HAL
open science

Schémas numériques d'advection et de propagation d'ondes de gravité dans les modèles de circulation océanique

Jérémie Demange

To cite this version:

Jérémie Demange. Schémas numériques d'advection et de propagation d'ondes de gravité dans les modèles de circulation océanique. Modélisation et simulation. Université de Grenoble, 2014. Français. NNT : 2014GRENM096 . tel-01104703v2

HAL Id: tel-01104703

https://theses.hal.science/tel-01104703v2

Submitted on 1 Jun 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

Arrêté ministériel : 7 Août 2006

Présentée par

Jérémie Demange

Thèse dirigée par **Eric Blayo**
et codirigée par **Laurent Debreu et Patrick Marchesiello**

préparée au sein **du Laboratoire Jean Kuntzmann**
et de **l'école doctorale MSTII**

Schémas numériques d'advection et de propagation d'ondes de gravité dans les modèles de circulation océanique.

Thèse soutenue publiquement le **21 Octobre 2014**,
devant le jury composé de :

M. Daniel Le Roux
Professeur, Université Claude Bernard Lyon 1, Rapporteur
M. Gurvan Madec
Directeur de recherche, CNRS-LOCEAN, Paris, Rapporteur
Mme Virginie Daru
Maître de conférences, ENSAM Paris-Tech/CNRS, Examinateur
M. Emmanuel Audusse
Maître de conférences, Université Paris 13, Examinateur
M. Emmanuel Maitre
Professeur, Grenoble INP, Président
M. Eric Blayo
Professeur, Université Grenoble-Alpes, Directeur de thèse
M. Laurent Debreu
Chargé de recherche, INRIA, Co-Directeur de thèse
M. Patrick Marchesiello
Directeur de recherche, IRD, Co-Directeur de thèse

Table des matières

Préambule **7**

1 Introduction **11**
1.1 De la bonne représentation des transferts d'énergie dans l'océan 12
1.1.1 Les équations primitives 12
1.1.2 Transferts, dissipation, cascade et non-linéarités 12
1.1.3 Caractéristiques numériques des modèles d'océan 16
1.1.4 Outil spectral : résolution effective 19
1.2 Ondes internes 20
1.2.1 De la bonne représentation des ondes internes 20
1.2.2 Développements numériques pour la propagation des ondes de gravité . . 22
1.3 Diffusion diapycnale 25
1.3.1 Energie potentielle disponible et circulation générale 25
1.3.2 Schémas d'advection, diffusion numérique, coordonnées verticales et effet Veronis 27

2 Traitement numérique des ondes de gravité **31**
2.1 Ondes externes de gravité 32
2.1.1 Résumé du rapport de recherche 32
2.1.2 On the use of a depth-dependent barotropic mode in ocean models : impact on the stability of the coupled barotropic/baroclinic system . . . 33
2.2 Ondes internes de gravité 67
2.2.1 Résumé du rapport de recherche 67
2.2.2 Numerical representation of internal waves propagation 68
2.3 Définition des modes sur grilles décalées et interpolation verticale 95
2.3.1 Rappel des transformations au niveau continu 95
2.3.2 Grille verticale et projection sur les modes 97
2.3.3 Discretisation consistante de l'équation elliptique $\partial_z[N^{-2}\partial_z M] = -\lambda M$. 99
2.3.4 Résolution discrète et interpolation verticale de la pression 101
2.3.5 Importances relatives liées aux discrétisations verticale et horizontale . . 103
2.3.6 Conclusion 111

3 Diffusion diapycnale et advection multidimensionnelle **113**
3.1 Introduction : diffusion numérique multidimensionnelle et diffusion diapycnale . 114
3.1.1 Orientation de la diffusion numérique. 114
3.1.2 Diffusion diapycnale artificielle 115
3.1.3 Méthodes usuelles de contrôle et d'orientation de la diffusion horizontale 116
3.1.4 Advection verticale et multidimensionnelle, monotonie 118
3.2 Impact des schémas verticaux 118
3.2.1 Schéma centré d'ordre 2 118

3.2.2 Présentation des schémas verticaux d'ordre élevés 119
3.2.3 Cas test numérique 123
3.2.4 Résultats et discussion 124
3.2.5 Conclusion 128
3.3 Aspects multidimensionnels 129
3.3.1 Erreurs multidimensionnelles, stabilité, précision et asymétrie numérique 129
3.3.2 Splitting espace-temps pour les écoulements incompressibles 132
3.3.3 Propriétés de monotonie 135
3.3.4 Conclusion 138

Conclusions/Perspectives **141**

Préambule

Spectre de variabilité des océans et modèles physiques

Les océans possèdent un spectre de variabilité extraordinaire ainsi qu'une multitude d'équilibres fragiles. Nous pouvons observer sur le schéma ci-dessous (1) la répartition des principaux processus océanographiques en fonction de leur échelle espace-temps : les océans sont parcourus de dynamiques multiples comme la circulation thermohaline (ces grands tapis roulant sous-marin dont le Gulf-Stream est un exemple), ou bien l'inébranlable flux et reflux des marées, les ondes internes ou encore le phénomène El Niño.

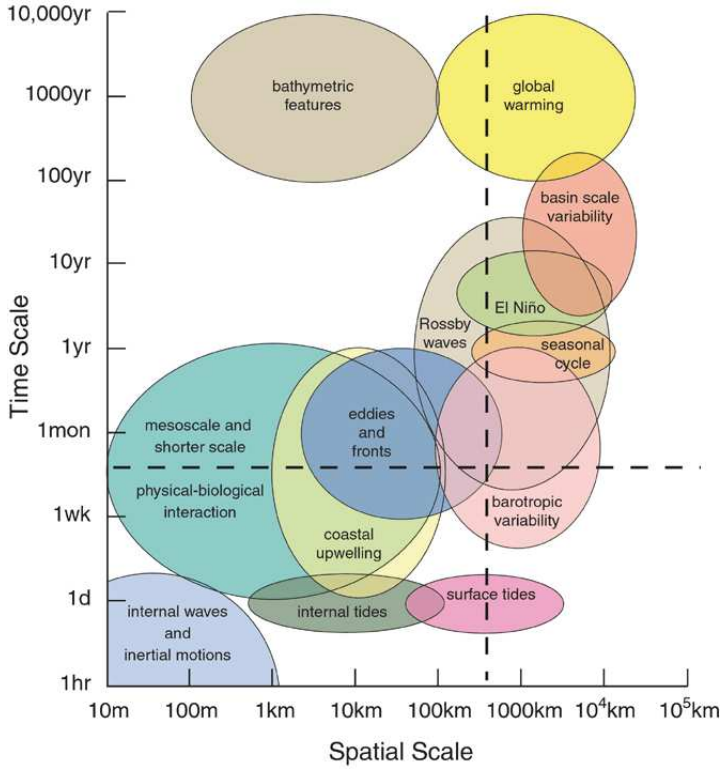


FIGURE 1 – Spectre de variabilité de la dynamique océanique [Chelton, 2001].

Nous pouvons également noter que beaucoup de ces dynamiques s'entremêlent et se superposent dans ce spectre. Il existe effectivement des interactions non-linéaires entre les échelles, des mécanismes de dissipation [Wunsh and Ferrari, 2004] et des phénomènes complexes de transfert d'énergies qui couplent fortement tout ces processus [Nycander, 2010] et qui se compensent finalement pour générer l'immuable circulation océanique globale [Munk and Wunsh, 1998].

Défi numérique : représenter, contrôler et équilibrer.

La modélisation des écoulements géophysiques doit tenir compte des particularités de la dynamique observée ; parmi celles-ci, nous pouvons déjà évoquer l'influence de la rotation de la terre ainsi que de la stratification. L'océan et l'atmosphère sont des milieux stratifiés-tournants dont les nombres de Reynolds associés sont gigantesques si bien qu'il est informatiquement totalement inenvisageable de calculer exactement toutes les échelles de l'écoulement. La variabilité atmosphérique et océanique s'étend sur une très large gamme d'échelles de la micro-échelle O(10^{-3} m, 10^{-3} s) à l'échelle globale O(10^{7} m, 10^{10} s). Les interactions entre échelles, qui sont très fortes quelle que soit la partie du spectre que l'on considère, doivent être représentées si l'on souhaite simuler des écoulements de façon réaliste. Par conséquent, un modèle, dont la résolution est finie, devra inclure les interactions avec les échelles non-résolues de l'écoulement. Ces interactions sont calculées par des fermetures turbulentes qui correspondent à des *paramétrisations sous-mailles* plus ou moins empiriques. Ajoutons à cela que les fluides géophysiques sont contraints par la présence de frontières complexes (e.g. ; les côtes, montagnes ou fonds marins complexes) ce qui nécessite de nombreuses adaptations à fournir aux modèles et méthodes classiques de la mécanique des fluides. A titre d'exemples, la présence de côte a un impact direct sur l'ordre des schémas numériques utilisables, la bathymétrie/topographie accidentée imposera de s'intéresser aux erreurs de troncatures dans le calcul du gradient de pression, la stratification (problème de mélange diapycnal (mélange au travers des couches de densité constante) artificiel) et la cascade directe et inverse d'énergie entre échelles (propriétés de conservation et de dissipation des schémas) sont des contraintes fortes lorsque l'on conçoit des schémas d'advection pour les traceurs et la dynamique, etc ...

Aujourd'hui la recherche océanographique s'appuie de plus en plus massivement sur des modèles numériques pour approcher les modèles physiques et utilisent pour cela des méthodes de discrétisation développées grâce aux mathématiques appliquées. La représentation physique de la dynamique océanique est donc tributaire de la consistance de la résolution numérique avec les équilibres en jeu. C'est à dire que la principale tâche du numéricien est de construire un "coeur numérique" doublement consistant dans la mesure où il représente le système d'équations voulu à convergence (très haute résolution spatiale et temporelle) et où les erreurs numériques sont soit minimisées, c'est à dire d'ordre très faible, soit orientées et contrôlées de sorte à respecter les équilibres énergétiques. Ceci est tout particulièrement vrai pour la modélisation de l'ensemble des processus de propagation d'ondes présents dans l'océan. Dans notre travail de recherche, nous nous intéressons en particulier dans la représentation de la propagation des ondes de gravité. La caractéristique d'un "bon" modèle réside finalement dans le fait que ses méthodes de résolution ne pénalisent pas les équilibres énergétiques du modèle physique. Or il existe des paradoxes et des conflits [Shchepetkin and McWilliams, 2009, Hecht, 2010].

Le défi du numéricien en modélisation océanique est donc (i) de comprendre et saisir les interactions physiques modélisées par le système d'équations à résoudre, (ii) proposer des méthodes adéquates quant à la bonne représentation de chaque processus présent, et finalement (iii) s'assurer que les erreurs de discrétisation n'entrent pas en conflits et n'altèrent pas les équilibres en jeu.

Présentation de la thèse et du manuscrit

Ce manuscrit s'articulera en trois parties. Une première partie introduira plus précisément les problématiques des différents processus étudiés : nous y présenterons la complexité des transferts énergétiques, quelques-unes des caractéristiques communes aux modèles numériques d'océan puis finalement les diagnostiques d'erreur modèle que nous pouvons utiliser afin de

quantifier et qualifier cette dernière. Enfin nous introduirons en détail le sujet des principaux développements de la thèse : la propagation des ondes externes et internes de gravité (décomposition en modes normaux) et sur la réduction de la diffusion diapycnale via l'étude (multidimensionnelle) des schémas d'advection. La seconde partie portera intégralement sur les ondes externes et internes de gravité et contiendra d'une part l'étude de stabilité de la séparation mode lent/mode rapide, et de l'autre l'étude de la discrétisation de la propagation des ondes baroclines. Chacune de ces études se présentera sous la forme d'un rapport de recherche Inria introduit et résumé en français. La troisième partie comportera les études sur les schémas d'advection, tout particulièrement les schémas d'advection dans la direction verticale et les aspects multidimensionnels. Nous finirons bien sûr par conclure et discuter de possibles perspectives.

Chapitre 1

Introduction

Ce chapitre permet d'introduire plus en détail les modèles numériques d'océan que nous allons étudier. Nous présenterons en premier les équations primitives résolues par ces modèles et nous nous intéresserons aux échanges et aux transferts d'énergie qui s'effectuent dans un fluide sous l'approximation de Boussinesq. Puis dans un second temps nous soulignerons les aspects numériques importants pour les développements de cette thèse : les coordonnées verticales, la diffusion diapycnale, les grilles de calcul et la propagation des ondes internes et de gravité. Nous y introduirons les études développées dans ce manuscrit.

Sommaire

1.1 De la bonne représentation des transferts d'énergie dans l'océan . 12

1.1.1 Les équations primitives 12

1.1.2 Transferts, dissipation, cascade et non-linéarités 12

1.1.3 Caractéristiques numériques des modèles d'océan 16

1.1.4 Outil spectral : résolution effective 19

1.2 Ondes internes 20

1.2.1 De la bonne représentation des ondes internes 20

1.2.2 Développements numériques pour la propagation des ondes de gravité 22

1.3 Diffusion diapycnale 25

1.3.1 Energie potentielle disponible et circulation générale 25

1.3.2 Schémas d'advection, diffusion numérique, coordonnées verticales et effet Veronis 27

1.1 De la bonne représentation des transferts d'énergie dans l'océan

1.1.1 Les équations primitives

Les équations primitives résolues par la majorité des modèles de circulation océanique sont dérivées des équations de Navier-Stokes en milieu tournant [Griffies and Adcroft, 2008, Marshall et al., 1997]. Elles contiennent une équation de conservation des moments, une équation d'incompressibilité qui se substitue à l'équation de conservation de la masse sous l'approximation de Boussinesq (faibles variations de densité : on appelle ρ_0 la densité de référence), une balance hydrostatique verticale issue de l'anisotropie dynamique de l'océan (échelles horizontales grandes devant échelles verticales) équilibrant la dérivée verticale de la pression p et la densité ρ, et finalement une équation de conservation de l'énergie généralement construite comme deux équations de traceurs actifs (salinité et température) qui, couplés à une équation d'état que nous supposerons linéaire conduisent à l'évolution de la densité. L'ensemble des études effectuées dans ce manuscript peuvent se faire en configuration 2D verticale. La vitesse du fluide sera donc représentée par $\mathbf{u} = (u(x,z,t), w(x,z,t))$ dans les directions horizontales x et verticales z.

Dans une configuration cartésienne (système géopotentiel orthogonal (x,z) : z représente la direction verticale et x la direction zonale), les équations primitives s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t u + (\mathbf{u}\cdot\nabla)u + \dfrac{1}{\rho_0}\partial_x p = 0 \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \partial_z p = -\rho g \\ \partial_t \rho + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho = 0 \\ \partial_t q + \mathbf{u}\cdot\nabla q = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où q désigne un traceur passif.

1.1.2 Transferts, dissipation, cascade et non-linéarités

Les océans sont le siège de multiples processus dynamiques qui évoluent à des échelles différentes et qui sont couplés via de fortes non-linéarités. Ces interactions sont difficiles à appréhender et à quantifier. En effet la complexité de la thermodynamique océanique, les interactions avec l'atmosphère et les côtes, le déferlements des ondes internes, le mélange vertical, les marées ou les vagues font de l'océan un système énergétique très difficile à appréhender. Cependant, grâce à des années d'observations et d'études, l'impact de certaines répartitions et transferts d'énergies sur la circulation océanique générale peut être désormais estimé et schématisé ([Wunsh and Ferrari, 2004], voir diagramme 1.1).

Variations d'énergie dans un fluide adiabatique (fermé, sans transfert de chaleur aux frontières)

On peut cependant étudier les cycles et les variations d'énergie qui s'opèrent dans un fluide Boussinesq avec une équation d'état linéaire en introduisant des termes de dissipation symbolisés par les tenseurs de viscosité τ et de diffusion κ. Ces termes peuvent représenter de la diffusion moléculaire, une paramétrisation physique ou de la dissipation numérique. Nous discuterons de leurs différences plus loin.

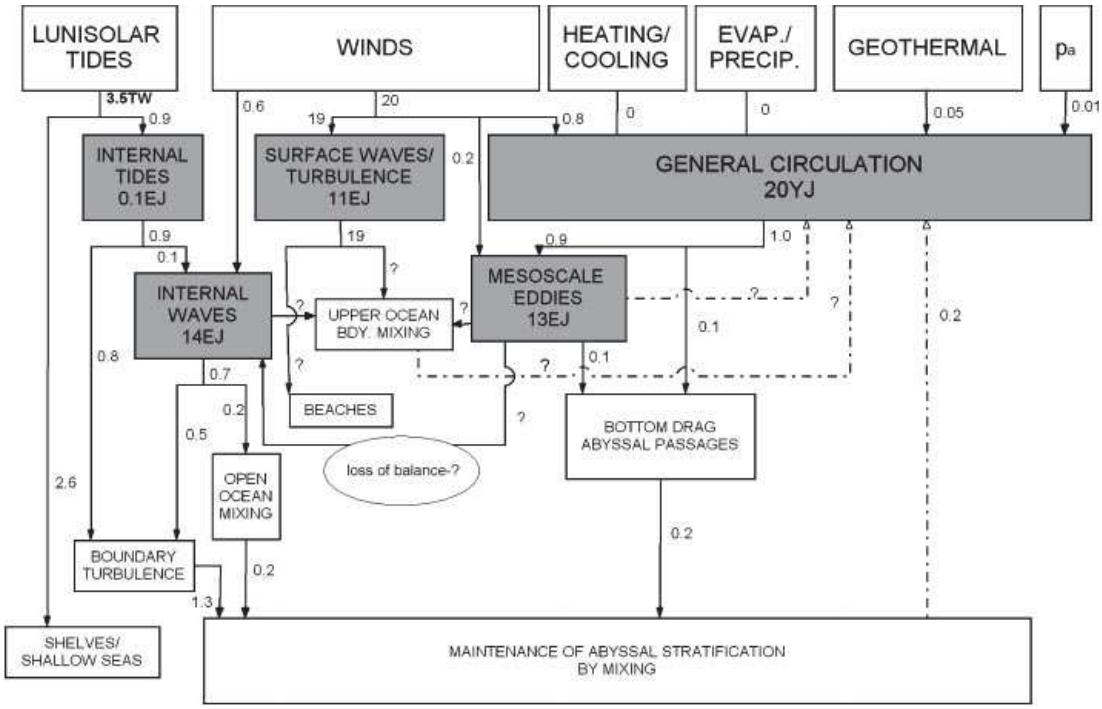


FIGURE 1.1 – Diagramme de répartition des transfert d'énergies en Joules d'après C. Wunsh et R. Ferrari [Wunsh and Ferrari, 2004]

En incorporant ces termes nous sommes en mesure d'étudier les transferts d'énergies et les équilibres que les modèles numériques doivent respecter :

$$\begin{cases} \rho_0[\frac{\partial}{\partial_t}\mathbf{u} + \mathbf{u}.\nabla\mathbf{u}] = -\nabla p + \rho\mathbf{g} + \nabla.\tau\nabla\mathbf{u} \\ \frac{\partial}{\partial_t}\rho + \mathbf{u}.\nabla\rho = \nabla.\kappa\nabla\rho \\ \nabla.\mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Si l'on note $E_c = \int_V \frac{1}{2}\rho_0\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}dV$, l'énergie cinétique, $E_p = \int_V \rho gzdV$, l'énergie potentielle, la variation d'énergie cinétique, pour un volume fixé V, s'écrit alors :

$$\frac{D}{Dt}E_c = -\oint_S [p\mathbf{u} + \rho_0\mathbf{u}(u^2+v^2+w^2) - \mathbf{u}.\tau].\mathbf{n}dS - \int_V g\rho wdV - \epsilon$$

avec $\epsilon = \int_v \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial_{x_j}}$, le taux de dissipation visqueux (notation d'Einstein) et $\mathbf{n}$ la normale à la surface S.
La variation de l'énergie potentielle donne :

$$\frac{D}{Dt}E_p = -\oint_S gz\rho\mathbf{u}.\mathbf{n}dS + \int_V g\rho wdV + \kappa\oint_S z\nabla\rho.\mathbf{n}dS - \kappa gA(\overline{\rho}_{top} - \overline{\rho}_{bottom})$$

où $\overline{\rho}$ représente la moyenne horizontale de la densité et $A = \oint_S dS$ l'interface de transfert du domaine.

Dans le cas d'un système fermé adiabatique (qui n'échange pas d'énergie avec l'extérieur) on trouve :

$$\begin{cases} \dfrac{D}{Dt}E_c = -\Phi_z - \epsilon \\ \dfrac{D}{Dt}E_p = \Phi_z + \Phi_i \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $\Phi_z = \int_V g\rho w dV$ et $\Phi_i = -\kappa g A(\overline{\rho}_{top} - \overline{\rho}_{bottom})$.
Φ_z que l'on retrouve dans l'équation de variation de l'énergie potentielle avec un signe opposé, donne le taux d'échange réversible dû au flux de flottabilité, tandis qu' ϵ représente l'énergie mécanique convertie irréversiblement en énergie interne par dissipation visqueuse.
De la même manière on retrouve dans l'évolution de l'énergie potentielle, le terme Φ_z qui est responsable de l'échange réversible avec l'énergie cinétique, tandis que Φ_i représente la conversion en énergie interne.

Ces transferts inter-énergie régissent toute la stabilité de la circulation thermohaline. La part de ces transferts attribuable à chacun des processus océanique est extrêmement difficile à identifier clairement dans l'océan. D'autres équations de transfert d'énergies similaires peuvent être dérivées et varier en fonction de la thermodynamique utilisée (adiabatique, non-adiabatique) et des hypothèses de dérivation des équations étudiées (Boussinesq, hydrostatique)[Hughes et al., 2009, Nycander, 2010, Tailleux, 2013a, Jochem, 2009].

Dissipation, cascade et non-linéarités

Malgré la complexité évidente de ces interactions, on considère que la plupart de ces échanges et de ces transferts d'énergies à l'intérieur de l'océan se font via des mécanismes de dissipation de l'énergie cinétique et potentielle, des grandes échelles vers les petites échelles : les petites échelles représentent un puits d'énergie et dissipent les énergies stockées aux grandes échelles. C'est à dire qu'un système énergétique comme l'océan est souvent représenté sous la forme d'une cascade d'énergie des grandes échelles vers les petites avec une certaine pente : c'est la cascade directe ([Vallis, 2006, Skamarock, 2004]). Dans une autre mesure, les processus à différentes échelles échangent aussi de l'énergie via les non-linéarités. Et ces échanges semblent s'effectuer des petites échelles vers les grandes échelles : une partie de l'énergie stockée aux petites échelles migre vers les grandes échelles : c'est la cascade inverse ([Venaille et al., 2011]). Ces deux cascades sont représentées schématiquement sur le spectre d'énergie cinétique 1.2.

Les transferts énergétiques aux échelles de résolutions qui nous intéressent (circulation globale et régionale) restent généralement représentés par de la dissipation (cascade directe). Les modèles numériques correspondant doivent donc incorporer cette dissipation et s'assurer de sa bonne orientation.

Diffusion moléculaire, paramétrisation physique sous-maille et dissipation numérique

Il faut maintenant bien faire la différence entre trois types de diffusion que l'on trouve dans les modèles de circulation océanique et que nous avons représentés dans l'équation 1.2 sous la forme des tenseurs de viscosité τ et de dissipation κ :

1. **La diffusion moléculaire :** dans le système d'équations 1.2, la diffusion moléculaire est généralement très faible dans l'océan et devient négligeable devant les mécanismes de transports et de convection aux échelles qui nous importent. Elle reste cependant

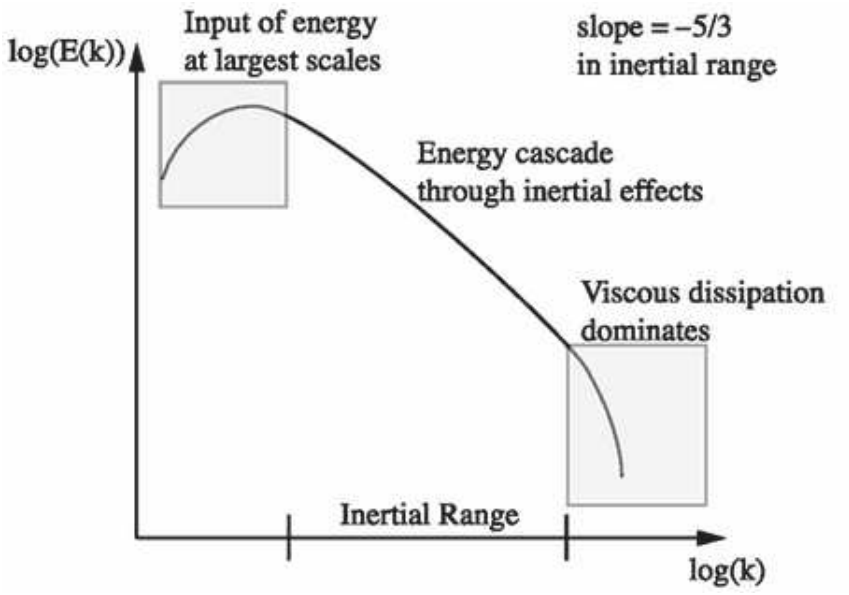


FIGURE 1.2 – Représentation schématique de la cascade d'énergie $E(k)$ en fonction des échelles (k représente le nombre d'onde)

primordiale pour comprendre les cycles de transferts et et les couplages énergétiques qui interviennent dans l'océan.

2. **La paramétrisation sous-maille :** lors de la définition des grilles de calcul espace-temps les échelles non-représentées (sous-maille) doivent être incorporées dans le modèle sous la forme de paramétrisations. Celles-ci prennent souvent la forme d'une dissipation du champ moyen pour satisfaire les notions de cascade directe.

3. **La diffusion numérique :** le troisième type de diffusion est la diffusion numérique. Celle-ci est directement liée aux erreurs de troncatures des schémas numériques utilisés (schémas d'advection, filtres explicites, etc.). Elle peut être utile et exigée par la physique du modèle notamment à très haute résolution (chocs) mais reste souvent un artefact créant des zones de mélange et de dissipation d'énergie artificielles qui ne sont a priori pas contrôlées.

Nous étudierons exclusivement dans ce manuscrit la dissipation des schémas numériques en essayant de la justifier et de lui donner un sens physique en cohérence avec les études de transfert d'énergie. Cette dissipation numérique est à l'heure actuelle (i.e. aux résolutions qu'on utilise) non négligeable et même parfois supérieure pour certains processus aux paramétrisations sous mailles mentionnées ci-dessus [Roberts and Marshall, 1998]. Or, dans l'idéal, les propriétés de mélange (i.e diffusion) devraient être entièrement fixées par une paramétrisation physique et non par les schémas. Il faut insister sur cette différence de sorte à ne pas perdre la cohérence et la consistance des modèles lors de migrations à des échelles de résolutions plus petites.

Une solution à étudier serait également d'estimer si cette dissipation numérique intrinsèque, lorsqu'elle est mise à des fins de monotonie de la solution, pourrait faire office de paramétrisation implicite des processus sous-maille. Ce dernier point est un sujet de recherche important à l'heure actuelle dans d'autres domaines de la mécanique des fluides (méthodes ILES (Implicit Large Eddy Simulation) : [Grinstein et al., 2007, Fox-Kemper and Menemenlis, 2008]).

1.1.3 Caractéristiques numériques des modèles d'océan

Dans ce paragraphe, nous présentons un ensemble de caractéristiques communes à la plupart des modèles numériques de l'océan.

Coordonnées verticales généralisées : la dynamique océanique est contrainte par un domaine d'évolution de géométrie complexe (côtes et fond des océans), domaine qui est également en forte interaction en surface avec l'atmosphère. Le choix de grille horizontale est discuté dans ce qui suit mais le choix de la coordonnée verticale d'un modèle numérique est fondamental. La dérivation des équations primitives suivant des coordonnées généralisées permet de mieux intégrer les contraintes d'échanges, de conditions limites au fond de l'océan en sélectionnant une coordonnée verticale particulière qui apporte les propriétés que l'on souhaite (suivi de terrain, géopotentielle, etc . (voir le diagramme 1.3 pour des exemples)).

Si l'on effectue un changement de variable (et donc de repère) $z = s(x, z, t)$ avec s la coordonnée généralisée, les équations primitives se réécrivent ([Adcroft and Hallberg, 2006]) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_s + u\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_s + \Omega\frac{\partial u}{\partial s} & = & -\frac{1}{\rho_0}\left[\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_s + \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x}\right] \\ \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_s + \left.\frac{\partial hu}{\partial x}\right|_s + \frac{\partial h\Omega}{\partial s} & = & 0 \\ \frac{\partial p}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z} & = & -\rho g \\ \left.\frac{\partial \rho}{\partial t}\right|_s + u\left.\frac{\partial \rho}{\partial x}\right|_s + \Omega\frac{\partial \rho}{\partial s} & = & 0 \end{array}\right. \tag{1.4}$$

avec $\Omega = \left.\frac{\partial s}{\partial t}\right|_z + u\left.\frac{\partial s}{\partial x}\right|_z + w\frac{\partial s}{\partial z}$ la vitesse orthogonale à une courbe de niveau $s = c_{ste}$ et $h = \frac{\partial z}{\partial s}$ l'épaisseur de couche entre deux niveaux s constants.

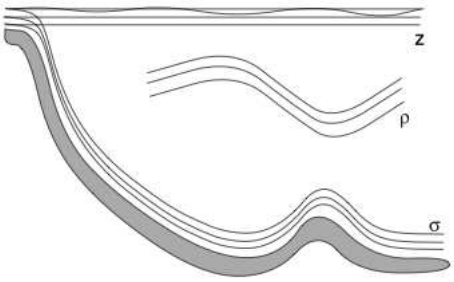


FIGURE 1.3 – Représentation schématique de quelques coordonnées verticales : z (géopotentielles), σ (suivi de terrain) et ρ (isopycnale : densité constante). [Griffies, 2003]

Le choix des coordonnées verticales va donc dépendre des enjeux de la modélisation que l'on choisit de privilégier. Les trois ingrédients principaux à prendre en compte sont : une bonne représentation des couches limites de fond et de surface ainsi qu'une représentation de l'océan intérieur permettant de satisfaire une contrainte liée à la physique de l'océan : les processus de diffusion se font essentiellement le long des couches de densité constantes (nous reviendrons plus loin sur ce point important).

Les trois coordonnées verticales principales utilisées dans les modèles d'océans sont :

- La coordonnée géopotentielle $s = z$, orthogonale à l'axe verticale, première utilisée historiquement ([Bryan, 1969]), et toujours très répandue permet une bonne résolution en surface et donc une bonne résolution de la propagation des interactions océan-atmosphère dans la couche limite de surface. Mais elle pose un problème de représentation de la topographie. En effet les niveaux géopotentiels conduisent à une représentation "en marche d'escaliers" de la bathymétrie qui peut générer une irrégularité du fond de l'océan, rendant ainsi difficile une bonne représentation de la couche limite de fond. Cependant, à grande échelle (et en dehors de certaines zones particulières comme les détroits), les couches de densité constante correspondent dans une certaine mesure aux lignes géopotentielles ce qui diminue les effets de diffusion au travers de ces couches de densité constante (isopycnes).

- Les coordonnées suivi-de-terrain $s = \sigma = \dfrac{z+\eta}{H}$ (où H est la profondeur de l'océan et η l'élévation de la surface) : les niveaux verticaux sont répartis sur la colonne d'eau en suivant la bathymétrie et les conditions aux limites de fond sont naturellement introduites. Des généralisations des coordonnées σ permettent également de diminuer les épaisseurs des couches lorsque l'on se rapproche de la surface permettant également ainsi une bonne représentation de la surface. Même si cette coordonnée est celle qui est la plus représentée dans les modèles d'océans régionaux, elle induit deux problèmes majeurs : le calcul du gradient horizontal de pression (1.4) (qui est désormais la somme de deux termes), les pentes entre les surfaces iso-sigma et des surfaces isopycnales peuvent être très fortes, ceci conduisant à devoir maitriser la quantité et l'orientation de la diffusion numérique afin de ne pas violer les propriétés physiques.

- Les coordonnées isopycnales $s = \rho$ [Bleck and Smith, 1990] sont par construction le meilleur choix pour la représentation de l'océan intérieur des écoulements de masse d'eau à grandes échelles. Elles permettent également de limiter les erreurs de calcul de gradient de pression. Cependant les problèmes d'intersection avec la topographie (voire avec la surface de l'océan) sont bien présents. Un autre problème majeur est que la couche limite de surface est très peu stratifiée ce qui conduit à une faible résolution verticale à cet endroit et par conséquent beaucoup de paramétrisations de mélanges ne sont plus effectives. L'autre problème réside dans le choix des valeurs des densités de référence pour la définition des couches.

L'hybridation de ces différent types de coordonnées est possible mais se heurte à de nombreux problèmes numériques qui en fait un sujet de recherche au coeur des préoccupations des modélisateurs de l'océan [Bleck, 2002]. L'évolution vers des coordonnées arbitrairement lagrangienne eulérienne et leur adaptation aux caractéristiques/contraintes de la physique océanique est également à l'étude [Adcroft and Campin, 2004, White et al., 2009, Leclair and Madec, 2011]. Ce type de coordonnées obtient pour l'instant de bon résultats sur des cas simples académiques mais leur implémentation dans des cas plus réalistes reste encore à être validée.

Grilles structurées et grilles décalées : les modèles d'océans discrets sont basés sur résolution des équations primitives sur des grilles structurées (différence finie - volumes finis) et utilisent une discrétisation explicite des schémas numériques sur des grilles de calculs décalées. Le choix des grilles structurées se justifie (en dehors du coût de calcul) par rapport aux grilles non-structurées (mettant en oeuvre par exemple la méthode des éléments finis) par la difficulté qu'ont ces dernières méthodes à conserver les équilibres principaux et la présence

de modes numériques attachés à ces discrétisations [Le Roux, 2012, Danilov, 2013]. Ce n'est, aujourd'hui, que lors de migration, à très haute résolution, vers des géométries plus complexes que les grilles non structurées deviennent vraiment intéressantes (celles-ci sont utilisées pour des applications littorales).

Pour des raisons à la fois de bonne représentation de la propagation d'onde et le maintien de propriétés de conservation, raisons que nous détaillerons dans l'ensemble de ce manuscrit, les grilles horizontales et verticales utilisées dans la quasi-totalité des modèles d'océan sont des grilles décalées. La combinaison la plus courante est composée d'une grille horizontale de type Arakawa C et d'une grille verticale de Lorenz (voir diagramme 1.4). Ces grilles permettent une meilleure représentation des calculs du gradient de pression et de la continuité (les calculs des gradients d'un schéma centré du second ordre se font sur Δx au lieu de $2\Delta x$ sur une grille horizontale non décalée) et permet une gestion plus simple des conditions limites (flux à la côte et en surface) et donc des propriétés de conservation.

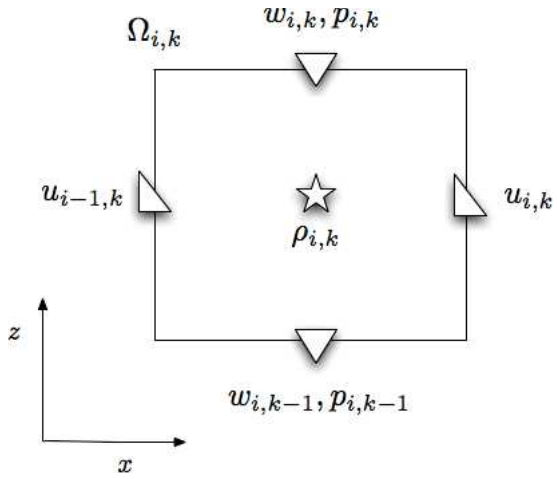


FIGURE 1.4 – Grille de résolution 2D verticale : Arakawa C / Lorenz.

Schémas temporels : La discrétisation temporelle explicite est habituellement préférée aux schémas implicites : ces derniers exigent l'inversion d'un système dont le ratio coût/précision est trop important aux échelles qui nous importent. C'est à dire qu'un algorithme implicite implique l'inversion d'une matrice creuse qui pénalise numériquement les modèles et rend très délicate la parallélisation. De plus ces méthodes sont très peu adaptées à la bonne représentation des phénomènes de transport : elles génèrent de la dispersion.

L'utilisation de schémas explicites induit néanmoins des contraintes de type Courant-Friedrich-Levy (CFL) sur le pas de temps qui est inversement proportionnel à la vitesse de l'onde à représenter : plus l'onde est rapide et plus le pas de temps doit être petit. Nous verrons un exemple de la gestion de ce type de contraintes dans l'étude du splitting en mode barotrope/modes baroclines. Très peu de modèles utilisent des schémas espace-temps permettant d'élever l'ordre total du schéma en construisant les schémas spatiaux en fonction du nombre de Courant [Lörcher and Munz, 2007] tout en ayant de très bonnes propriétés de stabilité. Cependant quelque soit l'ordre de ces schémas nous verrons que l'extension au multidimensionnel introduit certaines difficultés.

La dérivation en coordonnées généralisées sera utile pour introduire le problème de la diffusion diapycnale qui sera présenté en détail plus loin : le choix de la coordonnée verticale induit

une orientation artificielle de la diffusion issue des schémas d'advection qu'il faut contrôler. Le choix des grilles décalées sera discuté dans l'étude de la propagation des ondes internes : l'erreur de représentation des vitesses de phases numériques dépend effectivement du type de grille et de schéma d'interpolation utilisés. La contrainte CFL due aux schémas temporels explicites sera illustrée lors de l'intégration des ondes internes ou de la mise en place du splitting en mode barotrope. De même afin de contrôler la diffusion diapycnale il est nécessaire de s'intéresser aux aspects multidimensionnels des schémas d'advection.

1.1.4 Outil spectral : résolution effective

L'augmentation de la résolution spatiale et temporelle conduit naturellement à la représentation d'un spectre d'énergie plus large dans la solution numérique. En conséquence, au cours des dernières années, la compréhension de la dynamique de méso-échelle et sous-méso-échelle océanique s'est considérablement améliorée [Capet et al., 2008]. L'augmentation de la résolution numérique conduit invariablement à aplanir les spectres d'énergie cinétique lorsque la théorie de la dynamique sous-méso-échelle quasi-géostrophiques (QG) prévoit des pentes spectrales proches de k^{-2} à k^{-3} (avec k le nombre d'onde) ou plus raides. L'injection d'énergie cinétique initiée par la déformation méso-échelle et renforcée par l'instabilité sous-meso-échelle est le mécanisme sous-jacent qui peut produire un aplanissement des spectres d'énergie. L'advection joue alors un rôle important en transportant l'énergie cinétique des grandes échelles vers la sous-mésoéchelle d'une part et de la méso-échelle vers les grandes échelles d'autre part (cascade inverse).
L'existence d'une cascade d'énergie vers la sous-meso-échelle (dissipation) implique que la fermeture numérique peut être rendue plus cohérente avec la fermeture physique. Néanmoins, la dissipation dans les modèles reste en partie dominée par l'erreur de diffusion numérique plutôt que par la paramétrisation physique liée aux termes sous-maille.

[Skamarock, 2004] a proposé une approche basée sur l'étude des spectres d'énergie cinétique, qui sont "une mesure directe de la dégradation de la dynamique du modèle" La figure 1.5 représente sa définition de la "résolution effective", axée sur le comportement de la queue du spectre, c'est à dire que la résolution effective λ_{eff} est définie par la première longueur d'onde qui marque le début de la chute exponentielle en queue de spectre due à la dissipation numérique. Cette résolution effective s'évalue en fonction d'un certain nombre de points de grilles : $\lambda_{eff} = N\Delta x$ ($7 \leq N \leq 20$ cf [Marchesiello et al., 2011]).

Skamarock suggère que cette résolution effective est proche de la limite de résolution des modèles aux différences finies. Un argument fort en ce sens est donné par l'analyse linéaire des schémas numériques. Il est montré dans [Durran, 2010] que les erreurs de phase des schémas d'advection du quatrième ordre sont significatives à des résolutions inférieures à $10\Delta x$ tandis que les erreurs des schémas de 2e ordre commencent beaucoup plus tôt à $50\Delta x$. Cela montre non seulement les limites réalisables de la résolution effective mais aussi sa forte dépendance de l'ordre des schémas de discrétisation.

Il est montré dans [Marchesiello et al., 2011] que l'échelle de dissipation à $10\Delta x$ semble décrire correctement la zone de décroissance exponentielle de l'énergie, mais il existe aussi une gamme intermédiaire de dissipation (qui peut atteindre l'ensemble du spectre) où celle-ci peut être moins perceptible mais non négligeable. De plus, les filtres numériques ne sont pas réduit à des termes explicites de dissipation spatiale mais peuvent apparaître notamment dans les schémas temporels. Ils apparaissent en particulier dans le couplage des termes barotropes et baroclines (comme nous le verrons par la suite).

Il est donc primordial de bien identifier toutes les sources de dissipation numérique dans les modèles pour en assurer leur bon comportement au niveau énergétique.

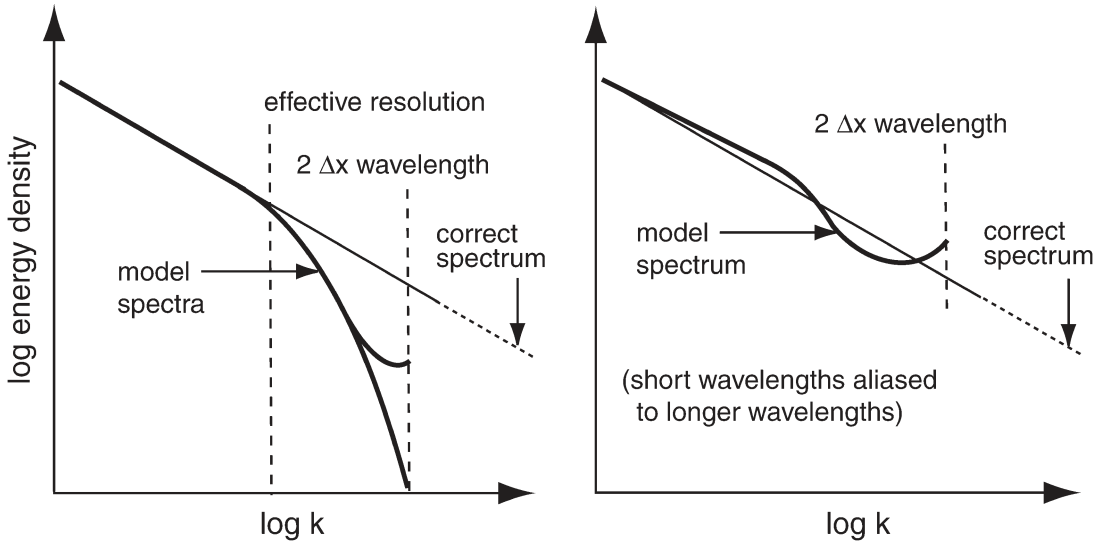


FIGURE 1.5 – Diagramme représentatif de la définition de la résolution effective selon Skamarock [Skamarock, 2004] en fonction du spectre d'énergie cinétique.

1.2 Ondes internes

1.2.1 De la bonne représentation des ondes internes

L'océan est le siège de propagation d'ondes de gravité (internes et externe). Ces ondes sont générées en grande partie par l'interaction de la marée barotrope avec la bathymétrie et sont majoritairement responsables du maintien du mélange abyssal [Laurent and Garrett, 2002, Capet et al., 2008, Garrett and Kunze, 2007]. En effet, même si les observations et les mesures *in situ* en profondeur sont rares, il est connu que la dissipation de ces ondes représente une partie importante de l'énergie nécessaire pour maintenir le mélange vertical et forcer la circulation thermohaline mondiale [Munk and Wunsh, 1998] (voir diagrammes 1.7 et 1.6).

Il est donc crucial :

(i) que le transport de ces ondes de gravité soit bien représenté.

(ii) que l'énergie associée soit dissipée correctement par les processus turbulents.

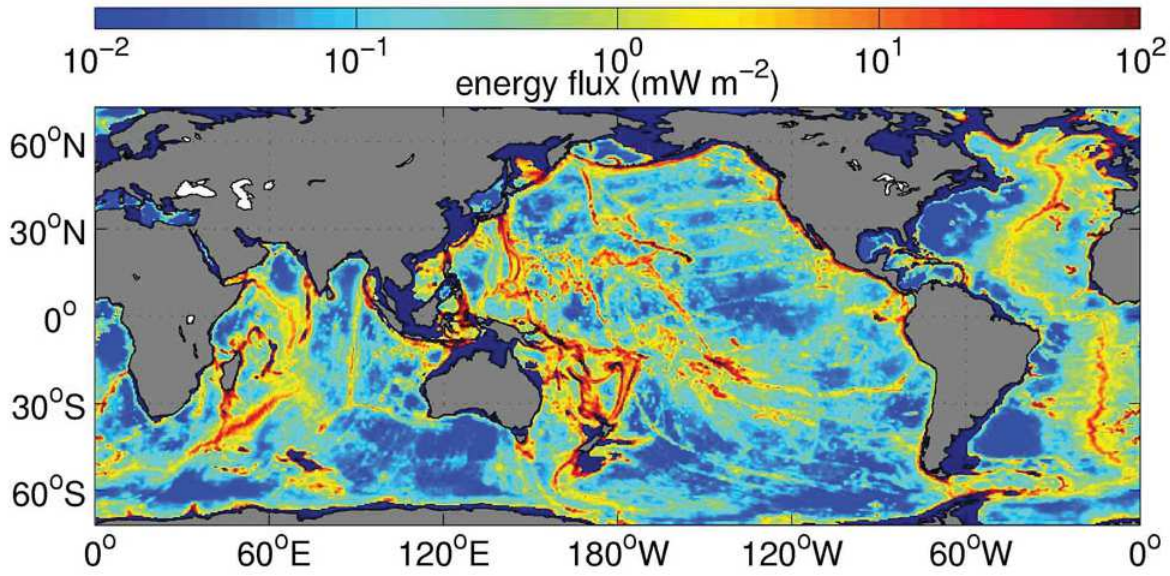


FIGURE 1.6 – Estimation des flux d'énergies baroclines (correspondant aux ondes internes) dans l'océan suivant une paramétrisation de St Laurent [Laurent and Garrett, 2002]

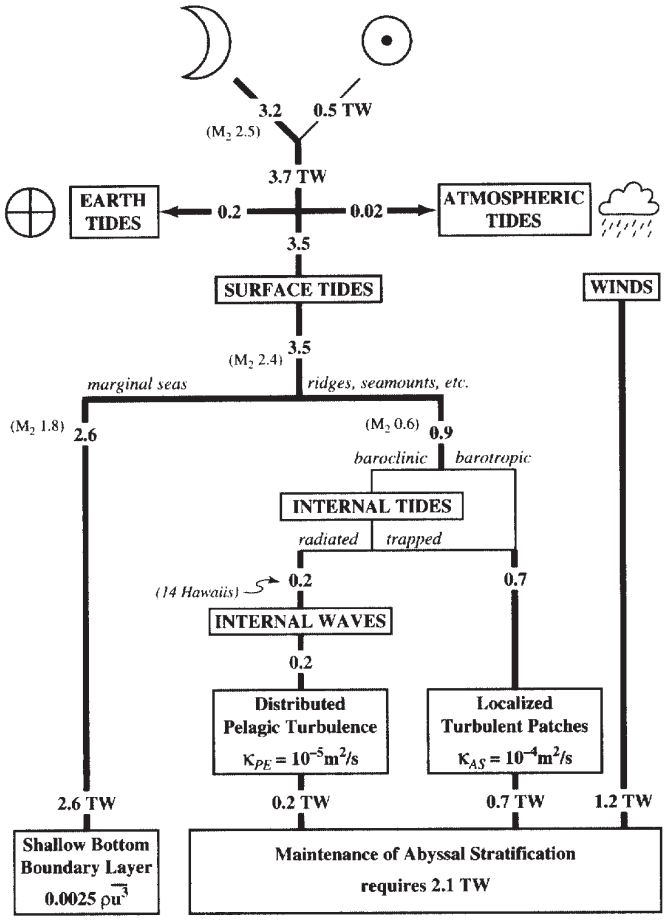


FIGURE 1.7 – Diagramme de répartition des énergies utiles au maintient de la circulation thermohaline et du mélange abyssal par W. Munk et C. Wunsh [Munk and Wunsh, 1998]

1.2.2 Développements numériques pour la propagation des ondes de gravité

La propagation des ondes de gravité peut être identifiée lors de la linéarisation des équations primitives 1.1 autour d'un système au repos ($u_0, w_0 = 0$) et d'une stratification verticale moyenne $\overline{\rho}$ qui permet d'obtenir le système d'équation sur les variables perturbées (u', w', ρ', p')(1.5), auquel on associe la condition cinématique linéarisée d'évolution de la surface libre η 1.6 :

$$\begin{cases} \partial_t u' + u_0 \partial_x u' + \dfrac{1}{\rho_0} \partial_x p' = 0 \\ \partial_x u' + \partial_z w' = 0 \\ \partial_z p' = -\rho' g \\ \partial_t \rho' + w' \partial_z \bar{\rho} = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\partial_t \eta = w(0) = -\partial_x \int_{-H}^{0} u = 0 \tag{1.6}$$

Les perturbations de vitesses et de pression u' et p' peuvent s'exprimer dans une base de modes verticaux orthogonaux M_q :

$$u'(x,z,t) = \sum_q u_q(x,t) M_q(z), p'(x,z,t) = \rho_0 g \sum_q h_q(x,t) M_q(z)$$

où les modes verticaux sont les modes propres du problème de Sturm Liouville :

$$\Lambda M_q = \lambda_q M_q \tag{1.7}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-H} = 0 \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\frac{N^2(0)}{g} M_q(0) \tag{1.9}$$

où $\Lambda = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(N^{-2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$ et $N^2(z) = -\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z}$ la Brünt-Vaisala frequency est supposée positive (la stratification est stable). Comme ceci est détaillé dans la section (2), les projections des vitesses et pression sur cette base de mode propre satisfont les systèmes hyperboliques suivants :

$$\begin{cases} \partial_t u_q + g \partial_x h_q = 0 \\ \partial_t h_q + \dfrac{c_q^2}{g} \partial_x u_q = 0 \end{cases} \tag{1.10}$$

où les c_q correspondent donc aux vitesses de propagation et sont donnés par $c_q = 1/\sqrt{\lambda_q}$). Deux problèmes particuliers se dessinent lors de l'étude des systèmes 1.10 :

1. **La séparation ondes barotrope/barocline :** Les ordres de grandeurs de ces vitesses sont obtenues en résolvant le problème de Sturm Liouville avec une condition à la limite en surface approchée $\left.\dfrac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0$ (cf 2). Ceci permet de séparer les ondes de gravité en une onde de gravité rapide ($c_0 \simeq \sqrt{gH}$) aussi appelée onde externe (ou barotrope) associée à l'évolution de la surface libre et des ondes plus lentes $c_q \ll c_0$ aussi appelées ondes internes (ou baroclines). . La composante barotrope, comparée aux composantes baroclines, devient donc une forte contrainte sur le pas de temps pour les schémas explicites

qui doivent respecter une condition de Courant-Friedrich-Levy : $\frac{c_0 \Delta t}{\Delta x} \leq \alpha$ ($\alpha = 1$ pour fixer les idées). Une méthode numérique possible, très souvent utilisée pour s'affranchir de cette contrainte, consiste à intégrer l'évolution de cette onde de gravité séparément, en utilisant un pas de temps adapté. Cette séparation d'échelle est appelée méthode de splitting barotrope [Killworth et al., 1991, Skamarock and Klemp, 1991, Hallberg, 1997, Higdon and de Szoeke, 1997].

Cette méthode est couramment utilisée en faisant l'approximation d'un mode barotrope constant sur la verticale, ce qui effectivement ce que l'on obtient en approchant la condition à la limite en surface. Cette approximation implique un biais dans la décomposition verticale qui mène à une non-orthogonalité de la séparation des composantes lentes et rapides et peut donc être synonyme d'instabilité numérique. L'utilisation d'un mode barotrope constant sur la verticale nécessite donc l'implémentation d'un filtre temporel sur l'onde barotrope pour contrer les erreurs de splittings (si des non-linéarités sont de plus présentes, celles-ci peuvent également justifier l'emploi d'un filtre temporel afin d'éviter les phénomès d'aliasing) [Shchepetkin and McWilliams, 2005]. Or ce filtre temporel est responsable d'une partie non négligeable de la dissipation de l'énergie barotrope aux grandes échelles (voir diagramme de spectre 1.8).

