



HAL
open science

Dynamique dans un réseau optique conservatif

Julia Diaz Luque

► **To cite this version:**

Julia Diaz Luque. Dynamique dans un réseau optique conservatif. Physique [physics]. Université Lille I, 2014. Français. NNT: . tel-01099521

HAL Id: tel-01099521

<https://theses.hal.science/tel-01099521>

Submitted on 4 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Université des Sciences et Technologies de Lille - Lille 1
Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules
École Doctorale 104 : Sciences de la Matière, du Rayonnement et de l'Environnement

Thèse de doctorat

présentée par

Julia DIAZ LUQUE

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Lille 1 dans la spécialité :

Optique, Lasers, Physico-Chimie, Atmosphère

Dynamique dans un réseau optique conservatif

Soutenue publiquement le 23 juillet 2014, devant le jury :

M. Stephan DE BIEVRE	Université Lille 1	Président
M. Luca GUIDONI	Université Paris Diderot - Paris7	Rapporteur
M. Ferruccio RENZONI	University College London	Rapporteur
M. Anders KASTBERG	Université de Nice - Sophia Antipolis	Examineur
M. Daniel HENNEQUIN	Université Lille 1	Directeur de thèse
M. Philippe VERKERK	Université Lille 1	Co-directeur de thèse

N° d'ordre : 41466

Remerciements

Ma thèse « Dynamique dans un réseau optique conservatif » a été réalisée au sein du laboratoire PhLAM (Physique des Lasers, Atomes et Molécules) de l'Université Lille 1, avec l'encadrement de Daniel Hennequin et Philippe Verkerk. Je veux d'abord remercier Daniel et Philippe pour tout le temps et le travail consacrés à cette thèse. Leur accueil dans leur équipe de recherche m'a permis de beaucoup apprendre, et ce mémoire ne représente qu'une partie de cet apprentissage.

Je remercie également Rudy Romain, avec qui j'ai partagé l'expérience d'être doctorant dans notre équipe. Son aide pendant ma première année de thèse (et même après) a été fondamentale et je lui en suis très reconnaissante.

Je veux aussi chaleureusement remercier l'amitié et le soutien de Nazek Maalouli, Benoît Vermeersch, Béatrice Sauvage, Imane Haykal, Lamyae Drouzi, Aurore Woller, Bruno Lannoo, et beaucoup d'autres doctorants dont leur compagnie j'ai profité. J'aurai toujours un bon souvenir de notre temps partagé comme thésards.

Un grand merci à toutes les personnes du laboratoire PhLAM qui m'ont tellement bien accueilli, parmi eux mon collègue de bureau, Emmanuel Courtade. Merci aussi aux gens de l'Université Lille 1, en particulier les professeurs de la Maison de Langues et les filles de l'équipe de tennis du personnel de l'Université.

La réalisation de cette thèse a été possible grâce au programme EADIC II d'Erasmus Mundus, et je tiens à remercier particulièrement Emeline Marchesse, du service de relations internationales de l'Université Lille 1. Son rôle dans cette expérience s'étend même jusqu'à avant mon arrivée à Lille : depuis ce temps-là, j'ai eu la chance d'avoir sa guide et maintenant son amitié.

Merci à Camillo Bruni, pour son aide avec quelques figures dans ce mémoire, mais surtout pour être la meilleure partie d'être venue à Lille.

Finalement, mon plus grand remerciement est à ma famille, qui m'a soutenu à la distance comme seulement eux peuvent le faire. Merci Lili, merci Ceci, et merci Guille. Mais surtout merci à mon père, qui a réussi à voir la fin de ce travail. C'est à lui que cette thèse est dédiée, puisque parmi tous les hommes de science que j'ai rencontré, il continue à être celui qui a consacré le plus de soi-même à la recherche.

Résumé

Les réseaux optiques sont des structures créées par l'interférence de faisceaux lasers, qui permettent de piéger et d'ordonner les atomes froids. Ils sont devenus un système modèle pour divers domaines de la physique, car il est possible d'imiter d'autres systèmes en changeant la géométrie et les paramètres du réseau. Ces caractéristiques sont faciles à modifier expérimentalement, de sorte qu'il est possible d'obtenir des réseaux optiques conservatifs.

Dans cette thèse, nous étudions la dynamique d'un atome piégé dans un réseau optique conservatif à 2D. Cette dynamique dépend des paramètres du réseau, et elle est souvent complexe. Cette thèse se situe donc à l'interface entre le domaine des atomes froids et celui de la dynamique non linéaire.

L'étude de la dynamique dans le réseau optique nécessite d'abord un traitement dans la limite classique. Nous examinons premièrement les solutions des équations du mouvement obtenues par intégration numérique, pour les différentes configurations du système. Elles montrent une grande variété de régimes dynamiques possibles. Parmi ces régimes, on observe des phénomènes de synchronisation menant à un mouvement périodique accroché en fréquence. La synchronisation semble inhiber le chaos dans le système.

Les principales solutions obtenues numériquement sont aussi étudiées analytiquement. Cette approche permet d'obtenir une description du mouvement pour les différents régimes dynamiques observés. Tous ces régimes sont faciles à reproduire expérimentalement et l'influence de la synchronisation sur l'apparition du chaos mérite d'être étudiée. D'autre part, cette analyse classique du système ouvre la voie à l'étude de sa limite quantique.

Mots-clés : Atomes froids, Faisceaux laser, Dynamique non linéaire, Chaos déterministe, Réseaux optiques conservatifs.

Abstract

Optical lattices are structures created by the interference of laser beams, which make it possible to trap and arrange cold atoms. They have become a model system for several domains in physics, because it is possible to simulate other systems by changing the lattice geometry and its parameters. These characteristics are easy to modify experimentally. In particular, it is possible to obtain conservative optical lattices.

In this thesis, we study the dynamics of an atom trapped in a 2D conservative optical lattice. The dynamics of the atom depends on the parameters of the lattice, and it is often complex. In consequence, this thesis is at the interface between the domains of cold atoms and non-linear dynamics.

The study of the dynamics in the optical lattice needs to be done firstly in the classical limit. We examine in the first place the solutions to the movement equations obtained by numerical integration, for the different configurations of the system. They show a big variety of possible dynamical regimes. Amongst these regimes we find synchronization phenomena leading to a periodic movement locked in frequency. Synchronization seems to inhibit chaos in the system.

The main solutions obtained numerically are also studied analytically. This approach allows us to obtain a description of the movement for the different dynamical regimes observed. All these regimes are easy to reproduce experimentally and the influence of synchronization on the existence of chaos needs to be studied. Additionally, this classical analysis serves as a basis for studying the system in the quantum limit.

Keywords : Cold atoms, Laser beams, Non-linear dynamics, Deterministic chaos, Conservative optical lattices.

Table des matières

Introduction générale	13
I Présentation du sujet et introduction au problème	17
Introduction à la première partie	19
1 Réseaux optiques	21
1.1 Interaction lumière-matière	22
1.1.1 Force dissipative et refroidissement Doppler	23
1.1.2 Force réactive et potentiel optique	27
1.2 Réseaux optiques conservatifs	29
1.2.1 Réseaux optiques à 1D	31
1.2.2 Réseaux optiques à plusieurs dimensions	31
1.2.2.1 Réseaux optiques indépendants de la phase	32
1.2.2.2 Réseau carré à 2D	34
1.2.3 Limite classique-quantique	36
2 Systèmes dynamiques non linéaires : chaos et synchronisation	37
2.1 Systèmes dynamiques	38
2.1.1 Généralités	38
2.1.2 La section de Poincaré	40
2.2 Intégrabilité et chaos dans les systèmes non dissipatifs	41
2.2.1 Intégrabilité et résonances non linéaires	42
2.2.2 Chaos dans les systèmes non dissipatifs	44
2.2.2.1 Définition du chaos	45
2.2.2.2 Exposants de Lyapunov	49
2.2.2.3 Dimension de corrélation	50
2.2.2.4 Analyse des spectres	51
2.3 Synchronisation dans les systèmes dissipatifs	52
2.3.1 Synchronisation mutuelle	52
2.3.2 Synchronisation dans les systèmes chaotiques	54
2.3.3 Synchronisation des systèmes chaotiques	55
3 Réseau carré à 2D	57
3.1 Introduction au réseau carré à 2D	58
3.2 Dynamique d'un atome dans les réseaux carrés	60
3.2.1 Forme des potentiels	60

3.2.1.1	Topologie et symétrie des potentiels	60
3.2.1.2	Équations pour les potentiels	62
3.2.2	Dynamique dans les réseaux dans un cas spécifique ($\alpha = 0.5$) . .	62
3.3	Analyse détaillée du réseau avec un désaccord négatif	66
3.3.1	Mouvement régulier	66
3.3.2	Au-delà du troisième ordre	68
3.3.3	Synchronisation	70
Conclusion de la première partie		72
II Traitement numérique		73
Introduction à la deuxième partie		75
4	Résolution numérique des équations du mouvement	77
4.1	Adaptation du problème à la résolution numérique	78
4.1.1	Adaptation des équations du mouvement au traitement numérique	78
4.1.2	Résolution de la dynamique pour l'analyse via les sections de Poincaré	80
4.1.3	Considérations pour l'analyse des spectres	82
4.2	Méthode pour la résolution des équations du mouvement	85
4.2.1	Méthode de Runge-Kutta	85
4.2.2	Méthode de Runge-Kutta à pas variable	86
4.2.2.1	Méthodes de Runge-Kutta à formules emboîtées	86
4.2.2.2	Contrôle adaptatif du pas	87
4.3	Implémentation des algorithmes	89
4.3.1	Trajectoire et section de Poincaré	89
4.3.1.1	POINCARE	90
4.3.1.2	RKQS	90
4.3.1.3	RKCK	91
4.3.1.4	DERIVS	92
4.3.2	Carte de sections de Poincaré	92
4.3.3	Analyse des spectres	93
5	Résultats numériques	95
5.1	Introduction : l'espace des phases accessible	96
5.2	Régimes dynamiques en fonction de (α, E)	98
5.2.1	Le cas $\alpha = 0.1$	99
5.2.1.1	Solutions découplées	99
5.2.1.2	Solutions accrochées $f_Y = f_X$	102
5.2.1.3	Chaos et solutions accrochées $f_Y = (^{10/9}) f_X$, $f_Y = (^{8/7}) f_X$	103
5.2.2	Le cas $\alpha = 0.2$	103
5.2.3	Le cas $\alpha = 0.3$	105
5.2.4	Le cas $\alpha = 0.4$	108
5.2.5	Le cas $\alpha = 0.5$	109
5.2.6	Le cas $\alpha = 0.6$	110

5.2.7	Le cas $\alpha = 0.7$	111
5.2.8	Le cas $\alpha = 0.8$	113
5.2.9	Le cas $\alpha = 0.9$	114
5.2.10	Les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$	114
5.3	Discussion	116
6	Chaos et synchronisation dans le réseau carré bleu	119
6.1	Introduction : l'étendue du chaos au seuil d'énergie	120
6.2	Chaoticité de la dynamique au seuil d'énergie	121
6.2.1	Mesure sur le plan XY	124
6.2.2	Mesure sur le plan $X\dot{X}$	125
6.3	Dimension de corrélation au seuil d'énergie	126
6.3.1	Implémentation de l'algorithme de Grassberger-Procaccia	127
6.3.2	Résultats	127
6.4	Synchronisation pour certaines valeurs de α	129
	Conclusion de la deuxième partie	132
	III Traitement analytique	133
	Introduction à la troisième partie	135
7	Synchronisation par quasi-dégénérescence	137
7.1	Introduction	138
7.2	Calculs analytiques	139
7.2.1	Solution $X_0 = 0$	141
7.2.1.1	Énergie	142
7.2.1.2	Stabilité de la solution	143
7.2.1.3	Mouvement selon X	144
7.2.2	Solution $Y_0 = 0$	145
7.2.2.1	Énergie	146
7.2.2.2	Stabilité de la solution	146
7.2.2.3	Mouvement selon Y	146
7.2.3	Solution en phase	147
7.2.3.1	Énergie	148
7.2.3.2	Stabilité des solutions	149
7.2.4	Solutions en quadrature	150
7.2.5	Résumé	150
7.3	Résultats	152
7.3.1	Cartes de sections de Poincaré	152
7.3.1.1	Étiquetage des sections de Poincaré	156
7.3.1.2	Résultats du traitement des spectres	157
7.3.1.3	Extrapolation aux points fixes	160
7.3.2	Solution $X_0 = 0$	161
7.3.2.1	Amplitude d'oscillation Y_0	161
7.3.2.2	Fréquence principale ω_Y	161
7.3.2.3	Bandes latérales et fréquence de battement	162

7.3.3	Solution en phase	163
7.3.3.1	Amplitudes d'oscillation X_0 et Y_0	164
7.3.3.2	Fréquence principale ω_1	164
7.3.3.3	Fréquence de battement Ω_1	164
7.4	Discussion	166
8	Synchronisation par résonance 2 : 1	169
8.1	Introduction	170
8.2	Calculs analytiques	171
8.2.1	Solutions accrochées	171
8.2.1.1	Approximation au quatrième ordre	171
8.2.1.2	Approximation au sixième ordre	173
8.2.1.3	Solution $\psi_Y = \psi_X$	174
8.2.1.4	Solutions $\psi_Y = \psi_X \pm \pi/4$	176
8.2.2	Solutions triviales	176
8.2.2.1	Fréquence principale des solutions triviales	176
8.2.2.2	Énergie des solutions triviales	177
8.2.2.3	Stabilité des solutions triviales	178
8.2.3	Résumé	178
8.3	Résultats	178
8.3.1	Cartes de sections de Poincaré	178
8.3.1.1	Étiquetage des sections de Poincaré	181
8.3.1.2	Résultats du traitement des spectres	182
8.3.1.3	Extrapolation aux points fixes	184
8.3.2	Solutions accrochées	186
8.3.2.1	Amplitudes d'oscillation X_0 et Y_0	186
8.3.2.2	Fréquence ω_1	187
8.3.3	Solution $X_0 = 0$	187
8.3.3.1	Amplitude d'oscillation Y_0	187
8.3.3.2	Fréquence principale ω_Y	188
8.3.4	Solution $Y_0 = 0$	188
8.3.4.1	Amplitude d'oscillation X_0	188
8.3.4.2	Fréquence principale ω_X	189
8.4	Discussion	189
9	Solutions quasi-périodiques	191
9.1	Les solutions découplées	192
9.1.1	Fréquence du mouvement découplé	193
9.1.2	Énergie et rapport des fréquences	195
9.1.3	Les petites oscillations	196
9.2	Spectres, sections de Poincaré et résonances	198
9.2.1	Spectres	198
9.2.2	Condition de résonance	199
9.2.3	Perturbations	201
9.2.4	Condition de validité du traitement perturbatif	204
9.2.4.1	Termes de forçage	204
9.2.4.2	Instabilité paramétrique	205
9.3	Vérification des relations théoriques	205

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	11
9.3.1 Le cas $\alpha = 0.3$	206
9.3.2 Le cas $\alpha = 0.6$	206
Conclusion de la troisième partie	208
Conclusion générale et perspectives	209
Références bibliographiques	214
Annexe	221

Introduction générale

Introduction générale

Dans cette thèse, nous étudions la dynamique d'un atome piégé dans un réseau optique conservatif à 2D. Les réseaux optiques sont des structures créées par l'interférence de faisceaux lasers, qui permettent de confiner les atomes froids. Les caractéristiques de ces structures sont faciles à modifier expérimentalement, de sorte qu'il est possible d'obtenir des réseaux optiques conservatifs. Dans un réseau conservatif, la dynamique d'un atome dépend de la géométrie – elle aussi facilement modifiable – du réseau. Cette dynamique est souvent complexe à 2D, et nous pouvons contrôler les paramètres qui la déterminent. Le contenu du travail décrit dans ce mémoire se situe donc à l'interface de deux domaines de la physique : les atomes froids et la dynamique non linéaire.

Le domaine des atomes froids est apparu avec l'idée du refroidissement Doppler [Hänsch1975]. Son expansion prodigieuse est due à l'existence des lasers, une source de rayonnement capable de manipuler les atomes [Hennequin2013]. Cette manipulation a permis de les ralentir et de les refroidir à des températures de l'ordre du μK et voire du nK , selon la méthode employée [Aspect1990, Phillips1998]. Les réseaux optiques ont élargi le contrôle exercé sur les atomes froids car ils ont aussi permis de les ordonner dans des sites précis. Les atomes sont confinés dans les puits d'un potentiel lumineux lié à la figure d'interférence des lasers. Les réseaux optiques donnent ainsi la possibilité de manipuler les degrés de liberté externes de l'atome [Guidoni1999].

Les réseaux optiques sont devenus un système modèle pour divers domaines de la physique. En effet, il est possible d'imiter d'autres systèmes en changeant la géométrie et les paramètres du réseau [Metcalf1999, Bloch2005]. Parmi ces domaines se trouve la physique de la matière condensée, dont ils ont permis d'étudier expérimentalement plusieurs phénomènes [Dahan1996, Greiner2002, Paredes2004]. D'autre part, les réseaux optiques ont permis l'observation de phénomènes comme la localisation d'Anderson [Billy2008, Lopez2012], et ils ont aussi été employés pour le développement des ordinateurs quantiques, en simulant d'autres systèmes quantiques complexes [Jaksch2005].

L'implémentation de réseaux optiques a contribué largement au progrès du domaine du chaos quantique. Les potentiels lumineux généralement employés dans ce but ont été des potentiels à 1D, avec une modulation temporelle qui permet d'obtenir une dynamique atomique chaotique [Lignier2005]. Le chaos quantique est défini comme la contrepartie quantique d'un système qui exhibe du chaos dans le régime classique. Cela veut dire qu'une analyse de la dynamique classique du système est nécessaire avant de considérer sa limite quantique. Les réseaux optiques, et en particulier les réseaux non dissipatifs qui nous intéressent dans ce travail, sont appropriés pour cette analyse. Ils permettent de passer du régime classique au régime quantique de façon continue, en modifiant des paramètres qui affectent le couplage entre les atomes dans le réseau et l'environnement [Steck2000]. Ces deux régimes sont accessibles expérimentalement et donc l'étude de la dynamique dans les deux cas est possible [Ammann1998].

La dynamique des atomes dans un réseau optique conservatif est souvent complexe. La première étape pour la description de cette dynamique est alors son traitement dans la limite classique. Nous avons donc besoin des outils de la dynamique non linéaire. Quoique le chaos classique ait été plutôt développé pour les systèmes dissipatifs, les

systèmes conservatifs ont été aussi étudiés [Hénon1964, Reichl2004]. Dans le but d'obtenir des résultats généraux et de garder une dynamique complexe, nous nous sommes intéressés à un réseau optique à 2D. Cela élimine la nécessité de l'horloge externe introduite par la modulation temporelle qui crée le chaos dans un système à 1D. En absence de la modulation, la dynamique atomique est plus riche. De plus, la flexibilité des réseaux optiques implique que nous pouvons jouer sur leurs paramètres pour modifier amplement leur géométrie et donc la dynamique résultante [Petsas1994]. Finalement, il est important de souligner que, à la différence des potentiels modèles à 2D généralement étudiés [Chaikovsky1991, Panoiu2000], ceux que nous considérons sont faciles de réaliser expérimentalement.

La majorité des études sur le chaos déterministe ont été faites avec une approche statistique. Nous ne voulons pas nous restreindre à cette approche et cherchons à mieux décrire le comportement atomique en analysant les différents mouvements possibles. Les travaux sur les réseaux conservatifs ont montré, par exemple, que le temps de vie de l'atome dépend drastiquement du type de régime dynamique [Hennequin2010]. Les conséquences des différents régimes, comme celle-ci, passeraient inaperçues dans une approche statistique. Par conséquent, connaître les régimes dynamiques accessibles à l'atome complète la description de la limite classique du système, et permet aussi de prévoir le comportement macroscopique observable expérimentalement.

L'objectif de cette thèse est d'étudier la dynamique non linéaire des atomes froids dans un réseau optique conservatif. Pour simplifier l'analyse, nous considérons des atomes froids qui n'interagissent pas entre eux. Nous voulons connaître les régimes classiques accessibles pour un seul atome et aussi être capables de les décrire analytiquement. Nous adoptons pour cela une double approche, impliquant des simulations numériques et des calculs analytiques. Cette analyse prépare le terrain pour une étude de la limite quantique du système.

Ce manuscrit se divise en trois parties, qui contiennent trois chapitres chacune. Ces chapitres suivent le traitement du problème et les résultats obtenus successivement. Toutefois, chaque partie permet de tirer des conclusions partielles.

La première partie donne les bases des deux domaines concernant ce travail : les atomes froids et la dynamique non linéaire. Elle présente aussi le système physique sur lequel nous travaillerons, le réseau optique conservatif carré à 2D. Dans cette partie I, nous introduisons aussi des considérations et des notations indispensables pour la suite.

La deuxième partie du manuscrit présente les résultats obtenus grâce à un traitement numérique du problème considéré. À partir des solutions obtenues, nous identifions dans la dynamique atomique les phénomènes de chaos et de synchronisation, et aussi les résonances liées à ces synchronisations. Cette identification ouvre la voie au traitement analytique que nous développons dans la partie III de ce mémoire.

Finalement, dans la troisième partie, nous décrivons analytiquement la dynamique régulière – accrochée ou non – observée dans la partie II. Nous traitons deux cas de synchronisation et un cas où le mouvement n'est pas accroché. Ces résultats analytiques sont comparés aux calculs numériques de la partie II.

Ces trois parties du manuscrit sont suivies d'une conclusion générale, qui reprend les conclusions partielles et synthétise les contributions de cette thèse. Dans ce chapitre, après avoir détaillé ces conclusions, nous introduisons quelques perspectives du travail présenté. En particulier, l'étude du réseau carré dans la limite quantique, impliquant

le saut vers le monde du chaos quantique. Finalement, nous considérons aussi un autre réseau conservatif à 2D qui peut être abordé avec les outils développés dans cette thèse. L'Annexe complète ces deux perspectives en proposant le début de leur traitement analytique.

Première partie

Présentation du sujet et introduction au problème

Introduction à la première partie

L'objectif de cette première partie est de présenter le problème traité dans cette thèse, en introduisant tous les concepts, considérations et outils employés dans les parties suivantes. Elle commence par donner les bases des deux domaines concernant ce travail : les atomes froids et la dynamique non linéaire. Elle présente ensuite le réseau optique traité dans ce travail, et l'intérêt d'étudier sa dynamique.

En premier lieu, le chapitre 1 est consacré aux réseaux optiques et s'intéresse aux méthodes de refroidissement et de piégeage des atomes par laser. Il décrit les principes de cette technique en suivant une approximation semi-classique, dans le but d'exprimer les forces optiques impliquées dans un réseau conservatif. Dans ce chapitre, nous introduisons aussi les caractéristiques principales du réseau carré, que nous considérons tout au long de cette thèse. Ensuite, le chapitre 2 introduit les concepts de la dynamique non linéaire dont nous aurons besoin par la suite, et des outils comme les sections de Poincaré ou l'analyse des spectres. Il décrit en détail les phénomènes de chaos et de synchronisation que nous rencontrons dans le réseau conservatif carré.

Finalement, le chapitre 3 complète l'introduction du système que nous allons traiter. Il résume les travaux qui ont suscité l'étude faite dans cette thèse : d'une part, les différentes dynamiques trouvées selon le type du désaccord employée dans le réseau carré [Hennequin2010], et d'autre, l'existence d'un phénomène de synchronisation dans ce système [Hennequin2010b]. Il montre aussi qu'il est possible d'approcher la dynamique dans ce dernier cas par celle de deux oscillateurs de Duffing couplés. Ce chapitre va toutefois au delà du contenu de ces deux articles, et nous y introduisons aussi des considérations et des notations indispensables pour la suite.

Chapitre 1

Réseaux optiques

La compréhension des phénomènes d'interaction entre la lumière et la matière a donné naissance à des méthodes de refroidissement et de piégeage d'atomes par laser, créant un terrain d'étude qui continue à évoluer : les atomes froids. Parmi les outils développés dans ce domaine se trouvent les réseaux optiques, qui permettent de confiner et d'ordonner les atomes froids. Dans ce chapitre, nous décrivons les mécanismes menant à leur construction, en partant des forces optiques impliquées.

Chapitre 1

Réseaux optiques

1.1 Interaction lumière-matière

Lasers L'outil fondamental pour ralentir et refroidir les atomes neutres, et pour construire les réseaux optiques, est le laser. Il fournit une source de lumière intense, cohérente, avec une faible largeur spectrale et une forte directivité.

Grâce à ces propriétés, dans notre étude, nous pouvons considérer les lasers comme une source de lumière monochromatique à la fréquence ω_L et avec une phase définie ϕ . Les faisceaux lasers ont en fait un profil transverse de forme gaussienne [Hennequin2013] ; mais, pour ce travail, nous nous restreignons à la région de l'espace où l'amplitude ε_L de leur champ peut être considérée comme constante. Dans ces conditions, la lumière issue d'un laser peut être décrite tout simplement par une onde plane qui se propage dans la direction z :

$$\varepsilon(z, t) = \varepsilon_L \cos(\omega_L t + \phi(z)) \quad (1.1)$$

Atome à deux niveaux Pour étudier l'interaction entre la matière et le rayonnement laser, il est commode de travailler avec un modèle atomique simple : l'atome à deux niveaux [Cohen-Tannoudji1993]. On appelle les niveaux atomiques en question $|g\rangle$ (le fondamental) et $|e\rangle$ (l'excité), et la différence d'énergie entre eux est $\hbar\omega_0$, où \hbar est la constante de Planck et ω_0 est la fréquence de la transition entre ces niveaux (figure 1.1).

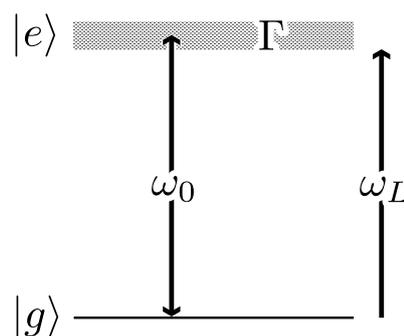


FIGURE 1.1 – Modèle de l'atome à deux niveaux. Les niveaux considérés sont le fondamental $|g\rangle$ et l'excité $|e\rangle$; ce dernier a une largeur naturelle Γ . La transition entre ces deux niveaux a une fréquence ω_0 , et elle est la seule excitée par le laser de fréquence ω_L .

Examinons dans quelles conditions un atome réel en interaction avec le rayonnement peut être schématisé par un système à deux niveaux. En premier lieu, il faut que $|g\rangle$ et $|e\rangle$ ne soient pas couplés à un autre niveau de l'atome. De plus, considérons les fréquences

de transition ω_i entre les divers niveaux atomiques. L'amplitude de probabilité pour qu'une transition ω_i soit excitée par la lumière de fréquence ω_L est proportionnelle à $|\omega_L - \omega_i|^{-1}$. L'atome se ramène, tout naturellement, à un système à deux niveaux lorsque la fréquence ω_0 de la transition entre $|g\rangle$ et $|e\rangle$ satisfait (pour tous les ω_i différents de ω_0) [Perrin2011] :

$$|\omega_L - \omega_0| \ll |\omega_L - \omega_i| \quad (1.2)$$

Dans ces conditions (grâce au spectre étroit du laser), la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ est la seule à être excitée et on peut négliger tous les niveaux autres que $|g\rangle$ et $|e\rangle$.

On introduit volontiers Δ , le désaccord du laser, qui est la différence entre la fréquence du laser et celle de la transition atomique considérée dans le modèle à deux niveaux :

$$\Delta = \omega_L - \omega_0 \quad (1.3)$$

On exprime souvent ce désaccord en fonction de la largeur naturelle du niveau excité, Γ (voir figure 1.1).

$$\tilde{\Delta} = \frac{\Delta}{\Gamma} \quad (1.4)$$

L'atome et le champ (éq. 1.1) du laser sont couplés par l'interaction dipolaire, que l'on peut caractériser par la pulsation de Rabi Ω [Dalibard2013] :

$$\Omega(z) = -\frac{d|\varepsilon(z, t)|}{\hbar} \quad (1.5)$$

où d est le moment dipolaire de la transition $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$. À partir de l'équation (1.5), on peut voir que Ω^2 est proportionnel à l'intensité du laser.

Un atome excité par la lumière se trouve dans le niveau $|e\rangle$ pendant un temps de l'ordre de $\tau = \Gamma^{-1}$ (durée de vie de l'état excité) avant de retomber dans $|g\rangle$. Cela correspond à un phénomène d'absorption suivi d'une émission spontanée. Le phénomène d'absorption est aussi susceptible d'être suivi par une émission induite, liée au couplage entre l'atome et le champ¹. Ces deux différents processus d'absorption-émission ont un effet négligeable sur l'énergie ou l'impulsion de l'atome, quand on considère l'interaction avec un seul photon². Or, l'intérêt d'éclairer l'atome avec un laser réside dans le fait qu'un faisceau contient un si grand nombre de photons, que ses effets deviennent significatifs. Nous analysons maintenant les forces sur l'atome qui résultent donc de l'action répétée des processus d'absorption et d'émission. Les calculs pour obtenir ces forces sont faits dans le cadre d'une approximation semi-classique [Cohen-Tannoudji1992], où le mouvement de l'atome est traité classiquement.

1.1.1 Force dissipative et refroidissement Doppler

Le processus d'absorption implique le passage du niveau $|g\rangle$ au niveau $|e\rangle$ de l'atome grâce à l'absorption d'un photon du faisceau laser décrit par l'équation (1.1). Pendant ce processus, il y a un transfert d'impulsion du laser à l'atome : si l'atome est initialement

1. Ω donne la fréquence d'oscillation entre les niveaux $|g\rangle$ et $|e\rangle$ due à ce couplage, lorsque le laser est à résonance et que l'on peut négliger l'émission spontanée.

2. Dans le cas du Césium avec de la lumière à $0.85 \mu\text{m}$, le changement de vitesse de l'atome dû à un cycle de fluorescence est d'environ 3.6 mm/s [Aspect1990]. L'atome de Césium dans une vapeur à température ambiante a une vitesse de l'ordre de $2.4 \times 10^5 \text{ mm/s}$ [Depret2002].

au repos, il aura, après l'absorption, une impulsion $\hbar\mathbf{k}_L$ dans la direction du photon. En supposant que le faisceau se propage dans la direction $+\hat{\mathbf{z}}$:

$$\mathbf{k}_L = \frac{\omega_L}{c}\hat{\mathbf{z}} \quad (1.6)$$

(c étant la vitesse de la lumière). Ensuite, si l'atome revient au niveau $|g\rangle$ par une émission spontanée, il subit un recul associé à ce processus qui se produit dans une direction aléatoire. Le photon spontané émis est la conséquence du couplage de l'atome au champ de vide quantique et son impulsion n'est pas corrélée à celle du photon absorbé initialement. Plusieurs cycles d'absorption suivis d'une émission spontanée donnent lieu à une force nette sur l'atome. Cette force est appelée force de pression de radiation ou FORCE DISSIPATIVE \mathbf{F}_{dis} [Metcalf1999] ; elle est égale à l'impulsion $\hbar\mathbf{k}_L$, donnée par le photon lors de l'absorption, multipliée par le nombre de cycles par unité de temps. En effet, l'impulsion échangée lors de l'émission spontanée est nulle en moyenne. Le nombre de cycles subis par l'atome est aussi le nombre n_{sp} de photons spontanés émis par unité de temps :

$$\mathbf{F}_{\text{dis}} = n_{sp}\hbar\mathbf{k}_L \quad (1.7)$$

n_{sp} peut être calculé à partir de la population du niveau excité Π_e divisé par la durée de vie de ce niveau : $n_{sp} = \Pi_e/\tau = \Pi_e\Gamma$. Cette population³ (dans une situation stationnaire) vaut [Cohen-Tannoudji1993] :

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \quad (1.8)$$

où s est le paramètre de saturation :

$$s = \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (1.9)$$

La force dissipative s'exprime donc comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{dis}} &= \frac{1}{2} \frac{s}{1+s} \Gamma \hbar\mathbf{k}_L \\ &= \frac{1}{2} \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} + \frac{\Omega^2}{2}} \Gamma \hbar\mathbf{k}_L \end{aligned} \quad (1.10)$$

Si la transition est saturée, $s \gg 1$, la population du niveau excité vaut environ $1/2$, c'est à dire que l'atome passe autant de temps dans le niveau fondamental que dans le niveau excité. Cela correspond à des petits désaccords ($|\Delta| \approx \Gamma$) et des grandes intensités ($\Omega \gg |\Delta|, \Gamma$) ; l'atome subit plus de cycles d'absorption-émission spontanée quand le faisceau est plus intense (grand Ω). Par conséquent, même si la force dissipative dépend de l'intensité du faisceau laser, augmenter l'intensité ne permet pas de faire croître cette force sans limite. L'émission spontanée a une valeur maximale et, en conséquence, la force dissipative atteint la limite $\mathbf{F}_{\text{dis}}^{\text{sat}} = 1/2\Gamma\hbar\mathbf{k}_L$ à la saturation. Le cas des faibles saturations, $s \ll 1$, correspond à des désaccords grands et/ou des intensités faibles, et à une population $\Pi_e \ll 1/2$. Dans cette situation, l'atome est essentiellement dans le niveau fondamental [Guidoni1999].

3. Π_e est trouvé en résolvant les Équations de Bloch Optiques, dont le développement dépasse l'objectif de ce travail.

Refroidissement Doppler des atomes

La force de pression de radiation pousse les atomes dans le sens de propagation du faisceau laser, permettant de les accélérer ou de les ralentir. Cela équivaut à pouvoir modifier la valeur moyenne de la distribution des vitesses. Or, pour réussir à refroidir les atomes, il faut aussi réduire la largeur de cette distribution, qui permet de définir la température des atomes⁴. Le refroidissement des atomes est possible en prenant en compte l'effet Doppler lors de l'interaction atome-lumière. L'effet Doppler permet de « choisir » les atomes à ralentir, et donc cette sélectivité donne lieu au refroidissement.

Pour comprendre ce mécanisme, considérons un atome avec une vitesse \mathbf{v}_a dans la direction z ($\mathbf{v}_a = v_a \hat{\mathbf{z}}$). Il est éclairé par deux faisceaux lasers contrepropageants ε_1 et ε_2 de la forme de l'équation (1.1), avec des vecteurs d'onde $\mathbf{k}_{L1} = k_L \hat{\mathbf{z}}$ et $\mathbf{k}_{L2} = -k_L \hat{\mathbf{z}}$ (figure 1.2). À cause de l'effet Doppler, l'atome « voit » le faisceau ε_1 avec une fréquence apparente $\omega_{1app} = \omega_L - k_L v_a$, décalée par rapport à celle du laser [Phillips1992]. Par ailleurs, le faisceau ε_2 présente une fréquence apparente $\omega_{2app} = \omega_L + k_L v_a$. Les désaccords lasers apparents $\Delta_{app1,2}$ correspondants à chaque faisceau sont :

$$\begin{aligned} \Delta_{app1,2} &= \omega_{1,2app} - \omega_0 \\ &= \Delta \mp k_L v_a \end{aligned} \quad (1.11)$$

C'est à dire que si les lasers ont une fréquence ω_L décalée vers le rouge de la fréquence atomique ($\Delta < 0$), les photons du faisceau opposé à la direction de la vitesse de l'atome (ε_2 , pour $v_a > 0$) sont plus proches de la résonance que ceux du faisceau dans la même direction (ε_1) (figure 1.2). Par conséquent, les photons de ε_2 ont une probabilité plus élevée d'être absorbés par l'atome, ce qui conduit à une force toujours opposée à la direction de son mouvement. Cette pression de radiation réduit la largeur de la distribution des vitesses de l'atome, et mène au refroidissement Doppler (dans la direction z). En ajoutant deux paires de faisceaux dans les autres directions de l'espace, il est possible d'avoir un refroidissement complet à 3D [Phillips1992].

Il est important de voir que, en prenant en compte l'effet Doppler, la force dissipative dépend de la vitesse de l'atome. Cette dépendance s'explique en exprimant la force dissipative (éq. 1.10) dans la limite des faibles saturations, $\mathbf{F}_{dis} = 1/2 s \Gamma \hbar \mathbf{k}_L$ et en remplaçant dans s (éq. 1.9) le désaccord Δ par le désaccord apparent (éq. 1.11). Dans ces conditions, la force totale agissant sur un atome dans la direction z , due à deux faisceaux contrepropageants selon cette direction, est $F_z^{melasse}$ [Guidoni1999] :

$$\begin{aligned} F_z^{melasse} &= \frac{\Gamma}{2} (s_+ \hbar k_{L+} - s_- \hbar k_{L-}) \\ &\simeq \left[\hbar k_L^2 \frac{\Omega^2}{\Gamma^2} \frac{\frac{\Delta}{\Gamma}}{\left(\frac{\Delta^2}{\Gamma^2} + \frac{1}{4}\right)^2} \right] v_a \end{aligned} \quad (1.12)$$

La dernière expression s'obtient en supposant que le décalage Doppler est faible devant la largeur du niveau excité : $k_L v_a \ll \Gamma$. Cette force de friction⁵, $\mathbf{F}^{melasse}$, en agissant

4. Même s'il n'est pas possible de parler d'un équilibre thermique dans le cas des atomes froids, leur température est définie par l'égalité entre leur énergie cinétique et une énergie thermique $1/2 m (v_a - \langle v_a \rangle)^2 = 1/2 m k_B T$ [Metcalf1999]. m est la masse atomique, $\langle v_a \rangle$ est la vitesse quadratique moyenne, et k_B est la constante de Boltzmann.

5. Le côté droit de l'équation (1.12) montre que cette force est une force de friction seulement pour les désaccords négatifs.

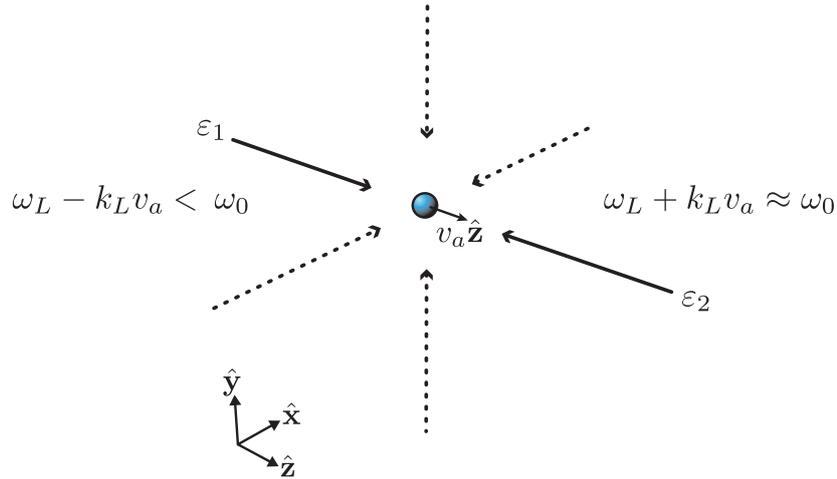


FIGURE 1.2 – Refroidissement Doppler. Les lasers ont un désaccord $\Delta = \omega_L - \omega_0 < 0$: pour l’atome avec la vitesse $v_a \hat{\mathbf{z}}$ ($v_a > 0$), par effet Doppler, le faisceau ε_2 ($\mathbf{k}_{L2} = -k_L \hat{\mathbf{z}}$) est plus proche de la résonance que le faisceau ε_1 ($\mathbf{k}_{L1} = k_L \hat{\mathbf{z}}$). La force selon z sur l’atome sera donc opposée à son mouvement. Ce résultat peut se généraliser aux trois directions de l’espace.

dans les trois directions de l’espace, conduit à une « mélasse optique » occupant l’espace délimité par l’intersection des faisceaux lasers [Phillips1998].

Le processus de refroidissement Doppler permet d’obtenir un gaz d’atomes froids (à une température de l’ordre de $100 \mu\text{K}$ pour le Césium⁶ [Aspect1990]) mais les atomes de ce gaz, même décélérés, finissent par sortir de la mélasse optique. Les atomes ne restent pas longtemps dans l’intersection des faisceaux laser – ils y sont pendant quelques secondes et puis ils sont remplacés par d’autres atomes – parce que la mélasse ne fournit pas de rappel. Une force de rappel, qui permettrait de piéger les atomes, ne peut pas s’introduire juste en employant la force de pression de radiation⁷ : il faut ajouter un élément de piégeage, qui permet ainsi d’obtenir un nuage dense d’atomes froids.

La force de rappel est introduite grâce à un champ magnétique inhomogène. Le champ magnétique lève, par effet Zeeman, la dégénérescence des sous-niveaux atomiques excités. En abandonnant donc le modèle de l’atome à deux niveaux, on peut considérer les effets d’un champ magnétique externe ajouté à la mélasse optique. Si le champ employé est inhomogène, les déplacements Zeeman qu’il produit dépendent de la position de l’atome. De cette façon, la force de pression de radiation dépend aussi de la position, et il apparaît une force de rappel proportionnelle au gradient du champ magnétique. Tel est le mécanisme qui constitue le piège magnéto-optique (PMO) [Phillips1998], l’outil le plus utilisé pour produire un nuage d’atomes froids. Nous n’approfondissons pas davantage ce sujet, car le refroidissement des atomes nous intéresse seulement dans le contexte des réseaux optiques. En revanche, nous analysons ci-après l’autre force qui – avec la force dissipative – résulte de l’interaction lumière-matière, et qui permet la création de ces réseaux optiques : la force réactive.

6. Cette température correspond à des vitesses atomiques de l’ordre de quelques cm/s .

7. Le théorème de Earnshaw optique interdit le piégeage des atomes avec la force de pression de radiation, pour le modèle de l’atome à deux niveaux. Ce théorème n’est plus valable pour les atomes à plusieurs niveaux [DiStefano2001].

1.1.2 Force réactive et potentiel optique

L'interaction dipolaire entre l'atome et le champ (éq. 1.1) implique une modification $\Delta E_{g,e}$ ⁸ de ses niveaux d'énergie $|g\rangle$ et $|e\rangle$ (figure 1.3). $\Delta E_{g,e}$ est appelé le déplacement lumineux et il dépend de l'intensité du champ optique (via Ω^2) [Metcalf1999]. Pour des faibles intensités ou des grands désaccords ($|\Delta| \gg \Gamma$) :

$$\Delta E_g = \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \quad (1.13a)$$

$$\Delta E_e = -\frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \quad (1.13b)$$

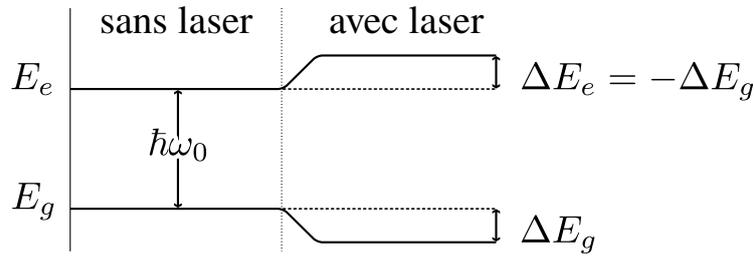


FIGURE 1.3 – Déplacement lumineux pour $\Delta < 0$. Les énergies E_g et E_e des états $|g\rangle$ et $|e\rangle$ de l'atome, respectivement, sont séparées par $\hbar\omega_0$ en l'absence des lasers. Quand l'atome est éclairé par un laser, ces niveaux d'énergie se déplacent et le « déplacement lumineux » vaut $\Delta E_g = \hbar\Omega^2/4\Delta$ (quand $|\Delta| \gg \Gamma$).

Si l'intensité du champ n'est pas homogène spatialement, cela introduit un déplacement lumineux qui dépend de la position $\Delta E_{g,e}(z)$. La force qui résulte de ce gradient d'énergie est la force dipolaire ou **FORCE RÉACTIVE** \mathbf{F}_{rea} , proportionnelle au gradient du déplacement lumineux. À une seule dimension, et en considérant l'équation (1.13a) :

$$\begin{aligned} F_{\text{rea}} &= -\frac{\partial(\Delta E_g)}{\partial z} \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2\Delta} \frac{\partial\Omega}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.14)$$

Le cas général à trois dimensions permet d'écrire [Perrin2011]⁹

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{rea}} &= -\hbar\Delta \left(\frac{s}{1+s} \right) \frac{\nabla\Omega}{\Omega} \\ &= -\frac{\hbar\Delta}{4} \frac{\nabla\Omega^2}{\Delta^2 + \frac{\Omega^2}{2} + \frac{\Gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (1.15)$$

8. La valeur de ces modifications peut se calculer en diagonalisant le hamiltonien de l'atome couplé au champ du laser. Les valeurs propres ainsi trouvées correspondent aux états propres du schéma connu comme l'atome habillé [Dalibard2013].

9. Cette expression est un autre résultat qui s'obtient par les Équations de Bloch Optiques, et par le calcul de la force optique moyenne [Perrin2011]. La force que l'on trouve ainsi présente deux termes, un premier qui correspond à un cas plus général de la force dissipative (éq. 1.10), et le deuxième qui est la force réactive (éq. 1.15).

La force réactive est aussi appelée force de redistribution, parce que quand plusieurs faisceaux interviennent dans la création du champ, la force peut se voir comme le résultat de la redistribution de photons d'un faisceau à l'autre. C'est à dire qu'elle découle de plusieurs processus d'absorption suivis d'émission stimulée dans lesquels l'atome absorbe un photon d'un faisceau et en émet un dans un autre. S'il n'y a pas de variation de l'intensité lumineuse ($\nabla\Omega = 0$), la force réactive est nulle, comme on peut le voir dans l'équation (1.15). Cette force est aussi nulle lorsque les lasers sont à résonance ($\Delta = 0$). Par ailleurs, la force réactive augmente avec la puissance des sources [Cohen-Tannoudji1992] (plus de photons dans le champ, plus de processus d'absorption suivie d'émission stimulée).

Pour mettre en évidence le fait que la force dipolaire est une force conservative, nous pouvons la réécrire sous la forme du gradient d'un potentiel :

$$\mathbf{F}_{\text{rea}} = -\nabla U_{op} \quad (1.16)$$

où nous pouvons définir le potentiel dipolaire ou POTENTIEL OPTIQUE U_{op}

$$\begin{aligned} U_{op} &= \frac{\hbar\Delta}{2} \ln \left(1 + \frac{\frac{\Omega^2}{2}}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right) \\ &= \frac{\hbar\Delta}{2} \ln(1 + s) \end{aligned} \quad (1.17)$$

Dans le cas de faible saturation ($s \ll 1$), $\ln(1 + s) \approx s$ et donc le potentiel optique devient

$$\begin{aligned} U_{op} &\approx \frac{\hbar\Delta}{2} s \\ &= \frac{\hbar\Delta}{4} \frac{\Omega^2}{\Delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Pour des grands désaccords ($|\Delta| \gg \Gamma$), cette expression se réduit à [Metcalf1999] :

$$U_{op} \approx \frac{\hbar\Omega^2}{4\Delta} \quad (1.19)$$

Cette valeur est évidemment la même que le déplacement lumineux (éq. 1.13a) donnant lieu à la force réactive.

La possibilité de créer des potentiels optiques à partir des modulations spatiales de l'intensité lumineuse constitue un autre moyen de contrôler les atomes à l'aide des faisceaux lasers. Le potentiel optique permet de piéger les atomes froids et de manipuler leurs degrés de liberté externes de façon précise. Il est ainsi à l'origine des réseaux optiques, le système physique fondamental de ce travail, que nous décrivons dans la section suivante.

En résumé, la force moyenne totale du rayonnement sur l'atome est la somme des deux contributions ci-dessus, la force dissipative et la force réactive. On peut comparer ces deux forces en remplaçant $\nabla\Omega^2$ par $\mathbf{k}_L\Omega^2$ dans l'équation (1.15) (ce qui correspond au cas d'une onde stationnaire). Dans une situation proche de la résonance ($|\Delta| \simeq \Gamma$), la

force de pression de radiation domine la force dipolaire, et l'interaction atome-lumière est essentiellement dissipative. En revanche, pour des grands désaccords ($|\Delta| \gg \Gamma, \Omega$), la force dissipative devient proportionnelle au rapport entre l'intensité et le carré du désaccord :

$$|\mathbf{F}_{\text{dis}}| \propto \frac{\Omega^2 \Gamma}{\Delta^2} \quad (1.20)$$

La force réactive, par contre, devient proportionnelle au rapport entre l'intensité et le désaccord :

$$|\mathbf{F}_{\text{rea}}| \propto \frac{\Omega^2}{\Delta} \quad (1.21)$$

Cela implique que loin de la résonance c'est la force réactive qui domine :

$$\left| \frac{\mathbf{F}_{\text{dis}}}{\mathbf{F}_{\text{rea}}} \right|_{|\Delta| \gg \Gamma, \Omega} \propto \frac{\Gamma}{\Delta} \quad (1.22)$$

L'interaction devient ainsi essentiellement conservative. Par conséquent, en employant un laser assez puissant et en augmentant le désaccord laser, il est possible de réduire la dissipation (en réduisant le taux d'émission spontanée) et de ne garder qu'un potentiel optique. Ce résultat est important dans le contexte de notre travail, qui s'intéresse aux potentiels optiques sans dissipation.

1.2 Réseaux optiques conservatifs

Une intensité lumineuse dépendant de la position produit une énergie potentielle qui dépend elle aussi de l'espace, formant le potentiel optique. Quand l'atome est soumis à ce potentiel, il cherche les endroits qui minimisent son énergie. La dépendance du potentiel avec le désaccord laser (voir expression 1.17) fait que les minima d'énergie sont dans des positions différentes selon le désaccord : le signe du potentiel optique, et en conséquence de la force réactive (éq. 1.16), change avec le désaccord. Par conséquent, les minima d'énergie se trouvent dans les régions de faible intensité lumineuse pour $\Delta > 0$, mais ils sont dans les régions les plus lumineuses quand $\Delta < 0$.

Le fait que l'atome cherche à rester dans les minima du potentiel optique montre la capacité de ce dernier à constituer un piège. Le piège peut être construit à l'aide de plusieurs faisceaux lasers, dont la superposition crée une figure d'interférence qui constitue le RÉSEAU OPTIQUE. Quand la modulation spatiale d'intensité est créée à partir d'une telle interférence, le potentiel optique résultant présente plusieurs puits de potentiel, séparés par une distance de l'ordre de la longueur d'onde du laser. Cela introduit donc la possibilité non seulement de piéger les atomes, mais aussi de les ordonner d'une façon contrôlée dans des sites précis. Expérimentalement, les puits de potentiel optiques qui peuvent être réalisés sont peu profonds, de sorte que le piégeage n'affecte que des atomes froids. Le réseau optique est ainsi constitué par un nuage d'atomes froids ordonné via l'interaction avec la figure d'interférence des lasers [Guidoni1999].

Selon le signe du désaccord laser, le réseau optique piègera les atomes dans les minima d'intensité ou dans les maxima. Le désaccord permet aussi d'ajuster le caractère conservatif du réseau, et donc il devient crucial si l'on souhaite supprimer les effets des émissions spontanées de l'atome interagissant avec la lumière. Nous avons vu qu'il est

possible de se mettre dans une situation où la force réactive domine la force dissipative ; il suffit de travailler loin de la résonance (voir éq. 1.22). Par conséquent, on peut négliger complètement les effets dissipatifs en prenant un grand désaccord laser, de manière à obtenir un RÉSEAU OPTIQUE CONSERVATIF. Le potentiel lumineux U de ces réseaux (d'après l'équation 1.19, et avec $\Omega^2 \propto I$, l'intensité du faisceau laser) s'écrit :

$$U \propto \frac{I}{\Delta} \quad (1.23)$$

Le désaccord laser est un des nombreux paramètres que l'on peut contrôler pour définir les caractéristiques du réseau. La géométrie des réseaux optiques est également facilement modifiable au niveau expérimental : un changement de l'intensité laser affecte la profondeur des puits, la disposition des faisceaux modifie la maille du réseau, entre autres [Metcalf1999].

C'est grâce à cette flexibilité que les réseaux optiques sont devenus des systèmes modèles pour d'autres domaines de la physique [Bloch2005]. En particulier, un gaz d'atomes froids placé dans un potentiel optique est très proche du gaz d'électrons dans les solides cristallins, où les électrons sont soumis au potentiel périodique des ions. Le système optique peut être donc vu comme un échantillon d'un cristal parfait. Cette analogie fait des réseaux optiques un bon système modèle pour la physique de la matière condensée. Ils ont déjà permis d'observer expérimentalement plusieurs phénomènes de ce domaine, comme les oscillations de Bloch et la structure de bandes [Dahan1996, Greiner2002, Paredes2004]. Par ailleurs, ils ont aussi fait possible d'observer le phénomène de la localisation d'Anderson [Billy2008, Lopez2012].

Parmi les thématiques qui sont liées étroitement aux réseaux optiques, se trouvent aussi les ordinateurs quantiques : les réseaux peuvent être considérés comme des simulateurs quantiques – faciles à contrôler – d'autres systèmes quantiques complexes [Jaksch2005]. D'autre part, récemment, les réseaux optiques ont aussi permis de construire un état de température négative pour les degrés de liberté du mouvement, c'est à dire un état où les niveaux de haute énergie sont plus occupés que ceux de faible énergie [Braun2013].

Même s'il est possible de construire un système qui refroidisse et piège les atomes en utilisant un potentiel optique, il est utile de séparer ce processus en deux étapes. Si nous prenons d'abord un nuage d'atomes déjà refroidis avec par exemple un piège magnéto-optique, nous pourrions ensuite distribuer ces atomes dans un réseau optique. Cette approche permet d'étudier séparément les réseaux et leur géométrie, en tant que structure optique construite par les lasers et indépendante des atomes qui peuvent y être piégés. C'est dans ce sens que l'on s'intéresse dans cette section aux réseaux optiques conservatifs.

L'exemple le plus simple d'une intensité lumineuse modulée périodiquement est une onde stationnaire, construite par deux faisceaux lasers contrepropageants. Un atome qui y est placé (si l'on se situe dans un régime classique) peut être piégé dans les nœuds ($\Delta > 0$) ou les ventres ($\Delta < 0$) de cette onde stationnaire. Elle constitue un réseau optique unidimensionnel, que nous étudions dans la suite. En ajoutant d'autres faisceaux lasers, il est possible d'obtenir des potentiels périodiques à deux et trois dimensions, dont nous décrirons quelques généralités. Nous introduirons aussi le réseau optique particulier qui est examiné en détail dans ce travail.

1.2.1 Réseaux optiques à 1D

Considérons deux faisceaux lasers de la forme de l'équation (1.1), qui ont la même intensité I_L ($I_L = |\varepsilon_L|^2$) et la même longueur d'onde λ_L ($\lambda_L = 2\pi/k_L$). S'ils se propagent dans des directions opposées, l'onde stationnaire résultante donne un champ

$$\varepsilon(z) = 2\varepsilon_L \cos k_L z \quad (1.24)$$

L'intensité de ce champ total a une période $\lambda_L/2$:

$$I(z) = 2I_L (1 + \cos 2k_L z) \quad (1.25)$$

Le potentiel périodique qui s'en déduit, par l'équation (1.23), est simplement [Depret2002] :

$$U(z) \propto \frac{I_L}{\Delta} (1 + \cos 2k_L z) \quad (1.26)$$

Il varie de façon sinusoïdale dans l'espace à une dimension, formant ainsi un RÉSEAU OPTIQUE À 1D (figure 1.4). Les puits de potentiel, séparés de $\lambda_L/2$, sont centrés sur les maxima ou les minima d'intensité selon le signe du désaccord Δ . Dans une approche classique, les atomes froids avec une énergie plus petite que les barrières de potentiel seront piégés dans ces puits. Les atomes piégés oscilleront autour du minimum de potentiel; ceux qui ont une énergie plus grande pourront voyager de site en site et sortir de la zone d'observation.

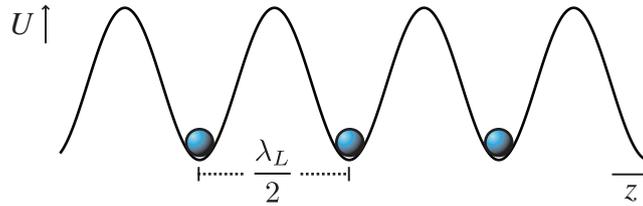


FIGURE 1.4 – Potentiel optique à 1D.

En allant au-delà du modèle de l'atome à deux niveaux, l'existence de sous-niveaux permet de concevoir un autre type de réseau optique à une dimension. Il est construit de façon identique à celui que l'on vient de décrire mais il emploie des faisceaux avec des polarisations différentes. Dans ce cas, ce sont les variations de polarisation qui génèrent le potentiel périodique du réseau. Ce potentiel conduit à un processus de refroidissement par effet Sisyphé [Grynberg2001], qui concerne les sous-niveaux atomiques, et que nous n'approfondissons pas dans cette thèse.

1.2.2 Réseaux optiques à plusieurs dimensions

Les réseaux optiques à 2D et 3D ouvrent un vaste terrain de possibilités en termes de configurations lasers et des potentiels qui en résultent. Nous ne développerons pas la cristallographie des réseaux possibles [Petsas1994], mais nous signalons quelques aspects pertinents pour le réseau à 2D que nous traitons dans ce travail.

Une généralisation à 2D (3D) du réseau à 1D que l'on vient de décrire permet d'imaginer un réseau généré par deux (trois) ondes stationnaires perpendiculaires entre elles. Il apparaît alors un nouveau paramètre, qui est la phase relative entre les deux

(trois) ondes stationnaires. Au niveau expérimental, cette phase est très sensible aux vibrations, ce qui induit des changements de la polarisation locale du champ, et de la nature des puits [Metcalf1999].

1.2.2.1 Réseaux optiques indépendants de la phase

Pour éviter les complications expérimentales dues à la sensibilité des phases, il peut être utile de concevoir des réseaux qui ne dépendent pas des phases relatives entre les ondes qui les forment. Analysons les conditions pour obtenir un réseau multidimensionnel dont l'intensité est indépendante des phases. Il convient de prendre la forme complexe pour les champs des lasers :

$$\varepsilon_j(\mathbf{r}) = \varepsilon_j \exp(i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} + \phi_j) \quad (1.27)$$

où j indique des faisceaux lasers qui forment le réseau¹⁰.

Considérons d'abord deux faisceaux de même intensité I_L ($\varepsilon_j^2 = I_L$ pour $j = 1, 2$) qui se propagent dans des directions différentes, avec les vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 . L'intensité du champ résultant est :

$$I(\mathbf{r}) = 2I_L [1 + \cos((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_2)] \quad (1.28)$$

Puisque $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \neq 0$ – on a deux faisceaux distincts – on peut toujours trouver un vecteur \mathbf{r}_0 qui permet de compenser, par une translation, toute variation de phase. Il doit juste vérifier $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{r}_0 = \phi_2 - \phi_1$. La distribution d'intensité obtenue après la translation est indépendante des phases. Les plans d'intensité constante de ce réseau, qui décrivent sa symétrie translationnelle, sont normaux à $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$, parallèles à la médiatrice de l'angle entre les deux faisceaux (figure 1.5a). On remarque que l'onde stationnaire à 1D considérée précédemment (d'intensité donnée par l'équation 1.25) correspond au cas simple $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_L$.

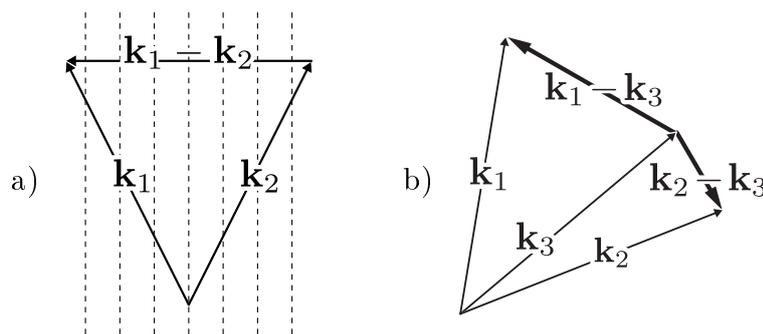


FIGURE 1.5 – Réseaux optiques à plusieurs dimensions. a) Les plans d'intensité constante (en trait discontinu) du réseau formé par les faisceaux avec les vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 sont perpendiculaires au vecteur $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2$. b) Les différences $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ sont les vecteurs de base du réseau réciproque pour le réseau formé par trois faisceaux avec les vecteurs d'onde \mathbf{k}_1 , \mathbf{k}_2 et \mathbf{k}_3 .

10. L'expression (1.1), dans sa forme générale $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \varepsilon_L \cos(\mathbf{k}_L \cdot \mathbf{r} - \omega_L t + \phi)$, s'interprète comme $\varepsilon(\mathbf{r}, t) = \Re(\varepsilon_j(\mathbf{r}) \exp(-i\omega_j t))$ avec $\phi_j = \phi$, $\varepsilon_j = \varepsilon_L$, $\omega_j = \omega_L$ et $\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_L$.

Si l'on ajoute un troisième faisceau de la forme de l'équation (1.27), de la même intensité I_L et avec un vecteur d'onde \mathbf{k}_3 , coplanaire mais non colinéaire avec les deux premiers (figure 1.5b), le champ résultant est :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}) = & \varepsilon_L \exp(i\mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r} + \phi_3) \\ & \times [1 + \exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_3) + \exp(i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} + \phi_2 - \phi_3)] \end{aligned} \quad (1.29)$$

La distribution d'intensité totale est donc :

$$I(\mathbf{r}) = I_L |1 + \exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} + \phi_1 - \phi_3) + \exp(i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r} + \phi_2 - \phi_3)|^2 \quad (1.30)$$

Comme \mathbf{k}_3 n'est pas colinéaire avec \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 , on peut toujours trouver un vecteur \mathbf{r}_0 qui vérifie $(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}_0 = \phi_3 - \phi_1$ et $(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}_0 = \phi_3 - \phi_2$. À nouveau, une translation \mathbf{r}_0 compense toute variation de phase. Nous analyserons la symétrie translationnelle d'un tel réseaux dans la section suivante.

En ajoutant un quatrième faisceau de vecteur d'onde \mathbf{k}_4 non coplanaire à la configuration 2D décrite précédemment (toujours de la même intensité I_L), on obtient un réseau tridimensionnel. Comme pour la configuration 2D discutée, on démontre qu'un changement de phase est une translation.

Un résultat qui se déduit des descriptions précédentes est qu'il suffit de $n+1$ faisceaux pour créer un réseau à n dimensions [Guidoni1999]. Évidemment, la géométrie du réseau obtenu avec les différents nombres de faisceaux n'est pas la même. On décrit ci-dessous un exemple de ce résultat, le réseau bidimensionnel formé par 3 faisceaux. Ensuite, on présente le réseau carré, aussi à 2D, mais créé par quatre faisceaux. L'intensité dépend alors de la phase relative des faisceaux, ce qui ajoute un paramètre que l'on sait faire varier de façon parfaitement contrôlée. Ce dernier réseau optique est analysé en détail dans cette thèse.

Réseau à 3 faisceaux

Le réseau à 3 faisceaux est un réseau dont la configuration générale comprend trois faisceaux lasers dans des directions différentes, placés dans le même plan. En considérant des faisceaux avec une polarisation linéaire dans la direction perpendiculaire à ce plan, on s'assure que le champ total aura partout la même polarisation, ce qui en permet une description scalaire. Comme on l'a vu, cette configuration est indépendante de la phase, et donc on peut écrire l'intensité totale de ce réseau à partir de l'équation (1.30), après la translation adéquate. Si les 3 faisceaux ont des intensités ε_i différentes, et en introduisant les rapports $\beta_1 = \varepsilon_1/\varepsilon_3$, $\beta_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_3$, cette intensité est :

$$I(\mathbf{r}) = |1 + \beta_1 \exp(i(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r}) + \beta_2 \exp(i(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{r})|^2 \quad (1.31)$$

où nous avons pris $\varepsilon_3 = 1$.

Pour décrire un réseau formé par ces faisceaux, nous cherchons ses propriétés de symétrie translationnelle. En employant la terminologie de « réseau direct » et « réseau réciproque » de la physique des solides, nous voulons déterminer les vecteurs de base du réseau direct [Petsas1994]. Rappelons ces concepts : dans la description d'une structure cristalline, le réseau direct, qui représente la périodicité de la structure, est créé par

la répétition infinie d'une cellule élémentaire (la cellule est formée par les vecteurs de base du réseau). Cette périodicité implique que le réseau direct peut se décrire par d'ondes planes qui satisfont $\exp(i\mathbf{K}\cdot(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})) = \exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{x})$. Le réseau réciproque est l'ensemble des vecteurs \mathbf{K} tels que $\exp(i\mathbf{K}\cdot\Delta\mathbf{x}) = 1$, c'est à dire qu'il se trouve dans l'espace de Fourier associé aux ondes planes du réseau direct. Les vecteurs de base du réseau réciproque se calculent à partir des vecteurs de base du réseau direct [Kittel2005].

En revenant sur notre réseau optique (éq. 1.31), considérons un vecteur \mathbf{R} du réseau direct (que nous ne connaissons pas encore). Par définition, une translation selon \mathbf{R} laisse le potentiel, et donc aussi l'intensité, inchangés. Pour tout \mathbf{r} , \mathbf{R} doit satisfaire :

$$I(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = I(\mathbf{r}) \quad (1.32)$$

Prenant en compte l'équation (1.31), ce vecteur doit satisfaire donc aussi¹¹ :

$$(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{R} = 0 [2\pi] \quad (1.33a)$$

$$(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \cdot \mathbf{R} = 0 [2\pi] \quad (1.33b)$$

Ces relations sont vérifiées pour tout vecteur \mathbf{R} du réseau direct. En conséquence, les différences $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3$ et $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3$ sont les vecteurs de base du réseau réciproque (figure 1.5b). Par ailleurs, on sait comment obtenir les vecteurs de base du réseau direct à partir des vecteurs de base de son réseau réciproque ; on détermine ainsi la symétrie translationnelle du réseau optique.

1.2.2.2 Réseau carré à 2D

Le réseau optique considéré dans la majeure partie de cette thèse est le RÉSEAU CARRÉ À DEUX DIMENSIONS. Il est obtenu par l'interférence de deux ondes stationnaires orthogonales, qui ont les mêmes caractéristiques (intensité, polarisation et fréquence). Au niveau expérimental, ce type de réseau est l'un des plus simples à réaliser : chaque onde stationnaire est formée par une paire de faisceaux lasers identiques, contre-propageants (ce qui s'obtient facilement avec des miroirs). Ces deux paires de faisceaux sont placées dans des directions perpendiculaires.

On peut voir un schéma simple des faisceaux lasers dans cette configuration en figure 1.6. Les paires de faisceaux se trouvent dans les directions x et y ; les lasers sont polarisés de façon linéaire dans la direction perpendiculaire au plan de propagation des ondes, de sorte que la polarisation n'intervient pas dans l'espace à 2D considéré.

Les champs des quatre faisceaux lasers ont la forme d'ondes planes comme l'équation (1.27), avec $\varepsilon_j = \varepsilon_L$, $\omega_j = \omega_L$. Les vecteurs d'onde sont $\mathbf{k}_{1,2} = \pm k_L \hat{\mathbf{y}}$ et $\mathbf{k}_{3,4} = \pm k_L \hat{\mathbf{x}}$. De cette façon, dans chaque direction de l'espace on trouve la superposition de deux ondes planes, ce qui donne lieu à deux ondes stationnaires orthogonales. Ces ondes stationnaires sont comme l'équation (1.24), selon x et selon y , et donc le champ total obtenu est :

$$\varepsilon(x, y) = 2\varepsilon_L [\cos(k_L x) + e^{i\phi} \cos(k_L y)] \quad (1.34)$$

où ϕ est la différence de phase entre les ondes stationnaires dans les directions x et y . L'intensité I de ce champ peut donc être écrite comme :

11. La notation $[2\pi]$ indique toutes les valeurs $m = n2\pi$ avec n entier ou 0, c'est à dire les valeurs pour lesquelles $m \bmod 2\pi = 0$. Il nous suffit ici de considérer $m = 0$.

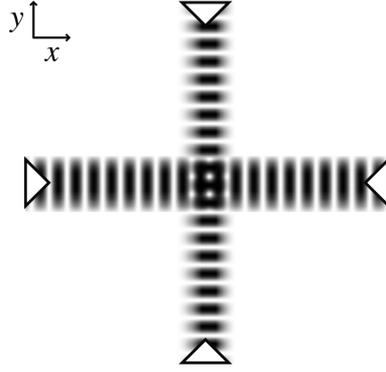


FIGURE 1.6 – Configuration des faisceaux lasers pour un réseau carré à 2D. Les quatre lasers sont identiques en intensité, polarisation et fréquence. Dans chaque direction de l'espace se forme une onde stationnaire : $\varepsilon(x) = 2\varepsilon_L \cos k_L x$ et $\varepsilon(y) = 2\varepsilon_L \cos k_L y$.

$$I(x, y) = 4I_L [\cos^2(k_L x) + \cos^2(k_L y) + 2 \cos \phi \cos(k_L x) \cos(k_L y)] \quad (1.35)$$

Comme se déduit de la section précédente, dans un réseau optique formé par 4 faisceaux, les différences $\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4$, $\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4$ et $\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_4$ sont les vecteurs $\mathbf{K}_{1,2,3}$ qui génèrent le réseau réciproque. Comme les vecteurs d'onde du réseau carré sont coplanaires et ont une relation simple entre eux, les vecteurs de base de son réseau réciproque qui nous intéressent sont :

$$\mathbf{K}_1 = k_L (\hat{y} - \hat{x}) \quad (1.36a)$$

$$\mathbf{K}_2 = k_L (\hat{y} + \hat{x}) \quad (1.36b)$$

Le troisième vecteur est $\mathbf{K}_3 = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$ et donc il n'apporte pas plus d'information. \mathbf{K}_1 et \mathbf{K}_2 sont des vecteurs perpendiculaires et de la même longueur (figure 1.7). En conséquence, les vecteurs de base du réseau direct sont eux aussi perpendiculaires et de la même longueur, formant une maille carrée. Cette maille est tournée d'un angle de $\pi/4$ par rapport aux axes x, y . Le réseau carré, et la dynamique des atomes qui y sont placés, sera étudié en détail à partir du chapitre 3.

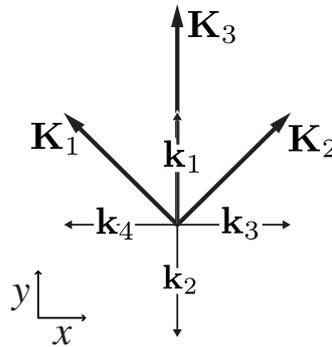


FIGURE 1.7 – Vecteurs $\mathbf{k}_{1,2} = \pm k_L \hat{y}$ et $\mathbf{k}_{3,4} = \pm k_L \hat{x}$ formant le réseau carré. Les vecteurs $\mathbf{K}_{1,2,3}$ génèrent le réseau réciproque. \mathbf{K}_1 et \mathbf{K}_2 sont donnés par l'équation (1.36).

Il faut remarquer que c'est grâce à la relation simple qui existe entre les vecteurs \mathbf{k}_i du réseau carré (deux paires perpendiculaires de vecteurs parallèles entre eux) et au

fait que ces vecteurs ont la même longueur, que nous obtenons un réseau périodique. Dans le cas général, si l'on ajoute un quatrième faisceau coplanaire à la configuration 2D donnée par l'équation (1.31), la distribution d'intensité ne sera plus nécessairement périodique. La perte de la symétrie translationnelle ouvre la voie aux « quasi-cristaux optiques » [Guidoni1997]. Ces structures quasi-périodiques ont été aussi observées dans les solides.

1.2.3 Limite classique-quantique

Jusqu'ici, nous avons traité classiquement les degrés de liberté externes des atomes. Cependant, quand on refroidit les atomes, on augmente la longueur d'onde de de Broglie λ_{dB} de leur paquet d'onde jusqu'à des valeurs de l'ordre des distances caractéristiques du réseau optique. Dans l'onde stationnaire du réseau à 1D, cette distance est égale à la taille d'un puits, $\lambda_L/2$. En pratique, les atomes peuvent être refroidis jusqu'à avoir une $\lambda_{dB} \sim \lambda_L$ [Metcalf1999]. Quand l'extension spatiale du paquet d'onde de l'atome est comparable aux distances caractéristiques de variation du potentiel, on est dans un régime quantique. Dans ce cas, par exemple, le mouvement des atomes dans un potentiel sinusoïdal à 1D se décrit en termes d'ondes de Bloch [Bloch2005].

En même temps, la nature classique ou quantique des atomes dans le réseau dépend du rapport entre l'énergie des atomes et la profondeur des puits de potentiel. Par conséquent, cette nature peut se modifier en changeant l'intensité du champ. Si l'on construit un réseau avec des puits suffisamment profonds par rapport au niveau d'énergie excité des atomes, on peut considérer que l'effet tunnel est négligeable [Greiner2001]. C'est à dire que, pour des barrières de potentiel suffisamment hautes, on peut négliger les effets quantiques. Dans cette limite, l'énergie de l'atome n'est plus considérée comme discrète. Nous supposons donc qu'il suffit que la valeur de cette énergie soit plus petite que les barrières de potentiel pour que l'atome soit piégé dans un puits. En conséquence, les atomes visitent les autres sites seulement en passant au dessus d'un seuil d'énergie, seuil qu'ils peuvent atteindre de façon continue.

Chapitre 2

Systemes dynamiques non linéaires : chaos et synchronisation

La dynamique classique des atomes dans les réseaux optiques conservatifs que nous étudions présente la diversité des systèmes dynamiques non linéaires conservatifs, allant d'un comportement régulier à l'apparition du chaos. Pour traiter les propriétés de ces systèmes, dans ce chapitre nous rappelons quelques généralités sur l'étude de la dynamique, en section 1. Ensuite, dans la section 2, nous considérons les systèmes conservatifs en particulier. Nous y analysons aussi les conditions d'existence d'un régime chaotique dans les systèmes non dissipatifs.

La dynamique des atomes dans un réseau optique conservatif est susceptible de présenter aussi des mécanismes similaires à un phénomène que l'on trouve dans les systèmes dissipatifs : le verrouillage de fréquence et/ou de phase. Nous présenterons dans la section 3 les différentes formes de synchronisation que l'on rencontre dans les systèmes dissipatifs, et comment ils affectent la nature chaotique du régime dynamique.

Chapitre 2

Systèmes dynamiques non linéaires : chaos et synchronisation

2.1 Systèmes dynamiques

2.1.1 Généralités

Le comportement d'un système physique à N degrés de liberté peut se décrire dans son espace des phases N -dimensionnel, où l'évolution de l'état du système est représentée par celle d'un vecteur \mathbf{X} ¹. Les N coordonnées de \mathbf{X} dans l'espace des phases sont les degrés de liberté.

L'évolution de \mathbf{X} va donc être donnée par un ensemble de N équations différentielles

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (2.1)$$

et leurs conditions initiales. \mathbf{X} décrit ainsi différentes trajectoires dans l'espace des phases (déterminées chacune par les conditions initiales) qui représentent des solutions aux équations du mouvement. Quand ces équations ne sont pas des fonctions linéaires de \mathbf{X} , le système dynamique est non linéaire.

Les conditions d'équilibre du système sont obtenues en identifiant les points fixes \mathbf{X}_0 dans l'espace des phases, pour lesquels se vérifie la relation [Croquette2000] :

$$\frac{d\mathbf{X}_0}{dt} = 0 \quad (2.2)$$

Les points fixes peuvent être considérés comme des orbites dégénérées formées d'un simple point, et le comportement du système dans leur voisinage dans l'espace des phases caractérise la stabilité de l'orbite [Verhulst1991]. La stabilité du point fixe \mathbf{X}_0 peut s'étudier en linéarisant les équations du mouvement (ce qui équivaut à approcher \mathbf{F} par une fonction linéaire \mathbf{L}_0) autour de \mathbf{X}_0 :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{L}_0(\mathbf{X}) \quad (2.3)$$

Les valeurs et les vecteurs propres de \mathbf{L}_0 déterminent le comportement du système dans le voisinage de \mathbf{X}_0 , permettant ainsi de définir la nature de la solution représentée par le point fixe.

1. Le terme degrés de liberté est parfois employé pour décrire la paire d'une coordonnée généralisée et son moment conjugué, associée à une dimension de l'espace réel. Nous l'utilisons ici dans le sens vraiment dynamique qui associe les degrés de liberté aux dimensions de l'espace des phases du système.

Systèmes dissipatifs

- Si les valeurs propres de \mathbf{L}_0 sont réelles et de même signe, le point fixe est un nœud. Quand les valeurs propres sont toutes négatives, il s'agit d'un nœud stable et les solutions voisines tendent vers le point fixe, qui est donc un « attracteur ». Si les valeurs propres sont toutes positives, le nœud est instable et les trajectoires voisines s'éloignent du point.
- Lorsque les valeurs propres sont réelles mais pas toutes de même signe, on qualifie le point fixe de point col ou de point selle. Le comportement des solutions au voisinage du point fixe est hyperbolique. Ici, le point est instable parce qu'il existe au moins une valeur propre positive, c'est à dire une direction de l'espace des phases suivant laquelle une trajectoire voisine s'éloigne du point fixe.
- Si les valeurs propres sont complexes, le point fixe est appelé foyer. Quand la partie réelle des valeurs propres est négative, le point fixe est aussi un attracteur pour les solutions voisines. Dans le cas particulier où la partie réelle est nulle, le point fixe est un centre, et les trajectoires voisines oscillent autour du point.

Systèmes non dissipatifs

L'absence de dissipation fait qu'il n'existe pas d'attracteurs dans un système non dissipatif et donc des points fixes tels que les nœuds ne peuvent pas exister dans son espace des phases². Les deux types de points fixes que l'on peut trouver dans l'espace des phases d'un système non dissipatif sont :

- Les points selles, aussi appelés hyperboliques [Reichl2004]. Les points fixes hyperboliques sont des points instables (figure 2.1), pour lesquels les valeurs propres de la fonction linéaire \mathbf{L}_0 sont réelles, et certaines sont positives.
- Les centres, appelés points elliptiques [Reichl2004]. Les points fixes elliptiques sont des points stables autour desquels oscillent les solutions voisines (figure 2.1). Les valeurs propres de \mathbf{L}_0 qui correspondent à ce type de points sont imaginaires pures.

Un point fixe elliptique gouverne le comportement des trajectoires voisines dans l'espace des phases. Cette influence ne se restreint pas aux voisinage immédiat : le point fixe influence les solutions de toute une région autour de lui, qui s'étend jusqu'à la région gouvernée par un autre point fixe. La trajectoire qui se situe sur la frontière entre ces deux régions relie des points hyperboliques. C'est une « séparatrice », car elle sépare les différents régimes dynamiques représentés par les points fixes.

Dans la figure 2.1, on montre comme exemple l'espace des phases d'un système conservatif à deux degrés de liberté, où l'on peut observer les deux types de points fixes des systèmes non dissipatifs et une séparatrice.

De la même façon qu'un point fixe gouverne la région de l'espace des phases autour de lui, une orbite périodique influence aussi ses trajectoires voisines. Par exemple, considérons un système dissipatif à 2 degrés de liberté, x et \dot{x} , l'oscillateur de Van der Pol. Il s'agit d'un système avec un amortissement non linéaire, décrit par $\ddot{x} + (2\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$. L'espace des phases de ce système, affiché en figure 2.2, présente des solutions organisées autour d'une orbite, appelée « cycle limite » [Croquette2000], qui est un attracteur. La présence d'un cycle limite correspond à l'existence d'une solution périodique (dans le

2. Cela est une conséquence de la conservation du volume du flot dans l'espace des phases des systèmes non dissipatifs, comme le montre le théorème de Liouville [Verhulst1991].

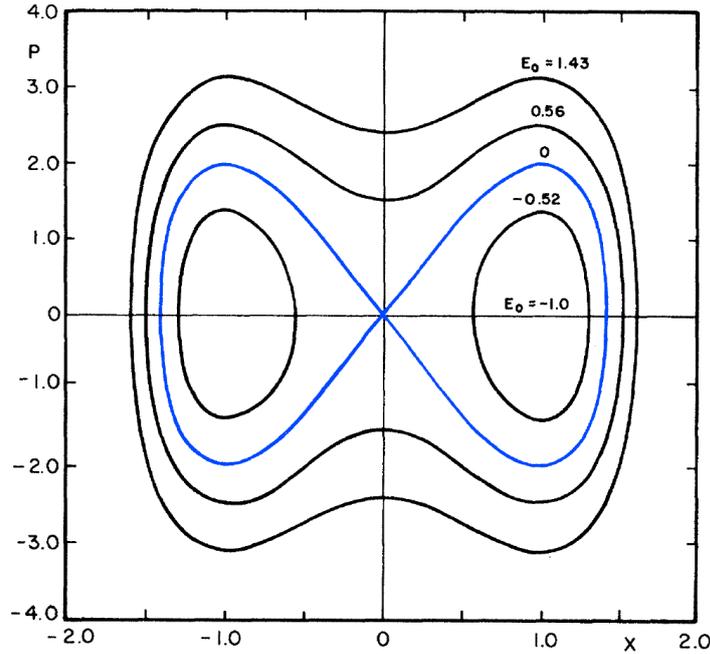


FIGURE 2.1 – Espace des phases d’un système conservatif à deux degrés de liberté x et p , qui satisfait $p^2/4 - 2x^2 + x^4 = E_0$. E_0 est l’énergie du système. L’espace des phases présente un point fixe hyperbolique à $x = p = 0$, et deux points fixes elliptiques à $x = \pm 1, p = 0$. La trajectoire séparatrice est remarquée en bleu. Figure prise de [Reichl1984].

cas de notre exemple, cette solution est une oscillation pour laquelle l’amortissement est nul).

