(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{-\text{div } \overrightarrow{M}}{r} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\overrightarrow{M} \cdot \vec{n}}{r} dS \quad (\text{II.44})$$

Nous pourrions réécrire l'expression de  $\varphi_m$  sous la forme suivante (voir l'annexe (A.5)) :

$$\varphi_m(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\overrightarrow{M} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{II.45})$$

À partir de la relation précédente, nous pourrions déduire les autres expressions de  $\overrightarrow{H_m}$  en prenant le gradient du potentiel scalaire magnétique :

$$\overrightarrow{H_m}(P) = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi_m(P) \quad (\text{II.46})$$

Lorsque le point  $P$  est à l'extérieur du milieu magnétique, le champ d'excitation magnétique  $\overrightarrow{H_m}$  peut être calculé par la relation suivante (Annexe (A.6)) :

$$\overrightarrow{H_m}(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} (\overrightarrow{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{II.47})$$

Nous avons réécrit cette intégrale sous la forme (Annexe (A.4)) :

$$\overrightarrow{H_m} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \left( \frac{3(\overrightarrow{M} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \overrightarrow{M} \right) d\Omega_F \quad (\text{II.48})$$

En substituant (II.48) dans la relation (II.30) et en utilisant la loi du matériau, nous obtenons une relation prenant l'aimantation comme inconnue :

$$\frac{\overrightarrow{M}}{\mu(\overrightarrow{H})} = \overrightarrow{H}_s + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \left( \frac{3(\overrightarrow{M} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{1}{r^3} \overrightarrow{M} \right) d\Omega_F \quad (\text{II.49})$$

Pour déterminer l'aimantation induite  $\overrightarrow{M}$ , des méthodes numériques particulières peuvent être utilisées à cet effet [2], telles que la méthode des moments magnétiques [66], [30]. C'est l'objet du chapitre suivant qui traite la partie formulation magnétique de cette méthode et qui nous permet d'obtenir la valeur de l'aimantation  $\overrightarrow{M}$ .

## **II.5) Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord présenté des généralités sur le problème magnétostatique et ses équations. Comme nous voulons les résoudre par la méthode des moments de type intégrale volumique, il était nécessaire de définir les principales approches de la méthode intégrale de volume qui conduisent à un problème magnétostatique où il n'y a qu'un seul milieu de perméabilité égal à celle du vide contenant différentes sources. À travers l'une de ces approches, en particulier l'approche par la méthode des charges équivalentes, nous avons mis en place une expression qui ne contient que de l'aimantation. Le calcul de cette aimantation par la méthode des moments sera le but du chapitre suivant.

## **Chapitre . III FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS**

### III.1) Introduction

Au cours de ce chapitre, nous développons l'approche par distributions de charges équivalentes (formulation en potentiel scalaire magnétique). En effet, une démarche analogue peut être développée pour l'approche par distributions de courants équivalents (formulation en potentiel vecteur magnétique) [67].

Afin de calculer le champ magnétique en un point  $P$  quelconque, l'aimantation induite  $\vec{M}(N)$  doit être connue en chaque point  $N$  du milieu magnétique.

Une première partie est dédiée au calcul de l'aimantation  $\vec{M}$  induite dans le milieu magnétique par la méthode des moments [30]. Pour cet objectif, le milieu magnétique est discrétisé en éléments « hexaédriques », à l'intérieur de chacun desquels est localisée une aimantation induite  $\vec{M}$  qui est considérée comme uniforme. Chacune des sources interagit avec toutes les autres. Puis, en utilisant le principe de superposition, nous prendrons en compte l'ensemble des phénomènes, cela conduit finalement à la résolution du système linéaire.

Au cours de la deuxième partie, nous décrivons des méthodes permettant de résoudre ce système en tenant compte de la nature des matériaux utilisés (linéaire ou non linéaire). La résolution du système permet alors de déterminer les composantes de l'aimantation induite dans chaque hexaèdre.

Enfin, dans la dernière partie de ce chapitre, après avoir calculé l'aimantation par la méthode de MoM, nous allons présenter les relations qui permettent de calculer le champ magnétique et l'énergie magnétostatique à partir de cette aimantation.

### III.2) Discrétisation du milieu magnétique

Afin d'établir la formulation matricielle, le milieu magnétique est divisé en  $N_e$  éléments hexaédriques, à l'intérieur de chacun desquels est localisée une source simple « aimantation ». Nous supposons que cette aimantation est uniforme. Dans la maille  $V_I$  ( $I$  indique le numéro de la maille), l'aimantation en chaque point  $Q$  de la maille est donnée par :

$$\vec{M}(Q) = \vec{M}^I \quad (\text{III.1})$$

Un exemple de la discrétisation est représenté sur la figure (Fig. III.1).

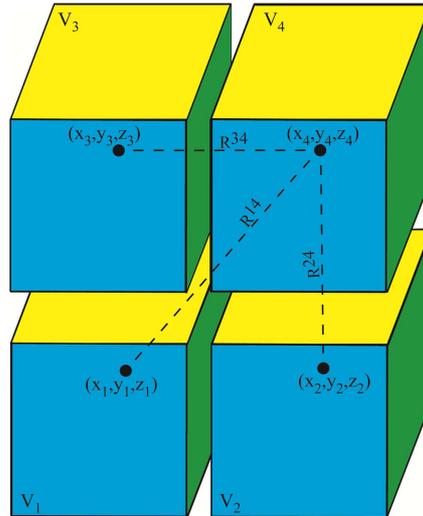


Fig. III.1 : Division du volume magnétisé en 4 mailles parallélépipédiques. L'aimantation dans chaque maille est uniforme

### **III.3) Champ d'excitation magnétique au centre d'une maille**

Dans la suite, le champ magnétique induit au centre d'une maille  $V_I$  dû à l'aimantation  $\vec{M}^J$  d'une maille  $V_J$  est noté  $\vec{H}_m^{IJ}$ .

Si  $I \neq J$ , à partir de la relation (II.48), ce champ d'excitation magnétique, peut être exprimé comme suit :

$$\vec{H}_m^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_J} \left\{ 3 \frac{(\vec{R}^{IJ} \cdot \vec{M}^J)}{(R^{IJ})^5} \vec{R}^{IJ} - \frac{\vec{M}^J}{(R^{IJ})^3} \right\} dV \quad (III.2)$$

où  $\vec{R}^{IJ}$  est le vecteur reliant un point  $N$  de la maille  $V_J$  au centre de la maille  $V_I$  comme le montre la figure (Fig. III.2).

Si  $I = J$ , cette expression présente une singularité. Dans ce cas, puisque  $\vec{M}^I$  est uniforme à l'intérieur de la maille  $V_I$ , l'expression (II.43) peut être transformée en une intégrale surfacique sur la surface externe  $S_I$  du volume de  $V_I$  car  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = 0$ , donc, nous avons :

$$\vec{H}_m^I = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_I} \frac{(\vec{M}^I \cdot \vec{n}^{S_I})}{(R^{II})^3} \vec{R}^{II} dS \quad (III.3)$$

où  $\vec{n}^{S_I}$  est la normale extérieure à la surface  $S_I$ .

Le champ d'excitation magnétique  $\vec{H}_m^I$  au centre d'une maille donnée  $V_I$ , est égal à la somme des champs d'excitation dus à sa propre magnétisation  $\vec{M}^I$  et à la magnétisation  $\vec{M}^J$  de toutes les autres mailles :

$$\vec{H}_m^I = \vec{H}_m^{II} + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N_e} \vec{H}_m^{IJ} \quad (III.4)$$

### **III.4) Décomposition sur une base orthonormée**

En utilisant une base orthonormée  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ , l'aimantation  $\vec{M}^J$ , la normale  $\vec{n}^{S_I}$  et le vecteur de position  $\vec{R}^{IJ}$  peuvent être décomposés en leurs composantes dans cette base :

$$\begin{cases} \vec{M}^J = \sum_{k=1}^3 M_k^J \vec{e}_k \\ \vec{R}^{IJ} = \sum_{k=1}^3 R_k^{IJ} \vec{e}_k \\ \vec{n}^{S_I} = \sum_{k=1}^3 n_k^{S_I} \vec{e}_k \end{cases} \quad (III.5)$$

Ainsi que le champ d'excitation magnétique induit :

$$\vec{H}_m^I = \sum_{k=1}^3 H_{mk}^I \vec{e}_k \quad (III.6)$$

Selon l'écriture précédente, la relation (III.4) s'écrit :

$$H_{mk}^I = H_{mk}^{II} + \sum_{\substack{J=1 \\ J \neq I}}^{N_e} H_{mk}^{IJ} \quad (III.7)$$

La relation (III.7) est composée de deux termes. Ils sont calculés par deux relations différentes, le premier terme de (III.7) sera calculé par la relation représentée par l'intégrale surfacique (III.3) et le deuxième terme de (III.7) sera calculé par la relation représentée par l'intégrale volumique (III.2). Nous allons discuter de chacun d'eux plus en détail dans la suite.

### **III.5) Intégrale volumique sous forme matricielle**

En ce qui concerne (III.7),  $H_{mk}^{IJ}$  est la  $k^{ème}$  composante du vecteur  $\vec{H}_m^{IJ}$ . De (III.2), nous pouvons écrire :

$$H_{mk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_J} \left\{ 3 \frac{(\vec{R}^{IJ} \cdot \vec{M}^J)}{(R^{IJ})^5} R_k^{IJ} - \frac{M_k^J}{(R^{IJ})^3} \right\} dV \quad (III.8)$$

En développant l'équation (III.8), nous avons la forme matricielle suivante :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$\begin{Bmatrix} H_{m1}^{IJ} \\ H_{m2}^{IJ} \\ H_{m3}^{IJ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^{IJ} & F_{12}^{IJ} & F_{13}^{IJ} \\ F_{21}^{IJ} & F_{22}^{IJ} & F_{23}^{IJ} \\ F_{31}^{IJ} & F_{32}^{IJ} & F_{33}^{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^J \\ M_2^J \\ M_3^J \end{Bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Pour  $k \neq l$ ,  $F_{kl}^{IJ}$  est donné par l'intégral :

$$F_{kl}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_J} 3 \frac{R_k^{IJ} \cdot R_l^{IJ}}{(R^{IJ})^5} dV \quad (\text{III.10})$$

Et les composantes diagonales sont données :

$$F_{kk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_J} \left[ 3 \frac{(R_k^{IJ})^2}{(R^{IJ})^5} - \frac{1}{(R^{IJ})^3} \right] dV \quad (\text{III.11})$$

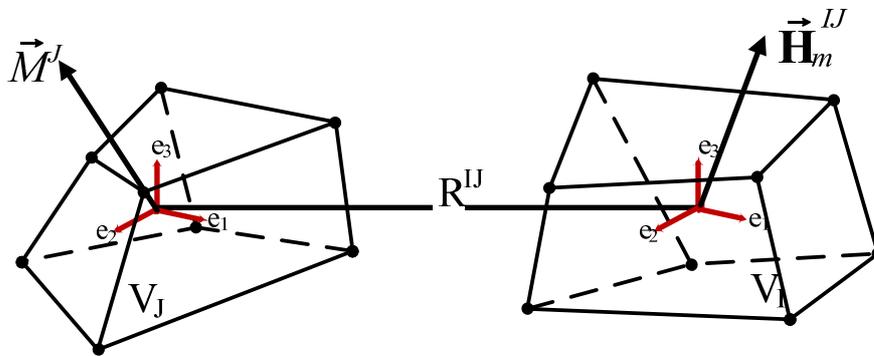


Fig. III.2 : Le champ d'excitation magnétique  $\vec{H}_m^{IJ}$  dans un élément I due à l'aimantation  $\vec{M}^J$  dans un élément J

Nous décrivons ici la technique d'approximation par élément finis isoparamétriques pour le calcul des intégrales.

#### ➤ Transformation géométrique

La transformation géométrique permet de relier un point de l'élément physique à un point de l'élément de référence comme le montre la figure (Fig. III.3).

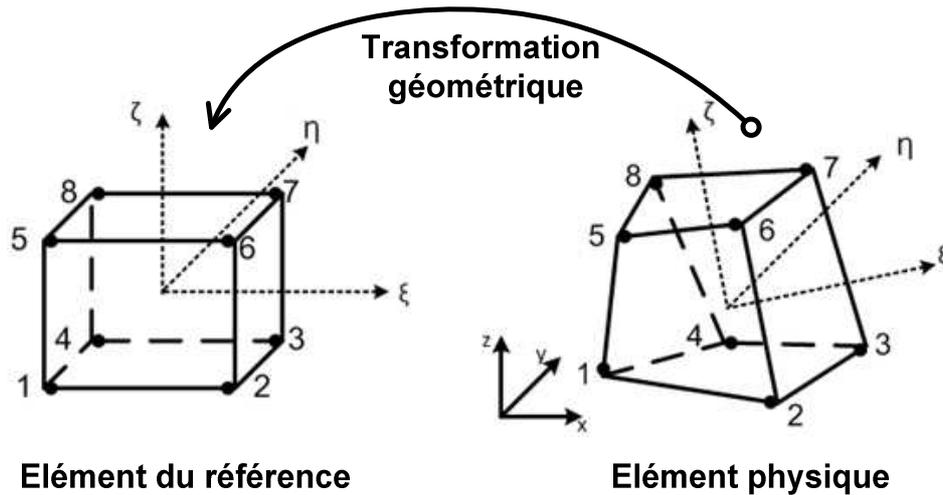


Fig. III.3 : *Elément hexaédrique linéaire* ( $N_g$ )

Soient  $x_i, y_i$  et  $z_i$  les coordonnées des nœuds de l'élément physique. Les coordonnées d'un point  $(x, y, z)$  de l'élément physique image d'un point  $(\xi, \eta, \zeta)$  de l'élément de référence sont donnés par [12] :

$$\begin{aligned}
 x(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{N_g} N_i(\xi, \eta, \zeta) x_i \\
 y(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{N_g} N_i(\xi, \eta, \zeta) y_i \\
 z(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{i=1}^{N_g} N_i(\xi, \eta, \zeta) z_i
 \end{aligned}
 \tag{III.12}$$

où  $N_i(\xi, \eta, \zeta)$  sont les fonctions d'interpolation et  $N_g$  est le nombre de points de nœuds.

Pour un élément isoparamétrique, on définit un nombre de nœuds égal à  $N_g$ . Pour des éléments hexaédriques, on peut prendre des éléments tri-linéaires. Le tableau (Tab. III.1) définit les coordonnées des nœuds de référence pour un élément tri-linéaire.

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

		Coordonnées		
		$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$
Nœuds	$n_1$	-1	-1	-1
	$n_2$	+1	-1	-1
	$n_3$	+1	+1	-1
	$n_4$	-1	+1	-1
	$n_5$	-1	-1	+1
	$n_6$	+1	-1	+1
	$n_7$	+1	+1	+1
	$n_8$	-1	+1	+1

Tab. III.1 : Coordonnées des nœuds de l'élément de référence (voir (Fig. III.3))

Les fonctions d'interpolation de chaque nœud sont alors [12] :

$$\begin{aligned}
 N_1(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) & N_2(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta) \\
 N_3(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) & N_4(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \zeta) \\
 N_5(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) & N_6(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \zeta) \\
 N_7(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta) & N_8(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \zeta)
 \end{aligned} \tag{III.13}$$

Ces huit formules peuvent être résumées en une seule expression :

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \tag{III.14}$$

où  $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i = \pm 1)$  représentent les coordonnées du  $i^{\text{ème}}$  nœud de référence comme le montre le tableau (Tab. III.1)).

#### ➤ Matrice jacobienne

La matrice jacobienne  $[J]$  relie les différentiels de  $(x, y, z)$  à ceux de  $(\xi, \eta, \zeta)$  :

$$[J] = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{III.15}$$

En substituant (III.12) dans (III.15), nous obtenons :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^{N_g} \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix} \quad (III.16)$$

La relation (III.16) peut être exprimée par le produit de deux matrices, la première ne contenant que les dérivées et la seconde ne contenant que les coordonnées des points géométriques :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial N_{N_g}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial N_{N_g}}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \dots & \frac{\partial N_{N_g}}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{N_g} & y_{N_g} & z_{N_g} \end{bmatrix} \quad (III.17)$$

L'avantage de cette écriture est que seule la deuxième matrice change d'un élément à un autre. La première matrice peut être calculée facilement à partir des équations (III.13).

La relation qui nous permet de transformer une intégrale sur l'élément physique en une intégrale sur une géométrie simple est alors la suivante :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) |det J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (III.18)$$

Le calcul des intégrales volumiques dans la relation (III.18) se fait à l'aide de formules telles que les quadratures de Gauss, car ces méthodes utilisent un nombre minimal de points pour atteindre le niveau de précision souhaité. Le domaine de l'intégration de cette méthode est traditionnellement pris comme  $[-1, 1]^3$ .

Pour les volumes, l'intégrale triple est transformée en une triple sommation, comme :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{s=1}^{n_{G_s}} \sum_{t=1}^{n_{G_t}} w_r w_s w_t f(\xi_r, \eta_s, \zeta_t) \quad (III.19)$$

où  $(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)$  et  $(w_r, w_s, w_t)$  sont respectivement les coordonnées et les pondérations des points d'intégration de Gauss dont les nombres  $n_{G_r}$ ,  $n_{G_s}$  et  $n_{G_t}$ . Nous allons utiliser la méthode la plus couramment connue qui est celle de Gauss-Legendre. Les points de Gauss sont alors les racines des polynômes de Legendre [68].

La relation (III.18) peut alors réécrire comme :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta, \zeta) |det J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \\ &= \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{s=1}^{n_{G_s}} \sum_{t=1}^{n_{G_t}} w_r w_s w_t |det J(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)| f(\xi_r, \eta_s, \zeta_t) \end{aligned} \quad (III.20)$$

Nous avons mentionné que nous allons appliquer la méthode des moments à deux dispositifs : une antenne basse fréquence et le PPS-Flex. Les éléments utilisés pour faire le maillage dans les deux exemples ne sont pas identiques. Dans le PPS-Flex, les éléments utilisés sont de forme hexaédrique irrégulière, et dans l'antenne basse fréquence, ils ont de forme hexaédrique régulière. Donc, les relations (III.10) et (III.11) s'écrivent selon la forme d'élément. Dans la suite, nous allons discuter du cas général (Hexaèdre irrégulier), puis, nous précisons le cas du cube.

#### Hexaèdre irrégulier

Supposons un élément défini par les huit nœuds  $n_1, n_2, \dots, n_8$ .

En appliquant les fonctions de transformation géométrique aux coordonnées locales pour chaque élément, l'équation (III.10) devient :

$$F_{kl}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 3 \frac{R_k^{IJ}(\xi, \eta, \zeta) \cdot R_l^{IJ}(\xi, \eta, \zeta)}{(R^{IJ})^5} |det J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (III.21)$$

Et les composantes diagonales calculées par la relation (III.11) deviennent :

$$F_{kk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left[ 3 \frac{(R_k^{IJ}(\xi, \eta, \zeta))^2}{(R^{IJ}(\xi, \eta, \zeta))^5} - \frac{1}{(R^{IJ}(\xi, \eta, \zeta))^3} \right] |det J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (III.22)$$

où :

$$R^{IJ} = \sqrt{(R_1^J - R_1^I)^2 + (R_2^J - R_2^I)^2 + (R_3^J - R_3^I)^2} \quad (III.23)$$

Étendons (III.23) en une forme d'intégration isoparamétriques, de sorte que :

$$R^{IJ}(\xi, \eta, \zeta) = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^{N_g=8} N_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i1} - R_1^I \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{N_g=8} N_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i2} - R_2^I \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^{N_g=8} N_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i3} - R_3^I \right)^2} \quad (III.24)$$

où :  $n_{i1}$ ,  $n_{i2}$  et  $n_{i3}$  représentent les coordonnées cartésiennes du nœud  $n_i$ .

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

Dans notre code, le calcul de  $|J(\xi, \eta, \zeta)|$  dans les relations (III.21) et (III.22) est fait par la relation (III.17) tandis que la première matrice de cette relation peut être calculée facilement en dérivant les relations (III.13).

En appliquant la méthode de Gauss, nous pouvons réécrire les équations (III.21) et (III.22) comme suit :

$$F_{kl}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{s=1}^{n_{Gs}} \sum_{t=1}^{n_{Gt}} 3 \frac{R_k^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t) \cdot R_l^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} |\det J(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)| w_r w_s w_t \quad (III.25)$$

$$F_{kk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{s=1}^{n_{Gs}} \sum_{t=1}^{n_{Gt}} \left[ 3 \frac{(R_k^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^2}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} - \frac{1}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^3} \right] |\det J(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)| w_r w_s w_t \quad (III.26)$$

#### Hexaèdre régulier

Il y a deux méthodes de calcul des coefficients  $F_{kl}^{IJ}$  représentés par les relations (III.10) et (III.11) en tenant compte de l'hexaèdre régulier. La première méthode est la résolution numérique qui consiste à simplifier les relations (III.10) et (III.11) en prenant en compte le cas particulier (hexaèdre régulier). La deuxième méthode concerne la résolution analytique étudiée dans les références [35] [40].

- 1<sup>ère</sup> cas : Solution numérique

Considérons un cube dont les coordonnées des nœuds sont données dans le tableau suivant (Tab. III.2).

		Coordonnées		
		$n_{i1}$	$n_{i2}$	$n_{i3}$
Nœuds	$n_1$	a	c	e
	$n_2$	b	c	e
	$n_3$	a	d	e
	$n_4$	b	d	e
	$n_5$	a	c	f
	$n_6$	b	c	f
	$n_7$	a	d	f
	$n_8$	b	d	f

Tab. III.2 : Coordonnées des coins hexaèdres (voir (Fig. III.3))

En substituant les coordonnées des nœuds dans la relation (III.12), nous obtenons :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$\begin{aligned}
 R_1^J(\xi) &= \sum_{i=1}^{N_g} T_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i1} = \frac{b-a}{2} \xi + \frac{b+a}{2} \\
 R_2^J(\eta) &= \sum_{i=1}^{N_g} T_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i2} = \frac{d-c}{2} \eta + \frac{d+c}{2} \\
 R_3^J(\zeta) &= \sum_{i=1}^{N_g} T_i(\xi, \eta, \zeta) n_{i3} = \frac{f-e}{2} \zeta + \frac{f+e}{2}
 \end{aligned} \tag{III.27}$$

En substituant la relation (III.27) dans (III.15), nous obtenons :

$$\det(J) = \left(\frac{b-a}{2}\right) \left(\frac{d-c}{2}\right) \left(\frac{f-e}{2}\right) \tag{III.28}$$

Dans ce cas le déterminant jacobien est constant. Il ne dépend pas des points de Gauss comme le cas d'élément hexaèdre irrégulier. Donc, les relations (III.10) et (III.11) peuvent s'écrire comme suit :

$$F_{kl}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} |\det(J)| \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{s=1}^{n_{Gs}} \sum_{t=1}^{n_{Gt}} 3 \frac{R_k^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t) \cdot R_l^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} w_r w_s w_t \tag{III.29}$$

$$F_{kk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} |\det(J)| \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{s=1}^{n_{Gs}} \sum_{t=1}^{n_{Gt}} \left[ 3 \frac{(R_k^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^2}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} - \frac{1}{(R^{IJ}(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^3} \right] w_r w_s w_t \tag{III.30}$$

où :

$$R^{IJ} = \sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2} \xi_r + \frac{b+a}{2}\right) - R_1^I\right)^2 + \left(\left(\frac{d-c}{2} \eta_s + \frac{d+c}{2}\right) - R_2^I\right)^2 + \left(\left(\frac{f-e}{2} \zeta_t + \frac{f+e}{2}\right) - R_3^I\right)^2} \tag{III.31}$$

Au final, nous obtenons des relations plus simples que les relations de l'hexaèdre irrégulier.

- 2<sup>ème</sup> cas : *Solution analytique*

Nous rappelons rapidement les relations analytiques décrites dans les références [40] [35] pour calculer  $F_{kl}^{IJ}$  et  $F_{kk}^{IJ}$  pour un volume d'un parallélépipède rectangle avec les dimensions  $w_1, w_2$  et  $w_3$  :

$$F_{kl}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \prod_{r=1}^2 \prod_{s=1}^2 \prod_{t=1}^2 \left[ R_{3t}^{IJ2} + \left( R_{1r}^{IJ2} + R_{2s}^{IJ2} + R_{3t}^{IJ2} \right)^{1/2} \right]^{(-1)^{r+s+t}} \right] \tag{III.32}$$

$$F_{kk}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^2 \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^2 (-1)^{(r+s+t+1)} \arctg \left[ (R_{1r}^{IJ})^{(-1)} R_{2s}^{IJ} R_{3t}^{IJ} (R_{1r}^{IJ2} + R_{2s}^{IJ2} + R_{3t}^{IJ2})^{(-1/2)} \right] \quad (III.33)$$

Avec :

$$R_{1r=1,2}^{IJ} = R_1^I - R_1^J \mp w_1/2, R_{2s=1,2}^{IJ} = R_2^I - R_2^J \mp w_2/2, R_{3t=1,2}^{IJ} = R_3^I - R_3^J \mp w_3/2 \quad (III.34)$$

où :  $R_{1,2,3}^I, R_{1,2,3}^J$  : représentent respectivement les coordonnées des barycentres des volumes  $V_I$  et  $V_J$ .

Les relations obtenues soit par la méthode numérique ((III.29), (III.30)) ou soit par la méthode analytique ((III.32), (III.33)) sont des triples sommations ou multiplications. Il apparait alors clairement que la méthode analytique est plus rapide que la méthode numérique lors que cette dernière utilise un nombre de point intégration supérieur à 2.

Dans l'antenne basse fréquence, nous utiliserons la solution analytique comme référence lors de la comparaison avec les résultats calculés par de la méthode des moments.

### **III.6) Intégrale surfacique sous forme matricielle**

Dans la relation (III.7),  $H_{mk}^{II}$  est la  $k^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\overrightarrow{H_m^{II}}$ . De (III.3), nous pouvons écrire :

$$H_{mk}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^6 \left[ \iint_{S_l} \frac{(\overrightarrow{M^I} \cdot \overrightarrow{n^{S_l}})}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS \right] \quad (III.35)$$

où  $\overrightarrow{R^{IQ}}$  est le vecteur reliant un point  $Q$  sur la surface  $S_l$  et le centre du bloc  $V_I$ .

En prenant en compte les relations (III.5) et (III.6), le développement de l'équation (III.35) conduit à une forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} H_{m1}^{II} \\ H_{m2}^{II} \\ H_{m3}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^{II} & F_{12}^{II} & F_{13}^{II} \\ F_{21}^{II} & F_{22}^{II} & F_{23}^{II} \\ F_{31}^{II} & F_{32}^{II} & F_{33}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^I \\ M_2^I \\ M_3^I \end{Bmatrix} \quad (III.36)$$

où :

$$F_{kl}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^6 \left[ \iint_{S_l} \frac{n_l^{S_l}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS \right] \quad (III.37)$$

Dans le cube, cette relation peut prendre une expression plus simple. Pour cela, nous procédons de la manière suivante :

Comme le montre la figure (Fig. III.4), la surface  $S_l$  dans la relation (III.37) peut être décomposée en six surfaces telles que :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$S_I = \bigcup_{\substack{k=-3 \\ k \neq 0}}^3 S_{Ik} \quad (\text{III.38})$$

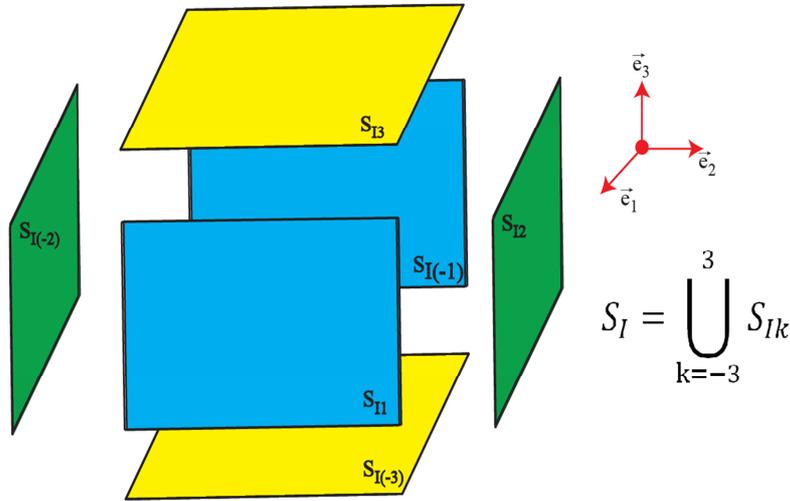


Fig. III.4 : Surface de l'intégration  $S_{Ik}$  pour calculer le champ magnétique induit au centre du volume élémentaire  $I$  due à son aimantation

Donc, de (III.3) et (III.38), nous pouvons écrire  $H_{mk}^{II}$  :

$$H_{mk}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{J=1}^3 \left[ \iint_{S_{IJ}} \frac{(\overline{M^I} \cdot \overline{n^{S_{IJ}}})}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS + \iint_{S_{I(-J)}} \frac{(\overline{M^I} \cdot \overline{n^{S_{I(-J)}}})}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS \right] \quad (\text{III.39})$$

Le développement de l'équation (III.39) conduit à une forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} H_{m1}^{II} \\ H_{m2}^{II} \\ H_{m3}^{II} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11}^{II} & F_{12}^{II} & F_{13}^{II} \\ F_{21}^{II} & F_{22}^{II} & F_{23}^{II} \\ F_{31}^{II} & F_{32}^{II} & F_{33}^{II} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^I \\ M_2^I \\ M_3^I \end{Bmatrix} \quad (\text{III.40})$$

où :

$$F_{kl}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{J=1}^3 \left[ \iint_{S_{IJ}} \frac{n_l^{S_{IJ}}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS + \iint_{S_{I(-J)}} \frac{n_l^{S_{I(-J)}}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS \right] \quad (\text{III.41})$$

D'après la figure (Fig. III.4), nous avons :

$$\begin{aligned} R_k^{IQ} |_{S_{IJ}} &= - R_k^{IQ} |_{S_{I(-J)}} \\ n_l^{S_{IJ}} &= - n_l^{S_{I(-J)}} \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Donc la relation (III.41) peut se réécrire comme suit :

$$F_{kl}^{II} = \frac{2}{4\pi} \sum_{J=1}^3 \left[ \iint_{S_{IJ}} \frac{n_l^{S_{IJ}}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS \right] \quad (III.43)$$

La relation (III.43) montre que l'intégrale se fait que sur les trois surfaces au lieu de six surfaces comme dans le cas hexaèdre irrégulier ((III.37).

Le calcul d'intégrale surfacique dans les équations (III.37) et (III.43) se fera aussi à l'aide de la formule de quadrature de Gauss. Nous allons discuter dans la suite le calcul de l'intégrale sur les surfaces de deux éléments : Hexaèdre régulier et irrégulier.

Hexaèdre régulier

La relation (III.43) représente la sommation du calcul de l'intégrale sur trois surfaces. Nous allons appliquer la méthode de Gauss à une surface d'hexaèdre. De ce fait, la relation (III.43) peut s'écrire pour une surface comme suit :

$$F_{kl}^{II} = \frac{1}{4\pi} |det(J)| \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{s=1}^{n_{Gs}} w_r w_s \frac{n_l^{S_{I1}}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} \quad (III.44)$$

Les relations qui calculent  $R^{IQ}$  et  $det(J)$  changent d'une surface à l'autre. D'après la relation (III.43), nous avons trois surfaces  $S_{I1}$ ,  $S_{I2}$  et  $S_{I3}$  à intégrer. Les relations permettant de calculer  $R^{IQ}$  et  $det(J)$  sont recueillies dans le tableau (Tab. III.3) et correspondent à la figure (Fig. III.4).

$S_{IJ}$	$det J$	$R^{IQ}$
$S_{I1}$	$\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{d-c}{2}\right)$	$\sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\xi_r + \frac{b+a}{2}\right) - R_1^I\right)^2 + \left(\left(\frac{d-c}{2}\eta_s + \frac{d+c}{2}\right) - R_2^I\right)^2 + (R_3^Q - R_3^I)^2}$
$S_{I2}$	$\left(\frac{b-a}{2}\right)\left(\frac{f-e}{2}\right)$	$\sqrt{\left(\left(\frac{b-a}{2}\xi_r + \frac{b+a}{2}\right) - R_1^I\right)^2 + (R_2^Q - R_2^I)^2 + \left(\left(\frac{f-e}{2}\zeta_t + \frac{f+e}{2}\right) - R_3^I\right)^2}$
$S_{I3}$	$\left(\frac{d-c}{2}\right)\left(\frac{f-e}{2}\right)$	$\sqrt{(R_1^Q - R_1^I)^2 + \left(\left(\frac{d-c}{2}\eta_s + \frac{d+c}{2}\right) - R_2^I\right)^2 + \left(\left(\frac{f-e}{2}\zeta_t + \frac{f+e}{2}\right) - R_3^I\right)^2}$

Tab. III.3 : Relations pour calculer  $R^{IJ}$  et  $|J|$  pour les trois surfaces  $S_{I1}$ ,  $S_{I2}$  et  $S_{I3}$

Le tableau (Tab. III.3) montre que le déterminant de la matrice Jacobien  $det(J)$  est constant, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas des points de Gauss, au contraire de  $R^{IQ}$ . Ces relations sont composées de trois termes dont un est constant. En conséquence, la relation (III.43) représente la sommation de trois intégrales surfaciques. Chaque intégrale est fonction de deux variables, contrairement au cas suivant où nous avons une intégrale surfacique d'une fonction à trois variables.

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

#### Hexaèdre irrégulier

Dans la relation (III.37), nous avons une intégrale surfacique d'une fonction à trois variables  $(x, y, z)$  sur les surfaces. Ceci exige une autre manière pour la calculer. Parmi les méthodes présentées dans la littérature, nous avons choisi la méthode « Graphes de fonctions » dont le principe est expliqué dans l'annexe (A.8). Cette méthode sera appliquée à la surface définie par les nœuds  $n_1, n_4, n_8, n_5$  comme le montre la figure (Fig. III.5).

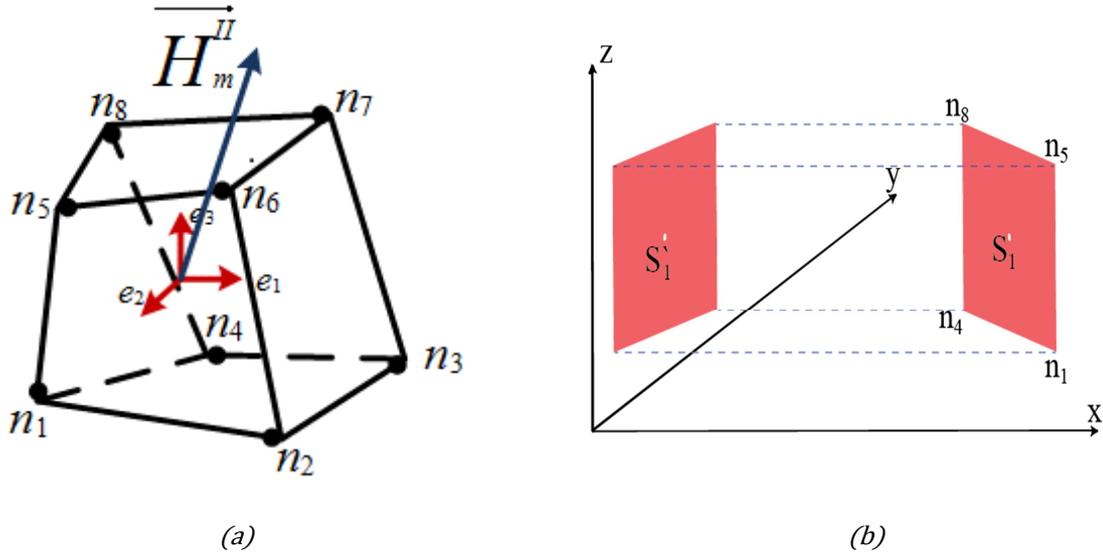


Fig. III.5 : (a) Hexaèdre déterminé par huit nœuds :  $n_1, n_2, \dots, n_8$ . (b) Paramétrisation de la surface  $S_1$  déterminée par les nœuds  $(n_1, n_4, n_8, n_5)$  en utilisant trois variables  $(x, y, z)$ .  
Paramétrisation de la surface  $S_1'$  en utilisant les deux variables  $(y, z)$

Donc, l'équation (III.37) devient pour cette surface :

$$F_{kl}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^{n_{Gr}} \sum_{t=1}^{n_{Gt}} w_r w_t |det J(\xi_i, \eta_j)| \frac{n_l^{S_1}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} G \quad (III.45)$$

où :  $G$  dépend des coordonnées de la normale à la surface. Il est calculé par l'équation suivante :

$$G = \sqrt{\left(\frac{-n_2^{S_1}}{n_1^{S_1}}\right)^2 + \left(\frac{-n_3^{S_1}}{n_1^{S_1}}\right)^2 + 1} \quad (III.46)$$

L'expression de  $R^{IQ}$  est différente de celle vue avant dans le cas du cube où un des trois termes de  $R^{IQ}$  est constant comme le montre le tableau (Tab. III.3). Ici,  $R^{IQ}$  est calculé comme suit (voir l'Annexe (A.8)) :

$$R^{IQ} = \sqrt{(R_1^Q(\eta, \zeta) - R_1^I)^2 + (R_2^Q(\eta, \zeta) - R_2^I)^2 + (R_3^Q(\eta, \zeta) - R_3^I)^2} \quad (III.47)$$

où :

$$R_2^Q(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\xi, \eta) n_{i2} \quad (III.48)$$

$$R_3^Q(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(\xi, \eta) n_{i3} \quad (III.49)$$

où  $R_1^Q$  est calculé selon l'annexe (A.8) comme suit :

$$R_1^Q(\eta, \zeta) = \frac{-n_2^{S_1}(R_2^Q(\eta, \zeta) - n_{12}) - n_3^{S_1}(R_3^Q(\eta, \zeta) - n_{13})}{n_1^{S_1}} + n_{11} \quad (III.50)$$

Donc, les relations (III.46) et (III.50) dépendent des coordonnées de la normale qui est calculée comme suit :

Les surfaces d'un élément du maillage sont des quadrilatères quelconques. Chaque élément surfacique  $S$  peut se transformer en un carré unité  $[-1,1]^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ , dit élément de référence, par une transformation bilinéaire (Fig. III.6) (voir l'annexe (A.9)).

