INJECTION D'UN COULIS DE MICROCIMENT A TRAVERS UN MILIEU POREUX : MODELISATION ET EXPERIMENTATION

Thèse N° 2433 (2001)

PRESENTEE AU DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL

ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES TECHNIQUES

PAR

Fatiha BOUCHELAGHEM
ENS Cachan
Originaire de Paris (FR)

Acceptée sur proposition du jury :
Prof. L.Vulliet, directeur de thèse
Prof. O.Coussy, rapporteur
Prof. F.Darve, rapporteur
Prof. F.Descoeudres, rapporteur
Prof. H.Dumontet, rapporteur
Prof. W.Kinzelbach, rapporteur
Prof. M.Pastor, rapporteur

Lausanne, EPFL
2001

Table des matières

1 INTRODUCTION **22**

1.1 Modélisation du processus d'injection 22

1.2 Phénomène de filtration 24

1.3 Principes retenus pour la modélisation 25

1.4 Programme expérimental 28

1.5 Implémentation numérique 29

1.6 Apport de la présente étude 30

2 TRANSPORT ET ECOULEMENT EN MILIEU POREUX DEFORMABLE **31**

2.1 Introduction 31

2.2 Transport par fluides miscibles 32

2.3 Modèles mathématiques de transport par fluides miscibles et d'écoulement 35

2.3.1 Théorie statistique 36

2.3.2 Modèle de dispersion de Bear 37

2.4 Milieu déformable 39

2.5 Filtration 41

2.5.1 Mécanismes de filtration 42

2.5.2 Modélisation de la filtration 43

2.6 Conclusion 46

3 ASPECTS PHYSIQUES. DEVELOPPEMENT DU MODELE CONCEPTUEL **48**

3.1 Introduction 48

3.2 Mise en évidence de la miscibilité 48

3.2.1 Mise en évidence visuelle : existence d'une zone de transition, absence de frontière nette 49

3.2.2 Un calcul simple 51

3.2.3 Choix de la représentation du système 51
3.2.4 Filtration. Mise en évidence de la filtration par des essais préliminaires 54
3.3 Bilan et orientation de la recherche 61

4 MODELE MATHEMATIQUE DE PROPAGATION D'UN COULIS MISCIBLE A TRAVERS UN MILIEU POREUX SATURE DEFORMABLE 62

4.1 Introduction 62
4.2 Hypothèses 63
4.3 Loi de bilan microscopique 64
4.4 Règles de moyenne 65
4.4.1 Moyenne d'une dérivée temporelle 67
4.4.2 Moyenne d'une dérivée spatiale 68
4.4.3 Moyenne d'une fonction f telle que $\nabla^2 f = 0$ 69
4.5 Loi de bilan macroscopique 70
4.6 Lois constitutives 71
4.6.1 Flux diffusif. Loi de Fick. 72
4.6.2 Terme de surface α_{sf}. 74
4.6.3 Loi de Darcy 79
4.6.4 Flux dispersif. Tenseur de dispersion. 80
4.6.5 Lois de filtration (λ, perméabilité) 82
4.6.6 Equation d'état de la phase fluide 86
4.6.7 Viscosité de la phase fluide 87
4.7 Hypothèses de travail 88
4.8 Système final (Equations de champ) 89
4.8.1 Equation de porosité 90
4.8.2 Equation du coulis filtré 90
4.8.3 Equation d'écoulement 91
4.8.4 Equation de transport 91
4.8.5 Equation d'équilibre 93
4.9 Conditions de bord 95
4.9.1 Conditions initiales 95
4.9.2 Conditions aux limites 95
4.10 Conclusion. 96

5 DISCRETISATION NUMERIQUE **98**

5.1 Introduction 98

5.2 Problèmes liés à la discrétisation de l'équation de transport 98

5.2.1 Procédés d'obtention d'approximations décentrées 100

5.2.2 Streamline Upwind Petrov Galerkin Method (SUPG) 102

5.3 Calcul des contraintes 107

5.4 Résolution du système global 111

5.5 Conclusion 115

6 IMPLEMENTATION DANS LA LIBRAIRIE AUX ELEMENTS FINIS Diffpack **116**

6.1 Introduction. Motivation pour le concept objet 116

6.2 Implémentation dans Diffpack 119

6.2.1 Présentation de Diffpack 119

6.2.2 Principes de programmation dans Diffpack 119

6.3 Architecture du logiciel 120

6.3.1 Cahier des charges et description des classes implémentées 121

6.3.2 Synthèse des classes 129

6.4 Validation numérique 134

6.4.1 Solutions analytiques continues 134

6.4.2 Problème couplé 144

6.5 Conclusion 151

7 ASPECTS EXPERIMENTAUX **152**

7.1 Introduction 152

7.2 Matériaux 152

7.2.1 Sable 152

7.2.2 Coulis de micro-ciment 153

7.3 Description des essais sur colonne unidimensionnelle 154

7.3.1 Essais sur petite colonne 154

7.3.2 Essais sur colonne longue 155

7.4 Identification du taux de filtration 156

7.5 Mesure du champ de concentration 158

7.5.1 Mesures de résistivité électrique 158

7.5.2 Absorption par rayonnement gamma 160

7.5.3 Analyse d'images 160

7.6 Essais de dispersion sur colonne unidimensionnelle 160
7.6.1 Principe : solution analytique unidimensionnelle (Ogaka, 1961) et analyse d'images 163
7.6.2 Calcul de la constante de dispersion 167
7.6.3 Discussion des résultats 169
7.7 Conclusion 179

8 VALIDATION DU MODELE - DISCUSSION DES RESULTATS 181
8.1 Introduction 181
8.2 Essais unidimensionnels avec filtration 182
8.2.1 Etude numérique et comparaison entre modèles numériques 185
8.2.2 Simulations numériques avec le modèle $(\lambda + \mu)$ et comparaison aux expériences . . 188
8.3 Essais unidimensionnels : cas sans filtration 192
8.4 Essai en grandeur réelle : essai en cuve 199
8.4.1 Introduction 199
8.4.2 Description de l'essai en cuve cylindrique 200
8.4.3 Instrumentation 201
8.4.4 Discrétisation élément fini 202
8.4.5 Injection à l'eau 203
8.4.6 Injection au coulis 205
8.4.7 Modélisation numérique avec une complexité physique croissante 209
8.4.8 Comparaison entre le modèle $(\lambda + \mu)$ et les expériences 215
8.5 Cas réel 229
8.5.1 Calcul élastique 232
8.5.2 Calcul plastique 233
8.6 Conclusion 240

9 CONCLUSION GENERALE 242

10 ANNEXES 247
10.1 Implémentation dans Diffpack 257
10.1.1 Fonctions membres dans la classe simulateur 257
10.1.2 Variables membres dans la classe simulateur 258
10.1.3 Création d'une instance particulière d'une classe appartenant à une hiérarchie . . . 259
10.1.4 Fichiers d'inclusion (Définition des classes implémentées) 259
10.2 Solutions analytiques 294

10.2.1 Equation de transport 294
10.2.2 Equation d'équilibre 332
10.3 Mesures de résistivité 346
10.4 Essais sur colonne unidimensionnelle 346
10.4.1 Essais de perméabilité (mise en évidence de la filtration) 346
10.4.2 Essais d'injection sur colonne unidimensionnelle 346
10.4.3 Résultats d'essais 1D : distribution des pressions 346
10.4.4 Résultats du traitement d'images 346
10.5 Essai en cuve 353
10.5.1 Instrumentation 353
10.5.2 Conditions aux limites et déroulement de l'essai 353

Liste des figures

1-1 Injection des sols. 23

3-1 Injection d'un coulis de ciment micro-fin dans une colonne remplie de sable du Léman. (a) : sable sec. (b) : saturation à l'eau. (c) : injection au coulis. 50

3-2 Détermination expérimentale de la position du front. 52

3-3 Débit sortant en fonction du temps pour les trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c). 57

3-4 Variation de perméabilité intrinsèque au cours des trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c). 58

3-5 Porosité calculée (loi de Kozeny-Carman) en fonction du temps au cours des trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c). 59

4-1 Section plane du V.E.R. 66

5-1 Algorithme prédicteur-correcteur élasto-plastique. 112

6-1 Couplage direct entre équations primaires. 121

6-2 Couplage entre inconnues primaires et lois constitutives. La résolution des équations de champ requière la donnée des coefficients constitutifs. 122

6-3 Couplage entre lois constitutives et variables primaires. Les coefficients constitutifs dépendent des variables primaires. 123

6-4 Exemple de hiérarchie de solveur individuel : CdEquation. 129

6-5 Gestion des relations communes par CommonRel. 130

6-6 Gestion des lois d'état et des coefficients communs : CommonRel. 130

6-7 Hiérarchies de classes : Permeability, Filtration, InjectionFlux, Porosity. 131

6-8 Hiérarchie de classes : Density, Viscosity. 132

6-9 Classe manager pour la résolution du système global: Coupling. 132
6-10 Traitement des solutions analytiques. 133
6-11 Solutions analytiques de l'équation de transport. 133
6-12 Solution d'Advonin à $t = 10\ s$, $Pe_{él} = 100$. Comparaison entre solution analytique et plusieurs solutions numériques. 137
6-13 Solution d'Advonin à $t = 10\ s$, $Pe_{él} = \infty$. Comparaison entre solution analytique et plusieurs solutions numériques. 138
6-14 Solutions d'Advonin pour $Pe_{él} = \infty$, $Cr_{él} = 0.5$ à $t = 5\ s$. 141
6-15 Solutions d'Advonin pour $Pe_{él} = \infty$, $Cr_{él} = 0.5$ à $t = 10\ s$. 141
6-16 Injection unidimensionnelle. Evolution de la pression d'injection au cours du temps. . . . 146
6-17 Injection unidimensionnelle. Evolution du front. 146
6-18 Injection unidimensionnelle. Profil de pression entre $t = 1080\ s$ et $t = 2640\ s$. 148
6-19 Injection sphérique, résultats numériques du modèle ADF et de Honma. Positions du front aux instants $t = 630$, 2190, et 3750 s. 149
6-20 Injection sphérique. Evolution de la pression d'injection. 150

7-1 Dispositif d'acquisition des essais sur colonne unidimensionnelle. 154
7-2 Evolution de λ_{p2} ($\left[kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}\right]^{-1}$) en fonction du temps. 157
7-3 Profil de concentration en fonction de la valeur de la constante de dispersion longitudinale a_L. 164
7-4 Position du front en fonction de la valeur de la constante de dispersion a_L. 164
7-5 Variations typiques de a_L au cours d'un essai. 171
7-6 Répartition des valeurs de a_L. 172
7-7 Répartition des valeurs de $a_{L_{palier}}$ avec palier. 174
7-8 Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de V_f. 175
7-9 Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de la porosité. 176
7-10 Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de la perméabilité. 177

8-1 Evolution de la pression interstitielle d'après les positions des capteurs, résultats expérimentaux et modèle $(\lambda + \mu)$ 183
8-2 Profils de pression à $t = 100\ s$ et $t = 600\ s$, résultats expérimentaux et numériques. Pour le modèle (w), le profil de pression est stationnaire. 184
8-3 Evolution de la pression interstitielle pour différents modèles numériques. 186
8-4 Comparaison des pressions interstitielles expérimentales et numériques. 188
8-5 Evolution de la concentration 191

8-6 Distribution des concentrations. Comparaison entre modèles numériques 192
8-7 Distribution des déplacements le long de la colonne. 195
8-8 Distribution des pressions expérimentales et numériques. 196
8-9 Comparaison entre solution numérique ($a_L = 2 \cdot 10^{-2}\ m$) et résultats expérimentaux. Seules les positions expérimentales du front sont disponibles. 197
8-10 Comparaison entre solution numérique ($a_L = 3 \cdot 10^{-2}\ m$) et résultats expérimentaux. Seules les positions expérimentales du front sont disponibles. 198
8-11 Evolution de la concentration aux instants successifs $t = 9$, 45, 90, 144, 180, et 243 s. . . . 198
8-12 Schéma d'ensemble de l'essai en cuve. 200
8-13 Profils de pression de l'injection à l'eau. 204
8-14 Profil de pression initial de l'injection au coulis. 206
8-15 Profils de pression expérimentaux et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) à $t = 30$, 380, et 1480 s. 207
8-16 Profils de pression expérimentaux et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) à $t = 30$, 380 s, et 1480 s. 208
8-17 Distribution des pressions expérimentales et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) dans le massif. 209
8-18 Distribution des pressions numériques dans le massif. 211
8-19 Evolution des pressions. Comparaison entre modèles numériques et pression mesurée en $r = 0.045\ m$. 212
8-20 Distribution des concentrations dans le massif. Comparaison entre modèles numériques (μ) et $(\lambda + \mu)$. 214
8-21 Champ de pression interstitielle à $t = 30\ s$. 218
8-22 Champ de pression interstitielle à $t = 630\ s$. 219
8-23 Champ de pression interstitielle à $t = 1530\ s$. 220
8-24 Champ de surpression interstitielle à $t = 30\ s$. 221
8-25 Champ de surpression interstitielle à $t = 1530\ s$. 222
8-26 Déplacements expérimentaux et numériques en $r = 0.2\ m$. Comparaison entre injection à l'eau et au coulis 223
8-27 Distributions des déplacements expérimentaux et numériques dans le massif. 224
8-28 Evolution du profil de concentration. Comparaison entre modèles numériques (μ) et $(\lambda + \mu)$. 225
8-29 Bulbe solidifié. 227
8-30 Champ de concentration à $t = 2500\ s$. 228
8-31 Champ de concentration à $t = 300\ s$. 229
8-32 Champ de concentration à $t = 900\ s$. 230
8-33 Champ de concentration à $t = 1500\ s$. 231
8-34 Soulèvement lié à l'injection. Comparaison entre résultats numériques. 233

8-35 Champ de concentration à $t = 500\ s$. 234
8-36 Champ de concentration à $t = 1000\ s$. 234
8-37 Champ de concentration à $t = 1500\ s$. 235
8-38 Champ de surpression interstitielle à $t = 500\ s$. 235
8-39 Champ de surpression interstitielle à $t = 1500\ s$. 236
8-40 Déplacement vertical à la fin de l'injection ($t = 1500\ s$). 236
8-41 Plastification du massif. 237
8-42 Champ de surpression interstitielle à $t = 100\ s$. 237
8-43 Champ de surpression interstitielle à $t = 1500\ s$. 238
8-44 Champ de concentration à $t = 100\ s$. 238
8-45 Champ de concentration à $t = 500\ s$. 239
8-46 Champ de concentration à $t = 1500\ s$. 239

10-1 CdAs. Solution SUPG à $t = 50\ s$. 295
10-2 CdAs. Solution SUPG à $t = 100\ s$. 295
10-3 CdAs. Solution SUPG suivant x sur la section $y = 0.6\ m$, $z = 0.4\ m$. 296
10-4 Advection pure. Solutions pour un nombre de Peclet infini. 298
10-5 Advection pure. Solution pour $Pe_{él} = 2$. 299
10-6 Définition du problème. Condition aux limites naturelle en $x = 1$. 299
10-7 SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 22.5°$. 301
10-8 SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 22.5°$. 301
10-9 SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 45°$. 302
10-10SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 45°$ 302
10-11SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 67.5°$ 303
10-12SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 67.5°$ 304
10-13Définition du problème. Condition aux limites essentielle en $x = 1$. 305
10-14SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 22.5$. 305
10-15SkewAdvection. Condition essentielle. Solution de Galerkin pour $\theta = 22.5°$. 306
10-16SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 45°$. 307
10-17SkewAdvection. Condition essentielle. Solution de Galerkin pour $\theta = 45°$. 307
10-18SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 67.5°$. 308
10-19SkewAdvection. Solution de Galerkin pour $\theta = 67.5°$. 308
10-20Advection d'une fonction sinusoïdale dans un champ d'écoulement tournant. Définition du problème. 309
10-21Advection dans un champ d'écoulement tournant. Solution de la méthode SUPG à $t = 1\ s$.310

10-22Solution de la méthode SUPG à $t = 5\ s$. 310
10-23Solution de la méthode SUPG à $t = 20\ s$. 311
10-24Vue tridimensionnelle de la solution à $t = 20\ s$. 311
10-25Rotation d'un cône dans un champ d'écoulement tournant. Définition du problème. 312
10-26Rotating d'un cône. Vue tridimensionnelle de la solution à $t = 0.05\ s$. 313
10-27Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 0.2\ s$. L'amplitude maximale du cône est significativement réduite. 314
10-28Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 3\ s$. 315
10-29Solution SUPG au bout d'un tour complet ($t = 6.4\ s$). 315
10-30Vue tridimensionnelle de la solution SUPG au bout d'un tour complet. L'amplitude maximale s'élève à 13.9 % de l'amplitude de fonction initiale. Les erreurs de phase sont négligeables. 316
10-31Solution SUPG avec $\theta = 0.5$ au bout d'un tour complet. Les erreurs de phase sont plus marquées que pour $\theta = 1$. 317
10-32Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 6.4\ s$ ($\theta = 0.5$). L'amplitude finale s'élève à 31.6 % de l'amplitude initiale, ce qui constitue une amélioration notable par rapport au cas $\theta = 1$. 318
10-33Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites naturelles. Solution SUPG au bout de 30 pas de temps. 320
10-34Solution SUPG au bout de 40 pas de temps. 321
10-35Solution SUPG au bout de 100 pas de temps. 321
10-36Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites naturelle. Solution de Galerkin au bout de 30 pas de temps 322
10-37Solution de Galerkin au bout de 100 pas de temps. 322
10-38Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites essentielle. Solution SUPG au bout de 30 pas de temps. 323
10-39Solution SUPG au bout de 40 pas de temps. 324
10-40Solution SUPG au bout de 100 pas de temps. 324
10-41Solution de Galerkin à $t = 0.5\ s$. 325
10-42Solution de Galerkin à t=1.5 s. Le cône initial est refléchi par rapport à sa position initiale.326
10-43Solution de Galerkin à $t = 2\ s$. Le cône repart vers la droite. 326
10-44Solution de Galerkin à $t = 3\ s$. Aucune réduction de l'amplitude initiale n'est constatée. . 327
10-45Solution de Galerkin à t=6 s. La solution diverge complèment. 327
10-46TransientAdvection. Solution à $t = 0$, 50, 100, 150 , 200 , et 250 s. 328

10-47Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s. 329
10-48Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s. 330
10-49Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s. 330
10-50Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s. 331
10-51Conditions aux limites du problème et maillage. 332
10-52Déplacement vertical en mètres à $t = 300$ s. 333
10-53Déformations à $t = 300$ s. 333
10-54Contraintes à $t = 300$ s. 334
10-55Définition du problème (conditions aux limites, maillage). 335
10-56Déplacement vertical (m) à $t = 300$ s. 335
10-57Déformations à $t = 300$ s. 336
10-58Contraintes à $t = 300$ s. 336
10-59Définition du problème (maillage, conditions aux limites). 337
10-60Déplacement vertical (m) à $t = 300$ s. 338
10-61Déformations à $t = 300$ s. 339
10-62Contraintes à $t = 300$ s. 339
10-63Définition et conditions aux limites du problème. 340
10-64Déplacement vertical (m) à $t = 300$ s. 341
10-65Déformations verticales à $t = 300$ s. 342
10-66Contraintes horizontales en Pa à $t = 300$ s. 343
10-67Contraintes verticales en Pa à $t = 300$ s. 344
10-68Contraintes à $t = 300$ s. 345
10-69Conductivité du coulis pur en fonction du rapport $\frac{C}{E}$ 346
10-70Conductivité du mélange coulis et sable. 347
10-71Mesure de conductivité dans la colonne. 347
10-72Comparaison entre front détecté par mesures de conductivité et par analyse d'images. . . 348
10-73Dispositif d'essai sur petite colonne. 348
10-74Colonne longue. Position des capteurs le long de la colonne. 349
10-75Capteur de pression interstitielle (Keller série 10). 349
10-76Essai d'injection à l'eau. Vue d'ensemble de la colonne. Le front d'eau est nettement visible.350
10-77Saturation puis injection à l'eau. 350
10-78Injection au coulis 351
10-79Détermination du front. Tableau de bord du programme d'acquisition LabView. 351
10-80Analyse d'images. Algorithme du gradient lors d'une injection à l'eau. 352

10-81Analyse d'images. Algorithmes du gradient et du seuil. 352
10-82Instrumentation de la cuve. Grandeurs mesurées. 353
10-83Intrumentation de la cuve. Positions des capteurs. 354
10-84Géotextile (conditions aux limites hydrostatiques) et tube d'injection (débit et concentration imposés). 354
10-85Plaque de chargement en acier et vérin hydraulique (effort mécanique). 355
10-86Dispositif d'injection. 355
10-87Déroulement de l'essai en cuve. 356
10-88Système d'acquisition. 357
10-89Démontage de la cuve. 357
10-90Granulométrie du sable du Léman et du micro-ciment Spinor A12. 358

VERSION ABREGEE

Afin de décrire le mécanisme fondamental de l'injection d'un fluide miscible à travers un milieu poreux saturé déformable, un modèle mathématique général est proposé, qui tient compte des couplages existants entre l'analyse de l'écoulement fluide, le transport de masse du coulis, et la déformation du squelette solide, afin d'aboutir à une prédiction réaliste de la distribution du coulis dans le milieu poreux. Une étude complète des interactions entre grandeurs macroscopiques au cours de l'injection (pression fluide, concentration, déplacement du squelette solide, porosité, densité de dépôt) a été effectuée.

Le développement du modèle prédictif de comportement du milieu poreux lors de l'injection du coulis miscible, sous l'effet de la convection, de la dilution de la solution de coulis avec l'eau interstitielle initialement présente, et de la filtration en surface du squelette solide, est détaillé. Les hypothèses du modèle sont passées en revue et discutées, à partir d'expériences préliminaires simples. Le milieu étudié est binaire, il est constitué d'un squelette solide déformable, et d'une phase fluide aux constituants miscibles et compressibles : le coulis supposé homogène, et l'eau interstitielle initialement présente.

L'effet de la filtration sur les modifications de la matrice poreuse est inclus dans le modèle. Une procédure de moyenne est employée pour intégrer la filtration dans les équations de continuité macroscopiques à partir de leur contreparties microscopiques. Au cours de l'établissement du modèle, l'accent est mis sur les termes d'interface fluide-solide et leur importance physique pour la traduction des effets de dépôt. Un terme de surface (terme source) apparaît dans les équations de continuité macroscopiques des différents constituants solides et fluides, qui provient de la filtration. Les lois constitutives, telles que la loi de Fick pour le transport diffusif de masse, le tenseur de dispersion hydrodynamique exprimant la miscibilité du coulis à l'eau interstitielle au cours de sa propagation en milieu poreux, sont modifiées en tenant compte des effets de filtration.

En vue d'applications pratiques, et en l'absence de données de filtration, une approximation linéaire est retenue pour exprimer le terme de dépôt, tandis que le calcul de la réduction de perméabilité s'appuie sur une généralisation de la loi de Kozeny-Carman, employée dans de nombreux modèles de filtration. Toutefois l'emploi de lois de filtration simplifiées dans les applications considérées ne restreint nullement la généralité du modèle développé.

Les variables d'état choisies pour décrire l'évolution du système matériel étudié sont les suivantes : champ de déplacement solide, champ de pression fluide, champ de concentration du coulis dans la phase fluide, champ de densité du coulis filtré, champ de porosité macroscopique.

La discrétisation des équations s'effectue par la méthode des éléments finis à l'aide d'une formulation classique de Galerkin pour l'ensemble des équations, excepté l'équation de transport. L'équation de transport, dominée par la convection, appelle une discrétisation particulière. La méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) retenue permet de s'affranchir des effets d'orientation de maillage et

des oscillations, tout en minimisant la dispersion numérique. La résolution des équations est séquentielle. L'implémentation dans un cadre orienté objet est ensuite brièvement décrite.

Deux types d'essais ont été entrepris. Des essais d'identification sur colonne unidimensionnelle ont d'abord été effectués pour estimer le taux de filtration, et caractériser la dispersion longitudinale du fluide injecté dans le massif poreux. Dans un second temps, la validation du modèle s'appuie sur des essais unidimensionnels et tridimensionnels en laboratoire. Ces essais se sont avérés particulièrement utiles au cours du développement du modèle, les résultats obtenus mettent en avant des couplages particuliers entre écoulement, transport et déformations du squelette solide, et permettent une première évaluation critique du modèle.

Pour finir, une confrontation du modèle à un cas réel d'injection est proposée, il s'agit d'une injection visant à consolider un sol avant excavation. Les résultats obtenus constituent une première étape en vue de la validation du modèle prédictif développé sur une base réaliste.

ABSTRACT

In order to describe the basic phenomenon of miscible grout injection in a saturated and deformable porous medium, a general mathematical model is proposed, which accounts for the existing coupling between the fluid flow analysis, the miscible grout transport, and the solid skeleton deformation, leading to a realistic prediction of the injected zone.

The development of a predictive model of the behaviour of the grouted medium, under grout convection, grout dilution with interstitial water and filtration onto the solid skeleton's surface, is detailed. Model assumptions are reviewed and discussed first, on basis of some simple preliminary experiments. During the model establishment, emphasis is laid on surface terms and their physical relevance in expressing adsorption effects. Constitutive laws, such as Fick's law for diffusive mass transport, and the hydrodynamic dispersion tensor dealing with miscibility between grout and interstitial water during grout propagation, are modified by considering filtration effects. A new surface term appears in the equations expressing the mass balance of the constituents, as a consequence of filtration.

In lack of filtration data, a first order approximation is retained for the deposition rate, while the permeability reduction relies on a generalization of the Kozeny-Carman equation, extensively used in filtration processes. Anyway, the use of such empirical laws for practical purposes, does not restrict the generality of the proposed model.

The chosen variables to describe the state of the system are the following ones : the solid displacement field, the fluid pressure field, the grout concentration field within the fluid phase, the adsorbed grout density field, the macroscopic porosity field.

The discretization of the equations is performed by the Finite Element Method and a classical Galerkin formulation for all the equations, except for the transport equation. The transport equation, convection dominated, calls for a specific discretization procedure. The Streamline Upwind Petrov Galerkin procedure retained allows eliminating grid sensitivity effects and oscillations, while minimizing the numerical dispersion. The solution procedure for the system of equations is sequential. The implementation on an object-oriented basis is briefly described.

Two kinds of laboratory experiments were undertaken. Identification experiments were first intended for estimating the initial filtration rate and characterising the longitudinal dispersion of the injected grout within the porous sample. Next, the comparison between the numerical solutions and the experimental results, obtained during one-dimensional and three-dimensional experiments, is essential to validate the model from a phenomenological standpoint. Such tests proved useful during the model development, the obtained results evidence the very special coupling between fluid flow, grout transport and solid skeleton's deformations, and lead to a first critical evaluation of the model.

To end with, the performances of the model are assessed for a real case injection study, consisting in

an underground injection prior to excavation.. The obtained results constitute a first step towards the validation of the model on a realistic basis.

NOTATIONS

Indices latins

$a_{fL}^{m^\gamma} = a_L$ constante de dispersion longitudinale

$a_{fT}^{m^\gamma} = a_T$ constante de dispersion transversale

c, ϕ paramètres de Mohr-Coulomb

c variable de concentration (solutions analytiques de l'équation de transport, identification de a_L)

$\widetilde{c}$ approximation élément fini discrète de $\overline{\rho^g}^f$

C_f facteur de proportionnalité

$Cr_{él}$ nombre de Courant élémentaire

D^γ coefficient de diffusion moléculaire de la composante γ dans la phase fluide

$D^{groutw} = D^{gw}$ coefficent de diffusion moléculaire du coulis dans la phase fluide

$D^{*\gamma}$ coefficient de diffusion macroscopique

$D^{*groutw}$ coefficient de diffusion macroscopique du coulis dans la phase fluide

$\mathbf{D}_f^{m^\gamma}$ tenseur de dispersion hydrodynamique de la masse de la composante γ

D_L dispersion longitudinale

e densité d'une quantité extensive E d'une phase α, $\alpha = s, f$

$\overline{e} = \frac{1}{U_0}\int_{U_0} e dU$ densité macroscopique de E par unité de volume du V.E.R.

$\overline{e}^\alpha = \frac{1}{U_{0\alpha}}\int_{U_0} e dU = \theta_\alpha \overline{e}$ densité macroscopique de E par unité de volume de la phase α

$\overline{e}^\alpha \overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ flux d'advection de la quantité extensive E au sein de la phase

$\overline{\overset{o}{e}\overset{o}{\mathbf{V}}^E}^\alpha = \overline{(e - \overline{e}^\alpha)\left(\mathbf{V} - \overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha\right)}^\alpha$ flux dispersif macroscopique de la quantité extensive E dans la phase α.

Eff efficacité de récupération

E module d'Young

f phase fluide

$f(\sigma_{ij})$ critère de charge

$\mathbf{F}$ effort mécanique imposé

$\mathbf{g}$ accélération de la gravité

$\overline{\mathbf{j}^{Em}}^\alpha = \overline{e\left(\mathbf{V}^E - \mathbf{V}_\alpha^m\right)}^\alpha$ flux diffusif macroscopique de la quantité extensive E dans la phase

$\mathbf{j}^{EU} = e\left(\mathbf{V}^E - \mathbf{V}\right)$ flux diffusif

$\mathbf{j}^\gamma \equiv \mathbf{j}^{\gamma U} = \rho^\gamma\left(\mathbf{V}_f^{m^\gamma} - \mathbf{V}_f\right)$ flux diffusif microscopique d'une composante γ dans la phase fluide

J_1 premier invariant du tenseur des contraintes

J_{2D} second invariant du tenseur des contraintes

K perméabilité géométrique

k perméabilité intrinsèque

$\mathbf{M}$ vecteur macroscopique dépendant de la configuration de la surface S_{fs}

n porosité

n_v porosité effective

N_i fonctions de pondération de Galerkin

k_0 perméabilité du milieu poreux avant la filtration

n_0 est la porosité initiale

$\overline{p}^f$ pression interstitielle

$Pe_{él}$ nombre de Peclet élémentaire

$\mathbf{q}_r^m$ décharge spécifique relative

q_{imp} débit imposé

q_{cimp} débit imposé

s phase solide

S_{fs} aire totale de l'interface entre la phase fluide et la phase solide

$S_{\alpha\alpha}$ aire de la portion de surface S_0 limitant $\mathcal{U}_0$ qui possède une intersection avec la phase α, $\alpha = s, f$.

$S_{0\alpha} = S_{fs} + S_{\alpha\alpha}$, $\alpha = s, f$.

$S_0 = S_{ss} + S_{ff}$

$\mathbf{T}^*$ facteur de tortuosité

$\mathbf{u}$ vitesse d'interface sur $S_{\alpha\beta}$

$\mathbf{u}_s$ déplacement solide

U_{0f}^g volume partiel occupé par le coulis dans la phase fluide

U_{0f}^w volume partiel occupé par l'eau dans la phase fluide

$U_{f\longrightarrow s}^g$ volume partiel occupé par le coulis dans la phase solide

$U_{f\longrightarrow s}^w$ volume partiel occupé par l'eau dans la phase solide

$\mathbf{V}^E$ vitesse de la quantité extensive E d'une phase α

$\mathbf{V}$ vitesse moyenne volumique de la quantité extensive E d'une phase α

V_f vitesse de pore (hyp. de Dupuit-Forcheimer)

$n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)$ vitesse de Darcy (décharge spécifique relative)

$\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ vitesse macroscopique (moyenne massique) de la phase fluide

$\overline{\mathbf{V}_s^m}^s$ vitesse macroscopique (moyenne massique) de la phase solide

$\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ étant la vitesse moyenne massique macroscopique de la phase α, $\alpha = s, f$

$\mathbf{V}_f^{m\gamma}$vitesse de la composante γ dans la phase fluide

$\mathbf{V}_f$ vitesse microscopique de la phase fluide

$\left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|$ norme de la vitesse macroscopique du fluide

$\widetilde{W_i}$ fonctions de pondération SUPG

$\mathbf{x}_0$ centroïde de $\mathcal{U}_0$

$\mathbf{x}_{0S}$ centroïde de $\mathcal{U}_{0S}$

$\mathbf{x}_{0V}$ centroïde de $\mathcal{U}_{0V}$

$\mathcal{U}_0$ domaine spatial de volume U_0 d'un V.E.R.

$\mathcal{U}_{0S} \subset \mathcal{U}_o$ sous-domaine spatial de volume U_{0S} occupé par la matrice solide

$\mathcal{U}_{0V} = \mathcal{U}_{0f} \subset \mathcal{U}_o$ est le sous-domaine spatial de volume U_{0V} occupé par les vides

Indices grecs

α_{sf} terme de surface

α efficacité de la collision

α, k paramètres de Drucker-Prager

α_1, α_2, α_3 constantes empiriques

β_1, β_2, β_3 constantes empiriques

β_p coefficient de compressibilité pour la phase fluide à température et concentration constantes

β_{ρ^γ} coefficient de concentration

Γ^E taux de production interne de E (microscopique)

$\overline{\Gamma^E}^\alpha$ taux de production interne de E (macroscopique)

Δ_c distance caractéristique depuis les parois du solide à l'intérieur de la phase fluide dans $\mathcal{U}_0$

Δ_f rayon hydraulique

$d\varepsilon_{ij}$ incrément de déformations totales

$d\varepsilon^p_{ij}$ incrément de déformations plastiques

$d\varepsilon^e_{ij}$ incrément de déformations élastiques

η efficacité de récupération

$\theta_\alpha = \frac{U_{0\alpha}}{U_0}$ représente la fraction volumique occupée par la phase $\alpha, \alpha = s, f$

$\theta_f = n$ fraction volumique de la phase fluide

$\theta_s = 1 - n$ fraction volumique de la phase solide

λ_0 coefficient de filtration initial

λ taux de filtration

$\overline{\mu^w}^f$ viscosité macroscopique de l'eau

$\overline{\mu^g}^f$ viscosité macroscopique du coulis

$\overline{\mu}^f$ viscosité de la phase fluide

μ^γ gradient de potentiel chimique

ν coefficient de Poisson

$\boldsymbol{\nu}$ normale extérieure unitaire sur S

$\boldsymbol{\nu}_\alpha$, vecteur normal unité sur la surface d'interface fluide-solide $S_{\alpha\beta}$, positivement orienté depuis la phase α vers la phase β.

ρ densité microscopique de la phase fluide

ρ_s densité microscopique du squelette solide

ρ^γ concentration de la composante γ au sein de la phase fluide

ρ_f densité de la phase fluide par unité de volume de la phase fluide

$\rho_{f\longrightarrow s}$ densité de fludie adsorbé par unité de volume du squelette solide

$\rho^g = \frac{m_{grout}}{U_{0f}}$ densité massique du coulis au sein de la phase fluide

$\rho^w = \frac{m_{water}}{U_{0f}}$ densité massique de l'eau au sein de la phase fluide, par unité de volume de la phase fluide

$\rho^g_{f\longrightarrow s} = \frac{m_{grout}}{U_{0s}}$ densité de coulis adsorbé au sein de la phase solide, par unité de volume de la phase

$\rho^w_{f\longrightarrow s} = \frac{m_{water}}{U_{0s}}$ densité d'eau adsorbé au sein de la phase solide, par unité de volume de la phase

$\beta_f = \frac{1}{S_{fs}} \int_{S_{fs}} C_f dS$ coefficient caractéristique de la configuration microscopique de l'interface fluide-solide

$\widetilde{\rho^g}^{sf}$ valeur moyenne de ρ^g sur S_{fs}

$\widetilde{\rho^g_{|S_{fs}}}^{sf} \approx \overline{\rho^g_{f\longrightarrow s}}^s = \overline{\rho^g}^s$ densité de masse de coulis adsorbé par unité de volume de la phase solide

$\overline{\rho^g}^f$ concentration du coulis dans la phase fluide

$\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$ concentration du coulis injecté prescrite au point d'injection

$\overline{\rho^\gamma}^f$ densité macroscopique de la composante γ ($\gamma = g, w$) par unité de volume de la phase fluide

$\overline{\rho_s}^s$ densité macroscopique intrinsèque du squelette solide

$\overline{\rho_f}^f$ densité macroscopique intrinsèque de la phase fluide

$(\rho^\gamma)_{|S_{fs}}$ densité de la composante γ sur la surface d'interface fluide-solide

ρ_σ densité de coulis adsorbé par unité de volume du milieu pore

$\overline{\rho_s}^s$ densité intrinsèque du squelette solide

$\overline{\rho_{skel}}^s$ densité intrinsèque du squelette solide initial

$\rho_{\sigma\,\max}$dépôt ultime atteint en filtration

$\left(\sigma_s^{'}\right)_{ij}$ composantes du tenseur des contraintes effectives

σ_{ij} composantes du tenseur des contraintes effectives

$\sum_{fs} = \frac{S_{fs}}{U_0}$ surface spécifique

$\sum_{\alpha\alpha} = \frac{S_{\alpha\alpha}}{U_0}$, $\alpha = s, f$ surface spécifique

τ paramètre upwind

ϕ_p diamètre d'une particule

∇ opérateur divergence.

$\widetilde{()}^{\alpha\beta} = \frac{1}{U_0} \int_{S_{\alpha\beta}} () \, dS$ intégrale de surface d'une quantité extensive donnée

$\mathbf{I}$ tenseur identité

$\otimes$ produit tensoriel de deux vecteurs

$\frac{d_\alpha}{dt}$ dérivée matérielle de la phase α, $\alpha = s, f$

δ_{ij} symbole de Kronecker

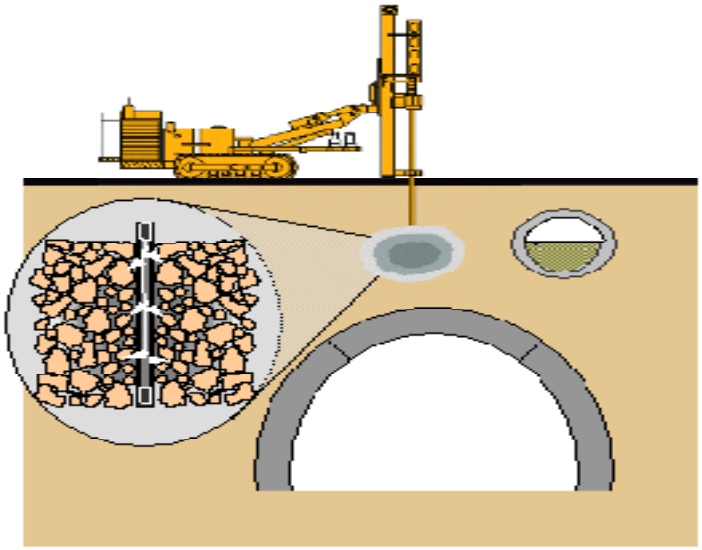
Chapitre 1

INTRODUCTION

1.1 Modélisation du processus d'injection

L'injection des sols est une technique très répandue d'amélioration des caractéristiques des sols. L'injection consiste en l'introduction, sous pression, d'une suspension de coulis dans le sol, créant après prise et hydratation une matrice cimentée. L'injection est particulièrement utile pour réduire la perméabilité initiale du sol ou en augmenter la résistance mécanique. A cause des interactions physiques et chimiques complexes, le mécanisme de perméation d'un coulis dans un sol est difficile à décrire. Pour cette raison, la technologie des injections et les critères de contrôle ont émergé à travers l'expérience pratique ([23]), et peu de tentatives ont été effectuées jusqu'à présent pour appréhender le mécanisme de l'injection sur la base d'analyses théoriques. Une approche plus théorique de l'injection devrait contribuer à l'établissement de critères objectifs pour l'amélioration des caractéristiques des sols injectés. Afin de décrire le phénomène fondamental de propagation du coulis, un modèle continu de déplacement par fluides miscibles dans un milieu poreux déformable est développé.

L'étude théorique se justifie par le fait que la plupart des travaux existants concernant les injections en milieu poreux sont des activités de recherche expérimentale, essentiellement centrées sur l'application envisagée, qui restent tributaires du type de matériau ou de la technique employés. Un cas concret d'injection est représenté par la Fig.1-1, il s'agit d'une injection de consolidation avant excavation, qui vise à renforcer le sol afin de prévenir un effondrement du sol lors de l'excavation. La majorité des études recensées s'attachent à l'étude empirique d'un coulis d'injection particulier (bentonite-ciment, gel de silice...) avec l'obtention de lois (rhéologiques, caractéristiques mécaniques) valables uniquement pour une famille donnée de matériaux, sans chercher à décrire les phénomènes fondamentaux impliqués par l'injection, du point de vue physique ou mécanique ([7], [10], [71], [72], [85], [101]). Chaque étude est un



Figure~1-1: Injection des sols.

cas particulier. Par exemple, Balat et Krish ([10]) étudient la pénétration d'un coulis à base de silicate dans un sable grossier, la propagation du coulis est étudiée par l'emploi de différents coulis colorés. La distribution de coulis en fonction du temps est obtenue pour le milieu poreux sec et pour le milieu poreux saturé à l'eau. Des essais similaires ont été réalisés par Krizek et Peres ([71]) pour d'autres types de coulis.

Ces études sont utiles pour la pratique mais ne se prêtent pas à l'extrapolation ou à la généralisation. La généralisation est nécessaire lorsqu'il s'agit d'améliorer ou d'expliquer des lois empiriques du point de vue des phénomènes physiques impliqués, afin d'aboutir à un modèle prédictif, à des critères de conception rationnels et largement applicables, tout en approfondissant la compréhension du procédé. L'étude bibliographique sur la modélisation de l'injection de solutions ou de suspensions revèle que seuls quelques rares modèles mathématiques et numériques sont proposés pour l'étude de l'écoulement et de la propagation d'un coulis injecté dans un milieu poreux saturé ou non ([58]). Il n'existe pas de modèle général qui traite le processus d'injection complet en milieu poreux, et aucune analyse systématique des interactions physico-chimiques et hydromécaniques complexes se produisant lors de l'injection n'a été reportée jusqu'à présent. La multiplicité des applications pratiques de l'injection, la variation des conditions in-situ et des propriétés du coulis, ainsi que la complexité des phénomènes physiques sous-jacents, dont certains sont abordés dans le présent mémoire, expliquent en partie le peu d'études consacrées au développement d'un modèle décrivant le phénomène fondamental de propagation d'un coulis d'injection dans un sol.

Par ailleurs, les modèles d'injection passés en revue négligent les contraintes et les déformations développées au sein du squelette solide, en considérant une matrice poreuse rigide, de porosité constante, au cours de l'injection ([7], [8], [58]). Le couplage hydro-mécanique n'est pas mentionné.