2.1.2 La section de Poincaré

La représentation et l’étude de l’espace des phases des systèmes dynamiques à plus de trois degrés de liberté n’est pas évidente. Pour décrire les trajectoires dans l’espace des phases, il est alors souvent utile de réduire le nombre de degrés de liberté, et en conséquence la dimension de l’espace étudié. On peut réduire d’une unité la dimension en utilisant une coupe ou SECTION DE POINCARÉ : si dans l’espace des phases nous considérons une surface fixe, par exemple un plan, chaque trajectoire la croisera plusieurs fois, en un point unique (figure 2.3a). La section de Poincaré est définie comme l’ensemble des points d’intersection de la trajectoire avec la surface choisie, en ne retenant que les points correspondant à un sens de passage donné [Croquette2000].

Même si la carte des sections de Poincaré contient moins d’informations que l’espace des phases complet, elle conserve les propriétés topologiques de ce dernier. De cette façon, on peut analyser le caractère régulier des trajectoires, la nature des points fixes et, plus généralement, toutes les caractéristiques de l’espace des phases, sur les sections de Poincaré.

Prenons par exemple un système conservatif à quatre degrés de liberté (x_1, x_2, x_3, x_4) . Du fait de la conservation de l’énergie, la région de l’espace des phases où se trouvent les trajectoires – l’espace des phases « accessible » – est une hyper-surface à trois dimen-

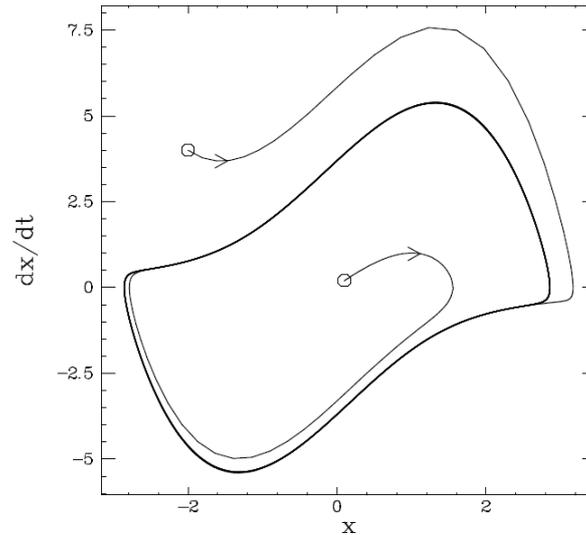


FIGURE 2.2 – Espace des phases de l’oscillateur de Van der Pol. Il s’agit d’un système dissipatif à deux degrés de liberté x et $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ qui satisfait $\ddot{x} + (2\epsilon - x^2)\dot{x} + x = 0$. L’espace des phases s’organise autour d’un cycle limite. Figure prise de [Croquette2000].

sions. Cette hyper-surface peut être mieux décrite par les nouvelles variables q_1, q_2, q_3 ³. Ensuite, choisissons la surface à q_3 constant pour obtenir les sections de Poincaré du système. Les sections de Poincaré ainsi obtenues ramènent les trajectoires quasi-périodiques à une série de points sur une courbe à une dimension, dans le plan q_1q_2 (figure 2.3b). En revanche, une trajectoire erratique montre un ensemble de points dispersés (figure 2.3c).

Il est facile de voir qu’une courbe à une dimension dans l’espace des phases, comme une orbite périodique, coupe une surface fixe en un seul et même point. Par conséquent, la section de Poincaré de cette orbite est vue comme un point. D’autre part, nous avons vu que des orbites comme les cycles limites gouvernent l’espace des phases de la même façon qui le font les points fixes. En particulier, dans une carte de sections de Poincaré, nous pouvons analyser le comportement au voisinage de cette orbite comme on le fait avec les points fixes. En conséquence, et dû au fait que la définition de point fixe donnée par l’équation (2.2) impose une forte restriction sur le mouvement, nous emploierons dans ce travail le terme « point fixe » pour parler aussi d’orbites périodiques, qui apparaissent comme points dans une carte de sections de Poincaré.

2.2 Intégrabilité et chaos dans les systèmes non dissipatifs

Cette section traite des systèmes dynamiques non dissipatifs, aussi appelés systèmes hamiltoniens. Le hamiltonien du système est $H = H(\mathbf{X}, t)$. L’absence de dissipation dans ces systèmes ne veut pas nécessairement dire que l’énergie est constante, car le hamiltonien dépend, en général, du temps. Cependant, nous mettrons l’accent sur les

3. De la même façon que la position d’un point sur la surface d’une sphère se décrit plus simplement par deux coordonnées angulaires θ, φ au lieu des coordonnées cartésiennes tridimensionnelles x, y, z .

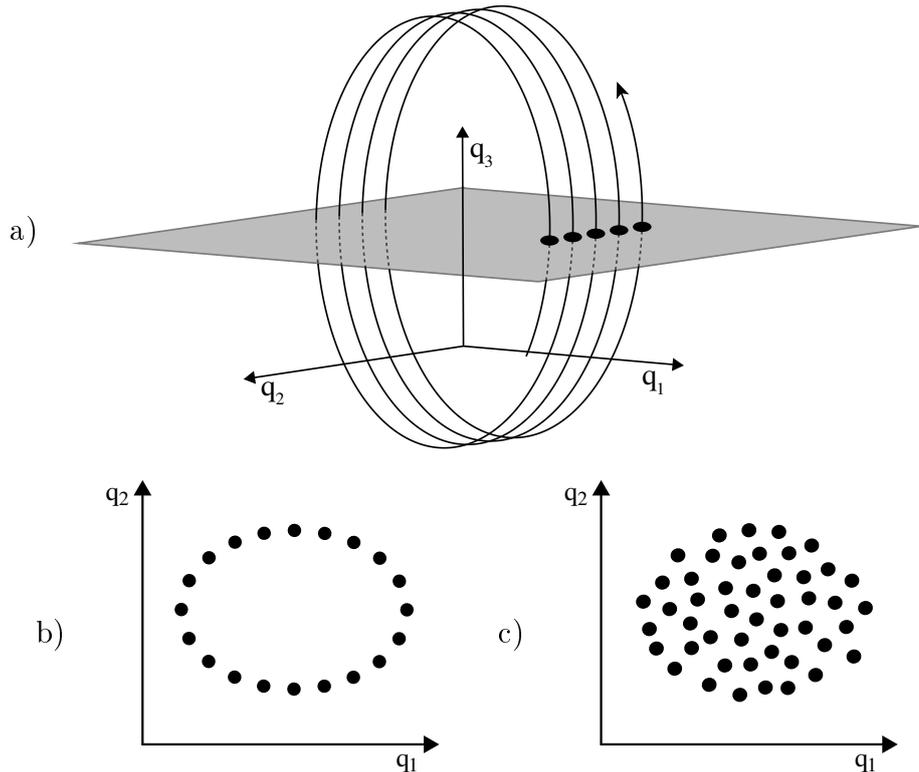


FIGURE 2.3 – a) Construction d’une section de Poincaré ; b) section de Poincaré d’une trajectoire quasi-périodique ; c) section de Poincaré d’une trajectoire erratique.

systèmes conservatifs, qui nous intéressent dans cette thèse, pour lesquels $H = H(\mathbf{X})$ ne dépend pas du temps.

2.2.1 Intégrabilité et résonances non linéaires

Nous considérons ici les systèmes mécaniques conservatifs. Ces systèmes ont un nombre de degrés de liberté N pair, de sorte que $N/2$ est un nombre entier, égal à la dimension de l’espace réel du problème. Les systèmes conservatifs peuvent être intégrables ou non intégrables : un système est intégrable s’il a un nombre d’invariants (aussi appelés symétries globales) égal à la moitié du nombre des degrés de liberté [Croquette2000]. Pour un système intégrable avec N degrés de liberté, les trajectoires dans l’espace des phases tombent sur une surface de dimension $N/2$. Cette surface est l’intersection des $N/2$ surfaces définies par chacun des invariants (l’énergie du système étant toujours un de ces invariants, car le système est conservatif). Les trajectoires sont périodiques ou quasi-périodiques et elles sont toutes stables [Reichl2004].

Considérons un système avec quatre degrés de liberté. Si q_1, q_2, p_1, p_2 sont les coordonnées du système – et $H_0(q_1, q_2, p_1, p_2)$ son hamiltonien – et s’il est intégrable, il existe une transformation canonique⁴

$$p_i, q_i \rightarrow \theta_i, J_i$$

4. C’est à dire, une transformation qui conserve le caractère hamiltonien du système [Verhulst1991].

($i = 1, 2$; et θ_i, J_i sont les nouvelles coordonnées) pour laquelle

$$\dot{J}_i = 0 \quad (2.4a)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i(J_1, J_2) \quad (2.4b)$$

Le hamiltonien constant du système s'écrit maintenant $H_0(J_1, J_2)$. Le mouvement du système peut s'imaginer sur un tore dont les rayons constants sont proportionnels aux $J_i = c_i$ et les angles sont les $\theta_i = \omega_i t + d_i$, où c_i et d_i sont des constantes déterminées par les conditions initiales [Reichl2004] (figure 2.4). Si les fréquences du système⁵ $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ et $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ sont commensurables ($a\omega_1 = b\omega_2$, avec a, b entiers), la trajectoire est périodique. Si ω_1 et ω_2 sont incommensurables, la trajectoire est quasi-périodique et elle parcourt tout le tore. Ces deux situations sont les seules que l'on trouve dans un système intégrable à quatre degrés de liberté⁶ (figure 2.4).

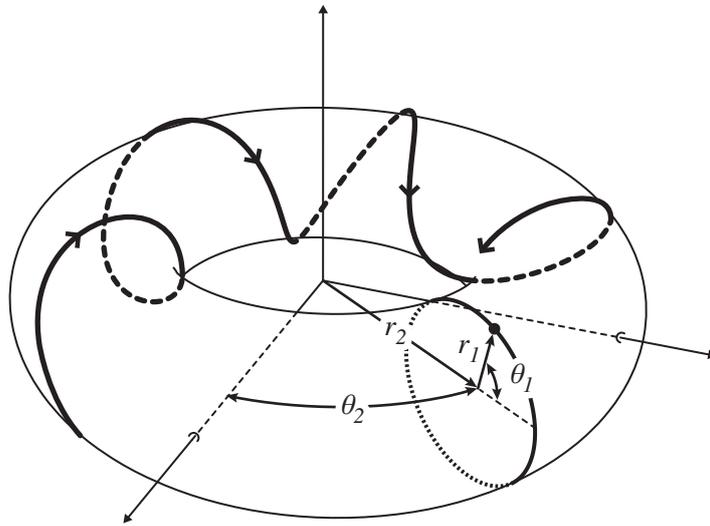


FIGURE 2.4 – Les solutions d'un système intégrable à quatre degrés de liberté sont des trajectoires périodiques et quasi-périodiques qui s'enroulent sur un tore construit par les variables $\theta_1, \theta_2, J_1, J_2$. Le rayon r_1 (r_2) du tore est proportionnel à J_1 (J_2).

Cependant, la plupart des systèmes mécaniques sont non intégrables, et ils sont susceptibles de présenter un mélange d'orbites stables et instables, de trajectoires quasi-périodiques et aussi de trajectoires chaotiques. Pour comprendre la disparition des trajectoires périodiques ou quasi-périodiques, considérons maintenant un système non intégrable qui puisse s'écrire comme le système intégrable que l'on vient de traiter perturbé par $\epsilon V(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2)$, ($\epsilon \ll 1$). Son hamiltonien devient :

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon V(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) \quad (2.5)$$

Pour des petites perturbations, ses solutions devraient être similaires à celles du système non perturbé (dans ce cas, les trajectoires sont stables et restent dans la même région de l'espace des phases que celles de H_0), et le problème peut se traiter avec la théorie

5. Le fait que les fréquences dépendent de J_i (éq. 2.4b), et donc de l'énergie du système, est une caractéristique des systèmes non linéaires.

6. Dans un système avec plus degrés de liberté, par exemple 6, on pourrait trouver d'autres situations, avec une paire de fréquences commensurables et une troisième fréquence incommensurable.

des perturbations. Pourtant, une expansion par la méthode conventionnelle des perturbations diverge s'il existe une « résonance non linéaire », à savoir une augmentation du transfert d'énergie entre les degrés de liberté, couplés de façon non linéaire. Faisons un développement en série de Fourier du terme ϵV en l'équation (2.5). On obtient :

$$H = H_0(J_1, J_2) + \epsilon \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} V_{n_1, n_2}(J_1, J_2) \cos(n_1\theta_1 + n_2\theta_2) \quad (2.6)$$

On peut démontrer que, pour que les solutions de H ne divergent pas, le système doit satisfaire la condition [Reichl2004] :

$$\epsilon V_{n_1, n_2} \ll |n_1\omega_1 + n_2\omega_2| \quad (2.7)$$

Quand une résonance non linéaire (n_1, n_2) a lieu – elle peut apparaître ou disparaître en fonction des paramètres du système – cette condition n'est pas satisfaite et les solutions divergent. Cela équivaut à dire que les solutions du hamiltonien non intégrable ne se comportent pas de façon similaire à celles de H_0 , à cause du transfert d'énergie qui crée la perturbation. A. Kolmogorov, V. Arnol'd et J. Moser ont montré que quand on ajoute au hamiltonien un terme qui fait disparaître la symétrie, le système continue à se comporter comme si les symétries existaient encore sur la plus grande partie de l'espace des phases [Reichl2004]. Néanmoins, dans les régions où ce terme permet la résonance, la dynamique change de nature : les résonances non linéaires modifient la structure topologique de la région, en la rendant plus complexe. La théorie KAM (d'après Kolmogorov, Arnol'd et Moser) emploie une méthode des perturbations qui converge même en présence de résonances, et permet de décrire les tores non résonants.

Le système décrit par l'équation (2.6) a deux invariants⁷ et donc, s'il existait une seule résonance non linéaire (n_1, n_2) , le système serait intégrable. Le système doit présenter deux résonances ou plus pour être non intégrable, parce qu'il n'est pas possible de trouver un autre invariant. Par conséquent, seulement les systèmes avec au moins deux résonances non linéaires peuvent devenir chaotiques, ce qui peut se produire lorsque l'on change les paramètres du système non intégrable. En particulier, les résonances non linéaires se chevauchent dans certaines régions de l'espace des phases et y détruisent les trajectoires quasi-périodiques, créant le chaos [Reichl2004]. Les tores non résonants qui n'ont pas été détruits par des résonances sont les tores ou surfaces KAM⁸.

2.2.2 Chaos dans les systèmes non dissipatifs

Pour qu'un système dynamique présente un comportement chaotique, il doit être non linéaire mais il doit aussi avoir au moins trois degrés de liberté indépendants. Pourtant, si le système est conservatif, l'existence de l'énergie comme invariant réduit d'une unité le nombre de degrés de liberté indépendants par rapport au nombre de degrés de liberté total. Donc, il faut que le système conservatif ait au moins quatre degrés de liberté pour pouvoir être chaotique. Dans l'espace réel, le système conservatif le plus simple où le chaos peut apparaître est un système à 2D [Seligman1985], dont l'espace des phases a 4 dimensions. Les systèmes conservatifs à 1D dans l'espace réel auront toujours un

7. À savoir, l'énergie $E = H$ et une quantité $I = n_2J_1 + n_1J_2$ [Reichl2004].

8. J. Greene a clarifié le mécanisme par lequel les résonances détruisent les tores KAM dans les systèmes classiques [Greene1979].

comportement régulier : le mouvement des systèmes avec deux degrés de liberté est intégrable et donc régulier. Toutefois, la plupart de la recherche sur l'apparition du chaos dans les systèmes non dissipatifs a été faite sur des systèmes avec deux degrés de liberté, avec un forçage externe périodique. L'introduction du forçage fait que le hamiltonien dépend du temps, et cela équivaut à ajouter un degré de liberté au système. Un exemple de ces systèmes est l'oscillateur de Duffing, décrit ci-après (voir encadré).

Aux débuts des études sur le chaos, ce sont surtout les systèmes dissipatifs qui ont été étudiés. On attribue souvent la découverte du chaos à Edward Lorenz [Lorenz1963], un météorologue qui montra l'existence des « attracteurs étranges » (comme tout attracteur de l'espace des phases, les attracteurs étranges n'existent pas en absence de dissipation). L'intérêt dans les systèmes conservatifs a été suscité, entre autres, par le système de Hénon-Heiles [Hénon1964], dont la dynamique va d'un comportement régulier à un mouvement complètement chaotique (figure 2.5). Les analyses postérieures sur ce système ont montré la riche variété de comportements dynamiques que sont capables d'avoir les systèmes conservatifs non intégrables.

2.2.2.1 Définition du chaos

Comme on l'a vu, il apparaît des régions chaotiques quand les invariants ou symétries globales disparaissent localement à cause des résonances non linéaires. De plus, ces résonances doivent se chevaucher pour que le chaos existe. Dans un système où les invariants peuvent disparaître si l'on ajoute un terme de perturbation, le chaos apparaît – dans l'espace des phases – d'abord dans le voisinage des résonances non linéaires. Quand la perturbation croît, la taille des régions avec résonance augmente et aussi le chaos. De cette façon, les résonances non linéaires créent un changement topologique local dans l'espace des phases. Qu'est-ce qui caractérise ce nouveau comportement chaotique ?

Sensibilité aux conditions initiales La dynamique d'un système chaotique est déterminée univoquement par ses équations du mouvement, mais elle présente une caractéristique essentielle : la sensibilité aux conditions initiales. Cela veut dire que si l'on suit l'évolution de deux points initialement proches dans l'espace des phases, les trajectoires associées à cette évolution finissent par diverger.

En pratique, le chaos est défini en termes de comportement dynamique de deux trajectoires qui se trouvent initialement proches dans l'espace des phases⁹. Si les trajectoires s'éloignent exponentiellement selon au moins une direction de l'espace, le flot est chaotique. Le taux de divergence exponentiel des paires de trajectoires est mesuré par les exposants de Lyapunov, développés dans le paragraphe suivant. Les régions de l'espace des phases pour lesquelles les trajectoires ont des exposants de Lyapunov positifs exhibent une sensibilité aux conditions initiales, ce qui est la définition du chaos : un petit changement dans les conditions initiales peut mener à des états finals très différents.

Il est normalement impossible de déterminer si un système est chaotique ou non seulement à partir du traitement analytique de ses équations du mouvement. Le calcul des sections de Poincaré est un outil numérique très utilisé dans ce but [Reichl2004].

9. De façon plus rigoureuse, on dit que le flot dans une région de l'espace des phases est chaotique s'il a une entropie métrique KS positive. L'entropie KS (d'après A. Kolmogorov et Y. Sinai) est une mesure du degré d'instabilité hyperbolique dans le mouvement relatif des trajectoires dans l'espace des phases [Reichl2004].

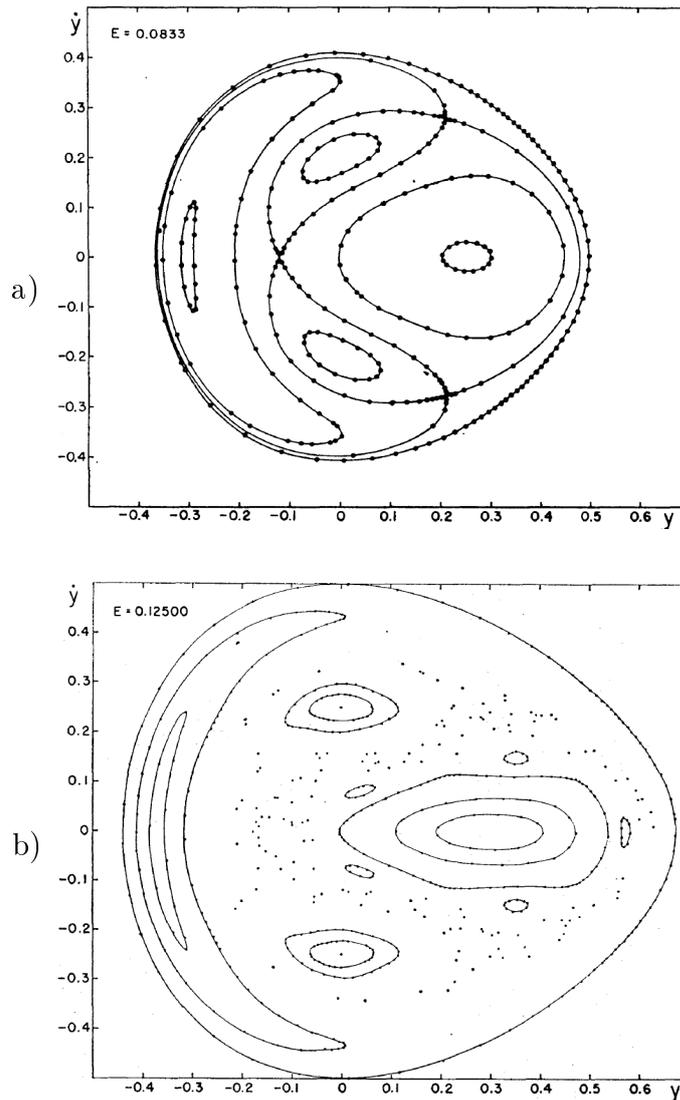


FIGURE 2.5 – Sections de Poincaré du système de Hénon-Heiles : a) à faibles énergies, le système présente solutions régulières ; b) à des énergies plus grandes, les sections de Poincaré montrent l'apparition du chaos. Figure prise de [Hénon1964].

Il permet de voir graphiquement l'existence ou la disparition des symétries globales, comme le suggèrent les figures 2.3b et 2.3c. Prenons par exemple le système de Hénon-Heiles, qui est un modèle du mouvement céleste à quatre degrés de liberté (x, y, \dot{x}, \dot{y}) . Son hamiltonien est

$$H = \frac{1}{2} \left(x^2 + y^2 + 2x^2y - \frac{2}{3}y^3 \right) + \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \quad (2.8)$$

Comme il s'agit d'un système conservatif, il présente toujours un invariant, l'énergie. Les sections de Poincaré du modèle (obtenues en choisissant le plan $x = 0$, coupé par les trajectoires dans le sens positif de l'axe x) se restreignent à une courbe à une dimension s'il existe un autre invariant. Tel est le cas à faible énergie, où le système présente des solutions régulières, comme le montre la figure 2.5a. Cependant, pour des énergies plus grandes, quelques trajectoires ne se trouvent plus à une dimension, exprimant la disparition du deuxième invariant. Cela s'observe dans la figure 2.5b, où

les mêmes sections de Poincaré de ce système montrent que maintenant – au voisinage de la séparatrice – les solutions sont des points dispersés, et il y a donc du chaos. Pour des énergies plus grandes, la carte des sections de Poincaré devient complètement chaotique.

L'OSCILLATEUR DE DUFFING

Les systèmes non dissipatifs dont le hamiltonien dépend du temps de façon périodique deviennent conservatifs dans un espace des phases de dimension plus grande : un système à N degrés de liberté avec un hamiltonien H de période τ satisfait $H(x_1, \dots, x_N, t) = H(x_1, \dots, x_N, t + \tau)$; le temps joue le rôle d'une variable angulaire, et donc ce système est équivalent à un autre avec $N + 1$ degrés de liberté.

Un système avec deux degrés de liberté (x, p) et un hamiltonien périodique dans le temps $H(x, p, t)$ permet de créer une section de Poincaré en traçant x et p à chaque période τ . Les hamiltoniens des systèmes non linéaires de ce type peuvent s'écrire comme $H(x, p, t) = H_0(x, p) + \epsilon H_1(x, p, t)$ où H_0 correspond à un système intégrable et ϵH_1 est une perturbation. En conséquence, ces systèmes ont été très utilisés pour étudier la transition au chaos, parmi eux l'oscillateur de Duffing [Reichl2004].

Le hamiltonien de l'oscillateur de Duffing sans amortissement est

$$H = \frac{p^2}{2m} + \beta \frac{x^2}{2} - \gamma \frac{x^4}{4} - \epsilon x \cos(\omega_F t) \quad (2.9)$$

où ω_F est la fréquence du forçage externe, m est la masse de l'oscillateur et β, γ sont des paramètres sans dimension. Les équations du mouvement sont

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ &= \frac{p}{m} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\beta x + \gamma x^3 + \epsilon \cos(\omega_F t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Si $\beta > 0$, l'oscillateur de Duffing peut s'interpréter comme un oscillateur forcé. Pour $\beta < 0$, l'oscillateur de Duffing décrit la dynamique d'une particule dans un potentiel à double puits. Dans ce cas, si $\epsilon = 0$, ce système est intégrable (il a le comportement montré dans la figure 2.1). Mais, pour $\epsilon > 0$, le système est non intégrable. Des résonances non linéaires peuvent avoir lieu, et pour certaines valeurs de ω_F et de ϵ , les sections de Poincaré du système – les points dans le plan xp pris chaque τ – exhibent du chaos (figure 2.6) [Reichl1984].

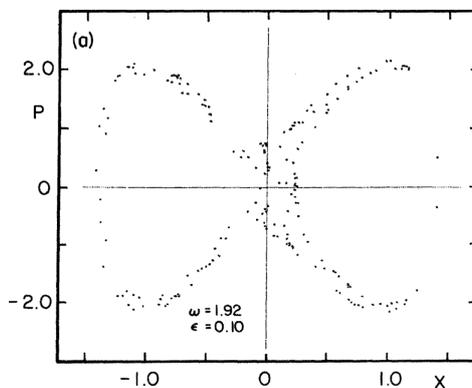


FIGURE 2.6 – Section de Poincaré de l'oscillateur de Duffing pour $\beta < 0$ et pour $\epsilon > 0$. Figure prise de [Reichl1984].

2.2.2.2 Exposants de Lyapunov

La sensibilité d'une trajectoire aux conditions initiales peut se caractériser par son exposant de Lyapunov. Pour calculer cet exposant, on introduit une perturbation ; en suivant l'évolution de cette perturbation, on trouve un taux de croissance/décroissance qui est l'exposant de Lyapunov. Si cet exposant est nul, la trajectoire est régulière, mais s'il est positif, la trajectoire est chaotique.

Considérons un système conservatif avec N degrés de liberté : le vecteur qui décrit l'état du système au temps t dans l'espace des phases N -dimensionnel est \mathbf{X}_t et il a $N - 1$ composantes indépendantes, car la conservation de l'énergie réduit l'espace des phases accessible. Si maintenant on considère un point \mathbf{Y}_t voisin de \mathbf{X}_t dans l'espace des phases, $\mathbf{Y}_t = \mathbf{X}_t + \Delta\mathbf{X}_t$, on peut déterminer comment le déplacement $\Delta\mathbf{X}_t$ évolue avec le temps, en résolvant les équations du mouvement. Si $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$ sont les valeurs initiales de $\mathbf{X}_t, \mathbf{Y}_t$, le module de $\Delta\mathbf{X}_t$ est $|\Delta\mathbf{X}_t| = d_t(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$. Le taux de croissance/décroissance exponentielle de $d_t(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ est donné par :

$$\lambda(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d_t(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)}{d_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)} \right) \quad (2.12)$$

où $\lambda(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ est l'exposant de Lyapunov [Reichl2004]. Un point $\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0$ de l'espace des phases mène à un certain exposant de Lyapunov, mais cet exposant est le même pour tous les points appartenant à une trajectoire donnée.

Il y a $N - 1$ exposants de Lyapunov, correspondants à chaque composante de \mathbf{X}^{10} . Si l'on appelle \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, \dots, N - 1$) le vecteur unitaire dans la direction dont la séparation des trajectoires voisines est caractérisée par λ_i , $\{\mathbf{e}_i\}$ est l'ensemble de vecteurs unitaires associés aux $N - 1$ directions orthogonales de l'espace des phases accessible. Donc, en général, on peut écrire

$$\Delta\mathbf{X}_t = \sum_{i=1}^{N-1} C_i(t) \mathbf{e}_i \quad (2.13)$$

où $C_i(t)$ est la composante de $\Delta\mathbf{X}_t$ dans la direction \mathbf{e}_i . L'exposant de Lyapunov associé à la direction \mathbf{e}_i est :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 + \mathbf{e}_i) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \left(\frac{d_t(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 + \mathbf{e}_i)}{d_0(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_0 + \mathbf{e}_i)} \right) \end{aligned} \quad (2.14)$$

On peut démontrer que les exposants satisfont, pour les systèmes hamiltoniens [Benettin1976] :

$$\lambda_i = -\lambda_{N-i} \quad (2.15)$$

Un des $N - 1$ exposants de Lyapunov, celui associé au mouvement le long de la direction du flot, est nul. En conséquence, $N/2 - 1$ des exposants sont négatifs, et $N/2 - 1$ sont positifs (ceux qui expriment la sensibilité aux conditions initiales). On peut donc renuméroter les exposants, pour écrire :

10. Dans un système non conservatif, le nombre d'exposants de Lyapunov est exactement la dimension N de l'espace des phases du système.

$$-\lambda_{\frac{N}{2}-1} \leq \dots \leq -\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{\frac{N}{2}-1} \quad (2.16)$$

Si $\Delta \mathbf{X}_t$ est choisi arbitrairement, il doit contenir une contribution de toutes les directions de l'espace et donc :

$$\lambda(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0) = \lambda_{N/2-1} \quad (2.17)$$

C'est à dire, $\lambda(\mathbf{X}_0, \mathbf{Y}_0)$ est l'exposant de Lyapunov le plus grand. En conséquence, dans le traitement numérique des solutions, la sensibilité aux conditions initiales peut se mesurer en tout point d'une trajectoire en suivant l'évolution d'un $\Delta \mathbf{X}_t$ arbitraire.

2.2.2.3 Dimension de corrélation

Dans les systèmes dissipatifs, un des indicateurs de la présence du chaos est la mesure d'une dimension non-entière ou fractale de l'attracteur étrange dans l'espace des phases. Dans un système conservatif, l'absence d'attracteurs implique que cette mesure concerne la dimension d'une structure μ où tombent les points de la trajectoire \mathbf{X} . Il existe plusieurs définitions pour la mesure d'une dimension fractale (par exemple, la dimension de Hausdorff [Croquette2000]), mais nous considérons en particulier la dimension de corrélation, qui est la plus employée et applicable aux trajectoires dans l'espace des phases [Freistetter2000, Aguirre2009]. La dimension de corrélation D est définie par :

$$D = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log C(r)}{\log r} \quad (2.18)$$

où r est un nombre positif, et $C(r)$ est l'intégrale de corrélation, que nous décrivons ci-après.

Algorithme de Grassberger-Procaccia La dimension de corrélation d'une structure μ peut s'estimer à partir d'une collection de N points distribuée de façon aléatoire sur μ , en employant l'algorithme de Grassberger-Procaccia. Si les N points sont $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N$, pour tout r , la corrélation $\hat{C}(r)$ est définie comme la fraction de paires de points dont la distance $|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$ est plus petite que r [Grassberger1983, Grassberger2007] :

$$\hat{C}(r) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} \theta(r - |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|) \quad (2.19)$$

où $\theta(z)$ est la fonction de Heaviside :

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

La somme (éq. 2.19) est une estimation de l'intégrale de corrélation

$$C(r) = \int d\mu(\mathbf{X}) \int d\mu(\mathbf{Y}) \theta(r - |\mathbf{X} - \mathbf{Y}|) \quad (2.21)$$

$C(r)$ décroît, pour $r \rightarrow 0$, comme $C(r) \sim r^D$. Le terme « algorithme de Grassberger-Procaccia » est utilisé de façon assez générale, pour les différentes méthodes d'estimation de D à partir du comportement de $\hat{C}(r)$ pour valeurs petites de r .

2.2.2.4 Analyse des spectres

Dans l'étude d'un système dynamique, l'analyse du spectre de fréquences des solutions permet de distinguer la nature de cette dynamique et de caractériser le mouvement. Cette analyse se fait en calculant la transformée de Fourier $\tilde{X}(\omega)$ de l'évolution temporelle d'une des variables du système, $X(t)$:

$$\tilde{X}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (2.22)$$

Le spectre de fréquences ainsi obtenu peut s'employer pour caractériser les solutions du système.

Un système intégrable, et donc régulier, présente des solutions soit périodiques soit quasi-périodiques, comme nous l'avons vu dans la section 2. Ces solutions peuvent toujours s'écrire comme composées de mouvements à des fréquences ω_i . Le spectre d'une variable de ce système présente des pics fins pour ces valeurs de fréquences. On y trouve aussi les pics correspondants aux harmoniques $n\omega_i$ de ces fréquences, où n est un entier positif, et des combinaisons de fréquences $m\omega_i + n\omega_j$, où m, n sont des entiers. En particulier, les termes non linéaires introduisent des harmoniques supplémentaires.

Quand le système est non intégrable, il peut avoir un comportement régulier ou chaotique. Le spectre de fréquences permet de distinguer ces deux cas car s'il est chaotique, le spectre est large et s'étend sur une gamme de fréquences, proche du spectre d'un bruit. Cependant, on y trouve des pics étroits où l'on peut reconnaître des temps de retour caractéristiques du système.

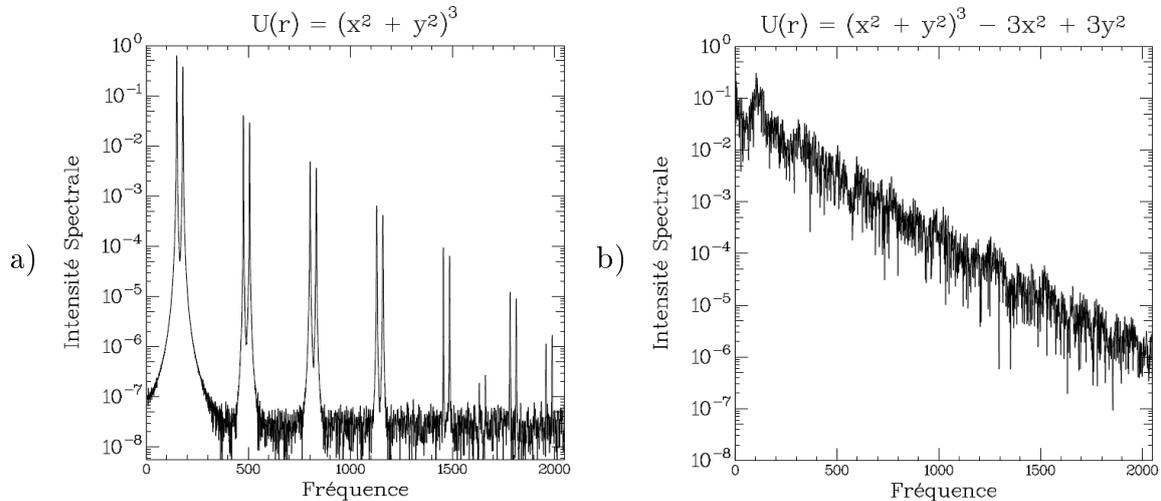


FIGURE 2.7 – Spectre de fréquences du pendule magnétique, avec un comportement : a) régulier b) chaotique. Le potentiel de chaque système s'affiche en haut des figures. Figures prises de [Croquette2000].

Considérons comme exemple le pendule magnétique, un système à 4 degrés de liberté [Croquette2000]. Ce système se construit avec un aimant accroché à un fil, qui peut explorer les directions x et y , plus un aimant statique placé à l'aplomb du pendule. Le pendule est donc soumis à un champ de force central, et son moment cinétique est un deuxième invariant, en plus de l'énergie. Le spectre de ce système est montré dans la figure 2.7a, où nous voyons qu'il existe deux pics correspondant aux fréquences

principales et leurs harmoniques. Si l'on remplace l'aimant statique par deux aimants situés de part et d'autre de l'aplomb du pendule, le champ de force perd la symétrie centrale, et donc le deuxième invariant disparaît. La trajectoire décrite par le pendule magnétique devient chaotique et donc le spectre de ce système devient large. Ce spectre est montré dans la figure 2.7b.

En plus d'être un outil pour reconnaître le comportement chaotique d'un système, l'analyse spectrale permet aussi de caractériser les solutions. Dans la résolution numérique d'un système, la mesure de la position et l'amplitude des pics dans le spectre fournit l'information d'une décomposition du mouvement en oscillations avec ces caractéristiques.

2.3 Synchronisation dans les systèmes dissipatifs

Le phénomène de synchronisation est une autre manifestation spécifique aux systèmes dynamiques non linéaires, caractéristique des systèmes dissipatifs. Cependant, comme nous le verrons dans le chapitre 3, un phénomène analogue peut aussi apparaître dans les systèmes conservatifs.

La SYNCHRONISATION est un ajustement des rythmes d'objets oscillants dû à leur couplage faible [Pikovsky2001]. Le phénomène de synchronisation a été décrit pour la première fois par Christian Huygens, qui l'a observé dans une paire d'horloges à balancier placées côte à côte. Les oscillations des horloges coïncidaient parfaitement et les balanciers se mouvaient toujours en opposition de phase, à cause du couplage fourni par leur support commun. Ce type de synchronisation est appelé SYNCHRONISATION MUTUELLE, car un système oscillant affecte également l'autre, et les deux ajustent leurs fréquences¹¹.

La synchronisation existe dans plusieurs domaines. Par exemple, tous les systèmes biologiques ont une horloge biologique interne qui leur donne une information sur l'alternance jour-nuit. Ces horloges ajustent leurs rythmes « circadiens » à des signaux externes par synchronisation : si le système est complètement isolé, soumis à des conditions constantes, son cycle interne diffère du cycle de 24 heures ; mais en conditions naturelles, les horloges biologiques se synchronisent avec la période de 24 heures du cycle terrestre [Pfeuty2012]. Ce phénomène est un exemple de SYNCHRONISATION PAR FORÇAGE EXTERNE, où un oscillateur est soumis à une action indépendante de ses oscillations (comme l'est la rotation de la Terre) et l'action est unidirectionnelle.

Il existe aussi des cas de synchronisation entre plus de deux systèmes, soit mutuelle soit par forçage externe. Notre intérêt ici se limite à la synchronisation mutuelle de deux systèmes, que nous décrivons plus en détail ci-après.

2.3.1 Synchronisation mutuelle

Considérons deux systèmes \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 non identiques avec des oscillations autonomes, en général d'amplitudes et de fréquences différentes, décrites par $\mathbf{f}_1(\mathbf{X}_1)$ et $\mathbf{f}_2(\mathbf{X}_2)$.

11. La synchronisation mutuelle a été observée plus tard par Lord J. Rayleigh dans des systèmes acoustiques, et par W. H. Eccles et J. H. Vincent dans deux générateurs légèrement différents qui vibraient à une fréquence commune. À partir de ce dernier exemple elle a été décrite de façon plus rigoureuse [Pikovsky2001].

Quand ces systèmes sont couplés (termes $\mathbf{g}_{1,2}$), on obtient des équations non linéaires [Pikovsky2001] :

$$\frac{d\mathbf{X}_1}{dt} = \mathbf{f}_1(\mathbf{X}_1) + \gamma \mathbf{g}_1(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2) \quad (2.23a)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_2}{dt} = \mathbf{f}_2(\mathbf{X}_2) + \gamma \mathbf{g}_2(\mathbf{X}_2, \mathbf{X}_1) \quad (2.23b)$$

où γ est une constante de couplage. Quand $\gamma = 0$, chaque système oscille à sa fréquence naturelle ω_1 ou ω_2 , et avec la phase ϕ_1 ou ϕ_2 . En général, ces fréquences sont incommensurables, et le mouvement des oscillateurs non couplés est quasi-périodique.

Quand les systèmes sont couplés ($\gamma \neq 0$), ils oscillent à des nouvelles fréquences ω'_1 et ω'_2 . Si le couplage est suffisamment important et que les fréquences naturelles ω_1 et ω_2 sont suffisamment proches, ces oscillateurs peuvent se synchroniser¹².

L'apparition d'une SYNCHRONISATION MUTUELLE est caractérisée par un accrochage des fréquences, c'est à dire l'ajustement mutuel des fréquences couplées des oscillateurs, ω'_1 et ω'_2 , jusqu'à atteindre une valeur commune ω_S :

$$\omega'_1 = \omega'_2 = \omega_S \quad (2.24)$$

(si $\omega_1 < \omega_2$, généralement $\omega_1 < \omega_S < \omega_2$). L'accrochage des fréquences implique aussi un verrouillage entre les phases de chaque oscillateur. Les amplitudes, en revanche, peuvent être très différentes. Le verrouillage des phases se traduit par l'existence d'une relation du type

$$\phi_2 - \phi_1 = \phi_S \quad (2.25)$$

où ϕ_S ne dépend pas du temps, mais peut dépendre du désaccord des fréquences, et de la nature du couplage. Cette valeur ϕ_S peut donner un mouvement synchronisé à la fréquence ω_S qui se réalise en phase ($\phi_S = 0$), en opposition ($\phi_S = \pi$), etc. Il est possible de trouver des équations fermées pour les phases en développant la dynamique des systèmes couplés [Pikovsky2001].

Synchronisation mutuelle d'ordre supérieur

Quand les fréquences des systèmes découplés satisfont $n\omega_1 \approx m\omega_2$ (n, m entiers), l'introduction du couplage produira généralement une synchronisation d'ordre $n : m$. Les fréquences des systèmes couplés atteindront donc la valeur

$$n\omega'_1 = m\omega'_2 = \omega_S \quad (2.26)$$

Les phases des systèmes couplés auront aussi une relation fixe, ce qui donne :

$$|n\phi_1 - m\phi_2| = \text{constante}. \quad (2.27)$$

12. Le couplage doit être suffisamment grand pour que la synchronisation existe, mais il doit être assez faible pour pouvoir parler de synchronisation, car autrement il s'agit d'un seul système unifié : l'introduction du couplage ne devrait pas changer qualitativement le comportement des systèmes ni les priver de leur individualité (si l'un s'arrête, l'autre devrait continuer à osciller) [Pikovsky2001].

2.3.2 Synchronisation dans les systèmes chaotiques

Certains systèmes dissipatifs chaotiques présentent aussi de la synchronisation. L'apparition d'un accrochage de fréquences a alors pour résultat d'étendre l'intervalle des paramètres où le système est régulier, au détriment du chaos.

Un premier exemple de cette situation peut se trouver dans la dynamique des lasers CO_2 à absorbant saturable, LAS, quand ils sont soumis à une modulation externe [Dangoisse1990]. Sans modulation, le laser exhibe deux régimes dynamiques principaux (en fonction de leurs conditions d'opération), qui sont susceptibles d'avoir un comportement chaotique. L'introduction de la modulation externe sur un paramètre de contrôle du laser permet de voir, en changeant l'amplitude ou la fréquence de cette modulation, l'apparition d'une synchronisation par forçage externe dans la dynamique du laser. Ce type de synchronisation, que nous avons mentionné précédemment sans le développer, présente quelques différences par rapport à la synchronisation mutuelle : tandis que cette dernière entraîne un ajustement des deux fréquences impliquées, la première nécessite un forçage périodique externe qui conserve sa fréquence. Même si le mécanisme de synchronisation impliqué dans ce premier exemple n'est pas spécifiquement celui que l'on veut étudier, il introduit déjà la notion de la disparition du chaos liée à une dynamique synchronisée. Dans cet exemple, s'il existe un rapport rationnel entre la fréquence de la modulation et celle caractéristique du régime du laser, il apparaît une dynamique verrouillée en phase qui supprime le comportement complexe.

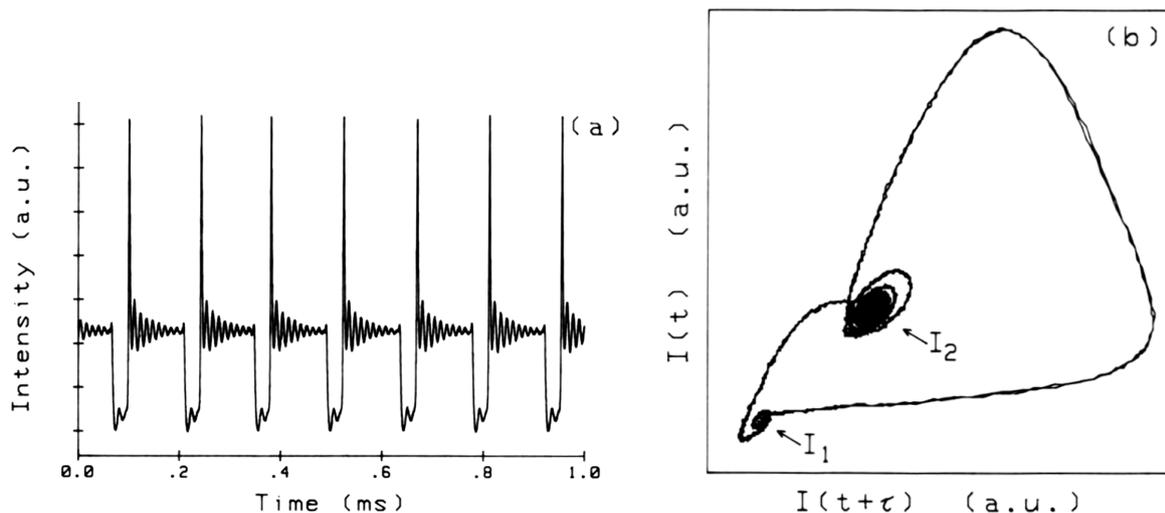


FIGURE 2.8 – Comportement périodique de l'intensité du laser CO_2 à absorbant saturable, dû à une synchronisation mutuelle : a) variation temporelle de l'intensité ; b) schéma de l'espace des phases du système. Figure prise de [Hennequin1990].

Toujours en considérant la dynamique des lasers CO_2 LAS, l'autre exemple – encore plus intéressant que le premier – d'inhibition du chaos par synchronisation a lieu quand ces lasers sont bimodes et sans modulation externe [Hennequin1990]. Ici c'est une synchronisation mutuelle qui met le système dans un régime périodique, et les fréquences impliquées sont celles des deux modes du laser.

Quand un laser présente un comportement multimode (c'est à dire que plusieurs modes satisfont la condition d'oscillation de la cavité du laser [Hennequin2013]), son intensité de sortie peut présenter différents régimes. Dans le cas du laser CO_2 LAS

bimode, cette dynamique peut s'étudier dans l'espace des phases à deux dimensions de ce système dissipatif : il présente deux points fixes instables I_1 et I_2 qui correspondent aux valeurs stationnaires de l'intensité pour chaque mode. Les deux modes sont couplés de façon non linéaire et, en changeant certains paramètres de contrôle du laser, l'intensité de sortie peut devenir chaotique. Cependant, pour un intervalle de valeurs de ces paramètres, il apparaît un régime qui consiste en sauts périodiques d'un mode à l'autre (*mode-hopping*), où les modes sont verrouillés entre eux (figure 2.8a). La dynamique du laser dans cette situation est telle que les trajectoires vont périodiquement du voisinage d'un point fixe à celui de l'autre, en faisant chaque fois quelques tours autour du point (figure 2.8b).

2.3.3 Synchronisation des systèmes chaotiques

Les systèmes chaotiques peuvent exhiber des phénomènes aussi appelés synchronisation, qui ne nous concernent pas dans notre étude de la dynamique dans les réseaux optiques, mais qui sont intéressants à mentionner (en particulier pour les distinguer du phénomène décrit dans la section précédente). Pour pouvoir parler de synchronisation dans un système irrégulier, il faut que le système soit d'abord caractérisé par une fréquence et une phase. Cela est possible en analysant le spectre du système, qui présente plusieurs pics non négligeables mais qui exhibe toujours une fréquence dominante. Il suffit de choisir cette fréquence et de la prendre comme la dérivée de la phase du système.

Synchronisation de phase La synchronisation de phase dans les oscillateurs chaotiques peut avoir lieu par l'action d'un forçage externe périodique. Si la fréquence du forçage est proche de la fréquence dominante de l'oscillateur, cette dernière est accrochée à la fréquence externe, et la phase du système est verrouillée par le forçage externe. Ce phénomène a lieu pour des forçages modérés : le forçage est assez grand pour produire l'accrochage mais suffisamment petit pour ne pas détruire le chaos (ce qui correspondrait à une synchronisation complète, décrite ci-après).

Les oscillateurs chaotiques peuvent aussi exhiber une synchronisation de phase mutuelle, où deux systèmes avec des fréquences moyennes différentes sont couplés. Le résultat est que les oscillateurs ont la même fréquence moyenne, mais chacun conserve son propre comportement chaotique dans l'amplitude [Pikovsky2001].

Synchronisation complète La synchronisation des oscillateurs chaotiques peut aussi être complète, un cas particulier qui est différent de la synchronisation des oscillateurs périodiques (elle n'entraîne pas un ajustement des rythmes). La synchronisation complète implique une suppression des différences dans des systèmes identiques fortement couplés, et elle ne peut pas être décrite comme un accrochage (les oscillateurs ont la même fréquence ET la même amplitude chaotique). En conséquence, on s'éloigne encore plus du phénomène qui nous intéresse, et il suffit juste de mentionner qu'il existe aussi, par action d'un forçage périodique externe, un régime appelé « synchronisation complète destructrice du chaos » [Pikovsky2001] : quand un forçage assez grand agit sur un système chaotique, il supprime le chaos et fait que le système oscille périodiquement, avec la période du forçage.

Chapitre 3

Réseau carré à 2D

La majeure partie du travail présenté dans cette thèse concerne l'étude de la dynamique classique d'un atome froid dans un réseau optique conservatif. Il s'agit du réseau carré à 2D, introduit dans la section 2.2 du chapitre 1. Ce réseau a été étudié dans l'article [Hennequin2010], qui montre l'importance du signe du désaccord laser employé pour obtenir différentes dynamiques atomiques. Les études postérieures sur le réseau carré avec un désaccord négatif ont mis en évidence un phénomène de synchronisation dans ce système, détaillé dans [Hennequin2010b]. Ces travaux ont donné le cadre et les bases du sujet de cette thèse : dans ce chapitre, nous présenterons donc les principaux résultats exposés dans ces deux articles. Cela nous permettra aussi d'établir quelques notations, et d'introduire des considérations et des paramètres que nous utiliserons par la suite. L'accent sera mis, évidemment, sur les résultats qui nous ont amené au problème traité dans les chapitres suivants.

Chapitre 3

Réseau carré à 2D

3.1 Introduction au réseau carré à 2D

Nous considérons un réseau carré bidimensionnel conservatif, de sorte que les seules forces à prendre en compte sont les forces réactives. On a vu dans le chapitre 1 que le potentiel optique, qui est à l'origine de ces forces, est proportionnel à l'intensité lumineuse I . On s'intéresse donc d'abord à la forme de l'intensité.

Distribution de l'intensité lumineuse

Dans le chapitre 1, nous avons écrit l'intensité résultant de l'interférence des deux ondes stationnaires orthogonales qui forment le réseau carré (créé par deux paires de faisceaux lasers considérés comme des ondes planes) comme

$$I(x, y) = 4I_L [\cos^2(k_L x) + \cos^2(k_L y) + 2\alpha \cos(k_L x) \cos(k_L y)] \quad (3.1)$$

Nous avons introduit ici le paramètre $\alpha = \cos \phi$, où ϕ est la différence de phase entre les ondes stationnaires. α sera toujours supposé positif, car les valeurs négatives correspondent à un changement de phase : il s'agit donc juste d'une translation de π en x ou en y (c'est à dire, une translation d'une période en l'intensité).

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la distribution périodique d'intensité donné par l'équation (3.1) présente une maille carrée. Nous avons aussi vu que sa maille élémentaire est tournée d'un angle de $\pi/4$ par rapport aux axes x, y ; en conséquence, il est plus naturel de travailler avec les coordonnées définies comme :

$$X = k_L x + k_L y \quad (3.2a)$$

$$Y = k_L y - k_L x \quad (3.2b)$$

L'intensité peut alors s'écrire :

$$I(X, Y) = 4I_L (1 + \alpha (\cos X + \cos Y) + \cos X \cos Y) \quad (3.3)$$

Alors que dans l'expression de l'intensité selon les directions x et y (éq. 3.1) il existe un terme de couplage contrôlé par le paramètre α , nous voyons que le terme de couplage dans les nouvelles coordonnées (éq. 3.3) est le même pour tout α . Nous avons tracé la distribution spatiale de l'intensité $I(X, Y)$ (éq. 3.3) pour différentes valeurs du paramètre α ; nous pouvons voir le changement de son aspect dans la figure 3.1.

Analysons les points remarquables de l'expression (3.3), visibles par exemple dans la figure 3.1b, pour $\alpha = 0.5$:

- Le maximum absolu d'intensité est $I = 2(1 + \alpha)$ et se trouve à $(X, Y) = (n2\pi, m2\pi)$, où m et n sont entiers.

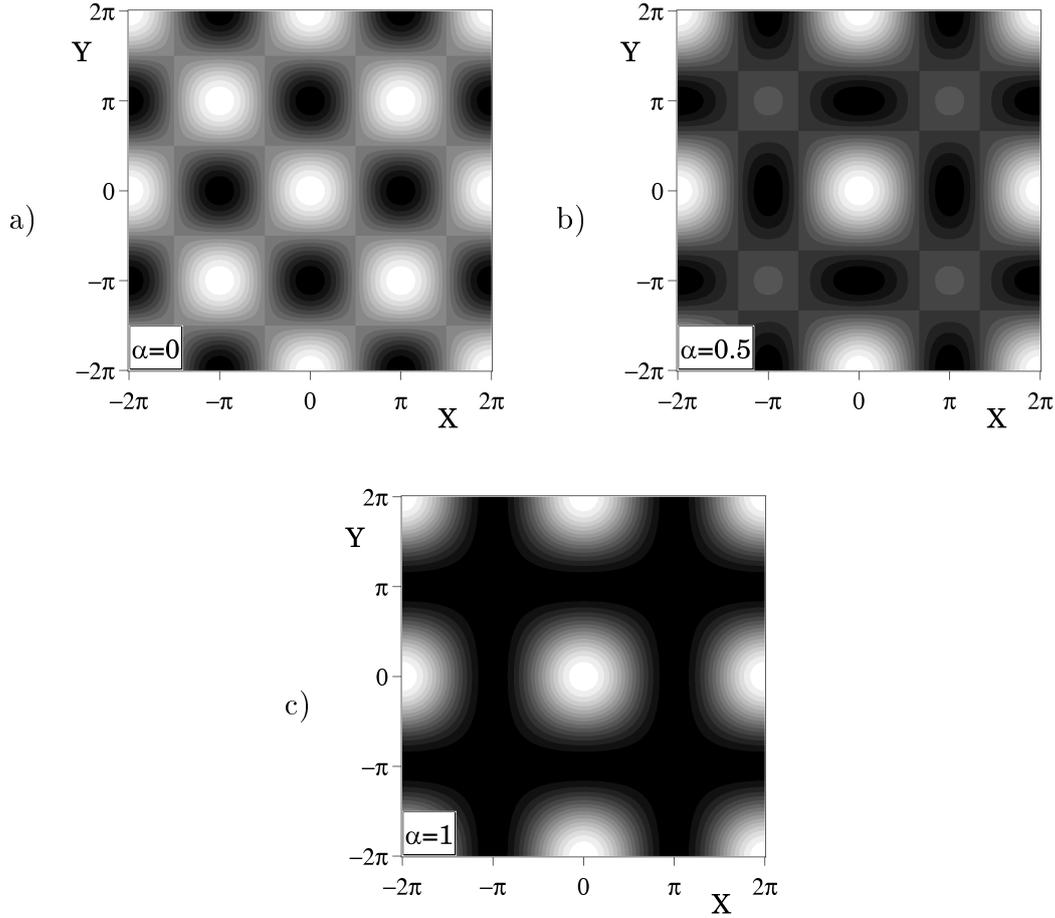


FIGURE 3.1 – Distribution spatiale de l'intensité I (3.3) pour a) $\alpha = 0$, b) $\alpha = 0.5$, c) $\alpha = 1$. Les régions plus obscures indiquent une faible intensité lumineuse.

- Les maxima relatifs $2(1 - \alpha)$ de I se trouvent aux points de coordonnées $(X, Y) = (\pi + n2\pi, \pi + m2\pi)$.
- I est nul pour $(X, Y) = (\pi + n2\pi, m2\pi)$ et $(X, Y) = (n2\pi, \pi + m2\pi)$.
- Deux zéros voisins sont séparés par un point col où $I = 1 - \alpha^2$. Ces points cols se trouvent aux points où $\cos X = \cos Y = -\alpha$. Ils sont sur les lignes droites $X = \pm Y [2\pi]$ qui relient un maximum absolu avec un maximum relatif voisin et qui se prolongent vers le maximum absolu suivant. On peut voir sur la figure 3.1b, que les courbes de niveau passant aux cols sont des droites horizontales et verticales.

Le cas particulier $\alpha = 0$ (figure 3.1a) ramène les maxima absolus et relatifs à la même valeur. Il s'agit du cas où la distribution d'intensité selon x et y (éq. 3.1) perd le terme croisé. Le potentiel qui en résulte donne un mouvement qui serait séparable dans ces coordonnées.

D'autre part, le cas $\alpha = 1$ (figure 3.1c) donne une intensité nulle pour les maxima relatifs, de sorte qu'ils sont égaux aux minima. En conséquence, la distribution d'intensité a des lignes noires verticales en $X = \pi + n2\pi$ et horizontales en $Y = \pi + n2\pi$. Dans cette situation, par conséquent, le potentiel du réseau n'a plus de sites où l'atome peut être piégé. Dans ce travail, nous ne considérons pas le cas particulier $\alpha = 1$, car nous

nous intéressons à la dynamique atomique dans un puits de potentiel.

Dans la section suivante, nous verrons quel type de potentiel optique produit la distribution d'intensité donnée par l'équation (3.3), et la dynamique atomique qui en dérive.

3.2 Dynamique d'un atome dans les réseaux carrés

Quand on remplit un réseau optique avec des atomes froids obtenus à partir d'un piège magnéto-optique, le remplissage des sites dépend de la densité du nuage d'atomes. La densité dans le piège est de l'ordre de 10^{11} atomes/cm³ [Metcalf1999]. Pour les atomes de césium à 5 μ K, par exemple, le nuage a un diamètre de 2 mm et contient $\sim 10^8$ atomes. Par ailleurs, un réseau bidimensionnel formé par deux ondes stationnaires de longueur d'onde λ_L créera des sites dont la taille est $\sim \lambda_L/2$. Pour les atomes de césium, $\lambda_L/2 = 426$ nm. On aura donc environ 22×10^6 puits où loger les $\sim 10^8$ atomes. En conséquence, le remplissage des sites est de l'ordre de 5 atomes par site [Hennequin2010]. Il faut prendre en compte que ces sites sont à 2D, donc en réalité, dans la troisième direction de l'espace ils ont une largeur très grande : on peut les voir comme des tubes de taille $\sim 0.4 \mu\text{m} \times 0.4 \mu\text{m} \times 1$ mm. Cela justifie l'hypothèse d'atomes qui n'interagissent pas entre eux. La physique est donc essentiellement celle d'un seul atome (un plus grand nombre d'atomes augmente simplement le signal mesurable). Le régime considéré étant classique, l'étude qui suit est celle de la dynamique déterministe d'un seul atome subissant les forces réactives du réseau optique.

3.2.1 Forme des potentiels

Nous analysons ici les potentiels du réseau optique carré, pour les deux types de désaccords possibles. Appelons U_+ le potentiel d'un réseau quand la fréquence des lasers est sur le bleu de la transition atomique ($\Delta > 0$) et U_- celui sur le rouge ($\Delta < 0$). Dans la suite, nous appellerons simplement « réseau rouge » et « réseau bleu » un réseau optique obtenu avec des lasers désaccordés sur le rouge ou sur le bleu de la transition atomique. D'après l'équation (1.19) dans le chapitre 1, on peut écrire ces potentiels comme :

$$U_{\pm}(X, Y) = \pm \frac{\hbar\Gamma^2}{8I_s} I(X, Y) \pm U_0 [1 + \alpha (\cos X + \cos Y) + \cos X \cos Y] \quad (3.4)$$

où I_s est l'intensité de saturation et $U_0 = \frac{\hbar\Gamma^2}{2} \frac{I_L}{I_s}$. En conséquence, les potentiels U_{\pm} induisent un fort couplage entre les directions X et Y , qui peut mener à une dynamique atomique complexe. Ce terme de couplage ne dépend pas du paramètre α , et donc a priori, les résonances non linéaires et l'apparition du chaos sont toujours possibles.

3.2.1.1 Topologie et symétrie des potentiels

Nous allons étudier d'abord la topologie des potentiels du réseau carré, avant d'analyser leurs équations. Dans la section précédente, nous avons déterminé la position des minima, maxima et points cols de l'intensité (éq. 3.3). Ces points remarquables restent inchangés pour le potentiel dans le cas d'un réseau avec un désaccord positif (figure

3.2a). Les minima et maxima s'échangent pour un désaccord négatif (figure 3.2b). Cependant, bien que U_- se différencie de U_+ seulement par le signe, ces deux potentiels conduisent à des comportements atomiques très différents. Le fait que U_- ait ses puits pour les maxima d'intensité (alors que U_+ a ses puits pour les minima d'intensité) veut dire que les atomes vont s'accumuler dans les régions signalées par 1 et 1R en figure 3.2b pour U_- , au lieu des régions 1 et 1' en figure 3.2a pour U_+ . Cette différence modifie le mouvement de façon considérable. En effet, les atomes seront soumis à des forces différentes dans ces différentes positions de piégeage. Par conséquent, la dynamique dans le réseau et l'existence d'un régime chaotique dépendent fortement du désaccord.

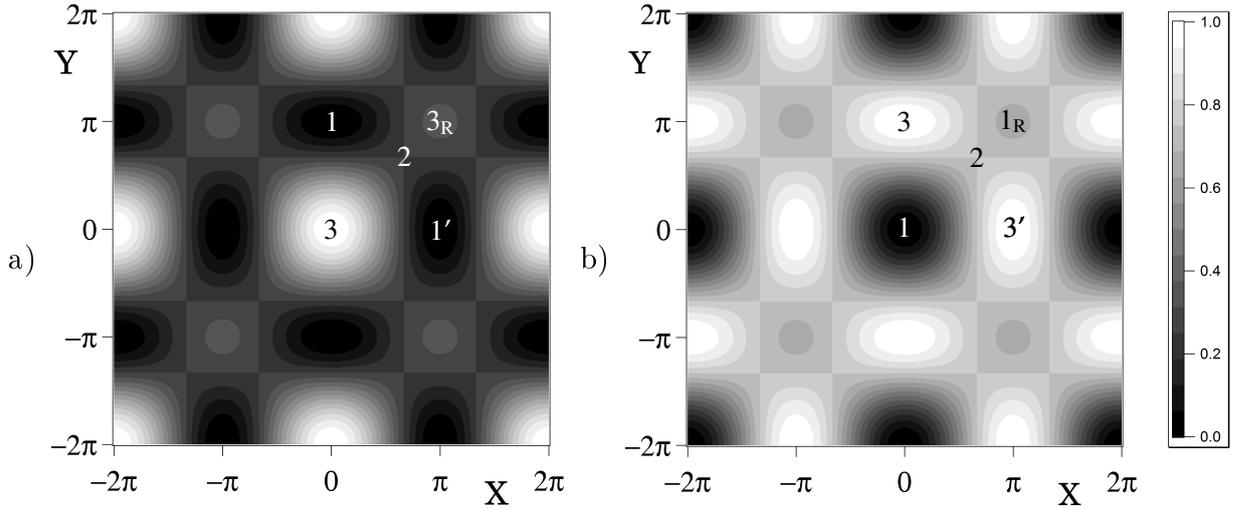


FIGURE 3.2 – Potentiel normalisé du réseau carré pour $\alpha = 0.5$, avec un a) désaccord positif : U_+ , b) désaccord négatif : U_- . Les 1 signalent les minima du potentiel, les 2 sont les points cols, et les 3 sont les maxima du potentiel. L'indice R spécifie qu'il s'agit d'un maximum/minimum relatif.

Pour des énergies faibles, les atomes restent localisés près du fond du puits, où le potentiel peut être considéré comme harmonique : le mouvement des atomes reste simple. Pour des plus grandes amplitudes de mouvement – c'est à dire des énergies plus grandes – le potentiel s'écarte de son approximation harmonique et les non-linéarités augmentent, de sorte que la dynamique peut devenir plus complexe. Aux points cols (signalés par 2 en figure 3.2), l'énergie potentielle a une valeur que l'on appellera E_T . E_T est un seuil d'énergie parce qu'un atome classique avec une énergie plus petite que cette valeur sera piégé dans un site : il ne peut pas franchir le point col. Un atome avec une énergie plus grande que E_T peut voyager entre différents sites, à condition qu'il se déplace dans la bonne direction.

Examinons maintenant la symétrie du potentiel au voisinage des minima, et l'influence du désaccord sur cette symétrie. Les puits présentent des lignes de niveau circulaires pour U_- (figure 3.2b) ; ces lignes sont elliptiques pour U_+ (figure 3.2a). La perte de la symétrie circulaire autour des minima du potentiel U_+ a une conséquence sur le mouvement harmonique près du fond du puits, que nous décrirons dans la section suivante. L'environnement des minima change aussi au-delà du puits. Dans le réseau rouge, les minima absolus sont reliés aux minima relatifs par les bissectrices qui passent aussi par les points cols (figure 3.2b). En revanche, dans le réseau bleu, il n'y a pas de

points cols sur la ligne droite qui connecte deux minima (figure 3.2a). Par conséquent, les bissectrices sont des lignes de fuite pour U_- mais elles ne le sont pas pour U_+ .

3.2.1.2 Équations pour les potentiels

Nous allons analyser ici les expressions pour ces deux potentiels optiques. Les atomes placés dans un réseau rouge voient un potentiel

$$U_- = -U_0 [1 + \alpha (\cos X + \cos Y) + \cos X \cos Y] \quad (3.5)$$

Le fond du puits de potentiel considéré dans ce cas correspond au minimum absolu trouvé pour $(X, Y) = (0, 0)$.

Pour le réseau bleu, le fond du puits correspond à $I = 0$. Nous choisissons arbitrairement le puits centré en $(X, Y) = (0, \pi)$, signalé par 1 dans la figure 3.2a. Si l'on veut avoir l'origine de notre système de coordonnées dans le fond de ce puits, il nous faut effectuer une translation de π selon Y . Le potentiel devient donc :

$$U_+ = U_0 [1 + \alpha (\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y] \quad (3.6)$$

Pour étudier la dynamique d'un atome dans chacun de ces potentiels et pour pouvoir les comparer, il faut les normaliser et aussi leur donner le même zéro d'énergie : on prend comme zéro le fond des puits et on normalise les deux potentiels de sorte que $E_T = 1$. Avec ces changements, l'énergie potentielle pour chaque réseau prend une forme différente :

$$\begin{aligned} U_-^N &= \frac{2(1 + \alpha) + \frac{U_-}{U_0}}{(1 + \alpha)^2} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} (1 - \cos X) + \frac{1}{1 + \alpha} (1 - \cos Y) - \frac{(1 - \cos X)(1 - \cos Y)}{(1 + \alpha)^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} U_+^N &= \frac{U_+}{U_0(1 - \alpha^2)} \\ &= \frac{1}{1 + \alpha} (1 - \cos X) + \frac{1}{1 - \alpha} (1 - \cos Y) - \frac{(1 - \cos X)(1 - \cos Y)}{1 - \alpha^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Les deux premiers termes dans les expressions (3.7) et (3.8) décrivent le potentiel de deux pendules simples. Le troisième et dernier terme de chacune de ces expressions décrit un couplage entre les deux pendules. Pour le potentiel U_-^N , la fréquence « naturelle » – celle des oscillations de faible amplitude – est la même pour les deux directions. En revanche, pour le potentiel U_+^N les fréquences naturelles des deux pendules sont différentes, ce qui est une conséquence directe de l'absence de la symétrie circulaire dans U_+^N . Ce potentiel a des puits avec des lignes de niveau elliptiques, qui font que le mouvement n'est pas équivalent dans les deux directions. On remarque que les potentiels donnés par les équations (3.8) et (3.7) deviennent égaux pour le cas $\alpha = 0$. On approfondit maintenant la comparaison entre les dynamiques dans les réseaux bleu et rouge.

3.2.2 Dynamique dans les réseaux dans un cas spécifique ($\alpha = 0.5$)

Une étude du mouvement atomique dans les deux potentiels introduits ci-dessus a été faite, pour le cas particulier $\alpha = 0.5$, dans [Hennequin2010]. Le système étant

conservatif, l'espace accessible est une surface à trois dimensions dans l'espace des phases (X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) . Les trajectoires ont été calculées numériquement par intégration des équations du mouvement. Ces trajectoires étant difficiles à représenter dans l'espace à 4 dimensions, on se limite aux sections de Poincaré, outil que nous avons introduit dans le chapitre 2. L'hyper-plan $\dot{Y} = 0$ a été choisi pour obtenir ces sections. On retient les points où la trajectoire coupe cet hyper-plan pour valeurs croissantes de \dot{Y} . Par conséquent, les sections de Poincaré sont, dans l'espace à trois dimensions (X, Y, \dot{X}) , situées sur une surface à deux dimensions qui a la forme d'un semi-ellipsoïde¹. Sur les figures 3.3 et 3.4, on observe les projections de cette surface sur le plan XY , et dans la figure 3.3 également la projection sur $X\dot{X}$.

Désaccord négatif

La dynamique atomique dans U_-^N est complètement non chaotique (figure 3.3). On y trouve des trajectoires périodiques et quasi-périodiques. Pour des énergies suffisamment faibles ($E = 0.80$, figure 3.3b), les sections de Poincaré présentent une séparatrice en forme de X qui permet de distinguer quatre domaines différents. Dans chaque domaine, les trajectoires tournent autour d'un point fixe. Ces quatre points fixes peuvent être identifiés comme des solutions périodiques à une fréquence de mouvement commune pour X et Y , grâce à un accrochage des fréquences. On décrira de façon plus détaillée les caractéristiques de ces solutions et la dynamique dans le potentiel U_- dans la section suivante.

Cette dynamique ne change pas significativement pour des énergies plus grandes (voir par exemple $E = 0.88$, figures 3.3c et 3.3d). Les surfaces de Poincaré sont toujours organisées dans quatre régions délimitées par une séparatrice. Le régime chaotique apparaît près de la séparatrice mais il reste marginal, même pour $E = 1$ (figures 3.3e et 3.3f). Dans la section 3, on analysera mieux l'absence de chaos pour le désaccord négatif.

Désaccord positif

La dynamique dans U_+^N change radicalement avec l'énergie. Pour des énergies très faibles, elle présente un mouvement régulier autour du fond des puits, avec des trajectoires quasi-périodiques (figure 3.4a, pour $E = 0.40$). Les fréquences sur Y et sur X sont très proches des valeurs naturelles dans chaque direction. La nature du mouvement pour les trajectoires quasi-périodiques est très différente de celle décrite pour U_-^N : comme les fréquences naturelles dans les directions de l'espace sont très différentes, il n'y a pas d'accrochage entre elles². Les sections de Poincaré sont des lignes presque horizontales, correspondant à des mouvements indépendants dans les directions X et Y . Un cas particulier se trouve au bord du semi-ellipsoïde, en $Y = 0$, où la trajectoire représente un cycle périodique dans la direction X ; un autre cas particulier est la trajec-

1. Le terme « semi-ellipsoïde » est celui employé dans les articles que l'on résume ici. En réalité, ce terme n'est pas adapté pour décrire la surface, car ses coupes n'ont rien d'une ellipse. Une appellation « demi-ovoïde » serait plus correcte. Dans ce chapitre, consacré à ces articles publiés, je conserverai cette dénomination. Pour la partie II de cette thèse, qui correspond à mon travail, j'adopterai une terminologie plus exacte.

2. Il faut noter que, pour la valeur choisie $\alpha = 0.5$, le rapport entre les fréquences naturelles du mouvement selon Y et selon X est irrationnel : $\sqrt{3}$.

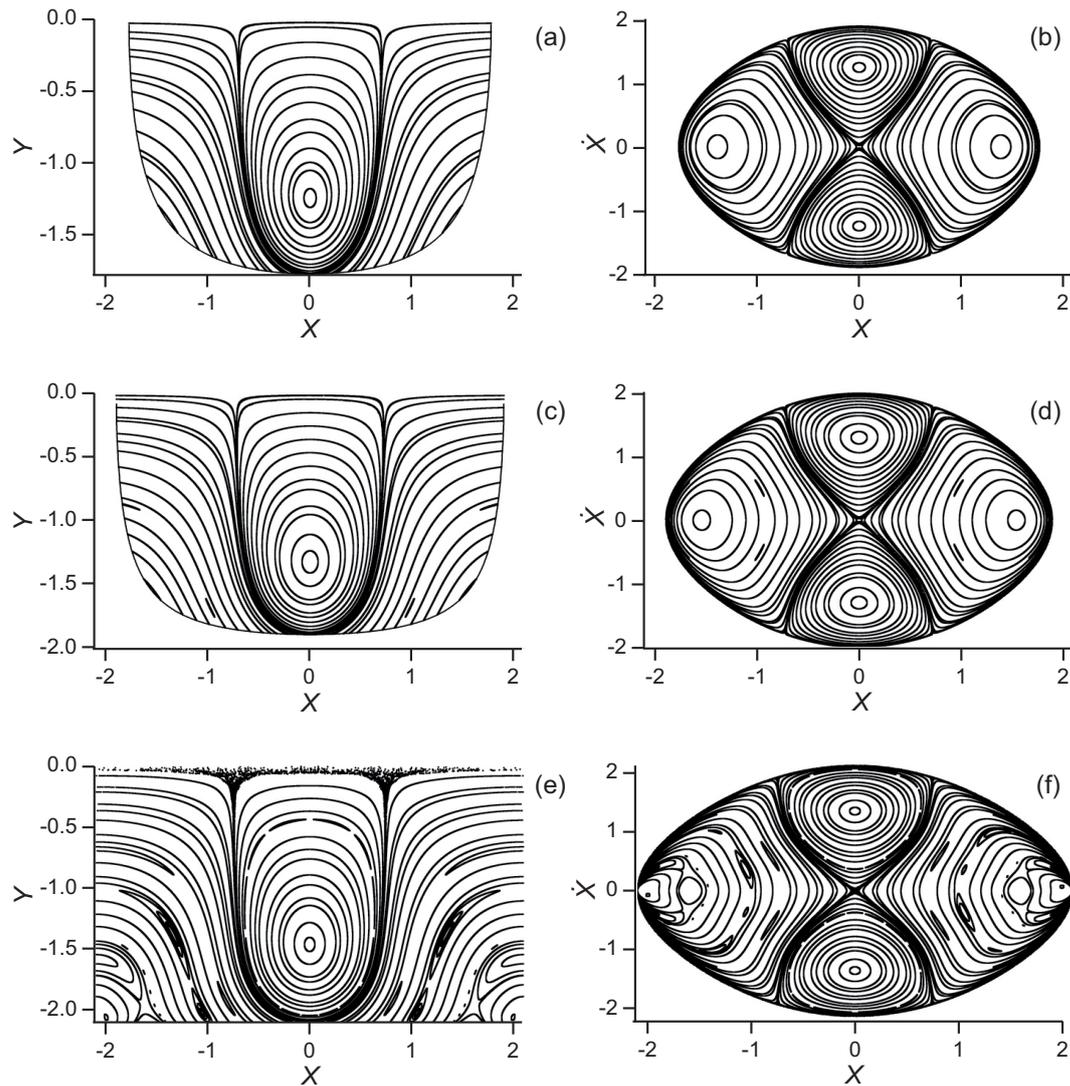


FIGURE 3.3 – Sections de Poincaré représentant la dynamique atomique dans le potentiel U_- : projection sur le plan XY (a,c,e) et sur le plan $X\dot{X}$ (b,d,f) pour a,b) $E = 0.80$, c,d) $E = 0.88$, e,f) $E = 1$. Figure prise de [Hennequin2010].

toire périodique correspondant au vertex du semi-ellipsoïde, qui décrit un mouvement intégralement dans la direction Y .

Pour des énergies plus grandes, l'anharmonicité du potentiel augmente et donc les fréquences sur X et sur Y changent, mais la dynamique change peu jusqu'à $E = 0.60$ (voir figure 3.4b, par exemple, pour $E = 0.63$). À cette valeur, il apparaît une trajectoire périodique stable, visible dans l'encart qui détaille la région de cette solution. Pour des amplitudes suffisamment grandes du mouvement selon Y , cette trajectoire montre que les fréquences sur X et Y s'éloignent tellement de leurs valeurs naturelles qu'il apparaît un accrochage pour $\omega_Y = 2\omega_X$. La région dans laquelle se produit cet accrochage augmente pour des énergies plus grandes (figure 3.4c, pour $E = 0.80$) et influence une fraction non-négligeable des trajectoires. On peut observer une séparatrice qui est la limite entre les comportements accrochés et indépendants. Dans les domaines supérieur et inférieur il n'y a pas d'accrochage entre les fréquences en X et en Y , alors que le domaine central et les deux zones latérales correspondent à un accrochage des

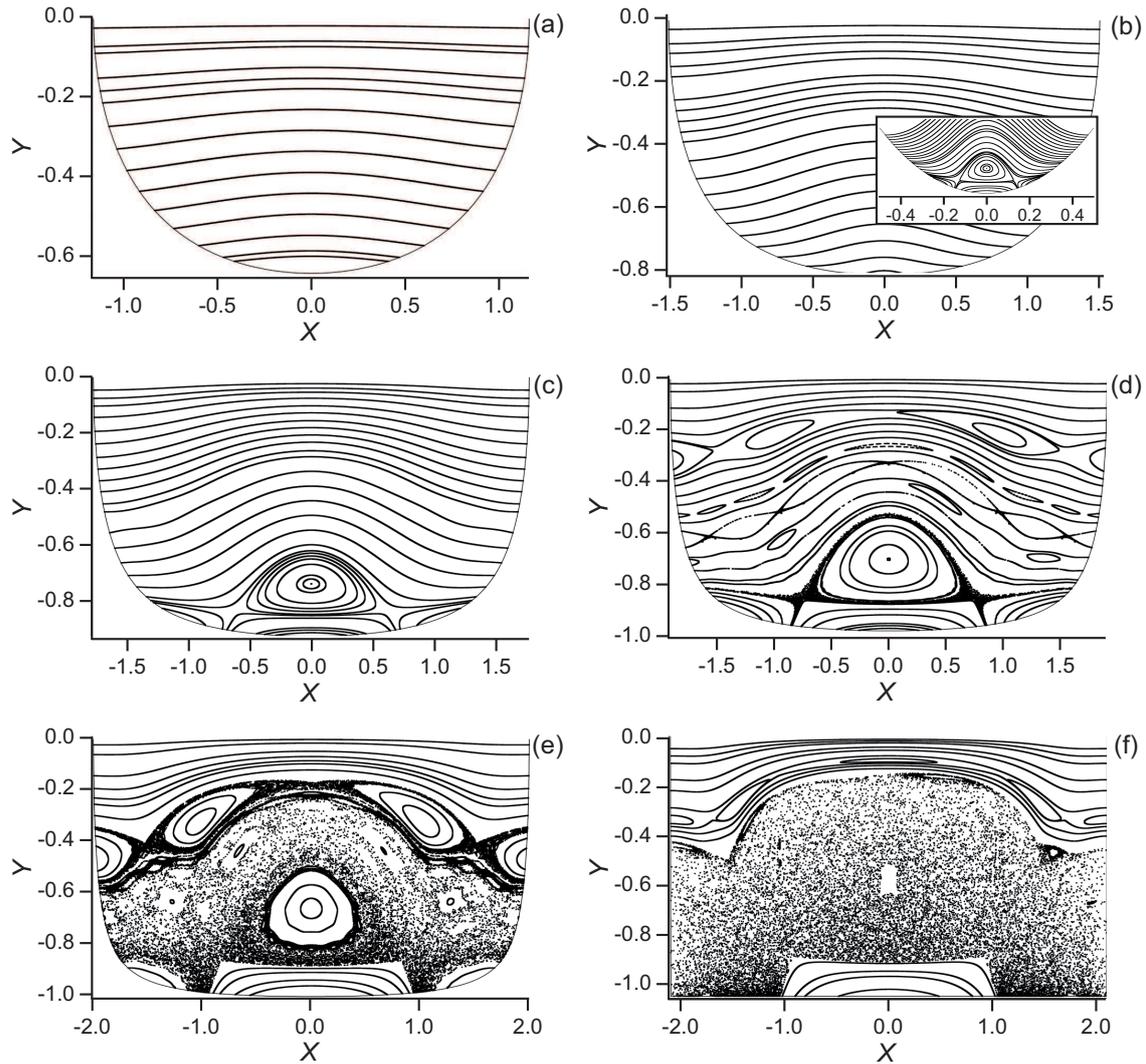


FIGURE 3.4 – Sections de Poincaré représentant la dynamique atomique dans le potentiel U_+ : projection sur le plan XY pour a) $E = 0.40$, b) $E = 0.63$, c) $E = 0.80$, d) $E = 0.88$, e) $E = 0.93$, f) $E = 1$. Figure prise de [Hennequin2010].

mouvements (chacun avec différentes phases relatives entre le mouvement selon X et selon Y).