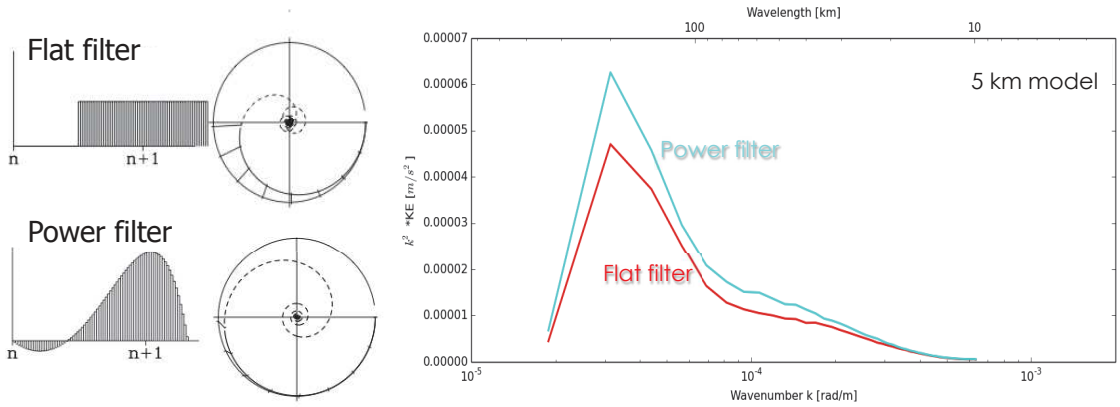


FIGURE 1.8 – Stencils (centrés en $n+1$) et diagrammes d'amplification complexe de deux filtres barotropes (à gauche) et impact de ces filtres sur l'énergie aux grandes échelles. (Présentation de P.Marchesiello, COMODO 2014, Bénodet France)

Nous mènerons une étude de stabilité de cette séparation d'échelles en utilisant la théorie linéaire de décomposition en modes verticaux [Blayo and Debreu, 2005]. Nous identifierons une source d'erreur de splitting en réintégrant l'équation de surface-libre comme condition limite du problème de Sturm-Liouville qui permet la définition des modes verticaux. Cette étude permettra de quantifier et de déterminer la dissipation minimale exigée pour corriger les erreurs de splitting. Nous proposerons un nouveau schéma d'intégration du système barotrope contenant une dissipation optimale pour permettre une meilleure conservation de cette énergie barotrope tout au long de l'intégration du modèle.

2. **Propagation et dissipation des ondes internes :** Les discrétisations spatiales des systèmes (1.10) sont directement en lien, dans les équations primitives, avec la discrétisation des deux termes suivants : le gradient horizontal de pression, la divergence horizontale dans l'équation de continuité. Ces termes sont communément approchés par des

schémas centrés d'ordre 2. L'utilisation de schémas centrés d'ordre peu élevé implique une représentation du transport très dispersive et donc un ralentissement ou une accélération de ces ondes dans le milieu qui peut mener à de dangereuses interactions non-linéaires et des accumulations d'énergies aux grandes échelles puisqu'elle n'est pas correctement dissipée [Gouillon, 2010] (voir figure 1.9).
Il faut donc améliorer la représentation numérique de ces phénomènes de propagation et pour ceci nous étudierons à la fois l'impact du choix de la grille de calcul (décalée ou non), de l'ordre d'approximation et nous regarderons les possibilités d'ajouter une diffusion supplémentaire contrant l'apparition, sur une grille horizontale non décalée, de modes numériques. Nous montrerons également comment la décomposition en modes verticaux permet de construire des schémas espaces temps pour le traitement des ondes internes.

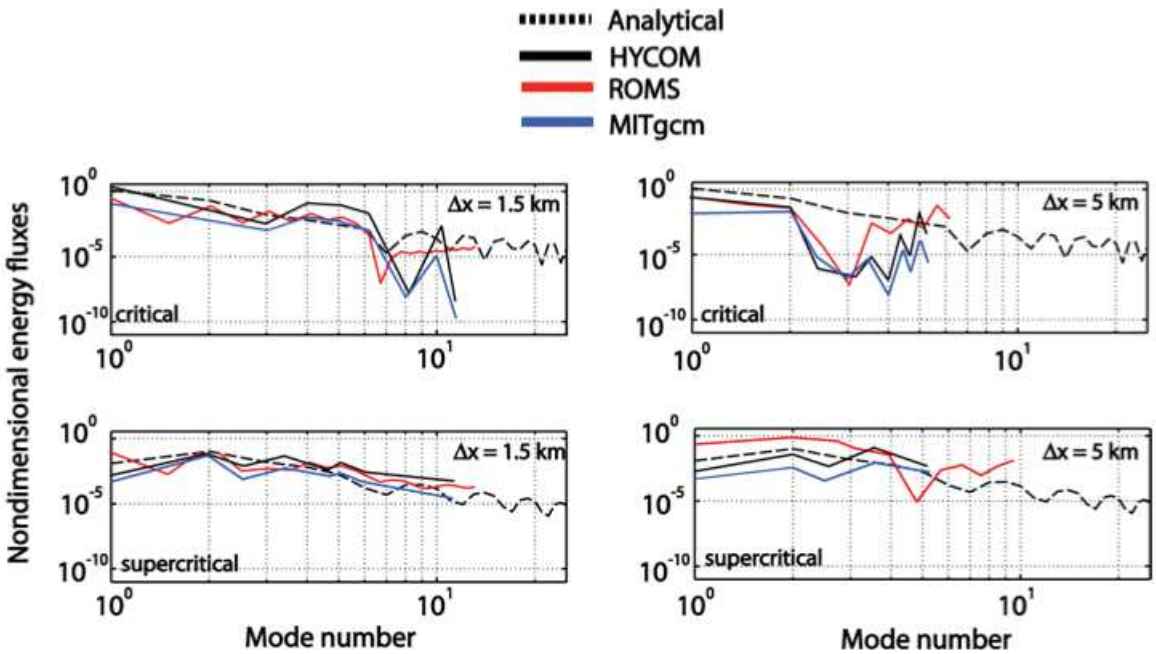


FIGURE 1.9 – Diagnostique des flux d'énergies en fonction des modes pour des régimes critiques et super-critiques et des résolutions horizontales différentes (Thèse de Flavien Gouillon [Gouillon, 2010]). On remarque le bruit numérique crée aux petites échelles et l'accumulation de l'énergie aux grandes échelles qui mène à une surestimation de l'énergie barotrope pour certains modèles (ROMS (Regional Ocean Modelling System) (`http://www.romsagrif.org`, `https://www.myroms.org/`), HYCOM(HYbrid Coordinate Ocean Model (`https://hycom.org/`) et MITgcm (M.I.T. General Circulation Model (`http://mitgcm.org/`).

3. **Discrétisation verticale :** nous nous attacherons ensuite à identifier théoriquement et numériquement les vitesses d'advection de ces ondes internes. Les vitesses numériques de propagation des ondes baroclines dépendent de la discrétisation horizontale mais également de la discrétisation verticale et et des méthodes d'interpolation dans cette direction. En effet, si ces vitesses sont théoriquement obtenues comme valeurs propres d'un problème de type Sturm-Liouville, l'expression discrète de ce système est fonction d'un certain nombre de choix de discrétisation (discrétisation de l'équilibre hydrostatique notamment) mais également de la grille verticale de calcul (grilles Charney-Phillips et

Lorenz). Nous comparerons le déphasage induit par la de discrétisation verticale à celui induit par la discrétisation horizontale.

1.3 Diffusion diapycnale

1.3.1 Energie potentielle disponible et circulation générale

Dans un écoulement adiabatique, l'énergie totale du système doit rester constante. Or dans certains systèmes naturels quasi-adiabatiques (atmosphère, océan), on observe des variations importantes de l'énergie cinétique. Les uniques réservoirs d'énergie disponibles pour un tel échange via un processus de friction sont donc l'énergie interne et l'énergie potentielle.
L'*énergie potentielle totale*, somme de l'énergie interne et de l'énergie potentielle du système, proposée en 1903 par Margules [Margules, 1903], n'est évidement plus une bonne mesure pour caractériser ces échanges adiabatiques. Dans un fluide stratifié stable chauffé (ou refroidi) localement de façon adiabatique, il y a une source (ou un puits) d'*énergie potentielle totale* à cet endroit qui induit, dans les deux cas, une perturbation et donc une augmentation de l'énergie cinétique. Les signes ne correspondent pas.

Le concept d'*energie potentielle disponible* (Available potential energy, APE) a été introduit en 1955 par Edward Lorenz [Lorenz, 1955] dans le but d'isoler ces échanges adiabatiques dans les fluides stratifiées Aussi décrit-il l'APE comme la partie de l'*énergie potentielle totale* qui peut se transformer de façon réversible en énergie cinétique dans un fluide adiabatique. Lorenz énumère les propriétés caractéristiques de cette énergie dont il a besoin :

1. La somme de l'énergie cinétique et de l'APE est conservée dans un fluide adiabatique.
2. L'APE est entièrement déterminée par la distribution de masse.
3. L'APE est nulle si la stratification est horizontale et stable.

En 1995, Winters et al. [Winters et al., 1995], reprennent cette définition dans le but d'identifier clairement les processus adiabatiques et diabatiques dans le cas d'une équation d'état linéaire. Pour cela ils introduisent la notion supplémentaire d'*énergie potentielle de référence* (Backgroung Potential Energy, BPE) qu'ils lient à l'APE en écrivant :

1. La BPE est définie comme le minimum d'énergie potentielle atteignable par une redistribution adiabatique de la densité.
2. L'énergie potentielle disponible (ou manquante) pour une conversion adiabatique en énergie cinétique est donc définie comme la simple différence entre l'énergie potentielle actuelle du système et cette BPE.

En formalisant :

$$E_p = g \int_V \rho z dV$$

$$BPE = E_b = g \int_V \rho z_\star(\mathbf{x}, t) dV$$

$$APE = E_a = E_p - E_b = g \int_V \rho (z - z_\star(\mathbf{x}, t)) dV$$

où ρ représente la densité, z la position verticale et $z_\star(\mathbf{x}, t)$, la profondeur de référence adiabatique du volume infinitésimal de fluide de densité $\rho(\mathbf{x}, t)$.
C'est à dire que pour un système fermé, totalement adiabatique, la variation de BPE est nulle,

$\frac{D}{Dt}E_b = 0$, et la seule contribution à l'énergie cinétique provenant d'une conversion de l'énergie potentielle est celle provenant de l'APE : $\frac{D}{Dt}[E_p \Rightarrow E_c] = \frac{D}{Dt}E_a$.

Dans le cas d'un système fermé, en suivant les notations et les dérivations des systèmes 1.2 et 1.3 on obtient une variation d'énergie potentielle disponible qui s'écrit :

$$\frac{D}{Dt}E_a = \frac{D}{Dt}(E_p - E_b) = \Phi_z - (\Phi_d - \Phi_i)$$

avec,

$$\frac{D}{Dt}E_b = \Phi_d = -\kappa g \int_V \frac{dz_\star}{d\rho}|\nabla\rho|^2 dV = \kappa\rho_0 \int_V [\frac{|\nabla\rho|}{|dz_\star/d\rho|^{-1}}]^2 N_\star^2 dV$$

et $N_\star^2 = -\frac{g}{\rho_0}\partial_z\rho^\star$ la fréquence de Brünt-Vaisala prise à l'état de référence ($\star$).

La modification de l'*énergie potentielle de référence*, E_b par érosion de l'*énergie potentielle disponible*, n'est donc possible qu'à travers des flux diapycnaux (c'est à dire qui traversent les surfaces isopycnes ou isoneutrales). En effet comme la fonction $z_\star$ garde la même valeur en chaque point d'une surface isopycnale, la dérivation de la fonction de Heaviside utilisée par Winters et al. pour estimer leur *énergie potentielle de référence* donne un flux exclusivement diapycnal : si $|\nabla\rho| = 0$, alors $\Phi_d = 0$. Aussi ces flux dyapicnaux sont-ils responsables de la dégradation diabatique de l'*énergie potentielle disponible*.

Ce mélange diapycnal est donc un mélange diabatique et irréversible. Par conséquent, si l'on considère l'intérieur de l'océan comme étant adiabatique, ces flux doivent être minimisés et les modèles d'océans doivent respecter cet anisotropie de mélange pour ne pas mélanger artificiellement les masses d'eau.

(Remarque : plus récemment dans deux articles parus en 2013, Remi Tailleux propose l'étude et la dérivation de l'APE avec une équation d'état non-linéaire [Tailleux, 2013a] et discute de la différence mécanique des échanges exergie/APE [Tailleux, 2013b]).

Coordonnées isopycnales : on peut arriver à une conclusion similaire si l'on observe le système des équations primitives adiabatiques en coordonnées isopycnales : $s = \rho$. Dans ce cas $\Omega = 0$ et le système 1.4 s'écrit :

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_\rho + u\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_\rho = -\frac{1}{\rho_0}\left[\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_\rho + \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}\right] \\ \left.\frac{\partial h}{\partial t}\right|_\rho + \left.\frac{\partial hu}{\partial x}\right|_\rho = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \tag{1.11}$$

Dans ce cas le transport des épaisseurs de couche $h = \frac{\partial z}{\partial \rho}$ de densité ne se fait donc plus que dans la direction isopycnale (à ρ constant) et on peut en conclure que le mélange induit par l'advection sur ces couches reste strictement isopycnal aussi. Cette théorie fut aussi développée par Gent et Mc Williams [Gent and McWilliams, 1989] pour dériver une paramétrisation isopycnale du mélange turbulent.

Mesures et Expériences : le peu de mesures en milieu réaliste ou d'expériences en laboratoires [Ledwell et al., 1993, Ledwell et al., 1998, Ledwell et al., 2011, Lee et al., 2002] permettent d'exhiber des mesures de diffusion diapycnales et isopycnales qui confirment cette théorie d'anisotropie de mélange. En effet les données mesurées donnent toutes un écart conséquent de plusieurs ordres de grandeur entre les deux coefficients 1.10 :

$$\begin{cases} \kappa_{dia} = 10^{-5} m^2.s^{-1} \\ \kappa_{iso} = 10^{3} m^2.s^{-1} \end{cases}$$

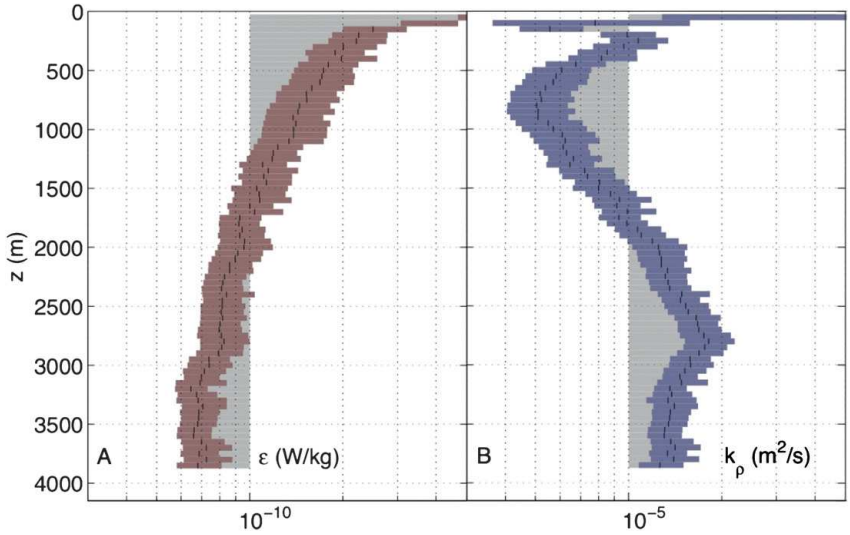


FIG. 3. Mean profiles of (a) turbulent kinetic energy dissipation ε and (b) diapycnal diffusivity k_ρ, estimated from velocity microstructure data. Mean estimates of ε and k_ρ are off scale in the upper 100 m, reaching values of 1×10^{-7} W kg^{-1} and 1×10^{-3} m^2 s^{-1}, respectively.

FIGURE 1.10 – Estimation des profils verticaux de dissipation de l'energie cinétique turbulente (ϵ) et du coefficient de diffusion diapycnale (κ) issue d'une étude de Ledwell [Ledwell et al., 2011]

Le mélange induit par la diffusion numérique doit donc respecter le caractère quasi-adiabatique et isopycnal dans les modèles d'océans : c'est à dire que le mélange des traceurs actifs comme passifs doit s'effectuer majoritairement dans la direction isopycnale tandis que la quantité de mélange diapycnal dans les zones de mélanges doit être donné par une paramétrisation physique et non les erreurs de troncatures des schémas numériques.

1.3.2 Schémas d'advection, diffusion numérique, coordonnées verticales et effet Veronis

La plus grande source de diffusion numérique potentiellement diapycnale dans les modèles d'océan est issue de la diffusion intrinsèque aux schémas d'advections [Griffies et al., 2000, Marchesiello et al., 2009, Lemarié et al., 2012, Hill et al., 2012]. Par défaut, cette diffusion numérique est orientée le long des grilles de calcul via la discrétisation des flux advectifs dans ces directions. Or ces grilles de calcul ne sont pas forcément alignées avec le repère isopycnal dans tout le domaine de résolution (i.e pour $s = \rho$). Il apparaît alors ce que l'on appelle l'effet Véronis ou "spurious diapycnal diffusion" [Veronis, 1975, Griffies et al., 2000] : la diffusion numérique crée des cellules artificielles de mélange diapycnal alors que la physique de l'écoulement est quasiment laminaire et adiabatique.

Il en résulte des transferts d'énergie et des mélanges qui affectent la stabilité de la stratifica-

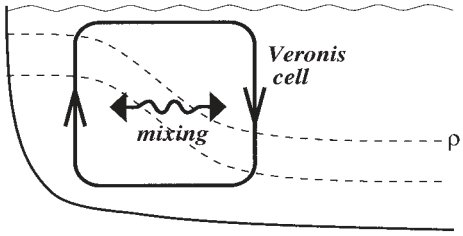


FIGURE 1.11 – Schématisation de l'effet Véronis dans un modèle d'océan [Roberts and Marshall, 1998]

tion verticale et dégradent les caractéristiques des masses d'eaux dans les modèles numériques. Un exemple de cette dérive est illustré sur la figure 1.12 sur laquelle on peut observer la dégradation des masses d'eaux profondes (Salinité à $1000m$) censées être relativement stables après l'intégration par le modèle ROMS qui utilise une grille suivant des coordonnées σ et un schéma décentré d'ordre 3 pour l'advection des traceurs. Nous proposerons donc une étude multidimensionnelle de cette diffusion numérique axée sur deux point principaux :

1. Nous mènerons une étude visant à l'amélioration des schémas d'advection dans la direction verticale, la plupart des études antérieures s'étant concentrées sur la direction horizontale.
2. Nous étudierons ensuite l'impact des aspects multidimensionnels des schémas d'advection sur l'anisotropie du mélange diapycnal. Nous étudierons en particulier :
   (i) la stabilité multidimensionnelle et la conservation de l'asymétrie des propriétés numériques horizontale/verticale. Nous comparerons notamment l'utilisation de méthodes espace-temps à l'utilisation de schémas temporels d'ordres élevés.
   (ii) l'implémentation de schémas monotones en plusieurs dimensions.

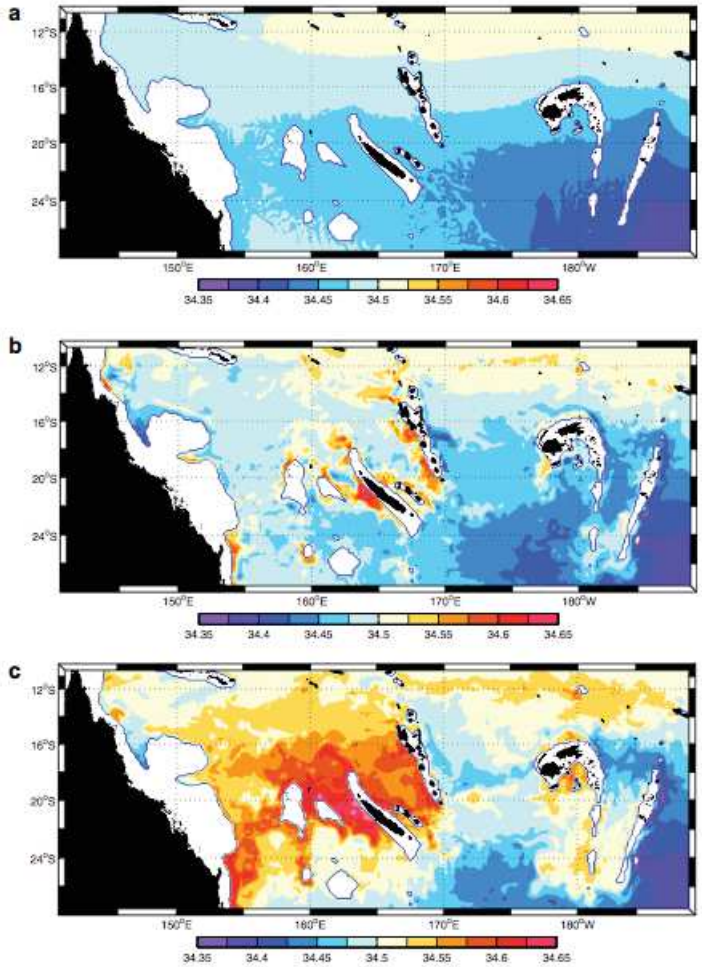


FIGURE 1.12 – Salinité à 1000m, Configuration Nouvelle-Calédonie, modèle ROMS, coordonnées suivi de terrain σ, résolution ($\frac{1}{6}^{\circ}$). Schéma d'advection décentré d'ordre 3 (UP3). a) état initial (climatologie), b) après six mois d'intégration du modèle, c) après deux ans.[Marchesiello et al., 2009]. On constate l'apparition de masses d'eau fortement salées qui sont le résultat de la forte diffusion numérique (diapycnale) du schéma décentré.

Chapitre 2

Traitement numérique des ondes de gravité

Dans ce chapitre, nous étudions le traitement numérique des ondes externes et internes de gravité. La première section se concentre sur la séparation en mode externe (ou barotrope) et modes internes (ou baroclines). Elle étudie la stabilité de cette séparation. La seconde section étudie la propagation des ondes internes, notamment au regard de l'ordre d'approximation des termes associés dans les équations et du type de décalage de grille utilisée. Enfin dans la troisième section, l'étude porte sur l'impact de la discrétisation et du type de grilles utilisées sur la verticale sur l'approximation de la structure verticale de ces modes baroclines.

Sommaire

2.1 Ondes externes de gravité 32

2.1.1 Résumé du rapport de recherche 32

2.1.2 On the use of a depth-dependent barotropic mode in ocean models : impact on the stability of the coupled barotropic/baroclinic system . . 33

2.2 Ondes internes de gravité 67

2.2.1 Résumé du rapport de recherche 67

2.2.2 Numerical representation of internal waves propagation 68

2.3 Définition des modes sur grilles décalées et interpolation verticale 95

2.3.1 Rappel des transformations au niveau continu 95

2.3.2 Grille verticale et projection sur les modes 97

2.3.3 Discretisation consistante de l'équation elliptique $\partial_z[N^{-2}\partial_z M] = -\lambda M$ 99

2.3.4 Résolution discrète et interpolation verticale de la pression 101

2.3.5 Importances relatives liées aux discrétisations verticale et horizontale . 103

2.3.6 Conclusion 111

2.1 Ondes externes de gravité

2.1.1 Résumé du rapport de recherche

La plupart des modèles de circulation océanique résolvent désormais une équation pronostique d'évolution de surface libre remplaçant ainsi l'hypothèse de toit-rigide. Dans ce cas, les ondes de gravité externes dont la vitesse de propagation est d'environ $\sqrt{gH}$ (avec g l'accélération de la pesanteur et H la profondeur) sont réintroduites dans la physique du système et conduisent à de fortes contraintes sur la stabilité numérique. Les équations primitives linéarisées autour d'un état au repos et d'une stratification verticale moyenne peuvent être projetées sur une base de modes verticaux orthogonaux. Cette décomposition permet d'identifier clairement un mode rapide (externe ou barotrope) et des modes lents (internes ou baroclines).

Cette caractéristique est utilisée dans les modèles d'océans afin d'intégrer séparément le système 2D d'évolution du mode barotrope en utilisant une méthode de splitting. Pour satisfaire la contrainte de stabilité associée au mode barotrope, celui-ci peut alors être intégré en utilisant soit (i) une méthode temporelle implicite 2D [Dukowicz and Smith, 1994] soit (ii) une approche time-splitting [Killworth et al., 1991]. L'utilisation d'un algorithme implicite comporte plusieurs désavantages en particulier en terme de précision (fortes erreurs de dispersions) et de performance lors de parallélisation des modèles, spécifiquement à haute résolution (faibles propriétés de scalabilité). Par conséquent, la majorité des modèles d'océan implémentent une approche de type time-splitting où la composante barotrope 2D associée au mode externe est intégrée avec plusieurs petit pas de temps à l'intérieur d'un pas de temps barocline plus grand ([Berntsen et al., 1981],[Killworth et al., 1991]).

Le mode barotrope est quasiment indépendant de la verticale. L'hypothèse d'un mode barotrope constant sur la verticale est donc une approximation très usitée dans les modèles numériques. C'est à dire que la composante barotrope du champ de vitesses est assimilée à sa moyenne sur la verticale. Cependant, comme souligné dans [Killworth et al., 1991], le champ de perturbations de densité possède également une composante barotrope non-nulle qui n'est pas permise par l'hypothèse d'indépendance suivant la profondeur. Bien que cette intégration moyenne verticale permette d'obtenir une bonne approximation du mode barotrope, il en résulte une non-orthogonalité lors de la séparation des modes lent d'avec le mode rapide, même dans le cas linéaire. Une partie de la composante rapide associée au mode externe 2D est alors toujours intégrée dans la partie 3D lors du splitting ce qui peut mener à une instabilité de la méthode puisque le pas de temps d'incrémentation du système lent (barocline) 3D ne satisfait pas la contrainte exigée pour l'intégration des ondes externes.

Pour prévenir ces instabilités associées aux erreurs de splitting, un filtre temporel doit être appliqué sur les variables barotropes. Ceci est habituellement implémenté sous la forme de filtres [Nadiga et al., 1997, Shchepetkin and McWilliams, 2009] que nous appellerons explicites dans la suite. C'est à dire que la solution numérique barotrope finale s'obtient à l'aide d'une moyenne pondérée sur les différents sous pas de temps barotropes. Pour que le résultat de cette moyenne pondérée soit centré en $n+1$, ces filtres nécessitent d'intégrer au delà du temps $n+1$. D'autres processus numériques et physiques fragilisent la séparation en mode barotrope/baroclines et peuvent également justifier cette dissipation supplémentaire (non-linéarités, interactions avec la bathymétrie) [Shchepetkin and McWilliams, 2005]. Le rapport de recherche Inria présenté ci-après étudie l'impact de ces erreurs de splitting sur la stabilité des modèles numériques de circulation océaniques en s'attachant à identifier clairement à la lumière des hypothèses précédentes la quantité de diffusion additionnelle nécessaire à la stabilisation de la méthode de splitting. Nous y présenterons la linéarisation des équations primitives ainsi que la décomposition en mode verticaux. Nous soulignerons les hypothèses que nous utiliserons dans

cette étude de stabilité en discutant la condition à la limite qui mène à l'approximation d'un mode externe constant sur la verticale. Cette étude de stabilité est exprimée à l'aide d'un petit paramètre $\epsilon = \dfrac{N^2 H}{g}$ (où N est la fréquence de Brünt-Vaisala). Ce rapport introduit une approche innovante d'étude de stabilité via la projection de la solution sur la base modale orthogonale non approchée. Comme nous le verrons, l'essentiel de l'étude de stabilité peut alors s'effectuer en se concentrant sur l'évolution temporelle de la "vraie" composante barotrope. Cette séparation permet de ne pas réduire l'étude de stabilité à un modèle bi-couche et de l'étendre plus simplement à différents choix de discrétisation. L'étude nous permet de quantifier et de justifier le minimum de diffusion additionnelle nécessaire pour maintenir la stabilité de l'algorithme.

Cette étude révèle finalement que la quantité de diffusion induite par les filtres explicites est largement supérieure à celle strictement nécessaire pour compenser les erreurs de splitting. C'est pourquoi nous conseillons d'intégrer la dissipation nécessaire au sein du schéma temporel 2D barotrope. L'utilisation d'un algorithme 2D dissipatif en lieu et place d'un filtre explicite plus diffusif possède aussi l'avantage (i) de diminuer le stencil temporel utile aux filtres explicites qui doivent être centrés en $n+1$ et donc de réduire le coût de calcul. Les expériences numériques que nous avons menées respectivement avec un modèle simplifié qui vérifie toutes les hypothèses de linéarisation pour la décomposition en modes verticaux valident notre étude théorique. Nous avons également effectuée plusieurs simulations réalistes avec le modèle régional opérationnel ROMS où un schéma temporel 2D avec un niveau de dissipation fonction des résultats de l'étude théorique, permet effectivement de stabiliser le splitting.

Ces modifications permettent de réduire considérablement la dissipation de l'énergie barotrope. Nous avons également proposé une formulation du splitting basée sur un mode barotrope non approché et compatible avec la formulation des modèles actuels d'océan. Lorsque les hypothèses de la décomposition en mode normaux sont valides, celle-ci permet, par construction, de s'affranchir de dissipation. Nous espérons que dans un cadre réaliste, elle permettra de diminuer encore la dissipation nécessaire à la stabilité du splitting.

2.1.2 On the use of a depth-dependent barotropic mode in ocean models : impact on the stability of the coupled barotropic/baroclinic system

On the use of a depth-dependent barotropic mode in ocean models: impact on the stability of the coupled barotropic/baroclinic system

J. Demange, L. Debreu, P. Marchesiello, F. Lemarié, E. Blayo

RESEARCH REPORT
N° 8589
August 2014
Project-Team MOISE

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--8589--FR+ENG

On the use of a depth-dependent barotropic mode in ocean models: impact on the stability of the coupled barotropic/baroclinic system

J. Demange, L. Debreu, P. Marchesiello, F. Lemarié, E. Blayo

Project-Team MOISE

Research Report n° 8589 — August 2014 — 27 pages

Abstract: Evolution of the oceanic free-surface is responsible for the propagation of fast surface gravity waves which roughly propagates at speed $\sqrt{gH}$ (with g the gravity and H the local water depth). In the deep ocean, this phase speed is roughly two orders of magnitude faster than the fastest internal gravity waves. The steep stability constraint imposed by those fast surface waves on the time-step of numerical models is handled using a splitting between slow (internal / baroclinic) and fast (external / barotropic) motions to allow the possibility to adopt specific numerical treatments in each component. The barotropic mode is traditionally approximated by the vertically integrated flow because it has only slight vertical variations. However, the implications of this assumption on the stability of the splitting are not well documented. In this paper, we describe a stability analysis of the mode-splitting technique based on an eigenvector decomposition using the true (depth-dependent) barotropic mode. We show that the use of such a depth-dependent barotropic mode allows a much stable integration of the mode-split equations. As a consequence, the amount of dissipation required to achieve stable integrations, usually applied through averaging filters, can be drastically reduced. It results in a much improved effective resolution even for complex flows. In addition, the formulation of a new mode splitting algorithm using the depth-dependent barotropic mode is introduced. The benefits of this new formulation are illustrated by idealized numerical experiments.

Key-words: Mode splitting, Barotropic mode, Stability analysis

RESEARCH CENTRE
GRENOBLE – RHÔNE-ALPES

Inovallée
655 avenue de l'Europe Montbonnot
38334 Saint Ismier Cedex

Sur l'utilisation d'un mode barotrope dépendant de la profondeur dans les modèles d'océan: impact sur la stabilité du système couplé barotrope/barocline

Résumé : Des déplacements de la surface libre de l'océan résulte la propagation d'ondes de gravité rapides qui se propagent à une vitesse de l'ordre de $\sqrt{gH}$ (avec g la gravité et H la hauteur d'eau locale). Là où l'océan est profond, cette vitesse de phase est environ 2 ordres de grandeur plus rapide que l'onde interne de gravité la plus rapide. La forte contrainte de stabilité imposée par ces ondes rapides de surface sur le pas de temps des modèles est traitée en exploitant une séparation d'échelles entre les mouvements lents (i.e. le mode barocline/interne) et rapides (i.e. le mode barotrope/externe) afin de permettre l'utilisation de schémas numériques adaptés à chaque composante. Le mode barotrope est traditionnellement approché par l'intégrale sur la profondeur de l'écoulement car ses variations sur la verticale sont généralement faibles. Cependant, les conséquences de cette hypothèse sur la stabilité de la séparation d'échelles ont été très peu étudiées jusqu'à maintenant. Dans ce papier, nous développons une analyse de stabilité de la technique de séparation d'échelles en nous basant sur une décomposition en vecteurs propres exhibant le "vrai" mode barotrope (i.e. qui varie avec la profondeur). Nous montrons que l'utilisation de ce mode barotrope dépendant de la profondeur permet une intégration beaucoup plus stable du système couplé barotrope/barocline. Par conséquent, la quantité de dissipation habituellement requise pour stabiliser cette intégration (via des filtres de moyennage) peut être drastiquement réduite. De plus, la formulation d'un nouvel algorithme de séparation d'échelles faisant intervenir un mode barotrope dépendant de la profondeur est introduit. Les avantages de cette nouvelle formulation sont illustrés à l'aide d'expériences numériques.

Mots-clés : Séparation d'échelles, mode barotrope, analyse de stabilité

1 Introduction

Most of the current ocean circulation models have now relaxed the rigid lid assumption and directly integrate a prognostic equation for the free surface evolution. In this case, external gravity waves which roughly propagate at speed $\sqrt{gH}$ (with g the gravity and H the water depth) are explicitly resolved. Because a tridimensional implicit time stepping algorithm seems computationally impractical, the numerical integration of the gravest external waves introduces a strong stability constraint on the model time step. Under several assumptions (including flat bottom), the linear stratified primitive equations can be projected onto a set of normal modes which leads to an orthogonal separation of the modes. This highlights a fast (barotropic) mode and slow (baroclinic) modes. The usual approach in state-of-the-art oceanic models is to introduce a mode splitting where the barotropic mode is integrated separately from the baroclinic modes. In order to satisfy the stability condition, the barotropic part can be integrated using either a 2D implicit time stepping algorithm [6] or a time splitting approach [12]. The use of an implicit algorithm has several drawbacks in particular in term of accuracy (large dispersive errors) and performance on parallel computers, especially at high resolution (poor scaling properties). As a consequence, most of the current ocean models use a time splitting approach where the barotropic component is integrated with several small time steps within a larger baroclinic time step ([2],[12]). In this context, the usual assumption is to consider that the external mode is vertically constant (i.e. depth independent). However, as pointed out in [12], the density field has a nonzero barotropic component which invalidates the depth independent assumption. Although depth-averaging provides an approximation to the barotropic mode , this approximation leads to a non orthogonal separation of slow and fast modes, even in the linear case. A reconciliation of the estimates of the barotropic mode coming from the 2D and the 3D parts is thus needed, and stability of the split between fast and slow modes is not guaranteed (indeed, vertical averaging does not exactly separate out the fast and slow dynamics).

To be more specific, let us introduce the 2D barotropic system linearized around a state of rest

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & = & -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial H\overline{u}}{\partial x} & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

where $\bar{u}$ is the depth average flow, η the free surface, and the right hand side is the depth integrated internal pressure gradient. This last term is held constant during barotropic integration because the associated purely barotropic component is expected to be rather small. However, we argue that this term is the main source of instability of the splitting under the depth-independent assumption.

To prevent instabilities associated to these splitting errors, a time filtering of the barotropic variables has to be applied. This can be achieved either by using a diffusive time stepping algorithm in the barotropic integration itself [12] or in the baroclinic integration ([8]). This time-filtering is usually done using explicit averaging filters ([16],[18]) applied to the barotropic solution at all subtime steps. In addition to the inexact splitting above, several other reasons motivate the need for some form of time filtering [17, 18]. First, in the nonlinear case, the right hand side of (1) is integrated from $-H$ to η. Because the free surface η itself evolves during the barotropic subtime steps, the consistency is not maintained. An efficient remedy based on a redefinition of the barotropic pressure-gradient terms to account for the local variations in density field is proposed in [17]. Second, aliasing errors due to nonlinearities (when an integral of the advection terms $u \cdot \nabla u$ is also included in (1)) are an additional source of instability controlled by time averaging . The benefit effect of recomputing at least the fast part of this term has been

studied in [15].

The paper deals with the impact of the aforementioned inexact splitting on the stability of numerical models. In [8, 9, 11] , detailed numerical analysis of various 2D/3D time stepping algorithms are presented. Those studies specifically looked at the impact of adding diffusion either in the 2D or in the 3D part of a numerical model. In the present work, the focus is also on the quantification of the impact of the depth-independent assumption on stability of the mode-splitting procedure. Indeed, among aliasing errors, enforcement of 2D/3D consistency, and the inexact splitting, it is yet not well understood which source of error is the most damaging for stability (and consequently which one of those errors justifies the amount of extra diffusion put through time-filtering). An other objective is to provide a general framework for the stability analysis of the mode splitting approach. Unlike previous studies, our analysis is based on a projection of the solution on the basis formed by unapproximated (depth dependent) barotropic and baroclinic modes.

The analysis done here leads to a simple expression of the minimum amount of dissipation required to achieve a stable integration of the mode-split equations. We show that usual explicit averaging filtering techniques are responsible for a much larger dissipation than needed for stability reasons.

The paper is organized as follows. In a first section, we briefly recall the classical theory of vertical mode decomposition and introduce important parameters for the stability analysis. We then proceed to the stability analysis focusing on the amount of diffusion required to control the instability arising from the depth independent barotropic mode assumption. Idealized numerical experiments are performed and the implementation of an alternative splitting technique based on the depth-dependent barotropic mode is introduced.

2 Normal mode decomposition

First, we briefly recall the normal mode decomposition theory (e.g [13, 3]). We consider a linearization of the 2D (x-z) primitive (i.e. under the hydrostatic and Boussinesq assumptions) equations around a motionless state in hydrostatic equilibrium

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{5}$$

In the vertical direction the model extends from the flat bottom $z = -H$ to the top given by the free surface elevation $z = \eta(x,t)$. Here $u(x,z,t)$ and $w(x,z,t)$ denote the perturbation components of horizontal and vertical fluid velocities (primes are omitted for clarity). $p(x,z,t)$ and $\rho(x,z,t)$ denotes pressure and density perturbations around a state $(\bar{p}(z), \bar{\rho}(z))$ satisfying the hydrostatic relation $\dfrac{\mathrm{d}\bar{p}(z)}{\mathrm{d}z} = -\bar{\rho}(z)g$ where $\overline{\rho}(z)$ is a reference density profile.

The (linearized) surface and bottom boundary conditions read

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w(z=0) \qquad \text{at } z=0 \tag{6}$$

$$w = 0 \qquad \text{at } z=-H \tag{7}$$

On a vertical grid with n layers, we assume that the discrete solution of (2-5) can be decomposed using vertical modes $M_q(z)$ ([3])

$$u(x,z,t) = \sum_{q=0}^{n-1} u_q(x,t) M_q(z) \tag{8}$$

$$p(x,z,t) = \rho_0 g \sum_{q=0}^{n-1} h_q(x,t) M_q(z) \tag{9}$$

$$\rho(x,z,t) = -\rho_0 \sum_{q=0}^{n-1} h_q(x,t) \frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} \tag{10}$$

where the modes $M_q(z)$ are the eigenvectors of the following Sturm Liouville problem

$$\Lambda M_q = \lambda_q M_q \tag{11}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-H} = 0 \tag{12}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\frac{N^2(0)}{g} M_q(0) \tag{13}$$

where $\Lambda = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(N^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$, with $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z}$ the Brünt-Vaisala frequency assumed to be positive. Because Λ is a compact symmetric operator, it admits a basis of orthonormal eigenvectors $M_q(z)$ with positive eigenvalues λ_q. The vertical modes are orthonormal with respect to the dot product $\langle f,g\rangle = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} f(z)g(z)dz$ (the vertical integration extends from $-H$ to 0 instead of η in this linear framework), so that we can write $u_q =< u, M_q >$, and $h_q = \frac{1}{\rho_0 g} < p, M_q >$. The time evolution of u_q and h_q can be obtained as follows:

- (2) is multiplied by $M_q(z)$ and vertically integrated over $[-H,0]$ (i.e. by taking the dot product) to obtain the time evolution of u_q

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + g\frac{\partial h_q}{\partial x} = 0$$

- (3) is multiplied by $N^{-2}(z)\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z}$ and vertically integrated over $[-H,0]$. The result is integrated by part using (11) and the continuity equation (4) is used to replace the vertical derivatives of w by the horizontal derivative of u. This leads to the time evolution of h_q

$$\frac{\partial h_q}{\partial t} + \frac{1}{g\lambda_q}\frac{\partial u_q}{\partial x} = 0$$

We thus get a set of n uncoupled systems for $0 \leq q \leq n-1$:

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + g\frac{\partial h_q}{\partial x} = 0 \tag{14}$$

$$\frac{\partial h_q}{\partial t} + \frac{1}{g\lambda_q}\frac{\partial u_q}{\partial x} = 0 \tag{15}$$

This can also be expressed in terms of the characteristic variables $y_q^{\pm} = u_q \pm \frac{g}{c_q}h_q$, with $c_q = \sqrt{\frac{1}{\lambda_q}}$, which leads to n transport equations

$$\frac{\partial y_q}{\partial t} \pm c_q\frac{\partial y_q}{\partial x} = 0$$

The c_q term corresponds to the phase speed associated to vertical mode M_q (in particular, c_0 is the speed of external gravity waves).

2.1 Linear stratification case (i.e. $N = cste$)

In this paragraph, we consider the particular case of a constant background stratification N. This simplified case will be useful for the stability analysis presented in Sec. (3.2.1). Let us introduce the dimensionless parameter $\epsilon = N^2H/g$ whose typical value is such that $\epsilon \ll 1$ (Boussinesq approximation). Indeed , for $N = 10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$ and $H = 4000$ m, we get $\epsilon \approx 4.10^{-4}$. The normal mode definition (11-13) can be expressed in terms of ϵ (considering $\lambda_q = c_q^{-2}$)

$$\begin{cases} -\dfrac{\mathrm{d}^2M_q}{\mathrm{d}z^2} = \epsilon\dfrac{g}{c_q^2H}M_q \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{-H} = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{0} = -\dfrac{\epsilon}{H}M_q(0) \end{cases} \tag{16}$$

For a constant background stratification, the solution of Sturm-Liouville problem (16) can be found analytically :

$$M_q(z) = M_q(0)\left[\cos\sqrt{\frac{\epsilon g}{c_q^2H}}z - \sqrt{\frac{\epsilon c_q^2}{gH}}\sin\sqrt{\frac{\epsilon g}{c_q^2H}}z\right] \tag{17}$$

$$\tan\sqrt{\frac{\epsilon gH}{c_q^2}} = \sqrt{\frac{\epsilon c_q^2}{gH}} \tag{18}$$

The eigenvalues $\lambda_q = c_q^{-2}$ are supposed to be sorted in increasing order. A first approximation of the values of c_q can be obtained by solving (16) with a rigid lid assumption $\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_0 = 0$ for which $\lambda_0 = 0$ (c_0 tends to infinity) and $c_q = \frac{NH}{q\pi}$ are small. The knowledge of these orders of magnitude allows now to refine the solutions. The gravest mode (i.e. $q = 0$) is the barotropic

mode for which $\sqrt{\frac{\epsilon g H}{c_0^2}} \ll 1$ since c_0 is large. A Taylor expansion of system (18) in term of ϵ leads at second order to

$$\begin{cases} c_0 = \alpha_0 \sqrt{gH} \text{ with } \alpha_0 = 1 + \frac{\epsilon}{6} - \frac{\epsilon^2}{360} + O(\epsilon^3) \\ M_0(z) = 1 - \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{z}{H}\right)^2 + \frac{z}{H} + \frac{1}{3} \right] + \epsilon^2 \left[\frac{15}{360} \left(\frac{z}{H}\right)^4 + \frac{60}{360} \left(\frac{z}{H}\right)^3 + \frac{120}{360} \left(\frac{z}{H}\right)^2 \frac{120}{360} \left(\frac{z}{H}\right) + \frac{28}{360} \right] + O(\epsilon^3) \end{cases} \tag{19}$$

In particular we have

$$M_0(0) = 1 - \frac{\epsilon}{3} + 7\frac{\epsilon^2}{90}$$

The other eigenvalues (c_q) are obtained by using the fact that c_q are small enough to consider that equation in (18) can be replaced by $\tan \sqrt{\frac{\epsilon g H}{c_q^2}} = 0$. We can find that the baroclinic modes (i.e. for $q \geq 1$) are expressed as:

$$q \geq 1, \qquad \begin{cases} c_q = \alpha_q \sqrt{gH} \text{ with } \alpha_q = \frac{\sqrt{\epsilon}}{q\pi} + O(\epsilon^2) \\ M_q(z) = \sqrt{2}[\cos\left(\frac{q\pi}{H} z\right) - \frac{\epsilon}{q\pi} \sin\left(\frac{q\pi}{H} z\right)] + O(\epsilon^2) \end{cases} \tag{20}$$

Figure (1) shows the ratio c_1/c_0 computed from the outputs of a global $1/2^\circ$ simulation using the NEMO ocean model [14]. In agreement with the theory (from (19) and (20) we get $c_1/c_0 \approx \sqrt{N^2 H}/(g\pi))$ its value is small everywhere with the exception of shallow areas where H (hence c_0) decreases.

Note that the stability analysis will essentially use the fact that α_0 is close to 1 but the knowledge of its exact value, obtained here in the case of constant N, is not really required. In the case of non constant N, a good approximation of $c_0^2/(gH)$ has been given in [5] (eq. (29)) for layered ocean models. Under the hydrostatic and Boussinesq assumptions, applying the same technique as in [5] leads to

$$\alpha_0 = \frac{c_0}{\sqrt{gH}} = \sqrt{1 + \frac{1}{gH^2} \int_{-H}^{0} \left(\int_z^0 N^2(H + z')\mathrm{d}z' \right) \mathrm{d}z}$$

and exactly matches the first order term of our development ($\epsilon/6$) in the case of constant N. In the following we will also use the following equalities (which hold for non constant N):

$$\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} M_q(z)\mathrm{d}z = \frac{M_q(0)}{\lambda_q g H} \tag{21}$$

$$\sum_{q=0}^{n-1} \left[\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} M_q(z)\mathrm{d}z \right]^2 = 1 \tag{22}$$

The first equality is obtained by vertically integrating the normal mode definition (11) while the second equality is obtained by writing the decomposition of a constant velocity field $u = \sum_{q=0}^{n-1} u_q M_q = 1$ which leads to $u_q =< 1, M_q >= \frac{1}{H} \int_{-H}^{0} M_q(z)\mathrm{d}z$ and $\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} u\mathrm{d}z = 1 = \sum_{q=0}^{n-1} \left[\frac{1}{H} \int_{-H}^{0} M_q(z)\mathrm{d}z \right]^2$.

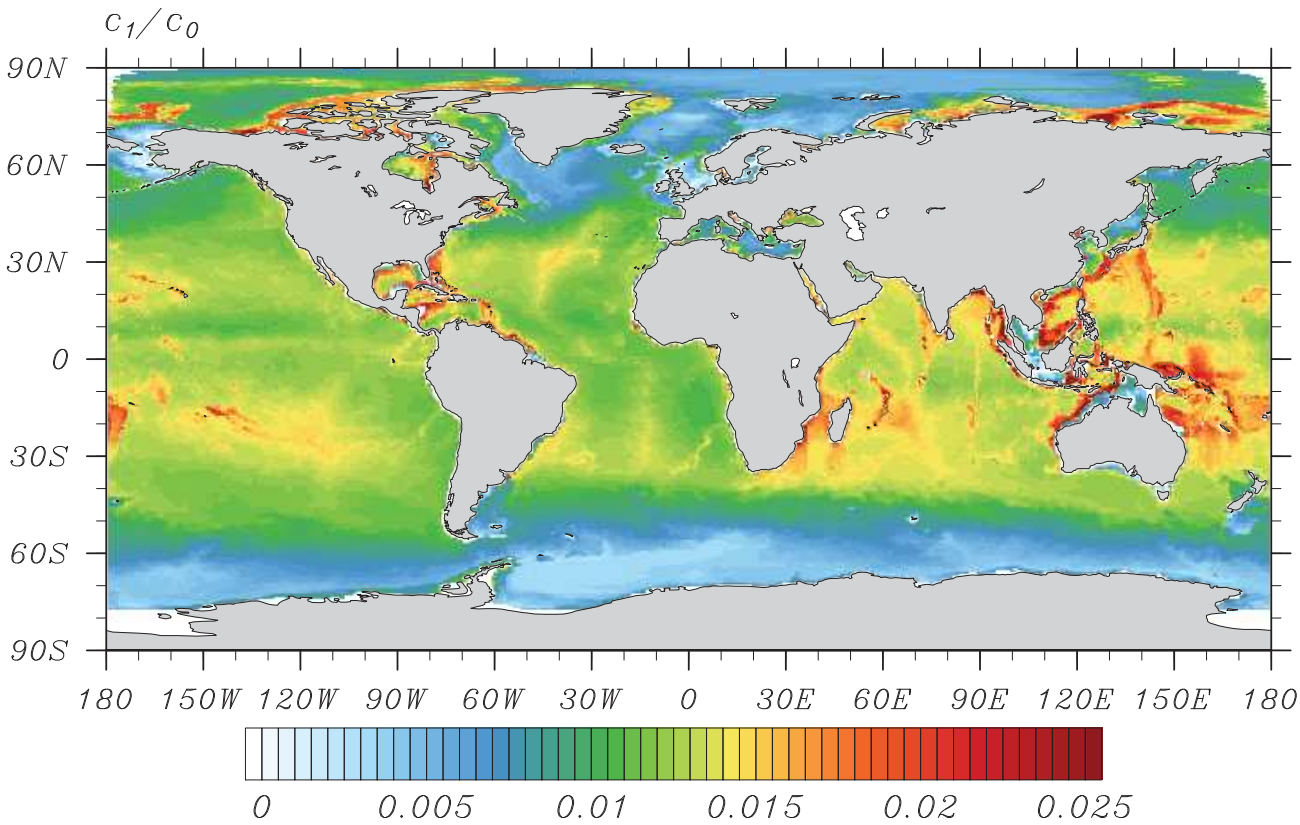


Figure 1: Ratio c_1/c_0 computed from the outputs of a global ORCA 1/2° simulation [14]

2.2 Rigid lid limit

Considering that ϵ is small, the barotropic mode given by (19) can be approximated by $M_0^{\mathrm{rl}}(z) = 1$ where the exponent rl stands for rigid lid. It is indeed equivalent to compute the vertical mode assuming a rigid-lid $\dfrac{\partial \eta}{\partial t} = 0$ which results in a modification of the surface boundary condition in $\left.\dfrac{\mathrm{d}M_0^{\mathrm{rl}}(z)}{\mathrm{d}z}\right|_0 = 0$. Having done this assumption implies a depth independent barotropic mode for which $\dfrac{\mathrm{d}M_0^{\mathrm{rl}}(z)}{\mathrm{d}z} = 0$. It implies that equation (15) is not valid for $q = 0$ and in addition, instead of (21) we have for $q \geq 1$, we have $\displaystyle\int_{-H}^{0} M_q^{\mathrm{rl}}(z) = 0$.

This leads to values of $u_0^{\mathrm{rl}}(x,t)$ and $h_0^{\mathrm{rl}}(x,t)$ obtained by simple vertical averaging:

$$u_0^{\mathrm{rl}}(x,t) = \overline{u}(x,t) = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} u(x,z,t), \quad h_0^{\mathrm{rl}}(x,t) = \frac{1}{\rho_0 g}\,\overline{p}(x,t) = \frac{1}{\rho_0 g H}\int_{-H}^{0} p(x,z,t)$$

A direct integration of $h_0^{\mathrm{rl}}(x,t)$ is not possible but the pressure can be decomposed in surface and internal values using

$$p(x,z,t) = \rho_0 g \eta + p_h(x,z,t)$$

with

$$p_h(x,z,t) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{\partial p_h}{\partial z} = -\rho g \tag{24}$$

so that $h_0^{\mathrm{rl}} = \eta + \dfrac{1}{\rho_0 g H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h$. Time evolution of the free surface η is given by the surface boundary condition (6) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w(z=0)$$

and w at the surface is deduced from the vertical integration of the continuity equation (4) to get $w(x, z=0) = -H\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x}$. The corresponding barotropic system is thus given by:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} & = & -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial H\overline{u}}{\partial x} & = & 0 \end{array}\right. \tag{25}$$

The vertically integrated internal pressure gradient evolves slowly in comparison with barotopic variables. While the use of the top boundary condition in the normal mode decomposition leads to n independent shallow water systems of type (14,15), using the rigid lid approximation leads to $n-1$ independent shallow water system of type (14,15) for $q \geq 1$ and the system (25) which actually includes contribution from all the modes. More precisely, the vertical average of internal pressure can be decomposed as

$$\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \sum_q \rho_0 g h_q \left[M_q(z) - M_q(0)\right] \mathrm{d}z = \rho_0 g \sum_q \left(\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_q(z) - M_q(0)\right) h_q \tag{26}$$

The contribution of the barotropic mode is not zero but proportional to $\left(\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_0(z) - M_0(0)\right)$ which can be expressed at first order in ϵ using (19,21) as

$$\left(\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_0(z) - M_0(0)\right) = \frac{\epsilon}{3}$$

Maintaining this term constant during the barotropic integration is the main source of instability of the usual mode splitting algorithm.