L'objectif de la thèse est d'établir un modèle de propagation du coulis de ciment dans un milieu poreux saturé déformable, qui prenne en compte les couplages existants entre la déformation du squelette solide et les écoulements du coulis et de l'eau déplaçée. Les formulations existantes pour l'étude de l'injection sont limitées au problème de transport et au problème d'écoulement ([7], [8], [58]). Parmi les intérêts majeurs du travail entrepris, le couplage hydromécanique induit par l'injection en milieu poreux saturé déformable est particulièrement étudié. Le présent mémoire se consacre à l'étude du milieu poreux injecté avant la solidification du coulis de ciment, les aspects thermodynamiques liés à l'exothermie de la prise et de l'hydratation du ciment n'ont pas été étudiés. L'avancement de la thèse et les résultats expérimentaux obtenus ont ouvert d'autres perspectives que l'aspect hydro-mécanique du couplage entre la phase fluide et le squelette solide. Les aspects physico-chimiques (filtration du coulis, modification des propriétés de la phase fluide interstitielle) pourraient jouer un rôle essentiel dans les interactions entre le squelette solide et la phase fluide au cours de la propagation du coulis. Aucune étude de filtration dans le cadre de l'injection n'est recensée, Azzar ([7]) étudie un coulis de bentonite-ciment mais sans caractériser la filtration présente, et les références bibliographiques pour la filtration proviennent essentiellement des sciences de l'environnement et de la chimie. Dans les modèles de filtration ([56], [110]), le problème d'écoulement est résolu avant de considérer le processus de transport et de filtration, en occultant partiellement le couplage important entre les distributions de pression et de concentration, tel qu'il a été mis en évidence lors des essais expérimentaux et numériques (chapitre 7).

1.2 Phénomène de filtration

Au cours du processus d'injection, certains des constituants du coulis sont filtrés par les grains de la matrice solide, tandis que le coulis restant dans l'écoulement est transporté par convection et dilué avec l'eau initialement présente. Ce processus altère les propriétés physiques (densité, viscosité) de la phase fluide interstitielle, qui influent à leur tour sur les caractéristiques d'écoulement de la phase fluide. La morphologie du squelette poreux est également affectée par le dépôt, la porosité varie, ainsi que la déformation du squelette solide. Aussi, afin d'obtenir une description réaliste de la distribution du coulis et de l'allure de la zone injectée, la vitesse fluide et le déplacement solide, qui sont liés, doivent être connus avec précision lors du transport, sous convection dominante, du coulis au sein de la phase fluide interstitielle.

Bien que la dynamique des fluides sous-jacente au phénomène de filtration soit très complexe, la

plupart des modèles pour interpréter ce processus reposent sur la loi de Darcy, combinée à des équations constitutives appropriées afin de tenir compte de l'altération de la structure du milieu poreux induite par le dépôt de coulis en surface du squelette solide. Pour Ives ([65]), la chute de pression au sein du milieu poreux est calculée à l'aide de l'équation de Kozeny-Carman, qui donne l'évolution de la fonction de perméabilité, corrigée de l'effet d'occlusion du milieu. Les expressions de taux employées pour la filtration, et les expressions de la variation du gradient de pression, découlent de lois semi-empiriques et contiennent des paramètres ajustables, ou des relations fonctionnelles qui doivent être identifiées par les expériences ([112]). Il s'agit de lois phénoménologiques qui simplifient les phénomènes microscopiques lors de l'écoulement fluide dans les milieux filtres. L'effet de la variation de la résistance visqueuse (interaction solide-fluide) peut être considéré comme implicitement inclus dans l'expression de la loi de Darcy, qui comprend une perméabilité géométrique fonction de la quantité de dépôt.

1.3 Principes retenus pour la modélisation

Concernant les théories continues de milieux poreux, deux possibilités principales ont été explorées en vue de la description macroscopique de systèmes multiphasiques : l'approche phénoménologique basée sur la mécanique des milieux continus ([27]), et l'emploi de techniques de moyenne ([13]). Le second choix a été retenu, car lorsque l'approche phénoménologique est employée pour écrire les équations de conservation macroscopiques, il est implicitement supposé que les équations de conservation ou les équations constitutives macroscopiques ont la même forme que leurs contreparties microscopiques. En partant de cette approche, les interactions physiques ou chimiques entre les différentes phases composant le milieu poreux, essentielles pour la description du processus de filtration sur les surfaces d'interface microscopiques, sont perdues ([18]). De même, la miscibilité entre le coulis et l'eau interstitielle, qui peut être expliquée en invoquant les hétérogénéités du champ de vitesses réel (microscopique) et la tortuosité du chemin parcouru par une particule de fluide au sein de l'espace interstitiel ([14]), est correctement traduite par la considération de l'équation de conservation de la masse à l'échelle microscopique pour obtenir l'équation macroscopique correspondante.

Le développement théorique proposé comprend une formulation macroscopique, une étude expérimentale et une implémentation numérique étroitement liées.

Le développement du modèle s'appuie sur la représentation particulière d'un milieu poreux général et les règles de moyenne données par Bear ([13]). Le cadre théorique donné par Bear est appliqué au modèle conceptuel proposé pour le transport des quantités extensives étudiées, qui tient compte des transferts se produisant au cours du processus d'injection, tels que le transfert de masse de la phase fluide vers la surface du squelette solide au cours de la fixation des particules de coulis.

La première, et peut-être la plus importante étape du processus de modélisation est la construction d'un modèle conceptuel du système et de son comportement. Cette étape inclut une description verbale de la composition du système, des phénomènes physiques s'y produisant et des mécanismes physiques qui les gouvernent, ainsi que des propriétés appropriées du milieu. En particulier, le coulis et l'eau interstitielle initialement présents sont supposés être les composantes miscibles d'une même phase fluide. L'équation de conservation macroscopique générale, développée par Bear pour une quantité extensive d'une phase, est considérée pour chaque quantité physique pertinente aux phénomènes étudiés. La compréhension du mécanisme de l'injection et du phénomène de propagation d'un coulis miscible dans un sol nécessite la détermination de la distribution de concentration en fonction de la pression d'injection ou du débit d'injection. En effet la distribution de concentration, qui contrôle l'étendue de la zone d'injection, est déterminante pour évaluer les caractéristiques de résistance et de perméabilité - qui sont les principaux paramètres permettant d'évaluer l'efficacité de l'injection - du sol injecté. Le modèle proposé combine l'analyse de l'écoulement fluide et du transport de masse du coulis à l'étude de la déformation du squelette solide, afin d'observer l'évolution de la pression fluide et de la concentration en coulis dans le massif, et leurs interactions avec les déplacements du squelette solide.

L'équation d'écoulement, résolue pour la pression, gouverne le comportement d'écoulement transitoire de la phase fluide au sein du milieu poreux saturé déformable, et prend en considération l'effet des variations de densité et de viscosité du fluide, en supposant une densité et une viscosité fluides fonctions de la concentration en coulis injecté. L'équation de transport, résolue pour la concentration de coulis, traduit le transport convectif du coulis au sein de la phase fluide, la dilution du coulis au sein de la phase fluide interstitielle par dispersion hydrodynamique ([103]), et la filtration du coulis au cours de la propagation. L'équation de conservation de la quantité de mouvement exprime le couplage hydrodynamique classique pour un milieu poreux déformable saturé par une phase fluide unique. Le principe des contraintes effectives de Terzaghi est employé pour faire apparaître les contraintes responsables de la déformation du squelette solide. Les équations de porosité et de coulis adsorbé traduisent la conservation de la masse pour le squelette solide et le coulis adsorbé respectivement, sous l'effet des déformations et du transfert de masse de la phase fluide vers la phase solide lors du processus de filtration.

Le modèle étudie la propagation du coulis sous forme d'une composante miscible et homogène de la phase fluide. Toutefois, l'analyse des expériences entreprises en laboratoire a permis de conclure que le coulis injecté ne se comporte pas seulement comme une solution inerte qui modifie les propriétés physiques de la phase fluide dans laquelle elle est transportée. L'essai en grandeur réelle comme les essais unidimensionnels réalisés en laboratoire, ont permis de constater un dépôt de coulis en surface de la matrice solide. Au cours du développement du modèle, on insiste sur les termes de surface dans les équations de bilan, et leur importance physique pour traduire les effets de filtration en surface des grains

constitutifs du milieu poreux lors de la propagation. Ces termes sont des termes additionnels par rapport à une première formulation du modèle ([18]) centrée sur les effets visqueux, les effets visqueux sont ainsi nettement dissociés des effets de dépôt. La filtration, prise en compte de manière globale, apparaît au niveau macroscopique sous la forme d'un terme réactif dans le bilan de masse du coulis et des autres constituants.

Après que la filtration ait été intégrée de manière générale dans le modèle, l'évolution du taux de filtration doit être exprimée par une loi appropriée. La filtration peut a priori être traitée en modifiant la loi de perméabilité, par l'adjonction d'un terme fonction de la masse de coulis de ciment déposée par unité de volume du squelette solide. Les aspects abordés concernent l'estimation du coefficient de dépôt initial à partir de résultats d'essais d'injection unidimensionnels, et la prise en compte de l'effet du dépôt des particules sur l'écoulement par le choix d'une loi de perméabilité appropriée. La filtration introduit un couplage entre les équations d'écoulement, de transport, de porosité et de coulis adsorbé, issu du bilan de masse, qui affecte fortement la performance globale de l'injection.

Les couplages additionnels inclus dans la formulation consistent en un couplage hydro-mécanique entre le squelette solide et la phase fluide saturant l'espace interstitiel - la mise en évidence de ce couplage sera systématiquement recherchée dans la formulation, auquel s'ajoute le couplage entre l'écoulement de la phase fluide et le transport du coulis en solution. Ce second aspect constitue une nouveauté par rapport au traitement classique du transport d'espèces en solution, tel qu'il est effectué en sciences de l'environnement par exemple ([8]). Plus particulièrement, l'hypothèse classique d'un traceur idéal, qui ne modifie pas la densité ou d'autres propriétés physiques (viscosité) du fluide, ne peut être retenue ici. Dans le présent travail, la propagation du coulis est considérée pour le cas spécifique de sols fins injectés par des ciments micro-fins, conçus pour pénétrer dans des sols de faible perméabilité ($K \sim 10^{-4}$ à 10^{-6} $m \cdot s^{-1}$). Cependant, le modèle proposé est suffisamment général pour envisager l'étude de tous types de matrice poreuse et de coulis de type suspension ou solution qui peut être traité comme un constituant miscible dans la phase fluide, dans la mesure où des lois constitutives appropriées sont disponibles pour les phases fluide et solide.

Par rapport aux modèles existants ([8], [58], [95], [111], [112]), le modèle proposé consiste en un seul système d'équations unifiées, qui permettent de considérer le transport convectif et la dilution du coulis au sein de la phase fluide, la filtration en surface du solide, et les aspects liés à la déformation du squelette solide.

1.4 Programme expérimental

Les essais expérimentaux ont servi de base pour le développement d'un modèle de transport approprié, et pour l'identification des paramètres du modèle. Les essais expérimentaux, d'importance primordiale en vue du développement itératif et de l'évaluation critique du modèle, ainsi que du point de vue de la validation phénoménologique, ont consisté en une série d'essais unidimensionnels et en vraie grandeur en laboratoire.

Les essais d'injection sur colonne unidimensionnelle ont initialement été conçus pour étudier la propagation du coulis injecté en suivant les positions successives du front de concentration au cours de l'expérience. Les essais unidimensionnels ont également permis, à travers l'acquisition des pressions interstitielles, d'étudier les caractéristiques principales de l'écoulement lors de l'injection, en l'absence ou en présence de filtration. Concernant les aspects de misciblité, la miscibilité entre le coulis fluide et l'eau interstitielle a été mise en évidence par des expériences simples, avant d'entreprendre des mesures de dispersion. Le modèle de dispersion employé est celui de Bear et Bachmat ([9]), qui implique que sous des conditions isotropes la dispersion est fonction de deux paramètres : la constante de dispersion longitudinale, qui traduit l'étalement de la zone de transition coulis pur - eau pure colinéaire à la vitesse d'écoulement macroscopique, et la constante de dispersion transversale, qui représente l'étalement du front physique de concentration perpendiculairement à la direction de l'écoulement. La constante de dispersion longitudinale a fait l'objet d'une identification expérimentale, en s'appuyant sur des techniques d'analyse d'images et sur une solution analytique existante pour des conditions particulières d'écoulement. La constante de dispersion est un paramètre essentiel pour le contrôle du processus de mélange et la caractérisation de l'évolution de la zone de transition. En effet, la miscibilité, qui doit être recherchée lors de l'injection, car elle conduit à une efficacité de balayage plus élevée que lors des écoulements de fluides immiscibles ([96], [70], [83]), doit également être contrôlée pour éviter une dilution trop grande du coulis, conduisant à des zones de moindre résistance après solidification. L'ordre de grandeur des valeurs mesurées pour la constante de dispersion longitudinale (valeurs mesurées s'élevant jusqu'à 10^{-2} m) légitime l'hypothèse de miscibilité entre le coulis et l'eau qui sature initialement l'espace interstitiel.

Une autre série d'essais unidimensionnels ont également permis de mettre en évidence la filtration et d'estimer le taux de dépôt des particules de coulis en surface du squelette solide. Tous les paramètres matériels étant connus, des essais additionnels ont été consacrés à la validation partielle des résultats du code numérique dans le cas unidimensionnel ([19]), par confrontation des pressions interstitielles et des positions du front mesurées aux résultats du calcul numérique. En particulier, la confrontation des positions de front expérimentales aux positions numériques calculées à partir de l'équation de transport du coulis achève de valider le choix du modèle de dispersion particulier employé pour l'injection.

L'essai en grandeur réelle a consisté en la réalisation d'une injection dans un modèle cylindrique tri-

dimensionnel sous des conditions de symétrie axiale, avec acquisition continue des déplacements solides et des pressions au sein du massif au cours de l'essai. La symétrie de la géométrie et des conditions aux limites hydrauliques et mécaniques imposent une allure d'écoulement radiale. Au cours de la procédure d'injection tridimensionnelle, les phénomènes soumis à une mesure ou à une étude qualitative sont plus complexes que dans le cas unidimensionnel, et fortement couplés. Parmi les aspects plus particulièrement étudiés, l'attention se porte sur l'écoulement de la phase fluide, la dispersion hydrodynamique, la filtration et le transport convectif du coulis au cours du processus de propagation transitoire, ainsi que les déformations solides induites par l'injection dans un milieu poreux saturé déformable. L'essai d'injection en vraie grandeur a servi à dégager les phénomènes prépondérants, et une première évaluation critique du modèle mathématique de propagation d'un coulis miscible dans un milieu poreux a été rendue possible. Un certain nombre d'hypothèses postulées au cours de l'écriture du modèle ont pu ainsi être validées, et l'adéquation du modèle a pu être établie.

1.5 Implémentation numérique

L'implémentation numérique du modèle développé vise à obtenir un modèle numérique prédictif performant pour l'analyse du processus d'injection, qui permette de situer précisément la zone injectée, tout en renseignant sur l'augmentation de pression et les déformations du squelette solide attendues dans le massif au cours de l'injection. Les équations sont fortement couplées, notamment par le biais des lois constitutives, couplage qui devra être correctement traduit lors d'une résolution numérique appropriée. A l'exception de la résolution de l'équation de transport, le schéma de Galerkin standard est employé pour la discrétisation de l'ensemble des équations par la méthode des eléments finis. La méthode SUPG (Streamline Upwind Galerkin Method) est utilisée dans la discrétisation de l'équation de transport, afin de s'affranchir des oscillations numériques lors de la propagation du coulis, liées à la dominance du terme convectif dans cette équation ([21]). Cette procédure est en particulier supérieure aux schémas upwind classiques ([58], [121]). Une attention particulière est accordée à l'équation de transport, une procédure de validation complète est développée afin de s'assurer de l'efficacité de l'algorithme retenu en vue de l'application particulière concernée. La conception du logiciel, qui s'appuie sur les principes de programmation orientée objet, est évoquée, le logiciel développé s'organise en modules largement indépendants, ce qui facilite l'extension du modèle (au transport multi-espèces par exemple). La structure particulière du code facilite la réutilisation de parties du code déjà existantes et l'ajout de nouvelles lois de comportement. Un large choix de lois d'état, de viscosité, et de filtration sont notamment disponibles pour le fluide.

Le code développé est d'abord validé sur le plan purement numérique pour chaque équation du

système, à partir de solutions analytiques continues et discrètes, et par comparaison au logiciel commercial ZSoil ([122]). Des résultats expérimentaux et numériques existants ([58]) permettent en outre de valider le problème couplé de transport et d'écoulement, pour une configuration d'injection unidimensionnelle puis tridimensionnelle.

Le modèle proposé et le programme numérique résultant servent ensuite à analyser le phénomène de propagation du coulis au sein d'un milieu poreux saturé déformable, et à valider les choix de la modélisation. Les résultats obtenus sont ainsi comparés, en vue de la validation phénoménologique, aux résultats expérimentaux obtenus en laboratoire, sous des conditions d'injection unidimensionnelles et tridimensionelles. Un cas concret d'injection est ensuite offert par l'injection avant excavation d'un tunnel ([89]). Il apparaît notamment lors de cette étude, qui conduit à des résultats numériques réellement représentatifs, que le couplage hydro-mécanique est un aspect crucial du processus d'injection.

1.6 Apport de la présente étude

L'apport de la recherche consiste essentiellement en la prise en compte, dans un même cadre général continu, d'aspects qui relèvent traditionnellement de problématiques distinctes : les déformations du squelette solide, l'écoulement des fluides miscibles, la filtration à travers un milieu poreux, ont été étudiés avec une égale attention, sans faire d'hypothèses préalables sur leur importance relative.

Les résultats de cette étude permettent de mieux cerner l'impact de l'injection d'un coulis miscible dans un milieu poreux saturé déformable, et peuvent conduire, par l'utilisation extensive du code développé, tout en gardant à l'esprit les hypothèses sous-jacentes à son développement, à une méthodologie de conception rationnelle et efficace pour l'injection.

Le modèle développé peut être employé pour l'injection des sols, pour tout type de milieu poreux déformable si des lois constitutives et une relation contrainte déformation appropriée sont fournies, mais également pour l'analyse de processus de transport en milieu poreux, avec dispersion et filtration, sous un débit d'injection ou de pompage arbitraire. Le modèle peut en outre être étendu à un nombre quelconque de constituants. En particulier, si le fluide injecté contient des particules en suspension de type différent en quantité non négligeable, le modèle peut être modifié en considérant une équation d'advection-dispersion pour chacun des constituants. Ceci suppose de connaître la proportion et la composition initiales de chacun des composants du coulis, ainsi que les interactions physico-chimiques (termes de réaction chimiques, de filtration) et mécaniques entre chacun des constituants.

Chapitre 2

TRANSPORT ET ECOULEMENT EN MILIEU POREUX DEFORMABLE

2.1 Introduction

Lors de l'écoulement simultané de différents constituants à travers un milieu poreux, la question de la miscibilité des constituants est primordiale, les deux types de déplacements miscibles et immiscibles constituent les deux cas limites qui sont théoriquement possibles.

En tout point de l'interface microscopique entre deux fluides immiscibles, il apparaît une énergie interfaciale, et un certain travail est nécessaire pour séparer les deux fluides. L'énergie interfaciale provient de l'attraction exercée par les molécules à l'intérieur de la phase sur celles situées en surface de la phase, attraction qui se manifeste sous la forme d'une tension interfaciale, tangente à l'interface ([104], [74], [13]). La tension interfaciale entre les différentes phases fluides résulte en une interface fluide-fluide au sein du milieu poreux. L'admission d'un fluide à l'intérieur d'un pore saturé par un autre liquide est contrariée par la tension de surface. Les actions combinées de toutes ces forces sont telles que, à une saturation donnée, une certaine différence de pression entre la phase déplaçante et la phase déplaçée devra être maintenue pour créer l'équilibre ([104]). Cette pression, appelée pression capillaire, est fonction de la saturation. La pression capillaire est le travail contre les forces issues de l'interaction du fluide avec le milieu poreux. A l'état statique, deux phases peuvent être dans trois états différents au sein du milieu poreux : saturation complète pour une phase, pendulaire (absence d'écoulement pour une des deux

phases), funiculaire (saturation intermédiaire pour les deux phases). Il est supposé que ces trois états possèdent différentes allures d'écoulement.

Le régime le plus courant d'écoulement de fluides immiscibles dans un milieu poreux est celui où les deux phases s'écoulent le long de leurs propres canaux funiculaires, avec différents capillaires occupés par différentes phases du milieu fluide. Le channel flow concept découle de l'observation visuelle directe d'écoulements biphasiques ([42]). Le concept énonce que chaque fluide s'écoule de manière indépendante à travers son propre réseau de canaux interconnectés. Une augmentation de la saturation d'une des phases fluides correspond à une augmentation du nombre de canaux transportant ce fluide. Au même moment, il se produit une décroissance du nombre de canaux occupés par l'autre phase. A tout instant, la somme des degrés de saturation de tous les fluides est égale à l'unité. Il est facile d'imaginer que les canaux d'écoulement sont beaucoup plus tortueux que pour un fluide monophasique, ce qui permet d'expliquer qualitativement la faible perméabilité relative caractéristique des systèmes multiphasiques. L'écoulement est monophasique dans chaque réseau d'écoulement connecté pour une même phase fluide, le nombre de canaux contenant le fluide déplaçant augmente progressivement, jusqu'à ce que les canaux du fluide déplacé soient déconnectés; celui-ci se retrouve à l'état pendulaire ([42], [104]). Les écoulements ne sont pas "gênés" les uns par les autres autrement que par la variation de la proportion relative de l'espace qu'ils occupent.

La situation est différente pour des écoulements de fluides miscibles dans les capillaires du réseau poreux. En ce cas, la discussion en termes de capillarité et de tension interfaciale n'est plus applicable et de nouveaux concepts doivent être développés. La misciblité entre deux phases fluides implique qu'il ne peut y avoir d'équilibre autre que celui atteint par mélange total, tel que la concentration d'un constituant au sein de la phase est constante à travers l'ensemble du système considéré. En conséquence, aucune interface distincte entre les deux fluides ne peut exister, et tous les phénomènes considérés sont transitoires au cours du mélange.

2.2 Transport par fluides miscibles

Le déplacement par fluides miscibles en milieu poreux est un type d'écoulement pour lequel les différents constituants sont complètement solubles et forment une seule et unique phase ([13]). En conséquence il n'existe pas d'interactions capillaires entre deux fluides. Le mélange progressif des deux phases est alors provoqué par l'écoulement des particules individuelles à travers la porosité du réseau. La diffusion d'un fluide dans l'autre se produit par dispersion mécanique, sous l'effet des interconnections des canaux d'écoulement. La dispersion représente un étalement irréversible du front de concentration de la composante injectée qui subit une convection sous l'effet de la vitesse interstitielle ([83]).

En général, l'étude du transport d'une quantité extensive dans un milieu poreux s'effectue par un traitement macroscopique qui repose sur l'introduction de la vitesse de filtration (ou vitesse de Darcy) de la quantité extensive transportée par rapport au solide, vitesse fictive du fluide s'il était seul à occuper la section. Dans les déplacements par fluides miscibles, le rôle de la microstructure et le comportement des éléments individuels de fluide ne peuvent pas être négligés, car la complexité du système poreux provoque le mélange des constituants individuels de fluide. A l'échelle de la microstructure, le chemin d'écoulement des particules de fluide, qui viennent cogner contre les parois du solide poreux, peut être assimilé à un mouvement aléatoire.

Le terme de dispersion a été introduit par Scheidegger ([105]) pour traduire la miscibilité d'un fluide injecté avec le liquide interstitiel dans le milieu poreux. Le mélange au liquide interstitiel des particules de traceur se produit sous l'effet de la sinuosité du chemin suivi par les particules de traceur par rapport à l'écoulement moyen. Ce phénomène géométrique n'est pas lié à la vitesse macroscopique moyenne du fluide mais au mouvement microscopique des constituants individuels, et doit être distingué de la diffusion moléculaire qui est associée au mouvement propre des molécules de traceur.

La formation et le comportement de la zone de transition ont été étudiés par Pfannkuch ([96]); ils peuvent s'expliquer par les effets conjugués de différents mécanismes de mélange, tels que la géométrie du réseau poreux, l'hétérogénéité des vitesses, la diffusion moléculaire :

- Les mélanges liés aux changements de direction du vecteur vitesse, du fait des orientations différentes des pores par rapport à la direction générale de l'écoulement.
- Les mélanges dûs aux hétérogénéités des vitesses dans les pores de dimensions différentes.
- Les mélanges dûs à la distribution des vitesses suivant le diamètre dans un pore individuel (cf. profil parabolique de l'écoulement de Poiseuille).
- Les mélanges dûs à la diffusion moléculaire.

A priori, tous les paramètres sont susceptibles d'influer sur le comportement de la zone de mélange ou de transition entre les deux fluides. Pour le milieu poreux, il faut prendre en compte la perméabilité et la porosité, la géométrie des pores, la granulométrie et la composition des grains constituant le milieu poreux. Pour les fluides de déplacement, les viscosités, les masses volumiques, le coefficient de diffusion moléculaire. Toutefois, seuls des couples de fluides de même densité et de même viscosité ont fait l'objet d'une étude systématique ([14], [50], [96]). Les conditions de déplacement, la vitesse d'avancement du front miscible, et la distance parcourue lors d'un déplacement sont également supposées jouer un rôle ([42]).

Si le fluide de déplacement a une viscosité plus grande que le fluide en place, ce qui est le cas de nos expériences, la zone de mélange croît lors du déplacement. Dans le cas contraire, le front de déplacement risque de devenir instable, le fluide envahissant se déplace plus rapidement en certains endroits qu'en d'autres, formant des languettes ou digitations (fingering), sans doute dues à de faibles hétérogénéités du milieu. Les déplacements instables n'ont pas été étudiés et les expériences conduites n'ont pas permis de déceler l'apparition et la progression de digitations lors de l'injection ([64]).

La dispersion ne peut être décrite qu'en se référant à ce qui se produit au niveau microscopique, à l'intérieur de l'espace interstitiel. A l'échelle du pore, il existe des variations de vitesse en amplitude et en direction à travers toute section droite d'un pore. Pour un fluide visqueux, par analogie avec la distribution parabolique des vitesses dans un capillaire droit, la vitesse fluide est nulle au niveau de la surface solide, et maximale en un point interne du fluide. La vitesse maximale elle-même varie selon la taille du pore. A cause de la forme de l'espace poreux interconnecté, les lignes de courant suivies par le traceur fluctuent en espace par rapport à la direction moyenne de l'écoulement. En conséquence, les particules de traceur occupent un volume sans cesse croissant du domaine d'écoulement. Les deux facteurs fondamentaux qui produisent la dispersion mécanique sont donc l'écoulement et la présence d'un milieu poreux à travers lequel l'écoulement a lieu. L'étalement du front se produit principalement dans la direction de l'écoulement moyen (longitudinale) mais également dans la direction transversale.

La diffusion moléculaire, causée par le mouvement aléatoire des molécules dans un fluide, produit un flux additionnel des particules de traceur, à l'échelle microscopique, des régions de concentration en traceur élevée à celles de concentration en traceur faible. Ce flux est relatif au flux produit par l'écoulement moyen de la phase.

A mesure que les particules de traceur s'étalent le long de chaque tube de courant microscopique, sous l'effet de la dispersion mécanique, un gradient de concentration de ces particules est produit qui, à son tour, induit un flux de traceur par le mécanisme de diffusion moléculaire. Ce phénomène, dont l'effet est relativement mineur, tend à égaliser la concentration le long du tube de courant. Cependant, en même temps, un gradient de concentration du traceur est également produit entre des lignes de courant adjacentes, provoquant une diffusion moléculaire latérale à travers les tubes de courant, qui tend à égaliser la concentration à travers les pores. Ce phénomène explique la dispersion transversale observée ([42]).

Pour les écoulements en milieu poreux sous convection dominante, la diffusion moléculaire seule est négligeable. Néanmoins, même lorsque l'effet macroscopique de la diffusion est relativement réduit, c'est uniquement la combinaison des fluctuations de vitesse microscopique et de la diffusion moléculaire qui produit la dispersion mécanique. C'est la diffusion moléculaire qui rend le phénomène de dispersion en écoulement laminaire irréversible.

La dispersion hydrodynamique désigne l'étalement du front au niveau macroscopique qui résulte de la dispersion mécanique et de la diffusion moléculaire. En réalité, la séparation entre les deux processus est quelque peu arbitraire car les deux sont inséparables. Cependant, la diffusion moléculaire se produit également en l'absence de mouvement, dans un milieu poreux comme dans un milieu fluide. Parce que la diffusion moléculaire dépend du temps, son effet sur la dispersion globale est plus significatif pour de faibles vitesses.

2.3 Modèles mathématiques de transport par fluides miscibles et d'écoulement

Dans la modélisation réaliste des écoulements multiphasiques, il faut tenir compte du fait que les différentes phases s'écoulent simultanément à travers le milieu poreux. Les écoulements sont dits hydrodynamiquement indépendants ([42]). Afin d'obtenir une description quantitative d'un écoulement multiphasique dans un milieu poreux, le modèle développé pour une seule phase fluide saturant l'espace interstitiel est étendu au cas de plusieurs phases fluides. Ainsi, la loi de Darcy est postulée pour chaque phase en écoulement, ce qui permet de formuler un modèle hydrodynamique complet pour les écoulements multiphasiques. Une telle généralisation de la loi de Darcy pour chaque phase fluide est justifiée par le channel flow concept. En écoulement monophasique, l'équation de conservation de la masse, la loi de Darcy et la loi d'état suffisent à déterminer, avec des conditions aux limites appropriées, un problème d'écoulement monophasique. Le modèle monophasique est étendu au cas multiphasique de manière directe ([69], [79]), par l'introduction des notions de perméabilité relative, de saturation relative d'une phase α dans l'espace interstitiel, et de pression capillaire. A l'inverse, dans la modélisation des écoulements de fluides miscibles, la microstructure joue un rôle essentiel, les équations d'écoulement monophasique ne peuvent pas être directement étendues au cas de la dispersion hydrodynamique, car il existe des phénomènes additionnels d'origine microscopique ([70]). S'agissant de constituants miscibles, la dispersion mécanique ne peut pas être expliquée sur la base de la vitesse macroscopique moyenne ou vitesse de Darcy, la description microscopique doit être considérée.

L'approche de modélisation phénoménologique ([27]), d'abord envisagée, a due être abandonnée, pour permettre l'introduction de la dispersion et de la filtration par une méthode de moyenne ([13]). Un grand nombre de théories ont été proposées afin d'expliquer le phénomène de déplacements par fluides miscibles, encore appelé dispersion hydrodynamique. Les modèles théoriques développés afin de représenter ce phénomène peuvent être classés en plusieurs catégories, parmi lesquelles : les modèles de type aléatoires ou modèles stochastiques, les modèles de tubes capillaires (modèles de réseaux) aux diamètres distribués de façon aléatoire, les modèles statistiques basés sur des moyennes spatiales (volumiques).

Dans cette étude le modèle le plus communément accepté, développé par Bear à partir d'une technique d'homogénéisation spatiale, est employé.

2.3.1 Théorie statistique

La description la plus appropriée de la dispersion est basée sur les théories statistiques d'écoulement à travers les milieux poreux, partant de considérations microscopiques et statistiques. Il est ainsi possible d'identifier la probabilité qu'une particule, en un certaine position et à un moment donné, possède une concentration égale à celle du fluide déplaçant. Le mouvement de chaque particule à travers le milieu poreux est considéré comme un processus de marche aléatoire. Les différents modèles statistiques conduisent à une équation d'advection-diffusion essentiellement équivalente à l'équation obtenue par une approche phénoménologique ([31]). L'obtention de l'équation de dispersion repose sur une étude probabiliste effectuée dans le cas d'un milieu poreux isotrope ([30]), et fait intervenir la variance d'une distribution (moment d'inertie de la masse du traceur) qui constitue une mesure de l'écart dans la répartition de la masse du traceur par rapport au centre de masse. Parmi les modèles de marche aléatoire, Scheiddegger ([104]) étudie le mouvement d'une particule, le mouvement aléatoire est produit par une succession d'étapes élémentaires, chaque pas de temps étant supposé indépendant de ce qui s'est passé aux pas de temps précédents. La particule, au cours de son mouvement, va donc avancer à des vitesses différentes. Par l'hypothèse d'ergodicité, la position à l'instant t de la particule peut être calculée sur l'ensemble de tous les chemins aléatoires possibles dans l'intervalle $(0, t)$ depuis un point donné. La transition microdynamique depuis t à $t + dt$ est telle que la vitesse moyenne à un instant donné est constante et donnée par la loi de Darcy. La valeur attendue pour la position de la particule est alors la moyenne sur l'ensemble. L'intervalle de temps $(0, t)$ est découpé en N intervalles. Par application du théorème central limite, la distribution de probabilité décrivant le mouvement d'une particule de fluide à travers le milieu poreux est obtenue sous forme de distribution normale Gaussienne, si N est suffisamment grand.

La diffusion et la dispersion ont des origines physiques très différentes. La diffusion est généralement associée au mouvement intrinsèque des molécules de fluides sous l'effet de leur agitation thermique, tandis que la dispersion est un effet mécanique lié à l'interconnection des canaux dans le milieu poreux. L'expérience montre que, même dans un milieu isotrope, la dispersion ne peut être traitée comme un scalaire, dans la mesure où la dispersion longitudinale, parallèle à la direction de l'écoulement, est différente de la dispersion latérale (perpendiculaire à l'écoulement). Le coefficient de dispersion est alors remplacé par un tenseur de dispersion. Un des intérêts de la théorie statistique de l'écoulement à travers un milieu poreux est qu'elle prédit le phénomène de dispersion. Cependant, sur le plan théorique, il est intéressant de savoir si cette dispersion prédite se produit réellement. De plus les différents modèles

statistiques existants ([104]) diffèrent dans l'expression de la dépendance du facteur de dispersion en fonction de la vitesse de pore, définie par le rapport de la vitesse de filtration (ou vitesse de Darcy) à la porosité du milieu, aussi convient-il de déterminer à partir d'essais le modèle qui donne la relation appropriée entre le facteur de dispersion et la vitesse de pore. L'identification du facteur de dispersion fait l'objet d'une étude particulière au cours de la thèse, les différentes corrélations existantes entre dispersion et vitesse de pore sont discutées en section 7.6.

2.3.2 Modèle de dispersion de Bear

Pour être exploités, les modèles statistiques débouchent sur des expressions qui font intervenir des quantités macroscopiques. La microstructure et le passage théorique micro-macro sont primordiaux pour la traduction des effets de dispersion. Parmi les théories avançées pour expliquer le déplacement par fluides miscibles, les modèles statistiques basés sur des moyennes volumiques spatiales, tels que le modèle de Bear, sont les plus communément acceptés ([13]). Le milieu poreux est isotrope et homogène statistiquement, l'orientation des pores est arrangée de façon complètement désordonnée. La représentation du milieu poreux réel est simplifiée. Le milieu est constitué de canaux, et la jonction des canaux ou pores occupe un volume négligeable par rapport aux parois des canaux.

Il convient de distinguer entre l'irréversibilité inhérente à un processus et l'irréversibilité qui dépend de l'échelle et de la procédure choisies pour la description du processus, i.e. l'irréversibilité introduite par le modèle particulier d'approximation de la réalité choisi. Ici, la seule cause physique possible de l'irréversibilité est la diffusion moléculaire, tandis que la raison phénoménologique est la procédure adoptée pour moyenner les vitesses microscopiques. Ainsi, certaines théories, c'est le cas en particulier du modèle de dispersion de Bear, conduisent à une dispersion mécanique irréversible à cause de la procédure de moyenne employée pour aboutir à une description macroscopique, sans recourir explicitement à la diffusion moléculaire comme cause de l'irréversibilité.

Le flux qui provoque la dispersion mécanique est le flux dispersif, flux macroscopique qui exprime l'effet des variations microscopiques des vitesses au voisinage d'un point considéré par rapport à la vitesse moyenne d'écoulement. La décomposition de la moyenne du flux advectif total en la somme d'un flux d'advection moyen et d'un flux dispersif est une conséquence de la procédure de moyenne. Le flux de diffusion moléculaire n'est pas considéré lors de l'établissement de l'expression du flux dispersif ([9], [13]).

Le modèle continu du milieu poreux

En principe, les modèles mathématiques de transport peuvent être énoncés et résolus à l'échelle microscopique, en termes de variables spécifiées en des points à l'intérieur de chacune des phases fluides ou solides qui occupent un domaine poreux. Les équations qui décrivent les différents phénomènes de transport et d'écoulement (équations de Navier-Stokes) sont connues et peuvent être écrites à l'échelle

microscopique. Les conditions valables sur la surface sont également connues. Cette approche n'est pas praticable, car il est impossible de décrire en détail la géométrie des frontières entre phases, et il est nécessaire de considérer le problème à une échelle observable ou continue.

Le système réel consistant en plusieurs phases, qui occupent des sous-domaines complètement disjoints dans un milieu poreux, est remplaçé par un modèle dans lequel chacune des phases, dont la structure moléculaire est négligée, est supposée se comporter comme un milieu continu qui occupe le domaine entier. On parle de milieux continus superposés, chacun correspondant à une des phases présentes dans le domaine. Si les phases individuelles interagissent les unes avec les autres, il en va de même de ces milieux continus.

Un milieu poreux est défini comme un milieu matériel multiphasique caractérisé par :

a) Un volume élémentaire représentatif (V.E.R.) qui peut être déterminé afin que, quel que soit l'endroit où il est placé dans le domaine occupé par le milieu poreux, il contienne une phase solide persistante, distribuée à travers le milieu poreux, et une ou plusieurs phases fluides interstitielles persistantes.

De même, une Surface Elémentaire Représentative plane peut être déterminée afin que, quel que soit l'endroit du domaine poreux considéré, une phase solide et un espace interstitiel soient toujours présents.

b) La taille du V.E.R. est telle que les paramètres qui représentent les distributions de vide et de matrice solide au sein du V.E.R. possèdent une signification statistique ([13]).

La méthodologie présentée plus bas pour le passage du niveau microscopique au niveau macroscopique, a d'abord été employée pour le passage du niveau moléculaire au niveau microscopique, par l'utilisation d'un V.E.R. pour moyenner le comportement au niveau moléculaire afin d'obtenir le comportement de la phase comme un milieu continu.

En parcourant l'ensemble du domaine poreux avec un volume élémentaire en mouvement, des valeurs moyennes (homogénéisées) sont affectées à chaque point (centroïde du V.E.R.), et des champs de variables macroscopiques sont obtenus pour chaque phase, qui sont des fonctions différentiables des coordonnées d'espace. Par cette procédure répétée pour tous les points du domaine considéré, la phase réelle est remplaçée par un milieu continu fictif, présent partout dans le domaine considéré. Pour chaque point dans l'espace macroscopique occupé par ces milieux continus superposés, des valeurs moyennes des variables d'état d'une phase sont prises sur des volumes élémentaires centrés sur le point, sans se préoccuper de savoir si dans le domaine réel ce point appartient à la phase ou est extérieur à la phase. A travers le domaine, les valeurs des variables considérées, ainsi que les différentes caractéristiques macroscopiques de la phase, sont définies en chaque point mathématique. Différentes approches sont possibles, qui conduisent à des équations macroscopiques équivalentes, pour décrire le système multiphasique par une approche continue ([51], [52], [6]), le modèle de Bear a été choisi car il s'agit du modèle le plus approprié à la description de la dispersion hydrodynamique.

Les avantages d'un modèle continu de milieu poreux sont acquis aux dépens de la perte d'information détaillée concernant la configuration microscopique des frontières d'interface et la variation réelle des quantités au sein de chaque phase. Cependant, les effets macroscopiques de ces facteurs sont conservés sous la forme de coefficients, dont la structure et la relation aux propriétés statistiques (moyennes) de la configuration de l'espace interstitiel ou de la phase peuvent être analysées et déterminées. Pour des milieux poreux spécifiques, les valeurs numériques de ces coefficients doivent être déterminées expérimentalement.

La construction d'un modèle continu de milieu poreux impose certaines restrictions sur la taille du V.E.R.. Plutôt que de choisir le volume d'homogénéisation de façon arbitraire, un critère universel est nécessaire, qui soit basé sur des caractéristiques mesurables de tout milieu poreux et qui détermine, pour tout milieu poreux donné, une plage de volumes d'homogénéisation pour laquelle ces caractéristiques géométriques moyennées restent plus ou moins constantes (indépendantes de la taille du volume d'homogénéisation). Un volume de moyenne qui appartienne à cette plage est considéré comme un Volume Elémentaire Représentatif ou V.E.R.. L'introduction du V.E.R. est la première étape du processus d'homogénéisation ([6]). A partir des phénomènes considérés en chaque point d'une phase, la représentation macroscopique est développée, telle qu'à chaque point d'espace soient associées des quantités moyennées sur le V.E.R., décrivant les phénomènes au voisinage du point.

A chaque fois que des caractéristiques additionnelles du milieu poreux apparaissent dans le modèle macroscopique qui décrit un problème de transport, une plage de valeurs du V.E.R. doit être déterminée pour chacune de ces caractéristiques. De même, une plage de V.E.R. doit être choisie pour chaque variable d'état (ex. perméabilité, masse d'une composante), en adoptant des considérations similaires à celles assoçiées aux caractéristiques géométriques de l'espace interstitiel. Si un V.E.R. commun peut être obtenu pour l'ensemble des caractéristiques géométriques et des variables d'état des phases, un modèle continu du milieu poreux peut être employé.

2.4 Milieu déformable

La modélisation du couplage entre écoulement fluide et déformation du squelette solide, en conditions d'écoulements multiphasiques a été traitée par de nombreux auteurs, en rapport avec l'industrie du pétrole, les sciences de l'environnement, ou les écoulements souterrains en mécanique des sols ([69], [79], [80], [81], [97], [106], [109]). Pour obtenir les équations aux dérivées partielles couplées, les fluides immiscibles sont reliés par la relation pression capillaire-saturation. Le couplage hydro-mécanique est introduit par l'intermédiaire des variations de la porosité dans les équations d'écoulement, tandis que dans l'équation d'équilibre, le principe des contraintes effectives est exprimé en fonction des pressions

partielles des différentes phases fluides.

Dans l'étude de l'écoulement des fluides miscibles à travers les milieux poreux, généralement appliquée au transport de polluants ou aux procédés de récupération secondaire dans l'industrie du pétrole ([83], [96]), c'est l'écoulement des fluides et non la déformation du squelette solide qui prime. Les modèles de transport et d'injection recensés ([7], [8], [58]) sont des modèles de milieux rigides, qui ne considèrent aucun couplage entre le transport de masse en solution et la matrice poreuse. L'étude bibliographique effectuée a en particulier fait ressortir l'absence de modèles couplés visant à quantifier l'effet de l'injection en termes de déformations et de contraintes du massif injecté. La formulation du problème comprend une équation de transport et une équation d'écoulement, laissant de côté le bilan de quantité de mouvement.