Le chaos apparaît pour $E = 0.88$ (figure 3.4d), au voisinage de la séparatrice. Après, il se développe de sorte qu'il reste seulement quelques îlots quasi-périodiques (figure 3.4e); et finalement, pour $E = 1$ (figure 3.4f), les seuls domaines quasi-périodiques significatifs sont ceux autour des solutions périodiques avec $X = 0$ ou $Y = 0$.

Pour un atome suffisamment énergétique – c'est à dire, pour une anharmonicité suffisamment élevée – le réseau carré à 2D devrait conduire à un régime chaotique. Comme on l'a vu, ce régime est effectivement observé dans les réseaux bleus. Néanmoins, dans les réseaux rouges, le chaos n'apparaît presque pas et la dynamique reste essentiellement quasi-périodique, bien que les non-linéarités restent les mêmes. Le fait que deux réseaux légèrement différents mènent à des dynamiques si différentes est intéressant du point de vue expérimental : on peut facilement passer d'une configuration à l'autre en

changeant tout simplement le signe du désaccord laser.

Dans la section suivante on décrira mieux le comportement de l'atome piégé dans le réseau rouge [Hennequin2010b]; en particulier, l'existence de trajectoires régulières due à un phénomène de synchronisation.

3.3 Analyse détaillée du réseau avec un désaccord négatif

3.3.1 Mouvement régulier

Pour examiner le mouvement près du fond du puits $(X, Y) = (0, 0)$ du potentiel U_- (le point signalé par 1 dans la figure 3.2b), on peut faire une approximation pour des faibles amplitudes par rapport à 1. On développe donc U_- , donné par l'équation (3.5), au quatrième ordre en X et Y . De cette façon, on restreint le problème aux premiers termes anharmoniques :

$$U_- = (1 + \alpha)(D_X + D_Y) - \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (3.9a)$$

avec

$$D_X = -1 + \frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} \quad (3.9b)$$

$$D_Y = -1 + \frac{Y^2}{2} - \frac{Y^4}{24} \quad (3.9c)$$

où l'on a fixé $U_0 = 1$. D_X et D_Y ont la forme du potentiel d'un oscillateur de Duffing sans amortissement (c'est à dire, le potentiel déduit de l'équation 2.9 avec les paramètres $\beta = 1$, $\gamma = 1/6$ et $\epsilon = 0$). Les fréquences de ces oscillateurs sont identiques, grâce à la symétrie du puits de potentiel que l'on a vue dans la section 2. En conséquence, le mouvement des atomes au fond du puits est celui de deux oscillateurs de Duffing identiques couplés. Les équations du mouvement, dérivées de l'équation (3.9), sont :

$$\begin{aligned} \ddot{X} &= -\frac{\partial U_-}{\partial X} \\ &= -\omega_0^2 \left(X - \frac{X^3}{6} \right) + \frac{XY^2}{2} \end{aligned} \quad (3.10a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y} &= -\frac{\partial U_-}{\partial Y} \\ &= -\omega_0^2 \left(Y - \frac{Y^3}{6} \right) + \frac{YX^2}{2} \end{aligned} \quad (3.10b)$$

avec $\omega_0^2 = 1 + \alpha$. La forme de ces équations permet de proposer, comme solutions approchées, des solutions harmoniques :

$$X = X_0 \cos(\omega t + \psi_X) \quad (3.11a)$$

$$Y = Y_0 \cos(\omega t + \psi_Y) \quad (3.11b)$$

où X_0, Y_0, ψ_X et ψ_Y sont des constantes et ω est une fréquence constante, proche de ω_0 .

Pour connaître les conditions que ces solutions doivent satisfaire, on développe les forces données par l'équation (3.10) en composantes de Fourier $\cos(\omega t + \psi_{X,Y})$ et

$\sin(\omega t + \psi_{X,Y})$, en négligeant les termes correspondants aux harmoniques d'ordre supérieur. Après avoir différencié deux fois les solutions proposées (éq. 3.11) et les avoir introduites dans les relations (3.10), on trouve un système d'équations en X_0, Y_0, ψ_X et ψ_Y . Ce système admet six solutions – dont deux sont triviales – qui peuvent se reconnaître dans la carte de sections de Poincaré (figure 3.3), obtenues numériquement à partir du potentiel d'origine (éq. 3.5). Analysons ces solutions :

Solutions triviales Les deux solutions triviales, données par $X_0 = 0$ et $Y_0 = 0$, correspondent respectivement à l'atome oscillant selon la direction Y avec une fréquence $\omega_Y^2 = \omega_0^2 (1 - Y_0^2/s)$, et le long de X avec $\omega_X^2 = \omega_0^2 (1 - X_0^2/s)$. Un examen de l'une de ces solutions (le potentiel est invariant quand on échange X et Y) permet de voir qu'elles sont toutes les deux instables. Sur la carte de sections de Poincaré de la figure 3.3, la solution $X_0 = 0$ correspond au point fixe ($X = 0, Y = -Y_0, \dot{X} = 0$). Toutes les trajectoires s'éloignent de ce point, ce qui confirme que cette solution est instable. La deuxième solution instable $Y_0 = 0$ est la trajectoire périodique $Y = 0$, qui ne coupe jamais l'hyper-plan $\dot{Y} = 0$, puisqu'elle y est et y reste.

Solutions synchronisées En prenant $X_0 = Y_0$, on obtient les quatre autres solutions pour lesquelles les phases sont liées. Cela implique un phénomène de synchronisation, similaire à l'accrochage des fréquences dans les systèmes dissipatifs.

- Les deux premières solutions synchronisées sont $\psi_X = \psi_Y$ et $\psi_X = \psi_Y + \pi$. Elles ont les mêmes caractéristiques, car la solution en opposition de phase est équivalente à la solution en phase après un changement de signe. Ces solutions représentent une oscillation à la fréquence $\omega_1^2 = \omega_0^2 - (4 + \alpha) X_0^2/s$, qui décroît avec l'énergie, avec les amplitudes du mouvement égales dans les deux directions (de signe opposé pour la solution en opposition de phase). L'atome oscille le long d'une ligne droite de l'espace réel, qui est l'une des bissectrices du plan XY pour la solution $\psi_X = \psi_Y$, et il s'agit de l'autre bissectrice pour $\psi_X = \psi_Y + \pi$. Ces solutions sont des trajectoires périodiques stables. Elles correspondent aux points fixes ($X = \pm X_0, Y = -X_0, \dot{X} = 0$). On peut voir sur la figure 3.3 qu'autour de ces points, les sections de Poincaré sont des courbes fermées. Ces trajectoires proches de ces solutions périodiques sont quasi-périodiques (figure 3.5b), avec la même fréquence principale ω_1 et des bandes latérales correspondant à la fréquence de battement $\Omega_1 = X_0^2/4\omega_1 \sqrt{1 - \alpha/2}$, qui augmente avec l'énergie. La fréquence des bandes latérales correspond à celle de la modulation de l'amplitude des solutions voisines au point fixe.
- Les deux dernières solutions synchronisées sont $\psi_X = \psi_Y + \frac{\pi}{2}$ et $\psi_X = \psi_Y - \frac{\pi}{2}$. Elles décrivent des oscillations pour X et Y en quadrature de phase à la fréquence $\omega_2^2 = \omega_0^2 - (2 + \alpha) X_0^2/s$, décroissante avec l'énergie. Le mouvement de l'atome est un cercle autour de l'origine, et la seule différence entre ces deux solutions est le sens de rotation. Elles sont toutes les deux des trajectoires périodiques stables, correspondant aux points ($X = 0, Y = -X_0, \dot{X} = \pm \omega_2 X_0$) dans la figure 3.3, autour desquelles tournent des trajectoires avec un mouvement quasi-périodique (figure 3.5c). Ce régime quasi-périodique peut se décrire à nouveau comme une oscillation à la fréquence principale ω_2 , perturbée par des bandes latérales correspondant à la fréquence de battement $\Omega_2 = X_0^2/4\omega_2 \sqrt{\alpha/2}$, qui croît avec l'énergie.

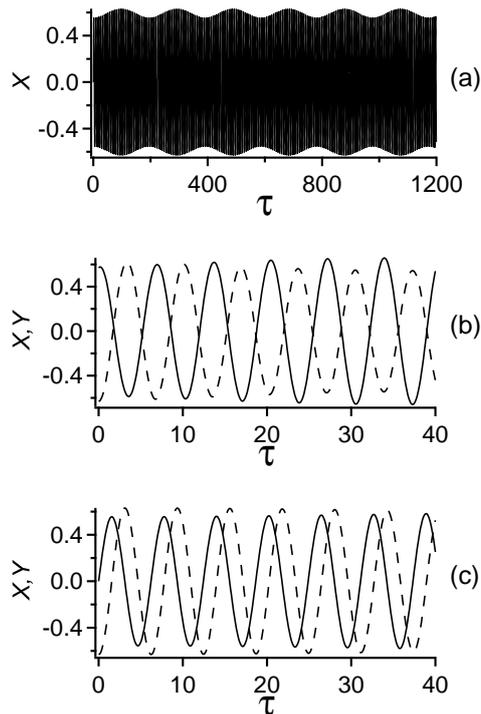


FIGURE 3.5 – Mouvement de l’atome en fonction du temps $\tau = \omega_0 t$, pour $\alpha = 0.5$ et $E = 2/9$. a) Mouvement selon X à grande échelle ; b) oscillations selon X (trait continu) et Y (trait discontinu) au voisinage de la solution en opposition de phase ; c) oscillations selon X (trait continu) et Y (trait discontinu) au voisinage de la solution en quadrature. Figure prise de [Hennequin2010b].

En résumé, même si ce système peut se décrire comme deux pendules plus une perturbation due au couplage, les effets de cette perturbation sont importants : tandis que les pendules non couplés peuvent osciller avec n’importe quelle phase relative, le couplage ne permet que quatre phases (même pour les petites oscillations, où la perturbation tend vers zéro).

3.3.2 Au-delà du troisième ordre

L’approximation de la dynamique dans le réseau rouge par des oscillateurs de Duffing couplés – que l’on appellera « approximation Duffing » – correspond à des faibles amplitudes d’oscillation par rapport à 1. Cette approximation des équations du mouvement est valable jusqu’au troisième ordre en X et Y ; cependant, pour des énergies plus élevées, quand les termes d’ordre supérieur deviennent significatifs, on peut constater que la dynamique reste essentiellement la même. On détaillera ici ce résultat, qui s’obtient des simulations numériques du mouvement.

Dans la limite où l’approximation Duffing est valable, l’étude numérique de l’évolution de X et Y et de leurs transformées de Fourier montrent que la dynamique dans ces directions est contrôlée par une fréquence principale déplacée de la fréquence ω_0 au fond du puits. Les transformées de Fourier présentent des bandes latérales plus faibles de plus d’un ordre de grandeur, et aussi des bandes latérales d’ordre deux (figure 3.6). Les simulations montrent que le régime dynamique le long de X et Y peut être

approché par celui de deux oscillations accrochées en fréquence, légèrement perturbées par une modulation. Cette modulation, exprimée par les bandes latérales, se retrouve à la fois sur l'amplitude et la phase. La combinaison de ces deux modulations mène à une différence entre les composantes à haute et basse fréquence (figure 3.6).

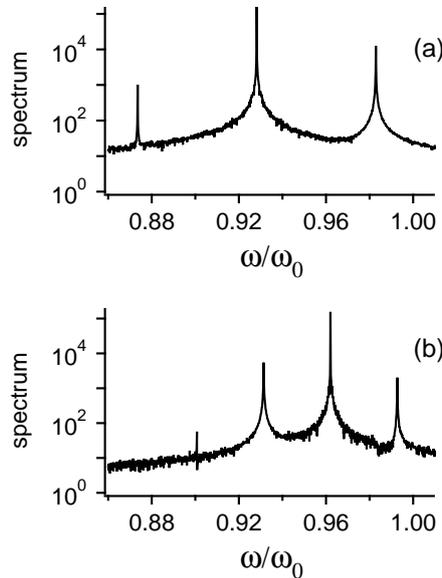


FIGURE 3.6 – Spectres du mouvement selon X , au voisinage de a) la solution en opposition de phase, b) la solution en quadrature. Ces spectres correspondent aux mouvements montrés dans les figures 3.5b et 3.5c, respectivement. Figure prise de [Hennequin2010b].

Hors du domaine de validité de l'approximation Duffing, le comportement dans le voisinage des solutions périodiques stables continue à être une oscillation périodique, où le mouvement selon les deux directions est accroché à la même fréquence. Cette oscillation est aussi perturbée par des bandes latérales faibles par rapport à la porteuse. Pour des énergies plus élevées, il y a une claire divergence entre les résultats de l'approximation Duffing et ceux des simulations. Mais l'évolution globale est toujours la même : une fréquence principale qui décroît avec l'énergie et une fréquence de battement qui augmente. Par ailleurs, le comportement du système au voisinage des solutions instables est chaotique, mais l'étendue du chaos est marginale : sur les cartes de sections de Poincaré, le chaos devient visible seulement au seuil d'énergie E_T (c'est à dire, la valeur maximale d'énergie pour rester dans le puits), en figures 3.3e et 3.3f. La dynamique des trajectoires non chaotiques qui passent au voisinage des solutions instables n'est pas liée à ces solutions, elle est une évolution du régime généré par la trajectoire périodique stable correspondante. Cette dynamique a les caractéristiques principales des régimes observés au voisinage des cycles périodiques, présentant le phénomène de synchronisation entre les directions X et Y . Il y a pourtant quelques différences par rapport au voisinage des solutions stables, car les bandes latérales et plusieurs des harmoniques ont une amplitude non-négligeable.

En conclusion, pour toutes les énergies, le mouvement de l'atome dans le puits est principalement une oscillation périodique déformée par une modulation. Cette modulation disparaît pour les solutions périodiques stables et augmente si l'on s'éloigne de ces solutions. Les fréquences de l'oscillation et celles des bandes latérales évoluent avec

l'énergie. Dans tout l'espace des phases accessible, la dynamique est essentiellement une oscillation avec la même fréquence dans les deux directions, perturbée par des bandes latérales. La fréquence principale évolue de façon continue entre les fréquences de résonance des différentes solutions stables. La fréquence de battement évolue de façon monotone aussi dans le domaine de chaque solution (approchant zéro quand on approche la séparatrice), de façon que la transition entre chaque solution périodique se passe sans aucune discontinuité.

3.3.3 Synchronisation

L'approximation du mouvement de l'atome dans le réseau optique carré à deux oscillateurs de Duffing couplés montre que, près du fond du puits, la dynamique est gouvernée par un processus de SYNCHRONISATION, ce qui est confirmé par les simulations numériques. De plus, l'inhibition du chaos dans ce système est liée à cette synchronisation.

On a vu qu'au fond du puits les mouvements de faible amplitude selon X et Y ont la même fréquence. Évidemment, quand l'énergie des atomes augmente, cette dégénérescence pourrait disparaître à cause de l'anharmonicité du potentiel. Cependant, les mouvements dans les deux directions restent accrochés à la même fréquence, à cause d'un mécanisme de synchronisation proche de l'accrochage en fréquence des systèmes dissipatifs. Cette synchronisation se produit grâce à un verrouillage de phase entre les deux directions. Elle est la conséquence de la dégénérescence des fréquences dans les deux directions et du couplage entre ces deux oscillations. Le système traité est conservatif, et donc la synchronisation n'est pas ici strictement un accrochage en fréquence, vu qu'il n'y a pas de dissipation. En conséquence, les oscillations périodiques sont modulées en phase et en amplitude.

Le phénomène de synchronisation, comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, est capable de supprimer la dynamique complexe dans les systèmes dissipatifs. Les résultats des simulations montrent que, dans le réseau rouge conservatif, l'accrochage des fréquences se produit dans une grande partie du puits. Même au bord des puits, des trajectoires chaotiques apparaissent seulement de façon marginale. Par conséquent, ce phénomène de synchronisation est un mécanisme suffisamment puissant pour expliquer la suppression du chaos dans ce système. De plus, il ne s'agit pas d'un comportement local, car l'inhibition du chaos persiste pour n'importe quels paramètres du réseau, tant que le désaccord est négatif.

Les travaux décrits dans ce chapitre ont montré comment la dynamique d'un atome dans un réseau optique peut changer drastiquement en fonction des propriétés du réseau : dans les réseaux carrés, une dynamique purement chaotique des atomes apparaît (pour le paramètre $\alpha = 0.5$) quand la fréquence du laser est décalée vers le bleu, alors que le chaos est presque inexistant quand le laser est décalé vers le rouge.

Le premier cas semblerait plus prévisible et compréhensible à cause des non-linéarités du potentiel. De plus, le couplage entre les deux directions est très fort. L'absence de chaos dans les puits de potentiel dans le cas d'un désaccord négatif constitue un changement radical inattendu dans la dynamique, par rapport au cas du désaccord négatif ; cette différence a été expliquée par un phénomène de synchronisation. Dans ce réseau conservatif rouge, et grâce à des mécanismes similaires à ceux qui interviennent dans

un système dissipatif, la synchronisation entre les mouvements dans les deux directions de l'espace est à l'origine de l'absence du chaos. Ce comportement particulier de la dynamique pour le désaccord négatif suggère une étude approfondie de la dynamique dans les réseaux carrés avec un désaccord positif, pour y déterminer l'étendue du chaos.

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie, nous avons d'abord établi les concepts du domaine des atomes froids nécessaires pour introduire le réseau optique conservatif auquel nous nous intéressons : le réseau carré à 2D. Les travaux sur ce réseau ont donné des indices sur la dynamique possible pour un atome piégé dans ses puits, qui dépend fortement du désaccord laser. Cette dynamique inclut un phénomène de synchronisation conservative pour toutes les configurations avec un désaccord négatif. En revanche, le cas particulier montré du désaccord positif présente du chaos, et ce contraste suscite l'étude approfondie qui suit sur ce système.

D'autre part, nous avons développé l'emploi des sections de Poincaré et de l'analyse des spectres comme des outils numériques pour déterminer le caractère régulier ou chaotique de la dynamique, et pour l'étudier. Ces deux éléments seront ceux utilisés dans la partie II pour traiter le cas général du réseau carré bleu.

Finalement, le traitement analytique employé pour décrire le mouvement dans le réseau carré rouge confirme la puissance de cette approximation. Le modèle du potentiel approché par des oscillateurs de Duffing couplés sera revisité dans la partie III de ce travail.

Deuxième partie
Traitement numérique

Introduction à la deuxième partie

Nous voulons étudier la dynamique du réseau conservatif carré à 2D, avec un désaccord laser positif. Dans cette deuxième partie du manuscrit, nous abordons cette étude avec un traitement numérique et nous présentons les résultats obtenus.

Nous commençons avec la description de la méthode numérique employée pour résoudre les équations du mouvement dans notre réseau carré, au chapitre 4. Nous rappelons certains éléments concernant les méthodes d'intégration numérique utilisées. Nous expliquons surtout notre approche pour la résolution des équations du mouvement. En particulier, l'intérêt de travailler avec des cartes de sections de Poincaré et les spectres des solutions. Les résultats obtenus selon les algorithmes décrits dans ce chapitre sont présentés ensuite, de façon générale, dans le chapitre 5. Ce chapitre a comme but d'exposer la grande variété des cas particuliers que présente la dynamique dans le réseau carré. Il introduit ainsi les différents cas que nous traiterons dans la suite. À cause du couplage entre les deux directions de l'espace, notre système conservatif peut présenter des mouvements périodiques, quasi-périodiques, des accrochages en fréquence et du chaos.

La présence des accrochages et du chaos est analysée dans le chapitre 6. Dans ce chapitre, l'analyse sur l'inhibition du chaos pour différentes configurations du réseau mène à identifier les résonances présentes. Les phénomènes de synchronisation observés dans le chapitre 5 sont donc associés aux dites résonances. Cette identification ouvre la voie au traitement analytique que nous développons dans la partie III de ce mémoire.

Chapitre 4

Résolution numérique des équations du mouvement

Nous voulons étudier la dynamique d'un atome dans un réseau conservatif : nous commençons par intégrer numériquement les équations du mouvement, avec les forces qui dérivent du potentiel correspondant. Dans la section 1 de ce chapitre, nous établissons les caractéristiques du système à résoudre, et l'approche adoptée pour le faire, qui implique l'étude des sections de Poincaré et des spectres des solutions. En particulier, les trajectoires sont obtenues par une intégration de type Runge-Kutta à pas variable. Nous décrivons cette méthode en section 2. Finalement, dans la section 3, nous donnons les détails concernant l'implémentation de cette méthode et des algorithmes choisis pour obtenir les sections de Poincaré et pour analyser les spectres du système.

Chapitre 4

Résolution numérique des équations du mouvement

4.1 Adaptation du problème à la résolution numérique

4.1.1 Adaptation des équations du mouvement au traitement numérique

Le système que l'on veut résoudre est composé d'un atome dans le réseau carré avec un désaccord positif, ou « réseau bleu ». Dans l'espace des phases, l'atome est repéré par ses coordonnées (X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) . Ce système est conservatif et son hamiltonien est

$$H(X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) = U(X, Y) + \frac{\dot{X}^2}{2} + \frac{\dot{Y}^2}{2} \quad (4.1a)$$

$$= E \quad (4.1b)$$

Le potentiel du réseau carré bleu que l'on étudie est donné par (voir équation 3.6) :

$$U(X, Y) = U_0 [1 + \alpha (\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y] \quad (4.2)$$

Dans notre traitement classique (par opposition à quantique), on fixe le paramètre $U_0 = 1$, pour alléger la notation. De l'expression pour le potentiel (4.2), on peut déduire les forces selon X et Y :

$$\begin{aligned} F_X &= -\frac{\partial U}{\partial X} \\ &= -(\cos Y - \alpha) \sin X \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} F_Y &= -\frac{\partial U}{\partial Y} \\ &= -(\cos X + \alpha) \sin Y \end{aligned} \quad (4.4)$$

Les équations du mouvement, qui sont des équations différentielles ordinaires (EDO) du second ordre, deviennent un système du premier ordre dans l'espace des phases. Donc, les EDO à résoudre pour déterminer la dynamique du système sont :

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X} \quad (4.5a)$$

$$\frac{d\dot{X}}{dt} = -(\cos Y - \alpha) \sin X \quad (4.5b)$$

$$\frac{dY}{dt} = \dot{Y} \quad (4.5c)$$

$$\frac{d\dot{Y}}{dt} = -(\cos X + \alpha) \sin Y \quad (4.5d)$$

Changement de variables

Le fait que notre système soit conservatif réduit le nombre de variables indépendantes. En conséquence, les trajectoires dans l'espace des phases (X, Y, \dot{X}, \dot{Y}) restent sur une hyper-surface à trois dimensions. À cause des erreurs d'arrondi, l'intégration numérique des équations (4.5), sans introduire cette contrainte sur l'énergie, donnerait des solutions où l'énergie peut varier – quoique légèrement – dans le temps. Nous explicitons donc la conservation de l'énergie en introduisant l'impulsion \mathbf{P} ¹ :

$$|\mathbf{P}|^2 = \dot{X}^2 + \dot{Y}^2 \quad (4.6)$$

De cette façon, si nous appelons $p = |\mathbf{P}|$, des équations (4.1) et (4.6), nous obtenons :

$$p = \sqrt{2(E - U(X, Y))} \quad (4.7)$$

p est alors une fonction de X et de Y .

Nous adaptons donc le calcul numérique à la nature du problème, en faisant un changement de variables. On passe des variables X, Y, \dot{X}, \dot{Y} aux variables indépendantes X, Y, θ , où θ est l'angle entre \mathbf{P} et l'axe X :

$$\theta = \arctan\left(\frac{\dot{Y}}{\dot{X}}\right) \quad (4.8)$$

Les équations du mouvement à résoudre se réduisent maintenant à :

$$\frac{dX}{dt} = p \cos \theta \quad (4.9a)$$

$$\frac{dY}{dt} = p \sin \theta \quad (4.9b)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{p} (\ddot{Y} \cos \theta - \ddot{X} \sin \theta) \quad (4.9c)$$

où $\ddot{X} = \frac{d\dot{X}}{dt}$ et $\ddot{Y} = \frac{d\dot{Y}}{dt}$ sont donnés par (4.5b) et (4.5d). La valeur de p , qui ne dépend pas de θ , peut se calculer en chaque point simplement à partir de X, Y , grâce à (4.2) et (4.7), qui donnent :

$$p = \sqrt{2[E - 1 - \alpha(\cos X - \cos Y) + \cos X \cos Y]} \quad (4.10)$$

Faible vitesse Toutefois, le choix des variables X, Y, θ ne convient plus à faible vitesse. L'équation du mouvement pour θ , donnée par (4.9c), a une singularité pour $p = 0$, ce qui pose un problème pour l'intégration lorsque $p \approx 0$. D'ailleurs, en un point de rebroussement, la valeur de θ , donnée par l'équation (4.8), n'est pas définie. On choisit, par conséquent, de revenir aux variables X, Y, \dot{X}, \dot{Y} , seulement pour les points proches de cette singularité.

1. Nous prenons la masse atomique égale à 1.

4.1.2 Résolution de la dynamique pour l'analyse via les sections de Poincaré

Pour étudier la dynamique de notre système à 3 degrés de liberté indépendants, donnée par les équations (4.9), l'outil principal que nous voulons employer est la section de Poincaré (notée dorénavant SP). En examinant une carte de SP, on peut analyser la dynamique qui a lieu pour une certaine valeur du paramètre α et une énergie E .

La surface choisie pour obtenir les SP, décrite en termes des variables (4.5), est l'hyper-plan $\dot{Y} = 0$. On restreint les points de ces sections à ceux qui correspondent à une traversée de l'hyper-plan dans un sens croissant de \dot{Y} . On indique cette restriction par $\dot{Y} = 0+$. En termes des coordonnées X, Y, θ, p employées pour le calcul des trajectoires complètes, les points choisis $\dot{Y} = 0+$ impliquent $\theta = 0+$ ou $\pi-$, et donc la variable $\dot{X} = p \cos \theta$ devient plus naturelle à employer pour les SP ($\dot{X} = \pm p$). Notre but est donc de calculer une carte de SP (X, Y, \dot{X}) qui caractérise la dynamique du système pour des valeurs données du paramètre α et de l'énergie E .

Pour créer cette carte avec α et E donnés, il nous faut calculer plusieurs solutions et leurs SP pour un ensemble de conditions initiales, de sorte que les SP remplissent l'espace d'une façon suffisamment dense et uniforme : comme la dynamique dépend des conditions initiales, il faut examiner une grande quantité de points pour avoir une image complète de l'espace des phases. L'ensemble des SP donne, en conséquence, la carte de SP qui permet d'étudier l'évolution de la dynamique en tout point de l'espace des phases, en fonction des conditions initiales.

Quelques considérations de l'approche adoptée pour la résolution numérique de la dynamique sont :

Trajectoire et section de Poincaré Chaque solution $\mathbf{X}(X(t), Y(t), \theta(t))$ des équations (4.9) obtenue numériquement devient un vecteur $\mathbf{X}_n(X_n, Y_n, \theta_n)$. Pendant le calcul, le nombre de points évalués n'est pas déterminé à l'avance. On s'arrête lorsque l'on a une SP suffisamment dense, c'est à dire, d'après nos essais, $N_{SP} = 10^4$ points. Par ailleurs, nous enregistrons aussi les trajectoires elles-mêmes. Pour obtenir une description suffisante de la dynamique, nous avons estimé qu'il fallait garder environ 100 points équidistants par période, ce qui nous amène à sauvegarder $N \sim 10^6$ points par trajectoire.

Pour calculer une solution \mathbf{X} , nous choisissons son point initial $\mathbf{X}_0(X_0, Y_0, \theta_0)$. Ces conditions initiales déterminent un point dans l'espace des phases qui correspond donc à une seule trajectoire particulière. Les conditions initiales pour les trajectoires calculées sont choisies pour obtenir une carte de SP suffisamment complète.

Carte de sections de Poincaré Nous voulons construire une carte de SP uniforme dans l'espace (X, Y, \dot{X}) : deux SP trop proches n'apportent que peu d'information tout en requérant du temps de calcul. D'autre part, un grand espace non exploré pourrait nous faire rater des aspects importants de la dynamique. Pour garantir l'obtention de suffisamment d'informations dans un temps de calcul raisonnable, nous considérons la projection XY de la surface où tombent les SP. Cette projection est bornée par les valeurs extrémales X_{min} et X_{max} , et Y_{min} et Y_{max} (figure 4.1). Si l'on sépare les intervalles (X_{min}, X_{max}) et (Y_{min}, Y_{max}) en 20 parties chacun, de sorte de créer un maillage de 20×20 cellules, on peut vérifier l'uniformité de la carte de SP en contrôlant

le remplissage du maillage.

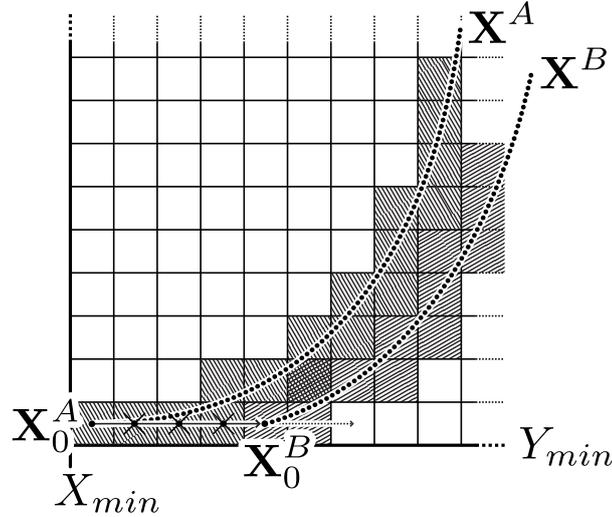


FIGURE 4.1 – Construction de la carte de sections de Poincaré. La projection XY de la carte (bornée par $X_{min,max}$ et $Y_{min,max}$) est divisée en cellules : celles déjà visitées sont hachurées dans la figure. \mathbf{X}_0^A est le point initial de la première trajectoire calculée, \mathbf{X}^A . Le point initial de la deuxième trajectoire, \mathbf{X}_0^B , devrait tomber dans la cellule à coté de \mathbf{X}_0^A , mais on la saute car elle a été visitée par la SP de \mathbf{X}^A . \mathbf{X}_0^B croît selon l'équation (4.11) jusqu'à trouver une cellule vide.

La construction de la carte de SP détermine ainsi le choix du point initial $\mathbf{X}_0(X_0, Y_0, \theta_0)$ de la trajectoire à obtenir. Pour la première trajectoire calculée, les conditions initiales X_0 et Y_0 sont choisies proches² des minima X_{min} et Y_{min} . Ensuite, elles croissent selon les équations (4.11a) et (4.11b), pour visiter chaque cellule du maillage, et ils vont jusqu'à des valeurs proches des maxima X_{max} et Y_{max} . La vitesse initiale est toujours fixée parallèle à X , pour garantir que le premier point appartienne à la SP (sin $\theta_0 = 0+$) :

$$X_0 = X_{min} + \frac{j_X + 0.5}{20} (X_{max} - X_{min}) \quad (4.11a)$$

$$Y_0 = Y_{min} + \frac{j_Y + 0.5}{20} (Y_{max} - Y_{min}) \quad (4.11b)$$

$$\theta_0 = 0 \quad (4.11c)$$

où j_X et j_Y sont entiers.

Le centre de chaque cellule du maillage est potentiellement le point initial d'une trajectoire. Toutefois, nous n'allons pas calculer 400 trajectoires. Les points de la SP de chaque trajectoire obtenue visitent un certain nombre de cellules, comme on voit sur la figure 4.1. Si l'on exclut ces cellules pour ne pas calculer d'information redondante, le point initial de la trajectoire suivante à obtenir doit respecter les équations (4.11a) et (4.11b), mais il doit aussi ne pas se trouver dans une cellule déjà visitée par les SP des trajectoires précédentes. La construction de la carte de SP – et donc le calcul de nouvelles trajectoires – se termine quand \mathbf{X}_0 atteint X_{max} et Y_{max} .

Les valeurs extrémales de X et Y peuvent se calculer à partir de l'équation (4.2), pour une énergie cinétique nulle ($p = 0$), de sorte que $U(X, Y) = E$. On fixe $Y_{max} = 0$,

2. 2.5% de l'intervalle $(X_{max} - X_{min})$.

puisque le centre du puits de potentiel est en $(0, 0)$:

$$X_{max} = \arccos\left(1 - \frac{E}{(1 - \alpha)}\right) \quad (4.12a)$$

$$X_{min} = -X_{max} \quad (4.12b)$$

$$Y_{max} = 0 \quad (4.12c)$$

$$Y_{min} = -\arccos\left(1 - \frac{E}{(1 + \alpha)}\right) \quad (4.12d)$$

4.1.3 Considérations pour l'analyse des spectres

Transformée de Fourier

Les solutions représentées dans la carte de SP seront aussi analysées via leur spectre, c'est à dire que l'on veut aussi calculer les transformées de Fourier des variables X et Y . Pour alléger la description, on ne mentionnera que la transformée de Fourier de la coordonnée X . Comme les trajectoires obtenues numériquement sont des signaux discrets, on calcule leurs FFT (*Fast Fourier Transform*) via le logiciel Igor Pro³.

Notre analyse des spectres emploie une méthode qui fait usage de la fonction SINUS CARDINAL. Cette fonction est couramment utilisée dans la reconstruction de signaux continus [Stenger1993], en particulier, par la formule d'interpolation de Shannon-Whittaker [Jerri1977, Marks1991]. En cherchant la meilleure méthode de caractérisation des pics dans chaque spectre, nous avons réalisé des tests avec des procédures comme la commande « findpeak » du logiciel Igor Pro [Wavemetrics2013], des ajustements avec une courbe lorentzienne, ou une interpolation parabolique à partir de trois points consécutifs. Nous avons constaté que l'utilisation de ces méthodes donnent des valeurs assez bonnes pour les fréquences mais conduisent à une erreur pouvant atteindre 30% dans la détermination de l'amplitude des pics. Cela est dû au fait que les points qui forment les FFT ne contiennent pas, en général, les vrais maxima des pics.

Le signal $X(t)$, dont nous voulons calculer la transformée de Fourier, est une fonction continue que nous avons « échantillonnée » en N points en faisant la résolution numérique, pour obtenir X_n . Par ailleurs, la FFT que nous calculons à partir de ces N points, \tilde{X}_n , est équivalente à la discrétisation de la transformée de Fourier $\tilde{X}(\omega)$ du signal continu, $X(t)$ (figure 4.2). En pratique, ce ne sont pas les maxima de la FFT qui nous intéressent. Nous cherchons en fait les maxima de la vraie transformée de Fourier $\tilde{X}(\omega)$ dont nous ne possédons que l'échantillonnage. La méthode du sinus cardinal nous permet d'interpoler les valeurs de $\tilde{X}(\omega)$ à partir des points de \tilde{X}_n , comme nous l'expliquons ci-dessous.

Sinus cardinal

Considérons le signal d'oscillation :

$$a(t) = A \cos(\omega_R t) \quad (4.13)$$

3. En plus des outils pour le calcul et l'analyse de l'information et le traitement des graphes, Igor Pro a un langage de programmation propre, que nous avons utilisé pour la création des routines de résolution numérique. Nous avons employé ce logiciel pour la majeure partie de ce travail. <http://www.wavemetrics.com>.

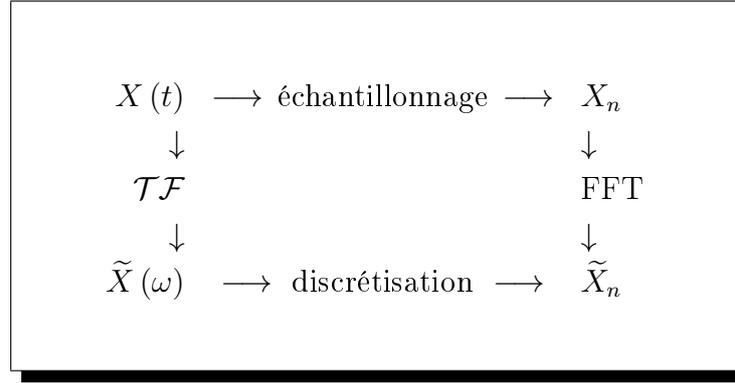


FIGURE 4.2 – Schéma des transformées de Fourier de signaux continus et discrets. L'échantillonnage du signal continu $X(t)$ donne le signal discret X_n . La transformée de Fourier \mathcal{TF} de $X(t)$ est $\tilde{X}(\omega)$. La FFT de X_n est \tilde{X}_n . Cette dernière équivaut au résultat obtenu de la discrétisation de $\tilde{X}(\omega)$.

A et ω_R sont les caractéristiques du pic (son amplitude et la fréquence du mouvement) que l'on essaie de déterminer. Expérimentalement, on mesure ce signal durant une fenêtre de temps T . Cela équivaut à un signal d'oscillation original présent seulement pendant une durée T :

$$a_T(t) = A \cos(\omega_R t) g_T(t) \quad (4.14a)$$

$$g_T = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & T < t \end{cases} \quad (4.14b)$$

La transformée de Fourier d'une impulsion rectangulaire est la fonction SINUS CARDINAL (figure 4.3) :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad (4.15)$$

Par conséquent, la transformée de Fourier $\tilde{z}(\omega)$ du signal donné par l'équation (4.14) est :

$$\tilde{z}(\omega) = A \text{sinc} \left[(\omega - \omega_R) \frac{T}{2} \right] \quad (4.16)$$

Comme mentionné précédemment, la FFT \tilde{z}_n peut se voir comme une discrétisation de $\tilde{z}(\omega)$. La résolution $\delta\omega$ de cette discrétisation est donnée, dans ce cas, par la fréquence f_S employée pour échantillonner le signal $a_T(t)$ en N points (voir figure 4.2) :

$$\delta\omega = 2\pi \frac{f_S}{N} \quad (4.17)$$

$$= \frac{2\pi}{T} \quad (4.18)$$

Prenons trois points $\tilde{z}_0, \tilde{z}_{-1}, \tilde{z}_1$ de la FFT, où \tilde{z}_0 est un maximum local et $\tilde{z}_{-1}, \tilde{z}_1$ ses premiers voisins. Ces points satisfont l'équation (4.16), c'est à dire que, d'une part :

$$\tilde{z}_0 = A \left| \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right| \quad (4.19)$$

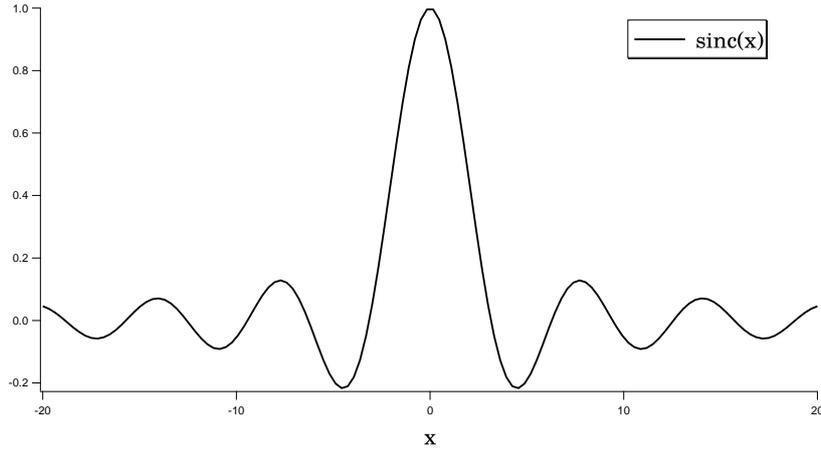


FIGURE 4.3 – Fonction sinus cardinal.

où $\gamma = (\omega_0 - \omega_R)T/2$ et ω_0 est la fréquence correspondant au point \tilde{z}_0 . D'autre part, les fréquences ω_{-1} et ω_1 , correspondant à \tilde{z}_{-1} et \tilde{z}_1 , respectivement, se trouvent dans le spectre à une distance $\delta\omega$ de ω_0 . Donc, de l'équation (4.18), on peut écrire que les points \tilde{z}_{-1} et \tilde{z}_1 satisfont :

$$\tilde{z}_{-1} = A \left| \frac{\sin \gamma}{\pi + \gamma} \right| \quad (4.20a)$$

$$\tilde{z}_1 = A \left| \frac{\sin \gamma}{\pi - \gamma} \right| \quad (4.20b)$$

À partir des équations (4.19) et (4.20), on peut calculer :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{max} &= A \\ &= \tilde{z}_0 \frac{\gamma}{\sin(\gamma)} \end{aligned} \quad (4.21)$$

où

$$\gamma = \pi \frac{\tilde{z}_1 - \tilde{z}_{-1}}{\tilde{z}_1 + \tilde{z}_{-1}} \quad (4.22)$$

et

$$\omega_R = \omega_0 + \frac{2\gamma}{T} \quad (4.23)$$

Il est aussi possible de déterminer γ comme :

$$\gamma = \begin{cases} \pi \frac{\tilde{z}_1}{\tilde{z}_0 + \tilde{z}_1} & \tilde{z}_1 > \tilde{z}_{-1} \\ -\pi \frac{\tilde{z}_{-1}}{\tilde{z}_0 + \tilde{z}_{-1}} & \tilde{z}_{-1} > \tilde{z}_1 \end{cases} \quad (4.24)$$

Nous avons vérifié que la détermination de γ avec la relation (4.24) donne des résultats avec moins d'erreur que ceux de l'équation (4.22). Donc, les résultats pour la

position (éq. 4.23) et l'amplitude (éq. 4.21) des pics sont obtenus à partir des équations (4.24), que l'on récrit dans une seule relation comme :

$$\gamma = \text{signe}(\tilde{z}_1 - \tilde{z}_{-1}) \pi \frac{\max(\tilde{z}_1, \tilde{z}_{-1})}{z_0 + \max(\tilde{z}_1, \tilde{z}_{-1})} \quad (4.25)$$

4.2 Méthode pour la résolution des équations du mouvement

Nous présentons dans cette section la méthode numérique utilisée pour résoudre les équations (4.9) – ou (4.5) pour les faibles vitesses – qui est une méthode de Runge-Kutta à pas variable. Le contenu de cette section s'appuie principalement sur la référence [Press1992].

4.2.1 Méthode de Runge-Kutta

Pour introduire les méthodes d'intégration numérique, considérons l'EDO :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (4.26)$$

L'algorithme de résolution d'EDO le plus simple est la méthode d'Euler : connaissant la valeur x_n du point à l'instant t_n cette méthode propose, au temps $t_{n+1} = t_n + h$, la valeur $x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n)$. La méthode d'Euler a une précision du premier ordre, c'est à dire que l'erreur commise est $O(h^2)$ (figure 4.4).

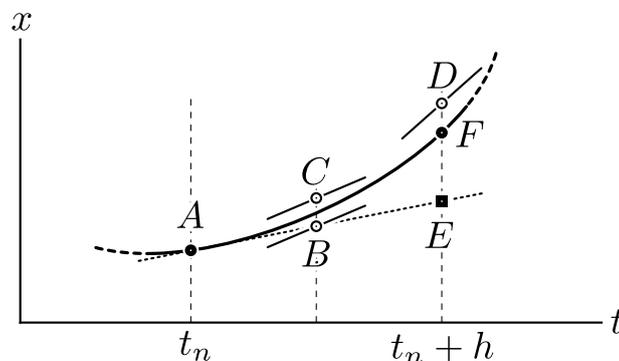


FIGURE 4.4 – Résolution numérique d'une EDO par les méthodes d'Euler et RK4. Euler estime l'incrément $x_{n+1} - x_n$ en fonction de la dérivée au point initial A. Cette estimation est représentée par le point E à $t_n + h$. Dans RK4, l'incrément est calculé à partir d'une moyenne pondérée des dérivées (et donc des incréments, éq. 4.30) évaluées aux points A, B, C et D. L'estimation de RK4 est représentée par le point F à $t_n + h$.

La MÉTHODE DE RUNGE-KUTTA (dorénavant appelée RK) d'intégration d'EDO propage une solution sur un intervalle en combinant l'information de plusieurs pas du type Euler. RK réduit l'erreur en évaluant f en divers points intermédiaires. Elle utilise ensuite cette information pour compenser les erreurs : les différentes façons d'évaluer la fonction f donnent le même résultat au premier ordre mais elles diffèrent sur les termes d'ordre supérieur de la série de Taylor. La notion de base de RK est d'éliminer

les termes d'erreur, ordre par ordre, en choisissant la bonne combinaison de ces termes d'ordre supérieur.

Par exemple, la RK d'ordre 2 (RK2) prend un pas d'essai au milieu de l'intervalle h , et elle évalue f – et l'incrément – en ce point-là :

$$k_1 = hf(t_n, x_n) \quad (4.27a)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (4.27b)$$

Ces valeurs sont alors utilisées pour l'intervalle complet :

$$x_{n+1} = x_n + k_2 \quad (4.28)$$

L'erreur est maintenant du troisième ordre, $O(h^3)$.

Une méthode très utilisée est la RK4, où l'incrément est évalué quatre fois par pas h , une fois au point initial (k_1 , à t_n), deux fois à deux points d'essai intermédiaires (k_2 et k_3 , à $t_n + h/2$), et une fois à un point d'essai final (k_4 , à $t_n + h$) :

$$k_1 = hf(t_n, x_n) \quad (4.29a)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (4.29b)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (4.29c)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_3) \quad (4.29d)$$

À partir de ces incréments, la valeur finale de la fonction est calculée (figure 4.4) :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6} \quad (4.30)$$

L'erreur est ainsi $O(h^5)$.

La RK4 est l'une des plus employées parce que, pour des ordres $M > 4$, on a besoin d'un nombre P d'évaluations de la fonction (k_i , $i = 1, 2, \dots, P$) qui devient strictement supérieur à M . Par exemple, l'ordre $M = 5$ implique $P = 6$ évaluations, $M = 6$ implique $P = 7$, $M = 7$ implique $P = 9$, etc. En conséquence, pour ces méthodes d'ordre supérieur, le temps de calcul croît plus vite que l'ordre de l'erreur restante. Il existe pourtant d'autres algorithmes plus performants, obtenus à partir d'une RK d'ordre M , où une autre combinaison des P évaluations de la fonction donne une RK d'ordre $M - 1$. Ces méthodes de RK à formules emboîtées, développées par Fehlberg, sont les plus efficaces car elles permettent d'adapter le pas au système.

4.2.2 Méthode de Runge-Kutta à pas variable

4.2.2.1 Méthodes de Runge-Kutta à formules emboîtées

Dans un calcul de trajectoire, les RK à pas fixe traitent chaque étape de façon identique : le comportement précédent de la solution n'est pas utilisé dans sa propagation. Cela se justifie au niveau mathématique parce que tous les points de la trajectoire d'une EDO peuvent servir comme point initial. Or, il est important que l'intégrateur d'EDO emploie l'information du comportement précédent pour contrôler sa performance, et pour adapter en conséquence la taille du pas, h . Par exemple, dans une région d'intégration où la solution est constante, la résolution numérique peut se faire en prenant des

grands pas sans augmenter l'erreur, ce qui réduit le temps de calcul. En revanche, pour des zones où la solution varie drastiquement, il est nécessaire d'investir plus de temps pour prendre des petits pas d'intégration et ne pas commettre des grandes erreurs. Dans ce but, l'implémentation d'un contrôle adaptatif du pas implique que l'algorithme évalue l'erreur commise à chaque étape. Ce type de contrôle permet d'atteindre une précision prédéterminée dans la solution (et/ou ses quantités liées) avec un nombre minimal de calculs. Certes, le temps de calcul est augmenté dans certaines étapes, mais il est optimisé dans celles qui ont un comportement monotone, de sorte que le gain en efficacité total peut atteindre des facteurs de 10, 100, ou plus. Les algorithmes avec des ajustements du pas les plus efficaces sont ceux basés sur des MÉTHODES DE RUNGE-KUTTA À FORMULES EMBOÎTÉES, comme celui que nous avons implémenté, décrit ci-après.

L'idée derrière les méthodes de RK emboîtées est d'employer deux RK de différents ordres, M et $M - 1$, en utilisant les mêmes P évaluations calculées par la méthode d'ordre M ⁴. La différence entre les deux estimations numériques de $x(t + h)$ permet d'estimer l'erreur et donc d'ajuster le pas. La formule avec laquelle nous travaillons utilise une RK5, et une deuxième combinaison des 6 évaluations de la fonction donne une méthode d'ordre 4. La RK5 est :

$$k_1 = hf(t_n, x_n) \quad (4.31a)$$

$$k_2 = hf(t_n + a_2h, x_n + b_{21}k_1) \quad (4.31b)$$

$$k_3 = hf(t_n + a_3h, x_n + b_{31}k_1 + b_{32}k_2) \quad (4.31c)$$

$$k_4 = hf(t_n + a_4h, x_n + b_{41}k_1 + b_{42}k_2 + b_{43}k_3) \quad (4.31d)$$

$$k_5 = hf(t_n + a_5h, x_n + b_{51}k_1 + b_{52}k_2 + b_{53}k_3 + b_{54}k_4) \quad (4.31e)$$

$$k_6 = hf(t_n + a_6h, x_n + b_{61}k_1 + b_{62}k_2 + b_{63}k_3 + b_{64}k_4 + b_{65}k_5) \quad (4.31f)$$

$$x_{n+1} = x_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6) \quad (4.31g)$$

où les a_i , b_{ij} et c_i sont des coefficients constants, choisis de façon à minimiser l'erreur. La RK4 emboîtée, construite à partir des mêmes k_i mais avec des coefficients c_i^* , peut s'écrire comme :

$$x_{n+1}^* = x_n + c_1^*k_1 + c_2^*k_2 + c_3^*k_3 + c_4^*k_4 + c_5^*k_5 + c_6^*k_6 + O(h^5) \quad (4.32)$$

Les valeurs des constantes a_i , b_{ij} , c_i et c_i^* , trouvées par J. R. Cash et A. H. Karp en imposant les critères d'erreur souhaités pour la solution [Cash1990], optimisent l'efficacité de la méthode ; elles sont données dans le tableau 4.1.

La différence $\Delta \equiv x_{n+1} - x_{n+1}^*$ entre les deux estimations de $x(t + h)$ (éqs. 4.31g et 4.32) est un indicateur de l'erreur commise :

$$\Delta = \sum_{i=1}^6 (c_i - c_i^*) k_i \quad (4.33)$$

4.2.2.2 Contrôle adaptatif du pas

On souhaite atteindre un niveau de précision pour lequel Δ n'est pas trop grand ; mais on veut aussi un temps de calcul le plus court possible, donc un Δ trop petit ne

4. Pour que les P évaluations donnent une RK d'ordre $M - 1$, il faut choisir les coefficients des différents k_i de sorte que l'erreur soit d'ordre M .

i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1	0	0	0	0	0	0	$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$	0	0	0	$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$	0	0	$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$	0	0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
j		1	2	3	4	5		

TABLE 4.1 – Coefficients Cash-Karp de la méthode de Runge-Kutta à formules emboîtées. Les méthodes RK sont d'ordres 4 et 5 [Cash1990].

convient pas non plus. Afin de satisfaire les deux critères, on modifie la taille du pas, h . Pour savoir comment maintenir l'erreur limitée, il faut connaître la relation entre Δ et h : à partir des équations (4.31g) et (4.32), Δ est d'ordre h^5 . Si l'on prend un pas h_1 qui donne une erreur Δ_1 , le pas h_0 qui conduit à l'erreur désirée⁵, Δ_0 , peut être estimé par

$$h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{\frac{1}{5}} \quad (4.34)$$

Cette relation peut être utilisée de deux façons : si $|\Delta_1| > |\Delta_0|$, l'erreur est trop grande et l'équation (4.34) dit de combien il faut réduire h pour refaire le calcul en cours ; en revanche, si $|\Delta_1| < |\Delta_0|$, elle indique que l'on peut augmenter h et de combien le faire sans inconvénient pour le pas suivant.

Jusqu'à présent, le contrôle de l'erreur limite celle de chaque pas individuellement. Le calcul peut aussi nécessiter de contrôler l'accumulation globale d'erreur du début à la fin de l'intégration. Or, la diminution de la valeur de h mène à un plus grand

5. C'est en fait un vecteur qui contient la précision désirée pour chaque équation de l'ensemble d'EDO. En général, cette précision est la même pour toutes les équations. S'il faut adapter la précision aux différentes variables qui interviennent dans les EDO, on doit prendre une valeur de tolérance universelle, et aussi spécifier les composantes du vecteur pour chaque variable.

nombre total de pas. Pour limiter l'erreur totale, Δ_0 devra être diminué en fonction de h . Pourtant, si Δ_0 est proportionnel à h , l'équation (4.34) n'est plus vraie ; dans (4.34), on doit utiliser l'exposant 0.25 ($1/4$) au lieu de 0.2. On emploie alors le critère suivant : si l'on augmente la taille du pas, on prend l'exposant le plus petit, et si l'on diminue la taille du pas, on prend l'exposant le plus grand. L'équation (4.34) est donc remplacée par :

$$h_0 = Sh_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^l \quad (4.35)$$

$$l = \begin{cases} 0.2 & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ 0.25 & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases}$$

où S est un *safety factor*, plus petit que 1. Il est introduit pour tenir compte du fait que les estimations de l'erreur ne sont pas exactes ; elles sont précises seulement à l'ordre de h .

4.3 Implémentation des algorithmes

La méthode RK à pas variable décrite dans la section précédente a été implémentée dans une routine qui, pendant le calcul des solutions des équations du mouvement, permet aussi d'obtenir les SP. Cette routine s'appelle **POINCARE**, et elle trouve une solution particulière et sa SP pour (α, E) donnés, et pour des conditions initiales choisies. Dans le but d'obtenir la carte de SP et les transformées de Fourier des solutions, nous avons introduit une autre routine, **AUTOMATIC**, qui emploie **POINCARE** comme sous-routine. **AUTOMATIC** calcule plusieurs trajectoires, leurs transformées de Fourier, et leurs SP pour un ensemble de conditions initiales, en créant la carte de SP.

Ces routines ont été écrites dans un langage de programmation propre du logiciel choisi pour l'approche numérique de notre système, Igor Pro. Dans la section ci-après, nous décrivons la partie de **POINCARE** destinée à l'obtention des solutions par la méthode RK à pas variable. Dans les sections suivantes, nous traitons la partie qui calcule les SP, et l'emploi d'**AUTOMATIC** pour la carte de SP et les transformées de Fourier.

4.3.1 Trajectoire et section de Poincaré

Pour obtenir une solution des équations du mouvement (4.9) (ou éqs. 4.5, pour les faibles vitesses) et la SP correspondante, l'intégration numérique est faite par notre routine principale, **POINCARE**⁶. **POINCARE** appelle d'autres sous-routines : elle a besoin d'une routine pour implémenter le contrôle du pas (*Runge-Kutta Quality-controlled Step* ou **RKQS**), d'une routine pour utiliser les RK4 et RK5 emboîtées dans un algorithme du type Cash-Karp (*Runge-Kutta Cash-Karp* ou **RKCK**), et de la routine qui calcule les dérivées (**DERIVS**). Toutes ces routines ont la forme trouvée dans la littérature [Press1992] pour implémenter les méthodes de RK emboîtées du type Cash-Karp ; mais elles ont été adaptées aux particularités de notre problème, donc nous les décrivons ici.

6. **POINCARE** incorpore la routine souvent appelée **ODEINT**, qui implémente la méthode RK à pas variable [Press1992].

4.3.1.1 POINCARE

La routine **POINCARE** calcule une solution de l'ensemble d'EDO décrite par le vecteur $\mathbf{X}(X(t), Y(t), \theta(t), p(t))$, et calcule aussi la SP de cette solution. La trajectoire \mathbf{X} sauvegardé contient un nombre N de points $\mathbf{X}_n(t_n)$ ($n = 0, 1, \dots, N - 1$).

Paramètres d'entrée Les paramètres d'entrée pour cette routine sont la valeur de α et celle de l'énergie E . Un point de départ de l'intégration \mathbf{X}_0 doit aussi être indiqué (X_0, Y_0, θ_0 suffisent)⁷, et on introduit la taille d'essai du premier pas, h_{try} . Dans notre cas, $h_{try} = 0.01$.

Description Pour effectuer un pas d'intégration de t_n à t_{n+1} , qui avance la solution de \mathbf{X}_n à \mathbf{X}_{n+1} , **POINCARE** appelle la routine **RKQS**. Après le pas, **POINCARE** garde les valeurs de t_{n+1} , les valeurs $X_{n+1}, Y_{n+1}, \theta_{n+1}$ intégrées pour ce pas, et la valeur de p_{n+1} calculée à partir de X_{n+1}, Y_{n+1} (et à partir des valeurs de α et de E). Les divers pas d'intégration conduisent à des instants différents, mais on garde les valeurs uniquement à intervalles de 0.1.

Comme nous l'avons vu, à faible vitesse, les coordonnées X, Y, θ, p ne conviennent plus, et il faut faire un changement de variables. La routine vérifie la valeur de p avant de faire le pas et, si la vitesse est faible ($p < 0.02$), on travaille avec X, Y, \dot{X}, \dot{Y} . Après avoir intégré ces variables, **POINCARE** calcule et garde X, Y, θ, p . Si la vitesse est suffisamment grande ($p > 0.02$), on fait l'intégration des variables X, Y, θ . Après chaque pas, la routine vérifie si la vitesse est devenue faible ou suffisante pour que $\dot{\theta}$ ne diverge pas, et elle change en conséquence de variables.

À la fin du pas, **POINCARE** réintroduit les valeurs calculées comme les valeurs au début du point suivant, qui seront employées par la routine **RKQS**. **POINCARE** réintroduit aussi sur **RKQS** l'estimation de la taille du prochain pas donnée par cette routine, excepté si la taille du pas proposée h_{try} est trop grande par rapport à l'intervalle de temps entre points sauvegardés ($h_{try} > 0.1$) : dans ce cas, la taille d'essai pour le prochain pas est $0.1 - \delta t$, où δt est le temps depuis le dernier pas sauvegardé. La boucle est répétée jusqu'à ce que le nombre de points calculés est suffisant.

La routine **POINCARE** calcule aussi la SP de la trajectoire. Pour identifier les points qui appartiennent aux SP, on introduit un contrôle supplémentaire pendant l'obtention des trajectoires. Chaque fois que **POINCARE** identifie un changement du signe – de négatif à positif – de la variable \dot{Y} (ou bien du signe de $\sin \theta$, quand il s'agit de points où l'on travaille avec les coordonnées X, Y, θ, p), cette routine calcule le point de traversée du 0 par interpolation linéaire. De cette façon, on peut évaluer et sauvegarder les coordonnées X, Y et \dot{X} du point de traversée, ainsi que l'instant de traversée.

Valeurs de retour Le retour de **POINCARE** est la SP et la solution \mathbf{X} échantillonnée, pour les valeurs choisies de α , de E et de la position initiale.

4.3.1.2 RKQS

La routine **RKQS** avance d'un pas la résolution numérique. Elle appelle la routine **RKCK**, qui implémente la méthode de RK emboîtées du type Cash-Karp, et elle contrôle l'erreur de troncation locale pour garantir la précision et ajuster la taille du pas.

7. Ceci est fait par **AUTOMATIC** quand cette routine appelle **POINCARE**.

Paramètres d'entrée Les paramètres d'entrée sont les valeurs des variables qui forment le vecteur \mathbf{X}_n au point de départ t_n . Il faut également introduire la taille du pas à essayer h_{try} . Toutes ces valeurs sont évaluées par POINCARE, en fonction du pas précédent⁸. On doit aussi établir des paramètres fixes comme la précision désirée Δ_0 , $\Delta_0 = 1 \times 10^{-8}$, et le *safety factor* S , que nous prenons égal à la valeur couramment utilisée, $S = 0.9$.

Description La routine appelle RKCK, en lui indiquant \mathbf{X}_n et h_{try} , pour que RKCK avance d'un pas la solution par la méthode de RK emboîtées du type Cash-Karp. Une fois obtenues de RKCK \mathbf{X}_{n+1} , la taille du pas h et les erreurs commises dans chaque variable, RKQS contrôle l'erreur, pour adapter h en conséquence. Pour faire cela, la routine définit :

$$\tilde{\Delta}_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} \quad (4.36)$$

où Δ_1 est pris égal à la valeur absolue de l'erreur maximale parmi les erreurs commises, pour ce pas, dans les trois variables intégrées. On ajuste donc h en fonction de l'équation avec la plus grande erreur. Si l'erreur est petite, $\tilde{\Delta}_1 < 1$, on garde la taille du pas employé h comme h_{did} . Si l'erreur est trop grande ($\tilde{\Delta}_1 > 1$), on essaie un nouveau pas plus petit :

$$h_{did} = S \times h \times \tilde{\Delta}_1^{-0.25} \quad (4.37)$$

On vérifie que cette réduction conduit à une erreur $\tilde{\Delta}_1 < 1$ (en appelant RKCK) avec h_{did} ; si ce n'est pas le cas, on répète (4.37) jusqu'à satisfaire le critère.

Finalement, on fait une estimation pour la taille du prochain pas, h_{next} , à partir de la taille du pas que l'on vient d'employer, h_{did} . Il y a deux cas : si $\tilde{\Delta}_1 > \Delta_C$, où $\Delta_C = (5/S)^{-1/0.2}$ est une erreur minimale de contrôle [Press1992], on incrémente la taille du pas :

$$h_{next} = S \times h_{did} \times \tilde{\Delta}_1^{-0.2} \quad (4.38)$$

Autrement, si $\tilde{\Delta}_1 < \Delta_C$, on incrémente la taille du pas estimée pour le prochain pas à cinq fois la valeur employée h_{did} .

Valeurs de retour Le retour de RKQS sera les nouvelles valeurs de \mathbf{X}_{n+1} du pas actuel, la taille du pas employée h_{did} , et la taille du pas estimée pour le prochain pas, h_{next} .

4.3.1.3 RKCK

Cette routine avance d'un pas la solution par la méthode de RK emboîtées du type Cash-Karp, employant RK4 et RK5.

Paramètres d'entrée Comme paramètres d'entrée sur RKCK, on doit indiquer \mathbf{X}_n et h (ce qui est fait par RKQS).

8. Cela est vrai à partir du deuxième pas : les valeurs pour le premier pas ont été introduites par l'utilisateur comme paramètres d'entrée sur POINCARE.

Description Pour calculer les dérivées dont on a besoin, RKCK appelle la sous-routine DERIVS. RKCK donne une estimation de l'erreur de troncation locale de \mathbf{X}_{n+1} grâce à la RK4 emboîtée.

Valeurs de retour En retour nous obtenons les valeurs à la fin du pas, \mathbf{X}_{n+1} , et l'erreur commise dans chaque variable.

4.3.1.4 DERIVS

La routine DERIVS calcule les dérivées des variables, $\frac{d\mathbf{X}}{dt}$, à chaque point \mathbf{X} .

Paramètres d'entrée Les paramètres d'entrée sont X_n, Y_n, θ_n ou $X_n, Y_n, \dot{X}_n, \dot{Y}_n$, en fonction du module de la vitesse au début du pas (comme nous l'avons expliqué dans la description de la routine POINCARE).

Description et valeurs de retour Il existe les deux cas décrits auparavant :

- Si la vitesse est suffisamment grande ($p > 0.02$), on travaille avec les variables X, Y, θ . DERIVS nécessite aussi de calculer p (éq. 4.10) pour l'intégration des autres variables. Les valeurs de retour données par DERIVS sont, dans ce cas, $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$.
- Si la vitesse est faible ($p < 0.02$), on travaille avec X, Y, \dot{X}, \dot{Y} . Les valeurs de retour de DERIVS sont, dans ce cas, $\frac{dX}{dt}, \frac{dY}{dt}, \frac{d\dot{X}}{dt}$ et $\frac{d\dot{Y}}{dt}$.

Notons que le calcul des trajectoires avec les algorithmes décrits se fait en double précision. Cependant, à la sortie, on n'a pas besoin de double précision et on sauvegarde ces solutions échantillonnées en simple précision.

4.3.2 Carte de sections de Poincaré

La routine POINCARE qui résout les EDO permet d'obtenir la SP d'une solution et un échantillonnage de cette solution. La trajectoire ainsi calculée correspond à des conditions initiales données. Pour obtenir une carte de plusieurs SP, correspondant à trajectoires avec différentes conditions initiales, nous employons la routine AUTOMATIC.

AUTOMATIC

La routine AUTOMATIC calcule – via POINCARE – plusieurs trajectoires et leurs SP pour un ensemble de conditions initiales, afin d'obtenir la carte de SP pour (α, E) donnés.

Paramètres d'entrée AUTOMATIC nécessite, comme paramètres d'entrée, α et E .

Description La routine AUTOMATIC choisit le point de départ \mathbf{X}_0 , qui est introduit comme paramètre d'entrée sur POINCARE, en implémentant les équations (4.11).

AUTOMATIC emploie une sous-routine, CRIBLE, pour contrôler le remplissage de la carte de SP. AUTOMATIC crée d'abord le maillage de 20×20 cellules limité par (X_{min}, X_{max}) et (Y_{min}, Y_{max}) . La routine CRIBLE note ensuite les points des SP au fur et à mesure que

les SP sont calculées, en signalant la cellule où ces points tombent comme « explorée ». De cette façon, avant de fixer X_0 , Y_0 et θ_0 selon les équations (4.11), AUTOMATIC contrôle le retour de CRIBLE pour vérifier que le point initial de la prochaine trajectoire ne se trouve pas dans une cellule déjà explorée.

Valeurs de retour Comme retour, AUTOMATIC donne un ensemble de solutions $\{\mathbf{X}\}$ aux EDO du système et une carte de leurs SP. Cette routine fournit aussi les transformées de Fourier des variables X et Y pour toutes les solutions $\{\mathbf{X}\}$, comme nous le décrivons dans la section suivante.

4.3.3 Analyse des spectres

Calcul des FFT

La routine AUTOMATIC décrite ci-dessus est aussi employée pour obtenir les FFT des solutions, sur la coordonnée X et sur Y . Pour alléger la description, on ne mentionnera que la transformée de Fourier de la coordonnée X .

AUTOMATIC appelle la commande FFT du logiciel Igor Pro. Cette commande calcule une transformée de Fourier discrète, par un algorithme de décomposition en nombres premiers [Wavemetrics2013]. La FFT choisie donne, en particulier, le module de la transformée. Des autres détails à mentionner sur le calcul de la FFT sont :

- Le nombre de points de la FFT de X (X a N points) est $N_{FFT} = N/2 + 1$: la partie négative du spectre n'est pas calculée, car elle est identique à la partie positive (pour le cas de variables réelles, comme le nôtre).
- Du total des $N \sim 10^6$ points calculés pour X , pour obtenir la FFT nous prenons $N' = 2^{19}$ pour toutes les solutions. Ceci optimise le calcul de la FFT, même si Igor Pro sait calculer des FFT avec un nombre arbitraire de points [Wavemetrics2013]. Ensuite, nous ne gardons que la première moitié des $N_{FFT} = 2^{18}$ points de la FFT, car ils contiennent toute l'information cherchée : il n'y a pas de pics à des hautes fréquences. Nos spectres ont, finalement, 2^{17} points.

Les spectres ainsi calculés sont sauvegardés par AUTOMATIC avec chaque solution.

Analyse des spectres avec la méthode du sinus cardinal : PEAK0

Nous avons écrit une routine, PEAK0, qui permet d'identifier et de caractériser les pics d'intérêt (la porteuse, des bandes latérales, des harmoniques) dans le spectre des coordonnées du mouvement. PEAK0 implémente la méthode du sinus cardinal expliquée dans la section 1.3.

Paramètres d'entrée Pour la routine PEAK0, on doit introduire la FFT de X , déjà calculée par AUTOMATIC. Les paramètres qu'il faut indiquer à PEAK0 sont les bords $-f_g$ et f_d – d'un intervalle qui nous intéresse dans le spectre. Cela facilite la recherche du pic et permet aussi d'éviter le pic correspondant à la fréquence nulle.

Description

- La routine cherche d'abord, dans l'intervalle donné, le maximum de la FFT. PEAK0 emploie pour ceci la commande « wavestats » de Igor Pro [Wavemetrics2013], qui donne, entre autres, la position et l'amplitude du maximum absolu dans cet

intervalle. De cette façon, elle obtient \tilde{z}_0 et la fréquence f_0 proche de la fréquence recherchée f_R .

- Ensuite, **PEAK0** implémente les équations (4.25), (4.23) et (4.21), pour obtenir une bonne approximation de f_R ainsi que de l'amplitude du mouvement à cette fréquence.
- Pour chercher d'autres pics, comme des bandes latérales ou des harmoniques d'ordre supérieur, **PEAK0** calcule la dérivée de la FFT et elle utilise la commande « findlevel » de Igor Pro [Wavemetrics2013], pour chercher les zéros de la dérivée. Ces zéros permettent de définir les intervalles où la routine cherche à nouveau des maxima avec la commande « wavestats ».

Valeurs de retour Les valeurs de retour de **PEAK0**, pour chaque spectre traité, sont les fréquences ω_R , et les amplitudes A des pics trouvés.

Chapitre 5

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons une vue d'ensemble des résultats obtenus par l'intégration numérique des équations du mouvement de notre réseau carré avec un désaccord positif, ou réseau carré bleu. Ces résultats montrent les différents régimes dynamiques qui peuvent se manifester pour un atome piégé dans un puits de ce potentiel, et qui varient en fonction de l'énergie E et du paramètre α . Ce dernier dépend du déphasage entre les ondes stationnaires formant le réseau carré. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, α change la topographie de la distribution d'intensité, et donc du potentiel. On s'attend par conséquent à trouver des dynamiques différentes pour différentes valeurs de α . Nous explorons les régimes trouvés en modifiant (α, E) , ce qui permet d'apprécier la diversité dynamique de notre système conservatif, comprenant des mouvements périodiques, quasi-périodiques, des accrochages en fréquence et du chaos.

Chapitre 5

Résultats numériques

5.1 Introduction : l'espace des phases accessible

Le réseau carré bleu présente un potentiel à 2D de la forme (éq. 4.2) :

$$U(X, Y) = 1 + \alpha (\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y \quad (5.1)$$

Un atome piégé dans les puits de ce potentiel a une énergie constante

$$E = \frac{p^2}{2} + U(X, Y) \quad (5.2)$$

Les solutions pour le mouvement de l'atome, et leurs sections de Poincaré (notées SP), ont été obtenues numériquement, comme nous l'avons décrit dans le chapitre 4. Pour une valeur donnée du paramètre α et pour une énergie définie E , les simulations nous donnent l'évolution temporelle des coordonnées de l'atome $X(t), Y(t), \theta(t), p(t)$, où

$$p \cos \theta = \dot{X} \quad (5.3a)$$

$$p \sin \theta = \dot{Y} \quad (5.3b)$$

Pour une paire de valeurs (α, E) , la carte de SP (X, Y, \dot{X}) nous donne accès aux caractéristiques de la dynamique, et c'est l'un des outils principaux que nous utilisons dans ce chapitre pour l'exploration de cette dynamique.

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 3, la conservation de l'énergie entraîne que la dynamique dans le réseau carré est restreinte à une hyper-surface 3D dans l'espace des phases 4D. Cette hyper-surface est l'espace des phases accessible, que nous examinons à l'aide des SP. Par conséquent, les SP obtenues en choisissant l'hyper-plan $\dot{Y} = 0+$ sont limitées à une surface 2D, comme le montre la figure 5.1.

Cette surface 2D a la forme d'un demi-ovoïde dans l'espace à trois dimensions (X, Y, \dot{X}) (figures 5.1a, 5.1b). Nous employons le terme « demi-ovoïde » pour mettre en évidence que cette surface s'appuie sur deux demi-ovales directeurs. Ils se trouvent dans les directions X et Y de l'espace et ils ont des courbures différentes, et donc le demi-ovoïde considéré ici n'est pas une surface de révolution.

Les coupes de cette surface à Y constant sont des ovales qui admettent deux axes de symétrie, $X = 0$ et $\dot{X} = 0$. Suivant les demi-ovales directeurs, la taille des ovales se réduit quand Y diminue. En conséquence, le vertex de la surface est placé sur le plan $Y = Y_{min}$, et son bord supérieur a la forme d'un ovale dans le plan $Y = 0$ (courbe limite de la figure 5.1c). Pour simplifier la description, nous appellerons ce bord supérieur tout simplement « bord ».

Les courbures différentes des demi-ovales directeurs mènent à des projections latérales différentes sur les plans XY et $\dot{X}Y$ (figures 5.1d, 5.1e). Ces projections latérales

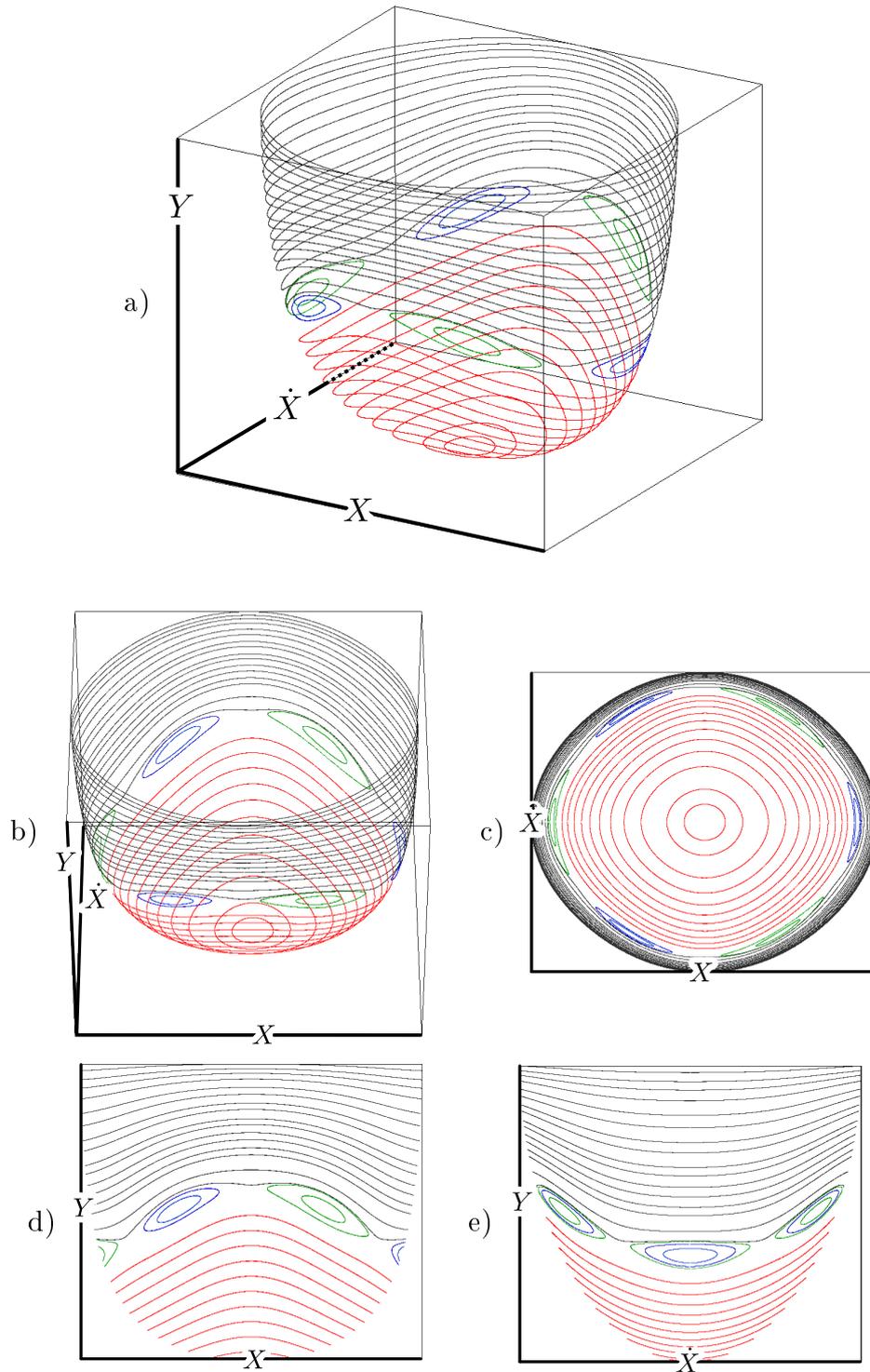


FIGURE 5.1 – Carte de sections de Poincaré pour $(\alpha, E) = (0.4, 0.6)$: a,b) vues en 3D, c) projection sur le plan $X\dot{X}$, d) projection sur le plan XY , e) projection sur le plan $X\dot{X}$.

permettent de représenter les SP sur un plan, avec l'inconvénient que les faces avant et arrière du demi-ovoïde se superposent. Ces vues latérales peuvent être complétées par une vue du dessus, c'est à dire une projection sur le plan $X\dot{X}$ (figure 5.1c) : cette projection a l'avantage d'être bijective, contrairement aux projections latérales, mais elle a l'inconvénient de contracter énormément les distances dans les régions proches du bord du demi-ovoïde, ce qui rend le résultat visuellement moins clair. En général, deux projections donnent une image assez complète de la forme des SP, et nous employons majoritairement celles sur les plans XY et $X\dot{X}$.

5.2 Régimes dynamiques en fonction de (α, E)

Au chapitre 3, dans le but de comparer la dynamique dans le réseau carré pour les différents désaccords, nous avons décrit la situation du réseau bleu pour $\alpha = 0.5$ (analysée dans [Hennequin2010]). Cette situation, comme nous le montrons dans cette section, se révèle être un cas particulier d'une dynamique assez riche, que nous pouvons explorer en faisant varier soit α , soit E . Nous allons donc examiner les espaces des phases – plus précisément, les cartes de SP – résultant des combinaisons de (α, E) , où $0 \leq \alpha < 1$ et $0 < E < E_T$. E_T est l'énergie du seuil au delà duquel l'atome peut sortir du puits de potentiel :

$$E_T(\alpha) = 1 - \alpha^2 \quad (5.4)$$

L'approche générale, dans cette section, est de faire varier la valeur de l'énergie E pour un α donné. Le seuil d'énergie étant donné par l'équation (5.4), la profondeur du puits de potentiel varie donc en fonction de α , ainsi que l'intervalle d'énergie à explorer, comme le montre la figure 5.2.

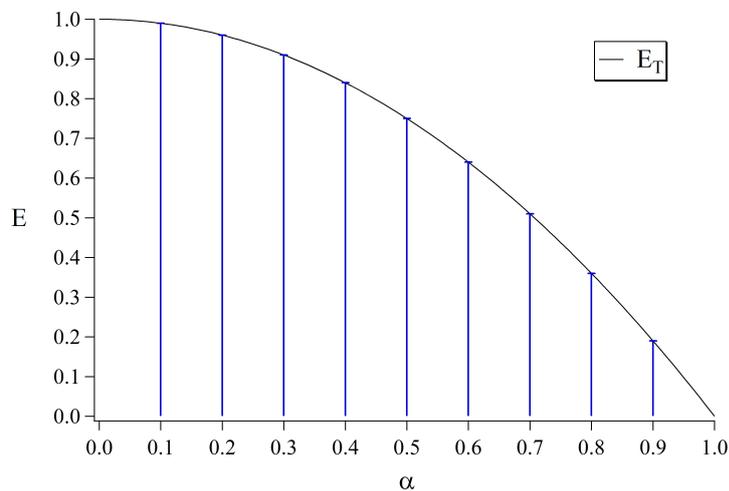


FIGURE 5.2 – Profondeur du puits de potentiel, représentée par les barres bleues, en fonction de α . Les barres affichées correspondent aux valeurs de α considérées dans ce chapitre. La courbe noire est le seuil d'énergie $E_T(\alpha)$ pour sortir du puits (éq. 5.4).

Échelles dans la représentation du mouvement Pour étudier la dynamique trouvée pour les différentes paires (α, E) , nous analyserons des cartes de SP, mais aussi le

mouvement et les transformées de Fourier. Les équations du mouvement de notre système, intégrées dans le chapitre 4, ont été déduites pour un potentiel normalisé. Par conséquent, les fréquences angulaires ω typiques du problème sont de l'ordre de l'unité, comme on le voit dans l'expression du potentiel (3.8). Nous suivons l'évolution des coordonnées du système à des intervalles de 0.1. Cependant, si nous voulons avoir des spectres avec une échelle en Hz, le calcul des FFT rend nécessaire d'établir une échelle de temps¹. En particulier, il nous est commode de travailler avec des spectres dont les pics principaux de fréquence sont autour des 100 Hz. Dans ce but, nous choisissons donc une échelle de temps complètement arbitraire, de sorte que les intervalles correspondent à 0.1 ms.

5.2.1 Le cas $\alpha = 0.1$

La figure 5.3 affiche les projections XY (5.3a, 5.3c, 5.3e et 5.3g) et $X\dot{X}$ (5.3b, 5.3d, 5.3f et 5.3h) de la carte de SP obtenue pour $\alpha = 0.1$ et pour différentes énergies. Pour des petites valeurs de α comme celle-ci, le puits de potentiel est profond : $E_T(0.1) = 0.99$. En faisant varier E de 0.1 à 0.9, nous trouvons que l'espace des phases évolue, présentant les différentes solutions décrites ci-dessous.