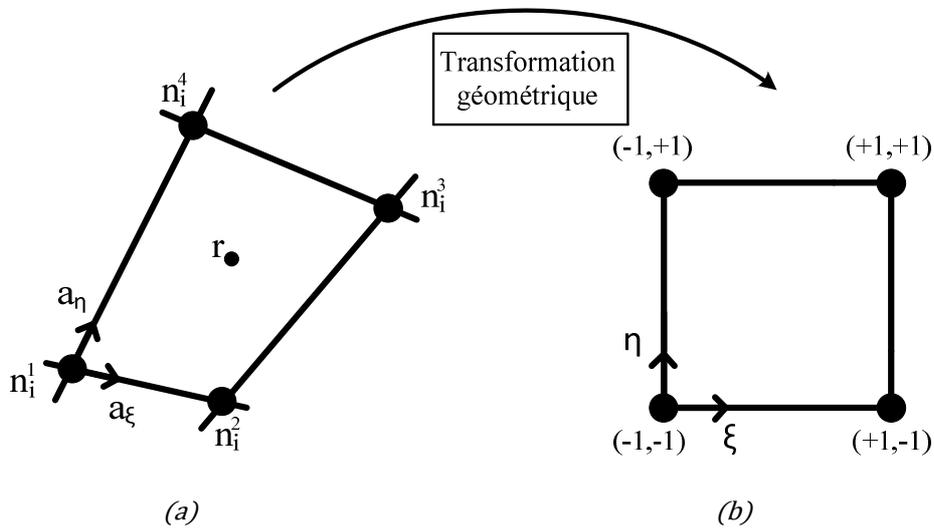


Fig. III.6 : (a) Représentation d'un quadrilatère  $S$ . (b) Carré de référence

L'expression d'un point  $\vec{r}$  dans un quadrilatère  $S$  de sommets  $n_1, n_2, n_3, n_4$  donné dans un système de coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  où  $\xi, \eta \in [-1,1]$ , est :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$\vec{r}(\xi, \eta) = (1 + \xi\eta - \xi - \eta)\overline{on}_1 + (\xi - \xi\eta)\overline{on}_2 + \xi\eta\overline{on}_3 + (\eta - \xi\eta)\overline{on}_4 \quad (\text{III.51})$$

où :  $\overline{on}_1$ ,  $\overline{on}_2$ ,  $\overline{on}_3$  et  $\overline{on}_4$  représentent respectivement les vecteurs associés aux nœuds  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  et  $n_4$ .

Le point  $\vec{r}$  peut également être représenté par :

$$\vec{r}(\xi, \eta) = \vec{r}_c + \vec{r}_\xi \xi + \vec{r}_\eta \eta + \vec{r}_{\xi\eta} \xi \eta \quad (\text{III.52})$$

avec :

$$\begin{aligned} \vec{r}_c &= \overline{on}_1 \\ \vec{r}_\xi &= \overline{on}_2 - \overline{on}_1 \\ \vec{r}_\eta &= \overline{on}_4 - \overline{on}_1 \\ \vec{r}_{\xi\eta} &= \overline{on}_1 - \overline{on}_2 + \overline{on}_3 - \overline{on}_4 \end{aligned} \quad (\text{III.53})$$

La base des vecteurs tangents à un tel quadrilatère est définie par :

$$\begin{aligned} \overline{a}_\xi(\xi, \eta) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \xi} = \vec{r}_\xi + \vec{r}_{\xi\eta} \eta \\ \overline{a}_\eta(\xi, \eta) &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \eta} = \vec{r}_\eta + \vec{r}_{\xi\eta} \xi \end{aligned} \quad (\text{III.54})$$

Les vecteurs tangents suivent les isolignes de la figure (Fig. III.6). La normale unitaire  $\vec{n}^s(\xi, \eta)$  est définie par :

$$\vec{n}^s(\xi, \eta) = \frac{\overline{a}_\xi(\xi, \eta) \times \overline{a}_\eta(\xi, \eta)}{|\overline{a}_\xi(\xi, \eta) \times \overline{a}_\eta(\xi, \eta)|} \quad (\text{III.55})$$

### III.7) Forme générale de la matrice

De (III.7), (III.9) et (III.36) la composante  $k$  du champ d'excitation magnétique au centre du bloc  $I$  peut être écrite comme suit :

$$H_{mk}^I = \sum_{J=1}^{N_e} \left( \sum_{l=1}^3 F_{kl}^{IJ} \cdot M_l^J \right) \quad (\text{III.56})$$

Autrement dit :

$$\begin{Bmatrix} H_{m1}^{l=1} \\ H_{m2}^{l=1} \\ H_{m3}^{l=1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{11}^{11} & F_{12}^{11} & F_{13}^{11}] & [F_{11}^{12} & F_{12}^{12} & F_{13}^{12}] & \dots & [F_{11}^{1J} & F_{12}^{1J} & F_{13}^{1J}] \\ [F_{21}^{11} & F_{22}^{11} & F_{23}^{11}] & [F_{21}^{12} & F_{22}^{12} & F_{23}^{12}] & \dots & [F_{21}^{1J} & F_{22}^{1J} & F_{23}^{1J}] \\ [F_{31}^{11} & F_{32}^{11} & F_{33}^{11}] & [F_{31}^{12} & F_{32}^{12} & F_{33}^{12}] & \dots & [F_{31}^{1J} & F_{32}^{1J} & F_{33}^{1J}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ M_3^2 \\ \vdots \\ M_1^J \\ M_2^J \\ M_3^J \end{Bmatrix} \quad (III.57)$$

Pour un maillage avec  $N_e$  éléments, la matrice globale définie par bloc peut être écrite de la manière suivante :

$$\begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{m1}^{l=1} \\ H_{m2}^{l=1} \\ H_{m3}^{l=1} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} H_{m1}^{l=2} \\ H_{m2}^{l=2} \\ H_{m3}^{l=2} \end{Bmatrix} \\ \vdots \\ \begin{Bmatrix} H_{m1}^{l=J} \\ H_{m2}^{l=J} \\ H_{m3}^{l=J} \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [F_{11}^{11} & F_{12}^{11} & F_{13}^{11}] & [F_{11}^{12} & F_{12}^{12} & F_{13}^{12}] & \dots & [F_{11}^{1J} & F_{12}^{1J} & F_{13}^{1J}] \\ [F_{21}^{11} & F_{22}^{11} & F_{23}^{11}] & [F_{21}^{12} & F_{22}^{12} & F_{23}^{12}] & \dots & [F_{21}^{1J} & F_{22}^{1J} & F_{23}^{1J}] \\ [F_{31}^{11} & F_{32}^{11} & F_{33}^{11}] & [F_{31}^{12} & F_{32}^{12} & F_{33}^{12}] & \dots & [F_{31}^{1J} & F_{32}^{1J} & F_{33}^{1J}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [F_{11}^{21} & F_{12}^{21} & F_{13}^{21}] & [F_{11}^{22} & F_{12}^{22} & F_{13}^{22}] & \dots & [F_{11}^{2J} & F_{12}^{2J} & F_{13}^{2J}] \\ [F_{21}^{21} & F_{22}^{21} & F_{23}^{21}] & [F_{21}^{22} & F_{22}^{22} & F_{23}^{22}] & \dots & [F_{21}^{2J} & F_{22}^{2J} & F_{23}^{2J}] \\ [F_{31}^{21} & F_{32}^{21} & F_{33}^{21}] & [F_{31}^{22} & F_{32}^{22} & F_{33}^{22}] & \dots & [F_{31}^{2J} & F_{32}^{2J} & F_{33}^{2J}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ [F_{11}^{J1} & F_{12}^{J1} & F_{13}^{J1}] & [F_{11}^{J2} & F_{12}^{J2} & F_{13}^{J2}] & \dots & [F_{11}^{JJ} & F_{12}^{JJ} & F_{13}^{JJ}] \\ [F_{21}^{J1} & F_{22}^{J1} & F_{23}^{J1}] & [F_{21}^{J2} & F_{22}^{J2} & F_{23}^{J2}] & \dots & [F_{21}^{JJ} & F_{22}^{JJ} & F_{23}^{JJ}] \\ [F_{31}^{J1} & F_{32}^{J1} & F_{33}^{J1}] & [F_{31}^{J2} & F_{32}^{J2} & F_{33}^{J2}] & \dots & [F_{31}^{JJ} & F_{32}^{JJ} & F_{33}^{JJ}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^2 \\ M_2^2 \\ M_3^2 \\ \vdots \\ M_1^J \\ M_2^J \\ M_3^J \end{Bmatrix} \quad (III.58)$$

Les blocs diagonaux sont calculés par les relations représentées par l'intégrale surfacique, et les autres sont calculés par les relations représentées par l'intégrale volumique.

Ceci peut être mis sous une forme matricielle globale :

$$\{H^m\} = [F]\{M\} \quad (III.59)$$

où  $\{H^m\}$  et  $\{M\}$  sont deux matrices colonnes  $3N_e \times 1$  contenant respectivement toutes les composantes du champ d'excitation magnétique induit et toutes les composantes du vecteur de magnétisation dans chaque maille. Leurs composantes peuvent être définies par :

$$\begin{cases} H_{3*(l-1)+k}^m = H_{mk}^l \\ M_{3*(l-1)+l} = M_l^l \end{cases} \quad (III.60)$$

où  $[F]$  est une matrice  $3N_e \times 3N_e$  qui peut être liée aux matrices élémentaires  $[F^{IJ}]$  par les relations suivantes :

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

$$F_{3*(I-1)+k,3*(J-1)+l} = F_{kl}^{IJ} \quad (\text{III.61})$$

Nous avons trouvé que dans le cas de non singularité, le calcul de  $F_{kl}^{IJ}$  est évalué par (III.10) et (III.11) qui dépendent du volume  $V_J$  d'un élément  $J$  du maillage et dépendent aussi de la distance  $R^{IJ}$  entre deux éléments (Fig. III.2). Donc, dans le cas du maillage composé des éléments de tailles identiques, la matrice  $[F]$  est une matrice symétrique par rapport à la diagonale principale, dans ce cas, nous ne pourrions calculer que les coefficients sur la diagonale et les coefficients dans la partie située au-dessus de la diagonale. Donc, le temps de calcul peut être réduit à peu près à la moitié du temps nécessaire pour calculer la matrice complète.

Dans ce qui suit, la matrice  $[F^{IJ}]$  est appelée la « matrice d'interaction élémentaire » et  $[F]$  la « matrice d'interaction globale ».

La relation (III.59) seule ne permet pas de déterminer l'aimantation de chaque maille. Pour cela, nous allons utiliser deux autres relations :

- la première équation est :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}_s(P) + \vec{H}_m(P) \quad (\text{III.62})$$

La relation (III.62) est une relation générale qui calcule le champ magnétique total pour n'importe quel point  $P$ . Nous allons la réécrire au barycentre de chaque maille du maillage. Il est donc possible de la mettre sous la forme matricielle, nous obtenons :

$$\{H\} = \{H^S\} + \{H^m\} \quad (\text{III.63})$$

En substituant (II.24) dans l'équation (III.63), nous obtenons :

$$\{H\} = \{H^S\} + [F]\{M\} \quad (\text{III.64})$$

$\{H\}$  est une matrice colonne  $3N_e \times 1$  contenant les composantes du champ d'excitation magnétique dans chaque maille et  $\{H^S\}$  est une matrice colonne avec toutes les composantes du champ d'excitation magnétique source calculé par la loi Biot et Savart.

- la deuxième équation dont nous avons besoin est la loi de comportement du matériau. Elle est écrite dans le cas non linéaire sous la forme suivante :

$$\vec{M}(Q) = f(\vec{H}) \quad (\text{III.65})$$

Dans le cas linéaire, cette relation (III.65) devient :

$$\vec{M}(Q) = (\mu_r - 1)\vec{H}(Q) \quad (\text{III.66})$$

où  $Q$  appartient au matériau  $\Omega_F$ .

La détermination de l'aimantation dépend de la nature du matériau utilisé. Dans la suite, nous discuterons chaque cas séparément (matériaux linéaires et non linéaires).

### **III.8) Identification de l'aimantation de matériaux ferromagnétiques linéaires**

#### **III.8.1) Matériaux ferromagnétiques linéaires**

Nous allons récrire la relation (III.66) au barycentre de chaque maille du maillage. Il est donc possible de la mettre sous forme matricielle, nous obtenons :

$$\{M\} = (\mu_r - 1)\{H\} \quad (III.67)$$

En substituant l'équation (III.67) en (III.64), nous pouvons écrire :

$$([I] - (\mu_r - 1)[F])\{M\} = (\mu_r - 1)\{H^S\} \quad (III.68)$$

La résolution de la relation (III.68) donne les composantes du vecteur de l'aimantation dans chaque maille avec lesquelles nous pourrions calculer le champ magnétique, les courants de Foucault [69] (Annexe (0)), la force et l'énergie magnétostatique.

Nous pourrions résoudre le système linéaire (III.68) de deux manières : la première manière est la méthode de Gauss. L'autre manière est la méthode GMRES (la généralisation de la Méthode de Minimisation du Résidu) [70], elle est une méthode itérative pour déterminer une solution numérique d'un système d'équations linéaires comme (III.68).

#### **III.8.2) Matériaux ferromagnétiques non linéaires**

En cas général, la loi du comportement du matériau ferromagnétique est non linéaire. Un solveur approprié est alors nécessaire pour résoudre ce système d'équation (III.64).

Plusieurs algorithmes peuvent être appliqués pour résoudre le problème non linéaire. Les performances (précision et rapidité) des algorithmes dépendent de la formulation et du niveau de saturation. Dans la suite, nous présenter la méthode du point fixe.

##### **➤ Méthode du point fixe**

C'est la méthode la plus basique pour trouver les racines d'une équation non-linéaire de la forme :

$$f(x) = x - g(x) = 0 \quad (III.69)$$

L'algorithme de la méthode du point fixe est :

$$x^{k+1} = g(x^k) \quad (III.70)$$

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

Cet algorithme converge vers le point fixe pour  $g(\alpha)$  et permet de trouver la racine de  $f(\alpha) = 0$ .

Cette méthode a été appliquée à de nombreuses reprises [71] [72] [73] en formulant, selon les cas, l'équation  $g$  en fonction de  $\vec{H}$  ou en fonction de  $\vec{M}$ .

Pour résoudre (III.64), le critère d'arrêt se base sur le résidu :

$$\{R\} = \{H^S\} + [F]\{M\} - \{H\} \quad (\text{III.71})$$

L'algorithme s'arrête pour :

$$\|R\| \leq \varepsilon \quad (\text{III.72})$$

où  $\varepsilon$  est un petit nombre positif que l'on choisit en considérant la précision souhaitée, coût du calcul, réalisabilité,....

Le résidu est utilisé pour construire la procédure [51]:

$$\{H^{(k+1)}\} = \{H^{(k)}\} + \omega^{(k)}\mathcal{R}^{(k)} = g(H^{(k)}) \quad (\text{III.73})$$

où  $\omega^{(k)}$  est un paramètre de relaxation donnée par une formule [51].

Et :

$$\{\mathcal{R}^{(k)}\} = \{H^S\} + [F]\{M^{(k)}\} - \{H^{(k)}\} \quad (\text{III.74})$$

Pour des relaxations constantes  $\omega^{(k)} = \omega$ , nous avons [51] :

$$0 < \omega < \omega_{max} = 2(1 + \chi_{max})^{-1} \quad (\text{III.75})$$

avec :

$$\chi_{max} = \left( \frac{|\partial M|}{|\partial H|} \right)_{max} \quad (\text{III.76})$$

Dans le cas linéaire :

$$\chi_{max} = \chi = (\mu_r - 1) \quad (\text{III.77})$$

L'algorithme suivant (Fig. III.7) peut être utilisé pour réaliser (III.73).

1. Pour  $k = 0$ , choisir la valeur initiale  $\{H^{(k=0)}\} = \{H^S\}$
2. Calculer les magnétisations  $\{M^{(k)}\}$  à partir de la loi du matériau  $\{M^{(k)}\} = f(\{H^{(k)}\})$
3. Calculer le champ complètement  $\tilde{H}^{(k)}$  qui est compatible avec  $\{M^{(k)}\}$ , exemple :
$$\{\tilde{H}^{(k)}\} = \{H^S\} + [F]\{M^{(k)}\}$$
4. Mettre à jour  $\{H\}$ , en exécutant l'étape de relaxation.

5. Augmenter d'une unité et continuer les étapes 2) -5) jusqu'à ce que la norme de l'incrément soit suffisamment faible, c'est-à-dire, jusqu'à erreur  $\leq \varepsilon$ .

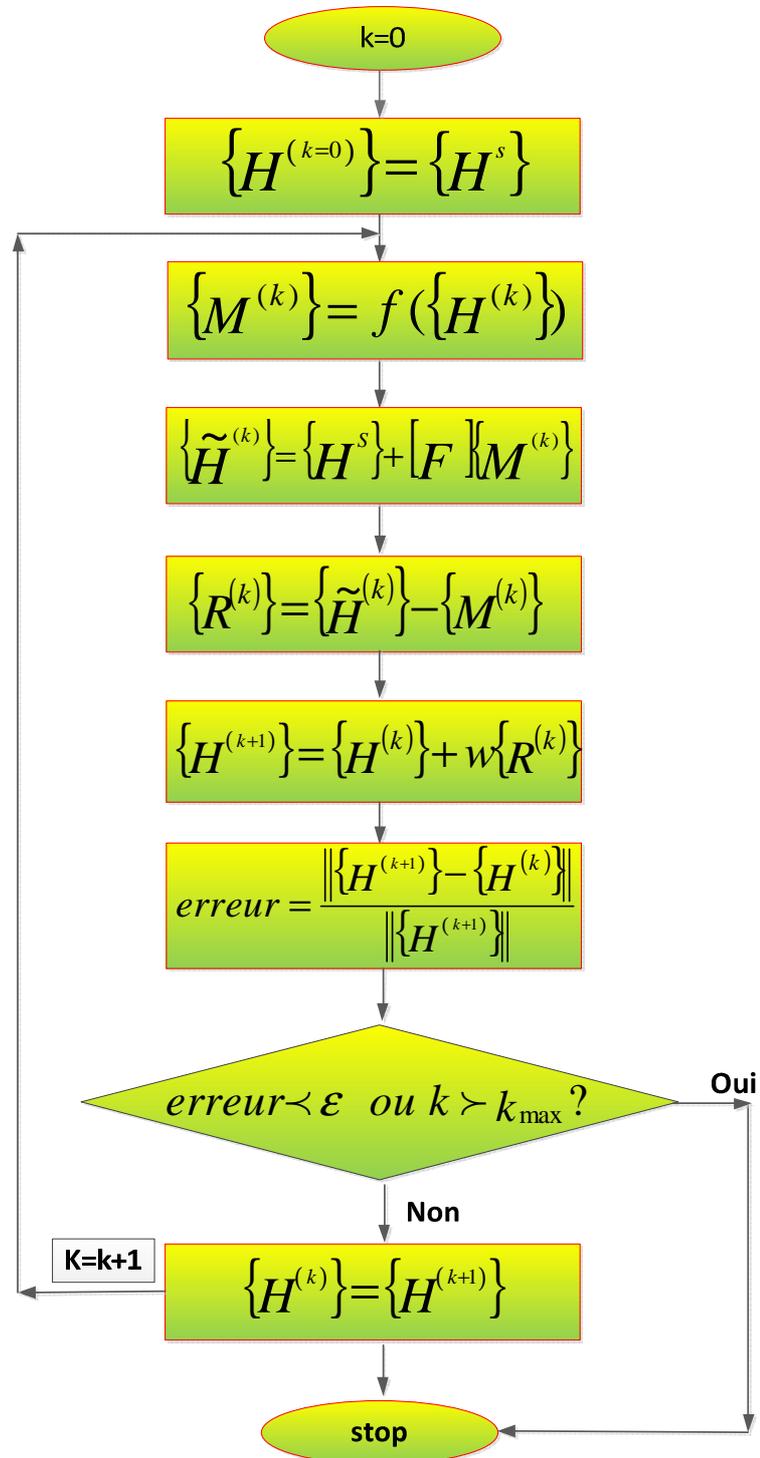


Fig. III.7 : Algorithme de la méthode des moments en cas non linéaire

### **III.9) Calcul du champ magnétique**

La relation (III.67) permet d'obtenir la valeur du champ magnétique au centre des blocs à l'intérieur du noyau. En un point  $P$ , en dehors du noyau, connaissant l'aimantation  $\vec{M}^I$  à l'intérieur de chaque bloc, le champ magnétique total peut être calculé à partir de l'équation (III.62), où :

$$\vec{H}_m(P) = \sum_{I=1}^{N_e} \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_{IM}} \left\{ 3 \frac{(\vec{M}^I \vec{r}_{PN})}{r_{PN}^5} \vec{r}_{PN} - \frac{\vec{M}^I}{r_{PN}^3} \right\} dV \quad (III.78)$$

Et :

$$\vec{H}_S(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_S} \frac{J(N) \Delta \vec{r}_{PN}}{r_{PN}^3} dV \quad (III.79)$$

### **III.10) Calcul de l'énergie magnétostatique**

La densité d'énergie stockée dans un champ magnétostatique établi dans un matériau isotrope linéaire est donnée par cette relation [74] :

$$W_B = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} \text{ Joules/m}^3 \quad (III.80)$$

L'énergie totale stockée dans le champ magnétostatique est obtenue en intégrant la densité d'énergie  $W_B$  sur tout l'espace (le volume élémentaire est  $dv$ ) :

$$U_B = \iiint_V \frac{\vec{B} \cdot \vec{H}}{2} dv \quad (III.81)$$

Cette expression de l'énergie totale,  $U_B$ , peut être transformée en une intégrale sur les sources du champ magnétostatique [74] par le vecteur identité :

$$U_B = \frac{1}{2} \iiint_V (\vec{J}_f \cdot \vec{A}) d\tau \quad (III.82)$$

Sachant que la densité de courant vérifie :

$$\begin{cases} \vec{J}_f = \vec{J}_s & \text{dans } \Omega_s \\ \vec{J}_f = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (III.83)$$

La relation (III.82) devient :

$$U_B = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_S} (\vec{J}_s \cdot \vec{A}) dV \quad (\text{III.84})$$

Nous utilisons la méthode de sommation pour calculer (III.84), donc, nous divisons le domaine  $\Omega_S$  en  $N_e$  volumes élémentaires, dans lesquels la densité de courant  $\vec{J}_{s_n} = |\vec{J}_{s_n}| \vec{e}_j$  peut être considérée comme vecteur constant, où  $\vec{e}_j$  est le vecteur unitaire.

Donc l'énergie totale (III.84) peut être écrite :

$$U_B = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_e} (\vec{J}_{s_n} \cdot \vec{A}_n) dv_n \quad (\text{III.85})$$

où  $\vec{A}_n$  est le potentiel vecteur total qui est égal :

$$\vec{A}_n(P) = \vec{A}_{n_m}(P) + \vec{A}_{n_s}(P) \quad (\text{III.86})$$

où :

-  $\vec{A}_{n_m}$  est le potentiel vecteur magnétique produit au point  $P$  par l'aimantation  $\vec{M}$  du matériau  $\Omega_F$ , ce potentiel peut être calculé par [65] :

$$\vec{A}_{n_m}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M}_K \times \vec{r}_{PK}}{r_{PK}^3} dV_F \quad (\text{III.87})$$

où  $\vec{M}_K$  est une aimantation uniforme à l'intérieur d'un polyèdre  $dV_F \in \Omega_F$  dont le barycentre est  $K$ , comme le montre la figure (Fig. III.8).

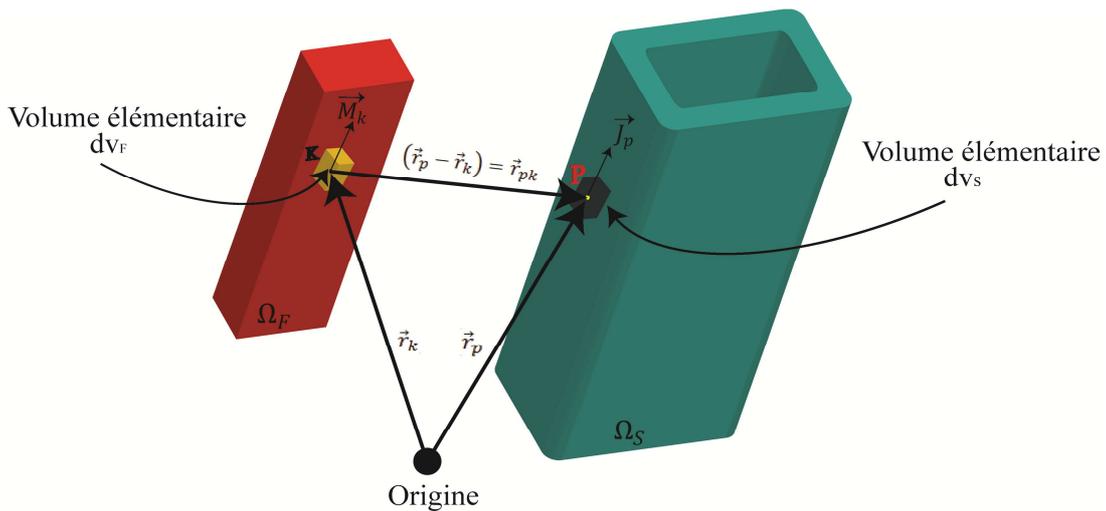


Fig. III.8 : Géométrie utilisée pour calculer le potentiel vecteur au point  $P$  généré par une aimantation

### § 3 : FORMULATION MATRICIELLE DE LA METHODE DES MOMENTS

-  $\vec{A}_{n_s}$  est le potentiel vecteur produit au point  $P$  par une densité de courant uniforme  $\vec{J}$  à l'intérieur d'un polyèdre  $dV_s \in \Omega_s$ , ce potentiel peut être calculé par cette équation [65] :

$$\vec{A}_{n_s}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_s \in \Omega_s} \frac{\vec{J}}{r_{PN}} dV_s \quad (\text{III.88})$$

où  $N$  est le point d'intégration et  $P \notin V_s$ .

Comme le montre la figure (Fig. III.8) pour  $P \in V_s$ , le point d'intégration est égal au point du calcul, ce qui donne une singularité qui nécessite la recherche d'une autre relation. Comme solution, [65] a transformé l'équation (III.88) en une autre relation sous la forme d'intégrale surfacique :

$$\vec{A}_s(P) = \frac{\mu_0 J}{8\pi} \sum_{S_N \in \partial V_s} \iint_{S_N} \frac{\vec{r}_{NP} \cdot \vec{n}_N}{r_{NP}} dS_N \quad (\text{III.89})$$

où  $\partial V_s$  sont les frontières de polyèdre,  $dS_N$  est un élément de la surface de  $\partial V_s$  et  $\vec{n}_N$  est le vecteur normal unitaire orienté à l'extérieur, qui prend la valeur constante sur chaque face polygonale.

### III.11) Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons développé l'approche par distributions de charges équivalentes. La première partie de ce chapitre a présenté la méthode des moments qui commence par la discrétisation du milieu en éléments (ici, éléments hexaédriques) et qui finit par la résolution d'un système linéaire. Nous avons été confrontés à une des difficultés de cette méthode, le calcul des coefficients de la matrice d'interaction globale. Nous avons montré que les coefficients sur la diagonale de la matrice d'interaction globale ont été calculés par les formulations présentés par l'intégrale surfacique, tandis que les autres coefficients ont été calculés par les formulations représentés par l'intégrale volumique. Nous avons simplifié ces formulations pour prendre en compte un cas particulier « hexaèdre régulier ».

La deuxième partie a proposé des méthodes pour résoudre le système obtenu par la méthode MoM en tenant en compte de la nature des matériaux utilisés (matériau linéaire ou non linéaire). La résolution du système par n'importe quelle méthode a permis de déterminer les composantes de l'aimantation induite dans chaque maille.

Enfin, après avoir calculé l'aimantation par la méthode de MoM, nous avons présenté les relations qui calculent le champ magnétique pour n'importe quel point et l'énergie magnétostatique à partir de cette aimantation.

**Chapitre . IV MODELISATION D'UNE ANTENNE  
BASSE FREQUENCE**

## IV.1) Introduction

Dans ce chapitre, la méthode des moments sera appliquée à une antenne basse fréquence comme un exemple pour mettre au point le code de calcul. Donc, nous allons d'abord présenter le modèle qui met en jeu une pièce magnétique et une bobine de forme simple. Ensuite, nous allons voir, pendant la présentation du calcul du champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du noyau, que la précision de la méthode des moments dépend de plusieurs facteurs : le nombre de la discrétisation du noyau, les valeurs de la perméabilité et les facteurs concernant le calcul des coefficients des matrices élémentaires par des intégrales volumiques (points d'intégration,...). Les résultats seront comparés à ceux obtenus à partir d'un code de calcul par éléments finis 3D (MEF) et à la solution analytique. A la fin de ce chapitre, nous calculons l'énergie magnétostatique de l'antenne basse fréquence par la méthode des moments et les résultats sont comparés par rapport à ceux de la méthode des éléments finis.

## IV.2) Antenne basse fréquence (réel)

Dans ce paragraphe, nous présentons un exemple d'application concret du module/logiciel que nous avons développé. Dans ce qui suit, le calcul a été fait avec un PC caractérisé par un processeur Core 2 Duo (2,33 GHz / 4 GB RAM).

L'exemple présenté dans la figure (Fig. IV.1) concerne une bobine utilisée dans une antenne basse fréquence. Dans cet exemple, nous avons considéré un système composé uniquement d'un matériau ferromagnétique  $\Omega_F$  et d'une bobine comportant  $n_s$  spires parcourues par un courant. Nous signalons qu'il s'agit de phénomènes linéaires et non saturé.

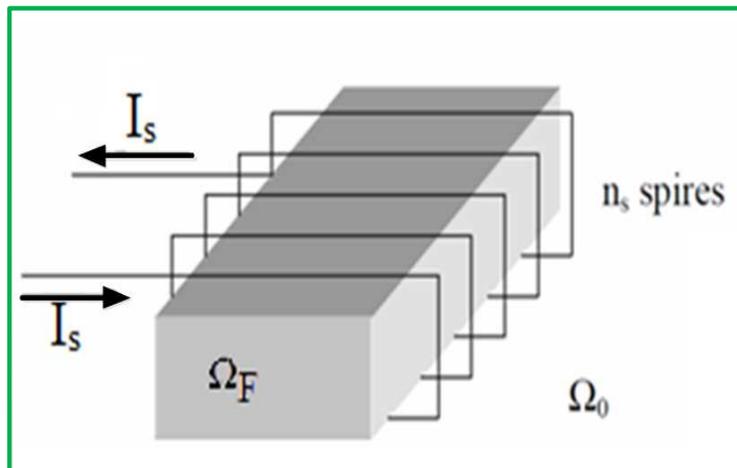


Fig. IV.1 : Problème réel typique : une source de champ (bobine) et différents milieux magnétiques typiques dans un problème magnétostatique

Le domaine d'étude  $\Omega$  comporte un milieu ambiant de perméabilité magnétique égale à celle du vide (l'air i.e. le volume  $\Omega_0$ ) et des milieux  $\Omega_F$  de perméabilité magnétique relative  $\mu_r$  plus grand que l'unité.

### IV.3) Composants magnétiques pour la modélisation

La géométrie de la bobine qui entoure le noyau de ferrite ressemble à une piste de course (Fig. IV.2).

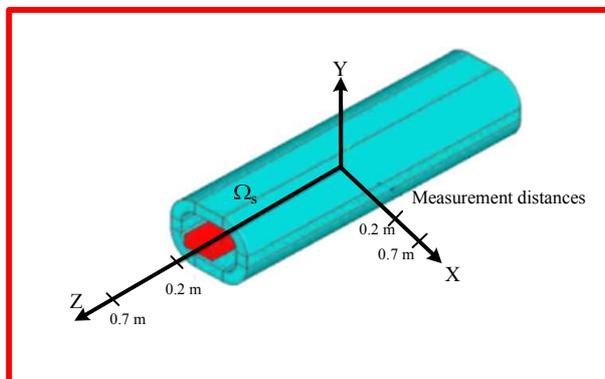


Fig. IV.2 : *Domaine d'étude modélisant la situation typique réelle de la figure (Fig. IV.1)*

Les tailles et les caractéristiques du noyau et de la bobine sont rapportées au tableau (Tab. IV.1).

Paramètres	Valeurs	Unités
Perméabilité relative du rayon	3000	
Densité de courant dans une section de la bobine	1	Amm <sup>-2</sup>
Nombre de spires	61	
Hauteur de la bobine	0.079	m
Hauteur du noyau	0.085	m
Largeur du noyau	0.008	m
Longueur du noyau	0.003	m
Distance entre la bobine et le noyau	0.0005	m
Différence entre rayon externe et rayon interne de la bobine	0.0004	m

Tab. IV.1 : *Les paramètres d'entrée du modèle de la bobine de l'antenne basse fréquence*

Généralement, dans les modèles numériques, la bobine est modélisée par un volume  $\Omega_s$  (Fig. IV.2) construit à partir des arcs et barreaux illustrés par la figure (Fig. IV.3). Le volume

est parcouru par un courant volumique de densité  $\vec{J}_s$  qui crée le même nombre d'ampères-tours que la bobine réelle (Fig. IV.1).

Si  $S_s$  est la section de la bobine sur la (Fig. IV.3), le vecteur de la densité de courant  $\vec{J}_s$  dans  $\Omega_s$  a le même sens et la même direction que le courant  $I_s$  dans la bobine réelle (Fig. IV.1). Son module est relié au nombre de spires  $n_s$  et au courant de la bobine (Fig. IV.1), par la relation suivante :

$$S_s J_s = n_s I_s \quad (IV.1)$$

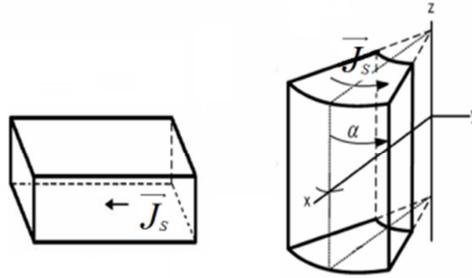


Fig. IV.3 : Structures géométriques des composants conducteurs et la direction des vecteurs de la densité de courant

Les calculs par la méthode des moments magnétiques et la méthode des éléments finis ont été réalisés avec des maillages de densité grossière, moyenne et fin du noyau magnétique comme il est décrit par la figure (Fig. IV.4). Les éléments utilisés sont hexaèdres réguliers.

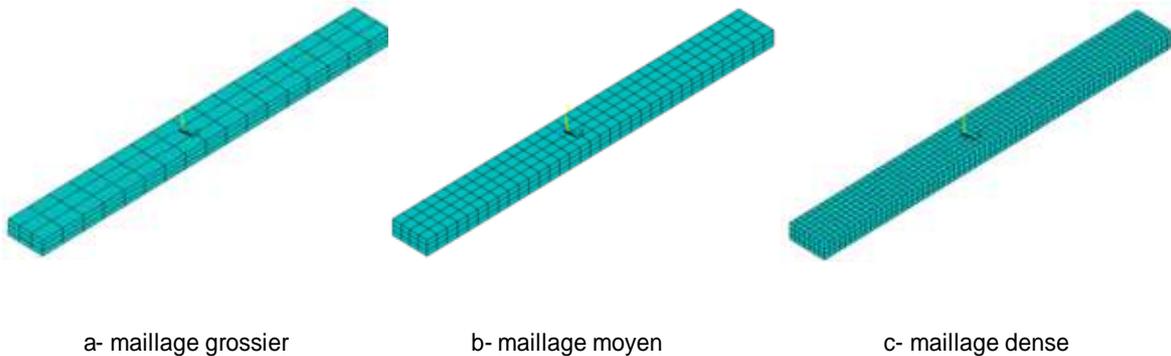


Fig. IV.4 : Différentes densités de maillage utilisées lors du calcul par MoM et MEF

### **IV.4) Calcul du champ source par Biot et Savart**

Afin de calculer l'aimantation en résolvant le système d'équations linéaires (III.68), nous avons besoin de calculer le champ de la source aux barycentres des mailles de maillage. Une

très bonne précision est alors nécessaire pour calculer le champ dû à la bobine. Donc, la première étape de notre étude est la modélisation du champ créé par la bobine qui peut facilement être calculé par la loi de Biot et Savart (II.32).

Pour calculer le champ  $\vec{B}_S$ , les arcs et les barreaux sont subdivisés en  $Nb$  éléments. Au moyen de la loi de Biot et Savart, le champ de la source  $\vec{B}_S$  dû à toute la bobine est calculé par :

$$\vec{B}_S = \sum_{i=1}^{Nb} \vec{B}_S^i \quad (IV.2)$$

où :  $\vec{B}_S^i$  sont les champs élémentaires dû à chaque maille.

La subdivision est comme suit : les arcs et les barreaux ont évidemment la même épaisseur et ont la même hauteur comme le montre la figure (Fig. IV.5). Ces hauteurs et ces épaisseurs seraient divisées par le même nombre de subdivisions. Mais, les deux barreaux ont des longueurs différentes qui seront discrétisées par différents nombres (voir (Fig. IV.5)).