Lors de l'écriture de l'équation d'écoulement pour la phase fluide, un coefficient, désigné sous le nom de coefficient de stockage spécifique, est introduit afin de traduire l'effet de la compressibilité du milieu poreux et du fluide ([7], [58]). Le seul effet de la déformabilité du milieu poreux est de provoquer une modification de l'équation de continuité, par l'introduction d'un facteur de compressibilité globale ou facteur de volume censé traduire la consolidation du milieu poreux. L'introduction d'un facteur de compressibilité globale constitue une simplification par rapport au comportement réel de la matrice solide ([15]), qui comprend un certain nombre d'hypothèses implicites, telle que l'hypothèse d'un comportement élastique linéaire. Il est en particulier supposé, pour obtenir cette relation, que la consolidation est verticale uniquement, que le tenseur des contraintes totales est constant (ce qui implique ne particulier que toute variation de la pression fluide se traduit par une variation des contraintes effectives d'amplitude égale et opposée en l'absence d'efforts mécaniques), et que les grains du squelette solide sont incompressibles. La perméabilité intrinsèque, constante, n'est corrélée ni à la porosité ni à aucune autre caractéristique structurelle du milieu poreux. Un tel modèle de milieu poreux ne constitue pas un modèle de milieu déformable.

D'une part, il n'existe aucune raison de supposer que l'état de déformations sera unidimensionnel au cours d'une injection quelconque. En situation réelle d'injection, les états de contraintes obtenus sont bidimensionnels ([89]), voire tridimensionnels ([113]). Par ailleurs, les déformations du squelette solide, si elles sont liées à la montée en pression sous l'effet de l'injection, ne s'expriment pas directement en fonction des variations de pression interstitielle; le tenseur des contraintes totales n'est pas constant, compte tenu des configurations d'injection et des contraintes mécaniques développées au cours de l'injection. D'autre part, les cas réels d'injection rencontrés révèlent une plastification importante du massif autour de la zone d'injection, induite par la pression ou le débit d'injection imposés, et des soulèvements conséquents en surface des massifs injectés ([89], [113]). Pour des valeurs élevées de la pression d'injection, des déformations plastiques du milieu poreux sont mêmes possibles qui conduisent à la fissuration, décelée par Honma autour du tube d'injection au cours d'essais en laboratoire ([58]).

A l'opposé des préoccupations des modèles d'injection de Honma ([58]) et Azzar ([7]), l'approche suivie par Nicolini et Nova ([89]) consiste à essayer de retrouver des déplacements mesurés sur site lors d'une injection souterraine, en imposant une déformation anélastique, paramétrée par plusieurs coefficients qui déterminent l'allure de l'injection, uniforme ou par claquage. Le régime hydraulique et le transport ne sont pas étudiés, l'effet de l'injection sur le comportement mécanique du massif est tout entier compris dans la déformation imposée. Le modèle proposé n'est pas un modèle prédictif, mais permet d'envisager plusieurs cas de figures pour les déplacements liés à l'injection, par perméation ou par claquage.

D'après l'étude bibliographique effectuée, il apparaît que la question du couplage hydro-mécanique entre l'écoulement de la phase fluide, le transport du coulis injecté, et le milieu poreux déformable, n'est pas triviale. La pression d'injection affecte l'état des contraintes, notamment lors des injections en grande profondeur, et produit des déformations du squelette solide, qui affectent à leur tour la perméabilité et l'écoulement. Aussi il apparaît qu'un couplage hydro-mécanique bilatéral est un aspect essentiel pour l'obtention d'un modèle réaliste d'injection dans un milieu poreux saturé déformable. Bien que les modèles existants s'attachent au comportement exclusif de l'une des phases, solide ([89]) ou fluide ([7], [8], [58]), le mouvement du fluide ne doit pas être dissocié de celui du squelette solide dans son ensemble. Le couplage entre écoulement et déformation a pu être mis en évidence lors des essais entrepris. L'effet des contraintes engendrées sur la matrice poreuse par les pressions fluides développées au cours l'injection, doit être traduit dans le cadre d'un modèle hydro-mécanique général, qui accorde une importance égale aux phénomènes se produisant dans les phases fluide et solide, et aux interactions entre les deux phases.

L'idée générale de l'étude du comportement mécanique des matériaux injectés est de comparer le comportement mécanique du sable vierge au comportement mécanique du sable cimenté, pour différentes concentrations en ciment. Krizek et al. ([72]) ont obtenu des résultats sur le comportement mécanique d'un sable injecté avec un coulis de ciment microfin (sable d'Ottawa). Le comportement contrainte-déformation est étudié sous des conditions de compression et d'extension triaxiale, le critère de Mohr-Coulomb simple peut être employé dans ce cas. Nicolini et Nova ([89]) emploient le critère de Mohr-Coulomb avec une règle d'écoulement non associée durant la phase d'injection. Il existe des modèles plus détaillés qui traitent la relation contrainte-déformation complète ([85]).

2.5 Filtration

Il existe certains effets qui sont propres aux fluides confinés au sein des milieux poreux, du fait de la proximité des parois aux molécules de fluides. Pour une suspension qui s'écoule à travers un milieu

poreux, un des aspects primordiaux est celui de la fixation des particules de fluide en surface des pores.

2.5.1 Mécanismes de filtration

Les milieux poreux retiennent les particules de la manière suivante. Pour les particules en suspension de diamètre d_p très inférieur à la taille du pore, le dépôt peut se produire au sein de la structure interne du milieu poreux, les particules pénètrent à l'intérieur des pores, où une fraction d'entre elles est retenue. Un tel processus de séparation, sous l'effet d'effets de surface (mécanismes d'adsorption), ou d'effets mécaniques (sédimentation), est appelé filtration en profondeur (depth filtration ou deep bed filtration). Dans la modélisation de la filtration, les indicateurs macroscopiques principaux du comportement transitoire du processus sont l'évolution de la composition du produit effluent, qui définit la capacité de rétention du milieu filtre, et l'évolution de la chute de pression, qui détermine l'étendue de la filtration. La filtration est un processus intrinsèquement transitoire, puisque le dépôt de particules altère la structure du milieu poreux. Il est donc nécessaire de prendre en considération l'effet du dépôt des particules sur le comportement du milieu injecté, la structure du milieu et la performance de l'injection lors de l'étude de la filtration. En conséquence, la perméabilité et les taux de rétention des particules dépendent de la structure particulière du milieu.

La filtration découle des interactions physiques entre les particules suspendues et le collecteur. Dans la plupart des situations pratiques, le dépôt s'effectue suivant plusieurs mécanismes différents ([98]). Un ou plusieurs mécanismes de filtration contrôlent le dépôt, qui peut être plus ou moins sélectif et plus ou moins rapide, en fonction des propriétés des particules. Les mécanismes suivants de filtration peuvent être distingués ([119], [56]) :

- Une particule présente dans une suspension en écoulement peut venir en contact avec la surface du squelette solide sous l'effet de sa taille, ce mode de filtration, qui correspond à un critère purement géométrique, est appelé interception.
- Inertie. Du fait de leur poids propre, les particules peuvent suivre des trajectoires différentes de celles du fluide, qui dévient des lignes de courant et peuvent les amener en contact avec les grains.
- Sédimentation. Si la densité de la particule est différente de celle de la phase fluide interstitielle, la particule suit une trajectoire (vitesse) différente due à l'influence du champ graviationnel, ce mode de dépôt est la sédimentation, résultat combiné de la force de gravité et de la résistance visqueuse sur la particule.
- Effets hydrodynamiques. Les effets hydrodynamiques peuvent être provoqués par l'hétérogénéité du champ de cisaillement, et la non-sphéricité des particules, qui provoquent une migration latérale des particules suspendues.

- Diffusion par mouvement Brownien. Une particule en suspension est soumise à un bombardement aléatoire par les molécules de la phase interstitielle, qui se traduit par le mouvement Brownien de la particule. Les particules diffusent, peuvent alors atteindre des zones normalement exemptes de suspensions, et être capturées.

- Mécanismes d'adsorption. Les mécanismes d'adsorption englobent l'ensemble des interactions d'origine électrique, électrostatique ou chimique.

Les forces de rétention agissant sur la particule comprennent la pression fluide, les forces de frottement (frottement de Coulomb), les forces chimiques (particules colloïdales) qui peuvent créer des liaisons chimiques ([56]), les forces de surface qui comprennent les forces de Van der **W**aals attractives, les forces électriques attractives ou répulsives : répulsion électrostatiques de double-couche (résistance ionique), ainsi que la répulsion de courte portée (Born).

Le décolmatage peut être provoqué par les variations locales de pression ou de vitesse qui changent les conditions d'écoulement au voisinage des particules retenues (arrachement), ou par suite d'une collision entre une particule en écoulement et une particule retenue.

2.5.2 Modélisation de la filtration

Il existe deux grandes approches pour l'étude du phénomène de filtration : l'approche phénoménologique globale ([65], [87], [56], [98], [95]) et l'approche théorique locale (microscopique) ([29], [100], [110], [112], [111]).

Les modèles microscopiques cherchent à exprimer les taux de rétention des particules en fonction des forces en présence, afin d'élucider les mécanismes de dépôt, les conditions sous lesquelles le dépôt peut être facilité, et l'effet du dépôt sur la structure du milieu filtre et les caractéristiques des grains filtres. Les approches phénoménologiques macroscopiques cherchent à prédire le comportement dynamique du filtre.

Malgré des approches différentes, la plupart des modèles passés en revue sont en réalité des modèles microscopiques ([100], [119], [65], [110], [117], [102]), au sens où la conservation de la masse de la suspension colloïdale est considérée à l'échelle d'un volume élémentaire de l'espace interstitiel du milieu filtre. Particules en suspension et milieu filtre occupent des domaines distincts dans la modélisation, les modèles de filtration ne sont pas des modèles de milieux superposés.

Dans l'approche phénoménologique globale, la filtration est décrite à travers l'évolution de la concentration en particules de la masse effluente, et l'évolution de la chute de pression à travers le milieu filtre. La performance du filtre est décrite à l'aide d'une équation de conservation matérielle macroscopique avec des expressions appropriées du taux de dépôt et de la chute de pression. La plupart des modèles

phénoménologiques pour interpréter la filtration reposent sur la loi de Darcy, combinée à des équations constitutives appropriées afin de tenir compte de l'altération de la structure du milieu poreux induite par le dépôt en surface du squelette solide. Ces modèles s'appuient sur des généralisations de la loi de Kozeny, avec des résultats mitigés ([56], [65], [110]). Les expressions de taux employées pour la filtration, et les expressions de la variation du gradient de pression, découlent de lois semi-empiriques et contiennent des paramètres ajustables, ou des relations fonctionnelles qui doivent être identifiées par les expériences ([112]). Il s'agit de lois phénoménologiques qui simplifient les phénomènes microscopiques lors de l'écoulement fluide dans les milieux filtres. L'effet de la variation de la résistance visqueuse (interaction solide-fluide) peut être considéré comme implicitement inclus dans l'expression nouvelle de la loi de Darcy, qui comprend une perméabilité géométrique fonction de la quantité de dépôt. Pour un mécanisme de dépôt spécifique, une expression du taux de dépôt peut être obtenue, le système est alors complètement défini et peut être résolu pour donner les courbes effluentes et l'évolution de la chute de pression en fonction du temps. Cet aspect est repris au cours du développement du modèle.

Parmi les approches théoriques locales, le modèle de Ruckenstein et al. ([100]) repose sur un bilan des forces en présence au niveau de l'interface entre particules en suspension et milieu filtre. Ruckenstein et al. ([100]) évaluent les taux d'adsorption/désorption en considérant une couche limite très mince au voisinage de la paroi solide, d'épaisseur δ_0 définie de telle manière que le mouvement du fluide soit négligé à l'intérieur de la région considérée, tandis que les interactions entre particule et squelette solide sont négligées à l'extérieur de la couche limite. Cette région est définie comme la couche limite d'interaction. L'équation de conservation de la masse de la suspension prend généralement la forme de l'équation d'advection-dispersion, avec un terme de taux à déterminer. Toutes les interactions sont ensuite considérées de manière globale. Le dépôt de particules est traité comme une réaction chimique réversible hétérogène du premier ordre, qui rend compte des effets de surface et apparaît sous forme de condition aux limites en surface du collecteur. De même, dans la plupart des cas étudiés, la cinétique de la réaction est du premier ordre, les interactions entre particules sont donc implicitement négligées, car les suspensions étudiées sont diluées. L'équation d'advection-diffusion est généralement simplifiée en négligeant les termes d'accumulation (terme de variation temporelle) et de diffusion, la première hypothèse paraissant d'autant plus critiquable que la filtration est un processus intrinsèquement transitoire. Une équation de conservation de la charge et une équation de conservation de la masse en surface du milieu filtre, qui donne la variation de porosité, peuvent également être ajoutées à l'équation d'advection-dispersion. La chute de pression est calculée à partir de l'équation de Kozeny-Carman. Les équations sont couplées par l'intermédiaire du taux de dépôt local.

Afin d'obtenir des résultats quantitatifs, les modèles développés s'appuient sur un certain nombre d'hypothèses limitatives, parmi lesquelles l'hypothèse d'écoulement incompressible et stationnaire, New-

tonien, de suspensions diluées (équation de Stokes généralement supposée vérifiée pour l'arrangement de particules), de diffusion moléculaire négligeable, voire de porosité constante ([100], [119], [102], [95]). Les modèles sous-jacents sont des modèles de tubes capillaires, qui tentent de résoudre directement les équations de Navier-Stokes, en introduisant des simplifications non réalistes qui rendent les résultats obtenus non significatifs ([104]). Les résultats de ces modèles sont généralement qualitativement corrects, mais quantitativement mauvais ([100]). La complexité des interactions qui causent la filtration peut être invoquée pour expliquer les désaccords entre modèles théoriques et résultats expérimentaux, de plus la filtration est un processus intrinsèquement transitoire et évolutif, le rapport des forces en présence change constamment au cours du dépôt. Les expressions obtenues ne peuvent être extrapolées ni à la construction d'un modèle macroscopique de filtration, ni au cas de la suspension de coulis de ciment en l'absence de notions précises sur le mode de filtration prédominant, la nature précise des interactions microscopiques, et les intensités de ces interactions.

Les travaux de filtration existants cherchent souvent à obtenir une théorie qui permette de corréler toutes les variables affectant le processus de filtration. **W**nek et al. ([117]), Yao et al. ([119]) reprennent l'hypothèse d'additivité des contributions des différents mécanismes pour calculer le dépôt sous l'effet de la diffusion, de l'interception, de la sédimentation et des forces de surface. Les mécanismes dominants sont alors obtenus par des considérations d'ordres de grandeur relatifs ([102], [98]) des termes du taux de dépôt qui font intervenir un certain nombre de paramètres adimensionnels (nombre de Péclet, nombre de Reynolds, nombre de London, groupe électrocinétique, groupe de gravité ou nombre de Strouhal, groupe de double couche). Compte tenu de la variété des forces responsables de la filtration, incluant la gravité, les effets d'inertie, l'interception, la résistance hydrodynamique, les forces de surface (forces de Coulomb associées aux doubles couches électriques, forces de Van der **W**aals, forces de London), les expressions obtenues sont complexes ([47]) et difficilement exploitables pour des calculs pratiques en l'absence de données expérimentales précises. Par ailleurs, les expériences de filtration sont difficiles à mettre en oeuvre, et ne sont pas généralisables d'un type de matériau à l'autre, à cause du rôle joué par les interactions électriques. La capture d'une particule dans un milieu filtre est déterminée par les mécanismes de transport mais également par les forces de courte portée qui jouent un rôle dominant dans l'attachement des particules au milieu filtre. Les taux d'adsorption calculées varient beaucoup, d'une proportion de un à dix, pour des variations faibles de la taille des particules ou de la résistance ionique. Aucune dépendance claire n'est obtenue en fonction de la géométrie du collecteur (milieu poreux) ou de l'allure de l'écoulement.

Il est difficile de relier précisément les paramètres macroscopiques avec les mécanismes élémentaires d'occlusion : sites de rétention, forces de rétention, et taux de capture pour les processus élémentaires, le taux de capture global étant obtenu par sommation des taux élémentaires. S'il est possible de mettre

en évidence les mécanismes prépondérants pour un système particulier, il reste difficile d'évaluer la contribution de chacun de ces effets. Lorsque les forces de surface sont prises en considération, il convient de disposer d'information sur les caractéristiques de surface de la suspension et des particules du filtre ([117]), information souvent indisponible.

Il n'existe pas actuellement de modèle qui permette de prédire l'efficacité de récupération (ou le taux de filtration) des milieux filtres à partir des caractéristiques de la suspension et des particules du filtre, sur la base d'une description mathématique exacte, avec des constantes théoriques de filtration ([87]). Tous les modèles mathématiques de filtration recensés contiennent un certain nombre de constantes empiriques, qui ne possèdent généralement pas d'interprétation physique directe, et sont basées sur une série d'observations expérimentales sur le mode ou la quantité de dépôt ([84], [117]). Quelle que soit l'approche suivie, il n'apparaît pas de consensus sur les relations entre le coefficient de filtration, et les grandeurs macroscopiques telles que la quantité de dépôt, la chute de pression ou la perméabilité. De plus, l'évolution de ces variables est mal connue. Par exemple, Deb ([29]) obtient par un modèle phénoménologique et par des expériences que le taux de filtration augmente avec la quantité de dépôt, avant de subir une décroissance, tandis que Sharma et al. ([102]) prouvent la décroissance continue du taux de filtration à partir d'une approche théorique. L'étude expérimentale s'impose donc comme préalable à toute étude théorique, car la plupart des lois proposées pour le taux de filtration sont des lois phénoménologiques qui doivent être renseignées par des données de filtration. Les données de filtration peuvent consister en des mesures locales de perméabilité ou de dépôt volumique ([98]).

2.6 Conclusion

Le problème essentiel en filtration est la rareté des données exploitables pour la formulation d'un modèle. En particulier le manque d'informations sur le mode de dépôt impose de faire des hypothèses arbitraires sur la distribution du dépôt en surface du milieu filtre, qui est généralement supposée régulière. Sans tenter de comprendre la physique des phénomènes concernés, des courbes ou des équations heuristiques peuvent alors être ajustées aux données expérimentales de manière à obtenir une corrélation entre la chute de pression et la vitesse d'écoulement. Cependant, ce type de démarche qui consiste à retrouver les résultats expérimentaux en ajustant les paramètres d'un modèle arbitrairement choisi (fonction du nombre de Reynolds, du facteur de frottement et de l'arrangement des particules), ne conduit pas à un modèle prédictif, et ne permet pas d'obtenir une meilleure compréhension des phénomènes impliqués.

D'autre part, les modèles théoriques décrits ci-dessus, s'ils permettent de mieux cerner les mécanismes de filtration, ne sont pas extrapolables à une approche continue, car il s'agit de modèles microscopiques, fonctions d'un certain nombre de facteurs adimensionnels définis et mesurables à l'échelle microscopique,

telle que la résistance ionique, qui influence beaucoup la valeur du taux de filtration ([100]). De même, les résultats obtenus pour un type de matériau ne sont valables que pour ce matériau, et il n'est fait mention nulle part dans la littérature de mesures sur un coulis de micro-ciment, sans compter l'effet du superplastifiant qui ne peut être omis.

Une approche différente est suivie, qui consiste à intégrer le phénomène de filtration dans le cadre d'un modèle continu développé à partir de la considération des interactions entre différentes phases. A l'échelle microscopique, dans les modèles passés en revue, l'adsorption est généralement exprimée par une condition aux limites en surface du collecteur. Par une procédure de moyenne à l'échelle macroscopique, la condition de surface microscopique sera intégrée à l'équation de d'advection-diffusion macroscopique, sous la forme d'une intégrale de surface à l'interface du milieu filtre, qui peut être vue comme un terme source ou réactif fonction de la concentration (section 4.6.2). Une approche macroscopique globale est considérée dans la prise en compte de la filtration, sans que l'accent soit mis sur un mécanisme de dépôt particulier. Le terme de filtration introduit autorise en particulier la prise en compte de la sédimentation de façon implicite.

Chapitre 3

ASPECTS PHYSIQUES. DEVELOPPEMENT DU MODELE CONCEPTUEL

3.1 Introduction

Quelques expériences préliminaires simples, présentées brièvement dans ce chapitre, ont permis d'introduire des hypothèses essentielles pour le développement du modèle.

3.2 Mise en évidence de la miscibilité

Une série d'expériences préliminaires, de l'observation visuelle à l'injection dans une colonne unidimensionnelle de laboratoire, ont permis de mettre en évidence la miscibilité.

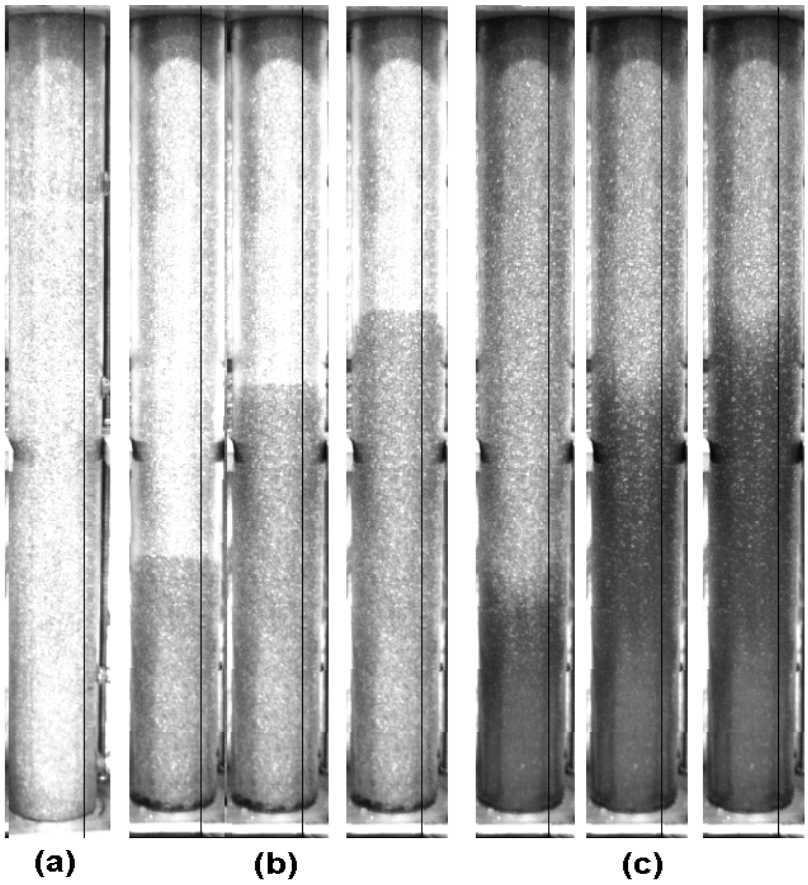
Dans le cas de l'injection, lorsqu'un fluide déplace le fluide intialement présent dans l'espace interstitiel, deux cas de figure se présentent. Si les deux fluides ne sont pas miscibles, le fluide injecté remplace simplement le fluide initial. La zone de séparation est une surface physique, bien définie. En revanche, lors de l'écoulement lent de deux fluides miscibles dans un milieu poreux, on rencontre des conditions proches d'un écoulement monophasique. Cet écoulement est caractérisé par l'absence de phénomènes capillaires et de tensions interfaciales entre les deux liquides. Si les deux fluides sont miscibles, le fluide injecté se mélange avec le fluide initial sur un volume fonction de la distance totale parcourue, il n'y a plus de séparation explicite entre les deux phases mais création d'une zone de transition, où coexistent

coulis humide et eau, qui est un volume : c'est ce qu'on appelle le phénomène de dispersion ([105]). L'étude de cette zone de transition, de taille variable selon les fluides en présence, et donc de l'importance du phénomène de miscibilité, doit s'effectuer par un modèle prenant en compte la dispersion en milieu poreux (section 7.6).

3.2.1 Mise en évidence visuelle : existence d'une zone de transition, absence de frontière nette

La première observation a été faite en mélangeant le coulis et l'eau, suivant des proportions définies, dans un bécher, et en observant l'évolution temporelle du mélange. Il n'apparaît pas alors de séparation nette entre le coulis et l'eau, la solution résultante est un coulis plus dilué, elle est stable. Le ressuage, représentant la zone claire, exempte de coulis, qui apparaît au sommet de l'éprouvette, c'est-à-dire la quantité d'eau qui n'est pas retenue par la suspension ([118]), est systématiquement mesuré lors des essais. Une partie du coulis préparé pour les injections est placé à cet effet dans une éprouvette de 100 ml. Au bout de 5 heures, le ressuage représente 0.8 % du volume total, au bout de 10 heures, le ressuage s'élève à 1.4 %, et la solution de coulis, la couche d'eau de ressuage exceptée, est toujours d'apparence homogène. Le coulis mélangé à l'eau occupe donc un volume apparent supérieur à celui qu'il est censé occuper si les deux fluides sont immiscibles, les volumes occupés par les deux phases étant distincts dans ce cas (exemple de l'huile et l'eau). La miscibilité est donc bien réelle au sein de la phase fluide. Il est également possible de mettre en évidence la miscibilité à l'échelle du milieu poreux, la miscibilité des deux fluides se trouve même accentuée par le phénomène de dispersion mécanique dû à la nature particulière des chemins d'écoulement suivis dans le milieu poreux ([42]).

Des essais unidimensionnels en laboratoire ont été entrepris afin d'étudier la propagation du coulis pour une géométrie simple, et de caractériser certains paramètres du modèle. Les essais sont détaillés au chapitre 7. A l'instant initial de l'injection du coulis dans la colonne, lorsque le coulis arrive à la base de la colonne, il existe un front abrupt qui sépare le domaine poreux occupé par l'eau interstitielle initialement présente, de celui occupé par le coulis de ciment. Si les deux fluides déplaçant et déplacé sont immiscibles, les deux parties du fluide continuent à occuper des domaines séparés par un front abrupt au cours de l'injection. Cependant, l'observation de la propagation du coulis dans la colonne par analyse d'images, et la confrontation à l'essai de saturation à l'eau qui précède l'injection au coulis, montrent qu'un tel front abrupt n'existe pas pour les composants coulis et eau. La Fig.3-1 représente une série de photos prises lors d'une injection en colonne unidimensionnelle. La photo (a) représente la colonne de sable à sec, les trois photos suivantes (photos (b)) montrent l'avancée du front d'eau lors de la saturation à l'eau de la colonne. Les deux fluides concernés sont alors l'eau et l'air, deux fluides immiscibles. L'expulsion progressive de l'air par imprégnation d'eau (la saturation a lieu à vitesse relativement faible) se traduit



Figure~3-1: Injection d'un coulis de ciment micro-fin dans une colonne remplie de sable du Léman. (a) : sable sec. (b) : saturation à l'eau. (c) : injection au coulis.

par un front net séparant les deux phases, et ce tout au long de la propagation de l'eau le long de la colonne.

Sur la Fig.3-1 sont également représentés des instants successifs d'injection au coulis, sur les trois photos de droite désignées par (c). Il apparaît clairement lors de l'injection au coulis qu'au lieu de la propagation d'un front abrupt séparant les deux phases, il se produit une transition graduelle du domaine occupé par le coulis pur au domaine occupé par l'eau pure. L'expérience montre qu'à mesure que l'écoulement continue, la largeur de la zone de transition augmente. Cet étalement du fluide injecté, au-delà de la zone qu'il est censé occuper d'après la description du mouvement fluide par la loi de Darcy, et l'évolution d'une zone de transition, ne peuvent être expliqués par la convection pure. Ce phénomène d'étalement du front caractérise l'écoulement de fluides miscibles, il s'agit de la dispersion hydromécanique.

3.2.2 Un calcul simple

Le phénomène de dispersion peut être illustré par une expérience simple de laboratoire. L'expérience consiste en l'injection d'une colonne de milieu poreux homogène saturé, en conditions d'écoulement stationnaire sous débit constant Q (l'expérience est détaillée au chapitre 7). La miscibilité est vérifiable par un calcul simple. Si le coulis injecté subit un mouvement de convection pure, le volume injecté se déplace comme un volume de forme fixée, les positions successives du front peuvent être calculées par la relation $x = V_f t$ (V_f désigne le module de la vitesse de pore instantanée calculée à partir du débit, $V_f = \frac{Q}{nS}$, n la porosité et S l'aire de la section droite de la colonne). En particulier, le fluide arrive au sommet de la colonne à l'instant $t_{théorique} = \frac{L}{V_f}$ (L désigne la hauteur de la colonne). Or il a été observé au cours des essais que l'eau se trouble bien avant l'arrivée du front théorique, l'instant d'apparition du coulis au sommet de la colonne $t_{sortie} < t_{théorique}$ correspondant au modéle de convection pure.

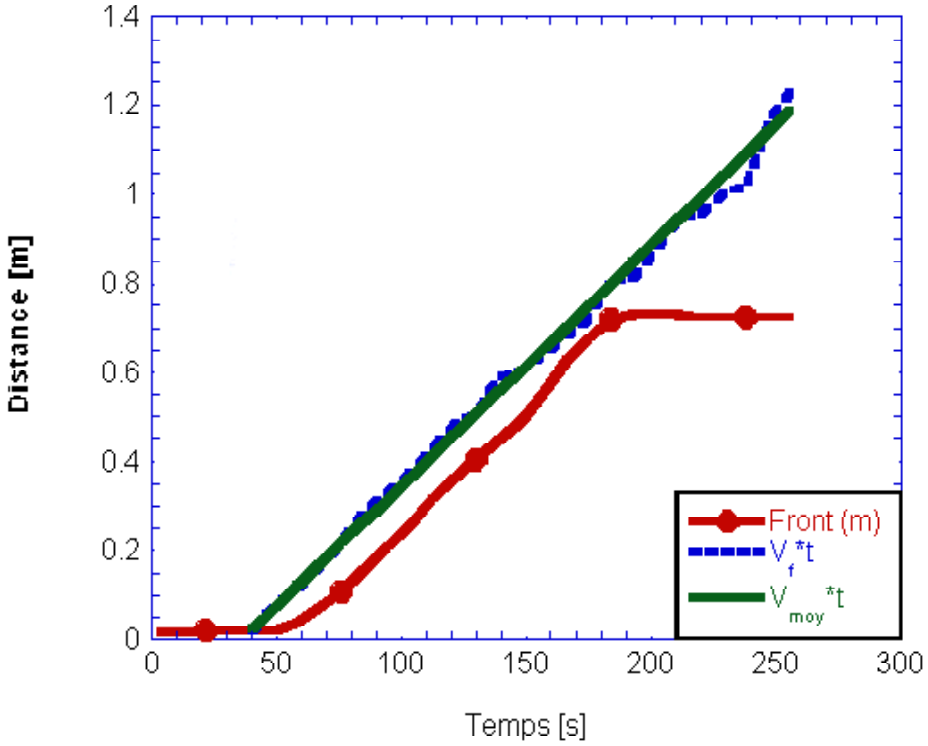
Une procédure a été mise au point pour le suivi du front de coulis au cours de sa propagation dans une colonne unidimensionnelle (section 7.6). La figure suivante Fig.3-2 reporte les positions successives du front de coulis telles que mesurées au cours d'un essai d'injection dans une colonne unidimensionnelle, et les positions théoriques données par application de la loi de Darcy en l'absence de dispersion : $x = \mathbf{V}_f t$. V_{moy} est le module de la vitesse moyenne de pore sur l'ensemble de l'essai, elle est quasiment confondue avec la vitesse instantanée car l'essai est asservi en débit. L'écart entre les positions du front abrupt et les positions du front réel montre l'effet de retard du front par rapport à la position théorique, qui ne peut être expliqué sur la base de la loi de Darcy.

Ainsi, le front réel est situé derrière le front abrupt d'une propagation sans dilution, tandis que le coulis apparaît en sortie de colonne avant le temps théorique calculable à partir de la loi de Darcy. Ces deux constatations illustrent l'étalement du front réel par rapport au front théorique (voir Fig.7-3 au chapitre 7).

Les observations ci-dessus ne peuvent s'expliquer sur la base de la vitesse moyenne d'écoulement ou de la diffusion moléculaire pure. Il faut se référer à ce qui se produit au niveau microscopique, dans l'espace interstitiel ([42]). Au sein du milieu poreux, des variations des vitesse se produisent en amplitude et en direction à travers la section droite d'un pore. L'hétérogénéité du champ de vitesses, conjuguée à la diffusion moléculaire et à la géométrie particulière de l'espace interstitiel, provoque le mélange des deux fluides en écoulement dans le milieu poreux.

3.2.3 Choix de la représentation du système

Plusieurs modèles sont possibles pour décrire le fluide présent dans l'espace interstitiel : système modélisé sous forme de suspension dans une phase fluide unique, modèle miscible, ou modèle immiscible. Dans



Figure~3-2: Détermination expérimentale de la position du front.

une approche suspension, les grains sont dissociés de l'eau interstitielle, les composantes sont l'eau interstitielle, les grains de ciment en suspension dans l'eau interstitielle (la couche d'eau liée est négligée, les grains sont complètement désolidarisés de la phase aqueuse), et la phase solide sur laquelle viennent se fixer des particules de coulis. Il est alors possible de définir la concentration en grains de ciment comme la masse de grains de ciment par unité de volume de la phase fluide. Dans une approche immiscible, la phase fluide interstitielle initialement présente est traitée séparément de la suspension de ciment, les phases considérées sont les deux phases fluides distinctes : l'eau interstitielle, le coulis de ciment comprenant l'eau et les grains de ciment hydratés, et le solide en surface duquel se fixe le coulis de ciment au cours de la filtration. Dans un modèle miscible, il n'y a que deux phases en conditions saturées, la phase solide et la phase fluide comprenant l'eau et le coulis de ciment (eau initialement présente, et grains de ciment hydratés formant une solution aqueuse supposée homogène) supposés miscibles.

Le choix entre les trois représentations possibles du système doit tenir compte de la réalité du milieu étudié, tout en considérant les modélisations possibles, compte tenu de la finalité du modèle et des observations possibles à travers des expériences macroscopiques. La réalité se situe entre les deux modèles miscibles. La miscibilité entre la solution de coulis de ciment et la solution interstitielle a été prouvée par des expériences simples au chapitre précédent, et par l'identification de la constante de dispersion longitudinale en milieu poreux (section 7.6). Dans le modèle miscible de type suspension, la modélisation impose de connaître les interactions entre les grains solides et la phase fluide, entre les grains eux-mêmes (solution concentrée), ainsi que les interactions entre les grains et le squelette solide. Il existe des relations pour les interactions fluide-solide, dans le cas d'une particule en solution (formule de Stokes), mais ces expressions doivent généralement être corrigées, et il n'existe pas de relation générale pour des solutions très concentrées, lorsque les interactions entre particules peuvent être prépondérants. De plus, le modèle de type suspension est différent du système réel, la solution de coulis ne peut pas être regardée comme un assemblage inerte de grains et d'eau. Les grains de ciment ne sont pas des particules inertes, mais sont entourés d'une pellicule d'eau liée (grains de ciment hydratés, couche de Gouy-Chapman) dont les propriétés physiques (viscosité) changent. La solution est concentrée en ciment, la solution obtenue est structurée sous l'effet des forces d'interaction (entre particules solides, squelette solide et fluide), ce qui rend la solution homogène ([76]). Le modèle le plus pratique et le plus réaliste est le modèle miscible pour lequel une phase fluide unique sature l'espace interstitiel, le coulis de ciment étant traité comme une composante homogène de la phase fluide non homogène. En ce cas, la concentration massique en coulis de ciment est définie par la masse de coulis de ciment par unité de volume de la phase fluide. La représentation miscible est retenue, et la solution de coulis est traitée comme une solution homogène durant la phase de propagation du coulis.

3.2.4 Filtration. Mise en évidence de la filtration par des essais préliminaires

Un des aspects fondamentaux au cours de l'établissement du modèle conceptuel est la mise en évidence de la filtration. La filtration a été mise en évidence par une série d'essais préliminaires sur petite colonne, et a également été constatée lors des essais sur colonne longue et lors de l'injection d'une modèle cylindrique en vraie grandeur.

Un dispositif unidimensionnel a été initialement conçu (les expériences en laboratoire sont détaillées au chapitre 7) pour déterminer les variations de perméabilité pour différentes valeurs de concentration d'entrée du coulis dans le milieu. L'objectif premier de ces essais était de corréler une fonction de perméabilité avec la variable de concentration en coulis, de manière similaire à la dépendance de la fonction de perméabilité vis-à-vis de la saturation fluide S_w en conditions partiellement saturées. De nombreuses études ont en effet développé des équations empiriques ou semi-empiriques, appelées fonctions capillaires, pour s'ajuster à la courbe de désaturation ou de drainage ([42], [66], [107]). Une telle recherche, cherchant à tirer avantage des relations développées entre pression capillaire et saturation, s'appuie sur l'analogie qui peut être faite au premier abord entre le degré de saturation (proportion des vides de l'espace interstitiel occupés par l'eau) et la concentration en coulis (proportion relative de la composante coulis dans la phase fluide). La procédure expérimentale est décrite en section 7.3. Les méthodes employées pour caractériser la relation pression-capillaire-saturation reposent toutes sur l'existence d'un état d'équilibre, pour lequel la pression capillaire (imposée) et la saturation (mesurée) sont définies de manière unique, si l'hystérèse est négligée. Il existe une relation entre la pression capillaire et la saturation en eau, du moment que l'historique des procédés d'imbibition et de drainage est connu. De même, les résultats expérimentaux ([66], [107]) montrent que la perméabilité relative, définie comme le rapport entre les perméabilités saturée et non saturée, dépend de la saturation.

Cependant, dans le cas de l'injection d'un fluide miscible dans un échantillon préalablement saturé, un tel équilibre n'existe pas. En effet, comme aucune tension de surface ne s'oppose à la pénétration du composant miscible, la variation de concentration est continuelle. En l'absence de filtration, l'écoulement se poursuit sous l'effet du gradient de concentration, jusqu'à ce que la phase fluide interstitielle atteigne une concentration uniforme. En régime d'écoulement, en l'absence de filtration, le fluide miscible injecté remplace peu à peu la phase fluide interstitielle initialement présente, tout en se mêlant à elle. Pour que l'état stationnaire s'établisse, en l'absence de filtration, il faut que la concentration $\overline{\rho^g}^f(\mathbf{x}, t)$ du coulis dans l'espace interstitiel soit uniforme. Le seul équilibre possible est $\overline{\rho^g}^f(\mathbf{x}, t) = cte$ qui montre que la perméabilité intrinsèque k est indépendante de $\overline{\rho^g}^f$. Le milieu reste saturé, et la perméabilité intrinsèque en milieu saturé ne s'en trouve pas modifiée. Aussi la perméabilité intrinsèque ne dépend-t-elle pas de la concentration en l'absence de filtration. Contrairement aux deux constituants immiscibles qui occupent des positions bien définies dans les vides du milieu poreux, le constituant miscible occupe tout l'espace

fluide qui lui est offert. Il n'y a qu'en seule phase présente, qui s'homogénéise progressivement sous l'effet de la dispersion hydromécanique et de l'écoulement. Ceci constitue une différence essentielle par rapport au problème de l'écoulement non saturé, pour lequel seule une partie de l'espace interstitiel au voisinage d'un point est occupée par l'eau.

Si la filtration est présente, le problème se complique car les milieux fluide et solide en présence sont évolutifs. Sous l'effet d'un transfert de masse du coulis vers la surface du squelette poreux, la structure du milieu poreux varie, et la perméabilité intrinsèque, fonction de la distribution des vides interstitiels, varie effectivement en fonction de la quantité de dépôt. Lorsque la filtration est présente, la dépendance de k vis-à-vis de $\overline{\rho^g}^f$ est indirecte. Mais là encore il est difficile d'établir une relation biunivoque, du type quantité de dépôt - porosité, lors des essais, car le milieu est en constante évolution, et il existe un grand nombre d'arrangements de pores et de modes de dépôt possibles qui conduisent aux mêmes valeurs de porosité ou de quantité de dépôt ([84]), et donc à la même relation porosité-quantité de dépôt, ou perméabilité-quantité de dépôt. Même lorsque la porosité ou d'autres indicateurs macroscopiques de la structure du milieu poreux restent fixés, il existe une infinité d'arrangements de pores, et donc de modes de dépôt possibles, indétermination qui rejoint l'hysterèse de la relation $k - S_w$ (saturation résiduelle liée à la présence d'une fine couche d'eau adsorbée)

Les différences constatées, entre mesure de perméabilité relative en milieu non saturé et mesure de perméabilité au coulis, renvoient en réalité à un comportement d'écoulement fondamentalement différent au niveau microscopique. Pour les fluides immiscibles, l'écoulement se produit dans des canaux séparés (cas de l'huile par exemple, phase non mouillante qui occupe d'abord les pores les plus larges à mesure que la saturation en eau diminue), tandis que les composantes miscibles d'une même phase s'écoulent dans les mêmes canaux du réseau poreux ([42]). Pour les fluides miscibles, la concentration et le gradient de pression macroscopiques sont des variables indépendantes, même s'il apparaît une dépendance indirecte (par l'intermédiaire de la quantité de dépôt) lors de la filtration. Il y a plus d'une variable indépendante, il faut tenir compte à la fois de la concentration et du dépôt volumique, la perméabilité est liée à la quantité de dépôt, et non à la concentration.

Ces tests n'ont pas permis d'aboutir à une correspondance biunivoque entre les valeurs de perméabilité intrinsèque mesurées et les valeurs imposées de concentration du coulis en entrée. Par ailleurs, il est difficile d'imaginer ou d'obtenir une relation entre perméabilité et quantité de dépôt, car le processus de filtration, intrinsèquement transitoire, signifie l'absence d'état d'équilibre, par contre un certain nombre d'observations ont pu être faites, qui se sont avérées d'importance cruciale pour le développement itératif du modèle. Les résultats sont présentés sur les figures Fig.3-3, Fig.3-4 et Fig.3-5 pour un essai type.