5.2.1.1 Solutions découplées

Pour des énergies faibles ($0 < E < 0.3$), il existe des solutions régulières qui apparaissent dans la figure 5.3a comme des droites presque horizontales. Elles représentent des mouvements quasi-périodiques « découplés » dans les deux directions de l'espace. Nous employons le terme « découplé » pour indiquer que les oscillations dans ce cas se font avec des fréquences f_X et f_Y sans relation entre elles ; bien entendu, ce mouvement est toujours le résultat d'un système couplé. Ces solutions seront étudiées en détail dans le chapitre 9, mais ici nous considérons deux cas particuliers parmi elles : le point fixe $(X, Y, \dot{X}) = (0, Y_{min}, 0)$, au vertex du demi-ovoïde, et l'orbite $(X, Y, \dot{X}) = (X, 0, \dot{X})$, qui devrait être au sommet mais qui n'est pas affichée à cause du choix $\dot{Y} = 0+$ pour les SP.

Le mouvement correspondant à une solution proche de $Y = 0$ (SP en gris sur les figures 5.3a et 5.3b), est représenté sur les figures 5.4a et 5.4c. Ce mouvement est une oscillation selon X (en rouge), et une autre, d'amplitude beaucoup plus faible, selon Y . La phase entre ces deux oscillations varie avec le temps (figure 5.4a). Le spectre de X présente une fréquence principale f_X (à 149 Hz) et son troisième harmonique, qui est 3 ordres de grandeur plus petit (figure 5.4c). En conséquence, ce mouvement est presque harmonique. Le mouvement selon Y est aussi périodique, avec une porteuse f_Y qui ne satisfait aucune relation avec f_X ($f_Y = 163$ Hz). Il existe aussi des bandes latérales $f_Y \pm \Delta f$ ($\Delta f = 28$ Hz) dont une est d'amplitude trop petite pour la visualiser. La valeur de Δf correspond à $2f_Y - 2f_X$ et elle varie avec la position dans la carte de SP. Finalement, nous voyons aussi dans le spectre de Y , des harmoniques qui ne correspondent pas à $3f_Y$: il s'agit en effet de $2f_X + f_Y$ et $4f_X - f_Y$. Celle-ci et d'autres caractéristiques des solutions découplées particulières $Y = 0$ et $X = 0$ seront analysées en détail dans les chapitres 7 et 8.

1. Quand on indique à Igor Pro que l'indice d'un tableau est un temps, il établit automatiquement la correspondance en Hz pour l'indice de la FFT [Wavemetrics2013].

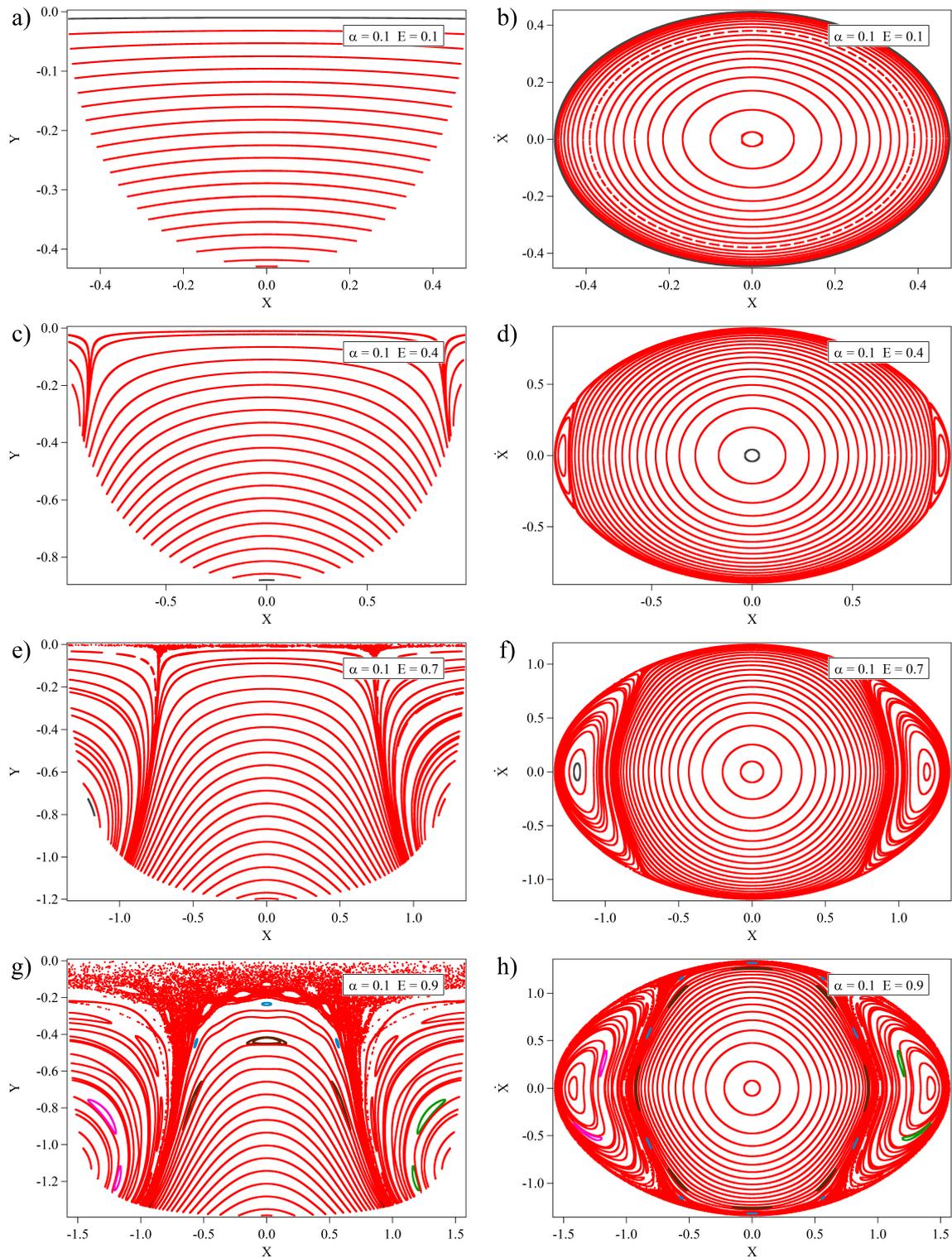


FIGURE 5.3 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.1$ et pour : a,b) $E = 0.1$; c,d) $E = 0.4$; e,f) $E = 0.7$; g,h) $E = 0.9$.

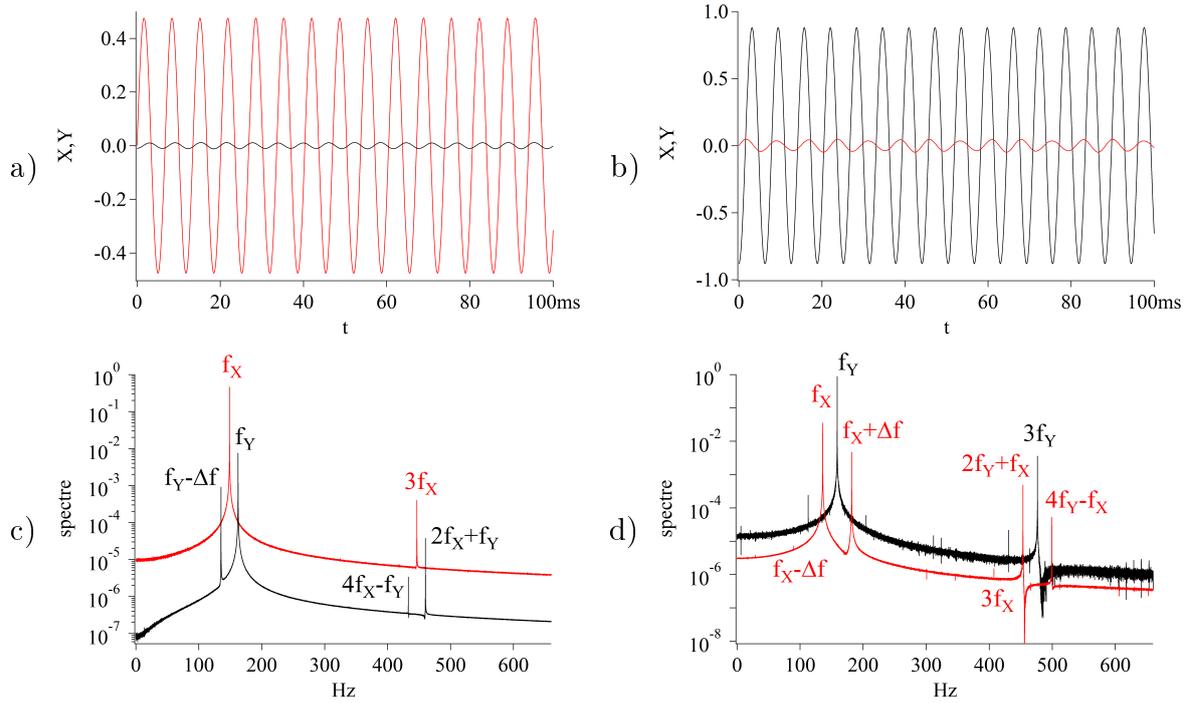


FIGURE 5.4 – Solutions découplées : a,b) X (rouge) et Y vs t ; c,d) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y . Ces solutions correspondent à la : a,c) SP proche de $Y = 0$ pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.1)$, signalée en gris sur les figures 5.3a et 5.3b; b,d) SP proche de $X = 0$ pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.4)$, en gris sur les figures 5.3c et 5.3d.

D'autre part, le mouvement correspondant à une solution proche du point fixe $X = 0$ (SP en gris sur les figures 5.3c et 5.3d), est celui affiché dans les figures 5.4b et 5.4d. Nous y voyons une oscillation sur Y et une autre, d'amplitude beaucoup plus faible, sur X (en rouge), où la phase entre les deux varie avec le temps (figure 5.4b). Les spectres présentent les mêmes caractéristiques mentionnées pour la solution proche de $Y = 0$, les porteuses ne satisfaisant une relation entre elles ($f_X = 136$ Hz, $f_Y = 159$ Hz) (figure 5.4d). Dans le spectre de Y , l'harmonique $3f_Y$ est 2 ordres de grandeur en dessous de f_Y , le mouvement étant donc moins harmonique que dans l'exemple précédent. Sur X , nous retrouvons les bandes latérales $f_X \pm \Delta f$ avec $\Delta f = 2f_Y - 2f_X$: la deuxième bande latérale est cette fois visible, quoique très petite. Finalement, dans le spectre de X nous retrouvons les pics à $2f_Y + f_X$ et $4f_Y - f_X$, et cette fois nous voyons aussi l'harmonique $3f_X$, de faible amplitude².

Les solutions découplées, similaires aux deux que nous venons de décrire, sont les seules qui se manifestent dans cette configuration et gouvernent l'espace des phases jusqu'à $E = 0.3$ au moins. Le point fixe $X = 0$ persiste comme un point elliptique pour des grandes énergies (voir figures 5.3g, 5.3h pour $E = 0.9$). En revanche, la solution $Y = 0$ devient un point hyperbolique pour des énergies proches de $E = 0.4$ (voir figures 5.3c, 5.3d). Les trajectoires proches de cette solution sont déformées par l'apparition de solutions accrochées.

2. Notons dans le spectre de X , en figure 5.4d, la présence d'un « trou » juste après le pic $2f_Y + f_X$. Il est dû au passage par zéro de la transformée de Fourier originale. Le module donné par notre FFT, en échelle logarithmique, reflète ce passage avec une valeur très petite. Il s'agit d'une caractéristique sans conséquences que nous retrouverons dans quelques uns de nos spectres.

5.2.1.2 Solutions accrochées $f_Y = f_X$

Pour des énergies autour de $E = 0.4$, il existe deux autres points fixes, à gauche et à droite des figures 5.3c à 5.3h, sur lesquelles nous pouvons voir qu'ils dominent l'espace des phases pour des énergies plus grandes. Le mouvement représenté par la SP quasi-périodique grise, à gauche des figures 5.3e et 5.3f, est tracé en figure 5.5.

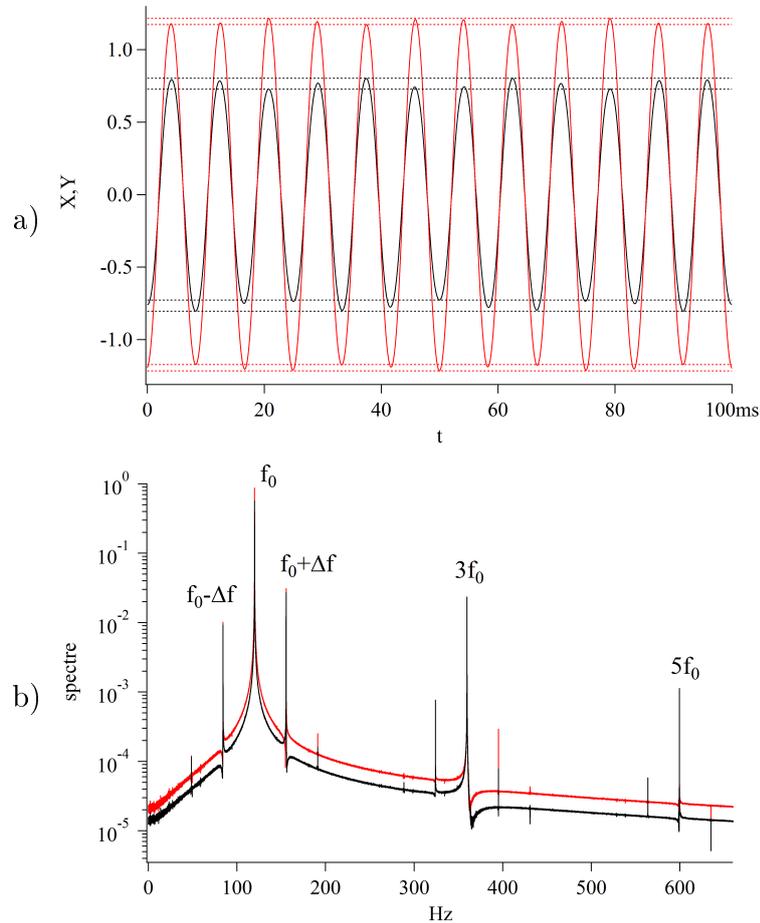


FIGURE 5.5 – Mouvement pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.7)$, correspondant à la SP grise en figures 5.3e et 5.3f : a) X (rouge) et Y vs t . Les courbes pointillées montrent la variation des amplitudes d'oscillation. b) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y .

Cette solution montre un mouvement complètement en phase selon les coordonnées X et Y (figure 5.5a), ce qui se voit, dans la transformée de Fourier (figure 5.5b), comme un accrochage à la même fréquence f_0 ($f_0 = 120$ Hz). Il existe, pourtant, des bandes latérales $f_0 \pm \Delta f$ ($\Delta f = 36$ Hz), de 2 ordres de grandeur plus petites que f_0 . Les fréquences de battement associées caractérisent les variations en amplitude vues sur la figure 5.5a. La position et la hauteur de ces bandes latérales varient en valeur et en amplitude avec la distance de la solution au point fixe. On voit aussi sur le spectre les harmoniques $3f_0$ et $5f_0$, qui ont des bandes latérales avec le même Δf .

Une analyse du mouvement représenté par les SP à droite des figures 5.3c à 5.3h montre qu'il a la même nature que la solution décrite ci-dessus. Il s'agit d'une oscillation accrochée à la fréquence f_0 , mais dans ce cas en opposition de phase. Les deux solutions accrochées avec $f_Y = f_X$ persistent comme des points fixes elliptiques même pour des

hautes énergies (voir figures 5.3g et 5.3h, pour $E = 0.9$). Dans certains cas, les fréquences de battement s'accrochent avec une fraction entière de la porteuse, comme c'est le cas des solutions avec la SP rosée et avec la SP verte dans les figures 5.3g et 5.3h (pour lesquelles $\Delta f = f_X/2$). Cela produit des trajectoires plus compliquées, qui sont encore un mouvement accroché en phase et en opposition, respectivement. Les solutions $f_Y = f_X$ seront analysées en détail dans le chapitre 7.

5.2.1.3 Chaos et solutions accrochées $f_Y = (10/9) f_X$, $f_Y = (8/7) f_X$

Une solution chaotique apparaît pour $E = 0.7$, vue en haut de la figure 5.3e. Le chaos se développe pour des énergies plus grandes, mais toujours dans une région limitée : pour $E = 0.9$ (figures 5.3g et 5.3h), l'espace des phases continue à être dominé par les solutions accrochées $f_Y = f_X$. Il apparaît aussi, pour cette énergie, des nouvelles solutions périodiques accrochées avec un rapport proche de 1 : la SP en bleu clair dans les figures 5.3g et 5.3h, par exemple, représente un mouvement où les fréquences principales satisfont $f_Y = (10/9) f_X$. Les SP en marron correspondent à un mouvement avec $f_Y = (8/7) f_X$. Dans la figure 5.3g, nous voyons que la SP de la solution découplée en dessous de la solution $f_Y = (10/9) f_X$ est déformée par la présence de cette dernière. De la même façon, la SP suivante en dessous correspond à une solution découplée déformée, dans ce cas, par une solution accrochée que notre routine automatique n'a pas calculée. Il existe plusieurs solutions de ce type qui ne nous intéressent pas, et donc nous n'avons pas cherché à les représenter. Nous verrons régulièrement des solutions découplées déformées par des accrochages, mais seulement dans certains cas il nous apporte quelque chose de calculer la solution accrochée correspondante.

Les solutions $f_Y = (10/9) f_X$ et $f_Y = (8/7) f_X$ présentent une caractéristique différente de celles des autres solutions quasi-périodiques décrites auparavant, car l'orbite autour de laquelle elles oscillent est repliée dans l'espace des phases. Cette orbite périodique coupe l'hyper-plan $\dot{Y} = 0+$ en plusieurs points, et donc sa SP se verrait comme plusieurs points autour desquels se trouvent les SP quasi-périodiques affichées. L'écriture de l'accrochage avec un indice rationnel p/q , où p est la période de l'orbite, permet de connaître en avance le nombre de points où elle coupe l'hyper-plan. Dans notre cas, nous représentons une trajectoire quasi-périodique autour de l'orbite, donc nous voyons p morceaux – autour de ces points – correspondant à la même SP. Nous savons ainsi, par exemple, que les solutions accrochées $f_Y = (10/9) f_X$ et $f_Y = (8/7) f_X$ coupent l'hyper-plan en $p = 10$ et $p = 8$ points, respectivement, et nous voyons ce nombre de morceaux de SP pour chacune.

5.2.2 Le cas $\alpha = 0.2$

La situation pour $\alpha = 0.2$ (figure 5.6), dont le seuil d'énergie est $E_T(0.2) = 0.96$, présente des similarités avec le cas $\alpha = 0.1$ car on y voit apparaître les solutions accrochées $f_Y = f_X$, mais elles ne dominent plus l'espace des phases. En revanche, le chaos est important, pour des énergies élevées.

Solutions accrochées $f_Y = f_X$, $f_Y = (4/3) f_X$ et $f_Y = (5/4) f_X$ Les points fixes correspondant à $f_Y = f_X$ apparaissent pour environ $E = 0.6$. Pour des valeurs d'énergie plus petites, il existe seulement les solutions représentant les oscillations découplées sur X et sur Y . À la différence de $\alpha = 0.1$, les solutions $f_Y = f_X$ ne sont pas les seules à

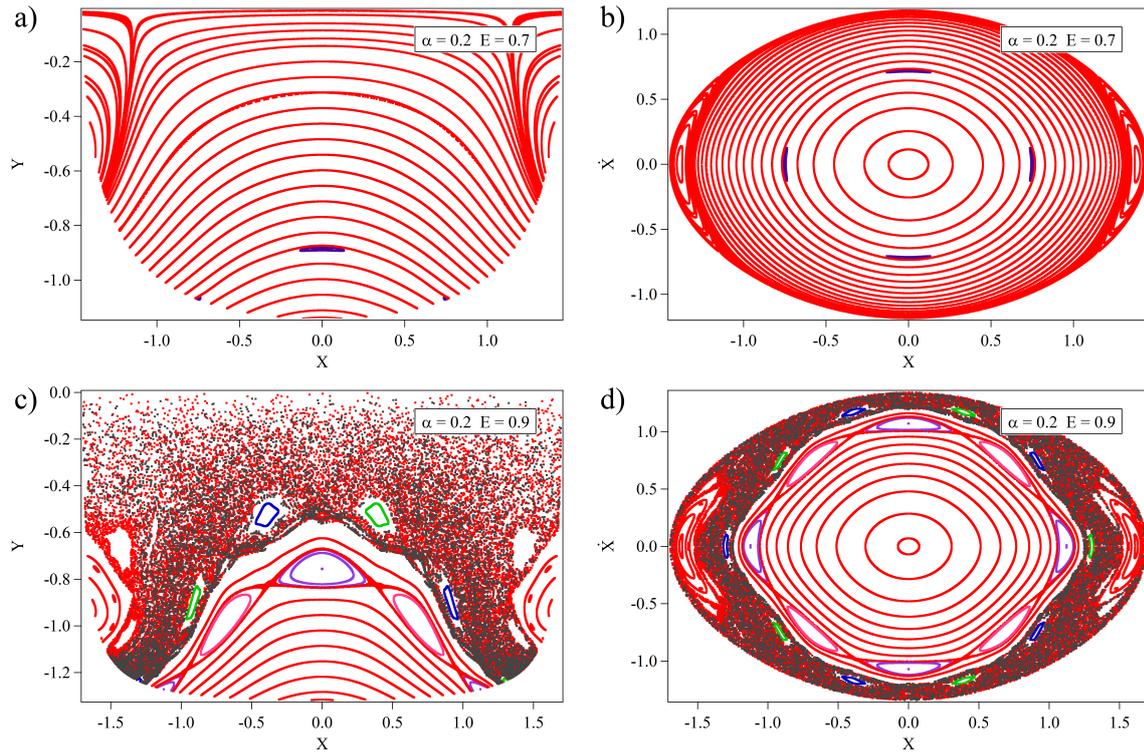


FIGURE 5.6 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.2$ et pour : a,b) $E = 0.7$; c,d) $E = 0.9$.

apparaître pour des énergies intermédiaires, et pour $E = 0.7$ on observe déjà d'autres points fixes (figures 5.6a et 5.6b). En particulier, nous pouvons voir que les quatre points avec une SP violette autour correspondent à la même orbite périodique repliée dans l'espace des phases. Un examen du spectre du mouvement quasi-périodique représenté par cette SP montre un accrochage en fréquence, avec $f_Y = (4/3) f_X$. Nous retrouverons cette solution pour $\alpha = 0.3$, où elle est plus importante, et nous l'analyserons en détail. Pour des énergies plus grandes, plusieurs autres points fixes apparaissent, représentant des oscillations accrochées en fréquence avec un rapport qui s'approche de 1 : parmi celles observées dans les figures 5.6c et 5.6d, pour $E = 0.9$, il y a la solution $f_Y = (5/4) f_X$ (SP avec 5 morceaux, en vert et en bleu) et on retrouve la solution $f_Y = (4/3) f_X$ (SP violette et SP rosée).

Chaos et îlots réguliers Dans les figures 5.6c et 5.6d on observe un chaos très développé pour $E = 0.9$, occupant une grande partie de l'espace des phases, par rapport à ce que l'on a vu pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.9)$. Il reste pourtant une zone régulière importante, autour du point fixe elliptique $X = 0$, qui va jusqu'aux solutions satisfaisant $f_Y = (4/3) f_X$. Les solutions $f_Y = f_X$ forment aussi des îlots réguliers, ainsi que les solutions $f_Y = (5/4) f_X$, quoique plus petits. En figure 5.7a, nous avons représenté le mouvement donné par la trajectoire chaotique dont la SP est grise dans les figures 5.6c et 5.6d. La FFT affichée en figure 5.7b montre qu'il s'agit du spectre d'une solution chaotique, il est large et présente plusieurs pics non négligeables. En particulier, le rapport entre les fréquences dominantes satisfait $f_Y = (5/4) f_X$ ($f_X \approx 103$ Hz), ce qui implique que cette solution est influencée par les points fixes dans le petit îlot régulier.

Dans le spectre de X , on voit aussi un pic large à $3f_X$.

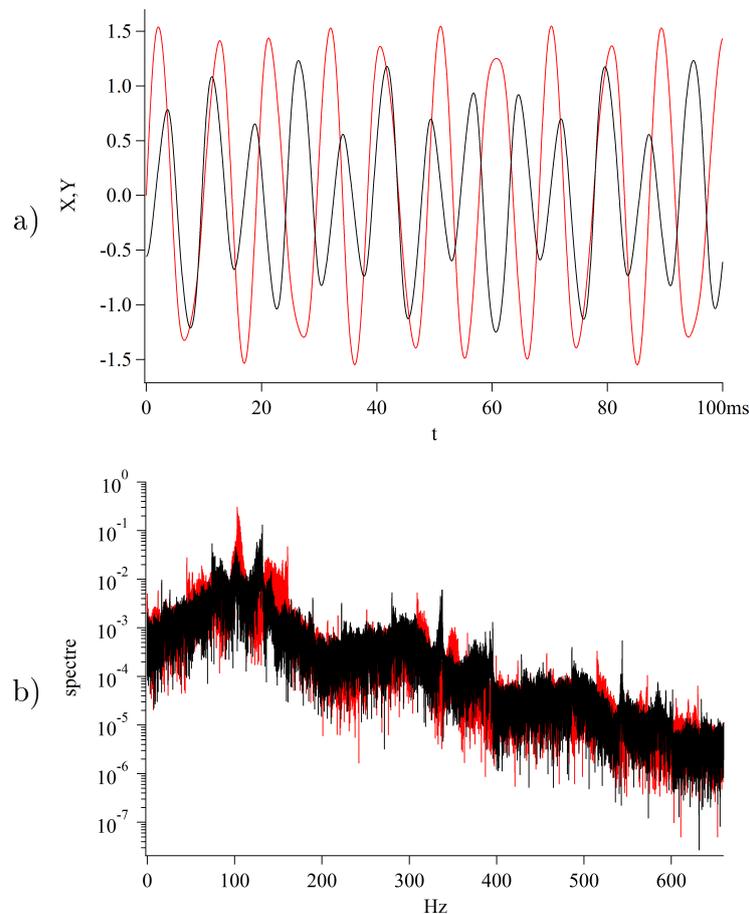


FIGURE 5.7 – Solution chaotique (signalée en gris dans les figures 5.6c et 5.6d) pour $(\alpha, E) = (0.2, 0.9)$: a) X (rouge) et Y vs t , b) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y .

5.2.3 Le cas $\alpha = 0.3$

Le cas de $\alpha = 0.3$ (figure 5.8) ressemble à $\alpha = 0.2$, avec l'existence d'un chaos très développé pour une énergie proche du seuil $E_T(0.3) = 0.91$. Certains points fixes qui apparaissent sont, par contre, différents. Pour des énergies faibles, il n'y a que les solutions découplées, jusqu'à environ $E = 0.5$ inclus (figures 5.8a et 5.8b). Les premiers points fixes qui apparaissent sont ceux que l'on voit sur les figures 5.8c et 5.8d avec des SP autour en noir et en gris, pour $E = 0.7$ (on les voit déjà pour $E = 0.6$). Nous examinons le mouvement représenté par les deux types de solutions accrochées présentes pour $E = 0.7$.

Solution accrochée $f_Y = (3/2) f_X$ Le point avec des SP grises autour (en 3 morceaux) correspond au mouvement affiché dans les figures 5.9a et 5.9c. C'est une oscillation avec un accrochage $f_Y = (3/2) f_X$ ($f_X = 104$ Hz), comme le montre le spectre dans la figure 5.9e. Les pics plus importants présents dans les spectres, autres que les harmoniques $3f_X$ et $3f_Y$, sont dus aux bandes latérales $f_X \pm \Delta f$ et $f_Y \pm \Delta f$, où $\Delta f = 2f_Y - 2f_X$. Le spectre de cette solution se caractérise par la coïncidence $\Delta f = f_X$. Dans la figure,

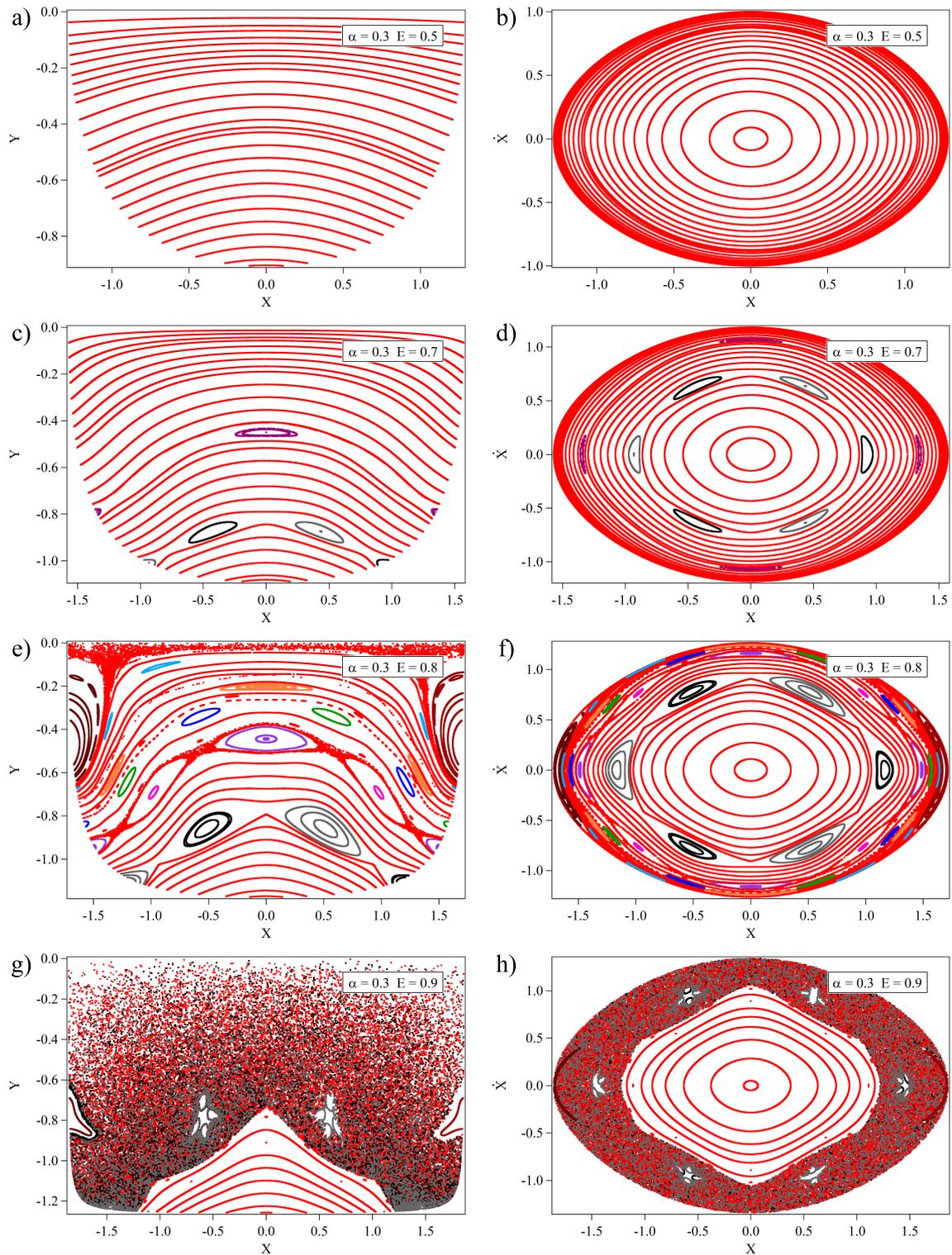


FIGURE 5.8 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.3$ et pour : a,b) $E = 0.5$; c,d) $E = 0.7$; e,f) $E = 0.8$; g,h) $E = 0.9$.

nous avons regroupé les porteuses et leurs bandes latérales, et aussi les harmoniques 3 avec les pics dus aux bandes latérales. Parmi ces derniers, les plus importants sont le pic à gauche de $3f_Y$, qui est la fréquence $2f_X + f_Y$, et le pic à droite de $3f_X$, qui est $2f_Y + f_X$. Nous avons déjà observé ces pics pour les solutions découplées du cas $\alpha = 0.1$.

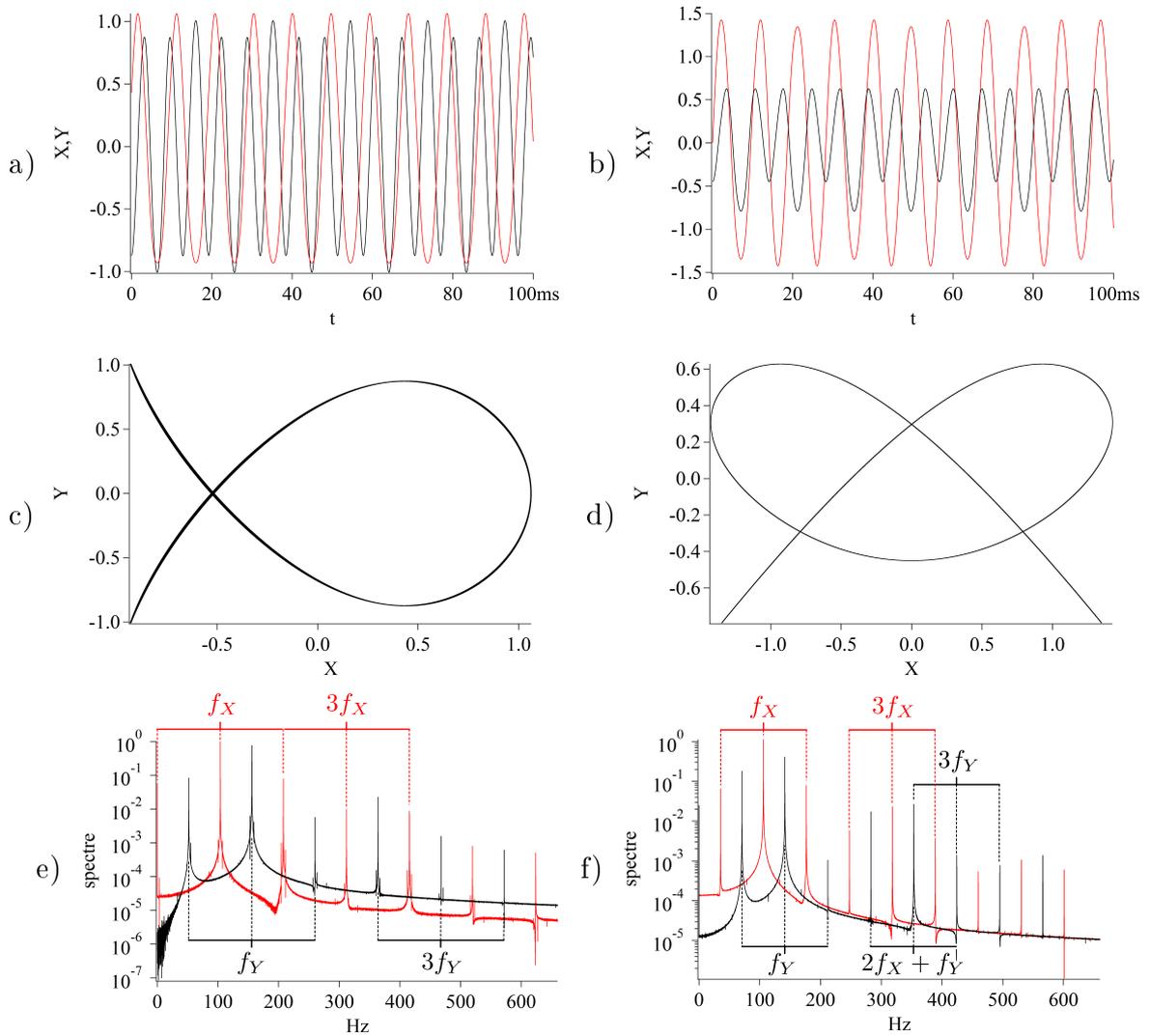


FIGURE 5.9 – Solution accrochées pour $(\alpha, E) = (0.3, 0.7)$: a,b) X (rouge) et Y vs t ; c,d) Y vs X ; e,f) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y . Ces solutions correspondent, dans les figures 5.8c et 5.8d, aux points : a,c,e) avec la SP grise autour ; b,d,f) avec les SP violettes autour.

Solution accrochée $f_Y = (4/3) f_X$ On retrouve ici une solution vue pour $\alpha = 0.2$: nous avons signalé en violet les SP quasi-périodiques autour de ce point (en 4 morceaux), et nous montrons dans les figures 5.9b et 5.9d le mouvement qu'il représente. Il s'agit d'une oscillation avec $f_Y = (4/3) f_X$ ($f_Y = 141$ Hz). Le spectre montre, comme dans la solution décrite ci-dessus, une coïncidence entre les fréquences de battement et les porteuses : $\Delta f = f_Y/2$ (figure 5.9f). Nous avons signalé les pics de la même façon que

pour l'exemple précédent. On remarque à nouveau les pics $2f_X + f_Y$ et $2f_Y + f_X$ (pic à droite de $3f_X$), sur lesquels nous reviendrons dans le chapitre 7 de cette thèse.

Autres solutions accrochées Pour $E = 0.8$, il apparaît du chaos et plusieurs autres points fixes, notamment les solutions $f_Y = f_X$, à gauche et à droite des figures 5.8e et 5.8f. Pour réussir une identification claire des solutions les plus étendues, dans la figure 5.10 nous avons fait un schéma de la carte de SP en figure 5.8e, qui permet aussi de voir les différentes régions qui structurent la carte. Pour identifier les solutions accrochées, nous avons analysé leurs FFT, mais nous n'affichons pas ces spectres. Les solutions présentes correspondent à un accrochage en fréquence où le rapport entre f_Y et f_X décroît de 1.5 vers 1 si l'on parcourt la carte de SP vers le haut. D'abord, on retrouve les solutions satisfaisant $f_Y = (3/2)f_X$, et $f_Y = (4/3)f_X$, vues pour $E = 0.7$. La séparatrice de cette dernière avec les solutions découplées (non représentées) est une SP chaotique. Ensuite, on retrouve la solution $f_Y = (5/4)f_X$, vue pour $(\alpha, E) = (0.2, 0.9)$; plus haut, il apparaît l'accrochage à $f_Y = (6/5)f_X$. Juste dessous de l'autre SP chaotique, on trouve la solution $f_Y = (10/9)f_X$, que nous avons vue pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.9)$. Finalement, à gauche et à droite, se trouvent les solutions $f_Y = f_X$.

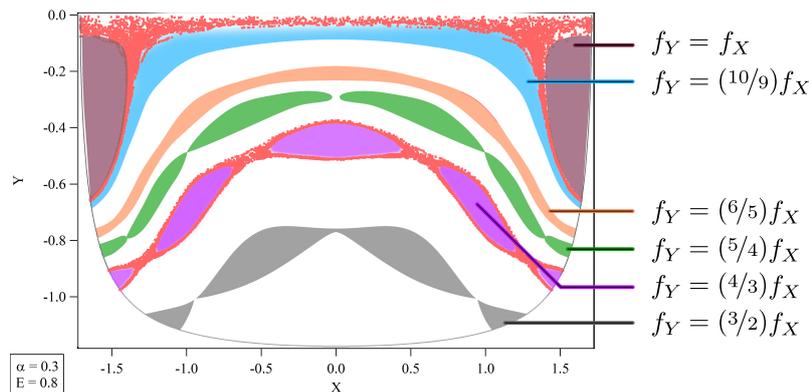


FIGURE 5.10 – Schéma de la carte de sections de Poincaré pour $(\alpha, E) = (0.3, 0.8)$.

Chaos Comme nous l'avons vu, deux zones chaotiques apparaissent pour $E = 0.8$, une dans la région d'une séparatrice au centre et l'autre – plus importante – en haut. Pour $E = 0.9$, les solutions chaotiques forment une seule région, et elles sont très développées (figures 5.8g et 5.8h). Le chaos occupe ainsi une grande partie de l'espace des phases, où il reste seulement l'îlot régulier de la solution $X = 0$, et des îlots plus petits correspondant aux solutions $f_Y = f_X$ et $f_Y = (3/2)f_X$. Le spectre de la SP chaotique en gris dans les figures 5.8g et 5.8h est similaire à celui montré pour $(\alpha, E) = (0.2, 0.9)$, avec des pics larges satisfaisant, dans ce cas, $f_Y = (3/2)f_X$.

5.2.4 Le cas $\alpha = 0.4$

La figure 5.1 montre différentes vues de la carte de SP pour $(\alpha, E) = (0.4, 0.6)$, où la valeur d'énergie est élevée mais encore loin de son seuil $E_T(0.4) = 0.84$. Les points fixes présents sont repérés avec des SP en noir et en gris autour, dans les figures 5.11a et 5.11b, pour $E = 0.4$. Ces solutions apparaissent pour cette valeur d'énergie, et une

analyse de spectres permet de les reconnaître comme les solutions $f_Y = (3/2) f_X$ que nous avons analysées pour $\alpha = 0.3$. Pour des énergies plus faibles, il n'existe que les mouvements découplés dans les deux directions de l'espace. Ces solutions continuent à gouverner une grande portion de l'espace des phases pour des énergies moyennes.

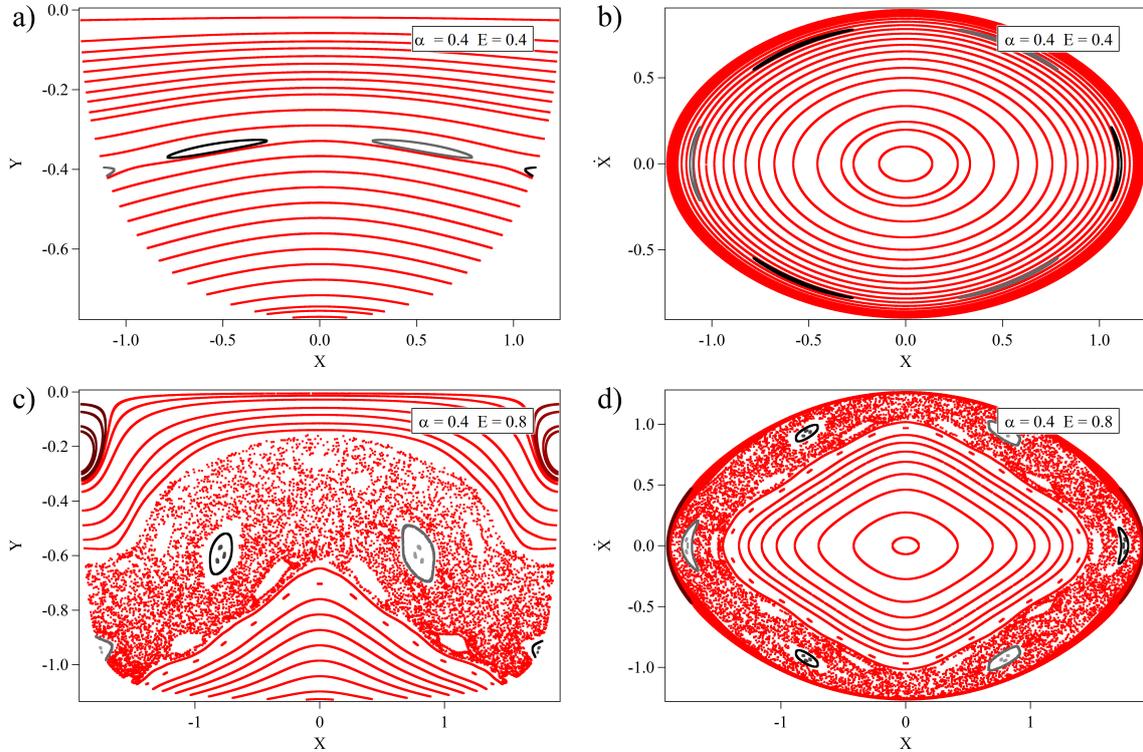


FIGURE 5.11 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.4$ et pour : a,b) $E = 0.4$; c,d) $E = 0.8$.

Pour des énergies autour de $E = 0.8$, le chaos apparaît dans la région de la séparatrice entre les solutions $f_Y = (3/2) f_X$ et les solutions découplées (figures 5.11c et 5.11d). On remarque que, à la différence de $\alpha = 0.2$ et $\alpha = 0.3$ où les zones chaotiques d'importance apparaissent en haut et « croissent » vers le bas, ici elles se développent depuis cette région centrale. Pour ces hautes énergies, il apparaît aussi les solutions $f_Y = f_X$, mais elles influencent une région réduite.

5.2.5 Le cas $\alpha = 0.5$

Nous avons vu les résultats pour $\alpha = 0.5$ dans le chapitre 3 (voir figure 3.4). Il faut prendre en compte que les valeurs d'énergie dans ce chapitre étaient normalisées par rapport au seuil $E_T(0.5) = 0.75$. Nous n'utilisons pas cette normalisation ici.

Ce cas présente des solutions découplées pour des énergies faibles. Elles persistent pour des grandes énergies ; en particulier, les deux points fixes $X = 0$ et $Y = 0$ sont toujours des points elliptiques. Ceci est la première valeur de α , parmi celles vues jusqu'ici, où $Y = 0$ ne devient pas un point hyperbolique pour des hautes énergies. On peut lier cette différence à l'absence des solutions $f_Y = f_X$ pour $\alpha = 0.5$, qui par contre apparaissaient pour toutes les valeurs de α vues jusqu'à présent.

Des solutions accrochées avec $f_Y = 2f_X$ apparaissent pour environ $E = 0.45$. Nous retrouverons et analyserons en détail ces solutions pour $\alpha = 0.6$. Plusieurs autres so-

lutions apparaissent pour $E = 0.66$, parmi lesquelles une solution chaotique dans une séparatrice au centre. Le chaos se développe ici comme dans le cas $\alpha = 0.4$, dans la région centrale, où il reste même pour des très hautes énergies.

5.2.6 Le cas $\alpha = 0.6$

Le cas de $\alpha = 0.6$ est particulier parce que, même pour des énergies très faibles (figures 5.12a et 5.12b, pour $E = 0.01$), il existe toujours une paire de solutions accrochées en plus de celles découplées. Ces solutions sont les seules à apparaître ; les SP quasi-périodiques autour de ces points fixes sont affichées en jaune et en vert dans la figure 5.12. Pour des énergies plus grandes, elles dominent de plus en plus l'espace des phases.

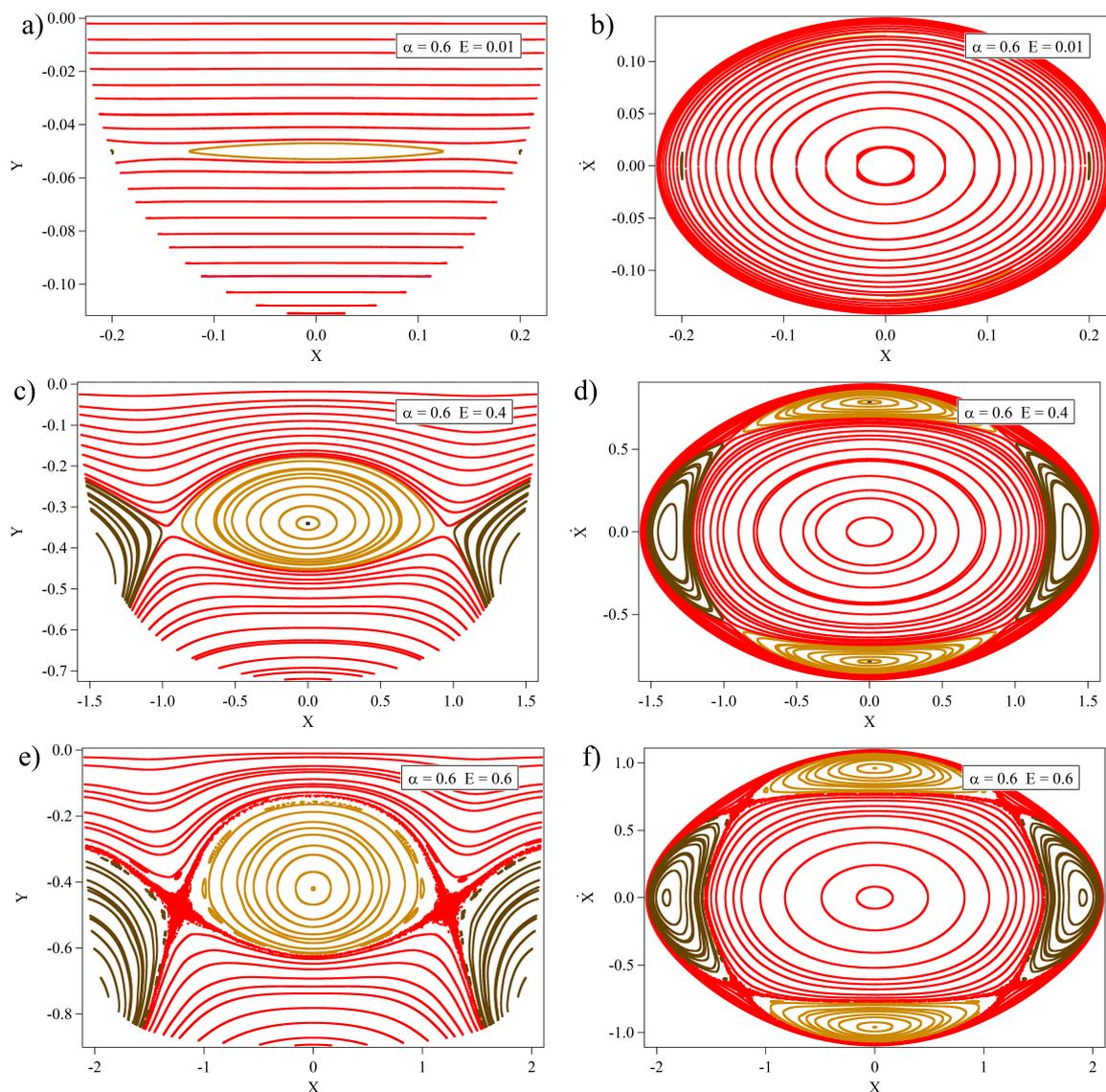


FIGURE 5.12 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.6$ et pour : a,b) $E = 0.01$; c,d) $E = 0.4$; e,f) $E = 0.6$.

Nous avons tracé, en figure 5.13, le mouvement correspondant au point fixe au centre de la figure 5.12c, autour duquel se trouvent les SP jaunes (il est en gris dans les figures 5.12c et 5.12d). Nous voyons sur les figures 5.13a et 5.13b qu'il s'agit d'un régime verrouillé en phase. Ces SP représentent un mouvement avec l'accrochage $f_Y = 2f_X$ ($f_Y = 166\text{ Hz}$), comme le montre le spectre en figure 5.13c. On trouve aussi dans le spectre les harmoniques $3f_X$ et $5f_X$, et les harmoniques $2f_Y$ et $3f_Y$. Notons, pourtant, que l'harmonique $2f_Y$ est égal à la combinaison $2f_X + f_Y$, déjà observée pour plusieurs solutions. Les solutions $f_Y = 2f_X$ seront étudiées en détail dans le chapitre 8.

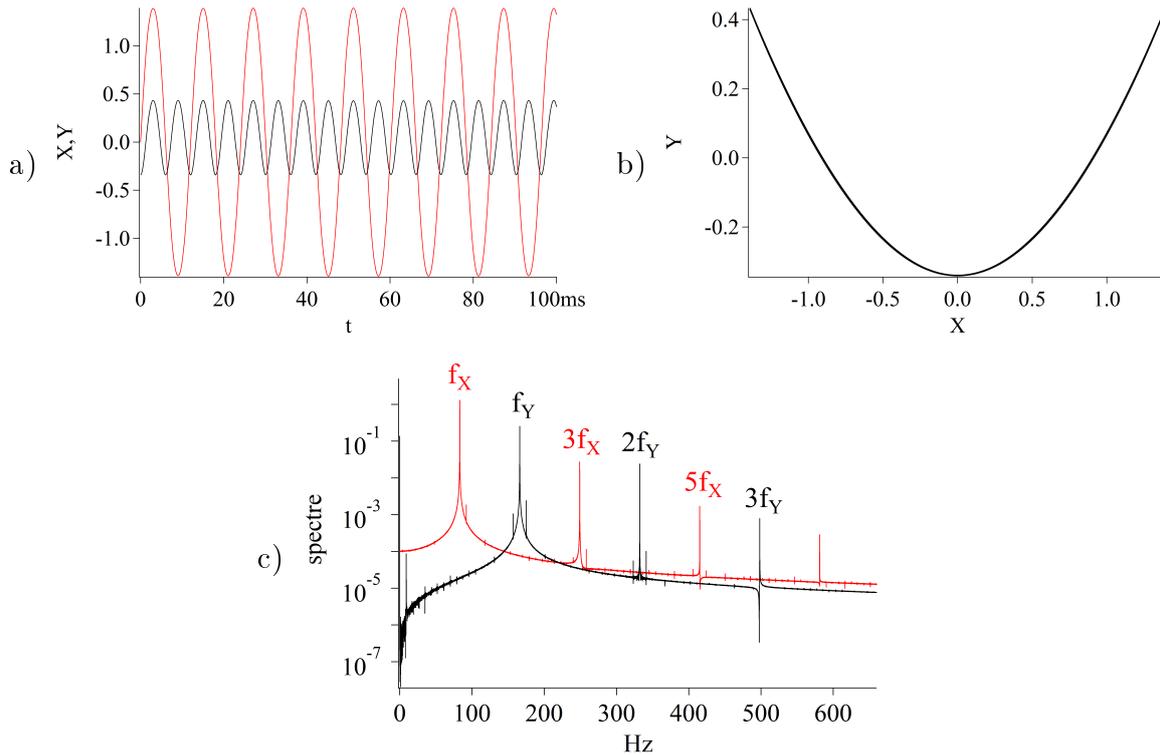


FIGURE 5.13 – Solution (point fixe au centre de la figure 5.12c) pour $(\alpha, E) = (0.6, 0.4)$: a) X (rouge) et Y vs t ; b) Y vs X ; c) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y .

Pour $E = 0.56$, il y a une trajectoire chaotique restreinte à la région de la séparatrice entre les solutions accrochées $f_Y = 2f_X$ et les solutions découplées. Cette trajectoire occupe plus de place pour des énergies plus grandes mais elle reste assez restreinte même pour des valeurs proches du seuil $E_T(0.6) = 0.64$, comme on le voit sur les figures 5.12e et 5.12f, pour $E = 0.6$. On remarque que les solutions découplées sont assez étendues pour des hautes énergies ; en particulier, comme pour $\alpha = 0.5$, la solution $Y = 0$ est toujours un point fixe stable (c'est aussi le cas de $X = 0$ pour tout α).

5.2.7 Le cas $\alpha = 0.7$

La dynamique pour $\alpha = 0.7$ présente un petit intervalle d'énergie dans lequel il y a des solutions autres que les solutions découplées. Cet intervalle se trouve environ entre $E = 0.4$ et $E = 0.5$, et nous montrons ces solutions dans les figures 5.14c et 5.14d, pour $E = 0.45$: elles sont les solutions accrochées $f_Y = 2f_X$ (SP jaune, en haut) et $f_Y = (5/2)f_X$ (SP rosée et SP orange, au centre). Pour $E = 0.4$ (figures 5.14a et

5.14b) ces points fixes déforment les trajectoires existantes (en particulier, la solution $Y = 0$ devient un point fixe hyperbolique), mais on ne voit pas des trajectoires quasi-périodiques autour d'eux³. Pour $E = 0.5$ il y a déjà un chaos très développé, comme on voit en figures 5.14e et 5.14f. Dans cette situation, très proche du seuil $E_T(0.7) = 0.51$, la région régulière qui reste est organisée autour de $X = 0$ et de solutions accrochées satisfaisant $f_Y = 3f_X$ (SP bleues et SP grises). Il reste aussi des petits îlots réguliers autour des solutions $f_Y = 2f_X$, dont on voit une SP en jaune, en haut, et une autre SP à gauche et à droite des figures 5.14e et 5.14f.

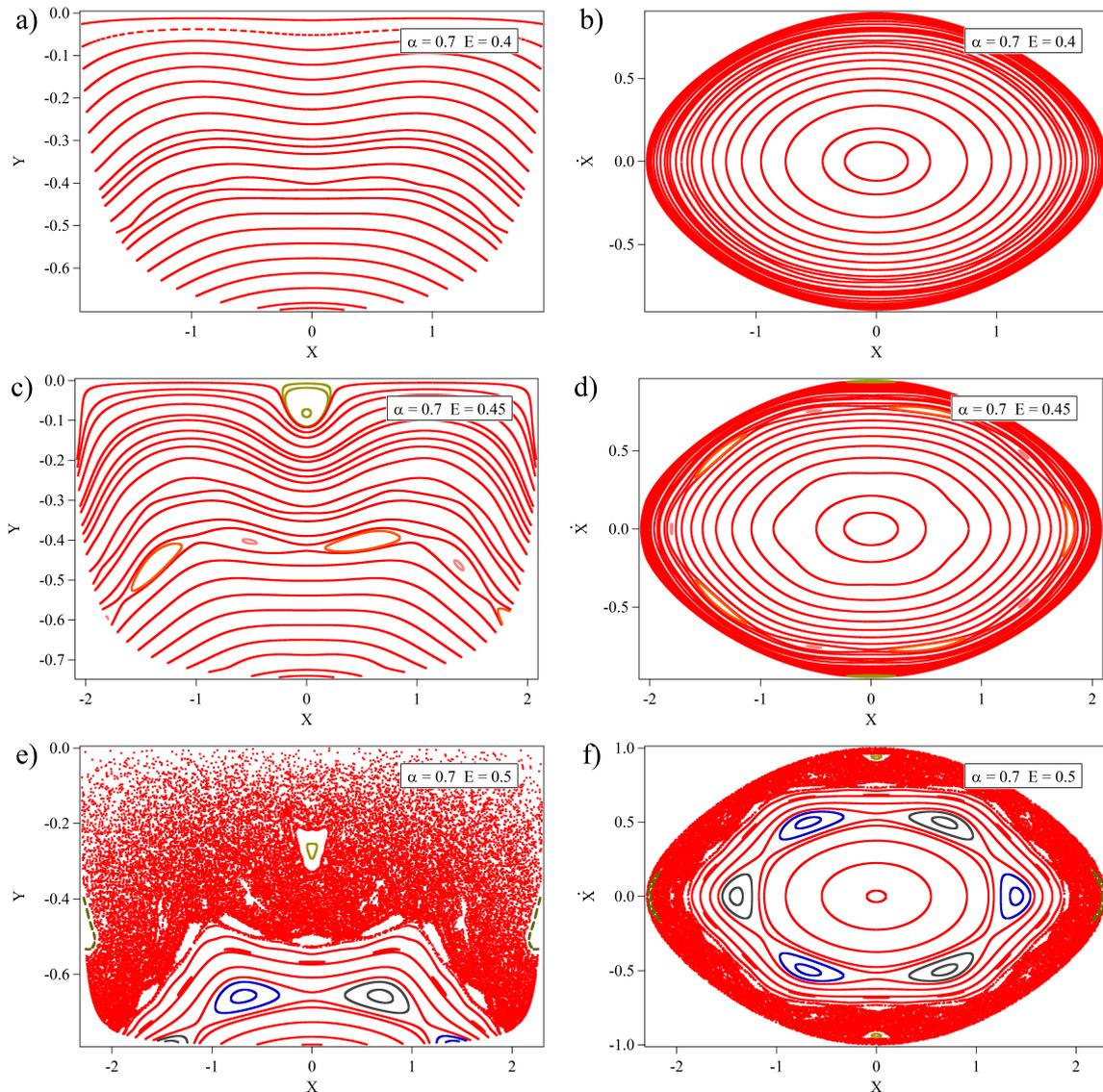


FIGURE 5.14 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.7$ et pour : a,b) $E = 0.4$; c,d) $E = 0.45$; e,f) $E = 0.5$.

3. Bien entendu, c'est dû aux critères choisis pour la construction de la carte de SP. Si nous cherchions une solution dans une région entre $Y = -0.4$ et $Y = -0.5$ pour $E = 0.4$, nous trouverions ces trajectoires.

5.2.8 Le cas $\alpha = 0.8$

Comme dans le cas de $\alpha = 0.6$, pour $\alpha = 0.8$, l'apparition des points fixes correspondants à des solutions accrochées se produit pour des énergies très faibles : pour $E = 0.02$, il existe les solutions découplées et la solution $f_Y = 3f_X$. On voit mieux cette dernière pour $E = 0.1$, dans les figures 5.15a et 5.15b, où les SP quasi-périodiques autour d'elle sont tracés en bleu et en gris. Nous avons déjà vu cette solution pour $(\alpha, E) = (0.7, 0.5)$.

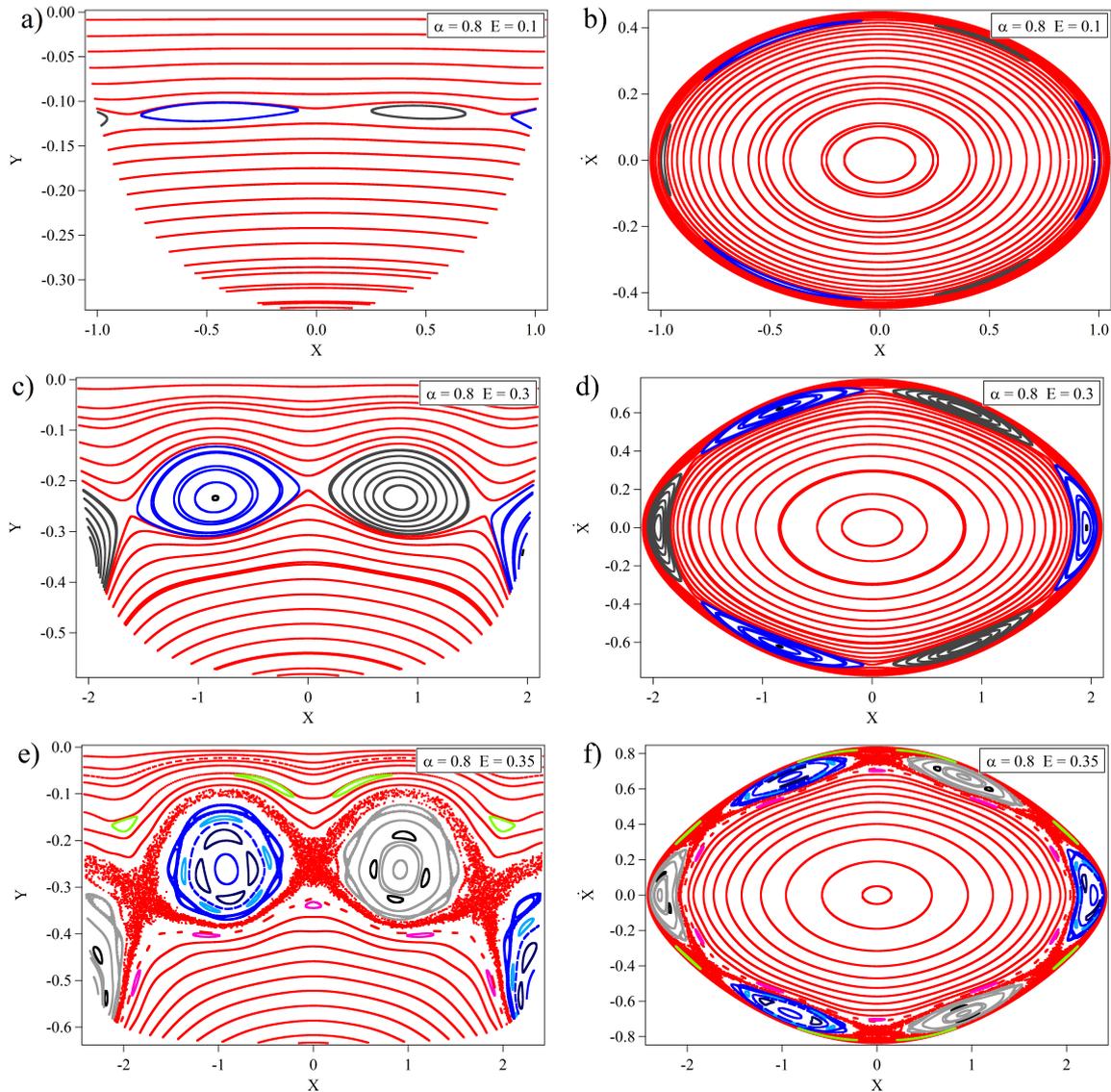


FIGURE 5.15 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.8$ et pour : a,b) $E = 0.1$; c,d) $E = 0.3$; e,f) $E = 0.35$.

Nous examinons le point fixe en noir dans les figures 5.15c et 5.15d, autour duquel oscillent plusieurs trajectoires quasi-périodiques (SP en bleu). Le mouvement représenté par ce point est affiché dans la figure 5.16. C'est une oscillation avec $f_Y = 3f_X$ ($f_X = 50$ Hz), comme le montre le spectre en figure 5.16c. On remarque la présence des harmoniques $3f_X$ (coïncidant avec f_Y) et $3f_Y$, et de plusieurs harmoniques supérieurs : en particulier, l'harmonique $5f_X$ coïncide avec $2f_X + f_Y$, et le $7f_X$ coïncide avec

$2f_Y + f_X$.

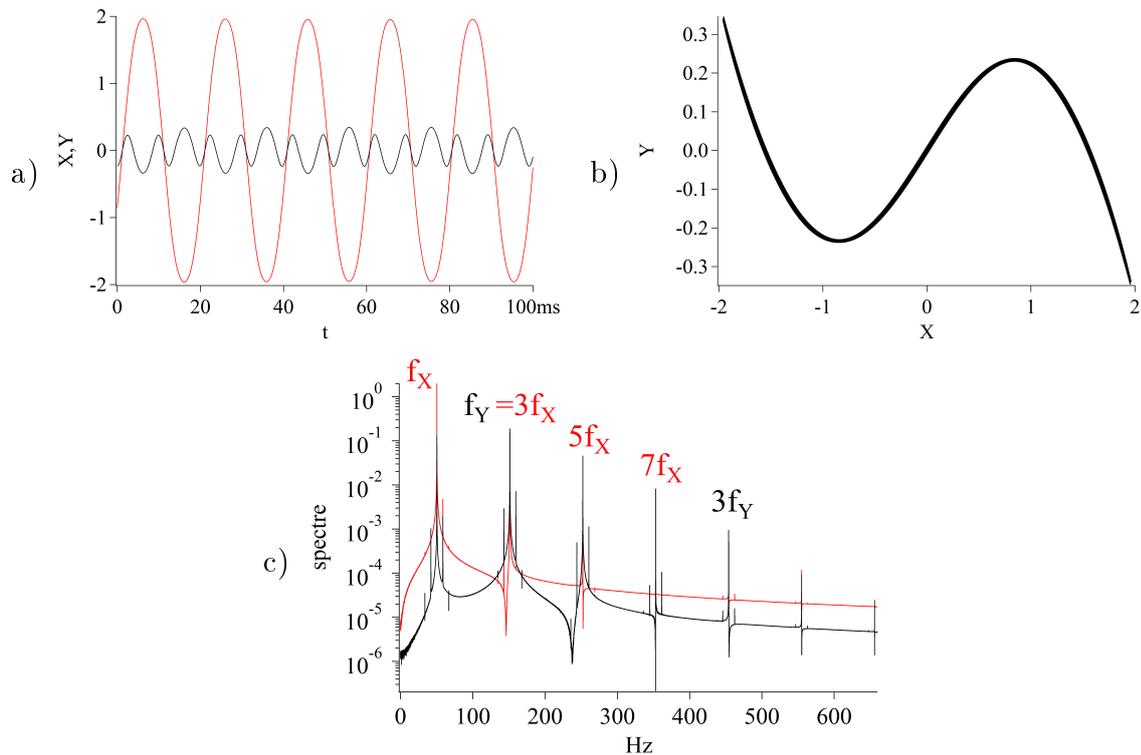


FIGURE 5.16 – Solution (point fixe en gris en figures 5.15c et 5.15d) pour $(\alpha, E) = (0.8, 0.3)$: a) X (rouge) et Y vs t ; b) Y vs X ; c) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y .

Pour $E = 0.35$, il existe une solution chaotique (figure 5.15e et 5.15f), mais elle est très restreinte à la région de la séparatrice, même pour une énergie très proche du seuil $E_T(0.8) = 0.36$. Pour cette énergie, il apparaît aussi des solutions accrochées proches du rapport 3 dominant : les solutions dont la SP est en vert clair, pour lesquelles $f_Y = (8/3)f_X$, et les solutions en rosé, pour lesquelles $f_Y = (10/3)f_X$. Par ailleurs, certaines trajectoires avec $f_Y = 3f_X$ présentent un accrochage des fréquences de battement avec $f_X/2$, par exemple, la SP en gris foncé et celle en bleu foncé. C'est un phénomène que nous avons déjà vu pour certaines solutions $f_Y = f_X$, pour $(\alpha, E) = (0.1, 0.9)$.

5.2.9 Le cas $\alpha = 0.9$

Pour $\alpha = 0.9$, l'intervalle d'énergies dans le puits est étroit : E peut varier jusqu'à $E_T(0.9) = 0.19$. Les valeurs d'énergies explorées, $E = 0.05$, $E = 0.1$ – pour lequel l'espace des phases est montré en figures 5.17a et 5.17b – et $E = 0.15$, ne permettent pas de voir l'apparition d'une solution différente des mouvements découplés selon X et Y . Cependant, dans la figure 5.17c, on peut deviner l'existence d'autres solutions par la déformation des SP.

5.2.10 Les cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

Les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ modifient la forme du potentiel donné par l'équation (5.1) de façon critique, menant en conséquence à des situations particulières. Pour $\alpha = 1$,

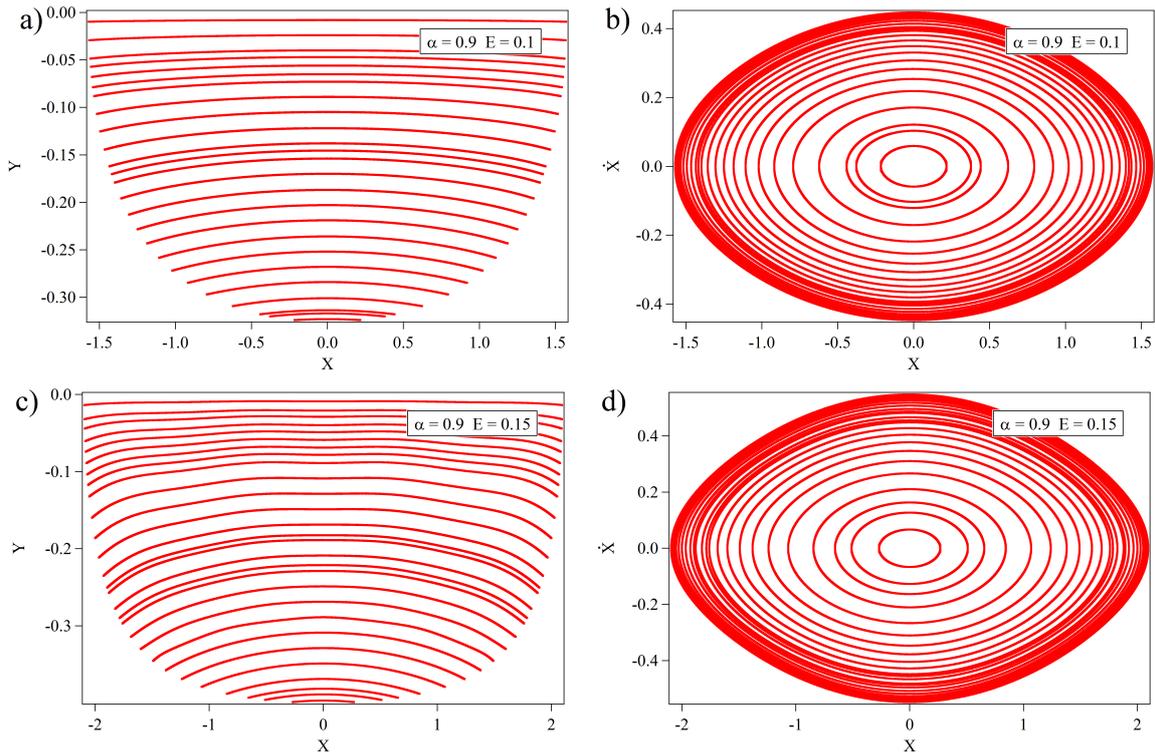


FIGURE 5.17 – Carte de sections de Poincaré pour $\alpha = 0.9$ et pour : a,b) $E = 0.1$; c,d) $E = 0.15$.

nous avons vu, dans le chapitre 3, que la distribution d'intensité du réseau carré donne un potentiel qui ne peut pas piéger les atomes. Donc, ce cas ne nous intéresse pas dans notre étude de la dynamique dans les puits.

Dans le chapitre 3 nous avons vu aussi que le cas $\alpha = 0$, dans le repère x, y , mène à une configuration simple : le couplage disparaît et le problème est séparable. Notre passage aux coordonnées X et Y , tournées de $\pi/4$ par rapport à x, y , fait que le potentiel pour $\alpha = 0$ présente toujours du couplage. Évidemment, nous ne nous attendons pas à une dynamique complexe pour cette configuration, mais il est intéressant pour ce travail de voir les solutions trouvées.

Dans les figures 5.18a et 5.18b, nous montrons la carte de SP obtenue pour $\alpha = 0$ et pour $E = 0.1$. Cette carte est représentative de toute la dynamique pour cette valeur de α , puisque des énergies différentes changent uniquement la courbure du demi-ovoïde qui est l'espace des phases accessible. Les deux solutions présentes sont toujours les mêmes, pour toute énergie $0 < E \leq E_T(0) = 1$: elles correspondent aux solutions accrochées en fréquence $f_Y = f_X$, en phase et en opposition, que nous avons vu pour la première fois pour $\alpha = 0.1$.

Dans la figure 5.18c, nous avons tracé le mouvement représenté par la SP en gris dans les figures 5.18a et 5.18b. Il s'agit de la solution en opposition de phase : dans la figure 5.18d, nous voyons l'accrochage à la fréquence f_0 commune ($f_0 = 155$ Hz) et aussi l'existence du troisième harmonique $3f_0$. Notons que les mouvements en phase et en opposition – qui ont la même amplitude selon X et Y , donc selon x et y .

Nous remarquons qu'il n'est pas possible – à partir des résultats numériques – de

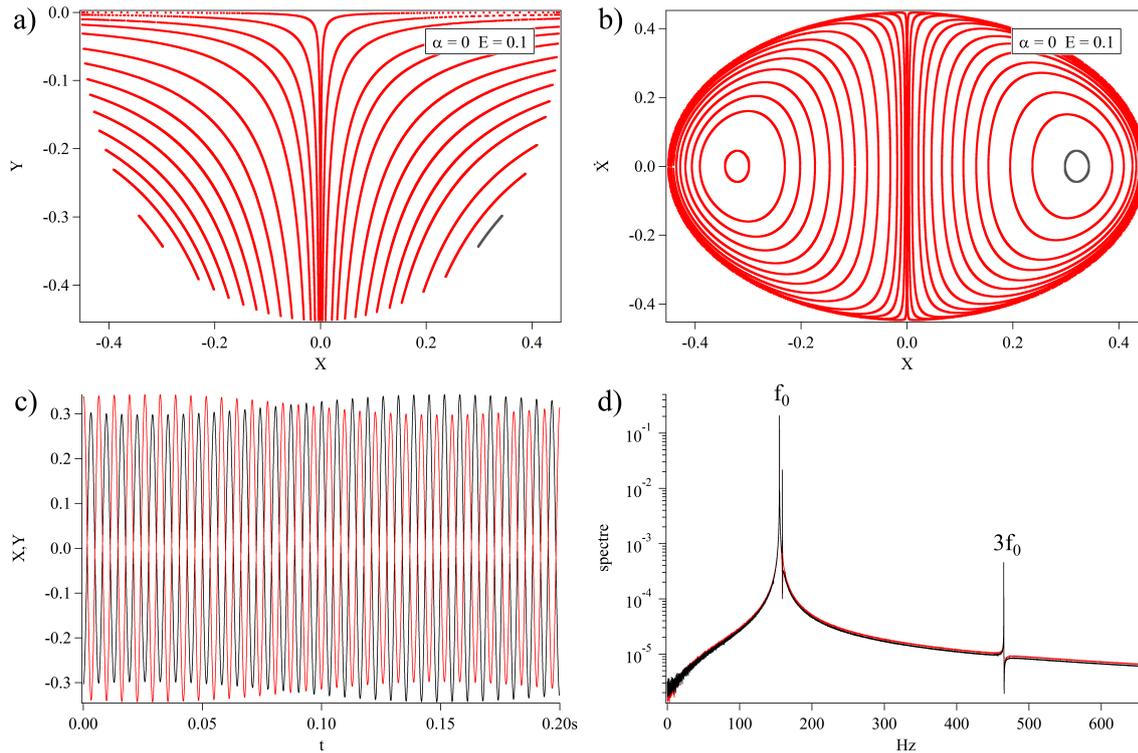


FIGURE 5.18 – $(\alpha, E) = (0, 0.1)$: a,b) carte de sections de Poincaré ; c) mouvement correspondant à la SP grise, X (rouge) et Y vs t , d) FFT (échelle log) de X (rouge) et de Y .

déduire que les solutions accrochées $f_Y = f_X$ pour $\alpha = 0$ sont le résultat d'un système séparable dans un autre repère (x, y) . Ces mêmes solutions ont été observées pour $\alpha = 0.1$, jusqu'à $\alpha = 0.4$, et le potentiel dans ces cas n'est pas séparable dans x, y . L'intérêt de montrer ce mouvement séparable dans le repère X, Y , où il paraît accroché, est de voir l'origine des solutions $f_Y = f_X$ qui continuent à apparaître, de façon moins étendue, pour d'autres configurations du système.

5.3 Discussion

La diversité des régimes dynamiques du réseau carré bleu fait que, pour une valeur de α donnée, la nature du mouvement atomique change avec E . Cette nature varie, en particulier, de régulière à chaotique. Elle peut changer aussi d'un mouvement découplé dans chaque coordonnée à un autre accroché en fréquence.

De la même façon, pour une énergie donnée, l'espace des phases change radicalement selon la valeur de α . Prenons par exemple un atome avec une énergie $E = 0.5$, et analysons comment sa dynamique peut varier en modifiant α (figure 5.19) : pour cette énergie, nous avons trouvé uniquement des solutions découplées pour $\alpha = 0.2$ et pour $\alpha = 0.3$. Ensuite, nous avons vu que pour cette valeur il existe aussi des solutions accrochées en fréquence pour $\alpha = 0.1$ ($f_Y = f_X$), $\alpha = 0.4$ ($f_Y = (3/2) f_X$), $\alpha = 0.5$ et $\alpha = 0.6$ ($f_Y = 2f_X$). Pour $\alpha = 0.7$, il y a aussi du chaos. Enfin, pour $\alpha = 0.8$ et pour $\alpha = 0.9$, l'atome avec cette énergie n'est plus piégé dans le puits de potentiel.

En conséquence, l'espace (α, E) implique plusieurs régimes dynamiques accessibles à

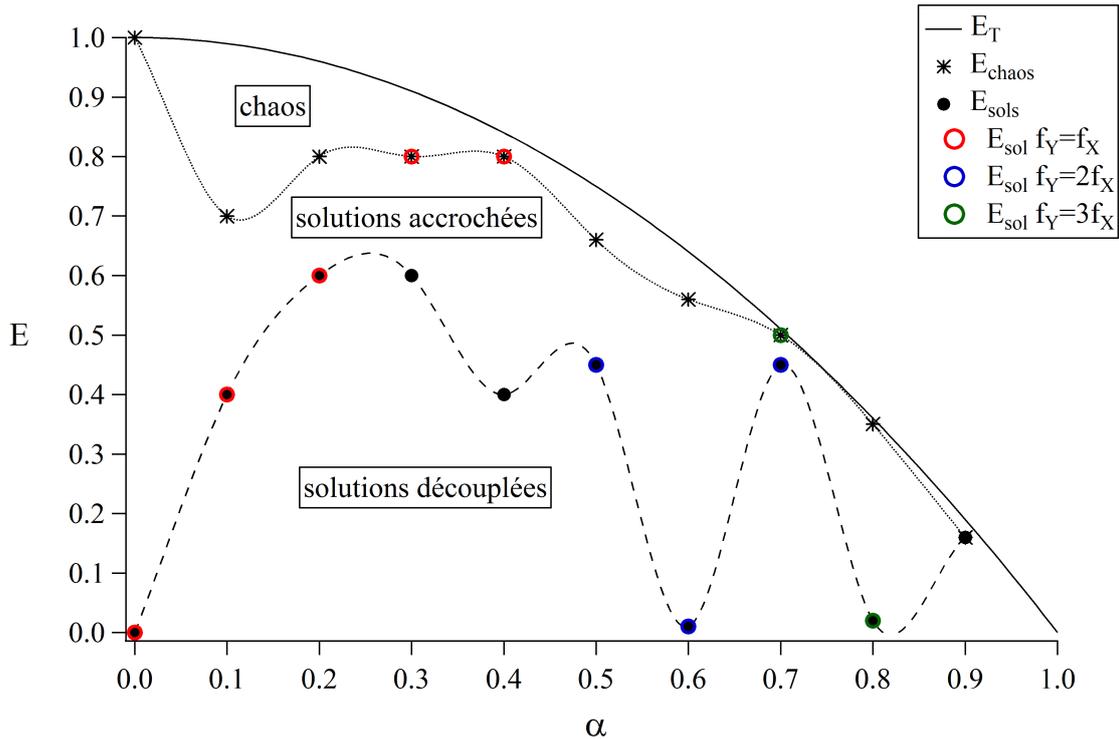


FIGURE 5.19 – Seuils d’énergie pour l’apparition de solutions accrochées (E_{sols}) et du chaos (E_{chaos}), pour les différentes valeurs de α . Les courbes pontillées s’affichent seulement comme un guide. On montre aussi le seuil d’énergie $E_T(\alpha)$ pour sortir du puits.

un atome dans le réseau carré bleu. Pour mieux traiter cette dynamique, nous pouvons fixer un des deux paramètres intervenants : soit une valeur particulière de α pour étudier les différents régimes qui apparaissent pour différentes énergies, soit l’énergie de l’atome pour évaluer les effets du paramètre α .