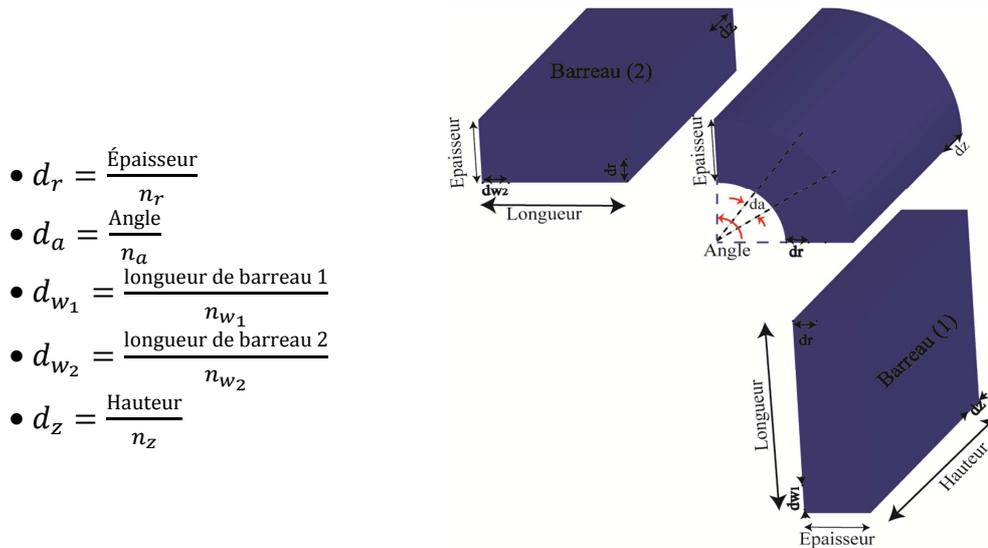


Fig. IV.5 : *Discretisation de la bobine*

La figure (Fig. IV.6) présente les résultats obtenus par le logiciel ANSYS / EMAG [75] et les résultats calculés par le code du Matlab le long de l'axe  $Oz$ , à l'intérieur et à l'extérieur du noyau, pour une densité de courant  $\vec{J}_S$  égale à  $1A. mm^{-2}$ .

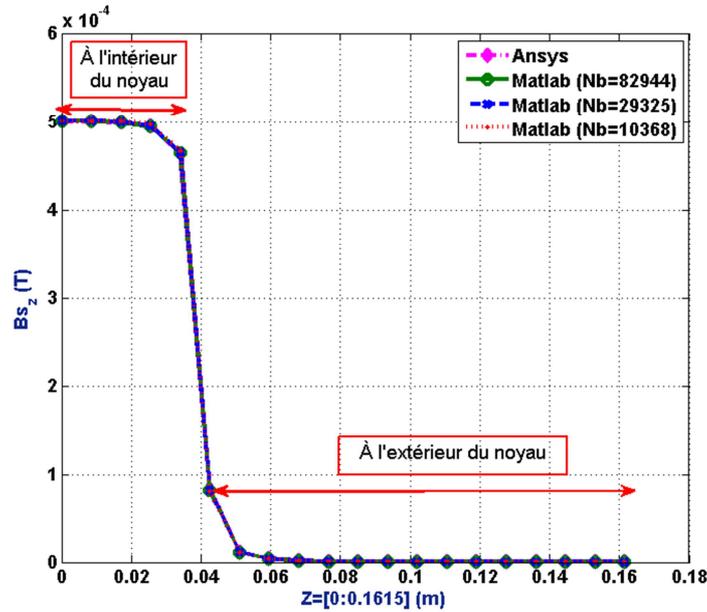


Fig. IV.6 : Distribution du champ magnétique dû à la bobine le long de l'axe Oz à l'intérieur et à l'extérieur du noyau pour différents nombres de mailles (Nb) et pour une densité de courant  $J_s = 1 \text{ A. mm}^{-2}$

Les détails des valeurs de la composante Z de  $\vec{B}_S$  le long de l'axe Oz, et à l'intérieur de la moitié supérieure du noyau, pour une valeur de la densité de courant égale à  $1 \text{ A. mm}^{-2}$ , sont donnés par le tableau (Tab. IV.2).

Nombre de mailles	Distance du centre du noyau (m)			
	0.0085	0.017	0.0255	0.034
<b>82944</b>	0.5008	0.49935	0.49470	0.46451
<b>29325</b>	0.50105	0.49964	0.49499	0.46479
<b>10368</b>	0.50025	0.50023	0.49695	0.46721

Tab. IV.2 : Distribution du champ magnétique dû à la bobine le long de l'axe Oz et à l'intérieur de la moitié supérieure du noyau pour un nombre différent de subdivisions (Nb) et pour une densité de courant  $J_s = 1 \text{ A. mm}^{-2}$ . Les valeurs sont données en (mT)

Le tableau (Tab. IV.2) montre que 10368 mailles sont suffisantes pour obtenir une très bonne précision pour le calcul du champ magnétique du noyau. Le temps de calcul du champ  $\vec{B}_S$  pour n'importe quel point dans l'espace est très faible. Nous verrons que le nombre  $Nb = 10368$ , qui semble grand, n'affecte pas le temps du calcul global.

La subdivision de la bobine, pour  $Nb = 10368$  éléments, est donnée dans le tableau (Tab. IV.3). Les nombres de discrétisations de l'épaisseur, de l'angle et de la hauteur d'un arc sont respectivement  $(n_r, n_a, n_z)$ . Les nombres de discrétisation de l'épaisseur, de la longueur et de la hauteur de premier barreau sont respectivement  $(n_r, n_{w_1}, n_z)$ . Les nombres des discrétisation de l'épaisseur, de la longueur et de la hauteur de deuxième barreau sont respectivement  $(n_r, n_{w_2}, n_z)$ .

Direction	Symbole	Valeur
Épaisseur	$n_r$	4
Angulaire	$n_a$	4
Longueur du barreau 1	$n_{w_1}$	9
Longueur du barreau 2	$n_{w_2}$	7
Hauteur	$n_z$	54

Tab. IV.3 : *Subdivision retenue pour la bobine*

### **IV.5) Analyse par la méthode des éléments finis**

Afin de faire une première vérification, les résultats obtenus par la méthode des moments seront comparés à un modèle numérique obtenu par le progiciel ANSYS / EMAG. La figure (Fig. IV.7) montre le domaine d'étude considéré pour le calcul avec ce logiciel.

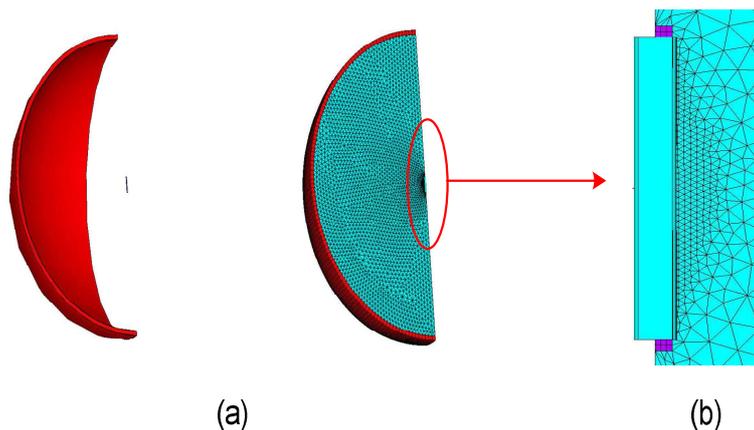


Fig. IV.7 : (a) à gauche, une couche rouge avec des éléments infinis, à droite le maillage bleu du domaine d'étude avec des éléments finis. (b) maillage par éléments finis autour de la ABF

Même si nous pouvons étudier un quart du domaine grâce à la symétrie afin de gagner du temps et de la mémoire, un grand nombre d'éléments serait nécessaire pour mailler le noyau

et la région autour de l'antenne afin de calculer le champ magnétique loin de l'antenne (Fig. IV.7). La zone rouge est maillée par une couche d'éléments infinis. Dans ANSYS / EMAG, la formulation en potentiel scalaire réduit est utilisée. Le domaine d'étude a été maillé par 245000 éléments et 48030 nœuds. La figure (Fig. IV.7.a) montre le maillage d'éléments finis autour du noyau et de la bobine.

## **IV.6) Etudes paramétriques**

### **IV.6.1) Influence du nombre de points d'intégration de Gauss**

Pour une approche choisie, la précision sur les calculs dépend de plusieurs paramètres. C'est ainsi que pour la MoM qui fait l'objet de nos travaux, les paramètres influents sont : la taille des mailles du système discret et le nombre de points de Gauss  $n_G$  et aussi de la distance  $R^{IJ}$  (qui sépare les mailles  $I$  et  $J$ ).

Dans ce qui suit nous analyserons l'effet de la valeur de  $n_G$  sur la précision du champ calculé selon trois types de maillages : un maillage grossier (42 éléments), moyen (336 éléments) et fin (2688 éléments). Enfin les résultats obtenus seront comparés avec ceux trouvés directement avec les expressions analytiques ((III.32), (III.33)).

Avant tout une des préoccupations en analyse est le temps CPU (et aussi souvent la mémoire de stockage). C'est ainsi que nous proposerons des techniques utilisant la MoM avec des choix judicieux des paramètres précédents pour une bonne précision des calculs avec un temps CPU raisonnable.

Rappelons que nous avons deux types de formulations pour calculer les coefficients de la matrice d'interaction élémentaires pour n'importe quelle forme d'élément utilisé dans le maillage. La première formulation est de type intégrale surfacique (III.37) pour éviter la singularité dans le cas ( $I = J$ ), la deuxième formulation est de type volumique ((III.10) et (III.11)) utilisé dans le cas ( $I \neq J$ ). La difficulté principale dans la méthode des moments paraît lorsqu'on applique la méthode de Gauss à ces formulations pour calculer les coefficients  $F_{kl}^{IJ}$  et  $F_{kl}^{JI}$  (voir les paragraphes (III.5) et III.6)). Plus  $n_G$  est élevé, plus la précision des résolutions numérique est meilleure mais en parallèle le temps de calcul plus augmente. D'où l'idée d'avoir un bon compromis dans de telle situation c'est à dire obtenir une bonne qualité des résultats numériques (dans le sens de l'exactitude des valeurs calculées) avec le plus petit  $n_G$  si possible. Il faut noter que  $n_G$  diffère d'un calcul à un autre selon qu'on a un intégral surfacique ou volumique.

#### **IV.6.1.1) Calcul de termes diagonaux (partie singulière)**

En ce qui concerne le cas des intégrales surfaciques, une étude plus détaillée se trouve dans [30]. Dans cette étude les auteurs analysent l'erreur commise entre solution numérique par la MoM et celle donnée par les expressions analytique [35]. Cette étude a montré qu'un nombre

de points de Gauss  $n_G$  égal à 16 est suffisant pour assurer une erreur inférieure à 0.5% par rapport à la solution analytique.

Dans des applications qui ont généralement des configurations géométriques régulières comme l'antenne basse fréquence, il est facile de les discrétiser en mailles de même taille (voir la figure (IV.9)). Dans ce cas, l'intégrale de surface n'est faite qu'une seule fois et ce nombre de points d'intégration ( $n_G = 16$ ) relativement élevé affecte très peu le temps de calcul total. Par contre dans les applications à géométries complexes où les éléments du maillage ont des tailles différentes, la valeur du calcul de l'expression  $F_{kl}^{IJ}$  diffère d'un élément à l'autre. Autrement dit, il faut calculer l'intégrale surfacique pour chaque élément du maillage avec le nombre ( $n_G = 16$ ). Ce nombre va alors consommer un temps de calcul important surtout dans les maillages denses. Une expression analytique devient toujours nécessaire comme [76] qui prend en compte le cas irrégulier et qui est difficile à implémenter.

Dans l'antenne basse fréquence où les éléments sont de forme hexaédrique régulier, l'application de la solution analytique présentée par les relations (III.32) et (III.33) est simple et le calcul des coefficients  $F_{kl}^{IJ}$  par l'intégrale surfacique est plus rapide que la solution numérique avec  $n_G = 16$ .

### IV.6.1.2) Calcul des termes hors diagonaux

Concernant les formulations présentées par l'intégrale volumique pour calculer les coefficients  $F_{kl}^{IJ}$ , le même nombre de points d'intégration ( $n_G = 16$ ) peut être pris pour les calculer. Mais, ce nombre  $n_G = 16$  conduit à une augmentation drastique du temps de calcul. En remarquant les relations (III.10) et (III.11), nous trouvons évidemment que la précision du calcul des coefficients  $F_{kl}^{IJ}$  dépend de la taille de  $V_j$  et aussi de la distance  $R^{IJ}$  entre le centre de la maille  $V_l$  et les points de Gauss localisés dans la maille  $V_j$  comme le montre la figure (Fig. IV.9). Si ce centre est proche du volume  $V_l$ , un grand nombre de points d'intégration doit être utilisé et s'il est assez loin, un faible nombre de points d'intégration sera suffisant en gardant la même précision. Ainsi, un élément de grande taille a évidemment besoin de nombre d'intégration plus élevé que la taille petite.

Afin d'atteindre à cet objectif, une étude sera proposée dans la suite.

De manière générale, on fixe une valeur de  $n_G$  et on effectue les différents calculs de coefficients  $F_{kl}^{IJ}$ . Par exemple dans la littérature, on prend 16 comme nombre de points de Gauss dont on notera ici cette valeur de référence  $n_{G0}$ . Dans ce paragraphe l'objectif est de déterminer un nombre minimal de points de Gauss qu'on appellera  $n_G$  optimal ( $n_{Gmin}$ ) pour une marge d'erreur  $e_{ref}$  imposée par l'utilisateur en comparaison avec les résultats qu'on obtient en utilisant  $n_{G0}$ . En effet avec  $n_{G0}$  on trouve des solutions numériques assez acceptable mais avec un temps de calculs qui peut être astronomique, surtout pour des problèmes avec un maillage fin. Ainsi, on donne les expressions des coefficients (éléments) de la matrice élémentaire  $F_{n_G}^{IJ}$  en fonction de  $n_G$  implicitement :

$$F_{kl:n_G}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} |\det J| \sum_{r=1}^{n_G} \sum_{s=1}^{n_G} \sum_{t=1}^{n_G} 3 \frac{R_k(\xi_r, \eta_s, \zeta_t) \cdot R_l(\xi_r, \eta_s, \zeta_t)}{(R(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} w_r w_s w_t \quad (IV.3)$$

$$F_{kk:n_G}^{IJ} = \frac{1}{4\pi} |\det J| \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{s=1}^{n_{G_s}} \sum_{t=1}^{n_{G_t}} \left[ 3 \frac{(R_k(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^2}{(R(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^5} - \frac{1}{(R(\xi_r, \eta_s, \zeta_t))^3} \right] w_r w_s w_t \quad (IV.4)$$

Et l'erreur relative  $e_{ref}$  donnée par :

$$e_{rel} = \frac{\|F_{n_{G_0}}^{IJ} - F_{n_G}^{IJ}\|}{\|F_{n_{G_0}}^{IJ}\|} \quad (IV.5)$$

où :

- L'indice supérieur  $J$  indique l'élément volumique  $V_J$  considéré, et l'indice supérieur  $I$  indique les volumes  $V_I$  sur lesquels agit  $V_J$ , voir la figure (Fig. IV.8).
- $F_{kl:n_G}^{IJ}$  et  $F_{kk:n_G}^{IJ}$  sont les éléments de la matrice élémentaire  $F_{n_G}^{IJ}$  calculée avec  $n_G$  point(s) de Gauss.
- $F_{n_{G_0}}^{IJ}$  est la matrice élémentaire obtenu avec le nombre de points de Gauss de référence choisi (ici on rappelle  $n_{G_0} = 16$ ).
- $e_{rel}$  est l'erreur relative qui sera comparée à celle donnée par l'utilisateur et noté  $e_{ref}$ .
- $R$  est la distance entre le barycentre de l'élément volumique et les points de Gauss.

Voir la figure (Fig. IV.9) pour plus de détails sur la représentation spatial des points de Gauss, des points des calcul et la grandeur  $R$ .

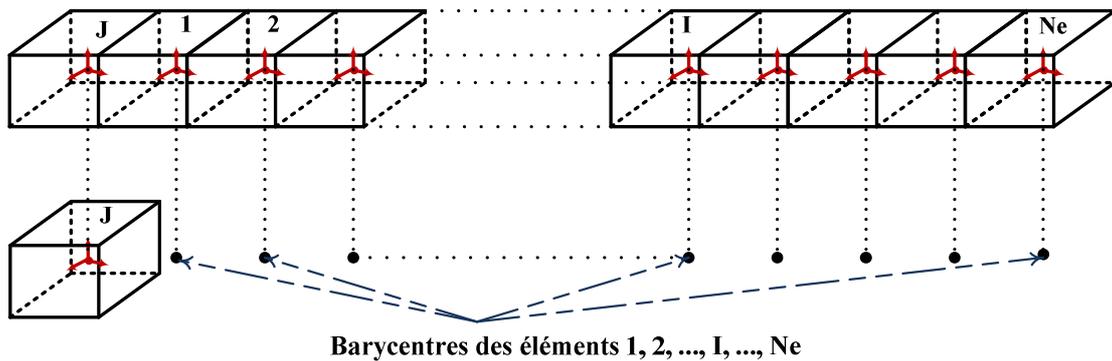


Fig. IV.8: Domaine d'étude composé d'une maille et les points du calcul représentant les barycentres des mailles

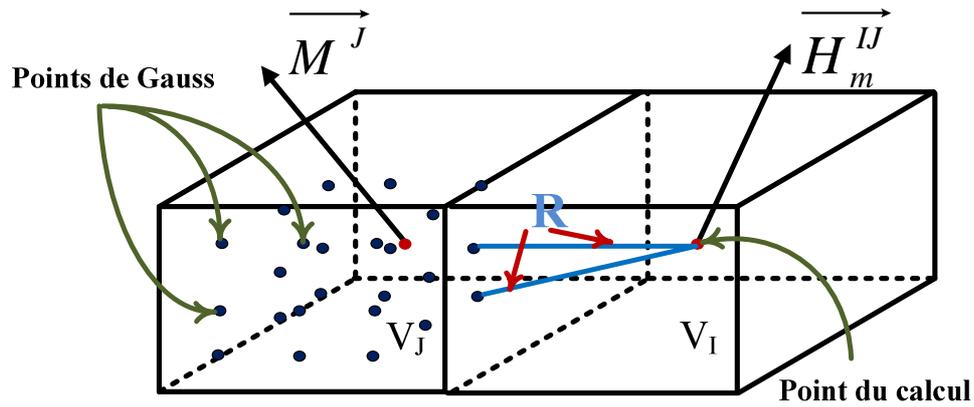


Fig. IV.9 : Localisation des points de Gauss et du point ou le champ est calculé

Pour déterminer  $n_{Gmin}$  pour une valeur fixée de  $e_{ref}$  et un nombre de points de Gauss maximal fixé à  $n_{G0}$ , on procède de manière naturelle comme suit :

1. Initialisation :  $n_G = 1, n_{G0} = 16, e_{ref}$  (donnée, expl :  $e_{ref} = 0.01$ ).
2. Calcul de  $e_{rel}$  : on utilise les équations (IV.3), (IV.4) et (IV.5).
3. Comparaison :  $e_{rel} \leq e_{ref}$ ?
  - si  $e_{rel} \leq e_{ref}$ , alors  $n_{Gmin} \leftarrow n_G$
  - sinon  $e_{rel} > e_{ref}$ 
    - si  $n_G < n_{G0}$ , alors  $n_G \leftarrow n_G + 1$
    - sinon :  $n_{Gmin} = n_{G0}$
4. Itérations : on recommence les étapes 2. et 3 avec la nouvelle valeur de  $n_G$  (dans le cas échéant), jusqu'à  $e_{rel} \leq e_{ref}$ .
5. Sauvegarder  $n_{Gmin}$  et la distance  $R^{IJ}$  entre les barycentres des éléments  $V_J$  et  $V_I$

Finalement, l'algorithme décrit ci-dessus peut être résumé par le diagramme sur la figure (Fig. IV.10).

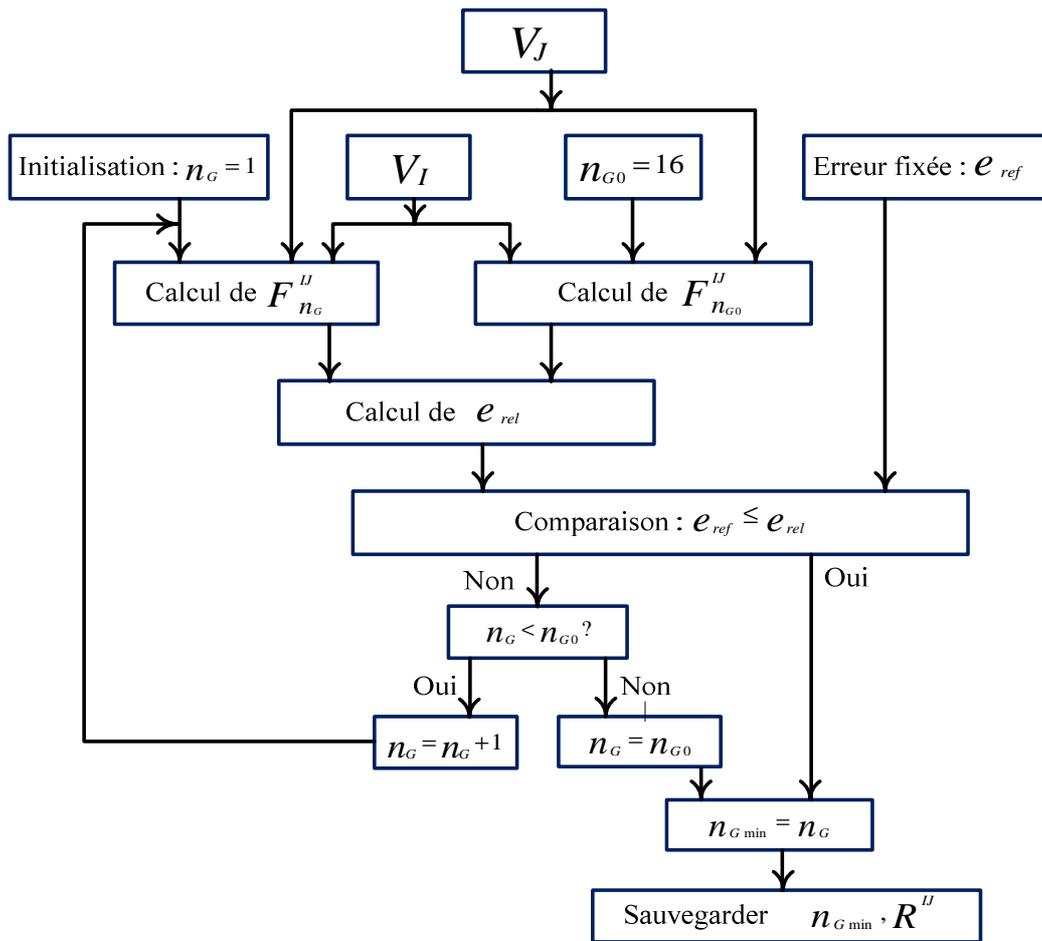


Fig. IV.10: *Algorithme d'obtenir les nombres de points de Gauss  $n_G$  appropriées avec la distance d'un point (barycentre) à une maille*

Comme résultat de cet algorithme, nous obtenons un fichier qui contient le nombre de points de Gauss utilisé à chaque distance d'un barycentre de la maille définie.

Nous avons appliqué ce code au maillage grossier dont la taille d'un élément est  $4 \times 10^{-3}$  m, nous avons dessiné les nombre obtenus en fonction de l'éloignement des barycentres à une maille comme indiqué sur la figure (Fig. IV.11). Cette figure montre que le nombre maximum et minimum de points de Gauss sont égale respectivement à 6 et 1. Elle montre aussi que si le point du calcul est proche de la maille, un grand nombre de point de Gauss sera nécessaire pour calculer les intégrales, plus tout, un petit nombre de  $n_G$  sera nécessaire si le point du calcul est loin de la maille. Par exemple, pour une valeur de la distance  $R^{IJ}$  inférieur à 0.041 m, les intégrales (III.10) et (III.11) peuvent être calculés avec  $n_G = 1$ , en outre, pour une valeur de la distance supérieur à 0.01 m et inférieur à 0.041 m, les intégrales peuvent être calculés avec  $n_G = 2$ .

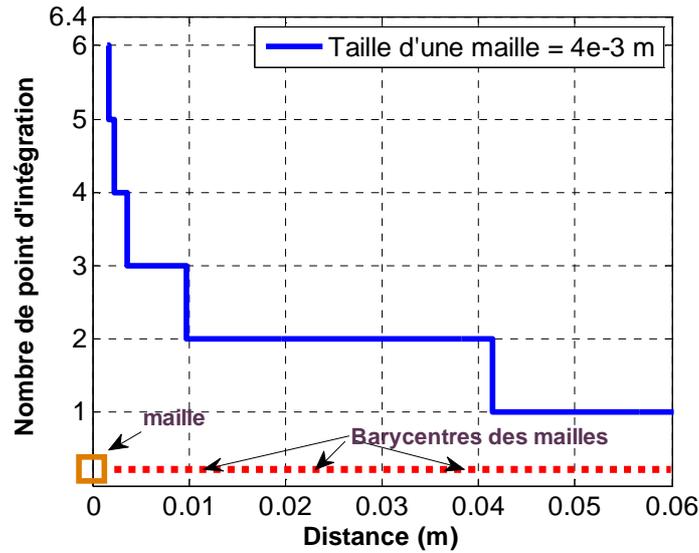


Fig. IV.11: Nombre de points de Gauss  $n_G$  en fonction de la distance des points représentant les barycentres des mailles à une maille définit par l'utilisateur pour  $e_{ref} = 10^{-2}$

Les résultats précédents obtenus correspondent à la taille de la maille égale à  $4 \times 10^{-3}$  m. Comme nous avons trois maillages dont les tailles sont différentes, nous allons appliquer l'algorithme précédent pour prendre en compte tous les cas (maillage fin, maillage moyen et maillage grossier) comme indiqué sur la figure (Fig. IV.12).

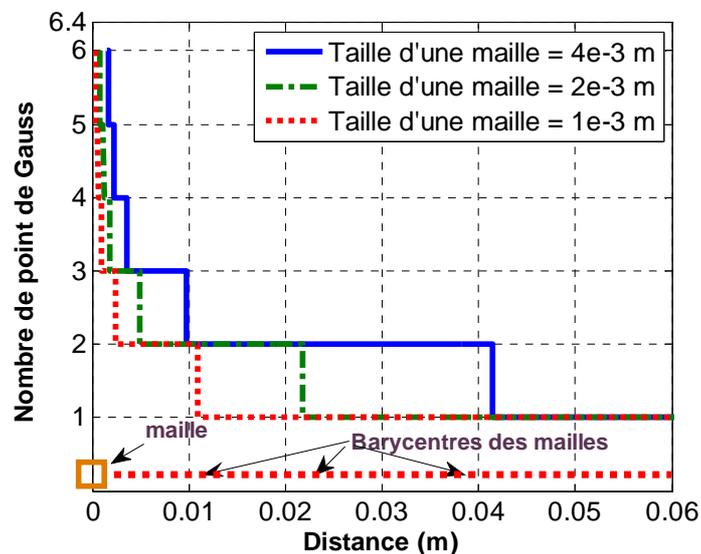


Fig. IV.12: Nombre de points de Gauss  $n_G$  en fonction de la distance des points représentant les barycentres des mailles pour trois mailles de différentes tailles avec  $e_{ref} = 10^{-2}$

La figure (Fig. IV.12) montre que si le point de calcul est proche de la maille, un grand nombre de point de Gauss sera nécessaire pour n'importe quelle valeur de la taille de la maille. Elle montre aussi que la taille grande d'un élément a évidemment besoin de nombre d'intégration plus élevé que les tailles plus petites pour une distance fixé. Selon la figure (Fig. IV.12), nous aurons calculé beaucoup de coefficients élémentaires avec  $n_G = 1$  dans le cas du maillage dense dont les tailles des éléments volumique sont petites. Alors le calcul des intégrales dans la MoM par la voie numérique (Gauss) peut être plus rapide que celui par la voie analytique comme le montre la figure (Fig. IV.13).

Maillage	MoM (Gauss)	MoM (Analytique)
<b>42</b>	162	258
<b>336</b>	3.16	4.17
<b>2688</b>	0.08	0.06

Fig. IV.13: *Comparaison du temps du calcul de la matrice d'interaction globale entre la méthode de Gauss et la solution analytique pour les trois maillages étudiés. Les valeurs sont données en seconde*

Enfin, cette procédure nous a permis de montrer qu'on peut résoudre les problèmes magnétostatiques de manière efficace avec un nombre minimal de points de Gauss, ce qui entraine aussi une réduction considérable du temps de calcul.

### **IV.6.2) Influence du nombre de mailles**

#### **IV.6.2.1) Calcul du champ à l'intérieur du noyau**

Plusieurs simulations avec différentes subdivisions ont été réalisées avec la méthode des moments. Comme les dimensions du noyau sont différentes, chaque dimension est alors divisée par un nombre différent. Nous allons nommer le nombre de division le long de l'axe  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  respectivement  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$ .

La figure (Fig. IV.14) montre le calcul du champ magnétique par la méthode de MoM sur une ligne à l'intérieur et au milieu du noyau et le long de l'axe  $Oz$ .

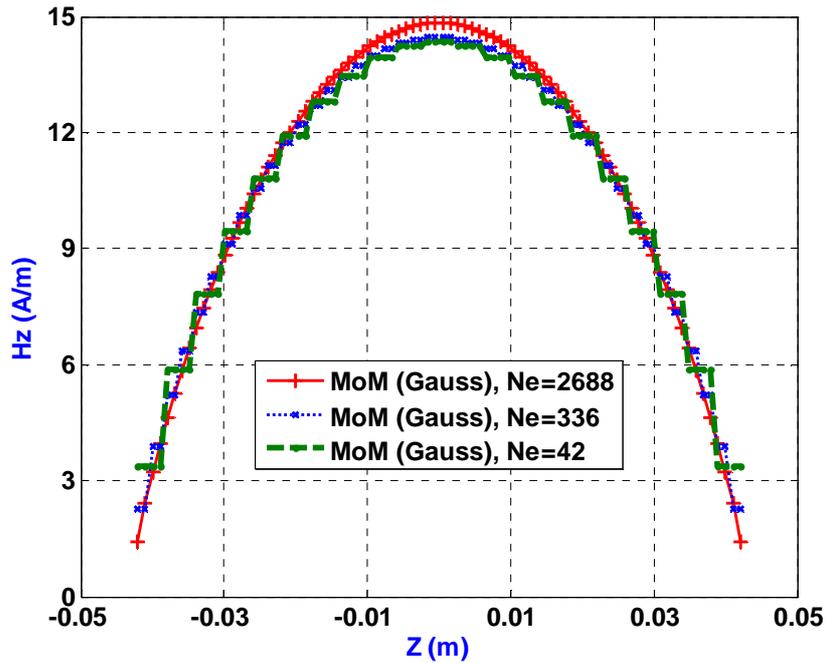


Fig. IV.14 : Distribution de la composante  $H_z$  du champ magnétique le long de l'axe  $Ox$  calculé par la MoM en utilisant la méthode de Gauss pour un nombre différent de subdivisions ( $N_e$ )

Cette ligne est composée de 84 points. Pour le maillage grossier ( $n_x = 2$ ,  $n_y = 1$ ,  $n_z = 21$ ), ce nombre est supérieur au nombre de divisions du noyau  $n_z$ , c'est-à-dire chaque maille va contenir 4 points ( $84/n_z$ ). Comme au niveau de chaque maille le champ magnétique est constant (nous avons fait l'hypothèse que l'aimantation est constante dans chaque maille), les quatre points ainsi obtenus possèdent la même valeur de champ magnétique. C'est pour cette raison que la courbe correspondant au maillage grossier contient des paliers de champ magnétique. En revanche, dans le cas du maillage fin, le nombre des points de la ligne est égal au nombre de divisions  $n_z = 84$ . Chaque maille contient alors un seul point, ce qui justifie l'absence des paliers observés précédemment (cas du maillage grossier) de la courbe relative au maillage fin. Donc, le code peut être amélioré en utilisant les fonctions  $P_1$  (polynôme de degré 1 utilisé en éléments finis) pour faire une interpolation permettant de calcul de champ à l'intérieur d'un volume élémentaire.

Les figures (Fig. IV.15), (Fig. IV.16) et (Fig. IV.17) donnent respectivement une comparaison des résultats obtenus par la méthode de MoM avec ceux obtenus par la solution analytique pour les trois maillages grossier, moyen et fin. Ils montrent que les résultats obtenus par les deux sont très identiques.

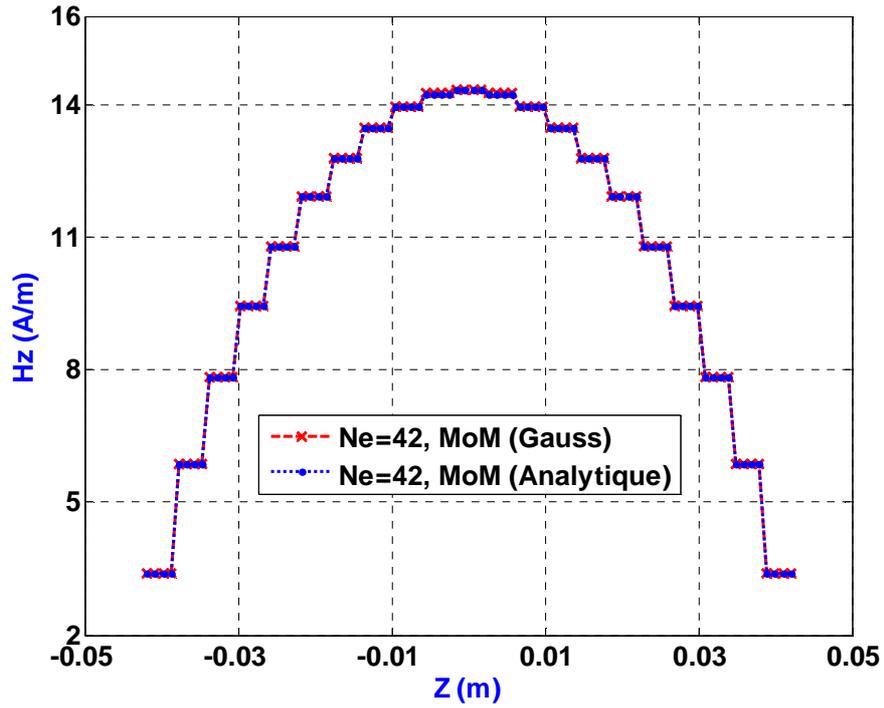


Fig. IV.15 : Comparaison les calculs des intégrales numériques pour le maillage grossier

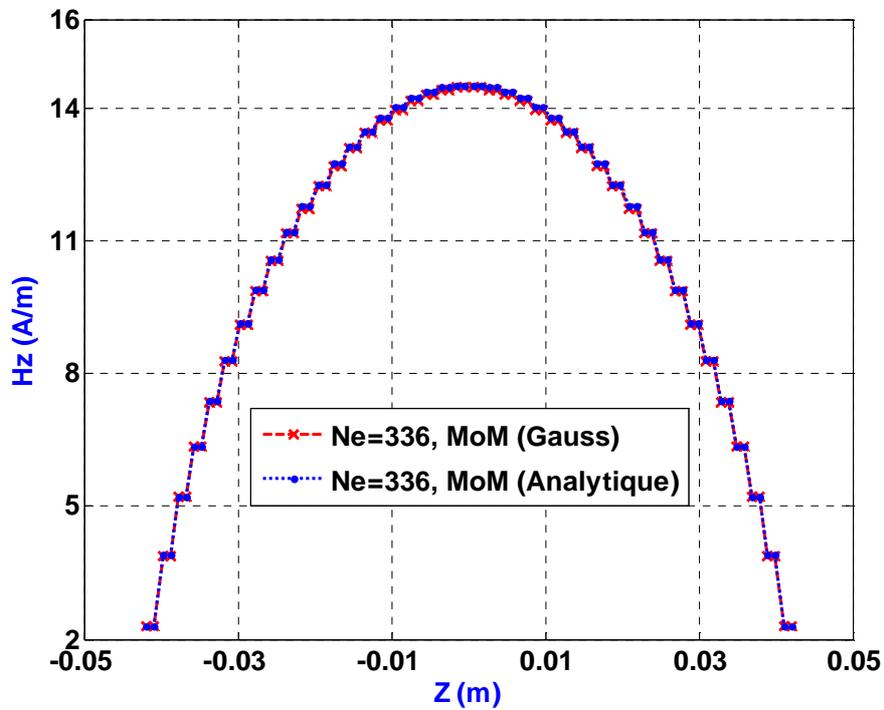


Fig. IV.16 : Comparaison les calculs des intégrales numériques pour le maillage moyen

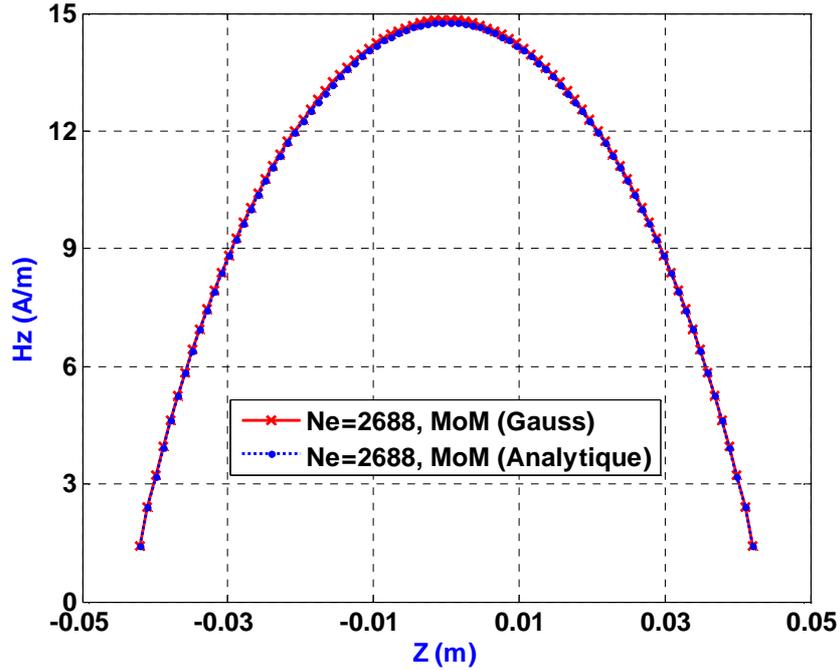


Fig. IV.17 : Comparaison les calculs des intégrales numériques pour le maillage dense

L'erreur entre les résultats change d'une étape à l'autre pendant le calcul du champ magnétique. Pour justifier cette idée, nous avons calculé l'erreur relative entre les résultats obtenus par la MoM et la solution analytique par rapport à la solution analytique en termes de calcul de la matrice d'interaction globale  $[F]$  et en termes de calcul de l'aimantation  $\{M\}$  par les relations suivantes :

$$erreur1 = \frac{\|[F]_{analytique} - [F]_{MoM}\|}{\|[F]_{analytique}\|} \quad (IV.6)$$

$$erreur2 = \frac{\|\{M\}_{analytique} - \{M\}_{MoM}\|}{\|\{M\}_{analytique}\|} \quad (IV.7)$$

où :

- $[F]_{analytique}$  est la matrice d'interaction globale calculée analytiquement.
- $[F]_{MoM}$  est la matrice d'interaction globale calculée par la méthode des moments.
- $\{M\}_{analytique}$  est l'aimantation calculée analytiquement.
- $\{M\}_{MoM}$  est l'aimantation calculée par la méthode des moments.