3 Formulation of the stability analysis using normal mode decomposition

In this section, we explore the stability of the time splitting approach. In order to proceed to the stability analysis of the barotropic/baroclinic mode splitting approach, we will use the basis composed of the rigorous vertical modes $M_q(z)$. Note that expanding the velocity and density fields using the approximated vertical modes $M_q^{\mathrm{rl}}(z)$ is not possible since they do not satisfy the correct surface boundary conditions.

3.1 2D-3D correction

The idea of the mode splitting approach is to integrate separately the 2D and 3D components. When using the rigorous normal mode decomposition, the barotropic component evolves independently of the baroclinic ones so that no correction is needed after the integration of the barotropic system. Contrarily if the depth-independent approximation is made, the 3D system is corrected in order to maintain consistency with the 2D counterpart. An example of a simple time integration algorithm is depicted in figure (2).

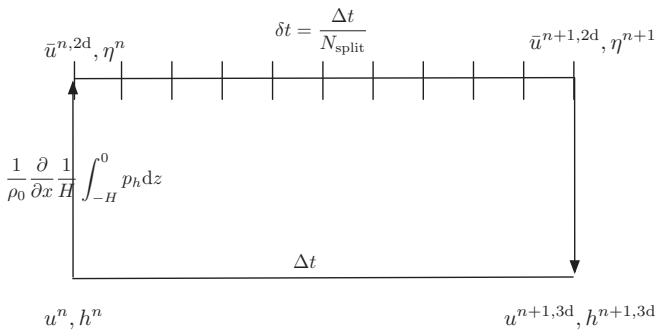


Figure 2: Time splitting algorithm

These corrections are twofold. The first one is to modify the 3D velocities so that their vertical average matches the barotropic velocity. If u^{n+1} and $u^{n+1,\mathrm{c}}$ denotes the 3D velocities at time $n+1$ before and after correction , the correction step reads

$$u^{n+1,\mathrm{c}} = u^{n+1} + \left[\bar{u}^{n+1,2d} - \frac{1}{H}\int_{z}^{0} u^{n+1}\mathrm{d}z\right]$$

In term of projected variables u_q, this correction can be written as

$$u_q^{n+1,c} =< u^{n+1,c}, M_q >= u_q^{n+1} + \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_q(z)\mathrm{d}z \left[\bar{u}^{n+1,2d} - \frac{1}{H}\int_{z}^{0} u^{n+1}\mathrm{d}z\right] \tag{27}$$

The second correction is for consistency reason. In the 2D integration, the free surface evolves and this leads to a modification of the surface pressure gradient $p(z=0) = \rho g \eta$. But this evolution has to be in agreement with the modal decomposition which says that $p(z=0) = \rho_0 g \sum_q h_q M_q(0)$. This second correction has to ensure that

$$p^{n+1}(z=0) = \rho g \eta^{n+1} = \rho_0 g \sum_{q=0}^{n-1} h_q^{n+1} M_q(0) \tag{28}$$

where h_q^{n+1} has evolved through the 3D integration. In the literature this correction is also known as constancy preservation (e.g. [7, 18]). Indeed (28) shows that the density field (hence the h_q components) has to be integrated with a velocity field which has a vertical average that matches the one needed to make the free surface η evolve from n to n+1. In practice two choices are often made. The first option [18] is to integrate the barotropic variables and to deduce a transport which divergence matches the evolution of η from n to $n+1$. This transport is then used to correct (like in eq (27)) the depth average of the 3D velocity that has been used in the integration of the density equation. The second option is to forget the 2D free surface and to recompute it from the 3D velocity fields used to advance the density field. In the next, we will follow the first option. In that case the correction can be written using (22)

$$h_q^{n+1,\mathrm{c}} = h_q^{n+1} + \alpha_q^4 M_q(0)\left(\eta^{n+1,2\mathrm{d}} - \eta^{n+1,3\mathrm{d}}\right), \qquad \text{where } \eta^{n+1,3\mathrm{d}} = \sum_{j=0}^{n-1} h_j^{n+1} M_j(0) \tag{29}$$

Indeed it leads to $\sum h_q^{n+1,\mathrm{c}} M_q(0) = \sum h_q^{n+1} M_q(0) + \left(\eta^{n+1,2\mathrm{d}} - \eta^{n+1,3\mathrm{d}}\right)\sum \alpha_q^4 M_q(0)^2$. Since $\sum \alpha_q^4 M_q(0)^2 = 1$ using (21,22), it shows that $\sum h_q^{n+1,\mathrm{c}} M_q(0) = \eta^{n+1,3\mathrm{d}}$. It is also easy to verify that it exactly corresponds to a correction of the depth average of the 3D velocity that are used to integrate the density field by a two dimensional field $\bar{\bar{u}}$ that satisfies $\dfrac{\eta^{n+1,2\mathrm{d}} - \eta^{n,2\mathrm{d}}}{\Delta t} = -\dfrac{\partial H \bar{\bar{u}}}{\partial x}$. Note that in previous stability analysis found in the literature this correction is not taken into account even if its impact on the stability of the time splitting algorithm is important since the density field has immediately the feedback from the 2D integration.

3.2 Stability analysis using normal mode decomposition

Let $X_q = \begin{pmatrix} u_q \\ h_q \end{pmatrix}$ be the vector of velocity and pressure projections. The system (14,15) can be written as:

$$\frac{\partial X_q}{\partial t} + A_q \frac{\partial X_q}{\partial x} = 0$$

with

$$A_q = \begin{pmatrix} 0 & g \\ \dfrac{c_q^2}{g} & 0 \end{pmatrix}$$

The correction (27,29) is written has:

$$X_q^{n+1,\mathrm{c}} = X_q^{n+1} + C_q \begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2\mathrm{d}} - \bar{u}^{n+1,3\mathrm{d}} \\ \eta^{n+1,2\mathrm{d}} - \eta^{n+1,3\mathrm{d}} \end{pmatrix} \tag{30}$$

where

$$C_q = \begin{pmatrix} \alpha_q^2 M_q(0) & 0 \\ 0 & \alpha_q^4 M_q(0) \end{pmatrix}$$

The objective is now to express the vector $\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2\mathrm{d}} - \bar{u}^{n+1,3\mathrm{d}} \\ \eta^{n+1,2\mathrm{d}} - \eta^{n+1,3\mathrm{d}} \end{pmatrix}$ according to the 2D barotropic integration. The barotropic system (25) can be rewritten as

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x} &= 0 \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} + \dfrac{\partial H\overline{u}}{\partial x} &= 0 \end{cases} \tag{31}$$

where $\zeta = \eta + \rho_0 g \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z$ and where we have used the fact that the internal pressure gradient is maintained constant during the barotropic integration. Using $A^{2\mathrm{d}}$ the matrix corresponding to the discrete 2D time stepping algorithm, we write

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2d} \\ \zeta^{n+1,2d} \end{pmatrix} = \left[A^{2\mathrm{d}}\right]^{N_{\mathrm{split}}} \begin{pmatrix} \bar{u}^{n} \\ \zeta^{n} \end{pmatrix} \tag{32}$$

where N_{split} is the number of barotropic sub time steps.

The expression in term of evolution of the free surface is thus given by:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2d} \\ \eta^{n+1,2d} \end{pmatrix} = \left[A^{2\mathrm{d}}\right]^{N_{\mathrm{split}}} \begin{pmatrix} \bar{u}^{n} \\ \eta^{n} \end{pmatrix} + \left(\left[A^{2\mathrm{d}}\right]^{N_{\mathrm{split}}} - I\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\rho_0 g H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

The 2D variables $\bar{u}$ and η can be expressed as

$$\bar{u}^{n,3\mathrm{d}} = \sum_q \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_q(0) u_q^n, \quad \eta^{n,3\mathrm{d}} = \sum_q h_q^n M_q(0)$$

As shown before (26), the decomposition of the internal pressure gradient is:

$$\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} p_h \mathrm{d}z = \rho_0 g \sum_q \left(\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} M_q(z) - M_q(0)\right) h_q \tag{33}$$

Let us first assume that the internal pressure gradient is computed at time n in (33). In that case we deduce the following expression:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2d} \\ \eta^{n+1,2d} \end{pmatrix} = \sum_i V_i A_i^{2\mathrm{d}} \begin{pmatrix} u_i^n \\ h_i^n \end{pmatrix}$$

with

$$A_i^{2\mathrm{d}} = I + W_i\left(\left[A^{2\mathrm{d}}\right]^{N_{\mathrm{split}}} - I\right), \quad V_i = \begin{pmatrix} \alpha_i^2 M_i(0) & 0 \\ 0 & M_i(0) \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_i^2 \end{pmatrix}$$

A_i^{2d} is the matrix that makes the projections evolve during the barotropic time step. It is close to $\left[A^{\rm 2d}\right]^{N_{\rm split}}$ for the barotropic component ($i=0$). In the 3D baroclinic time step, we denote by $A_i^{\rm 3d}$ the amplification matrix such that

$$\begin{pmatrix} u_i^{n+1,\rm 3d} \\ h_i^{n+1,\rm 3d} \end{pmatrix} = A_i^{\rm 3d} \begin{pmatrix} u_i^n \\ h_i^n \end{pmatrix}$$

so that we deduce that

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,3d} \\ \eta^{n+1,3d} \end{pmatrix} = \sum_i V_i A_i^{\rm 3d} \begin{pmatrix} u_i^n \\ h_i^n \end{pmatrix}$$

we obtain the relation

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2d} \\ \eta^{n+1,2d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,3d} \\ \eta^{n+1,3d} \end{pmatrix} = \sum_i V_i \left(A_i^{\rm 2d} - A_i^{\rm 3d}\right) \begin{pmatrix} u_i^n \\ h_i^n \end{pmatrix} \tag{34}$$

Combining (30) and (34), we finally get:

$$\begin{aligned} X_q^{n+1,\rm corrected} &= X_q^{n+1,\rm 3d} + C_q \sum_i W_i^1 \left(A_i^{\rm 2d} - A_i^{\rm 3d}\right) X_i^{n,\rm 3d} \\ &= A_i^{\rm 3d} X_q^{n,\rm 3d} + C_q \sum_i W_i^1 \left(A_i^{\rm 2d} - A_i^{\rm 3d}\right) X_i^{n,\rm 3d} \end{aligned} \tag{35}$$

The main source of instability here is in the evolution of the barotropic components $X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ h_0 \end{pmatrix}$ and thus we pay a particular attention on these components in the next paragraph.

3.2.1 Stability via diffusion at the barotropic level

We first study the stability of the 2D integration alone with respect to the barotropic variables (u_0, h_0) and so look at $A_0^{\rm 2d}$. The question is what is the minimum amount of diffusion to add to the 2D integration to compensate the fact that the depth integrated vertical pressure gradient is held constant. Let's suppose that the 2d system (32) has been integrated exactly and integrate a damping factor d_0 (a function of μ_0). In the following, this damping will be put either with an averaging filter or by using a diffusive 2D time stepping. $A^{\rm 2d}$ corresponds to a shallow water system with a propagation speed of $\sqrt{gH}$ (or c_0/α_0) leading to:

$$[A^{\rm 2d}]^{N_{\rm split}} = P_0^{\rm rl} \begin{pmatrix} d_0 e^{-i\mu_0/\alpha_0} & 0 \\ 0 & d_0 e^{i\mu_0/\alpha_0} \end{pmatrix} (P_0^{\rm rl})^{-1}, \text{ with } (P_0^{\rm rl})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 \dfrac{g}{c_0} \\ 1 & -\alpha_0 \dfrac{g}{c_0} \end{pmatrix}$$

where $\mu_0 = kc_0\Delta t$. So that

$$A_0^{\rm 2d} = I + W_0 P_0^{\rm rl} \begin{pmatrix} d_0 e^{-i\mu_0/\alpha_0} - 1 & 0 \\ 0 & d_0 e^{i\mu_0/\alpha_0} - 1 \end{pmatrix} (P_0^{\rm rl})^{-1}, \text{ with } W_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha_0^2 \end{pmatrix}$$

The matrix A_0^{2d} has two complex conjugate eigenvalues and its determinant has the following simple expression :

$$|\lambda_0|^2 = \det(A_0^{2d}) = d_0 \left(\alpha_0^2 d_0 - (\alpha_0^2 - 1)\cos\mu_0/\alpha_0\right) \tag{36}$$

Let us first study low frequencies (or large horizontal scales) $\mu_0 \ll 1$ and assume that at those scales d_0 can be developed as $d_0 = 1 - \gamma\mu_0^2$. A second order Taylor expansion leads to

$$|\lambda_0|^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\frac{\alpha_0^2 - 1}{\alpha_0^2} - \gamma(1+\alpha_0^2)\right)\mu_0^2 \tag{37}$$

Since $\alpha_0 > 1$, this shows that if $\gamma = 0$ (no filtering) the model is unstable at large scales. The minimum value of γ is given by

$$\gamma \geq \frac{\alpha_0^2 - 1}{2\alpha_0^2\left(\alpha_0^2 + 1\right)}$$

and (assuming constant N) using expression (19) of α_0 and a first order expansion in ϵ we get:

$$\gamma \geq \frac{\epsilon}{12} \tag{38}$$

(38) is a necessary condition for the stability of the mode splitting approach. It implies that at large scales the filter has to correspond to a second order filter (and not higher order) with a minimum value given by (38).
As can be seen from expression (36), the maximum value of λ_0 are attained at each point where $\cos\mu_0/\alpha_0 = -1$ for which we have $\lambda_0 = d_0\left(\alpha_0^2(d_0+1) - 1\right)$.

Discussion on usual filters and minimal diffusion The preceding results gave us insight on the minimal amount of diffusion that should be present in the 2D step. The objective is now to see if this criterion is full filed by some usual filters. We consider three kinds of filters : two averaging filters with different weights (Flat and Cosine) and a diffusive 2D time stepping. The averaging filters are implemented as

$$\bar{u}^{n+1,2\mathrm{d}} = \sum_{m=0}^{N_{\mathrm{filter}}} a_m u^{m,2\mathrm{d}}$$

where the weights a_m are normalized and such that the average is centered at time $n+1$ (see [17]):

$$\sum_{m=0}^{N_{\mathrm{filter}}} a_m = 1, \quad \sum_{m=0}^{N_{\mathrm{filter}}} a_m \frac{m}{N_{\mathrm{split}}} = 1$$

Note that when using averaging filters, in order to be able to center the average at time $n+1$, the window of integration of the barotropic equations has to extend beyond $n+1$. The expression of the corresponding damping factor d_0 can easily be derived by Fourier transform:

- Flat filter over $n + 1 - \dfrac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}}, n + 1 + \dfrac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}}$, with $N_{\mathrm{filter}} \leq N_{\mathrm{split}}$

$$\begin{aligned} d_0^{\mathrm{Flat}} e^{i\mu_0} = \frac{1}{2N_{\mathrm{filter}}+1} \sum_{m=N_{\mathrm{split}}-N_{\mathrm{filter}}}^{m=N_{\mathrm{split}}+N_{\mathrm{filter}}} e^{im\frac{\mu_0}{N_{\mathrm{split}}}} &= \frac{1}{2N_{\mathrm{filter}}+1}\left[\cos\mu_0\frac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}} + \frac{\sin\mu_0\frac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}}}{\tan\frac{\mu_0}{2N_{\mathrm{split}}}}\right] e^{i\mu_0} \\ &\approx \frac{\sin\mu_0\frac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}}}{\mu_0\frac{N_{\mathrm{filter}}}{N_{\mathrm{split}}}} e^{i\mu_0} \text{ for large } N_{\mathrm{split}} \end{aligned}$$

The development of d_0^{Flat} at low frequencies leads to

$$\begin{aligned} d_0^{\text{Flat}}(N_{\text{filter}} = N_{\text{split}}) &= 1 - \frac{1}{6}\mu_0^2 \approx 1 - 0.167\mu_0^2 \\ d_0^{\text{Flat}}(N_{\text{filter}} = N_{\text{split}}/2) &= 1 - \frac{1}{24}\mu_0^2 \approx 1 - 0.042\mu_0^2 \end{aligned} \tag{39}$$

- Cosine filter

$$\begin{aligned} d_0^{\cos} e^{i\mu_0} = \frac{1}{N_{\text{split}}} \sum_{m=N_{\text{split}}/2}^{m=3N_{\text{split}}/2} \left[1 + \cos 2\pi \frac{j}{N_{\text{split}}}\right] e^{ij\frac{\mu_0}{N_{\text{split}}}} &= \frac{2}{N_{\text{split}}} \frac{(\sin\frac{\pi}{N_{\text{split}}})^2 \sin\frac{\mu_0}{2}}{\tan\frac{\mu_0}{2N_{\text{split}}}\left(\cos\frac{\mu_0}{N_{\text{split}}} - \cos\frac{2\pi}{N_{\text{split}}}\right)} e^{i\mu_0} \\ &\approx \frac{\sin(\mu_0/2)}{\frac{\mu_0}{2}(1 - \frac{\mu_0^2}{4\pi^2})} \text{ for large } N_{\text{split}} \end{aligned}$$

The development of $d_0^{\cos}$ at low frequencies leads to

$$d_0^{\cos} = 1 - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{4\pi^2}\right)\mu_0^2 \approx 1 - 0.016\mu_0^2 \tag{40}$$

- A dissipative Forward backward scheme. Here we don't use an averaging filter but add diffusion inside the 2D time stepping itself.

$$\begin{cases} \overline{u}^{n+1} &= \overline{u}^n - \delta t g \partial_x \eta^n \\ \eta^{n+1} &= \eta^n - \delta t \partial_x[(1+\theta)\overline{u}^{n+1} - \theta\overline{u}^n]H \end{cases} \tag{41}$$

where $\delta t = \dfrac{\Delta t}{N_{\text{split}}}$. The corresponding amplification factor over N_{split} time steps writes:

$$d_0^{\text{FB}} = \left(\sqrt{1 - \theta\left(\frac{\mu_0}{N_{\text{split}}}\right)^2}\right)^{N_{\text{split}}}$$

The development of d_0 at low frequencies leads to

$$d_0^{\text{FB}} = 1 - \frac{\theta}{2N_{\text{split}}}\mu_0^2$$

So that stability condition (38) requires that

$$\theta \geq \frac{2\epsilon N_{\text{split}}}{12} = \frac{\epsilon N_{\text{split}}}{6} \tag{42}$$

This shows that the necessary damping increases both when ϵ increases and when the splitting ratio N_{split} increases (knowing that N_{split} is limited by $\dfrac{c_0}{c_1}$).
Note that the stability condition of the Forward Backward scheme (41) requires $(1+\theta)\mu_0 \leq 2$ on a A-grid and $(1+\theta)\mu_0 \leq 1$ on a C-grid.

To illustrate the damping effect of these filters, we fixed some parameters. First we suppose that the 2D integration is integrated with a Courant number equal to CN_0 which leads to $kc_0\delta t = \dfrac{\mu_0}{N_{\text{split}}} = \text{CN}_0$. N_{split} has a maximum value which is given by the stability of the first

baroclinic mode. Assuming that the maximum Courant number of the 3D time stepping is 1 ($kc_1\Delta t \leq 1$), this leads to

$$kc_1\Delta t = \mu_0 \frac{c_1}{c_0} \leq 1 \longleftrightarrow N_{\text{split}} \leq \frac{1}{\text{CN}_0}\frac{c_0}{c_1}$$

At first order, the ratio $\frac{c_0}{c_1}$ (cf 19,20) is given by $\frac{\pi}{N}\sqrt{\frac{g}{H}}$. Assuming $\text{CN}_0 = 0.75$, for a value of $H = 4000$m, we study the cases of table (1).

N	$\mu_0 = \frac{c_0}{c_1}$	ϵ	$N_{\text{split,max}}$
10^{-2}	15	0.041	20
10^{-3}	155	0.0041	207

Table 1: Set of parameters N and corresponding values of $\mu_0, \epsilon, N_{\text{split,max}}$ for $H = 4000$m

Figure (3) shows the damping factor d_0 for the two averaging filters and for the dissipative Forward Backward scheme. For this last scheme, θ is fixed by the condition (42) for the extreme case of $N = 10^{-2}$ ($\epsilon = 0.041, N_{\text{split,max}} = 20$) which leads to a value of $\theta = \frac{\epsilon N_{\text{split,max}}}{6} \approx 0.13$. Two different lengths of the flat weight filter are considered with either $N_{\text{filter}} = N_{\text{split}}$ (in this case the barotropic equations are integrated from t to $t + 2\Delta t$) or $N_{\text{filter}} = \frac{N_{\text{split}}}{2}$.

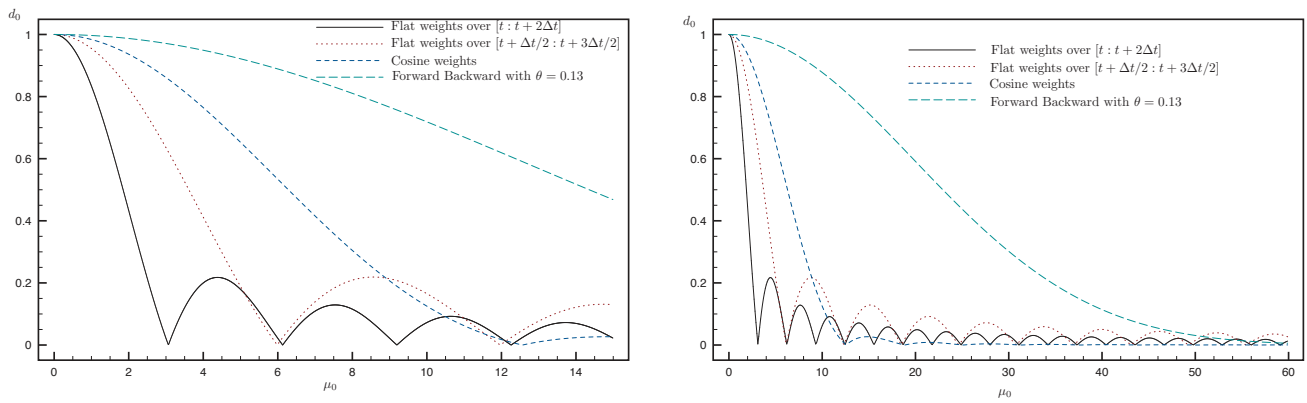


Figure 3: Damping factor as the function of μ_0 for the flat and cosine averaging filters and for the dissipative Forward Backward scheme (with $\theta = 0.13$) for $N = 10^{-2}$ (left), $N = 10^{-3}$ (right)

As expected, the dissipative Forward Backward scheme has much less damping than the averaging filters. Indeed, comparing the developments at large scales of d_0 for the averaging filters (39,40) shows that it is much more than needed by condition (38) which leads to $d_0 = 1 - \frac{\epsilon}{6}\mu_0^2 = 1 - 0.00683\mu_0^2$ (for the maximum value of $N = 10^{-2}$).

3.2.2 Stability with right hand side extrapolation

In the preceding paragraph, the depth integrated internal pressure gradient was the one computed at time n. There are obviously a lot of other choices (e.g. [17]) than can be studied in the

same framework. Here we look at the possibility of a time extrapolation of this term by using $(1+\beta)h_q^n - \beta h_q^{n-1}$ in (33) (Adams Bashforth like extrapolation). In that case we get, we get

$$\begin{pmatrix} \bar{u}^{n+1,2d} \\ \eta^{n+1,2d} \end{pmatrix} = \sum_i V_i \left[A_i^{2\mathrm{d}} \begin{pmatrix} u_i^n \\ h_i^n \end{pmatrix} + \beta \left(V_i^{-1} \left(\left[A^{\mathrm{fb,2d}} \right]^{N_{\mathrm{split}}} - I \right) W_i^2 \right) \begin{pmatrix} u_i^n - u_i^{n-1} \\ h_i^n - h_i^{n-1} \end{pmatrix} \right] \quad (43)$$

with

$$W_i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\alpha_i^2 - 1) M_i(0) \end{pmatrix}$$

Looking at the eigenvalues of the $A_0^{2\mathrm{d}}$ matrix and doing a second order Taylor development of its module around $\mu_0 = 0$ leads to

$$|\lambda_0| = 1 - \frac{(3-2\beta)(1-\alpha_0^2) + 2\alpha_0^2(1+\alpha_0^2)\gamma}{4\alpha_0^2}\mu_0^2$$

For $\beta = 1$, we recover the expression (37) and for $\beta = \dfrac{3}{2}$ the scheme is second order accurate at low frequencies.

Now we look at the global spectrum when there is no damping to see the effect of the potential extrapolation ($\beta > 1$). Here we use a perturbation analysis. We inject in the characteristic polynomial of (43) the expression $\lambda_0 = e^{i\mu_0}(1+\xi)$ and solve at first order for ξ (and at first order in ϵ) to find

$$\xi = \frac{1}{6}(1 - e^{i\mu_0})(1 + \beta(-1 + e^{i\mu_0}))\epsilon$$

This leads to a module of the amplification factor equal to:

$$|\lambda_0| = 1 - \frac{1}{3}\left(-1 + 2(-1+\beta)\cos\mu_0\right)\left(\sin\frac{\mu_0}{2}\right)^2 \epsilon$$

For $\beta \geq 1$, maximum values of $|\lambda_0|$ are attained at each point where $\cos\mu_0 = -1$ ($\mu_0 = (2p+1)\pi$ with p an integer). At these points we have:

$$|\lambda_0|_{\max} = 1 + \frac{1}{3}\left(-1 + 2\beta\right)\epsilon$$

and the apparent problem is that this maximum value is increased when β is increased. Figure (4) shows this amplification factor for the case $\epsilon = 0.041$, corresponding to $N = 10^{-2}$ (the exact amplification is not shown since it matches perfectly the approximation).

If filtering is added, the first objective will be to counter the two instabilities seen at large scales (present if $\beta < \dfrac{3}{2}$) and at each aliasing frequency $\mu_0 = (2p+1)\pi$. As before, we now add a damping factor d_0 and compute the module of the eigenvalue at $\mu_0 = \pi$ to get

$$|\lambda_0|_{\max}(\mu_0 = \pi) = d_0 + \frac{1}{3}\left(-1 + 2\beta\right)\epsilon \quad (44)$$

We now consider the possibility of adding second or fourth order diffusion to the 2D integration.

- Second order diffusion. Let's suppose we use a second order filter and express d_0 at second order in μ_0[1] as $d_0 = 1 - \gamma\mu_0^2$. The condition at $|\lambda_0|_{\max}(\mu_0 = \pi) \leq 1$ writes:

$$\gamma \geq \frac{1}{\pi^2}\frac{1}{3}\left(-1 + 2\beta\right)\epsilon$$

[1] Here we assume that the additional filtering is achieved through a 2D dissipative time filter. Obviously μ_0 is not small at the value we are interested in ($\mu_0 = \pi$) but the Taylor development is actually done in term of μ_0/N_{split}

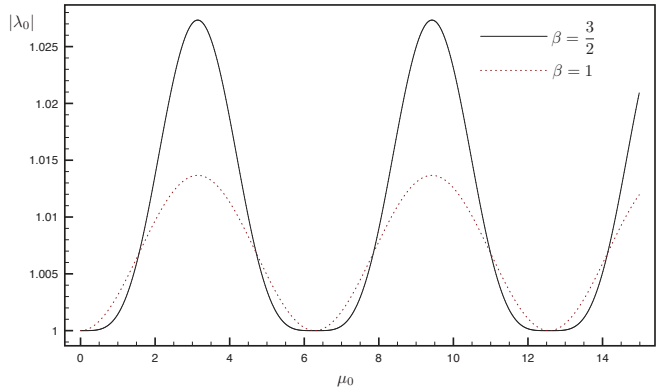


Figure 4: Amplification factor of the barotropic mode $|\lambda_0|$ without ($\beta = 1$) and with ($\beta = \frac{3}{2}$) right hand side extrapolation

For $\beta = 1$ (no right hand side extrapolation) it leads to $\gamma \geq \frac{\epsilon}{3\pi^2}$ with is less restrictive than the condition at large scales (38) $\gamma \geq \frac{\epsilon}{12}$.
For $\beta = \frac{3}{2}$, there is no instability at large scales and the previous condition leads to:

$$\gamma \geq \frac{2}{3\pi^2}\epsilon$$

which is (only) slightly less restrictive that condition (38). The right hand side extrapolation allows to be second order accurate at large scales but does not really reduce the amount of required damping.

- Fourth order diffusion. Let's assume now that right hand side extrapolation has been done ($\beta \geq \frac{3}{2}$) so that second order diffusion at large scales is not required. Thus we can also try to apply fourth order diffusion with $d_0 = 1 - \gamma_4 \mu_0^4$ and the condition $|\lambda_0|_{\max}(\mu_0 = \pi) \leq 1$ leads to:

$$\gamma_4 \geq \frac{1}{\pi^4}\frac{1}{3}\left(-1 + 2\beta\right)\epsilon$$

which give for $\beta = 3/2$

$$\gamma_4 \geq \frac{2}{3\pi^4}\epsilon \tag{45}$$

This is however a rather large biharmonic diffusion coefficient. Indeed if view in term of added diffusion in the 2D time stepping:

$$d_0 = \left[1 - \gamma_{2\mathrm{d}}\left(\frac{\mu_0}{N_{\mathrm{split}}\alpha_0}\right)^4\right]^{N_{\mathrm{split}}}$$

Developing for μ_0 small, leads to

$$d_0 = 1 - \frac{\gamma_4}{N_{\mathrm{split}}^3}\mu_0^4 \tag{46}$$

so that (45) is satisfy if

$$\gamma_{2\mathrm{d}} \geq \frac{2}{3\pi^4}\epsilon N_{\mathrm{split}}^3$$

For the extreme case used abose of $\epsilon = 0.041, N_{\mathrm{split}} = 20$ this gives $\gamma_{2\mathrm{d}} \geq 2.2$. This large value of biharmonic diffusion would severely constrain the time step of the barotropic integration.

3.2.3 Addition of the first baroclinic mode

We here add one baroclinic mode in the analysis, mainly to look at the damping of the first baroclinic mode associated with the 2D filtering. We assume no right hand side extrapolation $\beta = 1$. The system coming from (35) can be written as :

$$\left((X_q)^{n+1,\mathrm{corrected}}\right)_{q=1,2} = G\left((X_q)^n\right)_{q=1,2}$$

with

$$G = \begin{pmatrix} C_0W_0^1A_0^{2\mathrm{d}} + \left(I - C_0W_0^1\right)A_0^{3d}) & C_0W_1^1\left(A_1^{2\mathrm{d}} - A_1^{3\mathrm{d}}\right) \\ C_1W_0^1\left(A_0^{2\mathrm{d}} - A_0^{3\mathrm{d}}\right) & A_1^{3\mathrm{d}} + C_1W_1^1\left(A_1^{2\mathrm{d}} - A_1^{3\mathrm{d}}\right) \end{pmatrix}$$

The amplifications of the barotropic and baroclinic mode are plotted on figures (5,6,7). Note that at the difference to the preceding plots, here the amplification is plotted against an inverse horizontale scale $k\Delta x = \mu_0/(N_{\mathrm{split}}\mathrm{CN}_0)$. Figure (5) shows the amplifications without any filtering. The barotropic mode is unstable at all scales while the baroclinic modes have small instabilities at small scales [2].

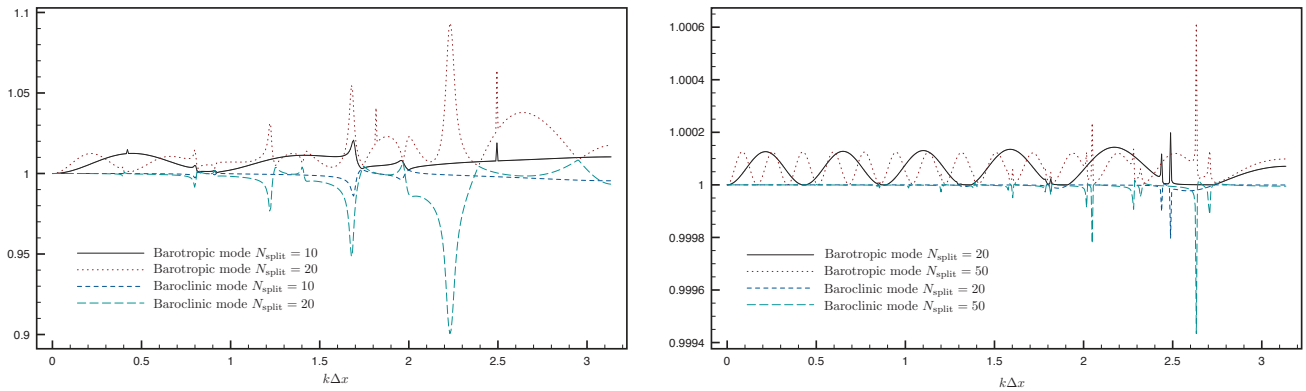


Figure 5: Barotropic and first baroclinic mode amplification without filtering for different splitting ratio N_{split}. $N = 10^{-2}$ left, $N = 10^{-3}$ right

Figure (6) (resp. (7)) shows the same amplifications factor with added filtering for the case $N = 10^{-2}$ (resp. $(N = 10^{-3})$). The filtering is added either using a flat weight filter (over $t, t + 2\Delta t$) or using a 2D Forward backward diffusive time stepping (with $\theta = 0.13$ as above). All filters are able to stabilize the integration and as expected the dissipative Forward Backward scheme is less diffusive than the averaging filters.

[2]This last point can also easily be derived by building the matrix G_{char} of evolution of the characteristics variables $Y_q = \begin{pmatrix} y_q^+ \\ y_q^- \end{pmatrix}$ and computing the eigenvalues of G_{char} as perturbations of a diagonal matrix with exact amplification factors $\mathrm{Diag}[(e^{i\mu_0}, e^{-i\mu_0}, e^{i\mu_1}, e^{-i\mu_1})]$ with $\mu_1 = kc_1\Delta t$

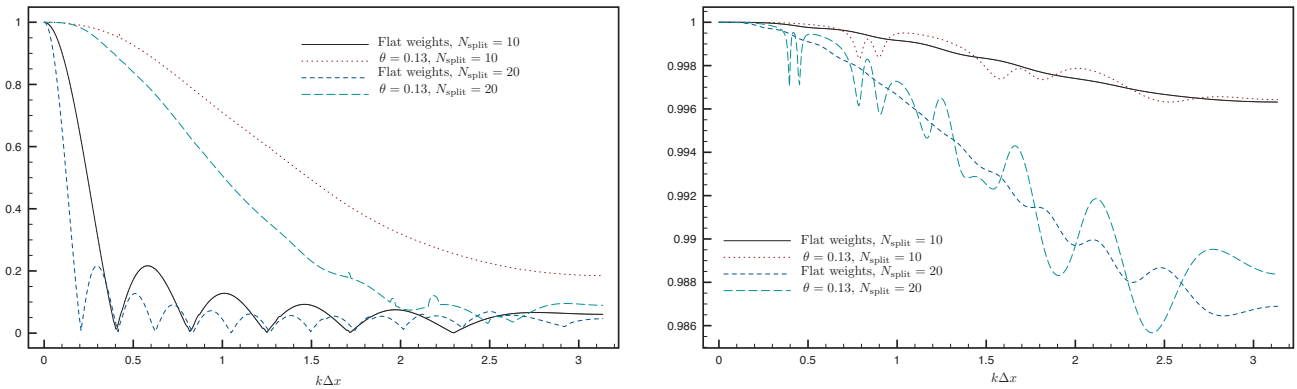


Figure 6: Barotropic (left) and first baroclinic mode (right) amplification with different filters and different splitting ratio N_{split} for $N = 10^{-2}$

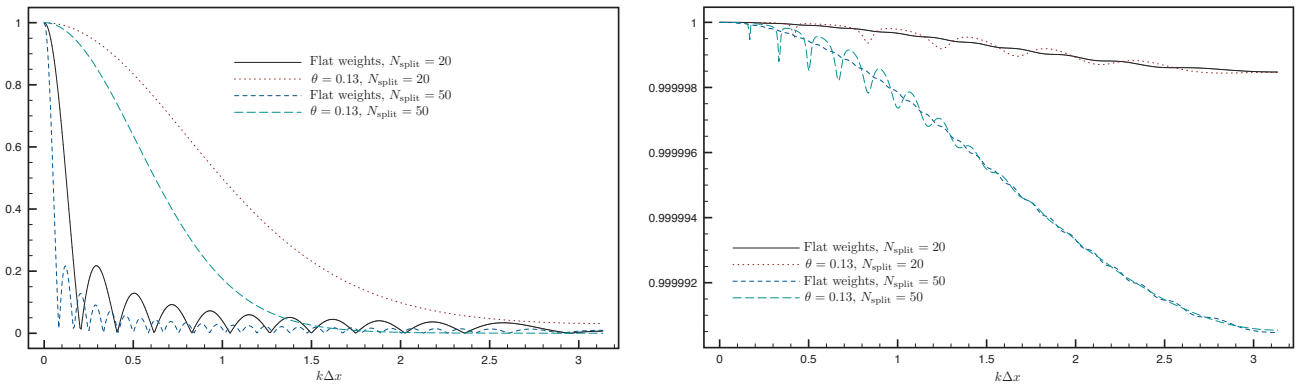


Figure 7: Barotropic (left) and first baroclinic mode (right) amplification with different filters and different splitting ratio N_{split} for $N = 10^{-3}$

3.3 Partial conclusions

The stability analysis has first confirm that the source of instability of the inexact splitting comes from the fast part of the depth integrated internal pressure gradient that is held constant during the barotropic integration. The time extrapolation of the right hand side enables to be second order at large scales for the barotropic mode but does not improve the stability. In this stability analysis framework, it is naturally sufficient to study the evolution of the (true) barotropic mode since the other baroclinic mode require much less damping.

4 Numerical implementation of a barotropic/baroclinic mode splitting and idealized test case

In this section, we will illustrate the theoretical study on a simple idealized test case that rely on the linearized (around a state at rest) primitive equations (2,3,4,5). We also formulate a splitting based on the use of the true depth-dependent barotropic mode. We begin by its practical implementation then show how the barotropic corrections are handled and finally show the results

of the numerical experiments.

4.1 Practical implemtation of the (depth-dependent) barotropic/baroclinic mode splitting

The integration of the barotropic part is given by eqs (14,15) for $q = 0$

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + g\frac{\partial h_0}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_0}{\partial t} + \frac{c_0^2}{g}\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \tag{47}$$

For the practical implementation, we reformulate this equation in term of u_0, η, ρ_b where

$$\rho_b = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \rho(x,z,t)N^{-2}(z)\frac{\mathrm{d}M_0(z)}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z$$

ρ_b is the barotropic component of the density field and is zero when the barotropic mode is assumed to be depth-independent. One of the reason of introducing ρ_b and η is to able to have access to the free surface elevation during the barotropic integration. It may be useful for example if the free surface is used in the boundary conditions. But there is a more fundamental reason. If h_0 is computed inside the barotropic integration, then at the end of this integration the correction naturally apply to the barotropic component of the pressure field. However when discretized on a vertical Lorenz grid, the presence of a computational mode ([1],[10]) prevents from uniquely deducing from a correction on the pressure field a correction on the density field (that is what is needed at the end).
From the decomposition of ρ (10), we can prove that:

$$h_0 = \frac{M_0(0)}{\lambda_0 g H}\,\eta - \frac{1}{\lambda_0}\,\frac{\rho_b}{\rho_0} \tag{48}$$

Note that is this expression $\dfrac{M_0(0)}{\lambda_0 g H}$ is actually equals to the vertical integral of the barotropic mode $\displaystyle\int_{-H}^{0} M_0(z)\mathrm{d}z$. Integrating (48) in (47) leads to

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{M_0(0)}{\lambda_0 H}\,\eta - \frac{g}{\lambda_0\rho_0}\,\rho_b\right] = 0, \quad \frac{\partial \rho_b}{\partial t} - \frac{\rho_0 M_0(0)}{gH}\frac{\partial \eta}{\partial t} - \frac{\rho_0}{g}\frac{\partial u_0}{\partial x} = 0$$

The time evolution of η is as usual given by the free surface condition:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial H\bar{u}}{\partial x} = 0$$

where $\bar{u}$ is expressed as a function of u_0 and the truly baroclinic part:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} u(x,z,t) = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0}[u_0(x,t)M_0(z) + u'(x,z,t)] = \frac{M_0(0)}{\lambda_0 g H}\,u_0(x,t) + \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} u'(x,z,t)$$

$\displaystyle\frac{1}{H}\int_{-H}^{0} u'(x,z,t)$ contains only baroclinic modes and thus is the slow part of the depth averaged velocity. In practice, this term is computed at the beginning of the barotropic integration and

is held constant over the barotropic time steps (even if it can also be extrapolated). The final form of the barotropic equations is:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_0}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{M_0(0)}{\lambda_0 H}\,\eta - \dfrac{g}{\lambda_0\rho_0}\,\rho_b\right] = 0 \\ \dfrac{\partial \rho_b}{\partial t} + \dfrac{\rho_0 M_0(0)}{gH}\dfrac{\partial H\bar{u}}{\partial x} - \dfrac{\rho_0}{g}\dfrac{\partial u_0}{\partial x} = 0 \\ \bar{u} = \dfrac{M_0(0)}{\lambda_0 gH}\,u_0 + \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} u'(x,z,t) \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t} + \dfrac{\partial H\bar{u}}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

and we recall that when a vertically constant barotropic mode is assumed, the barotropic system writes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial t} + g\dfrac{\partial \eta}{\partial x} &= -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} p_h dz \\ \dfrac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \dfrac{\partial H\bar{u}}{\partial x} &= 0 \end{cases}$$

4.2 Correction of 3d variables

The correction step, that makes the barotropic mode coincides with the 3D part has been explained in (3.1) for the case of depth-independent barotropic mode. In the depth-dependent case, it includes in addition a correction of the density field and writes:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} u^{n+1,c} M_0 = u_0^{n+1} \\ \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} \rho^{n+1,c} N^{-2}\dfrac{\mathrm{d}M_0(z)}{\mathrm{d}z} = \rho_b^{n+1} \\ p^{n+1}(0) = \rho_0 g \eta^{n+1} \end{cases}$$

The velocity correction is done as follows

$$u^{n+1,c} = u^{n+1} + \left[u_0^{n+1} - \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} u^{n+1} M_0(z)\mathrm{d}z\right] M_0(z)$$

while the density correction is done as follows

$$\rho^{n+1,c} = \rho^{n+1} + \frac{1}{\lambda_0 - \frac{M_0(0)^2}{gH}}\left[\rho_b^{n+1} - \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} \rho^{n+1} N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_0(z)}{\mathrm{d}z}\right]\frac{\mathrm{d}M_0(z)}{\mathrm{d}z}$$

4.3 Test case

Configuration and model initialization The domain is periodic of size $L_x = 10000$km with a depth of $H = 4$km. The Brünt Vaisala frequency N is taken equal to $10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$. The model is initialized with a barotropic solution with a right travelling wave ($y_0^- = u_0 - \dfrac{g}{c_0}h_0 = 0$).

$$h_0(x, t=0) = 10\sin\left(\frac{2\pi}{L_x}x\right)e^{-(x-L_x/2)^2/\Delta^2}, \quad u_0(x, t=0) = \frac{g}{c_0}h_0(x,0)$$

with $\Delta = 2000$km. The velocity, density and free surface are then deduced:

$$u(x,z,t=0) = u_0(x,t=0)M_0(z), \quad \rho(x,z,t=0) = -\rho_0 h_0(x,t=0)\frac{\mathrm{d}M_0(z)}{\mathrm{d}z}, \quad \eta(x,t=0) = h_0(x,t=0)M_0(0)$$

The initial condition $\rho(x,z,t=0)$ is plotted on figure (8):

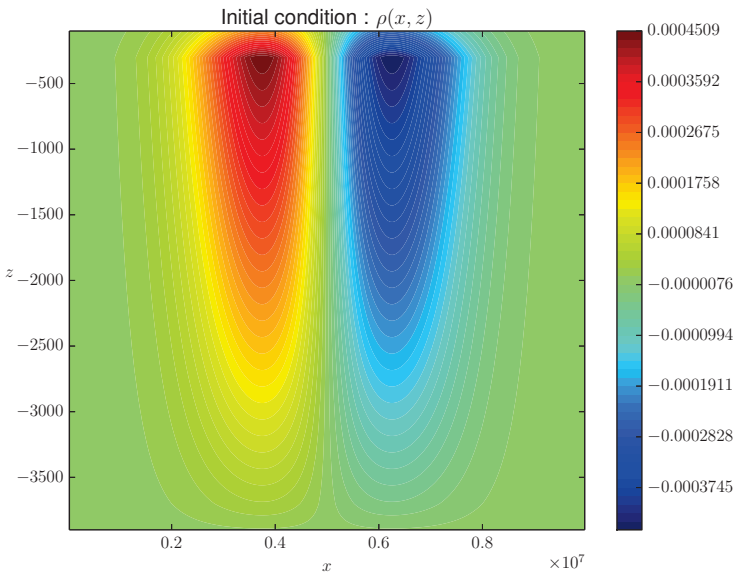


Figure 8: Initial value of the density field

Discretization and numerical schemes The model uses usual horizontal staggered grid and a Lorenz vertical grid with a geopotential vertical coordinates. It uses second order finite differences. The 3D time integration scheme is a non dissipative Euler Forward Backward scheme. The 2D time integration is also based on a (possibly dissipative) Forward Backward scheme. The value of the baroclinic time steps is chosen so that the 2D Courant number $\mathrm{CFL}_{2D} = \dfrac{c_0\Delta t}{\Delta x} = 0.75$. The splitting ratio is taken to $N = 60$ leading to a value of $\mathrm{CFL}_{3D} = \dfrac{c_1\Delta t}{\Delta x} = 0.31$ .The number of horizontal and vertical grid cells are $n_x = 200, n_z = 20$ leading to horizontal and vertical grid resolutions of $\Delta x = 50$km, $\Delta z = 50$m.

Results As a diagnostic of the induced damping of the different filtering techniques we look at the evolution of the maximum of the free surface elevation. Figure (9) shows the results obtained with filtering techniques presented in (3.2.1). In addition to the flat and cosine weights described above, we add results obtained with the second order power law averaging filter implemented in the ROMS ([17]). The reference solution corresponds to a simulation without splitting (the time step is constrained by the barotropic mode). The amount of dissipation vary quite strongly between the different filters and as expected the use of the second order power law filter reduces the damping of the free surface elevation. Of course, without any filtering, the solutions are blowing up quite rapidly.
Figure (10) add two others numerical solutions. The first one corresponds to the use of a diffusive

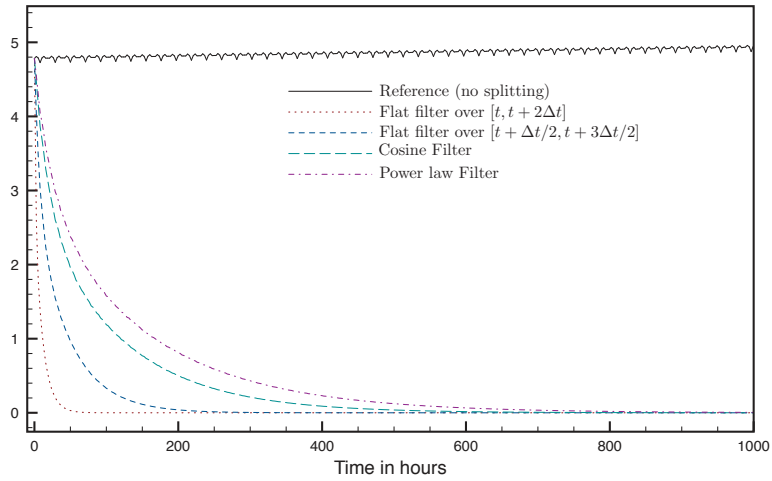


Figure 9: Time evolution of the maximum of the free surface elevation. Comparaison of usual filters against a reference solution without splitting

2D time stepping using a forward backward scheme with $\theta = 0.13$ and the second one is based on the use of the true depth-dependent barotropic mode (see 4.1) without any filtering. The use of a dissipative 2D time stepping is stable and introduces much less damping than the averaging filters. Since there is no damping, the solution obtained with the true barotropic mode, matches exactly the reference solution.

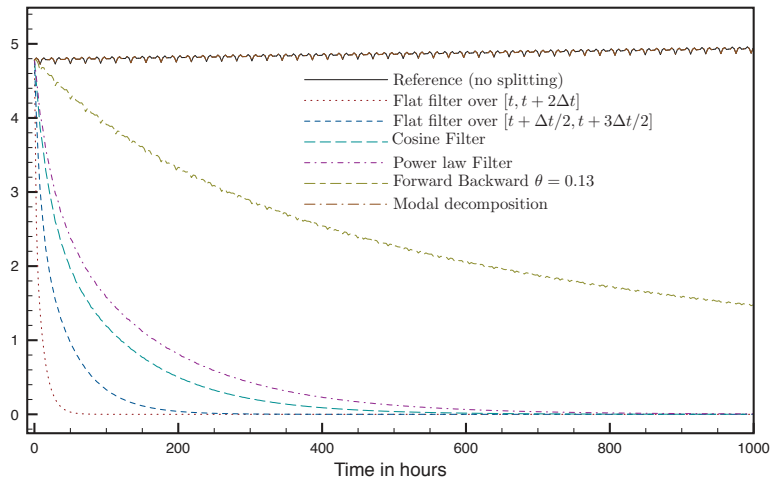


Figure 10: Time evolution of the maximum of the free surface elevation. Comparaison of usual filters against a reference solution without splitting

5 Conclusion

Barotropic/baroclinic mode splitting for free surface ocean models remains an issue to consider since it can require a large amount of unphysical diffusion to achieve a stable integration of the mode-split equations. In this paper, we introduce a framework for the stability analysis of the splitting technique. This is based on a decomposition that uses the true (depth-dependent) barotropic mode as opposed to the traditional depth-independent assumption adopted in realistic oceanic models which require extra sources of diffusion to maintain stability (either through time-filters or dissipative integration schemes). Our study reveals that the amount of diffusion induced by classical averaging filters is much larger than needed to compensante the inexact mode splitting (i.e. under the depth-independent assumption). We thus favor the use of slightly dissipative 2D time stepping algorithms. Moreover, our stability analysis allows to quantify the minimum amount of required diffusion necessary to counteract mode splitting instabilities arising linked with the depth-dependant barotropic mode approximation. The numerical experiments were done here in a very simplified model where all the assumptions of the normal mode decomposition are valid. We have however also run several realistic experiments using the ROMS model. Adding to the 2D barotropic time stepping algorithm an amount of laplacian diffusion corresponding to the theoretical study presented in this paper (and removing the existing averaging filter) has led to long terms stable runs. Using 2D dissipative time stepping algorithms has several additional advantages over the averaging filters. First the barotropic integration stops at time $n+1$ and does not require additional time steps like in averaging filters. This lowers the computational cost, especially on parallel computers where the 2D integration is the less scalable part of the numerical model. It also allows to obtain a continuous free surface elevation. Finally it strongly simplifies the implementation of grid nesting with coupling at the barotropic level ([4]).

The formulation of a mode splitting technique that uses the depth-dependent barotropic mode has been introduced. In this formulation, the barotropic component of both velocities and density are integrated with small time steps. Several developments are still needed to be able to use this formulation in a realistic context (e.g. non flat bottom) where the normal mode decomposition in not valid and possibly where the density itself is not integrated but diagnosed from temperature and salinity. But the hope is that, even if approximated in this case, this formulation will allow the use of less diffusion than in current ocean models to maintain good stability properties.

Acknowledgements

E. Blayo, J. Demange, L. Debreu, and P. Marchesiello were funded by the ANR through contract ANR-11-MONU-005 (COMODO). F. Lemarié acknowledges the support of the French LEFE MANU and GMMC programs through project CHRONOS.

References

[1] A. Arakawa and C. S. Konor. Vertical differencing of the primitive equations based on the charney-phillips grid in hybrid sigma-p vertical coordinates. Monthly weather review, 124(3):511–528, 1996. eng.

[2] Hans Berntsen, Zygmunt Kowalik, Steinar Sælid, and Karstein Sørli. Efficient numerical simulation of ocean hydrodynamics by a splitting procedure. Modeling, Identification and Control, 2(4):181–199, 1981.

[3] E. Blayo and L. Debreu. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. Ocean Modelling, 9(3):231 – 252, 2005.

[4] Laurent Debreu, Patrick Marchesiello, Pierrick Penven, and Gildas Cambon. Two-way nesting in split-explicit ocean models: Algorithms, implementation and validation. Ocean Modelling, 49–50(0):1 – 21, 2012.