Nous pouvons cependant établir quelques caractéristiques observées dans l’exploration que nous avons faite des espaces des phases pour les divers (α, E) , en excluant le cas particulier $\alpha = 0$. D’abord, il existe toujours les solutions représentant un mouvement découplé selon X et selon Y . En particulier, la solution trouvée pour $X = 0$ est toujours un point fixe elliptique⁴ et les solutions quasi-périodiques autour de ce point forment une région qui reste régulière dans toutes les situations que nous avons explorées. La solution $Y = 0$ devient un point fixe hyperbolique quand d’autres points fixes apparaissent, notamment ceux correspondants aux solutions $f_Y = f_X$. Cette apparition de solutions accrochées en fréquence se produit, comme nous l’avons constaté, à des valeurs d’énergie E_{sols} très différentes selon α (figure 5.19).

Seuils d’énergie pour l’apparition des solutions accrochées

Nous pouvons comparer les différentes valeurs de E_{sols} si nous prenons comme référence le seuil d’énergie $E_T(\alpha)$ dans chaque cas. Les solutions accrochées apparaissent pour des très faibles énergies par rapport au seuil pour $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.8$ ($E_{sols} < 0.1 \times E_T$). Elles apparaissent pour des énergies intermédiaires pour $\alpha = 0.1$

4. Nous avons choisi $\alpha > 0$; pour $\alpha < 0$, ce serait la solution $Y = 0$ le point fixe elliptique.

jusqu'à $\alpha = 0.5$ ($0.4 \times E_T < E_{sols} < 0.7 \times E_T$). Finalement, les solutions accrochées apparaissent pour des hautes énergies pour $\alpha = 0.7$ et $\alpha = 0.9$ ($E_{sols} > 0.75 \times E_T$).

Les seuils E_{sols} correspondent à la première solution accrochée qui apparaît, mais nous avons vu que celle qui apparaît en premier n'est pas toujours la même. Comme nous l'avons constaté, la solution $f_Y = f_X$ est trouvée pour α de 0.1 à 0.4 aux énergies E_{sols} remarquées en rouge dans la figure 5.19. Le point pour $\alpha = 0$ apparaît donc comme l'origine de cette solution, pour lequel elle est toujours présente, et à partir duquel le seuil E_{sols} s'incrémente avec α croissant. D'autre part, la solution $f_Y = 2f_X$ est trouvée pour toutes les énergies pour $\alpha = 0.6$, et ses seuils d'apparition E_{sols} sont en bleu dans la figure 5.19. Les seuils pour la solution $f_Y = 3f_X$ sont remarqués en vert : ce point fixe apparaît pour très hautes énergies pour $\alpha = 0.7$, mais il est toujours présent pour $\alpha = 0.8$. La solution accrochée qui complète la courbe E_{sols} est le mouvement avec $f_Y = (3/2) f_X$, vu pour $\alpha = 0.3$ et $\alpha = 0.4$, où il apparaît pour des énergies plus faibles que les solutions $f_Y = f_X$.

Seuils d'énergie pour l'apparition du chaos

L'apparition du chaos est un trait commun pour toutes les valeurs de α examinées dans ce chapitre : l'étendue de la région chaotique, néanmoins, change beaucoup avec α . Il semble rester toujours des îlots réguliers, notamment la région au voisinage du point elliptique $X = 0$, créant un régime mixte quand on approche le seuil d'énergie E_T .

L'apparition de solutions chaotiques a été observée pour des différentes énergies E_{chaos} , selon la valeur de α (figure 5.19) : les solutions chaotiques s'observent pour des énergies grandes par rapport au seuil pour $\alpha = 0.1$ jusqu'à $\alpha = 0.3$, et pour $\alpha = 0.5$, $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.9$ ($0.7 \times E_T < E_{chaos} < 0.9 \times E_T$). En revanche, le chaos apparaît pour des très hautes énergies pour $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.7$ et $\alpha = 0.8$ ($E_{chaos} > 0.9 \times E_T$).

Le seuil d'apparition du chaos ne semble pas être lié à son étendue, car dans des cas où il apparaît seulement pour des énergies grandes (par exemple, $\alpha = 0.7$) il est quand même très développé. Pour comparer correctement la présence du chaos dans les différentes situations il nous semble nécessaire de prendre une valeur fixe d'énergie ; un choix naturel est le seuil d'énergie E_T , pour lequel les amplitudes du mouvement atteignent leur maxima et donc toutes les non-linéarités deviennent importantes. Dans le chapitre suivant, nous prenons cette approche pour mieux comprendre l'existence du chaos dans les différentes configurations de notre système.

Chapitre 6

Chaos et synchronisation dans le réseau carré bleu

L'atome piégé dans le réseau carré avec un désaccord positif (réseau carré bleu) présente la diversité de régimes dynamiques explorés dans le chapitre 5. Dans ce chapitre, ces régimes sont analysés exclusivement en fonction du paramètre α : la dépendance de la dynamique avec α est étudiée à partir du comportement au seuil d'énergie pour que l'atome reste dans un puits de potentiel. En particulier, l'étendue de la zone de l'espace des phases pour laquelle le système est chaotique varie, ce qui est montré en section 1 et quantifié en section 2 à l'aide des cartes de sections de Poincaré. Nous verrons que pour certaines valeurs de α il y a des fenêtres de dynamique régulière, où le chaos est inhibé. En section 3, nous confirmons la présence ou inhibition du chaos en calculant la dimension des trajectoires dans les différentes configurations. Finalement, en section 4, nous utilisons une approximation analytique pour associer les fenêtres à des résonances, qui inhibent le chaos dans le système par un phénomène de synchronisation.

Chapitre 6

Chaos et synchronisation dans le réseau carré bleu

6.1 Introduction : l'étendue du chaos au seuil d'énergie

Dans le chapitre 5, nous avons décrit les différents régimes dynamiques qui se manifestent pour un atome piégé dans le réseau carré bleu. Ces régimes sont obtenus en modifiant les deux paramètres qui interviennent dans ce système, l'énergie E de l'atome et le paramètre α . En particulier, l'existence d'un régime chaotique et son étendue varient selon ces deux paramètres.

L'exploration de la dynamique dans l'espace (α, E) est cependant trop vaste, comme nous l'avons vu dans le chapitre 5. De plus, le seuil d'énergie pour l'apparition du chaos est indépendant de son développement ultérieur dans l'espace des phases. Pour mieux comprendre les variations du régime dynamique et de l'étendue du chaos, dans ce chapitre nous les analysons en fonction du paramètre α , en fixant l'énergie au seuil E_T (éq. 5.4) au delà duquel l'atome peut sortir du puits de potentiel. C'est pour cette énergie que les non-linéarités et les termes de couplage du Hamiltonien sont maximaux, et on s'attend donc à ce que la dynamique soit le plus chaotique.

Une première analyse sur l'évolution de la dynamique avec α peut se faire à partir des sections de Poincaré (SP) calculées pour une énergie égale à E_T . Pour des énergies proches du seuil, l'espace des phases accessible, que nous avons décrit comme un demi-ovoïde, prend la forme montrée sur les figures 6.1a et 6.1b. Le demi-ovale qui est sur l'axe X s'aplatit, de sorte que la projection latérale (X, Y) tend vers un rectangle (figure 6.1d).

Examinons alors cette projection latérale (X, Y) du demi-ovoïde pour les valeurs de α considérées dans le chapitre 5 : la figure 6.2 permet de comparer qualitativement l'étendue du régime chaotique selon la valeur de α . Au lieu du cas particulier $\alpha = 0$, qui n'a pas d'intérêt car nous savons qu'il mène forcément à un mouvement régulier, nous prenons ici une valeur petite de α : $\alpha = 0.01$ (figure 6.2a).

Nous constatons l'absence de chaos au seuil d'énergie pour $\alpha = 0.01$, alors qu'au contraire il apparaît pour $\alpha = 0.1$ (figure 6.2b), et il est plus étendu par exemple pour $\alpha = 0.2$ (figure 6.2c), $\alpha = 0.3$ (figure 6.2d) et $\alpha = 0.4$ (figure 6.2e). Dans le cas déjà connu $\alpha = 0.5$ (voir section 2 du chapitre 3), ou en $\alpha = 0.6$, la situation est intermédiaire, avec une zone chaotique assez étendue mais une région non chaotique presque aussi étendue (figures 6.2f, 6.2g).

Dans la section suivante, nous allons présenter une méthode de mesure de l'étendue du chaos, afin de rendre ces observations plus quantitatives. Nous prendrons aussi un ensemble de valeurs de α plus grand, en le faisant varier de 0 à 1 de façon plus continue.

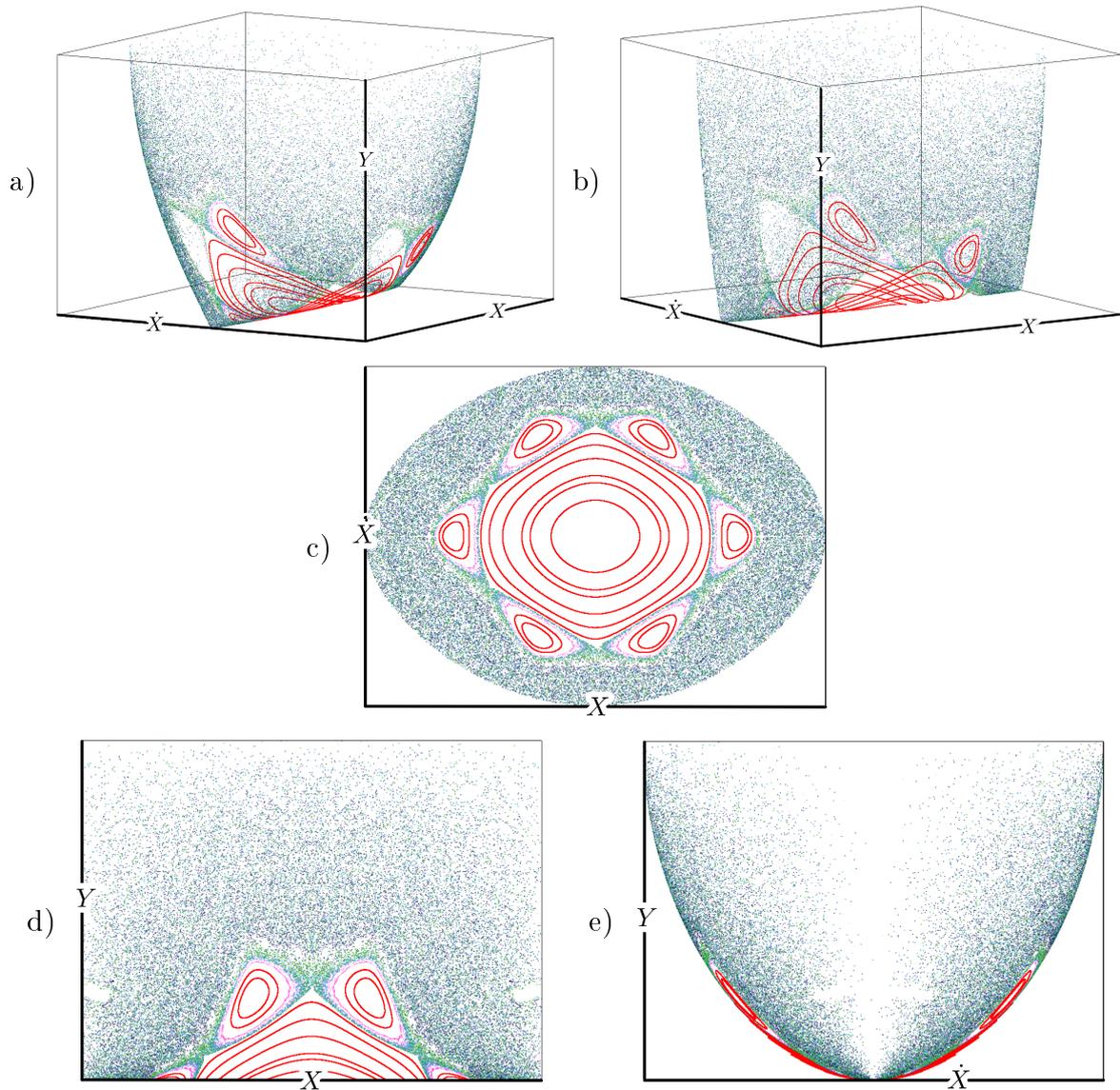


FIGURE 6.1 – Carte de sections de Poincaré au seuil d'énergie ($E_T = 0.9375$) pour $\alpha = 0.25$: a), b) vues en 3D ; projection sur le plan c) $X\dot{X}$, d) XY , e) $\dot{X}Y$.

6.2 Chaoticité de la dynamique au seuil d'énergie

Nous voulons comparer le degré de chaos, que nous définissons comme la « chaoticité », pour des valeurs de paramètres différentes. Pour faire cette comparaison, notre approche est de mesurer l'espace occupé par une trajectoire chaotique. Nous faisons l'hypothèse que lorsqu'il est chaotique, le système suit un processus ergodique [Schuster2005, Kuztnesov2012], et par conséquent qu'une seule trajectoire chaotique suffisamment longue permet de décrire l'ensemble de la dynamique chaotique. Il faut remarquer que, comme le montre la figure 6.2, la région chaotique n'occupe jamais tout l'espace des phases accessible : il existe toujours des îlots réguliers. L'hypothèse d'ergodicité implique donc ici que la solution chaotique parcourt tout l'espace des phases accessible limité par les solutions régulières.

Pour vérifier la validité de cette hypothèse, nous avons pris le cas $\alpha = 0.4$ au seuil

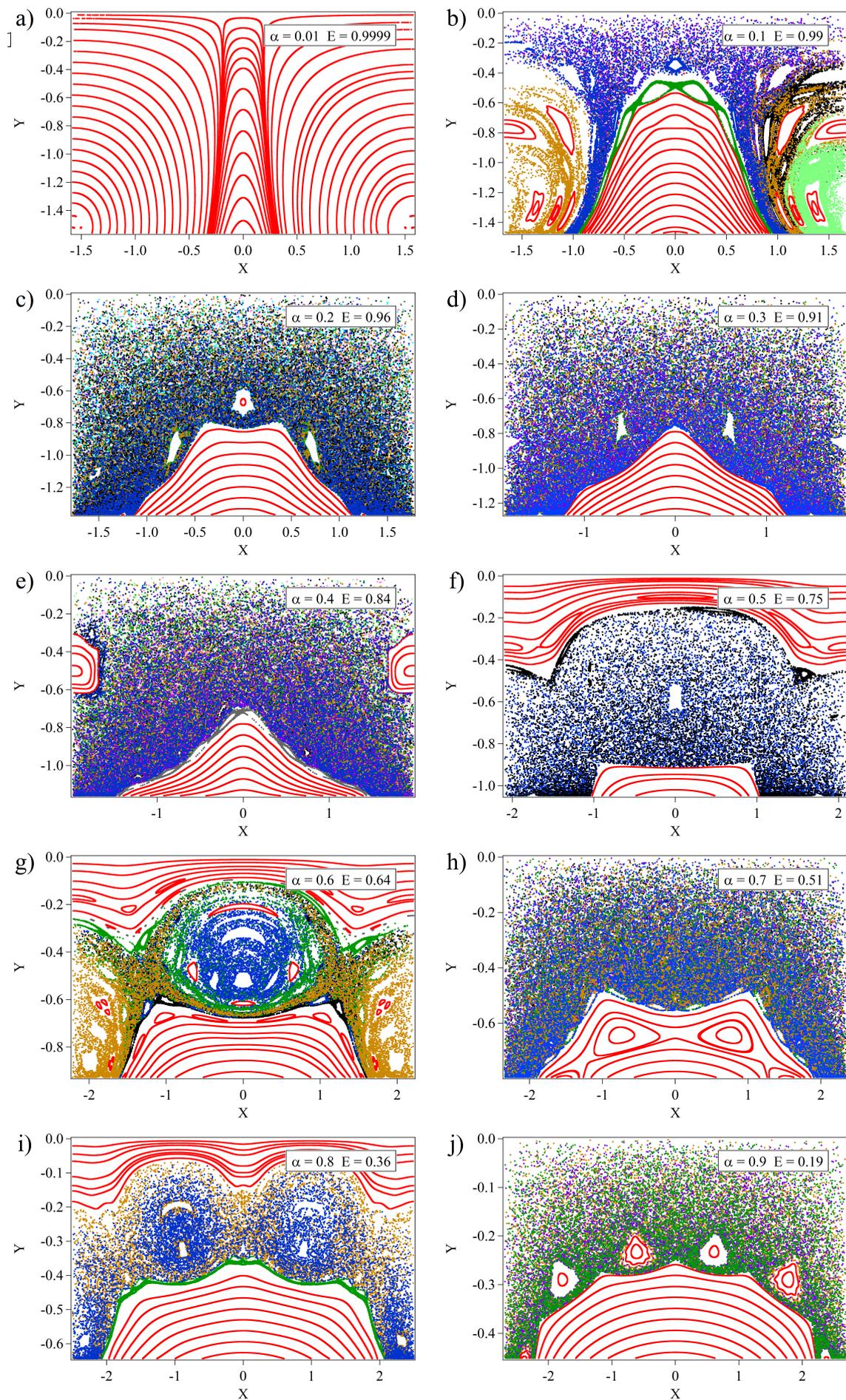


FIGURE 6.2 – Cartes de SP au seuil d'énergie : a) $\alpha = 0.01$, b) $\alpha = 0.1$, c) $\alpha = 0.2$, d) $\alpha = 0.3$, e) $\alpha = 0.4$, f) $\alpha = 0.5$, g) $\alpha = 0.6$, h) $\alpha = 0.7$, i) $\alpha = 0.8$, j) $\alpha = 0.9$.

d'énergie $E_T = 0.84$, montré dans la figure 6.2e et que nous affichons à nouveau dans la figure 6.3a. Le chaos est ici très développé ; les SP chaotiques correspondent à 8 conditions initiales différentes, identifiées avec des couleurs différentes dans la figure. Pour démontrer que ces 8 SP, qui ont 10^4 points chacune, représentent la même dynamique chaotique, nous reprenons les conditions initiales d'une des trajectoires dont on affiche la SP. Nous choisissons celle avec la SP en bleu sur la figure 6.3a. Mais, cette fois, nous laissons évoluer la solution pendant un intervalle ~ 100 fois plus grand, afin d'avoir une trajectoire « longue » et une SP de 10^6 points. Le résultat, affiché dans la figure 6.3b, est que cette solution remplit toute la région chaotique, et ses points coïncident avec ceux associés auparavant aux différentes conditions initiales des trajectoires « courtes » (voir par exemple la frontière avec la région régulière, affichée en gris dans la figure 6.3a).

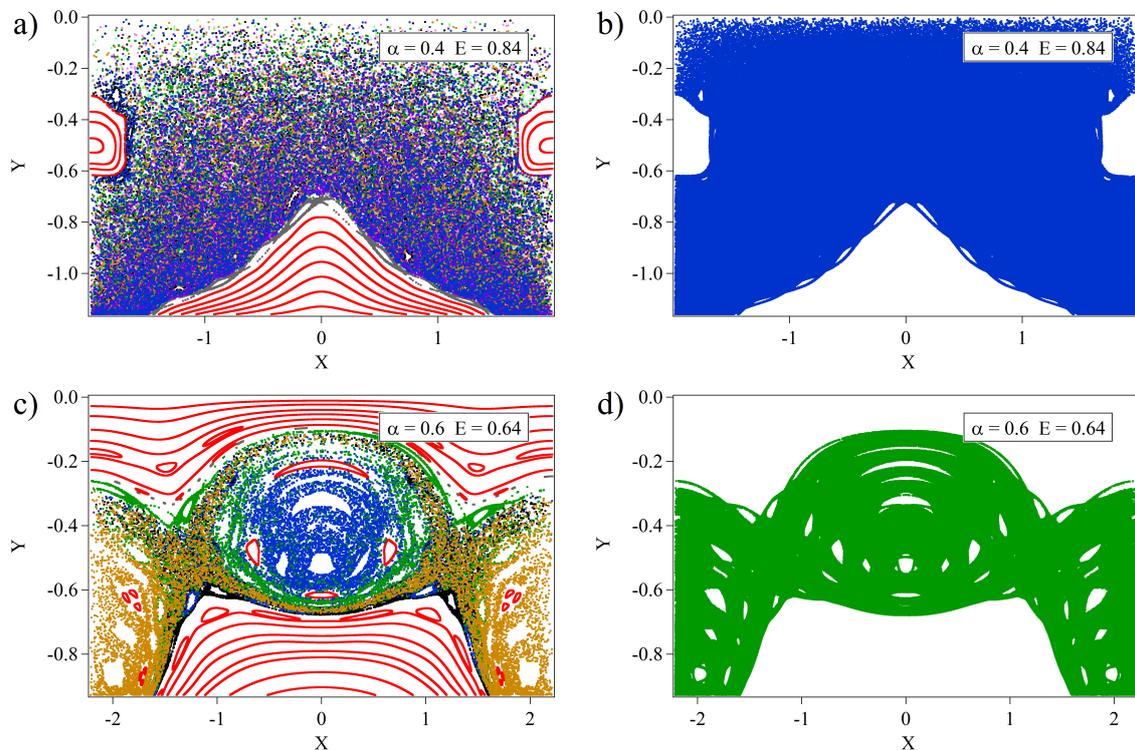


FIGURE 6.3 – Sections de Poincaré au seuil d'énergie : a) et c) correspondent à plusieurs SP avec 10^4 points ; b) et d) correspondent à une seule SP dans la région chaotique, de 10^6 points.

On retrouve le même résultat pour $\alpha = 0.6$, où le chaos est plus restreint : la région chaotique de la figure 6.3c comprend 5 SP qui représentent en effet le même régime. Cela est montré dans la figure 6.3d, où nous avons laissé évoluer une solution pour avoir une SP de 10^6 points (nous avons choisi les conditions initiales de la trajectoire dont la SP est verte sur la figure 6.3c). Le caractère ergodique du système est ainsi vérifié, et donc pour caractériser une région chaotique nous décidons d'employer une seule des trajectoires « courtes ». Nous n'affirmons pas que l'étendue d'une trajectoire « longue » est nécessairement égale à celle d'une « courte », mais que la deuxième est représentative de la première ; nous insistons sur le fait que nous pouvons choisir n'importe laquelle des trajectoires « courtes », car toutes représentent la même dynamique.

Pour effectuer la mesure de l'étendue des trajectoires, nous faisons le choix de travailler sur les projections des SP, plutôt que sur l'espace des phases réel. Travailler dans un plan simplifie énormément l'analyse, mais la projection introduit une déformation par rapport à la surface originale du demi-ovoïde. Cependant, notre objectif étant seulement de comparer la dynamique obtenue pour des jeux de paramètres différents, cette déformation n'aura pas d'impact¹. Par précaution, nous avons quand même effectué le calcul pour les deux projections des SP, (X, Y) et (X, \dot{X}) , et nous avons vérifié que les résultats obtenus étaient compatibles.

La méthode utilisée pour la mesure est de diviser l'espace accessible en un grand nombre de cellules, et de simplement compter les cellules qui contiennent au moins un point de la SP dont on veut déterminer l'étendue : l'aire de la SP est ainsi simplement la somme des aires des cellules visitées.

6.2.1 Mesure sur le plan XY

Au voisinage du seuil E_T , la projection sur le plan XY du demi-ovoïde tend vers un rectangle. On considère donc que l'espace accessible est le rectangle délimité par les valeurs extrémales données par l'équation (4.12), évaluées pour E_T :

$$X_{max} = \pi - \arccos(\alpha) \quad (6.1a)$$

$$X_{min} = -X_{max} \quad (6.1b)$$

$$Y_{max} = 0 \quad (6.1c)$$

$$Y_{min} = -\arccos(\alpha) \quad (6.1d)$$

Comme le mouvement est symétrique par rapport à la droite $X = 0$ (voir la figure 6.2), nous considérons uniquement les SP dans le demi-espace $X > 0$. Cette région est divisée en $32 \times 32 = 1024$ cellules². Il reste à déterminer le nombre M de cellules dans lesquelles se trouve au moins un point de la trajectoire, et d'en déduire le pourcentage A_O de l'espace occupé par le chaos.

En pratique, afin de rendre la procédure la plus automatique possible, nous faisons le calcul pour toutes les trajectoires d'une situation donnée, et retenons la valeur de A_O la plus élevée, qui correspond forcément à une des trajectoires chaotiques. La figure 6.4 montre la chaoticité obtenue en fonction de α .

La courbe montre une forte croissance entre $\alpha = 0.01$ et environ $\alpha = 0.15$, puis un plateau pratiquement constant pour des α plus élevés. Comme observé aussi dans la figure 6.2a, le chaos n'est donc pas présent pour α faible. Il apparaît progressivement lorsque α augmente (vu par exemple dans la figure 6.2b), jusque $\alpha = 0.15$, où le système atteint un régime très chaotique. On remarque cependant plusieurs fenêtres étroites, où le chaos disparaît partiellement, de façon plus ou moins prononcée. C'est notamment le cas autour $\alpha = 0.6$, qui correspond à la figure 6.2g, où nous avons déjà remarqué que le chaos était moins étendu. Ce phénomène se répète en $\alpha = 0.8$, d'une façon plus modérée, ainsi qu'en $\alpha = 0.89$, où il est encore moins prononcé.

1. On pourrait cependant, si c'était utile, remonter à la valeur réelle de l'étendue sur la surface, mais cela n'apporterait rien de plus.

2. Nous avons essayé avec des maillages allant de 128x128 à 16x16 cellules, pour choisir lequel permet de mieux mesurer l'étendue. Un compromis entre assez de précision et un nombre de cellules suffisamment petit pour donner des pourcentages raisonnables, donne un maillage de 32x32 cellules pour le plan XY .

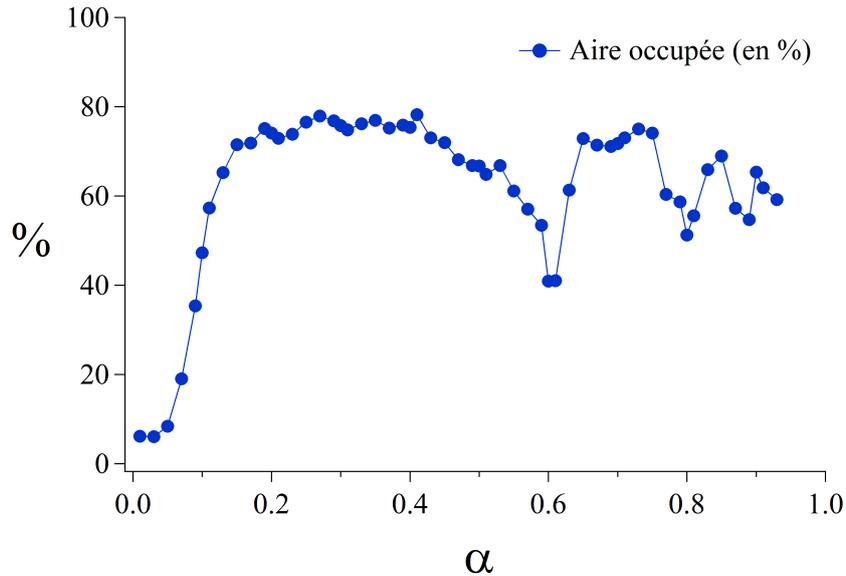


FIGURE 6.4 – Aire occupée A_O par la section de Poincaré la plus étendue dans la projection (X, Y) , en fonction du paramètre α .

6.2.2 Mesure sur le plan $X\dot{X}$

Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous effectuons maintenant la mesure sur la projection sur le plan $X\dot{X}$. Comme nous avons $Y = 0$ et $\dot{Y} = 0$, l'énergie totale satisfait :

$$\begin{aligned}
 E(X, 0, \dot{X}, 0) &= 1 + \alpha(\cos X - 1) - \cos X + \frac{\dot{X}^2}{2} \\
 &= E_T \\
 &= 1 - \alpha^2
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

En conséquence, les valeurs extrémales de \dot{X} sont :

$$\dot{X}_{max,min} = \pm\sqrt{2(1 - \alpha^2)} \tag{6.3}$$

Celles de X restent données par les équations (6.1a) et (6.1b). Nous continuons à considérer le rectangle délimité par ces quatre valeurs, bien que l'espace des phases accessible soit plus petit. Cette simplification conduit à des aires occupées qui semblent plus faibles (figure 6.5), mais qui ne le sont pas en réalité. Par ailleurs, comme le mouvement est symétrique par rapport aux droites $X = 0$ et $\dot{X} = 0$ (voir la figure 6.1c), on peut limiter la mesure de la chaoticité à un quart de l'espace, par exemple $X > 0$ et $\dot{X} > 0$. Le maillage employé pour cette région, dont la densité de points est plus grande par rapport au plan XY , est de $64 \times 64 = 4096$ cellules. La figure 6.5 montre la chaoticité obtenue en fonction de α .

On constate que la courbe obtenue a des similarités avec celle de la figure 6.4, même si les valeurs de chaoticité données par les deux projections sont différentes – comme prévu – à cause de la non conservation des aires lors de la projection. On retrouve la croissance marquée pour les α faibles, puis un plateau avec des fenêtres moins chaotiques

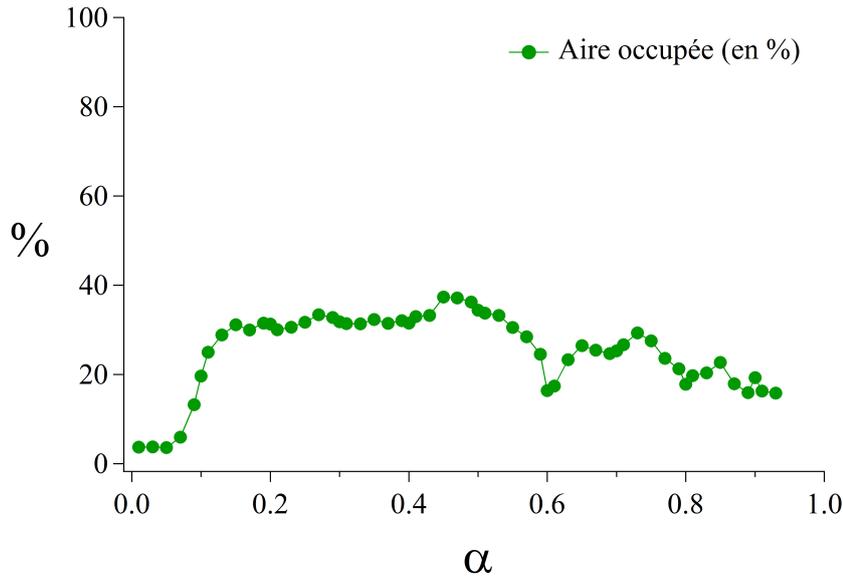


FIGURE 6.5 – Aire occupée A_O par la section de Poincaré la plus étendue dans la projection (X, \dot{X}) , en fonction du paramètre α .

autour de $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.8$, quoique cette dernière soit peu visible. Le petit maximum vu pour $\alpha = 0.45$ peut s'associer à que, autour de cette valeur, l'îlot toujours régulier de la solution $X = 0$ atteint un minimum d'étendue. Comme la région de cette solution n'est pas aussi déformée que celle des points proches du bord du demi-ovoïde, une réduction de son étendue est visible. En revanche, les zones proches du bord, qui sont majoritairement chaotiques, souffrent une compression quand elles sont projetées sur le plan $X\dot{X}$, et leurs changements sont moins évidents. Par conséquent, la projection (X, Y) est susceptible de donner des résultats avec plus d'information sur l'étendue du chaos.

Par ailleurs, une autre conséquence de la non conservation des aires lors de la projection est que la trajectoire la plus étendue dans le plan $X\dot{X}$ des SP n'est pas nécessairement la plus étendue dans le plan XY . Nous avons vu qu'une configuration donne plusieurs SP chaotiques. Chacune d'elles occupe autour de 70% du plan XY : la différence entre leurs étendues est souvent moins de 10%, car, comme nous l'avons montré, toutes représentent la même dynamique. En conséquence, la trajectoire la plus étendue dans le plan XY et celle dans le plan $X\dot{X}$, même en étant différentes, occupent une aire comparable : la différence entre leurs aires est négligeable par rapport à la différence entre l'aire d'une trajectoire chaotique et celle d'une trajectoire régulière.

6.3 Dimension de corrélation au seuil d'énergie

La mesure de l'étendue spatiale du chaos dans l'espace des phases peut être complétée par une caractérisation du chaos lui-même. Il existe plusieurs grandeurs qui permettent une telle caractérisation, les plus utilisées étant la dimension de corrélation des trajectoires et les exposants de Lyapunov, que nous avons décrit dans le chapitre 2.

Nous employons un algorithme de Grassberger-Procaccia pour calculer la dimension de corrélation D (éq. 2.18) des trajectoires, pour les différentes valeurs de α . Nous

calculons la dimension de la trajectoire la plus étendue, qu'elle soit chaotique ou pas. Pour identifier dans chaque espace des phases au seuil d'énergie la trajectoire la plus étendue, nous utilisons les résultats de la section 2 sur la projection (X, Y) des SP.

6.3.1 Implémentation de l'algorithme de Grassberger-Procaccia

Pour estimer la dimension D , nous calculons la corrélation $\hat{C}(r)$ donnée par l'équation (2.19), pour différentes valeurs de la distance r . À partir de la représentation de $\hat{C}(r)$ en fonction de r dans une échelle log-log, nous faisons un ajustement linéaire de la courbe dans la région de r petit ; D est alors la pente de cette droite.

La corrélation $\hat{C}(r)$ est calculée pour les 10^5 premiers points (soit 10%) de la trajectoire. Cette restriction est faite dans le but de réduire le temps de calcul, et le nombre de points analysés a été choisi suffisamment grand pour que les résultats n'en dépendent pas³.

La distance $d_{ij} = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$ considérée pour obtenir $\hat{C}(r)$ est la distance euclidienne, et il ne s'agit pas de la distance sur l'hyper-surface où ils se trouvent. Dans notre espace des phases à 4D (X, Y, θ, p) , d_{ij} est donné par :

$$d_{ij}^2 = (X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2 + p_i^2 + p_j^2 - 2p_i p_j \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (6.4)$$

Nous faisons varier la valeur de r afin d'obtenir 11 points pour évaluer l'évolution de $\hat{C}(r)$. L'ajustement est fait, en général, sur les 5 ou 6 points où $\log(\hat{C}(r))$ se comporte de façon linéaire par rapport au $\log(r)$. Cette région linéaire varie en fonction de α , selon la nature de la dynamique dans chaque cas. En conséquence, l'intervalle de r doit être adapté aux différentes valeurs de α , pour avoir assez de points à ajuster. Dans la figure 6.6, nous montrons deux exemples de la corrélation $\hat{C}(r)$ obtenue et la droite ajustée pour le calcul de la dimension. En particulier, pour $\alpha = 0.01$, $\log(\hat{C}(r))$ est linéaire pour $0.01 < \alpha < 0.058$, avant de devenir une constante pour r plus grand. En revanche, pour $\alpha = 0.5$, $r < 0.058$ correspond à des distances trop petites et la région linéaire est entre $0.058 < r < 0.17$. Le premier cas correspond donc à une situation où les d_{ij} sont petites par rapport à 0.1, alors que le deuxième cas présente une région de transition ($0 < r < 0.058$) parce que nous n'avons pas enregistré suffisamment de points pour avoir une croissance linéaire du $\log(\hat{C}(r))$.

6.3.2 Résultats

Les résultats de nos calculs pour les différentes trajectoires au seuil d'énergie sont donnés dans la figure 6.7. On y voit la variation de la dimension de corrélation D des trajectoires, en fonction du paramètre α . Nous avons pris les valeurs de α entre $\alpha = 0.01$ et $\alpha = 0.9$, avec un pas de 0.05. Néanmoins, cet intervalle est réduit à 0.01 ou 0.02 dans les fenêtres où le chaos était inhibé selon l'analyse de la section 2, c'est à dire au voisinage de $\alpha = 0.01$, $\alpha = 0.6$, $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.89$.

3. Des calculs d'essai ont été faits en employant un nombre de points $\sim N/2$, où N est le nombre total de points de la trajectoire sauvegardée, sans trouver un changement des résultats. Ces calculs, dont la durée dépend de N^2 , prennent plus de 24h pour chaque valeur de α , et n'ont donc pas été nécessaires.

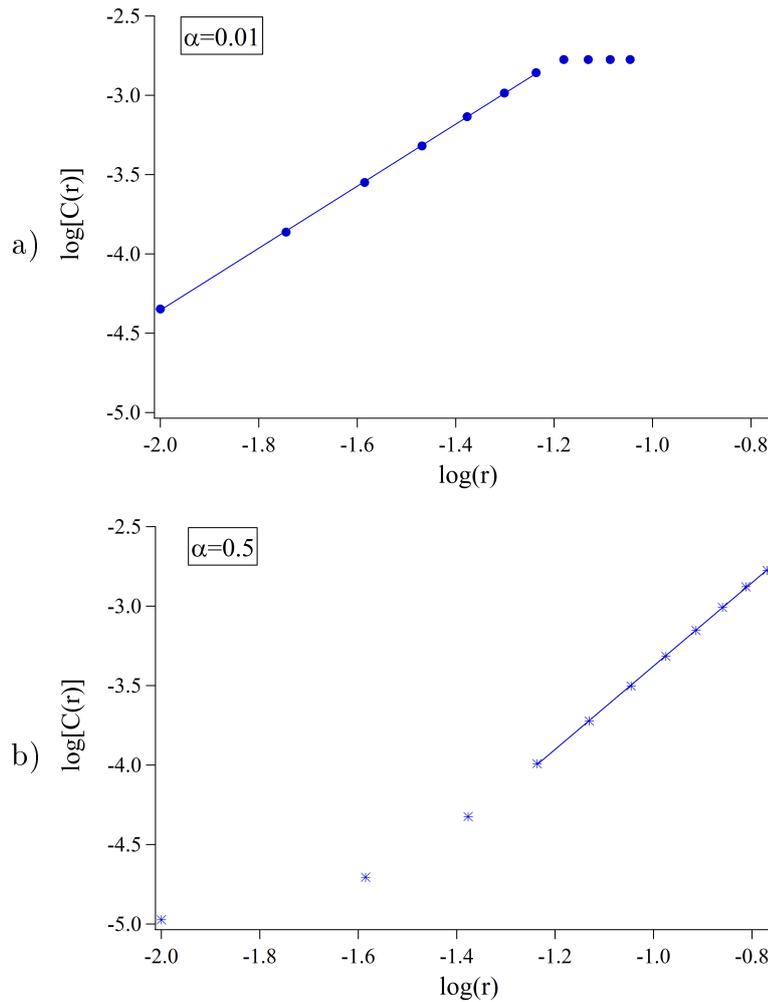


FIGURE 6.6 – Logarithme de la corrélation $\hat{C}(r)$ en fonction de $\log(r)$ pour : a) $\alpha = 0.01$, b) $\alpha = 0.5$. Nous affichons la droite ajustée, dont la pente est une estimation de la dimension de corrélation D .

La figure 6.7 montre que, pour les régimes que nous avons identifié comme chaotiques dans la section 2, la dimension de corrélation est effectivement non entière. En revanche, pour les fenêtres moins chaotiques, nous trouvons une dimension entière égale à 2. Nous pouvons signaler le comportement suivant :

- pour un grand intervalle de valeurs de α , entre $\alpha = 0.13$ et $\alpha = 0.59$, D a des valeurs entre 2.6 et 2.8 ;
- la région des α petits, $\alpha = 0.01$ et $\alpha = 0.03$, donne une dimension d'environ 2 ;
- dans la région de transition entre les deux régimes précédents, entre $\alpha = 0.05$ et $\alpha = 0.11$, D varie entre 2.2 et 2.6 ;
- pour $\alpha = 0.6$, la dimension est environ 2 ;
- entre $\alpha = 0.61$ et $\alpha = 0.9$, la dimension est non entière, mais on remarque que pour $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.89$ la courbe présente des minima, de 2.14 et 2.21 respectivement.

La dimension $D = 2$ trouvée pour $\alpha \ll 1$ confirme le caractère régulier de la dynamique pour ces valeurs. C'est à dire l'inhibition du chaos présent pour toutes les autres valeurs de α , où D est non entier. Dans ces cas particuliers, les trajectoires sont quasi-périodiques et elles tombent sur un tore dans l'espace des phases. Évidemment, elles

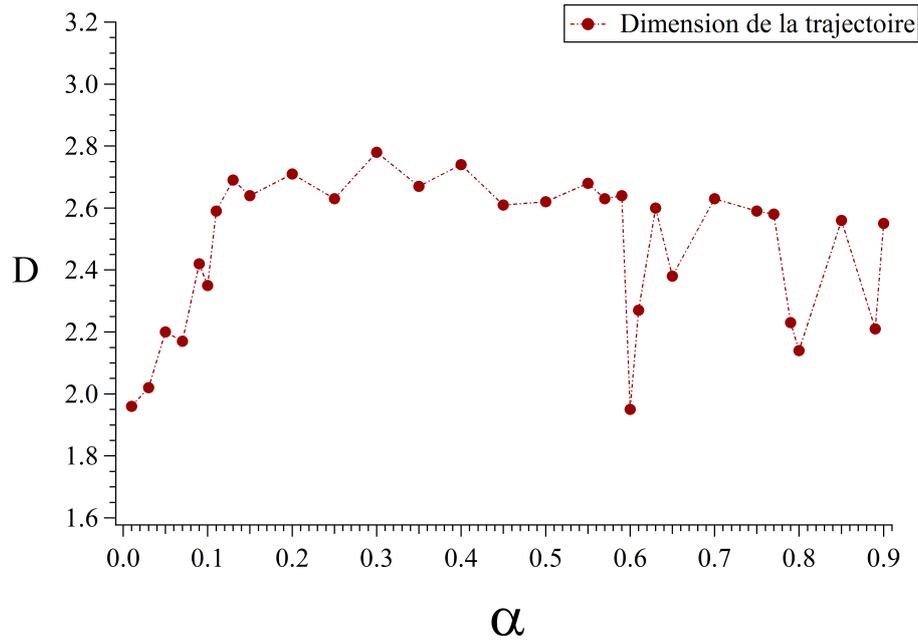


FIGURE 6.7 – Dimension de corrélation D correspondant à la trajectoire la plus étendue, en fonction du paramètre α .

correspondent aux orbites vues dans les SP analysées en section 2 (voir figure 6.2a). Par ailleurs, la valeur $D = 2$ trouvée pour $\alpha = 0.6$ semble être liée au fait que la trajectoire chaotique traitée dans ce cas est « courte » et elle n’arrive pas à parcourir toute la région chaotique (voir figures 6.3c et 6.3d), comme c’est le cas, par exemple, de $\alpha = 0.4$ (voir figures 6.3a et 6.3b). Ceci implique donc une dynamique chaotique différente dans ces deux cas, où l’évolution est plus « lente » pour $\alpha = 0.6$. De façon similaire, les minima de D pour $\alpha = 0.8$ et $\alpha = 0.89$ donnent aussi un indice sur un chaos différent, inhibé, pour ces valeurs. Nous allons donc analyser l’origine de ces fenêtres moins chaotiques.

6.4 Synchronisation pour certaines valeurs de α

Dans les sections précédentes, nous avons étudié les effets de la variation du paramètre α sur la dynamique atomique, à une énergie donnée. Ce paramètre change la topographie du potentiel du réseau carré bleu :

$$U(X, Y) = 1 + \alpha(\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y \quad (6.5)$$

Nous avons montré ces changements dans le chapitre 3. Leurs conséquences au niveau de la dynamique – en particulier sur l’étendue du chaos – comme nous verrons, sont liées au fait que α change le rapport entre les fréquences naturelles d’oscillation dans les deux directions de l’espace.

Pour analyser l’effet du paramètre α sur le mouvement dans le réseau bleu, et mieux comprendre les résultats de nos simulations numériques, nous pouvons travailler avec un développement de l’expression (6.5) autour du zéro du potentiel, c’est à dire au fond du puits placé dans $(X, Y) = (0, 0)$. De cette façon, l’approximation de U au quatrième ordre est :

$$U \simeq (1 - \alpha) \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} \right) + (1 + \alpha) \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^4}{24} \right) - \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (6.6)$$

Les forces agissant sur un atome proche du fond du puits, dérivées de l'équation (6.6), sont :

$$\begin{aligned} F_X &= -\frac{\partial U}{\partial X} \\ &= -\omega_{0X}^2 \left(X - \frac{X^3}{6} \right) + \frac{XY^2}{2} \end{aligned} \quad (6.7a)$$

$$\begin{aligned} F_Y &= -\frac{\partial U}{\partial Y} \\ &= -\omega_{0Y}^2 \left(Y - \frac{Y^3}{6} \right) + \frac{YX^2}{2} \end{aligned} \quad (6.7b)$$

où

$$\omega_{0X}^2 = 1 - \alpha \quad (6.8a)$$

$$\omega_{0Y}^2 = 1 + \alpha \quad (6.8b)$$

Les équations du mouvement qui se déduisent des forces approchées (éq. 6.7) montrent que, pour certaines valeurs de α , il est possible de se rapprocher de situations de résonance entre les oscillations dans les deux coordonnées. D'une part, à partir de la définition que l'on a fait des « fréquences naturelles » ω_{0X} et ω_{0Y} , il y a une dégénérescence pour α nul. Quand nous avons étudié la dynamique pour $\alpha = 0$ dans le chapitre 5, nous avons vu que la symétrie de révolution au fond des puits mène à des solutions verrouillées en phase et en opposition. Dans un autre système de coordonnées, le mouvement est en fait séparable pour ce cas particulier, mais ces solutions accrochées sont aussi observées pour $\alpha = 0.1$, et avec une étendue moins importante pour des valeurs plus grandes de α , jusqu'à $\alpha = 0.4$. L'existence de ces solutions pour des valeurs petites de α est ainsi liée aux configurations au voisinage d'une symétrie dans les deux directions, comme l'est $\alpha = 0$. Notamment, de l'équation (6.8), il est évident que nous pouvons aller près de la dégénérescence des fréquences en prenant $\alpha \ll 1$.

D'autre part, si $\alpha \ll 1$ mène à $\omega_{0X} \approx \omega_{0Y}$, il s'agit d'un cas particulier des résonances entre les fréquences naturelles. D'une façon plus générale, les valeurs du paramètre α ci-dessous sont aussi remarquables :

$$\alpha = 0.6, 0.8, \frac{15}{17}, \dots \quad (6.9)$$

Puisque ces valeurs (d'après l'équation 6.8) impliquent les résonances :

$$\frac{\omega_{0Y}}{\omega_{0X}} = 2, 3, 4, \dots \quad (6.10)$$

Dans les sections précédentes, les simulations numériques du mouvement ont confirmé que $\alpha \ll 1$, $\alpha = 0.6$, et même $\alpha = 0.8, 0.89$ ($\approx 15/17$) constituent des points où le chaos est inhibé à des degrés divers. Pour ces cas, il subsiste des régions régulières dans l'espace des phases, même pour des énergies au seuil du puits de potentiel. Ces régions régulières présentent différentes solutions accrochées en fréquence, qui ont été décrites

pour quelques valeurs de α dans le chapitre 5. Nous avons comme précédent la situation du réseau carré rouge, décrite dans le chapitre 3, où la dégénérescence des fréquences au fond du puits conduit à la synchronisation des mouvements et l'inhibition du chaos. Il s'ensuit naturellement qu'une quasi-dégénérescence ou des résonances d'ordre supérieur mènent à un phénomène similaire de synchronisation. Dans notre objectif de valider cette notion de synchronisation dans les systèmes conservatifs, et ayant constaté que les plus importantes situations d'inhibition du chaos ont lieu pour $\alpha \ll 1$ et $\alpha = 0.6$, nous allons étudier en détail ces deux configurations dans les chapitres qui suivent.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette deuxième partie, l'implémentation des algorithmes d'intégration numérique nous a permis de calculer la dynamique dans le réseau carré bleu. Ces algorithmes ont donné les trajectoires, leurs spectres et des cartes de section de Poincaré, à partir desquelles nous avons exploré l'espace (α, E) . Cet espace comprend différentes topographies du potentiel et différentes énergies de l'atome. Nous avons vu que pour chaque paire (α, E) , la dynamique varie, d'une part, en fonction de la proximité du rapport $\sqrt{1+\alpha/1-\alpha}$ avec une résonance m/n , et d'autre part, en fonction de la valeur de E par rapport au seuil $E_T(\alpha)$.

L'existence des résonances mène à un accrochage entre les fréquences d'oscillation dans les deux directions de l'espace. Au voisinage d'une résonance m/n , où m/n est le rapport entre les fréquences naturelles dans chaque direction, la dynamique présente donc une synchronisation. Nous trouvons les synchronisations les plus importantes pour les résonances 1 et 2 : 1 : elles mènent à une inhibition ou une réduction du chaos, présent autrement pour toutes les configurations à des énergies proches du seuil E_T .

En dehors des cas particuliers des résonances, le mouvement général est donné par des solutions quasi-périodiques « découplées », dont les fréquences dans chaque direction ne satisfont aucune relation entre elles. L'augmentation de l'énergie de l'atome conduit à l'apparition de certains accrochages, selon la valeur de α , au détriment des solutions découplées. Une augmentation ultérieure de E , comme nous l'avons déjà indiqué, favorise le régime chaotique, sauf en présence d'une synchronisation.

Troisième partie
Traitement analytique

Introduction à la troisième partie

Dans la partie II de ce mémoire, nous avons examiné les divers régimes dynamiques trouvés numériquement pour les différentes configurations du réseau carré bleu. Nous voulons maintenant décrire analytiquement le mouvement dans certains cas. Un modèle théorique nous permettra de connaître les mécanismes menant à l'apparition des différentes solutions, et à l'existence des accrochages. En calculant de façon analytique les solutions pour un système proche de celui que nous venons de résoudre numériquement, nous pourrons aussi comprendre la nature elliptique ou hyperbolique des points fixes observés. D'autre part, en obtenant les expressions pour les quantités liées au mouvement (fréquence et amplitudes d'oscillation principales et de battement), nous pourrons prédire leur évolution pour toutes les valeurs d'énergie dans le puits. Ces relations analytiques compléteront donc l'information donnée par les simulations pour quelques valeurs ponctuelles d'énergie.

Dans cette troisième partie, nous traitons deux cas de synchronisation et un cas où le mouvement n'est pas accroché : le chapitre 7 considère une configuration du réseau pour lequel les fréquences d'oscillation de l'atome sont accrochées, dû à leur quasi-dégénérescence au fond du puits. Pour étudier cette dynamique, nous développons une approximation du potentiel du réseau qui permet de décrire analytiquement le mouvement. Cette approche est répétée dans le chapitre 8. Ce cas nécessite une approximation plus compliquée pour décrire la synchronisation, qu'il est toutefois possible d'exprimer analytiquement. Dans les deux configurations étudiées aux chapitres 7 et 8, les résultats des approximations sont comparés à ceux des simulations numériques pour le potentiel original. Ceci permet de vérifier la validité de nos modèles théoriques dans les deux cas.

Finalement, dans le chapitre 9, nous abandonnons les situations de résonance pour aborder le cas général du mouvement découplé dans notre réseau carré. En absence de synchronisation, il est toujours possible de décrire analytiquement la dynamique. Le couplage négligé entre les directions de l'espace s'incorpore donc comme une perturbation, à l'exception des cas particuliers des résonances. Ces résultats sont aussi vérifiés à l'aide des calculs numériques.

Chapitre 7

Synchronisation par quasi-dégénérescence

Dans ce chapitre, nous étudions une configuration particulière du réseau carré bleu, correspondant au paramètre $\alpha \ll 1$. La résolution numérique du système dynamique, décrite dans le chapitre 4, est comparée ici aux résultats de calculs analytiques obtenus en faisant une approximation du potentiel et en prenant $\alpha = 0.01$. Les deux approches confirment l'existence d'un phénomène de synchronisation dû à la quasi-dégénérescence des fréquences du mouvement au fond des puits de potentiel. La dynamique non-chaotique du système est ainsi analysée, en mettant l'accent sur les « points fixes » trouvés dans la carte de sections de Poincaré, qui correspondent à des solutions périodiques.

Chapitre 7

Synchronisation par quasi-dégénérescence

7.1 Introduction

Dans le chapitre 6, nous avons étudié l'étendue du chaos dans l'espace des phases du réseau carré bleu. En particulier, nous avons examiné ce qui se passe au seuil $E_T(\alpha)$, c'est à dire pour l'énergie nécessaire pour sortir du puits de potentiel. Nous avons alors trouvé que, pour certaines valeurs du paramètre α , le chaos est inhibé. Ces valeurs correspondent à des résonances entre les fréquences d'oscillation au fond du puits, ou « fréquences naturelles » dans les deux directions de l'espace. De ce que nous avons vu dans les chapitres 5 et 6, ces résonances mènent à un phénomène d'accrochage de fréquences. Ces considérations suscitent l'étude de la dynamique dans le réseau bleu avec une approche analytique, développée dans ce chapitre 7 et le suivant.

Quand on considère le puits trouvé pour $(X, Y) = (0, 0)$, il est possible de traiter le potentiel dans cette région en employant une approximation. L'expression approchée de U (éq. 6.6) au quatrième ordre est :

$$U \simeq (1 - \alpha) \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} \right) + (1 + \alpha) \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^4}{24} \right) - \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (7.1)$$

Les équations du mouvement dans ce potentiel approché sont régies par les forces¹ (éq. 6.7) :

$$F_X = -\omega_{0X}^2 \left(X - \frac{X^3}{6} \right) + \frac{XY^2}{2} \quad (7.2a)$$

$$= \ddot{X} \quad (7.2b)$$

$$F_Y = -\omega_{0Y}^2 \left(Y - \frac{Y^3}{6} \right) + \frac{YX^2}{2} \quad (7.2c)$$

$$= \ddot{Y} \quad (7.2d)$$

où les fréquences naturelles ω_{0X} et ω_{0Y} sont :

$$\omega_{0X}^2 = 1 - \alpha \quad (7.3a)$$

$$\omega_{0Y}^2 = 1 + \alpha \quad (7.3b)$$

Comme nous l'avons signalé dans le chapitre 6, les équations (7.2) et (7.3) permettent d'associer l'absence du chaos pour $\alpha \ll 1$ à la quasi-dégénérescence des fréquences ω_{0X} et ω_{0Y} . Le fait d'être au voisinage d'une dégénérescence semble nous ramener à une situation proche de celle du réseau carré rouge (décrite dans le chapitre 3), où la dégénérescence de ces fréquences conduit à un accrochage et à un phénomène de synchronisation. Dans les sections suivantes, nous analysons le phénomène d'accrochage dans

1. Toujours en prenant la masse atomique égale à 1.

le réseau bleu, en étudiant analytiquement les conséquences de la quasi-dégénérescence qui a lieu pour des valeurs petites de α .

Pour vérifier l'adéquation de notre approche analytique, nous employons dans ce chapitre les résultats numériques obtenus pour $\alpha = 0.01$. Ces résultats sont similaires à ceux montrés pour $\alpha = 0.1$ dans le chapitre 5, mais ils sont plus proches du cas particulier $\alpha = 0$. Il faut remarquer que nous avons déjà vu, dans le chapitre 6 (figure 6.2a), les solutions numériques régulières trouvées au seuil d'énergie $E_T(0.01) = 0.9999$.

Pour $\alpha = 0.01$, le potentiel complet du réseau carré bleu, donné par l'équation (6.5), a la forme affichée dans la figure 7.1a. D'autre part, pour cette valeur de α , le potentiel approché (éq. 7.1) est celui montré en figure 7.1b. Dans la figure 7.1, nous comparons aussi ces potentiels dans la région du puits qui nous intéresse, $(X, Y) = (0, 0)$ (figures 7.1c et 7.1d), et autour duquel nous ferons le traitement analytique, c'est à dire pour des petites amplitudes du mouvement. Le potentiel donné par l'équation (7.1) est une bonne approximation du vrai potentiel dans cette région. Remarquons que, sur les bissectrices, le col du potentiel approché s'est abaissé et déplacé vers l'origine (figure 7.1d) par rapport au col du vrai potentiel (figure 7.1c). Sur les axes, les écarts sont moins sensibles. Les intervalles de validité de l'approximation sont donc différents selon la direction considérée. Nous avons estimé que l'approximation est bonne quand l'écart ΔU entre le potentiel approché et l'originel satisfait $\Delta U < 0.01 \approx 0.01 \times E_T$. Dans les directions principales, l'intervalle de validité de l'approximation est donc $-1.3 \lesssim X \lesssim 1.3$ et $-1.3 \lesssim Y \lesssim 1.3$, alors qu'il est plus petit dans les directions diagonales : $-0.8 \lesssim X = Y \lesssim 0.8$.

7.2 Calculs analytiques

Considérons l'expression (2.11) pour l'oscillateur de Duffing sans amortissement, en prenant $\beta = \omega_{0X}^2$ et $\gamma = \omega_{0X}^2/6$. La comparaison avec l'équation (7.2a) montre que la perturbation paramétrée par ϵ dans (2.11) est ici introduite par un oscillateur selon Y . Nous trouvons la même chose pour l'oscillateur selon Y (éq. 7.2c, correspondant à Duffing avec $\beta = \omega_{0Y}^2$ et $\gamma = \omega_{0Y}^2/6$), perturbé, lui, par celui selon X . Les équations du mouvement (7.2) correspondent donc à celles de deux oscillateurs de Duffing couplés. En conséquence, nous allons proposer des solutions périodiques harmoniques qui puissent satisfaire de manière approchée les relations (7.2), pour des mouvements d'assez faible amplitude. Vu que les fréquences au fond du puits sont presque dégénérées pour $\alpha \ll 1$, $\omega_{0X} \approx \omega_{0Y}$, il est donc naturel de chercher un mouvement avec la même fréquence ω dans les deux directions. Nous posons :

$$X = X_0 \cos(\omega t + \psi_X) \quad (7.4a)$$

$$Y = Y_0 \cos(\omega t + \psi_Y) \quad (7.4b)$$

où X_0, Y_0, ψ_X, ψ_Y sont des constantes. Pour connaître quelles conditions doivent satisfaire ces solutions, nous exprimons les composantes de Fourier des forces données par les équations (7.2). Les termes correspondants aux harmoniques d'ordre supérieur sont négligés, donc :

$$F_X = A_X \cos(\omega t + \psi_X) + B_X \sin(\omega t + \psi_X) \quad (7.5a)$$

$$F_Y = A_Y \cos(\omega t + \psi_Y) + B_Y \sin(\omega t + \psi_Y) \quad (7.5b)$$

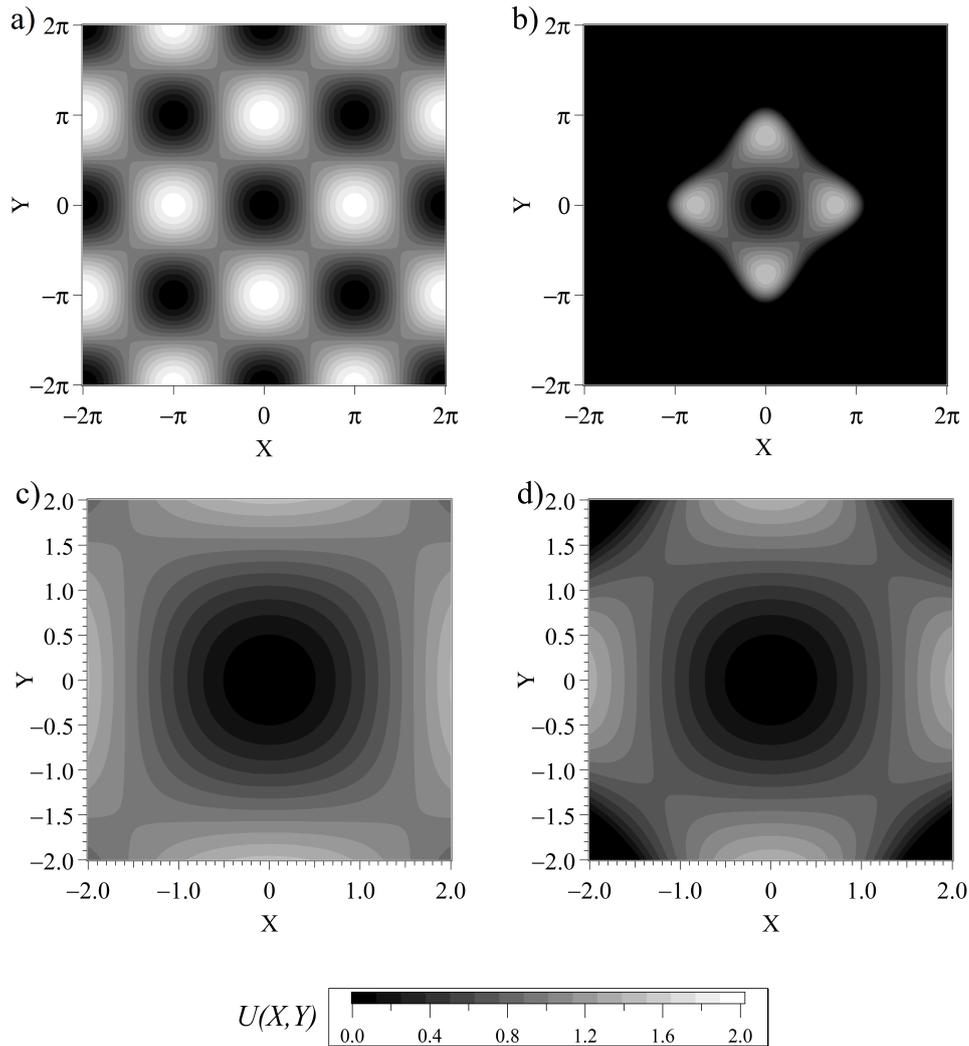


FIGURE 7.1 – a,c) Potentiel complet du réseau carré bleu (éq. 6.5) pour $\alpha = 0.01$; b,d) potentiel approché (éq. 7.1). La grande région noire pour les X et Y grands (en valeur absolue) correspond à une zone où le potentiel approché devient négatif. Les images c) et d) montrent un agrandissement de la région du puits $U = 0$ placé dans $(X, Y) = (0, 0)$. L'échelle de gris est la même pour tous les graphes.

où $A_{X,Y}$ et $B_{X,Y}$ sont les coefficients de Fourier donnés par :

$$A_{X,Y} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_{X,Y} \cos(\omega t + \psi_{X,Y}) dt \quad (7.6a)$$

$$B_{X,Y} = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} F_{X,Y} \sin(\omega t + \psi_{X,Y}) dt \quad (7.6b)$$

De cette façon, nous obtenons :

$$A_X = -X_0\omega_{0X}^2 + \frac{X_0^3}{8}\omega_{0X}^2 + \frac{X_0Y_0^2}{8}(2 + \cos(2\psi_Y - 2\psi_X)) \quad (7.7a)$$

$$B_X = -\frac{X_0Y_0^2}{8}\sin(2\psi_Y - 2\psi_X) \quad (7.7b)$$

$$A_Y = -Y_0\omega_{0Y}^2 + \frac{Y_0^3}{8}\omega_{0Y}^2 + \frac{Y_0X_0^2}{8}(2 + \cos(2\psi_Y - 2\psi_X)) \quad (7.7c)$$

$$B_Y = \frac{Y_0X_0^2}{8}\sin(2\psi_Y - 2\psi_X) \quad (7.7d)$$

En différenciant deux fois les solutions (7.4), nous arrivons à une autre expression pour les composantes de Fourier des forces F_X et F_Y . Nous obtenons donc le système d'équations :

$$X_0\omega^2 = X_0\omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{X_0Y_0^2}{8}(2 + \cos(2\psi_Y - 2\psi_X)) \quad (7.8a)$$

$$0 = -X_0Y_0^2\sin(2\psi_Y - 2\psi_X) \quad (7.8b)$$

$$Y_0\omega^2 = Y_0\omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{Y_0X_0^2}{8}(2 + \cos(2\psi_Y - 2\psi_X)) \quad (7.8c)$$

$$0 = Y_0X_0^2\sin(2\psi_Y - 2\psi_X) \quad (7.8d)$$

Ce système détermine six solutions harmoniques, qui peuvent être déduites de la relation (7.8b). Elles sont les suivantes :

$$X_0 = 0 \quad (7.9a)$$

$$Y_0 = 0 \quad (7.9b)$$

$$\psi_X = \psi_Y \quad (7.9c)$$

$$\psi_X = \psi_Y + \pi \quad (7.9d)$$

$$\psi_X = \psi_Y + \frac{\pi}{2} \quad (7.9e)$$

$$\psi_X = \psi_Y - \frac{\pi}{2} \quad (7.9f)$$

Alors que les quatre dernières solutions (7.9c)-(7.9f) expriment un mouvement avec un verrouillage de phase et donc un accrochage de fréquences, les deux premières (7.9a et 7.9b) correspondent à une oscillation selon Y ou selon X , respectivement. Nous allons d'abord étudier ces solutions triviales.

7.2.1 Solution $X_0 = 0$

Les solutions triviales (7.9a) et (7.9b) correspondent à l'atome oscillant le long d'une des directions principales. Si nous considérons une amplitude nulle du mouvement selon X (solution 7.9a), nous trouvons une oscillation selon Y :

$$Y = Y_0 \cos(\omega_Y t) \quad (7.10)$$

La fréquence ω_Y , d'après l'équation (7.8c), est donnée par² :

2. Cette relation est équivalente à la dépendance, en fonction de l'amplitude du mouvement, de la période T d'oscillation pour un pendule simple : $T = T_0 (1 + Y_0^2/16)$.

$$\omega_Y^2 = \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) \quad (7.11)$$

7.2.1.1 Énergie

Pour évaluer l'énergie associée au mouvement d'amplitude Y_0 , nous pourrions prendre simplement l'énergie potentielle au point de rebroussement $\dot{Y} = 0$. Dans ce cas, nous trouverions :

$$U(0, Y_0) = \omega_{0Y}^2 \frac{Y_0^2}{2} \left(1 - \frac{Y_0^2}{12}\right) \quad (7.12)$$

Cependant, nous pouvons aussi considérer l'énergie cinétique E_K évaluée au zéro de potentiel, où elle devrait être égale à l'énergie totale :

$$E_K(0, \dot{Y}_{max}) = \omega_{0Y}^2 \frac{Y_0^2}{2} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) \quad (7.13)$$

Nous constatons que les deux quantités (7.12) et (7.13) diffèrent par un terme $\mathcal{O}(Y_0^4)$. En effet, dans notre approximation, la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique n'est pas constante : elle contient des termes aux fréquences $2\omega_Y$ et $4\omega_Y$. Par conséquent, pour faire une estimation de l'énergie du mouvement E_Y , nous pouvons prendre la valeur moyenne (au cours du temps) de cette somme. Nous trouvons ainsi :

$$E_Y = \omega_{0Y}^2 \frac{Y_0^2}{2} \left(1 - \frac{3Y_0^2}{32}\right) \quad (7.14)$$

Dans la figure 7.2, nous montrons cette courbe et les deux estimations données par les équations (7.12) et (7.13). Nous pouvons remarquer que, en effet, la relation (7.14) est encadrée par les deux précédentes, mais qu'elle n'en est pas la moyenne. En fait, l'harmonique 3, négligé dans notre solution, apparaît avec l'ordre Y_0^3 et il introduit dans l'énergie des corrections de l'ordre de Y_0^4 . Négliger cet harmonique surestime donc l'élongation maximale, de sorte que la relation (7.12) donne une énergie trop grande. Une autre conséquence est que la vitesse maximale au zéro de potentiel est sous-estimée dans l'équation (7.13). L'influence de l'harmonique 3 sur la valeur du point de rebroussement Y_0 est donc plus petite que celle sur la vitesse au zéro de potentiel, dû au facteur 3 introduit par cet harmonique dans la vitesse. En effet, nous voyons dans la figure 7.2 que la différence entre l'énergie potentielle et la valeur moyenne de l'énergie totale est plus petite que la différence entre cette dernière et l'énergie cinétique.

Une autre approche pour améliorer l'estimation de l'énergie est d'ajouter à notre solution (éq. 7.10) l'harmonique 3 à l'ordre le plus bas, c'est à dire en négligeant les termes d'ordre supérieur qui apparaissent à cause des termes anharmoniques et du couplage. Cela donne :

$$Y = Y_0 \left(\cos(\omega_Y t) - \frac{Y_0^2}{192} \cos(3\omega_Y t) \right) \quad (7.15)$$

L'énergie totale calculée à partir de cette expression du mouvement est constante à des termes $\mathcal{O}(Y_0^6)$ près. Elle redonne la valeur de l'énergie moyennée dans le temps, exprimée par l'équation (7.14).

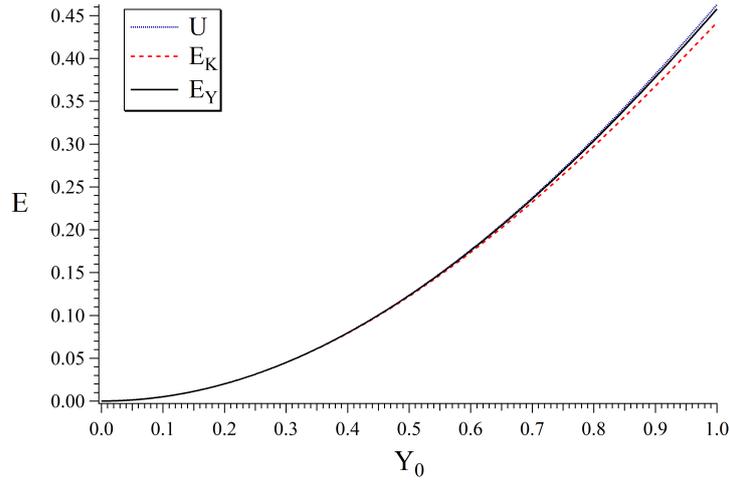


FIGURE 7.2 – Solution $X_0 = 0$, pour $\alpha = 0.01$: énergie E_Y (éq. 7.14) en fonction de l’amplitude du mouvement Y_0 . Nous montrons aussi les estimations données par l’énergie potentielle U (éq. 7.12), en pointillé bleu, et l’énergie cinétique E_K (éq. 7.13), en pointillé rouge.

7.2.1.2 Stabilité de la solution

Pour bien caractériser une solution, il faut connaître sa stabilité, de la même façon que l’on traite les points fixes dans le chapitre 2. Dans ce cas, l’orbite périodique $X_0 = 0$ est stable si le comportement des trajectoires dans son voisinage change de façon continue de l’orbite à un mouvement quasi-périodique (suivant un tore). Pour examiner le voisinage de $X_0 = 0$, nous allons considérer un déplacement petit, qui implique un mouvement d’amplitudes ε_X et ε_Y . L’équation du mouvement (7.2a), linéarisée, devient :

$$\ddot{X} + \omega_{0X}^2 \varepsilon_X + \frac{\varepsilon_X}{2} (Y_0 + \varepsilon_Y)^2 \cos^2(\omega_Y t) = 0 \quad (7.16)$$

Les termes contenant ε_Y sont négligeables, car nous considérons que $\varepsilon_X \sim \varepsilon_Y \sim Y_0^2$. Nous obtenons, donc :

$$\ddot{X} + \left(\omega_{0X}^2 - \frac{Y_0^2}{4} - \frac{Y_0^2}{4} \cos(2\omega_Y t) \right) \varepsilon_X = 0 \quad (7.17)$$

Nous reconnaissons ici l’équation d’un oscillateur paramétrique sans amortissement,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_n^2 [1 + f(t)] q = 0 \quad (7.18a)$$

$$f(t) = f_0 \sin(2\omega_f t) \quad (7.18b)$$

où ω_f est la fréquence du forçage et ω_n est la fréquence naturelle du système. Pour l’oscillateur paramétrique, le critère de stabilité – les valeurs pour lesquelles il n’y a pas une résonance paramétrique [Landau1981] – est

$$\left| \frac{\omega_f^2 - \omega_n^2}{\omega_n^2} \right| > \frac{f_0}{2} \quad (7.19)$$

Dans notre cas, cette relation entre la fréquence de modulation ω_Y et la nouvelle « fréquence naturelle » $\sqrt{\omega_{0X}^2 - Y_0^2/4}$ se ramène à :

$$\left| \omega_Y^2 - \omega_{0X}^2 + \frac{Y_0^2}{4} \right| > \frac{Y_0^2}{8} \quad (7.20)$$

qui donne

$$\left| 2\alpha + \frac{Y_0^2}{8} (1 - \alpha) \right| > \frac{Y_0^2}{8} \quad (7.21)$$

Cette condition est toujours vérifiée, puisque α est positif et inférieur à l'unité. En conséquence, la solution $X_0 = 0$ est stable pour toute valeur de Y_0 , c'est à dire pour toute énergie.

7.2.1.3 Mouvement selon X

La solution $X_0 = 0$ étant stable, nous pouvons étudier les mouvements de faibles amplitudes. Pour cela, nous considérons l'équation du mouvement linéarisée

$$\ddot{X} + \left(\omega_{0X}^2 - \frac{Y_0^2}{4} (1 - \cos 2\omega_Y) \right) X = 0 \quad (7.22)$$

Nous étudions les petits déplacements selon X . Toutefois, un mouvement avec une seule fréquence ω_X ne peut pas satisfaire cette équation : le terme de couplage avec Y introduit les bandes latérales $\omega_+ = 2\omega_Y + \omega_X$ et $\omega_- = 2\omega_Y - \omega_X$. D'ailleurs, nous avons trouvé des pics à ces fréquences plusieurs fois dans les spectres montrés au chapitre 5. Nous pouvons donc proposer un petit mouvement sur la coordonnée X comme somme de deux termes d'oscillation d'amplitudes ε_X et ε_- , avec les fréquences ω_X et ω_- . Nous négligeons le terme à ω_+ , dont la fréquence est loin dans le spectre de la région de ω_X . Nous posons, donc :

$$X = \varepsilon_X \cos(\omega_X t) + \varepsilon_- \cos((2\omega_Y - \omega_X) t) \quad (7.23)$$

D'autre part, nous n'avons pas besoin d'ajouter une perturbation d'amplitude ε_Y ($\sim \varepsilon_X$), comme nous l'avons vu dans la section précédente (éq. 7.16) : si l'amplitude du mouvement sur X est petite ($\varepsilon_X \sim Y_0^2$), les termes qui contiennent ε_Y sont négligeables :

$$\varepsilon_X Y_0 \varepsilon_Y \sim Y_0^5 \quad (7.24a)$$

$$\varepsilon_X \varepsilon_Y^2 \sim Y_0^6 \quad (7.24b)$$

Les termes $\varepsilon_- Y_0 \varepsilon_Y$ et $\varepsilon_- \varepsilon_Y^2$ satisfont ces mêmes relations.

En introduisant la solution écrite comme l'expression (7.23) dans l'équation du mouvement (7.22), et en négligeant aussi les termes en ε_X^2 , ε_-^2 et en Y_0^4 , nous obtenons la relation suivante pour ω_X (figure 7.3) :

$$\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 - \frac{Y_0^2}{4} \quad (7.25)$$

Dans la figure 7.3, nous représentons les fréquences ω_X et ω_Y , en fonction de l'amplitude Y_0 . Rappelons que ces fréquences correspondent aux deux directions de mouvement

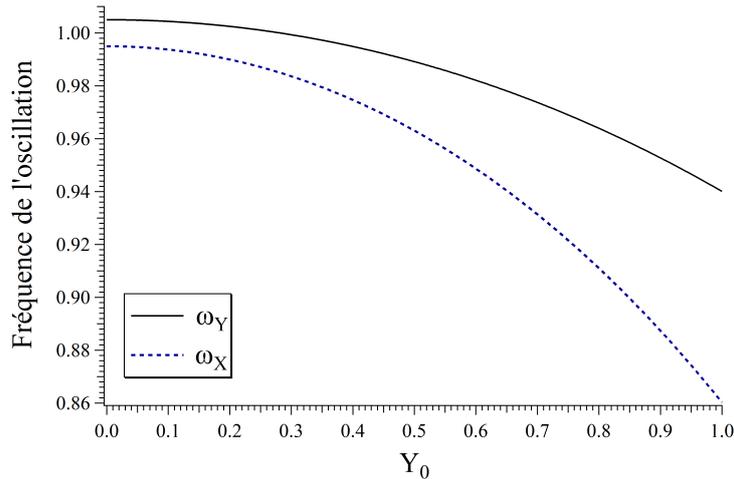


FIGURE 7.3 – Solution $X_0 = 0$, pour $\alpha = 0.01$: fréquences ω_Y (éq. 7.11) et ω_X (éq. 7.25) en fonction de l'amplitude du mouvement Y_0 .

X et Y au voisinage de la solution $X_0 = 0$. Le mouvement selon Y est le principal et peut être de grande amplitude, alors que le mouvement selon X est de faible amplitude. Nous voyons dans cette figure que ces fréquences satisfont toujours $\omega_Y > \omega_X$. De la différence entre nos expressions (7.11) et (7.25), nous vérifions :

$$\omega_Y^2 - \omega_X^2 = 2\alpha + Y_0^2(1 - \alpha) > 0 \quad (7.26)$$

où la relation (7.26) est valable pour tout Y_0^2 .

Il nous faut, à ce point, rappeler les résultats numériques du chapitre 5, concernant les solutions découplées et en particulier la solution $X = 0$ étudiée pour la configuration $\alpha = 0.1$. De ce que nous avons trouvé pour une trajectoire quasi-périodique proche de cette solution, le spectre de X présente une bande latérale à la fréquence $\omega_- = 2\omega_Y - \omega_X$, l'autre bande latérale étant négligeable (voir figure 5.4d). Ces observations confirment notre approche analytique pour le mouvement selon X .

Finalement, nous définissons la fréquence de battement³ Ω_X , déduite de la bande latérale à ω_- :

$$\Omega_X = 2\omega_Y - 2\omega_X \quad (7.27)$$

où ω_X est donné par l'équation (7.25). Le battement Ω_X correspond ainsi à la fréquence d'oscillation des trajectoires quasi-périodiques autour du point fixe $X_0 = 0$.

7.2.2 Solution $Y_0 = 0$

La solution le long de X (éq. 7.9b) est

$$X = X_0 \cos(\omega_X t) \quad (7.28)$$

De façon équivalente à la fréquence trouvée pour le mouvement selon Y (éq. 7.11), la fréquence principale de cette solution, déduite de la relation 7.8a, est :

3. Dans le chapitre 5, nous avons noté ce battement Δf .

$$\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) \quad (7.29)$$

Nous montrons cette fréquence en fonction de X_0 dans la figure 7.4.

7.2.2.1 Énergie

L'énergie associée à ce mouvement est analogue à celle donnée par l'équation (7.14) pour l'autre solution triviale :

$$E_X = \omega_{0X}^2 \frac{X_0^2}{2} \left(1 - \frac{3X_0^2}{32}\right) \quad (7.30)$$

7.2.2.2 Stabilité de la solution

Pour examiner le voisinage de la solution $Y_0 = 0$, nous linéarisons, comme précédemment, l'équation du mouvement (7.2c) en considérant un ε_Y petit :

$$\ddot{Y} + \left(\omega_{0Y}^2 - \frac{X_0^2}{4} - \frac{X_0^2}{4} \cos(2\omega_X t)\right) \varepsilon_Y = 0 \quad (7.31)$$

Cette équation, de la forme d'un oscillateur paramétrique, impose la condition de stabilité :

$$\left|2\alpha - \frac{X_0^2}{8}(1 + \alpha)\right| > \frac{X_0^2}{8} \quad (7.32)$$

C'est à dire que la solution est stable si

$$X_0^2 < \frac{16\alpha}{2 + \alpha} \quad (7.33)$$

Elle devient instable à partir d'une amplitude d'oscillation qui ne satisfait plus cette inégalité. Cela équivaut, d'après la relation (7.30), à une valeur d'énergie ou « seuil de déstabilisation » pour la solution $Y_0 = 0$. Ce seuil d'énergie E_S correspond à $E_S \approx 4\alpha$.

Nous remarquons que les deux solutions triviales ne sont pas symétriques, la solution $X_0 = 0$ étant stable pour toute énergie. Nous verrons un peu plus loin que le seuil de déstabilisation de $Y_0 = 0$ est lié à l'apparition de solutions accrochées.