Le tableau (Tab. IV.4) montre que l'erreur (*erreur1*) est très petite pour n'importe quel maillage. Par contre, l'erreur (*erreur2*) concernant l'aimantation augmente avec le nombre des éléments du maillage car le calcul de l'aimantation par la relation (III.68) requiert un

calcul de l'inverse de la matrice  $[F]$  et un calcul du champ de la source aux barycentres des éléments ce qui introduit une erreur supplémentaire.

Maillage	erreur1%	erreur2%
42	$7 \times 10^{-4}$	$4 \times 10^{-3}$
336	$2 \times 10^{-3}$	0.39
2688	$3 \times 10^{-3}$	1

Tab. IV.4 : Erreur relative entre les résultats calculés par la méthode des moments et la solution analytique en termes du calcul de la matrice d'interaction globale et l'aimantation pour trois maillages

#### IV.6.2.2) Calcul du champ à l'extérieur du noyau

Plusieurs simulations avec différentes subdivisions ont été réalisées avec la méthode des moments. La figure (Fig. IV.18) montre la distribution de la composante  $B_z$  du champ magnétique le long de l'axe  $Ox$  pour une densité de courant de  $1A.mm^{-2}$ . La précision du calcul de l'intégral ne dépend que du nombre de subdivisions de la région du noyau, mais pas du maillage d'une région extérieure arbitraire ni aussi des conditions aux limites appliquées à l'infini comme dans le cas avec les codes des éléments finis. Les résultats sur la figure (Fig. IV.18) montrent que le système ainsi obtenu est bien convergent.

L'erreur relative quadratique entre les résultats obtenus avec le plus grand nombre de subdivisions et le plus petit nombre de subdivisions est inférieure à 5% par rapport au maillage dense.

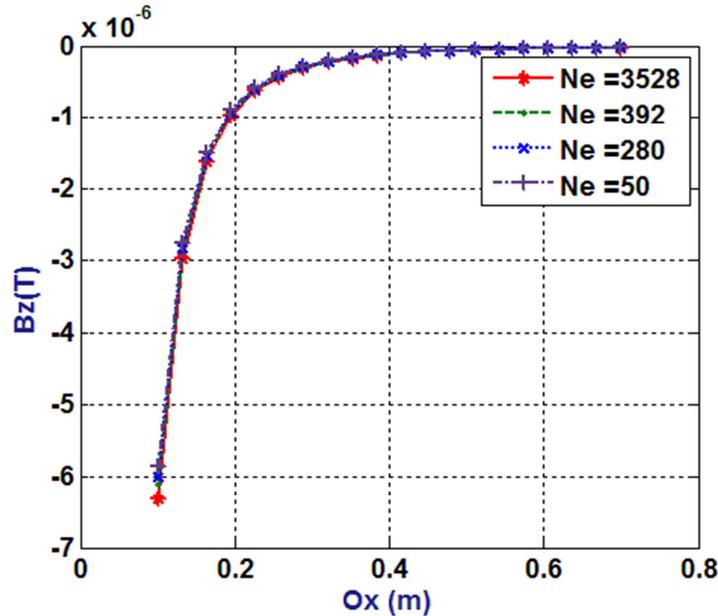


Fig. IV.18 : Distribution de la composante  $B_z$  du champ magnétique le long  $Ox$  calculé par MOM pour un nombre différent de subdivisions ( $N_e$ )

Le tableau (Tab. IV.5) donne en détail les valeurs de  $B_z$  le long de l'axe  $Ox$  pour la distance [0.5 : 0.8] m pour une valeur de la densité de courant égale à  $1A \cdot mm^{-2}$  et pour une valeur de la perméabilité égale à 3000.

NE	0.5 m	0.55 m	0.6 m	0.65 m	0.7 m	0.75 m
<b>3528</b>	56.0	46.8	39.5	33.7	28.9	25.0
<b>392</b>	54.1	45.3	38.2	32.6	28.0	24.2
<b>280</b>	53.2	44.4	37.5	32.0	27.5	23.8
<b>50</b>	51.9	43.4	36.6	31.2	26.8	23.2

Tab. IV.5 : Distribution de la composante  $B_z$  du champ magnétique le long  $Ox$  calculé par la MoM. Les valeurs de  $B_z$  sont donnés en (nT)

La diminution du nombre de discrétisation du noyau n'affecte pas le temps de calcul de la MEF parce que même si nous diminuons le nombre des mailles dans le noyau, l'air reste maillé avec un grand nombre d'éléments. Le temps de calcul de la MEF pour les maillages 3528, 392, 280 sont respectivement 560, 544, 500 (secondes). En revanche, cette diminution affecte beaucoup le temps de calcul par la MoM comme le montre le tableau (Tab. IV.6). Autrement dit, le temps de calcul de la MoM pour le maillage fin est très élevé (231 seconde) par rapport aux temps de calcul obtenus avec les autres maillages (le temps de calcul pour le maillage grossier est égale à 0.15 seconde). Ceci est dû au fait que le

système algébrique obtenu avec la MoM possède une matrice pleine. Le tableau (Tab. IV.6) montre aussi que la MoM est plus rapide que la méthode MEF pour n'importe quel maillage utilisé.

Nombre de mailles du noyau	Temps (seconde)
3528	231
392	3.48
280	2.33
50	0.15

Tab. IV.6 : Temps de calcul de la méthode des moments pour différents maillages

### IV.6.3) Influence de la perméabilité

Comme la perméabilité est le degré de l'aimantation, et comme le calcul du champ dépend du calcul de l'aimantation, il est nécessaire d'étudier l'effet de la perméabilité sur notre problème. Au niveau de ce paragraphe, nous effectuons une étude de variation de la perméabilité en prenant les résultats de référence ceux obtenus avec un nombre de subdivisions du noyau égale à  $N_e = 3508$ .

Le graphique de la (Fig. IV.19) donne le pourcentage de l'erreur quadratique relative en utilisant la relation (IV.8) entre le maillage de (392 mailles) et le maillage de référence en fonction de  $\mu_r$ .

$$l'erreurquadratique = \left( \frac{\sum_{i=1}^{N_e} |B_{zref} - B_z|^2}{\sum_{i=1}^{N_e} |B_{zref}|^2} \right) * 100 \quad (IV.8)$$

On remarque que l'erreur pour  $\mu_r = 10$  est très faible (au voisinage de zéro). Elle augmente avec la valeur de la perméabilité mais elle reste toujours inférieur à 0.9%.

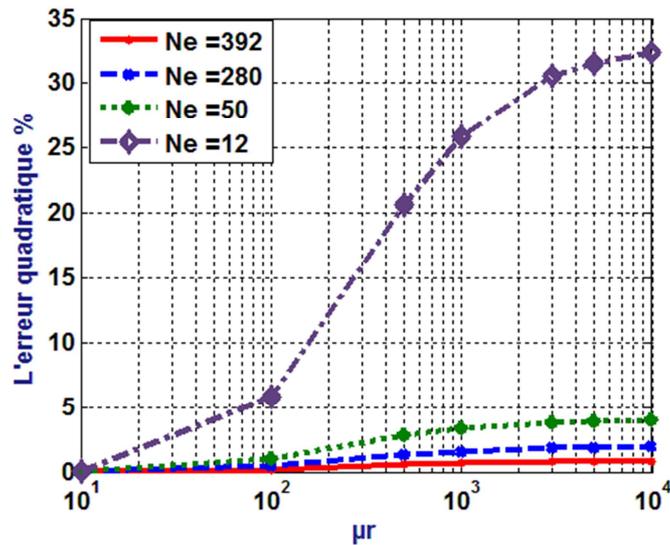


Fig. IV.19 : Influence de la variation de la perméabilité

Nous avons effectué la même étude pour le maillage de 280 éléments. Nous remarquons que l'erreur reste inférieure à 2%. Ensuite, nous avons diminué le nombre d'éléments de maillage à 50 éléments ; l'erreur reste inférieure à 4% pour n'importe quelle valeur de  $\mu_r$ . Enfin, pour 12 élément nous remarquons que l'erreur est acceptable pour les basses valeurs de  $\mu_r$  par contre elle demeure inacceptable pour les valeurs élevées de  $\mu_r$ . Cependant, ce dernier maillage peut être intéressant pour des applications qui s'intéressent à la vitesse du calcul plus qu'à la précision. Enfin, nous pouvons constater que l'erreur augmente avec l'augmentation de  $\mu_r$ . Pour les valeurs élevées de  $\mu_r$ , il faut donc mailler plus fin pour avoir une bonne précision.

Les valeurs de pourcentage de l'erreur quadratique relative pour  $\mu_r = 100, 500, 1000$  par rapport aux résultats de référence sont mentionnées dans le tableau (Tab. IV.7).

$N_e$	Perméabilité relative		
	100	500	1000
392	0.2026	0.5743	0.6878
280	0.4632	1.3438	1.5960
50	1.0356	2.7789	3.3299
12	5.8258	20.6059	25.8915

Tab. IV.7 : Le pourcentage de l'erreur quadratique pour un nombre différent de subdivisions ( $N_e$ ) et différentes valeurs de la perméabilité relative par rapport aux résultats de référence

### IV.7) Résultats numériques

La figure (Fig. IV.20) montre l'antenne basse fréquence (ABF) réelle composée d'un noyau en ferrite et d'une bobine avec 61 spires.

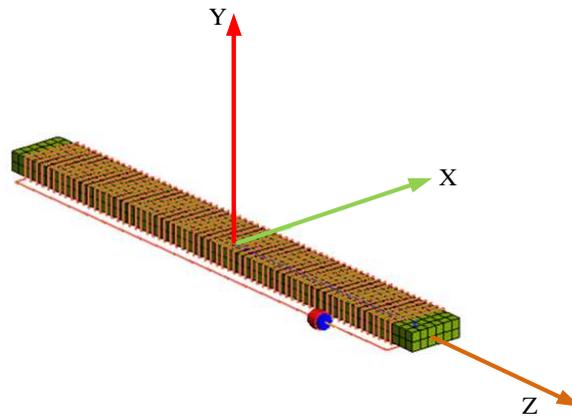


Fig. IV.20 : L'antenne réelle de faible fréquence

Le champ magnétique dû à l'antenne basse fréquence (ABF) a été mesurée le long de directions  $Ox$  et  $Oz$  et à distance  $[0.2:0.7]$  (Fig. IV.2). La mesure mise en place est représentée à la (Fig. IV.21).

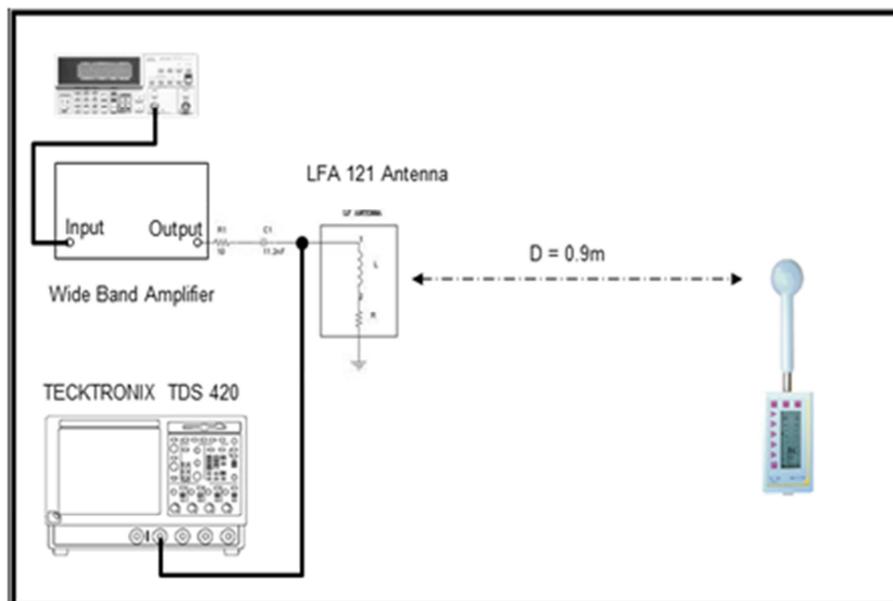


Fig. IV.21 : Le dispositif de mesure

Les mesures ont été réalisées à l'aide d'une alimentation AC à une fréquence de 125 kHz. Comme les conducteurs sont très minces, la situation n'est pas très différentes d'une situation DC. La principale différence est due à des phénomènes d'hystérésis dans le noyau de ferrite. Il a été vérifié expérimentalement que les phénomènes d'hystérésis ont très peu d'effet car l'inductance de la bobine à une fréquence autour de 125 kHz varie très peu.

Les distributions du champ magnétique le long de l'axe de la bobine  $Oz$  et le long de l'axe  $Ox$  (perpendiculaire à l'axe de la bobine  $Oz$ ) présentées par la figure (Fig. IV.2) ont été calculées par la méthode des moments 3D et la méthode des éléments finis (MEF). Les résultats obtenus sont comparés à ceux mesurés sur un banc de test (Fig. IV.21). Les distributions de l'induction magnétique le long des axes  $Oz$  et  $Ox$  sont respectivement représentées par la figure (Fig. IV.22) et la figure (Fig. IV.23). La valeur du courant mesuré dans la bobine est de 0.63 A.

Pour les analyses par la méthode des moments et par la méthode des éléments finis, la perméabilité relative du noyau est prise égale à 3000. Cette valeur est extraite du datasheet de la matière employée en ferrite. Le noyau est maillé avec le même nombre de mailles avec la MoM ou la MEF.

L'étude précédente donne des résultats très similaires avec une précision meilleure de 9%.

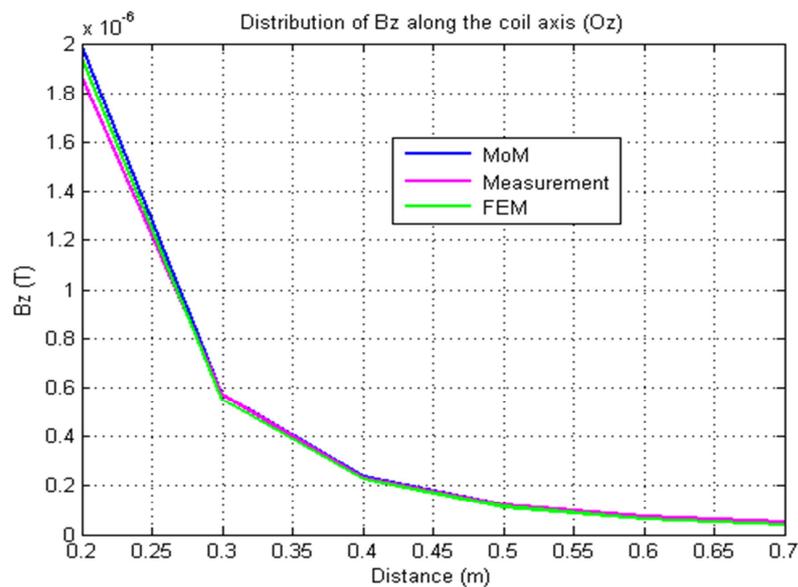


Fig. IV.22 : Répartition de la densité du champ magnétique calculé par la méthode des moments (MoM) et la méthode des éléments finis (MEF) et mesurée le long de l'axe  $ABFOz$

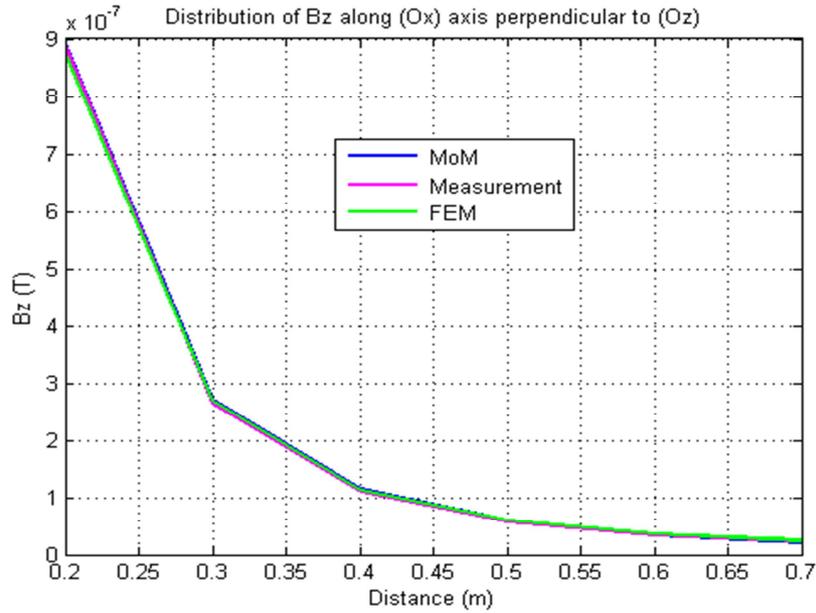


Fig. IV.23 : Distribution du champ magnétique calculée par la méthode des moments (MoM) et la méthode des éléments finis (FEM) et mesurée le long de l'axe Ox perpendiculaire à l'axe Oz

### IV.8) Calcul de l'énergie magnétostatique

Nous avons trouvé dans le paragraphe (III.10) qu'il suffit de diviser le domaine  $\Omega_s$  où la densité de courant n'est pas nulle pour calculer l'énergie magnétostatique. En d'autres termes, la bobine de l'antenne basse fréquence, construite à partir des parties arcs et barreaux illustrées par la figure (Fig. IV.3), doit être divisée pour calculer l'énergie selon l'expression suivante :

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega_s} (\vec{J}_s \cdot \vec{A}) dV \quad (IV.9)$$

Comme la manière de diviser les arcs et les barreaux est différente (Fig. IV.5), la relation (IV.9) peut être réécrite sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} \iiint_{V_{bar}} \vec{J}_s \cdot \vec{A}_{bar} dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_{arc}} \vec{J}_s \cdot \vec{A}_{arc} dV \quad (IV.10)$$

Soit :

$$U_m = U_{bar} + U_{arc} \quad (IV.11)$$

L'énergie magnétostatique totale est donc égale à la sommation de deux parties différentes  $U_{bar}$  et  $U_{arc}$ . Le calcul détaillé de ces deux termes est donné dans les sous sections suivantes.

**a. Calcul de  $U_{bar}$**

Rappelons que le potentiel vecteur total est égale à la sommation de deux vecteurs potentiels  $\vec{A}_s$  et  $\vec{A}_m$ . Chacun de ces deux vecteurs est calculé de façon différente de l'autre (voir le paragraphe (III.10)). Nous pouvons donc écrire  $U_{bar}$  dans la relation (IV.11) comme suit :

$$U_{bar} = \frac{1}{2} \iiint_{V_{bar}} (\vec{A}_{m_{bar}} \cdot \vec{J}) dV + \frac{1}{2} \iiint_{V_{bar}} (\vec{A}_{s_{bar}} \cdot \vec{J}) dV \quad (IV.12)$$

En supposant que le volume du barreau  $V_{bar}$  est divisé en  $N_{bar}$  éléments, l'équation (IV.12) précédente devient :

$$U_{bar} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{bar}} (\vec{A}_{m_n} \cdot \vec{J}_n) dv_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{bar}} (\vec{A}_{s_n} \cdot \vec{J}_n) dv_n \quad (IV.13)$$

Avec  $\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \dots = \vec{J}_n = \vec{J}_s$  et  $dv_1 = dv_2 = \dots = dv_n = dv$ , la relation (IV.13) précédente peut être réécrite :

$$U_{bar} = \frac{\vec{J}_s}{2} dv \sum_{n=1}^{N_{bar}} \vec{A}_{m_n} + \frac{\vec{J}_s}{2} dv \sum_{n=1}^{N_{bar}} \vec{A}_{s_n} \quad (IV.14)$$

$$U_{bar} = U_{m_{bar}} + U_{s_{bar}} \quad (IV.15)$$

Dans la suite, nous allons éclairer le calcul de  $U_{m_{bar}}$  et  $U_{s_{bar}}$ . Nous allons aussi donner les résultats séparément.

Calcul  $U_{m_{bar}}$

Nous pourrions calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}_{m_n}$  dans la relation (IV.14) par l'équation (III.87), donc, la première partie de l'équation (IV.14) est égale à :

$$U_{m_{bar}} = \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{8\pi} dv \sum_{n=1}^{N_{bar}} \iiint_{V_F \in \Omega_F} \frac{\vec{M}_N \times \vec{r}_{P_n N}}{r_{P_n N}^3} dV_F \quad (IV.16)$$

où :  $P_n$  est la barycentre d'un élément  $n$  et  $\vec{M}_N$  est l'aimantation dans un point  $N$  situé à l'intérieur du matériau ferromagnétique.

En subdivisant le noyau en  $N_e$  éléments, la relation (IV.16) devient :

$$U_{m_{bar}} = \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{8\pi} dv \sum_{n=1}^{N_{bar}} \sum_{N=1}^{N_e} \frac{\vec{M}_N \times \vec{r}_{P_n N}}{r_{P_n N}^3} dV_N \quad (IV.17)$$

#### § 4 : MODELISATION D'UNE ANTENNE BASSE FREQUENCE

En regardant attentivement la relation (IV.17), nous pouvons dire que, d'une part, la précision de  $U_{m_{bar}}$  dépend du nombre de la discrétisation du barreau  $N_{bar}$  (maillage des barreaux), et d'une autre part, elle dépend du nombre de la discrétisation du noyau  $N_e$  (maillage du noyau). Ainsi, nous avons d'abord fixé  $N_e$  à 50 éléments volumiques et nous avons étudié l'influence de la variation du nombre de la discrétisation des barreaux  $N_{bar}$  sur les résultats. Ensuite, nous avons répété cette étude pour les autres maillages du noyau 400 et 3200 comme le montre le tableau (Tab. IV.8).

Maillage du noyau (éléments)	50			400			3200		
	grossier	moyen	dense	grossier	moyen	dense	grossier	moyen	dense
Énergie (J)	$1.324 \times 10^{-5}$	$1.313 \times 10^{-5}$	$1.132 \times 10^{-5}$	$1.5124 \times 10^{-5}$	$1.5021 \times 10^{-5}$	$1.5 \times 10^{-5}$	$1.622 \times 10^{-5}$	$1.62 \times 10^{-5}$	$1.619 \times 10^{-5}$

Tab. IV.8 : L'énergie  $U_{m_{bar}}$  de l'antenne basse fréquence

Le tableau (Tab. IV.8) montre aussi que le maillage grossier du barreau est suffisant pour obtenir une bonne précision pour n'importe quel nombre de discrétisation du noyau. Les nombres de discrétisations de l'épaisseur, de la longueur et de la hauteur du barreau sont respectivement  $(n_x, n_y, n_z)$ . Les valeurs utilisées sont rapportées au tableau (Tab. IV.9).

Direction	Symbole	Barreau (1)	Barreau (2)
<b>Ox</b>	$n_x$	1	5
<b>Oy</b>	$n_y$	5	1
<b>Oz</b>	$n_z$	10	10

Tab. IV.9 : Subdivision du maillage grossier retenue pour les barreaux de la bobine

Calcul  $U_{sbar}$

Rappelons que le potentiel vecteur  $\vec{A}_{s_n}$  est calculé par cette relation :

$$\vec{A}_{s_n} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{s_n}}{8\pi} \sum_{N_s=1}^{N_s=6} \iint_{S_{N_s} \in \partial v_n} \frac{\vec{r}_{NP} \cdot \vec{n}_N}{r_{NP}} dS_{N_s} \quad (IV.18)$$

Puisque le potentiel vecteur de deux faces opposées s'annule et les densités de courant des  $n$  éléments sont égales, la densité de courant est constante  $\vec{J} = |\vec{J}| \vec{e}_j$  comme le montre la figure (Fig. IV.24). nous pouvons donc passer de plusieurs surfaces maillées ( $N_{bar} \times 6$ ), voir la relation (IV.14), à six frontières maillées qui représentent les surfaces extérieures du solide  $V_{bar}$  tel qu'il est illustré par la figure (Fig. IV.24). Par conséquent, l'équation (IV.14) peut être réécrite sous la forme finale :

$$U_{sbar} = \frac{\vec{J}_s}{2} (A.B.C) \left( \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{8\pi} \sum_{N_s=1}^{N_s=6} \iint_{S_{N_s} \in \partial V_{bar}} \frac{\vec{r}_{QM} \cdot \vec{n}_Q}{r_{QM}} dS_{N_s} \right) \quad (IV.19)$$

où :  $M$  est le barycentre du volume d'un bar  $V_{bar}$  de la bobine dont les dimensions  $A, B$  et  $C$  sont illustrées par la figure (Fig. IV.24) et  $Q$  est un point qui appartient à une face du bloc  $V_{bar}$ .

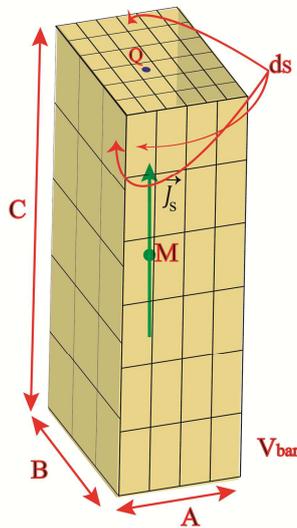


Fig. IV.24 : Maillage de surfaces extérieures du Bloc  $V_{bar}$

Nous savons que la bobine est composée de quatre barreaux. Chaque deux barreaux symétriques par rapport au centre de la bobine ont exactement les mêmes dimensions. Nous pouvons alors limiter notre étude à deux barreaux comme le montre la figure (Fig. IV.25). Nous monterons dans ce qui suit les résultats pour chacun de ces deux barreaux.

#### § 4 : MODELISATION D'UNE ANTENNE BASSE FREQUENCE

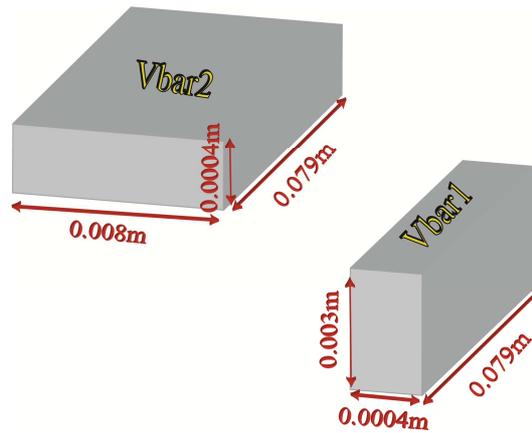


Fig. IV.25 : Deux barreaux de la bobine

Les tableaux (Tab. IV.10) et (Tab. IV.11) montrent les valeurs de l'énergie de chaque barreau. Les nombres de maillages grossiers pour les  $V_{bar1}$  et  $V_{bar2}$  sont respectivement 67 et 105 éléments surfaciques.

Maillage du barreau (éléments)	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage dense
Énergie (J)	$5.538 \times 10^{-8}$	$5.534 \times 10^{-8}$	$5.531 \times 10^{-8}$

Tab. IV.10 : L'énergie  $U_{s_{bar1}}$  de l'antenne basse fréquence

Maillage du barreau (éléments)	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage dense
Énergie (J)	$3.193 \times 10^{-7}$	$3.192 \times 10^{-7}$	$3.191 \times 10^{-7}$

Tab. IV.11 : L'énergie  $U_{s_{bar2}}$  de l'antenne basse fréquence

Le tableau (Tab. IV.12) montre les valeurs de l'énergie totale  $U_{s_{bar}}$ .

Maillage du barreau (éléments)	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage dense
Énergie (J)	$7.495 \times 10^{-7}$	$7.491 \times 10^{-7}$	$7.489 \times 10^{-7}$

Tab. IV.12 : L'énergie  $U_{s_{bar}}$  de l'antenne basse fréquence

**b. Calcul  $U_{arc}$**

L'énergie  $U_{arc}$  est définie comme la somme de deux termes indépendants : le premier terme due à la densité de courant passé dans les arcs de la bobine et le deuxième terme est due aux aimantations du noyau. Ceci permet d'écrire  $U_{arc}$  comme suit :

$$U_{arc} = \frac{1}{2} \left( \iiint_{V_{arc}} \vec{J}_s \cdot \vec{A}_{ms_{arc}} dV + \iiint_{V_{arc}} \vec{J}_s \cdot \vec{A}_{s_{arc}} dV \right) \quad (IV.20)$$

En supposant que le solide  $V_{arc}$  est divisé en  $N_{arc}$  éléments, l'équation précédente devient :

$$U_{arc} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{arc}} (\vec{A}_{m_n} \cdot \vec{J}_n) dv_n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_{arc}} (\vec{A}_{s_n} \cdot \vec{J}_n) dv_n \quad (IV.21)$$

Autrement dit :

$$U_{arc} = U_{m_{arc}} + U_{s_{arc}} \quad (IV.22)$$

Nous verrons dans le paragraphe suivant, le calcul des deux termes de (IV.22) en détails.

Calcul  $U_{m_{arc}}$

Les densités de courant vérifient :  $\vec{J}_1 \neq \vec{J}_2 \neq \dots \neq \vec{J}_n$ , mais nous supposons qu'elles sont constantes dans chaque élément  $n$ .

Nous pouvons calculer le potentiel vecteur  $\vec{A}_{m_n}$  dans (IV.21) facilement en utilisant l'équation (III.87). L'expression de  $U_{m_{arc}}$  peut réécrire comme suivante :

$$U_{m_{arc}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{8\pi} \sum_{n=1}^{N_{arc}} \vec{J}_n \left( \iiint_{V_F \in \Omega_F} \frac{\vec{M}_N \times \vec{r}_{P_n N}}{r_{PN}^3} dV_F \right) dv_n \quad (IV.23)$$

où :  $P_n$  est la barycentre d'un élément  $n$  et  $\vec{M}_N$  est l'aimantation dans un point  $N$  situé dans le noyau.

En subdivisant le noyau à  $N_e$  éléments, la relation (IV.23) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$U_{m_{arc}} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \vec{J}_s}{8\pi} dv \sum_{n=1}^{N_{bar}} \vec{J}_n \sum_{N=1}^{N_e} \frac{\vec{M}_N \times \vec{r}_{P_n N}}{r_{P_n N}^3} dV_N \quad (IV.24)$$

Nous suivons la même manière pour calculer  $U_{m_{bar}}$  par la relation (IV.17) en étudiant l'influence des deux maillages sur le calcul de  $U_{m_{arc}}$ . Le tableau (Tab. IV.13) montre les valeurs de l'énergie  $U_{m_{arc}}$  pour différents maillages du noyau et de l'arc.

Maillage du noyau (éléments)	50			400			3200		
	grossier	moyen	dense	grossier	moyen	dense	grossier	moyen	dense
Énergie (J)	$2.3136 \times 10^{-6}$	$2.305 \times 10^{-6}$	$2.303 \times 10^{-6}$	$1.991 \times 10^{-6}$	$1.984 \times 10^{-6}$	$1.982 \times 10^{-6}$	$1.707 \times 10^{-6}$	$1.703 \times 10^{-6}$	$1.702 \times 10^{-6}$

Tab. IV.13 : L'énergie  $U_{m_{arc}}$  de l'antenne basse fréquence

La subdivision détaillée de l'arc de la bobine, pour le maillage grossier, est donnée dans le tableau (Tab. IV.14). Les nombres de discrétisations de l'épaisseur, l'angle et de l'hauteur d'un arc sont respectivement  $n_r$ ,  $n_a$  et  $n_z$ .

Direction	Symbole	Valeur
Épaisseur	$n_r$	2
Angulaire	$n_a$	10
Hauteur	$n_z$	10

Tab. IV.14 : Subdivision retenue pour l'arc de la bobine

### Calcul $U_{s_{arc}}$

Comme la densité de courant varie d'un élément de  $V_{arc}$  à l'autre, cela nécessite de calculer  $\vec{A}_{s_n}$  pour chaque élément  $n$  de l'arc.

Rappelons que le potentiel vecteur  $\vec{A}_{s_n}$  est calculé par la relation suivante :

$$\vec{A}_{s_n} = \frac{\mu_0 \vec{J}_{s_n}}{8\pi} \sum_{N=1}^{N=6} \iint_{S_N \in \partial v_n} \frac{\vec{r}_{NP} \cdot \vec{n}_N}{r_{NP}} dS_N \quad (IV.25)$$

Dans la littérature, nous trouvons des expressions analytiques [77] pour résoudre (IV.25), mais elles sont complexes et très difficile à implémenter. Nous allons alors appliquer ce que nous avons expliqué précédemment dans le paragraphe (III.6)) en effectuant une

transformation géométrique sur l'élément physique qui le ramène à la forme de l'élément de référence. La figure (Fig. IV.26) montre deux faces d'un élément  $dv_n \in V_{arc}$ .

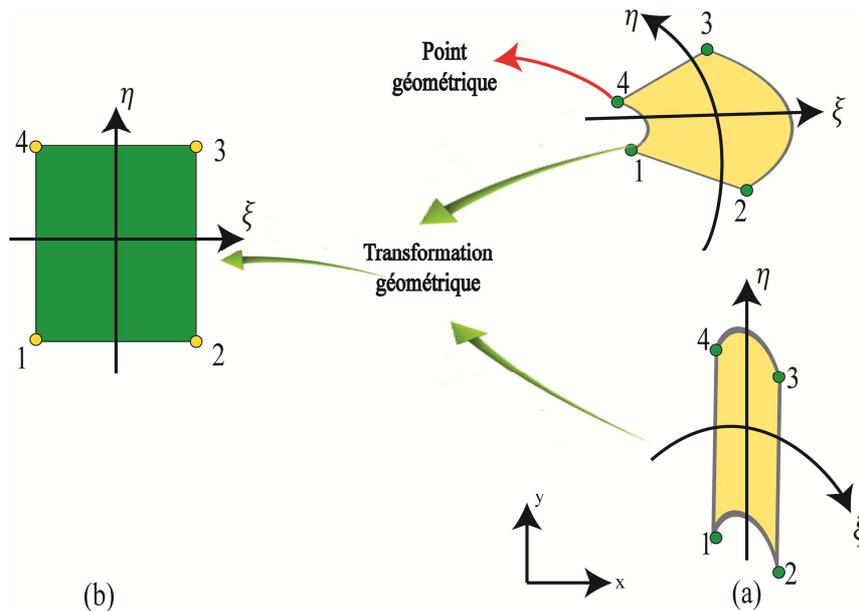


Fig. IV.26 : Elément quadrilatère à quatre nœuds, (a) éléments physiques, (b) élément référence

Comme la bobine est composée de quatre arcs identiques, l'énergie  $U_{sarc}$  est égale quatre fois  $U_{sarc1}$ , où  $U_{sarc1}$  est l'énergie due à un arc. Le tableau (Tab. IV.15) montre les valeurs de  $U_{sarc}$  pour trois maillages de l'arc: grossier, moyen et dense. La subdivision détaillée de l'arc de la bobine, pour le maillage grossier, est donnée dans le tableau (Tab. IV.14).

Maillage de l'arc (éléments)	Maillage grossier	Maillage moyen	Maillage fin
Énergie (J)	$3.66 \times 10^{-8}$	$1.7 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-8}$

Tab. IV.15 : L'énergie  $U_{sarc}$  de l'antenne basse fréquence

Les résultats peuvent être amélioré en utilisant des éléments super-paramétriques au lieu des éléments iso-paramétriques car nous avons des éléments quadratiques.

Enfin, nous avons trouvé que l'énergie magnétostatique totale  $U_m$  est égale à la sommation de quatre termes :  $U_{mbar}$ ,  $U_{sbar}$ ,  $U_{m_{arc}}$  et  $U_{sarc}$  dont les résultats sont respectivement rapportés aux tableaux (Tab. IV.8), (Tab. IV.12), (Tab. IV.13) et (Tab. IV.14).

L'étude donne des résultats très similaires avec une très bonne précision par rapport à la méthode standard (Tab. IV.16) en concernant le maillage fin.

<b>Maillage (éléments)</b>	<b><math>U_m</math> (J) (MoM)</b>	<b><math>U_m</math> (J) (MEF)</b>	<b>Erreur relative%</b>
<b>50</b>	$1.64 \times 10^{-5}$	$2.036 \times 10^{-5}$	19.4
<b>400</b>	$1.8 \times 10^{-5}$	$2.03 \times 10^{-5}$	11
<b>3200</b>	$1.88 \times 10^{-5}$	$1.92 \times 10^{-5}$	2.1

Tab. IV.16 : *L'énergie magnétostatique totale de l'antenne basse fréquence calculée par la méthode MoM et la MEF*

Pour les analyses par la méthode des moments et par la méthode des éléments finis, la perméabilité relative du noyau est prise égale à 1000. Le noyau est maillé avec le même nombre de mailles avec la MoM ou la MEF.