[5] John K. Dukowicz. Structure of the barotropic mode in layered ocean models. Ocean Modelling, 11(1–2):49 – 68, 2006.

[6] John K. Dukowicz and Richard D. Smith. Implicit free-surface method for the bryan-cox-semtner ocean model. Journal of Geophysical Research: Oceans, 99(C4):7991–8014, 1994.

[7] Stephen M. Griffies, Ronald C. Pacanowski, Martin Schmidt, and V. Balaji. Tracer conservation with an explicit free surface method for z-coordinate ocean models. Monthly Weather Review, 129(5):1081–1098, 2014/08/12 2001.

[8] Robert Hallberg. Stable split time stepping schemes for large-scale ocean modeling. Journal of Computational Physics, 135(1):54 – 65, 1997.

[9] Robert L. Higdon and Roland A. de Szoeke. Barotropic-baroclinic time splitting for ocean circulation modeling. Journal of Computational Physics, 135(1):30 – 53, 1997.

[10] D. Holdaway, J. Thuburn, and N. Wood. Comparison of lorenz and charney–phillips vertical discretisations for dynamics–boundary layer coupling. part i: Steady states. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 139(673):1073–1086, 2013.

[11] V.M. Kamenkovich and D.A. Nechaev. On the time-splitting scheme used in the princeton ocean model. Journal of Computational Physics, 228(8):2874 – 2905, 2009.

[12] Peter D. Killworth, David J. Webb, David Stainforth, and Stephen M. Paterson. The development of a free-surface bryan–cox–semtner ocean model. Journal of Physical Oceanography, 21(9):1333–1348, 2014/07/29 1991.

[13] P. K. Kundu and I. M. Cohen. Fluid Mechanics, Second Edition. Academic Press, 2002.

[14] J. M. Molines, B. Barnier, T. Penduff, L. Brodeau, A.M. Treguier, S. Theetten, and G. Madec. Definition of the global 1/2° experiment with CORE forcing, ORCA05-G50. Technical report, LEGI-DRA-1-11-2006, 2007.

[15] Yves Morel, Remy Baraille, and Annick Pichon. Time splitting and linear stability of the slow part of the barotropic component. Ocean Modelling, 23(3-4):73 – 81, 2008.

[16] B.T. Nadiga, M.W. Hecht, L.G. Margolin, and P.K. Smolarkiewicz. On simulating flows with multiple time scales using a method of averages. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 9(3-4):281–292, 1997.

[17] Alexander F. Shchepetkin and James C. McWilliams. The regional oceanic modeling system (roms): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. Ocean Modelling, 9(4):347 – 404, 2005.

[18] Alexander F. Shchepetkin and James C. McWilliams. Computational kernel algorithms for fine-scale, multiprocess, longtime oceanic simulations. In P.G. Ciarlet, editor, Handbook of Numerical Analysis, volume 14 of Handbook of Numerical Analysis, pages 121 – 183. Elsevier, 2009.

Contents

1 Introduction **3**

2 Normal mode decomposition **4**
2.1 Linear stratification case (i.e. $N = cste$) 6
2.2 Rigid lid limit 9

3 Formulation of the stability analysis using normal mode decomposition **10**
3.1 2D-3D correction 10
3.2 Stability analysis using normal mode decomposition 11
3.2.1 Stability via diffusion at the barotropic level 13
3.2.2 Stability with right hand side extrapolation 16
3.2.3 Addition of the first baroclinic mode 19
3.3 Partial conclusions 20

4 Numerical implementation of a barotropic/baroclinic mode splitting and idealized test case **20**
4.1 Practical implemtation of the (depth-dependent) barotropic/baroclinic mode splitting 21
4.2 Correction of 3d variables 22
4.3 Test case 22

5 Conclusion **25**

RESEARCH CENTRE
GRENOBLE – RHÔNE-ALPES

Inovallée
655 avenue de l'Europe Montbonnot
38334 Saint Ismier Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399

2.2 Ondes internes de gravité

2.2.1 Résumé du rapport de recherche

La section précédente abordait principalement le traitement numérique des ondes de surface rapides (ondes externes de gravité) se propageant à l'interface entre l'océan et l'atmosphère. De manière analogue des ondes se propagent dans l'océan intérieur le long des surfaces séparant des masses d'eau de densités différentes. Ces ondes sont communément appelées *ondes internes de gravité*. Le mélange associé au déferlement des ondes internes joue un rôle fondamental dans l'équilibre thermique global de l'océan [Munk and Wunsh, 1998, Wunsh and Ferrari, 2004] par exemple via le maintien de la stratification verticale ou de la circulation méridienne de retournement. Ces ondes peuvent apparaître de diverses manières, soit par l'action du forçage atmosphérique, des interactions courants-topographie ou bien, majoritairement, par l'interaction de la marée avec cette même bathymétrie. Il est donc crucial pour les modèles d'océan de bien représenter la dynamique des ondes internes, à savoir les mécanismes de propagation et de dissipation par les processus turbulents. La résolution numérique de la propagation de ces ondes nécessite non seulement une bonne résolution horizontale et verticale mais également un traitement précis des termes horizontaux de gradient de pression dans l'équation des moments et de divergence dans l'équation de continuité. Or, ces termes sont traditionnellement discrétisés à l'aide de schémas peu précis (typiquement des schémas centrés d'ordre 2) qui induisent de fortes erreurs de dispersion pouvant mener à des transferts d'énergie erronés du fait des nonlinéarités et des problèmes d'aliasing [Gouillon, 2010].

Des schémas d'ordre peu élevé ont été historiquement adoptés pour optimiser le facteur d'efficacité des modèles (*i.e.* la contrainte CFL divisée par le nombre d'évaluation du membre de droite) au dépend de la précision. En effet, pour les modèles globaux de climat à basse résolution, la majorité du spectre des ondes internes n'est pas résolu, c'est pourquoi les schémas numériques d'intégration espace-temps de ces ondes ont été choisis dans le but premier de maintenir de bonnes propriétés de stabilité [Brown and Campana, 1978]. Cependant, à l'heure actuelle, grâce à l'augmentation constante des moyens de calcul, les modèles globaux ont migré vers des résolutions plus élevées (de l'ordre du 1/10°) qui permet désormais de mieux résoudre une bonne partie du spectre des ondes internes. Il est donc légitime de reconsidérer et de repenser les choix numériques utilisés pour l'intégration espace-temps de ces ondes. C'est l'objectif du rapport de recherche présenté ci-après.

Dans un premier temps, nous évaluerons le comportement numérique de différents schémas de discrétisation (schémas centrés d'ordre 2 et 4) et de différents types de grilles (grilles décalées ou colocalisées) au regard des relations de dispersion discrètes dérivées dans le cadre de la théorie linéaire en 2D (x,z). Dans le cas de la grille colocalisée (a.k.a. grille A dans la classification d'Arakawa) il est connu que le terme de gradient de pression est sujet à un mode numérique [Le Roux, 2012]. Pour des modèles shallow-water 2D celui-ci est généralement contrôlé par l'ajout d'une dissipation dépendent de la vitesse locale (e.g. via une méthode de Galerkin discontinu). Dans le cas 3D, en présence d'ondes internes de gravité, le mode numérique est plus compliqué à contrôler car la dissipation nécessaire dépendra directement de la vitesse de phase des ondes internes qui n'est généralement pas connue. Encore une fois, la théorie de séparation en mode verticaux sera un outil indispensable puisqu'il permettra de caractériser les vitesses de phase associées à chaque mode barocline. Grace à cela, nous serons capables de contrôler efficacement le mode numérique en 3D sans affecter le signal à grande échelle.

Notre étude théorique suggère que l'utilisation de schémas d'ordre 4 sur grille décalée pour discrétiser le gradient de pression et la divergence horizontale fournit la meilleure précision parmi les alternatives étudiées. Cette conclusion est vérifiée numériquement à l'aide d'un cas-

test académique de propagation d'onde. Au contraire de la grille colocalisée, l'utilisation d'une grille décalée présente cependant l'inconvénient de ne pas permettre la mise en place de schémas monotones ou non-oscillants pour l'intégration des ondes internes. Etant donné que l'on souhaite augmenter l'ordre de précision, il est également nécessaire de maintenir de bonnes propriétés de stabilité pour maintenir une bonne efficacité du modèle. Dans cette optique, des schémas couplés espace-temps d'ordre 2 et 4 sont dérivés aussi bien sur grille décalée que colocalisée. Pour se faire, la séparation en modes verticaux (qui résulte en une superposition de systèmes de type Shallow-water) est exploitée et des schémas espace-temps sont dérivés modes par modes. Nous montrons que le schéma d'ordre 4 ainsi dérivé possède des propriétés similaires au schéma RK4 avec discrétisation spatiale d'ordre 4 pour un coût de calcul bien moindre.

Ce rapport conclut en premier lieu que l'implémentation de schémas d'ordre supérieurs permet d'obtenir une meilleure relation de dispersion discrète à partir du moment où l'augmentation de l'ordre du schéma d'intégration du gradient de pression est accompagnée par celle du calcul des termes de divergence. Puis nous démontrons que la distinction individuelle des vitesses de phase des ondes internes par l'intermédiaire de la théorie de décomposition en mode verticaux permet l'ajout d'une dissipation qui permet (i) d'éliminer le bruit numérique provenant des modes mal résolus et numériques et (ii) d'adapter des schémas espace-temps voire monotones sur les principales ondes internes.

2.2.2 Numerical representation of internal waves propagation

Numerical representation of internal waves propagation

J. Demange, L. Debreu, P. Marchesiello, F. Lemarié, E. Blayo

RESEARCH REPORT
N° 8590
August 2014
Project-Team MOISE

ISSN 0249-6399 ISRN INRIA/RR--8590--FR+ENG

Numerical representation of internal waves propagation

J. Demange, L. Debreu, P. Marchesiello, F. Lemarié, E. Blayo

Project-Team MOISE

Research Report n° 8590 — August 2014 — 21 pages

Abstract: Similar to surface waves propagating at the interface of two fluid of different densities (like air and water), internal waves in the oceanic interior travel along surfaces separating waters of different densities (e.g. at the thermocline). Due to their key role in the global distribution of (physical) diapycnal mixing and mass transport, proper representation of internal wave dynamics in numerical models should be considered a priority since global climate models are now configured with increasingly higher horizontal/vertical resolution. However, in most state-of-the-art oceanic models, important terms involved in the propagation of internal waves (namely the horizontal pressure gradient and horizontal divergence in the continuity equation) are generally discretized using very basic numerics (i.e. second-order approximations) in space and time. In this paper, we investigate the benefits of higher-order approximations in terms of the discrete dispersion relation (in the linear theory) on staggered and nonstaggered computational grids. A fourth-order scheme discretized on a C-grid to approximate both pressure gradient and horizontal divergence terms provides clear improvements but, unlike nonstaggered grids, prevents the use of monotonic or non-oscillatory schemes. Since our study suggests that better numerics is required, second and fourth order direct space-time algorithms are designed, thus paving the way toward the use of efficient high-order discretizations of internal gravity waves in oceanic models, while maintaining good stability properties (those schemes are stable for Courant numbers smaller than 1). Finally, important results obtained at a theoretical level are illustrated at a discrete level using two-dimensional (x,z) idealized experiments.

Key-words: Internal gravity waves, Grid staggering, Direct space time algorithms

RESEARCH CENTRE
GRENOBLE – RHÔNE-ALPES

Inovallée
655 avenue de l'Europe Montbonnot
38334 Saint Ismier Cedex

Représentation numérique de la propagation des ondes internes

Résumé : De manière analogue aux ondes de surface se propageant à l'interface entre deux fluides de densité différente (tels que l'air et l'eau), les ondes internes dans l'océan intérieur se propagent le long des surfaces séparant des masses d'eau de différentes densités (e.g. au niveau de la thermocline). Du fait de leur rôle clé dans la distribution globale du mélange diapycnal et du transport de masses d'eau, la bonne représentation de la dynamique des ondes internes dans les modèles numérique doit devenir une priorité car les modèles globaux de climat sont maintenant intégrés à des résolutions permettant de marginalement la résoudre. Cependant, dans la plupart des modèles d'océan, les termes importants intervenant dans la propagation des ondes internes (à savoir le gradient de pression horizontal et le calcul de divergence dans l'équation de continuité) sont généralement discrétisés avec des schémas d'ordre peu élevé en espace et en temps (typiquement à l'ordre 2). Dans ce papier, nous illustrons les bénéfices d'une augmentation de la précision pour différents arrangements des variables sur la grille de calcul (i.e. grilles décalées ou colocalisées) en se basant sur la relation de dispersion au niveau discret (dans le cas linéaire). L'utilisation d'un schéma centré d'ordre 4 sur grille C pour approcher les termes de gradient de pression et de divergence horizontale apporte des améliorations significatives mais, à l'inverse des grilles colocalisées, ne permet pas l'utilisation de schémas monotones ou non-oscillants. Notre étude suggère qu'une amélioration des schémas numériques est nécessaire, nous proposons donc le développement de schémas couplés espace-temps spécifiquement destinés à l'intégration des ondes internes. Des schémas d'ordre 2 et 4 sont mis au point, ceux-ci allient de bonnes propriétés de précision et de stabilité (ils sont stables pour des nombres de Courant inférieurs à 1). Finalement, les résultats obtenus au niveau théorique sont illustrés au niveau discret à l'aide d'expériences effectuées dans un cadre semi-idéalisé.

Mots-clés : Ondes internes de gravité, Arrangement des variables, Schémas couplés espace-temps

1 Introduction

Internal waves are ubiquitous in the oceanic interior and have received much attention by oceanographers due to the pivotal role of internal-wave driven mixing in maintaining the ocean stratification and meridional overturning circulation. Internal waves can arise in a variety of ways, by the action of atmospheric fronts, tides, wind-stress, current-topography interactions, etc. Numerous studies have been dedicated to a better understanding of internal waves generation, propagation, dissipation, and their role on Earth's climate, either from observations or numerical simulations. In a numerical model, proper representation of internal waves dynamics is directly linked to horizontal and vertical resolution, but also to the numerical schemes used to discretize horizontal pressure gradient and horizontal divergence in the continuity equation.

Most oceanic numerical models employ low-order space-time discretization schemes to integrate internal waves dynamics. This choice has been historically made to offer the best efficiency factor (i.e. the CFL number divided by the number of evaluation of the right hand side) with less emphasis on accuracy. Indeed, for low-resolution global climate models, most of the internal wave spectrum is not resolved, hence the numerical algorithms were only chosen to maintain good stability properties (e.g. [3]). However, thanks to advances in computational power, global climate models are now configured with increasingly higher horizontal/vertical resolution (it must be clear that both horizontal and vertical wavenumbers are involved in the dispersion relation). Since the typical grid-spacing in the new generation of global models is around $1/10°$ (at midlatitudes), a wide part of the internal waves spectrum could be potentially represented by the corresponding computational grid. It is, thus, legitimate to reassess the historical numerical choices for the space-time integration of internal gravity waves. In particular, current low-order schemes are prone to dispersion errors and may then induce erroneous energy transfers through nonlinearities and aliasing [9].

The objective of this paper is to check numerical schemes against the linear theory for which the characteristics of internal waves are well known. Many studies have emphasized the role of the grid staggering (cf. figure 1) for the proper representation of internal and external inertia-gravity waves [12, 14]. More specifically, internal gravity waves representation can be studied using the following system of equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - f\,v + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + f\,u + g\frac{\partial h}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

where u,v are the horizontal velocity components, f is the Coriolis parameter, H the constant water depth and h the displacement. To solve (1), the criteria to discriminate the available choice of computational grids (structured or unstructured) and staggerings are

- the treatment of the Coriolis force
- the proper representation of Rossby waves
- the computation of the pressure gradient term

Nowadays, the Arakawa C-grid is the preferred staggering for high resolution simulations because it is assumed that the computational mode in the averaging of the Coriolis force is controlled by viscous or diffusive terms. On the contrary, the Arakawa B-grid should remain the preferred

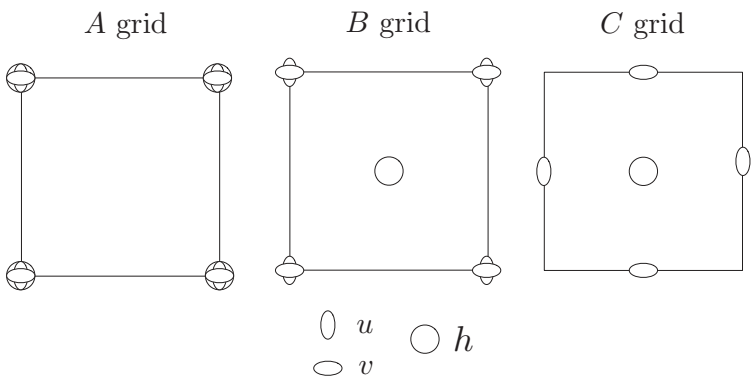


Figure 1: Arakawa A, B and C-grids

approach for coarse resolution models because it allows a natural discretization of the Coriolis term without averaging. The A-grid has the same advantage but requires averaging to compute the pressure gradient term and the continuity equation. For structured grids, most comparisons between A, B and C-grids have been done using low order (second order) schemes. In this paper, we first show that higher order schemes show clear improvements whatever the grid staggering. For internal waves, the discretization order is directly linked to the order of approximation of both the pressure gradient term and of the horizontal divergence term of the continuity equation.

In the following, we neglect the Coriolis term and focus on the pressure gradient term in the 2D (x, z) framework. In this (x,z) case, the C-grid will be referred to as the *staggered grid* and the A-grid to as the *non staggered grid*. The A-grid (like the B-grid in 3D) is prone to a computational mode when computing the pressure gradient term. This problem has been extensively studied in several papers in the shallow water case both for structured and unstructured grids [19]. In the shallow-water case, a solution is to add a velocity-dependent dissipation (e.g. using a discontinuous Galerkin method) in order to introduce enough damping of the computational mode. In the 3D case, in the presence of internal gravity waves, this is more difficult to handle since this diffusion term should be proportional to the speed of internal gravity waves which are usually not explicitly computed (indeed, it would require the solution of a boundary value problem every time-step at each grid point). Here we propose to compute these phase speeds via a vertical normal mode decomposition, thus enabling an efficient damping of the computational mode without affecting the main signal. The computation of these speeds also enables the setup of direct space-time algorithms. It thus opens the path toward fully space time algorithms for numerical ocean models.

The paper is organized as follows. Section (2) contains a brief remainder of the normal mode decomposition and the derivation of internal gravity waves characteristics. Section (3) recalls the usual discretization properties, with a focus on higher-order approximations of the pressure gradient term and horizontal divergence, both on unstaggered and staggered grids. We also introduce an internal wave speed dependent dissipation for the damping of the computational mode on the non staggered grids. In section (4), idealized numerical experiments illustrate the theoretical results obtained in section (3). In the last section, we focus on the derivation of direct space time algorithms both on unstaggered and staggered grids, resulting in highly efficient algorithms for the numerical propagation of internal gravity waves. These schemes are also reliable for integration of external gravity waves of the barotropic part of a 3D ocean model (where the propagation speed is know in advance). Conclusions and perspectives are then drawn.

2 Normal mode decomposition

In this section, we briefly summarize salient points regarding the normal mode decomposition of the 2D (x-z) linearized (around $u = u_0$) flat bottom inviscid primitive equations (i.e. under the hydrostatic and Boussinesq assumptions). See [13, 8, 11] for more details about the vertical mode decomposition. In the following, $u(x, z, t)$ and $w(x, z, t)$ denote the perturbation components of fluid velocities, $p(x, z, t)$ and $\rho(x, z, t)$ denote pressure and density perturbations around a state $(\bar{p}(z), \bar{\rho}(z))$ satisfying the hydrostatic balance $\frac{\mathrm{d}\bar{p}(z)}{\mathrm{d}z} = -\bar{\rho}(z)g$ where $\overline{\rho}(z)$ is a reference density profile. Using those notations, the system of interest reads

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \qquad \text{Momentum conservation} \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \qquad \text{Hydrostatic equilibrium} \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad \text{Continuity / Incompressibility} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} + w\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{Energy conservation} \tag{5}$$

In the vertical direction the model extends from the flat bottom $z = -H$ to the free surface $z = \eta(x, t)$. Since we are interested in internal gravity waves dynamics we assume a rigid lid i.e. $\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0$[1]. Under this assumption, the surface and bottom boundary conditions read

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

$$w(z = -H) = 0 \tag{7}$$

On a discrete grid, with n vertical levels, the solutions of (2,3,4,5) can be decomposed using vertical modes $M_q(z)$:

$$\begin{cases} u(x,z,t) = \sum_{q=0}^{n-1} u_q(x,t) M_q(z) \\ p(x,z,t) = \rho_0 g \sum_{q=0}^{n-1} h_q(x,t) M_q(z) \\ \rho(x,z,t) = -\rho_0 \sum_{q=0}^{n-1} h_q(x,t) \frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} \end{cases} \tag{8}$$

where the modes $M_q(z)$ are the eigenvectors of the following Sturm-Liouville problem[2]

$$\begin{cases} \Lambda M_q = \lambda_q M_q \\ \partial_z M_q|_0 = 0 \\ \partial_z M_q|_{-H} = 0 \end{cases} \tag{9}$$

[1] This rigid lid assumption classically leads to a surface pressure that is diagnosed in order to get a non divergent depth integrated flow.

[2] note that because of the rigid-lid assumption the top boundary condition for the Sturm-Liouville problem (9) is no longer $\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\frac{N^2(0)}{g} M_q(0)$ as in [8, 11], but simply $\left.\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = 0$

where $\Lambda = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(N^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$, with $N^2(z) = -\frac{g}{\rho_0}\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z}$ the Brünt-Vaisala frequency assumed to be positive. Each mode $M_q(z)$ is associated to a positive eigenvalue $\lambda_q = c_q^{-2}$ (sorted in increasing order). The vertical modes are orthonormal with respect to the dot product $\langle f, g\rangle = \frac{1}{H}\int_{-H}^{0} f(z)g(z)dz$. The first mode ($q = 0$) is called the barotropic mode and is depth-independent (i.e. $\lambda_0 = 0$) under the rigid lid assumption. For constant N, an analytical expression of the modes and their associated eigenvalues can easily be found [5]

$$M_q(z) = \sqrt{2}\cos\left(\frac{q\pi}{H}z\right), \qquad c_q = \frac{NH}{q\pi}, \qquad q \geq 1 \tag{10}$$

Figure (2) shows the first four baroclinic modes for $H = 4000$m and $N = 2.10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$. Projection

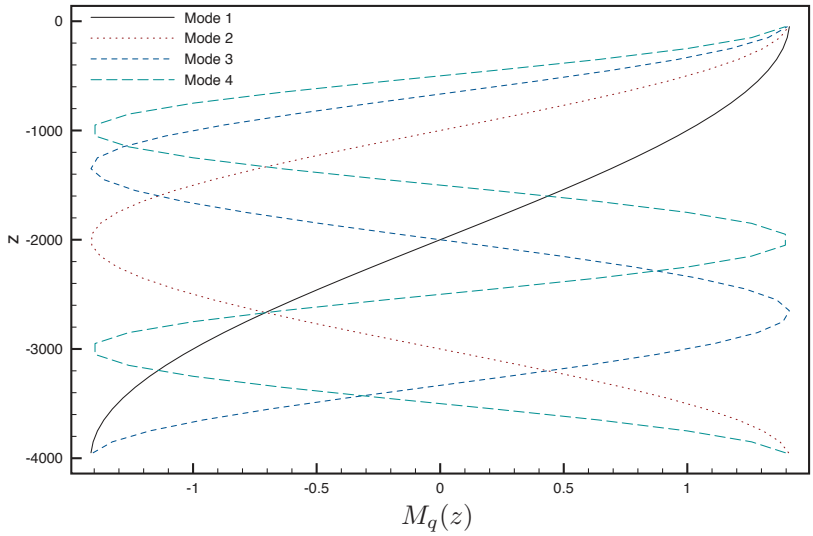


Figure 2: Baroclinic modes $M_q(z)$ (defined in (10)) for $1 \leq q \leq 4$ with respect to the depth z.

of equations (2,3,4,5) onto the vertical modes M_q leads to the following system for $q \geq 1$:

$$\partial_t u_q + u_0\frac{\partial u_q}{\partial x} + g\partial_x h_q = 0 \tag{11}$$

$$\partial_t h_q + u_0\frac{\partial h_q}{\partial x} + \frac{c_q^2}{g}\partial_x u_q = 0 \tag{12}$$

At this point, let us draw two important remarks

- (11) is obtained by multiplying the momentum equation (2) by M_q and integrating over $[-H, 0]$. The order of accuracy for the discretization of $\partial_x h_q$ is thus directly linked to the order of accuracy of the pressure gradient discretization.

- (12) is obtained by multiplying the density equation (5) by $N^{-2}(z)\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}$, integrating over $[-H, 0]$ and using the continuity equation. The order of accuracy for the discretization of the term $\partial_x u_q$ is linked to the order of approximation of the horizontal divergence in the continuity equation.

As mentioned earlier, the pressure gradient term and the divergence in the continuity equation are generally discretized using low-order (second-order) approximations.

In (11-12), each modal projection leads to a shallow water system which can also be expressed in terms of characteristic variables. The corresponding characteristic variables y_q are

$$y_q^{\pm} = u_q \pm \frac{g}{c_q} h_q$$

which propagate at speed $u_0 \pm c_q$, they indeed satisfy the transport equation

$$\frac{\partial y_q^{\pm}}{\partial t} + (u_0 \pm c_q)\frac{\partial y_q}{\partial x} = 0 \tag{13}$$

In practice, internal waves can be forced by barotropic tides at a given frequency ω, so that the wavenumber associated to the baroclinic mode q is given by

$$k_q = \frac{\omega}{c_q}$$

The main objective of this paper is to look at the numerical accuracy of the discrete propagation of these internal waves in an ocean model.

3 Discretization of internal waves in ocean models

3.1 Accuracy and grid staggering

In most ocean models, the approximation of (11,12) is done with second-order accuracy (in space and time). Indeed, both horizontal pressure gradient and horizontal divergence are computed at second order. Numerical models are generally discretized on a grid where velocity and pressure are staggered (Arakawa C-grid in the horizontal). The C-grid is superior to the non staggered A-grid at high resolution whereas the non staggered grid is advantageous for the computation of the Coriolis term, prominent at low resolution [15]. In the following, we consider only the pressure gradient term in a 2D x-z domain without rotation so that this problem is absent. However, we keep in mind that staggered grids are not fundamentally better especially for applications at medium and coarse resolution (e.g. climate simulations).

Let us rewrite baroclinic mode q around a state at rest ($u_0 = 0$):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_q}{\partial t} + g\dfrac{\partial h_q}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial h_q}{\partial t} + \dfrac{c_q^2}{g}\dfrac{\partial u_q}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

As mentioned earlier, we consider two staggerings : a first one analogous to A-GRID and a second one analogous to a C-GRID in 2D. The corresponding variable arrangement is represented in figure (3). Assuming that the space increment Δx is constant, the second and fourth order approximation of spatial derivatives on the A- and C-grids are

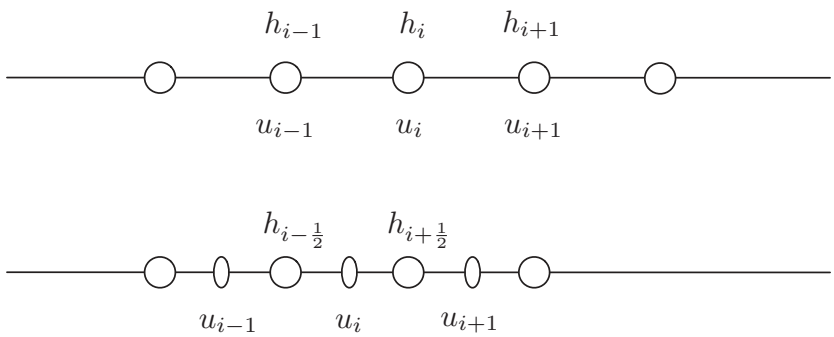


Figure 3: Grid staggering : A grid (top), C grid (bottom)

$$
\begin{aligned}
A\text{-GRID:} \quad & \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{2^{\text{nd}}\text{order}} = \frac{1}{2\Delta x}\left(f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \\
& \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{4^{\text{th}}\text{order}} = \frac{1}{2\Delta x}\left(f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)\right) \\
& \quad -\frac{1}{12\Delta x}\left(f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + 2f(x-\Delta x) - f(x-2\Delta x)\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \\
C\text{-GRID:} \quad & \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{2^{\text{nd}}\text{order}} = \frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \\
& \left.\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{4^{\text{th}}\text{order}} = \frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x/2) - f(x-\Delta x/2)\right) \\
& \quad -\frac{1}{24\Delta x}\left(f(x+3\Delta x/2) - 3f(x+\Delta x/2) + 3f(x-\Delta x/2) - f(x-3\Delta x/2)\right) + \mathcal{O}(\Delta x)^4
\end{aligned}
$$

The exact phase velocity is given by $v_q^{\text{exact}} = \dfrac{\omega^{\text{exact}}}{k} = c_q$ while the numerical phase velocity is given by $v_q^{\text{num}} = \dfrac{\omega^{\text{num}}}{k}$. A simple Fourier analysis (see [16]) gives the numerical phase error $v^{\text{num}}/v^{\text{exact}}$ indicated in table (1) as a function of the normalized wavenumber $k\Delta x$. The cor-

	A-Grid	C-Grid
C2 (centered second order)	$\dfrac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}$	$\dfrac{\sin k\Delta x/2}{k\Delta x/2}$
C4 (centered fourth order)	$\dfrac{(4-\cos k\Delta x)\sin k\Delta x}{3k\Delta x}$	$\dfrac{(13-\cos k\Delta x)\sin k\Delta x/2}{6k\Delta x}$

Table 1: Numerical phase error for centered second and fourth order approximations on the A and C-grids

responding phase errors are plotted in figure (4). As expected, higher order discretization of horizontal pressure gradient and horizontal divergence naturally lead to a better propagation of internal gravity waves. Indeed, we see that the phase error is significantly reduced when going from a second-order to a fourth-order approximation of $\partial_x h_q$ and $\partial_x u_q$ in (11-12), whatever the grid-staggering. In particular for the C-grid the improvement is over the whole wave spectrum while for the A grid the $2\Delta x$ wave remains unchanged (computational mode). On the A-grid, the

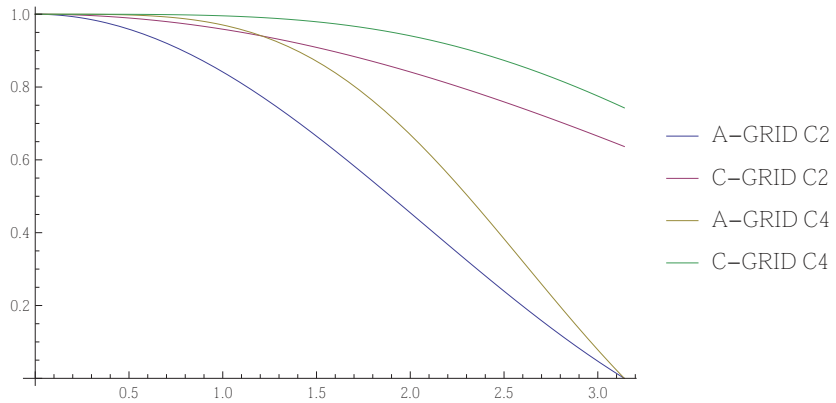


Figure 4: Phase error with respect to the wavenumber $k\Delta x$ for A and C grid for second and fourth order approximations

error reduction is significant on a large part of the wave spectrum. The computational mode on the A-grid justifies the need for additional numerical diffusion which is the subject of subsection (3.2). This is less needed for the C-grid because all scales are well resolved, especially when using a fourth-order approximation.

Practical implementation of the fourth order discretizations As previously mentioned, better accuracy in the propagation of internal waves requires more accurate approximations of both the horizontal pressure gradient and the continuity equation. Both components have to be computed at high order since their role is equally important. The horizontal divergence should thus be computed using fourth order approximation and the result is used to deduce the vertical velocity from the continuity equation (4). Note that this high order computation of the horizontal divergence is also more in agreement with what is done in some numerical ocean models (e.g. NEMO, ROMS) for the nonlinear advection term (not present in our linear equations) : the velocity at mid points is computed using fourth order interpolation. In this case, using only a second order approximation in the continuity equation, introduces a problem of *constancy preservation* of momentum in a way identical to the constancy preservation for tracers [10].

3.2 Damping of the numerical mode of the nonstagerred grids

Let us note A_h, A_v the horizontal/vertical viscosity coefficients and K_h, K_v the horizontal/vertical diffusion coefficients. We allow the possibility for the A_h, A_v, K_h, K_v coefficients to be constant or dependent on the grid size and local velocity to represent second order implicit diffusion associated to odd-ordered advection schemes/time integration scheme. For vertical diffusion, we assume a simple parameterization based on the Brunt-Vaisala frequency [17] which will enable us to project the equations onto the vertical modes, as follows

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial p}{\partial x} = A_h\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(A_v N^{-2}(z)\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u_0\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + w\dfrac{\partial \overline{\rho}}{\partial z} = K_h\dfrac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(K_v N^{-2}(z)\dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right) \end{array}\right. \tag{14}$$

Using (8,9) we obtain

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_q}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial u_q}{\partial x} + g \dfrac{\partial h_q}{\partial x} = A_h \dfrac{\partial^2 u_q}{\partial x^2} - \lambda_q A_v u_q \\ \dfrac{\partial h_q}{\partial t} + u_0 \dfrac{\partial h_q}{\partial x} + \dfrac{c_q^2}{g} \dfrac{\partial u_q}{\partial x} = K_h \dfrac{\partial^2 h_q}{\partial x^2} - \lambda_q K_v h_q \end{cases}$$

which in term of characteristic variables $y_q^{\pm} = u_q \pm \dfrac{g}{c_q} h_q$ leads to

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_q^+}{\partial t} + (u_0 + c_q) \frac{\partial y_q^+}{\partial x} &= \alpha_h \frac{\partial^2 y_q^+}{\partial x^2} + \beta_h \frac{\partial^2 y_q^-}{\partial x^2} - \lambda_q \alpha_v y_q^+ - \lambda_q \beta_v y_q^- \\ \frac{\partial y_q^-}{\partial t} + (u_0 - c_q) \frac{\partial y_q^-}{\partial x} &= \alpha_h \frac{\partial^2 y_q^-}{\partial x^2} + \beta_h \frac{\partial^2 y_q^+}{\partial x^2} - \lambda_q \alpha_v y_q^- - \lambda_q \beta_v y_q^+ \end{aligned} \tag{15}$$

where

$$\alpha_h = \frac{1}{2}\left(A_h + K_h\right), \beta_h = \frac{1}{2}\left(A_h - K_h\right), \quad \alpha_v = \frac{1}{2}\left(A_v + K_v\right), \beta_v = \frac{1}{2}\left(A_v - K_v\right)$$

From (15) we can draw a few Comments:

1. We can notice that if the numerical Prandlt number $\dfrac{A_h}{K_h}$ is not equal to one (i.e. for $\beta_h \neq 0$), the two characteristics are mixed together. The same holds for vertical viscosities/diffusivities ($\beta_v \neq 0$). More generally if different advection schemes (diffusive or not) are used for density and momentum, we expect the two characteristics to become dependent one to the other in contradiction with the theory.

2. In terms of characteristics variables, Horizontal diffusion (through A_h, K_h) induces a diffusion coefficient which is independent of the propagation speed[3]. The exact dispersion relation for the characteristic variables is $\omega_q^{\pm} = \pm k c_q$. With $A_v, K_v = 0$, the dispersion relation associated to (15) is

   $$\omega_q^{\pm} = \pm k \sqrt{c_q^2 - \beta_h^2 k^2} - i \alpha_h k_q^2$$

   For small values of β_h such that $\beta_h^2 k^2 \leq c_q^2$ we get

   $$\omega_q^{\pm} = \pm k c_q \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_h k}{c_q}\right)^2} - i \alpha_h k_q^2$$

   which shows dispersion errors, while for larger values such that $\beta_h^2 k^2 \geq c_q^2$, it leads to purely imaginary frequency

   $$\omega_q^{\pm} = -i \left[\pm k_q c_q \sqrt{\left(\frac{\beta_h k}{c_q}\right)^2 - 1} + \alpha_h k_q^2 \right]$$

   Previous relations show that if the difference between horizontal viscosity and diffusivity is too large, some of the internal waves will stop propagating.

[3]This is not true however if A_h comes from a diffusive time stepping. As an example, a first order dissipative forward backward scheme will lead to a coefficient A_h proportional to c_q^2.

3. When projected onto the characteristic variables, vertical diffusion based on the Brunt-Vaisala frequency results in a friction term with a coefficient dependent on the internal wave speed (the $\lambda_q \beta_v y_q^{\pm}$ terms in (15)). The coefficient behaves like $\frac{1}{c_q^2}$, it is therefore larger for high baroclinic modes. Moreover, this friction term is not a scale selective filter.

Diffusion based on internal waves phase speed The vertical mode decomposition (15) allows to compute an internal wave speed dependent diffusion. Since we are mainly interested in the amount of diffusion necessary to properly integrate internal waves, the idea is not to formulate the numerical model entirely in terms of the vertical modes (e.g. [7]). Indeed, from our perspective, the projection onto the vertical modes will be done only to compute the diffusive term. This diffusive term will be then expressed back in terms of primitive variables. Any dissipative numerical scheme can be used for the propagation of internal gravity waves, like (high order) upwind schemes or monotone advection schemes. However, this choice has to be done carefully for the following reasons:

- The use of first order upwind schemes (whose diffusion coefficients, associated to the leading term in the truncation error, equal $\frac{1}{2} c_q \Delta x$) would lead to a too diffusive solution. But the vertical mode decomposition offers the possibility to build high order non oscillatory schemes acting directly on the characteristic variables that take into account the local regularity of the discrete solution. The design of non oscillatory schemes may also be required in case of internal waves breaking behaving like hydraulic jumps.
- The numerical advection schemes when formulated in terms of characteristic variables take into account the direction of propagation. This makes the problem of open boundary conditions specification well posed ([8]) with respect to internal waves.
- There are fundamental differences between formulation (15) based on characteristic variables and the traditional formulation (14) based on primitive variables. In the diffusion based on characteristic variables, an irregularity in the density field is immediately "felt" by momentum through the added diffusion (and vice versa). This is not the case when the diffusive term are put independently on momentum and tracers, as in (14).

4 Numerical experiment

In this section, we use idealized numerical experiments to look first at the impact of increasing the order of the discrete approximations of the pressure gradient and horizontal divergence terms (both on A and C-grid), and secondly at the use of internal wave phase speed dependent diffusion coefficients.

4.1 Design of the numerical test

The domain is a vertical section with $L_x = 2000$km and $H = 4$km. The initial condition is given in term of modal decomposition and corresponds to right travelling only waves (i.e. $y_q^- = u_q - \frac{g}{c_q} h_q = 0$):

$$\text{For } 1 \leq n \leq n_{\max}, \quad h_n(x, t=0) = \frac{1}{n} \cos(k_n x) e^{-(x-x_0)^2/\sigma^2}, \qquad u_n(x, t=0) = \frac{g}{c_n} h_n(x, t=0) \tag{16}$$

where $k_n = \dfrac{\omega}{c_n}$, $\omega = \omega_{M2} = 1,405.10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ (corresponding to the M2 barotropic tide), $x_0 = L/5$, $\sigma^2 = 6000L_x$. The Brunt-Vaisala Frequency is constant and set to $N = 2.10^{-3}\mathrm{s}^{-1}$. Each mode has wavelength $\lambda_n = 2\pi/k_n = 2\pi c_n/\omega$. Let $n_{\max}$ be the number of modes, the smallest wavelength is given by $\lambda_{\min} = \lambda_{n_{\max}} = 2\pi c_{n_{\max}}/\omega$.
In the case of constant N, we have

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi NH}{n_{\max}\pi\omega} = \frac{2NH}{n_{\max}\omega}$$

So that if we want the initial wave to be resolved by the grid we have to choose $n_{\max}$ such that $\lambda_{\min} \geq 2\Delta x$ which leads to

$$n_{\max} \leq \frac{NH}{\omega\Delta x} \tag{17}$$

In the numerical experiments, we will use $\Delta x = 4$km and $\Delta x = 2$km. Using (17) for the coarsest resolution case $\Delta x = 4$km we get

$$n_{\max} \leq \frac{2.10^{-3}10^4}{1,405.10^{-4}10^4} \approx 14.3$$

In (16), $n_{\max}$ is fixed to 14. The corresponding initial condition is plotted in figure (5).

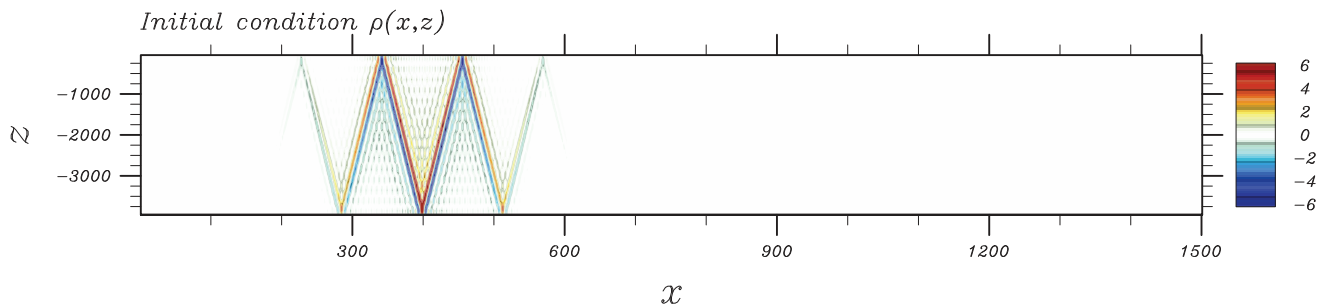


Figure 5: Density field : initial condition

The time integration is done using a fourth-order Runge-Kutta method (referred to as RK4) to match the order of accuracy in space.

4.2 Low vs high order discretization of internal waves

In this first series of experiments, we investigate the impact of going from a second order (C2) scheme to a fourth order (C4) scheme to discretize both horizontal pressure gradient and horizontal divergence in the continuity equation. The impact of grid staggering is also investigated. Figures (6, 7) show the solutions at final time for the $\Delta x = 4$km and $\Delta x = 2$km resolution. Vertical lines are added to more easily see the dispersion error in comparison with the analytical solution. The corresponding relative RMS errors are indicated on figure (8). These simulations is constant with the theoretical dispersive errors given in figure (4). Figures (6, 7) show that fourth-order accuracy leads to a significant improvement for the A-grid at large scales. Concerning the C-grid the improvement is over the whole spectrum, as seen in figure (8) the resulting RMS error at high resolution ($\Delta x = 2$km) is much lower than the one obtained with second order

schemes. This favors the use of the staggered grid. However we remind the computational mode associated with the treatment of the Coriolis term in the horizontal with this kind of staggering. Moreover, in these configurations, only the A-grid allows the design of monotone schemes for internal-gravity waves propagation since the velocity and density are collocated so that the discrete definition of the characteristic variables, which combine these two fields, is straightforward and does not require any averaging.

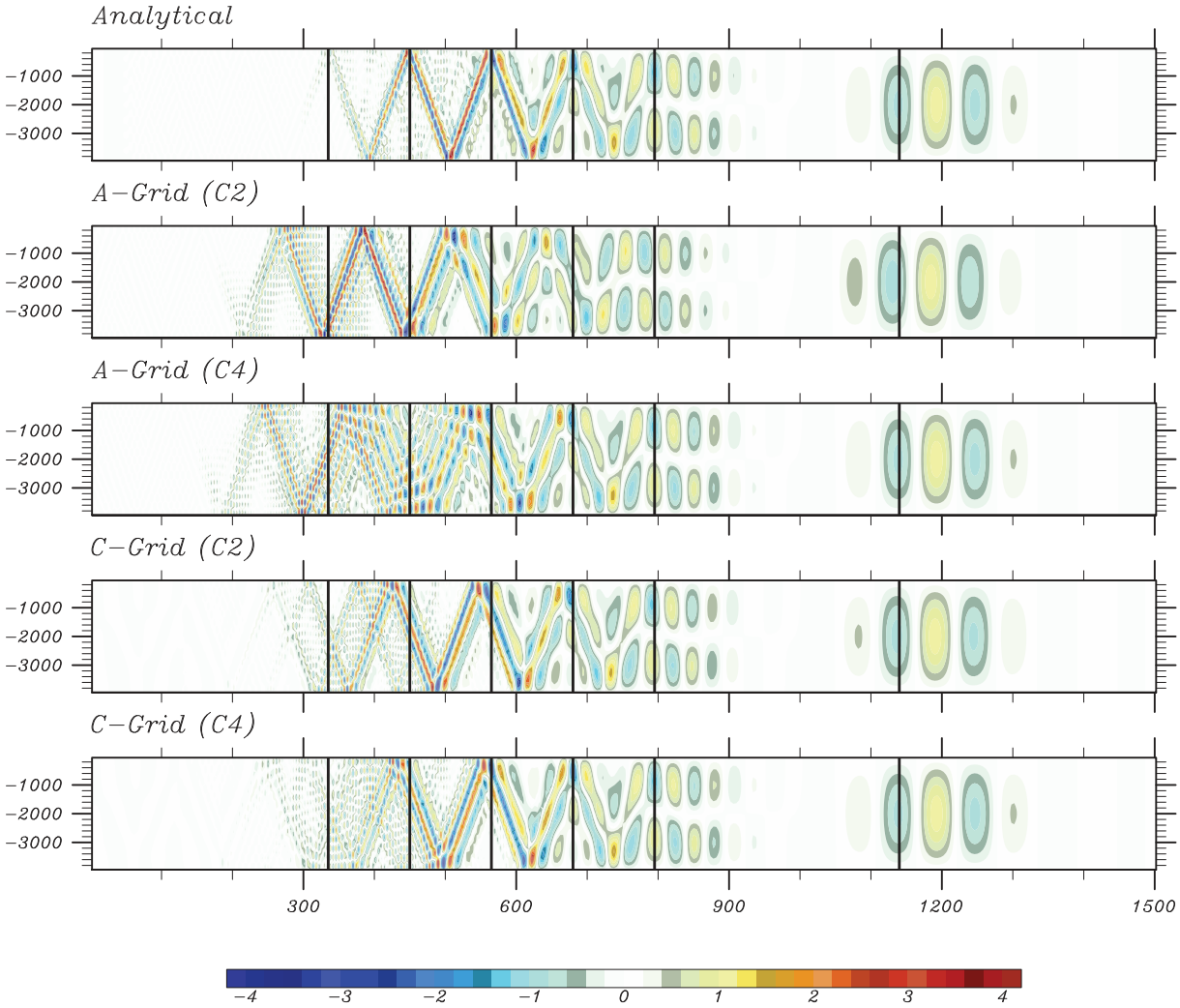


Figure 6: Comparison of second (C2) and fourth (C4) order centered schemes against the analytical solution for the A and C-grid. Density field for $\Delta x = 4$km

4.3 Diffusion scaled on internal wave phase speed

The preceding results clearly show the emergence of a numerical mode on the non staggered A-grid. The objective, here, is to add diffusion based on the internal wave phase speed to damp this computational mode. To be able to compare with the fourth order centered scheme, we have implemented a fourth order scheme with total variation diminishing (TVD) limiters. The limiters used in these simulations correspond to the minimum of the TVD region ([16]). This

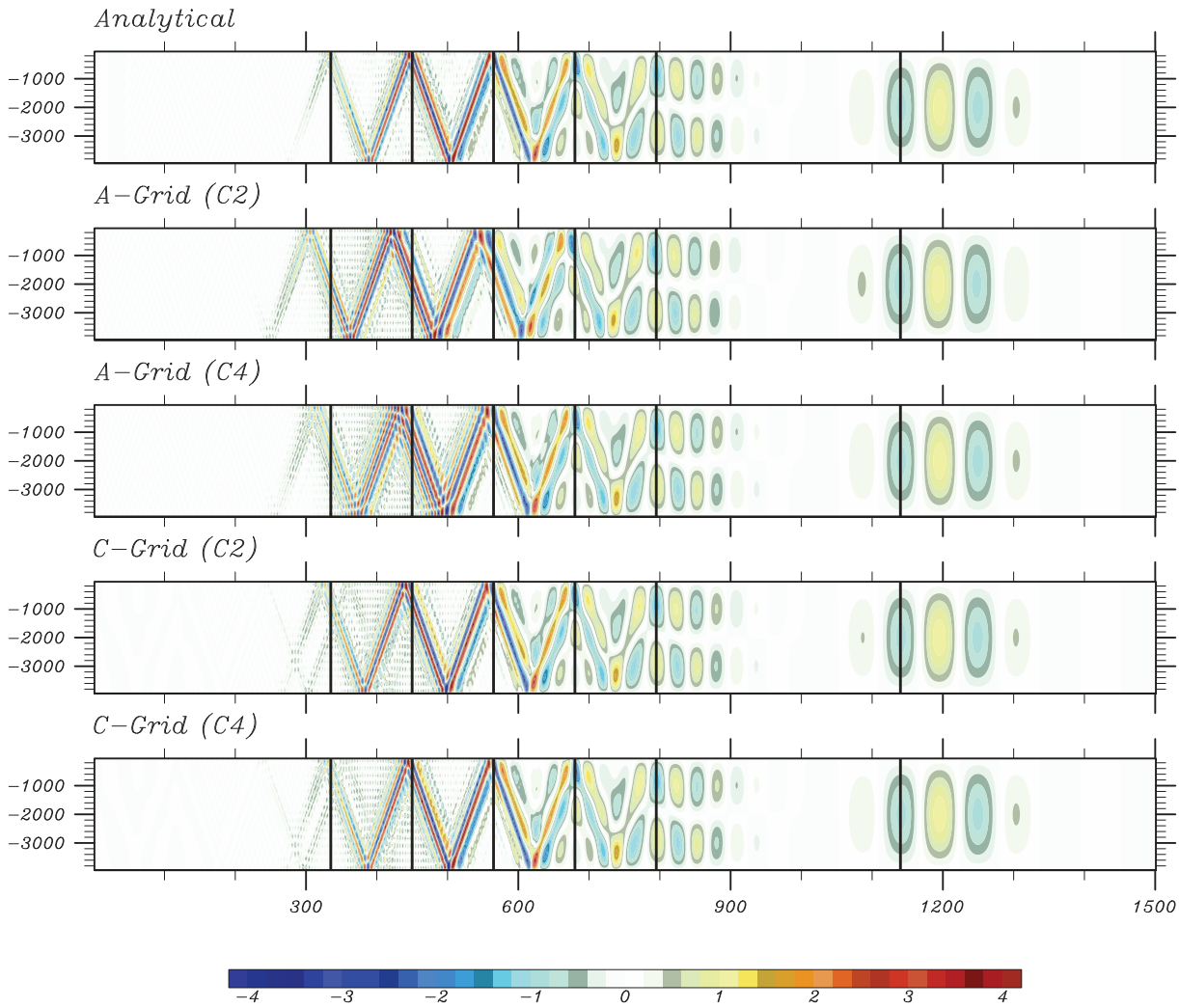


Figure 7: Comparison of second (C2) and fourth (C4) order centered schemes against the analytical solution for the A and C-grid. Density field for $\Delta x = 2$km

naturally induces a velocity (c_q) dependent (nonlinear) diffusion for each internal waves. In addition, we compare with a monotony preserving (MP) scheme which is known to perform better around smooth extrema ([4, 18]. The results in figure (9) show that this effectively damps the computational mode, as confirmed by the plot of the corresponding RMS error in figure (10). Note also the much better behavior of the MP scheme against the TVD scheme. Even if a little of dispersion is visible for high baroclinic modes, the 2km fourth order MP solution is closed to the analytical solution. Unlike all other schemes introduced so far, it leads to a non-oscillatory scheme for the propagation of internal gravity waves.