7.2.2.3 Mouvement selon Y

Au voisinage de la solution $Y_0 = 0$, nous faisons la même analyse que pour l'autre solution triviale. Nous trouvons une oscillation autour du point fixe avec une fréquence de battement

$$\Omega_Y = 2\omega_X - 2\omega_Y \quad (7.34)$$

où

$$\omega_Y^2 = \omega_{0Y}^2 - \frac{X_0^2}{4} \quad (7.35)$$

ω_Y est la fréquence obtenue en décrivant le mouvement selon Y comme

$$Y = \varepsilon_Y \cos(\omega_Y t) + \varepsilon_- \cos((2\omega_X - \omega_Y)t) \quad (7.36)$$

avec ε_Y et ε_- petits. ω_Y est représenté en fonction de X_0 dans la figure 7.4.

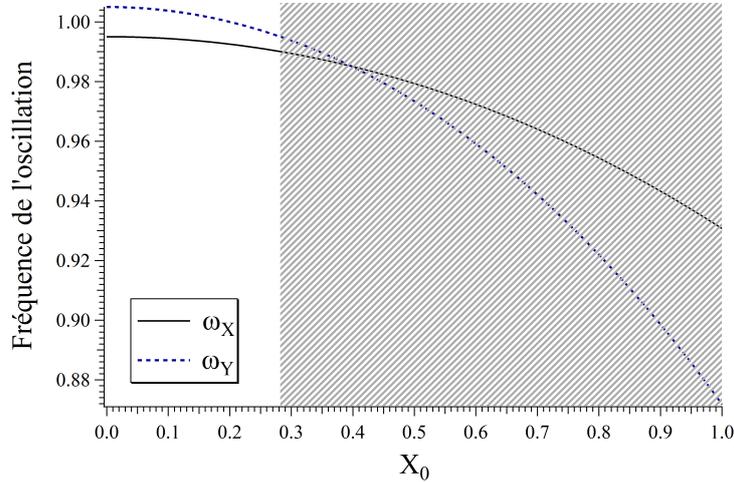


FIGURE 7.4 – Solution $Y_0 = 0$, pour $\alpha = 0.01$: fréquences ω_X (éq. 7.29) et ω_Y (éq. 7.35) en fonction de l'amplitude du mouvement X_0 . La région en gris est en dessus du seuil de déstabilisation de la solution.

Nous remarquons toutefois que cette analyse pour les petites oscillations autour de $Y_0 = 0$, et donc l'expression (7.35), sont valables uniquement en dessous du seuil de déstabilisation donné par l'inégalité (7.33). Pour des amplitudes plus grandes de l'oscillation principale, $X_0 \gtrsim 0.282$, nous ne pouvons plus considérer le voisinage de cette solution car elle devient instable. Dans la figure 7.4, nous avons en conséquence grisé la région au dessus du seuil de déstabilisation.

Dans la figure 7.4, nous montrons la fréquence ω_Y avec la porteuse ω_X . Pour $X_0 < 0.282$, ces des fréquences se rapprochent pour des amplitudes croissantes. Nous remarquons la différence avec la solution $X_0 = 0$, où les fréquences satisfont toujours $\omega_Y > \omega_X$ (figure 7.3), avec une différence qui augmente avec l'amplitude Y_0 . Nous avons $\omega_Y > \omega_X$ pour les faibles amplitudes X_0 , mais la différence $\omega_Y - \omega_X$ diminue à présent pour s'annuler en $X_0^2 = 16\alpha/1+\alpha$ (à partir des éqs. 7.29 et 7.35), au delà du seuil de déstabilisation. C'est à dire $\omega_Y = \omega_X$ pour $X_0 \approx 0.398$, comme nous le voyons dans la figure 7.4. Le fait que ω_X et ω_Y se rapprochent peut se voir en effet comme étant à l'origine de la déstabilisation de la solution $Y_0 = 0$. Ce rapprochement mène à la résonance ultérieure $\omega_Y = \omega_X$ et à l'accrochage des fréquences.

Nous considérons maintenant les solutions qui correspondent à un mouvement à des fréquences en X et Y accrochées entre elles. Elles impliquent un verrouillage en phase, donné par les conditions (7.9c) à (7.9f).

7.2.3 Solution en phase

Nous analysons ici la solution $\psi_X = \psi_Y$. La solution en opposition de phase (éq. 7.9d) peut s'en déduire, par exemple, en changeant le signe de Y_0 . À partir des équations

(7.8a) et (7.8c), nous avons deux relations qui donnent la fréquence commune ω_1 du mouvement :

$$\omega_1^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{3}{8}Y_0^2 \quad (7.37a)$$

$$= \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{3}{8}X_0^2 \quad (7.37b)$$

Les amplitudes d'oscillation satisfont donc la relation suivante :

$$X_0^2 = \frac{16\alpha}{2+\alpha} + \frac{2-\alpha}{2+\alpha}Y_0^2 \quad (7.38)$$

Nous montrons cette relation dans la figure 7.5a. La figure 7.5b représente ω_1 donné par l'équation (7.37b), en introduisant aussi l'équation (7.38) pour obtenir $\omega_1(Y_0)$.

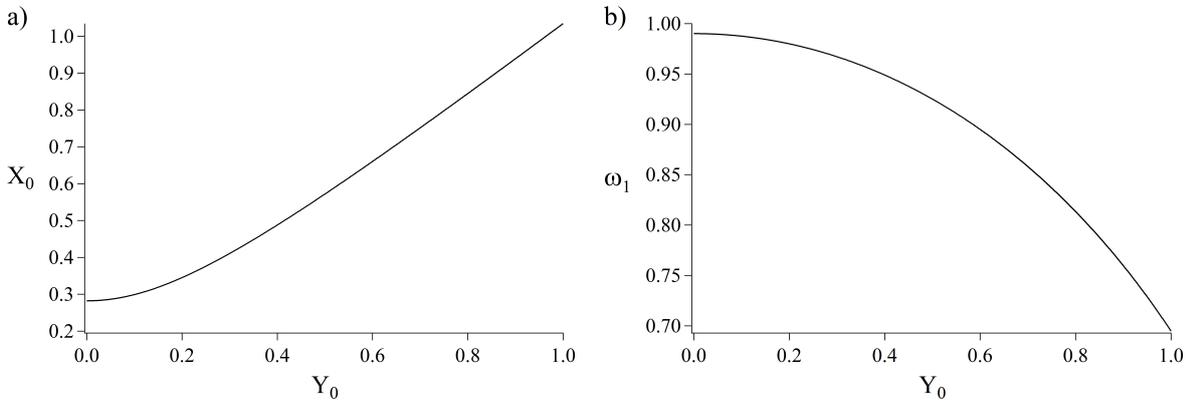


FIGURE 7.5 – Solution en phase, pour $\alpha = 0.01$: a) amplitude X_0 (éq. 7.38) et b) fréquence ω_1 (éq. 7.37b) du mouvement, en fonction de l'amplitude Y_0 .

Nous remarquons que, dans la relation entre les amplitudes du mouvement (éq. 7.38), X_0^2 a une valeur minimale, $16\alpha/2+\alpha$, pour que la solution en phase existe. De plus, cette valeur coïncide avec le seuil trouvé pour la stabilité de la solution $Y_0 = 0$ (éq. 7.33). Nous en déduisons que cette dernière est déstabilisée au profit des deux nouvelles solutions, en phase et en opposition de phase. Dans la figure 7.5a, nous identifions, pour $Y_0 = 0$, le seuil d'apparition pour la solution en phase. Cette valeur, comme nous l'avons indiqué plus haut, est $X_0 \approx 0.282$ pour $\alpha = 0.01$.

7.2.3.1 Énergie

L'énergie totale du mouvement, pour ces solutions, est (figure 7.6a) :

$$E_1 = \frac{\omega_{0X}^2}{4}X_0^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{16}\right) + \frac{\omega_{0Y}^2}{4}Y_0^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{16}\right) + \frac{\omega_1^2}{4}(X_0^2 + Y_0^2) - \frac{3}{32}X_0^2Y_0^2 \quad (7.39)$$

Elle a été calculée à partir de la moyenne temporelle de l'énergie totale, comme nous l'avons fait lors du calcul de l'énergie de la solution $Y_0 = 0$ (éq. 7.14). À nouveau, si nous calculons l'énergie totale en considérant les troisièmes harmoniques, nous la trouvons

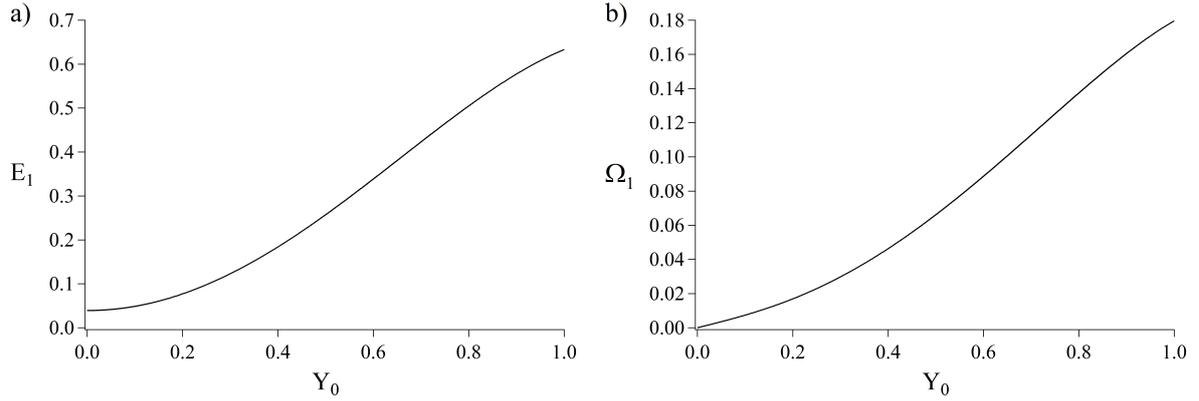


FIGURE 7.6 – Solution en phase, pour $\alpha = 0.01$: a) énergie E_1 (éq. 7.39) et b) fréquence de battement Ω_1 (éq. 7.44), en fonction de l'amplitude du mouvement Y_0 .

constante à des termes du 6ème ordre près et nous retrouvons le résultat donné par l'équation (7.39).

Nous remarquons, dans la figure 7.6a, que la valeur de E_1 pour $Y_0 = 0$ est $E_S \approx 0.039 \approx 4\alpha$. C'est à dire, nous retrouvons le seuil de déstabilisation de la solution $Y_0 = 0$, qui est le seuil d'apparition de la solution en phase.

7.2.3.2 Stabilité des solutions

Pour étudier la stabilité des solutions en phase, nous analysons une trajectoire dans son voisinage. Nous considérons des petits déplacements des amplitudes $\varepsilon_{X,Y}$, et des phases $\varphi_{X,Y}$, de sorte que la trajectoire voisine est :

$$X = (X_0 + \varepsilon_X) \cos(\omega_1 t + \varphi_X) \quad (7.40a)$$

$$Y = (Y_0 + \varepsilon_Y) \cos(\omega_1 t + \varphi_Y) \quad (7.40b)$$

Nous faisons ensuite le développement au premier ordre des équations du mouvement. Nous montrons aisément que la quantité $X_0\varepsilon_X + Y_0\varepsilon_Y$ est constante, et nous la prenons nulle. Nous introduisons alors $\varepsilon = X_0\varepsilon_X = -Y_0\varepsilon_Y$ et nous pouvons donc écrire :

$$\dot{\varphi}_X - \dot{\varphi}_Y = \frac{\varepsilon}{8\omega_1} (6 - \omega_{0X}^2 - \omega_{0Y}^2) \quad (7.41)$$

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{X_0^2 Y_0^2}{8\omega_1} (\varphi_X - \varphi_Y) \quad (7.42)$$

Par conséquent :

$$\ddot{\varepsilon} + \Omega_1^2 \varepsilon = 0 \quad (7.43)$$

où

$$\Omega_1 = \frac{X_0 Y_0}{4\omega_1} \quad (7.44)$$

En conclusion, la trajectoire oscille au voisinage de la solution périodique, avec la fréquence de battement Ω_1 (figure 7.6b). Les solutions en phase et en opposition de phase sont donc stables.

7.2.4 Solutions en quadrature

Les solutions en quadrature sont celles qui satisfont $\psi_X = \psi_Y \pm \pi/2$. Il suffit d'analyser juste l'un des deux cas : l'autre s'en déduit en changeant le signe de Y_0 . Nous considérons donc $\psi_X = \psi_Y + \pi/2$. À partir des équations (7.8a) et (7.8c), les expressions qui donnent la fréquence commune ω_2 du mouvement pour cette solution sont :

$$\omega_2^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{1}{8}Y_0^2 \quad (7.45a)$$

$$= \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{1}{8}X_0^2 \quad (7.45b)$$

Nous en déduisons la relation suivante entre les amplitudes :

$$X_0^2 + Y_0^2 = 16 \quad (7.46)$$

Les amplitudes impliquées dans l'équation (7.46) sont au-delà des conditions de validité de notre développement limité. En conséquence, les solutions en quadrature ne nous concernent pas.

7.2.5 Résumé

Les caractéristiques des solutions (7.9) aux équations du mouvement (7.2), trouvées et analysées dans cette section, sont résumées dans le tableau 7.1.

solution	stabilité	porteuse	fréquence de battement	énergie	amplitudes
$X_0 = 0$	stable	$\omega_Y^2 = \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right)$ figure 7.3	$\Omega_X = 2\omega_Y - 2\omega_X$ avec $\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 - \frac{Y_0^2}{4}$ figure 7.3	$E_Y = \omega_{0Y}^2 \frac{Y_0^2}{2} \left(1 - \frac{3Y_0^2}{32}\right)$ figure 7.2	$X_0 = 0$
$Y_0 = 0$	stable si $X_0^2 < \frac{16\alpha}{2+\alpha}$	$\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right)$ figure 7.4	$\Omega_Y = 2\omega_X - 2\omega_Y$ avec $\omega_Y^2 = \omega_{0Y}^2 - \frac{X_0^2}{4}$ figure 7.4	$E_X = \omega_{0X}^2 \frac{X_0^2}{2} \left(1 - \frac{3X_0^2}{32}\right)$	$Y_0 = 0$
$\psi_X = \psi_Y$ et $\psi_X = \psi_Y + \pi$	stables	$\omega_1^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{3}{8}Y_0^2$ $= \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{3}{8}X_0^2$ figure 7.5b	$\Omega_1 = \frac{X_0 Y_0}{4\omega_1}$ figure 7.6b	$E_1 = \frac{\omega_{0X}^2 X_0^2}{4} \left(1 - \frac{X_0^2}{16}\right) + \frac{\omega_{0Y}^2 Y_0^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{16}\right) + \frac{\omega_1^2}{4} (X_0^2 + Y_0^2) - \frac{3}{32} X_0^2 Y_0^2$ figure 7.6a	$X_0^2 = \frac{16\alpha}{2+\alpha} + \frac{2-\alpha}{2+\alpha} Y_0^2$ figure 7.5a
$\psi_X = \psi_Y \pm \frac{\pi}{2}$	-	$\omega_2^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{1}{8}Y_0^2$ $= \omega_{0Y}^2 \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{1}{8}X_0^2$	-	-	$X_0^2 + Y_0^2 = 16$

TABLE 7.1 – Caractéristiques principales des solutions harmoniques (7.9) aux équations du mouvement (7.2).

7.3 Résultats

Nous avons résolu numériquement – toujours en employant la méthode décrite dans le chapitre 4 – le mouvement d’un atome dans le potentiel d’origine donné par (5.1), pour $\alpha = 0.01$. Une carte de sections de Poincaré (notées SP) ainsi obtenue a la forme montrée dans la figure 7.7, pour $E = 0.3$. Nous allons comparer ces résultats des simulations aux calculs de la section précédente.

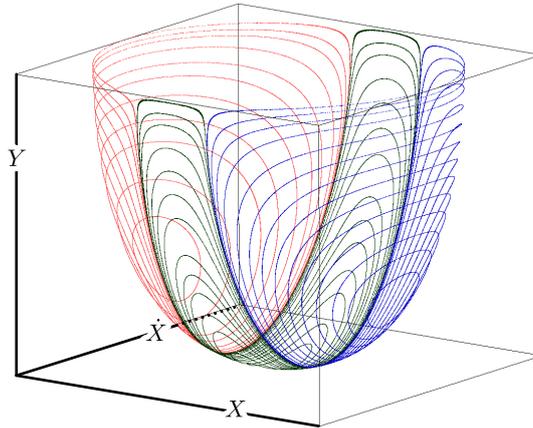


FIGURE 7.7 – Sections de Poincaré du réseau carré bleu, pour $\alpha = 0.01$ et $E = 0.3$.

7.3.1 Cartes de sections de Poincaré

Sur la figure 7.8, nous présentons les cartes de SP obtenues pour différentes valeurs d’énergie, toujours pour $\alpha = 0.01$. Nous montrons dans cette figure les projections des différentes cartes sur les plans XY (7.8a, 7.8c, 7.8e, 7.8g et 7.8i) et $X\dot{X}$ (7.8b, 7.8d, 7.8f, 7.8h et 7.8j).

Nous pouvons voir sur les cartes de SP que, pour les faibles énergies (figures 7.8a et 7.8b), les solutions découplées dominent. Nous pouvons identifier en bas de la figure 7.8a la solution périodique $X_0 = 0$, et en haut, la solution $Y_0 = 0$. Ces deux dernières sont les seules solutions périodiques présentes pour cette valeur d’énergie, $E = 0.03$. Cela correspond à la situation où l’énergie du système est inférieure au seuil de déstabilisation de la solution $Y_0 = 0$ (donné par l’équation 7.33) : pour $\alpha = 0.01$, cette énergie est $E_S \approx 0.039$. Ce seuil coïncide avec l’apparition des solutions accrochées en phase et en opposition. Pour des énergies plus élevées, nous voyons donc, dans la carte de SP, trois solutions périodiques stables (figures 7.8c-h) : $X_0 = 0$ et les solutions accrochées. Ces dernières dominent de plus en plus l’espace des phases, jusqu’à la valeur d’énergie qui permet à l’atome de sortir du puits, E_T . Cette valeur est $E_T(0.01) = 0.9999$ (figures 7.8i et 7.8j).

Nous identifions de cette façon les quatre solutions périodiques calculées et décrites analytiquement, et qui tombent dans le domaine de validité de cette approche (les solutions en quadrature, éqs. 7.9e et 7.9f, sont exclues). Le mouvement qu’elles représentent est montré dans la figure 7.9. Nous traitons ces orbites comme des points fixes (en effet, pour trois d’entre elles, leur SP est un point) : nous analysons donc la stabilité de ces solutions comme pour un point fixe dans l’espace des phases complet :

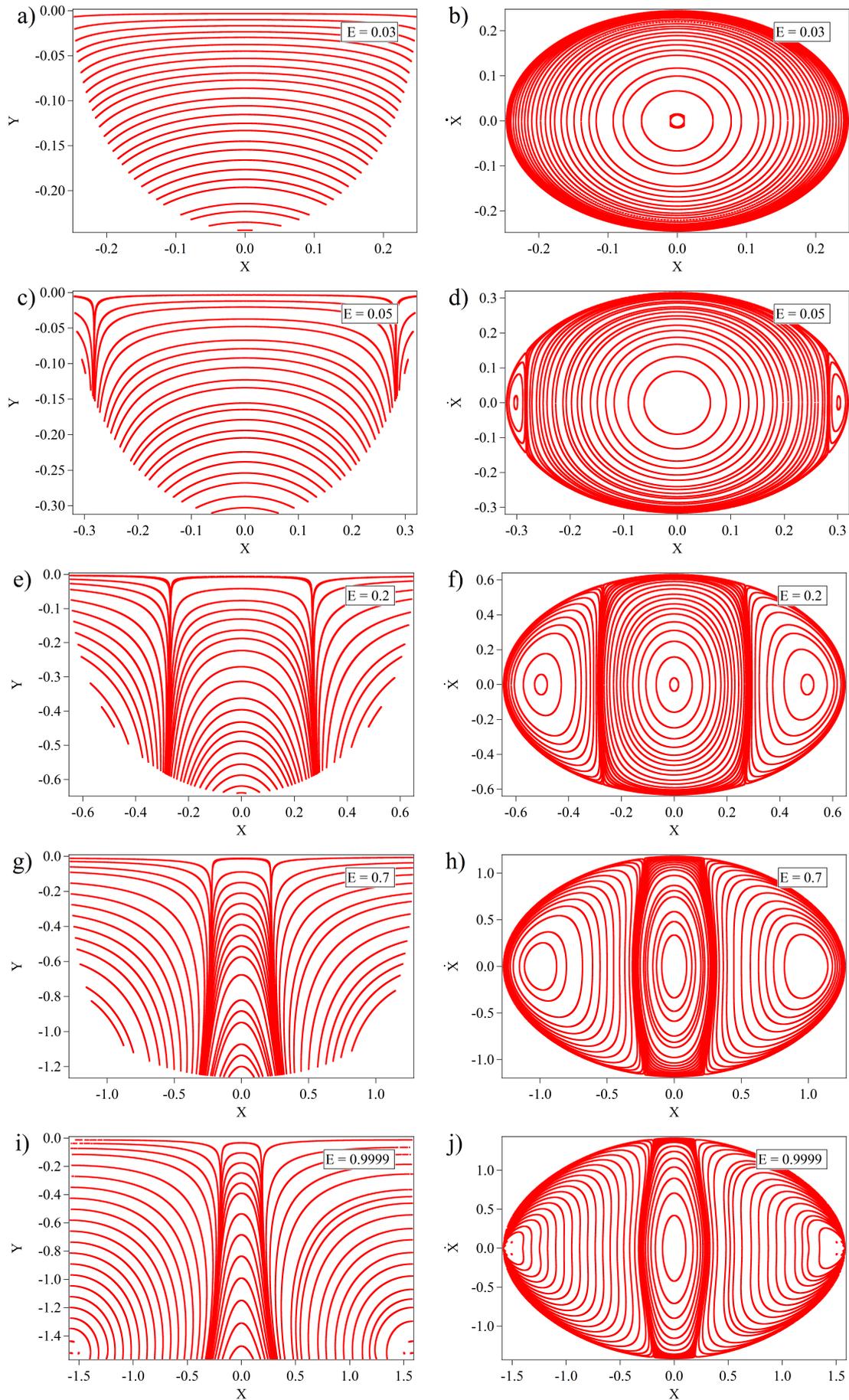


FIGURE 7.8 – Sections de Poincaré pour $\alpha = 0.01$ et : a,b) $E = 0.03$, c,d) $E = 0.05$ e,f) $E = 0.2$, g,h) $E = 0.7$, i,j) $E = 0.9999$.

- La solution (7.9a), $X_0 = 0$, est clairement un point fixe elliptique – comme nous l’avons prévu dans la section 2 – au centre des projections $X\dot{X}$, et il est le vertex dans les projections XY . Cela est en bon accord avec les résultats pour toutes les configurations (α, E) du réseau carré bleu que nous avons explorées dans le chapitre 5, où le point $X = 0$ est toujours stable.
- La solution (7.9b), $Y_0 = 0$, n’est pas visible sur la figure 7.8 à cause du choix de l’hyperplan $\dot{Y} = 0+$ pour le calcul des SP. Elle correspondrait à une ligne horizontale en $Y = 0$ dans les projections sur le plan XY . Cependant, nous déduisons la stabilité de la solution à partir des trajectoires voisines à la droite $Y = 0$: la présence de lignes presque horizontales en figure 7.8a montre que cette solution est stable, pour cette énergie. Ces lignes disparaissent pour des énergies au dessus de E_S , prouvant ainsi que la solution devient instable. Nous discutons comment mieux visualiser cette solution dans l’encadré ci-après.
- Les solutions en phase (7.9c) et en opposition (7.9d) se voient comme des points fixes dans les deux projections : ils se trouvent sur le côté gauche (en phase) et droit (en opposition). Leur caractère elliptique se voit mieux dans les projections $X\dot{X}$.

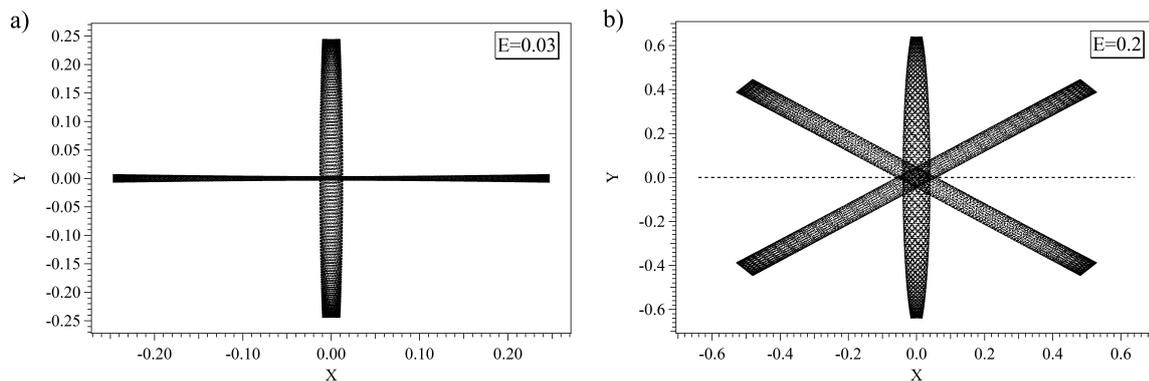


FIGURE 7.9 – Mouvement dans le plan réel Y vs X représenté par des trajectoires quasi-périodiques autour de chacune des solutions stables, pour $\alpha = 0.01$. Résultats numériques pour a) $E = 0.03$ et b) $E = 0.2$.

Dans la figure 7.9, nous avons représenté le mouvement de l’atome dans l’espace réel (X, Y) . Nous montrons les deux cas possibles : dans le premier cas, pour des énergies en dessous du seuil $E_S = 0.039$, les seules solutions périodiques sont les oscillations selon X et selon Y (figure 7.9a, pour $E = 0.03$). Dans l’autre cas, pour des énergies au dessus de E_S , les solutions périodiques possibles sont au nombre de trois : l’oscillation selon Y et les deux solutions accrochées, qui sont des oscillations sur des droites en biais (figure 7.9b, pour $E = 0.2$). Dans ce dernier cas, l’oscillation selon X devient instable, ce qui est représenté avec la droite pointillée. Nous remarquons que les trajectoires montrées dans ces figures sont des solutions quasi-périodiques calculées numériquement. Elles correspondent au voisinage des solutions stables, et donc font aussi des petites oscillations autour de la solution périodique.

Pour continuer l’étude de ces solutions dans l’espace des phases et leur évolution avec l’énergie du système, nous avons travaillé sur les résultats des simulations avec des énergies à partir de $E = 0.01$ jusqu’à $E_T = 0.9999$.

UN AUTRE CHOIX DES SECTIONS DE POINCARÉ

Pour étudier la solution $Y_0 = 0$, le choix de l'hyper-plan $\dot{Y} = 0+$ pour tracer les sections de Poincaré ne convient pas (voir figure 7.8). Cette solution n'y est pas observable car nous retenons les points où Y passe par un minimum. Une autre option pour visualiser cette solution, et pour mettre en évidence comment elle devient instable, consiste à obtenir des SP telles que ce soit la vitesse selon X qui s'annule : $\dot{X} = 0+$. Nous avons simulé un tel choix d'hyper-plan en prenant $\alpha = -0.01$, ce qui nous permet d'utiliser les routines détaillées dans le chapitre 4, mais en interchangeant les variables X et Y . Dans la figure 7.10, nous montrons les projections $Y\dot{Y}$ de la carte de SP ainsi obtenue, pour des valeurs d'énergie autour du seuil de déstabilisation de la solution $Y_0 = 0$, évalué à $E_S \approx 0.039$.

Nous pouvons voir que le point central, qui correspond à $Y = 0$ et $\dot{Y} = 0$, est un point elliptique en figure 7.10a (pour $E = 0.03$) et il devient un point hyperbolique en figure 7.10b ($E = 0.04$); ce qui se voit mieux pour des valeurs plus grandes de l'énergie (figures 7.10c et 7.10d). Le changement de la nature du point confirme l'existence du seuil de déstabilisation – et la valeur calculée E_S – en dessus duquel la solution $Y_0 = 0$ devient instable. De plus, dans la figure 7.10d ($E = 0.06$) nous pouvons identifier, à gauche et à droite de $Y_0 = 0$, les solutions stables en phase et en opposition; elles apparaissent comme deux points elliptiques.

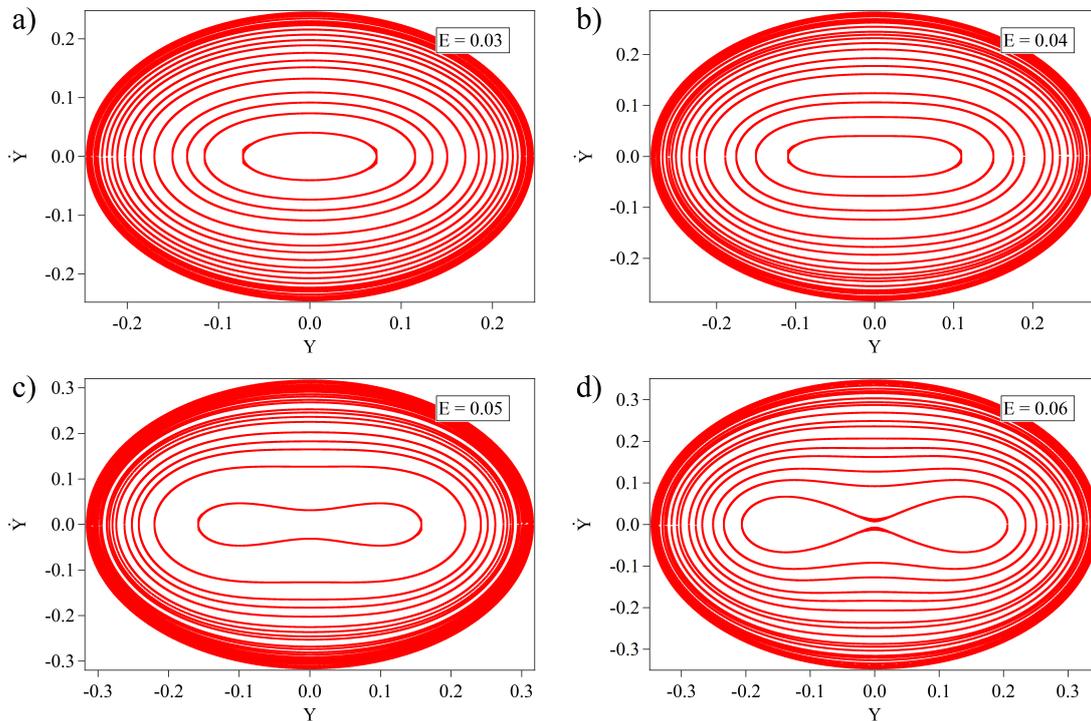


FIGURE 7.10 – Sections de Poincaré $\dot{X} = 0+$ pour $\alpha = 0.01$ et pour a) $E = 0.03$, b) $E = 0.04$, c) $E = 0.05$ et d) $E = 0.06$.

7.3.1.1 Étiquetage des sections de Poincaré

L'étude des solutions trouvées numériquement aux différentes valeurs de l'énergie se poursuit avec l'analyse de leurs spectres. Pour cette analyse, nous avons implémenté la méthode décrite dans le chapitre 4, pour caractériser les pics correspondant à une fréquence centrale ω et une fréquence de battement Ω , qui se manifeste dans le spectre par la présence de bandes latérales de part et d'autre de la porteuse à ω .

Pour chaque valeur donnée de l'énergie, nous travaillons en particulier sur la projection de la carte de SP sur le plan XY . Pour associer les propriétés du spectre d'une trajectoire avec la position de sa SP dans la carte, nous avons employé un étiquetage des SP qui permet de les repérer. Nous définissons leur abscisse ξ selon une droite, de sorte que chaque SP est repérée par un nombre $-1 \leq \xi \leq 1$. Dans ce but, nous traçons un segment de droite qui relie des points caractéristiques dans la projection XY , qui coïncident en général avec les points fixes (figure 7.11). Chaque SP présente dans la carte est donc identifiée par l'abscisse ξ de son intersection avec cette droite. Nous obtenons ainsi un étiquetage des trajectoires complètes à partir de la position de leur SP.

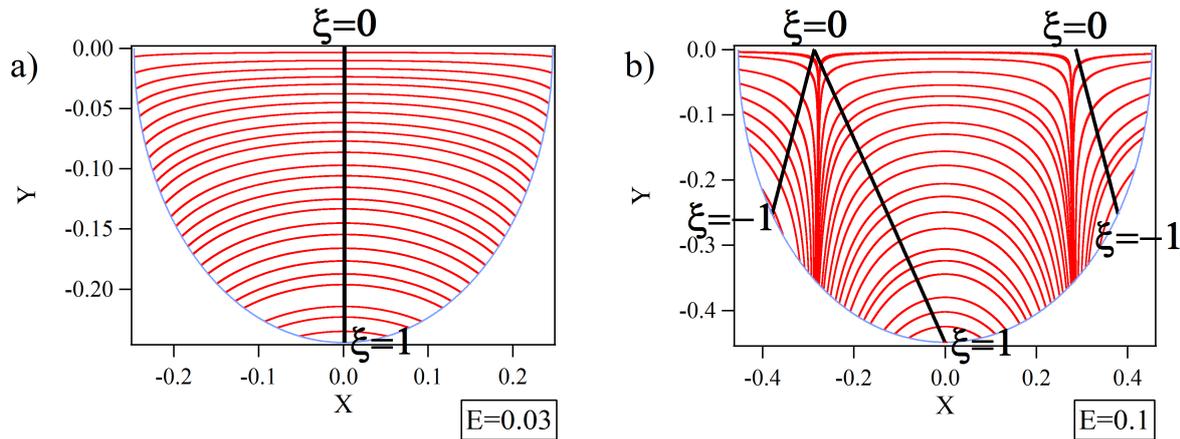


FIGURE 7.11 – Segments de droites employés dans les cartes de sections de Poincaré, pour l'étiquetage des SP avec des abscisses ξ . La courbe qui limite les SP a été ajoutée pour mieux identifier les extrémités des droites.

Pour les faibles énergies (plus petites que le seuil E_S), nous déterminons l'abscisse ξ selon le segment de droite qui relie le point $(X, Y) = (0, 0)$, d'abscisse $\xi = 0$, avec le point $(X, Y) = (0, Y_{min})$, d'abscisse $\xi = 1$ (figure 7.11a). La valeur de Y_{min} est calculable à partir de $E = U(0, Y)$:

$$Y_{min} = -\arccos\left(\frac{1 + \alpha - E}{1 + \alpha}\right) \quad (7.47)$$

Par définition, la trajectoire de la solution $Y_0 = 0$ est repérée par l'abscisse $\xi = 0$, et celle de $X_0 = 0$ par $\xi = 1$.

Pour des énergies au dessus du seuil E_S , il y a trois régions de trajectoires, et donc nous prenons trois segments de droites pour étiqueter chacune (figure 7.11b). La région des solutions découplées, au centre, emploie le premier segment de droite : il relie le point d'abscisse $\xi = 0$, en $Y = 0$ et sur une ligne verticale imaginaire qui sépare les

deux régions de solutions, avec le point d'abscisse $\xi = 1$, $(X, Y) = (0, Y_{min})$. Les autres deux segments de droite sont symétriques par rapport à l'origine : ils définissent aussi le point $Y = 0$ sur les lignes qui séparent les régions comme l'abscisse $\xi = 0$, et les points correspondant aux solutions en phase et en opposition comme l'abscisse $\xi = -1$. Avec cet étiquetage nous ne différencions pas les SP des solutions en phase des celles en opposition, car les quantités à mesurer doivent satisfaire les mêmes relations dans les deux cas.

7.3.1.2 Résultats du traitement des spectres

Quelques exemples des valeurs que nous avons obtenues du traitement des spectres sont montrés dans les figures 7.12 à 7.15. Nous y voyons l'évolution dans la carte de SP des fréquences et des amplitudes des pics, pour certaines valeurs de l'énergie. Nous remarquons que cette évolution est continue dans les intervalles d'abscisse $-1 \leq \xi < 0$ et $0 < \xi \leq 1$ dans la carte de SP. La discontinuité en $\xi = 0$ reflète l'existence du point hyperbolique correspondant à la solution $Y_0 = 0$.

Dans la figure 7.12, nous traçons les fréquences des porteuses ω_X et ω_Y . Cette figure permet d'apprécier, en particulier, l'apparition des solutions en phase et en opposition, au seuil d'énergie $E_S \approx 0.039$. Dans la figure 7.12a, pour une énergie $E = 0.03$, les solutions accrochées n'existent pas et donc les porteuses satisfont $\omega_Y > \omega_X$ dans toute la carte. Les points, dans ce cas, correspondent tous à des solutions découplées. D'autre part, dans quelques points de la figure 7.12b, les fréquences ω_X et ω_Y deviennent égales, dans l'intervalle de l'abscisse $-1 \leq \xi < 0$. Cela correspond à une énergie $E = 0.05 > E_S$, où la carte se sépare en trois régions car les solutions accrochées apparaissent sur les côtés. Nous pouvons voir aussi, dans 7.12c et 7.12d, l'expansion du phénomène d'accrochage qui caractérise ces solutions, car la relation $\omega_X = \omega_Y$ est satisfaite par un nombre chaque fois plus grand de points (trajectoires) dans l'intervalle $-1 \leq \xi < 0$. Ceci correspond, évidemment, à des régions gauche et droite plus grandes dans la projection XY , et à une région centrale plus petite (voir figures 7.8e, 7.8g et 7.8i).

En figure 7.13, nous représentons la porteuse ω_X et les bandes latérales gauche, BG_X , et droite, BD_X . Les points pour BG_Y et BD_Y décrivent une courbe de la même forme que celles dans la figure 7.13, et donc nous ne les montrons pas. Nous pouvons voir dans ces figures que, en partant de $\xi = 0$, la position dans le spectre des bandes latérales s'éloigne de la porteuse quand nous approchons des extrémités $\xi = 1$ ou $\xi = -1$. C'est à dire que, pour toute énergie, les bandes latérales sont les plus proches pour la solution $Y_0 = 0$. Nous remarquons que cette divergence se fait de façon presque linéaire et donc elle permet d'ajuster l'évolution des bandes latérales et des porteuses avec une courbe assez lisse.

Dans la figure 7.14, nous avons tracé les amplitudes des pics dans le spectre de X : l'amplitude de la porteuse, $A\omega_X$, de la bande latérale gauche, ABG_X , et de la bande latérale droite, ABD_X . Nous remarquons que la bande latérale droite est toujours d'amplitude plus grande que la gauche. Ces amplitudes tendent vers zéro quand nous approchons des différentes solutions périodiques ($\xi = 1$ et $\xi = -1$), à l'exception du voisinage de $\xi = 0$ pour des énergies au dessus du seuil E_S : ceci correspond à la solution $Y_0 = 0$ quand elle est instable (figures 7.14b, 7.14c et 7.14d). Or, nous savons que pour une solution périodique, les bandes latérales sont d'amplitude nulle. Cela montre le caractère hyperbolique du point fixe $Y_0 = 0$, et le fait que nous ne pouvons pas nous appuyer sur les trajectoires au voisinage du point, parce qu'elles n'y restent pas. Nous

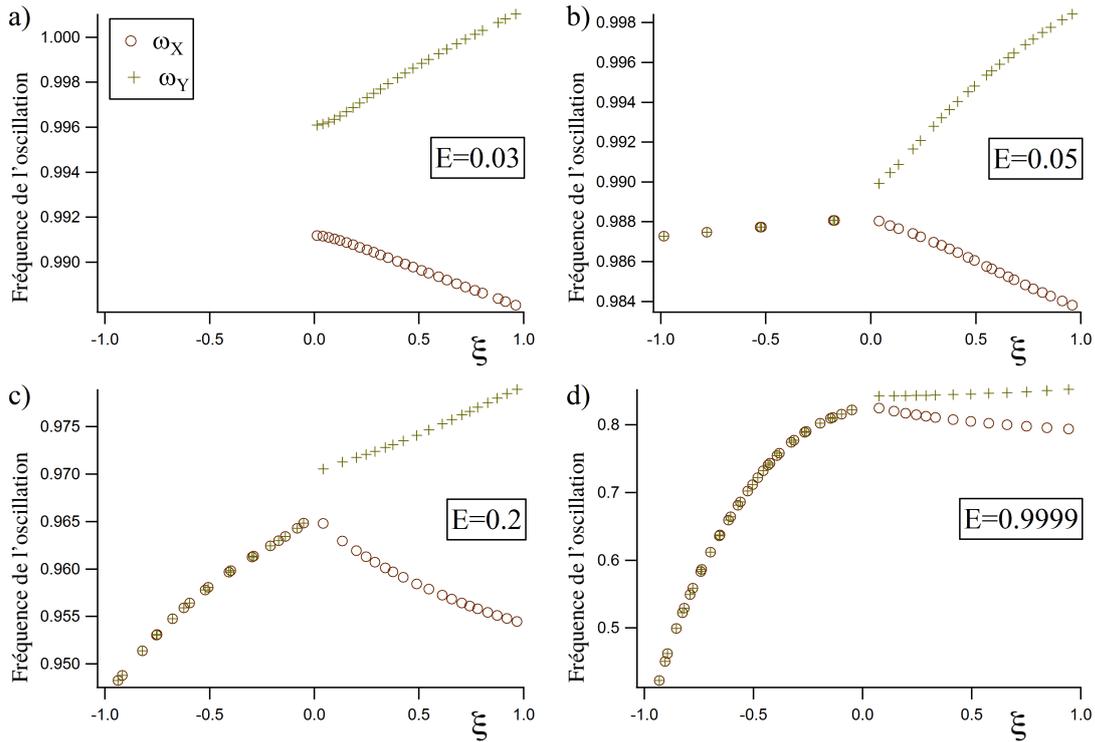


FIGURE 7.12 – Fréquences ω_X et ω_Y en fonction de l'abscisse ξ sur la carte de SP, pour $\alpha = 0.01$ et a) $E = 0.03$, b) $E = 0.05$, c) $E = 0.2$ et d) $E = 0.9999$.

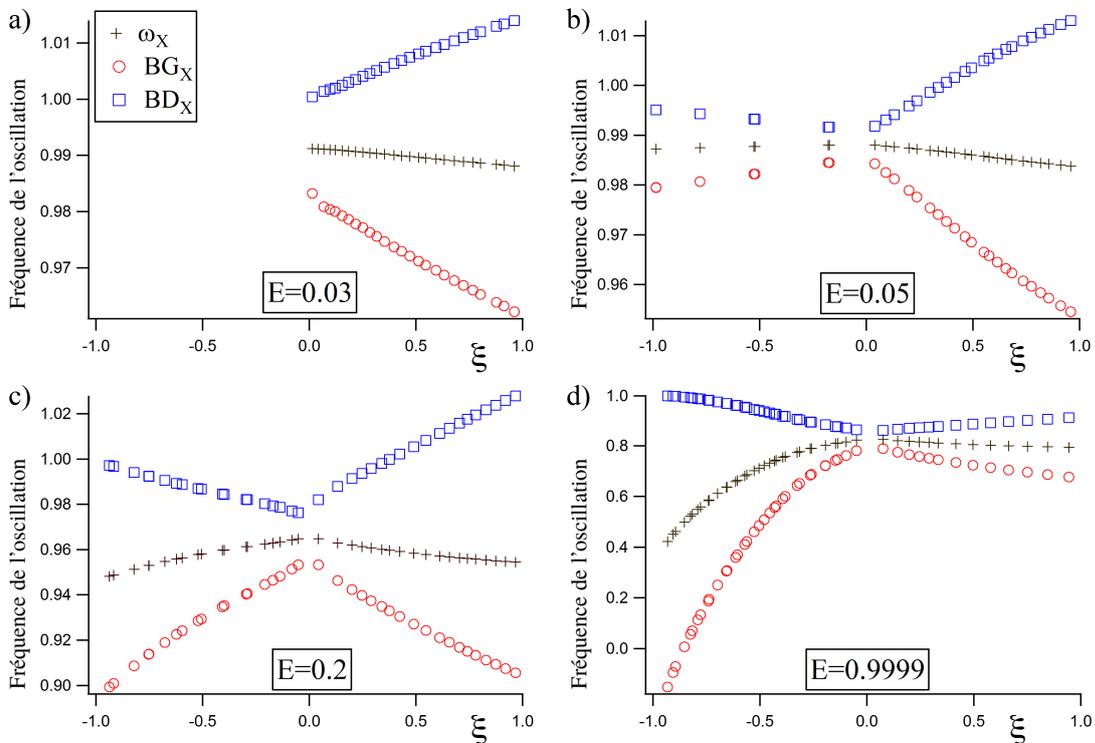


FIGURE 7.13 – Fréquence ω_X et ses bandes latérales $BG_X = \omega_X - \Omega_X$ et $BD_X = \omega_X + \Omega_X$, en fonction de l'abscisse ξ sur la carte de SP, pour $\alpha = 0.01$ et a) $E = 0.03$, b) $E = 0.05$, c) $E = 0.2$ et d) $E = 0.9999$.

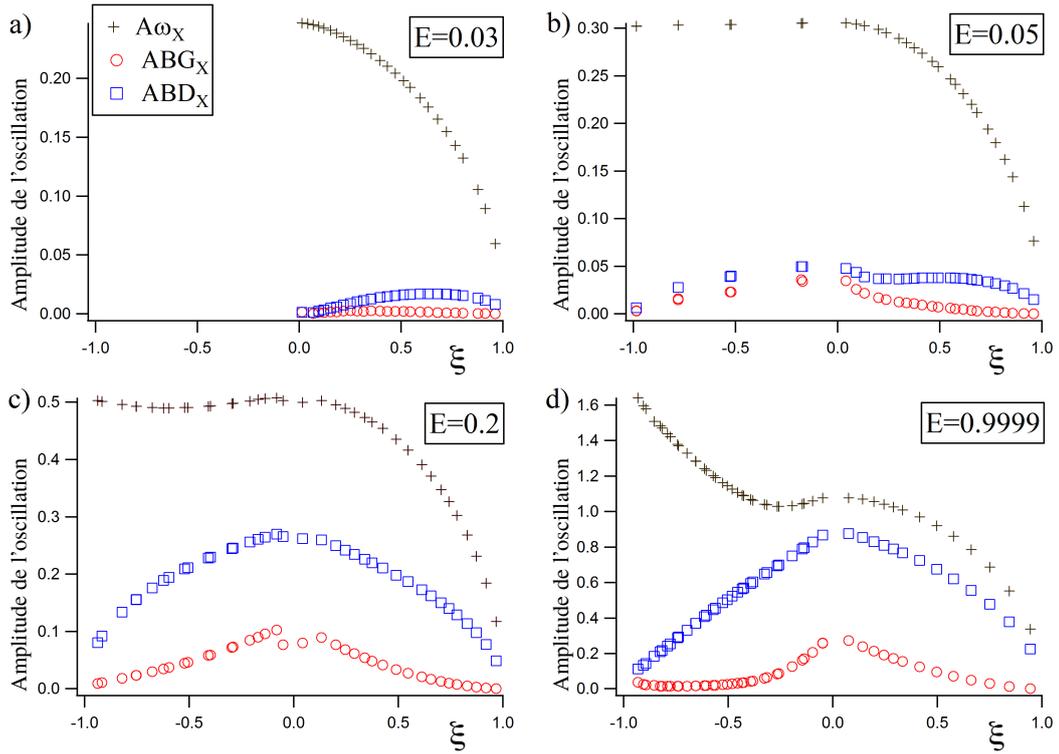


FIGURE 7.14 – Amplitudes de la porteuse, $A\omega_X$, et des bandes latérales, ABG_X et ABD_X , en fonction de l'abscisse ξ sur la carte de SP, pour $\alpha = 0.01$ et a) $E = 0.03$, b) $E = 0.05$, c) $E = 0.2$ et d) $E = 0.9999$.

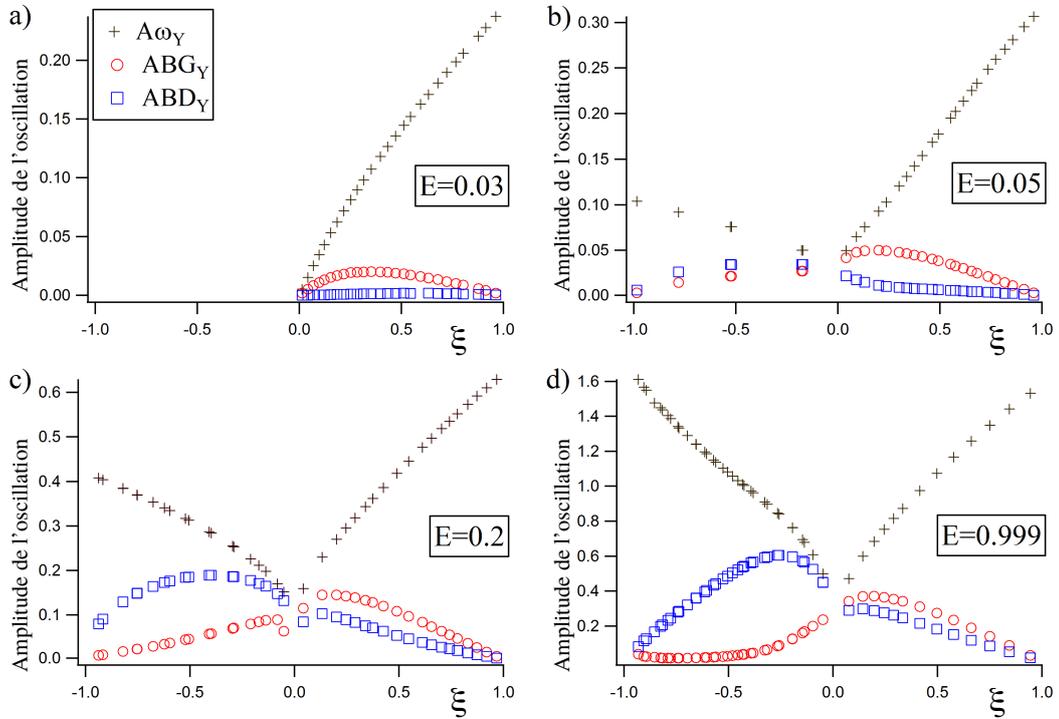


FIGURE 7.15 – Amplitudes de la porteuse, $A\omega_Y$, et des bandes latérales, ABG_Y et ABD_Y , en fonction de l'abscisse ξ sur la carte de SP, pour $\alpha = 0.01$ et a) $E = 0.03$, b) $E = 0.05$, c) $E = 0.2$ et d) $E = 0.9999$.

remarquons que dans la figure 7.14a, ces amplitudes s'annulent quand nous approchons de $\xi = 0$, puisque $Y_0 = 0$ est encore un point elliptique ($E = 0.03$).

Finalement, dans la figure 7.15, nous montrons les amplitudes des pics dans le spectre de Y : $A\omega_Y$, ABG_Y et ABD_Y . Dans ces cas, la bande latérale droite est plus grande que la gauche seulement dans la région des solutions accrochées, et dans la région de la solution $X = 0$, c'est à l'inverse. Les amplitudes des bandes latérales tendent vers zéro à nouveau seulement pour les points fixes stables. La croissance de l'amplitude de la porteuse $A\omega_Y$ vers l'abscisse $\xi = 1$ est presque linéaire, alors que dans la figure 7.14, nous voyons que la décroissance de $A\omega_X$ décrit une courbe assez raide. Cependant, c'est la première quantité, $A\omega_Y$, qui nous intéresse, car nous savons que la seconde, $A\omega_X$, doit s'annuler au point fixe $X_0 = 0$.

7.3.1.3 Extrapolation aux points fixes

Nous voulons connaître les caractéristiques des solutions correspondant aux points fixes dans la carte de SP. Or, notre calcul automatique de la carte de SP, décrit dans le chapitre 4, aboutit à des solutions distribuées uniformément : il ne tombe pas sur les points fixes. En effet, ces points ne peuvent se trouver que par approximations successives. Toutefois, ceci n'est pas nécessaire car les caractéristiques du mouvement en ces points sont faciles à déduire à partir de leur voisinage. L'intérêt principal d'étudier l'évolution des solutions, dans la carte de SP pour une énergie donnée, est donc de déterminer leur comportement au voisinage des points fixes. À partir de l'évolution des quantités mesurées en fonction de l'étiquetage présenté ci-dessus, nous pouvons les extrapoler pour lesdits points.

Nous implémentons donc des ajustements pour les différentes courbes comme celles que nous avons montrées dans la section précédente (figures 7.12-7.15). Elles sont formées par les points représentant les fréquences et les amplitudes en fonction de l'abscisse ξ sur la carte de SP. Ces ajustements sont faits pour les fréquences et les amplitudes des porteuses et des bandes latérales, avec un polynôme d'ordre 5. Ensuite, nous calculons l'extrapolation de la portion de courbe correspondant à un type de solution, jusqu'aux différents points fixes.

Dans les sections suivantes, nous comparons les résultats obtenus à partir des extrapolations aux points fixes avec les résultats des calculs analytiques de la section 2. Pour avoir une idée de l'intervalle de validité de ces équations approchées, nous pouvons estimer, en guise de limite supérieure, les énergies pour lesquelles le potentiel approché ne représente plus correctement le vrai potentiel. Nous avons vu, au début de ce chapitre, que notre approximation du potentiel est bonne dans les intervalles d'amplitude $-1.3 \lesssim X \lesssim 1.3$ et $-1.3 \lesssim Y \lesssim 1.3$ pour un mouvement selon les axes, et de $-0.8 \lesssim X = Y \lesssim 0.8$ selon les diagonales. Nous calculons donc les valeurs d'énergie pour ces amplitudes maximales, selon les équations correspondantes :

- pour la solution $X_0 = 0$ (éq. 7.14) : $E_Y (Y_0 = 1.3) \approx 0.72$;
- pour la solution $Y_0 = 0$ (éq. 7.30) : $E_X (X_0 = 1.3) \approx 0.70$;
- pour les solutions en phase et en opposition (éq. 7.39) : $E_1 (X_0 = 0.8, Y_0 \approx 0.75) \approx 0.46$.

Les équations trouvées dans la section 2 sont comparables, dans ces intervalles, aux valeurs trouvées par l'extrapolation des simulations. Nous ferons cette comparaison en particulier pour la solution $X_0 = 0$ et les solutions en phase et en opposition, qui nous intéressent spécialement à cause de l'accrochage de fréquences. Comme nous l'avons vu,

la solution triviale $Y_0 = 0$ devient instable à assez faible énergie : dans ces conditions, les trajectoires qui passent près de $Y = 0$ dans l'espace des phases ne sont pas liées à ce point fixe. Une extrapolation n'aurait donc pas de sens.

7.3.2 Solution $X_0 = 0$

Les valeurs obtenues par extrapolation à l'abscisse $\xi = 1$ de la figure 7.11 correspondent au mouvement selon Y , exprimé de façon approchée par la relation (7.10). Grâce à ces extrapolations, nous analysons la pertinence et l'exactitude de nos approximations pour cette solution.

7.3.2.1 Amplitude d'oscillation Y_0

Dans la figure 7.16, nous montrons les amplitudes d'oscillation Y_0 extrapolées à partir des spectres voisins, et celles calculées analytiquement Y_0^A , obtenues d'une réécriture de l'équation (7.14) comme :

$$E_Y = \frac{4}{3}\omega_{0Y}^2 \left(1 - \left(1 - \frac{3Y_0^2}{16} \right)^2 \right) \quad (7.48)$$

ce qui donne :

$$Y_0^A = \sqrt{\frac{16}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3E}{4\omega_{0Y}^2}} \right)} \quad (7.49)$$

Nous vérifions donc que notre approximation mène à des résultats très proches des points des simulations, pour tout l'intervalle d'énergie du puits de potentiel (figure 7.16). Ce bon accord entre les résultats est donc trouvé même pour des énergies au dessus de notre première estimation de l'intervalle de validité des approximations (attendu jusqu'à $E \approx 0.72$).

7.3.2.2 Fréquence principale ω_Y

Pour vérifier la validité de la relation (7.11), nous comparons les fréquences d'oscillation ω_Y extrapolées de la résolution numérique avec les résultats analytiques ω_Y^A . L'amplitude du mouvement principal Y_0 est introduite dans l'équation (7.11) en employant la relation (7.49). De cette façon, nous avons :

$$\omega_Y^A = \frac{\omega_{0Y}}{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 2\sqrt{1 - \frac{3E}{4\omega_{0Y}^2}}} \quad (7.50)$$

La figure 7.17 montre la comparaison entre les deux résultats, et le bon accord entre eux jusqu'à environ $E = 0.4$. Notons que cette énergie est en dessous de notre première estimation de l'intervalle de validité des approximations. Elle correspond toutefois à une amplitude $Y_0^A \approx 1$, loin des petites amplitudes considérées pour notre développement des équations. Il faut prendre en compte que nous utilisons, dans la relation (7.50), la valeur d'énergie totale pour E : il y a aussi de l'énergie impliquée dans les harmoniques négligés par notre approximation. La valeur de E introduite dans l'équation est donc plus grande que l'énergie du mouvement sinusoïdal considéré. En conséquence, pour

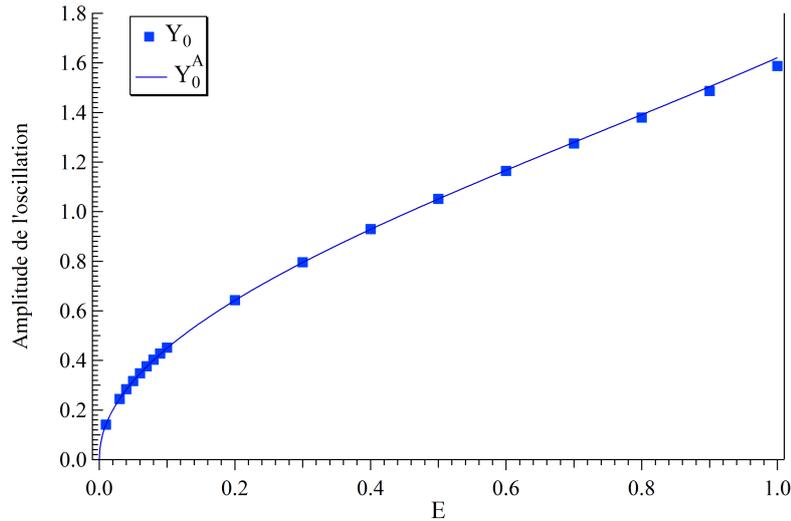


FIGURE 7.16 – Amplitude du mouvement selon Y pour la solution $X_0 = 0$, en fonction de l'énergie : les points Y_0 sont les résultats de la résolution numérique et la courbe Y_0^A est la valeur approchée donnée par l'équation (7.49).

des énergies proches du seuil $E_T = 0.9999$, où les amplitudes d'oscillation sont grandes, ω_Y^A sous-estime la valeur de ω_Y .

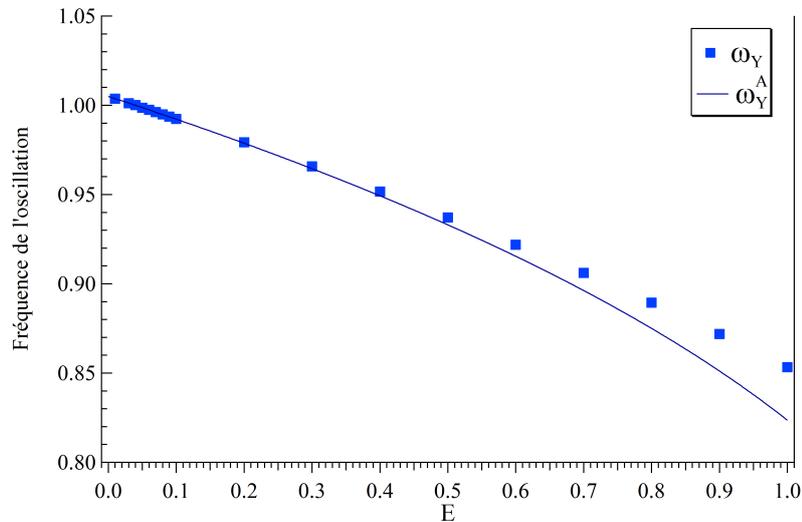


FIGURE 7.17 – Fréquence principale du mouvement pour la solution $X_0 = 0$, en fonction de l'énergie : les points ω_Y sont les résultats de la méthode numérique. La courbe approchée ω_Y^A est tirée de l'équation (7.50).

7.3.2.3 Bandes latérales et fréquence de battement

Dans la figure 7.18a, nous avons tracé les fréquences extrapolées des spectres en X , et l'extrapolation de la porteuse ω_Y , en fonction de l'énergie E . Les trois pics mesurés du spectre de X (en rouge dans la figure) correspondent à une fréquence principale ω_X et des bandes latérales gauche BG_X et droite BD_X .

Nous avons posé, dans la section 2.1, que le mouvement autour du point fixe $X_0 = 0$ a une porteuse en X de fréquence ω_X (éq. 7.25) et une bande latérale à $2\omega_Y - \omega_X$. Nous observons dans la figure 7.18a que les fréquences ω_X et ω_Y déduites des simulations satisfont $\omega_Y > \omega_X$ pour toute énergie. Ce résultat, prévu par l'équation (7.26), valide alors l'association de la bande latérale droite BD_X à la fréquence $2\omega_Y - \omega_X$, vu qu'elle satisfait $2\omega_Y - \omega_X > \omega_X$. La bande gauche BG_X est un pic toujours symétrique – en position par rapport à ω_X – à BD_X . Par conséquent, nous pouvons faire l'association $BG_X = 3\omega_X - 2\omega_Y$. Ce pic est toujours d'amplitude petite par rapport à l'autre bande latérale (voir figure 7.14), et donc peut être négligé. D'ailleurs, dans les spectres des solutions montrés au chapitre 5, il était parfois pas visible. Ces bandes latérales sont donc effectivement liées à la fréquence de battement Ω_X posée (éq. 7.27), et notre expression pour les petites mouvements autour de $X_0 = 0$ est ainsi validée.

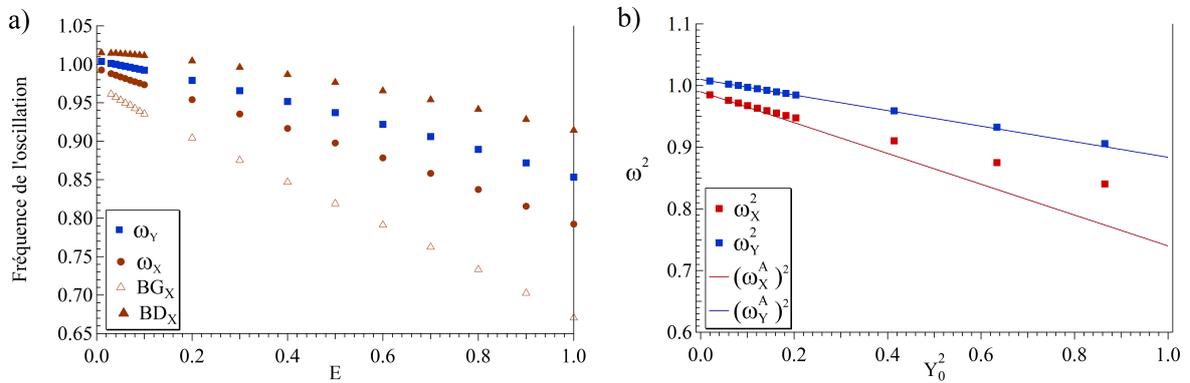


FIGURE 7.18 – Solution $X_0 = 0$: a) fréquences des porteuses selon X et selon Y , et des bandes latérales de la coordonnée X (BG_X et BD_X), en fonction de l'énergie E ; b) carré des porteuses en fonction du carré de l'amplitude Y_0 . ω_Y^A et ω_X^A sont tirées des équations (7.11) et (7.25), respectivement.

Nous avons fait une dernière vérification de nos relations approchées pour les fréquences ω_Y (éq. 7.11) et ω_X (éq. 7.25) : pour cela, en figure 7.18b, nous représentons le carré des fréquences en fonction du carré des amplitudes Y_0 , toutes ces valeurs étant tirées des simulations numériques. La courbe théorique ω_Y^A permet de voir que les valeurs extrapolées vérifient très bien la relation approchée pour la fréquence de l'oscillation principale ω_Y . Cela est valable même pour des amplitudes du mouvement, Y_0 , proches de 1. En revanche, la courbe pour les petites oscillations, ω_X^A , n'est vérifiée que pour des amplitudes Y_0 suffisamment faibles. Ce dernier résultat est attendu car, pour obtenir la relation 7.25, nous avons fait la supposition de très faibles amplitudes en négligeant le terme en Y_0^4 .

7.3.3 Solution en phase

Les résultats des extrapolations de nos simulations aux abscisses $\xi = -1$ de la figure 7.11b correspondent aux solutions verrouillées en phase ou en opposition. Ce mouvement est fait à une fréquence commune selon X et Y , donnée selon nos approximations par la relation (7.37). Dans cette section, nous comparons le mouvement accroché proposé avec les résultats numériques.

7.3.3.1 Amplitudes d'oscillation X_0 et Y_0

Pour les solutions en phase, nous comparons l'amplitude de l'oscillation en fonction de l'énergie, pour les relations analytiques X_0^A , Y_0^A et les points des simulations numériques X_0 , Y_0 (figure 7.19a). Pour X_0^A et Y_0^A , nous avons employé les équations (7.37), (7.38) et (7.39). Nous n'avons tracé les expressions analytiques que jusqu'à des amplitudes égales à 1, valeur qui est déjà au dessus de la première estimation de la limite de validité de nos approximations (estimée a priori pour des amplitudes égales à 0.8). L'accord des résultats est très bon jusqu'à des énergies autour de $E = 0.5$: cette énergie est proche et même supérieure à celle que nous avons proposée comme limite pour chercher une concordance ($E \approx 0.46$).

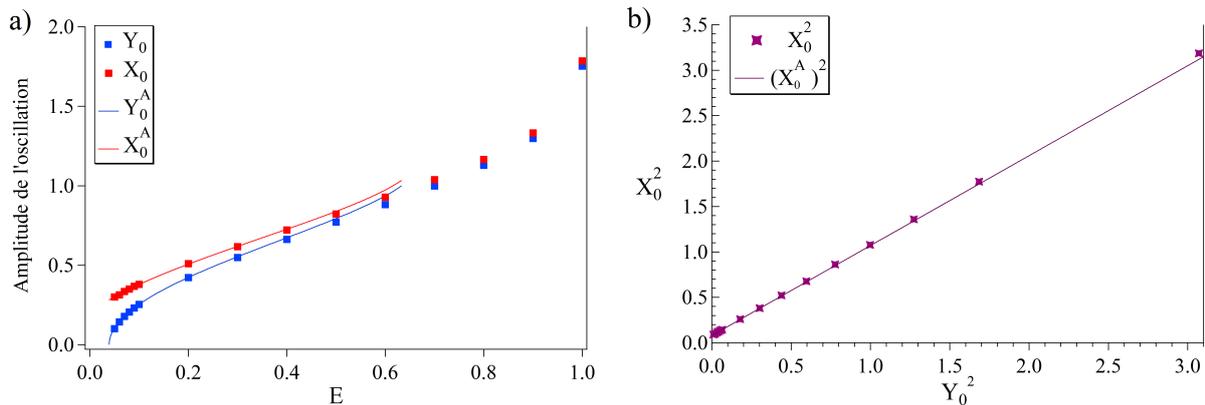


FIGURE 7.19 – Solution en phase : a) amplitudes X_0 , Y_0 et X_0^A , Y_0^A en fonction de l'énergie E , b) carré des amplitudes X_0 et X_0^A en fonction du carré de l'amplitude Y_0 . X_0^A et Y_0^A sont déduits des équations (7.37), (7.38) et (7.39).

Pour faire aussi une vérification de la relation entre les amplitudes d'oscillation elles mêmes, nous traçons le carré des amplitudes mesurées dans les simulations, avec la droite analytique qu'elles doivent satisfaire (éq. 7.38). Dans la figure 7.19b, nous observons que les résultats numériques X_0^2 satisfont très bien la relation linéaire approchée $(X_0^A)^2$, même pour des oscillations de très grandes amplitudes.

7.3.3.2 Fréquence principale ω_1

Les mêmes relations (7.37), (7.38) et (7.39), permettent de représenter dans la figure 7.20 l'approximation pour la fréquence principale du mouvement accroché, ω_1^A , en fonction de l'énergie. À nouveau, nous avons limité l'intervalle des amplitudes à 1, ce qui correspond à des énergies autour de $E = 0.6$.

Comparés avec les valeurs des fréquences extrapolées des simulations, les résultats de cette équation sont valables jusqu'à $E \simeq 0.4$. Cette valeur est proche de la limite supérieure proposée pour l'intervalle de validité de nos approximations, estimée comme $E \approx 0.46$. L'accord entre les résultats se produit donc dans une région suffisamment grande du puits où la comparaison est valable.

7.3.3.3 Fréquence de battement Ω_1

Les solutions accrochées présentent une fréquence de battement Ω_1 autour du point fixe. Nous avons calculé cette fréquence à partir des bandes latérales BG_1 et BD_1

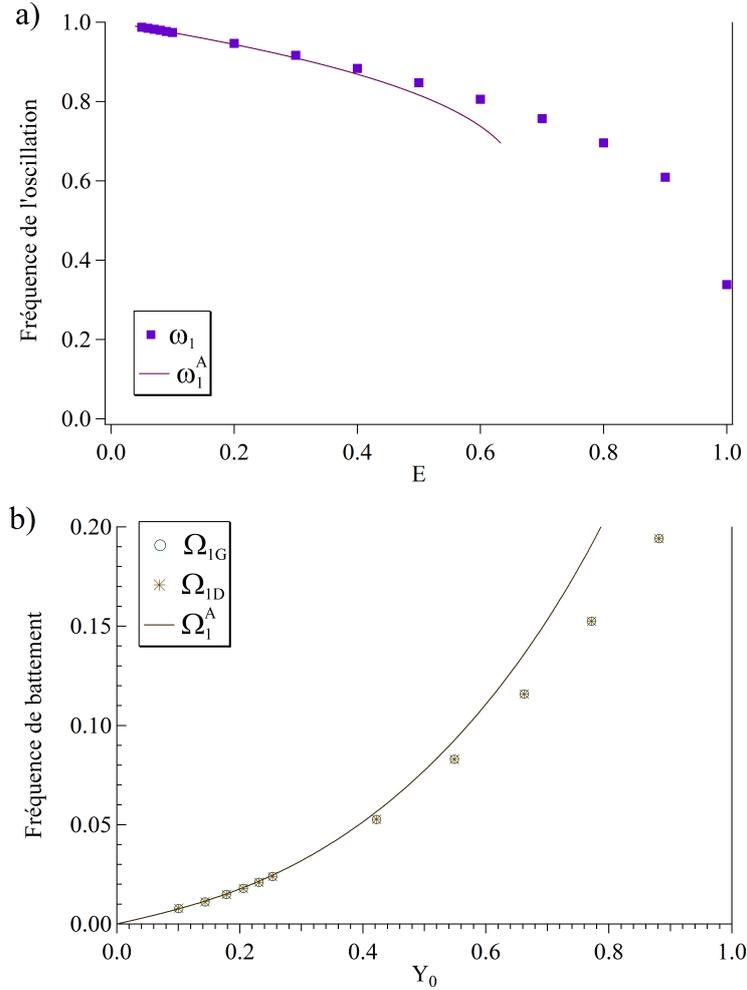


FIGURE 7.20 – Solution en phase : a) fréquence ω_1 du mouvement accroché, en fonction de l'énergie E ; ω_1^A est tirée des équations (7.37), (7.38) et (7.39). b) Fréquence de battement Ω_1 en fonction de l'amplitude du mouvement Y_0 ; Ω_1^A est déduit de la relation (7.44).

extrapolées :

$$\Omega_{1G} = \omega_1 - BG_1 \quad (7.51a)$$

$$\Omega_{1D} = BD_1 - \omega_1 \quad (7.51b)$$

Ω_{1G} et Ω_{1D} sont représentés dans la figure 7.20b, en fonction de l'amplitude d'oscillation Y_0 , avec la courbe Ω_1^A donnée par la relation (7.44).

Les fréquences de battement tirées du spectre numérique sont comparables à Ω_1^A jusqu'à $Y_0 \simeq 0.4$. Pour des amplitudes plus grandes, la surestimation dans l'approximation des amplitudes (voir figure 7.19), auxquelles Ω_1^A est proportionnelle, et la sous-estimation dans l'approximation des fréquences (voir figure 7.20a), auxquelles Ω_1^A est inversement proportionnelle, mènent à une estimation trop grande de la fréquence de battement.

7.4 Discussion

La résolution numérique du mouvement dans le réseau carré bleu avec $\alpha = 0.01$ montre que cette dynamique consiste en trajectoires périodiques et quasi-périodiques. Ces trajectoires expriment un phénomène de synchronisation qui se manifeste comme un accrochage des porteuses, accompagné de l'existence de fréquences de battement. L'accrochage a comme origine la quasi-dégénérescence des fréquences naturelles ; pour des grandes énergies, les fréquences de chaque coordonnée s'éloignent des fréquences naturelles à cause des grandes anharmonicités, mais l'accrochage persiste. La synchronisation est un mécanisme assez puissant pour expliquer la disparition du chaos dans cette configuration, comme c'était le cas pour le réseau carré rouge pour toute valeur de α . En revanche, à la différence du réseau rouge, la synchronisation n'est pas le seul comportement dominant : le fait qu'un autre point fixe (la solution $X = 0$) soit stable dans le réseau bleu – alors que les deux solutions triviales sont instables dans le réseau rouge – fait que cette solution domine une grande partie de l'espace des phases pour des énergies modérées.

Nous avons pu étudier ces caractéristiques du réseau bleu proche de la dégénérescence, en employant une approximation de la dynamique par un potentiel qui a la forme de deux oscillateurs de Duffing couplés. Les calculs analytiques réalisés sur ce système donnent, d'une part, deux solutions périodiques qui représentent un mouvement dans une seule coordonnée. La description analytique de la solution qui correspond à une oscillation selon Y est comparable aux simulations numériques pour une énergie inférieure à 0.7. La comparaison entre les simulations et la théorie montre que ces résultats coïncident dans cet intervalle d'énergie pour l'estimation de l'amplitude du mouvement. Le bon accord s'étend même à des énergies proches du seuil pour sortir du puits de potentiel. L'estimation de la fréquence de la porteuse se restreint par contre à des énergies plus basses, mais qui coïncident avec une amplitude d'oscillation proche de 1. Notre développement étant fait pour les petites oscillations, nous considérons donc que l'accord entre les deux résultats est bon dans une région suffisamment grande du puits. De plus, nous avons bien vérifié la stabilité de cette solution pour toute énergie. De la même façon, pour la solution $Y = 0$, notre approximation nous a permis de prédire une valeur d'énergie – que l'on appelle seuil de déstabilisation E_S – où elle devient instable et cède la place aux solutions accrochées. Cette valeur $E_S \approx 0.039$ dénote l'apparition du phénomène de synchronisation dans notre système pour des petites énergies.

D'autre part, les solutions analytiques trouvées avec un accrochage des fréquences décrivent bien la synchronisation observée dans les résultats numériques. La comparaison des courbes théoriques et les points de simulations donnent aussi des bons résultats dans l'intervalle jusqu'à $E = 0.5$, en ce qui concerne l'amplitude des mouvements en phase. La coïncidence des fréquences principales se limite à un intervalle d'amplitudes plus petit, jusqu'à des énergies autour de $E = 0.4$. Ces deux valeurs sont très proches de la limite supérieure estimée pour la validité de notre approximation théorique ($E \approx 0.46$), qui est ainsi bien vérifiée.

En résumé, nous avons trouvé que nos approximations coïncident, dans une grande région du puits, avec les simulations numériques du potentiel complet (éq. 5.1). Grâce au potentiel obtenu du développement de celui d'origine jusqu'au 4ème ordre (éq. 7.1) nous pouvons bien décrire, analytiquement, les solutions obtenues numériquement, et aussi prédire leur nature : nos calculs approchés sont donc représentatifs de la dynamique atomique dans cette configuration du réseau carré bleu.

Nous avons vu que la quasi-dégénérescence pour $\alpha \ll 1$ entraîne un phénomène de synchronisation dans les réseaux bleus. Cette résonance 1 : 1 a pour résultat une inhibition du chaos. Il est donc naturel de chercher des synchronisations entraînées par des résonances d'ordre supérieur dans les cas où – comme nous l'avons vu dans le chapitre 5 – nous avons trouvé une réduction de l'étendue du chaos. En particulier, dans le chapitre suivant, nous analysons l'existence d'une synchronisation liée à une résonance 2 : 1 pour $\alpha = 0.6$.

Chapitre 8

Synchronisation par résonance 2 : 1

La configuration $\alpha = 0.6$ permet de retrouver un phénomène de synchronisation dans le réseau carré bleu. Dans ce chapitre, nous étudions cette dynamique de façon analytique : pour cette valeur de α , les fréquences naturelles des mouvements selon X et Y sont dans un rapport 2, et par conséquent nous pouvons considérer des solutions périodiques dont les fréquences donnent lieu à une résonance 2 : 1. Nous verrons, cependant, que l'accrochage est ici moins « fort » que celui produit par la quasi-dégénérescence, analysé dans le chapitre 7. Cela veut dire, en particulier, que nous devons abandonner l'approximation des oscillateurs de Duffing employée pour décrire le potentiel.

Chapitre 8

Synchronisation par résonance 2 : 1

8.1 Introduction

Nous avons trouvé que le chaos est inhibé dans le réseau carré bleu pour les valeurs du paramètre α qui mènent à une synchronisation. Dans le chapitre 6, nous avons identifié ce phénomène de synchronisation pour les α correspondant à des résonances entre les fréquences d'oscillation au fond du puits, c'est à dire les « fréquences naturelles » ω_{0X} et ω_{0Y} :

$$\omega_{0X}^2 = 1 - \alpha \quad (8.1a)$$

$$\omega_{0Y}^2 = 1 + \alpha \quad (8.1b)$$

Parmi ces résonances, celles qui conduisent à une inhibition plus forte du chaos sont la résonance 1 : 1, qui apparaît pour $\alpha \ll 1$, et la résonance 2 : 1, pour $\alpha = 0.6$. Le premier cas a été étudié dans le chapitre 7, et nous présentons ici le traitement analytique du second cas, pour lequel $2\omega_{0X} = \omega_{0Y}$.

Dans le chapitre 5, nous avons décrit de façon synthétique la dynamique trouvée pour le cas $\alpha = 0.6$, à partir des solutions numériques. Les cartes de sections de Poincaré (SP) pour différentes énergies montraient une dominance de l'accrochage $\omega_Y = 2\omega_X$ (voir figure 5.12), et une solution chaotique apparaissait seulement de façon restreinte au voisinage de la séparatrice, pour des grandes énergies¹. Nous y avons examiné en particulier une solution accrochée satisfaisant $\omega_Y = 2\omega_X$, proche d'un point fixe. Le spectre de ce mouvement confirmait l'accrochage et l'existence d'harmoniques d'amplitude non négligeable (figure 5.13). Ces résultats numériques seront comparés dans le présent chapitre avec les calculs analytiques que nous allons développer.

Le potentiel complet du réseau carré bleu est (figures 8.1a et 8.1b, pour $\alpha = 0.6$) :

$$U(X, Y) = 1 + \alpha(\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y \quad (8.2)$$

Dans le chapitre 7, le traitement analytique de ce réseau au voisinage de zéro considérait l'approximation de deux oscillateurs de Duffing couplés. Ce développement limité au quatrième ordre du potentiel donne :

$$U \simeq \omega_{0X}^2 \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} \right) + \omega_{0Y}^2 \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^4}{24} \right) - \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (8.3)$$

Ce potentiel est représenté en figure 8.1c et 8.1d, pour $\alpha = 0.6$. Nous verrons dans la suite que pour étudier la résonance 2 : 1, il est nécessaire de développer le potentiel jusqu'au sixième ordre (figures 8.1e et 8.1f, pour $\alpha = 0.6$) :

1. D'ailleurs, dans le chapitre 6, nous avons montré que le chaos reste limité à cette région même au seuil d'énergie pour sortir du puits $E_T(0.6) = 0.64$ (figure 6.2g).

$$\begin{aligned}
U \simeq & \omega_{0X}^2 \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^4}{24} + \frac{X^6}{720} \right) + \omega_{0Y}^2 \left(\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^4}{24} + \frac{Y^6}{720} \right) - \frac{X^2 Y^2}{4} \\
& + \frac{X^4 Y^2}{48} + \frac{X^2 Y^4}{48}
\end{aligned} \tag{8.4}$$

Le potentiel exact et les deux approximations sont représentés dans la figure 8.1, afin de montrer les intervalles de validité de ces dernières. Nous montrons aussi un agrandissement (figure 8.1b, d et f) de la région du puits $U = 0$, en $(X, Y) = (0, 0)$. Pour faciliter les comparaisons, l'échelle de gris est la même pour l'ensemble de la figure 8.1.