Sur la figure Fig.3-3, le flux sortant est représenté en fonction du temps, pour les trois périodes successives qui caractérisent ces essais : saturation initiale du milieu poreux par injection à l'eau, injection de

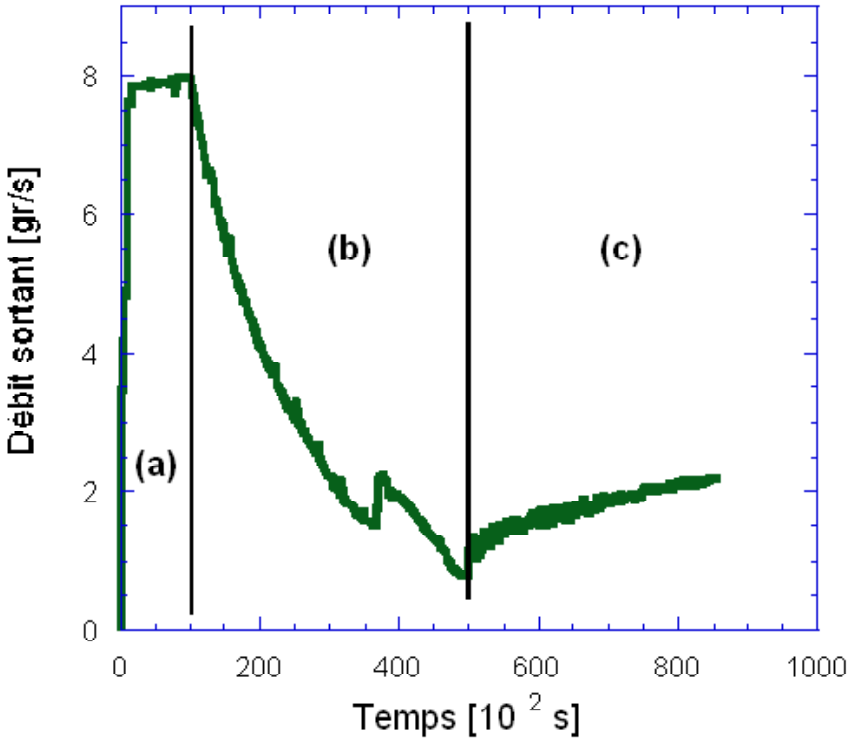
coulis de ciment, seconde injection à l'eau, toutes les trois conduites sous la même pression d'injection de 50 kPa. Comme prévu pour un fluide incompressible s'écoulant à travers un milieu quasi-incompressible, la première injection à l'eau (saturation) est caractérisée par une proportionnalité directe et instantanée entre la pression imposée et les valeurs de débit de sortie. La fonction de perméabilité k est définie à partir ce facteur de proportionnalité, d'après la loi de Darcy qui relie la décharge spécifique du fluide au gradient de pression macroscopique :

$$n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) = -\frac{k}{\overline{\mu}^f}\left\{\nabla\overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f\mathbf{g}\right\} \tag{3.1}$$

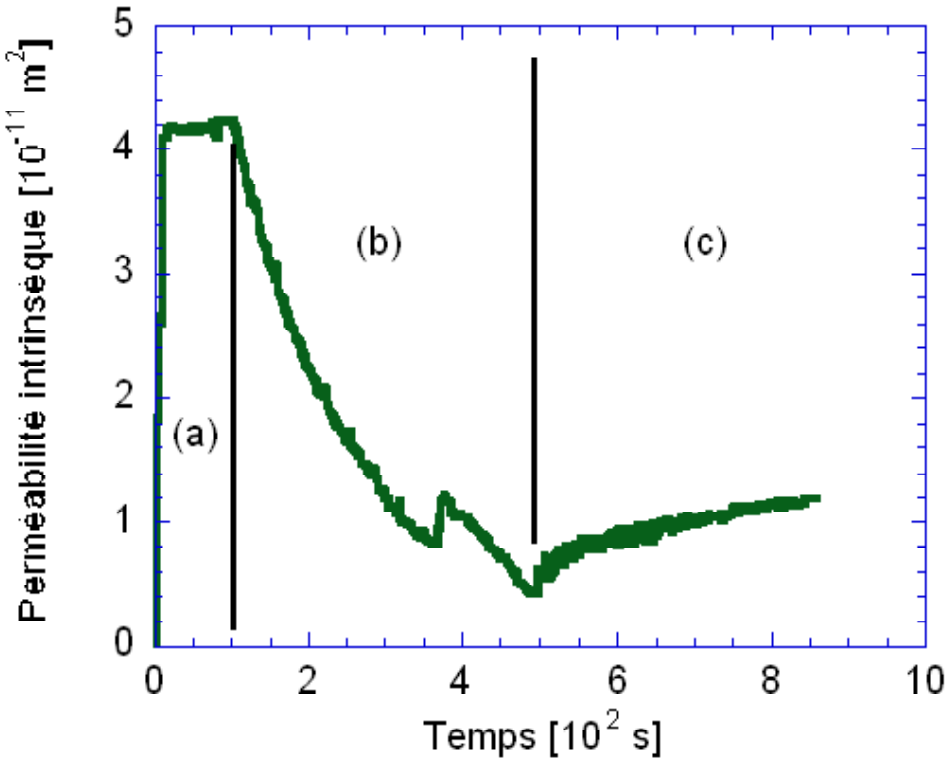
Dans l'Eqn.3.1, $\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ désigne le vecteur vitesse macroscopique de la phase α, $\alpha = s, f$ désignant les phases solide et fluide respectivement, k est la perméabilité intrinsèque du milieu poreux sous conditions isotropes, $\overline{\mu}^f$ est la viscosité de la phase fluide, $\overline{p}^f$ est la pression fluide macroscopique. Cette loi est détaillé plus loin dans la section 4.6.3. La perméabilité intrinsèque k, calculée par application de la loi de Darcy Eqn.3.1, est représentée en Fig.3-4 pour les trois parties de l'essai. k est constante lors de l'injection à l'eau, et vaut pour cet essai $k = 4. \cdot 10^{-11}\ m^2$, valeur représentative de l'ensemble des essais réalisés avec le sable de fonderie. Au cours de l'injection au coulis (partie (b) sur les figures Fig.3-3 et Fig.3-4) qui suit immédiatement l'injection à l'eau, le flux sortant subit une décroissance parabolique continue, sans asymptote, parfois jusqu'à l'arrêt complet de l'écoulement, ce qui empêche toute détermination d'une valeur de perméabilité. Il n'est en particulier pas possible d'exprimer la perméabilité comme une fonction de la concentration.

Un calcul de réduction de porosité effective a été effectué en utilisant l'équation de Kozeny-Carman, d'usage courant (voir section 4.6.3), pour relier les propriétés de la matrice poreuse à la perméabilité du milieu poreux, afin d'exploiter les données de flux sortant et le gradient de pression connu pour en déduire une indication qualitative de la réduction de porosité. Les résultats de l'injection à l'eau (partie (a)) sur la figure Fig.3-5 montrent que les modifications de la structure poreuse induites par la déformation du squelette peuvent être négligées en première approximation pour les essais d'injection unidimensionnels en laboratoire conduits sur une colonne indéformable, et la consolidation du milieu ne peut être invoquée pour expliquer les différences des valeurs du flux sortant observées pour l'eau et le coulis sous une même différence de pression imposée.

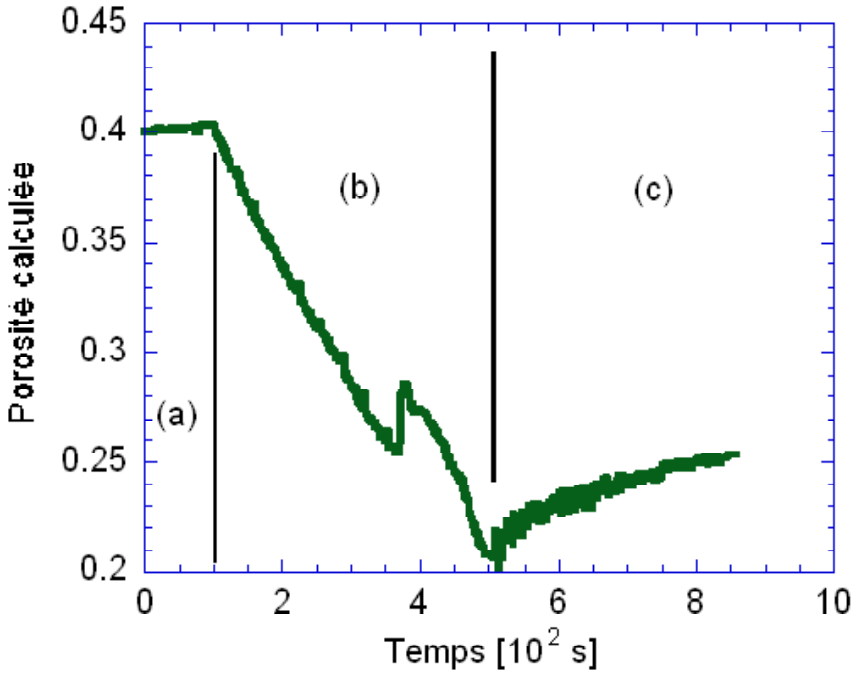
Les effets visqueux, présents au cours de l'injection au coulis, ne peuvent expliquer l'amplitude de la réduction du flux sortant observée ($\frac{1}{10}$ dans la plupart des essais d'injection au coulis), car la viscosité du coulis pur, qui peut être considéré comme un fluide Newtonien, est du même ordre de grandeur que celle de l'eau. De plus, pour un fluide visqueux Newtonien, le flux sortant se stabilise lorsque l'espace interstitiel est presque complètement saturé en coulis, d'après la loi de Darcy (Eqn.3.1) appliquée avec une



Figure~3-3: Débit sortant en fonction du temps pour les trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c).



Figure~3-4: Variation de perméabilité intrinsèque au cours des trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c).



Figure~3-5: Porosité calculée (loi de Kozeny-Carman) en fonction du temps au cours des trois essais successifs : saturation et injection à l'eau (a), injection au coulis (b), seconde injection à l'eau (c).

viscosité et un débit sortant constants pour un milieu fluide quasi-homogène. A l'inverse, les expériences réalisées mettent en évidence une décroissance persistante du flux sortant au cours des essais d'injection au coulis, qui persiste longtemps après l'apparition du coulis en sortie de colonne, autour de $t = 300\ s$ (Fig.3-3).

Au cours de la seconde injection à l'eau qui succède immédiatement à l'injection du coulis, à mesure que le coulis restant dans les pores est évacué par l'eau injectée, les effets viqueux doivent s'atténuer progressivement et finir par disparaître. Aussi, en l'absence de dépôt de particules, le régime d'écoulement devrait tendre vers le régime d'écoulement initial, observé au cours de la première injection à l'eau (mesure de perméabilité à l'eau initiale). Cependant, la seconde injection à l'eau montre un comportement transitoire, présent bien après que le coulis encore présent dans les vides du milieu poreux ait été théoriquement récupéré dans le produit effluent, et le débit tend vers une asymptote bien inférieure à la valeur de débit initial.

Ce retard à atteindre un état d'équilibre, et une valeur de débit asymptotique inférieure au débit de départ, peuvent être partiellement attribués à la présence de coulis stagnant, qui n'est pas complètement récupéré par la seconde injection à l'eau. Pourtant l'efficacité d'injection est supposée être élevée dans le cas des déplacements par fluides miscibles. Selon Marle et l'expérience acquise en ingéniérie pétrolière ([83]), le taux de récupération du fluide initialement présent est de l'ordre de $80 - 90\%$ du volume total injecté. En conséquence, l'amplitude de la réduction de perméabilité observée à la fin de la seconde injection à l'eau, comparée à la valeur de perméabilité initiale (cf. Fig.3-4, $\frac{1}{10}$ dans la plupart des expériences), ne peut s'expliquer par la modification des propriétés du fluide (viscosité, densité), parce que le coulis ne reste pas en proportions suffisantes pour induire une variation aussi significative des propriétés du fluide. La réduction de perméabilité se rapporte nécessairement à une modification de la structure du milieu poreux. Ceci indique clairement la présence d'un autre processus physique : la filtration. L'échantillon subit vraisemblablement un lessivage au cours de la seconde injection à l'eau, tandis qu'une partie du dépôt reste retenue en surface du squelette solide.

Ainsi que l'atteste la figure Fig.3-5, à la différence de la valeur de porosité obtenue à la fin de la première injection à l'eau, qui reste proche de la valeur de porosité initiale, la porosité effective décroît de manière critique au cours de l'injection au coulis, et la porosité est réduite de 37.5 % à la fin de la seconde injection à l'eau. Une telle décroissance de porosité effective, lorsque les effets visqueux ne sont plus présents (injection à l'eau), est directement liée à la structure du milieu poreux, et ne peut être expliquée par les effets de consolidation. Pour conclure cette section, un modèle incorporant le dépôt des grains en surface du squelette solide est nécessaire.

3.3 Bilan et orientation de la recherche

La miscibilité entre coulis de ciment et eau interstitielle initialement présente, et le phénomène de filtration, ont influé sur l'orientation de la recherche, qui devait initialement être consacrée essentiellement au couplage hydro-mécanique (soulèvement, déformations engendrées par l'injection). Du point de vue du contrôle de l'injection, il est important de caractériser la taille de la zone de transition, qui influe sur l'efficacité de l'injection, les zones les plus diluées donnant après prise et hydratation des zones de moindre résistance. Une étude de la dispersion est proposée au chapitre 7. De même, pour obtenir une prédiction réaliste des pressions et donc de la distribution de la concentration - le calcul de la vitesse et donc de la pression fluide est primordial car le champ de concentration subit essentiellement une convection avec l'écoulement moyen, la filtration doit être explicitement prise en compte. En outre, la filtration se traduit par une montée en pression généralement importante, qui peut induire des déformations locales non négligeables du squelette solide, et gêner le bon déroulement de l'injection.

Des couplages supplémentaires apparaissent entre écoulement et transport au travers de la rhéologie particulière de la suspension injectée. L'hypothèse de traceur pour le fluide ne peut pas être retenue, les deux composantes déplaçante (coulis de ciment) et déplaçée (eau) sont de densité et de viscosité inégales. Les variations de concentration du coulis provoquent des variations de densité et de viscosité du fluide qui à leur tour affectent le régime d'écoulement (pression, distribution de vitesses du fluide).

Les différents processus de transport et de transformation étudiés comprennent le transport de masse de la phase fluide dans l'espace interstitiel, le transport de masse du coulis dans la phase fluide (advection, diffusion, dispersion), et le dépôt du coulis de ciment en surface du squelette solide par filtration, qui introduit une variable additionnelle, la masse de coulis déposée par unité de surface du squelette solide.

Tous les modèles passés en revue considèrent le transport en milieu poreux rigide, ou le plus souvent introduisent un coefficient de stockage spécifique pour traduire la déformabilité du squelette solide, sans interaction réelle entre squelette solide et écoulement ([58]). Les couplages hydro-mécaniques seront considérés ici, afin de tenir compte à la fois des transferts de masse et de quantité de mouvement entre le solide et le fluide.

Chapitre 4

MODELE MATHEMATIQUE DE PROPAGATION D'UN COULIS MISCIBLE A TRAVERS UN MILIEU POREUX SATURE DEFORMABLE

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est la formulation de l'énoncé mathématique complet du problème de transport d'un coulis injecté dans un milieu poreux saturé déformable sous forme de problème bien posé.

La première étape du processus de modélisation inclue la description verbale de la composition du système en termes de phases et de composantes présentes, des processus de transformation et de transport, ainsi que des propriétés constitutives du milieu considéré. Un ensemble de variables extensives doit être choisi pour décrire l'état du système. Le modèle conceptuel, sous-jacent à la description mathématique des différents phénomènes de transport dans le milieu poreux considéré, a été formulé au chapitre précédent.

Partant des hypothèses du modèle conceptuel et de règles de moyenne ([13]), les lois constitutives macroscopiques et les équations de conservation macroscopiques sont développées à partir de leurs cont-

reparties microscopiques, et conduisent aux équations de champ régissant les variations des variables étudiées. Les conditions initiales et aux limites sont ensuite formulées, qui sont nécessaires et suffisantes afin de garantir une solution unique des équations.

4.2 Hypothèses

Le modèle conceptuel consiste en une série d'hypothèses, arbitrairement choisies lors de l'établissement du modèle, et discutées à mesure que l'approximation et la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents est améliorée. La construction du modèle conceptuel est un processus itératif. Parce que le modèle est subjectif, et constitue une version simplifiée du système réel, il n'existe pas de modèle unique pour un problème donné. Les hypothèses du modèle conceptuel découlent des observations du chapitre précédent.

Les coulis de type suspension (ciment, bentonite-ciment) sont à l'état de dispersion-suspension dans la solution, et leur comportement est non Newtonien. Par l'ajout d'un superplastifiant, le coulis de micro-ciment, au lieu de montrer un comportement non Newtonien (plastique de type Bingham), caractéristique d'autres coulis de ciment ou de bentonite ([7]), est un fluide Newtonien de viscosité similaire à celle de l'eau (voir chapitre 7). Le coulis peut être supposé Newtonien durant la phase de propagation, et les effets d'augmentation de viscosité liés à la prise (apparition brusque d'une rigidité) sont postérieurs à la propagation du coulis.

De plus, la solution de coulis ne peut pas être vue comme un assemblage inerte de grains et d'eau ([76]) : la solution est structurée, une combinaison de forces d'interaction entre les particules solides, et entre les composantes solides et fluides la rend plus homogène à mesure qu'augmente la concentration en solide. En conséquence, la solution de coulis est traitée comme une solution aqueuse homogène, comprenant une fraction réduite de particules en suspension durant la phase de propagation.

La misciblité entre le coulis injecté et l'eau interstitielle a été prouvée par une série d'expériences simples, et la mesure de la constante de dispersion longitudinale a_L a mis en évidence une processus de dilution non négligeable du coulis lorsque celui-ci est transporté au sein de la phase fluide ([3]). La représentation miscible suivante est retenue. Le modèle miscible comprend une seule phase fluide en mouvement, composée de l'eau interstitielle et du coulis de ciment, et le squelette solide.

A mesure que les particules composant la phase fluide s'écoulent à l'intérieur des pores, elles sont transportées vers les surfaces exposées du milieu solide, et une fraction d'entre elles est filtrée. La quantité de dépôt est reliée à la surface interne (aire surfacique spécifique) et au volume interne du milieu poreux. Une fois que le contact se produit, il est implicitement supposé qu'une partie des particules est filtrée (notion d'efficacité de récupération introduite en section 4.6.2), sans réentraînement possible.

La manière dont les particules interagissent avec le fluide environnant devient prépondérante lorsque la taille des particules décroît. A mesure que la taille des particules décroît, les forces de répulsion entre les particules se font plus sensibles comparées aux forces hydrodynamiques, gravitationnelles et mécaniques imposées, et deviennent prépondérantes lorsque la taille des particules est inférieure à quelques μm, ce qui est le cas des grains de micro-ciment (matière colloïdale de diamètre $\phi_p \leq 12\ \mu m$). Il existe une relation entre l'état dispersé d'une solution (l'amplitude de la force répulsive nette entre les particules est représentée par le ζ-potentiel), la nature du mode de filtration, et le taux de filtration. En outre, pour un état dispersé optimal de la solution, atteint par l'ajout d'un superplastifiant, des taux de dépôt plus faibles sont attendus (filtration réduite), parce que des forces répulsives plus importantes maintiennent les particules mieux dispersées en solution (minimum ou maximum du ζ-potentiel). Ainsi qu'il apparaîtra par la suite, les taux de filtration, quoique non négligeables, restent suffisamment faibles pour laisser les coulis de micro-ciment imprégner des sables fins de perméabilité géométrique comprise entre $K \sim 10^{-4}$ $m.s^{-1}$ et 10^{-6} $m.s^{-1}$.

La seule frontière physique définie sépare la phase fluide du squelette solide. Les particules fluides ne peuvent pénètrer par advection au sein du squelette solide, même lorsque la filtration est présente, parce que l'interface fluide-solide est une interface matérielle. La filtration ne peut se produire que par diffusion des particules de ciment au sein de la phase fluide, depuis la phase fluide vers la phase solide, au voisinage de la surface d'interface.

Les effets thermiques sont négligés durant la phase de propagation.

L'hypothèse d'isotropie sera considérée pour l'ensemble des propriétés macroscopiques caractéristiques de la géométrie du domaine occupé par une phase (perméabilité, dispersivité, tortuosité), qu'ils soient liés à un processus de transport spécifique (dispersivité) ou qu'ils apparaissent dans un certain nombre de processus (tortuosité). Par contre le milieu poreux n'est pas homogène par rapport aux paramètres géométriques macroscopiques qui caractérisent la configuration du milieu poreux ou de l'espace interstitiel. La porosité et la perméabilité du milieu poreux en particulier, qui varient sous l'effet des déformations du squelette solide et de la filtration, ne sont pas homogènes.

La liste d'énoncés et d'hypothèses qui caractérisent le modèle conceptuel sert ensuite de base pour la construction du modèle de propagation du coulis dans un milieu poreux saturé déformable.

4.3 Loi de bilan microscopique

La description d'un processus subi par une quantité extensive E, dans un milieu continu à une seule phase, débute avec la formulation d'une équation d'équilibre pour cette quantité au voisinage d'un point arbitraire P (de vecteur position $\mathbf{x}$) dans la phase. L'équilibre instantané d'une quantité extensive E

dans un domaine fixe $\mathcal{U}$ peut être exprimé par :

$$\begin{aligned}\{taux\ d'accumulation\ de\ E\ dans\ \mathcal{U}\} &= \{flux\ net\ entrant\ de\ E\ à\ travers\ \mathcal{U}\} \\ &\quad + \{taux\ net\ de\ production\ de\ E\ dans\ \mathcal{U}\}\end{aligned}$$

et se traduit par :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{U}} e dU = -\int_S e\mathbf{V}^E \cdot \boldsymbol{\nu} dS + \int_U \rho \Gamma^E dU \tag{4.1}$$

e désigne la densité d'une quantité extensive E (quantité de E par unité de volume de la phase) d'une phase α, $\alpha = s, f$ pour les phases fluide et solide respectivement.

$\mathbf{V}^E$ est la vitesse de la quantité extensive E.

$\boldsymbol{\nu}$ est la normale extérieure unitaire sur S.

Γ^E est le taux de production interne de E, par unité de masse de la phase.

ρ désigne la densité de la phase.

Si $e\mathbf{V}^E$ est différentiable dans $\mathcal{U}$, le théorème de Gauss est applicable, et

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot \left(e\mathbf{V}^E\right) - \rho\Gamma^E = 0 \tag{4.2}$$

est l'équation différentielle d'équilibre microscopique de toute quantité extensive dans un milieu poreux.

4.4 Règles de moyenne

Le schéma d'une section plane du V.E.R. d'un milieu poreux saturé est représenté sur la Fig.4-1.

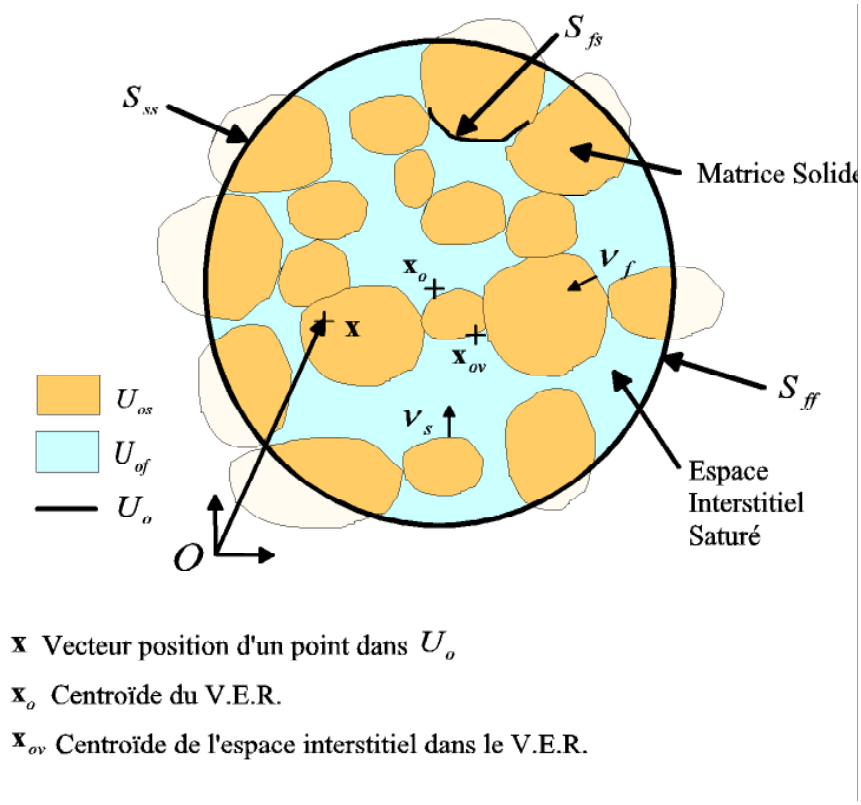
$\mathcal{U}$ désigne le domaine spatial de volume U occupé par le milieu poreux, $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ est le domaine spatial de volume U_0 d'un V.E.R., $\mathcal{U}_{0S} \subset \mathcal{U}_o$ est le sous-domaine spatial de volume U_{0S} occupé par la matrice solide, $\mathcal{U}_{0f} \subset \mathcal{U}_o$ est le sous-domaine spatial de volume U_{0f} occupé par la phase fluide, $\mathcal{U}_{0V} \subset \mathcal{U}_o$ est le sous-domaine spatial de volume U_{0V} occupé par les vides, le volume des vides étant supposé égal au volume des vides interconnectés pour simplifier.

Les positions de $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_{0S}$ et $\mathcal{U}_{0V}$ sont identifiées par les vecteurs positions $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_{0S}$ et $\mathbf{x}_{0V}$ de leurs centroïdes respectifs.

Le rapport

$$n(\mathbf{x}_0) \equiv \frac{U_{0V}}{U_0} \tag{4.3}$$

définit la porosité du milieu poreux en $\mathbf{x}_0$. Par la suite, seuls des milieux poreux dans lesquels l'espace interstitiel est multiplement connexe et saturé sont considérés. Le volume de l'espace interstitiel



$\mathbf{x}$ Vecteur position d'un point dans U_o

$\mathbf{x}_o$ Centroïde du V.E.R.

$\mathbf{x}_{ov}$ Centroïde de l'espace interstitiel dans le V.E.R.

Figure~4-1: Section plane du V.E.R.

est désigné par la suite par U_{0f}, et $n(\mathbf{x}_0)$ désigne indifféremment les porosités totale ou interconnectée.

$\theta_\alpha = \frac{U_{0\alpha}}{U_0}$ représente la fraction volumique occupée par la phase α au sein du V.E.R., $\alpha = s, f$. $\sum_\alpha \theta_\alpha = 1$ lorsque la sommation est étendue à l'ensemble des constituants compris dans le milieu poreux; pour un milieu poreux saturé, $\theta_f = n$, $\theta_s = 1 - n$, n étant la porosité macroscopique du milieu.

Des caractéristiques géométriques de la configuration de la phase α dans U_0 peuvent également être définies.

$S_{0\alpha}$ est la surface totale de la frontière du domaine $\mathcal{U}_{0\alpha}$. Cette frontière est constituée de deux parties :

S_{fs} aire totale de l'interface entre la phase fluide occupant le domaine $\mathcal{U}_{0f}$, et la phase solide dans le V.E.R..

$S_{\alpha\alpha}$ aire de la portion de surface S_0 limitant $\mathcal{U}_0$ qui possède une intersection avec la phase α, $\alpha = s, f$.

$S_{0\alpha} = S_{fs} + S_{\alpha\alpha}$, $\alpha = s, f$.

$S_0 = S_{ss} + S_{ff}$.

La possibilité d'un contact entre les phases fluide et solide sur S_0 est négligée. Deux surfaces spécifiques sont définies : $\sum_{fs} = \frac{S_{fs}}{U_0}$, $\sum_{\alpha\alpha} = \frac{S_{\alpha\alpha}}{U_0}$, $\alpha = s, f$.

Comme l'espace interstitiel et la matrice solide sont interconnectés (multiplement connexes), $S_{\alpha\alpha} \neq 0$, $\alpha = s, f$.

Partant de la description des phénomènes de transport à l'échelle microscopique, des règles de moyenne sont obtenues par Bear et Bachmat ([13]) pour transformer le niveau microscopique de description en un niveau macroscopique, dans lequel toutes les variables d'état et les paramètres sont des quantités macroscopiques.

La barre supérieure $\overline{()}$ représente une quantité moyennée sur le Volume Elémentaire Représentatif (V.E.R.) :

$\overline{e} = \frac{1}{U_0} \int_{U_0} e dU$ est la densité macroscopique de E par unité de volume du milieu poreux ou V.E.R., de volume U_0 (voir Fig.4-1). Il s'agit d'une moyenne volumique.

$\overline{e}^\alpha = \frac{1}{U_{0\alpha}} \int_{U_0} e dU = \theta_\alpha \overline{e}$ est la densité macroscopique de E par unité de volume de la phase α au sein du V.E.R.. Il s'agit d'une moyenne de phase volumique (moyenne intrinsèque).

$\overset{o}{e} = e - \overline{e}^\alpha$ définit la déviation d'une quantité par rapport à sa moyenne de phase intrinsèque sur le V.E.R..

4.4.1 Moyenne d'une dérivée temporelle

Le V.E.R. $\mathcal{U}_0$ de volume U_0 contient une volume $\mathcal{U}_{0\alpha}$ d'une phase α, $\alpha = s, f$, tandis que β désigne l'union de toutes les autres phases présentes dans U_0. L'hypothèse est faite que e est différentiable par rapport au temps, et ne possède pas de discontinuité dans $\mathcal{U}_{0\alpha}$. La relation suivante est obtenue, qui peut être considérée comme une extension de la règle de Liebniz, avec l'intégrale de surface qui représente

l'effet du taux de déplacement de la frontière d'intégration. Il est implicitement supposé par Bear que $\mathcal{U}_0$ est fixe, aussi $S_{\alpha\alpha}$ et $S_{\beta\beta}$ sont fixes et n'interviennent pas dans la prise en compte de l'effet du taux de déplacement de la frontière d'intégration :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{U}_{0\alpha}} e dU = \int_{\mathcal{U}_{0\alpha}} \frac{\partial e}{\partial t} dU + \widetilde{e\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_\alpha \overline{e}^\alpha\right) = \theta_\alpha \overline{\frac{\partial e}{\partial t}}^\alpha + \widetilde{e\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} \tag{4.5}$$

$\widetilde{e\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} = \frac{1}{U_0}\int_{S_{\alpha\beta}} e\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu} dS$ représente la moyenne surfacique prise sur $S_{\alpha\beta}$ d'une quantité extensive donnée,

$\sum_{\alpha\beta} = \frac{S_{\alpha\beta}}{U_0}$ est l'aire spécifique de la surface $S_{\alpha\beta}$.

La relation précédente peut encore être exprimée :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{e}\right) = \overline{\frac{\partial e}{\partial t}} + \widetilde{e\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nu}}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} \tag{4.6}$$

qui relie la dérivée par rapport au temps d'une valeur moyenne à la moyenne de la dérivée par rapport au temps.

4.4.2 Moyenne d'une dérivée spatiale

Soit l'élément de surface orientée $\mathbf{dS}_\alpha$ de $S_{\alpha\beta}$. $\mathbf{dS}_\alpha = \boldsymbol{\nu}_\alpha dS$ ou avec $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_\alpha$, $dS_{\alpha i} = \mathbf{dS}_\alpha \cdot \mathbf{e}_i = dS\cos\left(\boldsymbol{\nu}, \mathbf{e}_i\right)$

La relation suivante est dérivée pour exprimer la relation entre la moyenne d'une dérivée et la dérivée d'une moyenne :

$$\theta_\alpha \overline{\frac{\partial G_{jkl}}{\partial x_i}}^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta_\alpha \overline{G_{jkl}}\right) + \widetilde{G_{jkl}\nu_i}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} \tag{4.7}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\theta_\alpha \overline{\nabla\cdot G}^\alpha = \nabla\cdot\left(\theta_\alpha \overline{G}^\alpha\right) + \widetilde{G\cdot\boldsymbol{\nu}}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} \tag{4.8}$$

avec G un tenseur de rang quelconque. L'Eqn.4.8 ou une de ses formes équivalentes peut être considérée comme une extension de la règle de Liebniz, cette fois pour une dérivée spatiale. La différence entre moyenne d'une dérivée et dérivée d'une moyenne est liée uniquement aux échanges de phase sur $S_{\alpha\beta}$.

4.4.3 Moyenne d'une fonction f telle que $\nabla^2 f = 0$

L'évaluation des intégrales de surface dans l'Eqn.4.5 et l'Eqn.4.8 requière de l'information sur la configuration de la surface $S_{\alpha\beta}$ et sur la distribution de la quantité G sur cette surface. Souvent cette information n'est pas disponible. Cependant, il peut arriver que la dérivée de G, normale à la surface $S_{\alpha\beta}$, soit connue. Pour tirer profit de cette information, une seconde forme de la règle de moyenne pour une dérivée spatiale est développée, qui emploie cette fois la dérivée normale connue à la frontière d'interface $S_{\alpha\beta}$.

La relation suivante peut être écrite :

$$\int_{S_{0\alpha}} G\nu_j dS = \int_{S_{0\alpha}} \frac{\partial G}{\partial x_i} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS - \int_{\mathcal{U}_{0\alpha}} \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} \overset{o}{x}_j \, dU \tag{4.9}$$

avec $\overset{o}{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}^{\alpha}$, et compte tenu du fait que $\frac{\partial \overset{0}{x}_j}{\partial x_i} = \delta_{ij}$ (la démonstration est immédiate à partir du théorème de Gauss).

La discussion est limitée à une fonction scalaire $G = G(\mathbf{x}, t)$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

- G n'atteint pas de valeur maximum ou minimum dans $\mathcal{U}_{0\alpha}$, i.e. G varie de façon monotone dans $\mathcal{U}_{0\alpha}$. Sous cette condition,

$$\nabla^2 G = \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \tag{4.10}$$

dans $\mathcal{U}_{0\alpha}$.

-

$$\begin{aligned} \int_{S_{\alpha\alpha}} \frac{\partial G}{\partial x_i} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS &\simeq \frac{1}{S_{\alpha\alpha}} \int_{S_{\alpha\alpha}} \frac{\partial G}{\partial x_i} dS \int_{S_{\alpha\alpha}} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS \\ &\approx \frac{\partial \overline{G}^{\alpha}}{\partial x_i} \int_{S_{\alpha\alpha}} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS \end{aligned} \tag{4.11}$$

où l'approximation suivante a été introduite : $\frac{1}{S_{\alpha\alpha}} \int_{S_{\alpha\alpha}} \frac{\partial G}{\partial x_i} dS \approx \frac{\partial \overline{G}^{\alpha}}{\partial x_i}$, i.e. il a été supposé que la moyenne du gradient de G sur la portion $\alpha - \alpha$ de la surface extérieure S_0 du V.E.R. est égale au gradient de la moyenne de G sur le domaine $\mathcal{U}_{0\alpha}$ de la phase α dans le V.E.R.. D'après le théorème de Gauss, $\int_{S_{0\alpha}} G\nu_j dS = \int_{\mathcal{U}_{0\alpha}} \frac{\partial G}{\partial x_i} dU = U_{0\alpha} \overline{\frac{\partial G}{\partial x_i}}^{\alpha}$. Compte tenu des hypothèses introduites (Eqns.4.10 et 4.11), l'expression suivante est obtenue à partir de l'Eqn.4.9 :

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial G}{\partial x_j}}^{\alpha} &= \frac{1}{U_{0\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{\partial G}{\partial x_i} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS + \frac{\partial \overline{G}^{\alpha}}{\partial x_i} \frac{1}{U_{0\alpha}} \int_{S_{\alpha\alpha}} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS \\ &= \frac{1}{U_{0\alpha}} \int_{S_{\alpha\beta}} \frac{\partial G}{\partial x_i} \overset{o}{x}_j \, \nu_i dS + \frac{\partial \overline{G}^{\alpha}}{\partial x_i} T^*_{\alpha ij} \end{aligned} \tag{4.12}$$

où $T^*_{\alpha ij} = \frac{1}{U_{0\alpha}} \int_{S_{\alpha\alpha}} \overset{0}{x}_j \, \nu_i dS$. Ce coefficient ne dépend que de la configuration de la phase α dans $\mathcal{U}_0$,

et constitue une propriété tensorielle fondamentale de la configuration de la phase α dans le V.E.R.. La règle de moyenne pour une dérivée spatiale requière de l'information sous la forme d'une dérivée normale de G sur la surface $S_{\alpha\beta}$.

4.5 Loi de bilan macroscopique

Le modèle théorique de propagation du coulis dans un milieu poreux saturé déformable est formulé à l'échelle macroscopique ou continue, en termes de variables observables qui sont des moyennes macroscopiques de leurs contreparties microscopiques. Les règles de moyenne données par les Eqns.4.5 et 4.8 permettent d'obtenir la loi de conservation fondamentale à partir de l'équation de conservation microscopique Eqn.4.2 valable pour toute quantité extensive E ([13]) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_\alpha \overline{e}^\alpha\right) &= -\nabla\cdot\left[\theta_\alpha\left(\overline{e}^\alpha\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha + \overline{\overset{o}{e}\overset{o}{\mathbf{V}}{}_\alpha^m}^\alpha + \overline{\mathbf{j}^{Em}}^\alpha\right)\right] \\ &\quad -e\,\widetilde{(\mathbf{V}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} -\widetilde{\mathbf{j}^{EU}\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} +\theta_\alpha\overline{\Gamma^E}^\alpha \end{aligned} \tag{4.13}$$

Eqn.4.13 est la loi de conservation macroscopique fondamentale d'une quantité extensive E d'une phase α ($\alpha = s, f$ pour les phases fluide et solide respectivement), de densité e.

$\overline{\Gamma^E}^\alpha$ représente la taux de production interne de E, par unité de volume de la phase.

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_\alpha\overline{e}^\alpha\right)$ est le taux de croissance de E dans la phase, par unité de volume du milieu poreux

Le flux de la densité e est décomposé de la manière suivante : $e\mathbf{V}^E = e\mathbf{V}_\alpha^m + e\left(\mathbf{V}^E - \mathbf{V}_\alpha^m\right) = e\mathbf{V}_\alpha^m + \mathbf{j}^{Em}$. Après moyenne sur le V.E.R., la relation

$$\overline{e\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha = \overline{e}^\alpha\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha + \overline{\overset{o}{e}\overset{o}{\mathbf{V}}{}_\alpha^m}^\alpha \tag{4.14}$$

exprime la décomposition du flux de E en un flux d'advection et un flux de dispersion moyennes.

$\overline{e}^\alpha\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ est le flux d'advection de la quantité extensive E au sein de la phase, $\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ étant la vitesse moyenne massique macroscopique de la phase α, $\alpha = s, f$,

$\overline{\overset{o}{e}\overset{o}{\mathbf{V}}{}_\alpha^m}^\alpha = \overline{(e-\overline{e}^\alpha)\left(\mathbf{V}-\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha\right)}^\alpha$ est le flux dispersif macroscopique de la quantité extensive E au sein de la phase, flux en excès par rapport à l'advection moyenne de E au sein de la phase considérée, et terme additionnel par rapport à l'équation de conservation microscopique.

$\overline{\mathbf{j}^{Em}}^\alpha = \overline{e\left(\mathbf{V}^E - \mathbf{V}_\alpha^m\right)}^\alpha$ est le flux diffusif macroscopique de la quantité extensive E au sein de la phase, par rapport à la vitesse moyenne massique de la phase α.

$\mathbf{j}^{EU} = e\left(\mathbf{V}^E - \mathbf{V}\right)$, où $\mathbf{V}$ est la vitesse moyenne volumique de la phase α située sur $S_{\alpha\beta}$.

$\mathbf{u}$ est la vitesse d'interface sur $S_{\alpha\beta}$, vitesse de la particule de fluide qui vient se fixer à l'instant t sur $S_{\alpha\beta}$ et compose l'interface fluide-solide.

$-e\,\widetilde{(\mathbf{V}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$ est la quantité de E entrant dans la phase, à travers la surface d'interface $S_{\alpha\beta}$ de la phase dans U_0, par unité de volume du milieu poreux et par unité de temps, par advection par rapport à la surface $S_{\alpha\beta}$ en mouvement éventuel.

$-\widetilde{\mathbf{j}^{EU}\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$ est la quantité de E entrant dans la phase, à travers la surface d'interface $S_{\alpha\beta}$, de la phase dans $\mathcal{U}_0$, par unité de volume du milieu poreux et par unité de temps, par diffusion par rapport à $S_{\alpha\beta}$. Ce terme est essentiel pour exprimer la filtration.

$\theta_\alpha\overline{\Gamma^E}^\alpha$ est la quantité de E générée par des sources de E dans $\mathcal{U}_{0\alpha}$, par unité de volume du milieu poreux et par unité de temps.

∇ est l'opérateur divergence.

$\boldsymbol{\nu}_\alpha$, vecteur normal unité sur la surface d'interface fluide-solide $S_{\alpha\beta}$, est positivement orienté depuis la phase α vers la phase β.

Par la procédure de moyenne, les conditions aux limites sur la surface d'interface se traduisent par un terme source dans l'équation macroscopique, essentiel pour l'intégration des effets de filtration dans le modèle. Les termes de surface sont des termes additionnels par rapport à l'équation microscopique Eqn.4.2, introduits par le processus d'homogénéisation.

4.6 Lois constitutives

Afin de résoudre l'équation de conservation macroscopique générale Eqn.4.13 pour les variables θ_α et $\overline{e}^\alpha$, des relations additionnelles sont nécessaires pour les fonctions sources $\boldsymbol{\Gamma}^E$ et pour les flux $\overline{e}^\alpha\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$, $\overline{\overset{o}{e}\overset{o}{\mathbf{V}}{}_\alpha^m}^\alpha$, $\overline{\mathbf{j}^{EU}}^\alpha$, $e\,\widetilde{(\mathbf{V}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$, et $\widetilde{\mathbf{j}^{EU}\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$. Les relations additionnelles nécessaires afin de compléter la description du phénomène de transport ou du processus considéré, sont des relations constitutives, qui caractérisent le comportement du matériau particulier constituant la phase considérée. Les équations constitutives prennent la forme d'équations d'état statiques, ainsi que de relations contraintes-déformations et équations de flux, qui peuvent être considérées comme des équations d'état dynamiques.

Très souvent, l'hypothèse est faite que la structure globale d'une équation constitutive macroscopique est la même que sa contrepartie microscopique, sans employer de procédure de moyenne. Il reste ainsi uniquement à déterminer expérimentalement les valeurs des coefficients qui apparaissent dans l'équation constitutive macroscopique postulée. En employant cette approche phénoménologique, les interactions entre les frontières d'interface de phase, essentielles du point de vue de la filtration, sont perdues. De même que les équations de conservation macroscopiques sont obtenues par moyennation des équations de conservation microscopiques, les équations constitutives macroscopiques sont obtenues par moyennation

des équations microscopiques concernées, conformément à la représentation continue d'un milieu poreux et aux règles de moyenne données par Bear. Du fait du dépôt de coulis en surface du squelette solide, les lois constitutives sont développées dans le présent chapitre, en tenant compte des échanges de masse entre les phases solide et fluide. Cette étape est utile pour comprendre la signification des différents coefficients qui apparaissent dans les équations macroscopiques obtenues.