5 Direct space time algorithms

Even if seldom implemented in ocean models, direct space time algorithms are sometimes used to discretize momentum advection terms (e.g. [1]). The advantages of this approach are well

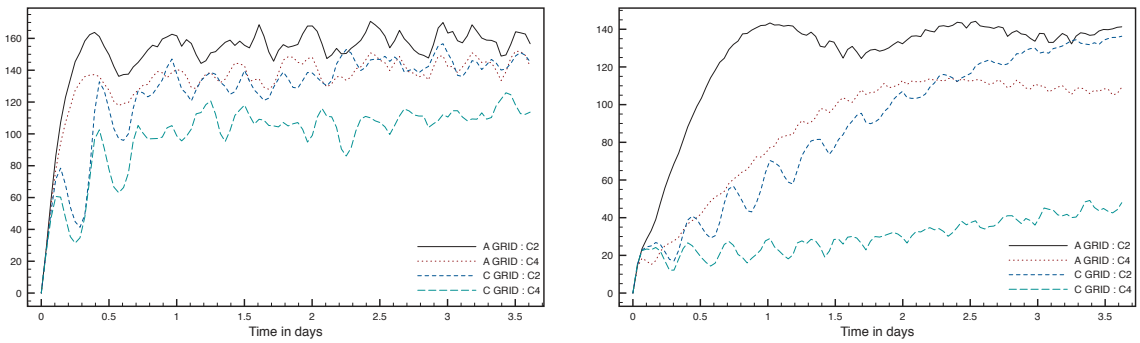


Figure 8: Relative RMS error (in %) for $\Delta x = 4$km (left) and $\Delta x = 2$km (right)

known: it allows to construct high order schemes in space and time with minimal stencil through only one evaluation of the right hand side together with a stability condition which remains unity when the order is increased. For multidimensionnel problems, direct space time algorithms have direct extensions via a Multidimensional Advective-Conservative Hybrid Operator (MACHO) approach ([6]) or via a directional splitting approach ([2]). The computation of the eigenvalues of the normal mode decomposition allows the design of direct space time algorithms specifically designed for the internal waves propagation. The schemes derived in this section, both on staggered and nonstaggered grids, are basically constructed for a shallow water model, it can therefore be used in several different contexts. The objective is to build direct space time schemes for the following system of equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial h}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{c^2}{g}\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

5.1 Non Staggered grid formulation

The formulation of space time algorithms in the scalar case is well known and can be directly extended to system (18) when the grid is not staggered. On the non staggered grid, the resulting scheme can either be formulated in terms of characteristic (as in (13)) or primitive variables (as in (18)) since there is no ambiguity in the discrete definition of the characteristic variables. We chose to formulate the scheme in term of primitive variables so that the extension to the non staggered grid will follow the same ideas. The time evolution of u_i and h_i is written as

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^u_{i+1/2} - F^u_{i-1/2}\right) + G^u_{i+1/2} - G^u_{i-1/2} \\ h_i^{n+1} &= h_i^n - \frac{c^2}{g}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^h_{i+1/2} - F^h_{i-1/2}\right) + G^h_{i+1/2} - G^h_{i-1/2} \end{aligned}$$

where the interfacial fluxes are given by:

$$\begin{aligned} F^u_{i+1/2} &= \alpha_{i-1}h^n_{i-1} + \alpha_i h^n_i + \alpha_{i+1}h^n_{i+1} + \alpha_{i+2}h^n_{i+2} \\ G^u_{i+1/2} &= \beta_{i-1}u^n_{i-1} + \beta_i u^n_i + \beta_{i+1}u^n_{i+1} + \beta_{i+2}u^n_{i+2} \end{aligned} \tag{19}$$

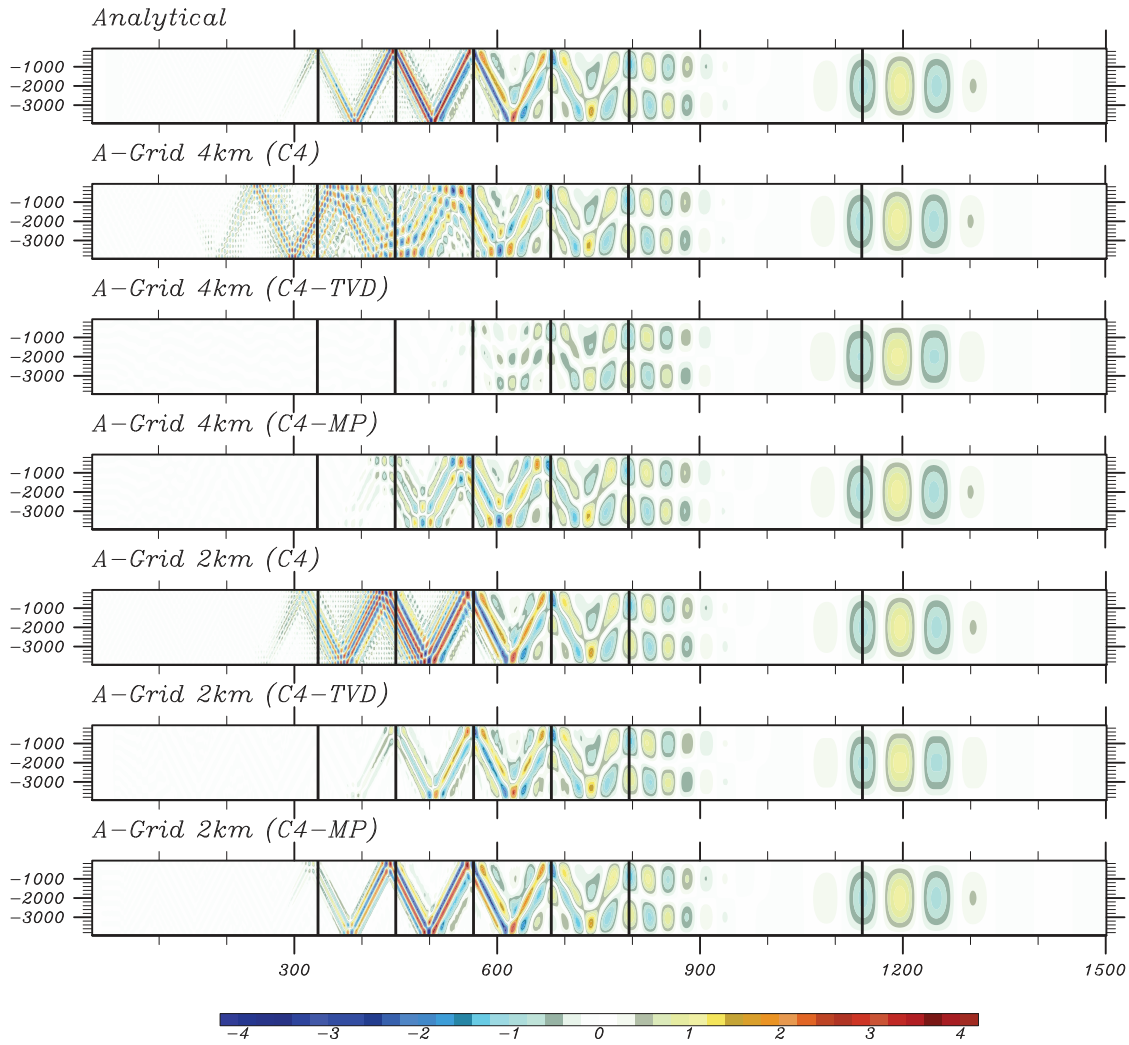


Figure 9: Numerical solutions on the A-GRID. Results at 4 and 2km with the fourth order centered scheme (C4) and with added TVD (C4-TVD) or MP limiters (C4-MP)

Exchanging u and h in (19) leads to the expressions of $F^h_{i+1/2}, G^h_{i+1/2}$. Fourier transform and Taylor expansion at large scales shows that second order in space and time is achieved by setting

$$\alpha_{i-1} = \alpha_{i+2} = 0,\ \alpha_i = \alpha_{i+1} = \frac{1}{2}, \quad \beta_{i-1} = \beta_{i+2} = 0,\ \beta_i = -\frac{\mu^2}{2}, \beta_{i+1} = -\beta_i$$

where $\mu = c\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$ is the Courant number. For this particular choice of the α and β weights, the resulting scheme is equivalent to a Lax Wendroff scheme on the characteristic variables.
Fourth order space time accuracy is achieved by setting

$$\alpha_{i-1} = \alpha_{i+2} = -\frac{1}{12} + \frac{\mu^2}{12},\ \alpha_i = \alpha_{i+1} = \frac{7}{12} - \frac{\mu^2}{12}$$
$$\beta_{i-1} = \frac{1}{24}\mu^2(1-\mu^2), \beta_{i+2} = -\beta_{i-1},\ \beta_i = \frac{1}{8}\mu^2(-5+\mu^2), \beta_{i+1} = -\beta_i$$

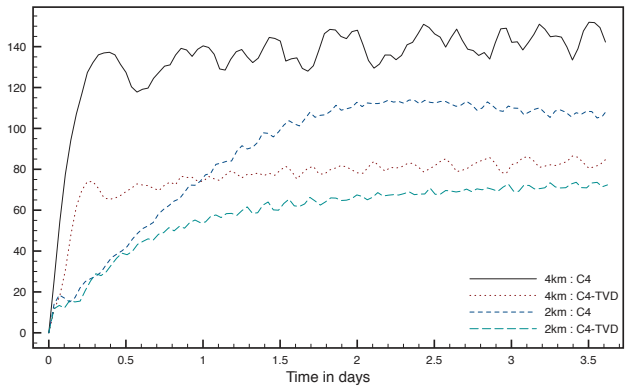


Figure 10: Relative RMS error with fourth order centered (C4) and fourth order TVD (C4-TVD) schemes on a A-grid

For the first order hyperbolic shallow-water system (18), the obtained coefficients simply translates the fact that the even order temporal derivates of u (resp. h) is replaced by even order spatial derivatives of u (resp. h) and that odd order temporal derivates of u (resp. h) is replaced by odd order spatial derivatives of h (resp. u). As for other direct space time algorithms, both second and fourth order schemes are exact for $\mu = \pm 1$.

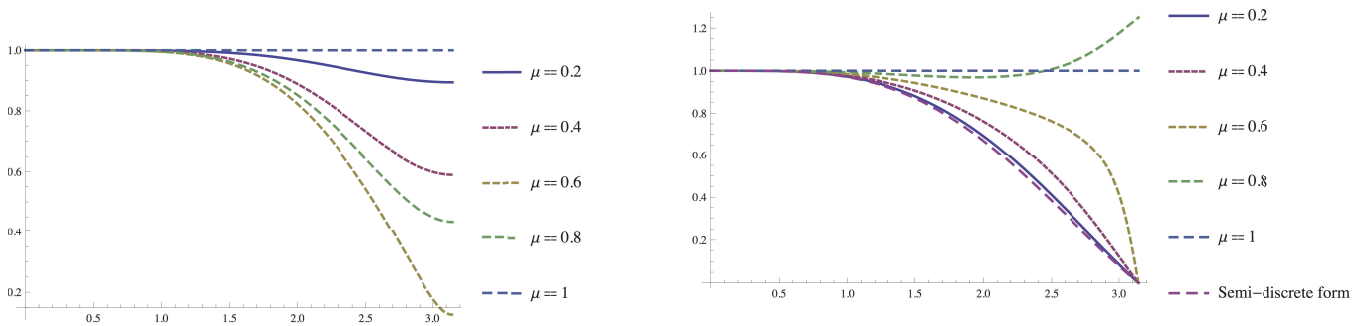


Figure 11: Dissipation error (left) and dispersion error (right) with respect to the wavenumber $k\Delta x$ for the fourth order direct space time algorithm on a A-grid for different values of the Courant number μ.

5.2 Staggered grid formulation

For the staggered grid formulation, we start from a similar expression on a staggered grid: (h is located at $i + 1/2$ points, see figure (3)):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - g\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^u_{i+1/2} - F^u_{i-1/2}\right) + G^u_{i+1/2} - G^u_{i-1/2}$$

$$h^{n+1}_{i+1/2} = h^n_{i+1/2} - \frac{c^2}{g}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^h_{i+1} - F^h_{i-1}\right) + G^h_{i+1} - G^h_i$$

where

$$\begin{aligned} F^u_{i+1/2} &= \alpha_{i-3/2}h^n_{i-3/2} + \alpha_{i-1/2}h^n_{i-1/2} + \alpha_{i+1/2}h^n_{i+1/2} + \alpha_{i+3/2}h^n_{i+3/2} + \alpha_{i+5/2}h^n_{i+5/2} \\ G^u_{i+1/2} &= \beta_{i-1}u^n_{i-1} + \beta_i u^n_i + \beta_{i+1}u^n_{i+1} + \beta_{i+2}u^n_{i+2} \end{aligned} \tag{20}$$

F^h_i and G^h_i are obtained by interchanging u and h in (20) and by adding 1/2 to the indices. Second order in space and time is achieved by setting

$$\alpha_{i+5/2} = \alpha_{i-3/2} = 0, \alpha_{i-1/2} = \alpha_{i+3/2}, \alpha_{i+1/2} = 1 - 2\alpha_{i-1/2}$$
$$\beta_{i-1} = \beta_{i+2} = 0,\ \beta_i = -\frac{\mu^2}{2}, \beta_{i+1} = -\beta_i$$

Setting $\alpha_{i-1/2} = \alpha_{i+3/2} = 0$ leads to an unstable scheme (the module of the amplification factor is given at large scales by $|\lambda| = 1 + \mu^2\left(\frac{\mu^2}{8} - \alpha_{i+3/2}\right)$). Here we choose a value of $\alpha_{i-1/2}$ which leads to a stability condition of $|\mu| \leq 1$.

$$\alpha_{i-1/2} = \frac{1}{4}\left(1 - \sqrt{1-\mu^2}\right) \tag{21}$$

The details of the computation are not given but it consists in looking at the module of the amplification factor at large ($\theta = k\Delta x \ll 1$) and small scales ($\theta = k\Delta x = \pi$) and in finding the constraint such that it is less than one (and this can indeed be achieved only for $|\mu| \leq 1$ among all the choices for $\alpha_{i-1/2}$. $\alpha_{i-1/2}$ given by (21) thus leads to the largest stability limit of this family). Fourth order accuracy in space and time is obtained for

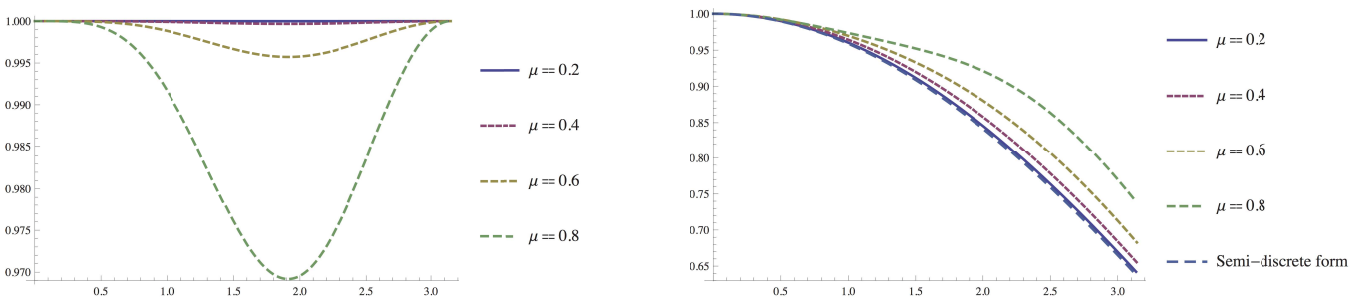


Figure 12: Same as figure 11 for the second order direct space time algorithm on a C-grid

$$\alpha_{i-1/2} = \alpha_{i+3/2} = -\frac{1}{24} + \frac{\mu^2}{6} - 4\alpha_{i-3/2}, \alpha_{i+1/2} = \frac{13}{12} - \frac{\mu^2}{3} + 6\alpha_{i-3/2}, \alpha_{i+5/2} = \alpha_{i-3/2}$$
$$\beta_{i-1} = \frac{1}{24}\mu^2(1-\mu^2), \beta_{i+2} = -\beta_{i-1},\ \beta_i = \frac{1}{8}\mu^2(-5+\mu^2), \beta_{i+1} = -\beta_i$$

Here trying to minimize the stencil by setting $\alpha_{i-3/2}$ to 0 also leads to an unstable scheme. The choice that leads to a stability condition of $|\mu| \leq 1$ is

$$\alpha_{i-3/2} = \min\left(\frac{1}{96}\left(4\mu^2 - 7\right) + \frac{1}{48}\sqrt{-\mu^6 + 8\mu^4 - 19\mu^2 + 12}, \frac{8\mu^4 - 16\mu^2 - 1}{1152}\right)$$

Again this choice of $\alpha_{i-3/2}$ comes from a study of module of the amplification factor at large (second term in the minimum above) and small scales (first term in the minimum above).

5.3 Analysis

Space time dispersion errors are plotted on figure (11). In particular, it can be shown that for the A-grid the numerical mode is removed for $1 \geq |\mu| \geq \sqrt{\frac{1}{2}\left(4-\sqrt{10}\right)} \approx 0.65$.

Unlike the nonstaggered case, the direct space time schemes are not exact for $\mu = 1$ on the staggered grid[4]. But the CFL stability condition is still one. This leads to a very efficient algorithm. The stability limit of these schemes can still be increased by using classical forward backward approaches. The results obtained with these direct space time schemes (not shown) are almost identical to the ones obtained with the separated space time approach (i.e. RK4-C2 or RK4-C4) both for staggered and nonstaggered grids, but again with a far better efficiency. In the case of the A-grid, TVD or monotonicity preserving direct space time schemes can easily be derived.

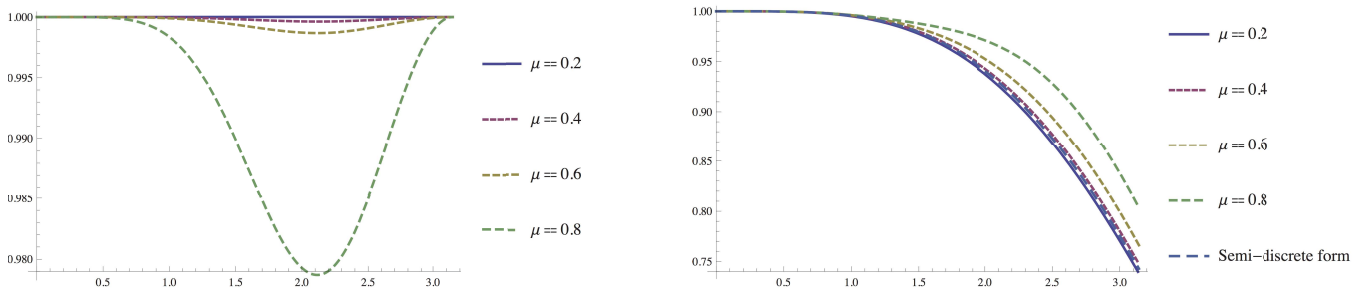


Figure 13: Same as figure 11 for the fourth order direct space time algorithm on a C-grid

6 Conclusion and perspectives

The numerical approximation of internal waves propagation has been studied in this paper. We, first, emphasized the fact that the use of high order approximations allow much better discrete dispersion relation, even for staggered grids. In addition to the use of high order pressure gradient computation, it requires a high order computation of the horizontal divergence term in the continuity equation. Thanks to an explicit computation of internal gravity waves phase speeds, we introduced an efficient flow-dependent damping term to dissipate the non resolved modes, which is important when using non staggered grids. We also derived direct space-time algorithms that show great efficiency both in terms of stability and accuracy. Those schemes can be easily extended to satisfy monotonicity constraints for internal wave propagation on non staggered grid, however the design of such monotonic schemes remains challenging on staggered grids. The study of internal wave breaking, acting like hydraulic jumps, could probably benefit from the use of such schemes.

Acknowledgements

E. Blayo, J. Demange, L. Debreu, and P. Marchesiello were funded by the ANR through contract ANR-11-MONU-005 (COMODO). F. Lemarié acknowledges the support of the French LEFE MANU and GMMC programs through project CHRONOS.

[4]This essentially comes from the fact that the Euler time scheme has an error that expands in term of Δt while the spatial derivatives have an error that expands in term of $\Delta x/2$ instead of Δx on a non staggered grid.

References

[1] Adcroft A., J.-M. Campin, S. Dutkiewicz, C. Evangelinos, D. Ferreira, G. Forget, B. Fox-Kemper, P. Heimbach, C. Hill, E. Hill, H. Hill, O. Jahn, M. Losch, J. Marshall, G. Maze, D. Menemenlis, and A. Molod. MITGCM USER MANUAL. In MIT Department of EAPS 77 Massachusetts Ave. Cambridge, MA 02139-4307. March 10, 2014, 2014. 470 pp.

[2] Bott A. Improving the time-splitting errors of one-dimensional advection schemes in multi-dimensional applications. Atmospheric Research, 2010.

[3] Brown J. A. and K. A. Campana. An economical time-differencing system for numerical weather prediction. Mon. Weather Rev., 106:1125–1136, 1978.

[4] Suresh A. and H.T. Huynh. Accurate monotonicity-preserving schemes with runge-kutta time stepping. J. Comput. Physics, 136(1):83 – 99, 1997.

[5] Cushman Roisin B. and J. M. Beckers. Introduction to Geophysical Fluid Dynamics: Physical and Numerical Aspects. Academic Press, 2010.

[6] Leonard B.P., A.P. Lock, and M.K. MacVean. Conservative explicit unrestricted time step multidimensional constancy preserving advection schemes. Mon. Weather Rev., 124:2588–2606, May 1996.

[7] Griffiths S. D. and R. H. J. Grimshaw. Internal tide generation at the continental shelf modeled using a modal decomposition: Two-dimensional results. J. Phys. Oceanogr., 37(3):428–451, 2014/08/28 2007.

[8] Blayo E. and L. Debreu. Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. Ocean Modell., 9(3):231 – 252, 2005.

[9] Gouillon F. Internal wave propagation and numerically induced diapycnal mixing in oceanic general circulation models. PhD thesis, Florida state university - College of arts and sciences, 2010.

[10] Shchepetkin A. F. and J. C. McWilliams. The regional oceanic modeling system (roms): a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. Ocean Modell., 9(4):347 – 404, 2005.

[11] Demange J., L. Debreu, P. Marchesiello, F. Lemarié, and E. Blayo. Depth-dependent barotropic integration and stability through vertical modes in free-surface ocean models. Ocean Modell., 2014. under review.

[12] Dukowicz J. K. Mesh effects for rossby waves. J. Comput. Physics, 119(1):188 – 194, 1995.

[13] Kundu P. K. and Cohen I. M. Fluid Mechanics, Second Edition. Academic Press, 2002.

[14] Beckers J. M. Selection of a staggered grid for inertia-gravity waves in shallow water. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 38(8):729–746, 2002.

[15] Griffies S. M., C. Boning, F. O. Bryan, E. P. Chassignet, R. Gerdes, H. Hasumi, A. Hirst, A.-M. Treguier, and D. Webb. Developments in ocean climate modelling. Ocean Modell., 2:123–192, 2000.

[16] Durran D. R. Numerical Methods for Fluid Dynamics : With Application to Geophysics. Springer Press, 2010.

[17] Osborn T. R. Estimates of the local rate of vertical diffusion from dissipation measurements. J. Phys. Oceanogr., 10(1):83–89, 1980.

[18] Daru V. and C. Tenaud. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. J. Comput. Physics, 193:563–594, 2004.

[19] Le Roux D. Y. Spurious inertial oscillations in shallow-water models. J. Comput. Physics, 231(24):7959–7987, 2012.

Contents

1 Introduction **3**

2 Normal mode decomposition **5**

3 Discretization of internal waves in ocean models **7**
3.1 Accuracy and grid staggering 7
3.2 Damping of the numerical mode of the nonstagerred grids 9

4 Numerical experiment **11**
4.1 Design of the numerical test 11
4.2 Low vs high order discretization of internal waves 12
4.3 Diffusion scaled on internal wave phase speed 13

5 Direct space time algorithms **14**
5.1 Non Staggered grid formulation 15
5.2 Staggered grid formulation 17
5.3 Analysis 19

6 Conclusion and perspectives **19**

RESEARCH CENTRE
GRENOBLE – RHÔNE-ALPES

Inovallée
655 avenue de l'Europe Montbonnot
38334 Saint Ismier Cedex

Publisher
Inria
Domaine de Voluceau - Rocquencourt
BP 105 - 78153 Le Chesnay Cedex
inria.fr

ISSN 0249-6399

2.3 Définition des modes sur grilles décalées et interpolation verticale

Nous commençons par rappeler la définition des modes au niveau continu. Les modes $M_q(z)$ sont les vecteurs propres du problème suivant :

$$\begin{cases} \Lambda M_q = \dfrac{1}{c_q^2} M_q \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-H} = 0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right|_{z=0} = -\dfrac{N^2}{g} M_q(0) \end{cases} \tag{2.1}$$

où $\Lambda = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(N^{-2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)$ et $N^2(z) = -\dfrac{g}{\rho_0}\dfrac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z}$, la fréquence de Brünt-Vaisala est supposé positive. c_q correspond à la vitesse propagation du mode q. L'objectif de cette section est d'étudier les différents éléments qui influent sur l'approximation de la vitesse de propagation des ondes internes c_q. Dans le rapport de recherche de la section (2.2), nous calculons explicitement les vitesses de propagation c_q afin d'appliquer une diffusion plus sélective voire de construire des schémas espaces temps pour la propagation des ondes internes. Les modèles numériques actuels d'océan ne résolvent pas ces équations mais cependant la vitesse de propagation des ondes internes modélisées est bien implicitement celle qui correspond à la version discrète vue par le modèle de ce système aux valeurs propres. Nous nous intéressons donc ici à l'équivalent discret du système (2.1) et aux éléments de la discrétisation numérique qui l'impactent. Comme nous l'expliquons dans ce chapitre, deux éléments importants sont à prendre en compte a) la grille verticale de calcul b) l'approximation discrète de l'équilibre hydrostatique.

2.3.1 Rappel des transformations au niveau continu

Rappelons tout d'abord la version continue. Le système perturbé autour d'un état au repos s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + w\frac{\mathrm{d}\overline{\rho}}{\mathrm{d}z} = 0 \tag{2.5}$$

et les solutions de (2.2,2.3,2.4,2.5) sont décomposées dans une base de modes propres $M_q(z)$ [Blayo and Debreu, 2005] :

$$\begin{cases} u(x,z,t) = \displaystyle\sum_{q=0}^{N} u_q(x,t) M_q(z) \\ p(x,z,t) = \rho_0 g \displaystyle\sum_{q=0}^{N} h_q(x,t) M_q(z) \\ \rho(x,z,t) = -\rho_0 \displaystyle\sum_{q=0}^{N} h_q(x,t) \dfrac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} \end{cases}$$

où les modes propres $M_q(z)$ sont les vecteurs propres du système (2.1). Ces modes sont orthogonaux vis à vis du produit scalaire continu $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{H}\displaystyle\int_{-H}^{0} f(z)g(z)dz$. Au niveau continu, l'évolution temporelle de u_q, h_q est obtenue de la façon suivante :

- L'évolution de u_q est obtenue simplement en prenant le produit scalaire de l'équation des moments (2.2) avec le mode M_q. Celui conduisant directement à

$$\frac{\partial u_q}{\partial t} + g\frac{\partial h_q}{\partial x} = 0 \tag{2.6}$$

- L'obtention de l'évolution de h_q est plus complexe.

  (2.3) est multipliée par $N^{-2}(z)\dfrac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z}$ et intégrée verticalement sur $[-H, 0]$.

$$\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} + w\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}N^{-2}(z)\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z}\right]\mathrm{d}z = 0$$

  Le premier de ces termes se transforme comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\frac{\partial\rho}{\partial t}N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} &= -\frac{\partial}{\partial t}\sum_p \rho_0 h_p\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\frac{\mathrm{d}M_p}{\mathrm{d}z}N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\sum_p \rho_0 h_p\left(-\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}M_p\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z} + \frac{1}{H}\left[M_p(z)N^{-2}\frac{\mathrm{d}M_q}{\mathrm{d}z}\right]_{-H}^{0}\right)\\
&= -\frac{\partial}{\partial t}\sum_p \rho_0 h_p\left(\frac{1}{c_p^2}\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}M_pM_q - \frac{1}{H}M_p(0)\frac{1}{g}M_q(0)\right)\\
&= -\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c_q^2}h_q) + \frac{\rho_0}{gH}M_q(0)\frac{\partial}{\partial t}\sum_p h_pM_p(0)\\
&= -\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c_q^2}h_q) + \frac{\rho_0}{gH}M_q(0)\frac{\partial\eta}{\partial t}\\
&= -\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\frac{1}{c_q^2}h_q) + \frac{\rho_0}{gH}M_q(0)w(0)
\end{aligned} \tag{2.7}$$

  où les points importants qui ont été utilisés dans ces transformations sont :
  - la relation vérifiée par les modes (le mode M_q est vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_q = \dfrac{1}{c_q^2}$)
  - les conditions aux limites au fond et à la surface sur le mode M_q
  - le fait que $p(z=0) = \rho g\eta = \displaystyle\sum_p h_pM_p(0)$
  - la relation entre l'évolution temporelle de la surface libre et la vitesse verticale en surface (dans un cadre de surface libre linéarisée) : $\dfrac{\partial\eta}{\partial t} = w(0)$

  Le second de ces termes se transforme comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}w\frac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}N^{-2}(z)\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z} &= -\frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}w\frac{\mathrm{d}M_q(z)}{\mathrm{d}z}\\
&= \frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\frac{\partial w}{\partial z}M_q(z) - \frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}\left[wM_q(z)\right]_{-H}^{0}\\
&= -\frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}\int_{-H}^{0}\frac{\partial u}{\partial x}M_q(z) - \frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}w(0)M_q(0)\\
&= -\frac{\rho_0}{g}\frac{\partial u_q}{\partial x} - \frac{\rho_0}{g}\frac{1}{H}w(0)M_q(0)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

où nous avons utilisé la condition d'imperméabilité au fond (sur un fond plat) qui s'écrit $w(z = -H) = 0$ ainsi que l'équation de continuité $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0$.
En faisant la somme de ces deux termes nous obtenons correctement :

$$\frac{\partial h_q}{\partial t} + \frac{c_q^2}{g}\frac{\partial u_q}{\partial x} = 0 \tag{2.9}$$

2.3.2 Grille verticale et projection sur les modes

L'élément qui impacte le plus la bonne approximation des vitesses de propagation des ondes internes est le choix de la grille verticale. Deux décalages de grilles verticales (grilles de Lorenz et grilles de Charney-Philiips) sont connus dans la littérature ([Arakawa and Moorthi, 1988, Leslie and Purser, 1992, Cullen et al., 1997, Thuburn, 2006]) et sont représentés sur la figure (2.1).

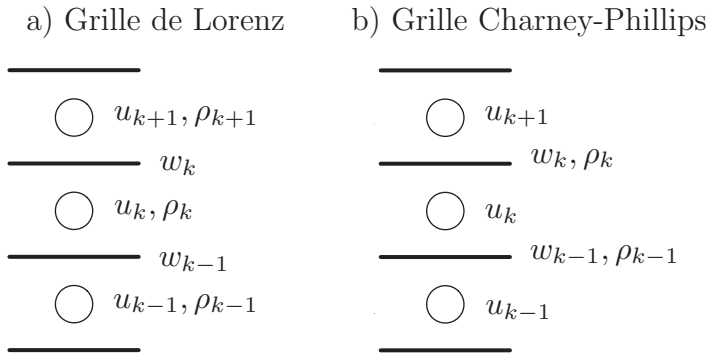


FIGURE 2.1 – Représentation schématique du positionnement des variables d'état sur les grilles verticales de a) Lorenz et b) Charney-Phillips.

La différence essentielle entre les deux grilles est le placement de la variable densité : elle est aux "centres" des couches dans la grille de Lorenz alors qu'elle est aux interfaces des couches dans la grille de Charney-Phillips. Ces deux types de grilles ont été étudiés dans la littérature et leurs avantages/inconvénient sont relativement connus. Les propriétés de conservation (de la densité et de l'énergie totale notamment) sont plus simplement préservées sur la grille de Lorenz. Cependant, comme nous allons le détailler par la suite, cette grille possède un mode numérique qui est absent de la grille de Lorenz. La grille de Charney-Phillips permet quant à elle de prouver la conservation discrète de la vorticité potentielle ([Arakawa and Moorthi, 1988]).

Les articles cités ci-dessus mettent en avant certaines propriétés de conservation ou illustrent les résultats à l'aide de tests numériques. Dans cette sous-section, nous montrons l'impact direct qu'a le choix de la grille verticale sur l'approximation du système (2.1) et donc sur la qualité de l'approximation des vitesses continues de propagation des ondes internes.

Que deviennent les transformations continues de la sous-section 2.3.1 au niveau discret ? La seconde transformation (2.8) est directement fonction de la grille verticale de calcul et de la position relative des vitesses verticales et de la densité. En effet, le terme $w\dfrac{\mathrm{d}\bar{\rho}}{\mathrm{d}z}$ est exprimé de façon différente selon le décalage entre le point ρ et le point w sur la grille verticale. Le calcul de ce terme doit correspondre à la discrétisation de l'équation de densité (ou des traceurs températures et salinité) effectuée dans le modèle numérique et celui-ci diffère selon le type de grille verticale. En effet, l'équation d'advection de densité s'écrit sous forme conservative

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u\rho}{\partial x} + \frac{\partial w\rho}{\partial z} = 0$$

et le terme qui nous intéresse pour la propagation des ondes internes, c'est à dire la discrétisation de la partie advective de $\dfrac{\partial w\rho}{\partial z}$ (le résultat devant être au point ρ) s'écrit différemment sur une grille de Charney-Phillips où le point w est colocalisé au point ρ et sur une grille de Lorenz où ce n'est pas le cas. Si on compare la répartition sur les deux grilles de Lorenz ou Charney-Phillips, on obtient donc des versions discrètes différentes de l'intégration $\displaystyle\int_{-H}^{0} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ en fonction de w (résumées dans le tableau 2.1). (dans cette étude M désignera un mode quelconque et l'indice k désignera non plus le numéro du mode mais la position sur la verticale).

Continu	$\displaystyle\int_{-H}^{0} w\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}dz = CL - \int_{-H}^{0} \partial_z wM dz$
Grille Lorenz (M_k aux points w)	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n_z}\frac{1}{2}\left(w_{i,k-1}+w_{i,k}\right)\frac{M_k-M_{k-1}}{\Delta z_k}\Delta z_k = \left[CL - \sum_{k=1}^{n_z}\frac{1}{2}\left(M_{k-1}+M_k\right)\frac{(w_{i,k}-w_{i,k-1})}{\Delta z_k}\Delta z_k\right]$
Grille Charney-Phillips (M_k aux points u)	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n_z} w_{i,k}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z_k^w}\Delta z_k^w = \left[CL - \sum_{k=1}^{n_z} M_k\frac{(w_{i,k}-w_{i,k-1})}{\Delta z_k}\Delta z_k\right]$

Table 2.1 – Equivalence continu/discret de l'intégration par partie du terme d'advection $w\dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}z}$ en fonction du type de grille utilisée sur la verticale. CL représente les conditions aux limites qui ne sont pas explicitées ici.

où Δz_k^w représente l'intervalle entre deux points u sur la grille de Charney-Phillips et Δz_k l'intervalle entre deux points w sur une grille de Lorenz. L'équation discrète de continuité est ensuite utilisée $\dfrac{(w_{i,k}-w_{i,k-1})}{\Delta z_k} = -\dfrac{(u^*_{i,k}-u^*_{i-1,k})}{\Delta x}$. Ici u^*_i représente l'interpolation de la vitesse aux interfaces, c'est cette interpolation qui va donner l'ordre du schéma d'advection horizontal dans les modes (cf section 2.2.2).

On obtient finalement la répartition verticale en fonction du type de grille utilisé (cf. 2.2) :

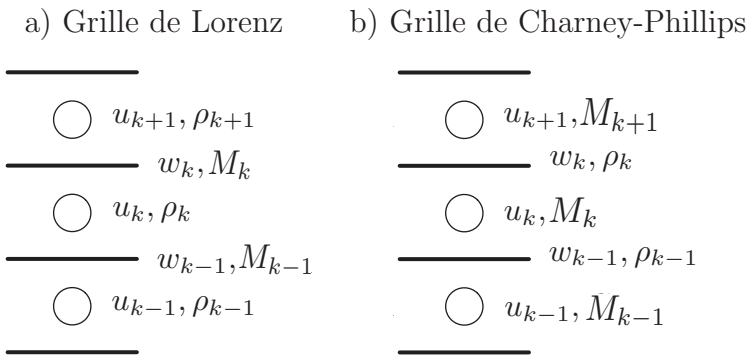


Figure 2.2 – Représentation schématique du positionnement des variables M_k sur les grilles verticales de a) Lorenz et b) Charney-Phillips.

La répartition verticale des points M_k en fonction des grilles est désormais fixée. La transformation discrète de l'équation de continuité doit nous permettre de définir la façon d'effectuer la projection de vitesses. En effet pour pouvoir vérifier : $\int_{-H}^{0} \partial_z w M dz = -\int_{-H}^{0} \partial_x u M dz = -\partial_x \langle u, M \rangle = -\partial_x u_m$, on doit écrire au niveau discret :

Grille Lorenz	$\langle u, M \rangle = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{n_z} \frac{1}{2} (M_{k-1} + M_k) u_{i,k} \Delta z_k$
Grille Charney-Phillips	$\langle u, M \rangle = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{n_z} M_k u_{i,k} \Delta z_k$

2.3.3 Discretisation consistante de l'équation elliptique $\partial_z[N^{-2}\partial_z M] = -\lambda M$

Nous allons voir maintenant que la définition de la projection des champs de vitesses obtenue ci-dessus conduit la forme discrète du système elliptique

$$\partial_z[N^{-2}\partial_z M] = -\lambda M \tag{2.10}$$

Ce système a une forme différente pour les grilles de Lorenz et Charney-Phillips.

Grille de Lorenz

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement et de la densité sur une grille de Lorenz se fait aux points (u,ρ).
La projection de cette équation sur les modes doit donc se faire au même point. Le produit scalaire discret doit aussi correspondre à cette discrétisation. De même que toutes les relations utilisées pour établir le système en modes.
Considérons alors les équivalences entre produit scalaire discret et continu pour la projection de l'équation de quantité de mouvement sur un mode quelconque M :

Projection de l'équation de quantité de mouvement aux points (u, ρ)

Continu	Discret
$\langle u, M \rangle = \frac{1}{H} \int_{-H}^{0} u M dz$	$\langle u, M \rangle = \sum_{k=1}^{n_z} u_k \frac{1}{2} (M_{k-1} + M_k) \Delta z_k$
$\langle p, M \rangle = \frac{1}{H} \int_{-H}^{0} p M dz$	$\langle p, M \rangle = \sum_{k=1}^{n_z} \frac{1}{2} (p_{k-1} + p_k) \frac{1}{2} (M_{k-1} + M_k) \Delta z_k$

où $\frac{1}{2}(p_{k-1} + p_k)$ représente la valeur de la pression au centre de la maille après une reconstruction linéaire de type volume fini. C'est ici un choix de discrétisation important qui est effectué dans la plupart des modèles actuels. Nous verrons plus loin (section2.3.4) comment l'ordre de cette interpolation modifie l'ordre de précision du calcul des valeurs propres discrètes et donc du calcul numérique de la vitesse de phase de chaque onde interne.

Ensuite, pour la projection de l'équation de densité, nous avons utilisé dans (2.7) l'équilibre hydrostatique et la définition des modes :

$$\langle \rho, N^{-2}\partial_z M\rangle = \langle \frac{-1}{g}\partial_z p, N^{-2}\partial_z M\rangle = \frac{1}{g}\langle p, \partial_z[N^{-2}\partial_z M]\rangle + \text{Termes de bords} = \frac{-\lambda}{g}\langle p, M\rangle \tag{2.11}$$

Nous considérons ici pour des facilités de calcul que les termes de bords sont nuls (ce qui est vrai en toit-rigide puisque la dérivée des modes est nulle en surface et au fond).
L'égalité 2.11 doit être vérifiée au niveau discret. Dans le cas d'une grille de Lorenz, nous devons donc avoir

$$\sum_{k=1}^{n_z} \frac{1}{2}\left(p_{k-1}+p_k\right)\frac{1}{2}\left(M_{k-1}+M_k\right)\Delta z_k = \frac{1}{\lambda}[-g\sum_{k=1}^{n_z}\rho_k N_k^{-2}\frac{M_k-M_{k-1}}{\Delta z_k}\Delta z_k] \tag{2.12}$$

En utilisant l'équilibre hydrostatique de type volume fini : $\rho_k = -\frac{1}{g}\frac{p_k-p_{k-1}}{\Delta z_k}$ (ceci est effectivement exact dans une approche volume fini où nous considérons que p_k désigne l'intégrale de la pression sur les interfaces supérieures et inférieures de la maille cf. 2.3.4 et que ρ_k est la moyenne sur la maille de calcul), on trouve en développant les deux cotés de l'égalité 2.12 :

$$\sum_{k=1}^{n_z-1} p_k\frac{1}{4}\left[\left(M_{k-1}+M_k\right)\Delta z_k + \left(M_k+M_{k+1}\right)\Delta z_{k+1}\right] = -\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n_z-1} p_k\left(N_{k+1}^{-2}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z_{k+1}} - N_k^{-2}\frac{M_k-M_{k-1}}{\Delta z_k}\right)$$

On en déduit par égalité des termes de pression p_k que l'équation discrète correspondant à la définition des modes est (à l'intérieur du domaine) :

$$\boxed{\frac{1}{4}\left[\left(M_{k-1}+M_k\right)\Delta z_k + \left(M_k+M_{k+1}\right)\Delta z_{k+1}\right] = -\frac{1}{\lambda}\left(N_{k+1}^{-2}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z_{k+1}} - N_k^{-2}\frac{M_k-M_{k-1}}{\Delta z_k}\right)} \tag{2.13}$$

Nous rappelons que dans la grille de Lorenz, les modes sont définis aux interfaces des couches. C'est donc le système aux valeurs propres 2.13, en ajoutant les termes de bords qui correspondent aux hypothèses choisies, qui doit être utilisé pour obtenir l'équivalent discret des modes et des vitesses de phases associées. Les points importants qui ont été utilisés sont a) la grille de Lorenz bien entendu b) une reconstruction linéaire de la pression sur la maille.

Grille de Charney-Phillips

De la même manière on peut dériver l'équation discrète de la définition des modes correspondant à une grille Charney-Phillips. Celle-ci, puisqu'elle place les points pression et vitesse au même endroit sur la verticale, permet une approche beaucoup plus simple qui ne dépend pas de l'interpolation de la pression sur la verticale et est équivalente à une simple discrétisation d'un laplacien sur la grille verticale :

$$\boxed{M_k\Delta z_k = -\frac{1}{\lambda}\left(N_{k+1}^{-2}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z_k^w} - N_k^{-2}\frac{M_k-M_{k-1}}{\Delta z_{k-1}^w}\right)} \tag{2.14}$$

Rappel : ici les modes sont définis au milieu des mailles.

2.3.4 Résolution discrète et interpolation verticale de la pression

Les systèmes 2.13 et 2.14 correspondent aux deux systèmes aux valeurs propres associés aux grilles de Lorenz et Charney-Phillips. Ils se mettent sous la forme :

$$\boxed{AM = \lambda BM}$$

où A représente la matrice de discrétisation du laplacien de l'équation elliptique 2.10 , c'est à dire les termes de droite dans les égalités 2.13 et 2.14 et B la matrice de l'interpolation des modes sur la verticale, c'est à dire les termes de gauche dans les mêmes équations.
Quelques remarques :

1. Les formulations 2.13 et 2.14 ne sont valables qu'à l'intérieur du domaine. Des termes de bords sont donc à inclure dans la matrice en fonction du type d'hypothèse utilisée (toit rigide ou surface libre).
2. La matrice A et B dans le cas d'une grille de Charney-Phillips (2.14) sont symétriques définies positives. Dans le cas d'une grille de Lorenz (2.13) la matrice A est aussi symétrique définie positive mais la matrice B est uniquement semi-définie positive. Ce qui traduit la présence d'un mode numérique.
3. On remarque que la matrice est d'ordre N+1 dans le cas d'une grille de Lorenz et reste d'ordre N sur une grille de Charney-Phillips. La résolution du problème elliptique contient donc un mode numérique dans le premier cas. Ceci est conforme au fait connu que les grilles décalées de Lorenz introduisent un mode numérique.
4. En observant l'égalité hydrostatique 2.12 qui mène à la définition des modes 2.13, nous voyons que c'est en grande partie le choix de l'interpolation verticale de la pression (ici linéaire) qui définit l'interpolation des modes à gauche de l'égalité 2.13.
   Nous pouvons donc se poser la question de son impact sur la précision du calcul des vitesses des modes.

Quelques choix d'interpolation de la pression aux interfaces en formulation volume fini

L'interpolation de la pression vient de l'intégration de type volume fini de l'équation des moments sur une maille centrée au point u, $\Omega_{i,k} = [x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}] \times [z^w_{k-1}, z^w_k]$

$$\int\int_{\Omega_{i,k}} \frac{\partial u}{\partial t} = -\int\int_{\Omega_{i,k}} \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}$$

Nous sommes donc amener à approcher le terme suivant :

$$\int_{z^w_{k-1}}^{z^w_k} p(x_i \pm \frac{\Delta x}{2}, z)\mathrm{d}z$$

Dans la suite on supposera Δz constant pour simplifier les notations et nous regardons uniquement la phase correspondant à l'approximation verticale. La phase correspondant à l'approximation horizontale (le passage de la pression du centre de la maille à l'interface) n'influe pas sur la forme de l'approximation verticale que nous regardons ici. C'est ici que nous pouvons supposer plusieurs formes pour la reconstruction de la pression sur une maille $[z^w_{k-1} = z - \frac{\Delta z}{2}; z^w_k = z + \frac{\Delta z}{2}]$. Nous regardons ici les approximations linéaires et cubiques suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Linéaire} & p(z) = p_0 + p_1 z \\ \text{Cubique} & p(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 \end{array}$$

La détermination des différentes constantes se fait à l'aide des valeurs de p_k où p_k représente l'intégrale horizontale sur les interfaces de la pression : $p_k = \dfrac{1}{\Delta x}\displaystyle\int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}} p(x, z_k^w)\mathrm{d}x$ et découle de l'intégration de l'équilibre hydrostatique comme nous l'avons fait plus haut :

$$\rho_k = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\int_{z_{k-1}^w}^{z_k^w}\int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}} \rho\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{1}{\Delta x \Delta z}\int_{z_{k-1}^w}^{z_k^w}\int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}} -\frac{1}{g}\partial_z p\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \frac{-1}{g\Delta z}[\frac{1}{\Delta x}\int_{x_i-\frac{\Delta x}{2}}^{x_i+\frac{\Delta x}{2}} p\mathrm{d}x]_{k-1}^{k}$$

$$\Longrightarrow \rho_k = \frac{1}{g}\frac{p_{k-1}-p_k}{\Delta z}$$

.

Ces reconstructions de type volume fini conduisent aux expressions suivantes :

$$\text{Linéaire :}\quad \int_{z_{k-1}^w}^{z_k^w} p dz = \frac{1}{2}[p_k + p_{k-1}]\Delta z$$

$$\text{Cubique :}\quad \int_{z_{k-1}^w}^{z_k^w} p dz = [\frac{1}{2}(p_k + p_{k-1}) - \frac{1}{24}(p_{k+1} - p_k + p_{k-2} - p_{k-1})]\Delta z$$

La première expression (reconstruction linéaire) est celle que nous avions utilisée dans la dérivation du système aux valeurs propres pour la grille de Lorenz (2.12). Elle conduit au système (2.13) qui se réécrit à Δz constant en

$$\text{Linéaire :}\quad \frac{1}{4}[M_{k-1} + 2M_k + M_{k+1}] = -\frac{1}{\lambda}\left(N_{k+1}^{-2}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z^2} - N_k^{-2}\frac{M_k - M_{k-1}}{\Delta z^2}\right) \tag{2.15}$$

La seconde expression (reconstruction cubique) conduit au système suivant :

$$\text{Cubique :}\quad \frac{1}{48}[-M_{k-2} + 12M_{k-1} + 26M_k + 12M_{k+1} - M_{k+2}] = -\frac{1}{\lambda}\left(N_{k+1}^{-2}\frac{M_{k+1}-M_k}{\Delta z^2} - N_k^{-2}\frac{M_k - M_{k-1}}{\Delta z^2}\right) \tag{2.16}$$

Calcul des modes et des valeurs propres discrètes

Pour étudier les erreurs liées aux discrétisations précédentes, nous effectuons une analyse de Fourier dans un domaine supposé infini selon la verticale et nous comparons les vitesses de phases obtenues par ces précédents systèmes (2.13 et 2.14) avec la valeur théorique c_{th} obtenue en remplaçant le mode M dans l'équation elliptique 2.10 par une onde de Fourier $M = e^{ik_z z}$ où k_z est le nombre d'onde. Ceci conduit directement à $\lambda = \dfrac{N^2}{k_z^2}$ soit à $c_{\mathrm{th}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} = \dfrac{N}{k_z}$.

Les vitesses de phase numériques obtenues par les différentes méthodes de discrétisation sont obtenues de la même manière : nous injectons $M = e^{ik_z z}$ dans les systèmes discrets 2.13 (ou 2.16 pour l'ordre élevé) et 2.14 et on obtient $c_{\mathrm{num}} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_{\mathrm{num}}}}$.

Nous pouvons alors étudier l'erreur commise par l'erreur de déphasage : $\dfrac{c_{\mathrm{num}}}{c_{\mathrm{th}}}$.

Ces ratio sont indépendants de la stratification N^{-2} puisque celle ci s'annule lors de la division. Les erreurs ne dépendent donc que du nombre d'onde résolu $\theta_z = k_z\Delta z$. La figure 2.3 représente ces erreurs pour les grilles de Lorenz (avec une reconstruction linéaire ou cubique de la pression) et Charney-Phillips.

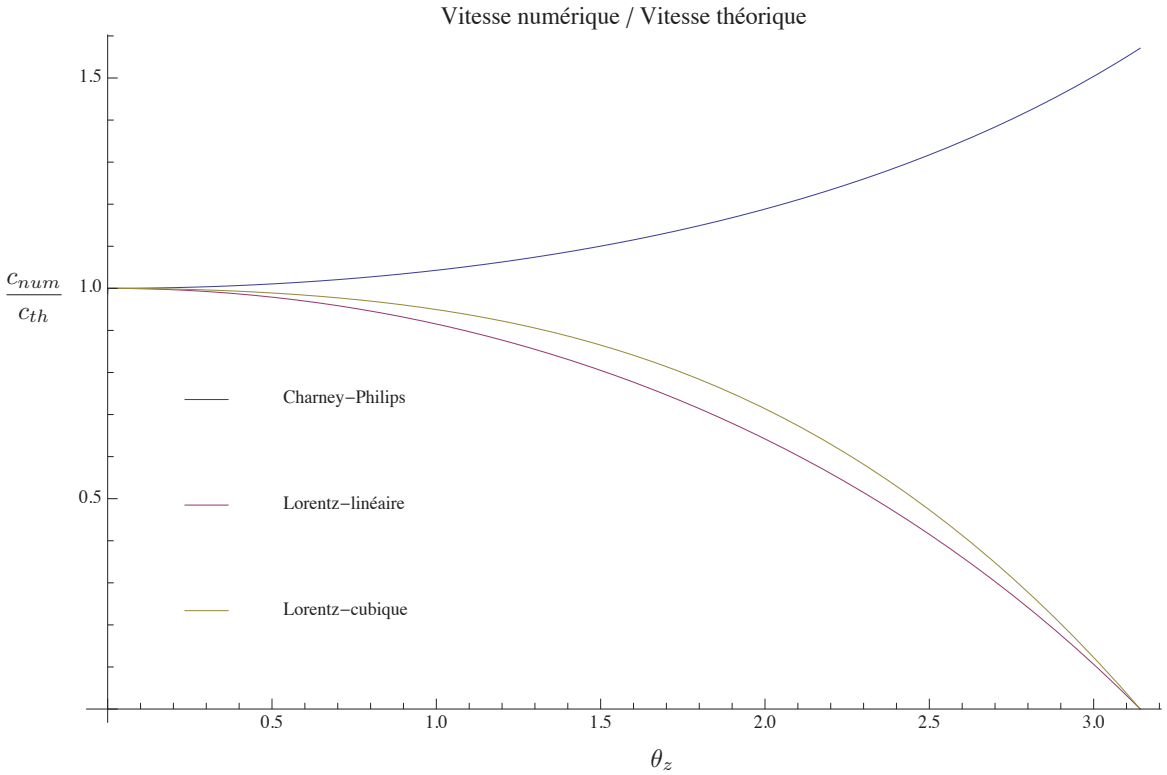


FIGURE 2.3 – Erreur $\frac{c_{\text{num}}}{c_{\text{th}}}$ où $c_{\text{th}} = \frac{N}{k_z}$ en fonction de $\theta_z = k_z \Delta z$. Comparaison des méthodes de discrétisation verticales.

Cette figure permette plusieurs interprétations :

- Les méthodes basées sur la grille de Lorenz (courbes rouge et jaune) ralentissent les ondes : $c_{\text{num}} \leq c_{\text{th}}$ quand celle implémentée sur une grille de Charney-Phillips les accélère : $c_{\text{num}} \geq c_{\text{th}}$.
- La présence du mode numérique dans la résolution basée sur une grille de Lorenz est confirmée par la limite nulle obtenue en $\theta_z = \pi$
- L'interpolation cubique améliore l'erreur par rapport à l'interpolation linéaire sur une grille de Lorenz.
- L'erreur de déphasage est moins importante sur une grille de Charney-Phillips (qui est équivalente au calcul d'un laplacien à l'ordre 2) que sur une grille de Lorenz. Il n'y a pas de mode numérique.