### **IV.9) Conclusion**

Dans ce chapitre, la méthode des moments a été appliquée à une antenne basse fréquence. Nous avons tout d'abord exposé un modèle simple composé d'une pièce magnétique et d'une bobine. Le matériau a été maillé par des éléments hexaédriques réguliers simples pour mettre au point le code de calcul. Ensuite, nous avons montré que la précision de la méthode des moments dépend de plusieurs facteurs : le nombre de la discrétisation du noyau, les valeurs de la perméabilité et les facteurs concernant le calcul des coefficients des matrices élémentaires par des intégrales volumiques (points d'intégration,...). Nous avons vu, pendant le calcul du champ magnétique à l'intérieur du noyau, que la courbe présente des paliers de champ magnétique. Le code doit être alors amélioré pour utiliser les fonctions  $P_1$  (polynôme de degré 1 utilisé en éléments finis) pour améliorer la précision et la convergence. Pour cette application, la méthode des moments est plus efficace que la MEF 3D pour calculer les champs magnétiques à grande distance à partir d'une antenne basse fréquence. Par rapport à la MEF, le système matriciel est plein mais plus petit : un nombre de subdivisions du noyau égal à 50 est suffisant pour avoir une très bonne précision. Seulement quelques secondes sont nécessaires pour résoudre le problème avec la méthode des moments MoM et les résultats sont en bon accords (l'erreur est inférieure à 8%) avec les simulations MEF et les mesures. Dans la MEF, nous utilisons un maillage d'environ 245000 éléments et 48030 nœuds. Ce grand nombre d'éléments est nécessaire pour tenir en compte de la région de l'air autour de l'antenne. A la fin de cette partie, nous avons calculé l'énergie magnétostatique de l'antenne basse fréquence par la méthode des moments et les résultats ont été comparés par rapport aux résultats de la méthode des éléments finis.

## Chapitre . V **MODELISATION DU PPS-FLEX**

## V.1) Introduction

Dans ce chapitre, la méthode des moments est appliquée sur un deuxième exemple. Il s'agit du PPS-Flex qui est un système à grand entrefer avec des géométries assez complexes. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser des propriétés de symétrie pour simplifier le domaine d'étude afin de gagner du temps du calcul et de la mémoire. Le code de la méthode des moments est alors développé afin de calculer les intégrales dans une géométrie complexe et, également, de prendre en compte des symétries géométriques et physiques de la PPS-Flex. Par conséquent, un huitième de la structure va être étudié. Dans un premier temps, nous allons éclaircir la symétrie dans la méthode des moments. Dans un deuxième temps, nous allons présenter les résultats concernant le calcul du champ magnétique à l'intérieur du canal de PPS-Flex. En fin, les résultats seront comparés avec la méthode des éléments finis et la mesure.

## V.2) PPS-Flex

Dans cette partie, nous allons présenter un modèle du PPS-Flex qui a été défini et réalisé dans (Fig. V.1) [11].

Dans le chapitre (Chapitre . IV), la méthode MoM a été appliquée à une antenne basse fréquence où la géométrie simplifiée est utilisée (éléments hexaédriques). Dans cette partie, les matériaux ferromagnétiques de PPS-Flex sont maillés avec un trilineaire irrégulier (huit nœuds) hexaèdre. Ainsi, le code de MoM est développé pour calculer une intégrale dans une géométrie complexe et, également, de prendre en compte des symétries géométriques et physiques de la PPS-Flex. Par conséquent, en utilisant cette méthode, un huitième de la structure va être étudié, contrairement aux problèmes traités par la méthode des moments dans le chapitre (Chapitre . IV), qui a étudié toute la structure de l'antenne basse fréquence.

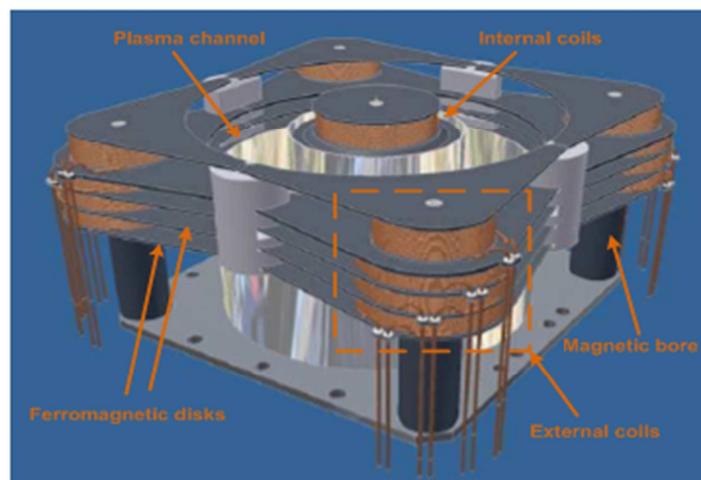


Fig. V.1 : Vue du circuit magnétique complet du PPS-Flex

Dans la suite et avant de présenter les résultats de PPS-Flex, nous allons éclaircir la symétrie dans la MoM, cette dernière a été déjà mentionnée rapidement dans [30] qui l'applique à la moitié de la structure.

### **V.3) Symétries**

Le PPS-Flex est un circuit géométrique assez complexe, il possède des propriétés de symétries. Il est possible de restreindre l'étude à un huitième du domaine afin de gagner du temps et de la mémoire.

#### **V.3.1) Définitions générales des grandeurs polaires et axiales**

Nous pouvons classer les grandeurs physiques en deux catégories :

- Les grandeurs polaires ou les vraies grandeurs : leur module et leurs sens sont parfaitement déterminés. Ils sont totalement indépendants de toute convention d'orientation d'espace. Par exemple, parmi les vecteurs polaires, on note la densité de courant, la vitesse d'une particule et le champ électrostatique, et parmi les scalaires polaires, on note la longueur, le volume, l'angle et la masse.
- Les grandeurs axiales ou pseudo grandeurs : leur signe est sans signification physique et il est arbitraire ; il est fixé en se référant à la convention d'orientation de l'espace et change avec cette convention. Par exemple, parmi les vecteurs axiaux, on note le vecteur de rotation instantanée, la normale à une surface, le champ magnétique et l'aimantation magnétique, et parmi les scalaires axiaux, on note les surfaces et les angles orientés.

#### **V.3.2) Propriétés de symétrie**

##### **➤ Symétrie par rapport à un plan**

Soit  $\vec{A}'(M'_{1,2,3})$  le vecteur obtenu par symétrie par rapport à un plan  $P_s$  à partir de  $\vec{A}(M_{1,2,3})$ . Les vecteurs et les pseudo-vecteurs se transforment dans la symétrie par rapport à ce plan de la façon suivante (voir la figure (Fig. V.2)) :

- Un vecteur est transformé en son symétrique  $\vec{A}'(M'_{1,2,3}) = \vec{A}(M_{1,2,3})$ .
- Un pseudo-vecteurs est transformé en l'opposé du symétrique  $\vec{A}'(M'_{1,2,3}) = -\vec{A}(M_{1,2,3})$ .

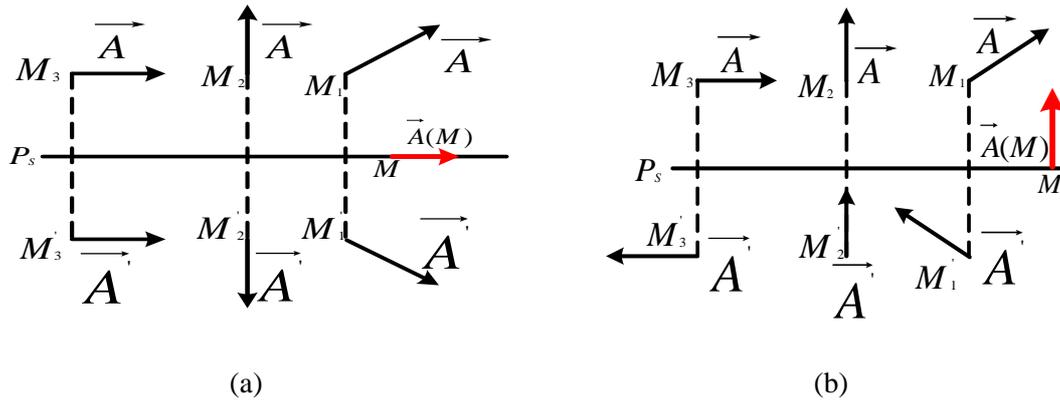


Fig. V.2 : Image d'un vecteur polaire (a) et d'un pseudo-vecteur (b) par symétrie par rapport à un plan \$P\_s\$

D'après la figure ci-dessus, on voit que :

- 1) si \$\vec{A}(M)\$ est un vrai vecteur :
  - Les composantes tangentielles sont égales \$A'\_t = A\_t\$
  - Les composantes normales sont opposées \$A'\_n = -A\_n\$. Alors, en tout point du plan \$P\_s\$, \$\vec{A}(M)\$ est tangentiel.
- 2) au contraire, si \$\vec{A}(M)\$ est un pseudo-vecteur :
  - Les composantes tangentielles sont opposées \$A'\_t = -A\_t\$
  - Les composantes normales sont égales \$A'\_n = A\_n\$. Alors, en tout point du plan \$P\_s\$, \$\vec{A}(M)\$ est normale.

➤ **Antisymétrie par rapport à un plan**

L'image \$\vec{A}''\$ d'un vecteur et d'un pseudo-vecteur par rapport à un plan d'antisymétrie \$P\_A\$ est obtenue selon la règle :

$$\vec{A}'' = -\vec{A}' \tag{V.1}$$

On déduit pour le plan antisymétrique :

- 1) si \$\vec{A}(M)\$ est un vrai vecteur

$$\vec{A}'' = -\vec{A}' = -\vec{A} \tag{V.2}$$

alors, en tout point de ce plan, \$\vec{A}(M)\$ est normal au plan \$P\_A\$.

- 2) si \$\vec{A}(M)\$ est un pseudo-vecteur

$$\vec{A}'' = -\vec{A}' = \vec{A} \tag{V.3}$$

alors, en tout point de ce plan, \$\vec{A}(M)\$ est tangentiel au plan \$P\_A\$.

### V.3.3) Comportement du champ magnétique et de la densité du courant dans les opérations de symétrie

Les propriétés de symétrie du champ magnétique sont fondamentales car elles permettent de simplifier considérablement le calcul du champ magnétique. Du fait que le champ soit un effet créé par un courant, il contient des informations sur les causes qui lui ont donné origine. Cette trivialité se traduit par la présence de certaines symétries et invariances si les sources de courant en possèdent également. Ainsi, si l'on connaît les propriétés de symétrie de la densité de courant, nous pourrions connaître celles du champ magnétique.

Le champ magnétostatique  $\vec{B}$  est défini à partir de la force magnétique  $\vec{F}_{magnétique}$  qui s'exerce sur une charge  $q$  :  $\vec{F}_{magnétique} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Donc il est défini à partir d'un produit vectoriel. C'est alors un pseudo-vecteur.

Les figures (Fig. V.3) et (Fig. V.4) montrent que les plans de symétrie pour les sources  $\vec{j}$  sont des plans d'antisymétrie pour  $\vec{B}$ .

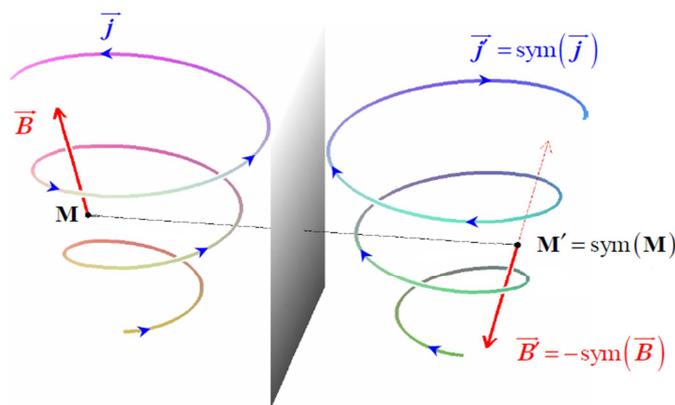


Fig. V.3 : Distribution du courant symétrique et l'induction magnétique antisymétrique

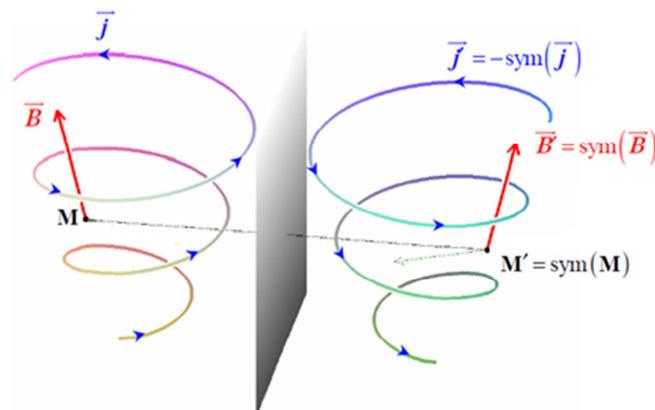


Fig. V.4 : Distribution du courant antisymétrique et l'induction magnétique symétrique

Enfin, les propriétés de symétrie du champ magnétique et de la densité du courant peuvent être résumées dans le tableau suivant (Tab. V.1) :

	<b>Symétrie selon <math>P_S</math></b>	<b>Antisymétrie selon <math>P_A</math></b>
<b>Vrais vecteur : <math>\vec{j}</math></b>	Tangentiel à $P_S$	Orthogonal à $P_A$
<b>Pseudo-vecteur : <math>\vec{B}</math></b>	Orthogonal à $P_S$	Tangentiel à $P_A$

Tab. V.1 : Règle de symétrie du champ magnétique et de la densité du courant

### V.3.4) Application des propriétés de symétrie dans le PPS-Flex

Le problème auquel nous sommes confrontés et nous devons le régler est la taille énorme de la matrice  $[\omega]$ . Dans la suite, nous allons montrer la possibilité d'étudier un huitième de la structure dans le but de réduire la taille de la matrice de  $(3N_e \times 3N_e = 3(8n) \times 3(8n))$  à la taille  $3n \times 3n$ . Nous signalons que le huitième de la structure comporte  $n$  éléments volumiques et le reste de cette structure possède donc  $7n$  éléments volumiques. Pour cet effet, nous allons étudier les symétries par rapport aux trois plans :  $Oyz$ ,  $Ozx$  et  $x = y$ .

Afin de clarifier et de simplifier ce point, il est utile de faire un maillage de 8 éléments : un élément et ses images par rapport aux trois plans mentionnés ci-dessus. Nous allons montrer la possibilité de calculer l'aimantation à partir d'un élément, ici, à partir du premier élément. Ensuite, nous verrons comment généraliser le cas pour  $N_e$  volumes élémentaires.

Soit  $M_i^1$  un point qui appartient à un huitième de la structure de PPS-Flex où :  $i = 1, 2, 3$  (voir la figure (Fig. V.5)). Pour écrire les formules finales de manière générale, nous notons les images de  $M_i^1$  par rapport aux trois plans comme le suivant :  $M_i^{1(2)}, M_i^{1(3)}, \dots, M_i^{1(8)}$ .

#### a. Symétrie par rapport au plan $oyz$

Soient  $M_i^{1(2)}, M_i^{1(3)}, M_i^{1(6)}, M_i^{1(7)}$  respectivement les images de  $M_i^1, M_i^{1(4)}, M_i^{1(5)}, M_i^{1(8)}$  par rapport au plan  $Oyz$  (voir la figure (Fig. V.5)).

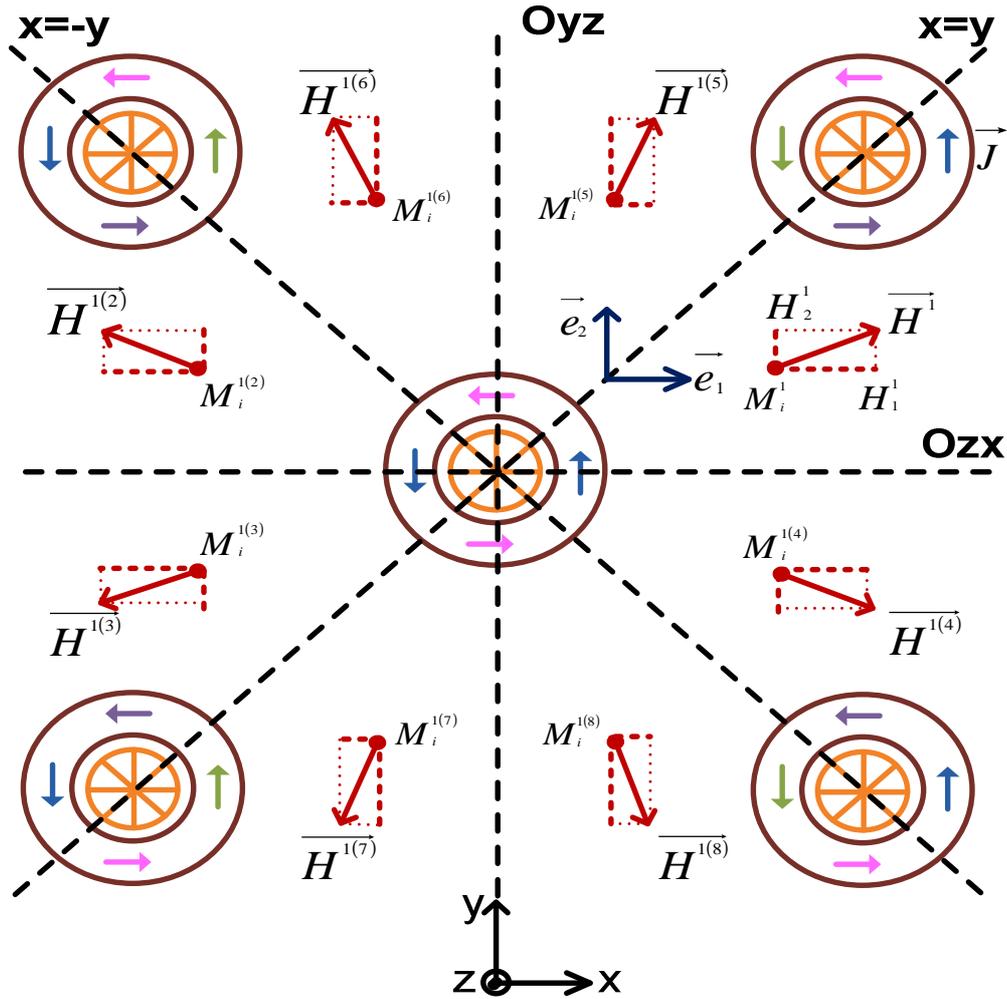


Fig. V.5 : Vues de dessus du PPS-Flex

La figure (Fig. V.5) montre la direction de la densité de courant dans les bobines. Nous remarquons que le plan  $Oyz$  est un plan d'antisymétrie pour les sources, donc, il est un plan de symétrie pour le champ magnétique. Alors, selon l'étude précédente (Tab. V.1), les composantes tangentielles du champ magnétique sont égales et les composantes normales ( $\vec{n} = \vec{e}_1$ ) sont opposées :

$$\begin{pmatrix} H_1^1 = -H_1^{1(2)} \\ H_1^{1(4)} = -H_1^{1(3)} \\ H_1^{1(5)} = -H_1^{1(6)} \\ H_1^{1(8)} = -H_1^{1(7)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_2^1 = H_2^{1(2)} \\ H_2^{1(4)} = H_2^{1(3)} \\ H_2^{1(5)} = H_2^{1(6)} \\ H_2^{1(8)} = H_2^{1(7)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_3^1 = H_3^{1(2)} \\ H_3^{1(4)} = H_3^{1(3)} \\ H_3^{1(5)} = H_3^{1(6)} \\ H_3^{1(8)} = H_3^{1(7)} \end{pmatrix} \quad (V.4)$$

Comme l'aimantation est un vecteur axial (pseudo-vecteur), elle se comporte de la même façon que  $\vec{H}$ . Donc, nous pourrions écrire :

$$\begin{pmatrix} M_1^1 = -M_1^{1(2)} \\ M_1^{1(4)} = -M_1^{1(3)} \\ M_1^{1(5)} = -M_1^{1(6)} \\ M_1^{1(8)} = -M_1^{1(7)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_2^1 = M_2^{1(2)} \\ M_2^{1(4)} = M_2^{1(3)} \\ M_2^{1(5)} = M_2^{1(6)} \\ M_2^{1(8)} = M_2^{1(7)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} M_3^1 = M_3^{1(2)} \\ M_3^{1(4)} = M_3^{1(3)} \\ M_3^{1(5)} = M_3^{1(6)} \\ M_3^{1(8)} = M_3^{1(7)} \end{pmatrix} \quad (V.5)$$

### b. Symétrie par rapport au plan Ozx

Soient  $M_i^{1(4)}$  et  $M_i^{1(8)}$  respectivement les images de  $M_i^1$  et  $M_i^{1(5)}$  par rapport au plan  $Oyz$  (voir la figure (Fig. V.5)). Nous notons aussi que le plan  $Ozx$  est un plan d'antisymétrie pour les sources, donc il est un plan de symétrie pour le champ magnétique. Alors, les composantes tangentielles du champ magnétique sont égales et les composantes normales ( $\vec{n} = \vec{e}_2$ ) sont opposées :

$$\begin{pmatrix} H_1^1 = H_1^{1(4)} \\ H_1^{1(5)} = H_1^{1(8)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_2^1 = -H_2^{1(4)} \\ H_2^{1(5)} = -H_2^{1(8)} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} H_3^1 = H_3^{1(4)} \\ H_3^{1(5)} = H_3^{1(8)} \end{pmatrix} \quad (V.6)$$

### c. Symétrie par rapport à la première bissectrice

Soit  $M_i^{1(5)}$  l'image de  $M_i^1$  par rapport au plan  $x = y$  (voir la figure (Fig. V.5)). L'étude de la symétrie par rapport au plan  $x = y$  donne la relation entre eux (Annexe (A.10)) :

$$\left( H_1^1 = H_2^{1(5)} \right) \quad \left( H_2^1 = H_1^{1(5)} \right) \quad \left( H_3^1 = H_3^{1(5)} \right) \quad (V.7)$$

Nous pouvons résumer les symétries par rapport aux trois plans dans le tableau suivant (Tab. V.2) :

Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Secteur 4	Secteur 5	Secteur 6	Secteur 7	Secteur 8
$\vec{r}_1 \begin{cases} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_2 \begin{cases} -x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_3 \begin{cases} -x_1 \\ -y_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_4 \begin{cases} x_1 \\ -y_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_5 \begin{cases} y_1 \\ x_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_6 \begin{cases} -y_1 \\ x_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_7 \begin{cases} -y_1 \\ -x_1 \\ z_1 \end{cases}$	$\vec{r}_8 \begin{cases} y_1 \\ -x_1 \\ z_1 \end{cases}$
$\vec{J}_1 \begin{cases} J_{x1} \\ J_{x2} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_2 \begin{cases} -J_{x1} \\ J_{x2} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_3 \begin{cases} -J_{x1} \\ -J_{x2} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_4 \begin{cases} J_{x1} \\ -J_{x2} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_5 \begin{cases} J_{x2} \\ J_{x1} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_6 \begin{cases} -J_{x2} \\ J_{x1} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_7 \begin{cases} -J_{x2} \\ -J_{x1} \\ J_{x3} \end{cases}$	$\vec{J}_8 \begin{cases} J_{x2} \\ -J_{x1} \\ J_{x3} \end{cases}$
$\vec{H}_1 \begin{cases} H_{x1} \\ H_{x2} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_2 \begin{cases} -H_{x1} \\ H_{x2} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_3 \begin{cases} -H_{x1} \\ -H_{x2} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_4 \begin{cases} H_{x1} \\ -H_{x2} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_5 \begin{cases} H_{x2} \\ H_{x1} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_6 \begin{cases} -H_{x2} \\ H_{x1} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_7 \begin{cases} -H_{x2} \\ -H_{x1} \\ H_{x3} \end{cases}$	$\vec{H}_8 \begin{cases} H_{x2} \\ -H_{x1} \\ H_{x3} \end{cases}$

Tab. V.2 : Symétrie par rapport aux trois plans

En utilisant les données dans le tableau (Tab. V.2), les composantes  $i = 1, 2, 3$  du champ d'excitation magnétique au centre du bloc  $I = 1$  et au centre de ses images  $I = 1(2), 1(3), \dots, 1(8)$  peuvent être écrites sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ -H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ -H_{m1}^{I=1} \\ -H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ H_{m1}^{I=1} \\ -H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ -H_{m1}^{I=1} \\ -H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ -H_{m1}^{I=1} \\ -H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \\ -H_{m1}^{I=1} \\ -H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{11}^{1,1(1)} & F_{12}^{1,1(1)} & F_{13}^{1,1(1)} \\ F_{21}^{1,1(1)} & F_{22}^{1,1(1)} & F_{23}^{1,1(1)} \\ F_{31}^{1,1(1)} & F_{32}^{1,1(1)} & F_{33}^{1,1(1)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} F_{11}^{1,1(2)} & F_{12}^{1,1(2)} & F_{13}^{1,1(2)} \\ F_{21}^{1,1(2)} & F_{22}^{1,1(2)} & F_{23}^{1,1(2)} \\ F_{31}^{1,1(2)} & F_{32}^{1,1(2)} & F_{33}^{1,1(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} F_{11}^{1,1(8)} & F_{12}^{1,1(8)} & F_{13}^{1,1(8)} \\ F_{21}^{1,1(8)} & F_{22}^{1,1(8)} & F_{23}^{1,1(8)} \\ F_{31}^{1,1(8)} & F_{32}^{1,1(8)} & F_{33}^{1,1(8)} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} F_{11}^{1(2),1} & F_{12}^{1(2),1} & F_{13}^{1(2),1} \\ F_{21}^{1(2),1} & F_{22}^{1(2),1} & F_{23}^{1(2),1} \\ F_{31}^{1(2),1} & F_{32}^{1(2),1} & F_{33}^{1(2),1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} F_{11}^{1(2),1(2)} & F_{12}^{1(2),1(2)} & F_{13}^{1(2),1(2)} \\ F_{21}^{1(2),1(2)} & F_{22}^{1(2),1(2)} & F_{23}^{1(2),1(2)} \\ F_{31}^{1(2),1(2)} & F_{32}^{1(2),1(2)} & F_{33}^{1(2),1(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} F_{11}^{1(2),1(8)} & F_{12}^{1(2),1(8)} & F_{13}^{1(2),1(8)} \\ F_{21}^{1(2),1(8)} & F_{22}^{1(2),1(8)} & F_{23}^{1(2),1(8)} \\ F_{31}^{1(2),1(8)} & F_{32}^{1(2),1(8)} & F_{33}^{1(2),1(8)} \end{bmatrix} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \begin{bmatrix} F_{11}^{1(8),1} & F_{12}^{1(8),1} & F_{13}^{1(8),1} \\ F_{21}^{1(8),1} & F_{22}^{1(8),1} & F_{23}^{1(8),1} \\ F_{31}^{1(8),1} & F_{32}^{1(8),1} & F_{33}^{1(8),1} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} F_{11}^{1(8),1(2)} & F_{12}^{1(8),1(2)} & F_{13}^{1(8),1(2)} \\ F_{21}^{1(8),1(2)} & F_{22}^{1(8),1(2)} & F_{23}^{1(8),1(2)} \\ F_{31}^{1(8),1(2)} & F_{32}^{1(8),1(2)} & F_{33}^{1(8),1(2)} \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} F_{11}^{1(8),1(8)} & F_{12}^{1(8),1(8)} & F_{13}^{1(8),1(8)} \\ F_{21}^{1(8),1(8)} & F_{22}^{1(8),1(8)} & F_{23}^{1(8),1(8)} \\ F_{31}^{1(8),1(8)} & F_{32}^{1(8),1(8)} & F_{33}^{1(8),1(8)} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ -M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ -M_1^1 \\ -M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^1 \\ -M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ -M_1^1 \\ -M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ -M_1^1 \\ -M_2^1 \\ M_3^1 \\ M_1^1 \\ M_2^1 \\ M_3^1 \\ -M_1^1 \\ -M_2^1 \\ M_3^1 \end{pmatrix} \quad (V.8)$$

où : l'indice « 1,1(1) » dans  $F_{11}^{1,1(1)}$  dans la relation précédente dénote l'influence d'un élément sur lui-même. Grâce à la symétrie géométrique, nous pourrions réduire les trois composantes de  $\vec{H}_i$  :

- La première composante de  $\vec{H}_i$  est clairement égale :

$$\begin{aligned} H_{m1}^{I=1} &= \left[ F_{11}^{1,1(1)} - F_{11}^{1,1(2)} - F_{11}^{1,1(3)} + F_{11}^{1,1(4)} + F_{12}^{1,1(5)} + F_{12}^{1,1(6)} - F_{12}^{1,1(7)} \right. \\ &\quad \left. - F_{12}^{1,1(8)} \right] M_1^{J=1} \\ &+ \left[ F_{12}^{1,1(1)} + F_{12}^{1,1(2)} - F_{12}^{1,1(3)} - F_{12}^{1,1(4)} - F_{11}^{1,1(5)} - F_{11}^{1,1(6)} + F_{11}^{1,1(7)} \right. \\ &\quad \left. + F_{11}^{1,1(8)} \right] M_2^{J=1} \\ &+ \left[ F_{12}^{1,1(1)} + F_{12}^{1,1(2)} + F_{12}^{1,1(3)} + F_{12}^{1,1(4)} + F_{11}^{1,1(5)} + F_{11}^{1,1(6)} + F_{11}^{1,1(7)} \right. \\ &\quad \left. + F_{11}^{1,1(8)} \right] M_3^{J=1} \end{aligned} \quad (V.9)$$

Pour rendre l'équation finale plus facile à lire, nous allons récrire (V.9) comme suit :

$$H_{m1}^{I=1} = \mathcal{F}_{11}^{I,J} M_1^{J=1} + \mathcal{F}_{12}^{I,J} M_2^{J=1} + \mathcal{F}_{13}^{I,J} M_3^{J=1} \quad (V.10)$$

- De la même façon, la deuxième composante de  $\vec{H}_i$  déduite de (V.8) est égale :

$$H_{m2}^{I=1} = \left[ F_{21}^{1,1(1)} - F_{21}^{1,1(2)} - F_{21}^{1,1(3)} + F_{21}^{1,1(4)} + F_{22}^{1,1(5)} + F_{22}^{1,1(6)} - F_{22}^{1,1(7)} - F_{22}^{1,1(8)} \right] M_1^{J=1} \quad (V.11)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[ F_{22}^{1,1(1)} + F_{22}^{1,1(2)} - F_{22}^{1,1(3)} - F_{22}^{1,1(4)} - F_{21}^{1,1(5)} - F_{21}^{1,1(6)} + F_{21}^{1,1(7)} + F_{21}^{1,1(8)} \right] M_2^{J=1} \\
 & + \left[ F_{23}^{1,1(1)} + F_{23}^{1,1(2)} + F_{23}^{1,1(3)} + F_{23}^{1,1(4)} + F_{23}^{1,1(5)} + F_{23}^{1,1(6)} + F_{23}^{1,1(7)} + F_{23}^{1,1(8)} \right] M_3^{J=1}
 \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$H_{m2}^{I=1} = \mathcal{F}_{21}^{I,J} M_1^{J=1} + \mathcal{F}_{21}^{I,J} M_2^{J=1} + \mathcal{F}_{21}^{I,J} M_3^{J=1} \quad (V.12)$$

- Enfin, la troisième composante de  $\vec{H}_1$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 H_{m3}^{I=1} & = \left[ F_{31}^{1,1(1)} - F_{31}^{1,1(2)} - F_{31}^{1,1(3)} + F_{31}^{1,1(4)} + F_{32}^{1,1(5)} + F_{32}^{1,1(6)} - F_{32}^{1,1(7)} \right. \\
 & \quad \left. - F_{32}^{1,1(8)} \right] M_1^{J=1} \\
 & + \left[ F_{32}^{1,1(1)} + F_{32}^{1,1(2)} - F_{32}^{1,1(3)} - F_{32}^{1,1(4)} - F_{31}^{1,1(5)} - F_{31}^{1,1(6)} + F_{31}^{1,1(7)} + F_{31}^{1,1(8)} \right] M_2^{J=1} \\
 & + \left[ F_{33}^{1,1(1)} + F_{33}^{1,1(2)} + F_{33}^{1,1(3)} + F_{33}^{1,1(4)} + F_{33}^{1,1(5)} + F_{33}^{1,1(6)} + F_{33}^{1,1(7)} + F_{33}^{1,1(8)} \right] M_3^{J=1}
 \end{aligned} \quad (V.13)$$

De la même façon pour les équations précédentes :

$$H_{m3}^{I=1} = \mathcal{F}_{31}^{I,J} M_1^{J=1} + \mathcal{F}_{31}^{I,J} M_2^{J=1} + \mathcal{F}_{31}^{I,J} M_3^{J=1} \quad (V.14)$$

Finalement, nous pourrions écrire les trois composantes en forme matricielle simple :

$$\begin{Bmatrix} H_{m1}^{I=1} \\ H_{m2}^{I=1} \\ H_{m3}^{I=1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{11}^{I,J} & \mathcal{F}_{12}^{I,J} & \mathcal{F}_{13}^{I,J} \\ \mathcal{F}_{21}^{I,J} & \mathcal{F}_{22}^{I,J} & \mathcal{F}_{23}^{I,J} \\ \mathcal{F}_{31}^{I,J} & \mathcal{F}_{32}^{I,J} & \mathcal{F}_{33}^{I,J} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1^{J=1} \\ M_2^{J=1} \\ M_3^{J=1} \end{Bmatrix} \quad (V.15)$$

En général, la relation précédente devient :

$$H_{mi}^{I=1} = \sum_{j=1}^3 \mathcal{F}_{ij}^{I,J} M_j^{J=1} \quad (V.16)$$

On peut généraliser l'équation (V.16) pour ( $N_e = 8n$ ) en l'écrivant de la façon suivante :

$$H_{mi}^I = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{j=1}^3 \mathcal{F}_{ij}^{I,J} M_j^J \right) \quad (V.17)$$

Enfin, la nouvelle matrice d'interaction globale pour le nouveau système linéaire qui tient compte des symétries du problème est une matrice de taille  $3n \times 3n$  contre ( $3N_e \times 3N_e = 3(8n) \times 3(8n)$ ). Ainsi, la mémoire de l'espace nécessaire pour stocker la matrice est 64 fois de plus petite. De plus, en comparaison la relation qui prend en compte la symétrie (V.17) avec celle qui ne prend pas en compte la symétrie (III.56), on remarque que le temps du calcul de la matrice est divisé par 8.

### V.3.5) Calcul du champ source par Biot et Savart

Le PPS-Flex est une structure multi étage, ses principales caractéristiques sont indiquées dans le Tableau (Tab. V.3) [11].

<b>Caractéristiques générales du circuit magnétique</b>	<b>Hauteur sans dernier étage (axiale)</b>	78 mm
	<b>Hauteur avec dernier étage (axiale)</b>	90 mm
	<b>Largeur (diagonale maximale)</b>	240 mm
	<b>Nombre d'étages total</b>	3 + 1 amovible
	<b>Nombre de colonnes externes</b>	4
	<b>Nombre total de bobines</b>	4 internes + 16 externes + 2 arrières
<b>Caractéristiques du canal</b>	<b>Largeur du canal rectiligne (radiale)</b>	16 mm
	<b>Longueur du canal rectiligne (axiale)</b>	27 mm
	<b>Largeur maximale partie oblique du canal (radiale)</b>	35 mm
	<b>Longueur partie oblique du canal (axiale)</b>	11 mm

Tab. V.3 : Récapitulatif des principales caractéristiques du circuit magnétique du PPS Flex

Afin de calculer le champ magnétique dû aux bobines, nous avons utilisé la même approche qui a été utilisée dans la première application de la méthode des moments (ABF). Cette approche classique peut facilement être calculée par la loi de Biot et Savart.

Les distributions de la composante  $H_z$  du champ magnétique dû aux bobines le long de l'axe  $Oz$  à l'intérieur des bobines internes et externes sont respectivement indiquées sur les figures (Fig. V.6) et (Fig. V.7). Les pourcentages d'erreur relative entre les résultats calculés par le code écrit sous Matlab et ceux obtenus par Ansys par rapport à ceux obtenus par Ansys sont indiqués sur les mêmes figures. Les faibles valeurs de cette erreur montrent donc clairement la précision du calcul de champ  $\vec{H}_s$ .