4.6.1 Flux diffusif. Loi de Fick.

La discussion est limitée à une équation de flux diffusif linéaire, dans laquelle le flux diffusif de masse d'une composante γ d'une phase fluide à l'échelle microscopique est proportionnel à une force conjuguée qui prend la forme du gradient d'une seule quantité extensive, la densité de masse ρ^γ de la composante γ dans la phase fluide, sans couplage, dans une phase unique qui sature l'espace interstitiel. A l'échelle microscopique, le flux diffusif moléculaire d'une composante γ d'une phase fluide, consistant en un mélange binaire, est exprimé par la loi de Fick ([17]) :

$$\mathbf{j}^\gamma \equiv \mathbf{j}^{\gamma U} = \rho^\gamma \left(\mathbf{V}_f^{m^\gamma} - \mathbf{V}_f\right) = -D^\gamma \nabla \rho^\gamma \tag{4.15}$$

où D^γ est le coefficient de diffusion moléculaire de la composante γ dans la phase fluide. Pour un milieu binaire tel que le mélange coulis-eau, $D^\gamma \equiv D^{groutw} = D^{gw}$ ($\gamma = g$ pour le coulis), avec par hypothèse $D^\gamma = cte$ au sein de U_{0f} ;

$\rho^\gamma = \frac{m^\gamma}{U_{of}}$ est la concentration de la composante γ au sein de la phase fluide.

$\mathbf{V}_f^{m_\gamma}, \mathbf{V}_f$ désignent respectivement les vitesses de la composante γ et de la phase fluide.

L'Eqn.4.15 est valable pour une phase fluide binaire, et exprime le flux diffusif relatif à la vitesse moyenne volumique de la phase. En réalité, le flux diffusif de masse de la composante γ doit être relié au gradient de potentiel chimique μ^γ, et l'Eqn.4.15 n'est valable que pour des solutions diluées ([17]).

En passant de l'Eqn.4.15 à sa contrepartie macroscopique, la configuration de la surface d'interface solide-fluide, et les conditions de dépôt sur celle-ci, affectent la transformation du gradient local de concentration en un gradient de concentration macroscopique.

A l'aide des règles de moyenne (Eqn.4.12), la contrepartie macroscopique de l'Eqn.4.15 s'écrit :

$$\overline{\mathbf{j}^\gamma} = -n\overline{D^\gamma \bigtriangledown \rho^\gamma}^f = -nD^\gamma \mathbf{T}^* \bigtriangledown \overline{\rho^\gamma}^f - \frac{n}{U_{0f}} \int_{S_{fs}} D^\gamma \frac{\partial \rho^\gamma}{\partial x_i} \cdot \nu_i \overset{0}{\mathbf{x}} \, dS \tag{4.16}$$

Parce que la surface d'interface fluide-solide est une surface matérielle vis-à-vis de la masse fluide, la composante adsorbée ne peut atteindre les parois solides que par diffusion. L'hypothèse est faite que le flux diffusif, normal aux parois solides, peut être approximé par

$$\frac{\mathbf{j}^{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu}_f}{D^{\gamma}} = -\nabla \rho^{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nu}_f = \frac{\overline{\rho^{\gamma}}^f - (\rho^{\gamma})_{|S_{fs}}}{\Delta_c} \text{ sur } S_{fs} \tag{4.17}$$

où $\overline{\rho^{\gamma}}^f$ est la densité macroscopique de la composante γ par unité de volume de la phase fluide, $(\rho^{\gamma})_{|S_{fs}}$ est la densité de la composante γ sur la surface d'interface fluide-solide. $\boldsymbol{\nu}_f$ désigne le vecteur normal extérieur unitaire sur S_{fs}, et Δ_c est une distance caractéristique depuis les parois du solide à l'intérieur de la phase fluide dans $\mathcal{U}_0$ ([13]) :

$$\Delta_c = \frac{\Delta_f}{C_f}, \Delta_f = \frac{U_{0f}}{S_{fs}} = \frac{n}{\sum_{fs}} \tag{4.18}$$

Il s'agit d'une mesure de la taille du pore. Δ_c est pris proportionnel au rayon hydraulique Δ_f , défini comme le rapport entre le volume de l'espace interstitiel $U_{0v} \equiv U_{0f}$ pour le cas saturé, et l'aire de la surface d'interface S_{sf}. C_f est le facteur de proportionnalité, il s'agit d'un facteur de forme macroscopique adimensionnel, fonction de l'orientation de la surface S_{sf}. C_f sera supposé constant par la suite (hypothèse d'isotropie). $\sum_{fs} = \frac{S_{fs}}{U_0}$ est la surface spécifique de l'interface fluide-solide au sein de U_0, par unité de volume de U_0, exprimée sous forme de longueur réciproque (quantité géométrique).

Sous l'hypothèse précédente de linéarité du flux diffusif au voisinage de S_{fs} (Eqn.4.17), l'Eqn.4.16 permet d'obtenir, pour le cas où la composante γ peut être adsorbée en surface du squelette solide :

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{j}^{\gamma}} &= -nD^{\gamma}\mathbf{T}^{*} \bigtriangledown \overline{\rho^{\gamma}}^f - \frac{n}{U_{0f}} \int_{S_{fs}} D^{\gamma} \frac{\partial \rho^{\gamma}}{\partial x_i} \cdot \nu_i \overset{0}{\mathbf{x}} \, dS \\ &= -n\mathbf{D}^{*\gamma} \bigtriangledown \overline{\rho^{\gamma}}^f - n\mathbf{M}D^{\gamma} \frac{\widetilde{\rho^{\gamma}}^{fs} - \overline{\rho^{\gamma}}^f}{\Delta_f^2} \end{aligned} \tag{4.19}$$

où $D^{*\gamma} = D^{\gamma}T^{*}$ est le coefficient de diffusion macroscopique, T^{*} peut être désigné comme la tortuosité de la portion de $\mathcal{U}_0$ occupée par la phase fluide ([27]). En passant de l'Eqn.4.15 à sa contrepartie macroscopique, la configuration de l'interface solide-fluide, et les conditions de filtration sur S_{sf}, conditions aux limites à l'échelle microscopique, affectent la transformation du gradient local de concentration en un gradient de concentration moyenne, qui constitue une variable d'état à l'échelle macroscopique. Le flux diffusif intègre la configuration particulière du réseau poreux dans le terme de diffusivité qui est relié à la notion de tortuosité.

Une inconnue additionnelle apparaît en relation avec la filtration : $\mathbf{M} = \frac{1}{S_{fs}} \int_{S_{fs}} C_f \overset{0}{\mathbf{x}} \, dS$, vecteur macroscopique dépendant de la configuration de la surface S_{fs} au sein du V.E.R.. Pour une configuration isotrope et un modèle de tubes capillaires aléatoirement distribués dans les trois directions de l'espace, $\mathbf{M}$ sera nul par symétrie parce que son intégrande $C_f \overset{o}{\mathbf{x}}$ est le produit d'une quantité

symétrique C_f par une quantité antisymétrique $\overset{o}{\mathbf{x}}$ par rapport aux axes principaux du V.E.R.. En effet l'isotropie implique une symétrie sphérique des arrangements de tubes capillaires à l'échelle microscopique. $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ est donc vérifié pour une représentation conceptuelle particulière du milieu poreux.

4.6.2 Terme de surface α_{sf}.

En général, la quantité de coulis filtrée est exprimée en fonction de la quantité de coulis en solution (isotherme d'équilibre, [13], [58]), et ne constitue alors plus une inconnue du problème. Les équations qui traduisent la conservation d'une quantité extensive liée au coulis adsorbé (masse, quantité de mouvement, énergie) n'ont plus à être prises en compte. Cette approche n'a pas été retenue. En l'absence d'information sur le type et la cinétique de réaction, aucune hypothèse n'a été faite sur la relation entre coulis en solution et coulis filtré; la densité de coulis en solution et la densité de coulis filtré sont traitées en variables indépendantes.

Il existe un transfert de masse à travers les frontières d'interface microscopique qui séparent les deux phases, transfert essentiel pour la prise en compte de la filtration d'une manière autre que phénoménologique. Les formules empiriques ont un intérêt pratique évident, mais ne permettent pas d'expliquer ce qui se produit réellement au sein du milieu poreux, aussi le terme de surface : $e\,\widetilde{(\mathbf{V}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta} = \widetilde{\mathbf{j}^{EU}\cdot\boldsymbol{\nu}_\alpha}^{\alpha\beta}\sum_{\alpha\beta}$ de l'Eqn.4.13 est explicité dans le cas du coulis ($e = \rho^g$) afin de mieux comprendre le mécanisme de filtration.

Au niveau de la surface d'interface microscopique, en l'absence de création ou de destruction de matière, le flux global de matière peut être considéré comme continu. Cette hypothèse est utile pour exprimer le taux d'échange de masse entre les phases fluide et solide au cours du processus de filtration, cette quantité étant requise lors de l'écriture des équations de continuité pour les constituants considérés. En combinant une équation de conservation de la masse générale au niveau de la surface d'interface S_{fs} à une hypothèse de linéarité pour le flux diffusif sur S_{fs}, une expression simple peut être obtenue pour le terme de filtration. En premier lieu,

$$\left[\rho_f\left(\mathbf{V}_f-\mathbf{u}\right)+\rho_f\left(\mathbf{V}_f^m-\mathbf{V}_f\right)\right]\cdot\boldsymbol{\nu}_f+\left[\rho_{f\longrightarrow s}\left(\mathbf{V}_s-\mathbf{u}\right)+\rho_{f\longrightarrow s}\left(\mathbf{V}_s^m-\mathbf{V}_s\right)\right]\cdot\boldsymbol{\nu}_s=0 \tag{4.20}$$

exprime le fait que le matériau ne s'accumule pas sur la frontière d'interface S_{fs} (condition de conservation du flux de masse microscopique).

$\mathbf{u}$ est la vitesse de l'interface microscopique.

ρ_f représente la densité de la phase fluide par unité de volume de la phase fluide, $\rho_{f\longrightarrow s}$ est la densité

de fluide déposé par unité de volume du squelette solide, les autres quantités ont déjà été définies. $\mathbf{V}_\alpha^m$ ou vitesse moyenne massique pour la phase α, et $\mathbf{V}_\alpha$ ou vitesse moyenne volumique pour la phase α, sont définies ci-dessous.

Le transport de masse du coulis se produit à travers les deux phases présentes au sein du milieu poreux : le coulis fluide au sein de la phase fluide, et le coulis filtré au sein de la phase solide.

Les relations suivantes définissent la vitesse moyenne massique et la vitesse moyenne volumique pour la phase fluide et le coulis solide déposé respectivement ([17]) :

$$\begin{aligned} \rho_f \mathbf{V}_f^m &\equiv \rho^g \mathbf{V}_f^{m_g} + \rho^w \mathbf{V}_f^{m_w} \text{ avec } \rho_f \equiv \rho^g + \rho^w \\ \rho_{f\longrightarrow s} \mathbf{V}_s^m &\equiv \rho_{f\longrightarrow s}^g \mathbf{V}_s^{m_g} + \rho_{f\longrightarrow s}^w \mathbf{V}_s^{m_w} \text{ avec } \rho_{f\longrightarrow s} \equiv \rho_{f\longrightarrow s}^g + \rho_{f\longrightarrow s}^w \end{aligned} \tag{4.21}$$

où ρ_f désigne la masse volumique du mélange fluide, $\rho^g = \frac{m_{grout}}{U_{0f}}$ (resp. $\rho^w = \frac{m_{water}}{U_{0f}}$) désigne la densité massique du coulis (resp. eau) au sein de la phase fluide, par unité de volume de la phase fluide, et $\rho_{f\longrightarrow s}^g = \frac{m_{grout}}{U_{0s}}$ (resp. $\rho_{f\longrightarrow s}^w = \frac{m_{water}}{U_{0s}}$) désigne la densité de coulis (resp. eau) déposé au sein de la phase solide, par unité de volume de la phase solide.

$$\begin{aligned} U_{0f} \mathbf{V}_f &\equiv U_{0f}^g \mathbf{V}_f^g + U_{0f}^w \mathbf{V}_f^w \text{ avec } U_{0f} \equiv U_{0f}^g + U_{0f}^w \\ U_{f\longrightarrow s} \mathbf{V}_s &\equiv U_{f\longrightarrow s}^g \mathbf{V}_s^g + U_{f\longrightarrow s}^w \mathbf{V}_s^g \text{ avec } U_{f\longrightarrow s} \equiv U_{f\longrightarrow s}^g + U_{f\longrightarrow s}^w \end{aligned} \tag{4.22}$$

avec U_{0f}^g (resp. U_{0f}^w) le volume partiel occupé par le coulis (resp. eau) dans la phase fluide, et $U_{f\longrightarrow s}^g$ (resp. $U_{f\longrightarrow s}^w$) le volume partiel occupé par le coulis (resp. eau) dans la phase solide.

De plus,

$$(\mathbf{V}_f - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_f = (\mathbf{V}_s - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_s = 0 \text{ sur } S_{fs} \tag{4.23}$$

exprime la non-pénétration de la phase fluide au sein du squelette solide (condition d'adhérence). Cette relation exprime le fait que la phase fluide dans son ensemble ne pénètre pas dans le squelette solide, et reste en surface du squelette, sans mouvement relatif possible. Des échanges sont possibles sur la surface S_{fs} entre les phases solide et fluide, mais ces échanges n'ont pas lieu pas advection, la composante γ peut ainsi diffuser vers la surface du squelette solide.

La condition d'interface peut être développée d'après les définitions des vitesses massiques pour les phases fluide et solide données par l'Eqn.4.21, et en tenant compte de la condition d'adhérence Eqn.4.23, pour donner :

$$\left[\rho^g \mathbf{V}_f^{m_g} + \rho^w \mathbf{V}_f^{m_w} - \rho^g \mathbf{V}_f - \rho^w \mathbf{V}_f\right] \cdot \boldsymbol{\nu}_f + \left[\rho^g_{f \longrightarrow s} \mathbf{V}_s^{m_g} + \rho^w_{f \longrightarrow s} \mathbf{V}_s^{m_w} - \rho^g_{f \longrightarrow s} \mathbf{V}_s - \rho^w_{f \longrightarrow s} \rho_{f \longrightarrow s} \mathbf{V}_s\right] \cdot \boldsymbol{\nu}_s = 0 \tag{4.24}$$

Dans un milieu poreux saturé, il existe toujours une fine couche d'eau adsorbée en surface du squelette solide, qui adhère aux parois solides, et se comporte comme un solide ([42]). Une partie du fluide est quasi-stagnante, à cause d'une adhérence forte d'un film fin de fluide en surface du solide et de la présence de pores occlus. Cependant le volume occupé par l'eau stagnante est généralement négligé et la porosité effective est prise égale à la porosité totale. Lorsqu'un milieu poreux, initialement saturé par un fluide mouillant (ici l'eau), est drainé, une petite portion de fluide mouillant demeure sur la paroi solide sous la forme d'un film très fin, d'une épaisseur de quelques dizaines de molécules, qui adhère à la paroi par des forces moléculaires fortes, et ne peut être déplacé. Ce film se comporte pratiquement comme un solide, et transmet la quantité de mouvement dans sa quasi-intégralité. Pour exprimer ce fait, la relation suivante est supposée pour la composante aqueuse :

$$(\mathbf{V}_s^{m_w} - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_s = \left(\mathbf{V}_f^{m_w} - \mathbf{u}\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_f = 0. \tag{4.25}$$

ce qui implique, compte tenu de l'Eqn.4.23,

$$(\mathbf{V}_s^{m_w} - \mathbf{V}_s) \cdot \boldsymbol{\nu}_s = \left(\mathbf{V}_f^{m_w} - \mathbf{V}_f\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_f = 0 \tag{4.26}$$

La relation précédente est employée pour simplifier la condition d'interface Eqn.4.24 sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \rho_f \left(\mathbf{V}_f^m - \mathbf{V}_f\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_f &= \rho^g \left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_f = \\ -\rho_{f \longrightarrow s} \left(\mathbf{V}_s^{m_s} - \mathbf{V}_s\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_s &= -\rho^g_{f \longrightarrow s} \left(\mathbf{V}_s^{m_g} - \mathbf{V}_s\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_s \end{aligned} \tag{4.27}$$

La filtration en surface du squelette solide conduit à la définition d'une variable additionnelle

$$\begin{aligned} \alpha_{sf} &= -\widetilde{\mathbf{j}^{m_s U} \cdot \boldsymbol{\nu}_s}^{sf} \sum_{sf} = -\rho^g_{f \longrightarrow s} \widetilde{\left(\mathbf{V}_s^{m_g} - \mathbf{V}_s\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_s}^{sf} \sum_{sf} \\ &= \widetilde{\mathbf{j}^{m_f U} \cdot \boldsymbol{\nu}_f}^{fs} \sum_{fs} = \rho^g \widetilde{\left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f\right) \cdot \boldsymbol{\nu}_f}^{sf} \sum_{sf} \end{aligned} \tag{4.28}$$

En l'absence de flux advectif de masse entre les phases fluide et solide, l'adsorption se produit par transfert massique purement diffusif entre les phases solide et fluide. Le flux diffusif est pris non nul pour exprimer la filtration des grains de coulis en surface du squelette solide, et traduit l'effet des forces globalement attractives. La loi de Fick (Eqn.4.15) est appliquée au constituant coulis pour traduire le flux diffusif de masse au voisinage de la surface d'interface, sous l'hypothèse de linéarité de la composante normale du gradient (Eqn.4.17) et en supposant que le coefficient $D_f^{*groutw} = D_f^{*gw} = cte$ comprend l'ensemble des mécanismes possibles de filtration,

$$\begin{aligned}
\alpha_{sf} &= \frac{1}{U_0}\int_{S_{fs}} \rho_f^g \left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f\right)\cdot \boldsymbol{\nu}_f dS = -\frac{1}{U_0}\int_{S_{fs}} D_f^{*gw}\nabla\rho_f^g \cdot \boldsymbol{\nu}_f dS \\
&= \frac{1}{U_0}D_f^{*gw}\left(\int_{S_{fs}} \frac{\overline{\rho^g}^f - \rho^g_{|S_{fs}}}{\Delta_c} dS\right) \approx \frac{1}{U_0}D_f^{*gw}\int_{S_{fs}} \frac{1}{\Delta_c} dS \left(\overline{\rho^g}^f - \frac{1}{S_{fs}}\int_{S_{fs}} \rho^g_{|S_{fs}} dS\right) \\
&= \frac{n}{\Delta_f^2} D_f^{*gw}\beta_f \left(\overline{\rho^g}^f - \widetilde{\rho^g_{|S_{fs}}}^{sf}\right)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

avec Δ_c précédemment défini par l'Eqn.4.18, et $\overline{\rho^g}^f$ désigne la densité macroscopique du coulis par unité de volume de la phase fluide, ou concentration du coulis dans la phase fluide. Dans une approche purement microscopique, Yao et al. ([119]) emploient une condition aux limites similaire : $\frac{dc}{dL} = -\frac{3}{2}\frac{(1-n)}{d}\alpha\eta c$, d diamètre de la particule, L longueur du milieu poreux, le produit $\alpha\eta$ représentant l'efficacité de récupération définie par l'Eqn.4.31, comme condition aux limites de l'équation d'advection-diffusion. Cette relation exprime que la perte de masse qui se produit dans le processus de filtration dépend du taux de filtration et de la concentration des particules. Dans une approche macroscopique, cette relation est intégrée dans l'équation globale, sous forme de terme source, par l'intermédiaire de l'intégrale sur S_{fs}.

La loi de Fick employée ne signifie pas que le processus physique dominant dans la filtration soit la diffusion moléculaire, mais plutôt que l'ensemble des processus de dépôt (ségrégation, sédimentation, interactions de surface d'origine électrique ou électostatiques, diffusion moléculaire et autres mécanismes d'adsorption) est traduit dans le modèle continu par un terme de diffusion de type Fickien. Comme pour la dispersion qui s'exprime à l'échelle continue par une loi de type Fick, grâce à des hypothèses de modélisation arbitraires ([9], [104]), il faut distinguer les causes physiques de la filtration, multiples et non nécessairement liées à la diffusion moléculaire, de l'expression particulière de la loi macroscopique de filtration, qui traduit une interaction globale, et qui résulte de la modélisation. Parce que l'interface fluide-solide est une interface matérielle qui empêche tout mouvement convectif du coulis dans la matrice solide, seule la diffusion peut exprimer la filtration en surface du squelette solide. Afin d'aboutir à l'expression

finale du terme de filtration, une loi de type Fick et une hypothèse de linéarité sont employées pour développer le terme de transfert de masse de la phase fluide vers la phase solide. La réalité est plus complexe, il existe différents types possibles de forces attractives, mais qui ne se prêtent pas toutes à une description mathématique. La résultante des forces attractives est supposée pouvoir être traduite globalement par une loi de type Fick, et D_f^{*gw} ne doit pas être vu comme le coefficient de diffusion moléculaire en milieu binaire, mais comme un coefficient variable, d'expression complexe dans le cas général, qui exprime l'ensemble des interactions de manière globale.

Deux inconnues additionnelles sont introduites par le processus de filtration:

$\beta_f = \frac{1}{S_{fs}} \int_{S_{fs}} C_f dS$, notion déjà introduite par Bear ([13]) pour caractériser la configuration microscopique de l'interface fluide-solide dans le V.E.R., ainsi que

$\widetilde{\rho^g}^{sf}$, une nouvelle variable dans un problème de convection-dispersion avec filtration, qui représente la valeur moyenne de ρ^g sur S_{fs}. $\widetilde{\rho^g_{|S_{fs}}}^{sf} \approx \overline{\rho^g_{f\longrightarrow s}}^s = \overline{\rho^g}^s$ représente la densité de masse du coulis adsorbé par unité de volume de la phase solide. L'égalité approximative est identiquement satisfaite pour un V.E.R. sphérique dans une configuration isotrope, parce que le coulis adsorbé est situé sur la surface du squelette, et la moyenne de volume se réduit à une moyenne de surface; $\overline{\rho^g}^s$ est la variable d'état pertinente pour un processus de propagation d'un coulis miscible avec filtration. En conséquence,

$$\alpha_{sf} = \frac{n}{\Delta_f^2} D_f^{*gw} \beta_f \left(\overline{\rho^g}^f - \overline{\rho^g}^s \right) \tag{4.30}$$

L'efficacité de récupération η ou fraction de particules suspendues entrant dans le V.E.R. qui sont éliminées de la phase fluide, est donnée par le rapport entre la quantité de particules récupérée et la quantité de particules présente dans la suspension en écoulement:

$$\eta \equiv \frac{\overline{(\rho^g)}_{solide}}{\overline{(\rho^g)}_{fluide}} = \frac{(1-n)\,\overline{\rho^g}^s}{n\overline{\rho^g}^f} \tag{4.31}$$

Dans les modèles de filtration ([119]) η désigne le facteur de collision, défini à partir du nombre de particules qui viennent frapper la paroi solide, tandis qu'un facteur α additionnel ($\alpha < 1$) est introduit pour traduire l'efficacité de la collision (nombre de contacts effectivement créés). Dans l'approche macroscopique adoptée, l'effet des collisions est considéré de manière globale. η intègre également le facteur d'efficacité de collision, qui tient compte du fait que les particules qui viennent au contact de S_{fs} ne sont pas toutes filtrées. Le coefficient η défini par l'Eqn.4.31 est la contrepartie macroscopique (à l'échelle du V.E.R.) d'une quantité définie par Tien et Pendse ([111]) par unité de longueur du milieu filtre (Unit Bed Element), le milieu filtre étant constitué d'une série de tubes de type convergent-divergent.

En conséquence, la masse de coulis déposé en surface du squelette par unité de volume et par unité

de temps s'exprime par :

$$\alpha_{sf} = \frac{n}{\Delta_f^2} D_f^{*gw} \beta_f \left(\overline{\rho^g}^f - \overline{\rho^g}^s \right) = \frac{n}{\Delta_f^2} D_f^{*gw} \beta_f \left(1 - \eta \frac{n}{1-n} \right) \overline{\rho^g}^f \equiv \lambda \overline{\rho^g}^f \tag{4.32}$$

La relation précédente définit le taux de dépôt ou le coefficient de taux de filtration λ pour le modèle,

$$\lambda = \frac{n}{\Delta_f^2} D_f^{*gw} \beta_f \left(1 - \eta \frac{n}{1-n} \right) \tag{4.33}$$

L'Eqn.4.33 atteste que le coefficient λ est variable même après que le flux diffusif au voisinage de l'interface ait été linéarisé. La relation obtenue diffère de la relation généralement postulée entre le taux de filtration et l'efficacité de récupération ([47]) : $\lambda = \frac{3}{2}\frac{(1-n)}{d_s}\eta$, d_s désignant le diamètre des grains constitutifs du milieu filtre, ou encore : $\lambda = \frac{1}{l} \ln \left(\frac{1}{1-\eta} \right)$, l longueur élémentaire du milieu filtre ([112]). L'ensemble des mécanismes de filtration décrits en section 2.5 est traduit ici de manière globale. L'Eqn.4.33 constitue une linéarisation de la relation plus générale $\alpha_{sf} = \alpha_{sf} \left(\overline{\rho^g}^f, \overline{\rho^g}^s, n, \chi \right)$ - χ désignant d'autres paramètres éventuels de la structure poreuse (surface spécifique), linéarisation suffisante pour reproduire la majeure partie des caractéristiques observées au cours des essais en laboratoire et de l'injection en grandeur réelle (chapitre 8).

Note : à partir de l'Eqn.4.32, la relation suivante est obtenue $\overline{\rho^g}^s = \eta \frac{n}{1-n} \overline{\rho^g}^f$, avec η variable afin de tenir compte des effets possibles d'inhomogénéité, qui montre que même dans le cas linéarisé $\overline{\rho^g}^s$ ne s'exprime pas de manière simple en fonction de $\overline{\rho^g}^f$, car la porosité n dépend également de la densité de dépôt $\overline{\rho^g}^s$. La remarque précédente justifie de conserver $\overline{\rho^g}^s$ parmi les inconnues primaires de la formulation, contrairement aux simplifications généralement faites dans la modélisation de la filtration.

4.6.3 Loi de Darcy

L'équation de Darcy peut être obtenue à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la phase fluide, en milieu poreux rigide ([115]) ou déformable ([116]), en effectuant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices (écoulement de Stokes, fluide Newtonien, hypothèse de linéarité du gradient normal des vitesses à l'interface).

La loi de Darcy généralisée relie la décharge spécifique du fluide par rapport au solide au gradient de pression macroscopique :

$$\mathbf{q}_r^m \equiv n \left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s \right) = -\frac{k}{\overline{\mu}^f} \left\{ \nabla \overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f \mathbf{g} \right\} \tag{4.34}$$

$\overline{p}^f$ est la pression du fluide, k est appelée perméabilité intrinsèque du milieu poreux sous conditions isotropes, il s'agit d'un coefficient relié aux paramètres macroscopiques qui décrivent la configuration

géométrique de l'espace interstitiel. $\overline{\mu}^f$ est la viscosité dynamique macroscopique de la phase fluide, $\overline{\rho_f}^f$ est la densité macroscopique de la phase fluide, $\mathbf{g}$ est le vecteur gravité. La perméabilité intrinsèque k est considérée comme une propriété du milieu poreux, indépendante des propriétés du fluide et des mécanismes d'écoulement. Parmi les expressions disponibles, l'équation de Kozeny-Carman ou une de ses généralisations sont couramment employées ([98])

$$k = \frac{n^3}{C_f} \frac{1}{\left(\sum_{sf}\right)^2 (1-n)^2} \tag{4.35}$$

Les modèles pratiques de filtration sont basés sur la loi de Darcy, postulée de concert avec une fonction de perméabilité modifiée pour tenir compte du dépôt de surface sur les parois solides du milieu poreux, $k = k(n, \rho_\sigma)$, ρ_σ désignant la densité de coulis filtré par unité de volume du milieu poreux. L'équation de Kozeny, même si elle est sujette à de nombreuses critiques ([104]), constitue l'une des expressions les plus simples pour relier la perméabilité à la porosité et à une mesure de la taille moyenne des particules constitutives du milieu filtre (surface spécifique moyenne). Les surfaces internes possèdent une géométrie très complexe difficile à décrire en termes mathématiques, mais qui pour des applications pratiques peuvent être facilement interprétées en termes de porosité et de surface spécifique du milieu poreux.

4.6.4 Flux dispersif. Tenseur de dispersion.

La relation suivante exprime le flux dispersif $\overline{\overset{o}{\rho}{}^\gamma \overset{o}{\mathbf{V}}{}_f^m}^\alpha$ de la composante γ dans la phase fluide, causé par les variations du vecteur vitesse microscopique $\mathbf{V}_f^m$ et de la densité au sein du V.E.R., obtenu en termes de variables macroscopiques, sous des conditions d'isotropie et en employant les règles de moyenne ([13]) :

$$\overline{\overset{o}{\rho}{}^\gamma \overset{o}{\mathbf{V}}{}_f^m}^f = -\mathbf{D}_f^{m^\gamma} \nabla \overline{\rho^\gamma}^f - \mathbf{D}_f^{m^\gamma} \overset{o}{\mathbf{x}} \widetilde{\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial s_\nu}}^{sf} \frac{\sum_{fs}}{nT^*}$$

où $\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial s_\nu} = \nabla \rho^\gamma \cdot \boldsymbol{\nu}_f$ on S_{fs}.

La forme proposée pour $\mathbf{D}_f^{m^\gamma}$, le tenseur de dispersion de la masse de la composante γ, qui tient compte de l'existence d'une dispersion transverse et du rôle joué par la direction de l'écoulement, est la suivante ([14]) :

$$\mathbf{D}_f^{m^\gamma} = \left(a_{fL}^{m^\gamma} - a_{fT}^{m^\gamma}\right) \frac{\overline{\mathbf{V}_f^m}^f \otimes \overline{\mathbf{V}_f^m}^f}{\left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|} + a_{fT}^{m^\gamma} \left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right| \mathbf{I} \tag{4.36}$$

où $\left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|$ est la norme de la vitesse macroscopique du fluide, $\mathbf{I}$ le tenseur identité, et $\otimes$ représente le

produit tensoriel. Cette relation s'appuie sur un ensemble de postulats physiques pour la dispersion ([35]), vérifiés expérimentalement ([14]) : objectivité du phénomène de dispersion, existence d'une dispersion transverse, rôle joué par la vitesse de l'écoulement. La dispersion est de nature vectorielle, $\mathbf{D}_f^{m^\gamma}$ est une fonction vectorielle de $\left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|$. La dispersion ne dépend pas linéairement de $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$, car ce sont les composantes de $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ dans la direction de l'écoulement macroscopique moyen, et perpendiculairement à $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$, qui jouent un rôle pour la dispersion.

Le tenseur de dispersion est lié à l'étendue de la zone de transition entre le coulis et l'eau interstitiel. Pour un milieu poreux isotrope, le tenseur de dispersion s'exprime en fonction de deux coefficients scalaires indépendants : $a_{fL}^{m^\gamma} = a_L$ ou dispersivité longitudinale, $a_{fT}^{m^\gamma} = a_T$ ou dispersivité transversale. Bien que le milieu soit isotrope, $\mathbf{D}_f^{m^\gamma}$ est un tenseur anisotrope avec une symétrie axiale, qui possède une direction principale $\mathbf{e} = \frac{\overline{\mathbf{V}_f^m}^f}{\left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|}$ de valeur principale correspondante a_L, les deux autres directions, de valeur principale commune a_T, étant situées dans le plan perpendiculaire à $\mathbf{e}$.

a_L, a_T, constantes de dispersion longitudinale et transverse respectivement, sont supposées être des propriétés du milieu poreux uniquement ([30]).

En supposant que l'Eqn.4.17 est valable (hypothèse de linéarité), il est possible d'écrire

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{fs}}{n} \overset{o}{\mathbf{x}} \widetilde{\frac{\partial \rho^\gamma}{\partial s_\nu}}^{fs} &= \frac{1}{U_{of}} \int_{S_{fs}} \overset{o}{\mathbf{x}} \nabla \rho^\gamma \cdot \boldsymbol{\nu} dS = \frac{1}{U_{of}} \int_{S_{fs}} C_f \overset{o}{\mathbf{x}} \frac{\rho^\gamma - \overline{\rho^\gamma}^f}{\Delta_f} dS \\
&\approx \frac{1}{U_{of}\Delta_f} \int_{S_{fs}} C_f \overset{o}{\mathbf{x}} dS \left(\frac{1}{S_{fs}} \int_{S_{fs}} \rho^\gamma dS - \overline{\rho^\gamma}^f \right) \\
&= \frac{1}{\Delta_f^2} \mathbf{M} \left(\widetilde{\rho^\gamma}^{fs} - \overline{\rho^\gamma}^f \right)
\end{aligned} \tag{4.37}$$

D'après le développement précédent, l'expression du flux dispersif, incluant les effets de filtration, sous des conditions isotropes, s'écrit :

$$\overline{\overset{o}{\rho^\gamma} \overset{o}{\mathbf{V}_f^m}}^\alpha = -\mathbf{D}_f^{m^\gamma} \bigtriangledown \overline{\rho^\gamma}^\alpha - \mathbf{D}_f^{m^\gamma} \cdot \frac{\mathbf{M}}{\Delta_f^2 T^*} \left(\widetilde{\rho^\gamma}^{fs} - \overline{\rho^\gamma}^f \right) \tag{4.38}$$

montrant que la filtration a le même effet sur la dispersivité que sur la diffusivité. Du fait de l'isotropie, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ et l'expression du flux dispersif se réduit à :

$$\overline{\overset{o}{\rho^\gamma} \overset{o}{\mathbf{V}_f^m}}^\alpha = -\mathbf{D}_f^{m^\gamma} \bigtriangledown \overline{\rho^\gamma}^\alpha \tag{4.39}$$

4.6.5 Lois de filtration (λ, perméabilité)

Les lois données dans ce paragraphe constituent des adaptations, au cas du transport en milieu poreux, de lois plus spécifiques développées pour l'étude de la filtration ([65]).

La plupart des travaux sur la filtration supposent, pour faciliter le calcul du taux de filtration ou de la réduction de perméabilité, que les particules se déposent uniformément sur les parois du milieu filtre. Dans un modèle de tube capillaires, la décroissance du volume poreux est directement corrélée à la réduction de section droite du milieu poreux, et la croissance des pressions est ainsi liée à une décroissance uniforme du diamètre des pores tous identiques ([65]). Ce mode de dépôt est observé par Stein (cité par ([84])) pour des particules de type colloïdales, à des taux d'écoulement très faibles. La morphologie du dépôt est supposée régulière, le dépôt se traduit par une augmentation de la taille effective du grain, tandis que la porosité du milieu et donc la perméabilité sont réduites sous le même mécanisme. Il existe un grand nombre de lois employées pour exprimer la chute de pression sous l'effet du dépot. La plupart d'entre elles sont recensées dans ([56]), et toutes sont apparentées à la loi de Kozeny ([95], [117]), incluant les effets d'augmentation de taille du grain pour tenir compte de la structure variable du milieu poreux et de son effet sur l'écoulement du fluide et sur la propagation du coulis au sein du milieu poreux :

$$\frac{k}{k_0} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^3 \left(\frac{1-n_0}{1-n}\right)^{\frac{4}{3}} = \left[1 - \frac{\rho_\sigma}{n_0 \overline{\rho_s}^s}\right]^3 \left[1 + \frac{\rho_\sigma}{(1-n_0)\,\overline{\rho_s}^s}\right]^{-\frac{4}{3}}, \ \rho_\sigma \leq \rho_{\sigma\,\max} \tag{4.40}$$

L'Eqn.4.40 donne les variations de la perméabilité intrinsèque k figurant dans la loi de Darcy Eqn.4.34, sous l'effet du dépôt mais également de la consolidation, où k_0 désigne la perméabilité du milieu poreux avant la filtration. n_0 est la porosité initiale, $\overline{\rho_s}^s$ est la densité du squelette solide par unité de volume de la phase solide.

$\rho_{\sigma\,\max}$ est le dépôt ultime atteint en filtration, il est caractéristique du milieu poreux. D'après [111], $0.2n_0 \leq \frac{\rho_\sigma}{\overline{\rho_s}^s} \leq 0.4n_0$ pour des solutions diluées. La seconde variante dans l'Eqn.4.40 est généralement préférée parce qu'elle relie les variations de perméabilité à la masse de dépôt par unité de volume ρ_σ, qui est la variable pertinente pour la filtration lorsque d'autres sources de variation pour la porosité (consolidation par exemple) sont présentes. De plus, il est possible d'envisager un mode de dépôt par blocage des constrictions des pores, plutôt que par dépôt uniforme le long des parois ([110]). En effet, lors du dépôt par occlusion, la seule variable pertinente qui subit une variation sous l'effet du dépôt est la variable de dépôt spécifique, tandis que la porosité macroscopique varie très peu, et ρ_σ doit être substituée à la porosité pour traduire la filtration.

La relation plus générale est également employée pour les processus de filtration ([87]) :

$$\frac{k}{k_0} = \left[1 - \frac{\rho_\sigma}{n_0 \overline{\rho_s}^s}\right]^{\beta_1} \left[1 + \frac{\rho_\sigma}{(1-n_0)\,\overline{\rho_s}^s}\right]^{-\beta_2} \left[1 - \frac{\rho_\sigma}{\rho_{\sigma\,\max}}\right]^{\beta_3}, \ \rho_\sigma \leq \rho_{\sigma\,\max} \tag{4.41}$$

β_1, β_2, β_3 sont des constantes empiriques.

Afin de tenir compte de la structure changeante du milieu et de son effet sur le taux de filtration, l'expression suivante du taux de dépôt, basée sur l'hypothèse de non-réentraînement, est communément employée pour les processus de filtration ([65], [87], [56], [111]) :

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = f_\lambda = \left(1 + \frac{\rho_\sigma}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s}\right)^{\alpha_1} \left(1 - \frac{\rho_\sigma}{n_0\overline{\rho_s}^s}\right)^{\alpha_2} \left(1 - \frac{\rho_\sigma}{\rho_{\sigma\,\max}}\right)^{\alpha_3}, \rho_\sigma \leq \rho_{\sigma\,\max} \tag{4.42}$$

avec λ_0 le coefficient de filtration initial (lorsque $\rho_\sigma = 0$). α_1, α_2, α_3 sont des constantes empiriques caractérisant l'effet de dépôt des particules sur le coefficient de filtration, qui sont censées traduire la morphologie du dépôt ([111]). Dans cette relation, il est implicitement supposé que le milieu va devenir non rétentif lorsque $\rho_\sigma = \rho_{\sigma\,\max}$ à cause de la variation des caractéristiques de surface.

Mohanka ([87]) obtient cette expression par des considérations géométriques en supposant que le taux de filtration dépend de la surface disponible pour le dépôt de particule, et du taux d'écoulement des particules à travers un pore cylindrique ou sphérique. Le mode de dépôt est également supposé uniforme en surface des grains. Le dernier facteur de l'Eqn.4.42, issu d'observations expérimentales, peut être vu comme une tentative d'introduire un mode de dépôt plus critique au voisinage de $\rho_{\sigma\,\max}$, qui traduit le nombre limité de sites disponibles pour le dépôt. L'introduction de $\rho_{\sigma\,\max}$ provient de la constatation faite par certains auteurs ([29]) d'une croissance initiale, suivie d'une décroissance, du taux de dépôt λ. L'Eqn.4.42 permet de représenter, par exemple, des valeurs de λ qui décroissent de façon monotone avec ρ_σ, ou qui montrent une croissance initiale suivie d'une décroissance contante. D'après **W**nek et al. ([117]), l'Eqn.4.42 ne repose pas sur une base théorique, et constitue plutôt une conjonction d'observations expérimentales, au cours desquelles la morphologie du dépôt est généralement postulée. Le coefficient de filtration n'est pas une quantité bien définie, il est fonction de plusieurs constantes empiriques qui n'ont pas de signification physique. Cette approche phénoménologique simplifie les phénomènes microscopiques qui se produisent durant l'écoulement dans le milieu filtre. L'introduction du vecteur de coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ notamment, est une reconnaissance implicite du fait que la donnée de la quantité de dépôt ne suffit pas à définir l'effet du dépôt des particules.

Pour ces expressions phénoménologiques, les valeurs des coefficients apparaissant dans les équations constitutives macroscopiques postulées doivent être identifiées par des expériences appropriées, avant de pouvoir envisager des calculs prédictifs.

Même si elle est critiquable ([104]), la loi de Kozeny ou une de ses généralisations tente de traduire, pour une gamme particulière de milieu poreux, une relation entre la perméabilité et la structure du milieu poreux, corrélation qui existe réellement et qui a un sens physique. Exprimer la perméabilité en fonction de la porosité conduit à une dépendance indirecte vis-à-vis du dépôt et de la consolidation. Ceci est plus correct du point de vue de la modélisation que de postuler une dépendance arbitraire

entre perméabilité et concentration d'entrée ([7]) du type $\frac{k}{k_0} \propto (c_{imp})^m$, où le coefficient m est censé correspondre au nombre de particules de ciment hydraté nécessaires pour bloquer un pore. Une relation entre la perméabilité k et la concentration d'entrée en coulis, si elle possède un intérêt pratique évident, n'a pas de fondement physique, car k est une propriété intrinsèque du milieu poreux, qui doit être reliée à des caractéristiques du squelette solide telles que n, ρ_σ.

Estimation du taux de dépôt initial

Il est nécessaire d'identifier la valeur du taux de filtration initial λ_0 avant que le modèle puisse être employé pour simuler des opérations pratiques d'injection.