Pour estimer les intervalles où ces estimations sont acceptables, nous avons pris en guise de limite supérieure les points pour lesquelles la différence ΔU entre les potentiels complet et approché devient $\Delta U \approx 0.01$. En considérant que le seuil d'énergie pour sortir du puits, pour $\alpha = 0.6$, est $E_T(0.6) = 0.64$, cette limite correspond à $\Delta U \approx 0.02 \times E_T$. Selon ce critère, l'approximation au quatrième ordre est donc acceptable sur la direction X dans l'intervalle $-1.6 \lesssim X \lesssim 1.6$, et sur la direction Y dans l'intervalle $-1.3 \lesssim Y \lesssim 1.3$. L'approximation au sixième ordre étend ces intervalles de validité à $-2.3 \lesssim X \lesssim 2.3$ et $-2 \lesssim Y \lesssim 2$, respectivement. Ces valeurs excèdent la position des points cols (pour lesquels $U(X_T, Y_T) = E_T$), situés en $\cos X_T = -\cos Y_T = -0.6$: $X_T \approx \pm 2.21$, $Y_T \approx \pm 0.93$. L'approximation au sixième ordre semble donc bien représenter le potentiel pour les énergies correspondant à un mouvement dans le puits.

8.2 Calculs analytiques

8.2.1 Solutions accrochées

8.2.1.1 Approximation au quatrième ordre

Les équations du mouvement pour le potentiel du réseau carré bleu développé au quatrième ordre ont été obtenues dans le chapitre 6 :

$$F_X = -\omega_{0X}^2 \left(X - \frac{X^3}{6} \right) + \frac{XY^2}{2} \tag{8.5a}$$

$$= \ddot{X} \tag{8.5b}$$

$$F_Y = -\omega_{0Y}^2 \left(Y - \frac{Y^3}{6} \right) + \frac{YX^2}{2} \tag{8.5c}$$

$$= \ddot{Y} \tag{8.5d}$$

Nous considérons des solutions périodiques dont les fréquences donnent lieu à une résonance 2 : 1. En employant la même notation qu'au chapitre 7, nous posons :

$$X = X_0 \cos(\omega t + \psi_X) \tag{8.6a}$$

$$Y = Y_0 \cos 2(\omega t + \psi_Y) \tag{8.6b}$$

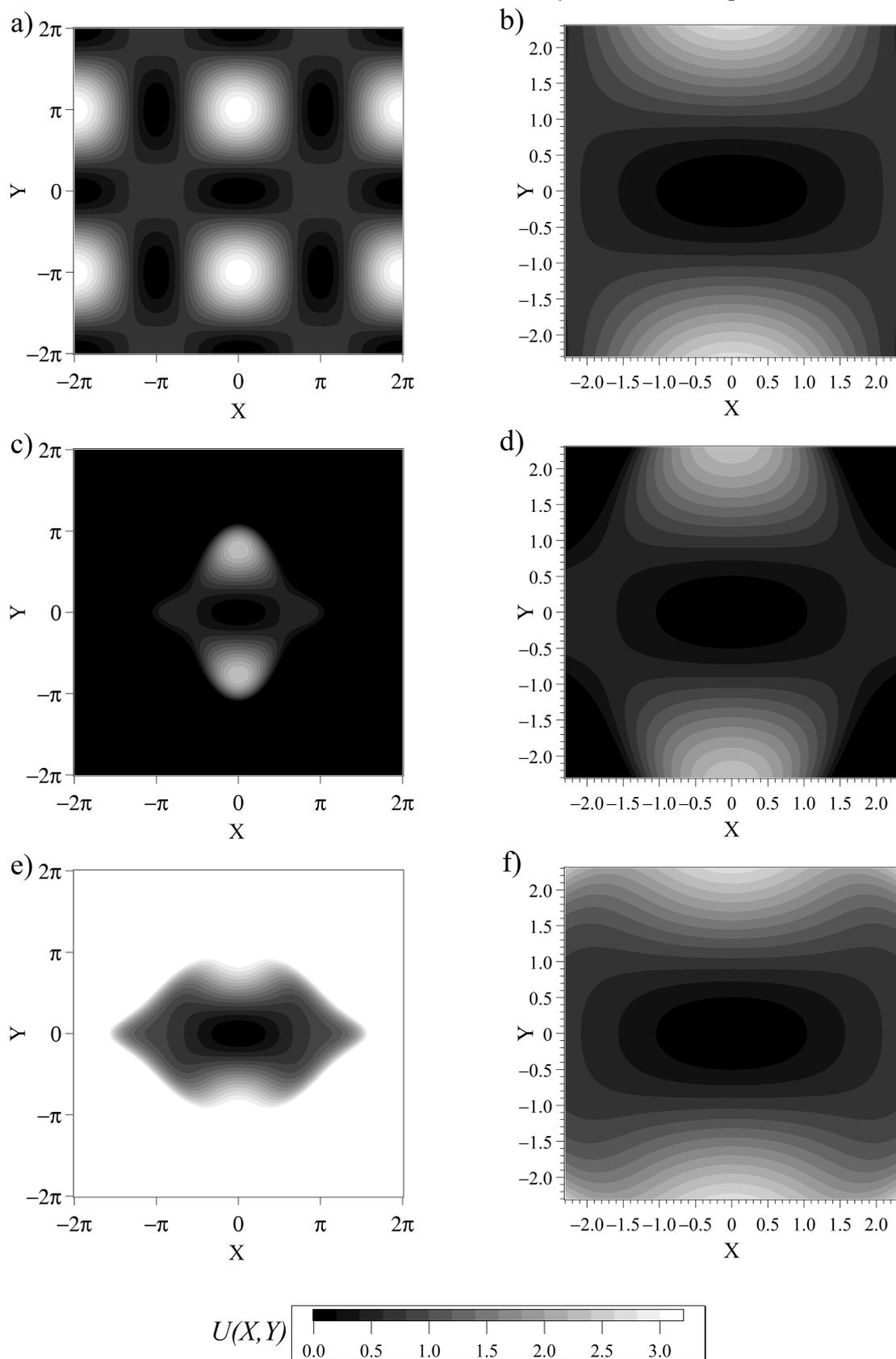


FIGURE 8.1 – Réseau carré bleu pour $\alpha = 0.6$: a,b) U complet (éq. 8.2), c,d) U approché au 4ème ordre (éq. 8.3) e,f) U approché au 6ème ordre (éq. 8.4). Les figures b, d et f montrent un agrandissement de la région du puits $U(0,0) = 0$. L'échelle de gris est la même pour tous les graphes.

où X_0, Y_0, ψ_X, ψ_Y sont des constantes. Nous introduisons ces solutions dans les équations du mouvement (8.5). D'autre part, nous développons les forces F_X et F_Y dans leurs composantes de Fourier. De l'égalité de ces deux expressions, et en négligeant les termes correspondant aux harmoniques supérieurs, nous obtenons les relations suivantes pour la fréquence ω_1 des solutions :

$$\omega_1^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8}\right) - \frac{Y_0^2}{4} \quad (8.7a)$$

$$= \frac{\omega_{0Y}^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8}\right) - \frac{X_0^2}{16} \quad (8.7b)$$

Nous en déduisons cette relation entre les deux amplitudes du mouvement X_0 et Y_0 :

$$4\omega_{0X}^2 - \omega_{0Y}^2 = X_0^2 \frac{(2\omega_{0X}^2 - 1)}{4} - Y_0^2 \frac{(\omega_{0Y}^2 - 8)}{8} \quad (8.8)$$

Nous remarquons que les différences de phase disparaissent. Nous avons donc une infinité de solutions équivalentes, chacune pour une valeur distincte de la différence de phase $\psi_X - \psi_Y$. L'atome est dans un équilibre indifférent [Rothen1999] et une petite perturbation peut favoriser l'une des solutions. Or, nous savons que le mouvement sinusoïdal proposé (éq. 8.6) n'est qu'une approximation. Les termes du troisième ordre créent des harmoniques, dont il faudra tenir compte pour faire apparaître les différences de phase. Une solution au troisième ordre serait de la forme :

$$X = X_0 \cos(\omega_1 t + \psi_X) - \frac{X_0^3}{192} \cos 3(\omega_1 t + \psi_X) \quad (8.9a)$$

$$- \frac{X_0 Y_0^2}{192 \omega_{0X}^2} [3 \cos(3\omega_1 t - \psi_X + 4\psi_Y) + \cos(5\omega_1 t + \psi_X + 4\psi_Y)]$$

$$Y = Y_0 \cos 2(\omega_1 t + \psi_Y) - \frac{Y_0^3}{192} \cos 6(\omega_1 t + \psi_Y) \quad (8.9b)$$

$$- \frac{X_0^2 Y_0}{24 \omega_{0Y}^2} [\cos(4\omega_1 t + 2\psi_X + 2\psi_Y) - 3 \cos 2(\psi_Y - \psi_X)]$$

En introduisant cette solution dans les équations (8.5), nous trouvons une contrainte sur les phases par la relation $\sin 4(\psi_X - \psi_Y) = 0$. Toutefois, cette procédure n'est pas valable parce que, pour tenir compte des couplages entre les harmoniques et décrire leur influence sur le fondamental, il nous faut introduire des termes du cinquième ordre. Pour rester cohérents, nous devons donc ajouter dans l'énergie potentielle les termes d'ordre 6 et, dans les forces, les termes d'ordre 5.

8.2.1.2 Approximation au sixième ordre

Le potentiel développé au sixième ordre est donné par l'équation (8.4). Nous en déduisons les équations du mouvement suivantes :

$$\ddot{X} = -\omega_{0X}^2 \left(X - \frac{X^3}{6} + \frac{X^5}{120} \right) + \frac{XY^2}{2} - \frac{X^3 Y^2}{12} - \frac{XY^4}{24} \quad (8.10a)$$

$$\ddot{Y} = -\omega_{0Y}^2 \left(Y - \frac{Y^3}{6} + \frac{Y^5}{120} \right) + \frac{YX^2}{2} - \frac{Y^3 X^2}{12} - \frac{YX^4}{24} \quad (8.10b)$$

Dans ces relations, nous introduisons la solution au troisième ordre donnée par l'équation (8.9), en relâchant la contrainte sur X_0 et Y_0 ainsi que sur la fréquence ω_1 du mouvement. Nous n'avons pas besoin d'ajouter les termes du cinquième ordre à la solution proposée (éq. 8.9), puisque les harmoniques correspondants n'apparaîtront ensuite que dans des termes d'ordre supérieur à 5. Nous pouvons maintenant calculer, à partir du nouveau développement de Fourier des forces, les corrections sur les harmoniques ou les nouvelles composantes qui apparaissent. Toutefois, les termes de couplage entre les harmoniques de la solution (8.9) sont aussi d'ordre supérieur à 5, et donc nous les négligeons. Finalement, nous retrouvons la condition :

$$\sin 4(\psi_X - \psi_Y) = 0 \quad (8.11)$$

D'où nous pouvons maintenant déduire l'existence de 4 solutions, chacune avec un verrouillage des phases donné par :

$$\psi_Y = \psi_X \quad (8.12a)$$

$$\psi_Y = \psi_X + \frac{\pi}{2} \quad (8.12b)$$

$$\psi_Y = \psi_X + \frac{\pi}{4} \quad (8.12c)$$

$$\psi_Y = \psi_X - \frac{\pi}{4} \quad (8.12d)$$

8.2.1.3 Solution $\psi_Y = \psi_X$

Nous considérons d'abord la solution $\psi_Y = \psi_X$. Notons qu'un mouvement avec $\psi_Y = \psi_X + \pi$ donne exactement cette même solution (voir éq. 8.9). D'autre part, la solution $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ se déduit de la solution $\psi_Y = \psi_X$ par un changement du signe de Y_0 , donc nous n'avons pas besoin de la considérer séparément.

Jusqu'au cinquième ordre des amplitudes, nous trouvons les relations suivantes pour la fréquence d'accrochage ω_1 de cette solution :

$$\omega_1^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8} + \frac{3X_0^4}{512} \right) - \frac{Y_0^2}{4} + Y_0^4 \frac{\left(1 + \frac{1}{6\omega_{0X}^2} \right)}{64} + X_0^2 Y_0^2 \frac{5 \left(1 - \frac{1}{3\omega_{0X}^2} \right)}{128} \quad (8.13a)$$

$$= \frac{\omega_{0Y}^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8} + \frac{3Y_0^4}{512} \right) - \frac{X_0^2}{16} + X_0^4 \frac{5 \left(1 - \frac{1}{3\omega_{0X}^2} \right)}{1024} + X_0^2 Y_0^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{6\omega_{0X}^2} \right)}{128} \quad (8.13b)$$

Nous pouvons en déduire la relation entre les amplitudes du mouvement :

$$\begin{aligned} 4\omega_{0X}^2 - \omega_{0Y}^2 &= X_0^2 \frac{(2\omega_{0X}^2 - 1)}{4} - Y_0^2 \frac{(\omega_{0Y}^2 - 8)}{8} - X_0^2 Y_0^2 \frac{\left(1 - \frac{11}{24\omega_{0Y}^2} \right)}{8} \\ &\quad + X_0^4 \frac{\left(\frac{5}{2} - 3\omega_{0X}^2 - \frac{5}{6\omega_{0X}^2} \right)}{128} - Y_0^4 \frac{\left(8 - \frac{3}{4}\omega_{0Y}^2 + \frac{4}{3\omega_{0X}^2} \right)}{128} \end{aligned} \quad (8.14)$$

Dans la figure 8.2a, nous traçons l'amplitude d'oscillation Y_0 en fonction de X_0 , selon l'expression (8.14). La relation entre ces amplitudes est $X_0 \approx 4Y_0$ pour des faibles valeurs. En revanche, Y_0 croît plus vite que $X_0/4$ et pour $X_0 = 2.3$, c'est à dire pour des

mouvements proches du bord du puits, on a $X_0 \approx 3Y_0$. Nous avons introduit la relation (8.14) entre les amplitudes dans l'équation (8.13a), pour obtenir la fréquence $\omega_1(X_0)$, tracée en figure 8.2b. La courbe pour ω_1 a une tangente de pente nulle à l'origine et la fréquence décroît pour des amplitudes croissantes. En effet, cette fréquence s'annulerait pour $X_0 \approx 2.77$ (où les amplitudes satisfont $X_0 = 3Y_0$), mais cette valeur est dehors de l'intervalle que nous considérons : nous savons déjà que notre approximation pour le potentiel ne reproduit le vrai potentiel que pour $X_0 \lesssim 2.3$.

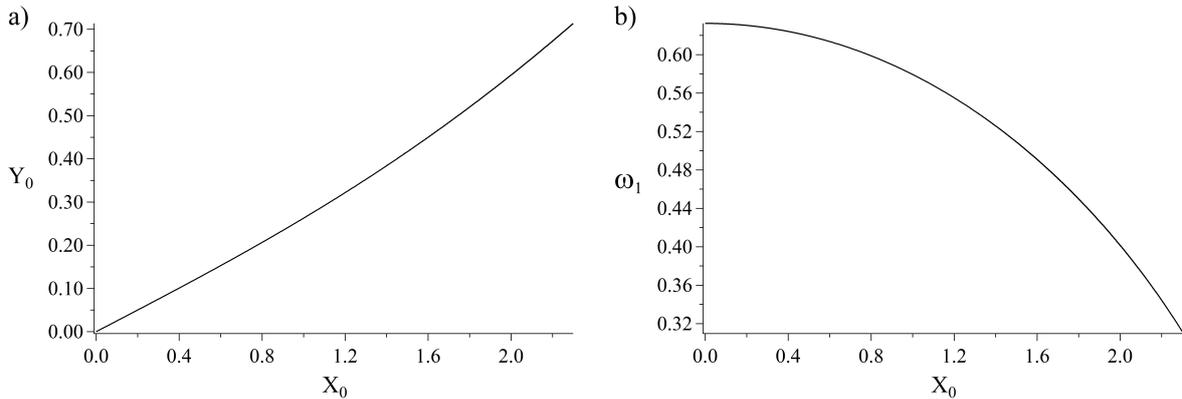


FIGURE 8.2 – Solution $\psi_Y = \psi_X$, pour $\alpha = 0.6$: a) amplitude Y_0 du mouvement accroché (éq. 8.14) en fonction de l'amplitude X_0 ; b) carré de la fréquence ω_1 en fonction du carré de X_0 (éq. 8.13a).

Énergie de la solution $\psi_Y = \psi_X$

Nous calculons l'énergie totale E_1 du mouvement accroché à partir de sa moyenne temporelle, comme nous l'avons fait dans le chapitre 7. L'expression ainsi obtenue est :

$$\begin{aligned}
 E_1 = & X_0^2 \frac{\omega_{0X}^2}{2} + Y_0^2 \frac{\omega_{0Y}^2}{2} - X_0^2 Y_0^2 \frac{(1 + \omega_{0X}^2)}{8} - X_0^4 \frac{3\omega_{0X}^2}{64} - Y_0^4 \frac{(1 + \frac{\omega_{0Y}^2}{16})}{4} \\
 & + X_0^2 Y_0^4 \frac{(3 - \frac{379}{576\omega_{0X}^2})}{64} + X_0^4 Y_0^2 \frac{(\frac{63}{8} - \frac{37}{18\omega_{0X}^2} + 3\omega_{0X}^2)}{512} \\
 & + X_0^6 \frac{17\omega_{0X}^2}{8192} + Y_0^6 \frac{(1 + \frac{2}{3\omega_{0Y}^2} + \frac{5}{128}\omega_{0Y}^2)}{64}
 \end{aligned} \tag{8.15}$$

Cette équation, en introduisant la relation (8.14) entre les amplitudes X_0 et Y_0 , peut s'écrire comme une fonction $E_1(X_0)$. L'expression obtenue est compliquée et trop longue pour être donnée ici. La courbe est montrée dans la figure 8.3. Nous remarquons que pour une amplitude X_0 menant au col ($X_0 \approx 2.21$) nous obtenons bien une énergie $E_1 \approx 0.65$, qui est très proche du seuil $E_T = 0.64$.

Stabilité de la solution $\psi_Y = \psi_X$

Nous avons réalisé une analyse de stabilité linéaire de la solution périodique accrochée $\psi_Y = \psi_X$, en introduisant des perturbations sur les amplitudes et les phases de

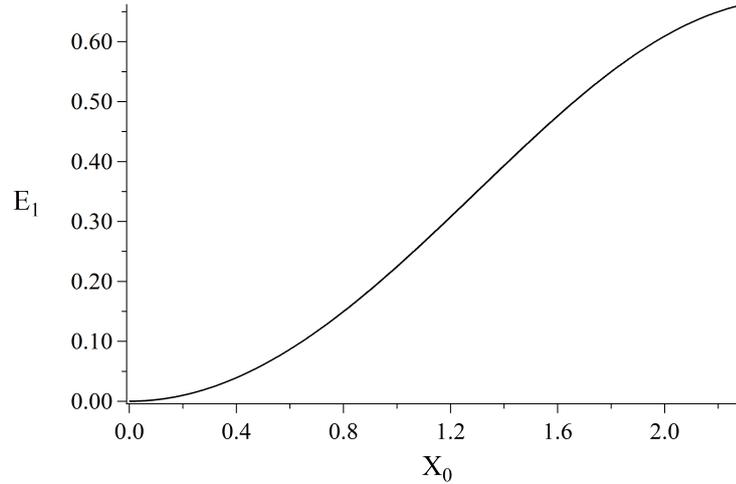


FIGURE 8.3 – Solution $\psi_Y = \psi_X$, pour $\alpha = 0.6$: énergie E_1 du mouvement (éq. 8.15) en fonction de l'amplitude X_0 .

l'équation (8.9b). Cette analyse permet de montrer que cette solution est stable. Par conséquent, la solution $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ – qui suit le même comportement – est, elle aussi, stable.

8.2.1.4 Solutions $\psi_Y = \psi_X \pm \pi/4$

La même analyse de stabilité, effectuée pour les solutions périodiques accrochées $\psi_Y = \psi_X \pm \pi/4$ permet de montrer que ces deux solutions sont instables. Par conséquent, elles n'influencent aucune des trajectoires quasi-périodiques dans l'espace des phases et nous ne nous y intéressons pas ici.

8.2.2 Solutions triviales

Le système d'équations (8.5) admet aussi les solutions triviales représentant un mouvement selon une des coordonnées : $Y_0 = 0$ et $X_0 = 0$. Pour rester cohérent avec le traitement des solutions accrochées, nous approcherons ce mouvement à partir du potentiel développé jusqu'au sixième ordre. En faisant les calculs des solutions triviales avec les équations du mouvement (8.10), nous obtenons les résultats décrits ci-dessous.

8.2.2.1 Fréquence principale des solutions triviales

La fréquence d'oscillation ω_X pour la solution $Y_0 = 0$ est donnée par :

$$\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8} + \frac{3X_0^4}{512} \right) \quad (8.16)$$

De façon équivalente, la fréquence d'oscillation ω_Y pour la solution $X_0 = 0$ est donnée par :

$$\omega_Y^2 = \frac{\omega_{0Y}^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8} + \frac{3Y_0^4}{512} \right) \quad (8.17)$$

Nous avons tracé la fréquence ω_X (éq. 8.16) en fonction de l'amplitude du mouvement X_0 , dans la figure 8.4a. Nous avons aussi tracé, en pointillés, cette même relation sans la correction $3X_0^4/512$ qui apparaît dans l'équation (8.16). Cette correction vient des termes d'ordre 6 dans le potentiel, et donc d'ordre 5 dans les équations du mouvement. La relation sans correction est celle employée dans le chapitre 7 pour les solutions triviales. Nous voyons dans la figure 8.4a que les fréquences avec et sans la correction diffèrent de 1% pour des amplitudes $X_0 \approx 1.3$. Cette différence devient de l'ordre de 15% pour $X_0 \approx 2.21$, c'est à dire pour le bord du puits. Cette comparaison montre que, pour des oscillations d'amplitude supérieure à 1.3, nous devons effectivement introduire la correction pour mieux calculer la fréquence du mouvement (comme nous l'avaient suggéré les estimations de la section 1).

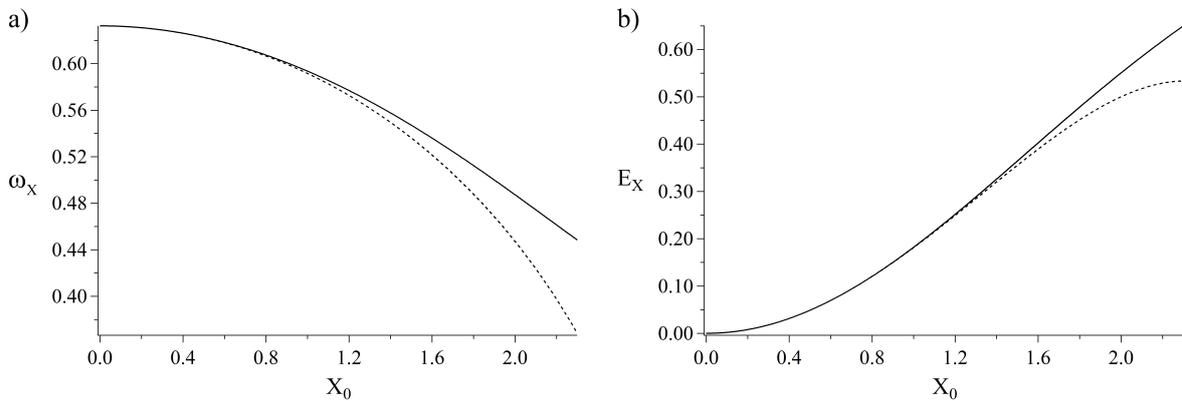


FIGURE 8.4 – Solution $Y_0 = 0$, pour $\alpha = 0.6$: a) fréquence ω_X (éq. 8.16) et b) énergie E_X (éq. 8.18) en fonction de l'amplitude du mouvement X_0 . Les courbes en pointillés représentent les approximations pour ω_X et pour E_X sans la correction introduite par les termes d'ordre 6.

8.2.2.2 Énergie des solutions triviales

En employant toujours le calcul de l'énergie à partir de la moyenne temporelle, l'énergie E_X du mouvement selon X est :

$$E_X = \omega_{0X}^2 \frac{X_0^2}{2} \left(1 - 3 \frac{X_0^2}{32} + \frac{145 X_0^4}{192^2} \right) \quad (8.18)$$

La solution $X_0 = 0$ donne une énergie E_Y qui aura évidemment la même forme que l'équation (8.18), avec Y_0 et ω_{0Y} au lieu de X_0 et ω_{0X} , respectivement.

L'énergie E_X est tracée en figure 8.4b, en fonction de X_0 . Nous avons aussi tracé la courbe en pointillés représentant l'approximation pour l'énergie sans l'ordre 6, employée dans le chapitre 7. Ces courbes diffèrent de 1% pour des amplitudes $X_0 \approx 1.3$, comme c'était le cas pour la fréquence. Nous constatons que pour des amplitudes grandes, proches du point col, les corrections introduites par les termes d'ordre 6 dans le potentiel sont bien nécessaires : elles permettent de mieux décrire les solutions triviales dans notre intervalle d'amplitudes, élargi par rapport au chapitre précédent.

8.2.2.3 Stabilité des solutions triviales

Nous avons aussi effectué une analyse de stabilité linéaire pour les deux solutions triviales. Cette analyse permet de montrer que ces deux solutions, $X_0 = 0$ et $Y_0 = 0$, sont stables pour toute énergie. Ces résultats montrent une différence par rapport à ce que nous avons vu pour $\alpha \ll 1$: dans le cas de la quasi-dégénérescence, la solution $Y_0 = 0$ devient instable au dessus d'une certaine valeur de l'énergie, valeur qui correspond à l'apparition de solutions accrochées.

8.2.3 Résumé

Les caractéristiques des solutions aux équations du mouvement (8.10) analysées dans cette section, sont résumées dans le tableau 8.1. Pour rappel, la forme générale des solutions périodiques est donnée par l'équation (8.9).

8.3 Résultats

Les simulations numériques du système pour $\alpha = 0.6$ sont comparées dans cette section aux calculs de notre approximation au sixième ordre du potentiel. Nous avons obtenu des résultats numériques pour des énergies à partir de $E = 0.01$, jusqu'au seuil $E_T(0.6) = 0.64$. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 5, une solution chaotique apparaît pour $E = 0.56$, et à partir de $E = 0.62$ le chaos dans la région de la séparatrice ne permet plus d'étiqueter les trajectoires quasi-périodiques. De plus, le spectre de ces dernières commence à avoir plusieurs pics non négligeables qui compliquent la caractérisation, surtout celle des solutions accrochées. Nous avons donc travaillé sur les résultats numériques jusqu'à $E = 0.62$.

8.3.1 Cartes de sections de Poincaré

Nous savons déjà que pour $\alpha = 0.6$, l'étendue des solutions accrochées dans la carte de SP augmente avec l'énergie. Plusieurs cartes de SP ont déjà été montrées dans les chapitres 5 et 6, mais pour bien identifier les points fixes trouvés analytiquement, nous montrons en figure 8.5 les SP pour une valeur d'énergie intermédiaire, $E = 0.3$. Nous trouvons six solutions périodiques :

- Les deux solutions triviales $X_0 = 0$ et $Y_0 = 0$ sont, respectivement, un point elliptique en bas de la figure 8.5b et une droite en haut, non affichée à cause du choix de l'hyper-plan $\dot{Y} = 0+$ pour les SP. Cette droite pourrait se voir comme un point elliptique avec un choix $\dot{X} = 0+$, comme nous l'avons fait dans le chapitre 7. Nous remarquons que dans la configuration $\alpha \ll 1$, le point $Y = 0$ devenait hyperbolique.
- La solution $\psi_Y = \psi_X$ est le point elliptique au centre de la figure 8.5b, qui correspond en fait aux deux points en haut et en bas de la figure 8.5c.
- La solution $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ est représentée par les points elliptiques aux bords gauche et droit des figures 8.5b et 8.5c.
- Les deux solutions $\psi_Y = \psi_X \pm \pi/4$ apparaissent comme des points hyperboliques, entre les deux solutions décrites ci-dessus, à gauche et à droite de la figure 8.5b.

solution	stabilité	porteuse	énergie	amplitudes
$X_0 = 0$	stable	$\omega_Y^2 = \frac{\omega_{0Y}^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8} + \frac{3Y_0^4}{512} \right)$	$E_Y = \omega_{0Y}^2 \frac{Y_0^2}{2} \left(1 - 3\frac{Y_0^2}{32} + \frac{145Y_0^4}{192^2} \right)$	$X_0 = 0$
$Y_0 = 0$	stable	$\omega_X^2 = \omega_{0X}^2 \left(1 - \frac{X_0^2}{8} + \frac{3X_0^4}{512} \right)$ figure 8.4a	$E_X = \omega_{0X}^2 \frac{X_0^2}{2} \left(1 - 3\frac{X_0^2}{32} + \frac{145X_0^4}{192^2} \right)$ figure 8.4b	$Y_0 = 0$
$\psi_Y = \psi_X$ et $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$	stables	$\omega_1^2 = \frac{\omega_{0Y}^2}{4} \left(1 - \frac{Y_0^2}{8} + \frac{3Y_0^4}{512} \right) - \frac{X_0^2}{16} + X_0^4 \frac{5 \left(1 - \frac{1}{3\omega_{0X}^2} \right)}{1024} + X_0^2 Y_0^2 \frac{\left(1 + \frac{1}{6\omega_{0X}^2} \right)}{128}$ figure 8.2b	$E_1 = X_0^2 \frac{\omega_{0X}^2}{2} + Y_0^2 \frac{\omega_{0Y}^2}{2} - X_0^4 \frac{3\omega_{0X}^2}{64} - Y_0^4 \frac{\left(1 + \frac{\omega_{0Y}^2}{16} \right)}{4} - X_0^2 Y_0^2 \frac{\left(1 + \omega_{0X}^2 \right)}{8} + X_0^2 Y_0^4 \frac{\left(3 - \frac{379}{576\omega_{0X}^2} \right)}{64} + X_0^4 Y_0^2 \frac{\left(\frac{63}{8} - \frac{37}{18\omega_{0X}^2} + 3\omega_{0X}^2 \right)}{512} + X_0^6 \frac{17\omega_{0X}^2}{8192} + Y_0^6 \frac{\left(1 + \frac{2}{3\omega_{0Y}^2} + \frac{5}{128}\omega_{0Y}^2 \right)}{64}$ figure 8.3	$4\omega_{0X}^2 - \omega_{0Y}^2 = X_0^2 \frac{(2\omega_{0X}^2 - 1)}{4}$ $-Y_0^2 \frac{(\omega_{0Y}^2 - 8)}{8} - X_0^2 Y_0^2 \frac{\left(1 - \frac{11}{24\omega_{0Y}^2} \right)}{8}$ $+ X_0^4 \frac{\left(\frac{5}{2} - 3\omega_{0X}^2 - \frac{5}{6\omega_{0X}^2} \right)}{128}$ $- Y_0^4 \frac{\left(8 - \frac{3}{4}\omega_{0Y}^2 + \frac{4}{3\omega_{0X}^2} \right)}{128}$ figure 8.2a
$\psi_Y = \psi_X \pm \pi/4$	instables	-	-	-

TABLE 8.1 – Caractéristiques principales des solutions périodiques (8.9) aux équations du mouvement (8.10).

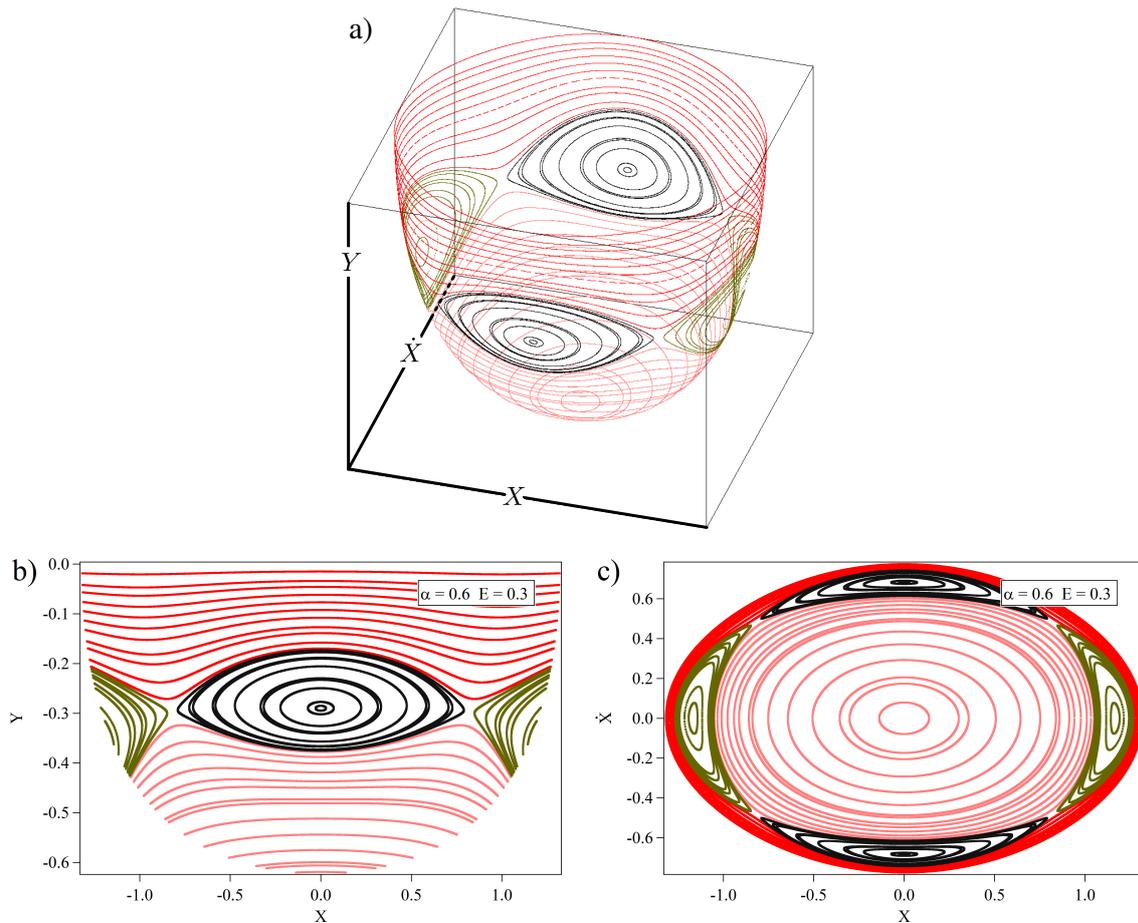


FIGURE 8.5 – Sections de Poincaré pour $\alpha = 0.6$ et pour $E = 0.3$: a) espace (X, Y, \dot{X}) , b) plan XY , c) plan $X\dot{X}$.

Les quatre premières solutions sont stables et elles sont présentes dans la carte de SP pour toute valeur d'énergie. En revanche, comme nous l'avons vu, la région des points instables – c'est à dire la séparatrice entre les solutions accrochées et celles décollées – devient chaotique pour des grandes énergies.

Nous remarquons que les SP des solutions périodiques accrochées $\psi_Y = \psi_X$ et $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ donnent chacune deux points (figure 8.5). Cela est dû au choix de l'hyperplan $\dot{Y} = 0+$: si nous avons choisi $\dot{X} = 0+$ pour calculer les SP, nous aurions obtenu un seul point pour chaque orbite.

Mouvement des différentes solutions périodiques Dans le chapitre 5, nous avons montré le mouvement correspondant à une SP proche du point central de la figure 8.5b, que nous avons identifié maintenant comme la solution $\psi_Y = \psi_X$. Il s'agit d'un mouvement en forme de U, alors que l'autre solution accrochée stable, $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$, correspond à un mouvement en forme d'un U inversé. Nous avons représenté, dans la figure 8.6, ces deux mouvements dans l'espace réel. Nous insistons sur le fait que les solutions $\psi_Y = \psi_X$ et $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ décrivent des mouvements différents, mais que toutes les deux ont le même comportement, que nous avons analysé dans la section précédente.

Dans la figure 8.6, nous avons aussi tracé le mouvement dans l'espace réel des deux

solutions qui correspondent à des oscillations selon X et selon Y . Notons que les quatre trajectoires tracées sont quasi-périodiques : elles ne représentent pas le point fixe, mais une solution proche. En conséquence, elles font aussi des oscillations autour de la solution périodique.

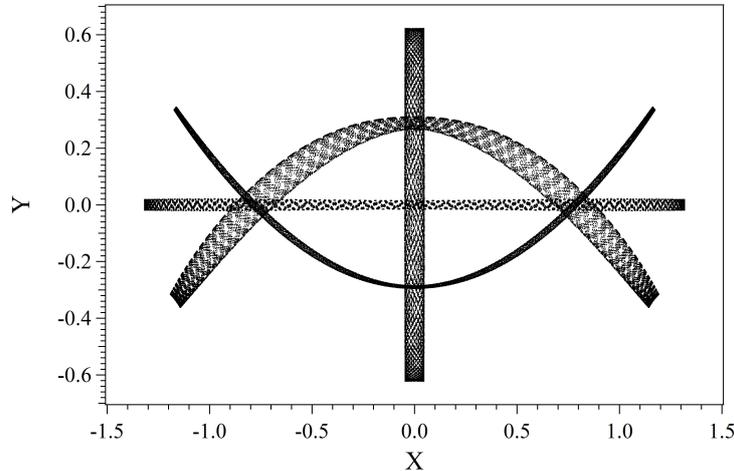


FIGURE 8.6 – Mouvement dans le plan réel Y vs X représenté par quatre trajectoires quasi-périodiques autour de chacune des solutions stables, pour $\alpha = 0.6$. Dans ce cas, nous montrons les résultats numériques pour $E = 0.3$.

8.3.1.1 Étiquetage des sections de Poincaré

Pour comparer les résultats sur les solutions périodiques, l'approche sur les calculs numériques est similaire à celle décrite dans le chapitre 7. Pour chaque valeur d'énergie considérée, nous avons traité d'abord les spectres des solutions présentes dans la carte de SP. Ensuite, en étiquetant ces SP selon leur position dans la carte, nous avons extrapolé les propriétés des spectres aux points fixes.

L'analyse des spectres emploie les routines décrites dans le chapitre 4. Dans le cas présent, nous les avons implémentées pour caractériser les pics suivants : dans la transformée de Fourier de la coordonnée X , nous avons cherché les pics correspondant à la porteuse ω , au troisième et au cinquième harmonique ; dans la transformée de Fourier de Y , la fréquence nulle, et le deuxième, le quatrième et le sixième harmonique de la porteuse. Les bandes latérales n'étant pas d'amplitude relative importante – en comparaison avec le cas $\alpha \ll 1$ – nous ne les avons pas caractérisées.

Pour l'étiquetage des trajectoires, nous avons travaillé à nouveau sur le plan XY des projections des SP. Pour chaque valeur donnée de l'énergie, chaque trajectoire est identifiée dans ce plan par une abscisse ξ : cette abscisse est donnée par l'intersection de sa SP avec une droite qui relie certains points caractéristiques (figure 8.7). Pour choisir les droites, nous avons considéré d'abord qu'il suffit de prendre la partie du plan XY qui satisfait $X > 0$. Dans cette partie, les quatre régions de SP, organisées autour des quatre solutions périodiques stables, mènent à choisir quatre segments de droite. Nous décrivons ces droites ci-dessous.

La première paire de segments de droite relie chaque solution accrochée avec le point hyperbolique (correspondant à la solution $\psi_Y = \psi_X + \pi/4$), que nous avons choisi

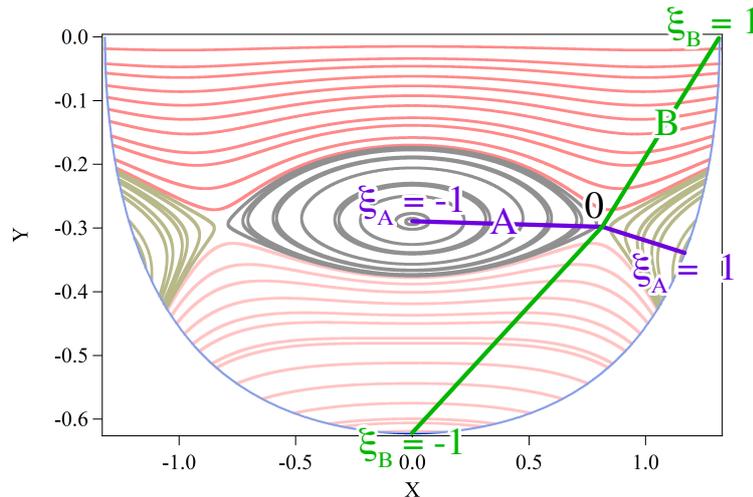


FIGURE 8.7 – Segments de droites employés dans les cartes de sections de Poincaré, pour l’étiquetage des SP avec des abscisses ξ_A et ξ_B . La courbe bleue qui limite les SP a été ajoutée pour mieux identifier les extrémités des droites.

comme l’abscisse $\xi_A = 0$. Cette paire de segments est dans la direction générale notée A dans la figure 8.7, où les segments sont en violet. Selon cette direction, nous avons attribué l’abscisse $\xi_A = -1$ au point fixe $\psi_Y = \psi_X$, et l’abscisse $\xi_A = 1$ au point fixe $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$.

La deuxième paire de segments de droite relie les solutions triviales avec le point hyperbolique, choisi comme l’abscisse $\xi_B = 0$. Ces segments sont dans la direction notée B, et ils sont en vert sur la figure 8.7. Selon cette direction, nous avons attribué l’abscisse $\xi_B = -1$ au point fixe $X_0 = 0$: ce point est $(X, Y) = (0, -\arccos(1 + \alpha - E/1 + \alpha))$. D’autre part, l’abscisse $\xi_B = 1$ a été attribuée au point fixe $Y_0 = 0$ avec X_{max} : ce point est $(X, Y) = (-\arccos(1 - \alpha - E/1 - \alpha), 0)$.

8.3.1.2 Résultats du traitement des spectres

Nous montrons les résultats de l’analyse des spectres dans les figures 8.8 à 8.11, pour quelques valeurs de l’énergie. Ces résultats, sur la fréquence et l’amplitude de certains pics, sont montrés en fonction des abscisses ξ attribuées aux SP : d’abord, selon la direction A qui relie les solutions accrochées, et ensuite selon la direction B qui relie les solutions triviales (figure 8.7). Ces figures montrent quelques exemples de données obtenues numériquement, et à partir desquelles nous allons déduire par extrapolation les résultats qui nous intéressent. Elles permettent de visualiser la variation des quantités mesurées dans la carte de SP.

Dans la figure 8.8, nous montrons les résultats des mesures de ω_X et ω_Y pour quelques énergies, selon la direction A de la carte de SP. Pour mettre en évidence l’accrochage, nous affichons ω_Y et $2\omega_X$, qui coïncident. Les fréquences ω_X et ω_Y décroissent quand nous approchons des points fixes stables, de façon similaire aux fréquences des solutions accrochées pour $\alpha \ll 1$. Nous mesurons également les harmoniques $3\omega_X$, $2\omega_Y$, $5\omega_X$ et $3\omega_Y$. Nous obtenons un comportement similaire à celui montré pour les porteuses. Dans cette figure et les suivantes, nous voyons que pour des énergies proches du seuil $E_T = 0.64$ (figures 8.8d, 8.9d, 8.10d et 8.11d, pour $E = 0.6$) il n’y a pas beaucoup

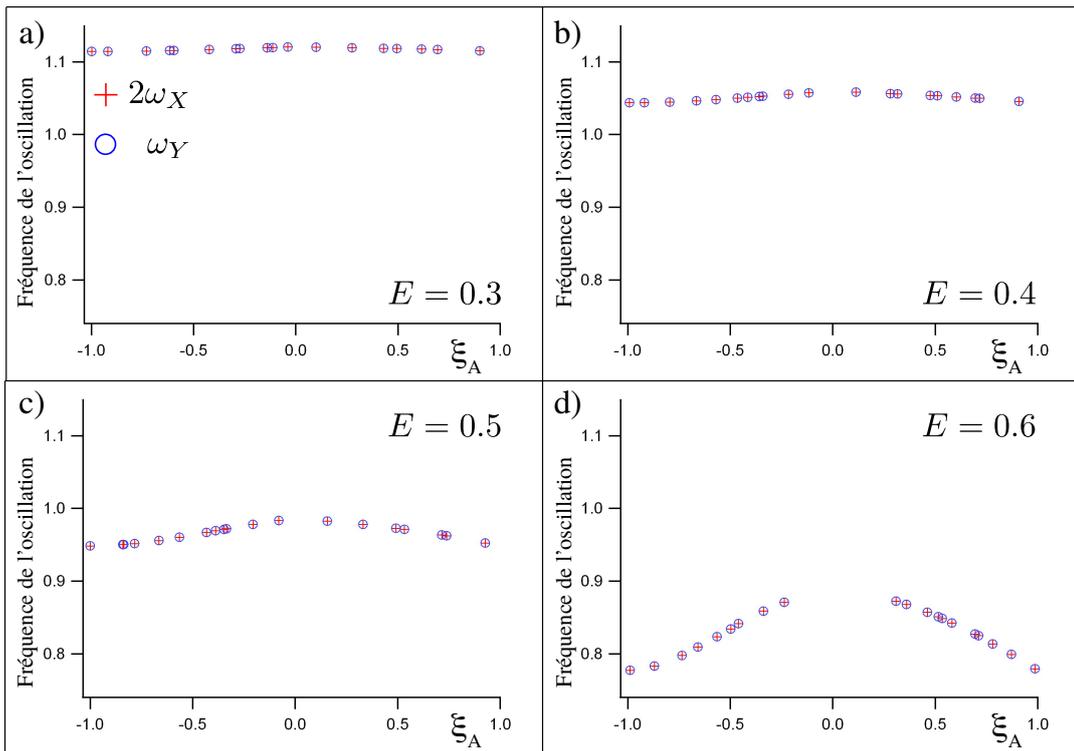


FIGURE 8.8 – Fréquences $2\omega_X$ et ω_Y en fonction de leur abscisse ξ_A selon la direction A, pour $\alpha = 0.6$ et a) $E = 0.3$, b) $E = 0.4$, c) $E = 0.5$ et d) $E = 0.6$.

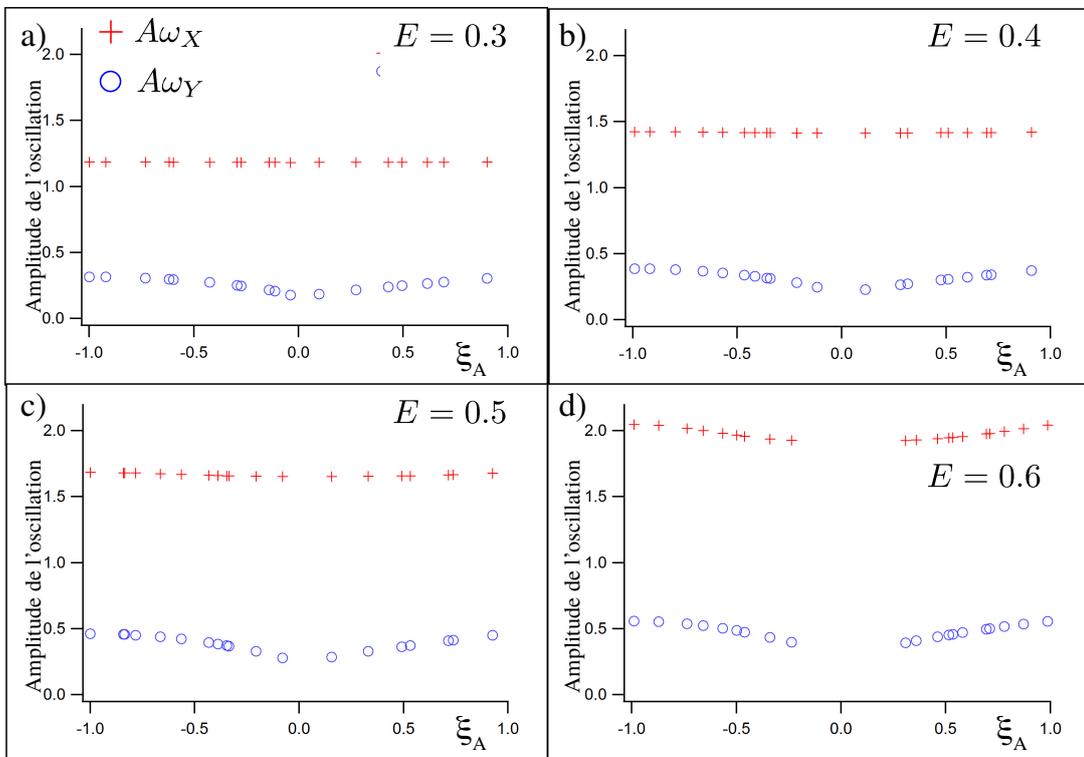


FIGURE 8.9 – Amplitudes des pics ω_X et ω_Y en fonction de leur abscisse ξ_A selon la direction A, pour $\alpha = 0.6$ et a) $E = 0.3$, b) $E = 0.4$, c) $E = 0.5$ et d) $E = 0.6$.

de points proches du point hyperbolique, d'abscisse $\xi_A = \xi_B = 0$. Cela est dû au fait que, pour des énergies proches du seuil, le chaos apparaît dans la région de ce point. La caractérisation des spectres chaotiques impliquerait un traitement plus compliqué, qui ne nous apporterait rien pour l'étude des solutions périodiques. L'absence de points autour de l'abscisse $\xi_A = \xi_B = 0$ n'est aucunement gênante, car nous savons que nous ne pouvons pas extrapoler les quantités pour la solution instable.

La figure 8.9 montre l'évolution des amplitudes des pics ω_X et ω_Y selon la direction A. Ces points montrent la décroissance du rapport entre l'amplitude $A\omega_X$ (qui peut être assimilée à X_0) et $A\omega_Y$ (soit Y_0), pour des énergies croissantes (et donc des amplitudes croissantes). Dans la figure 8.9a, pour $E = 0.3$, ce rapport est environ 4, alors que dans la figure 8.9d, pour $E = 0.6$, ce rapport est environ 3.

Dans la figure 8.10, nous montrons les résultats des mesures de ω_X et ω_Y pour quelques énergies, selon la direction B de la carte de SP. Il n'y a plus une coïncidence entre $2\omega_X$ et ω_Y , car nous sommes dans la région des solutions découplées, reliant $X_0 = 0$ avec $Y_0 = 0$. Notons cependant que l'évolution vers l'abscisse $\xi_B = 0$ mènerait à une coïncidence entre ces fréquences pour le point hyperbolique, qui est une solution accrochée. Nous remarquons aussi que l'évolution de $2\omega_X$ et ω_Y présente une discontinuité au point hyperbolique. Par ailleurs, la mesure des harmoniques $3\omega_X$, $2\omega_Y$, $5\omega_X$ et $3\omega_Y$ donne un comportement similaire à celui des porteuses.

Finalement, la figure 8.11 montre l'évolution des amplitudes des pics ω_X et ω_Y selon la direction B. Ces points évoluent vers une amplitude maximale $A\omega_Y$ et $A\omega_X$ nulle quand nous approchons de l'abscisse $\xi_B = -1$ – correspondant à la solution $X_0 = 0$ – et c'est l'inverse pour l'abscisse $\xi_B = 1$, qui correspond à la solution $Y_0 = 0$. L'évolution d'une solution à l'autre est toutefois marquée par la discontinuité à $\xi_B = 0$.

8.3.1.3 Extrapolation aux points fixes

À partir du comportement observé dans la carte de SP, nous avons ajusté avec des polynômes d'ordre 5 les différentes courbes représentant les fréquences et les amplitudes. Ces ajustements, en fonction des abscisses ξ_A et ξ_B employées dans l'étiquetage des trajectoires, permettent d'extrapoler les caractéristiques des pics aux quatre points fixes stables.

Dans les figures 8.8 à 8.11, nous voyons que les quantités évoluent continuellement avec les abscisses ξ_A et ξ_B , à l'exception du point $\xi_A = \xi_B = 0$. Cette discontinuité au point hyperbolique ne pose pas de problèmes, comme nous l'avons indiqué, parce que nous savons que nous ne pouvons pas extrapoler les quantités pour cette solution instable². En séparant les régions à droite et à gauche de $\xi_A = \xi_B = 0$, l'ensemble des points se répartissent sur des courbes lisses, faciles à ajuster et en conséquence, qui facilitent l'extrapolation. Le choix d'un polynôme d'ordre 5 excède souvent la précision nécessaire pour un bon ajustement, mais l'existence de certaines courbes plus abruptes nous a convaincu de choisir cet ordre. L'automatisation des routines d'ajustement font que même un ensemble de point répartis de façon presque linéaire est ajusté par ce type de polynômes, ce qui n'a pas de conséquences indésirables.

Les résultats des extrapolations aux points fixes seront les quantités à comparer avec nos calculs analytiques sur les solutions périodiques. Nous avons vu que l'intervalle d'énergie où cette comparaison est possible comprend toutes les valeurs dans le puits

2. Pour $\alpha \ll 1$, dans le chapitre 7, nous avons la même situation pour le point hyperbolique $Y_0 = 0$.

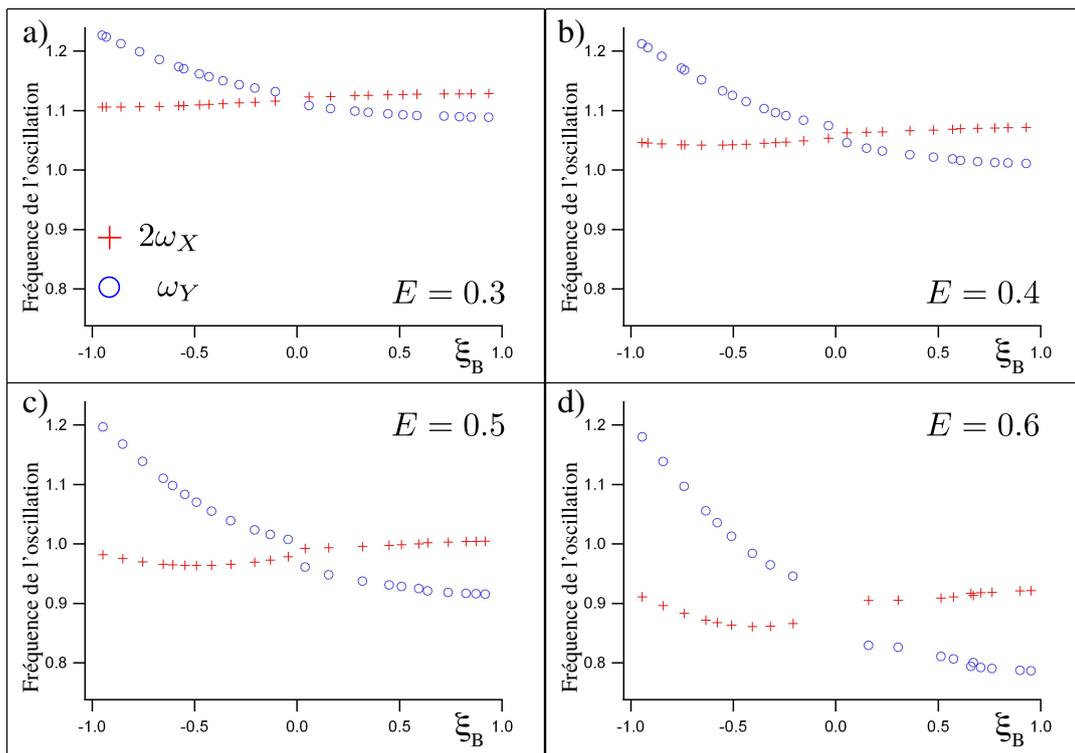


FIGURE 8.10 – Fréquences $2\omega_X$ et ω_Y en fonction de leur abscisse ξ_B selon la direction B, pour $\alpha = 0.6$ et a) $E = 0.3$, b) $E = 0.4$, c) $E = 0.5$ et d) $E = 0.6$.

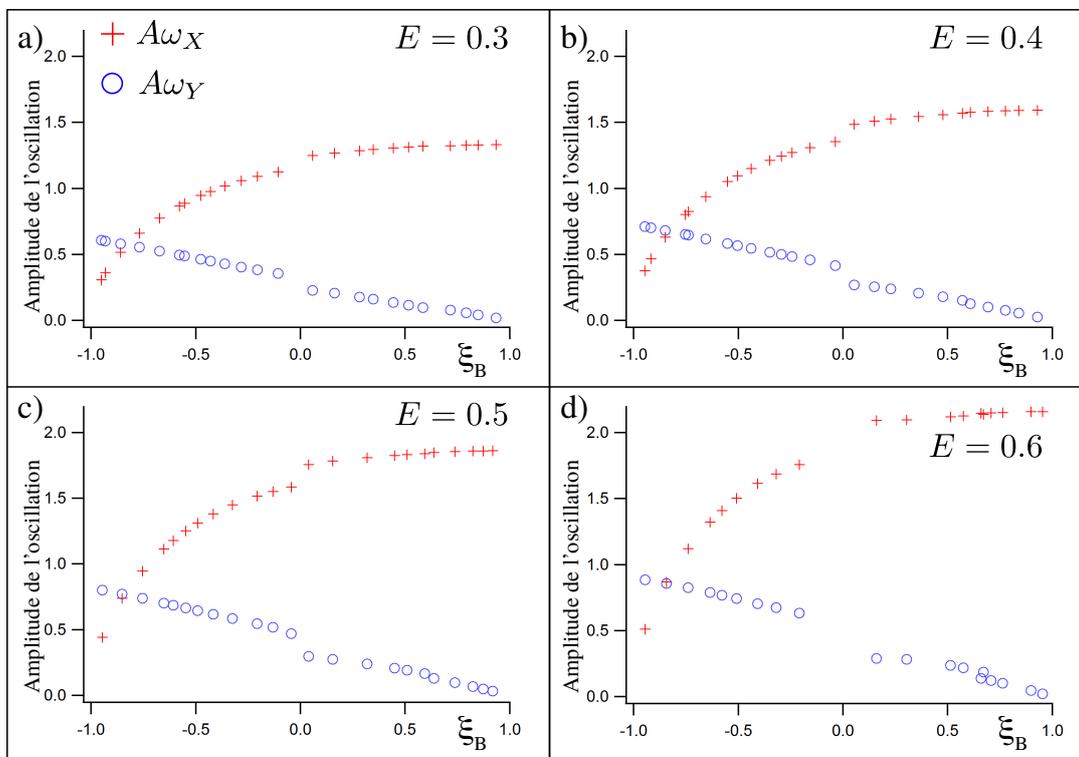


FIGURE 8.11 – Amplitudes des pics ω_X et ω_Y en fonction de leur abscisse ξ_B selon la direction B, pour $\alpha = 0.6$ et a) $E = 0.3$, b) $E = 0.4$, c) $E = 0.5$ et d) $E = 0.6$.

de potentiel : $0 < E < 0.64$. Cela a été estimé seulement en fonction de la différence entre le potentiel complet et son approximation au sixième ordre. Nous comparons maintenant les résultats de nos calculs à ceux des simulations, en utilisant toutes les équations développées dans la section 2.

8.3.2 Solutions accrochées

Nous remarquons que pour l'étiquetage des trajectoires, et ensuite dans l'extrapolation des quantités mesurées, nous avons travaillé avec les points fixes elliptiques $\psi_Y = \psi_X$ et $\psi_Y = \psi_X + \pi/2$ comme deux solutions différentes. Ce sont en effet deux solutions distinctes mais, comme nous l'avons vu, elles sont similaires car elles satisfont les mêmes relations théoriques. Comme elles se différencient seulement par un changement de signe d'une des amplitudes, nous allons analyser les résultats des deux solutions accrochées stables sans les distinguer. Par conséquent, les résultats numériques montrés dans cette section correspondent aux extrapolations aux abscisses $\xi_A = -1$ et $\xi_A = 1$ (voir figure 8.7).

8.3.2.1 Amplitudes d'oscillation X_0 et Y_0

À partir des équations qui donnent la relation entre les amplitudes du mouvement (éq. 8.14) et celle de l'énergie (éq. 8.15), nous avons obtenu la courbe Y_0^A en fonction de E , montrée en figure 8.12a. Il s'agit d'une expression longue et compliquée, qu'il n'est pas nécessaire de transcrire ici.

La courbe théorique Y_0^A est accompagnée, dans la figure 8.12a, des points Y_0 extrapolés des calculs numériques. Pour des énergies jusqu'à $E = 0.5$, la coïncidence des deux résultats est bonne. Pour des énergies plus grandes, nos approximations donnent des valeurs de l'amplitude Y_0 qui sont surestimées.

Nous avons répété la même procédure pour les amplitudes X_0 , montrées dans la figure 8.12b. Les résultats coïncident pratiquement dans le même intervalle d'énergie que pour l'amplitude selon Y . Dans ce cas, pour $E > 0.5$, nos approximations sous-estiment les valeurs de X_0 . Pour les deux amplitudes d'oscillation, le bon accord entre les résultats se vérifie dans une région très grande du puits de potentiel, proche du point col.

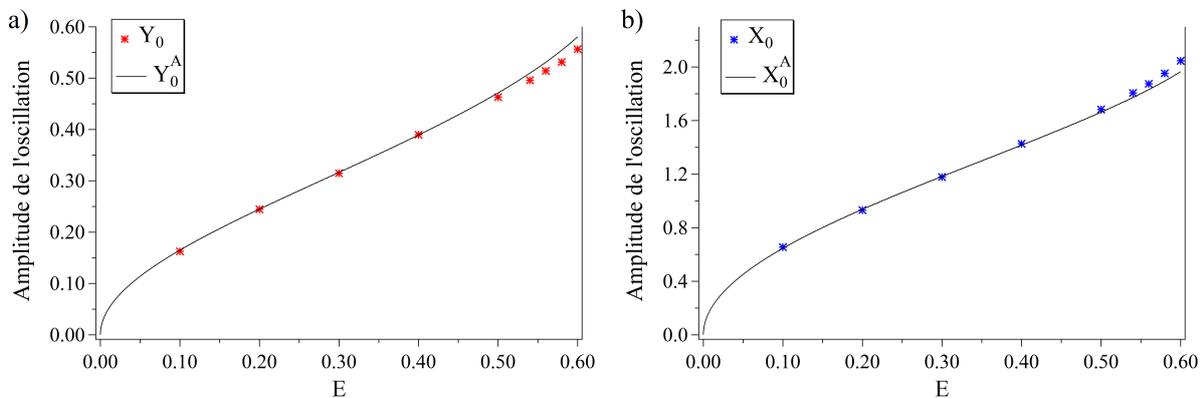


FIGURE 8.12 – Solution accrochée : a) amplitudes Y_0 (calculs numériques) et Y_0^A (obtenu des éq. 8.14 et 8.15) et b) amplitudes X_0 (calculs numériques) et X_0^A (obtenu des éq. 8.14 et 8.15), en fonction de l'énergie E .

8.3.2.2 Fréquence ω_1

L'expression pour la fréquence ω_1 (éq. 8.13a) et la relation entre les amplitudes du mouvement (éq. 8.14) permettent d'écrire la fréquence d'oscillation en fonction d'une des amplitudes, X_0 . Dans la figure 8.13, nous traçons cette courbe ω_1^A ainsi que les points ω_1^X et ω_1^Y , obtenus des simulations numériques. Les valeurs ω_1^X sont celles extrapolées des spectres de X , en mesurant ω_X , et sont tracées en fonction des amplitudes X_0 mesurées, elles aussi, pour ce pic. Les points ω_1^Y sont extrapolés des spectres de Y , en mesurant $\omega_Y/2$, et sont aussi tracés en fonction des X_0 mesurés.

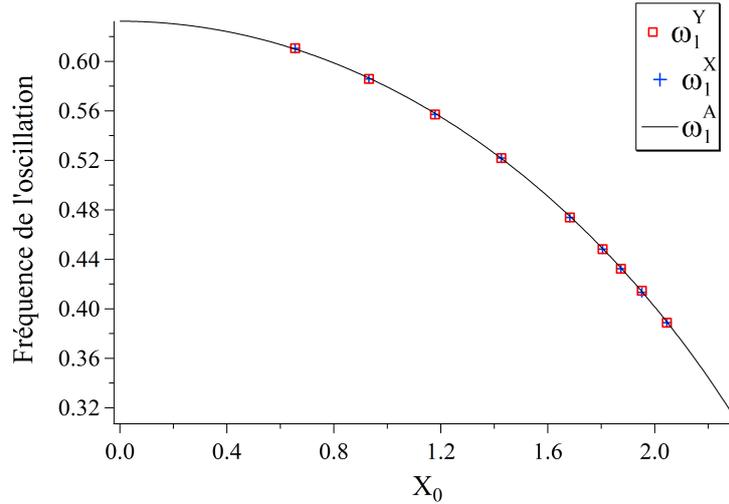


FIGURE 8.13 – Solution accrochée : fréquence ω_1^A (obtenu des éq. 8.13a et 8.14) en fonction de l'amplitude X_0 . Les points ω_1^X et ω_1^Y correspondent aux simulations.

Nous pouvons voir que les points des simulations vérifient la relation donnée par la courbe ω_1^A . Cette approximation représente bien le comportement pour tout l'intervalle d'amplitudes mesurées, qui vont presque jusqu'au bord du puits de potentiel. Cela montre d'une part que les relations (8.13) décrivent correctement la solution accrochée pour toutes les énergies. D'autre part, cela implique que les petites divergences que nous avons vu apparaître, pour des grandes amplitudes, dans la figure 8.12, sont liées à l'approximation pour l'énergie E_1 et pas à la relation entre les amplitudes qui vient de l'équation (8.13).

8.3.3 Solution $X_0 = 0$

L'obtention des résultats numériques pour les solutions triviales implique une extrapolation selon la direction B (voir figure 8.7). Dans le cas de la solution $X_0 = 0$ que nous traitons dans cette section, cela implique d'extrapoler à l'abscisse $\xi_B = -1$.

8.3.3.1 Amplitude d'oscillation Y_0

L'amplitude du mouvement théorique pour une oscillation selon Y est donnée en fonction de l'énergie grâce à l'équation (8.18) évaluée pour Y . Cette relation est tracée en figure 8.14a comme la courbe Y_0^A , et les points Y_0 correspondent aux calculs numériques extrapolés.

La coïncidence entre la courbe théorique et les simulations est remarquable, et se produit pour tout l'intervalle d'énergies considéré. Cette bonne concordance est due à l'implémentation d'une approximation au sixième ordre du potentiel, employée en fait pour pouvoir décrire l'accrochage.

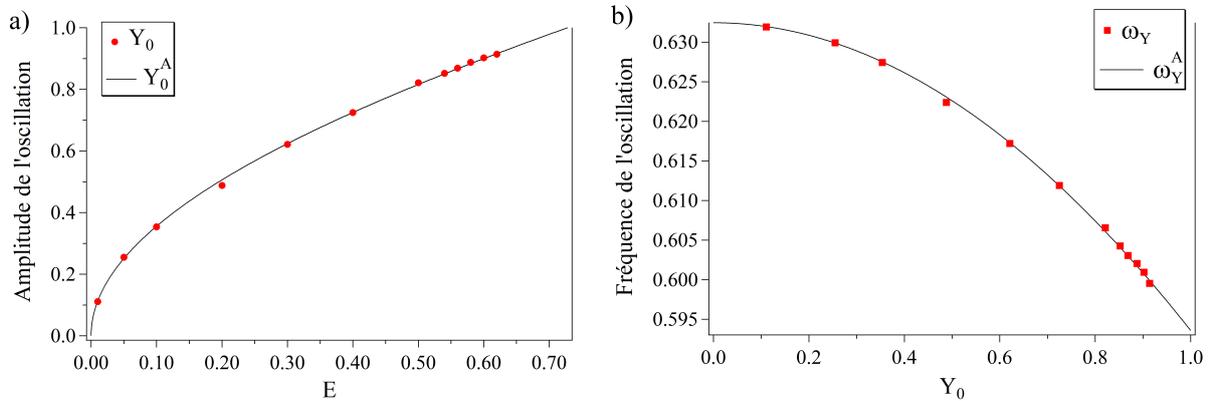


FIGURE 8.14 – Solution $X_0 = 0$: a) amplitudes Y_0 (calculs numériques) et Y_0^A (obtenu de l'éq. 8.18 pour Y) en fonction de l'énergie E . b) Fréquences ω_Y (calculs numériques) et ω_Y^A (obtenu de l'éq. 8.17) en fonction de l'amplitude d'oscillation Y_0 .

8.3.3.2 Fréquence principale ω_Y

Dans la figure 8.14b, nous avons tracé les points tirés des calculs numériques, ω_Y , en fonction des Y_0 , déduits aussi des résultats des simulations. La courbe décrite par ces points est comparée avec celle donnée par l'équation (8.17), qui exprime la fréquence du mouvement selon Y en fonction de son amplitude. Cette courbe est notée ω_Y^A dans la figure 8.14b. Nous avons ici, comme c'était aussi le cas pour l'expression de l'énergie, une coïncidence entre les deux résultats pour toutes les valeurs d'amplitude considérées dans les simulations. L'approximation au sixième ordre se montre à nouveau très précise pour décrire cette solution périodique.

8.3.4 Solution $Y_0 = 0$

La solution $Y_0 = 0$ est une solution très similaire à $X_0 = 0$, et à la différence du cas pour $\alpha \ll 1$, dans la configuration $\alpha = 0.6$ nous pouvons la caractériser numériquement parce qu'elle est toujours stable. Les points tirés des simulations pour cette solution correspondent à une extrapolation à l'abscisse $\xi_B = 1$ (voir figure 8.7).

8.3.4.1 Amplitude d'oscillation X_0

Nous répétons ici la comparaison entre l'amplitude théorique du mouvement selon X , en fonction de E , et les amplitudes mesurées dans les simulations. Cette comparaison est visible dans la figure 8.15a. La courbe théorique X_0^A est donnée par l'équation (8.18), qui exprime l'énergie en fonction de l'amplitude. Nous obtenons une concordance des amplitudes calculées analytiquement et numériquement pour tout l'intervalle d'énergie dans le puits.

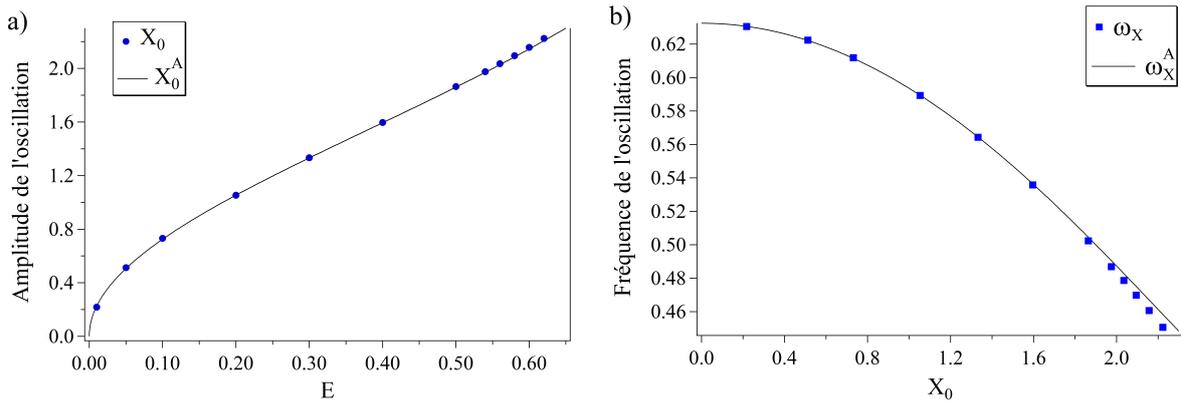


FIGURE 8.15 – Solution $Y_0 = 0$: a) amplitudes X_0 (calculs numériques) et X_0^A (obtenu de l'éq. 8.18) en fonction de l'énergie E . b) Fréquences ω_X (calculs numériques) et ω_X^A (obtenu de l'éq. 8.16) en fonction de l'amplitude d'oscillation X_0 .

8.3.4.2 Fréquence principale ω_X

Finalement, nous faisons la vérification de la relation pour la fréquence du mouvement selon X en fonction de son amplitude, donnée par l'équation (8.16). La courbe théorique ω_X^A montrée en figure 8.15b est accompagnée des points des simulations qui représentent ω_X en fonction de X_0 .

L'accord entre les résultats théoriques et numériques est ici très bon mais, dans ce cas, nous notons que pour des amplitudes très proches du bord du puits, la courbe analytique donne des valeurs surestimées de la fréquence. Cependant, pour la plupart de l'intervalle d'amplitudes dans le puits, cette dernière figure confirme encore une fois la très bonne approximation donnée par notre potentiel au sixième ordre.

8.4 Discussion

Les simulations du mouvement dans le réseau carré bleu pour $\alpha = 0.6$ mènent à des trajectoires périodiques et quasi-périodiques, pour des énergies petites et intermédiaires. Ces solutions comprennent des mouvements découplés et des solutions accrochées avec un rapport 2 : 1 entre les fréquences d'oscillation. Le phénomène de synchronisation inhibe le chaos, de façon similaire au cas décrit dans le chapitre 7 pour $\alpha \ll 1$. En revanche, ici, le chaos apparaît pour des grandes énergies, et quoique restreint, il est présent dans l'espace des phases. Une autre différence avec la dynamique pour $\alpha \ll 1$ est que pour $\alpha = 0.6$, les solutions découplées particulières, $X = 0$ et $Y = 0$, sont toutes les deux des solutions stables. D'ailleurs, alors que pour la quasi-dégénérescence la déstabilisation de $Y = 0$ coïncide avec l'accrochage, pour la résonance 2 : 1 l'accrochage se manifeste pour toutes les énergies dans le puits.

Le phénomène de synchronisation observé ici n'est pas strictement le même que celui pour $\alpha \ll 1$, où le mouvement est plus harmonique. Nous dirons que la synchronisation due à la quasi-dégénérescence est « plus forte » que celle due à la résonance 2 : 1 : nous voulons indiquer par là d'une part qu'elle est un phénomène plus puissant pour inhiber le chaos, et d'autre part, que l'accrochage se produit à un ordre plus petit. Grâce à cette dernière caractéristique, l'approximation du potentiel du réseau carré bleu comme deux oscillateurs de Duffing couplés (c'est à dire, jusqu'à l'ordre quatre) fonctionne bien pour

$\alpha \ll 1$. En revanche, pour $\alpha = 0.6$, l'accrochage ne peut pas s'exprimer analytiquement à cet ordre d'approximation, et nous avons besoin d'un développement du potentiel jusqu'au sixième ordre.

La comparaison des résultats analytiques au sixième ordre avec les simulations numériques, pour les solutions accrochées, donne une très bonne concordance jusqu'à $E = 0.5$. Cette valeur est satisfaisante puisque elle est suffisamment proche du seuil $E_T(0.6) = 0.64$ pour sortir du puits. En ce qui concerne les solutions triviales $X = 0$ et $Y = 0$, leur traitement au sixième ordre du potentiel donne des courbes approchées qui décrivent le mouvement presque parfaitement pour toute énergie en dessous du seuil E_T (il faut rappeler que cet ordre a été introduit pour exprimer l'accrochage). Nous trouvons seulement des petites divergences quand l'amplitude de l'oscillation périodique selon X approche le bord du puits.

En résumé, l'approximation de Duffing employée pour la synchronisation par quasi-dégénérescence permet d'obtenir à la fois des équations assez simples et de représenter correctement la dynamique dans le potentiel complet. En revanche, à cause des caractéristiques différentes de la synchronisation par résonance 2 : 1, son étude analytique nécessite un développement au sixième ordre du potentiel. Cette approximation décrit de façon appropriée la synchronisation « moins forte » qui a lieu pour $\alpha = 0.6$, mais elle perd la praticité de l'approximation Duffing. Nous remarquons, finalement, que l'approche analytique est toujours possible pour cette configuration, et que les relations approchées déduites donnent des très bons résultats sur le mouvement dans le potentiel réel.

Chapitre 9

Solutions quasi-périodiques

Jusqu'à présent, nous avons considéré des cas particuliers du réseau carré bleu, pour lesquels la synchronisation des mouvements selon les deux directions X et Y joue un rôle prépondérant. Toutefois, nous avons vu au chapitre 5 que le cas général, pour des valeurs de α ne conduisant à aucune résonance particulière, présente plusieurs types de dynamique. Nous nous intéressons ici aux solutions découplées observées, que nous avons déjà examinées.

Chapitre 9

Solutions quasi-périodiques

9.1 Les solutions découplées

Rappelons que le potentiel complet du réseau carré bleu a la forme (éq. 5.1) :

$$U(X, Y) = 1 + \alpha (\cos X - \cos Y) - \cos X \cos Y \quad (9.1)$$

Un atome piégé dans ce potentiel a une énergie totale E constante :

$$E = \frac{p^2}{2} + U(X, Y) \quad (9.2)$$

Dans notre étude de la dynamique dans ce réseau, nous avons déjà considéré ce que nous avons appelé des solutions découplées, dont les fréquences d'oscillation dans chaque direction de l'espace ne satisfont aucune relation particulière. Mais nous n'avons traité jusqu'à présent que les cas particuliers $X = 0$ et $Y = 0$. Nous voulons maintenant analyser le cas plus général du mouvement découplé.

Au chapitre 5, nous avons montré les caractéristiques du mouvement découplé pour des solutions proches des points fixes $X = 0$ et $Y = 0$. Leurs spectres présentent des porteuses dans chaque direction sans relation entre elles, leur troisième harmonique et des bandes latérales dues au couplage. Ce mouvement a été décrit pour ces deux solutions particulières quand nous avons analysé les configurations correspondant à une résonance, dans les chapitres 7 et 8. Dans ces chapitres, nous avons fait l'hypothèse des faibles amplitudes d'oscillation et effectué un développement limité du potentiel donné par (9.1). Les solutions découplées examinées correspondent à un mouvement d'oscillation avec des amplitudes selon chaque direction qui semblent indépendantes entre elles, en première approximation. Toutefois, l'amplitude du mouvement selon X modifie la fréquence de l'oscillation selon Y et réciproquement. Nous proposons maintenant d'évaluer l'énergie de l'atome dans chaque direction, sans faire l'hypothèse des faibles amplitudes d'oscillation.

Les équations du mouvement pour l'atome, déduites du potentiel (éq. 9.1), sont

$$\ddot{X} = -\sin X (\cos Y - \alpha) \quad (9.3a)$$

$$\ddot{Y} = -\sin Y (\cos X + \alpha) \quad (9.3b)$$

Pour avoir deux oscillations découplées, nous voulons des expressions de la forme :

$$\ddot{X} = -\omega_{0X}^2 \sin X \quad (9.4a)$$

$$\ddot{Y} = -\omega_{0Y}^2 \sin Y \quad (9.4b)$$

Un choix assez naturel qui sort de la comparaison des équations (9.3) et (9.4) est de définir ω_{0X} et ω_{0Y} comme¹ :

$$\omega_{0X}^2 = \langle \cos Y \rangle - \alpha \quad (9.5a)$$

$$\omega_{0Y}^2 = \langle \cos X \rangle + \alpha \quad (9.5b)$$

où les valeurs moyennes $\langle \cos X \rangle$ et $\langle \cos Y \rangle$ sont prises sur une période d'oscillation pour chacun des mouvements.

De cette façon, nous introduisons deux pendules simples avec des fréquences naturelles ω_{0X} et ω_{0Y} différentes. L'énergie de chaque pendule est :

$$E_X = \frac{\dot{X}^2}{2} + \omega_{0X}^2 (1 - \cos X) \quad (9.6a)$$

$$E_Y = \frac{\dot{Y}^2}{2} + \omega_{0Y}^2 (1 - \cos Y) \quad (9.6b)$$

Nous remarquons que par notre choix des fréquences naturelles (éq. 9.5), nous avons extrait du terme de couplage $\cos X \cos Y$ du potentiel (éq. 9.1) les composantes principales en $\cos X$ et en $\cos Y$. Pour obtenir l'énergie totale de l'atome, il faut ajouter à la somme des énergies E_X et E_Y un terme de couplage E_C

$$E = E_X + E_Y + E_C \quad (9.7)$$

où :

$$E_C = 1 - \cos X \cos Y - \langle \cos X \rangle - \langle \cos Y \rangle + \langle \cos X \rangle \cos Y + \langle \cos Y \rangle \cos X \quad (9.8a)$$

$$= 1 - \cos X \cos Y - (\omega_{0X}^2 + \alpha) (1 - \cos X) - (\omega_{0Y}^2 - \alpha) (1 - \cos Y) \quad (9.8b)$$

Pour l'instant, nous négligeons ce terme de couplage et nous avons deux pendules simples découplés, dont l'énergie totale vaut E . Notons toutefois que, comme dans les cas examinés aux chapitre 7 et 8, la fréquence d'un mouvement dépend de l'amplitude de l'autre. Dans la section 2, nous examinerons les conditions de validité de cette hypothèse.

9.1.1 Fréquence du mouvement découplé

Nous traitons le mouvement des pendules simples décrits par les équations (9.4) et (9.5). Ce mouvement est anharmonique², donc sa fréquence d'oscillation dépend de son élongation maximale A_X . Nous pouvons exprimer la vitesse \dot{X} (éq. 9.6a) comme :

$$|\dot{X}| = \omega_{0X} \sqrt{2} \sqrt{\cos X - \cos A_X} \quad (9.9)$$

À partir de cette expression, nous calculons le quart de la période T_X , qui est le temps nécessaire pour aller de l'origine à A_X :

$$\frac{T_X}{4} = \int_0^{A_X} \frac{dX}{\dot{X}} \quad (9.10)$$

1. Remarquons que dans les chapitres précédents, la notation ω_{0X} et ω_{0Y} a été employée pour les quantités $\sqrt{1 - \alpha}$ et $\sqrt{1 + \alpha}$.