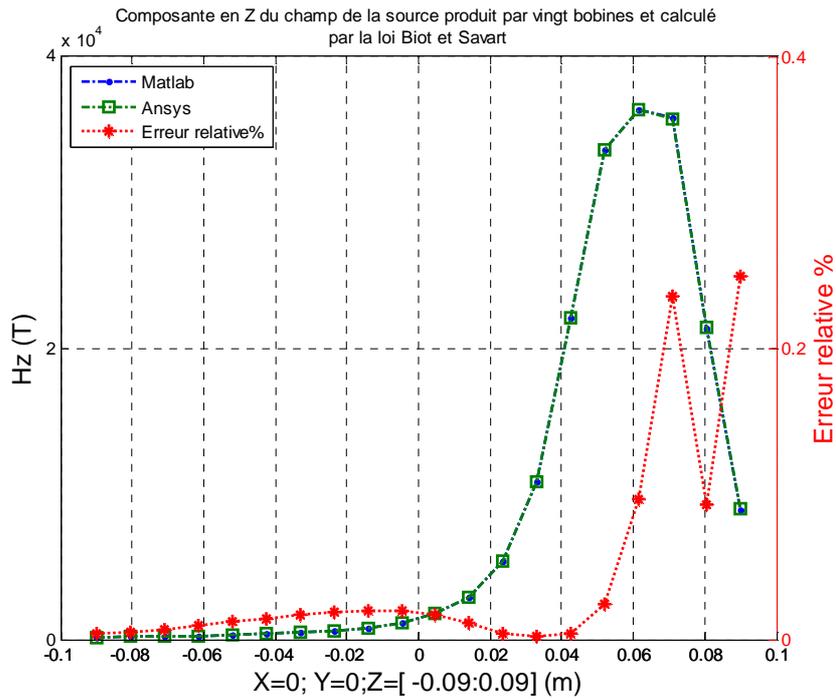


Fig. V.6 : Distribution du champ magnétique dû aux bobines totales le long de l'axe Oz. Comparaison des résultats obtenus à l'intérieur des bobines internes par Ansys avec ceux calculés par Matlab

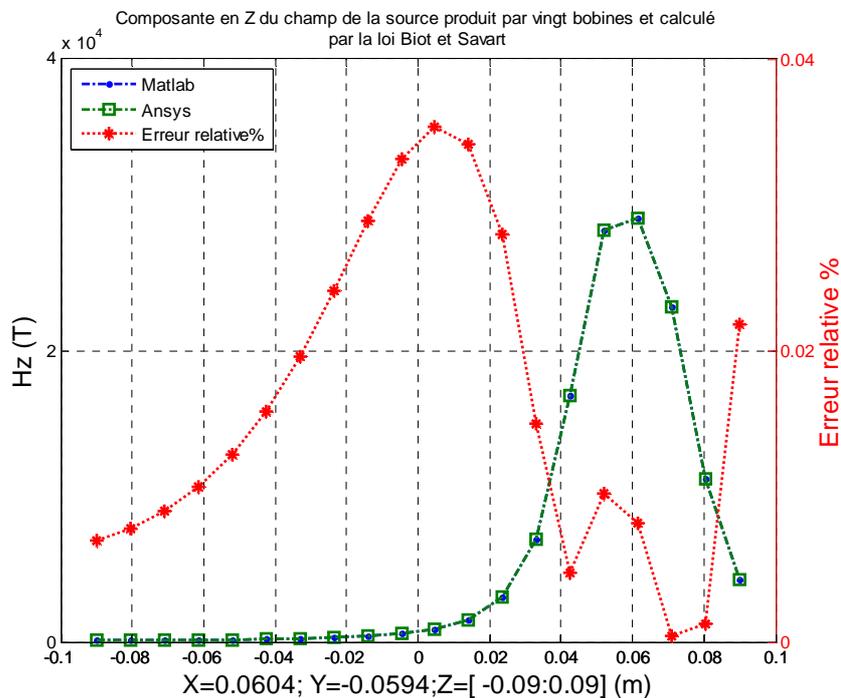


Fig. V.7 : Distribution du champ magnétique dû aux bobines totales le long de l'axe Oz. Comparaison des résultats obtenus à l'intérieur des bobines externes par Ansys avec ceux calculés par Matlab

### V.3.6) Illustration de l'intérêt de prendre en compte les symétries

Le code est développé pour prendre en compte l'étude théorique concernant la symétrie mentionné dans le paragraphe (V.3.4). Dans ce paragraphe nous allons comparer les résultats du code qui ne tient pas en compte de la symétrie avec ceux obtenues par le code qui prend en compte la symétrie.

Comme le PPS-flex est un exemple complexe, il est difficile de réaliser une simulation avec le maillage complet. Afin de valider le code développé et de comparer les résultats de chacun des deux codes en termes de nombre d'éléments et de temps du calcul, nous présentons un cas test de validation. Nous utilisons un circuit magnétique représentatif d'une partie de la colonne centrale du PPS-Flex comme le montre la figure (Fig. V.8) au niveau du carrée rouge (cylindre). Ce circuit est alimenté par les vingt bobines décrites précédemment. Il est utile pour dégager des résultats numériques vérifiant l'importance et la nécessité d'utiliser la symétrie dans la méthode des moments, en particulière, lorsqu' il s'agit des objets de grande taille.

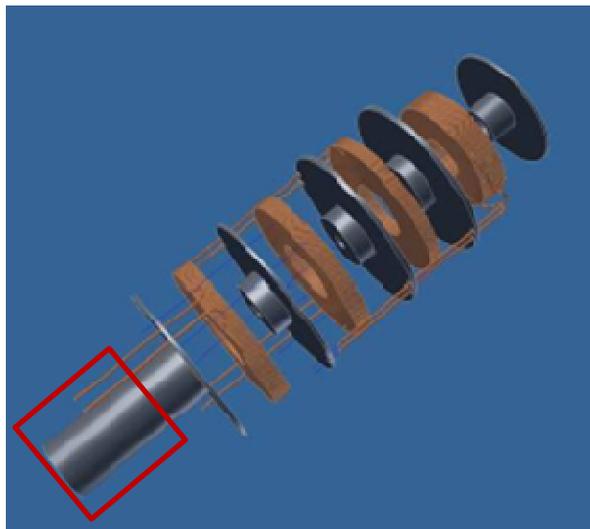


Fig. V.8 : Pièce ferromagnétique des bobines centrales de PPS-Flex

Le maillage du cylindre possède 480 éléments hexaédriques. Grâce à la symétrie, la taille du système linéaire est réduite à 60 éléments hexaédriques (un huitième du cylindre) (Fig. V.9).

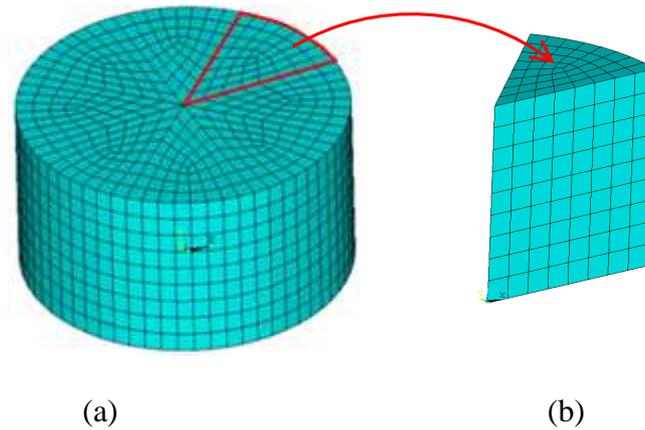


Fig. V.9 : (a) maillage du cylindre. (b) maillage d'un huitième du cylindre

Nous avons calculé le champ magnétique à l'extérieur du matériau par les deux codes (sans tenir compte de la symétrie et tenant compte de la symétrie). Les figures (Fig. V.10) et (Fig. V.11) illustrent respectivement les composantes du champ magnétique  $B_r$ ,  $B_z$ . Les résultats se sont toujours avérés satisfaisant bien que la taille du système à résoudre soit bien plus petite.

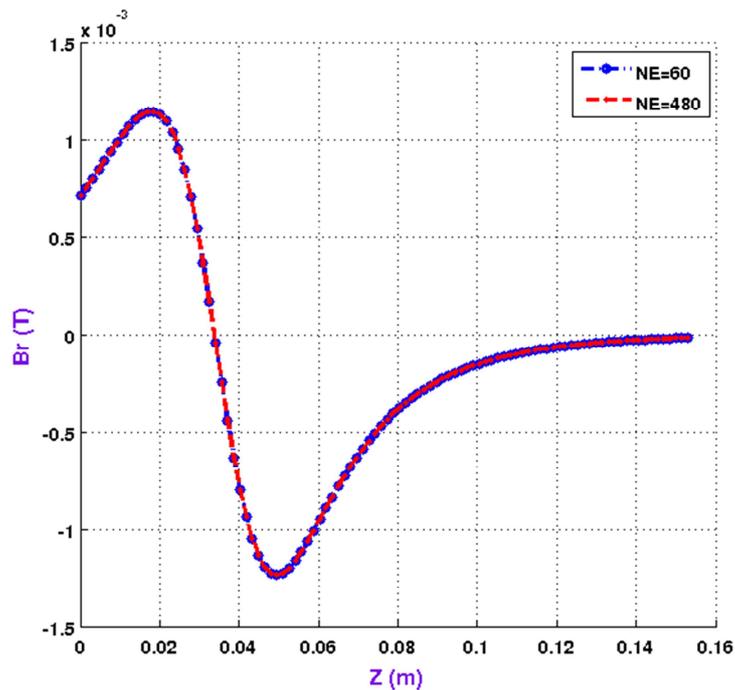


Fig. V.10 : Composante radiale du champ magnétique totale  $B_r$  le long de l'axe  $Oz$  à l'extérieur du cylindre. Comparaison des résultats dus au maillage complet (cylindre) avec ceux dû à la huitième du cylindre

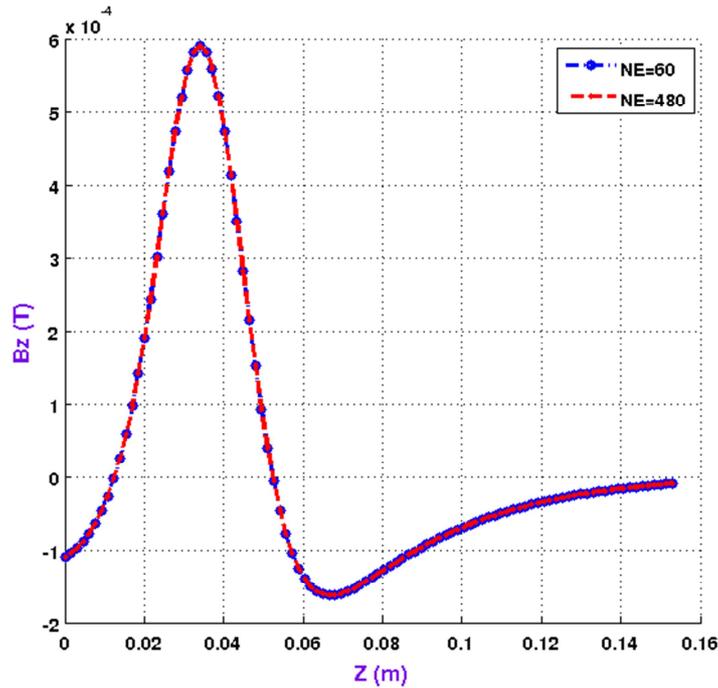


Fig. V.11 : Composante axiale du champ magnétique totale  $B_z$  le long de l'axe  $Oz$  à l'extérieur du cylindre. Comparaison des résultats dus au maillage complet (cylindre) avec ceux dû à la huitième du cylindre

La nouvelle version du code a non seulement réduit la taille de la matrice de  $(3 * 480 \times 3 * 480)$  à la taille  $(3 * 60 \times 3 * 60)$ , mais elle a également conduit à un gain notable en termes de temps de calcul. C'est ce que nous indique très clairement le tableau suivant (Tab. V.4) :

	Nombre d'éléments du maillage	Temps (seconde)
Un huitième du cylindre	60	46
Maillage complet du cylindre	480	378

Tab. V.4 : Comparaison du temps du calcul de la matrice entre le code qui prend en compte la symétrie et celui qui ne prend pas en compte la symétrie

On remarque que le temps du calcul de la matrice globale dans le cas d'un maillage complet du cylindre est égal à 378 seconde. Alors que, le temps de calcul pour un huitième du cylindre est seulement 46 seconde. Soit à peu près 8 fois plus rapide que le maillage complet (voir les relations (V.17) et (III.56)). Donc, l'application de la symétrie dans la méthode des moments réduit le temps du calcul de la matrice d'interactions élémentaires et réduit l'espace de stockage.

Il convient de signaler que le temps du calcul de champs total  $\vec{H}$  dans n'importe quel point dans l'espace  $P$  est le même dans les deux cas étudiés précédemment. Nous allons justifier l'égalité en termes de temps de calcul comme suit :

Dans le code qui ne prend pas en compte la symétrie, nous utilisons l'expression de  $\vec{H}(P)$  donnée par:

$$\vec{H}(P) = \vec{H}_S(P) + \sum_{I=1}^{N_e} \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_I} \left\{ 3 \frac{(\overline{M^I} \vec{r}_{PN})}{r_{PN}^5} \vec{r}_{PN} - \frac{\overline{M^I}}{r_{PN}^3} \right\} dV \quad (V.18)$$

Dans le code développé qui prend en compte la symétrie, nous utilisons la relation suivante pour calculer le champ  $\vec{H}(P)$  :

$$\vec{H}(P) = \vec{H}_S(P) + \sum_{I=1}^{n=\frac{N_e}{8}} \sum_{i=1}^8 \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_{I(i)}} \left\{ 3 \frac{(\overline{M^{I(i)}} \vec{r}_{PN})}{r_{PN}^5} \vec{r}_{PN} - \frac{\overline{M^{I(i)}}}{r_{PN}^3} \right\} dV \quad (V.19)$$

où :  $\overline{M^{I(i)}}$  représentent les valeurs de l'aimantation, où  $i = 2, 3, \dots, 8$  . Ces valeurs des aimantations ont été générées à partir de l'aimantation  $\overline{M^{I(1)}}$  calculée dans un élément  $I$  appartenant à un huitième de PPS-Flex (selon l'étude de la symétrie (Tab. V.2)).

Dans les deux relations (V.18) et (V.19), nous remarquons la similarité du nombre de fois de calcul des intégrales pour le deuxième terme. Ceci induit une égalité du temps de calcul.

En fin de cet exemple, nous pourrions dire que l'utilisation de la symétrie dans la méthode des moments nous permet d'utiliser le code développé pour appliquer la méthode des moments à notre exemple de départ.

#### **V.4) Résultats numériques**

Après avoir validé les sous-programmes du code développés concernant le calcul du champ dû aux bobines et l'application de la symétrie dans la méthode de MoM sur le circuit PPS-Flex, nous calculons les composantes du champ total par la relation (V.19) à l'intérieur du canal céramique comme le montre la figure (Fig. V.12) en utilisant différentes densités de maillage : 722, 3392 et 11040 éléments volumiques.

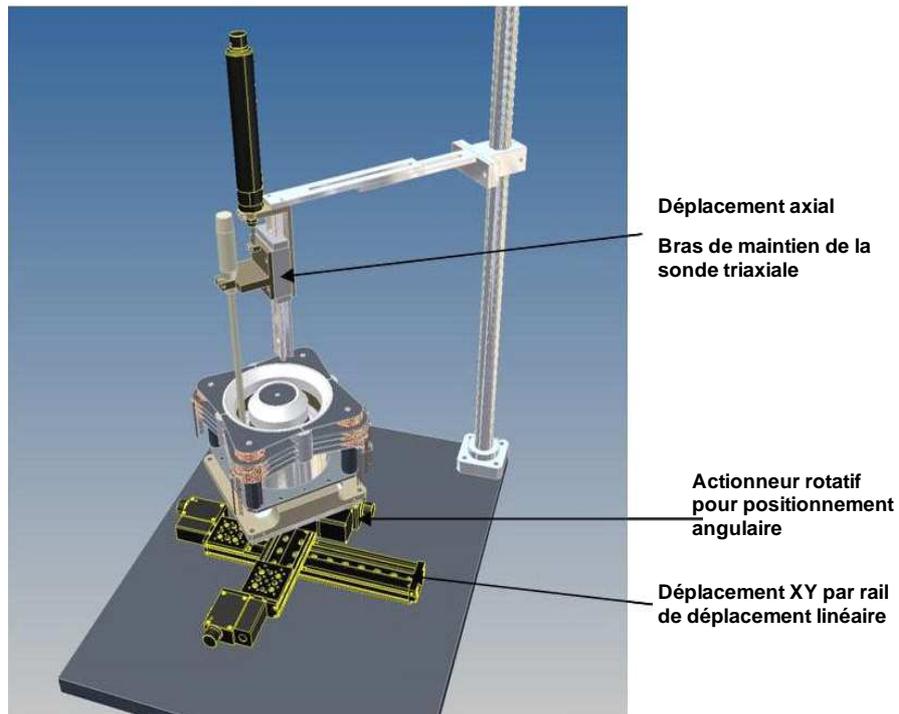


Fig. V.12 : Vue 3D du banc de caractérisation magnétique

Les résultats sont exprimés dans un repère cylindrique. La position  $z = 0$  est définie au niveau du plan de sortie du canal rectiligne. L'angle  $\theta = 0^\circ$  est choisi entre deux bobines externes (Fig. V.13).

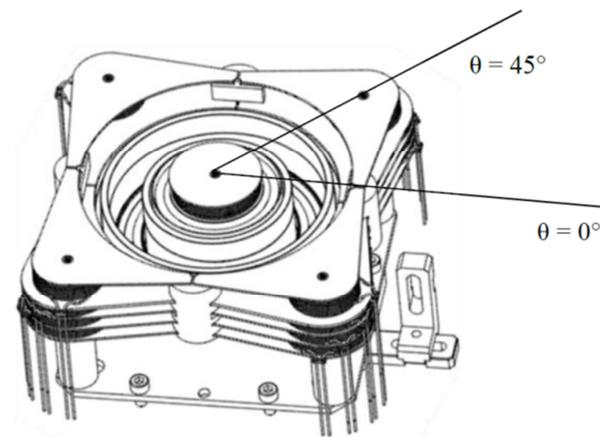


Fig. V.13 : Positionnement du repère cylindrique

Les composantes axiale et radiale du champ magnétique total pour les trois maillages étudiés sont présentées respectivement sur les figures (Fig. V.14) et (Fig. V.15). Les valeurs ont été normalisées, pour des raisons de confidentialité, par rapport à la valeur de l'amplitude du champ  $\vec{B}$  au centre du canal.

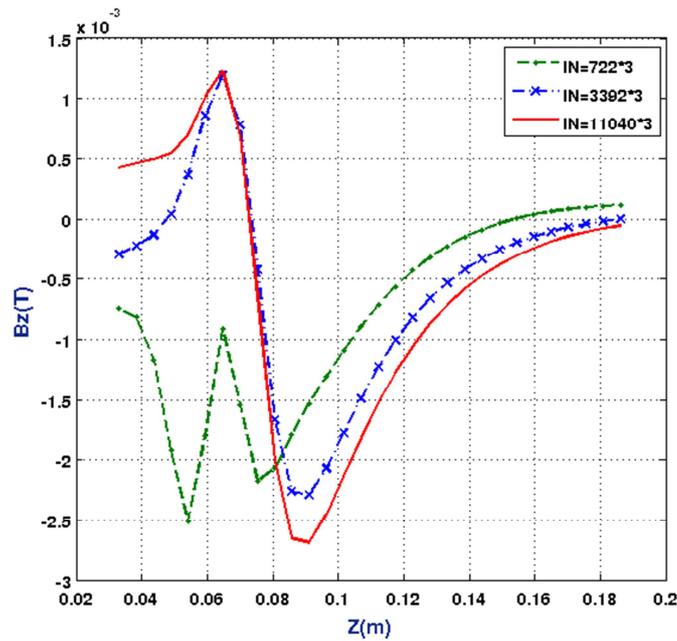


Fig. V.14 : Distribution de la composante axiale du champ magnétique calculé par la MOM pour un nombre différent d'éléments, le long de l'axe Oz, à proximité de la paroi interne ( $r=42.35$  mm) pour une valeur de  $\theta$  égale à  $45^\circ$

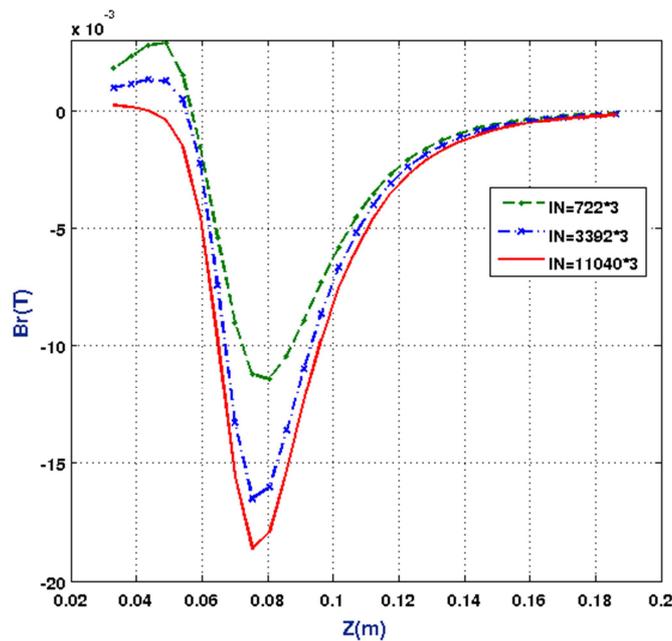


Fig. V.15 : Distribution de la composante radiale du champ magnétique calculé par la MoM pour un nombre différent d'éléments, le long de l'axe Oz, à proximité de la paroi interne ( $r=42.35$  mm) pour une valeur de  $\theta$  égale à  $45^\circ$

Cette étude nous a permis de faire une analyse quantitative de l'influence de la discrétisation sur la convergence de la solution numérique. Nous remarquons que les écarts entre les résultats des trois maillages ont diminué en augmentant le nombre d'éléments. Nous savons que cet écart peut s'annuler par le calcul du champ avec des maillages dont le nombre d'éléments est plus élevé que celui du maillage fin. Comme le calcul de la matrice  $[F]$  est très coûteux en temps de calcul comme le montre le tableau (Tab. V.8) et aussi il est limité par la taille de la mémoire, nous s'arrêtons à un maillage avec 11040 éléments.

#### V.4.1) Vérification de la prise en compte des symétries

Après avoir validé la symétrie dans le code pour une partie du PPS-Flex (cylindre), nous pouvons valider la symétrie pour le circuit PPS-Flex de manière très simple en calculant le champ en huit points :  $M_i^1$  et ses images par rapport aux trois plans, chacun appartient à un secteur (un huitième de PPS-Flex) exactement comme le montre les figures (Fig. V.5) et (Fig. V.16). Normalement les valeurs des champs obtenus en ces points doivent être rassemble à ceux présentés dans le tableau (Tab. V.2).

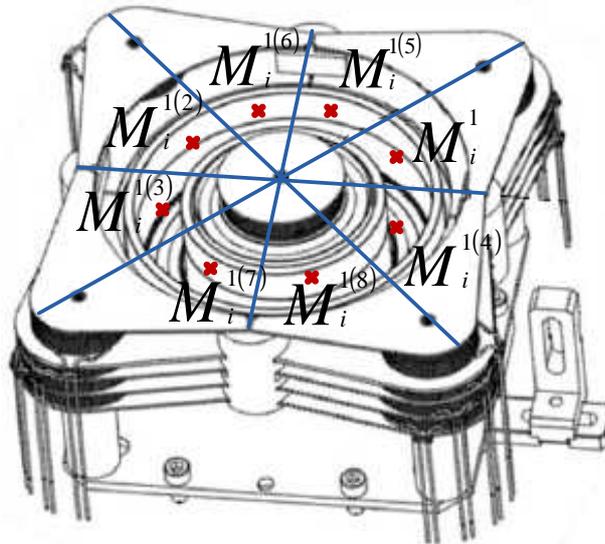


Fig. V.16 : Positions des points de calcul qui ont le même rayon  $r = 42.35$  (mm), la même hauteur  $Z$  et différents angles

Nous avons calculé les composantes du champ magnétique à l'extérieur des matériaux ferromagnétique et à l'intérieur du canal du propulseur (Fig. V.16) à trois hauteurs différents  $Z = 30, 50, 70$  (mm) comme le montre respectivement les tableaux (Tab. V.5), (Tab. V.6) et (Tab. V.7).

$\vec{B}$	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Secteur 4	Secteur 5	Secteur 6	Secteur 7	Secteur 8
$B_x$	0.0006	-0.0006	-0.0006	0.0006	0.0004	-0.0004	-0.0004	0.0004
$B_y$	0.0004	0.0004	-0.0004	-0.0004	0.0006	0.0006	-0.0006	-0.0006
$B_z$	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004	-0.0004

Tab. V.5 : Composantes du champ magnétique obtenues en huit points dans le plan :  $r=42.35$  (mm),  $z=30$  (mm)

$\vec{B}$	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Secteur 4	Secteur 5	Secteur 6	Secteur 7	Secteur 8
$B_x$	0.0008	-0.0008	-0.0008	0.0008	0.0005	-0.0005	-0.0005	0.0005
$B_y$	0.0005	0.0005	-0.0005	-0.0005	0.0008	0.0008	-0.0008	-0.0008
$B_z$	8.68e-5							

Tab. V.6 : Composantes du champ magnétique obtenues en huit points dans le plan :  $r=42.35$  (mm),  $z=50$  (mm)

$\vec{B}$	Secteur 1	Secteur 2	Secteur 3	Secteur 4	Secteur 5	Secteur 6	Secteur 7	Secteur 8
$B_x$	-0.0121	0.0121	0.0121	-0.0121	-0.0051	0.0051	0.0051	-0.0051
$B_y$	-0.0051	-0.0051	0.0051	0.0051	-0.0121	-0.0121	0.0121	0.0121
$B_z$	1.06e-3							

Tab. V.7 : Composantes du champ magnétique obtenues en huit points dans le plan :  $r=42.35$  (mm),  $z=70$  (mm)

Les résultats des tableaux (Tab. V.5), (Tab. V.6) et (Tab. V.7) sont similaires à ceux obtenus dans le tableau (Tab. V.2) qui résume l'étude de la symétrie de PPS-Flex par rapport aux trois plans.

#### **V.4.2) Comparaison avec la méthode des éléments finis**

Comme le logiciel Ansys est limité par le nombre d'éléments, nous avons utilisé le logiciel GMAG.

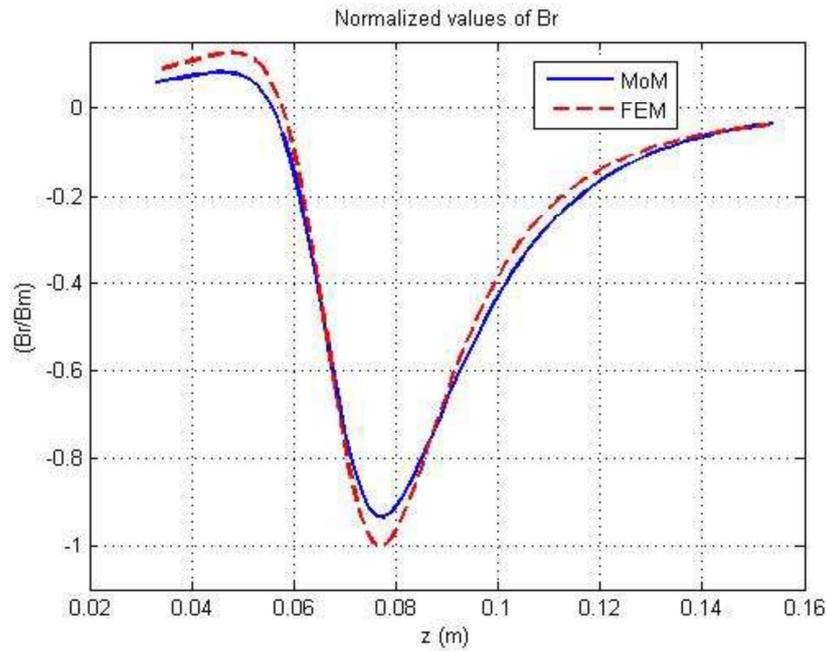


Fig. V.17 : Répartition de la composante radiale de la densité du champ magnétique calculé par la méthode des moments (MoM) et la méthode des éléments finis le long de l'axe Oz

La figure (Fig. V.17) montre que les résultats calculés par la MoM sont très similaires avec ceux obtenus par la méthode MEF.

### V.4.3) Comparaison avec la mesure

Une vue 3D de l'ensemble est présentée par la figure (Fig. V.12). Le pilotage de l'ensemble est assuré par un PC via le logiciel d'interfaçage et d'acquisition Labview.

Les résultats obtenus à l'aide du code de la méthode des moments sont comparés aux mesures sur les figures (Fig. V.18) et (Fig. V.19). Parmi les maillages que nous avons utilisés, le maillage fin (11040 éléments) donne les résultats les plus proches, mais le temps de calcul dans ce cas est très important. Nous remarquons aussi que le maillage à 722 éléments donne des résultats légèrement perturbés par l'erreur de la discrétisation. La Figure (Fig. V.18) montre de plus que des différences existent, non seulement sur les amplitudes, mais aussi sur la forme des courbes.

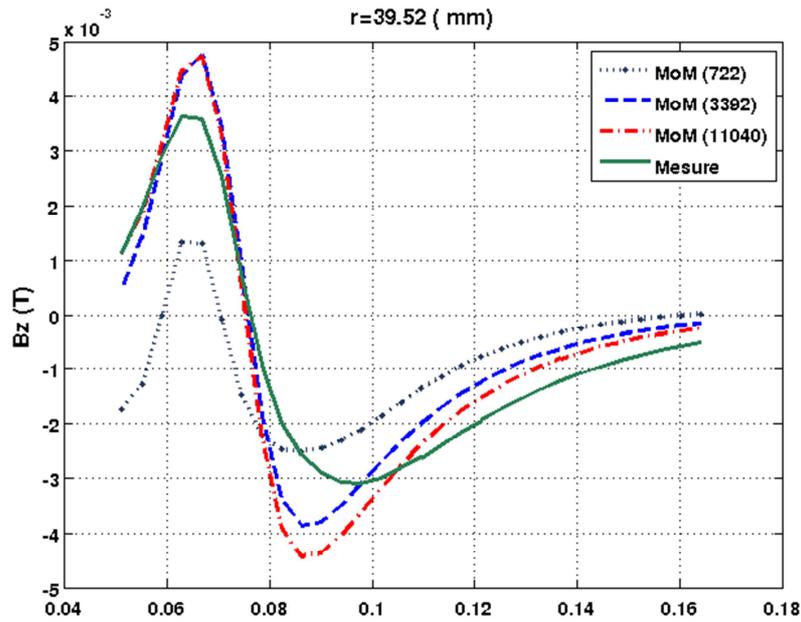


Fig. V.18 : Distribution de la composante axiale du champ magnétique calculé par la MOM pour un nombre différent d'éléments, le long de l'axe Oz, à proximité de la paroi interne ( $r=39.52$  mm) pour une valeur de  $\theta$  égale à  $45^\circ$ , comparaison avec la mesure

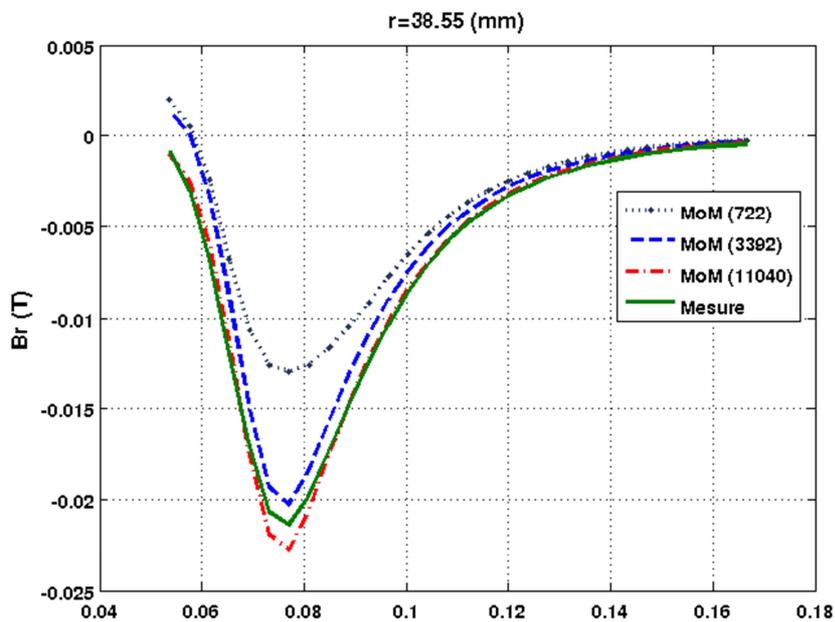


Fig. V.19 : Distribution de la composante radiale du champ magnétique calculé par la MOM pour un nombre différent d'éléments, le long de l'axe Oz, à proximité de la paroi interne ( $r=38.55$  mm) pour une valeur de  $\theta$  égale à  $45^\circ$ , comparaison avec la mesure

Les erreurs constatées précédemment peuvent avoir plusieurs origines :

- Les matériaux utilisés sont considérés comme linéaires et la valeur de la perméabilité choisie correspond à celle du matériau réel juste avant le coude de saturation (voir schéma de la figure (Fig. V.20)). De ce fait, pour des valeurs d'induction faibles, la perméabilité exploitée n'est plus représentative de la perméabilité relative inhérente à la courbe  $B(H)$ , ce qui implique de légers écarts entre les courbes obtenues par les deux matériaux, dans le cas où les parties ferromagnétiques sont faiblement magnétisées. Ces écarts, cantonnés aux zones de faibles inductions, restent cependant très faibles (de l'ordre de quelques pourcents) et ne sont donc pas problématiques. Même si nous utilisons les matériaux non linéaires, les caractéristiques  $B(H)$  des matériaux employés dans le calcul ne correspondent pas aux caractéristiques réelles de ceux utilisés pour la réalisation du prototype, du fait d'un traitement thermique différent ou de l'impact de l'usinage [11].

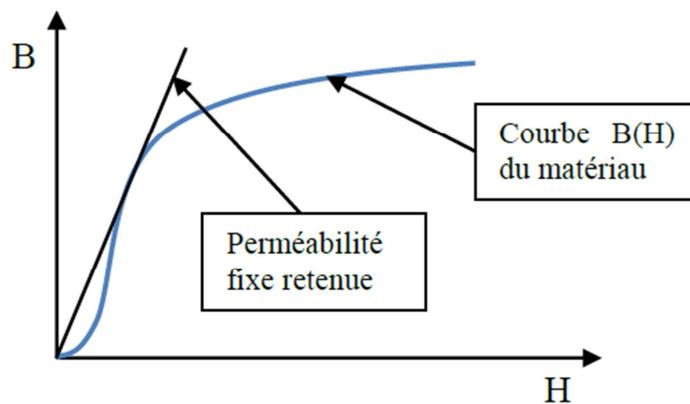


Fig. V.20 : Sélection de la perméabilité fixe pour les simulations linéaires

- La présence d'une certaine proportion de spires en court-circuit qui conduirait à réduire le champ généré par un courant donné (les thermocouples placés au centre des bobinages peuvent, par exemple, occasionner des défauts d'isolement) [11].
- Des imprécisions au niveau des dimensions du circuit magnétique (tolérance d'usinage, décalage dans le positionnement de certaines pièces, etc.) [11].
- Des erreurs liées à la mesure (étalonnage du gaussmètre, positionnement à zéro de la sonde) [11].
- Les imprécisions se présentent lors de l'utilisation d'une pièce très mince comme le montre la figure (Fig. V.21. b), (l'épaisseur est très petite, elle est égale à 0.5 mm). Ces imprécisions peuvent être dues aux singularités lors de l'interaction d'un élément sur lui-même et sur les éléments les plus proches de cette pièce. Dans ce cas, les points de Gauss peuvent se retrouver très proches voire confondus avec le point de collocation (la distance  $R$  est très petite comme le montre la figure (Fig.

IV.9)). Par conséquent, le calcul de l'intégrale devient non précis. Nous signalons aussi que dans ce cas, les matrices élémentaires sur la diagonale et les matrices les plus proches de la diagonale doivent être calculées avec les solutions analytiques qui sont difficiles à implémenter.

- Compte tenu des imprécisions engendrées par la prise en compte d'une pièce mince, le calcul du champ magnétique donné par les figures (Fig. V.18) et (Fig. V.19) a été fait sans la considération de la pièce mince. L'absence de cette pièce affecte plutôt la composante axiale que la composante radiale dont les valeurs sont beaucoup plus importantes que celles de la composante axiale.

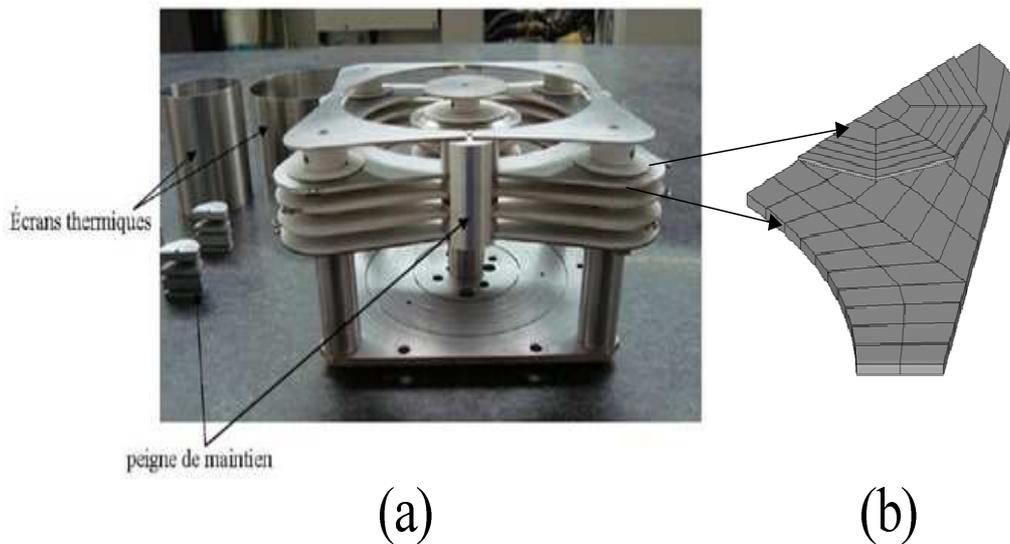


Fig. V.21 : (a) Circuit magnétique avant bobinage. (b) Pièce ferromagnétique de l'un des modules externes

Dans la suite, nous allons détailler le temps du calcul consommé suivant les étapes du code. Ces détails de temps donne au lecteur une vue d'ensemble du code de façon aussi claire que possible.

#### **V.4.4) Détail des temps de calculs**

##### **a. Temps du calcul du champ d'excitation aux centres des barycentres des éléments du maillage**

Le code commence par le calcul du champ  $\vec{H}_S$  aux barycentres des éléments par la loi Biot et Savart. Puisque le temps du calcul du champ pour un point est constant, il est égale à 0.03 seconde, le temps de calcul augmente de manière linéaire avec le nombre d'éléments comme le montre la figure (Fig. V.22).