Le terme de dépôt spécifique est difficile à évaluer, car il est subordonné à la précision de mesure de la concentration, grandeur généralement mesurée, avec la chute de pression, lors des essais de filtration ([87]). L'absence et la difficulté à obtenir des données de filtration sous forme de quantité de dépôt ou de concentration locale, rendent nécessaire l'exploitation d'une information globale. Pour les expériences sur colonne longue, des mesures locales de pression sont prises le long de la colonne (voir la description de l'essai en section 7.3). La donnée du débit effluent en sortie de colonne permet de calculer les variations de perméabilité au cours de l'essai. En postulant une loi de perméabilité et de d'évolution du taux de filtration, lois qui ne peuvent être complètement identifiées en l'absence de données de filtration, le calcul du taux local de dépôt est rendu possible et est détaillé dans ce qui suit. L'exploitation est faite pour des expériences dans lesquelles le débit effluent reste constant, en supposant que le débit reste constant le long de la colonne, pour une phase fluide incompressible, lorsque le squelette solide est quasi-indéformable. L'hypothèse sous-jacente à cet énoncé revient à considérer que le dépôt se produit selon le même mécanisme régulier partout dans le milieu, du moins au cours de la phase de propagation du coulis au sein de l'espace interstitiel. Dans [95], les auteurs supposent que le mode de dépôt régulier se produit sous un taux d'écoulement constant, en considérant que la porosité locale n décroît, et que la vitesse interstitielle $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ augmente, de telle façon que la vitesse de Darcy (ou vitesse de filtration) $n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ reste constante, contrairement au mode d'occlusion critique décrit dans la littérature sur la filtration. La loi de Darcy (Eqn.4.34) est dérivée par rapport au temps, en considérant qu'un taux d'écoulement constant prévaut au cours de l'expérience, et les variations de viscosité sont négligées : $\frac{d\overline{\mu}^f}{dt} \simeq 0$ (relation qui n'est vérifiée que lorsque l'espace interstitiel est complètement saturé en coulis). Sous la simplification précédente, la relation suivante est obtenue :

$$\frac{dk}{dt} = -\frac{k}{\left(\nabla_z \overline{p}^f + \overline{\rho_f}^f g\right)} \frac{d}{dt}\left(\nabla_z \overline{p}^f\right) \tag{4.43}$$

D'autre part, la loi de perméabilité postulée (Eqn.4.41) conduit à l'expression suivante :

$$\frac{dk}{dt} = k\frac{d\rho_\sigma}{dt}\left(-\frac{\beta_1}{n_0\overline{\rho_s}^s - \rho_\sigma} - \frac{\beta_2}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s + \rho_\sigma} - \frac{\beta_3}{\rho_\sigma - \rho_{\sigma\,\max}}\right) \tag{4.44}$$

En égalant les deux expressions différentes obtenues pour $\frac{dk}{dt}$ à partir de l'Eqn.4.43 et de l'Eqn.4.44 respectivement, le taux de dépôt peut être relié aux variations temporelles du gradient de pression :

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = -\frac{d\rho_\sigma}{dt}\left(\frac{\beta_1}{n_0\overline{\rho_s}^s - \rho_\sigma} + \frac{\beta_2}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s + \rho_\sigma} + \frac{\beta_3}{\rho_\sigma - \rho_{\sigma\,\max}}\right) = -\frac{1}{\left(\nabla_z\overline{p}^f + \overline{\rho_f}^f g\right)}\frac{d}{dt}\left(\nabla_z\overline{p}^f\right) \tag{4.45}$$

L'équation de conservation de la masse du coulis adsorbé se simplifie de la manière suivante :

$$\frac{d_s\rho_\sigma}{dt} + \rho_\sigma\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}_s^m}^s \approx \frac{\partial\rho_\sigma}{\partial t} = \lambda\overline{\rho^g}^f \tag{4.46}$$

puisque les déformations du squelette solide peuvent être négligées au cours de la phase de propagation pour les expériences sur colonne indéformable en laboratoire.

La variation de perméabilité peut à présent être exprimée en fonction du taux de filtration :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} &= -\frac{\partial\rho_\sigma}{\partial t}\left(\frac{\beta_1}{n_0\overline{\rho_s}^s - \rho_\sigma} + \frac{\beta_2}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s + \rho_\sigma} + \frac{\beta_3}{\rho_\sigma - \rho_{\sigma\,\max}}\right) \\ &= -\lambda\overline{\rho^g}^f\left(\frac{\beta_1}{n_0\overline{\rho_s}^s - \rho_\sigma} + \frac{\beta_2}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s + \rho_\sigma} + \frac{\beta_3}{\rho_\sigma - \rho_{\sigma\,\max}}\right) \\ &= -\frac{1}{\left(\nabla_z\overline{p}^f + \overline{\rho_f}^f g\right)}\frac{d}{dt}\left(\nabla_z\overline{p}^f\right)\end{aligned} \tag{4.47}$$

La loi de filtration (Eqn.4.42) est substituée dans l'expression de la variation de perméabilité pour donner

$$-\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\nabla_z\overline{p}^f\right)}{\left(\nabla_z\overline{p}^f + \overline{\rho_f}^f g\right)} = \lambda_0\overline{\rho^g}^f g\left(\rho_\sigma\right) \tag{4.48}$$

$$g\left(\rho_\sigma\right) = \left[1 + \frac{\rho_\sigma}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s}\right]^{\alpha_1}\left[1 - \frac{\rho_\sigma}{n_0\overline{\rho_s}^s}\right]^{\alpha_2}\left[1 - \frac{\rho_\sigma}{\rho_{\sigma\,\max}}\right]^{\alpha_3} h\left(\rho_\sigma\right) \tag{4.49}$$

avec $h\left(\rho_\sigma\right) = \left(\frac{\beta_1}{n_0\overline{\rho_s}^s - \rho_\sigma} + \frac{\beta_2}{(1-n_0)\overline{\rho_s}^s + \rho_\sigma} + \frac{\beta_3}{\rho_\sigma - \rho_{\sigma\,\max}}\right)$

Eqn.4.48 et Eqn.4.49 sont les équations fondamentales employées pour la détermination de λ_0 à partir de mesures de pression effectuées le long de la colonne, et de mesures de débit effluent. Ces expressions sont développées de manière à ne dépendre que des mesures de pression, sans nécessiter de données explicites de débit. Aucune hypothèse arbitraire autre qu'un débit constant n'est effectuée.

Au cours de chaque essai, les mesures de pression interstitielle prises en quatre positions distinctes le long de la colonne offrent différentes possibilités pour le gradient de pression. La dérivée temporelle du gradient de pression est évaluée pour chaque choix du gradient de pression, en chaque point de mesure. Un taux intermédiaire de dépôt est ensuite calculé :

$$\lambda_{p2} = \frac{1}{\overline{\rho g}^f} \frac{\frac{d}{dt}\left(\nabla_z \overline{p}^f\right)}{\left(\nabla_z \overline{p}^f + \overline{\rho_f}^f g\right)} \tag{4.50}$$

En l'absence de données expérimentales pour la variable de dépôt spécifique ρ_σ, $g\left(\rho_\sigma\right)$ ne peut pas être évalué directement, aussi les variations de $g\left(\rho_\sigma\right)$ sont estimées pour l'ensemble des valeurs possibles de ρ_σ, afin de déduire les valeurs limites de λ_0 :

$$\lambda_0 \in \left[\lambda_0^{\min} = \frac{\lambda_{p2}^{\min}}{g\left(\rho_\sigma\right)^{\max}}, \lambda_0^{\max} = \frac{\lambda_{p2}^{\max}}{g\left(\rho_\sigma\right)^{\min}}\right] \tag{4.51}$$

La plage des valeurs λ_0 fournies par l'Eqn.4.51 n'autorise qu'une estimation de l'amplitude des phénomènes de filtration, et doit être corrigée, spécialement au cours de la phase de propagation, des effets de viscosité. Les valeurs obtenues pour chaque point de mesure et chaque choix du gradient de pression sont ensuite moyennées sur un essai. Une moyenne statistique est ensuite calculée sur l'ensemble des essais. Une application pratique est considérée en section 7.4 dans le cas de l'injection de coulis de micro-ciment. Les résultats obtenus devront être interprétés avec attention, en gardant à l'esprit le fait que les valeurs calculées sont des valeurs globales.

4.6.6 Equation d'état de la phase fluide

L'équation d'état microscopique la plus générale pour la phase fluide s'exprime par :

$$\rho = \rho\left(p, \rho^\gamma, T\right) \tag{4.52}$$

ρ est une fonction de la pression p au sein du fluide, de la concentration ρ^γ des différentes composantes, et de la température absolue T. Par différentiation de la relation précédente :

$$\begin{aligned} d\rho &= \frac{\partial \rho}{\partial p}_{|T,\rho^\gamma} dp + \frac{\partial \rho}{\partial \rho^\gamma}_{|T,p} d\rho^\gamma + \frac{\partial \rho}{\partial T}_{|p,\rho^\gamma} dT \\ &= \rho\left(\beta_p dp + \sum_\gamma \beta_{\rho^\gamma} d\rho^\gamma - \beta_T dT\right) \end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\beta_p \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial p}_{|\rho^\gamma,T} \tag{4.54}$$

est le coefficient de compressibilité pour la phase fluide à température et concentration constantes,

$$\beta_{\rho^\gamma} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial \rho^\gamma}_{|p,T} \tag{4.55}$$

ou coefficient de concentration, introduit l'effet d'une variation de ρ sous l'effet d'une variation de concentration de la composante γ, à pression et température constantes ([13]).

$$\beta_T \equiv -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial T}_{|\rho^\gamma,p} \tag{4.56}$$

est appelé coefficient d'expansion thermique à pression et concentration constantes.

$$\overline{\rho}^f = \overline{\rho_0}^f \left\{1 + \beta_p \left(\overline{p}^f - \overline{p_0}^f\right) + \beta_{\rho^g} \left(\overline{\rho^g}^f - \overline{\rho_0^g}^f\right)\right\} \tag{4.57}$$

L'Eqn.4.57 est l'équation d'état pour la phase fluide considérée, obtenue par intégration de l'Eqn.4.53, puis linéarisation au premier ordre autour de l'état d'équilibre (p_0, ρ_0^g), et homogénéisation sur le V.E.R. en négligeant les variations dues à la température, et en supposant de plus que :

$$\beta_p \equiv \frac{1}{\overline{\rho}^f}\frac{\partial \overline{\rho}^f}{\partial \overline{p}^f}_{|\overline{\rho^g}^f} = \frac{1}{\overline{\rho_0}^f}\frac{\partial \overline{\rho}^f}{\partial \overline{p}^f}_{|\overline{\rho^g}^f} = cte \tag{4.58}$$

$$\beta_{\rho^g} \equiv \frac{1}{\overline{\rho}^f}\frac{\partial \overline{\rho}^f}{\partial \overline{\rho^g}^f}_{|\overline{p}^f} = \frac{1}{\overline{\rho_0}^f}\frac{\partial \overline{\rho}^f}{\partial \overline{\rho^g}^f}_{|\overline{p}^f} = cte \tag{4.59}$$

sur la plage de valeurs prises par p et ρ^γ.

La densité et la viscosité de la phase fluide sont influencées par la concentration du coulis $\overline{\rho^g}^f$ qui varie sous l'effet de l'apport continuel de coulis, de la dilution du coulis et des effets de filtration, au cours de la propagation à travers le milieu poreux. En première approximation, l'hypothèse est faite au cours de cette étude que la densité $\overline{\rho_f}^f = \overline{\rho_f}^f\left(\overline{p}^f, \overline{\rho^g}^f\right)$de la phase fluide varie linéairement avec la concentration en coulis de la solution injectée :

$$\overline{\rho_f}^f = \overline{\rho^w}^f \left[1 + \left(\frac{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}}{\overline{\rho^w}^f} - 1\right)\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}}\right] \tag{4.60}$$

$\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$ est la valeur de concentration du coulis injecté prescrite au point d'injection.

4.6.7 Viscosité de la phase fluide

La viscosité de la phase fluide est influencée par la concentration en coulis de ciment qui varie lors de la propagation du coulis au sein du milieu poreux. La viscosité de la phase fluide est prise linéaire par

rapport à la concentration en coulis :

$$\overline{\mu}^f = \overline{\mu^w}^f \left[1 + \left(\frac{\overline{\mu^g}^f}{\overline{\mu^w}^f} - 1 \right) \frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} \right] \tag{4.61}$$

où $\overline{\mu^w}^f$ (resp. $\overline{\mu^g}^f$) désigne la viscosité de l'eau pure (resp. coulis pur).

4.7 Hypothèses de travail

Les hypothèses conceptuelles sont écrites en termes mathématiques, d'après le développement constitutif précédent, avant de donner la formulation finale :

1. Le milieu poreux est saturé : $\theta_s = 1 - n$, $\theta_f = n$.

2. Le squelette solide est constitué du squelette solide initial et du coulis filtré en surface du squelette solide.

3. L'interface fluide-solide constitue une interface matérielle : $(\mathbf{V}_s - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_s = (\mathbf{V}_f - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nu}_f = 0$ sur S_{sf} (Eqn.4.23). Cette hypothèse peut être faite pour tout fluide visqueux, il s'agit de la condition classique d'adhérence ou de non-pénétration du fluide à l'intérieur de la phase solide. Par contre, dans le cas de la phase fluide étudiée (suspension qui contient des grains solides), l'hypothèse doit être faite qu'il n'y a pas réentraînement des particules fixées en surface du squelette solide, car le réentraînement ou l'arrachement éventuel des particules remettent en cause la condition d'adhérence.

4. La contribution du flux diffusif au niveau de l'interface fluide-solide exprime la filtration du coulis sur la surface du squelette solide S_{sf} (Eqn.4.28, Eqn.4.32). En conséquence, le terme de filtration s'exprime par :

$$\begin{aligned} \alpha_{sf} &= -\widetilde{\mathbf{j}^{m_s U} \cdot \boldsymbol{\nu}_s}^{sf} = -\rho_s \widetilde{(\mathbf{V}_s^{m_s} - \mathbf{V}_s)} \cdot \boldsymbol{\nu}_s^{sf} \sum_{sf} = -\rho^g_{f \longrightarrow s} \widetilde{\left(\mathbf{V}_s^{m_g} - \mathbf{V}_s\right)} \cdot \boldsymbol{\nu}_s^{sf} \sum_{sf} \\ &= \widetilde{\mathbf{j}^{m_f U} \cdot \boldsymbol{\nu}_f}^{fs} \sum_{fs} = \rho_f \widetilde{\left(\mathbf{V}_f^{m_f} - \mathbf{V}_f\right)} \cdot \boldsymbol{\nu}_f^{fs} \sum_{sf} = \rho^g \widetilde{\left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f\right)} \cdot \boldsymbol{\nu}_f^{fs} \sum_{sf} \\ &= \lambda \overline{\rho^g}^f \end{aligned} \tag{4.62}$$

α_{sf} tient compte du fait que seule une fraction du coulis qui vient au contact avec S_{sf} est retenue.

5. Le flux diffusif en milieu binaire s'exprime par $\overline{\mathbf{j}^{m_g m}}^f = \overline{n\rho^g \left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f^m\right)}^f = -\mathbf{D}^{*gw} \bigtriangledown \overline{\rho^g}^f$, par application de l'Eqn.4.19 à $e \equiv \rho^g$ sous des conditions isotropes ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$)

6. Il n'existe pas de réaction volumique (réaction chimique) au sein des phases fluide et solide : $\overline{\Gamma^{m_s}}^s = 0$, et $\overline{\Gamma^{m_f}}^f = 0$ qui peut être obtenue d'une autre manière en exprimant la conservation de la masse pour la phase fluide dans son ensemble; de même, le taux de production de masse est nul pour le coulis : $\overline{\rho\Gamma^{m_g}}^f = 0$ car il n'y a aucun échange de masse entre le coulis et l'eau interstitielle, l'hydratation du coulis de ciment n'étant pas prise en compte.

7. Le flux dispersif est négligé pour la phase solide : $\overline{\overset{o}{\rho}_s \overset{o}{\mathbf{V}}{}^m_s}^s = \overline{(\rho_s - \overline{\rho_s}^s)\left(\mathbf{V}^m_s - \overline{\mathbf{V}^m_s}^s\right)}^s << 1$ peut être raisonnablement supposé car les déplacements sont faibles et le squelette solide initial est incompressible ($\left|\overline{\rho_s}^s \overline{\mathbf{V}^m_s}^s\right| >> \left|\overline{\overset{o}{\rho}_s \overset{o}{\mathbf{V}}{}^m_s}^s\right|$).

8. Le flux dispersif est négligé pour la phase fluide, par comparaison au terme convectif dominant : $\overline{\overset{o}{\rho}_f \overset{o}{\mathbf{V}}{}^m_f}^s = \overline{(\rho_f - \overline{\rho_f}^f)\left(\mathbf{V}^m_f - \overline{\mathbf{V}^m_f}^f\right)}^f << 1$

9. Le flux dispersif pour le coulis a été explicité par les développements précédents (Eqn.4.38) : $\overline{\overset{o}{\rho}{}^g \overset{o}{\mathbf{V}}{}^m_f}^f = -\mathbf{D}^{m_g}_f \bigtriangledown \overline{\rho^g}^f$, sous des conditions isotropes, lorsque l'effet de filtration n'intervient plus dans l'expression du flux dispersif.

4.8 Système final (Equations de champ)

Afin d'étudier la propagation du coulis, la dilution du coulis au sein de la phase fluide et la filtration en surface de la matrice solide au cours de l'injection, les équations suivantes doivent être écrites, en tenant compte des lois constitutives :

(i) La conservation de la masse du squelette solide pour évaluer l'évolution de la porosité sous l'effet du dépôt de coulis et de la déformation du squelette solide.

(ii) Une équation de continuité est également requise pour les composantes du coulis filtrées en surface de la matrice solide, qui permette de calculer la variation de densité de la phase solide en fonction du taux de filtration.

(iii) L'équation de continuité de la phase fluide, combinée à la loi de Darcy, à l'expression de la loi d'état du fluide et à la loi de filtration, conduit à l'équation d'écoulement qui gouverne l'évolution de la pression interstitielle au cours de l'injection.

(iv) L'équation de continuité pour le coulis transporté au sein de la phase fluide donne l'évolution du champ de concentration sous des effets convectifs dominants, une dispersion non négligeable au sein de la phase fluide interstitielle, et une filtration variable à mesure que le coulis progresse dans le milieu poreux.

(v) Le couplage hydromécanique est traité par l'équation de conservation de la quantité de mouvement totale qui, jointe au principe des contraintes effectives de Terzaghi et à une relation contrainte-

déformation appropriée, permet le calcul de l'évolution du champ de déplacement sous l'effet de l'augmentation de pression et des efforts mécaniques imposés. Le couplage hydromécanique apparaît également lors de l'écriture des équations d'écoulement et de transport, dans le terme qui traduit le taux de déformation volumique du squelette solide.

4.8.1 Equation de porosité

La phase solide comprend deux constituants distincts, le squelette solide initial et le coulis adsorbé, et une équation de conservation doit être écrite pour chaque quantité extensive indépendante qui est transportée. L'équation de continuité de la phase solide découle de l'application directe de la loi de conservation macroscopique générale Eqn.4.13, lorsque $e \equiv \rho_s$ représente la densité du squelette solide, et $\mathbf{V}^E = \mathbf{V}_s^m$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_s \overline{\rho_s}^s\right) &= -\nabla \cdot \left[\theta_s \left(\overline{\overset{o}{\rho}_s \overset{o}{\mathbf{V}}{}_s^m}^s + \overline{\rho_s}^s \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right] - \rho_s \widetilde{\left(\mathbf{V}_s - \mathbf{u}\right)} \cdot \boldsymbol{\nu}_s{}^{sf} \sum_{sf} \\ &\quad - \widetilde{\mathbf{j}^{m_s U} \cdot \boldsymbol{\nu}_s}{}^{sf} \sum_{sf} + \theta_s \rho \overline{\Gamma^{m_s}}^s \end{aligned} \tag{4.63}$$

L'équation de continuité du squelette solide peut être réécrite, en considérant les hypothèses (1), (2), (3), (4), (6), (7) de la section précédente 4.7, sous une forme simplifiée de la façon suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left((1-n)\,\overline{\rho_s}^s\right) + \nabla \cdot \left[(1-n)\,\overline{\rho_s}^s \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right] = \lambda \overline{\rho^g}^f \tag{4.64}$$

$\overline{\rho_s}^s$ est la densité macroscopique intrinsèque du squelette, tandis que $\lambda \overline{\rho^g}^f$ est la masse de coulis récupéré en surface de la matrice solide à partir de la phase fluide environnante, par unité de volume du milieu poreux, et par unité de temps.

4.8.2 Equation du coulis filtré

L'équation de continuité du coulis adsorbé en surface de l'interface fluide-solide prend la forme suivante (même développement que l'équation de continuité de la phase solide, en partant de Eqn.4.13), avec $e \equiv \rho_s^g$ la densité de coulis filtré :

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_\sigma + \nabla \cdot \left(\rho_\sigma \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) = \lambda \overline{\rho^g}^f \tag{4.65}$$

où $\rho_\sigma = (1-n)\,\overline{\rho_s^g}$ définit la densité volumique de dépôt (masse de coulis adsorbé par unité de volume du milieu poreux). La densité du squelette solide et la densité de coulis filtré sont reliés par l'expression

suivante (les grains constitutifs du squelette solide initial sont incompressibles, $(\overline{\rho_{skel}}^s)_0 = cte$) :

$$\overline{\rho_s} = \rho_\sigma + \overline{\rho_{skel}} = (1-n)\,\overline{\rho^g}^s + (1-n)\,\overline{\rho_{skel}}^s = \rho_\sigma + (1-n_0)\,(\overline{\rho_{skel}}^s)_0 \tag{4.66}$$

4.8.3 Equation d'écoulement

Sous l'hypothèse de miscibilité entre le coulis et l'eau interstitielle, la phase fluide comprend deux composantes : la solution de coulis et l'eau initialement présente dans l'espace interstitiel. Par application directe de l'équation Eqn.4.13 à la conservation de la masse du fluide ($e \equiv \rho_f$, $\mathbf{V}^E = \mathbf{V}_f^m$), l'équation de continuité générale pour la phase fluide est dérivée pour un milieu poreux saturé :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_f \overline{\rho_f}^f\right) = -\nabla\cdot\theta_f\left[\overline{\overset{o}{\rho}_f \overset{o}{\mathbf{V}}{}_f^m}^f + \overline{\rho_f}^f \overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right] - \rho_f\,(\widetilde{\mathbf{V}_f - \mathbf{u}})\cdot \boldsymbol{\nu}_f^{fs}\sum_{fs} - \mathbf{j}^{\widetilde{m_f U}\cdot}\boldsymbol{\nu}_f^{fs}\sum_{fs} + \theta_f \overline{\rho\Gamma^{m_f}}^f \tag{4.67}$$

L'équation de continuité générale est d'abord simplifiée par considération des hypothèses (1), (3), (4), (6), (8) du modèle conceptuel (section 4.7). L'équation résultante est ensuite manipulée pour mettre en évidence la décharge spécifique relative du fluide par rapport au solide (loi de Darcy Eqn.4.34), tandis que l'équation de continuité du squelette solide Eqn.4.64 est employée pour éliminer les variations de porosité de l'équation et faire apparaître un couplage direct entre le taux de déformation du squelette solide et l'écoulement. Par l'introduction de l'équation d'état de la phase fluide Eqn.4.57, la substitution de la loi de Darcy, l'équation de champ finale donne les variations de la pression fluide sous l'effet de la convection, de la propagation du coulis dans la phase, et de la consolidation :

$$n\beta_p \frac{d_f \overline{p}^f}{dt} - \nabla\cdot\left[\frac{k}{\overline{\mu}^f}\left(\nabla\overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f \mathbf{g}\right)\right] = -\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}_s^m}^s - n\beta_{\rho^g}\frac{d_f\overline{\rho^g}^f}{dt} - \frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt} - \lambda\overline{\rho^g}^f\left(\frac{1}{\overline{\rho_f}^f} - \frac{1}{\overline{\rho_s}^s}\right) \tag{4.68}$$

où $\frac{d_\alpha}{dt}() = \frac{\partial}{\partial t}() + \nabla()\cdot\overline{\mathbf{V}_\alpha^m}^\alpha$ est la dérivée matérielle de la phase α, $\alpha = s, f$.

$\overline{p}^f$ est la pression macroscopique du fluide dans les pores.

β_p et β_{ρ^g} ont été introduits par les relations Eqn.4.58 et Eqn.4.59 respectivement.

$\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}_s^m}^s$ traduit le couplage hydromécanique tandis que les deux derniers termes sont dûs à la filtration.

4.8.4 Equation de transport

L'équation de continuité pour le coulis est obtenue de la même manière que pour les autres constituants, pour $e \equiv \rho^g = \frac{m_{grout}}{U_{0f}}$ qui définit la densité de masse ou concentration du coulis miscible dans la phase

fluide, et $\mathbf{V}_f^{m_g}$ qui définit la vitesse moyenne massique du coulis ($\mathbf{V}_f^{m_g} \neq \mathbf{V}_f^m$, voir Eqn.4.21), tandis que $\mathbf{V}_f$ représente la vitesse moyenne volumique pour la phase fluide dans son ensemble :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_f \overline{\rho^g}^f\right) + \nabla \cdot \theta_f \left(\overline{\rho^g}^f \overline{\mathbf{V}_f^m}^f + \overline{\overset{o}{\rho^g}\overset{o}{\mathbf{V}_f^m}}^f + \overline{\rho^g\left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f^m\right)}^f\right) \\ = \; & -\rho^g \widetilde{(\mathbf{V}_f - \mathbf{u})} \cdot \boldsymbol{\nu}_f \sum_{fs}^{fs} -\rho^g \widetilde{\left(\mathbf{V}_f^{m_g} - \mathbf{V}_f\right)} \cdot \boldsymbol{\nu}_f \sum_{fs}^{fs} +\theta_f \overline{\rho \Gamma^{m^g}}^f \end{aligned} \tag{4.69}$$

est l'équation de continuité macroscopique d'une composante d'une phase, par unité de volume du milieu poreux, ou équation de dispersion hydrodynamique.

Les hypothèses (1), (3), (4), (5), (6), (9) de la section 4.7 permettent de simplifier l'équation de continuité générale du coulis, l'équation obtenue est ensuite manipulée pour mettre en évidence la décharge spécifique relative du fluide (loi de Darcy Eqn.4.34), et l'équation de continuité du squelette solide (Eqn.4.64) est employée pour mettre en avant le couplage hydro-mécanique et les effets de dépôt au lieu des variations de la porosité :

$$\begin{aligned} & n\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial t} + n\nabla\overline{\rho^g}^f \cdot \overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \nabla \cdot \left(n\left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)\nabla\overline{\rho^g}^f\right) \\ = \; & -\overline{\rho^g}^f \nabla \cdot n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) - \left(\frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt} + \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\overline{\rho^g}^f - \lambda\overline{\rho^g}^f\left(1 - \frac{\overline{\rho^g}^f}{\overline{\rho_s}^s}\right) \end{aligned} \tag{4.70}$$

Cette équation tient compte du transport du coulis par advection à la vitesse macroscopique moyenne $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ du fluide interstitiel dans lequel le traceur est dispersé ($\nabla\overline{\rho^g}^f \cdot \overline{\mathbf{V}_f^m}^f$), par diffusion ($n\mathbf{D}^{*gw}\nabla\overline{\rho^g}^f$) et dispersion ($n\mathbf{D}_f^{m_g}\nabla\overline{\rho^g}^f$) de la masse du coulis au sein de la phase fluide, ainsi que du transfert de masse de la phase fluide vers la phase solide à travers leur surface d'interface (transport diffusif à travers la frontière d'interface $S_{\alpha\beta}$ en mouvement éventuel) et des effets de déformabilité du squelette solide.

Certains termes additionnels apparaissent dans la formulation des équations de transport et d'écoulement, par rapport à la théorie de la dispersion hydrodynamique classique qui traite de l'écoulement de la phase fluide, et du transport d'une composante d'une phase fluide sous l'effet de la convection et de la dispersion ([8], [13], [58], [42], [104]) :

- $-\overline{\rho^g}^f \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}_s^m}^s$: $\nabla \cdot \overline{\mathbf{V}_s^m}^s$ est le terme de taux de déformation volumique du squelette solide, qui exprime le couplage hydromécanique entre les déformations du squelette solide et l'écoulement fluide.

- $-\frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt}\overline{\rho^g}^f - \lambda\overline{\rho^g}^f\left(1 - \frac{\overline{\rho^g}^f}{\overline{\rho_s}^s}\right)$ est dû à la filtration. Un terme analogue est présent dans l'équation d'écoulement Eqn.4.68 ($-\frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt} - \lambda\overline{\rho^g}^f\left(\frac{1}{\overline{\rho_f}^f} - \frac{1}{\overline{\rho_s}^s}\right)$). La première composante $\frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt}$ provient des variations de densité du squelette solide, qui comprend à la fois les grains constitutifs du squelette

solide initial (supposés incompressibles) et le coulis filtré. $\lambda\overline{\rho^g}^f$ représente le taux de dépôt de coulis en surface du squelette solide, par unité de volume du milieu poreux.

- $-n\beta_c\frac{d_f\overline{\rho^g}^f}{dt}$ exprime la variation de densité de la phase fluide sous l'effet de variations de la concentration du coulis, car l'hypothèse de traceur idéal n'est pas retenue.

4.8.5 Equation d'équilibre

L'intérêt se porte sur les contraintes qui produisent la déformation de la matrice solide au sein du milieu poreux, contraintes qui apparaissent par l'écriture de l'équation de conservation de la quantité de mouvement globale ajoutée au principe des contraintes effectives de Terzaghi :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{(\sigma_s^{'})_{ij}}^s - \overline{p}^f\delta_{ij}\right) + \left((1-n)\overline{\rho_s}^s + n\overline{\rho_f}^f\right)g\delta_{i3} = 0, \qquad i,j = 1,3 \tag{4.71}$$

$\overline{p_f}^f$ est la pression moyenne macroscopique du fluide par unité de volume du milieu fluide, δ_{ij} est le symbole de Kronecker.

$\left(\sigma_s^{'}\right)_{ij}$ sont les composantes du tenseur des contraintes effectives, contraintes qui produisent la déformation du squelette solide. L'hypothèse des petites perturbations est également retenue, les configurations initiale et déformée du squelette solide peuvent être raisonnablement confondues. L'introduction de la relation contraintes-déformations dans l'équation d'équilibre conduit au calcul du champ de déplacement solide $\mathbf{u}_s$.

Une relation élastique linéaire isotrope (loi de Hooke) a été d'abord employée, à cause de l'ordre de grandeur des déplacements mesurés dans le massif au cours de l'injection d'un modèle cylindrique en vraie grandeur en laboratoire, et de la bonne concordance obtenue avec cette loi simple (voir section 8.4). Les faibles niveaux de contraintes obtenus lors de l'essai en cuve, et la monotonicité du chargement nous ont orienté vers une loi élastique linéaire pour décrire le comportement mécanique du squelette solide.

La loi de Drucker-Prager a également été implémentée afin d'étudier des cas réels d'injection (section 8.5) avec une loi constitutive plus représentative du comportement réel du sol qu'une loi élastique linéaire ([32], [93], [108]).

L'hypothèse est communément admise que l'incrément de déformations peut être décomposé en composantes élastiques et plastiques ([77]) :

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^e \tag{4.72}$$

L'incrément de déformation élastique est donné par la loi de Hooke, tandis que pour la détermination de l'incrément de déformation plastique, l'existence d'une surface de charge et la détermination de la règle d'écoulement sont nécessaires ([24]).

Pour un matériau parfaitement plastique, la surface de charge, fixe dans l'espace des contraintes, est définie par :

$$f(\sigma_{ij}) - k = 0 \tag{4.73}$$

k constante qui définit la limite d'élasticité (ou le seuil de plasticité) associée à un état de contraintes donné σ_{ij}. Pour des états de contraintes contenus à l'intérieur de cette surface le comportement est entièrement élastique. Afin de décrire complètement la possibilité d'écoulement plastique il faut introduire le critère de charge-décharge.

Au cours de l'écoulement plastique,

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0 \tag{4.74}$$

pour le schéma de plasticité classique, qui a pour effet de confiner la trajectoire des contraintes à la surface de charge. L'écoulement se produit si les deux conditions Eqn.4.73 et Eqn.4.74 sont réunies simultanément ([24], [77]). La direction de l'incrément de déformation plastique est défini en plasticité associée par la loi d'écoulement :

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \tag{4.75}$$

G désigne le potentiel plastique; pour la règle de plasticité associée, $G = f$, ce qui implique que l'incrément de déformation plastique est normal à la surface de charge. λ est le multiplicateur plastique, nul lorsqu'il n'y a pas d'écoulement.

Le critère de plasticité de Drucker-Prager s'écrit ([24], [32]) :

$$f = \sqrt{J_{2D}} - \alpha J_1 - k \tag{4.76}$$

α, k sont les paramètres matériels du modèle. $J_1 = trace(\boldsymbol{\sigma})$ est le premier invariant du tenseur des contraintes, $J_{2D} = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{\mu}}{3}\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - \frac{\sigma_{\mu}}{3}\delta_{ij}\right)$ est le second invariant du tenseur des contraintes déviatoires.

Les deux paramètres α et k du modèle de Drucker-Prager peuvent être déterminés à partir de la pente et de l'intersection à l'origine de l'enveloppe de rupture tracée dans l'espace $J_1 - J_{2D}$. Les valeurs de α et de c peuvent être exprimées en fonction de l'angle de frottement interne ϕ et de la cohésion c du critère de Mohr-Coulomb. Plusieurs correspondances sont possibles en fonction de l'état des contraintes ([24]). Pour un essai de compression triaxiale axisymétrique ([24], [32]) :

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}\,(3 - \sin\phi)} \tag{4.77}$$

$$k = \frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}\,(3-\sin\phi)}$$

Le système d'équations de champ résultant comprend quatre équations scalaires, l'équation de porosité, l'équation du coulis filtré, l'équation de transport et l'équation d'écoulement, et une équation vectorielle exprimant la conservation globlale de la quantité de mouvement. Les inconnues primaires associées sont respectivement :

- le champ de porosité $n(\mathbf{x}, t)$
- le champ de densité du coulis filtré ρ_σ
- le champ de pression fluide $\overline{p}^f$
- le champ de concentration du coulis $\overline{\rho^g}^f$
- le champ de déplacement du squelette solide $\mathbf{u}_s$

Les équations de champ sont complétées par l'adjonction des conditions aux limites et initiales macroscopiques, fonction des variables primaires, qui sont nécessaires et suffisantes pour conduire à un problème bien posé.

4.9 Conditions de bord

Par l'ajout de conditions aux limites et initiales macroscopiques, un énoncé mathématique complet du problème de transport à l'échelle macroscopique est obtenu. Les conditions de bord, motivées par la réalité physique des phénomènes étudiés et la nature mathématique des équations, complètent la formulation mathématique du problème.

4.9.1 Conditions initiales

Les conditions initiales s'écrivent sous la forme :

$$\xi(\mathbf{x}, t=0) = \xi_0(\mathbf{x}),\ \xi = n, \overline{p}^f, \overline{\rho^g}^f, \rho_\sigma \tag{4.78}$$

avec $\xi_0(\mathbf{x})$ une fonction prescrite des coordonnées.

4.9.2 Conditions aux limites

La frontière du domaine poreux macroscopique, désignée par ∂U, est partitionnée de la manière suivante pour l'imposition des conditions aux limites : $\partial U_{\xi imp} \cup \partial U_{q_\xi} = \partial U$, $\partial U_{\xi imp} \cap \partial U_{q_\xi} = \emptyset$. Les conditions

aux limites peuvent être de différents types :

Dirichlet

$$\xi(\mathbf{x},t) = \xi_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial U_{\xi imp} \tag{4.79}$$

est la condition de Dirichlet pour l'inconnue primaire $\xi = n, \overline{p}^f, \overline{\rho^g}^f, \rho_\sigma, \mathbf{u}_s$.

Neumann

$$n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) \cdot \boldsymbol{\nu} = -\frac{k}{\overline{\mu}^f}\left\{\nabla\overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f\mathbf{g}\right\} \cdot \boldsymbol{\nu} = q_{imp}(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial U_{q_p} \tag{4.80}$$

et

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t) \cdot \boldsymbol{\nu} = \mathbf{F}(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial U_{\mathbf{F}} \tag{4.81}$$

représentent les conditions de Neumann pour l'équation d'écoulement Eqn.4.68 et l'équation d'équilibre Eqn.4.71 respectivement. $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' - \overline{p}^f\mathbf{I}$ est le tenseur des contraintes totales pour le milieu poreux, $\mathbf{x}$ est le vecteur position dans un système de coordonnées Cartésien, $\boldsymbol{\nu}$ est le vecteur normal extérieur unitaire sur ∂U_{q_ξ}.

Cauchy

$$\left(-n\left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)\nabla\overline{\rho^g}^f + \overline{\rho^g}^f n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right) \cdot \boldsymbol{\nu} = q_{cimp}(\mathbf{x},t) \text{ sur } \partial U_{q_c} \tag{4.82}$$

est la condition aux limites de Cauchy (ou Robin) pour l'équation de transport du coulis Eqn.4.70.

$q_{imp}(\mathbf{x},t)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x},t)$ et $q_{cimp}(\mathbf{x},t)$ sont des fonctions prescrites de $\mathbf{x}$ et t. Dans l'Eqn.4.82, le flux sortant $n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \boldsymbol{\nu}$ est directement obtenu à partir de la condition aux limites de Neumann pour la phase fluide si $\partial U_{q_c} = \partial U_{q_p}$. Si $\partial U_{q_c} \neq \partial U_{q_p}$, le flux normal doit être calculé à partir du champ de pression connu à la frontière sur la portion $\partial U_{q_c} \cap \partial U_{\overline{p}^f}$ commune avec la condition de Dirichlet de l'équation d'écoulement, en employant la loi de Darcy.

4.10 Conclusion.

La résolution du problème d'injection en milieu poreux déformable requière la résolution simultanée des équations suivantes : équation d'écoulement résolue en fonction de la pression fluide, équation de transport qui donne la distribution de concentration du coulis, équation de porosité qui donne l'évolution de la porosité sous l'effet du dépôt et de la consolidation, équation de densité de coulis filtré, équation d'équilibre qui donne le déplacement du squelette solide. Les équations de conservation qui décrivent les variations des quantités macroscopiques considérées dans les phases individuelles, sont liées, ou couplées,

les unes aux autres par l'intermédiaire des termes de transfert de masse (filtration), des termes de couplage hydromécanique, et des variations des propriétés rhéologiques du fluide.

Lorsque la concentration de la composante coulis de la phase fluide est cherchée, le couplage avec les autres composantes - phase fluide dans son ensemble, composantes de la phase solide - est dû en partie à la fitration : un terme source apparaît dans l'équation de conservation de chaque composante, qui est fonction de la concentration. Une seule phase fluide sature l'espace interstitiel, mais le fluide est non homogène, et en particulier l'hypothèse de traceur souvent faite dans les problèmes de transport ([8], [31]), qui permet habituellement (en l'absence de filtration) de découpler complètement les problèmes de transport et d'écoulement, ne peut pas être faite ici. Les équations doivent être résolues simultanément. Le chapitre suivant décrit la discrétisation numérique du système d'équations développé, l'intérêt se porte plus particulièrement sur la discrétisation de l'équation de transport Eqn.4.70.

Chapitre 5

DISCRETISATION NUMERIQUE

5.1 Introduction

Dans ce chapitre les principaux aspects de la discrétisation numérique par la méthode des éléments finis sont décrits. L'accent est mis sur la discrétisation de l'équation de transport et sur le calcul des contraintes élasto-plastiques.

5.2 Problèmes liés à la discrétisation de l'équation de transport

L'équation de transport Eqn.4.70 est une équation qui peut être de type parabolique, elliptique ou hyperbolique, selon les proportions respectives des différents termes présents dans l'équation. Lorsque le terme de second ordre $\nabla \cdot \left(n \left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw} \right) \nabla \overline{\rho^g}^f \right) = 0$, i.e. en l'absence de dispersion hydrodynamique et de diffusion moléculaire, l'équation est de type hyperbolique. La diffusion moléculaire est très faible pour le problème étudié, et l'identification de la constante de dispersion longitudinale (section 7.6) montre que, bien que la dispersion ne soit pas négligeable, le rapport de la convection sur la dispersion est inversement proportionnel à la constante de dispersion longitudinale, soit supérieur à 100.

Le nombre de Peclet du problème physique caractérise le rapport entre les effets convectifs et les effets diffusifs (Eqn.4.70), il peut être estimé par une mise sous forme adimensionnelle et un calcul d'ordre de grandeur :

$$Pe = \frac{n \nabla \overline{\rho^g}^f \cdot \overline{\mathbf{V}_f^m}^f}{\nabla \cdot \left(n \left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw} \right) \nabla \overline{\rho^g}^f \right)} = \frac{n \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i} \left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f \right)_i}{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(n \left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw} \right)_{kl} \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_l} \right)} \tag{5.1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n_c n^* \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)^* \left(\overline{\left(V_f^m\right)_i}^f\right)_c \left(\overline{\left(V_f^m\right)_i}^f\right)^*}{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(n_c n^* \left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)^*_{kl} a_L \left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|_{\max} \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_k}\right)^*\right)} \\
&\geq \frac{\left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)^* \left|\overline{\left(V_f^m\right)_i}^f\right|_{\max}}{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)^*_{kl} a_L \left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|_{\max} \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_k}\right)^*\right)} \\
&\approx \frac{\left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)^*}{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)^*_{kl} a_L \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_i}\right)_c \left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_k}\right)^*\right)} \approx O(1)\frac{L_c}{a_L}
\end{aligned}
$$

avec, si ξ désigne une grandeur physique quelconque (vitesse, concentration, porosité ...), $\xi = \xi_c \xi^*$, $\xi_c = \max\limits_{(\mathbf{x},t)} (\xi(\mathbf{x},t))$ désignant la valeur caractéristique de ξ (son ordre de grandeur ou sa valeur maximale pour le problème considéré), et $\xi^* = O(1)$ ([13]).

Les variations spatiales de la porosité et de la vitesse sont négligées. Il est également supposé que

$$
L_c = \frac{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_c}{\left(\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_k}\right)_c} = \left(\frac{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_c}{\left(\frac{\partial^2 \overline{\rho^g}^f}{\partial x_k^2}\right)_c}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.2}
$$

$$
\left(\overline{\left(V_f^m\right)_i}^f\right)_c = \left|\overline{\left(V_f^m\right)_i}^f\right|_{\max} \tag{5.3}
$$

et que

$$
\left(\mathbf{D}_f^{m_g} + \mathbf{D}^{*gw}\right)_c = \max_{k,l}\left(\left(D_f^{m_g}\right)_{kl} + (D^{*gw})_{kl}\right) \leq a_L \left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|_{\max} + D^{*gw} \approx a_L \left|\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right|_{\max} \tag{5.4}
$$

en négligeant la diffusion moléculaire, ce qui permet d'estimer le nombre de Peclet

$$
Pe \propto \frac{1}{a_L} \simeq 100 \tag{5.5}
$$

Le terme convectif de l'équation de transport est prépondérant par rapport au terme de dispersion. Le problème de transport est donc un problème parabolique dont le comportement est largement hyperbolique ([44]). Ce problème ne possède pas les propriétés de stabilité et de régularité des problèmes paraboliques ([44]). La solution élément fini de l'équation de transport présente des difficultés lorsque le terme convectif est dominant.