2.3.5 Importances relatives liées aux discrétisations verticale et horizontale

Erreur de déphasage combinée horizontale-verticale

Le déphasage discret des ondes internes, c'est à dire la différence entre la vitesse de phase numérique et théorique, provient simultanément de l'erreur numérique de la méthode de résolution verticale que l'on vient d'étudier et du déphasage issu du schéma d'advection sur la grille horizontale qui a été présenté dans la section 2.2. Dans cette section, nous avons évoqué le déphasage des ondes internes dû aux schémas d'advection horizontaux (gradient de pression et divergence horizontale dans la continuité) et étudié l'impact du décalage ou non des grilles vitesses-pression (grilles C ou A) ainsi que l'ordre de discrétisation des schémas sur l'horizontale (centré d'ordre 2 (C2) ou d'ordre 4 (C4)).
Les deux études sont résumées sur la figure suivante 2.3.5 :

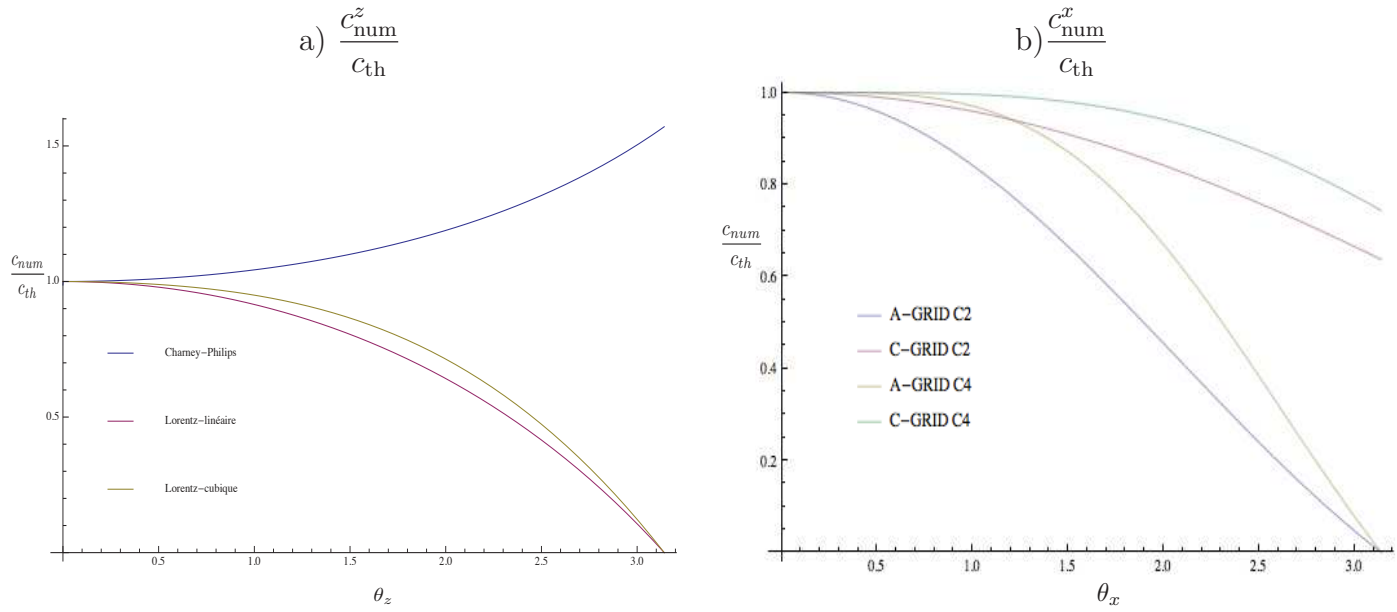


FIGURE 2.4 – Erreur de déphasage $\frac{c_{\text{num}}}{c_{\text{th}}}$ provenant a) de la méthode et de la grille de résolution verticale et b) des schémas d'advection horizontaux sur des grilles décalées ou centrées.

L'erreur de déphasage totale (horizontale + verticale) peut s'estimer si on écrit le déphasage final sous la forme $c^\star_{\text{num}} = \frac{\omega^x_{\text{num}}}{k_x}$ et où l'on prend en compte dans la fréquence numérique ω^x_{num} qu'il y a eu à la fois une approximation liée à l'horizontale (k_x devient $k_{x,\text{num}}$) et que la vitesse se phase est la vitesse de phase liée à la discrétisation verticale : $\omega^x_{\text{num}} = k_{x,\text{num}} c^z_{\text{num}}$.

$$\frac{c^\star_{\text{num}}}{c_{\text{th}}} = \frac{\omega^x_{\text{num}}}{k_x c_{\text{th}}} = \frac{k_{x,\text{num}} c^z_{\text{num}}}{k_x c_{\text{th}}} = \frac{\omega^x_{\text{num}}}{\omega_{\text{th}}} \frac{c^z_{\text{num}}}{c_{\text{th}}} \tag{2.17}$$

donc l'erreur cumulée est obtenue simplement en faisant le produit des erreurs horizontales $\frac{\omega^x_{\text{num}}}{\omega_{\text{th}}} = \frac{c^x_{\text{num}}}{c_{\text{th}}}$ et verticales $\frac{c^z_{\text{num}}}{c_{\text{th}}}$.

Relations de dispersion et couplage vertical-horizontal pour un forçage à stratification constante

Pour le reste de l'étude on se place dans le cas d'une stratification constante : N est constant sur la verticale. Si l'on note ω la fréquence de l'onde interne, on peut obtenir deux relations de dispersion caractéristique de l'évolution des ondes internes :

1. la première issue du système d'évolution hyperbolique 1D projeté sur le mode q constitué des équations 2.6 et 2.9 :

$$\begin{cases} \partial_t u_q + g \partial_x h_q = 0 \\ \partial_t h_q + \frac{c_q^2}{g} \partial_x u_q = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

La diagonalisation de ce système 2D permet de relier la fréquence ω au nombre d'onde horizontal k_x par la relation $\omega = k_x c_q$ pour une onde de Fourier $e^{i(\omega t - k_x x)}$. Cette relation montre que pour une fréquence donnée (fixée par un forçage de marée barotrope par exemple), plus le mode est élevé (plus c_q est petit) plus le nombre d'onde correspondant est grand et plus les longueurs d'ondes horizontales correspondantes sont petites.

2. la deuxième est obtenue en injectant directement un mode de Fourier dans le système perturbé constitué des équations (2.2,2.3,2.4,2.5) ce qui nous conduit à la relation de dispersion $w = N\frac{k_x}{k_z} = N\frac{\theta_x}{\theta_z}\frac{\Delta z}{\Delta x}$. Cette relation couple les directions de propagation des ondes dans le plan $x - z$ de telle sorte que :

$$\theta_z = \frac{N}{\omega}\frac{\Delta z}{\Delta x}\theta_x \tag{2.19}$$

De plus on sait que la vitesse de phase théorique d'une onde interne correspondante au mode q est donnée à stratification constante par la relation : $c_q = \frac{NH}{q\pi}$.
Ces dernières relations permettent de dériver une contrainte sur le rapport d'échelle :

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} \leq \frac{\omega}{N} \tag{2.20}$$

La contrainte 2.20 permet d'assurer que θ_z reste inférieur à π lorsque θ_x parcours le spectre de résolution horizontal $[0;\pi]$, c'est à dire qu'il y a au moins deux points de calcul par longueur d'onde sur la verticale.

L'erreur de phase est donc finalement donnée par la relation (2.17) où θ_z est relié à θ_x par la relation (2.19) et où le ratio $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ est borné par (2.20).

Cas réaliste d'un forçage par une marée barotrope

Plaçons nous dans un cadre de résolution réaliste : on choisit $\omega = 1.405.10^{-4} r/s^{-1}$ qui correspond à un marée barotrope M_2 (marée semi-diurne lunaire d'une période de 12 heures et 25 minutes) dans un milieu de stratification $N = 2 \cdot 10^{-3} s$.
Ce choix de paramètres nous conduit à une contrainte sur le rapport d'échelle donné par l'inégalité 2.20 : $\frac{\Delta z}{\Delta x} \leq 0.07$.
L'étude de l'erreur de déphasage $c^{\star}_{\text{num}}/c_{\text{th}}$ dans le cas d'une grille de Charney Phillips est visible sur la figure 2.5, tandis que la figure 2.6 représente la même étude sur une grille de Lorenz avec une interpolation cubique de la pression (l'étude avec une interpolation linéaire donne des résultats très similaires).

1. L'erreur de déphasage augmente à la fois lorsque que le rapport d'échelle $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ croit (et donc θ_z croit) et que θ_x croit.
2. Quelque soit la méthode utilisée sur la verticale le choix de la grille C sur l'horizontale permet une meilleure représentation de la vitesse de propagation des ondes internes à schémas équivalents (C2-C4).

3. La discrétisation verticale suivant une grille de Charney-Phillips permet une meilleure approximation. En particulier le couple grille C - grille de Charney-Philipps ne présente pas de mode numérique. De plus, il peut y avoir compensation des erreurs entre l'accélération de la vitesse numérique due à la discrétisation verticale de Charney Phillips (*cf :* 2.3.5) et le ralentissement des ondes due à l'approximation horizontale.
4. On peut observer sur la grille de Lorenz, que lorsque le ratio $\Delta z/\Delta x$ s'agrandit la présence du mode numérique vertical se fait ressentir. Par conséquent, même si on utilise une grille C sur l'horizontale, le choix d'une grille de Lorenz sur la verticale génère la présence de modes numériques.

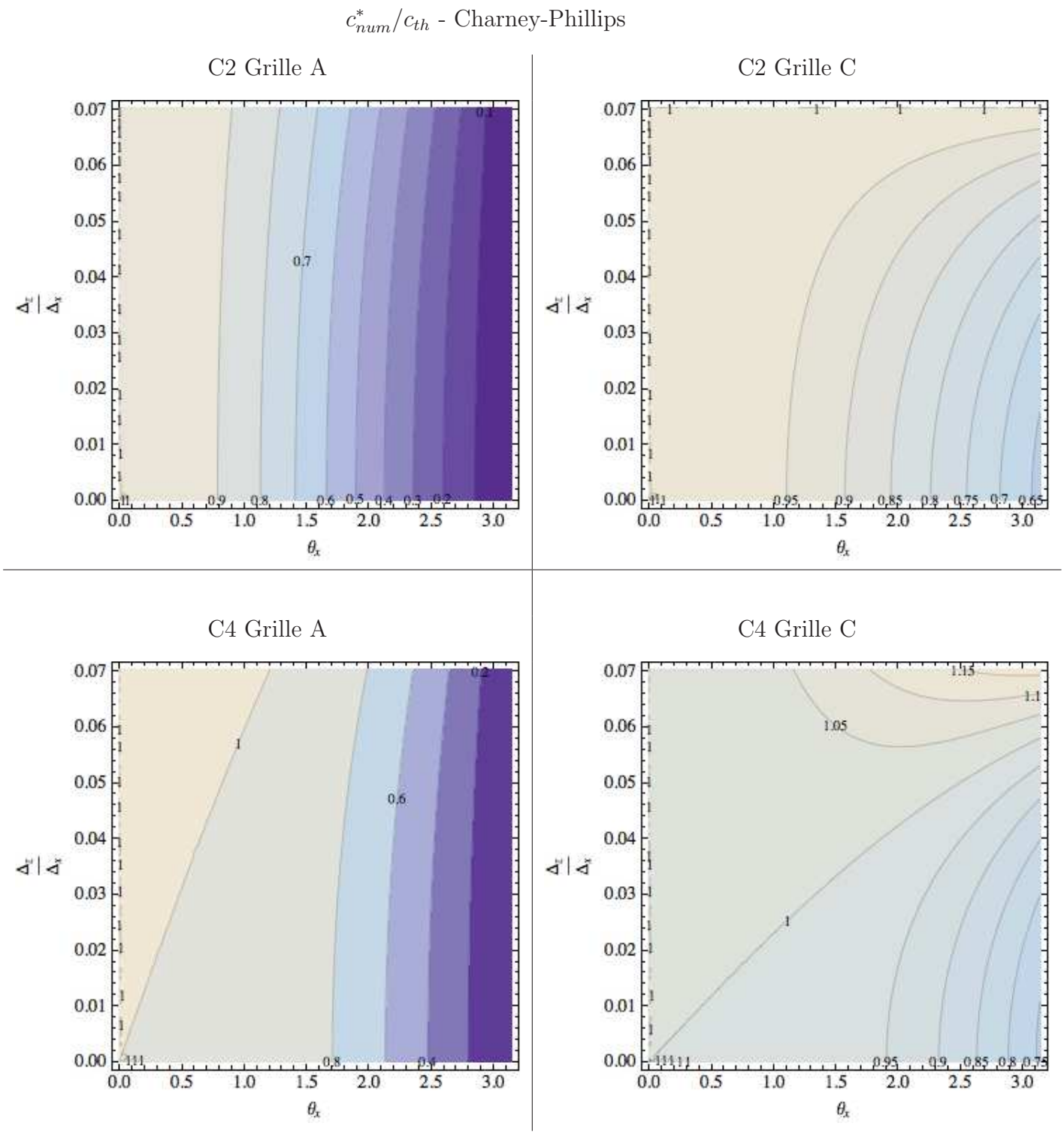


FIGURE 2.5 – Erreur de déphasage : $c^{\star}_{\text{num}}/c_{\text{th}}$ sur une grille verticale Charney-Phillips en fonction de $\theta_x \in [0;\pi]$ (abcisse) et $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} \in [0;\dfrac{\omega}{N}]$ (ordonnée), pour $N = 2\cdot 10^{-3}s$ et $\omega = 1.405\cdot 10^{-4} r/s^{-1}$. Comparaison des méthodes horizontales (C2 ou C4 sur grille A ou C).

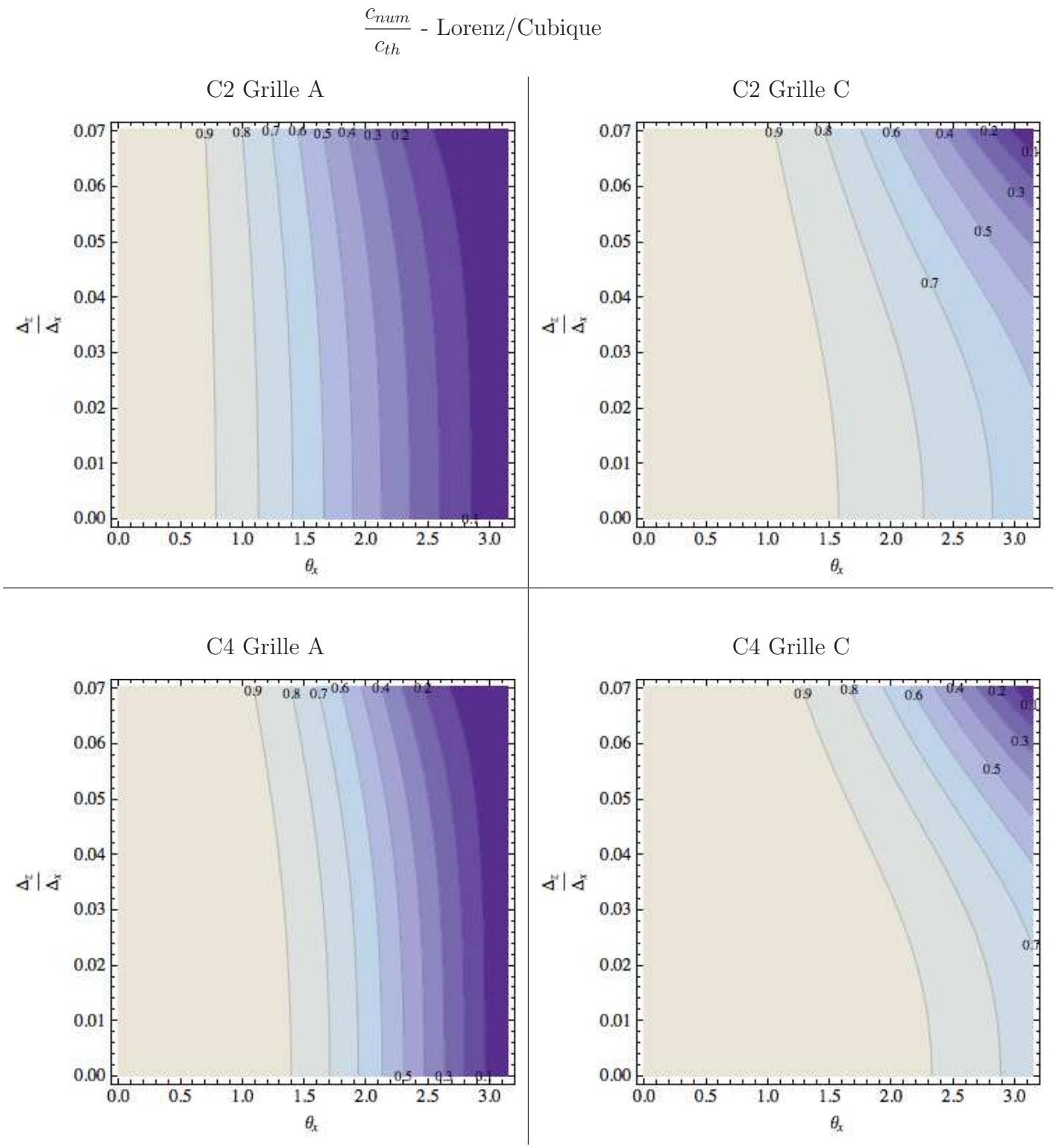


FIGURE 2.6 – Erreur de déphasage : $c^{\star}_{\mathrm{num}}/c_{\mathrm{th}}$ sur une grille verticale Lorenz en fonction de $\theta_x \in [0;\pi]$ (abcisse) et $\dfrac{\Delta z}{\Delta x} \in [0;\dfrac{\omega}{N}]$ (ordonnée), pour $N = 2 \cdot 10^{-3}s$ et $\omega = 1.405 \cdot 10^{-4} r/s^{-1}$. Comparaison des méthodes horizontales (c2 ou C4 sur grille A ou C).

Comparaison du déphasage vertical / horizontal

Les résultats précédents permettent d'évaluer l'erreur globalement commise sur les vitesses numériques de propagation des ondes internes suite aux approximations horizontale et verticale. Nous pouvons aussi, pour une résolution donnée, soit pour un ratio $\Delta z/\Delta x$ fixé, obtenir une courbe représentative de l'erreur commise sur la vitesse des modes $|c_{\text{num}} - c_{\text{th}}|$ selon la méthode horizontale d'une part et verticale d'autre part.
Nous fixons $\Delta x = 2$km et la profondeur $H = 1$km. Nous lions θ_x à θ_z par 2.19 et nous pouvons alors comparer les erreurs de déphasage issues des méthodes horizontales avec celles des méthodes verticales.
Sur les figures suivantes figureront également les longueurs d'onde horizontale correspondante $\lambda_x = \dfrac{2\pi\Delta x}{\theta_x}$. Pour fixer les idées, nous indiquons également les longueurs d'onde correspondant aux différents modes. Celles-ci sont données par la relation :

$$\lambda_x(q) = 2\pi/k_x(q) = 2\pi c_q/\omega = (2\pi/\omega)\frac{NH}{q\pi} = \frac{2NH}{q\omega}$$

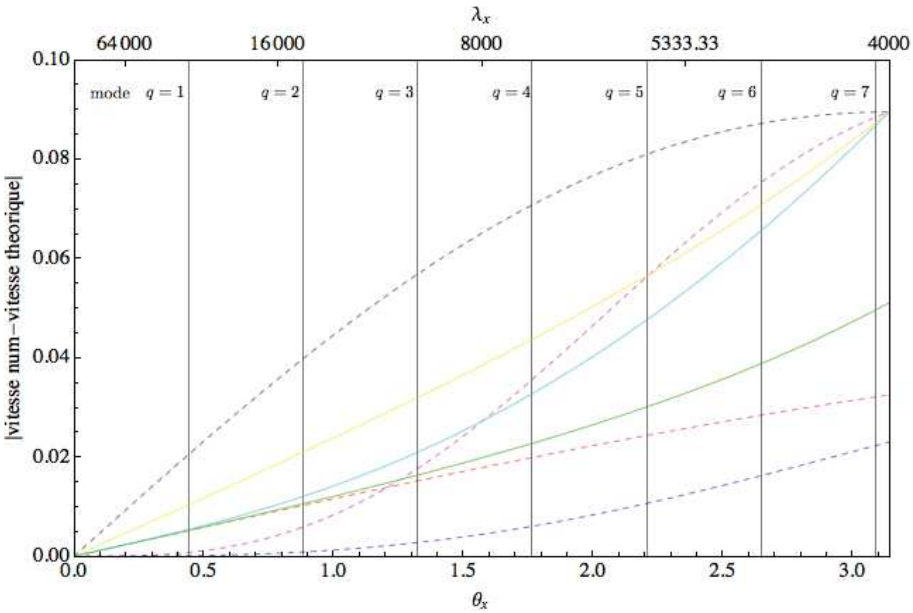
La figure 2.7 représente la comparaison des erreurs de déphasage obtenues avec deux discrétisations verticales différentes :

- (i) la résolution "minimum" autorisée afin de respecter la relation (2.20) : $\Delta z_{\max} = \dfrac{\omega\Delta x}{N}$, ce qui équivaut à $\Delta z_{\max} = 140$m soit nz = 7 niveaux verticaux. Dans ce cas de figure on obtient la relation entre les nombres d'ondes horizontaux et verticaux : $\theta_x = \theta_z$ (soit $\lambda_x = \lambda_z$) puisque $\dfrac{\omega\Delta x}{N\Delta z_{\max}} = 1$.
- (ii) une discrétisation plus fine avec nz = 21 niveaux sur la verticale soit $\Delta z = \dfrac{\Delta z_{\max}}{3} \simeq$ 47m. Ce qui donne les relations entre les nombres d'ondes $\theta_x = \dfrac{\theta_z}{3}$ et les longueurs d'ondes $\lambda_x = 3\lambda_z$.

Les courbes représentées sur la figure 2.7 permettent de visualiser pour quelles échelles horizontales (λ_x) l'erreur verticale devient prépondérante en fonction des méthodes utilisées.
Cette figure 2.7 confirme que lorsque l'on augmente l'ordre du schéma centré (C2→C4) sur l'horizontale on diminue fortement l'erreur liée à la représentation horizontale et l'erreur de discrétisation verticale peut alors devenir prépondérante. C'est surtout le cas lorsque l'on utilise une méthode d'interpolation linéaire sur une grille de Lorenz (ce qui est le standard).
Par exemple si l'on choisit une résolution verticale minimum (figure de gauche 2.7) et un ordre élevé sur l'horizontale (C4) l'erreur verticale devient prépondérante aux grandes échelles pour les deux types de grilles A et C et est prépondérante quasiment à toutes les échelles pour la grille C. Les abscisses d'intersection de ces amplitudes d'erreurs horizontale/verticale se déplacent vers les grandes échelles à mesure que la discrétisation verticale se raffine (voir figure 2.7), ce qui est logique puisque le raffinement vertical permet de réduire l'erreur de déphasage verticale.

La figure 2.8 représente l'évolution de l'erreur $|c_{\text{num}} - c_{\text{th}}|$ en fonction de la résolution verticale Δz pour les longueurs d'ondes horizontales qui correspondent aux six premiers modes baroclines $q = 1$, 2, 3, 4, 5 et 6.

a) $\mathrm{nz}_{\min} = 7$ ($\Delta z_{\max} = \dfrac{\omega \Delta x}{N} \simeq 140\mathrm{m}$), $\theta_z = \theta_x$, $\lambda_z = \lambda_x$



b) $\mathrm{nz} = 21$ ($\Delta z \simeq 47$ m), $\theta_z = \dfrac{\theta_x}{3}$, $\lambda_z = 3\lambda_x$

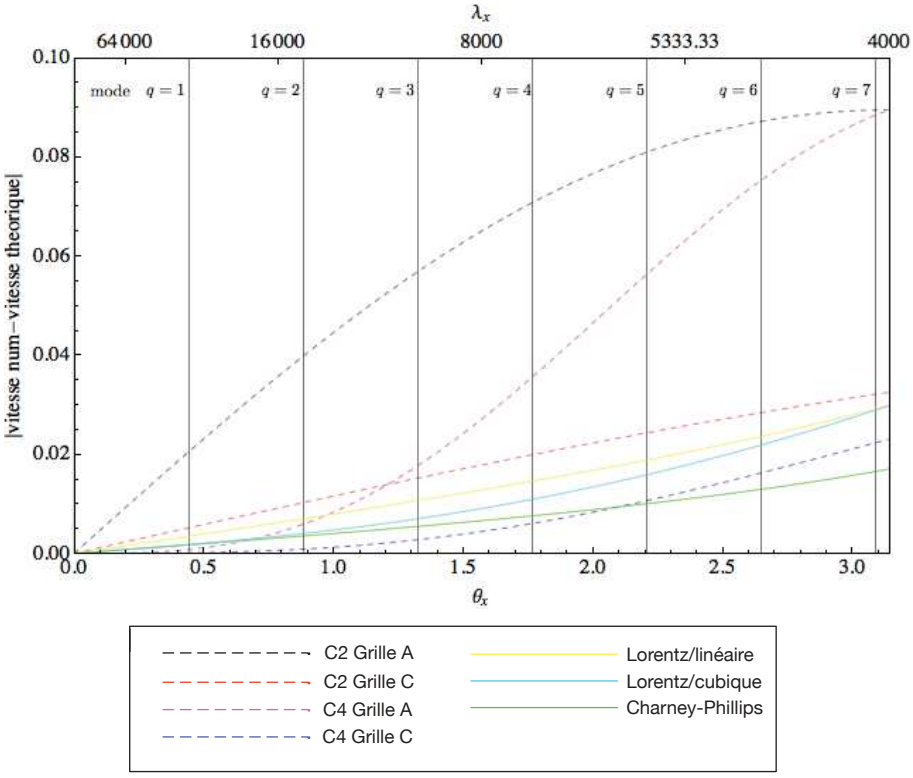


FIGURE 2.7 – Erreur de déphasage $|c_{\mathrm{num}} - c_{\mathrm{th}}|$ en fonction de $\theta_x \in [0; \pi]$. La discrétisation horizontale étant fixée ($\Delta x = 2000$m), on retrouve la longueur d'onde correspondante (λ_x en m). Les longueurs d'onde correspondant aux différents modes q sont indiqués.

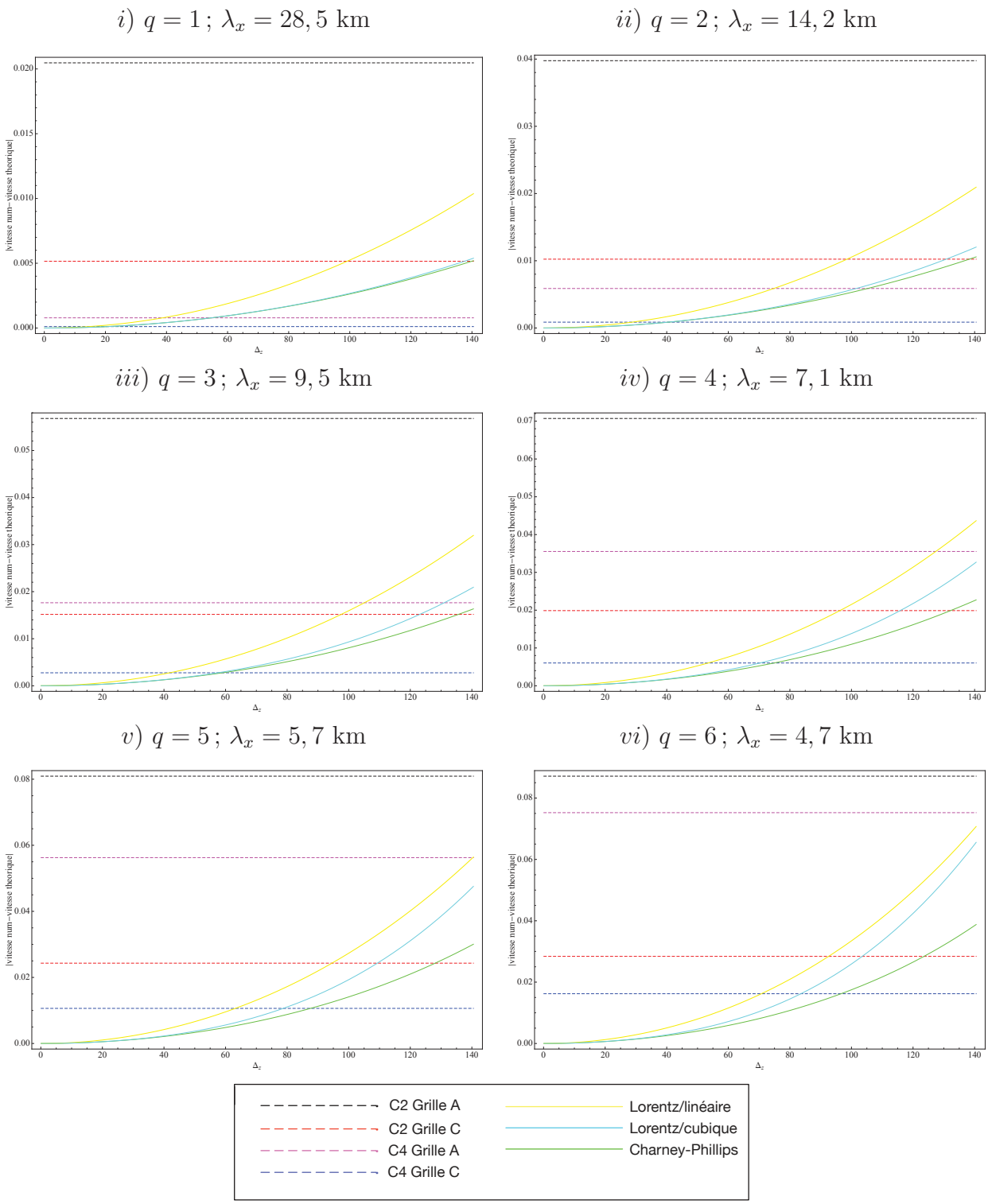


FIGURE 2.8 – Erreur de déphasage $|c_{num} - c_{th}|$ en fonction de la résolution verticale Δz pour des longueurs d'ondes horizontales qui correspondent aux modes baroclines $q = 1$, 2, 3, 4, 5 et 6. $\Delta x = 2000$m, $H = 1000$m.

On observe qu'à mesure que l'on cherche à résoudre les grandes échelles (petits nombres d'ondes θ_x), l'erreur horizontale diminue et il faut augmenter la résolution verticale pour que les erreurs issues de la résolution verticale soient du même ordre de grandeur. De manière générale, si l'on se fixe un certain nombre de modes baroclines que l'on souhaite bien représenter dans notre simulation numérique, ces courbes permettent de lier les résolutions horizontales et verticales nécessaires.
Par exemple si l'on choisit une discrétisation horizontale basée sur un schéma d'ordre 4 (C4) sur une grille décalée de type Arakawa C (courbe pointillée bleue) et une discrétisation verticale basée sur une grille de Lorenz avec une interpolation cubique, il faut une épaisseur de couche maximale de $\Delta z = 60$m (pour une colonne d'eau de 1000 m soit 17 niveaux verticaux) afin d'obtenir une erreur verticale non supérieure à l'erreur horizontale dans la représentation du troisième mode barocline. Il faut descendre à $\Delta z = 40$m soit 25 niveaux sur la verticale si l'on choisit une interpolation linéaire sur la verticale.

2.3.6 Conclusion

Nous concluons cette partie en soulignant trois points :

1. Nous avons montré comment déterminer un système discret de dérivation des modes verticaux qui soit en accord avec les schémas numériques du modèle. Ce système met essentiellement en jeu le choix de la grille verticale ainsi que le discrétisation effectuée de l'équilibre hydrostatique. Dans la littérature, les calculs diagnostiques de vitesses de propagation des ondes internes sont souvent effectués à l'aide d'un système elliptique correspondant à un laplacien discrétisé à l'ordre 2. Nous avons montré que c'est ce qui correspond à la grille de Charney-Phillips alors que la plupart des modèles numériques actuels utilisent une grille de Lorenz. Ces calculs ne sont donc valides que pour les tous premiers modes baroclines où la différence n'est pas très marquée.
2. Le choix d'un grille de Charney-Phillips permet d'être plus précis que sur une grille de Lorenz. Nous savons qu'elle pose d'autres problèmes par ailleurs mais il est nécessaire de reconsidérer l'utilisation de cette grille de calcul comme cela commence à être fait dans certains modèles atmosphériques.
3. L'erreur de déphasage verticale devient du même ordre de grandeur ou plus importante que l'erreur horizontale dès que l'on augmente l'ordre du schéma horizontal (du second au quatrième ordre)

De manière générale, les éléments introduits dans cette partie peuvent notamment permettre un élément supplémentaire objectif dans le choix du rapport entre résolution horizontale et résolution verticale pour les simulations réalistes de l'océan. Les calculs effectués ici peuvent être étendus à des stratifications verticales réalistes (fréquence de Brunt Vaisala N non constante) et à grilles verticales de résolution non uniforme. La dérivation des systèmes discrets que nous avons effectués (2.13 et2.14) est générale. Des calculs similaires aux nôtres, peuvent donc être effectués au préalable de la simulation (en se basant sur une climatologie de champ de densité) pour déterminer à la fois la résolution horizontale et la résolution verticale nécessaires à la bonne représentation d'un certain nombre de modes baroclines.

Chapitre 3

Diffusion diapycnale et advection multidimensionnelle

La construction discrète des schémas d'advection multidimensionnels induit une diffusion numérique via ses termes de troncature principaux qui, selon son intensité et sa direction, peut se traduire en diffusion diapycnale qui doit être minimisée ou contrôlée de sorte à vérifier l'anisotropie du mélange interne des océans (voir paragraphe 1.3).
La direction isopycnale est habituellement considérée comme proche de l'horizontale (approximation petite pente), ce qui mène à considérer et à étudier séparément les schémas verticaux (advection quasi-diapycnale) et les schémas horizontaux (advection quasi-isopycnale). Or (i) cette dichotomie si elle vraie en moyenne n'a plus de sens dès lors que les niveaux verticaux ne sont plus alignés avec les isopycnes ce qui génère du mélange diapycnale local, (ii) l'asymétrie des propriétés numériques (non-diffusif sur la verticale, diffusif sur l'horizontale) ainsi recherchée n'est plus respectée si l'on ne prend pas en compte l'implémentations des termes croisés et finalement (iii) certains comportements numériques non-diffusifs comme la forte dispersion des schémas verticaux peut engendrer de la diffusion diapycnale si on les couples à des processus de convection verticale ou des schémas monotones multidimensionnels.

Sommaire

3.1 Introduction : diffusion numérique multidimensionnelle et diffusion diapycnale . . . 114
3.1.1 Orientation de la diffusion numérique. . . . 114
3.1.2 Diffusion diapycnale artificielle . . . 115
3.1.3 Méthodes usuelles de contrôle et d'orientation de la diffusion horizontale 116
3.1.4 Advection verticale et multidimensionnelle, monotonie . . . 118
3.2 Impact des schémas verticaux . . . 118
3.2.1 Schéma centré d'ordre 2 . . . 118
3.2.2 Présentation des schémas verticaux d'ordre élevés . . . 119
3.2.3 Cas test numérique . . . 123
3.2.4 Résultats et discussion . . . 124
3.2.5 Conclusion . . . 128
3.3 Aspects multidimensionnels . . . 129
3.3.1 Erreurs multidimensionnelles, stabilité, précision et asymétrie numérique 129
3.3.2 Splitting espace-temps pour les écoulements incompressibles . . . 132
3.3.3 Propriétés de monotonie . . . 135
3.3.4 Conclusion . . . 138

3.1 Introduction : diffusion numérique multidimensionnelle et diffusion diapycnale

3.1.1 Orientation de la diffusion numérique.

Considérons la solution discrète de l'équation de transport linéarisée d'un traceur q actif ou passif suivant des coordonnées généralisées s introduites dans le chapitre 1.1.3 (équation 1.4) :

$$\left.\frac{\partial q}{\partial t}\right|_{s=c_{ste}} + u_0 \left.\frac{\partial q}{\partial x}\right|_{s=c_{ste}} + \Omega_0 \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \tag{3.1}$$

Supposons que pour la discrétisation de (3.1) des schémas d'advection avec diffusion implicite (i.e. schémas décentrés) du second ordre soient utilisés. A ceci peut s'ajouter des erreurs de termes croisés qui peuvent intervenir si ils ne sont pas corrigés lors de l'implémentation des schémas dans un cadre multidimensionnels. Nous formalisons ceci sous la forme d'une équation modifiée contenant l'ensemble de ces termes de diffusion :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q}{\partial x} + \Omega_0 \frac{\partial q}{\partial s} = \nabla \cdot \mathcal{K}_s \nabla q$$

avec $\mathcal{K}_s = \begin{pmatrix} A_H & \frac{A_C}{2} \\ \frac{A_C}{2} & A_V \end{pmatrix}$ les diffusions implicites aux schémas d'advection horizontaux (A_H), verticaux (A_V) et les erreurs de termes croisés (A_C).
Nous souhaitons maintenant savoir ce qu'il advient de ces termes d'erreurs projetés sur les directions isopycnales et diapycnales. C'est à dire trouver $\mathcal{K}_\rho$ tel que $\nabla \cdot \mathcal{K}_s \nabla q = \tilde{\nabla} \mathcal{K}_\rho \tilde{\nabla} q$, où $\tilde{\nabla}$ représente le gradient dans la base isopycnale (ρ_t, ρ_n) illustrée sur la figure 3.1 et ∇ le gradient dans la base de départ (s_t, s_n). L'objectif souhaité est que dans le repère de Frenet isopycnal (ρ_t, ρ_n) la matrice de diffusion numérique soit quasi-isopycnale : $\mathcal{K}_\rho = \nu \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon \end{pmatrix}$, avec ν un coefficient de diffusion isopycnal et ϵ un coefficient diapycnal très faible de sorte que $\nu\epsilon \ll 1$.

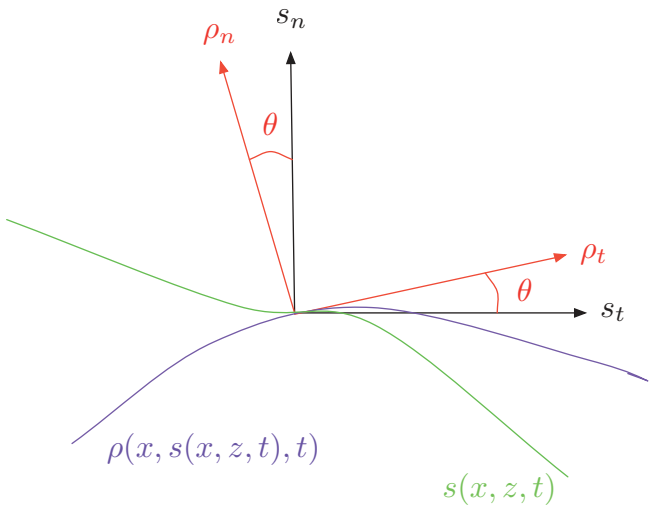


FIGURE 3.1 – Illustration schématisée du passage de la base locale en coordonnées s : (s_t, s_n) dans la base isopycnale (ρ_t, ρ_n).

D'après la figure, dans le repère (s_t, s_n) : $\rho_n = \begin{pmatrix} \partial_x \rho|_{s=c_{ste}} \\ \partial_s \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S\partial_s \rho \\ \partial_s \rho \end{pmatrix}$, où S désigne le rapport des pentes entre la coordonnée verticale s et la coordonnées ρ : $S = -\frac{\partial_x \rho|_{s=c_{ste}}}{\partial_s \rho}$.

Le passage de la base canonique dans la base isopycnale du tenseur dyadic $\mathcal{K}_s$ se fait via la matrice de rotation $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, tel que $\mathcal{K}_\rho = \mathcal{R}^t \mathcal{K}_{xz} \mathcal{R}$ [Redi, 1982].
Or par construction géométrique, nous avons :

$$\vec{s_n} \cdot \vec{\rho_n} = ||\vec{s_n}|| \cdot ||\rho_n|| \cos\theta \Longrightarrow \cos\theta = \frac{\partial_s \rho}{|\partial_s \rho|} \frac{-1}{\sqrt{1+S^2}}$$

et

$$\vec{s_n} \wedge \vec{\rho_n} = ||\vec{s_n}|| \cdot ||\rho_n|| \sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\partial_s \rho}{|\partial_s \rho|} \frac{-S}{\sqrt{1+S^2}}$$

ce qui permet de déduire $\mathcal{R} = \frac{-1}{\sqrt{1+S^2}} \begin{pmatrix} 1 & -S \\ S & 1 \end{pmatrix}$, pour une fonction $\rho(x, s(x,z,t), t)$ croissante suivant la coordonnée s : $\frac{\partial_s \rho}{|\partial_s \rho|} = 1$, et $\mathcal{K}_\rho$ donné par l'expression :

$$\mathcal{K}_\rho = \mathcal{R}^t \mathcal{K}_s \mathcal{R} = \frac{1}{1+S^2} \begin{pmatrix} A_H - A_C S + A_V S^2 & \frac{A_C}{2}(1-S^2) - S(1-A_V) \\ \frac{A_C}{2}(1-S^2) - S(1-A_v) & A_V - A_C S + A_H S^2 \end{pmatrix}$$

Si l'on note $\tilde{\epsilon_v} = \frac{A_V}{A_H}$ le rapport du coefficient de diffusion vertical sur la diffusion "horizontale" (suivant la coordonnée s) et que l'on néglige l'impact de l'erreur des termes croisés $A_C = 0$, nous retrouvons l'approximation 2D du système dérivé par Griffies [Griffies, 2003] dans son chapitre sur la diffusion dianeutrale :

$$\mathcal{K}_\rho = \frac{A_H}{1+S^2} \begin{pmatrix} 1 + \tilde{\epsilon_v} S^2 & -S(1-\tilde{\epsilon_v}) \\ -S(1-\tilde{\epsilon_v}) & \tilde{\epsilon_v} + S^2 \end{pmatrix}.$$

3.1.2 Diffusion diapycnale artificielle

Nous nous intéressons ici au terme de diffusion diapycnale que l'on voudrait minimiser en accord avec l'anisotropie du mélange interne expliqué précédemment (voir paragraphe 1.3). Dans κ_e la composante diapycnale s'écrit :

$$\kappa_{dia} = \frac{1}{1+S^2}[A_V - A_C S + A_H S^2] = \frac{1}{1+S^2}[\kappa^v_{dia} - \kappa^c_{dia} + \kappa^h_{dia}]$$

La réduction de la diffusion diapycnale passe donc par la réduction simultanée des sources de diffusion numériques issues de chaque direction : "horizontale" $\kappa^h_{dia} = A_H S^2$, "verticale" $\kappa^v_{dia} = A_V$ et croisée $\kappa^c_{dia} = A_C S$. Les efforts ont surtout portés jusqu'à présent sur la réduction de la diffusion verticale A_V et horizontale A_H. En effet la pente S est souvent considérée comme faible dans les modèles d'océans ce qui est vrai en général sur la majorité du domaine de résolution (approximation faible pente : $S \ll 1$) . Dans ce cas la verticale correspond à peu près à la direction diapycnale et la diffusion issue des schémas d'advection verticaux est donc recherchée comme minime $A_V \simeq \epsilon$. La diffusion horizontale A_H est autorisée à être plus forte. Cette diffusion est alors amortie par le coefficient de pente S^2 dans sa contribution à la diffusion diapycnale $\kappa^h_{dia} = A_H S^2$ et l'on peut alors considérer que le résultat est assez faible aussi $\kappa^h_{dia} \simeq \epsilon$. Pour des raisons de combinaison numérique, les termes d'erreurs croisés quand ils ne sont pas corrigés sont une fonction des termes de diffusion dans les deux directions verticale et horizontale. On obtient alors une diffusion diapycnale assez satisfaisante $\kappa_{dia} = O(\epsilon)$.

Le problème apparaît évidement dans les zones localisées où l'on ne peut plus faire l'approximation faible pente : zones d'upwellings (résurgences d'eaux froides en surface), interactions fortes avec la bathymétrie, thermocline équatoriale etc.
Dans ce cas nous avons toujours $\kappa^v_{dia} \simeq \epsilon$ mais les composante venant de l'horizontale κ^h_{dia} et des termes croisés κ^c_{dia} deviennent prédominantes à mesure que la pente des isopycnes S s'accentue par rapport aux niveaux verticaux utilisées (sigma, géopotentiels, isopycnaux).
Plusieurs solutions peuvent alors être mises en place pour essayer de réduire ou même d'annuler la composante κ^h_{dia} :

1. la première est de mettre la diffusion selon les isopycnes ce qui revient à mettre S à zéro dans $\mathcal{K}_\rho$. Cette solution est possible et aujourd'hui déjà implémentée via deux méthodes distinctes :
   - soit en utilisant une résolution discrète des équations primitives suivant des coordonnées verticales isopycnales [Bleck and Smith, 1990, Dukowicz et al., 1993] : la diffusion numérique via les schémas d'advection "horizontaux" sera directement alignée avec les isopycnes, ce qui annulera *de facto* la composante diapycnale.
   - soit en "tournant" artificiellement cette diffusion "horizontale" le long des isopycnes [Marchesiello et al., 2009, Lemarié et al., 2012].
2. la deuxième est d'essayer de monter en ordre sur les schémas numériques horizontaux afin de réduire A_H.

3.1.3 Méthodes usuelles de contrôle et d'orientation de la diffusion horizontale

Coordonnées isopycnales Si l'on choisit des coordonnées verticales isopycnales comme certains modèles [Bleck and Smith, 1990, Dukowicz et al., 1993], le mélange diapycnal numérique est nul par construction : $\kappa^h_{dia} = 0$. Cependant cette coordonnée ne sélectionne qu'un unique jeu fini de classes de densités, qui ne peuvent représenter une vrai coordonnée (continuité, inversibilité) si et seulement si l'équation d'état est linéaire ce qui n'est pas tout à fait le cas. De plus cette coordonnée induit une mauvaise résolution des zones peu stratifiées : plus la zone est peu stratifiée, plus la couche de densité est large et plus les deux coordonnées verticales adjacentes sont éloignées sur la verticale [Adcroft et al., 1997] or les zones de mélange et de transfert avec l'atmosphère où interviennent des paramétrisations complexes sont généralement faiblement stratifiées (fond et surface). La propagation verticale des ces dynamiques de couches de mélange est donc mal reproduites. Ceci est aussi vrai pour la représentation de la surface libre en approximation de Boussinesq [Adcroft and Campin, 2004].

Rotation isopycnale Une solution déjà utilisée pour la diffusion explicite associée à des paramétrisations sous maille des effets des tourbillons est une simple rotation géométrique du tenseur de diffusion le long des isopycnes [Redi, 1982, Gent and McWilliams, 1989, Beckers et al., 2000]. La même méthode peut-être appliquée à la diffusion implicite des schémas d'advection des traceurs actifs et passifs comme le propose P. Marchesiello et F. Lemarie [Marchesiello et al., 2009, Lemarié et al., 2012] en construisant l'opérateur d'un schéma décentré (contenant donc de la diffusion implicite) comme une addition d'un schéma centré non-diffusif et d'une partie diffusive (laplacien ou biharmonique), laquelle peut ensuite être tournée le long des isopycnes pour obtenir un schéma multidimensionnel qui ne diffuse que selon les isopycnes : $\kappa^h_{dia} = 0$ (modulo les erreurs numériques dans la discrétisation du tenseur et la validité de l'hypothèse faible pente). On peut observer sur la figure 3.2 l'amélioration obtenue lors de l'implémentation de cette méthode dans le modèle ROMS qui utilise un modèle à coordonnées σ et un schéma

d'advection décentré d'ordre 3 (UP3). Cette méthode de rotation de la diffusion permet de ne pas s'éloigner de la climatologie et de ne pas altérer les propriétés des masses d'eaux profondes à la différence du schéma UP3 classique qui crée des masses d'eaux trop salées.

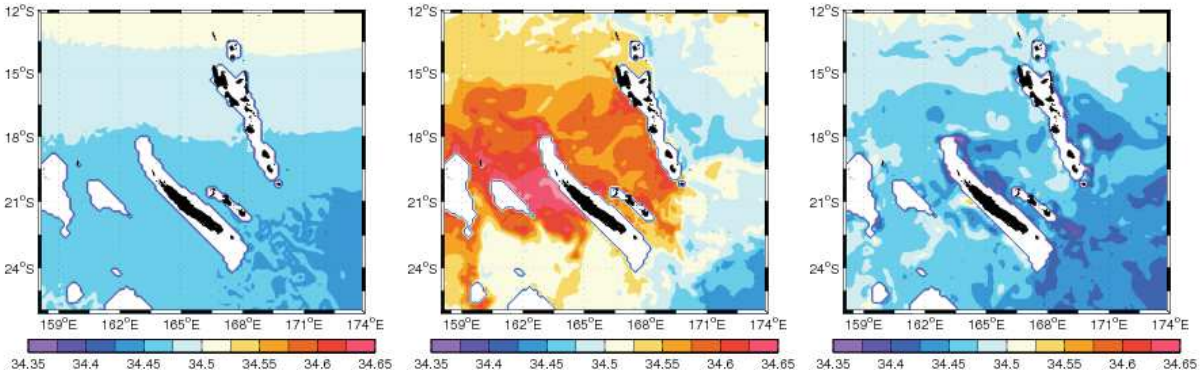


FIGURE 3.2 – Salinité à 1000m, Configuration Nouvelle-Calédonie, modèle ROMS, coordonnées σ. De gauche à droite : Climatologie, schéma décentré UP3, schéma Up3 dont la partie diffusive (hyper-diffusion : $\triangle^2$) est tournée suivant les isopycnes. *Marchesiello et al., 2009.*

Cette rotation isopycnale implique cependant un coût de calcul assez important, génère des problèmes de fermeture dans les couches limites [Ferrari et al., 2010] (ou plus généralement dans les zones non stratifiées où $\partial_s \rho \simeq 0$ et donc $S \Rightarrow \infty$) et pose des question de préservation de la monotonie [Beckers et al., 1998, Mathieu and Deleersnijder, 1998, Griffies et al., 2001].

Monter en ordre sur l'horizontale Une autre solution possible pour minimiser l'impact de la diffusion horizontale sur la diffusion diapycnale est alors d'augmenter l'ordre des schémas horizontaux : la diffusion est plus sélective selon les échelles et l'amplitude de la diffusion diapycnale est diminuée. La figure (3.3) compare l'utilisation d'un schéma décentré à l'ordre 3 (UP3), celle d'un schéma décentré à l'ordre 5 (UP5) avec la rotation de la diffusion expliquée précédemment. Malgré l'augmentation de l'ordre, la diffusion numérique implicite au schéma d'ordre 5 reste importante et ne conduit à une solution satisfaisante.

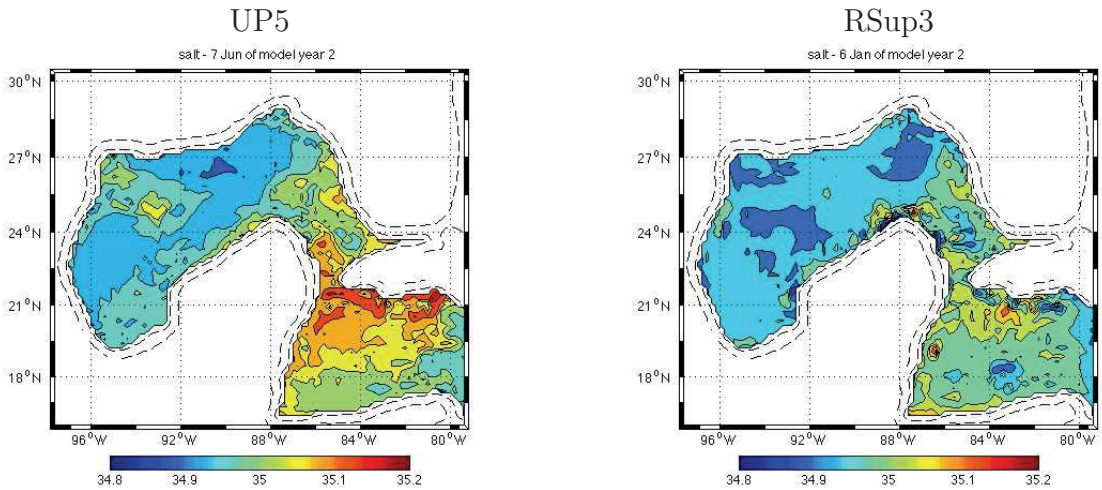


FIGURE 3.3 – Salinité à 1000m, Configuration Golf du Mexique, ROMS, coordonnées σ. De gauche à droite : schéma décentré UP5= C6+$\triangle^4$, UP3 dont la partie diffusive (hyperdiffusion $\triangle^2$) est tournée suivant les isopycnes.[Marchesiello et al., 2009]

L'utilisation de schémas d'ordre élevés passe par ailleurs par une augmentation de la largeur du stencil, ce qui conduit à plusieurs problèmes notamment celui du traitement de la dégradation du schéma aux bords du domaine [Tan et al., 2012, Vilar and Shu, 2014] ainsi qu'à l'augmentation des données à échanger lors de l'implémentation sur calculateurs parallèles.