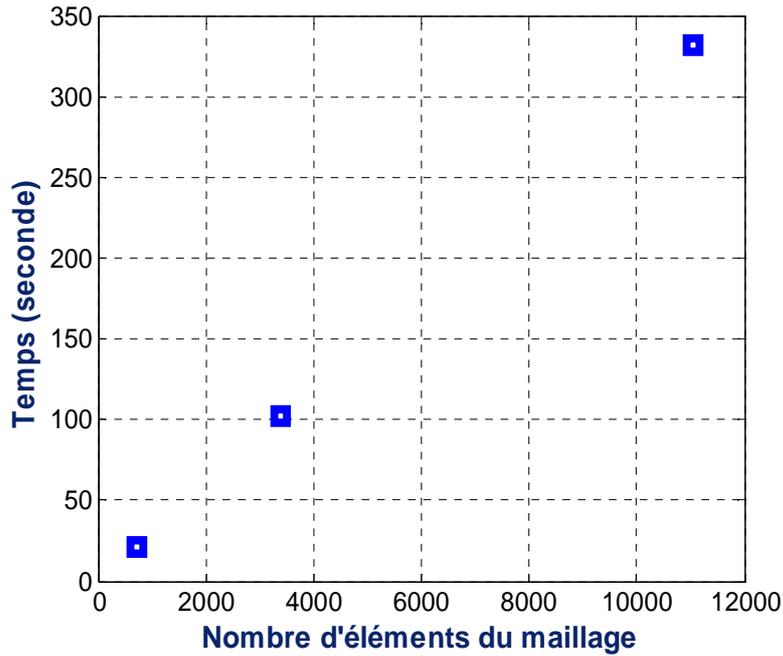


Fig. V.22 : Temps de calcul du champ dû à vingt bobines aux barycentres des éléments en fonction du nombre d'éléments de maillages étudiés

### b. Temps du calcul de la matrice d'interaction globale

Les temps de calcul de  $\vec{H}_S$  concernant les trois maillages sont plus faibles comparativement par rapport aux temps de calcul des matrices d'interaction globale  $[F]$  de ces maillages tel qu'il est indiqué par le tableau (Tab. V.8).

Nombre d'éléments du maillage	Temps du calcul des termes diagonaux (seconde)	Temps totale de calcul de la matrice (seconde)
11040	3533	$3.62224 \times 10^{+5}$
3392	1085	$1.0513 \times 10^{+5}$
722	231	5947

Tab. V.8 : Temps de calcul de la matrice d'interaction globale pour chaque maillage

Le huitième du PPS-flex est maillé par  $N_e$  éléments volumiques ce qui correspond à  $N_e$  matrices élémentaires diagonales. Chaque matrice est calculée par l'intégrale surfacique (III.45) avec un nombre d'intégration constant ( $n_g = 16$ ). De ce fait, le temps du calcul de chaque terme est constant (0.32 seconde). Le temps de calcul des termes diagonaux est donc égal à  $0.32N_e$  seconde comme le montre le tableau (Tab. V.8). En ce qui concerne les termes

hors diagonaux dont le nombre est  $7N_e \times 7N_e$ , le temps de calcul de chaque terme est variable. En effet, chacun est calculé par l'intégrale volumique avec un nombre de points de Gauss différent selon les tailles des éléments et la distance entre ces termes (voir le paragraphe IV.6.2.2)). Ceci explique le fait que l'augmentation du temps de calcul en fonction du nombre d'éléments du maillage ne suit pas l'évolution  $O(N_e^2)$ .

Le tableau (Tab. V.8) montre aussi que le temps de calcul des termes diagonaux ne présente que 3.8% du temps de calcul total de la matrice [F] pour le maillage grossier. Ce pourcentage peut diminuer avec l'augmentation de  $N_e$  jusqu'à 1.3% du temps total de calcul de [F] pour le maillage fin. En conséquence, une grande partie du temps est prise pour calculer les termes hors diagonaux. Il est donc utile d'utiliser une méthode de compression de la matrice comme ACA pour aborder ce problème (voir le paragraphe I.5.6)).

### **c. Temps de la résolution du système linéaire**

Comme la matrice [F] est pleine, la résolution du système linéaire (III.68) devient coûteuse dès que la taille de [F] augmente. Deux grandes familles de solveurs permettent de résoudre ce problème : les solveurs directs, qui consistent à déterminer la solution directement à partir de [F] et du second membre, et les solveurs itératifs qui fournissent une suite convergente de valeurs de la solution.

#### **➤ Solveur direct par la méthode de Gauss**

Les avantages de cette méthode sont :

- sa robustesse : les besoins en puissance de calcul et en mémoire sont connus à l'avance avec une certaine précision ;
- sa capacité multi-second membre : une fois la matrice [F] inversée, le système peut être résolu rapidement quel que soit le nombre de seconds membres (car la matrice [F] est indépendante du second membre à fréquence constante).

Malgré ses avantages, cette méthode devient inutilisable dans un contexte industriel lorsque l'objet est complexe à cause de ses inconvénients :

- son coût en mémoire : la création de la matrice [F] nécessite le calcul et le stockage en  $N^2$ , ce qui restreint à un faible nombre d'inconnues modéré ;
- son temps d'exécution : on est amené à effectuer  $O(N^3)$  opérations comme le montre le tableau (Tab. V.9) qui donne le temps de calcul pour les maillages étudiés.

Nombre d'éléments du maillage ( $N$ )	Nombre d'opération $O(N^3)$	Temps (seconde)
11040	$1.345572864 \times 10^{+12}$	2156
3392	$3.9027212288 \times 10^{+10}$	55
722	376367048	0.6

Tab. V.9 : Temps de la résolution du système linéaire par la méthode de Gauss pour les trois maillages étudiés

### ➤ Solveur itératif par GMRES

La méthode itérative fournit une suite de valeurs qui converge vers la solution pour un seuil fixé par l'utilisateur à partir duquel la solution sera considérée comme satisfaisante. A chaque étape de cette progression, le solveur réalise un produit matrice-vecteur (de complexité  $O(N^2)$ ). Elle peut traiter des problèmes de grande taille plus que la méthode de la matrice directe par le même ordinateur [78] [79]. Par rapport à une méthode directe, la performance d'un solveur itératif est beaucoup plus incertaine. Elle va dépendre essentiellement du nombre d'itérations  $N_{iter}$ , lequel va dépendre du conditionnement de la matrice  $[F]$  et du niveau de la précision demandée, ce qui donne une complexité ( $N_{iter} \times N^2$ ). Le temps de calcul pour la méthode de GMRES semble plus élevé comme le montre le tableau (Tab. V.10) [80].

Nombre d'éléments du maillage	Nombre d'itérations	Temps (seconde)
11040	×	88955
3392	711	330
722	497	14.28

Tab. V.10 : Temps de la résolution du système linéaire par la méthode GMRES pour les trois maillages étudiés

Néanmoins, dans la mesure où la matrice  $[F]$  n'intervient que via des produits matrice-vecteur, il serait intéressant de pouvoir réaliser ces produits sans recourir à l'assemblage complet de  $[F]$ . C'est précisément ce que proposent les méthodes FMM et ACA qui ont été présentés dans le paragraphe (I.5.6).

## V.5) Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode des moments a été appliquée au PPS-Flex qui est un système à grand entrefer avec des géométries assez complexes. Nous avons exploité des propriétés de

symétrie pour simplifier le domaine d'étude afin de gagner en temps de calcul et en mémoire. Le code a été modifié afin de calculer les intégrales pour une géométrie non canonique et, pour prendre en compte les symétries géométriques et physiques du PPS-Flex. Par conséquent, un huitième du maillage a été étudié. Dans la première partie de ce chapitre, nous avons détaillé la prise en compte des symétries pour le calcul du PPS-Flex compte tenu du fait que pour cette application la mise en œuvre est difficile et que les publications ne sont pas assez explicité sur ce point. Nous avons présenté un cas test afin de valider le code développé et de comparer les résultats du code qui ne prend pas en compte la symétrie avec le nouveau code qui prend en compte la symétrie. Nous avons vérifié que la mémoire de l'espace nécessaire pour stocker la nouvelle matrice pour le nouveau système est 64 fois plus petite et que le temps de calcul de la matrice est divisé par 8. Ensuite, nous avons présenté les résultats concernant le calcul du champ magnétique à l'intérieur du canal de PPS-Flex. Les résultats ont été comparés avec la méthode des éléments finis et la mesure. Enfin, nous avons détaillé le temps de calcul que le code consomme pour calculer le champ lointain. Nous avons trouvé que la grande partie du temps est prise pour calculer les termes hors diagonaux par intégrale volumique.

Enfin, ce chapitre nous a permis d'évaluer la méthode des moments magnétiques pour des résolutions magnétostatiques 3D. Nous disposons maintenant d'un logiciel permettant de calculer efficacement le champ magnétique à grande distance.

# *CONCLUSION GÉNÉRALE*

## Conclusion générale

La modélisation des dispositifs électromagnétiques consiste à évaluer diverses grandeurs (force, énergie, pertes, champs rayonnés), ceci en connaissant les paramètres géométriques et physiques des dispositifs. Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont porté sur la modélisation des dispositifs basses fréquences ouverts où à grands entrefers pour calculer le champ magnétique.

Deux exemples bien distincts présentant ce genre de dispositifs ont été étudiés dans ce mémoire afin de calculer le champ magnétique produit par :

- une antenne basse fréquence qui représente un système ouvert de forme relativement simple pour valider le code de calcul ;
- un dispositif PPS-Flex qui est vraiment représentatif d'un système à grand entrefer constitué de plaques ferromagnétiques ayant des dimensions géométriques très hétérogènes.

Afin de résoudre ce type de problèmes, plusieurs méthodes numériques sont proposées dans la littérature. La méthode des éléments finis (MEF) classique est aujourd'hui la plus connue et la plus employée pour la modélisation des dispositifs électromagnétiques en basse fréquence. Cette méthode permet de modéliser des géométries ayant des formes complexes constituées de matériau à comportement linéaire ou non linéaire. Cependant elle est moins efficace pour les problèmes magnétostatiques où les milieux amagnétiques sont prépondérants par rapport aux milieux magnétiques, car elle nécessite de mailler un grand volume d'air.

Une des méthodes alternatives les mieux adaptées à ces problèmes, que nous étudions dans cette thèse est la méthode des moments (MoM) de type volumique pour modéliser le champ magnétique à l'extérieur des dispositifs. En effet, cette méthode nécessite de mailler uniquement le milieu magnétique. Le principe de cette méthode est d'abord de calculer l'aimantation induite dans un milieu linéaire ou non linéaire placé sous l'effet d'un champ extérieur. Pour se faire, le milieu magnétique est discrétisé en éléments hexaédriques et à l'intérieur de chacun est localisée une aimantation considérée comme uniforme. Chacune des sources interagit avec elle-même et aussi avec toutes les autres. Les éléments diagonaux ont été calculés à l'aide d'une intégrale surfacique et les autres par une intégrale volumique. Ces deux types de relations ont été discutés pour prendre en compte les éléments hexaédriques réguliers et irréguliers. Puis, en utilisant le principe de la superposition, on peut construire une matrice nommée « matrice d'interaction globale » dont les éléments sont des matrices élémentaires. En prenant en compte l'ensemble des différentes sources du champ (bobines et matériaux), un système linéaire d'équation algébrique a été obtenu. La résolution de ce système doit prendre en compte la nature des matériaux utilisés. Dans le cas linéaire, la méthode de Gauss et la méthode GMRES ont été utilisées dans ce mémoire. La méthode du point fixe a été appliquée pour prendre en compte des matériaux à comportement non linéaire. Ces méthodes ont alors permis de déterminer les composantes de l'aimantation induite dans

chaque hexaèdre. Ensuite, la connaissance de cette aimantation permet de déterminer le champ magnétique en tout point de l'espace (interne, proche ou lointain) et permet également de calculer l'énergie magnétostatique contenue dans tout l'espace.

Enfin, nous avons présenté deux mises en application de la méthode des moments. Dans un premier temps, un code basé sur la MoM a été développé pour calculer le champ magnétostatique proche ou lointain d'une antenne basse fréquence. Une méthode permettant de calculer l'énergie magnétostatique contenue dans tout l'espace a été également mise au point. Nous avons montré, pour la première application, que la précision de la méthode des moments dépend de plusieurs paramètres : la discrétisation du noyau, les valeurs de la perméabilité et les paramètres concernant le calcul des termes hors diagonaux par des intégrales volumiques (point d'intégration,...). Dans ce mémoire, une procédure a été présentée pour calculer les intégrales volumiques de manière efficace avec un nombre minimal de points de Gauss, ce qui entraîne une réduction considérable du temps de calcul. Les résultats sont alors comparés avec la solution analytique et la solution numérique obtenue par la MEF. Pour cet exemple, comparativement à la méthode des éléments finis, le système matriciel est plein mais plus petit : un nombre de subdivisions du noyau égal à 50 est suffisant pour avoir une très bonne précision. Seules quelques secondes sont nécessaires pour résoudre le problème avec la méthode des moments et les résultats sont en bon accord (l'erreur est inférieure à 8%) avec les simulations MEF et les mesures. Dans la MEF, nous utilisons un maillage d'environ 245000 éléments et 48030 nœuds (pour le même d'éléments dans le noyau). Ce grand nombre d'éléments est nécessaire pour tenir en compte de la région de l'air autour de l'antenne.

Dans deuxième temps, afin de pouvoir traiter une géométrie complexe, des modifications ont été intégrées au code afin de modéliser la deuxième application : le dispositif de test des propulseurs à effet Hall (PPS-Flex). Il s'agit de prendre en compte des symétries géométriques et physiques caractéristiques de ce dispositif pour simplifier le domaine d'étude afin de gagner en temps de calcul et en mémoire. Par conséquent, un huitième du maillage a été étudié. Nous avons trouvé que la mémoire de l'espace nécessaire pour stocker la nouvelle matrice pour le nouveau système est 64 fois plus petite. De plus, le temps du calcul de la matrice est divisé par 8. On obtient ainsi un code permettant de calculer le champ magnétique à l'intérieur de son canal et éventuellement au-delà. Les résultats ont été comparés avec la méthode des éléments finis et la mesure. Enfin, nous avons détaillé les temps de calcul pour calculer le champ lointain. Nous avons trouvé que la grande partie du temps est prise pour calculer les termes hors diagonaux par l'intégrale volumique.

Dans les deux exemples étudiés, la méthode des moments a donné des résultats satisfaisants lors de la comparaison avec la méthode des éléments finis 3D et avec les résultats de campagne de mesure. Ces résultats montrent des gains potentiellement significatifs sur le plan des temps de calculs.

A l'issu de cette thèse, nous disposons d'un outil de laboratoire permettant de modéliser efficacement le comportement du champ magnétostatique dans des systèmes ouverts et/ou à grands entrefers.

Notons enfin que le travail effectué dans cette thèse doit être complété et ouvre plusieurs perspectives :

- en utilisant, quand c'est possible, la solution analytique pour calculer les intégrales surfaciques (l'interaction d'un élément sur lui-même localisé sur la diagonale de la matrice d'interaction globale) au lieu de la solution numérique caractérisée par un nombre de points d'intégration élevé ;
- en améliorant le code en utilisant les fonctions  $P_1$  (polynôme de degré 1 utilisé en éléments finis) permettant de calculer le champ à l'intérieur d'un volume élémentaire pour améliorer la précision et la convergence ;
- en tenant compte de l'influence de l'épaisseur des plaques placées dans le circuit PPS-Flex. En supposant l'aimantation tangentielle, l'intégrale volumique peut être simplifiée en la transformant en une intégrale surfacique ;
- en utilisant les techniques de compression (type ACA) pour accélérer les temps des calculs ;
- en calculant les courants de Foucault par la méthode des moments ;
- en résolvant les problèmes dans le cas non linéaire ;
- en groupant toutes les solutions trouvées jusqu'à présent dans un seul logiciel et améliorer la qualité de son interface graphique.

# *ANNEXES*

## Annexes

### A.1) Opérateurs différentiels et identités utilisés

Les différents opérateurs différentiels et des identités utilisées sont présentés dans le tableau (Tab .A. I). Dans ce tableau,  $f$  est un champ scalaire,  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont deux champs de vecteurs.

Opérateur	Expression
$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f$	$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$
$\text{div}\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a}$	$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$
$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a} = \vec{\nabla} \times \vec{a}$	$\begin{pmatrix} \partial a_z / \partial y - \partial a_y / \partial z \\ \partial a_x / \partial z - \partial a_z / \partial x \\ \partial a_y / \partial x - \partial a_x / \partial y \end{pmatrix}$
$\text{div}(f\vec{b})$	$f \text{div}(\vec{b}) + \vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}f$
$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{b})$	$(\overrightarrow{\text{grad}}f) \times \vec{b} + f \overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}$
$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b})$	$\vec{b} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}) - \vec{a} \cdot (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{b})$
$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a} \times \vec{b})$	$\text{div}(\vec{b})\vec{a} - \text{div}(\vec{a})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{b}$
$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{a} \cdot \vec{b})$	$\vec{a} \times (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{b}) + \vec{b} \times (\overrightarrow{\text{rot}}\vec{a}) + (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{a}$
$\iiint_V \text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) dv$	$\oiint_S (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{n} ds$

Tab A.1 : Opérateurs et identités utilisés

## A.2) Conversion d'une intégrale volumique en une intégrale surfacique

Nous allons utiliser le théorème de la divergence pour convertir l'intégrale surfacique (la première intégrale dans l'équation (II.20)) à une intégrale volumique.

Pour un vecteur arbitraire  $\vec{v}$  et un vecteur constant  $\vec{c}$  le théorème de la divergence donne :

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{c}) \, dv = \oiint_S (\vec{v} \times \vec{c}) \cdot \vec{n} \, ds \quad (\text{A. 1})$$

D'autre part, nous avons :

$$\operatorname{div}(\vec{v} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \quad (\text{A. 2})$$

Et :

$$(\vec{v} \times \vec{c}) \cdot \vec{n} = -\vec{c} \cdot (\vec{v} \times \vec{n}) \quad (\text{A. 3})$$

En substituant (A. 2) dans le premier membre de (A. 1) et en substituant (A. 3) dans le deuxième membre de (A. 1), (A. 1) peut être écrite comme :

$$\iiint_V \vec{c} \cdot (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \, dv = - \oiint_S \vec{c} \cdot (\vec{v} \times \vec{n}) \, ds \quad (\text{A. 4})$$

Puisque  $c$  est arbitraire, il résulte de (A. 4) que :

$$\iiint_V (\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{v}) \, dv = - \oiint_S (\vec{v} \times \vec{n}) \, ds \quad (\text{A. 5})$$

## A.3) Champ magnétique induit à partir du potentiel vecteur

Dans l'approche par courants équivalents, le potentiel vecteur magnétique en un point  $P$  dû à l'aimantation induite d'un milieu magnétique  $\Omega_F$  est donné par :

$$\vec{A}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \, d\Omega \quad (\text{A. 6})$$

Le champ magnétique créé par l'aimantation induite en ce point peut aussi être calculé par l'expression :

$$\vec{B}_m(P) = \overrightarrow{rot}(\vec{A}_m(P)) = \frac{\mu_0}{4\pi} \overrightarrow{rot} \left\{ \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} d\Omega \right\} \quad (\text{A. 7})$$

Si le point  $P$  est à l'extérieur du milieu magnétique, la rotation étant prise en ce point, nous pouvons écrire :

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \overrightarrow{rot} \left( \frac{\vec{M} \times \vec{r}}{r^3} \right) d\Omega \quad (\text{A. 8})$$

En tenant compte du fait que l'aimantation induite ne dépend pas du point  $P$ , nous avons :

$$\overrightarrow{rot} \left( \vec{M} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{M} \left( \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{M} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A. 9})$$

Le premier terme du second membre vaut :

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\text{div} \vec{r}}{r^3} + \vec{r} \cdot \overrightarrow{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{3}{r^3} + \vec{r} \cdot \overrightarrow{grad} \left( \frac{1}{r^3} \right) \quad (\text{A. 10})$$

Or :

$$\overrightarrow{grad}_N \left( \frac{1}{r^3} \right) = \frac{-3\vec{r}}{r^5} \quad (\text{A. 11})$$

Soit :

$$\text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{3}{r^3} + \vec{r} \cdot \frac{-3\vec{r}}{r^5} = 0 \quad (\text{A. 12})$$

Le champ dû à l'aimantation induite en un point  $P$  à l'extérieur du milieu magnétique est donc donné par :

$$\vec{B}_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} (\vec{M} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{A. 13})$$

#### **A.4) Expression du champ magnétique à l'extérieur du milieu magnétique**

Le champ magnétique induit en un point à l'extérieur du milieu magnétique est donné par :

$$\vec{B}_m(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} (\vec{M} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{A. 14})$$

Dans une base orthonormée, nous avons :

$$\vec{M} = \sum_{k=1}^3 M_k \vec{e}_k \quad (\text{A. 15})$$

Et :

$$\vec{r} = \sum_{k=1}^3 x_k \vec{e}_k \quad (\text{A. 16})$$

On a :

$$(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \sum_{k=1}^3 M_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) \quad (\text{A. 17})$$

Soit :

$$(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \left( \sum_{k=1}^3 M_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right) \vec{r} + \frac{1}{r^3} \left( \sum_{k=1}^3 M_k \frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{r}) \right) \quad (\text{A. 18})$$

Or :

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (\vec{r}) = \vec{e}_k \quad (\text{A. 19})$$

Et :

$$M_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{1}{r^3} \right) = -M_k \frac{3x_k}{r^5} \quad (\text{A. 20})$$

D'où :

$$(\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{M}}{r^3} - 3 \left( \frac{\vec{M} \vec{r}}{r^5} \right) \vec{r} \quad (\text{A. 21})$$

On a donc :

$$\vec{B}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \left( 3 \left( \frac{\vec{M} \vec{r}}{r^5} \right) \vec{r} - \frac{\vec{M}}{r^3} \right) d\Omega \quad (\text{A. 22})$$

## **A.5) Potentiel scalaire magnétique créé par une distribution d'aimantation**

Le champ d'excitation magnétique en un point  $P$  créé par une distribution d'aimantation induite, dérive du potentiel scalaire magnétique, ce potentiel est calculé par cette équation :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{-\operatorname{div} \vec{M}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} d\Omega + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_N|} dS \quad (\text{A. 23})$$

En appliquant le théorème d'Ostrogradski, la deuxième intégrale devient :

$$\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{M} \cdot \vec{n}}{r} dS \quad (\text{A. 24})$$

où  $r = |\vec{r}_P - \vec{r}_N|$ .

On peut donc écrire le potentiel sous la forme :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \operatorname{div} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) d\Omega - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{1}{r} \operatorname{div} (\vec{M}) d\Omega \quad (\text{A. 25})$$

En utilisant la relation vectorielle classique suivante :

$$\overrightarrow{\operatorname{div}} \left( \frac{\vec{M}}{r} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{div} (\vec{M}) + \vec{M} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) \quad (\text{A. 26})$$

Nous obtenons :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \vec{M} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) d\Omega \quad (\text{A. 27})$$

Comme le gradient est pris au point  $N$  et non au point  $P$ , nous avons :

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \left( \frac{1}{r} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (\text{A. 28})$$

Donc, le potentiel en tout point  $P$  de l'espace est donné par l'expression :

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{A. 29})$$

## **A.6) Champ d'excitation magnétique induit à potentiel scalaire magnétique**

Le champ d'excitation magnétique en un point  $P$  qui dérive du potentiel scalaire magnétique (A. 29) est donné par :

$$\vec{H}_m = -\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_m \quad (\text{A. 30})$$

Si le point  $P$  est à l'extérieur du milieu magnétique  $\Omega_F$  nous pouvons écrire :

$$\vec{H}_m(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} \overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\vec{M} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) d\Omega \quad (\text{A. 31})$$

En utilisant la formule :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{b}) + \vec{b} \times (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{b} + (\vec{b} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{a} \quad (\text{A. 32})$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \vec{H}_m = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} & \left( \vec{M} \times \left( \overrightarrow{\text{rot}} \frac{\vec{r}}{r^3} \right) + \frac{\vec{r}}{r^3} \times (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{M}) + (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \right) \vec{M} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (\text{A. 33})$$

Comme le vecteur aimantation ne dépend pas du point  $P$ , seul le troisième terme est non nul car :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \vec{0} \quad (\text{A. 34})$$

L'expression du champ magnétique en un point  $P$  à l'extérieur du milieu magnétique est donc donnée par l'expression :

$$\vec{H}_m(P) = -\frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_F} (\vec{M} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \frac{\vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (\text{A. 35})$$

Ce champ est compatible avec le champ magnétique donné par l'expression (A. 13), car nous avons en un point à l'extérieur du milieu magnétique :

$$\vec{B}_m(P) = \mu_0 \vec{H}_m(P) \quad (\text{A. 36})$$

En un point  $P$ , à l'intérieur du milieu magnétique, ces deux expressions sont incompatibles car nous avons :

$$\vec{B}(P) = \mu_0 (\vec{H}(P) + \vec{M}(P)) \quad (\text{A. 37})$$

## A.7) Le problème de courant de Foucault

### 1- Le cas quasi-statique

En cas où le temps variable ( $\frac{\partial}{\partial t} \neq 0$ ), les champs magnétiques et électriques sont couplés, mais le courant de déplacement  $\frac{\partial D}{\partial t}$  peut être négligé aux basses fréquences, parce que  $|\vec{J}| \gg \frac{\partial D}{\partial t}$ .

Les Courants circulant dans les bobines génèrent un champ magnétique au voisinage de la bobine. La variation temporelle de ce champ magnétique induit un champ électrique qui provoque des courants de Foucault circulant dans des matériaux conducteurs. Le champ magnétique généré par les courants de Foucault modifie l'effet de sources. Une structure typique d'un problème de courant de Foucault peut être vue dans la figure (Fig. A. 1). Nous allons expliquer les propriétés de chaque sous-domaine dans le cas dépendant du temps.

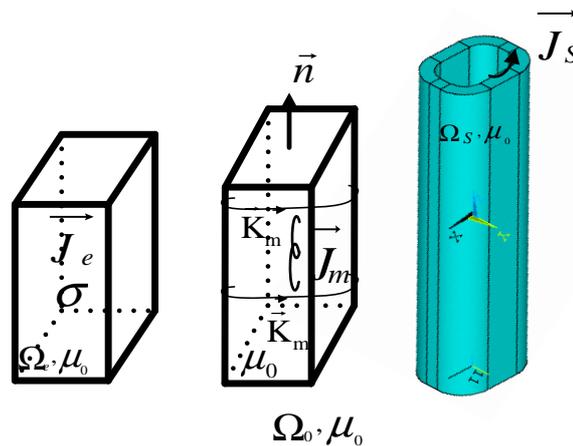


Fig. A. 1 : *Structure d'un problème de champ magnétique statique*

#### - **Sous-domaine $\Omega_s$**

Dans la région  $\Omega_s$ , un champ magnétique existe avec les équations fondamentales suivantes :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_B \quad (\text{A. 38})$$

$$\text{div} \vec{B} = 0 \quad \text{dans } \Omega_B \cup \Omega_m \cup \Omega_e \quad (\text{A. 39})$$

Conditions de passage :

Sur les interfaces  $\Sigma_{S0}$ , il faut imposer respectivement la continuité de  $B_n$  et la continuité de  $H_t$  :

$$\left. \begin{aligned} \left( (\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}})_0 - (\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}})_s \right) \cdot \vec{n}_{s0} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_{s0} \\ \vec{n}_{s0} \times \left( \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}}}{\mu_0} \right)_s \right) &= \vec{0} \quad \text{sur } \Sigma_{s0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 40})$$

Avec la loi de matériau :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{A. 41})$$

En utilisant le théorème d'Ampère (A. 38) et la loi constitutive des matériaux (A. 41), nous avons :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}}}{\mu_0} \right) = \vec{J}_s \quad (\text{A. 42})$$

L'équation ne définit pas le champ de potentiel vecteur de manière unique. Pour le définir d'une manière unique, nous ajoutons une jauge et nous prenons généralement celui de Coulomb :

$$\text{div}\vec{A} = 0 \quad (\text{A. 43})$$

#### Conditions aux limites

Sur la frontière  $\Sigma_B$ , où le champ est tangentiel ( $B_n = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}\vec{A}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma_B \quad (\text{A. 44})$$

Sur la frontière  $\Sigma_H$ , où le champ est normal ( $H_t = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot}\vec{A}} = \vec{0} \quad \text{sur } \Sigma_H \quad (\text{A. 45})$$

### - **Sous-domaine $\Omega_m$**

Les équations qui décrivent la région  $\Omega_m$  sont l'équation (A. 39) et l'équation (A. 46) :

$$\overrightarrow{\text{rot}\vec{H}} = \vec{0} \quad (\text{A. 46})$$

#### Conditions de passage :

Sur les interfaces  $\Sigma_{m0}$ , il faut imposer respectivement la continuité de  $B_n$  et la continuité de  $H_t$  :

$$\left. \begin{aligned} \left( (\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}})_0 - (\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}})_m \right) \cdot \vec{n}_{m0} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_{m0} \\ \vec{n}_{m0} \times \left( \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}\vec{A}}}{\mu_0} \right)_m \right) &= \vec{K}_m \quad \text{sur } \Sigma_{m0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 47})$$

Loi de matériau :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (\text{A. 48})$$

En utilisant le théorème d'Ampère (A. 46) et la loi constitutive des matériaux (A. 48), on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu_0} \right) = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} = \vec{J}_m \quad (\text{A. 49})$$

Conditions aux limites

Sur la frontière  $\Sigma_B$ , où le champ est tangentiel ( $B_n = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = 0 \text{ sur } \Sigma_B \quad (\text{A. 50})$$

Sur la frontière  $\Sigma_H$ , où le champ est normal ( $H_t = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma_H \quad (\text{A. 51})$$

- **Sous-domaine  $\Omega_e$**

Les champs électromagnétiques étudiés dans la région  $\Omega_e$  peuvent être décrits par des quasi-statiques des équations de Maxwell comme :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J}_e \quad (\text{A. 52})$$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B} \quad (\text{A. 53})$$

Conditions de passage :

Sur les interfaces  $\Sigma_{e0}$  :

$$\left. \begin{aligned} ((\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})_0 - (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A})_e) \cdot \vec{n}_{e0} &= 0 \quad \text{sur } \Sigma_{e0} \\ \vec{n}_{e0} \times \left( \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu_0} \right)_0 - \left( \frac{\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}}{\mu_0} \right)_e \right) &= \vec{0} \quad \text{sur } \Sigma_{e0} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 54})$$

Loi de matériau :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{A. 55})$$

$$\vec{J}_e = \sigma \cdot \vec{E} \quad (\text{A. 56})$$

où :  $\sigma$  est la conductivité du matériau.

En substituant la loi constitutive des matériaux (A. 55) dans le théorème d'Ampère (A. 52) et avec  $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$ , on a :

$$\overrightarrow{rot}\vec{A}\left(\frac{\overrightarrow{rot}\vec{A}}{\mu_0}\right) = \vec{J}_e \quad (\text{A. 57})$$

Conditions aux limites

Sur la frontière  $\Sigma_B$ , où le champ est tangential ( $B_n = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{rot}\vec{A} = 0 \text{ sur } \Sigma_B \quad (\text{A. 58})$$

Sur la frontière  $\Sigma_H$ , où le champ est normal ( $H_t = 0$ ), on a :

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{rot}\vec{A} = \vec{0} \text{ sur } \Sigma_H \quad (\text{A. 59})$$

La section suivante traite une formulation possible des problèmes de courant Foucault qui utilise le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  couplé à un potentiel scalaire électrique, notée  $V$ .

2- Le potentiel vecteur magnétique et le potentiel scalaire électrique (la formulation A-V)

La divergence d'un champ magnétique peut être décrite par le rotationnel du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$ , car  $\nabla \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \equiv 0$ , pour toute les fonctions vectoriel  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r})$ , ou  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$  donc :

$$\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \quad (\text{A. 60})$$

Cette formule respecte automatiquement la satisfaction de la loi magnétique de Gauss ( $\text{div}\vec{B} = 0$ ). En substituant l'expression (A. 60) dans la loi de Faraday ( $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ), nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla} \times \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) \quad (\text{A. 61})$$

Le champ vectoriel  $\left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$  peut être dérivé du potentiel scalaire électrique  $V$  ( $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \varphi \equiv 0$ ), pour toutes les fonctions scalaires  $\varphi = \varphi(r)$ , où,  $\varphi = \varphi(r, t)$  :

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad (\text{A. 62})$$

Donc, le champ électrique peut être décrit par deux potentiels comme :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (\text{A. 63})$$

En substituant (A. 56) dans la relation précédente, nous obtenons :

$$\rho \vec{J}_e = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V \quad (\text{A. 64})$$

où :  $\rho = \frac{1}{\sigma}$ .

Dans le demain fréquentiel, la relation (A. 64) devient :

$$\rho \vec{J}_e = -iw\vec{A} - \nabla V \quad (\text{A. 65})$$

### 3- Calcul du courant de Foucault

Le potentiel vecteur magnétique total due à la magnétisation  $\vec{M}$ , à la densité de courant de la source  $\vec{J}_B$  et à la densité de courant de Foucault  $\vec{J}_e$  peut être écrit comme suit :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_m} \frac{\vec{M} \times \overline{(r-r')}}{|r-r'|^3} d\Omega_m + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_B} \frac{\vec{J}_B}{r} d\Omega_B + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \frac{\vec{J}_e}{r} d\Omega_e \quad (\text{A. 66})$$

Et le champ magnétique total :

$$\begin{aligned} \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_m} \left( \frac{3(\vec{M} \cdot \overline{(r-r')})}{|r-r'|^5} \vec{r}_{PN} - \frac{1}{|r-r'|^3} \vec{M} \right) d\Omega_m + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_B} \frac{\vec{J}_B \times \vec{r}}{r^3} d\Omega_B \\ + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \frac{\vec{J}_e \times \vec{r}}{r^3} d\Omega_e \end{aligned} \quad (\text{A. 67})$$

Ainsi nous avons obtenu les mêmes formulations dans [81].

En substituant (A. 66) dans la relation (A. 65), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \rho \vec{J}_e + iw \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \frac{\vec{J}_e}{r} d\Omega_e \\ = iw\mu_0 \left\{ \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_B} \frac{\vec{J}_B}{r} d\Omega_B + \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega_m} \frac{\vec{M} \times \overline{(r-r')}}{|r-r'|^3} d\Omega_m \right\} - \overline{grad}V \end{aligned} \quad (\text{A. 68})$$

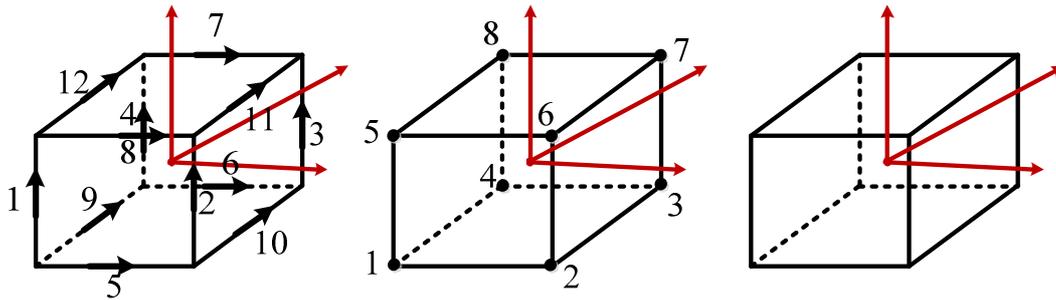
En substituant (A. 67) dans le loi du matériau  $\vec{B} = \mu_0 \frac{(\chi+1)}{\chi} \vec{M}$ , nous allons obtenir :

$$\begin{aligned} \vec{M} - \frac{\chi}{\mu_0(\chi+1)} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_m} \left( \frac{3(\vec{M} \cdot \overline{(r-r')})}{|r-r'|^5} \vec{r}_{PN} - \frac{1}{|r-r'|^3} \vec{M} \right) d\Omega_m \right\} \\ = \frac{\chi}{\mu_0(\chi+1)} \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_B} \frac{\vec{J}_B \times \vec{r}}{r^3} d\Omega_B + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega_e} \frac{\vec{J}_e \times \vec{r}}{r^3} d\Omega_e \right\} \end{aligned} \quad (\text{A. 69})$$

Nous avons maintenant deux relations (A. 68) et (A. 69) avec deux inconnues  $\vec{M}$  et  $\vec{J}_e$ .

- **Discrétisation**

Pour discrétiser les équations (A. 68) et (A. 69), les matériaux sont divisés en cubes volumiques. Le potentiel vecteur est défini sur chaque arête le long de la direction des arêtes (Fig. A. 2. a). Le potentiel scalaire est défini sur les nœuds de chaque cube (Fig. A. 2. b), et la magnétisation est définie au centre de chaque cube (Fig. A. 2. c) [82] [83].



(a) : Arrêt d'élément pour le potentiel vecteur magnétique

(b) : Nœuds d'élément pour le potentiel scalaire

(c) : Centre d'élément pour le potentiel scalaire

Fig. A. 2 : Elément volumique

La densité de courant de Foucault, le potentiel scalaire électrique et le vecteur de position peuvent être décomposés en leurs composantes dans cette base :

$$\vec{J}_e = \sum_j J_j \vec{e}_j \tag{A. 70}$$

$$V = \sum_j V_j \tag{A. 71}$$

$$\vec{r} = \sum_j r_j \vec{e}_j \tag{A. 72}$$

On suppose que la magnétisation est constante dans chaque élément.

La forme discrétisée de l'équation (A. 68) est :

$$\begin{aligned}
 & \rho \sum_j J_{ej} \vec{e}_j + iw\mu_0 \sum_j J_{ej} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_j \in \Omega_e} \frac{\vec{e}_j}{r_j} dV_j \right) \\
 &= iw\mu_0 \left\{ \sum_j J_{Bj} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint_{V_j \in \Omega_B} \frac{\vec{e}_j}{r_j} dV_j \right) + \sum_j M_j \left( \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma_{V_j}} \frac{\vec{e}_j \times \vec{r}_j}{r_j^3} d\Gamma_{V_j} \right) \right\} \\
 & - \sum_j \overrightarrow{\text{grad}} V_j
 \end{aligned} \tag{A. 73}$$

On peut réécrire la relation (A. 73) sous la forme matricielle :

$$\{\rho[I] + iw\mu_0[P_e]\}\{J_e\} = iw\mu_0\{[P_B]\{J_B\} + [P_m]\{M\}\} - [G]\{V\} \tag{A. 74}$$

où :  $[I]$  est la matrice identité.