La formulation aux résidus pondérés la plus répandue est la méthode de Galerkin, pour laquelle les fonctions de pondération et d'interpolation appartiennent à la même classe de fonctions. La méthode de

Galerkin appliquée aux problèmes de structure ou de conduction (équation de la chaleur) conduit à des matrices de raideurs symétriques, définies positives, pour des problèmes linéaires ou non linéaires. En ce cas, il est possible de montrer ([94]) que la solution discrète obtenue constitue la meilleure approximation du problème : la différence entre la solution élément fini et la solution exacte est minimisée par rapport à une certaine norme. Dans les problèmes de convection, du premier ordre, la matrice assoçiée aux termes de convection est non symétrique, et par conséquent, la propriété de meilleure approximation est perdue. La méthode de Galerkin conduit à des différences centrées, et les différences centrées manquent de stabilité, de façon inhérente, lorsqu'il s'agit de modéliser des dérivées d'ordre impair ([78]). L'emploi d'une pondération par des éléments non symétriques (méthode de Petrov-Galerkin) permet dans de nombreux cas de rendre la matrice masse plus diagonalement dominante ([88]), améliorant la stabilité de la solution numérique.

La résolution de l'équation de transport a d'abord été tentée par la méthode de Galerkin. Dans le cas unidimensionnel, des oscillations peuvent apparaître, par exemple lorsqu'une condition aux limites essentielle discontinue en aval de l'écoulement induit une variation brusque de la solution, oscillations qui disparaissent en affinant suffisamment le maillage au voisinage de la couche limite. Par contre, pour des situations d'injection et d'écoulement bidimensionnelles ou tridimensionnelles quelconques - c'est le cas de l'injection cylindrique, la direction de l'écoulement n'est pas parallèle aux axes principaux de maillage, ou lorsqu'une condition essentielle discontinue est imposée en amont de l'écoulement, des oscillations apparaissent dans la solution, oscillations qu'il est impossible de faire disparaître, même en employant un maillage très raffiné, le coût de la résolution devenant prohibitif. De telles oscillations, surtout marquées lorsqu'il existe des conditions aux limites essentielles abruptes en aval de l'écoulement (voir annexe 10.2.1), sont impossibles avec des systèmes symétriques, définis positifs. Afin de traiter des cas d'injection quelconques, une méthode suffisamment robuste doit être employée, qui élimine les oscillations sans nécessiter une discrétisation excessivement fine. En effet, les oscillations numériques apparaissent à chaque fois que la taille du maillage dépasse une certaine valeur critique, et si la discrétisation n'est pas rendue nécessaire par la précision voulue des résultats, il devient inutile de raffiner uniquement pour assurer la stabilisation de la solution.

L'emploi d'une méthode de discrétisation de type Petrov–Galerkin a permis d'améliorer la solution numérique de façon appréciable.

5.2.1 Procédés d'obtention d'approximations décentrées

Il a été montré que des solutions exemptes d'oscillations peuvent être obtenues par l'emploi d'une différentiation upwind ou amont du terme convectif. La différentiation amont équivaut à approximer les dérivées convectives du premier ordre avec les valeurs de la solution aux noeuds amont (en arrière de

l'écoulement ou du front) et central (au niveau de l'écoulement) si un schéma à trois noeuds est considéré. L'inconvénient d'un tel schéma est qu'il est précis au premier ordre, tandis que les différences centrées sont précises au second ordre. La perte de précision se traduit par des solutions trop diffusives. Aussi, il apparaît qu'une combinaison des différences centrée et upwind, basées sur le nombre de Peclet discret du maillage, est meilleure qu'une différence amont ([21]).

Dans un cadre élément fini, les termes convectifs upwind peuvent être développés de plusieurs façons différentes. La formulation upwind initiale, présentée par Christie et al. ([25]) pour l'équation d'advection-diffusion unidimensionnelle, emploie des fonctions de pondération modifiées afin d'obtenir l'effet upwind. L'élément en amont d'un noeud est pondéré de manière plus forte que l'élément en aval d'un noeud. La méthode a ensuite été généralisée au cas bidimensionnel ([54]).

La méthode de diffusion artificielle, consiste à ajouter une diffusion supplémentaire, non physique, au terme de diffusion physique du second ordre dans l'équation de transport (terme de dispersion numérique dans l'équation Eqn.4.70). Une discrétisation élément fini de Galerkin est ensuite employée. A partir de considérations d'erreurs de troncature, un schéma analogue est développé par Dukowicz et al. ([41]) en dimension deux, par l'ajout d'un terme de diffusion dans lequel le coefficient de diffusion artificielle est un tenseur plutôt qu'un scalaire. L'intérêt de ce shéma réside dans l'introduction du terme stabilisateur sous forme tensorielle (invariance tensorielle), et dans la dépendance du terme stabilisateur à l'égard de la vitesse, la diffusion artificielle se trouvant minimisée dans les zones de faible vitesse. Selon certains auteurs, la diffusion artificielle équilibre la diffusion négative du traitement de Galerkin ([21], [41], [39], [57]), mais le plus souvent rajoute une diffusion numérique en excès par rapport à la diffusion négative de Galerkin ([78]).

Hughes ([63]) propose également une méthode simple pour générer des éléments upwind, qui utilise une règle de quadrature modifiée pour le terme convectif. Par exemple, dans le cas bidimensionnel, avec des éléments bilinéaires, le terme convectif est calculé à l'aide d'une seul point de quadrature. Le terme de quadrature réduite peut également s'interpréter par la diffusion artificielle.

Dans le cas unidimensionnel de convection-diffusion stationnaire, la plupart des formulations upwind conduisent au même système d'équations matricielles, et la solution peut être rendue nodalement exacte, quelle que soit la valeur du nombre de Peclet, par l'ajout d'un terme de diffusion artificielle, ou encore par l'emploi d'une règle de quadrature non symétrique, en conjonction avec des fonctions de forme linéaires par morceaux ([2], [60], [94], [121]). La formulation correspondante est appelée formulation upwind optimale.

Cependant la généralisation de la plupart de ces méthodes à des cas plus complexes n'est pas optimale, et pose en outre la question de la fondation théorique de tels schémas. Dans la généralisation directe des schémas unidimensionnels en dimension deux ou trois, de nombreux schémas upwind, y compris parmi

les schémas optimaux en unidimensionnel, sont inefficaces à cause d'un problème de diffusion transverse (perpendiculaire à la direction de l'écoulement) excessive ([78]) lorsque l'écoulement est incliné par rapport au maillage (crosswind diffusion, voir annexe 10.2.1). Des résultats trop diffusifs sont également obtenus pour les problèmes transitoires, ou lorsque des termes sources sont présents.

En effet ces schémas sont construits sur la base de solutions unidimensionnelles, partant du principe que l'équation d'advection-dispersion en unidimensionnel illustre l'ensemble des difficultés à surmonter ([121]). Or les problèmes d'écoulement multidimensionnels présentent d'autres difficultés, qui ne peuvent être prévues par l'étude de cas unidimensionnels : dispersion numérique (étalement non physique du front de concentration), effet d'orientation du maillage (diffusion transverse), ou couches limites multiples présentes sur tout ou partie du bord, qui provoquent un dépassement des valeurs limites imposées et des oscillations. Ce sont généralement ces difficultés qui sont mal gérées par les schémas upwind classiques ([54]). L'effet upwind n'est en réalité nécessaire que dans la direction de l'écoulement.

Les trois types de difficultés (dispersion numérique, effet d'orientation du maillage, conditions aux limites discontinues) se rencontrent dans la formulation de l'équation de transport du coulis. La légitimité des méthodes upwind a été longuement discutée ([78], [49]), en arguant que la méthode fausse complètement la diffusion, aussi faible soit-elle, réellement présente dans le problème physique initial par l'introduction d'une diffusion artificielle importante. Un schéma plus précis que les méthodes upwind classiques est donc nécessaire. Le schéma retenu pour la discrétisation de l'équation de transport est le schéma SUPG.

5.2.2 Streamline Upwind Petrov Galerkin Method (SUPG)

Le fondement de la formulation est le concept streamline upwind ([21]), qui fournit une généralisation multidimensionnelle précise des schémas upwind unidimensionnels optimaux ([94]). L'idée fondamentale de la méthode SUPG est d'ajouter une perturbation qui n'agisse que dans la direction de l'écoulement ([60]). La première formulation de la méthode streamline upwind, introduite afin de supprimer la diffusion transverse artificielle, peut être interprétée par l'ajout d'un terme de diffusion artificielle dans le sens de l'écoulement, ou encore par la modification de la fonction de pondération pour le terme convectif uniquement ([41], [60]), les autres termes du système discret restant inchangés par rapport à la formulation de Galerkin standard. Le terme supplémentaire par rapport aux fonctions de Galerkin standard est pondéré par un coefficient dépendant de la valeur du nombre de Péclet ([21], [94]). Pour les nombres de Péclet élevés, il est tenu compte du sens de l'écoulement dans la résolution du problème numérique. Cette prise en compte s'effectue par une discrétisation non plus centrée mais décentrée amont : le décentrage privilégie l'information provenant de l'amont de l'écoulement par rapport à celles issues de l'aval, et les fonctions de pondération ne sont pas symétriques sur l'élément.

La méthode streamline upwind résout effectivement le problème de la diffusion transverse, mais un certain nombre d'autres problèmes restent posés. Le terme de diffusion upwind n'est pas consistant avec le terme source et les termes transitoires, ce qui se traduit par une diffusion numérique (erreur de dissipation) excessive lorsque ces termes sont présents. C'est pourquoi une pondération upwind de tous les termes présents dans l'équation de transport est rendue nécessaire. L'application de la fonction de pondération modifiée de manière consistante à tous les termes de l'équation - et non uniquement aux termes exprimant des variations spatiales - donne l'effet désiré, et définit une formulation de Petrov-Galerkin consistante, à partir d'une procédure aux résidus pondérés complète.

Une formulation aux résidus pondérés qui accepte des fonctions de pondération discontinues, est proposée par Brooks et Hughes, lorsque les fonctions de pondération employées, basées sur le concept streamline upwind, sont régulières à l'intérieur des éléments ([21], [61]). Cette technique est appelée méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin). L'implémentation consistante du schéma streamline upwind permet d'éliminer la diffusion artificielle excessive présente dans les schémas upwind classiques ([54], [121], voir section 6.4.1), tout en convergeant vers la solution (quelques résultats de convergence théorique sont présentés dans [59]).

De plus, des résultats de convergence, indispensables pour l'extension de la méthode, ont pu être obtenus ([68]), qui introduisent des méthodes stabilisées pour le modèle d'advection ([46]).

La démarche suivie pour obtenir la formulation aux résidus pondérés est la même que celle détaillée dans ([61]) dans le cas stationnaire et sans couplage. Les termes de couplage, qui peuvent être vus comme des termes source, sont pondérés de manière consistante.

Soit Ω une région ouverte de R^{nsd}, de frontière régulière par morceaux Γ. Soit $\mathbf{x} = \{x_i\}$, $i = 1, ..., nsd$, un point général dans Ω, nsd désignant le nombre de dimensions d'espace, et $\boldsymbol{\nu}$ le vecteur normal extérieur unitaire sur Γ. Pour l'équation de transport Eqn.4.70, la frontière est décomposée de la façon suivante : $\Gamma = \overline{\Gamma_{c_{imp}} \cup \Gamma_{q_c}}$, $\emptyset = \overline{\Gamma_{c_{imp}} \cap \Gamma_{q_c}}$.

Ω est discrétisé en sous-domaines élémentaires Ω^e, $e = 1, ..., nel$, nel désignant le nombre d'éléments. Chaque Ω^e est un domaine ouvert et sa frontière est désignée par Γ^e. Il est supposé que

$$\begin{aligned} \Omega &= \bigcup_e \overline{\Omega^e} \\ \Gamma &\subset \bigcup_e \Gamma^e \end{aligned} \tag{5.6}$$

L'ensemble $\overline{\Omega^e}$ désigne les intérieurs des éléments. La frontière intérieure Γ_{int} correspond à

$$\Gamma_{int} = \bigcup_e \Gamma^e - \Gamma \tag{5.7}$$

Les fonctions du premier type sont des fonctions continues à travers la frontière Γ_{int}. Ces fonctions

sont désignées par $C^0 = C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ (interpolations élément fini standard). Les fonctions du second type peuvent être discontinues à travers Γ_{int}, elles sont désignées par $C^{-1} = C^{-1}\left(\overline{\Omega}\right)$.

L'équation considérée est l'Eqn.4.70. La solution cherchée doit satisfaire Eqn.4.70, les conditions aux limites et initiale suivantes :

$$\overline{\rho^g}^f(\mathbf{x}, t=0) = \overline{\rho^g}_0^f(\mathbf{x}) \text{ (Eqn.4.78)}$$

$$\overline{\rho^g}^f(\mathbf{x}, t) = \overline{\rho^g}_{imp}^f(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \Gamma_{c_{imp}} \text{ (Eqn.4.79)}$$

$\overline{\rho^g}_{imp}^f$ une fonction donnée sur $\Gamma_{c_{imp}}$. Sur Γ_{q_c}, deux types de conditions aux limites sont possibles :

Condition de Robin ou de flux total

$$\left(-\left(\overline{V_f^m}^f\right)_i \overline{\rho^g}^f + (D_h)_{ij} \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_j}\right)\nu_i = q_{cimp} \text{ sur } \Gamma_{q_c} \text{ (Eqn.4.82)} \tag{5.8}$$

Condition aux limites de Neumann

$$(D_h)_{ij} \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_j}\nu_i = q_{cimp} \text{ sur } \Gamma_{q_c} \tag{5.9}$$

obtenue à partir de l'Eqn.5.8 lorsque le flux convectif est nul.

Dans les problèmes d'injection et d'écoulement il est généralement nécessaire de simuler une condition de flux sortant sur une portion de la frontière (Γ_{q_c}). Souvent Γ_{q_c} est situé dans une région où les gradients sont faibles, relativement éloignée de la région étudiée, où se produit l'essentiel du transport. Du point de vue numérique, il est souhaitable que la condition aux limites de flux sortant ne produise pas de perturbation numérique sur la solution étudiée. Dans les situations à convection dominante, il apparaît que la condition aux limites de flux diffusif satisfait la propriété désirée, tandis qu'une condition aux limites de flux total pose problème. Supposons $q_{cimp} = 0$, les conditions aux limites qui peuvent être imposées sur Γ_{q_c}, Eqn.5.8 et Eqn.5.9, prennent la forme :

$$\left(-(V_f)_i \overline{\rho^g}^f + (D_h)_{ij} \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_j}\right)\nu_i \simeq -(V_f)_i \nu_i \overline{\rho^g}^f = 0 \tag{5.10}$$

$$(D_h)_{ij} \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_j}\nu_i = 0 \tag{5.11}$$

Dans la première relation Eqn.5.10, le terme de flux diffusif est petit par rapport au terme d'advection, et peut donc être négligé. La première relation devient $\overline{\rho^g}^f = 0$, soit une condition de Dirichlet

homogène (tandis que $(V_f)_i \nu_i = 0$ se ramène la condition de Neumann homogène appliquée à l'équation d'écoulement Eqn.4.68). La condition de Dirichlet homogène tend à créer une couche limite au voisinage de Γ_{q_c}, qui pose généralement des difficultés lors de la discrétisation numérique. Par contre, la seconde condition aux limites Eqn.5.11 implique $\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_n} = \frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial x_j} \nu_j = 0$, condition qui est conforme avec la variation supposée de $\overline{\rho^g}^f$ dans la région de sortie de l'écoulement, et donc mieux appropriée à une condition aux limites de flux sortant. En conséquence, la condition aux limites de flux total, qui se ramène lorsque la convection est dominante à une condition aux limites essentielle homogène, devra être relaxée chaque fois que c'est possible, si elle n'est pas imposée par le problème physique.

La formulation faible est développée de la manière suivante. Soit un point $\mathbf{x} \in \Gamma_{int}$. Un côté de Γ_{int} est choisi arbitrairement comme le côté positif, tandis que l'autre est pris comme côté négatif. Soit $\boldsymbol{\nu}^+$ et $\boldsymbol{\nu}^-$ les vecteurs normaux unitaires sur Γ_{int} en $\mathbf{x}$, qui pointent respectivement dans les sens positif et négatif. $\boldsymbol{\nu}^+ = -\boldsymbol{\nu}^-$. σ_i^+ et σ_i^- désignent alors les valeurs de σ_i obtenues en approchant $\mathbf{x}$ depuis les côtés positif et négatif, respectivement. Le "saut" de σ_n en $\mathbf{x}$ est défini par :

$$[\sigma_n] = \left(\sigma_i^+ - \sigma_i^-\right) n_i^+ = \sigma_i^+ n_i^+ + \sigma_i^- n_i^- \tag{5.12}$$

et est indépendant de l'orientation choisie.

$\widetilde{c}$ désigne l'approximation discrète de $\overline{\rho^g}^f$, de la forme : $\widetilde{c} = \sum_{i=1}^n N_i \left(\overline{\rho^g}^f\right)_i$, N_i fonctions de base linéairement indépendantes définies sur chaque sous-domaine élémentaire, $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_i$ inconnues à déterminer. Il est supposé que les fonctions test $\widetilde{c}$, qui approchent la fonction inconnue $\overline{\rho^g}^f$, satisfont la condition de Dirichlet $\overline{\rho^g}^f = c_{imp}$ sur $\Gamma_{c_{imp}}$, tandis que les fonctions de pondération W_i satisfont $W_i = 0$ sur $\Gamma_{c_{imp}}$. La condition aux limites de flux total est considérée par la suite, la condition aux limites de Neumann ou flux diffusif s'en déduit en annulant le terme convectif.

Lorsque $\widetilde{c}$ et W_i sont des fonctions C^0, l'équation sous forme faible s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_e \int_{\Omega_e} W_i \,(\text{Eqn.4.70})\, d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_c}} W_i \left(\left(-\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right)_i \widetilde{c} + (D_h)_{ij} \frac{\partial \widetilde{c}}{\partial x_j} \right) \nu_i - q_{cimp} \right) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma_{int}} W_i \,[\sigma_n]\, d\Gamma \end{aligned} \tag{5.13}$$

L'équation de transport est à présent réécrite sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{\rho^g}^f}{\partial t} + \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla \overline{\rho^g}^f = \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_f^{m_g} \nabla \overline{\rho^g}^f \right) + f \tag{5.14}$$

obtenue à partir l'Eqn.4.70 en regroupant dans f l'ensemble des termes de couplages présents, y compris les termes de variation de la porosité; l'équation obtenue est ensuite divisée par la porosité, et après

intégration par parties, l'Eqn.5.14 est substituée dans l'Eqn.5.13 pour donner :

$$\int_{\Omega} \left(N_i \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla \widetilde{c} + \nabla N_i \cdot \left(\mathbf{D}_f^{m_g} \nabla \widetilde{c} \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} N_i \left(f - \widetilde{c}_{,t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{q_c}} N_i q_{cimp} d\Omega \tag{5.15}$$

Parmi la classe des fonctions C^0, l'équation sous forme faible se ramène à l'équation de champ Eqn.4.70 restreinte aux intérieurs des éléments, à la condition aux limites Eqn.5.8 sur $\Gamma_{q_{cimp}}$, et à la condition de continuité du flux diffusif à travers les frontières interéléments : $[\sigma_n] = 0$.

La formulation est à présent généralisée pour tenir compte d'une pondération discontinue. $(N_p)_i \in C^{-1}$ est une perturbation discontinue de la fonction de pondération $W_i \in C^0$. La formulation SUPG emploie des fonctions de pondération discontinues de la forme ([60]) :

$$\widetilde{W_i} = W_i + (N_p)_i = W_i + \tau \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla N_i \tag{5.16}$$

W_i est la fonction de pondération continue de Galerkin, tandis que $(N_p)_i$ est la contribution streamline upwind. $\widetilde{W_i}$ sera donc discontinue aux frontières interéléments.

Le système résultant s'écrit à présent :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_e \int_{\Omega_e} \widetilde{W_i} \left(\text{Eqn.5.14} \right) d\Omega_e + \int_{\Gamma_{q_c}} W_i \left(\left(- \left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f \right)_i \widetilde{c} + (D_h)_{ij} \frac{\partial \widetilde{c}}{\partial x_j} \right) \nu_i - q_{cimp} \right) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_{int}} W_i \left[\sigma_n \right] d\Gamma \end{aligned} \tag{5.17}$$

L'Eqn.5.17 montre que la méthode SUPG est une méthode résiduelle, i.e. lorsque l'approximation $\widetilde{c} \to \overline{\rho^g}^f$, la solution exacte est vérifiée.

La formulation faible s'écrit à présent :

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left(N_i \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla \widetilde{c} + \nabla N_i \cdot \left(\mathbf{D}_f^{m_g} \nabla \widetilde{c} \right) \right) d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_e} \tau \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla \widetilde{c} \left(\widetilde{c}_{,t} + \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \cdot \nabla \widetilde{c} - \nabla \cdot \left(\mathbf{D}_f^{m_g} \nabla \widetilde{c} \right) - f \right) d\Omega \\ = &\int_{\Omega} N_i \left(f - \widetilde{c}_{,t} \right) d\Omega + \int_{\Gamma_{q_{cimp}}} N_i q_{cimp} d\Omega \end{aligned} \tag{5.18}$$

La somme des intégrales sur les intérieurs des éléments ne peut pas être écrite sous forme d'intégrale globale sur Ω à cause de la présence du terme $\nabla \cdot \left(\mathbf{D}_f^{m_g} \nabla \widetilde{c} \right)$.

Johnson et al. ([68]) ont montré que la généralisation la plus appropriée du concept SUPG aux problèmes transitoires implique une formulation spatio-temporelle complètement discrète.

Dans la formulation modifiée, la perturbation est confinée aux intérieurs des éléments, et n'affecte ni les conditions aux limites naturelles, ni les conditions de continuité. La perturbation N_p affecte le terme

volumique, mais non q_{cimp}. La pondération de la condition de Dirichlet $\overline{\rho^g}^f_{imp}$ est affectée de manière implicite. Il apparaît donc que la solution exacte satisfait identiquement l'équation variationnelle de la méthode discrète.

En outre, lorsque la fonction inconnue $\overline{\rho^g}^f$ est interpolée avec des fonctions d'interpolation isoparamétriques multilinéaires, que les éléments sont rectangulaires, $\mathbf{D}_f^{m_g}$ est constant avec $\mathbf{D}_f^{m_g} = D\mathbf{I}$, la modification streamline upwind N_p n'affecte pas la pondération du terme du second ordre. Lorsque les éléments ne sont pas rectangulaires mais de forme régulière, la contribution est également négligeable.

L'identification du paramètre upwind τ, homogène à un temps, est détaillée dans ([59]). Plusieurs alternatives sont possibles pour le choix du paramètre qui détermine la quantité de pondération upwind. Dans le cas unidimensionnel stationnaire, lorsque les paramètres sont constants et en l'absence de termes sources, la valeur optimale de τ fonction du nombre de Peclet local, qui conduit à une solution nodalement exacte, est utilisée. Pour les problèmes multidimensionnels, une généralisation directe est employée, avec des variantes pour les problèmes instationnaires ([21]). Par ailleurs, Hughes et al. proposent une formulation de la fonction de perturbation modifiée ([59]). La nouvelle méthode comprend un terme additionnel dans l'expression de la fonction de pondération streamline upwind, de forme similaire à $(N_p)_i$ dans l'Eqn.5.16, mais qui agit dans la direction du gradient de la solution, plutôt que dans la direction de la ligne de courant de l'écoulement fluide. Ce terme vise à contrôler les gradients dans la direction du gradient de concentration, et permet d'améliorer la robustesse de la méthode SUPG en présence de couches limites. Il n'existe pas de choix optimal de τ, le choix est motivé par les difficultés propres à l'application concernée ([21], [59]). La structure des fonctions de pondération upwind est toutefois plus importante que la valeur réelle du paramètre, et les termes additionnels qui apparaissent dans la formulation ne doivent pas être vus comme de la diffusion artificielle. Les fonctions de pondération SUPG et SUPG avec discontinuity capturing ont été implémentées (voir annexe 10.1.4). Le calcul des fonctions streamline upwind est relativement simple, et ne nécessite que la donnée des fonctions de pondération standard, de leurs dérivées par rapport aux coordonnées d'espace, et du champ de vecteur vitesse.

5.3 Calcul des contraintes

Tout schéma numérique employé dans l'analyse des problèmes élastoplastiques comporte l'intégration des équations constitutives du comportement matériel. L'efficacité (convergence, précision, stabilité) des résolutions élasto-plastiques incrémentales est essentiellement liée à la stratégie employée pour intégrer les équations constitutives, et au schéma itératif employé pour résoudre les équations d'équilibre. Les inconnues à déterminer sont les contraintes et les variables plastiques (mises à jour à partir d'un état d'équilibre antérieur). Les schémas de plasticité consistent généralement en une mise à jour des contraintes

en deux étapes principales : les contraintes sont d'abord calculées pour l'incrément de déformation courant, en supposant un comportement élastique linéaire, qui conduit à un prédicteur élastique obtenu par intégration des relations contraintes-déformations élastiques; le prédicteur élastique est ensuite projeté sur une surface de charge convenablement actualisée, qui garantisse la vérification de la condition de consistance plastique ([24], [91], [92], [108]). Les équations plastiques définissent alors un correcteur plastique, par l'intermédiaire duquel les contraintes élastiques prédites sont ramenées sur la surface de charge actualisée ([92]). Dans l'algorithme de retour radial, les contraintes sont projetées sur la surface de charge le long de la direction d'écoulement plastique finale $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}$. L'algorithme de retour radial est inconditionnellement stable si le domaine élastique est convexe (cas du critère de Drucker-Prager), précis au premier ordre, et satisfait au critère de consistance plastique (les contraintes calculées à partir de l'algorithme doivent être contenues dans le domaine élastique) ([91]).

En particulier, le taux de convergence quadratique d'une solution incrémentale basée sur une procédure itérative de Newton-Raphson ne peut être atteint que lorsque le module tangent (pour le calcul des contraintes) est dérivé d'une manière consistante avec l'algorithme constitutif d'intégration des contraintes ([86]). La méthode de module tangent consistant est implémentée car elle particulièrement efficace pour le critère de Drucker-Prager ([86]).

Les algorithmes de return mapping découlent de la structure additive commune à toutes les relations constitutives élasto-plastiques ([92]). L'algorithme de retour radial classique, bien que d'applicabilité générale, conduit à des systèmes d'équations non linéaires, dont la résolution par la méthode de Newton-Raphson requière l'évaluation des gradients de la direction d'écoulement plastique, de la normale à la surface de charge, des modules plastiques et du tenseur d'élasticité.

Les équations plastiques sont écrites sous forme de taux :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^e_{ij} + \dot{\varepsilon}^p_{ij} \tag{5.19}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}\, \dot{\varepsilon}^e_{kl} \tag{5.20}$$

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\, \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} \tag{5.21}$$

La dérivation du module tangent s'effectue à partir des lois constitutives de plasticité écrites sous forme de taux Eqn.5.19 à Eqn.5.21, et de la condition de consistance plastique écrite sous forme incrémentale :

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\, \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\, \dot{\mathbf{q}} \tag{5.22}$$

où $\mathbf{q}$ désigne les paramètres d'écrouissage ([77]).

L'intégration des déformations plastiques sur le pas de temps $[t_{n+1}, t_n]$ s'effectue à l'aide du schéma

d'Euler arrière. Les relations suivantes sont dérivées :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n \tag{5.23}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^p_n + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p_n \tag{5.24}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1}\right) \tag{5.25}$$

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1} = \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} \tag{5.26}$$

$$\Delta f_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} \Delta\boldsymbol{\sigma}_{n+1} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}_{|n+1} \Delta\mathbf{q}_{n+1} \tag{5.27}$$

Pour obtenir un module tangent consistant, l'équation suivante est considérée, d'après les Eqns.5.25 et 5.26 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{n+1} &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p_{n+1}\right) \\ &= \boldsymbol{\sigma}_n + \mathbf{D}\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}\right) \end{aligned} \tag{5.28}$$

La différentiation de l'équation précédente se traduit par :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D} d\left(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\right) - d\lambda \mathbf{D} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} - \lambda \mathbf{D} : \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}_{|n+1} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} \tag{5.29}$$

Le réarrangement des termes donne :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \mathbf{D}^*_{n+1}\left(d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - d\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}\right) \tag{5.30}$$

avec

$$\mathbf{D}^*_{n+1} = \left(\mathbf{I} + \lambda \mathbf{D} \frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}_{|n+1}\right)^{-1} \mathbf{D} \tag{5.31}$$

La condition de consistance plastique s'écrit alors, d'après l'Eqn.5.27 :

$$df_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} - d\lambda \mathbf{H}_{n+1} = 0 \tag{5.32}$$

avec

$$\mathbf{H}_{n+1} = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}_{|n+1} d\mathbf{q}_{n+1} \tag{5.33}$$

L'Eqn.5.32 est résolue pour $d\lambda$:

$$d\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} : \mathbf{D}^*_{n+1} : d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}}{\mathbf{H}_{n+1} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} : \mathbf{D}^*_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}} \tag{5.34}$$

Par substitution de l'équation précédente dans l'Eqn.5.30, on trouve :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \widehat{\mathbf{D}}_{n+1} d\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} \tag{5.35}$$

avec

$$\widehat{\mathbf{D}}_{n+1} = \mathbf{D}^*_{n+1} - \frac{\mathbf{D}^*_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} : \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} : \mathbf{D}^*_{n+1}}{\mathbf{H}_{n+1} + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} : \mathbf{D}^*_{n+1} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}} \tag{5.36}$$

L'algorithme de mise à jour des contraintes est résumé sur la Fig.5-1 (avec $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ en l'absence d'écrouissage), il est basé sur un prédicteur élastique et une procédure itérative de mise à jour des contraintes ([69]). Une fois que le prédicteur élastique est donné, l'actualisation plastique porte uniquement sur la partie plastique de l'Eqn.5.30 :

$$d\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = -\mathbf{D}^*_{n+1} d\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1} \tag{5.37}$$

Comme $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}$ dépend de $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$, une procédure itérative est nécessaire pour ramener $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ sur une surface de charge convenablement actualisée $f_{n+1}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}, \mathbf{q}_{n+1})$. Le processus de mise à jour pour les contraintes et les variables plastiques est effectué pas à pas. A chaque itération i, la fonction de charge est linéarisée autour des valeurs $\left(\boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}, \mathbf{q}^i_{n+1}\right)$ de l'itération courante de la manière suivante ([92]) :

$$f \approx f\left(\boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}, \mathbf{q}^i_{n+1}\right) + \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}, \mathbf{q}^i_{n+1}\right) : \left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}\right) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}}\left(\boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}, \mathbf{q}^i_{n+1}\right) : \left(\mathbf{q} - \mathbf{q}^i_{n+1}\right) = 0 \tag{5.38}$$

La condition de consistance précédente permet de calculer le multiplicateur plastique λ :

$$\lambda = \frac{f\left(\boldsymbol{\sigma}^i_{n+1}, \mathbf{q}^i_{n+1}\right)}{\mathbf{H}^i_{n+1} + \left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}\right)^i : \left(\mathbf{D}^*_{n+1}\right)^i : \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}\right)^i} \tag{5.39}$$

La valeur de λ est ensuite utilisée pour le calcul des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^i_{n+1} - \lambda \left(\mathbf{D}^*_{n+1}\right)^i \left(\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}_{|n+1}\right)^i \tag{5.40}$$

La différence par rapport à l'algorithme de retour radial (closest point procedure, module tangent

classique) décrit par Ortiz et al. ([91], [92]) réside dans l'emploi de $\mathbf{D}^*_{n+1}$ au lieu de $\mathbf{D}$ dans la procédure d'actualisation des contraintes. Les calculs sont plus complexes, en particulier le calcul de $\mathbf{D}^*_{n+1}$ requière$\frac{\partial^2 G}{\partial \boldsymbol{\sigma}^2}|_{n+1}$, tandis que Ortiz et Popov ([91]), Ortiz et Simo ([92]) emploient uniquement des fonctions essentielles (relation contrainte-déformation, fonction de charge, normale à la surface de charge, direction de l'écoulement plastique $\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ et module élastique tangent), sans nécessiter la dérivation de leur gradient, d'expression complexe, ou non disponible pour des critères de charge arbitraires avec écrouissage. Néanmoins Mitchell et Owen ([86]) montrent que le coût du calcul sur une itération n'est pas plus élevé comparé à l'approche du module tangent standard ([91], [92]), une convergence quadratique peut ainsi être obtenue ([86]). La procédure itérative définie par les Eqns.5.31, 5.38, 5.39, 5.40, appliquée en chaque point d'intégration (point de Gauss du maillage élément fini), débute avec les contraintes du prédicteur élastique, et se termine lorsque la condition de consistance plastique est satisfaite selon une tolérance prescrite $\varepsilon << 1$ fixée par l'utilisateur, $f^{i+1}_{n+1} \leq \varepsilon f^0_{n+1}$. La norme deux est employée dans le programme pour estimer la convergence des sous-itérations. Afin de conserver une formulation générale, l'implémentation a été effectuée en considérant une loi de plasticité non associée, plus appropriée pour des matériaux tels que les sols.

L'algorithme itératif de plasticité est lui-même inséré dans la boucle de résolution itérative de l'équation d'équilibre, afin de vérifier les lois constitutives élasto-plastiques et l'équilibre du système.

Les itérations sur l'équation d'équilibre sont stoppées lorsqu'un critère est satisfait :

$$\left|\Delta u^{k+1} - \Delta u^k\right| < \varepsilon$$

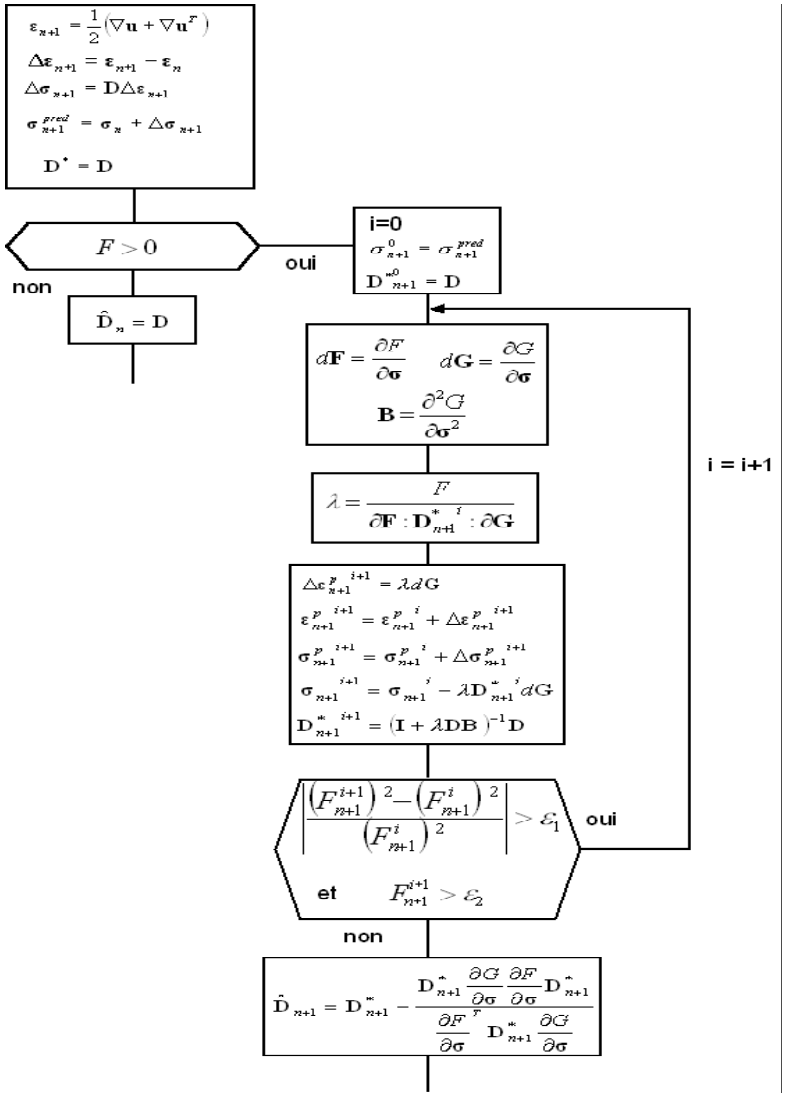
Δu^{k+1} désignant la solution de l'équation d'équilibre à l'itération $k+1$.

La convergence de la procédure d'itération n'étant pas assurée, un arrêt est prévu après $k_{\max}$ $(= 10)$ itérations.

Les méthodes de résolution itératives de systèmes linéaires nécessitent un vecteur de départ pour l'itération, et le choix retenu (choix par défaut de Diffpack ([36]), librairie d'éléments finis utilisée pour le développement du code, voir chapitre 6) est d'employer la valeur courante du vecteur qui est attaché comme vecteur solution dans le système linéaire.

5.4 Résolution du système global

La formulation Elément Fini du problème global d'équilibre-transport-écoulement est obtenue en multipliant chaque équation de champ par une fonction de pondération $\widetilde{W}_i$, puis par intégration sur le domaine de résolution. Pour chaque équation sous forme faible obtenue, l'inconnue primaire correspondante est



Figure~5-1: Algorithme prédicteur-correcteur élasto-plastique.

approximée par une fonction approchée de la forme : $\xi = \sum_{j=1}^{N} N_j(\mathbf{x})\,\xi_j(t)$ $\left(\xi = n, \rho_\sigma, \overline{p}^f, \overline{\rho^g}^f, \mathbf{u}_s\right)$ avant d'être insérée dans l'équation intégrale. N_j sont des fonctions de base linéairement indépendantes et ξ_j les paramètres indéterminés qui sont recherchés, N étant le nombre de points nodaux du réseau élément fini (voir [120]). D'après la méthode de Galerkin standard, les fonctions de pondération sont prises identiques aux fonctions de base, $\widetilde{W}_i = N_i$. La méthode de Galerkin standard est appliquée à l'équation d'écoulement, à l'équation de la quantité de mouvement, à l'équation de porosité et à l'équation du coulis filtré, et conduit à un comportement optimal de la solution (précision, stabilité) pour ce type d'équations paraboliques, même lorsque des non-linéarités importantes sont présentes ([59], [94]).

Après avoir tenté plusieurs approches numériques différentes, la méthode SUPG (Streamline Upwind Petrov Galerkin) employant des fonctions de pondération non symétriques ([21], [59]) et des fonctions de base linéaires, a été retenue et implémentée pour la discrétisation de l'équation de transport Eqn.4.70.

La discrétisation en temps employée est la θ-méthode classique, qui correspond à une représentation au premier ordre des dérivées temporelles. Les équations de champ numériques sont données ci-dessous à l'instant $t^{k+1} = (k+1)\,\Delta t$, où Δt est le pas de temps variable de la procédure de marche en temps. A cause de la nature non linéaire des équations, $\theta = 1$ est choisi qui correspond aux équations d'Euler implicite.

Equation du squelette solide

$$\begin{aligned}\left[M_{ij}\left(1+\theta\Delta t f_s\right)+\theta\Delta t N_{ij}\left(\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right]\{n_j\}^{k+1} &= \left[M_{ij}\left(1-(1-\theta)\,\Delta t f_s\right)\right]\{n_j\}^k \\ &\quad -\left[(1-\theta)\,\Delta t N_{ij}\left(\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right]\{n_j\}^k \\ &\quad +\int_U N_i f_s \Delta t dU - \int_U N_i \lambda \overline{\rho^g}^f f_\lambda \Delta t dU\end{aligned} \tag{5.41}$$

Equation du coulis filtré

$$\begin{aligned}&\left[M_{ij}\left(1+\theta\Delta t\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)+\theta\Delta t N_{ij}\left(\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right]\left\{(\rho_\sigma)_j\right\}^{k+1} = \\ &\left[M_{ij}\left(1-(1-\theta)\,\Delta t\nabla\cdot\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)-(1-\theta)\,\Delta t N_{ij}\left(\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right]\left\{(\rho_\sigma)_j\right\}^{k}+\int_U N_i\lambda\Delta t\overline{\rho^g}^f dU\end{aligned} \tag{5.42}$$

Equation d'écoulement

$$\left[M_{ij}\left(n\beta_p\right)+\theta\Delta t N_{ij}\left(n\beta_p\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right)+\theta\Delta t K_{ij}\left(\frac{k}{\overline{\mu}^f}\right)\right]\left\{\left(\overline{p}^f\right)_j\right\}^{k+1} = \tag{5.43}$$

$$\left[M_{ij}\left(n\beta_p\right)-(1-\theta)\Delta t N_{ij}\left(n\beta_p\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right)-(1-\theta)\Delta t K_{ij}\left(\frac{k}{\overline{\mu}^f}\right)\right]\left\{\left(\overline{p}^f\right)_j\right\}^k$$
$$+\int_U \nabla N_i\frac{k}{\overline{\mu}^f}\overline{\rho_f}^f\mathbf{g}\Delta t dU-\int_{\partial U_{q_p}} N_i q_{imp}\Delta t dS-\int_U N_i g_s\Delta t dU$$
$$-\int_U N_i\lambda\overline{\rho^g}^f g_\lambda\Delta t dU-\int_U N_i n\beta_c\frac{d_f\overline{\rho^g}^f}{dt}\Delta t dU$$

par application du théorème de Green, et emploi de la condition aux limites prescrite pour réécrire le terme d'intégrale de surface.

Equation de transport

$$\left[M_{ij}\left(n+\theta\Delta t\left(g_s+\lambda h_\lambda\right)+\theta\Delta t\nabla\cdot n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f-\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right)+\theta\Delta t N_{ij}\left(n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right)\right]\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^{k+1} \tag{5.44}$$
$$+\theta\Delta t\left[\int_U \nabla N_i\left(n\mathbf{D}_f^{m_g}+n\mathbf{D}^{*gw}\right)\nabla N_j dU\right]\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^{k+1}=$$
$$\left[M_{ij}\left(n-(1-\theta)\Delta t\left(g_s+\lambda h_\lambda+\nabla\cdot n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f-\overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right)\right)\right)-(1-\theta)\Delta t N_{ij}\left(n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f\right)\right]\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^k$$
$$-(1-\theta)\Delta t\left[\int_U \nabla N_i n\left(\mathbf{D}_f^{m_g}+\mathbf{D}^{*gw}\right)\nabla N_j dU\right]\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^k$$

par application du théorème de Green, et pour un flux dispersif négligeable.

Equation d'équillibre

L'équation d'équilibre Eqn4.71 est discrétisée de manière classique à l'aide de la méthode de Galerkin ([79])

$$\int_U N_i^T\mathbf{L}^T\boldsymbol{\sigma}dU=\int_U N_i^T\left((1-n)\overline{\rho_s}^s+n\overline{\rho_f}^f\right)\mathbf{g}dU+\int_{\partial U_{\mathbf{F}}} N_i^T\mathbf{F}dS \tag{5.45}$$

en tenant compte de la condition Eqn.4.81 sur $\partial U_{\mathbf{F}}$, avec la relation contraintes-déformations qui relie $\boldsymbol{\sigma}$ à $\boldsymbol{\varepsilon}$, et $d\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{L}d\mathbf{u}$ qui relie la variation des déformations à la variation des déplacements.