3.1.4 Advection verticale et multidimensionnelle, monotonie

Comme nous l'avons expliquer précédemment deux autres aspects concernant la diffusion diapycnale sont à étudier : l'advection verticale et les potentielles erreurs liées à la formulation multidimensionnelle de l'advection.

- Quel est l'impact des schémas d'advection dans la direction verticale ?
- Quel est l'impact de la formulation multidimensionnelle de l'advection ?
- Quel est l'impact de l'utilisation de schémas monotones sur l'orientation et l'amplitude de la diffusion ?

3.2 Impact des schémas verticaux

La dimension verticale est généralement associée à la direction diapycnale à cause de l'approximation faible pente. C'est pourquoi les modèles d'océan implémentent en majorité des schémas d'advection verticale qui ne diffusent pas à l'ordre principal : des schémas centrés, et en particulier le schéma centré d'ordre 2 (C2). Or ces schémas sont très dispersifs et généralement d'ordres faibles. Ces effets de dispersion peuvent cependant *in fine* mener à de la diffusion verticale si elle vient à être couplée à des mécanismes d'ajustement convectifs verticaux [Griffies et al., 2000] ou des paramétrisations dissipatives [Hecht, 2010]. Contrairement à la dimension horizontale, il n'y a pas de parallélisation des codes d'océans sur la verticale, et donc à part la gestion de la dégradation des schémas au niveaux des couches limites (surface et au fond) la montée en ordre des schéma nous est permise. On se propose donc de tester d'autres schémas d'ordre élevés possibles afin d'étudier l'impact des schémas d'advection numériques verticaux des traceurs actifs sur la diffusion diapycnale et d'améliorer le comportement du centré d'ordre 2.

3.2.1 Schéma centré d'ordre 2

Comme nous l'avons introduit précédemment, la plupart des modèles d'océans utilisent des schémas centrés dans la direction verticale et plus spécifiquement le schéma centré d'ordre 2 qui s'écrit :

$$\text{C2}: \quad [\partial_z q]_k = \frac{q_{k+1} - q_{k-1}}{2\Delta z} = \partial_z q + \frac{\Delta z^2}{6}\partial_z^3 q + \mathcal{O}(\Delta z^2)$$

En effet ce schéma ne diffuse pas, $A_V = 0$. Cependant ce schéma est trop dispersif, ce qui peut indirectement mener à de la diffusion diapycnale via les ajustements convectifs [Griffies et al., 2000] ou par le biais d'autres mécanismes dissipatifs du modèle sensibles à la régularité du champs des traceur [Hecht, 2010]. Il exige ainsi une dissipation supplémentaire souvent explicite et artificielle pour contrôler l'accumulation d'énergie (via les non-linéarités) aux petites échelles. Dans les modèles d'océan cette dissipation est généralement assurée par la dissipation horizontale plus grande, ou par la dissipation du schéma temporel utilisé. Finalement nous verrons que ce schéma couplé à une méthode monotone du type Flux-Corrected-Transport (FCT) [Zalesak, 2005] peut engendrer énormément de diffusion diapycnale.

3.2.2 Présentation des schémas verticaux d'ordre élevés

Récapitulons ici les différentes classes des schémas d'advection verticaux que l'on se propose d'étudier :

1. **Schéma centré d'ordre 4 :** il s'agit d'une extension naturelle du schéma usuel centré d'ordre 2 qui a donc également la propriété d'être non dissipatif ($A_V = 0$). En terme de flux (volume fini) ce schéma s'écrit comme suit :

$$F_{i+1/2}(q) = \frac{-q_{i-1} + 7q_i + 7q_{i+1} - q_{i+2}}{12} \tag{3.2}$$

   où $F_{i+1/2}(q)$ représente l'interpolation du flux à l'interface gauche de la maille.

2. **Schéma Akima :** le schéma AKIMA est un schéma d'advection dérivé du schéma centré d'ordre 4 mais pour lequel la moyenne arithmétique est remplacée par une moyenne harmonique ce qui permet de contrôler la valeur interpolée à l'interface par les deux valeurs adjacentes. Ce schéma est utilisé pour l'advection des traceurs dans le modèle ROMS qui est un des modèle de circulation régionale le plus utilisé [Shchepetkin and McWilliams, 2009]. Ce schéma est assez couteux en terme de coût de calcul des interpolations mais est d'ordre 4 et développe des propriétés spectrales intéressantes. Il se construit comme suit :

   (a) l'équation 3.2 de prescription du flux du centré d'ordre 4 peut être reformulée en une demi somme plus un terme de correction qui prend la forme d'une fraction de laplacien écrit comme une différence de gradient aux interfaces :

$$F_{i+1/2}(q) = \frac{q_i + q_{i+1}}{2} - \frac{\overline{\delta q}_{i+1} - \overline{\delta q}_i}{6} \tag{3.3}$$

   (b) si le gradient sur l'interface est calculé simplement par une moyenne arithmétique : $\overline{\delta q}_i = \dfrac{(q_{i+1} - q_i) + (q_i - q_{i-1})}{2} = \dfrac{q_{i+1} - q_{i-1}}{2}$ on obtient le schéma C4 (3.2), par contre si le gradient est calculé avec une moyenne harmonique : $\overline{\delta q}_i = \dfrac{2(q_{i+1} - q_i)(q_i - q_{i-1})}{q_{i+1} - q_{i-1}}$, le flux définit en 3.3 devient le flux du schéma AKIMA.

   On peut montrer que la valeur interpolée sur l'interface est alors comprise entre les 2 valeurs de part et d'autre de l'interface [Shchepetkin and McWilliams, 2005] et même si cela ne garantit pas la monotonie du schéma cela permet de diminuer la création d'oscillations.

3. **Décentrés :** les schémas décentrés d'ordre élevés comme le schéma Upwind d'ordre 3 (Up3) ou d'ordre 5 (Up5) peuvent être pensés comme des schémas centrés auxquels l'on ajoute une diffusion (respectivement hyperdiffusion) dont le coefficient est une fonction de la variable locale. Ces schémas comportent donc une partie dissipative mais qui est moindre que le schéma d'ordre 1.

4. **Compact :** les schémas compact sont des schémas numériques proposés par Lele en 1992 qui sont une généralisation des schémas de Padé [Lele, 1992]. Ceux-ci, grâce à une interpolation utilisant le même nombre de points de grilles que les schémas classiques précédents mais en utilisant aussi une interpolation des dérivées en ces points, obtiennent après inversion d'une matrice des caractéristiques spectrales comparables à des schémas d'ordres supérieurs. Ces schémas peuvent être dérivés dans une forme centrée ou décentrée et conserve les propriétés de dissipation ou dispersion de ces dénominations. Cette méthode ne peut être aisément implémentée sur l'horizontale à cause des problèmes

de parallélisation mais elle peut l'être sur l'horizontale. Nous testerons les schémas Compact d'ordre 4 (C_t4) et d'ordre 5 (C_t5) dont le calcul des poids d'interpolation est donné ci-dessous :

Dérivation des schémas compact
Nous proposons ici une dérivation de schéma compact d'ordre 4 et 5 sous l'angle de la méthode des différences finies. Nous cherchons donc à approcher à l'ordre 4 ou 5 la dérivée du traceur. Comme représenté sur la figure (3.4), T_k représente la valeur au centre de la couche k.

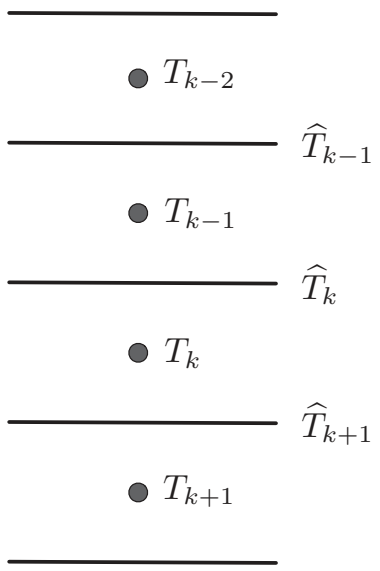


FIGURE 3.4 – Disposition verticale des points traceurs T

Nous cherchons une formulation conservative de ces schémas et nous écrirons donc (sur une grille uniforme de pas Δz), la dérivée dans la direction z sera calculée par l'expression :

$$\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_k = \frac{1}{\Delta z}\left(\widehat{T}_{k+1} - \widehat{T}_k\right) \tag{3.4}$$

Les valeurs aux interfaces $\widehat{T}_k$ vont être déterminées pour que cette approximation soit à l'ordre 4 pour le compact d'ordre 4 et à l'ordre 5 respectivement pour le compact d'ordre 5.
Les valeurs aux interfaces sont déterminées comme solutions du système tridiagonal suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Compact ordre 4 :} \quad \alpha_1\widehat{T}_{k-1} + \widehat{T}_k + \alpha_2\widehat{T}_{k+1} = \gamma_1 T_{k-1} + \gamma_2 T_k \\ &\text{Compact ordre 5 :} \quad \alpha_1\widehat{T}_{k-1} + \widehat{T}_k + \alpha_2\widehat{T}_{k+1} = \mu_1 T_{k-2} + \gamma_1 T_{k-1} + \gamma_2 T_k + \mu_2 T_{k+1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

En prenant un mode de Fourier, $T(z) = e^{ik\,z}$, une étude de Fourier montre que le facteur d'amplification correspondant à (3.5) est donné par :

$$\begin{aligned} &\text{Compact ordre 4 :} \quad \lambda(\theta) = \frac{\gamma_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} + \gamma_2 e^{i\frac{\theta}{2}}}{\alpha_1 e^{-i\theta} + 1 + \alpha_2 e^{i\theta}} \\ &\text{Compact ordre 5 :} \quad \lambda(\theta) = \frac{\mu_1 e^{-3i\frac{\theta}{2}} + \gamma_1 e^{-i\frac{\theta}{2}} + \gamma_2 e^{i\frac{\theta}{2}} + \mu_2 e^{3i\frac{\theta}{2}}}{\alpha_1 e^{-i\theta} + 1 + \alpha_2 e^{i\theta}} \end{aligned}, \qquad \theta = k\Delta z \tag{3.6}$$

En écrivant $\widehat{T}(z) = \lambda T(z)$ et en injectant dans (3.4), on obtient le facteur d'amplification correspondant à la discrétisation de la dérivée (3.4) :

$$\Lambda = ik \, \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{\frac{\theta}{2}} \, \lambda(\theta) \tag{3.7}$$

Le facteur exact est lui donné par $\Lambda_e = ik$.
Après calculs simples, on obtient les expressions qui vérifient cette égalité à l'ordre désiré :

ordre/coeff	α_1	α_2	γ_1	γ_2	μ_1	μ_2
4ème ordre	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	0	0
5ème ordre $\Omega_0 \geq 0$	$\frac{18}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{38}{36}$	$\frac{20}{36}$	$\frac{2}{36}$	0

(3.8)

(*Remarque :* les coefficients du compact 5 (C_t5), on été obtenu dans le cas d'une vitesse positive ($\Omega \geq 0$) en ajoutant la contrainte d'un décentrage amont complet du stencil : $\mu_2 = 0$.)

5. **Monotones :** plusieurs raisons peuvent conduire à l'utilisation de schémas monotones pour l'advection des traceurs dans les modèles numériques de l'océan. Un modèle d'océan se compose de deux traceurs qui sont la température et la salinité, qui sont dit actifs car ils ont une rétroaction sur les courants via le gradient de pression et éventuellement de traceurs des passifs qui sont simplement advectés par le fluide. Ces traceurs passifs peuvent par exemple correspondre à des concentrations biogéochimiques pour lesquels des propriétés de positivité seront requises. Au voisinage des embouchures de fleuves, des propriétés de positivités seront également demandés pour maintenir la salinité positive. En dehors de propriétés de positivité, des schémas monotones peuvent enfin être utilisés et c'est leur fonction première pour contrer l'apparition d'extrêmas et d'oscillations locales (celles-ci, comme mentionné plus haut, ayant pu elles-mêmes être générés par l'utilisation de schéma centré). Ces schémas empêchent la création artificielle de masses d'eau dues aux overshoots.

   Pour cela nous avons choisi d'implémenter le schéma monotone FCT (Flux-Corrected-Transport) introduit par Boris et Book [Boris and Book, 1973] puis généralisé par Zalesak [Zalesak, 1979]. L'approche FCT fourni une méthode monotone qui a la faculté de pouvoir être utilisée avec un schéma non-monotone d'ordre élevé déjà implémenté dans le modèle. En effet il est basé sur un algorithme de correction qui contraint le flux élevé déjà existant en fonction des valeurs limites prescrites via le calcul préalable d'un flux monotone (souvent calculé via un schéma upwind d'ordre 1). En d'autres termes il calcule des flux anti-diffusifs afin de traiter localement les extrêmas et les irrégularités de la solution d'ordre élevée.

   FCT 1D ([Boris and Book, 1973, Zalesak, 1979])
   On considère notre schéma aux volumes finis :

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(F_{j+1/2} - F_{j-1/2} \right)$$

   Supposons disposer de deux approximations des flux numériques : $F^l_{j\pm1/2}$ et $F^h_{j\pm1/2}$.
   $F^l_{j\pm1/2}$ est une approximation d'ordre peu élevé (ordre 1) qui est monotone.

$F^h_{j\pm 1/2}$ est une approximation d'ordre élevé.

On note

$$A_{j+1/2} = F^h_{j+1/2} - F^l_{j+1/2}$$

le flux *anti-diffusif*.
L'algorithme est le suivant :

(a) Calculer une estimation monotone de u_j^{n+1} :

$$u_j^l = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(F^l_{j+1/2} - F^l_{j-1/2}\right)$$

(b) Correction :

i. Prescription des maximas et des minimas qui agiront comme limiteurs :

$$\begin{aligned} u_j^{\max} &= \max(u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^l_{j-1}, u^l_j, u^l_{j+1}) \\ u_j^{\min} &= \min(u^n_{j-1}, u^n_j, u^n_{j+1}, u^l_{j-1}, u^l_j, u^l_{j+1}) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(Remarque : ce choix de limiteur est le choix fait par défaut, mais il n'est pas forcément optimal [Zalesak, 2005])

ii. Calcul du flux antidiffusif (flux net, ie $(-(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2})))$ maximum (et minimum) à ajouter à u_j^l qui préserve la monotonicité :

$$\begin{aligned} u_j^{min} &\leq u_j^{n+1} \leq u_j^{\max} \\ \Longrightarrow u_j^{min} &\leq u_j^l - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2}) \leq u_j^{\max} \end{aligned} \tag{3.10}$$

On note :

$$\begin{cases} Q_j^+ = (u_j^{\max} - u_j^l)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ Q_j^- = (u_j^l - u_j^{\min})\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \end{cases} \tag{3.11}$$

iii. Calcul de la somme des flux antidiffusifs qui entrent $(+)$ et qui sortent $(-)$ de la maille j :

$$\begin{cases} P_j^+ = \max(0, A_{j-1/2}) - \min(0, A_{j+1/2}) \\ P_j^- = \max(0, A_{j+1/2}) - \min(0, A_{j-1/2}) \end{cases}$$

P_j^+ (resp.

$$P_j^-$$

) représente la quantité qui rentrera (resp. sortira) dans la maille j si aucun des flux à droite et à gauche de la maille ne sont limités.

iv. Calcul de la limitation à mettre sur les flux à la fois sur les flux $A_{j-1/2}$ et $A_{j+1/2}$ pour ne pas dépasser Q_j^+ et Q_j^- :

$$R_j^+ = \begin{cases} \min(1, Q_j^+/P_j^+) & \text{si } P_j^+ > 0, \\ 0 & \text{si } P_j^+ = 0 \end{cases}$$

de même pour les flux sortant de la maille j

$$R_j^- = \begin{cases} \min(1, Q_j^-/P_j^-) & \text{si } P_j^- > 0, \\ 0 & \text{si } P_j^- = 0 \end{cases}$$

v. Calculer $C_{j+1/2}$

$$C_{j+1/2} = \begin{cases} \min(R_{j+1}^+, R_j^-) & \text{si } A_{j+1/2} > 0 \\ \min(R_j^+, R_{j+1}^-) & \text{si } A_{j+1/2} \leq 0 \end{cases}$$

Si $A_{j+1/2} > 0$, ce flux peut être une contrainte sur l'augmentation de la valeur de la maille $j+1$ et sur une diminution de la valeur de la maille j. Si $A_{j+1/2} < 0$, ce flux peut être une contrainte sur une diminution de la valeur de la maille $j+1$ et sur une augmentation de la valeur de la maille j.

Ce schéma est couramment utilisé dans les modèles d'océan du fait de sa simplicité dans le sens où il peut être utilisé avec des schémas d'ordre élevés différents en fonction de l'application effectuée. Un autre avantage de cette méthode est qu'elle permet une implémentation multidimensionnelle plus rigoureuse quand au traitement des termes croisés (*cf.* chapitre suivant 3.3) [Zalesak, 1979]. Des versions simplifiées de ce schéma permettant uniquement de préserver la positivité sont également possibles [Durran, 2010]. Cependant il est connu que cette simplicité apparente cache une nécessité d'étudier en détail les différents ingrédients de la méthode, la qualité finale du résultat dépendant très fortement des trois ingrédients principaux qui sont a) le choix du schéma monotone d'ordre bas b) la détermination des valeurs minimales et maximales à imposer pour limiter les flux (eq. 3.9) c) le choix du schéma d'ordre élevé [Zalesak, 2005].

3.2.3 Cas test numérique

Nous nous intéressons ici essentiellement à isoler l'impact de la verticale en s'affranchissant de l'implication des termes croisés (*cf.* chapitre 3.3) sur la diffusion diapycnale. C'est pourquoi nous allons étudier l'impact des schémas verticaux sur un cas test où l'approximation faible pente est vérifiée : dans ce cas la diffusion diapycnale est équivalente à la diffusion verticale : $\kappa_{dia} \simeq \kappa_{dia}^v$. Le "sloshing test-case" mis en place par [White et al., 2009] (qui utilisent un modèle en coordonnée isopycnale) réunit ces caractéristiques. Il est à fond plat dans une configuration 2D x-z et en toit rigide. Nous l'implémenterons en coordonnées z ce qui nous permettra de vérifier l'approximation faible pente.

Ce cas test représente un ajustement gravitationnel sur un domaine fermé, ajustement moins abrupt qu'un "lock-exchange" (discontinuité du champs de densité) ce qui permet de ne pas faire "trop" faire travailler les schémas horizontaux par rapport aux schémas verticaux. L'initialisation du front de densité peut être adapté de façon à vérifier les hypothèses nécessaires. Son initialisation est représenté sur la figure 3.5.

Lorsque la simulation débute, le gradient de pression lié au front de densité génère un champ de vitesses qui advecte ensuite ce front en oscillant jusqu'à obtenir un état au repos ($T_{\text{final}} \approx 1200$ jours). A l'issue de la simulation, le champ de densité est indépendant de x et on s'attend à retrouver un gradient de densité vertical (pycnocline) assez marqué : la diffusion verticale de la pycnocline est alors signe de mélange diapycnal.

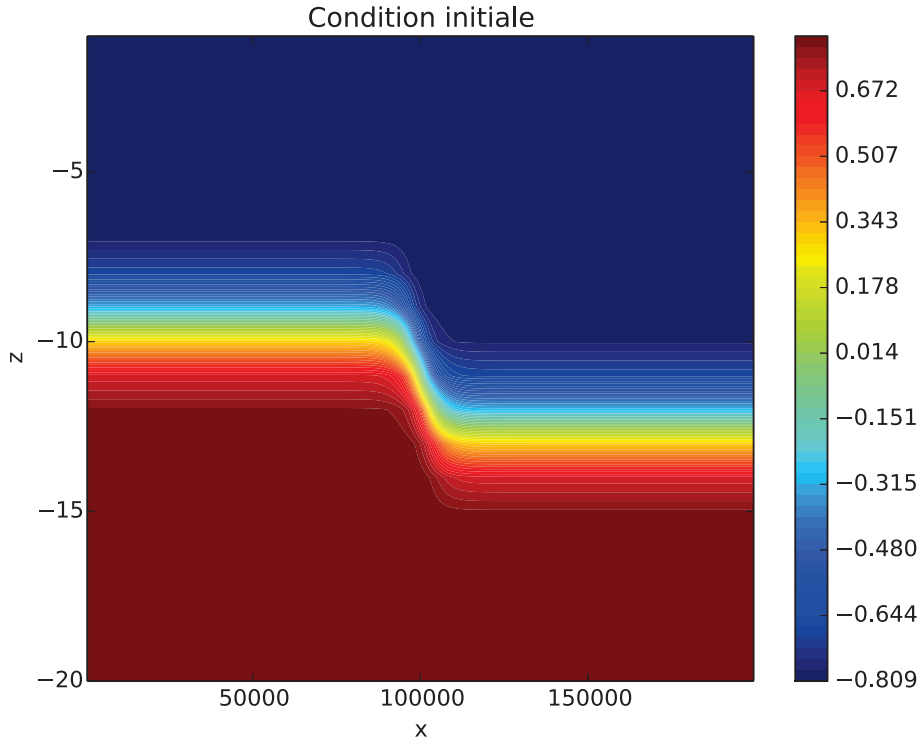


FIGURE 3.5 – Initialisation du profil de densité. Cast test Sloshing 2D x-z, fond plat, résolution : (L_x = 200km, nx=160), (H = 1km, nz=20).

Afin de comparer les résultats obtenus avec les différents schémas d'advection verticaux, nous avons implémenté ce cas test dans un code qui résout les équations primitives dans une configuration 2D x-z sur grille décalée Arakawa C. Le schéma d'advection horizontale des traceurs utilisé est un schéma décentré d'ordre 5 (UP5) et nous avons vérifié que la sensibilité au schéma horizontale est effectivement moindre que celle liée au schéma d'advection verticale. Le schéma temporel choisi est un schéma Runge-Kutta d'ordre 4 très peu diffusif. Pour la résolution de l'équation des moments nous avons implémenté deux schémas différents : un décentré d'ordre 3 (UP3) qui a des caractéristiques de diffusion assez représentatives de ce qui est communément implémenté pour résoudre cette équation dans les modèles d'océans opérationnels connus [Shchepetkin and McWilliams, 2005] et un simple schéma upwind d'ordre 1 (Up1) beaucoup plus dissipatif pour nous permettre d'étudier l'impact de la viscosité numérique sur la diffusion diapycnale. En effet, on s'attend à ce qu'en augmentant la viscosité numérique, les vitesses d'advection soient plus régulières (notamment la vitesse verticale w) et par conséquent que cela mène à moins de diffusion [Ilicak et al., 2012].

Les dimensions spatiales choisies sont les suivantes : $(L = 200km, nx = 160)$ et $(H = 1000m, nz = 20)$. Le pas de temps est donné par $\Delta t = 600s$ ce qui mène à des nombres de Courant maximum suivant chaque direction : $\mu_x = 0.17$ et $\mu_z = 0.28$.

3.2.4 Résultats et discussion

Les résultats de cette étude sont résumés sur les figures 3.6 et 3.7 où l'on peut lire :

– **les coupes verticales de densité** à la fin de la simulation pour chaque schéma d'advection vertical utilisé, tout d'abord seul (a) et b)) puis comme schéma d'ordre élevé dans la

méthode FCT (c) et d)). Sur ces figures apparaissent à gauche les résultats obtenus avec un schéma d'advection du moment décentré d'ordre 1 (UP1) et à droite avec un schéma d'advection du moment décentré d'ordre 3 (UP3). Ce choix de schémas d'advection du moment est effectuée à la fois dans la direction horizontale et dans la direction verticale. Une courbe correspondant à une solution de référence calculée à très haute résolution noté REF est également tracée sur ces coupes.

– **les diagrammes de répartition classes de densités** à la fin de la simulation. Ces diagrammes sont assez représentatif du mélange diapycnal. En effet comme nous l'avons précisé en introduction, dans un environnement adiabatique le mélange est presque exclusivement isopycnal. C'est à dire que les classes de densités doivent être conservées tout au long de l'intégration numérique. Le diagramme de l'état initial doit être retrouvé. Le présence des classes intermédiaires est directement liée à la diffusion diapycnale du à la diffusion du schéma numérique quand les extrêmas sont eux plutôt dus à la dispersion. La création de classes intermédiaires peut être toléré tant qu'elles restent proche des classes initiales. La création d'extrémas est caractéristique du comportement non-monotone de la solution.

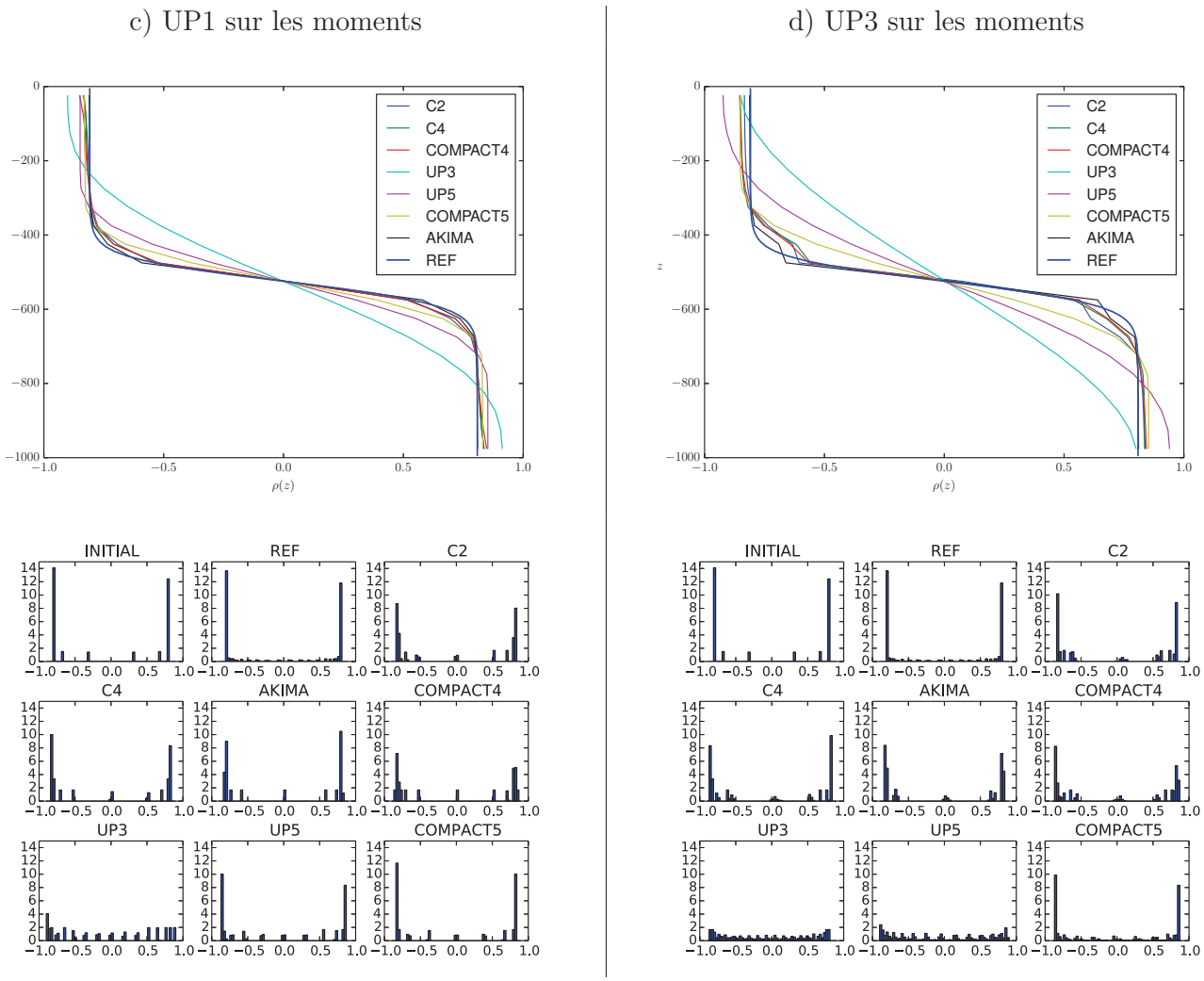


FIGURE 3.6 – Coupe verticale et volume occupé par chaque classe de densité à la fin de la simulation pour des schémas verticaux C2, Akima, Up3, Up5, C4, Compact 4 et Compact 5, implémentés avec un schéma Up5 pour l'advection horizontale des traceurs et des schémas Up1 a) ou Up3 b) pour l'advection des moments ; On trouve aussi sur les coupes verticales une solution de référence à haute résolution (REF).

Schémas non monotones Nous commençons par discuter des résultats schémas non monotones présentés sur la figure (3.6). Sur ces coupes verticales nous pouvons comparer et qualifier la diffusion de la pycnocline en fonction des schémas utilisés. Une diffusion verticale marquée créé des classes de densités intermédiaires qui s'intercalent en-dessous et au dessus de la pycnocline. Une courbe régulière qui s'éloigne de la solution de référence est signe d'un excès de diffusion. C'est le cas pour le schéma UP3, dans une moindre mesure pour le schéma UP5 et dans une mesure encore moindre pour le schéma compact d'ordre 5. Une courbe qui montre des irrégularités est signe de dispersion. C'est le cas pour l'ensemble des schémas centrés avec des irrégularités plus marquées pour le schéma centré d'ordre 2, puis le schéma AKIMA, puis le schéma C4 et enfin le schéma compact 4 qui se comporte le mieux. Ces deux caractéristiques se retrouvent sur les diagrammes de densité, où le mélange est bien visible pour les schémas décentrés et où des discontinuités dans l'apparence de certaines classes de densité est signe de

dispersion. Notons enfin que concernant la création d'extremas articifiels, le schéma AKIMA, même si il n'est pas monotone, en créé très peu. Le schéma compact 4 est le schéma centré qui en crée le plus. Les extremas visibles sur les schémas décentrés sont renforcés par la présence de dissipation.

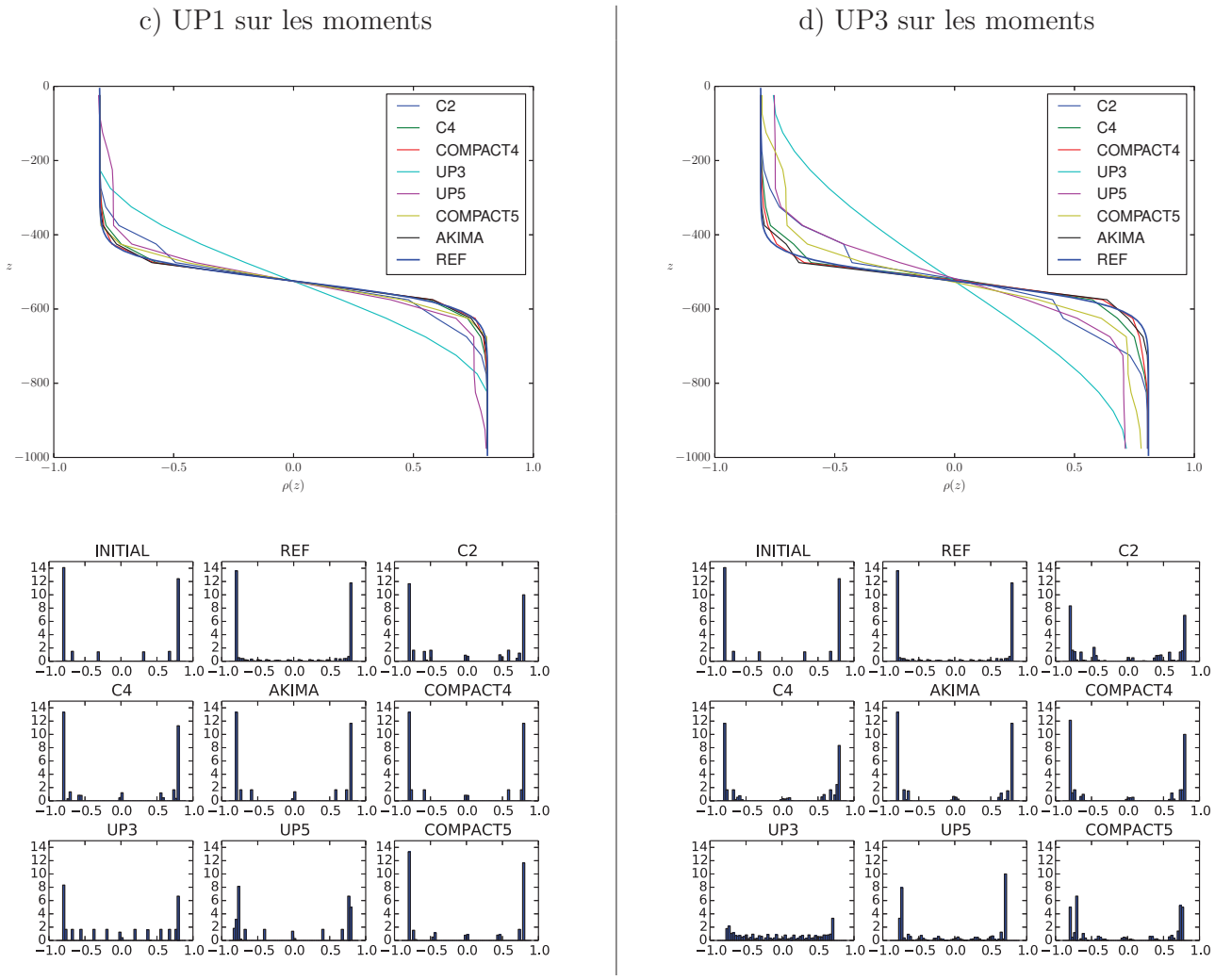


FIGURE 3.7 – Coupe verticale et volume occupé par chaque classe de densité à la fin de la simulation pour une résolution monotone de l'advection des traceurs de type FCT basée sur les schémas verticaux C2, Akima, Up3, Up5, C4, Compact 4 et Compact 5. Un schéma Up5 est implémenté pour l'advection horizontale des traceurs et des schémas Up1 a) ou Up3 b) pour l'advection des moments. REF correspond à une solution de référence calculée à très haute résolution.

Schémas monotones (FCT) La figure (3.7) représente les mêmes résultats obtenus à l'aide d'un schéma FCT où le flux d'ordre élevé est mentionné. La création de classes de densité en dehors de l'intervalle initial est donc supprimée. Nous constatons tout d'abord le très mauvais comportement du schéma FCT couplé au schéma centré d'ordre 2 (FCT-C2). La dispersion très marquée du schéma C2 implique une mise en action forte des limiteurs du FCT. L'ensemble des schémas centrés d'ordre élevés conduit à des résultats très correct. Le schéma FCT-Compact 4 continue à donner les meilleurs résultats, d'autant plus que cette fois-ci les extremas ont été supprimés. Les schémas décentrés couplés au FCT ont un comportement très délicat à évaluer mais les résultats ne peuvent être qualifiés de satisfaisant. Nous pouvons penser qu'initialement

un extremum a tendance à être créé et que celui-ci est ensuite fortement diffusé. C'était le cas sans le limiteur mais cette fois le limiteur tend à combattre cette très forte génération d'extrêmes.

Sur la viscosité numérique Nous n'avons pour l'instant pas commenter les différences entre les résultats obtenus avec les différents schémas sur les vitesses (UP1 et UP3). L'étude de [Ilicak et al., 2012] se concentre sur cet aspect sur un cas test lock exchange et montre qu'en diminuant fortement le nombre de Reynolds (en augmentant une viscosité numérique explicite sur l'horizontale) ceci réduit fortement le mélange diapycnal. Ceci provient bien entendu du fait que les champs de vitesses sont plus régulier et en particulier les vitesses verticales générées devienent moins fortes lorsque la viscosité numérique est augmenté. Les résultats de nos expériences vont dans le même sens. Nous constatons une nette réduction du mélange diapycnal lorsque l'on utilise, sur les vitesses, un schéma UP1 plutôt qu'un schéma UP3. Notons que des tests effectués avec un schéma monotone (TVD) sur les vitesses conduisent à des résultats très proches de ceux obtenus avec le schéma UP1.

3.2.5 Conclusion

En conclusion de cette étude nous pourrons admettre que les schémas décentrés sont à éviter sur la verticale même si le schéma Compact 5 montre de très belle aptitudes si le champ d'advection est assez régulier. L'utilisation de la méthode FCT est possible et bénéfique si elle est utilisée avec un schéma centré d'ordre élevé. Les meilleurs résultats sont obtenus avec le schéma FCT-Compact 4, mais ceci a un coût numérique. Au coût du schéma compact 4 s'ajoute le coût de la méthode FCT. Suite à nos expériences le schéma FCT-Compact 4 a été implémenté au sein du modèle européen d'océan NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean [1]) [Madec, 2008] et des expériences en configuration réaliste sont en cours. Le modèle NEMO utilisait au préalable un schéma FCT avec un schéma centré d'ordre 2, ce qui est dans nos expériences la moins bonne des combinaisons. Bien entendu, en lieu et place de la méthode FCT, d'autres expériences pourraient être effectuées avec d'autres schémas ayant des propriétés de limitation des oscillations : schémas TVD et schémas préservant la monotonicité par exemple.

Enfin, nous avons vu que la viscosité numérique, implicite au schéma décentré d'advection du moment, joue un rôle majeur. Une certaine régularité des champs de vitesses est nécessaire afin de diminuer le mélange diapycnal sur les traceurs. D'un point de vue mathématique, une telle régularité et l'utilisation de schémas monotones sur les vitesses est nécessaire, d'autant que les modèles d'océan vont actuellement vers des résolutions de plus en plus fines où les non-linéarités ne sont plus fortement contrôlées par les termes additionnels de viscosité. L'utilisation de schémas monotones deviendra inéluctable. La crainte du physicien est bien entendu que la viscosité additionnelle affecte fortement le spectre d'énergie. Ceci reste à expérimenter dans des configurations idéalisées puis réalistes avec différentes classes de schémas. Les méthodes non rigoureusement monotones telles que les schémas d'ordre élevé WENO [Jiang and Shu, 1996] et préservant la monotonicité [Suresh and Huynh, 1997, Daru and Tenaud, 2004] pourraient fournir une solution satisfaisante à ce problème tout en contribuant fortement à une réduction du mélange diapycnal.

1. `http://www.nemo-ocean.eu/`

3.3 Aspects multidimensionnels

3.3.1 Erreurs multidimensionnelles, stabilité, précision et asymétrie numérique

On considère l'équation ordinaire :

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\lambda q \tag{3.12}$$

La solution exacte est donnée par $q(t) = q(0)e^{-\lambda t}$. De manière générale, nous considérons ici que λ est complexe, (3.12) pouvant donc représenter de la propagation d'onde (λ imaginaire pur) mais également de la friction/diffusion (λ réel positif). Supposons regarder les schémas à un pas de temps pour lequel une discrétisation temporelle conduit à

$$q^{n+1} = (1 + \mathcal{A}(\lambda))q^n \tag{3.13}$$

Le schéma est d'ordre r en temps si (pour $\lambda\Delta t \ll 1$)

$$\mathcal{A}(\lambda) = \sum_{k=1}^{r} \frac{(\Delta t)^k}{k!}\frac{\partial^k q}{\partial t^k} + \mathcal{O}(\Delta t)^{r+1} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k!}(-\Delta t)^k \lambda^k + \mathcal{O}(\Delta t)^{r+1} \tag{3.14}$$

et la condition de stabilité du schéma s'écrit :

$$|1 + \mathcal{A}(\lambda)| \leq 1, \text{ ssi } g(\lambda\Delta t) \leq g_{\max} \tag{3.15}$$

où g est une fonction dont l'expression dépend du schéma temporel et $g_{\max}$ une contrainte de stabilité. Considérons l'équation d'advection unidimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \qquad u_0 > 0$$

Soit S_x la discrétisation spatiale de la dérivée en espace alors $\lambda = \lambda_x = u_0 \dfrac{S_x(\theta_x)}{\Delta x}$ où $\theta = k\Delta x$, k étant le nombre d'onde. La condition de stabilité spatio temporelle (Courant-Friedrichs-Lewy) s'écrit :

$$\max_{\theta_x, \theta_x \leq \pi} (g(u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} S_x(\theta_x))) \leq g_{\max} \tag{3.16}$$

La formulation (3.13,3.14) inclue différentes classes de schémas spatio-temporels. Nous nous intéressons particulièrement à deux d'entre elles, les schémas Runge Kutta et les schémas espace-temps. Les schémas Runge Kutta approchent les termes d'ordre supérieur à 1 en λ dans (3.14) en évaluant le second membre à différents instants (compris entre n et $n+1$). Les méthodes espace-temps approchent les termes d'ordre supérieur qui correspondent aux dérivées temporelles en remplaçant ces dérivées par des dérivées en espace. Lors du passage au cas multidimensionnel, il nous faut différencier ces deux types de schémas.
Prenons l'exemple du schéma Runge Kutta d'ordre 2. Il s'écrit :

$$q^{n+1/2} = (1 - \frac{\Delta t}{2} u_0 \partial_x) q^n, q^{n+1} = q^n - \Delta t u_0 \partial_x q^{n+1/2}$$

ce qui conduit bien à l'expression

$$q^{n+1} = (1 + \mathcal{A}(\lambda_x))q^n, \mathcal{A}(\lambda_x) = -\lambda_x \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\lambda_x^2 \tag{3.17}$$

Et prenons l'exemple du schéma Lax-Wendroff (espace temps d'ordre 2) qui s'écrit (en une seule étape)

$$q^{n+1} = (1 - \Delta t u_0 \partial_x + \frac{\Delta t^2}{2} u_0^2 \partial_x^2) q^n \tag{3.18}$$

et conduit également à (3.17)

Extension au cas multidimensionnel Considérons maintenant la discrétisation de l'équation d'advection bidimensionnelle à coefficients constants (u_0, Ω_0) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u_0 \frac{\partial q}{\partial x} + \omega_0 \frac{\partial q}{\partial z} = 0, \qquad u_0 > 0, \omega_0 > 0 \tag{3.19}$$

– Schémas Runge Kutta
L'extension directe des schémas précédents au cas multidimensionnel se mettra pour le schéma de Runge Kutta sous la forme

$$q^{n+1} = (1 + \mathcal{A}(\lambda_x + \lambda_z))q^n$$

Soit S_x, S_z les discrétisations des dérivées en espace sur l'horizontale et la verticale. Nous avons alors

$$\lambda = \lambda_x + \lambda_z$$

où

$$\lambda_x = u_0 \frac{S_x(\theta_x)}{\Delta x}, \lambda_z = \omega_0 \frac{S_z(\theta_z)}{\Delta z}$$

La condition de stabilité s'écrit :

$$\max_{\theta_x, \theta_z, \theta_x \leq \pi, \theta_z \leq \pi} (g(u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} S_x(\theta_x)) + \omega_0 \frac{\Delta t}{\Delta z} S_z(\theta_z))) \leq g_{\max} \tag{3.20}$$

Supposons maintenant que les schémas spatiaux soient identiques et rappelons qu'il ne s'agit pas de schémas espace-temps (c'est à dire que les expressions de S_x, S_z ne font pas intervenir les vitesses d'advection u_0, ω_0), dans ce cas nous avons $S_x(\theta) = S_z(\theta) = S(\theta)$ et en prenant $\theta_x = \theta_z = \theta$ dans (3.20) on obtient

$$\max_{\theta, \theta \leq \pi} g \left((u_0 \frac{\Delta t}{\Delta x} + \omega_0 \frac{\Delta t}{\Delta z}) S(\theta) \right) \leq g_{\max} \tag{3.21}$$

La condition de stabilité est donc réduite par rapport à la condition de stabilité unidimensionnelle (3.16). Elle sera réduite d'autant plus en dimension 3. Ce raisonnement simple peut en réalité s'appliquer à la plupart des schémas temporels non espace temps comme montré dans [Sescu et al., 2010].

– Schémas espace temps
Dans le cas des schémas espace temps, une extension naive de (3.18) conduira à :

$$q^{n+1} = (1 + \mathcal{A}(\lambda_x) + \mathcal{A}(\lambda_z))q^n$$

Ici la stabilité des opérateurs unidimensionnel ne permet pas de conclure quant à la stabilité (conditionnelle) du schéma multidimensionnel. Il est même connu que dès que l'ordre unidimensionnel est strictement supérieur à 1 (i.e. au delà du schéma Euler amont d'ordre 1), le schéma ci-dessus devient instable. Le schéma Euler amont est en effet un cas particulier car pour l'expression linéaire $\mathcal{A}(\lambda) = -\Delta t \lambda$, nous retrouvons bien $\mathcal{A}(\lambda_x) + \mathcal{A}(\lambda_z) = \mathcal{A}(\lambda_x + \lambda_z)$.
De manière évidente, l'extension directe des schémas espace-temps 1D au cas multidimensionnelle n'est pas correcte car elle ne prend pas en compte l'apparition des termes croisés dans les dérivées temporelles d'ordre supérieur ou égal à 2. Ceci aurait naturellement conduit à l'expression

$$q^{n+1} = (1 + \mathcal{A}(\lambda_x + \lambda_z))q^n$$

Cependant la construction des schémas espaces temps est aisée en dimension 1 mais plus complexe en dimension supérieure à 1. Il peut donc être préférable de se reposer sur une approche qui permettre de garantir la stabilité sans avoir à utiliser un schéma multidimensionnel complexe. Pour ceci, la méthode habituelle consiste en une méthode de splitting (factorisation) qui s'écrit dans notre cas :

$$\begin{aligned} q^\star &= (1+\mathcal{A}(\lambda_z))q^n \\ q^{n+1} &= (1+\mathcal{A}(\lambda_x))q^\star \end{aligned}$$

soit

$$q^{n+1} = (1+\mathcal{A}(\lambda_x))(1+\mathcal{A}(\lambda_z)))q^n \tag{3.22}$$

Cette expression permet effectuer de récupérer les termes croisés dans le développement de $\mathcal{A}(\lambda_x+\lambda_z)$. De plus, elle permet de garantir une stabilité maximale, puisque la stabilité du schéma multidimensionnelle est assurée sous la condition de stabilité des schémas unidimensionnels. C'est à dire qu'au lieu de (3.20) nous aurons :

$$\max_{\theta_x,\theta_x\leq\pi}(g(u_0\frac{\Delta t}{\Delta x}S_x(\theta_x))) \leq g_{\max} \text{ et } \max_{\theta_z,\theta_z\leq\pi}(g(\omega_0\frac{\Delta t}{\Delta z}S_z(\theta_z))) \leq g_{\max} \tag{3.23}$$

Il est également possible de calculer sous cette formalisation, les premiers termes d'erreur issue de l'équation modifiée. En effet, on montre que pour les deux formulations ci-dessus (où $\mathcal{A}^r$ dénote une sommation jusqu'à l'ordre r comme dans (3.14) :

$$(1+\mathcal{A}^{r+1}(\lambda_x+\lambda_z)) - (1+\mathcal{A}^r(\lambda_x+\lambda_z)) = (-1)^{r+1}\frac{(\lambda_x+\lambda_z)^{r+1}}{(r+1)!}(\Delta t)^{r+1} \tag{3.24}$$

$$(1+\mathcal{A}^{r+1}(\lambda_x+\lambda_z)) - (1+\mathcal{A}^r(\lambda_x))(1+\mathcal{A}^r(\lambda_z)) = (-1)^{r+1}\frac{\lambda_x^{r+1}+\lambda_z^{r+1}}{(r+1)!}(\Delta t)^{r+1} \tag{3.25}$$

Dans la seconde formulation correspondant à la méthode de splitting, l'ensemble des termes d'erreur croisée ont donc été éliminés jusqu'à l'ordre $r+1$.

Cette courte étude nous a montré l'intérêt potentiel des méthodes de splitting par rapport à une extension directe des schémas unidimensionnels : une augmentation de la gamme de stabilité et une réduction à un ordre supérieure de l'erreur liée aux termes croisés. Bien entendu, celle-ci ne prend pas en compte plusieurs aspects importants pour lesquels l'étude doit être effectuée au cas par cas. C'est notamment le cas où des schémas différents sont utilisés dans les directions horizontale et verticale où la commutativité supposée ci-dessus (notamment pour établir (3.25)). La dérivation des schémas espace temps lorsque les vitesses d'advection sont non constantes est également plus complexe.

Remarque : Les formulations établies ci-dessus se basent sur une approche différences finies mais la nécessité de l'ajout de termes croisés peut également se voir dans une approche volume finis se basant sur la forme intégrale de (3.19). Son intégration sur une maille de calcul $\Omega = [x-\Delta x/2, x+\Delta x/2]\times[z-\Delta z/2, z+\Delta z/2]$ s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega q + u_0\int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2}\left[q(x+\frac{\Delta x}{2},z') - q(x-\frac{\Delta x}{2},z')\right]\mathrm{d}z' + \omega_0\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2}\left[q(x',z+\frac{\Delta z}{2}) - q(x',z-\frac{\Delta z}{2})\right]\mathrm{d}x' = 0 \tag{3.26}$$

Par définition $\frac{1}{\Delta x\Delta z}\int_\Omega q = \bar{q}$ où $\bar{q}$ est la moyenne de la solution sur la maille de calcul. Pour dériver le schéma aux volumes finis, il reste à approcher les deux intégrales de bord. Il est aisé

de montrer que la dérivation de schémas consistants à des ordres strictement supérieurs à 2 fait apparaitre des termes croisés [Shukla and Giri, 2014]. Ainsi par exemple l'approximation à un ordre supérieur à 2 (en Δz) du terme $\int_{z-\Delta z/2}^{z+\Delta z/2} \left[q(x+\frac{\Delta x}{2}, z')\right] \mathrm{d}z'$ à l'aide des valeurs moyennes sur les mailles voisines fait intervenir non seulement les valeurs moyennes $\bar{q}$ à gauche et à droite de l'interface $x+\frac{\Delta x}{2}$ mais également celles au dessus et au dessous de la maille de calcul.

3.3.2 Splitting espace-temps pour les écoulements incompressibles

Conservation des traceurs et préservation des constantes

Nous supposons ici que les vitesses u_0, ω_0 ne sont plus constantes mais sont représentatives d'un fluide incompressible :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \tag{3.27}$$

L'équation (3.19) peut donc se réécrire sous la forme conservative :

$$\partial_t q + \partial_x(uq) + \partial_z(\omega) = 0 \tag{3.28}$$

Au niveau discret, nous souhaitons préserver cette conservation. Une autre propriété importante de (3.27, 3.28) est la préservation des constantes. Si un traceur q est constant à l'instant initial de la simulation l'incompressibilité (ou la forme advective de l'équation (3.19) nous montre que ce traceur doit rester constant au cours de la simulation. Ces deux propriétés n'est pas usuellement respectées par les méthodes traditionnelles de splitting. En effet, le splitting de cette forme devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} q^\star = q^n - \Delta t \partial_x(uq^n) \\ q^{n+1} = q^\star - \Delta t \partial_z(\omega q^*) \end{array} \right.$$

Et ici la propriété de préservation des constantes est perdue dès la première étape d'advection (à l'exception du cas très particulier où u ne dépend que de z. Plusieurs solutions ont été proposées dans la littérature :

1. La correction attribuée à Bott [Bott, 1993, Bott, 2010] consistant à ôter à chaque étape la partie divergente. Ces termes s'éliminent de facto lorsqu'ils sont recombinés puisque le milieu est incompressible :

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^\star = q^n - \Delta t \partial_x(uq^n) + q^n \Delta t \partial_x u \\ q^{n+1} = q^\star - \Delta t \partial_z(\omega q^\star) + q^n \Delta t \partial_z \omega \end{array} \right. \tag{3.29}$$

2. La méthode MACHO (Multidimensional Advective-Conservative Hybrid Operator) développée par Leonard [Leonard et al., 1996]. Ici la première étape est effectuée en utilisant la forme advective des équations. La seconde étape, sous forme conservative, est multidimensionnelle et permet donc de respecter la préservation des constantes via l'incompressibilité.

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} q^\star = q^n - u \Delta t \partial_x(q^n) \\ q^{n+1} = q^n - \Delta t \partial_x(uq^n) - \Delta t \partial_z(\omega q^\star) \end{array} \right. \tag{3.30}$$

A vitesses constantes, ces deux méthodes sont strictement équivalentes et redonnent le splitting traditionnel pour la formulation advective. Afin de limiter les erreurs liées au non commutativité, elles sont en pratique implémentées en alternant les phases dans les directions x et z (splitting de Godunov).