L'équation (A. 74) peut être réécrite comme suit :

$$[p_e]\{J_e\} = [p_B]\{J_B\} + [p_m]\{M\} - [G]\{V\} \tag{A. 75}$$

où :

$$\left. \begin{aligned}
 [p_e] &= \rho[E] + iw\mu_0[P_e] \\
 [p_B] &= iw\mu_0[P_B]\{J_B\} \\
 [p_m] &= iw\mu_0[P_m]\{M\}
 \end{aligned} \right\} \tag{A. 76}$$

Sous la préparation précédente et en discrétisant l'équation (A. 69), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \sum_j M_j + \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} \sum_j M_j \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_j \in \Omega_m} \left( \frac{3(\vec{e}_j \cdot r_j \vec{e}_j)}{r_j^5} r_j \vec{e}_j - \frac{\vec{e}_j}{r_j^3} \right) dV_j \\
 &= \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} \left\{ \sum_j J_{Bj} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_j \in \Omega_B} \frac{\vec{e}_j \times r_j \vec{e}_j}{r_j^3} dV_j \right) \right. \\
 & \left. + \sum_j J_{ej} \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V_j \in \Omega_e} \frac{\vec{e}_j \times r_j \vec{e}_j}{r_j^3} dV_j \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{A. 77}$$

La relation (A. 77) est décrite par une expression matricielle :

$$\left\{ [I] + \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} [\omega] \right\} \{M\} = \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} \{ [U_B]\{J_B\} + [U_e]\{J_e\} \} \tag{A. 78}$$

On peut réécrire (A. 78) comme suit :

$$[K]\{M\} = [u_B]\{J_B\} + [u_e]\{J_e\} \tag{A. 79}$$

où :

$$\left. \begin{aligned} [K] &= [I] + \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} [\omega] \\ [u_B] &= \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} [U_B] \\ [u_e] &= \frac{\chi}{\mu_0(\chi + 1)} [U_e] \end{aligned} \right\} \quad (\text{A. 80})$$

On peut réécrire les relations (A. 75) et (A. 79) :

$$-[p_m]\{M\} + [p_e]\{J_e\} = [p_B]\{J_B\} - [G]\{V\} \quad (\text{A. 81})$$

$$[K]\{M\} - [u_e]\{J_e\} = [u_B]\{J_B\} \quad (\text{A. 82})$$

Donc, la forme finale est obtenue en mettant les deux formulations précédentes dans une relation :

$$[A] \begin{Bmatrix} M \\ J_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1(J_B, V) \\ b_2(J_B) \end{Bmatrix} \quad (\text{A. 83})$$

### A.8) Calcul de l'intégrale d'une fonction de trois variables sur une surface

La relation (A. 84) représente une intégration d'une fonction de trois variables  $(x, y, z)$  sur une surface  $S_1$  comme le montre la figure (A. 3).

$$F_{kl}^{II}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \frac{n_l^{S_1}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} dS_1 \quad (\text{A. 84})$$

où  $n_{l=1,2,3}^{S_1}$  sont les composantes de la normale dans une base orthonormée.

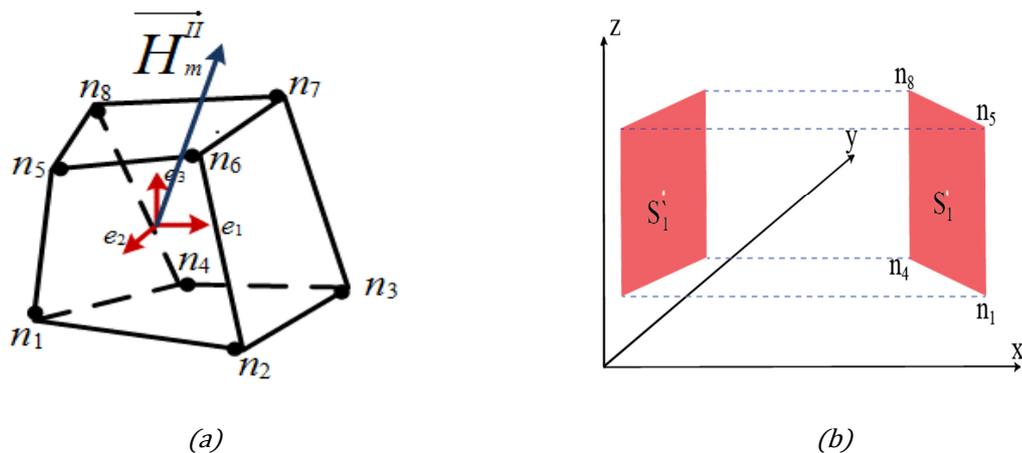


Fig. A. 3 : (a) Hexaèdre déterminé par huit nœuds :  $n_1, n_2, \dots, n_8$ . (b) Paramétrisation de la surface  $S_1$  déterminée par les nœuds  $(n_1, n_4, n_8, n_5)$  en utilisant trois variables  $(x, y, z)$ . Paramétrisation de la surface  $S_1$  en utilisant les deux variables  $(y, z)$

Les surfaces ont été décrites dans de nombreuses façons différentes, et par conséquent, nous avons beaucoup de façons d'évaluer les intégrales surfaciques en fonction de la description. Nous allons utiliser le moyen le plus approprié à notre problème, c'est le graphe de fonction.

### - Graphes de fonctions

Supposons que la surface  $S_1$  est le graphe d'une fonction  $x = g(y, z)$  sur la région  $S'_1$  dans le plan  $(y, z)$ . Alors, l'intégrale surfacique de  $f(x, y, z)$  sur  $S_1$  peut être calculée comme [84] :

$$\iint_{S_1} f(x, y, z) dS_1 = \iint_{S'_1} f(g(y, z), y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2 + 1} dS'_1 \quad (\text{A. 85})$$

La surface  $S'_1$  s'agit d'une partie rectangulaire d'un plan. Pour trouver la fonction  $x = g(y, z)$ , il faut trouver l'équation de ce plan tel qu'il est détaillé ci-dessous.

Soient :  $n_{ij}|_{j=1,2,3}$  les coordonnées des nœuds  $n_i$  de la surface étudiée et illustrée dans la figure (A. 3).

On a :

$$\vec{u} = \overline{u^{n_1 n_4}} = (n_{41} - n_{11})\vec{i} + (n_{42} - n_{12})\vec{j} + (n_{43} - n_{13})\vec{k} \quad (\text{A. 86})$$

où  $\overline{u^{n_1 n_4}}$  est le vecteur reliant le nœud  $n_1$  au nœud  $n_4$ .

Et :

$$\vec{v} = \overline{v^{n_1 n_5}} = (n_{51} - n_{11})\vec{i} + (n_{52} - n_{12})\vec{j} + (n_{53} - n_{13})\vec{k} \quad (\text{A. 87})$$

De sorte que le vecteur normal au plan sera :

$$\overline{n^{S_1}} = \vec{v} \times \vec{u} = (n_1^{S_1}, n_2^{S_1}, n_3^{S_1}) \quad (\text{A. 88})$$

Supposons que  $\vec{M}(x, y, z)$  est un point du plan, nous pourrions écrire le vecteur entre le point  $\vec{M}$  et le nœud  $n_{1j}$  comme :

$$\overline{R^{n_1 M}} = (x - n_{11})\vec{i} + (y - n_{12})\vec{j} + (z - n_{13})\vec{k} \quad (\text{A. 89})$$

Le produit scalaire entre la normale sur la surface et un vecteur qui lui appartient est égale :

$$\vec{n} \cdot \overline{R^{n_1 M}} = 0 \quad (\text{A. 90})$$

Donc, à partir de la relation (A. 90), nous obtenons la fonction  $g(y, z)$  qui relie la composante  $x$  avec  $y$  et  $z$  :

$$g(y, z) = x = \frac{-n_2^{S_1}(y - n_{12}) - n_3^{S_1}(z - n_{13})}{n_1^{S_1}} + n_{11} \quad (\text{A. 91})$$

Et :

$$G = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{-n_2^{S_1}}{n_1^{S_1}}\right)^2 + \left(\frac{-n_3^{S_1}}{n_1^{S_1}}\right)^2} + 1 \quad (\text{A. 92})$$

Maintenant, on revient à l'équation (A. 84) et en prenant en compte la relation (A. 85), elle peut être réécrite :

$$F_{kl}^{II}((y, z), y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1'} \frac{n_l^{S_1}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} G dS_1' \quad (\text{A. 93})$$

En appliquant la méthode de Gauss, la relation (A. 93) peut être réécrire :

$$F_{kl}^{II} = \frac{1}{4\pi} \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{t=1}^{n_{G_t}} w_i w_j |det J(\xi_i, \eta_j)| \frac{n_l^{S_1}}{(R^{IQ})^3} R_k^{IQ} G \quad (\text{A. 94})$$

où :

$$R^{IQ} = \sqrt{(R_1^Q(\eta, \zeta) - R_1^I)^2 + (R_2^Q(\eta, \zeta) - R_2^I)^2 + (R_3^Q(\eta, \zeta) - R_3^I)^2} \quad (\text{A. 95})$$

En appliquant la transformation géométrique (voir annexe (A.9)):

$$R_2^Q(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{N_n=4} N_i(\xi, \eta) n_{i2} \quad (\text{A. 96})$$

$$R_3^Q(\eta, \zeta) = \sum_{i=1}^{N_n=4} N_i(\xi, \eta) n_{i3}$$

où :

-  $N_n$  est le nombre de nœuds de la surface.

-  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolation définies par les relations (A. 99).

En substituant l'équation (A. 96) dans (A. 91), nous obtenons la troisième composante :

$$R_1^Q(\eta, \zeta) = \frac{-n_2^{S_1}(R_2^Q(\eta, \zeta) - n_{12}) - n_3^{S_1}(R_3^Q(\eta, \zeta) - n_{13})}{n_1^{S_1}} + n_{11} \quad (\text{A. 97})$$

En substituant les équations (A. 96) et (A. 97) dans (A. 95), nous obtenons l'expression de  $R^{IQ}$  en fonction de deux variables  $(\eta, \zeta)$ .

## A.9) Calcul d'intégrale surfacique par changement de variable

### 1- Transformation géométrique

La transformation géométrique permet de relier un point de l'élément physique à un point de l'élément de référence comme le montre la figure (Fig. A. 4).

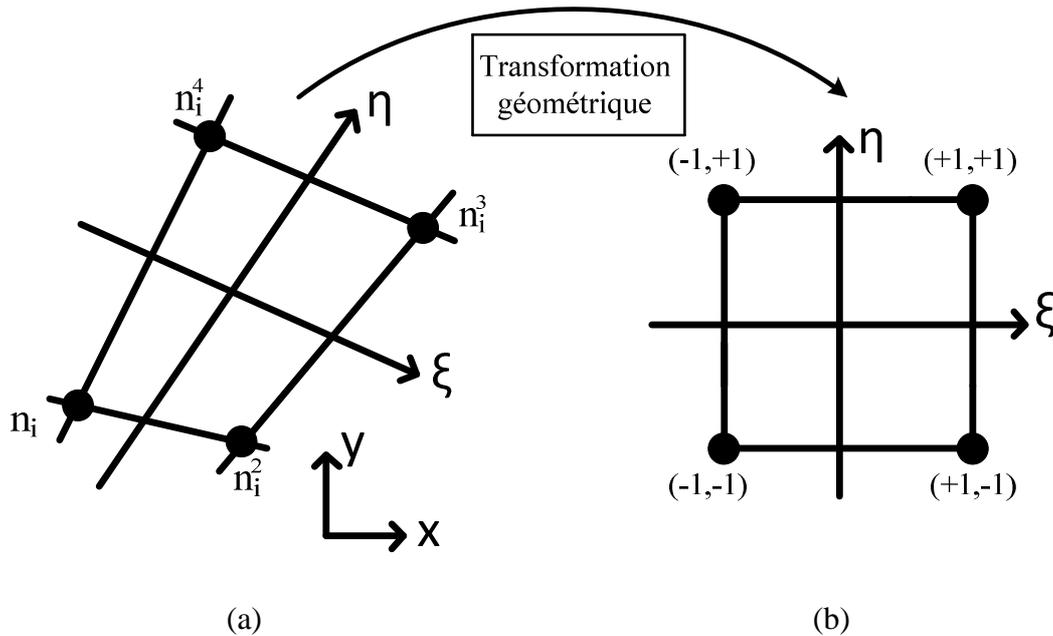


Fig. A. 4 : *Elément quadrilatère à quatre nœuds, (a) éléments physiques, (b) élément référence*

Soient  $x_i$  et  $y_i$  les coordonnées des nœuds de l'élément physique. Les coordonnées d'un point  $(x, y)$  de l'élément physique image d'un point  $(\xi, \eta)$  de l'élément de référence sont donnés par [12] :

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{N_n} T_i(\xi, \eta) y_i$$
(A. 98)

où  $N_i(\xi, \eta)$  sont les fonctions d'interpolation et  $N_g$  est le nombre de points de nœuds.

Pour un élément isoparamétrique, on définit un nombre de nœuds égal à  $N_g$ . Pour des éléments hexaédriques, on peut prendre des éléments tri-linéaires. Le tableau (Tab. A. 1) définit les coordonnées des nœuds de référence pour un élément tri-linéaire.

nœuds	$\xi$	$\eta$
<b>1</b>	-1	-1
<b>2</b>	+1	-1
<b>3</b>	+1	+1
<b>4</b>	-1	+1

Tab. A. 1 : Coordonnées des nœuds de l'élément de référence (Fig. A. 4)

Les fonctions d'interpolation de chaque nœud sont alors [12] :

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta). & N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta). & N_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \quad (\text{A. 99})$$

## 2- Matrice jacobienne

La matrice jacobienne  $[J]$  qui relie les différentiels de  $(x, y)$  à ceux de  $(\xi, \eta)$  :

$$[J] = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 100})$$

En substituant (A. 98) dans (A. 100), nous obtenons :

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial T_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial T_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial T_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\partial T_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (\text{A. 101})$$

La relation (A. 101) peut être exprimée par le produit de deux matrices, la première ne contenant que les dérivées et la seconde ne contenant que les coordonnées des points géométrique :

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} & \frac{\partial T_2}{\partial \xi} & \dots & \frac{\partial T_{N_n}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial T_1}{\partial \eta} & \frac{\partial T_2}{\partial \eta} & \dots & \frac{\partial T_{N_n}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{N_n} & y_{N_n} \end{bmatrix} \quad (\text{A. 102})$$

L'avantage de cette écriture est que seule la deuxième matrice change d'un élément à un autre. La première matrice peut être calculée facilement à partir des équations (A. 99).

La relation qui nous permet de transformer une intégrale sur l'élément physique en une intégrale sur une géométrie simple est alors la suivante :

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta) |det J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \quad (A. 103)$$

Le calcul des intégrales volumiques dans la relation (A. 103) se fait à l'aide de formules telles que les quadratures de Gauss, car ces méthodes utilisent un nombre minimal de points pour atteindre le niveau de précision souhaité. Le domaine de l'intégration de cette méthode est traditionnellement pris comme  $[-1, 1]^2$ .

Pour les plans, l'intégrale surfacique est transformée en deux sommations, comme :

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta) |det J(\xi,\eta)| d\xi d\eta = \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{s=1}^{n_{G_s}} w_r w_{j_s} |det J(\xi_r, \eta_s)| f(\xi_r, \eta_s) \quad (A. 104)$$

où  $(\xi_r, \eta_s)$  et  $(w_r, w_s)$  sont respectivement les coordonnées et les pondérations des points d'intégration de Gauss dont les nombres  $n_{G_r}$  et  $n_{G_s}$ . Nous allons utiliser la méthode la plus couramment connue qui est celle de Gauss-Legendre. Les points de Gauss sont alors les racines des polynômes de Legendre [68].

La relation (A. 103) peut alors réécrire comme :

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d f(x,y) dx dy &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi,\eta) |det J(\xi,\eta)| d\xi d\eta \\ &= \sum_{r=1}^{n_{G_r}} \sum_{s=1}^{n_{G_s}} w_r w_{j_s} |det J(\xi_r, \eta_s)| f(\xi_r, \eta_s) \end{aligned} \quad (A. 105)$$

## A.10) Symétrie par rapport au plan x=y

Afin de trouver les relations entre les composantes du champ  $\overrightarrow{H^{1'(1)}}$  et les composantes de sa symétrique  $\overrightarrow{H^{1'(5)}}$  par rapport au plan  $x = y$ , nous allons prendre le premier quart de la figure (Fig. V.5).

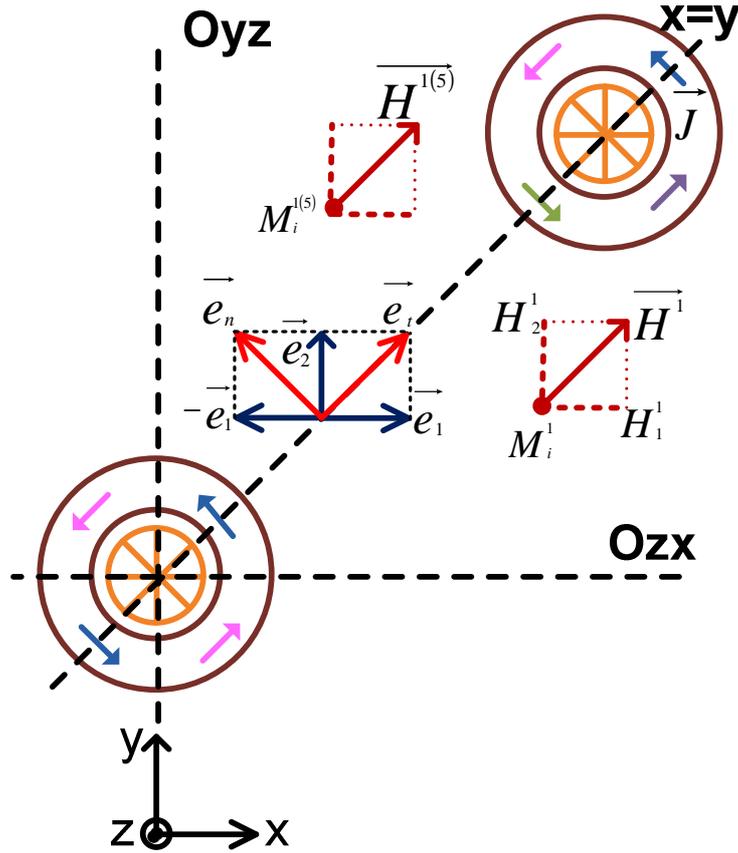


Fig. A. 5: Vues de dessus du PPS-Flex

À l'aide de la figure (Fig. A. 5), nous pouvons écrire :

$$\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 \quad (\text{A. 106})$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \quad (\text{A. 107})$$

$$\vec{e}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2) \quad (\text{A. 108})$$

La figure (Fig. A. 5) montre que la densité de courant est normale au plan  $x = y$ , Alors, selon l'étude précédent (Tab. V.1), le plan  $x = y$  est un plan d'antisymétrie pour les sources, donc, il est un plan de symétrie pour le champ magnétique. Donc, le champ magnétique est tangentiel à ce plan, c'est à dire les composantes tangentielles du champ magnétique sont égales et les composantes normales sont opposées, Donc :

$$\overrightarrow{H^{1(1)}e_3} = \overrightarrow{H^{1(5)}e_3} \quad (\text{A. 109})$$

$$\overrightarrow{H^{1(1)}e_t} = \overrightarrow{H^{1(5)}e_t} \quad (\text{A. 110})$$

$$\overrightarrow{H^{1'(1)}e_n} = -\overrightarrow{H^{1'(5)}e_n} \quad (\text{A. 111})$$

En substituant (A. 107) dans (A. 110), nous obtenons :

$$\overrightarrow{H^{1'(1)}(e_1 + e_2)} = \overrightarrow{H^{1'(5)}(e_1 + e_2)} \quad (\text{A. 112})$$

La relation précédente peut être réécrite :

$$H_1^{1'(1)} + H_2^{1'(1)} = +H_1^{1'(5)} + H_2^{1'(5)} \quad (\text{A. 113})$$

En substituant (A. 108) dans (A. 111), nous obtenons :

$$\overrightarrow{H^{1'(1)}(-e_1 + e_2)} = -\overrightarrow{H^{1'(5)}(-e_1 + e_2)} \quad (\text{A. 114})$$

La relation précédente peut être réécrite :

$$-H_1^{1'(1)} + H_2^{1'(1)} = +H_1^{1'(5)} - H_2^{1'(5)} \quad (\text{A. 115})$$

À partir des relations (A. 113), (A. 115) et (A. 109), nous pouvons écrire les relations entre les composants du champ  $\overrightarrow{H^{1'(1)}}$  et sa symétrique  $\overrightarrow{H^{1'(5)}}$  par rapport au plan  $x = y$  :

$$\left( H_1^{1'(1)} = H_2^{1'(5)} \right) \quad \left( H_2^{1'(1)} = H_1^{1'(5)} \right) \quad \left( H_3^{1'(1)} = H_3^{1'(5)} \right) \quad (\text{A. 116})$$

# *BIBLIOGRAPHIES*

## **Bibliographies**

- [1] P. Brissonneau, *Magnétisme et matériaux magnétiques*, Hermès ed., 1997.
- [2] Y. Vuillermont, "Immunsation en boucle fermée – Application au sous-marin double coque. Identification de l'aimantation à partir de mesures du champ magnétique proche," Thèse, INP Grenoble, 18 Décembre 2008.
- [3] O. Chadebec, "Modélisation du champ magnétique induit par des tôles - Identification de l'aimantation - Application à l'immunsation en boucle fermée d'une coque ferromagnétique," Thèse, INP Grenoble, 2001.
- [4] [Online].  
[http://www.switchesplus.com.au/products/koa/transponder\\_coils/koa.transponder\\_coils.php](http://www.switchesplus.com.au/products/koa/transponder_coils/koa.transponder_coils.php)
- [5] M. Albach, A. Stadler, and M. Spang, "The influence of ferrite characteristics on the inductance of coils with rod cores," *IEEE Trans. Magn*, vol. 43, no. 6, pp. 2618-2620, June 2007.
- [6] A. Tran, M. Bolic, and M.C.E. Yagoub, "Magnetic-field coupling characteristics of ferrite-coil antennas for low-frequency RFID applications," *IJCSI International Journal of Computer Science Issues*, vol. 7, no. 1, pp. 7-11, July 2010.
- [7] A. Stadler, "Radiated magnetic field of a low-frequency ferrite rod antenna," in *Compatibility and Power Electronics (CPE)*, Tallinn, Estonia, 2011, pp. 283 - 288.
- [8] O. Chadebec, L.L. Rouve, and J.L. Coulomb, "New methods for a fast and easy computation of stray fields created by wound rods," *IEEE Trans. Magn*, vol. 38, no. 2, pp. 517-520, March 2002.
- [9] R. Vilamot, C. Henaux, and B. Nogarede, "Using a direct field calculation method to solve magnetostatic design inverse problem," in *Compumag 2009 Conference*, Florianopolis, Brazil, November 22-26, 2009.
- [10] R. Vilamot, C. Henaux, and B. Nogarede, "A flexible magnetic circuit dedicated to Hall Effect Thruster experiment," in *2012 XXth International Conference on Electrical Machines (ICEM)*, 2-5 Sept. 2012.
- [11] R. Vilamot, *Optimisation de la configuration magnétique d'un propulseur à effet Hall par résolution du problème magnétostatique inverse*. Thèse, INP Toulouse, 13 janvier 2012.

- [12] A. Chateauneuf, *Structures: comprendre les elements finis*. Ellipses (Paris), 2005.
- [13] X. Brunotte and G. Meunier, "Line element for efficient computation of the magnetic field created by thin iron plates," *IEEE Trans. Magn*, vol. 26, no. 5, pp. 2196-2198, September 1990.
- [14] A. Kalimov, "Application of a hybrid integrodifferential method for analysis of thin magnetic shields," *IEEE Trans. Magn*, vol. 34, no. 5, pp. 2453-2456, September 1998.
- [15] S. Mezani, B. Laporte, and N. Takorabet, "Saturation and space harmonics in the complex finite element computation of induction motors," *IEEE Trans. Magn*, vol. 41, no. 5, pp. 1460-1463, May 2005.
- [16] B. Vaseghi, B. Nahid-mobarakh, N. Takorabet, and F. Meibody-Tabar, "Inductance identification and study of PM motor with winding turn short circuit fault," *IEEE Trans. Magn*, vol. 47, no. 5, pp. 978-981, May 2011.
- [17] B. Froidurot, L.L. Rouve, A. Foggia, J.P. Bongiraud, and G. Meunier, "Magnetic discretion of naval propulsion machines," *IEEE Trans. Magn*, vol. 38, no. 2, pp. 1185-1188, March 2002.
- [18] L. Kettunen and L.R. Turner, "A volume integral formulation for nonlinear magnetostatics and eddy currents using edge elements," *IEEE Trans. Magn*, vol. 28, no. 2, pp. 1639-1642, March 1992.
- [19] M. Gimignan, A. Musolino, and M. Raugi, "Integral formulation for nonlinear magnetostatic and eddy currents analysis," *IEEE Trans. Magn*, vol. 30, no. 5, pp. 3024-3027, September 1994.
- [20] A. Musolino and M. Raugi, "A 3-D integral equation method for electromagnetic field analysis in anisotropic materials," *IEEE Trans. Magn*, vol. 31, no. 3, pp. 1706-1709, May 1995.
- [21] N. Esposito, A. Musolino, and M. Raugi, "Modelling of three-dimensional nonlinear eddy current problems with conductors in motion by an integral formulation," *IEEE Trans. Magn*, vol. 32, no. 3, pp. 764-767, May 1996.
- [22] F. Brucknera et al., "3D FEM-BEM-coupling method to solve magnetostatic Maxwell equations," *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, vol. 324, no. 10, pp. 1862-1866, May 2012.
- [23] Y. Takahashia, S. Wakao, and A. Kameari, "Large-scale and highly accurate magnetic field analysis of magnetic shield," *J. Appl. Phys*, April 2006.

- [24] X. Brunotte, J.F. Imhoff, and G. Meunier, "Méthode des intégrales de frontières pour les problèmes magnétiques à symétrie axiale et couplage avec la méthode des éléments finis," *Phys. Appl.*, vol. 25, no. 7, pp. 613 - 626, juillet 1990.
- [25] J.H. McWhirter, J.J. Oravec, and R.W. Haack, "Computation of magnetostatic fields in three-dimensions based on Fredholm integral equations," *IEEE Tran. Magn*, vol. 18, no. 2, pp. 373-378, March 1982.
- [26] S. Nintcheu Fata, "Treatment of domain integrals in boundary element methods," *Applied Numer. Math*, 2010.
- [27] B. Krstajic, Z. Andelic, S. Milojkovic, and S. Babic, "Nonlinear 3D magnetostatic field calculation by the integral equation method with surface and volume magnetic charges," *IEEE Trans. Magn*, vol. 28, no. 2, pp. 1088 - 1091, March 1992.
- [28] W.M. Rucker, Ch. Magele, E. Schlemmer, and K.R. Richter, "Boundary element analysis of 3-D magnetostatic problems using scalar potentials," *IEEE Trans. Magn*, vol. 28, no. 2, pp. 1099-1102, March 1992.
- [29] X. Brunotte, G. Meunier, and J. F. Imhoff, "Finite elements solution of unbounded problems using transformations: A rigorous, powerful and easy solution," *IEEE Trans. Magn*, vol. 28, no. 2, pp. 1663-1666, March 1992.
- [30] O. Chadebec, J.L. Coulomb, and F. Janet, "A review of magnetostatic moment method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 42, no. 4, pp. 515-520, April 2006.
- [31] T.S. Nguyen, J.M. Guichon, O. Chadebec, P. Labie, and J.L. Coulomb, "Ships magnetic anomaly computation with integral equation and fast multipole method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 47, no. 5, pp. 1414-1417, May 2011.
- [32] O. Chadebec, J.L. Coulomb, J.P. Bongiraud, G. Cauffet, and P. Le Thiec, "Recent improvement for solving inverse magnetostatic problem applied to thin shells," *IEEE Trans. Magn*, vol. 38, no. 2, pp. 1005-1008, 2002 2002.
- [33] R. F. Harrington, *Field computation by moment methods*. New Yor: IEEE Press, 1993.
- [34] T. Le Duc, "Développement de méthodes intégrales de volume en électromagnétisme basse fréquence. Prise en compte des matériaux magnétiques et des régions minces conductrices dans la méthode PEEC," Thèse, INP Grenoble, 2011.
- [35] O. Chubar, P. Elleaume, and J. Chavanne, "A three-dimensional magnetostatic computer code for insertion devices," *J. Synchrotron Rad*, vol. 5, pp. 481-484, 1998.
- [36] K. Sugahara and K. Yoda, "Numerical analysis of low-frequency electromagnetic

- scattering from three-dimensional arbitrarily shaped conducting bodies using an inductance matrix," *IEEE Tran. Magn*, vol. 54, no. 12, pp. 3833-3839, Decembre 2006.
- [37] K. Sugahara, H. Yamamoto, H. Ouchi, and Y. Nakano, "Numerical analysis of near-field magnetic field for automobile electronic key systems," *IEEE Tran. Magn*, vol. 43, no. 8, pp. 3375-3379, August 2007.
- [38] K. Urata and A. Kameari, "Static magnetic field analyses by integral method using magnetization with normal continuity in shell structure," *IEEE Tran. Magn*, vol. 31, no. 3, pp. 1440-1443, May 1995.
- [39] M.J. Newman, C.W. Trowbridge, and L.R. Turner, "GFUN: an interactive program as an aid to magnet design," in *4th International Conference on Magnet Technology*, Brookhaven National Laboratory. Upton, NY, USA, 1972, pp. 617-626.
- [40] M. Souza, C. Vidigal, A. Momy, J. Taquin, and M. Sauzade, "Nonlinear calculation of three-dimensional static magnetic fields," *IEEE Trans. Magn*, vol. 33, no. 4, pp. 2486-2491, Jul 1997.
- [41] F. Janet, J.L. Coulomb, C. Chillet, and P. Mas, "Simplified magnetic moment method applied to current transformer modeling," *IEEE Trans. Magn*, vol. 40, no. 2, pp. 818-821, March 2004.
- [42] H.L. Rakotoarison et al., "Formal sensitivity computation of magnetic moment method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 44, no. 6, pp. 1014-1017, June 2008.
- [43] O. Chadebec, J.L. Coulomb, G. Cauffet, and J.P. Bongiraud, "How to well pose a magnetization identification problem," *IEEE Trans. Magn*, vol. 39, no. 3, pp. 1634-1637, May 2003.
- [44] L. Demilier, G. Cauffet, O. Chadebec, J.L. Coulomb, and L.L. Rouve, "Validation of closed loop degaussing system for double hull submarines," in *Marine system and technology*, Rome, Feb 2010.
- [45] A. Viana, L.L. Rouve, O. Chadebec, G. Cauffet, and J.L. Coulomb, "Inverse problem approach to characterize and model magnetization changes in a thin shell structure undergoing magneto-mechanical effects," *IEEE Trans. Magn*, vol. 47, no. 5, pp. 1450-1453, May 2011.
- [46] J. Simkin, "A comparison of integral and differential equation solutions for field problems," *IEEE Trans. Magn*, vol. MAG-18, no. 2, pp. 401-405, March 1982.
- [47] C. Rubeck, "Calcul hautes performances pour les formulations intégrales en électromagnétisme basses fréquences - Intégration, compression matricielle par

- ondelettes et résolution sur architecture GPGPU," Thèse, INP Grenoble, 2012.
- [48] L. Greengard and V. Rokhlin, "A fast algorithm for particle simulations," *Journal of Computational Physics*, vol. 73, pp. 325-348, December 1987.
- [49] H. Cheng, L. Greengard, and V. Rokhlin, "A Fast Adaptive Multipole Algorithm in Three Dimensions," *Journal of Computational Physics* 155, pp. 468-498, 1999.
- [50] B. Cipra, "The Best of the 20th Century : Editors Name Top 10 Algorithms," *SIAM News*, vol. 33, no. 4, p. 1, May 2000.
- [51] I. D. Mayergoyz, P. Andrei, and M. Dimian, "Nonlinear magnetostatic calculations based on fast multipole method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 39, no. 3, pp. 1103-1106, May 2003.
- [52] S. Balasubramanian, S.N. Lalgudi, and B. Shanker, "Fast-integral-equation scheme for computing magnetostatic fields in nonlinear media," *IEEE Trans. Magn*, vol. 38, no. 5, pp. 3426-3432, September 2002.
- [53] E. Darve, "Méthodes multipôles rapides : résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales," Thèse, Université Paris 6, 1999.
- [54] S. Rjasanow and O. Steinbach, *The Fast Solution of Boundary Integral Equations.:* Springer, 2007.
- [55] S. Kurz, O. Rain, and S. Rjasanow, "The adaptive cross-approximation for the 3-D boundary element method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 38, no. 2, pp. 1007-1010, May 2003.
- [56] K. Zhao, M.N. Vouvakis, and J.F. Lee, "The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems," *IEEE Trans. Electromagn. Compat*, vol. 47, no. 4, pp. 763-773, November 2005.
- [57] B. Bannwarth et al., "The adaptive cross approximation technique for volume integral method applied to nonlinear magnetostatic problems," in *Compumag 2013*, Budapest : Hungary, 2013.
- [58] J. Siau, R. Perrussel, J.R. Poirier, and O. Chadebec, "Hybrid Cross Approximation for a Magnetostatic Formulation," in *CEFC*, Annecy : France, 2014.
- [59] J. Siau, "Préconditionnement de systèmes linéaires issus de la discrétisation de méthodes intégrales en électromagnétisme," Université de Rennes, Laplace (toulouse), Stage de Master 2 septembre 2013.

- [60] J.D. Jackson, "Électrodynamique classique," *Dunod*, 2001.
- [61] G. Dhatt, G. Touzot, and E. Lefrançois, *Méthode des éléments finis*. Paris, France: Hermès, Lavoisier, 2005.
- [62] J.C. Sabonnadière and J.L. Coulomb, "Calcul des champs électromagnétiques," INP Grenoble,.
- [63] D. Jiles, "Introduction to magnetism and magnetic materials," *Chapman and Hall*, 1998.
- [64] W. Greiner, "Classical electrodynamics," *New York Springer*, 1998.
- [65] M. Fabbri, "Magnetic flux density and vector potential of uniform polyhedral sources," *IEEE Trans. Magn*, vol. 44, no. 1, pp. 32-36, January 2008.
- [66] J.J.H. Wang, "Generalised moment methods in electromagnetics," *IEE PROCEEDINGS*, vol. 137, no. 2, pp. 127-132, April 1990.
- [67] A. Morandi, M. Fabbri, and P.L. Ribani, "A modified formulation of the volume integral equations method for 3-D magnetostatics," *IEEE Trans. Magn*, vol. 46, no. 11, pp. 3848-3859, November 2010.
- [68] E.W. Weisstein« Legendre–Gauss quadrature ». (2005) MathWorld – A Wolfram. [Online]. <http://mathworld.wolfram.com/Legendre-GaussQuadrature.htm>
- [69] T. Le Duc, G. Meunier, O. Chadebec, J.M Guichon, and J.P. A. Bastos, "General integral formulation for the 3D thin shell modeling," *IEEE Trans. Magn*, vol. 49, no. 5, pp. 1989-1992, May 2013.
- [70] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES : a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear system," *SIAM J. Sci. Statist. Comput*, vol. 7, no. 3, pp. 856-869, July 1986.
- [71] A. Canova and M. Repetto, "Integral Solution of nonlinear magnetostatic field problems," *IEEE Trans on magn*, vol. 37, no. 3, pp. 1070-1077, May 2001.
- [72] F. Hantila, G. Preda, and M. Vasiliu, "Polarization method for static fields," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 36, no. 4, pp. 672-675, Jul 2000.
- [73] E. Dlala, A. Belahcen, and A. Arkkio, "A fast fixed-point method for solving magnetic field problems in media of hysteresis," *IEEE Trans on Magn.*, vol. 44, no. 6, pp. 1214-1217, June 2008.
- [74] F.J. Cochran and B. Heinrich, *Applications of maxwell's equations*. Simon Fraser

University, Burnaby, B.C, Canada, 01 December 2004.

- [75] ANSYS academic teaching advanced, September 2009.
- [76] C. Rubeck, J.P. Yonnet, H. Allag, B. Delinchant, and O. Chadebec, "Analytical calculation of magnet systems: Magnetic field created by charged triangles and polyhedra," *IEEE Tran. magn*, vol. 49, no. 1, pp. 144-147, January 2013.
- [77] T. Onuki and S. Wakao, "Systematic evaluation for magnetic field and potential due to massive current coil," *IEEE Trans. Magn*, vol. 31, no. 3, pp. 1476-1479, May 1995.
- [78] A.F. Peterson and R. Mittra, "Method of conjugate gradients for the numerical solution of large-body electromagnetic scattering problems," *J. Opt. Soc. Am. A*, vol. 2, no. 6, pp. 971-977, June 1985.
- [79] J.J.H. Wang and J.R. Dubberley, "Computation of fields in arbitrarily-shaped heterogeneous dielectric or biological body by an iterative conjugate gradient method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 37, no. 7, pp. 1119-1125, July 1989.
- [80] T. Lim, "Formulation intégrale surfacique des équations de Maxwell pour la simulation de contrôles non destructifs par courant de Foucault. Etude préliminaire à la mise en œuvre de la méthode multipôle rapide," Thèse, École polytechnique Palaiseau, May 2011.
- [81] K. Forsman and L. Kettunen, "Hybrid and integral formulations for 3D eddy current problems," *IEEE Trans. Magn*, vol. 33, no. 2, pp. 1255-1258, March 1997.
- [82] M. Koizumi and M. Onizawa, "Computational method of three dimensional eddy current by using volume integral equation method," *IEEE Trans. Magn*, vol. 27, no. 5, pp. 4077-4080, September 1991.
- [83] Y. Higuchi, M. Koizumi, and S. Saito, "Three dimensional eddy current calculation with integral equation method for transformers," *IEEE Trans. Magn*, vol. 33, no. 2, pp. 1310-1313, March 1997.
- [84] [Online]. [http://personal.stevens.edu/~llevine/ma227/surf\\_rev.pdf](http://personal.stevens.edu/~llevine/ma227/surf_rev.pdf)