2. Nous examinerons le mouvement selon X , celui selon Y conduisant aux mêmes expressions.

Nous introduisons les variables k_X et z_X , définies comme³ :

$$k_X = \sin \frac{A_X}{2} \quad (9.11a)$$

$$z_X = \frac{\sin \left(\frac{X}{2} \right)}{k_X} \quad (9.11b)$$

Nous pouvons donc écrire

$$T_X = \frac{4}{\omega_{0X}} K(k_X) \quad (9.12)$$

où nous avons introduit K , l'intégrale elliptique complète de première espèce :

$$K(k_X) = \int_0^1 \frac{dz_X}{\sqrt{(1-z_X^2)(1-k_X^2 z_X^2)}} \quad (9.13)$$

Pour compléter le calcul de T_X , il nous reste à déterminer ω_{0X} , c'est à dire la valeur moyenne de $\cos Y$ (éq. 9.5a). Cette valeur moyenne peut s'obtenir en employant les résultats précédents. Par exemple, pour la direction X :

$$\frac{T_X}{4} \langle \cos X \rangle = \int_0^{A_X} \frac{dX}{X} \cos X \quad (9.14)$$

Nous trouvons alors :

$$\langle \cos X \rangle = 2 \frac{E(k_X)}{K(k_X)} - 1 \quad (9.15)$$

où E est l'intégrale elliptique complète de seconde espèce

$$E(k_X) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-k_X^2 z_X^2)}{(1-z_X^2)}} dz_X \quad (9.16)$$

Par conséquent :

$$\omega_{0X} = \sqrt{2 \frac{E(k_X)}{K(k_X)} - 1 - \alpha}$$

Nous connaissons alors les périodes T_X et T_Y du mouvement anharmonique découplé en fonction des élongations maximales A_X et A_Y . Nous pouvons donc écrire les deux fréquences ω_X et ω_Y correspondantes :

$$\omega_X(A_X, A_Y) = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2 \frac{E(k_Y)}{K(k_Y)} - 1 - \alpha}}{K(k_X)} \quad (9.17a)$$

$$\omega_Y(A_X, A_Y) = \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{2 \frac{E(k_X)}{K(k_X)} - 1 + \alpha}}{K(k_Y)} \quad (9.17b)$$

Nous définissons le rapport R de ces deux fréquences :

3. Ce changement de variables est celui employé traditionnellement dans le traitement du pendule simple.

$$R = \frac{\omega_Y}{\omega_X} \quad (9.18)$$

Sachant que $K(k)$ est une fonction monotone croissante de k et que $E(k)$ est décroissante, nous pouvons noter que les deux fréquences d'oscillation ω_X et ω_Y sont des fonctions décroissantes des deux paramètres k_X et k_Y . A priori, nous ne pouvons rien affirmer sur l'évolution du rapport R avec k_X et k_Y . Nous l'analysons dans la section suivante.

9.1.2 Énergie et rapport des fréquences

Nous allons employer, plutôt que les élongations maximales, les nouveaux paramètres $k_X = \sin A_X/2$ et $k_Y = \sin A_Y/2$. Les énergies du mouvement découplé ont alors, à partir des résultats précédents, les expressions :

$$E_X = 2 \left(2 \frac{E(k_Y)}{K(k_Y)} - 1 - \alpha \right) k_X^2 \quad (9.19a)$$

$$E_Y = 2 \left(2 \frac{E(k_X)}{K(k_X)} - 1 + \alpha \right) k_Y^2 \quad (9.19b)$$

L'énergie E_X croît avec k_X et décroît avec k_Y , alors que c'est l'inverse pour E_Y . Cela ne nous permet pas non plus de prévoir la dépendance de l'énergie totale $E = E_X + E_Y$. Toutefois, les cas simples où $k_X = 0$ ou $k_Y = 0$ sont intéressants. Nous trouvons :

$$E(0, k_Y) = 2(1 + \alpha) k_Y^2 \quad (9.20a)$$

$$E(k_X, 0) = 2(1 - \alpha) k_X^2 \quad (9.20b)$$

Pour les faibles amplitudes, on s'attend à ce que l'énergie croisse avec l'amplitude des mouvements. Nous avons tracé sur la figure 9.1 l'énergie E , en niveaux de gris, et le rapport R des fréquences d'oscillation en courbes de niveau, pour $\alpha = 0.2$. Dans cette figure, nous avons considéré des valeurs de k_X et k_Y correspondant aux élongations maximales d'un atome piégé dans le puits de potentiel. Cela impose des élongations maximales jusqu'à environ le seuil d'énergie pour sortir du puits, c'est à dire :

$$\cos A_X = -\cos A_Y = -\alpha \quad (9.21)$$

Pour $\alpha = 0.2$, les valeurs maximales de k_X et k_Y sont égales à 0.77 et 0.63, respectivement. Nous voyons dans la figure 9.1 que, en effet, E croît avec k_X et k_Y .

Pour déterminer les variations du rapport R avec k_X et k_Y , il convient d'étudier la fonction

$$K(k) \sqrt{2 \frac{E(k)}{K(k)} - 1 \pm \alpha} \quad (9.22)$$

ou son carré :

$$f(k, \alpha) = (2E(k) - (1 + \alpha) K(k)) K(k) \quad (9.23)$$

Le dernier facteur croît alors que le premier décroît. Nous avons tracé cette famille de courbes f en fonction de k_X et k_Y dans la figure 9.2. Ces courbes sont évaluées, pour chaque valeur de α , jusqu'aux différents k_X et k_Y correspondant aux élongations maximales accessibles dans le puits (éq. 9.21). Le tracé des courbes dans ces intervalles montre que la fonction f est toujours une fonction décroissante de k . Nous déduisons du comportement de f observé sur la figure 9.2 que le rapport R croît avec k_Y et décroît avec k_X .

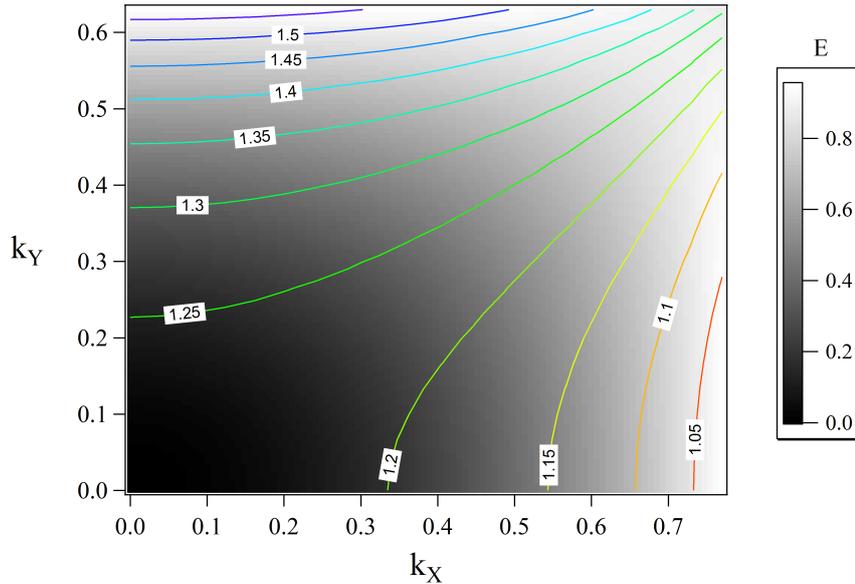


FIGURE 9.1 – Énergie E (niveaux de gris) et rapport R des fréquences d'oscillation (courbes de niveau) en fonction de k_X et k_Y , pour $\alpha = 0.2$.

9.1.3 Les petites oscillations

Dans les chapitres 7 et 8, nous avons uniquement considéré les solutions découplées particulières $X = 0$ et $Y = 0$. Les relations trouvées dans ces chapitres étaient valables pour des oscillations de petite amplitude. Dans cette limite de petites oscillations, analysons le comportement de la fréquence (éq. 9.17) et de l'énergie (9.19) des solutions découplées. Considérons des oscillations de petite élancement maximale A_X :

$$k_X^2 \approx \frac{A_X^2}{4} \ll 1 \quad (9.24)$$

Nous pouvons donc approcher les intégrales elliptiques par :

$$K(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4} \right) \quad (9.25a)$$

$$E(k) \approx \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{k^2}{4} \right) \quad (9.25b)$$

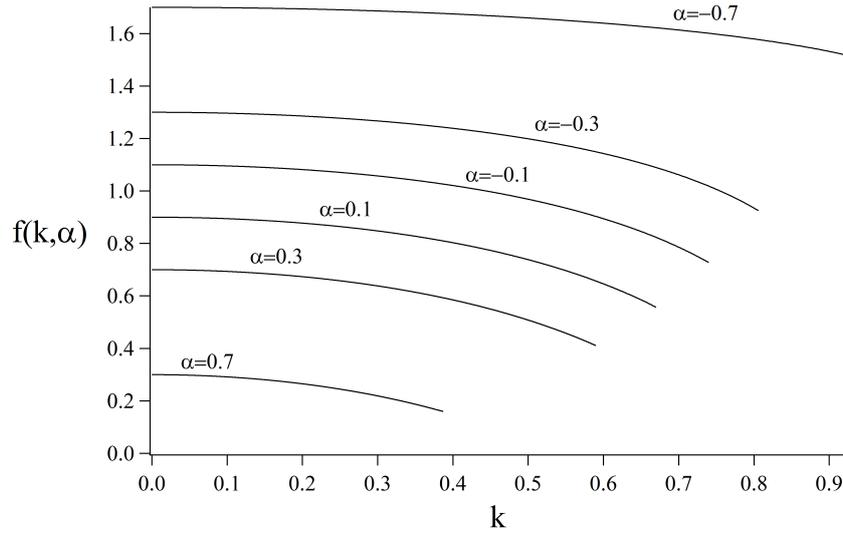
Pour le cas des oscillations uniquement selon X , c'est à dire la solution $Y = 0$, l'expression pour la fréquence (éq. 9.17a) devient :

$$\omega_X = \sqrt{1 - \alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{A_X^2}{16} \right)} \quad (9.26)$$

Les oscillations selon Y (solution $X = 0$) satisfont :

$$\omega_Y = \sqrt{1 + \alpha} \frac{1}{\left(1 + \frac{A_Y^2}{16} \right)} \quad (9.27)$$

Après avoir développé les termes $1/_{1+\varepsilon}$, ces relations donnent :

FIGURE 9.2 – Tracé des fonctions $f(k, \alpha)$ pour différentes valeurs de α .

$$\omega_X^2 = (1 - \alpha) \left(1 - \frac{A_X^2}{8} \right) \quad (9.28a)$$

$$\omega_Y^2 = (1 + \alpha) \left(1 - \frac{A_Y^2}{8} \right) \quad (9.28b)$$

Elles sont équivalentes à celles trouvées dans le chapitre 7 pour les fréquences aux points fixes $Y = 0$ (éq. 7.29) et $X = 0$ (éq. 7.11), respectivement. Nous remarquons que, à cet ordre de calcul, nous devons négliger les termes correspondant aux troisièmes harmoniques, et les élongations maximales A_X, A_Y sont donc égales aux amplitudes d'oscillation X_0, Y_0 dans les équations (7.29) et (7.11).

En ce qui concerne les énergies des oscillations découplées, pour les solutions particulières $X = 0$ et $Y = 0$, elles sont données par les équations (9.20). Considérons la solution $Y = 0$. En faisant l'approximation pour des petites élongations maximales A_X , k_X est donné par l'équation (9.24) et les intégrales elliptiques par les relations (9.25). L'énergie E est donc :

$$E(A_X, 0) = \frac{(1 - \alpha)}{2} A_X^2 \quad (9.29)$$

En conséquence, notre développement de k_X n'est pas suffisant pour retrouver les équations du chapitre 7, et il nous faut prendre en compte l'ordre suivant :

$$k_X^2 \approx \frac{1}{4} \left(A_X^2 - \frac{A_X^4}{12} \right) \quad (9.30)$$

Avec cette approximation, l'énergie devient :

$$E(A_X, 0) = \frac{(1 - \alpha)}{2} A_X^2 \left(1 - \frac{A_X^2}{12} \right) \quad (9.31)$$

Prenons garde que nous avons maintenant introduit des termes du quatrième ordre. Pour comparer la relation (9.31) avec celle trouvée pour l'énergie dans le chapitre 7 (éq. 7.30), nous devons considérer le troisième harmonique, d'amplitude $X_0^3/192$. L'élongation maximale A_X est donc égale à :

$$A_X = X_0 \left(1 - \frac{X_0^2}{192} \right) \quad (9.32)$$

En introduisant cette équation dans la relation (9.31), nous retrouvons l'expression (7.30) pour l'énergie totale en fonction de l'amplitude X_0 :

$$E(X_0, 0) = \frac{(1 - \alpha)}{2} X_0^2 \left(1 - \frac{3X_0^2}{32} \right) \quad (9.33)$$

En conséquence, dans la limite des petites oscillations, nos expressions pour le mouvement découplé sont identiques à celles trouvées précédemment dans les cas particuliers traités.

9.2 Spectres, sections de Poincaré et résonances

Jusqu'à présent, nous avons considéré que les mouvements selon X et Y se font chacun avec leur fréquence caractéristique. Nous avons établi la relation entre ces fréquences et les amplitudes du mouvement. Nous allons maintenant revenir sur les hypothèses qui nous ont permis d'établir ce résultat. Le point de départ était de considérer deux pendules simples découplés. Pour cela, nous avons négligé le terme de couplage E_C (éq. 9.8), que nous pouvons réécrire comme :

$$E_C = (1 - \langle \cos X \rangle) (1 - \langle \cos Y \rangle) - (\cos X - \langle \cos X \rangle) (\cos Y - \langle \cos Y \rangle) \quad (9.34)$$

Nous pouvons justifier le fait d'avoir négligé cette expression en notant que chacun des deux facteurs du second terme est nul en moyenne. Toutefois, la valeur moyenne du produit peut mener à un terme non négligeable, en particulier si les deux facteurs évoluent avec une fréquence commune. Nous analysons cette possibilité dans la suite. Pour cela, nous nous intéresserons aux spectres de $\cos X$ et $\cos Y$.

9.2.1 Spectres

Le mouvement selon X est périodique avec la fréquence ω_X calculée ci-dessus (et de même pour Y , éqs. 9.17). Sachant que le potentiel est pair en X , nous pouvons donc décomposer la position $X(t)$ de l'atome en série de Fourier avec de nombreux harmoniques impairs :

$$X(t) = \sum_n X_{2n+1} \cos((2n+1)\omega_X t) \quad (9.35)$$

Nous insistons sur le fait que l'élongation maximale du mouvement A_X n'est pas égale au coefficient de la fréquence fondamentale, que nous avons noté X_0 dans les chapitres précédents. En revanche, si nous pouvons faire un développement limité de chaque terme

X_{2n+1} de la série de Fourier, nous trouverons que ces coefficients sont du même ordre, car ils satisfont :

$$X_{2n+1} = O(A_X^{2n+1}) \quad (9.36)$$

Le spectre du terme $\cos X$ qui intervient dans le terme de couplage (éq. 9.34) contient, par conséquent, tous les harmoniques pairs de la fréquence fondamentale ω_X , et la même analyse peut être faite pour Y . La quantité E_C que nous avons négligée a donc un spectre de Fourier complexe avec des composantes à toutes les fréquences ω_{nm} avec n et m des entiers non nuls :

$$\omega_{nm} = 2(n\omega_X + m\omega_Y) \quad (9.37)$$

Si une composante à fréquence nulle apparaît dans ce spectre, notre approche qui néglige E_C n'est a priori pas valable. En conséquence, nous devons considérer avec prudence les cas où une résonance $n : m$ peut se manifester. Cependant, notons que ce problème ne se pose pas pour des petites amplitudes d'oscillation : si les deux entiers m et n , premiers entre eux, menant à une résonance sont grands, le terme de fréquence nulle peut être très petit. D'après la relation (9.36), ce terme est de l'ordre de

$$A_X^{2n} A_Y^{2m} \quad (9.38)$$

C'est à dire que même en résonance exacte, si A_X et A_Y sont petits, nous pouvons négliger l'effet du couplage⁴.

9.2.2 Condition de résonance

Nous voulons maintenant transformer la condition de résonance $n\omega_X = m\omega_Y$ en une relation entre A_X et A_Y , ou de façon équivalente entre k_X et k_Y . Nous cherchons à reproduire la figure 5.19, obtenue des simulations numériques dans le chapitre 5. Nous allons déterminer, pour un α donné, l'énergie $E_{n:m}(\alpha)$ la plus faible pour laquelle une résonance $n : m$ peut apparaître. Le calcul impliquerait de résoudre la condition de résonance pour obtenir, par exemple, la relation qui donne k_Y en fonction de k_X pour les n et m donnés. Nous calculerions alors l'énergie correspondante à cette relation, et nous déterminerions son minimum en fonction de k_X .

En fait, les études sur l'évolution de l'énergie en fonction de k_X et k_Y , ainsi que celle du rapport R , nous suggèrent de limiter nos investigations à deux familles de solutions particulières : celles où $k_Y = 0$ et celles où $k_X = 0$. Pour $k_X = k_Y = 0$, le rapport vaut

$$R(0,0) = \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (9.39)$$

Ce rapport croît avec k_Y et décroît avec k_X :

$$R(k_X, 0) < \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (9.40a)$$

$$R(0, k_Y) > \sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \quad (9.40b)$$

4. Le rayon de convergence infini du développement en série entière du cos assure que même si X_0 et Y_0 sont grands (> 1), un préfacteur, que nous n'avons pas cherché à déterminer, nous garantit que le couplage sera négligeable pour n et m assez grands.

Pour un rationnel m/n donné, l'égalité $R = m/n$ ne peut être vérifiée que par une seule des deux solutions considérées. Les expressions sont suffisamment simples pour être inversées et nous pouvons déterminer les points (α, E) où la résonance m/n se produit. Nous l'avons fait pour les valeurs m/n observées dans le chapitre 5 : 1, 2, 3, $3/2$, $4/3$, $5/4$, et les courbes correspondantes sont tracées sur la figure 9.3.

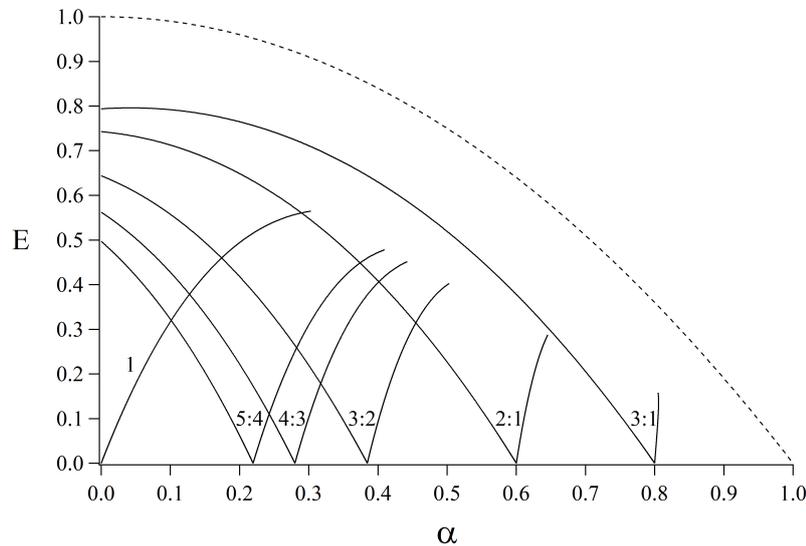


FIGURE 9.3 – Seuil d'énergie pour les résonances $n : m$ en fonction de la valeur de α .

L'étude de solutions simples complètement découplées permet de déterminer dans quelles conditions apparaissent des résonances. Toutefois, elle n'indique pas s'il s'agit de simples coïncidences ou si cette résonance conduit à un accrochage de fréquence avec un mouvement qui devient périodique. Dans le cas d'une « coïncidence », la résonance ne se produit que pour un point dans l'espace des phases, de sorte que les trajectoires proches de ce point ne sont pas influencées. À la différence de l'accrochage, dont les sections de Poincaré (SP) proches permettent de l'identifier, ceci n'est pas possible pour une coïncidence. La distinction entre ces deux cas, coïncidence et accrochage, repose donc sur l'existence d'une zone d'influence avec des SP qui « tournent » autour des points discrets qui correspondent à une solution périodique.

En particulier, les courbes de la figure 9.3, indiquant le seuil des résonances, descendent toutes à zéro. Certaines reproduisent bien les résultats du chapitre 5 : par exemple, les cas de $\alpha = 0.6$ et $\alpha = 0.8$, où nous avons trouvé l'accrochage pour des mouvements de très faible amplitude. En revanche, pour d'autres valeurs de α , nous n'avons pas observé d'accrochage à très faible énergie. D'ailleurs, nous avons vu qu'à faible énergie, le mouvement est presque harmonique pour les deux directions X et Y . Les termes de couplage, comme ceux anharmoniques, sont négligeables et on s'attend donc à trouver des solutions découplées (sauf dans le cas pathologique $\alpha = 0$), même si les fréquences sont dans un rapport rationnel.

D'autre part, les solutions complètement découplées ne sont pas très satisfaisantes, car elles conduisent à des SP ($\dot{Y} = 0+$) qui sont de simples segments de droites à $Y = -A_Y$. Nous allons donc considérer les termes de couplage comme venant perturber les solutions découplées. Nous ne chercherons pas à décrire les solutions accrochées dans le cas général. Cela a été fait précédemment dans deux cas particuliers (chapitres 7 et 8).

9.2.3 Perturbations

Nous cherchons maintenant une solution, proche de la solution découplée, qui vérifie les vraies équations du mouvement. Nous posons donc :

$$X(t) = X^{(0)}(t) + x(t) \quad (9.41a)$$

$$Y(t) = Y^{(0)}(t) + y(t) \quad (9.41b)$$

où $X^{(0)}(t)$ et $Y^{(0)}(t)$ représentent l'évolution des deux coordonnées de la solution découplée étudiée et x et y sont supposées être des petites corrections. Nous pouvons ré-écrire les équations du mouvement, données par l'équation (9.3), sous une forme linéarisée :

$$\begin{aligned} \ddot{X}^{(0)} + \ddot{x} &= -\sin X^{(0)} (\cos Y^{(0)} - \alpha) - x (\cos Y^{(0)} - \alpha) \cos X^{(0)} \\ &\quad + y \sin X^{(0)} \sin Y^{(0)} \end{aligned} \quad (9.42a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{Y}^{(0)} + \ddot{y} &= -\sin Y^{(0)} (\cos X^{(0)} + \alpha) - y (\cos X^{(0)} + \alpha) \cos Y^{(0)} \\ &\quad + x \sin X^{(0)} \sin Y^{(0)} \end{aligned} \quad (9.42b)$$

En conséquence, les équations pour x et y sont :

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -\sin X^{(0)} (\cos Y^{(0)} - \langle \cos Y \rangle) - x (\cos Y^{(0)} - \alpha) \cos X^{(0)} \\ &\quad + y \sin X^{(0)} \sin Y^{(0)} \end{aligned} \quad (9.43a)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y} &= -\sin Y^{(0)} (\cos X^{(0)} - \langle \cos X \rangle) - y (\cos X^{(0)} + \alpha) \cos Y^{(0)} \\ &\quad + x \sin X^{(0)} \sin Y^{(0)} \end{aligned} \quad (9.43b)$$

Nous avons un terme source et un terme linéaire dont les coefficients dépendent du temps. Ce type de système peut présenter deux pathologies distinctes. D'une part, un des termes de forçage peut être résonnant avec la fréquence propre du système linéaire. Dans ce cas, l'amplitude associée peut devenir très grande et le traitement perturbatif ne sera plus valable. D'autre part, le système linéaire peut présenter une instabilité paramétrique et ce qui devait être une perturbation serait amené à diverger.

Nous pouvons montrer que les coefficients des termes linéaires (pour x : $-(\cos Y^{(0)} - \alpha) \cos X^{(0)}$) contiennent tous les harmoniques pairs des deux fréquences du mouvement et en déduire que s'il y a une composante du forçage qui est résonnante, il y aura en même temps une résonance paramétrique. En revanche, une résonance paramétrique ne produit pas toujours un forçage résonnant, car le choix que nous avons fait pour les fréquences découplées élimine certaines composantes dans le terme de forçage. Nous examinerons les résonances paramétriques plus tard : nous commençons par la détermination des fréquences propres du système et par l'étude des résonances avec le terme de forçage.

Parmi tous les coefficients qui dépendent du temps dans les équations du mouvement (9.43), il y a deux contributions notables : celles des valeurs moyennes des coefficients des termes linéaires, qui ne sont jamais nulles. En dehors du cas des résonances $n : m$ mentionnées plus haut, nous ne gardons que ces contributions et nous négligeons donc le terme de couplage entre les équations. Nous considérons alors le système linéaire forcé suivant :

$$\ddot{x} = -\sin X^{(0)} (\cos Y^{(0)} - \langle \cos Y \rangle) - x (\langle \cos Y \rangle - \alpha) \langle \cos X \rangle \quad (9.44a)$$

$$\ddot{y} = -\sin Y^{(0)} (\cos X^{(0)} - \langle \cos X \rangle) - y (\langle \cos X \rangle + \alpha) \langle \cos Y \rangle \quad (9.44b)$$

Ce système présente des fréquences propres, ω_{0x} et ω_{0y} , très proches des fréquences introduites pour les solutions découplées ω_{0X} et ω_{0Y} (éq. 9.5) :

$$\omega_{0x}^2 = \langle \cos X \rangle (\langle \cos Y \rangle - \alpha) \quad (9.45a)$$

$$\omega_{0y}^2 = \langle \cos Y \rangle (\langle \cos X \rangle + \alpha) \quad (9.45b)$$

En réalité, il faut comparer ces fréquences propres aux fréquences du mouvement découplé, c'est à dire à ω_X et ω_Y , intervenant dans les termes de forçage. Pour des mouvements de faible amplitude, nous aurons toujours $\omega_{0x} \sim \omega_{0X} \sim \omega_X$. Heureusement, loin des résonances, les termes de forçage n'ont pas de contributions aux fréquences fondamentales, qui seraient presque résonnantes.

Déformation d'une section de Poincaré due au forçage

Pour avoir une idée des effets du terme de forçage, nous considérons les déformations subies par une SP, dues à ce terme. Nous nous intéressons au mouvement selon y , et nous regardons en particulier ses composantes de Fourier y_{ij} aux fréquences ω_{ij} du forçage :

$$\omega_{ij} = (i\omega_X - j\omega_Y) \quad (9.46)$$

où i est un nombre pair et j un nombre impair. La composante y_{ij} est simplement la composante du terme source à cette même fréquence ω_{ij} divisée par $(\omega_{0y}^2 - \omega_{ij}^2)$. Nous ne traiterons pas le cas général. En rappelant la relation (9.36), qui indique que les composantes successives de $\sin X^{(0)}$ ou de $\cos X^{(0)}$ à la fréquence $i\omega_X$ sont d'ordre A_X^i (et de même pour Y), nous constatons que les premiers ordres contribueront plus que les autres. Cela surtout dans le cas des α petits, pour lesquels les fréquences sont toutes voisines et le dénominateur est petit.

Le terme correspondant à $i = 0$ et $j = 1$ étant nul, nous nous intéressons au terme $i = 2$ et $j = 1$. À des facteurs numériques près que nous ne cherchons pas à déterminer, nous trouvons :

$$y_{21} \propto \frac{A_X^2 A_Y}{\omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2} \quad (9.47)$$

Si nous supposons, de plus, que la perturbation est suffisamment petite pour que les instants de traversée τ_n de $Y = 0+$ ne sont pas trop modifiés, nous trouvons une déformation δy_n de la SP :

$$\delta y_n \propto \frac{A_X^2 A_Y}{\omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2} \cos \omega_{21} \tau_n \quad (9.48)$$

Nous avons pris l'origine des temps à l'élongation maximale pour les deux directions. Or $\tau_n = (n + 1/2) T_Y$, donc :

$$\delta y_n \propto \frac{-A_Y}{\omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2} \left(2 (X^{(0)}(\tau_n))^2 - A_X^2 \right) \quad (9.49)$$

La projection de la SP dans le plan XY qui était une droite devient maintenant une parabole, puisque $X^{(0)}(\tau_n)$ est simplement l'abscisse du point de la SP. Il reste à vérifier que la courbure de cette parabole est vers le bas, comme nous l'observons dans

les résultats numériques (voir par exemple la figure 5.3c). Pour cela, nous cherchons à déterminer le signe de $(\omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2)$. Nous avons :

$$\begin{aligned} \omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2 &= \omega_Y^2 \left[\left(\frac{1}{\omega_Y} \omega_y \right)^2 - \left(2 \frac{\omega_X}{\omega_Y} - 1 \right)^2 \right] \\ &= \omega_Y^2 \left[\langle \cos Y \rangle \left(\frac{2K(k_Y)}{\pi} \right)^2 - \left(\frac{2}{R} - 1 \right)^2 \right] \\ &= \omega_Y^2 \left[\left(2 \frac{E(k_Y)}{K(k_Y)} - 1 \right) \left(\frac{2K(k_Y)}{\pi} \right)^2 - \left(\frac{2}{R} - 1 \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (9.50)$$

Le premier terme fait partie de la famille de courbes que nous avons étudiées dans la section 1 et décroît avec k_Y , le second aussi. Nous ne pouvons donc rien affirmer sur la variation de la différence avec k_Y . En revanche, le second terme croît avec k_X . En figure 9.4a, nous avons tracé dans le plan (k_X, k_Y) des lignes de niveau correspondant à cette fonction, pour $\alpha = 0.2$. Nous voyons que les courbes de niveau sont partout positives. Pour des valeurs plus faibles de α , par exemple $\alpha = 0.1$ en figure 9.4b, nous trouvons une ligne de niveau nulle et certaines lignes de niveau négatives, pour les grandes valeurs de k_X . Cela correspond évidemment à l'apparition d'une résonance 1 : 1 qui met en défaut le traitement perturbatif que nous avons fait.

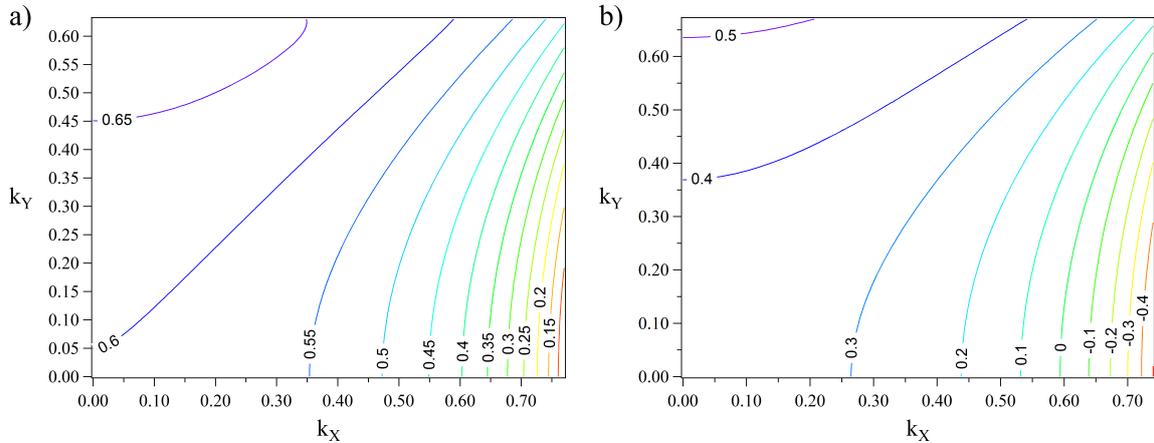


FIGURE 9.4 – Lignes de niveau correspondant à la différence $\omega_{0y}^2 - \omega_{21}^2$ (éq. 9.50), en fonction de (k_X, k_Y) pour a) $\alpha = 0.2$ et b) $\alpha = 0.1$.

Notons que si nous nous approchons d'une résonance, la petitesse d'une composante d'ordre plus élevé peut être compensée par le dénominateur (presque) résonnant. En supposant que le traitement perturbatif reste valable, nous avons alors une déformation de la SP en $\cos \omega_{ij} \tau_n$. Cette dernière peut s'exprimer comme un polynôme en $X^{(0)}$ (τ_n) (comme nous l'avons fait en éq. 9.49), dont l'ordre sera supérieur à 2. La SP est alors une courbe avec une certaine ondulation. Nous avons vu ce type de déformations d'ordre supérieur des solutions découplées dans plusieurs cartes de SP, par exemple dans la figure 5.8c pour $\alpha = 0.3$ (solutions découplées autour des SP en gris et en noir). Un autre exemple se voit dans la figure 5.14a, pour $\alpha = 0.7$, où les déformations nous permettent de deviner l'existence d'une résonance voisine.

9.2.4 Condition de validité du traitement perturbatif

Pour considérer la validité du traitement perturbatif, nous revenons au système complet donné par les équations (9.43). Nous allons considérer le forçage et l'instabilité paramétrique séparément.

9.2.4.1 Termes de forçage

Au voisinage d'une résonance $n : m$, le traitement perturbatif peut être mis en défaut, car nous trouvons dans le terme de forçage $-\sin X^{(0)} (\cos Y^{(0)} - \langle \cos Y \rangle)$ des contributions presque résonnantes. Si nous avons la résonance $n\omega_X \simeq m\omega_Y$, nous aurons :

$$\omega_{0x} \simeq \pm ((2n \pm 1)\omega_X - 2m\omega_Y) \quad (9.51a)$$

$$\omega_{0y} \simeq \pm (2n\omega_X - (2m \mp 1)\omega_Y) \quad (9.51b)$$

Nous posons

$$\delta = (2n\omega_X - 2m\omega_Y) \quad (9.52)$$

De cette façon, nous introduisons les fréquences propres des quatre termes sources de l'équation (9.44) : $\omega_X \pm \delta$ et $\omega_Y \pm \delta$.

Le système est alors un peu plus compliqué que celui traité précédemment, car ces quatre composantes de la série de Fourier sont couplées. Nous avons quatre termes sources associés à un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues x_{\pm} et y_{\pm} . Ce système pourrait être résolu sans trop de difficultés. Toutefois, notre objectif est simplement de déterminer si une résonance $n : m$ se manifeste dès les très basses énergies. Cela correspond à des faibles amplitudes de mouvement : nous allons donc examiner l'ordre de grandeur de chacun des termes. Les termes de couplage sont tous du deuxième ordre, en A_X^2 , A_Y^2 ou $A_X A_Y$. Les termes sources sont en $A_X^{2n\pm 1} A_Y^{2m}$ ou en $A_X^{2n} A_Y^{2m\pm 1}$. Il est donc raisonnable de ne considérer que les deux termes sources les plus grands et les deux amplitudes x_{\pm} et y_{\pm} correspondantes.

Pour la résonance $2 : 1$, il faut donc chercher les termes sources en $A_X^3 A_Y^2$ et en $A_X^4 A_Y$. Nous retrouvons, en conséquence, que dans ce cas nous devons développer les forces à l'ordre 5 (c'est à dire à l'ordre 6 du potentiel) pour que ces termes apparaissent. C'est un résultat que nous avons vu dans le chapitre 8, quand nous avons traité cette résonance. Pour une résonance $3 : 2$, les termes à considérer sont en $A_X^5 A_Y^4$ et en $A_X^6 A_Y^3$, c'est à dire du neuvième ordre. Ils sont du septième ordre pour la résonance $3 : 1$.

Tous ces termes sources sont très petits et nous pouvons douter de leur influence sur la perturbation que nous voulons évaluer. En particulier, pour que le calcul perturbatif ne soit plus valable, il faudrait que les composantes de Fourier x_{\pm} et y_{\pm} deviennent comparables aux termes principaux A_X ou A_Y . Or les corrections sur les fréquences ω_{0x} ou ω_{0y} , et sur ω_X ou ω_Y , sont a priori du second ordre en A_X ou A_Y . Cependant, ces premières corrections pourraient se compenser dans les différences qui interviennent : si elles annulent les termes d'ordre 2, les deux composantes de Fourier deviennent rapidement comparables à A_X et A_Y .

Il suffit donc d'évaluer toutes ces corrections en calculant les différences $(\omega_{0x}^2 - \omega_1^2)$ et $(\omega_{0y}^2 - \omega_2^2)$, où $\omega_1 = -((2n - 1)\omega_X - 2m\omega_Y)$ et $\omega_2 = 2n\omega_X - (2m - 1)\omega_Y$. Pour cela, nous pouvons réécrire ces relations en employant la fonction $f(k, \alpha)$ (éq. 9.23),

développée pour k petit⁵, et examiner ces différences dans le cas d'une résonance. Nous pourrions ainsi trouver une relation entre k_X et k_Y qui fait que les termes x_- et y_- deviennent comparables à A_X et A_Y , remettant en question le traitement perturbatif même pour des mouvements de faible amplitude. Ces calculs seront assez faciles pour la résonance 2 : 1, par exemple, mais ils deviennent compliqués pour des autres résonances, où interviennent des termes d'ordre supérieur.

9.2.4.2 Instabilité paramétrique

Au voisinage d'une résonance $n : m$, le système linéaire considéré sans les termes de forçage peut aussi présenter une instabilité paramétrique. En effet, les facteurs $(\cos Y^{(0)} - \alpha) \cos X^{(0)}$ et $(\cos X^{(0)} - \alpha) \cos Y^{(0)}$ contiennent des composantes à la fréquence double :

$$2\omega_{0x} \simeq \pm ((2n \pm 2) \omega_X - 2n\omega_Y) \quad (9.53a)$$

$$2\omega_{0y} \simeq \pm (2n\omega_X - (2m \mp 2) \omega_Y) \quad (9.53b)$$

Pour les faibles amplitudes de mouvement, les termes à considérer sont en $A_X^{2n-2} A_Y^{2m}$ ou en $A_X^{2n} A_Y^{2m-2}$. La condition d'instabilité paramétrique fait intervenir le rapport de l'amplitude de la composante à fréquence double au désaccord entre les fréquences (éq. 7.19). Cela veut dire que nous devons comparer $A_X^{2n-2} A_Y^{2m}$ à $O(1)$ pour déterminer la non-validité du traitement perturbatif à cause d'une instabilité paramétrique. Nous avons vu que pour évaluer la non-validité de ce traitement à cause des termes de forçage, nous devons comparer $A_X^{2n-1} A_Y^{2m}$ à $O(A_X)$. Au final, la condition de non-validité du traitement perturbatif fera donc intervenir les mêmes degrés en A_X et A_Y pour les deux processus.

Les fréquences à considérer maintenant seront légèrement différentes. Le calcul des désaccords $(\omega_{0x}^2 - \omega_1^2)$ et $(\omega_{0y}^2 - \omega_2^2)$ est donc différent, mais les conclusions resteront inchangées : en établissant une relation entre les deux amplitudes de mouvement, nous pourrions annuler l'un de ces désaccords au deuxième ordre.

Toutes ces considérations sur notre traitement perturbatif permettent de voir comment nous pourrions exprimer, dans les cas des résonances, la limite de sa validité. Il faut toutefois noter que le forçage et l'instabilité paramétrique, considérés séparément dans cette section, pourraient interférer. Ils pourraient alors conduire à une mise en cause plus précoce du traitement perturbatif. Nous n'avons donc pas développé ici les calculs de chaque processus séparément, car un traitement complet du problème devrait considérer les deux simultanément, surtout en sachant qu'ils font intervenir les mêmes degrés en A_X et A_Y .

9.3 Vérification des relations théoriques

Nous pouvons vérifier notre approche sur le mouvement découplé dans le réseau carré bleu en employant les résultats numériques pour ces solutions du système. En particulier, nous voulons tester l'approximation employée pour obtenir les relations (9.17), décrivant les fréquences d'oscillation dans chaque direction.

5. Remarquons que en $k = 0$, $f(0, \alpha) = \pi^2(1-\alpha)/4$ et $K(0) = \pi/2$. Cela veut dire que les fréquences ω_{0x} et ω_{0y} deviennent, pour $k = 0$: $\omega_{0x}^2 \approx 1 - \alpha$, $\omega_{0y}^2 \approx 1 + \alpha$. Ces valeurs correspondent bien aux fréquences naturelles employées dans notre traitement approché des chapitres 7 et 8.

9.3.1 Le cas $\alpha = 0.3$

Nous travaillons sur l'ensemble des trajectoires calculées numériquement pour $\alpha = 0.3$ et $E = 0.5$ (figures 5.8a et 5.8b). Nous faisons une analyse de leur spectre pour caractériser la fréquence et l'amplitude des porteuses selon X et selon Y . Les valeurs ainsi obtenues nous permettent de représenter les fréquences ω_X et ω_Y en fonction de k_X ou de k_Y . Pour les valeurs de l'amplitude mesurées des simulations, nous appliquons les équations (9.17) pour obtenir des fréquences ω_X et ω_Y « théoriques ». Ces deux paires de fréquences sont montrées en fonction de k_X dans la figure 9.5.

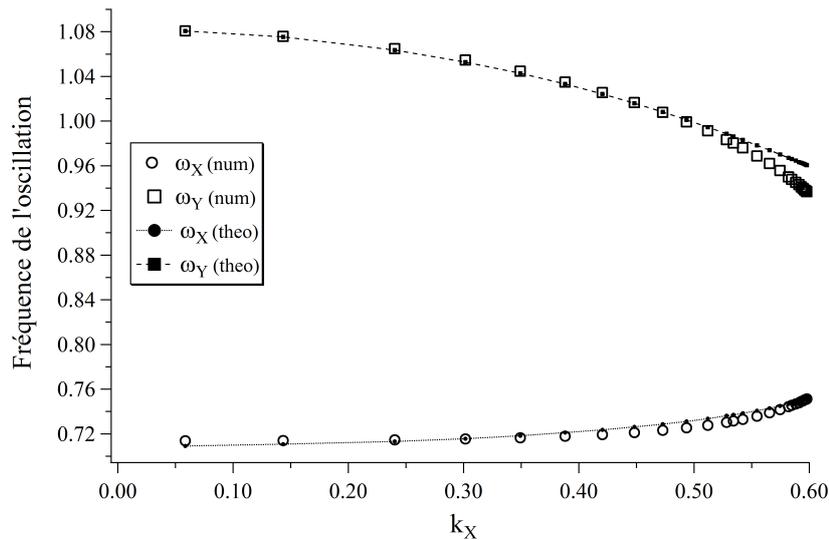


FIGURE 9.5 – Fréquences d'oscillation ω_X et ω_Y pour les solutions découplées en fonction de k_X : comparaison entre les résultats numériques (« num ») et les calculs analytiques (« theo »). Résultats pour $\alpha = 0.3$ et $E = 0.5$.

Nous pouvons voir que les résultats prédits par les équations (9.17) pour les solutions découplées donnent des valeurs en accord avec les résultats numériques. Nous remarquons que la divergence entre les deux groupes de points se produit seulement pour ω_Y et pour de grandes amplitudes d'oscillation : $k_X > 0.55$. Cela correspond à des trajectoires proches de la solution $Y = 0$, et nous savons que pour des énergies un peu supérieures à $E = 0.5$, la configuration $\alpha = 0.3$ présente plusieurs solutions accrochées proches de $Y = 0$ (voir figure 5.10). La proximité de ces résonances pour ces amplitudes d'oscillation affecte donc les solutions découplées. En dehors de cette région, les résultats obtenus par notre approximation du mouvement découplé sont en accord remarquable avec les résultats numériques.

9.3.2 Le cas $\alpha = 0.6$

Nous considérons maintenant les résultats numériques pour $\alpha = 0.6$, vus dans le chapitre 8. Nous prenons les solutions découplées qui coexistent avec les solutions accrochées dues à la résonance 2 : 1. Les fréquences d'oscillation selon X et selon Y du mouvement décrit par ces solutions varient dans la carte de SP comme nous l'avons montré dans la figure 8.10. Nous avons comparé les résultats tracés pour $E = 0.3$ (figure 8.10a) avec les fréquences calculées en employant les équations (9.17).

Cette comparaison est montrée dans la figure 9.6, où nous voyons que ces équations décrivent bien l'évolution des fréquences $2\omega_X$ et ω_Y en fonction de l'abscisse ξ_B , qui donne la position de la trajectoire sur la carte de SP. Les résultats théoriques s'écartent légèrement des simulations numériques pour les points qui sont dans la branche basse des fréquences, et en particulier quand l'abscisse ξ_B croît vers 1. La proximité de la résonance 2 : 1 doit perturber les solutions découplées dans cette région, de sorte que les valeurs théoriques sont surestimées. Il faut toutefois remarquer que la figure 9.6 montre un petit intervalle de fréquences et donc les écarts entre les deux résultats sont en effet petits par rapport aux valeurs des fréquences. Le bon accord avec les simulations numériques pour $\alpha = 0.6$ et celui vu pour $\alpha = 0.3$ vérifient donc notre approche analytique du mouvement découplé.

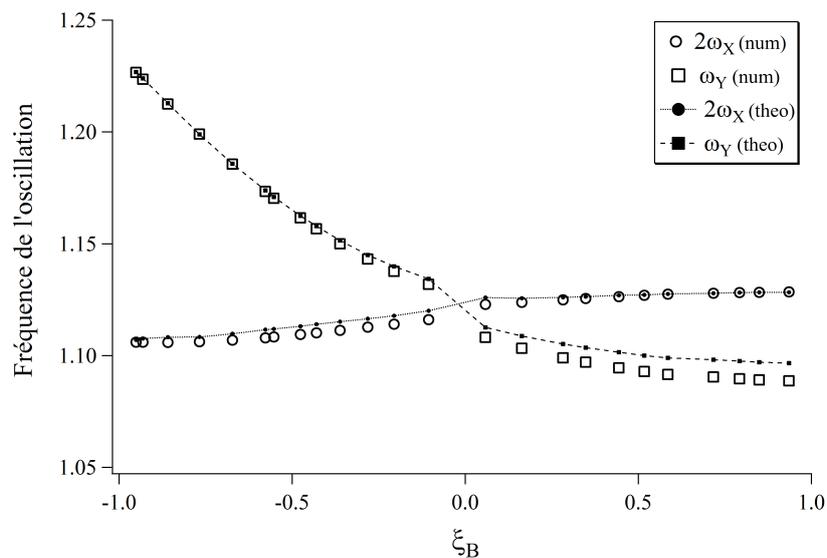


FIGURE 9.6 – Fréquences d'oscillation $2\omega_X$ et ω_Y des solutions découplées en fonction de l'abscisse ξ_B : comparaison entre les résultats numériques (« num ») et les calculs analytiques (« theo »). Résultats pour $\alpha = 0.6$ et $E = 0.3$.

Conclusion de la troisième partie

Dans cette dernière partie, nous avons développé des modèles analytiques qui permettent de décrire la dynamique pour toutes les configurations du réseau carré. Nous nous sommes intéressés d'abord aux configurations menant à des résonances, qui donnent des mouvements périodiques accrochés. Cet accrochage est d'ordre différent selon la résonance, dû aux différents termes qu'elle implique dans chaque cas.

Les mouvements accrochés ne représentent toutefois que des cas particuliers pour la dynamique dans le réseau carré. Le cas général consiste en des solutions découplées, dont la fréquence pour chaque coordonnée décroît toujours avec l'amplitude de l'oscillation. Quand ces solutions quasi-périodiques ont une des amplitudes principales nulles, nous trouvons deux solutions périodiques qui correspondent à une oscillation de l'atome selon une des directions principales. Ces solutions ne sont pas toujours stables, et dans le cas de la quasi-dégénérescence, la déstabilisation de l'une d'entre elles est liée à l'apparition de l'accrochage. Par ailleurs, le voisinage des résonances déforme les trajectoires des solutions quasi-périodiques. La description analytique de ces dernières n'est possible que hors d'une situation de résonance.

La description des situations de résonance a été faite pour les deux cas les plus importants. En premier lieu, la synchronisation par quasi-dégénérescence, dont la dynamique permet le traitement analytique le plus simple : l'approximation du potentiel est faite au quatrième ordre, avec la forme de deux oscillateurs de Duffing couplés. Les solutions accrochées, dans ce cas, sont des oscillateurs dont la fréquence décroît avec l'amplitude du mouvement. L'atome peut osciller selon des droites en biais, les deux coordonnées de l'espace étant en phase ou en opposition. Comparée aux expressions simples de la synchronisation par quasi-dégénérescence, la résonance 2 : 1 donne des relations plus compliquées pour le mouvement accroché. Nous pouvons toutefois bien décrire le mouvement dans ce cas, en développant le potentiel jusqu'au sixième ordre. Les solutions synchronisées sont ici des oscillations soit en forme de U, soit en forme de U inversé.

Nous avons comparé, dans chaque cas, les résultats tirés des expressions analytiques pour la fréquence, l'amplitude et l'énergie du mouvement, avec les résultats numériques obtenus du potentiel réel (décrits dans la partie II). Le bon accord entre tous ces résultats, dans une grande région du puits qui va près du bord, confirme la validité des différents traitements analytiques.

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale et perspectives

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié la dynamique classique d'un atome dans le réseau conservatif carré à 2D. Nous nous sommes proposés de décrire cette dynamique suivant un traitement qui va au-delà du traitement statistique habituel. Notre approche analytique nous a conduits à chercher les solutions pour les équations du mouvement avec différentes approximations : les régimes observés dans les diverses configurations du réseau carré bleu ont nécessité une adaptation à chaque cas.

Le réseau carré bleu permet d'obtenir des régimes dynamiques très divers. Ces régimes s'obtiennent en changeant des paramètres contrôlables expérimentalement, comme l'énergie E de l'atome et notre paramètre α . Nous avons vu que ce dernier paramètre, qui résulte du déphasage entre les faisceaux lasers construisant le réseau, change la topographie du potentiel. Le puits où l'atome est confiné change donc de forme avec α , ce qui entraîne une modification des forces et donc une dynamique différente.

Le paramètre α est donc important puisque il donne accès à différents régimes dans le réseau carré bleu. Les premiers résultats sur le réseau carré ont montré qu'il fallait changer le signe du désaccord laser pour passer d'un régime chaotique à un autre régime, accroché en fréquence [Hennequin2010]. Le réseau carré bleu permet de faire cette transition de façon continue en faisant varier α . Lorsque le rapport entre les fréquences naturelles dans chaque direction $\sqrt{1+\alpha/1-\alpha}$ mène à une des résonances les plus fortes (1, 2 : 1, 3 : 1), le chaos est inhibé.

Nous nous sommes d'abord intéressés au cas de la quasi-dégénérescence, pour montrer que nous pouvons retrouver le phénomène de synchronisation conservative présente dans le réseau carré rouge pour toutes les valeurs (α, E) [Hennequin2010b]. Mais nous avons aussi trouvé que, à l'opposé du rouge, les synchronisations dans le réseau carré bleu sont des cas particuliers. Nous avons pu décrire analytiquement le cas général pour la dynamique dans le bleu comme un mouvement effectué par deux pendules découplés, leur fréquences d'oscillation ne satisfaisant aucune relation particulière. L'importance de cette description est qu'elle rassemble le comportement pour la plupart des valeurs de α , pour des énergies en dessous des seuils pour l'apparition du chaos. D'autre part, elle permet de voir les résonances comme venant perturber fortement ce mouvement découplé et invalidant cette description.

Les seuils d'énergie pour l'apparition du chaos, comme ceux pour l'apparition des accrochages, varient avec α . Nous avons étudié la dépendance du régime général découplé avec l'énergie. Le rapport entre les fréquences selon chaque coordonnée croît avec l'amplitude du mouvement selon une direction principale et décroît selon l'autre. Par conséquent, pour différentes valeurs de l'énergie de l'atome, des résonances apparaissent : nous avons pu déterminer la valeur de E pour l'apparition de certains accrochages, selon la valeur de α . Finalement, les énergies proches du seuil pour sortir du puits, E_T , mènent dans ces cas au régime chaotique, sauf en présence d'une synchronisation forte.

Nous avons réussi à traiter la synchronisation par quasi-dégénérescence avec le modèle analytique le plus simple. Nous avons montré que, en employant un modèle de deux oscillateurs de Duffing couplés, le mouvement s'écrit comme des solutions accrochées en fréquence qui représentent de simples oscillations. Nous remarquons que pour l'identification de la quasi-dégénérescence, le choix du système de coordonnées correct a été significatif. Dans notre système de coordonnées, le cas $\alpha = 0$ met en évidence les solutions accrochées décrites ensuite dans la synchronisation pour des α petits. Les conséquences de ce cas particulier passeraient inaperçues dans le système de coordonnées où le potentiel s'écrit comme complètement séparable.

Nous avons montré que l'accrochage est de différents ordres selon la résonance concernée. La synchronisation par quasi-dégénérescence a nécessité le développement du potentiel au quatrième ordre, alors que pour celle par résonance 2 : 1, ce développement doit prendre en compte le sixième ordre. Même si le modèle analytique pour ce dernier cas est plus compliqué, nous réussissons à décrire complètement le mouvement. En effet, les deux approximations permettent, dans chaque cas, de reproduire les résultats du potentiel réel dans une région du puits où les approximations sont valables. De plus, l'étendue de cette région va près des points cols du potentiel, c'est à dire le bord du puits.

Finalement, dans ces deux cas de résonance analysés, nous avons confirmé l'existence d'un phénomène de synchronisation capable d'inhiber le chaos dans un système conservatif. Cette approche, tirée d'une analogie avec les systèmes dissipatifs, a d'abord été développée pour le réseau carré rouge [Hennequin2010b]. À partir de notre traitement du réseau bleu, nous avons pu généraliser l'approche aux cas des fréquences naturelles différentes, et de plus, pour une résonance d'ordre supérieur.

La dynamique atomique considérée dans cette thèse se restreint à des énergies pour lesquelles l'atome est piégé dans le puits du potentiel. Il faut toutefois prendre en compte que les différents régimes étudiés auront des conséquences sur le comportement pour voyager entre les sites. Ils seront donc utiles pour déterminer les propriétés de diffusion dans le réseau, pour des énergies au dessus du seuil E_T . Cette étude sera nécessaire au moment de considérer la réalisation expérimentale du réseau carré. En particulier, la mesure du temps de vie de l'atome dans le réseau pourra être comparée au temps calculé selon le type de diffusion [Hennequin2010]. Ces mesures seront donc corrélées aux différents régimes dynamiques dans le puits, étudiés dans le présent travail.

Perspectives

Approche quantique du réseau carré bleu

Le prolongement naturel du travail fait sur le réseau carré bleu avec une approche classique est l'étude de sa limite quantique. La dynamique classique dans ce réseau présente des transitions entre différents régimes dynamiques, dont le chaos. L'étude de la limite quantique de ce système devra donc employer des outils du domaine du chaos quantique.

L'apparition du chaos dans un système classique est une conséquence des non-linéarités des équations du mouvement. Or, le monde quantique est décrit par une théorie linéaire et donc la présence d'un phénomène non linéaire comme le chaos dans la limite classique ne se traduit pas dans le régime quantique de façon évidente. De

plus, c'est la nature déterministe des équations qui permet de parler de sensibilité aux conditions initiales, une caractéristique essentielle du chaos. Le chaos quantique est, en conséquence, défini en fonction du chaos classique : il est la contrepartie quantique d'un système qui exhibe du chaos dans le régime classique.

L'identification, dans le monde quantique, des manifestations du chaos présent dans la dynamique classique a été l'objet de diverses approches [Reichl2004]. Ces manifestations, appelées « signatures du chaos », peuvent par exemple se trouver dans la distribution des valeurs propres de l'opérateur hamiltonien quantique [Seligman1985, Delande1986, Zakrzewski1995], et aussi comme des « scars » dans ses fonctions propres. Ces derniers mènent à une concentration de la densité de probabilité des fonctions propres, à cause des orbites classiquement instables du système [Heller1984, Antonsen1995, Wilkinson1996].

Pour calculer le hamiltonien quantique du réseau carré bleu, nous pourrions considérer les configurations où ce potentiel peut être approché au quatrième ordre (éq. 7.1), c'est à dire pour les valeurs petites de α . Dans ces cas, le potentiel a la forme de l'oscillateur harmonique quantique à 2D, plus deux termes anharmoniques et un terme de couplage. Le calcul du hamiltonien montre (voir l'Annexe) que ces termes sont paramétrés par un coefficient c_q , qui contrôle la limite quantique puisque il est lié à la profondeur du puits de potentiel U_0 . Les solutions à l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien ainsi calculé peuvent s'écrire dans la base formée par les fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique .

Le choix, dans notre traitement classique, de ne pas employer l'approche statistique habituelle pourra être gardé dans le monde quantique en limitant le nombre de valeur propres dans le puits. Ce nombre est lié à la profondeur du puits U_0 , qui apparaît dans le paramètre c_q contrôlant les termes anharmoniques et ceux du couplage. Nous devons donc faire un compromis pour avoir un puits suffisamment profond et un nombre raisonnable de valeurs propres.

L'obtention des fonctions propres du hamiltonien permettra de chercher des signatures du chaos comme les scars. Une autre approche consisterait à calculer les fonctions de Wigner associées, pour construire un espace des phases quantique qui révèle la présence du chaos [Bauke2011, Steuernagel2013]. Ces analyses impliqueraient d'augmenter α , en partant de $\alpha \ll 1$, pour identifier les conséquences du chaos qui apparaît dans la limite classique.

Finalement, pour justifier une telle approche, nous avons vérifié l'existence du chaos dans un système avec le potentiel approché donné par l'équation (7.1). Nous avons résolu numériquement les équations du mouvement déduites de ce potentiel, pour une valeur de $\alpha = 0.1$, et pour des énergies proches du seuil pour sortir du puits. Les simulations exhibent du chaos de façon similaire au potentiel complet, comme montré dans le chapitre 5 pour cette configuration. En revanche, pour $\alpha = 0.01$, le chaos n'apparaît pas et la dynamique présente des solutions synchronisées, de façon similaire à ce qui est observé dans le chapitre 7. Le potentiel approché donné par l'équation (7.1) serait donc un bon système modèle pour chercher des signatures du chaos.

Réseau à 3 faisceaux

L'approche déterministe employée pour décrire le réseau carré à 2D peut s'utiliser pour étudier des nombreuses géométries à 2D. Dans le chapitre 1, nous avons introduit

les réseaux optiques à 3 faisceaux, qui sont faciles à réaliser expérimentalement et à traiter analytiquement. Dans la configuration générale du réseau optique à 3 faisceaux, donnée par l'équation (1.31), nous avons quatre paramètres : les deux rapports d'intensité et deux angles décrivant la configuration des faisceaux lasers. Un cas particulier de ce réseau, qui réduit le nombre de paramètres, s'obtient en prenant deux faisceaux avec des vecteurs d'onde opposés, de sorte que leurs deux champs soient contrepropageants et forment une onde stationnaire. Nous pouvons choisir d'envoyer le troisième faisceau avec un vecteur perpendiculaire à la direction de l'onde stationnaire. Si les intensités des champs formant l'onde stationnaire sont les mêmes, cela donne une intensité totale où le seul paramètre à contrôler est le rapport d'intensités β entre l'onde stationnaire et le faisceau orthogonal. Cette configuration particulière du réseau donne une maille carrée. Nous pouvons développer autour d'un puits les potentiels bleu et rouge déduits de la distribution d'intensité au quatrième ordre, ce qui donne des expressions assez simples (voir l'Annexe). Nous avons donc tous les éléments pour chercher des différents régimes dynamiques en modifiant le nouveau paramètre β et l'énergie.

Bibliographie

- [Aguirre2009] J. Aguirre, R. L. Viana et M. A. F. Sanjuán, *Fractal structures in nonlinear dynamics*, Rev. Mod. Phys. **81**, 333 (2009).
- [Ammann1998] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck et N. Christensen, *Quantum delta-kicked rotor : experimental observation of decoherence*, Phys. Rev. Lett. **80**, 4111 (1998).
- [Antonsen1995] T. M. Antonsen, Jr., E. Ott, Q. Chen et R. N. Oerter, *Statistics of wave-function scars*, Phys. Rev. E **51**, 111 (1995).
- [Aspect1990] A. Aspect et C. Salomon, *Atomes refroidis par laser : vers le microKelvin*, Images de la Physique, Supplément au Courrier du CNRS 76, 74-80 (1990).
- [Bauke2011] H. Bauke et N. R. Itzhak, *Visualizing quantum mechanics in phase space* Web (2011).
- [Benettin1976] G. Benettin, L. Galgani et J.-M. Strelcyn, *Kolmogorov entropy and numerical experiments*, Phys. Rev. A **14**, 2338 (1976).
- [Billy2008] J. Billy, V. Josse, Z. C. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer et A. Aspect, *Direct observation of Anderson localization of matter-waves in a controlled disorder*, Nature **453**, 891-894 (2008).
- [Bloch2005] I. Bloch, *Ultracold quantum gases in optical lattices*, Nature Physics **1**, 23-30 (2005).
- [Braun2013] S. Braun, J. P. Ronzheimer, M. Schreiber, S. S. Hodgman, T. Rom, I. Bloch et U. Schneider, *Negative absolute temperature for motional degrees of freedom*, Science **339** (6115), 52-55 (2013).
- [Cash1990] J. R. Cash et A. H. Karp, *A variable order Runge-Kutta method for initial value problems with rapidly varying right-hand sides*, ACM Trans. Math. Soft. **16**, 201-222 (1990).
- [Chaikovsky1991] D. K. Chaikovsky et G. M. Zaslavsky, *Channeling and percolation in two-dimensional chaotic dynamics*, Chaos **1**, 463 (1991).
- [Cohen-Tannoudji1992] C. Cohen-Tannoudji, *Les Houches 1990, Session LIII, Fundamental systems in quantum optics*, édité par J. Dalibard, J.-M. Raimond et J. Zinn-Justin, North-Holland (1992).
- [Cohen-Tannoudji1993] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Atom-photon interaction*, Wiley, New York (1993).
- [Croquette2000] V. Croquette, Notes de cours Web (2000).

- [Dahan1996] M. B. Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin et C. Salomon, *Bloch oscillations of atoms in an optical potential*, Phys. Rev. Lett. **76**, 4508 (1996).
- [Dalibard2013] J. Dalibard, Notes de cours Web (2013).
- [Dangoisse1990] D. Dangoisse, P. Glorieux et D. Hennequin, *Nonlinear dynamics of a laser containing a modulated saturable absorber*, Phys. Rev. A **42** 1551 (1990).
- [Delande1986] D. Delande et J. C. Gay, *Quantum chaos and statistical properties of energy levels : numerical study of the hydrogen atom in a magnetic field*, Phys. Rev. Lett **57**, 2006 (1986).
- [Delande1994] D. Delande et A. Buchleitner, *Classical and quantum chaos in atomic systems*, Adv. At. Mol. Opt. Phys. **34**, 85-123 (1994).
- [Depret2002] B. Depret, *Réseau optique de pièges annulaires pour atomes froids : premiers pas vers la réalisation d'un ordinateur quantique*, Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Lille 1 (2002).
- [DiStefano2001] A. Di Stefano, *Refroidissement d'atomes par laser : de la diffusion spatiale dans un réseau quasi-périodique aux instabilités du piège magnéto-optique*, Thèse pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Lille 1 (2001).
- [Freistetter2000] F. Freistetter, *Fractal dimensions as chaos indicators*, Cel. Mech. Dyn. Astron. **78**, 211-225 (2000).
- [Grassberger1983] P. Grassberger et I. Procaccia, *Characterization of strange attractors*, Phys. Rev. Lett. **50**, 346-349 (1983).
- [Grassberger2007] P. Grassberger, *Grassberger-Procaccia algorithm*, Scholarpedia Web (2007).
- [Greene1979] J. M. Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. **20**, 1183 (1979).
- [Greiner2001] M. Greiner, I. Bloch, O. Mandel, T. W. Hänsch et T. Esslinger, *Exploring phase coherence in a 2D lattice of Bose-Einstein condensates*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160405 (2001).
- [Greiner2002] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch et I. Bloch, *Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms*, Nature **415**, 39-44 (2002).
- [Grynberg2001] G. Grynberg et C. Robilliard, *Cold atoms in dissipative optical lattices*, Phys. Rep. **355**, 335-451 (2001).
- [Guidoni1997] L. Guidoni, C. Triché, P. Verkerk et G. Grynberg, *Quasiperiodic optical lattices*, Phys. Rev. Lett. **79**, 3363-3366 (1997).
- [Guidoni1999] L. Guidoni et P. Verkerk, *Optical lattices : cold atoms ordered by light*, J. Opt. B : Quantum Semicl. Opt. **1**, R23-R45 (1999).
- [Hänsch1975] T. W. Hänsch et A. L. Schawlow, *Cooling of gases by laser radiation*, Opt. Commun. **13**, 68-69 (1975).

- [Heller1984] E. J. Heller, *Bound-state eigenfunctions of classically chaotic hamiltonian systems : scars of periodic orbits*, Phys. Rev. Lett. **53**, 1515 (1984).
- [Hennequin1990] D. Hennequin, D. Dangoisse et P. Glorieux, *Instabilities in a bimode CO₂ laser with a saturable absorber*, Opt. Commun. **79**, 200-206 (1990).
- [Hennequin2010] D. Hennequin et P. Verkerk, *How to characterize the dynamics of cold atoms in non-dissipative optical lattices ?*, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 2163-2177 (2010).
- [Hennequin2010b] D. Hennequin et P. Verkerk, *Synchronization in non-dissipative optical lattices*, Eur. Phys. J. D **57** 95-104 (2010).
- [Hennequin2013] D. Hennequin, D. Dangoisse et V. Zehnlé-Dhaoui, *Les Lasers - 3e édition*, Dunod, Paris (2013).
- [Hénon1964] M. Hénon et C. Heiles, *The applicability of the third integral of motion : some numerical experiments*, The Astronomical Journal **69**, 73 (1964).
- [Jaksch2005] D. Jaksch et P. Zoller, *The cold atom Hubbard toolbox*, Ann. Phys. **315**, 52-79 (2005).
- [Jerri1977] A. J. Jerri, *The Shannon sampling theorem - its various extensions and applications : a tutorial review*, Proc. IEEE **65**, 1565-1596 (1977).
- [Kittel2005] C. Kittel, *Introduction to solid state physics - 8th edition*, John Wiley & Sons, Inc. (2005).
- [Kuztnesov2012] S. P. Kuztnesov, *Hyperbolic chaos : a physicist's view*, Springer (2012).
- [Landau1981] L. D Landau et E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Elsevier (1981).
- [Lignier2005] H. Lignier, J. Chabé, D. Delande, J. C. Garreau et P. Szriftgiser, *Reversible destruction of dynamical localization*, Phys. Rev. Lett. **95**, 234101 (2005).
- [Lopez2012] M. Lopez, J.-F. Clément, P. Szriftgiser, J. C. Garreau et D. Delande, *Experimental test of universality of the Anderson transition*, Phys. Rev. Lett. **108**, 095701 (2012).
- [Lorenz1963] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atm. Sc. **20**, 130 (1963).
- [Marks1991] R. J. Marks, *Introduction to Shannon sampling and interpolation theory*, Springer-Verlag, New York (1991).
- [Metcalf1999] H. J. Metcalf et P. Van der Straten, *Laser cooling and trapping*, Springer-Verlag, New York (1999).
- [Panoiu2000] N. C. Panoiu, *Anomalous diffusion in two-dimensional potentials with hexagonal symmetry*, Chaos **10**, 166 (2000).
- [Paredes2004] B. Paredes, A. Widera, V. Murg, O. Mandel, S. Fölling, I. Cirac, G. V. Shlyapnikov, T. W. Hänsch et I. Bloch, *Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice*, Nature **429**, 277 (2004).

- [Perrin2011] H. Perrin, Notes de cours, Les Houches Web (2011).
- [Petsas1994] K. I. Petsas, A. B. Coates et G. Grynberg, *Crystallography of optical lattices*, Phys. Rev. A **50**, 5173 (1994).
- [Pfeuty2012] B. Pfeuty, Q. Thommen, F. Corellou, E. B. Djouani-Tahri, F.-Y. Bouget et M. Lefranc, *Circadian clocks in changing weather and seasons : lessons from the picoalga *Ostreococcus tauri**, BioEssays **34**, 781-790 (2012).
- [Phillips1992] W. D. Phillips, *Les Houches 1990 - Session LIII, Fundamental systems in quantum optics*, édité par J. Dalibard, J.-M. Raimond et J. Zinn-Justin, North-Holland (1992).
- [Phillips1998] W. D. Phillips, *Laser cooling and trapping of neutral atoms*, Rev. Mod. Phys. **70**, 721 (1998).
- [Pikovsky2001] A. Pikovsky, M. Rosenblum et J. Kurths, *Synchronization, a universal concept in nonlinear sciences*, Cambridge University Press, New York (2001).
- [Press1992] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling et B. P. Flannery, *Numerical recipes in C : the art of scientific computing*, Cambridge University Press (1992).
- [Reichl1984] L. E. Reichl et W. M. Zheng, *Field-induced barrier penetration in the quartic potential*, Phys. Rev. A **29**, 2186 (1984).
- [Reichl2004] L. E. Reichl, *The Transition to Chaos - Second Edition*, Springer-Verlag, New York (2004).
- [Rosenstein1993] M. T. Rosenstein, J. J. Collins et C. J. De Luca, *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D **65**, 117-134 (1993).
- [Rothen1999] F. Rothen, *Physique générale : la physique des sciences de la nature et de la vie*, Presses polytechniques et universitaires romandes, Lausanne (1999).
- [Schuster2005] H. G. Schuster et W. Just, *Deterministic chaos, an introduction - Fourth Edition*, Wiley, Weinheim (2005).
- [Seligman1985] T. H. Seligman, J. J. M. Verbaarschot et M. R. Zirnbauer, *Spectral fluctuation properties of hamiltonian systems : the transition region between order and chaos*, J. Phys. A : Math. Gen. **18**, 2751-2770 (1985).
- [Steck2000] D. A. Steck, V. Milner, W. H. Oskay et M. G. Raizen, *Quantitative study of amplitude noise effects on dynamical localization*, Phys. Rev. E **62**, 3461 (2000).
- [Stenger1993] F. Stenger, *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, Springer, New York (1993).
- [Stuernagel2013] O. Steuernagel, D. Kakofengitis et G. Ritter, *Wigner flow reveals topological order in quantum phase space dynamics*, Phys. Rev. Lett. **110**, 030401 (2013).
- [Verhulst1991] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems - second edition*, Springer, Berlin (1991).

- [Wavemetrics2013] Aide de Igor Pro Web (2013).
- [Wilkinson1996] P. B. Wilkinson, T. M. Fromhold, L. Eaves, F. W. Sheard, N. Miura et T. Takamasu, *Observation of « scarred » wavefunctions in a quantum well with chaotic electron dynamics*, *Nature* **380**, 608-610 (1996).
- [Zakrzewski1995] J. Zakrzewski, K. Dupret et D. Delande, *Statistical properties of energy levels of chaotic systems : Wigner or non-Wigner ?* *Phys. Rev. Lett.* **74**, 522 (1995).

Annexe

Annexe

Hamiltonien quantique du réseau carré bleu

Pour calculer le hamiltonien quantique du réseau carré bleu, nous considérons les configurations où son potentiel peut être approché au quatrième ordre, c'est à dire pour les petites valeurs de α . Dans ce cas, le potentiel est :

$$U_H = U_0 \left[(1 - \alpha) k^2 \frac{X^2}{2} + (1 + \alpha) k^2 \frac{Y^2}{2} - (1 - \alpha) k^4 \frac{X^4}{24} - (1 + \alpha) k^4 \frac{Y^4}{24} - k^4 \frac{X^2 Y^2}{4} \right] \quad (\text{A.1})$$

Dans notre approche classique, nous avons considéré la profondeur du puits U_0 et le vecteur d'onde k égaux à 1, pour simplifier la notation. Mais le paramètre U_0 , en particulier, devient significatif pour examiner la limite quantique, et donc nous le gardons.

Nous voyons que le potentiel (éq. A.1) a la forme de l'oscillateur harmonique quantique à 2D avec, en plus, deux termes anharmoniques et un terme de couplage :

$$U_H = m\omega_X^2 \frac{X^2}{2} + m\omega_Y^2 \frac{Y^2}{2} - a_X \frac{X^4}{24} - a_Y \frac{Y^4}{24} - b \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (\text{A.2})$$

En comparant les équations (A.1) et (A.2), nous trouvons :

$$a_X = U_0 (1 - \alpha) k^4 \quad (\text{A.3a})$$

$$a_Y = U_0 (1 + \alpha) k^4 \quad (\text{A.3b})$$

$$b = U_0 k^4 \quad (\text{A.3c})$$

D'autre part, nous posons :

$$\omega_X^2 = (1 - \alpha) \omega^2 \quad (\text{A.4a})$$

$$\omega_Y^2 = (1 + \alpha) \omega^2 \quad (\text{A.4b})$$

où

$$\omega^2 = \frac{U_0 k^2}{m} \quad (\text{A.5})$$

Nous pouvons donc ré-écrire le potentiel (éq. A.1) :

$$U_H = m\omega_X^2 \frac{X^2}{2} + m\omega_Y^2 \frac{Y^2}{2} - m\omega_X^2 k^2 \frac{X^4}{24} - m\omega_Y^2 k^2 \frac{Y^4}{24} - m\omega^2 k^2 \frac{X^2 Y^2}{4} \quad (\text{A.6})$$

Nous emploierons le changement de variables habituel pour l'oscillateur harmonique quantique :

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{\omega_X}{\hbar}} X \quad (\text{A.7a})$$

$$\hat{Y} = \sqrt{\frac{\omega_Y}{\hbar}} Y \quad (\text{A.7b})$$

$$\hat{P}_X = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_X}} P_X \quad (\text{A.7c})$$

$$\hat{P}_Y = \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_Y}} P_Y \quad (\text{A.7d})$$

$$H = \frac{P_X^2}{2} + \frac{P_Y^2}{2} + U_H = \hbar\omega\hat{H} \quad (\text{A.7e})$$

Finalement, nous pouvons simplifier la notation en prenant $k = 1$ et $m = 1$. Le hamiltonien quantique sera donc :

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \frac{1}{2} \left[\hat{\omega}_X \left(\hat{P}_X^2 + \hat{X}^2 \right) + \hat{\omega}_Y \left(\hat{P}_Y^2 + \hat{Y}^2 \right) \right] \\ & - c_q \left[\frac{1}{24} \left(\hat{X}^4 + \hat{Y}^4 \right) + \frac{1}{4\hat{\omega}_X\hat{\omega}_Y} \hat{X}^2\hat{Y}^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

où

$$\hat{\omega}_X^2 = 1 - \alpha \quad (\text{A.9a})$$

$$\hat{\omega}_Y^2 = 1 + \alpha \quad (\text{A.9b})$$

et c_q est le paramètre qui contrôle la limite quantique :

$$c_q = \frac{\hbar}{\sqrt{U_0}} = \frac{\hbar\omega}{U_0} \quad (\text{A.10})$$

Notons $|\psi_{n_X, n_Y}\rangle$ les kets associés aux fonctions propres de l'oscillateur harmonique quantique, où n_X et n_Y sont les nombres quantiques. Les solutions de l'équation de Schrödinger avec le hamiltonien donné par l'équation (A.8) peuvent s'écrire dans la base formée par ces kets. Les termes anharmoniques et ceux du couplage donnent :

$$\begin{aligned} - \left(\hat{X}^4 + \hat{Y}^4 \right) |\psi_{n_X, n_Y}\rangle = & -\frac{1}{4} \left[\sqrt{n_X}\sqrt{n_X-1}\sqrt{n_X-2}\sqrt{n_X-3} |\psi_{n_X-4, n_Y}\rangle \right. \\ & + \sqrt{n_Y}\sqrt{n_Y-1}\sqrt{n_Y-2}\sqrt{n_Y-3} |\psi_{n_X, n_Y-4}\rangle \\ & + 2\sqrt{n_X}\sqrt{n_X-1} (2n_X-1) |\psi_{n_X-2, n_Y}\rangle \\ & + 2\sqrt{n_Y}\sqrt{n_Y-1} (2n_Y-1) |\psi_{n_X, n_Y-2}\rangle \\ & + 6(n_X^2 + n_X + n_Y^2 + n_Y + 1) |\psi_{n_X, n_Y}\rangle \\ & + 2\sqrt{n_X+1}\sqrt{n_X+2} (2n_X+3) |\psi_{n_X+2, n_Y}\rangle \\ & + 2\sqrt{n_Y+1}\sqrt{n_Y+2} (2n_Y+3) |\psi_{n_X, n_Y+2}\rangle \\ & + \sqrt{n_X+1}\sqrt{n_X+2}\sqrt{n_X+3}\sqrt{n_X+4} |\psi_{n_X+4, n_Y}\rangle \\ & \left. + \sqrt{n_Y+1}\sqrt{n_Y+2}\sqrt{n_Y+3}\sqrt{n_Y+4} |\psi_{n_X, n_Y+4}\rangle \right] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned}
-\hat{X}^2\hat{Y}^2|\psi_{n_X,n_Y}\rangle &= -\frac{1}{4}[\sqrt{n_X}\sqrt{n_X-1}\sqrt{n_Y}\sqrt{n_Y-1}|\psi_{n_X-2,n_Y-2}\rangle \\
&+ \sqrt{n_X}\sqrt{n_X-1}(2n_Y+1)|\psi_{n_X-2,n_Y}\rangle \\
&+ (2n_X+1)\sqrt{n_Y}\sqrt{n_Y-1}|\psi_{n_X,n_Y-2}\rangle \\
&+ \sqrt{n_X+1}\sqrt{n_X+2}\sqrt{n_Y}\sqrt{n_Y-1}|\psi_{n_X+2,n_Y-2}\rangle \\
&+ \sqrt{n_X}\sqrt{n_X-1}\sqrt{n_Y+1}\sqrt{n_Y+2}|\psi_{n_X-2,n_Y+2}\rangle \\
&+ (4n_Xn_Y+2(n_X+n_Y)+1)|\psi_{n_X,n_Y}\rangle \\
&+ \sqrt{n_X+1}\sqrt{n_X+2}(2n_Y+1)|\psi_{n_X+2,n_Y}\rangle \\
&+ (2n_X+1)\sqrt{n_Y+1}\sqrt{n_Y+2}|\psi_{n_X,n_Y+2}\rangle \\
&+ \sqrt{n_X+1}\sqrt{n_X+2}\sqrt{n_Y+1}\sqrt{n_Y+2}|\psi_{n_X+2,n_Y+2}\rangle] \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

À partir de ces relations, nous pourrions calculer les fonctions propres du hamiltonien (éq. A.8).

Nous pourrions éviter une approche statistique en limitant le nombre de valeurs propres, c'est à dire les valeurs maximales de (n_X, n_Y) . Ces valeurs maximales n_{max} sont liées à la profondeur du puits U_0 , qui apparaît aussi dans le paramètre c_q (éq. A.10). En effet, $n_{max} \propto 1/c_q$. Cela implique donc un compromis entre un U_0 suffisamment grand et un nombre raisonnable de (n_X, n_Y) .

Réseau à 3 faisceaux

Considérons le cas particulier du réseau à 3 faisceaux dont les deux premiers faisceaux ont des vecteurs d'onde opposés $\mathbf{k}_2 = -\mathbf{k}_1$, de sorte que leurs deux champs soient contrepropageants et forment une onde stationnaire. Le troisième faisceau a un vecteur \mathbf{k}_3 perpendiculaire à la direction de l'onde stationnaire (figure A.7). Si les intensités des champs formant l'onde stationnaire sont les mêmes, $\beta_1 = \beta_2 = 1/\beta$, cela donne une intensité totale I :

$$I(\mathbf{r}) = |\beta \exp(iY) + 2 \cos X|^2 \quad (\text{A.13})$$

où $X = \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}$ et $Y = \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{r}$. Cette configuration particulière du réseau donne une maille carrée, et le seul paramètre à contrôler est le rapport d'intensités β entre l'onde stationnaire et le faisceau orthogonal.

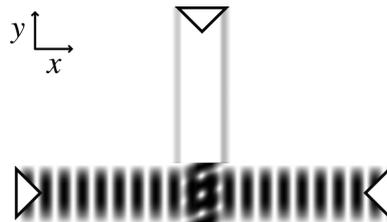


FIGURE A.7 – Une configuration particulière du réseau à 3 faisceaux. Les trois lasers ont même polarisation et même fréquence.

Le potentiel pour un tel réseau à 3 faisceaux à 2D, avec un désaccord positif, est :

$$U_+ = \beta^2 + \left(\cos X + \sqrt{3} \sin X \right) \left(\cos X + \sqrt{3} \sin X - 2\beta \cos Y \right) \quad (\text{A.14})$$

D'autre part, le potentiel avec un désaccord négatif est :

$$U_- = -\beta^2 - 4 \cos X (\cos X + \beta \cos Y) \quad (\text{A.15})$$

En développant ces potentiels au quatrième ordre autour du puits de potentiel, les équations du mouvement approchées sont, par exemple pour le désaccord négatif :

$$\ddot{X} = -4(2 + \beta)X + \frac{4}{6}(8 + \beta)X^3 + 2\beta Y^2 X \quad (\text{A.16a})$$

$$\ddot{Y} = -4\beta Y + \frac{2}{3}\beta Y^3 + 2\beta X^2 Y \quad (\text{A.16b})$$

Le traitement analytique de ces équations du mouvement pourra être similaire à celui développé dans cette thèse pour le réseau carré bleu.