Sur une grille décalée, comme sur la figure (3.8), la phase advective du schéma MACHO nécessite de calculer des vitesses au centre de la maille à partir des vitesses aux interfaces. Dans nos expériences numériques, nous ferons le choix ([Leonard et al., 1996]) de prendre la vitesse amont parmi les deux vitesses dans la direction considérée lorsqu'il n'y a pas de changement de signe entre ces vitesses et de prendre une vitesse nulle lorsqu'il y a un changement de signe. Notons également qu'au delà du calcul de cette vitesses d'advection centrée sur la maille,

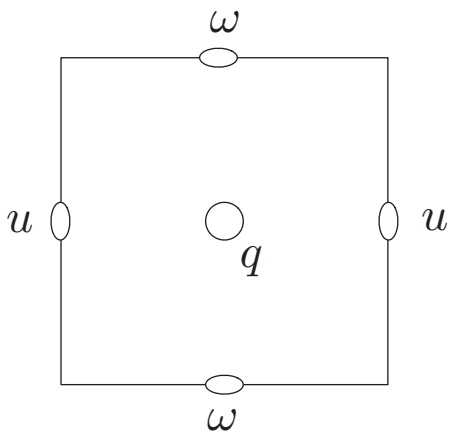


FIGURE 3.8 – Grille décalée avec la position des vitesses (u, ω) et du traceur q

la méthode MACHO ne nécessite pas de calcul supplémentaire par rapport à la méthode de splitting. Effectivement le coût de calcul est essentiellement dans la détermination des valeurs du traceur aux interfaces, ceci potentiellement par des méthodes d'ordres élevés. Or les traceurs interpolés dans les phases advectives (selon x dans l'étape advective de (3.30)) peuvent être réutilisés sans calcul dans les phases conservatives (selon x dans l'étape conservative de (3.30)).

Cas test et comparaison

Mont sous marin Le cas test mont sous marin (Seamount) est un cas test d'advection 2D vertical d'une tâche de traceur par un champ de vitesse non-divergent au dessus d'une topographie.
Les dimensions horizontales et verticales du domaine sont données par $L_x = 300$km et $L_z = 3$km. La topographie de fond est donnée par la fonction $H(x)$:

$$H(x) = L_z - h_{\text{top}} e^{-(\frac{x - \frac{L_x}{2}}{\sigma_h})^2}$$

avec $h_{\text{top}} = 1100$ la hauteur maximal du mont et $\sigma_h = 6$km (largeur du mont).
L'initialisation de la tâche suit une loi gaussienne :

$$q(x, z, t = 0) = \frac{e^{-(\frac{x - x_i}{L_x})^2 + (\frac{z - z_i}{L_z})^2}}{\alpha}$$

avec $x_i = \dfrac{L_x}{3}$, $z_i = -\dfrac{L_z}{3}$ et $\alpha = 0.001$
Le champ de vitesse non-divergent est oscillant en temps et construit de telle sorte que la solution finale obtenue après une période T soit exactement la position initiale :

$$u(x, z, t) = \sin(\frac{2\pi}{T} t) \times \frac{1}{2}(\tanh(\frac{h_z - (z - z_0)}{\sigma}) - \tanh(\frac{-h_z - (z - z_0)}{\sigma})) \quad w(x, z, t) = 0$$

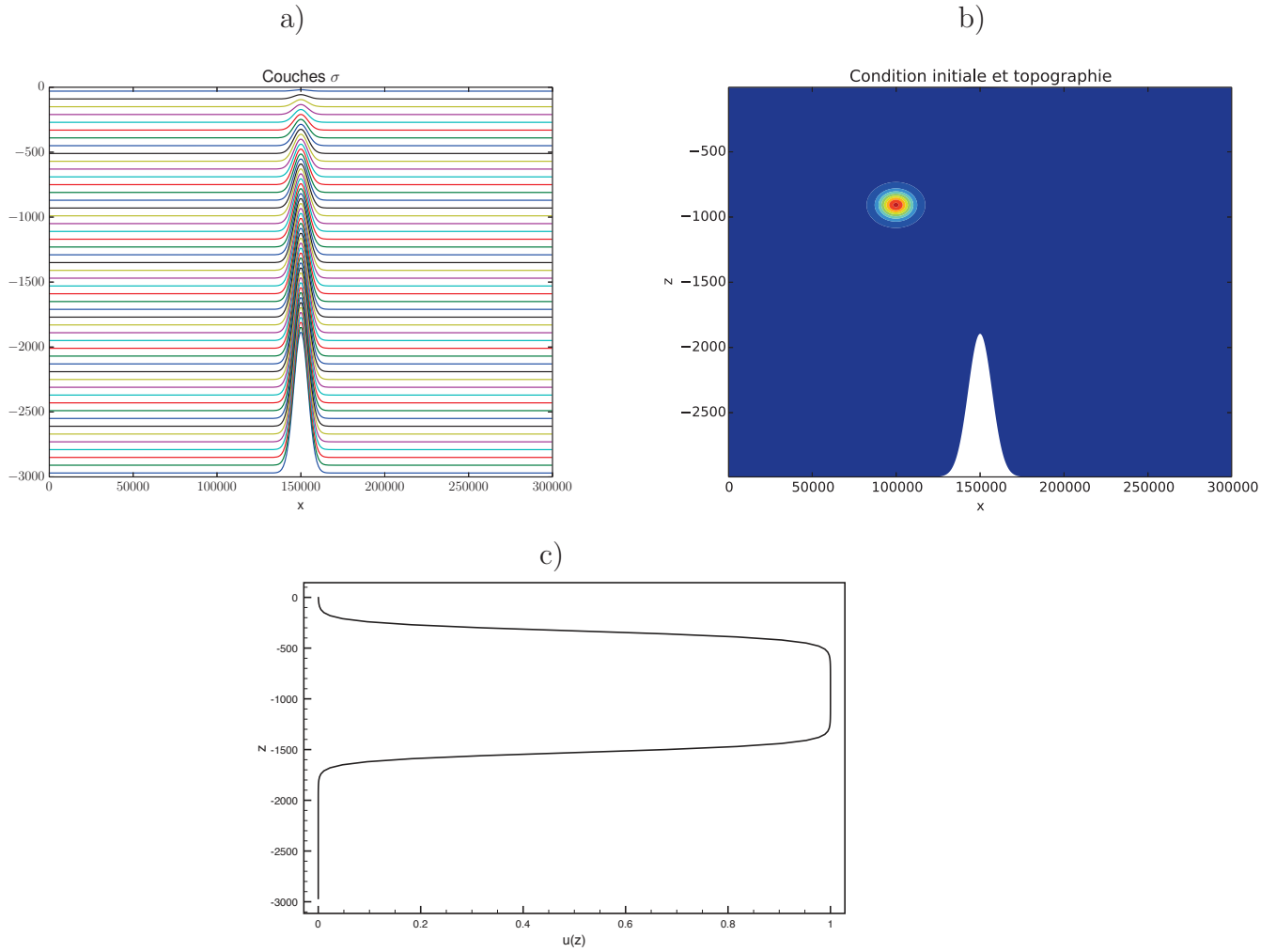


FIGURE 3.9 – Présentation du cas test du mont sous-marin : a) représentation de la topographie et des couches sigma (ici avec 50 couches), b) initialisation du traceur et c) module de vitesse en fonction de la profondeur (z)

où $h_z = 600$, $\sigma = 80$ et $z_0 = -930$. Cette variation verticale permet d'avoir une vitesse nulle à la frontière du mont sous marin.
Le modèle est discrétisé à l'aide de coordonnées verticales de type suivi de terrain $\sigma = \dfrac{z}{H}, -1 \leq \sigma \leq 0$. Les différentes couches correspondantes, la condition initiale et le profil verticale de vitesse sont représentés sur la figure (3.9).
Dans le système de coordonnées σ, l'équation de transport d'un traceur q à w nul devient :

$$\partial_t q + \partial_x(uq) = 0 \Longrightarrow \partial_t q + \partial(uq) + \partial_s(\Omega q) = 0$$

avec $\Omega = -u\dfrac{z}{H}\partial_x H$ où $H(x)$. Ainsi au dessus du mont sous marin, une vitesse Ω est créée et le schéma d'advection verticale est sollicité (voir diagramme 3.9).

Discrétisation Le nombre de cellules sur l'horizontale et sur la verticale est donnée par $n_x = 300$ ($\Delta x = 1$km) et $n_z = 50$. La résolution verticale correspondant diminue de $\Delta z = 3000/50 = 60$m lorsque $H(x) = L_z$ à $\Delta z = 1900/50 = 38$m au somment du mont sous marin. La durée de simulation est fixée à $T = 4$jours.
Les schémas numériques suivants ont été implémentés :

1. Schémas temporels : Euler splitting (MACHO, Bott) et Adams Bashforth ordre 3 (AB3)
   L'objectif est de comparer les méthodes espace temps (Bott 3.29, la formulation MACHO 3.30) avec des schémas standard d'ordre élevé. Nous avons choisi le schéma temporel Adams Bashforth d'ordre 3 (AB3). Ce schéma est d'un ordre suffisamment élevé en temps et conduit, comme les schémas espace-temps, à une unique évaluation du second membre par pas de temps.
   Le schéma temporel d'Adams-Basworth d'ordre 3 en temps s'écrit de la façon suivante :

$$q^{n+1} = q^n + \frac{\Delta t}{12}\left[23F(q^n) - 16F(q^{n-1}) + 5F(q^{n-2})\right]$$

   où F représente la discrétisation du second membre de l'équation de transport
2. Schémas spatiaux
   – sur l'horizontale :
     un schéma upwind d'ordre 5 (pour l'AB3) et sa version espace-temps lorsque utilisé avec les schémas espace-temps
   – sur la verticale :
     le schéma compact d'ordre 4 (pour l'AB3) et sa version espace-temps
     Les coefficients du schéma compact 4 espace temps sont donnés par (voir tableau 3.8) :

α_1	α_2	γ_1	γ_2
$\frac{-1}{2}\frac{(\mu-1)}{(\mu+2)}$	$\frac{-1}{2}\frac{(\mu+1)}{(\mu-2)}$	$\frac{-3}{(\mu+2)(\mu-2)}$	$\frac{-3}{(\mu+2)(\mu-2)}$

(3.31)

   où $\mu = \frac{\Omega_0 \Delta t}{\Delta s}$. Comme les autres schémas espace temps, le schéma compact ordre 4 est stable sous la condition de stabilité $|\mu| \leq 1$ et est exact pour $|\mu| = 1$

Sensibilité au pas de temps

Le pas de temps maximal du schéma AB3-UP5-Compact 4 est de $\Delta t = 180s$ ce qui conduit à des nombres de Courant $\mu_x = 0.19$ et $\mu_s = 0.39$ dans les directions horizontale et verticale respectivement (le ratio entre les deux nombres de Courant étant lié à la pente maximale de topographie).
Les deux méthodes de splitting directionnels (Bott et MACHO) sont stables jusqu'à des nombres de courant verticaux proches de 1 ce qui correspond à des pas de temps de l'ordre de 500 secondes pour des nombres de courant horizontaux $\mu_x \simeq 0.5$. Le gain est donc très conséquent. Une étude de sensibilité au pas de temps est montrée sur la figure 3.10 où l'on observe l'évolution de l'erreur en fonction du pas de temps. Cette erreur correspond à la différence relative en norme L_2 entre la solution initiale et la solution à l'instant final, qui dans le cas exact, doivent être identiques. Les erreurs obtenues pour les schémas espace-temps Bott et MACHO sont quasiment identiques et, comme attendu, elles diminuent à mesure que l'on s'approche de la limite de stabilité. La méthode MACHO devient légèrement supérieure à la limite de stabilité.

3.3.3 Propriétés de monotonie

Comme exposé en introduction et illustré dans l'étude sur les schémas verticaux, une des sources principales de diffusion et donc potentiellement de diffusion diapycnale dans les modèles d'océan provient de l'utilisation de schémas d'advection monotones. En effet la monotonie est obtenue au prix d'une diffusion locale additionnelle.

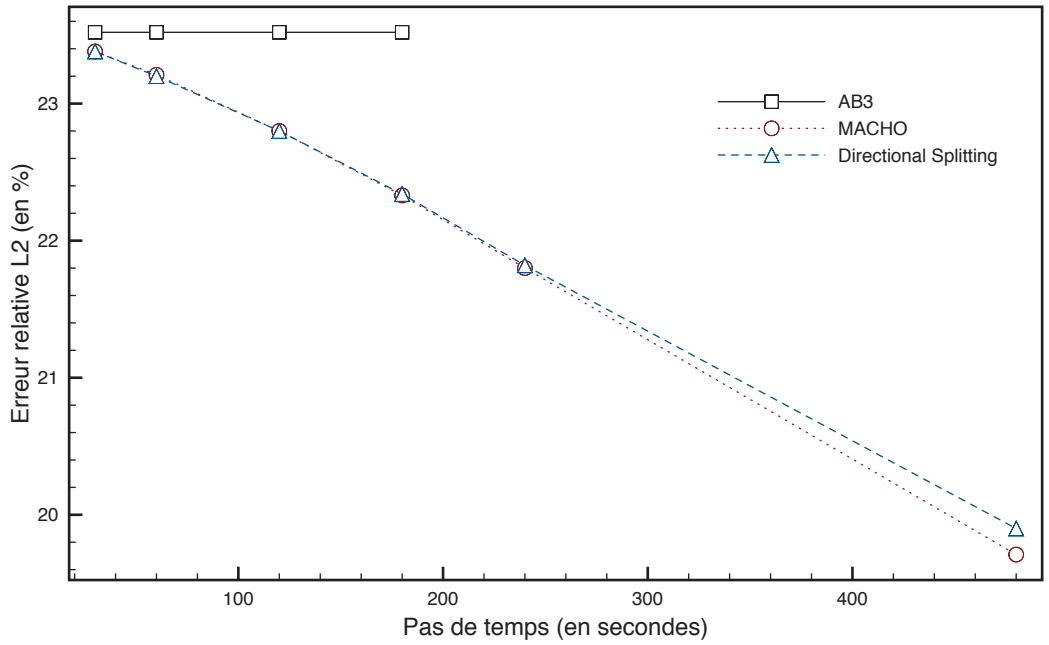


FIGURE 3.10 – Erreur relative L_2 en fonction du pas de temps

La méthode Flux-Corrected-Transport (FCT) [Boris and Book, 1973, Zalesak, 1979] est extensible au cas multidimensionnel : les flux sont contrôlés en prenant en compte les différents flux qui traversent les faces de la maille [Boris and Book, 1997, Zalesak, 2005].
Si l'adaptation de cette méthode monotone au splitting de type MACHO est simple puisque le système 3.30 contient une deuxième étape conservative purement multidimensionnelle. C'est à cette étape que la méthode multidimensionnelle FCT est employée. Pour le cas du splitting directionnel, il faut cette fois modifier la méthode FCT unidimensionnelle afin de prendre en compte les termes de divergence de la forme $q\partial_x u$ et $q\partial_z w$. L' étape de correction 3.10 doit être modifiée en :

$$q_j^{min} \leq q_j^{n+1} \leq q_j^{\max}$$
$$\Longrightarrow q_j^{min} \leq q_j^l - \frac{\Delta t}{\Delta x}(A^c_{j+1/2} - A^c_{j-1/2}) + \Delta t q^n \partial_x u^n \leq q_j^{\max} \tag{3.32}$$

où nous avons pris en compte le fait que le terme de divergence $q^n\partial_x u^n$ sera ensuite ajouté. Le calcul du flux antidiffusif (3.11) net est donc modifié en :

$$\begin{cases} Q_j^+ = (q_j^{\max} - q_j^l - \Delta t q^n \partial_x u^n)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \\ Q_j^- = (q_j^l + \Delta t q^n \partial_x u^n - q_j^{\min})\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \end{cases} \tag{3.33}$$

Sur les figures 3.11 on peut comparer qualitativement l'état final obtenu avec les deux méthodes de splittings et la solution théorique. Le tableau 3.1 récapitule les erreurs L_1 et L_2 pour différents pas de temps. Nous constatons tout d'abord une très forte augmentation de l'erreur en comparaison des résultats de la figure (3.10). De plus, contrairement aux versions non monotones, ces erreurs croient avec le pas de temps. Le caractère diffusif des solutions (essentiellement remarqué dans la norme L_1 de l'erreur) est très fortement marqué. L'orientation de cette diffusion n'est pas maitrisée mais cependant les solutions à $\Delta t = 240$s montre que l'utilisation du FCT multidimensionnel conduit à une solution finale plus symétrique (et à une erreur moindre) que dans le cas du splitting directionnel. Les solutions proches de la limite de stabilité avec $\Delta t = 480$s sont elles très similaires.

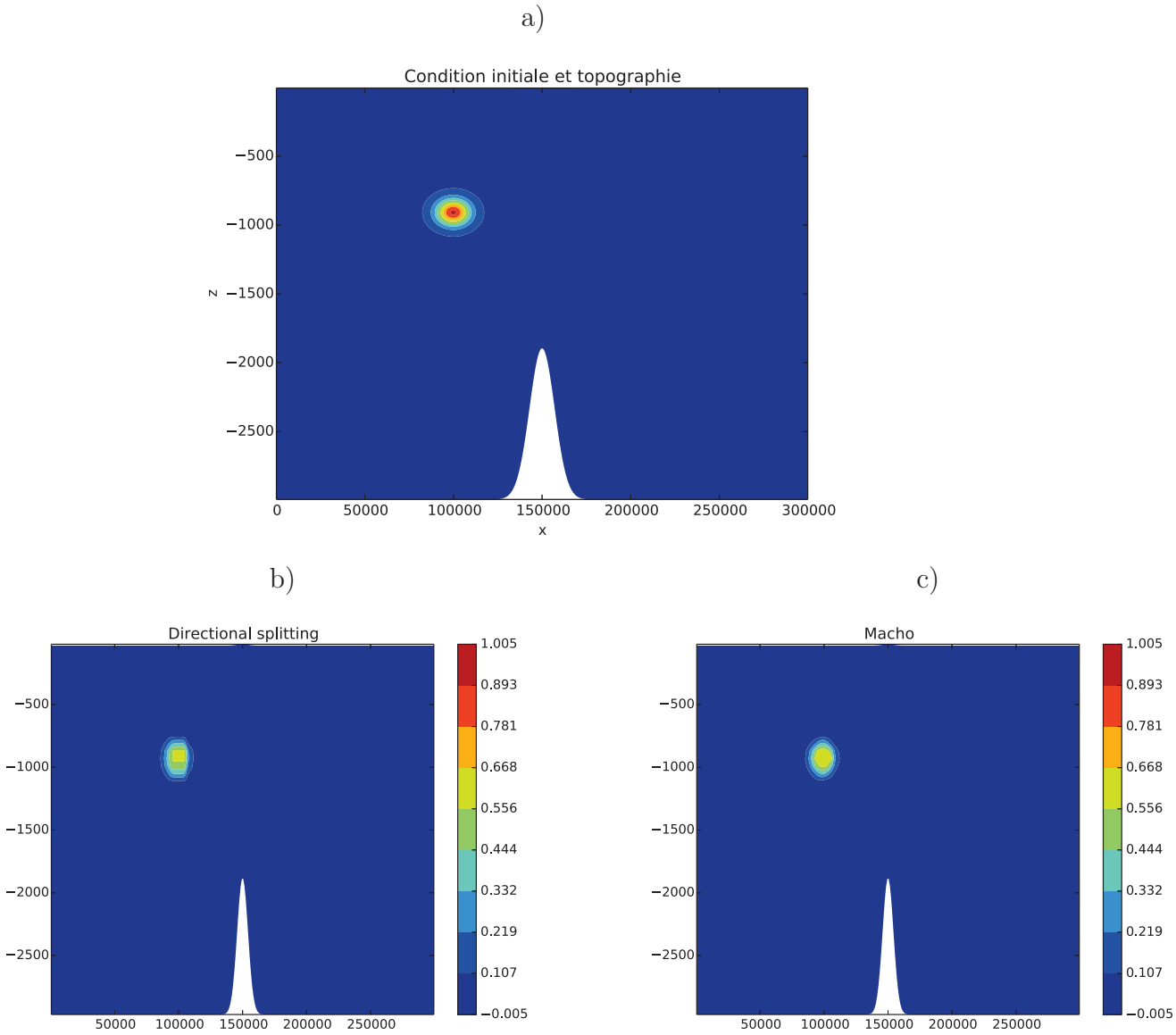


FIGURE 3.11 – Comparaison déformation et diffusion multidimensionnelle : a) Condition initiale (solution finale exacte), b) Solution finale pour Bott-FCT et $\Delta t = 240$s, c) Solution finale pour MACHO-FCT et $\Delta t = 240$s

	MACHO	Directional Splitting
$\Delta t = 240$ s	(24.39, 35.16)	(32.53, 41.85)
$\Delta t = 480$ s	(26.48, 37.76)	(28.01, 37.09)

TABLE 3.1 – Erreur en norme relative L_1 (première valeur dans les couples), erreur en norme relative L_2 (second valeur)

Comme l'ensemble des schémas monotones, le schéma FCT a tendance à mettre trop de diffusion au voisinage des extremas qui ne sont pas des discontinuités. Afin de remédier à ce problème, [Schär and Smolarkiewicz, 1996] propose d'utiliser le schéma FCT de manière itératif. Effectivement, à l'issue d'une première passe de schéma FCT, les flux (somme des flux amont et des flux antidiffusifs) deviennent eux-même des flux monotones qui peuvent être utilisés comme flux d'ordre faible pour une nouvelle étape de FCT. Les résultats obtenus

avec deux passes de FCT sont indiqués dans le tableau (3.2). Ils montrent effectivement une amélioration non négligeable, d'autant plus pour le schéma FCT. Des tests avec un nombre supérieure de passes ne montrent plus de telles améliorations. Evidemment, le coût de calcul de ces schémas FCT à deux passes est important, même si la seconde passe requiert moins de calculs que la première (une partie des minima et maxima à déterminer est effectuée une fois pour toutes).

	MACHO	Directional Splitting
$\Delta t = 240$ s	(20.68, 28.43)	(28.48, 34.21)
$\Delta t = 480$ s	(18.23, 24.49)	(24.06, 30.53)

Table 3.2 – Erreur en norme relative L_1 (première valeur dans les couples), erreur en norme relative L_2 (second valeur) avec deux passes du schéma FCT

3.3.4 Conclusion

Cette section a mis en avant les différents problèmes numériques rencontrés lors du passage au cas multidimensionnel. Si l'on se base sur un schéma spatio-temporel stable (et non espace-temps), son extension au cas bidimensionnel (et encore plus au cas tri-dimensionnel) diminue fortement la gamme de stabilité. L'augmentation de la gamme de stabilité de certains de ces schémas a été étudié dans [Sescu et al., 2010] et nécessite de prendre en compte des termes multidimensionnels (croisés) supplémentaires. Concernant les schémas espace-temps (basé sur un schéma temporel d'Euler), la prise en compte de ces termes croisés est obligatoire (à compter de l'ordre 2). Ceci s'effectue aisément grâce à des méthodes de splitting (MACHO ou splitting directionnel) qui permettent également de retrouver la même gamme de stabilité de celles des schémas 1D. Ces deux méthodes peuvent être étendues au cas d'écoulements incompressibles où la préservation des constantes et la conservation sont deux propriétés à maintenir simultanément. Ils se comportent alors de manière quasi-identique dans le cas de schémas non monotones mais les différences sont plus importantes si des contraintes de monotonie sont appliquées, l'utilisation de limiteur vraiment multidimensionnels, que permet la méthode MACHO. Cependant la quantité de diffusion nécessaire à la monotonie reste très importante et est donc une source potentielle importante de mélange diapycnal.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

Les modèles numériques de l'océan sont basés sur la résolution des équations primitives et doivent représenter au mieux de nombreux processus océaniques aux propriétés spectrales espace-temps variées et couplés via de fortes non-linéarités. Ces évolutions respectent aussi dans leur ensemble des équilibres énergétiques précis et fragiles.

Cette thèse s'est concentrée sur deux études :

- (i) la représentation de la propagation des ondes externes et internes et de gravité (barotrope/barocline) qui répond à la problématique de transfert entre énergie cinétique et énergie potentielle au sein des équations primitives.
- (ii) les erreurs liées aux processus advectifs dans un objectif de réduction du mélange artificiel diapycnal (au travers des couches de densité constante)

Les ondes externes et internes de gravité sont des ondes liées à la gravité et à la stratification de l'océan, générées par exemple par l'interaction des marées avec la bathymétrie. Elle se propagent à des vitesses qui varient en fonction de la structure verticale de l'onde et sont responsables de plus de la moitié du transport et du transfert d'énergie nécessaire pour maintenir le mélange abyssal et entretenir la circulation thermohaline. Sous un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, ces ondes peuvent être identifiées grâce à une décomposition en modes normaux.

Les ondes externes de gravité contraignent fortement les modèles numériques qui utilisent des schémas temporels explicites puisque leur vitesse de propagation ($c_0 \simeq \sqrt{gH}$) est d'un ordre de grandeur plus grande que celles de tout les autres processus de transport résolus par les équations primitives. Ce problème raide est résolu par une technique de splitting qui sépare ainsi l'intégration numérique des champs 3D baroclines de celles des ondes externes. Les modèles actuels de l'océan s'inspirent de la décomposition en mode normaux pour définir les parties rapides et lentes du système. Pour des raisons de simplicité, ceci est effectué uniquement de manière approchée (le mode barotrope est approché par l'intégrale verticale de la solution). La première partie de ce travail de thèse a mis en place une étude rigoureuse de cette méthode de splitting. En étudiant la stabilité associée, nous avons été en mesure de quantifier la quantité minimale de diffusion nécessaire à contrer cette séparation inexacte. Il s'est tout d'abord avéré que cette quantité était bien moindre que celle utilisée par les modèles actuels d'océan. D'autre part, dans plusieurs simulations réalistes qui ont été effectuées depuis (non incluses dans ce manuscrit) elle semble suffisante et permet donc également de stabiliser la technique de splitting au regard des autres éléments à prendre en compte dans ce cadre plus réaliste (topographie non plate, non-linéarités) où le splitting n'est plus exact. Ce travail permet de réduire considérablement la dissipation de l'énergie barotrope. Nous avons également proposé une formulation du splitting basée sur un mode barotrope non approché et compatible avec l'écriture actuelle des modèles d'océan. Lorsque les hypothèses de la décomposition en mode normaux sont valides, celle-ci permet, par construction, de s'affranchir de dissipation. Nous espérons que dans un cadre réaliste, elle permettra de diminuer encore la dissipation nécessaire

à la stabilité du splitting.

La représentation des ondes internes de gravité est quant à elle liée à plusieurs éléments du modèle : pour les aspects horizontaux, elle est liée à la discrétisation des termes de gradient de pression et de la divergence horizontale du champ de vitesses, pour les aspects verticaux à la grille de calcul et à la discrétisation de l'équilibre hydrostatique. Les aspects liés à l'horizontale ont été étudiés sous différents angles : ordre d'approximation, décalage des grilles, dissipation des modes numériques. La décomposition en mode normaux a ici encore été un outil mathématique important. Elle permet notamment de mettre un taux de dissipation proportionnel aux vitesses de propagation des ondes baroclines et également d'envisager la mise en place de schémas monotones. Nous avons également construit des schémas espaces temps pour le système hyperbolique vitesses - pression qui sont d'une grande efficacité. Ces schémas ont été développés sur des grilles non décalées, où il s'agit alors d'un problème assez classique, mais également sur des grilles décalées du type de celles utilisées actuellement dans les modèles d'océan. Ces schémas, présentées dans cette étude pour le traitement des ondes internes, peuvent bien entendu être utilisés dans d'autres contextes. La bonne représentation de la propagation des ondes internes nécessitent également de s'intéresser à leur structure verticale : nous avons vu qu'en fonction du type de grille verticale et des schémas d'interpolation de pression utilisés, les valeurs de ces vitesses numériques de propagations peuvent fortement varier et donc impacter les transferts d' énergie que ces ondes transportent et par conséquent, *in fine* la stabilité de la circulation thermohaline. Une vision complète des erreurs liées aux discrétisations horizontales et verticales dans un modèle numérique est un élément supplémentaire dans un choix objectif à la fois des méthodes de discrétisations et des résolutions de grilles utilisées.

L'étude de l'équilibre des transferts d'énergie et de l'érosion des réservoir d'énergie disponibles ainsi que les mesures *in situ* confirment le caractère anisotrope du mélange interne quasi-adiabatique. C'est à dire que dans les océans le mélange et la dissipation d'énergie s'effectue principalement le long des isopycnes : le mélange diapycnal irréversible est négligeable devant le mélange isopycnal hors des couches de mélange et de transferts diabatiques. La dissipation numérique issue de l'implémentation des schémas d'advection doit donc vérifier cette anisotropie.Trois aspects ont étés étudiés :

1. l'impact de l'advection verticale sur la diffusion diapycnale.
2. la perte de stabilité et de l'asymétrie numérique lors de l'implémentation multidimensionnelle à cause des termes de dérivées croisées.
3. l'impact de la préservation de la monotonie et son extension à plusieurs dimensions.

Dans un premier temps, nous avons conclu (i) que les schémas d'advection verticaux ne peuvent bien sûr résolument pas être négligés devant l'advection horizontale ; (ii) que les schémas centrés d'ordre élevé, comme un schéma compact d'ordre 4, conduisent à de très bons résultats, mais doivent potentiellement être employés dans des versions monotones pour éviter la création d'extrema (iii) que les modèles d'océans manquent très certainement de viscosité numérique, les champs de vitesses non réguliers en découlant contribuent à l'excès de mélange diapycnal.

Puis lors de l'étude multidimensionnelle, nous avons tout d'abord mis en avant les propriétés de stabilité et de précision de certaines classes de schémas, en nous intéressant tout particulièrement à la représentation des termes multidimensionnels (croisés) des erreurs de discrétisation. Les méthodes de splitting offrent à ce niveau un avantage conséquent mais nécessitent d'être modifiées dans le cadre qui nous intéresse d'écoulements incompressibles. Deux méthodes classiques ont été tout particulièrement étudiées (méthodes MACHO et Bott). Elles conduisent à des résultats très similaires lorsque des propriétés de monotonie ne sont pas recherchées. Les différences sont effectivement plus marquées dans ce dernier cas, la méthode MACHO permettant naturellement l'utilisation de limiteurs vraiment multidimensionnels.

Perspectives

Les études effectuées dans ce document l'ont été dans un cadre académique. Une partie naturelle de l'extension de ce travail réside donc dans leur extension à des systèmes d'équations plus complexes. Concernant la propagation des ondes externes et internes de gravité, nous pouvons souligner deux points. Nous avons proposé une formulation du splitting qui se base sur l'utilisation du mode barotrope non approché. C'est un choix comme un autre de la définition de ce mode, qui n'a pas de raisons d'être moins que le choix classique (correspondant à une simple moyenne verticale) dans les simulations réalistes. Le travail effectué sur les ondes baroclines semble également possible dans un cadre réaliste. Le coût lié au calcul des modes verticaux doit cependant être étudié et des méthodes d'approximation envisagées si nécessaire. Ce travail ouvre également plusieurs perspectives parmi lesquelles nous distinguons trois principaux axes :

1. L'essentiel du travail théorique sur la propagation des ondes externes et internes de gravité a été effectué dans le cadre de modèles à coordonnées géopotentielles (z). Une extension de celui-ci, notamment de l'analyse de stabilité du splitting et de la représentation verticale des modes baroclines, à d'autres systèmes de coordonnées (suivi de terrain, isopycnales) serait intéressant à effectuer pour évaluer ces coordonnées au regard de ces deux problèmes.
2. La décomposition en modes verticaux permet d'obtenir des schémas espace-temps pour la propagation des ondes internes très performants par rapport à l'état de l'art actuel en schémas non espace-temps. Ceci ouvre la voie à la construction de schémas complètement espace-temps (i.e. incluant des schémas espace-temps pour les parties advectives des équations) pour la modélisation numérique de l'océan.
3. A l'heure actuelle, la plupart des modèles d'océan s'intéresse uniquement aux propriétés de positivité des schémas d'advection de traceurs (notamment pour les traceurs biogéochimiques). A fur et à mesure de l'augmentation progressive de la résolution spatiale des grilles de calcul et de l'augmentation associée des non-linéarités, les problématiques liées à la monotonie des solutions deviendront de plus en plus importantes. Ceci concerne à la fois les schémas d'advection de traceurs mais également les schémas d'advection de vitesses, ceci impactant la régularité de ces champs et donc in fine le mélange diapycnal. Un travail important doit donc continuer d'être fait sur les différentes alternatives possibles.

Bibliographie

[Adcroft and Hallberg, 2006] Adcroft, A. and Hallberg, R. W. (2006). On methods for solving the oceanic equations of motion in generalized vertical coordinates. Ocean Modelling, 11 :224–233.

[Adcroft et al., 1997] Adcroft, A., Hill, C., and Marshall, J. (1997). Representation of topography by shaved cells in height coordinate ocean model. Monthly Weather Review, 125(9) :2293–2315.

[Adcroft and Campin, 2004] Adcroft, A. J. and Campin, J.-M. (2004). Rescaled height coordinates for accurate representation of free-surface flows in ocean circulation models. Ocean Modelling, 7 :269–284.

[Arakawa and Moorthi, 1988] Arakawa, A. and Moorthi, S. (1988). Baroclinic instability in vertically discrete systems. Journal of the Atmospheric Sciences, 45(11) :1688–1708.

[Beckers et al., 1998] Beckers, J., Burchard, H., Campin, J., Deleersnijder, E., and Mathieu, P.-P. (1998). Another reason why simple discretization of rotated diffusion operators cause problems in ocean models : comments on "isoneutral diffusion in a z-coordinate ocean model". Journal of Physical Oceanography, 28(7) :1552–1559.

[Beckers et al., 2000] Beckers, J., Burchard, H., Deleersnijder, E., and Mathieu, P.-P. (2000). Numerical discretization of rotated diffusion operator in ocean models. Journal of Physical Oceanography, 128(8) :2711–2733.

[Berntsen et al., 1981] Berntsen, H., Kowalik, Z., Sælid, S., and Sørli, K. (1981). Efficient numerical simulation of ocean hydrodynamics by a splitting procedure. Modeling, Identification and Control, 2(4) :181–199.

[Blayo and Debreu, 2005] Blayo, E. and Debreu, L. (2005). Revisiting open boundary conditions from the point of view of characteristic variables. Ocean Modelling, 9(3) :231 – 252.

[Bleck, 2002] Bleck, R. (2002). An oceanic general circulation model in hybrid isopycnic-cartesian coordinates. Ocean Modelling, 4(1) :55–88.

[Bleck and Smith, 1990] Bleck, R. and Smith, L. T. (1990). A wind-driven isopycnic coordinate model of the north and equatorial atlantic ocean : 1. model development and supporting experiments. Journal of Geophysical Research, 95(3) :3273–3285.

[Boris and Book, 1973] Boris, J. P. and Book, D. L. (1973). Flux-corrected transport. i. shasta, a fluid transport algorithm that works. Journal of Computational Physics, 11 :38–69.

[Boris and Book, 1997] Boris, J. P. and Book, D. L. (1997). Flux-corrected transport. Journal of Computational Physics, pages 172–186.

[Bott, 1993] Bott, A. (1993). The monotone area-preserving flux-form advection algorithm : Reducing the time-splitting error in two-dimensional flow fields.

[Bott, 2010] Bott, A. (2010). Improving the time-splitting errors of one-dimensional advection schemes in multidimensional applications. Atmospheric Research.

[Brown and Campana, 1978] Brown, J. A. and Campana, K. A. (1978). An economical time-differencing system for numerical weather prediction. Mon. Weather Rev., 106 :1125–1136.

[Bryan, 1969] Bryan, K. (1969). A numerical method for the study of the circulation of the world ocean. Journal of Computational Physics, 4(3) :347 – 376.

[Capet et al., 2008] Capet, X., McWilliams, J. C., Molemaker, M. J., and Shchepetkin, A. F. (2008). Mesoscale to submesoscale transition in the california current system. part iii : Energy balance and flux. Journal of Physical Oceanography, 38(10) :2256–2269.

[Chelton, 2001] Chelton, D. (2001). Report of the high-resolution ocean topography science working group meeting. Technical report, Oregon State University. College of Oceanic and Atmospheric Sciences.

[Cullen et al., 1997] Cullen, M. J., Davies, T., Mawson, M. H., James, J. A., Coulter, S. C., and Malcolm, A. (1997). An overview of numerical methods for the next generation u.k. nwp and climate model. Atmosphere-Ocean, 35(sup1) :425–444.

[Danilov, 2013] Danilov, S. (2013). Ocean modeling on unstructured meshes. Ocean Modelling, 69 :195–210.

[Daru and Tenaud, 2004] Daru, V. and Tenaud, C. (2004). High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. J. Comput. Phys., 193 :563–594.

[Dukowicz and Smith, 1994] Dukowicz, J. K. and Smith, R. D. (1994). Implicit free-surface method for the bryan-cox-semtner ocean model. Journal of Geophysical Research : Oceans, 99 :7991–8014.

[Dukowicz et al., 1993] Dukowicz, J. K., Smith, R. D., and Malone, R. C. (1993). A reformulation and implementation of the bryan-cox-semtner ocean model on the connection machine. Journal of Atmospheric and Oceanic Technology.

[Durran, 2010] Durran, D. (2010). Numerical Methods for Fluid Dynamics : With Application to Geophysics. Springer Press.

[Ferrari et al., 2010] Ferrari, R., Griffies, S. M., Nurser, A. J. G., and Vallis, G. K. (2010). A boundary-value problem for the parameterized mesoscale eddy transport. Ocean Modelling.

[Fox-Kemper and Menemenlis, 2008] Fox-Kemper, B. and Menemenlis, D. (2008). Ocean Modeling in an Eddying Regime, chapter Can large eddy simulation techniques improve mesoscale rich ocean models ? American Geophysical Union.

[Garrett and Kunze, 2007] Garrett, C. and Kunze, E. (2007). Internal tide generation in the deep ocean. Annual Reviews of Fluid Mechanics, 39 :57–87.

[Gent and McWilliams, 1989] Gent, P. R. and McWilliams, J. C. (1989). Isopycnal mixing in ocean circulation models. Journal of Physical Oceanography, 20 :150–155.

[Gouillon, 2010] Gouillon, F. (2010). Internal wave propagation and numerically induced diapycnal mixing in oceanic general circulation models. PhD thesis, Florida state university - College of arts and sciences.

[Griffies, 2003] Griffies, S. M. (2003). Fundamentals of Ocean Climate Models. Princeton University Press.

[Griffies and Adcroft, 2008] Griffies, S. M. and Adcroft, A. J. (2008). Ocean Modeling in an Eddying Regime, chapter Formulating the Equations of Ocean Models. American Geophysical Union.

[Griffies et al., 2000] Griffies, S. M., Pacanowski, R. C., and Hallberg, R. W. (2000). Spurious diapycnal mixing associated with advection in a z-coordinate ocean model. Monthly Weather Review, 128(3) :538–564.

[Griffies et al., 2001] Griffies, S. M., Pacanowski, R. C., Schmidt, M., and Balaji, V. (2001). Tracer conservation with an explicit free surface method for z-coordinate ocean models. Monthly Weather Review, 129(5).

[Grinstein et al., 2007] Grinstein, F. F., Margolin, L. G., and Rider, W. J., editors (2007). Implicit Large Eddy Simulation : Computing Turbulent Fluid Dynamics. Cambridge.

[Hallberg, 1997] Hallberg, R. W. (1997). Stable split time stepping schemes for large-scale ocean modeling. Journal of Computational Physics.

[Hecht, 2010] Hecht, M. W. (2010). Cautionary tales of persistent accumulation of numerical error : Dispersive centered advection. Ocean Modelling.

[Higdon and de Szoeke, 1997] Higdon, R. L. and de Szoeke, R. A. (1997). Barotropic-baroclinic time splitting for ocean circulation modeling. Journal of Computational Physics.

[Hill et al., 2012] Hill, C., Ferreira, D., Campin, J. M., Marshall, J., Abernathey, R., and Barrier, N. (2012). Controlling spurious diapycnal mixing in eddy-resolving height-coordinate ocean models–insights from virtual deliberate tracer release experiments. Ocean Modelling., 45 :24–36.

[Hughes et al., 2009] Hughes, G. O., Hogg, A. M., and Griffiths, R. W. (2009). Available potential energy and irreversible mixing in the meridional overturning circulation. Journal of Physical Oceanography, 39 :3130.

[Ilicak et al., 2012] Ilicak, M., Adcroft, A. J., Griffies, S. M., and Hallberg, R. W. (2012). Spurious dianeutral mixing and the role of momentum closure. Ocean Modelling, 45-46(37-58).

[Jiang and Shu, 1996] Jiang, G.-S. and Shu, C.-W. (1996). Efficient implementation of weighted eno schemes. Journal of Computational Physics, 126 :202–228.

[Jochem, 2009] Jochem, F. (2009). Transferts d'energie associés à la génération, propagation et dissipation de la marée interne. PhD thesis, Université de Toulouse.

[Killworth et al., 1991] Killworth, P. D., Stainforth, D., Webb, D. J., and Paterson, S. M. (1991). The development of a free-surface bryan-cax-semtner ocean model. Journal of Physical Oceanography.

[Laurent and Garrett, 2002] Laurent, L. C. S. and Garrett, C. (2002). The role of internal tides in mixing the deep ocean. Journal of Physical Oceanography, 32 :2882.

[Leclair and Madec, 2011] Leclair, M. and Madec, G. (2011). $\tilde{z}$-coordinate and arbitrary lagrangian-eulerian coordinate separating high and low frequency motions. Ocean Modelling, 37(3) :139–152.

[Ledwell et al., 1993] Ledwell, J. R., Watson, A. J., and Law, C. S. (1993). Evidence for slow mixing across the pycnocline from an open-ocean tracer-release experiment. Nature, 364(6439) :701–703.

[Ledwell et al., 1998] Ledwell, J. R., Watson, A. J., and Law, C. S. (1998). Mixing of a tracer in the pycnocline. Journal of Geophysical Research, 103(C10) :21499–21529.

[Ledwell et al., 2011] Ledwell, J. R., Watson, A. J., and Law, C. S. (2011). Diapycnal mixing in the antarctic circumpolar current. Journal of Physical Oceanography, 41(1) :241–246.

[Lee et al., 2002] Lee, M.-M., Coward, A. C., and Nurser, A. J. G. (2002). Spurious dyapicnal mixing of the deep waters in an eddy-permitting global ocean model. Journal of Physical Oceanography, 32 :1522–1535.

[Lele, 1992] Lele, S. K. (1992). Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. Journal of Computational Physics, 103 :16–42.

[Lemarié et al., 2012] Lemarié, F., Debreu, L., Shchepetkin, A., and McWilliams, J. (2012). On the stability and accuracy of the harmonic and biharmonic isoneutral mixing operators in ocean models. Ocean Modelling, 52-53 :9–35.

[Leonard et al., 1996] Leonard, B., Lock, A., and MacVean, M. (1996). Conservative explicit unrestricted time step multidimensional constancy preserving advection schemes. Monthly Weather Review, 124 :2588–2606.

[Le Roux, 2012] Le Roux, D. Y. (2012). Spurious inertial oscillations in shallow-water models. Journal of Computational Physics, 231(24) :7959–7987.

[Leslie and Purser, 1992] Leslie, L. and Purser, R. (1992). A comparative study of the performance of various vertical discretization schemes. Meteorology and Atmospheric Physics, 50(1-3) :61–73.

[Lörcher and Munz, 2007] Lörcher, F. and Munz, C.-D. (2007). Lax-wendroff-type schemes of arbitrary order in several space dimensions. IMA Journal of Numerical Analysis, 27(3) :593–615.

[Lorenz, 1955] Lorenz, E. N. (1955). Available potential energy and the maintenance of the general circulation. Tellus, 7(2) :157–167.

[Madec, 2008] Madec, G. (2008). NEMO ocean engine. Note du Pole de modélisation, Institut Pierre Simon Laplace (IPSL), France.

[Marchesiello et al., 2011] Marchesiello, P., Capet, X., Mendes, C., and Kennan, S. C. (2011). Submesoscale dynamics in tropical instability waves. Ocean Modelling, 39(1-2) :31–46.

[Marchesiello et al., 2009] Marchesiello, P., Debreu, L., and Couvelard, X. (2009). Spurious dyapicnal mixing in terrain-following coordinates models : The problem and a solution. Ocean Modelling, 26 :156–169.

[Margules, 1903] Margules, M. (1903). Über die energie des stürme. Jahrb. Zentralanst. Meteorol. Wien, 40 :1–26.

[Marshall et al., 1997] Marshall, J., Hill, C., Perelman, L., and Adcroft, A. (1997). Hydrostatic, quasi-hydrostatic, and nonhydrostatic ocean modeling. Journal of Geophysical Research, 102(C3) :573–572.

[Mathieu and Deleersnijder, 1998] Mathieu, P.-P. and Deleersnijder, E. (1998). What is wrong with isopycnal diffusion in world ocean models. Applied Mathematical Modelling, 22 :367–378.

[Munk and Wunsh, 1998] Munk, W. and Wunsh, C. (1998). Abysaal recipes ii : energetics of tidal and wind mixing. Deep Sea Research.

[Nadiga et al., 1997] Nadiga, B., Hecht, M., Margolin, L., and Smolarkiewicz, P. (1997). On simulating flows with multiple time scales using a method of averages. Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 9(3-4) :281–292.

[Nycander, 2010] Nycander, J. (2010). Energy conversion, mixing energy and neutral surfaces with a nonlinear equation of state. Journal of Physical Oceanography.

[Redi, 1982] Redi, M. H. (1982). Oceanic isopycnal mixing by coordinate rotation. Journal of Physical Oceanography.

[Roberts and Marshall, 1998] Roberts, M. and Marshall, D. (1998). Do we require adiabatic dissipation schemes in eddy-resolving ocean models ? Journal of Physical Oceanography, 28 :2050–2063.

[Schär and Smolarkiewicz, 1996] Schär, C. and Smolarkiewicz, P. K. (1996). A synchronous and iterative flux-correction formalism for coupled transport equations. Journal of Computational Physics, 128(1) :101 – 120.

[Sescu et al., 2010] Sescu, A., Afjeh, A., Hixon, R., and Sescu, C. (2010). Conditionally stable multidimensional schemes for advective equations. Journal of Scientific Computing, 42(1) :96–117.

[Shchepetkin and McWilliams, 2005] Shchepetkin, A. F. and McWilliams, J. C. (2005). The regional oceanic modeling system (roms) : a split-explicit, free-surface, topography-following-coordinate oceanic model. Ocean Modelling.

[Shchepetkin and McWilliams, 2009] Shchepetkin, A. F. and McWilliams, J. C. (2009). Computational kernel algorithms for fine-scale, multi-process, long-time oceanic simulations. In Handbook of Numerical Analysis : Computational Methods for the Atmosphere and Oceans, volume 119.

[Shukla and Giri, 2014] Shukla, R. K. and Giri, P. (2014). Isotropic finite volume discretization (in press). Journal of Computational Physics.

[Skamarock, 2004] Skamarock, W. C. (2004). Evaluating mesoscale nwp models using kinetic energy spectra. Monthly Weather Review, 132(12) :3019–3032.

[Skamarock and Klemp, 1991] Skamarock, W. C. and Klemp, J. B. (1991). The stability of time-split numerical methods for the hydrostatic and nonhydrostatic elastic equations. Monthly Weather Review.

[Suresh and Huynh, 1997] Suresh, A. and Huynh, H. (1997). Accurate monotonicity-preserving schemes with runge-kutta time stepping. J. Comput. Phys., 136(1) :83 – 99.

[Tailleux, 2013a] Tailleux, R. (2013a). Available potential energy and exergy in stratified fluids. Annual Reviews of Fluid Mechanics, 45 :35–58.

[Tailleux, 2013b] Tailleux, R. (2013b). Available potential energy density for a multicomponent boussinesq fluid with arbitrary nonlinear equation of state. Journal of Fluid Mechanics, 735 :499–518.

[Tan et al., 2012] Tan, S., Wang, C., Shu, C., Ning, J., and Vilar, F. (2012). Efficient implementation of high order inverse lax–wendroff boundary treatment for conservation laws. Journal of Computational Physics, 231(6).

[Thuburn, 2006] Thuburn, J. (2006). Vertical discretizations giving optimal representation of normal modes : Sensitivity to the form of the pressure-gradient term. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 132(621) :2809–2825.

[Vallis, 2006] Vallis, G. K. (2006). Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics : Fondamentals and Large-Scale Circulation. Cambridge.

[Venaille et al., 2011] Venaille, A., Vallis, G., and Smith, K. (2011). Baroclinic turbulence in the ocean : Analysis with primitive equation and quasigeostrophic simulations. Journal of Physical Oceanography, 41(9) :1605–1623.

[Veronis, 1975] Veronis, G. (1975). The role of models in tracer studies numerical models of ocean circulation. In Numerical models of ocean circulation, number 133-146.

[Vilar and Shu, 2014] Vilar, F. and Shu, C. (2014). Development and stability analysis of the inverse lax-wendroff boundary treatment for central compact schemes. ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis.

[White et al., 2009] White, L., Adcroft, A., and Hallberg, R. (2009). High-order regridding-remapping schemes for continuous isopycnal and generalized coorfinates in ocean models. Journal of Computational Physics, 228(23).

[Winters et al., 1995] Winters, K. B., Lombard, P. N., Riley, J. J., and D'Asaro, E. A. (1995). Available potential energy and mixing in density-stratified fluids. Journal of Fluid Mechanics, 289 :115–128.

[Wunsh and Ferrari, 2004] Wunsh, C. and Ferrari, R. (2004). Vertical mixing, energy, and the general circulation of the oceans. Annual Reviews of Fluid Mechanics.

[Zalesak, 1979] Zalesak, S. T. (1979). Fully multidimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. Journal of Computational Physics, 31 :335–362.

[Zalesak, 2005] Zalesak, S. T. (2005). The design of flux-corrected transport (fct) algorithms for structured grids. In Kuzmin, D. D., Löhner, P. R., and Turek, P. S., editors, Flux-Corrected Transport : Principes, Algorithms, and Applications, pages 29–78. Scientific Computation.

Mots-clés : circulation océanique, modélisation numérique, ondes de gravité, splitting barotrope/barocline, schémas d'advection, diffusion diapycnale, schémas multidimensionnels.

Résumé : Les modèles numériques d'océans régionaux tridimensionnels sont basés sur la solution des équations primitives et utilisent pour la plupart des méthodes de résolution eulérienne de type différences finies sur des grilles décalées. Ces modèles doivent représenter fidèlement les transports et transferts d'énergie. L'amélioration de ces modèles numériques exige (i) l'identification des processus prépondérants, notamment en terme de dissipation, dans ces transferts et (ii) la construction de méthodes numériques respectant un certain nombre d'équilibres. La première partie du travail se concentre sur la propagation des ondes externes et internes de gravité. Nous nous intéresserons en premier lieu à la stabilité de la séparation en mode rapide (barotrope) et lents (baroclines) et montrons qu'elle peut être améliorée en levant certaines hypothèses traditionnellement effectuées. Dans un second temps, nous étudions l'impact de la discrétisation (ordre des schémas, grilles décalées ou non) sur la propagation des ondes internes de gravité provenant du couplage vitesse pression. Une décomposition en modes verticaux nous permet également de proposer un schéma espace temps très efficace. La seconde partie étudie les schémas d'advection de quantité de mouvement et de traceurs, tout particulièrement dans l'objectif d'une réduction de la diffusion diapycnale (diffusion dans les directions orthogonales aux couches de densité constante). Ce travail nous amène tout d'abord à porter notre attention sur les schémas d'advection verticaux souvent négligés au regard de la dimension horizontale. Les bonnes propriétés d'un schéma compact (et de ses variantes espace temps et monotones) sont mises en avant. Enfin nous analysons le comportement multidimensionnel de ces schémas d'advection.

Key words : oceanic circulation, numerical modeling, gravity waves, barotropic/baroclinic splitting, advection schemes, diapycnal diffusion, multidimensional schemes.

Abstract : Three-dimensional regional ocean numerical models are based on the primitive equations solution. Most of them use finite differences methods on staggered grids. These models have to accurately represent transports and energy transfers. Improving these numerical models therefore requires (i) the identification of predominant processes, particularly in terms of dissipation and (ii) the derivation of numerical methods satisfying a number of equilibrium. The first part of the work focuses on the propagation of external and internal gravity waves. We first focus on the stability of the separation in fast (barotropic) mode and slow (baroclinic) modes and show that it can be improved by removing some usual. In a second step, we study the impact of the discretization (schemes orders, grid staggering) on the propagation of internal gravity waves coming from the velocity pressure coupling. A decomposition into vertical modes also allows us to introduce a highly effective space-time scheme. The second part deals with the numerical advection schemes of momentum and tracers, especially with the aim of reducing the diapycnal diffusion (diffusion in the direction orthogonal to constant density layers). This work leads us first to focus our attention on the vertical advection schemes often neglected compare with the horizontal dimension. The good properties of a compact scheme (and its space-time and monotone variants) are highlighted. Finally we analyze the multidimensional behavior of these advection schemes.