Les notations suivantes ont été introduites :

$$M_{ij}=\int_U \widetilde{W}_i N_j dU,\ M_{ij}(f)=\int_U \widetilde{W}_i f N_j dU$$

$$N_{ij}(\mathbf{g})=\int_U \widetilde{W}_i\nabla N_j\cdot\mathbf{g}dU,\ K_{ij}(f)=\int_U \nabla W_i f\nabla N_j dU$$

$\widetilde{W}_i=N_i$ pour la formulation de Galerkin, tandis que $\widetilde{W}_i\neq N_i$ est donné par l'Eqn.5.16 pour la

formulation SUPG.

$f_s = \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}_s^m}^s + \frac{1}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt}$, $f_\lambda = \frac{1}{\overline{\rho_s}^s}$, $g_s = \nabla \cdot \overline{\mathbf{V}_s^m}^s + \frac{(1-n)}{\overline{\rho_s}^s}\frac{d_s\overline{\rho_s}^s}{dt}$, $g_\lambda = \left(\frac{1}{\overline{\rho_f}^f} - \frac{1}{\overline{\rho_s}^s}\right)$, $h_\lambda = \left(1 - \frac{\overline{\rho^g}^f}{\overline{\rho_s}^s}\right)$

La résolution est séquentielle. Le système d'équations est d'abord résolu pour $\mathbf{u}_s$, $\overline{p}^f$, $\overline{\rho^g}^f$, n, ρ_σ, en employant des estimations de $\overline{p}^f$ et $\overline{\rho^g}^f$ au pas de temps courant. L'Eqn.5.44 est résolue pour $\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^{k+1}$ en employant un solveur général pour les matrices bandes non symétriques. Les valeurs nodales calculées de la pression $\left\{\left(\overline{p}^f\right)_j\right\}^{k+1}$, et de la concentration $\left\{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_j\right\}^{k+1}$, permettent d'obtenir les coefficients variables. Le gradient de pression est obtenu par une procédure de résolution aux moindres carrés particulière, à partir des valeurs nodales du gradient de pression obtenues au niveau des points de Gauss réduits. Comme les équations sont couplées, les propriétés matérielles et tous les coefficients qui dépendent des variables dépendantes doivent être mis à jour à chaque pas de temps, jusqu'à ce que les variations successives de $\overline{p}^f$ et $\overline{\rho^g}^f$ soient obtenues à un niveau de tolérance prescrit :

$$\frac{\max\left|\left(\overline{p}^f\right)_j^{r+1} - \left(\overline{p}^f\right)_j^{r}\right|}{\max\left|\left(\overline{p}^f\right)_j^{r+1}\right|} \leq \varepsilon_p$$

et

$$\frac{\max\left|\left(\overline{\rho}^f\right)_j^{r+1} - \left(\overline{\rho}^f\right)_j^{r}\right|}{\max\left|\left(\overline{\rho}^f\right)_j^{r+1}\right|} \leq \varepsilon_c$$

avec r l'itération au pas de temps courant $k+1$, ε_p et ε_c les tolérances prescrites. Afin d'aboutir au critère, différents algorithmes itératifs (Successive Substitution, Newton Raphson) peuvent être employés pour obtenir une convergence rapide de la solution.

5.5 Conclusion

Les difficultés numériques soulevées par l'équation de transport portent essentiellement sur la dispersion numérique, l'effet d'orientation du maillage par rapport à l'écoulement, l'apparition possible d'oscillations, et les conditions aux limites de type Dirichlet. L'ensemble de ces problèmes est passé en revue lors de la validation du code numérique (voir section 6.4.1 et section 10.2.1 en annexe), les solutions analytiques présentées montrent que la méthode SUPG est suffisamment robuste pour traiter les différents types de difficultés. Un logiciel complet de simulation de la propagation d'un coulis miscible injecté à travers un milieu poreux déformable, a été développé en C++ sur une base orientée-objet. Les effets des perméabilités relatives, des variations de viscosité et de densité du fluide, de la dispersion du coulis et de la filtration du coulis sont également inclus dans le modèle. La description de l'implémentation des équations Eqns.5.41 à 5.45 et des lois constitutives fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 6

IMPLEMENTATION DANS LA LIBRAIRIE AUX ELEMENTS FINIS Diffpack

6.1 Introduction. Motivation pour le concept objet

Lorsque la complexité d'un programme ou d'un problème s'accroît, une gestion réussie repose sur l'introduction d'abstractions nouvelles de degré élevé, tout en masquant les détails des parties plus primitives. Les carences de la programmation procédurale (C, Fortran) peuvent être surmontées par l'emploi de techniques de programmation orientées objet. Les concepts de la programmation par objets sont supérieurs à ceux de la programmation classique. Ces techniques de développement du code se traduisent par une productivité et une modularité plus grandes lors de la programmation d'équations aux dérivées partielles, avec la possibilité de se consacrer plus aux modèles et algorithmes numériques et moins au debuggage du code ([4], [40], [75]).

L'obtention d'une implémentation proche du langage mathématique repose sur le travail avec des abstractions logicielles, représentées en programmation orientée objet en termes de classes, qui reflètent les entités et les concepts mathématiques. L'augmentation du niveau d'abstraction du code assure un haut degré de réutilisation du code, lors de l'ajout de nouvelles fonctionnalités au logiciel. La classe décrit une entité qui est suffisamment abstraite et versatile pour être employée dans de nombreuses situations. La programmation s'effectue souvent par sous-typage, par l'ajout de sous-classes à des hiérarchies existantes ([4]).

Le concept de classe permet de contrôler complètement tous les aspects de l'implémentation et du comportement de la classe définie. Un nouveau type de module, l'objet, est défini par l'utilisateur. L'objet peut être de type quelconque, il est défini par l'utilisateur en fonction de ses besoins. Il comprend une liste d'attributs ou variables membres, et de méthodes ou fonctions membres de la classe ([12]).

Les concepts clés de la programmation orientée objet, à savoir l'encapsulation des données, le contrôle interne, la notion d'héritage, les fonctions virtuelles ([12]), permettent d'obtenir une modularité effective : très peu d'arguments sont transmis, et le module obtient par lui-même les autres données dont il a besoin. Chacun des modules développés dans la thèse peut par exemple être réutilisé de manière indépendante par d'autres programmes.

L'encapsulation des données - les attributs d'un objet ne peuvent être modifiés que par l'objet lui-même - est la notion clé de la programmation orienté objet. Il s'agit également de la notion clé pour la modularité, car elle permet de dissocier la représentation interne (opérations de degré inférieur) des données de l'interface publique, partie visible de la classe utile pour l'emploi de la classe (méthodes principales) ([40]).

Un programme est constitué de classes. Programmer consiste à créer et à modifier des classes. La notion d'héritage constitue le second concept clé de la programmation par objets. L'héritage est la capacité qu'ont deux classes ou plus de partager leurs attributs et leurs méthodes communes. Un principe fondamental de développement du code est de diviser le code en différentes strates, sous forme de parties générales et particulières, avec l'idée sous-jacente que les fonctionnalités additionnelles doivent se situer dans les sous-classes. L'emploi de l'héritage et des fonctions virtuelles permet de réutiliser du code sans rien éditer (voir annexe 10.1.4).

La programmation orientée-objet déplace le centre d'intérêt des algorithmes aux variables, appelées objets, de type prédéfini ([22]) ou défini par l'utilisateur. La programmation procédurale n'établit aucun lien entre les variables, qui sont disséminées dans le programme et donc difficiles à gérer par le programme. A l'inverse, l'encapsulation et l'héritage produisent des variables qui sont fortement structurées, et donc actives et autonomes. Tous les objets contrôlent leurs activités : c'est la raison de leur forte modularité. L'intérêt est concentré sur les données et la façon de les obtenir. L'intérêt pour la procédure de résolution finale est retardé jusqu'à la fin de l'analyse. La procédure de résolution se contente alors de déclencher des opérations locales, mais ne les gère nullement à la façon d'un driver. L'information est décentralisée par le biais de l'encapsulation; quelle que soit la classe, le contrôle des opérations est limité au calcul des variables membres.

Afin d'accroître l'efficacité du calcul, les algorithmes qui prévoient des calculs importants doivent être implémentés comme des fonctions membres de la classe à l'aide de fonctionnalités de bas niveau du C. A l'inverse, les propriétés du C++ sont employées à des niveau d'abstraction plus élevés, de façon à

organiser les appels aux fonctions de niveau hiérarchique inférieur. Dans le cas de Diffpack, un tel emploi optimal du C++ conduit à une efficacité de calcul proche du Fortran 77 ([5], [40]).

Le code numérique a été développé en C++, sur une base orientée objet, à l'aide d'une librairie adaptée à la résolution des équations aux dérivées partielles par la méthode des éléments finis ([75]). La solution du système élément fini est implémentée en termes de classes. La création d'une classe suppose comme préalable une description la plus détaillée possible du problème à résoudre puis, lors de l'implémentation, une discussion du choix des objets. La discussion du choix des nouvelles classes constitue le point principal dans la conception de l'environnement de résolution. Après avoir défini les variables et structures de données nécessaires (existantes et nouvelles), la seconde étape de la conception de la classe consiste à spécifier les fonctionnalités désirées pour la classe. A chaque énoncé correspondent des appels de fonctions membres dans la classe. Des exemples de définition de classe C++ sont donnés en annexe 10.1.4. Il existe un lien étroit entre la formulation du problème et la conception orientée objet du logiciel. Les formulations discrètes des équations qui ont été établies au chapitre 5 sont directement adaptées à une implémentation numérique flexible. La programmation orientée objet s'effectue à un niveau d'abstraction plus élevé que la manipulation de tableaux (Fortran 77 ou C), plus proche de la formulation numérique du problème aux dérivées partielles.

Le logiciel développé comporte une hiérarchie complète de classes pour chaque équation qui doit être résolue, ainsi qu'une autre hiérarchie complètement indépendante pour les lois constitutives et les coefficients communs à plusieurs équations, qui peuvent être combinées de manière quelconque lors de l'exécution du programme, en fonction du problème particulier à traiter. Le logiciel développé permet de simuler des conditions d'injection unidimensionnelles, bidimensionnelles, axisymétriques et tridimensionnelles en milieu poreux saturé à partir des mêmes procédures. Après avoir reçu en entrée les paramètres rhéologiques de la matrice (coefficients d'élasticité et de plasticité, loi de perméabilité), du coulis et de l'eau initialement présente dans le massif (densité, viscosité, coefficients de dispersion, loi de filtration), le programme fournit en sortie le champ de déplacements du massif injecté, le champ de déformations (élastiques et plastiques), le champ de pression intestitielle, le champ de concentration en coulis, le champ de pososité macroscopique et le champ de densité de coulis adsorbé. Une large variété de lois de filtration, de densité et de viscosité peuvent être choisies au run-time.

Les classes développées sont détaillées dans ce chapitre.

6.2 Implémentation dans Diffpack

6.2.1 Présentation de Diffpack

Diffpack est un outil pour développer des applications numériques, avec un accent particulier mis sur sur la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Diffpack permet l'emploi d'un ensemble commun d'algorithmes génériques et d'outils logiciels pour développer des programmes de simulation se rapportant à une variété d'applications ([36], [22]).

Pour un programmeur, Diffpack est considérée comme une librairie numérique consistant en classes C++. Les classes C++ peuvent être combinées dans des codes d'application pour résoudre des problèmes divers. La réutilisation de portions de code déjà existantes est importante : comme les applications emploient des abstractions de degré élevé, le temps passé à écrire et à debugger le code est réduit de manière significative par rapport au développement traditionnel de logiciel en Fortran ou en C. Ainsi il devient possible de se consacrer essentiellement à la modélisation, aux algorithmes de résolution et aux expérimentations numériques lors de la résolution d'un problème ([75]).

Diffpack contient un nombre important d'abstractions utiles : vecteurs, tableaux généraux à indexation multiple, chaînes de caractères, entrées/sorties améliorées et simplifiées, système de menu pour insérer les données dans le programme, gestion des fichiers résultats, couplage à des outils de visualisation, représentation de systèmes linéaires (particulièrement les systèmes linéaires de grande taille, à matrice creuse, issus des calculs éléments finis ou différences finies), méthodes itératives pour les matrices creuses, solveurs pour les systèmes non linéaires, maillages éléments finis ou différences finies, champs scalaires ou vectoriels sur des maillages, collection d'éléments finis, auxquels s'ajoutent des algorithmes éléments finis et des structures de données utiles.

6.2.2 Principes de programmation dans Diffpack

Après obtention de l'équation et des conditions aux limites à partir de principes physiques, le problème discret consiste en la formulation élément fini en vue de la résolution numérique.

La résolution numérique d'équations aux dérivées partielles est souvent centrée autour de techniques de discrétisation; une fois que l'équation aux dérivées partielles initiale a été réduite à une séquence de systèmes linéaires d'équations algébriques, le problème est considéré comme résolu. Cette conception est reflétée dans les simulateurs Diffpack, où l'implémentation reste proche de la formulation mathématique. La majeure partie du travail de programmation concerne les données d'entrée, la formulation des équations discrètes, et la mise en place des conditions aux limites. Il existe une relation étroite entre la formulation du problème et l'implémentation.

L'idée est d'introduire des classes et des concepts plus généraux que ce qui est strictement néces-

saire pour résoudre l'équation aux dérivées partielles particulière étudiée. Cette démarche conduit au développement d'une habitude de travail qui consiste à généraliser les formulations du problème et les méthodes de résolution, de manière à ce que les techniques d'implémentation ainsi que le code lui-même puissent être réutilisés pour une large étendue de problèmes. Les problèmes tests et autres spécialisations doivent figurer dans autant de sous-classes.

Toutes les parties communes aux simulateurs d'un type donné d'équations doivent être réunies dans une même classe. Toutes les améliorations du solveur de départ sont immédiatement disponibles dans les solveurs des classes dérivées. La sous-classe implémente uniquement des parties de la classe de base qui ne peuvent pas être complètement réemployées. Les détails qui diffèrent d'un problème à l'autre doivent être implémentés séparément du solveur général.

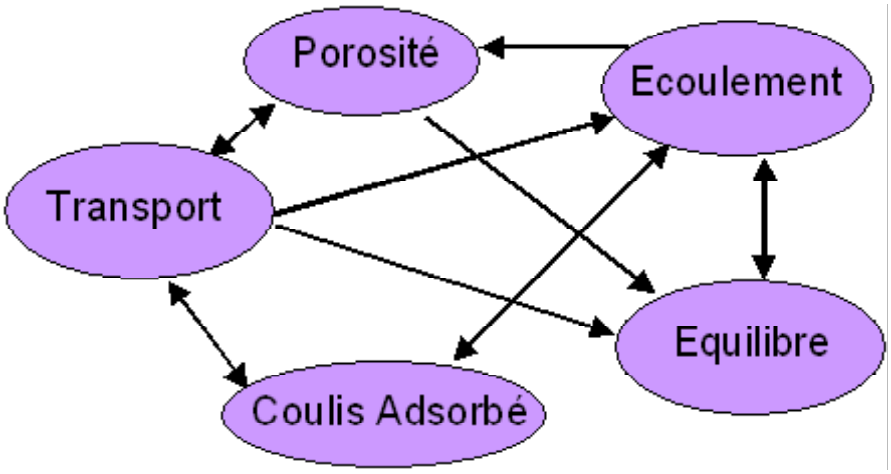
La hiérarchie de classe sert donc à partager des données communes ou du code commun, ainsi qu'un ensemble d'opérations numériques, tandis que du point de vue des autres classes (point de vue utilisateur) la hiérarchie présente un aspect unifié.

Le simulateur est implémenté dans Diffpack sous forme de classe ou de hiérarchie de classes. Afin de résoudre le problème aux limites par la méthode des éléments finis, l'utilisateur doit fournir une classe dépendant du problème, contenant des informations sur l'équation aux dérivées partielles, les conditions aux limites, la discrétisation, les structures de données pour le maillage, et les champs. Le simulateur doit être dérivé de la classe prédéfinie FEM (Finite Element Method). FEM contient des données et des versions par défaut d'algorithmes fréquemment employées dans les programmes élément fini, qui sont ainsi hérités en ayant FEM comme classe de base. Certaines fonctions dans FEM ont besoin d'information sur le problème à résoudre. Cette information est fournie par la classe du simulateur. Il est en particulier nécessaire pour le simulateur d'implémenter la fonction virtuelle *integrands* qui donne l'équation élément fini en un noeud du maillage, et *integrands4side* qui implémente les conditions aux limites naturelles. La liste des principales fonctions à fournir par la classe est donnée en annexe 10.1.4 avec les définitions des classes implémentées.

6.3 Architecture du logiciel

La conception du code s'appuie sur la description détaillée du problème à résoudre. L'implémentation est précédée du choix difficile des nouvelles classes à créer.

L'algorithme de résolution s'appuie sur le code générique déjà existant dans Diffpack, et le code introduit par l'utilisateur (spécialisation). Seules les parties fortement dépendantes du problème sont visibles dans le code d'application. Les conditions aux limites et initiales, la boucle en temps, la résolution élément fini en un noeud (intégrande de la forme faible de la formulation), le calcul des coefficients



Figure~6-1: Couplage direct entre équations primaires.

nécessaires à la résolution, l'initialisation pour le pas de temps suivant, les critères de convergence employés, doivent en particulier être détaillés.

6.3.1 Cahier des charges et description des classes implémentées

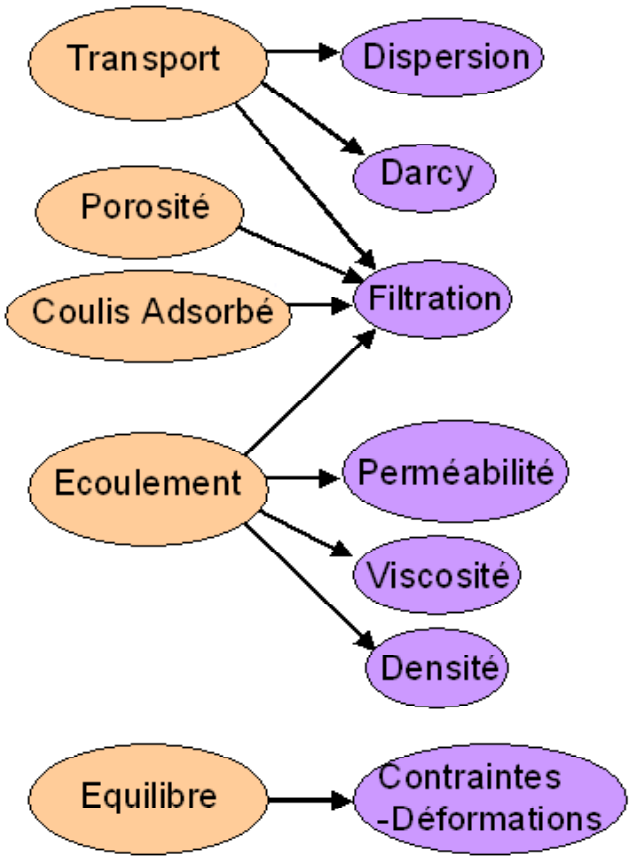
Cette partie décrit de façon détaillée le problème à résoudre, assorti des fonctionnalités souhaitées. Les équations à résoudre de manière séquentielle sont : l'équation d'advection-diffusion, l'équation d'écoulement, l'équation d'équilibre, l'équation de porosité, l'équation du coulis adsorbé. Les variables primaires de la résolution élément fini sont respectivement : $\overline{\rho^g}^f$, $\overline{p}^f$, $\mathbf{u}_s$, n, ρ_σ. Par ailleurs, il apparaît un certain nombre de variables secondaires, fonctions des variables primaires, issues des lois de comportement et des lois d'état, qui doivent également être mises à jour lors de la résolution. Ces variables sont souvent nécessaires à la résolution de plusieurs équations.

Il existe un certain nombre de relations de couplage direct entre inconnues primaires, représentées sur la Fig.6-1. Les doubles flèches indiquent une relation bilatérale, une flèche simple indique une dépendance unilatérale dans le sens de la flèche.

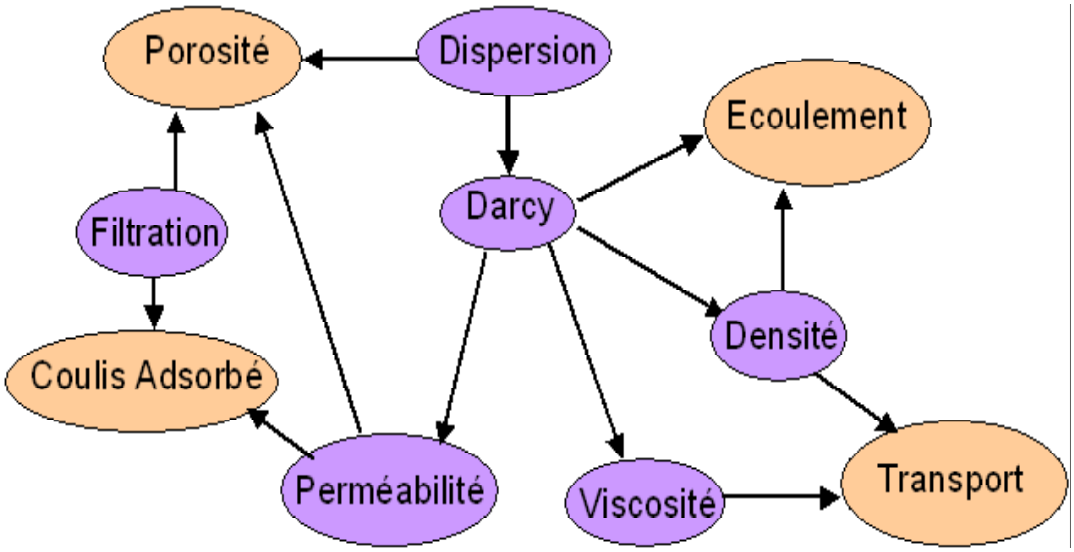
Il existe également des relations d'interdépendance entre les différentes lois constitutives et les variables primaires, représentées sur les Figs.6-2 et 6-3.

Les conditions aux limites introduisent également un certain couplage entre les équations. Les conditions de Neumann Eqn.4.80 et de Cauchy Eqn.4.82, valables respectivement pour l'équation d'écoulement Eqn.4.68 et l'équation de transport Eqn.4.70, requièrent la donnée du flux entrant de fluide pour la partie du domaine sur laquelle elles sont imposées.

La conception du logiciel va s'appuyer sur les fonctionnalités souhaitées et les relations de dépendance



Figure~6-2: Couplage entre inconnues primaires et lois constitutives. La résolution des équations de champ requière la donnée des coefficients constitutifs.



Figure~6-3: Couplage entre lois constitutives et variables primaires. Les coefficients constitutifs dépendent des variables primaires.

entre équations.

La démarche suivie est détaillée pour l'équation de transport, les autres équations sont implémentées selon le même principe. La programmation orientée objet permet de programmer à un niveau d'abstraction suffisamment élevé, en fournissant des blocs de base nécessaires à la résolution d'un problème aux limites général de mécanique des milieux continus, qui peuvent être réemployés par toute une classe d'équations différentielles. Malgré les différences apparentes dans la formulation, le cadre général est le même pour les équations de champ Eqns.4.64 à 4.71, cette similitude est exploitée dans le développement du logiciel, qui se traduit au niveau de l'implémentation par l'emploi des mêmes abstractions et une même structure de classe pour les différentes équations ([53]). Une fois qu'une classe solveur individuel est créée, le développement d'un simulateur pour les équations restantes s'effectue selon le même principe.

CdEquation

L'équation de transport la plus générale est donnée par l'Eqn.4.70. Les conditions aux limites possibles sur la frontière sont : la condition de Dirichlet Eqn.4.79 d'imposition de la concentration sur tout ou partie du bord, la condition de Cauchy mixte Eqn.4.82 d'imposition d'une combinaison de la valeur de concentration et du gradient normal de la concentration, qui peut se ramener à la condition de Neumann d'imposition du gradient de concentration normal à la surface.

Les coefficients figurant dans l'équation de champ et les conditions de bord peuvent être pris constants, variables (fonction des coordonnées d'espace et du temps), non linéaires; les nonlinéarités éventuelles portent sur la fonction de perméabilité $k(\overline{\rho^g}^f, \overline{\xi}^\alpha)$, la fonction de viscosité $\overline{\mu}^f(\overline{\rho^g}^f, \overline{\xi}^\alpha)$, la loi d'état du fluide $\overline{\rho_f}^f(\overline{\rho^g}^f, \overline{\xi}^\alpha)$, $\overline{\xi}^\alpha$ désignant d'autres variables macroscopiques éventuelles. Enfin, les coefficients apparaissant dans l'équation de transport et les conditions aux limites de type flux peuvent être également couplés aux autres équations.

L'implémentation a été effectuée de manière progressive, avec une complexité croissante. Les modules de résolution pour chaque équation du système ont été développés et testés de manière complètement indépendante avant d'être couplés dans une procédure de résolution globale.

Différentes procédures de discrétisation ont été tentées pour la résolution de l'équation d'advection-dispersion, à cause de la difficulté particulière liée à la discrétisation de cette équation (cf. chapitre 5). La discrétisation élément fini particulière de l'équation de transport requière l'implémentation de fonctions de forme particulières, tout en laissant le choix à l'utilisateur de la pondération (SUPG, SUPG avec discontinuity capturing ([59]), StreamlineUpwind ou Galerkin) lors de la résolution. La discrétisation en temps offre le choix entre la θ-méthode, le schéma de Leap-Frog, le schéma de Taylor Galerkin ou Taylor Galerkin Généralisé ([8]). La résolution élément fini offre également le choix du lumping de la matrice masse.

A des fins de validation ou d'étude des propriétés de la solution, le calcul de la solution analytique ou la comparaison à une solution de référence (obtenue par exemple sur un maillage raffiné, ou par calcul avec un autre logiciel) est également possible. Le calcul d'erreur s'effectue à partir de la solution analytique mais peut également être effectué sur la base d'une solution de référence. La définition de la classe CdEquation est donnée en annexe 10.1.4.

FlowEquation

En ce qui concerne l'équation d'écoulement, les fonctionnalités requises sont identiques à celles de l'équation de transport, la seule fonctionnalité additionnelle est le calcul de flux, d'importance physique primordiale, car le gradient de pression sert au calcul de la vitesse fluide $\overline{\mathbf{V}_f^m}^f$ (loi de Darcy Eqn.4.34) qui est employée dans la résolution de l'équation de transport. Le champ de vitesse employé est discontinu si un calcul direct est employé à l'aide d'éléments finis standard, et continu si une procédure de régularisation est employée. Afin d'obtenir une représentation élément fini régulière de la vitesse, une procédure de régularisation est employée pour le champ discontinu, basée sur une formulation de Galerkin aux moindres carrés ([75]). De même, pour obtenir une représentation élément fini régulière des contraintes, une procédure de régularisation du gradient du déplacement est employée.

Elasticity

L'équation d'équilibre est indissociable dans sa résolution de la loi particulière contrainte-déformation. En particulier, l'implémentation des lois de comportement de l'élasticité linéaire est dissociée des algorithmes élasto-plastiques. Les fonctionnalités souhaitées sont les mêmes pour l'équation d'équilibre que pour les deux autres solveurs individuels, une complexité additionnelle est due au champ inconnu qui est un champ vectoriel. Une loi élasto-plastique simple a été implémentée, la loi de Drucker-Prager, afin d'étudier la plastification éventuelle du sol sous l'effet de l'injection. L'architecture du code facilite l'implémentation de lois de plasticité plus poussées ([93], [108]) par simple dérivation de la classe de plasticité générale développée (classe de base de la hiérarchie), puis spécification du potentiel plastique, de la fonction de charge, et des paramètres additionnels du modèle. L'actualisation des contraintes en plasticité fait l'objet d'une procédure particulière ([86]).

Les définitions des classes FlowEquation, Elasticity et Plasticity sont données en annexe 10.1.4.

La résolution d'un problème présentant une symétrie de révolution est également possible. L'implémentation des conditions axisymétriques est utile pour la simulation de l'injection sur modèle cylindrique (voir section 8.4), mais également pour l'étude de cas réels car les géométries d'injection cylindriques et sphériques se rencontrent très souvent sur site ([89], [113]).

Résolution séquentielle

Si les équations sont découplées sur le plan numérique par une résolution séquentielle, la flexibilité du code s'en trouve accrue. Une des motivations de la résolution séquentielle est la comparaison des méthodes et le choix d'un algorithme de résolution optimal pour l'équation de transport Eqn.4.70. Du point de vue de l'implémentation et de la réutilisation du code, il est avantageux de réaliser le solveur composé pour le système d'équations aux dérivées partielles comme une simple combinaison de modules individuels bien testés pour les différentes équations aux dérivées partielles du système. Pour faciliter le debuggage et la validation associés lors de l'étude du problème couplé, et en même temps accroître l'extensibilité du modèle mathématique, des solveurs séparés sont développés, avant de traiter le problème découplé dans un solveur composé.

Le développement de modules de type solveur individuel séparés s'est traduit par un module de résolution pour l'équation d'advection-diffusion (CdEquation), un module de résolution de l'équation d'écoulement (FlowEquation), un module de résolution de l'équation d'équilibre (sous forme d'une hiérarchie : Elasticity dont dérive Plasticity), un module de résolution de l'équation de porosité, un module de résolution de l'équation de densité de coulis adsorbé. Les modules solveurs individuels sont ensuite combinés dans un module de résolution globale : Coupling, module qui administre le problème de résolution globale et gère l'appel aux solveurs individuels. Une librairie de solveurs de l'équation

d'advection-diffusion a été construite, qui permet de choisir entre différentes techniques de discrétisation spatiale (Galerkin ou Petrov Galerkin) et temporelle (Taylor Galerkin, Taylor Galerkin Généralisé ([9]), θ-méthode, Leap Frog), auxquels s'ajoute la possiblité d'une résolution linéaire ou non linéaire (NewtonRaphson et Successive Substitution) (Fig.6-4). La classe StreamlineUpwind contient différentes possibilités de pondération : SUPG, UpwindFE, SUPG avec discontinuity capturing, Galerkin (annexe 10.1.4). Par l'emploi d'une hiérarchie de classes, le choix d'un type particulier de résolution est traité à l'exécution du programme, la flexibilité du logiciel s'en trouve augmentée.

CommonRel

L'examen simultané de toutes les équations révèle que certains coefficients qui y figurent, et traduisent généralement des relations constitutives ou des termes de couplage (couplage hydro-mécanique), sont communs à plusieurs simulateurs (Figs.6-2 et 6-3). L'importance du couplage entre les équations dépend essentiellement de ces cofficients. La variable de concentration joue également un rôle particulier car elle apparaît dans toutes les équations excepté l'équation d'équilibre. Les classes solveurs individuels ont pour tâche essentielle de permettre la résolution des équations dont elles ont la charge, résolution largement indépendante du type particulier de lois ou de coefficients considérés. L'indépendance des méthodes et des lois particulières implémentées doit être conservée au niveau du code, la classe de base du solveur individuel doit se contenter d'implémenter une équation générique, chaque module individuel gérant les variables qui lui sont propres. Afin d'éviter la duplication inutile de parties de code communes à plusieurs simulateurs, mais également afin d'accroître la flexibilité des solveurs (choix au run-time du type particulier de coefficient employé), la classe séparée CommonRel est chargée de gérer l'initialisation, le calcul et la mise à jour des coefficients communs à plusieurs solveurs individuels (perméabilité, loi de filtration, loi d'état du fluide, viscosité fluide, porosité, densité du squelette solide). La transmission des variables primaires (porosité, variable de concentration, pression fluide, déplacement solide, densité de coulis déposé) pour le calcul des coefficients et d'autres termes de couplage (terme de filtration, terme de couplage hydromécanique) est centralisée au niveau de CommonRel. Le code est plus clair, CommonRel traduit une interaction réelle entre classes, et un gain non négligeable est obtenu lors de l'implémentation de nouvelles lois de comportement : les classes solveur individuel n'ont pas à être modifiées, et en particulier de nouvelles sous-classes solveur n'ont pas à être créées, la déclaration d'un objet de type CommonRel dans chaque classe permet d'avoir accès à l'ensemble des coefficients. CommonRel sert d'interface entre le vaste choix de lois constitutives offert au run-time et les solveurs individuels, sans qu'aucune interaction directe ne soit nécessaire entre les solveurs individuels (Figs.6-5 et 6-6). Les échanges entre classes sont ainsi étroitement contrôlés par l'intermédiaire de CommonRel. Partout dans le code, l'évaluation d'un coefficient s'effectue de manière unifiée, quelle que soit la loi particulière choisie. Le code gagne en

flexibilité.

Chaque relation commune est implémentée par l'intermédiaire d'une hiérarchie séparée, selon les étapes progressives suivantes, pour chaque coefficient (Permeability, Porosity, Density, Viscosity ..) : sous-classe pour un coefficient constant, sous-classe pour un coefficient variable, sous-classe pour un coefficient non linéaire, sous-classes pour le modèle couplé (problème physique) (Figs.6-6, 6-7 et 6-8). Toute modification concernant l'implémentation des lois constitutives reste circonscrite à la classe particulière qui l'implémente, plutôt que d'avoir des répercussions éparses dans le code. Un exemple de hiérarchie de loi de comportement (Permeability) est illustré en annexe 10.1.4 à travers l'implémentation de la loi de perméabilité.

L'emploi de CommonRel évite la duplication du code, permet de partager les inconnues de la résolution élément fini ($\overline{\rho^g}^f$, $\overline{p}^f$, $\mathbf{u}_s$, n, ρ_σ), assure la cohérence des données en mode couplé, en évitant ainsi des définitions multiples et contradictoires d'un même coefficient d'une simulateur à l'autre.

Différentes lois de viscosité et de densité ont été programmées pour le fluide (Fig.6-8), ces lois sont issues des identifications faites en laboratoire, et de la littérature ([7], [58]). Plusieurs lois de filtration sont également proposées, ces lois sont inspirées des lois développées dans le domaine de la chimie et des sciences de l'environnement ([56]).

Coupling

Pour coupler les simulateurs composants, une classe administrateur Coupling est introduite (Fig.6-9), qui contient un solveur de l'équation de transport appartenant à la classe de base CdEquation, un solveur de l'équation d'écoulement fluide appartenant à la classe de base FlowEquation, et un solveur de l'équation d'équilibre Elasticity (hiérarchie de solveurs avec Plasticity qui dérive d'Elasticity). Certains éléments du menu sont spécifiques au solveur couplé, tandis que d'autres relèvent du solveur individuel. Coupling gère :

- le maillage
- les paramètres d'intégration en temps (boucle de résolution externe)
- le stockage pour visualisation ultérieure

Les autres éléments du menu sont distribués au niveau des classes solveur individuels, ce qui rend le codage de Coupling très simple.

Des expérimentations avec plusieurs solveurs sont généralement nécessaires afin de déterminer le choix approprié de la méthode de résolution, car les conditions aux limites imposées (notamment pour l'équation de dispersion, voir validation en section 6.4), et les lois constitutives implémentées conduisent à un problème dont le degré de difficulté varie fortement. Chaque classe solveur individuel regroupe à la fois l'algorithme de résolution et les parties propres à l'équation résolue. Chacune des hiérarchies

des classes solveurs individuels (CdEquation, FlowEquation, Elasticity) possède une classe de base, qui réunit les parties les plus générales du problème. Au niveau de Coupling, le type des solveurs génériques est inconnu à l'avance, il est choisi au run-time. Grâce à l'emploi de hiérarchies de classes et de fonctions virtuelles, le choix du solveur particulier (CdLinear, CdNonLinear ...) s'effectue lors de l'exécution du programme.

La classe Coupling et les hiérarchies de solveurs individuels sont indépendants. Tous les solveurs peuvent être combinés avec tous les problèmes et vice-versa. La classe Coupling est donnée en annexe 10.1.4.

Les hiérarchies de classes et les fonctions virtuelles peuvent gêner l'aspect purement numérique du problème, sur le plan de l'efficacité du calcul numérique ([5], [40], [75]). Cependant l'implémentation d'une librairie est rendue beaucoup plus flexible, et les principes directeurs employés ici s'étendent à de nombreux autres contextes numériques.

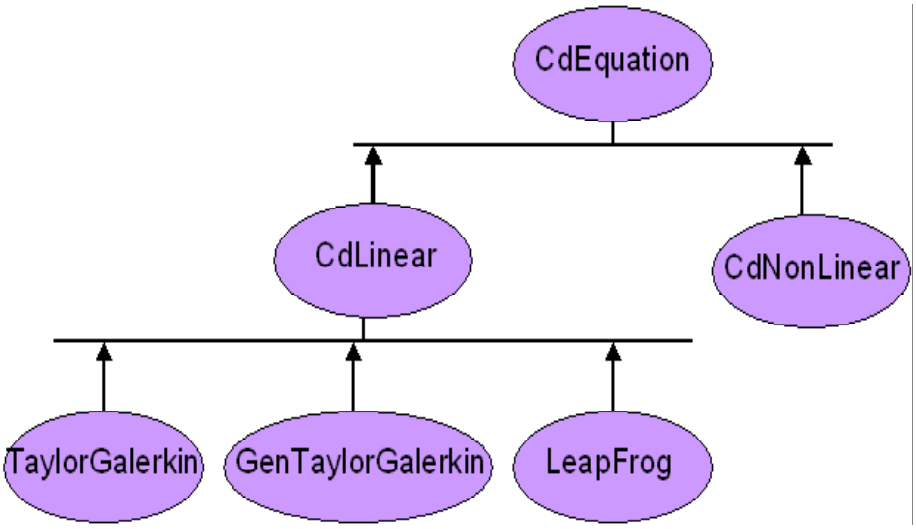
Streamline Upwind

Une classe StreamlineUpwind sert à générer les fonctions de pondération upwind pour l'équation de transport, le cas particulier des fonctions de forme de Galerkin étant implémenté comme choix de pondération par défaut. Après que les paramètres d'initialisation de l'objet StreamlineUpwind aient été fournis à l'instance de la classe dans la procédure d'initialisation (essentiellement la méthode de pondération choisie), les variables nécessaires au calcul de la fonction de pondération sont les caractéristiques géométriques de l'élément fini, le vecteur vitesse au point d'intégration, le coefficient de diffusion (norme du tenseur de dispersion), la longueur Δt du pas de temps.

La pondération classique de Galerkin est considérée comme un sous-ensemble de StreamlineUpwind, il s'agit d'une pondération SUPG particulière pour laquelle la diffusion numérique est nulle.

Traitement des solutions analytiques

La fonction qui implémente la solution analytique est contenue dans une classe séparée du simulateur. Ce choix est meilleur qu'une classe simulateur pour laquelle le simulateur est confondu avec la fonction qui implémente la solution analytique, le code se trouve alors alourdi par la dérivation d'une multitude de sous-classes. L'implémentation de solutions analytiques particulières s'effectue via une hiérarchie de classes qui implémentent différents types de solutions analytiques (Figs.6-10 et 6-11). L'ensemble des solutions analytiques disponibles pour une équation dérivent toutes d'une même classe de base. L'avantage réside dans le fait qu'au lieu de dériver une sous-classe pour chaque nouveau cas donnant lieu à une solution analytique, un pointeur à la classe de base de la hiérarchie de ces classes de solutions suffit à rendre disponible dans le simulateur l'ensemble des solutions analytiques implémentées. L'implémenta-



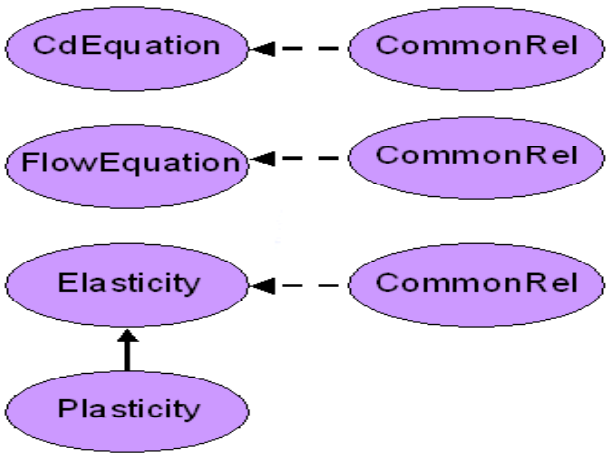
Figure~6-4: Exemple de hiérarchie de solveur individuel : CdEquation.

tion choisie permet également de tenir compte du cas où la solution est donnée sous forme d'un champ élément fini (issu d'une autre simulation sur un maillage plus raffiné par exemple, ou d'un autre code), lorsqu'il n'y a pas de solution de référence sous forme explicite. La solution de référence peut donc consister indifféremment en un champ élément fini ou une fonction explicite. Le choix s'effectue au run-time pour la représentation de la solution analytique : fonction explicite, champ élément fini, ou constant par morceaux. Une classe séparée fournit également le code le plus clair.

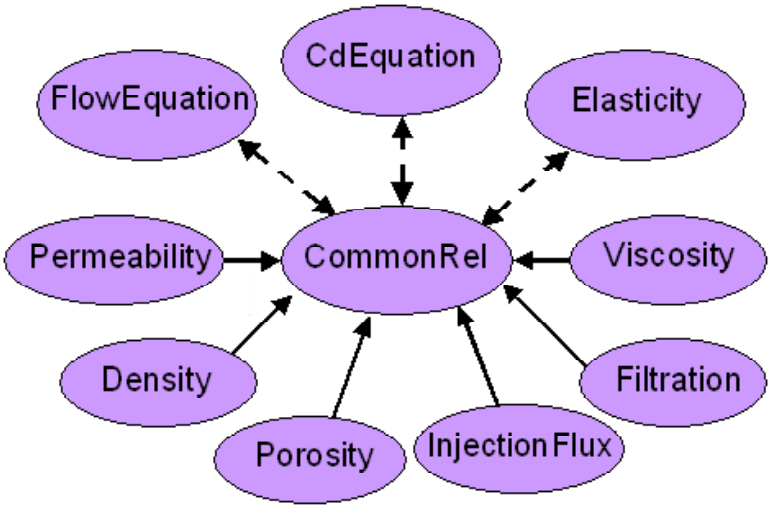
6.3.2 Synthèse des classes

La traduction logicielle se présente sous forme de classes et de relations entre classes : relations de dérivation, représentées sur les diagrammes par une flèche pleine, et d'appartenance, représentées sur les diagrammes par une flèche en pointillés. La synthèse des classes est présentée sous forme de diagrammes.

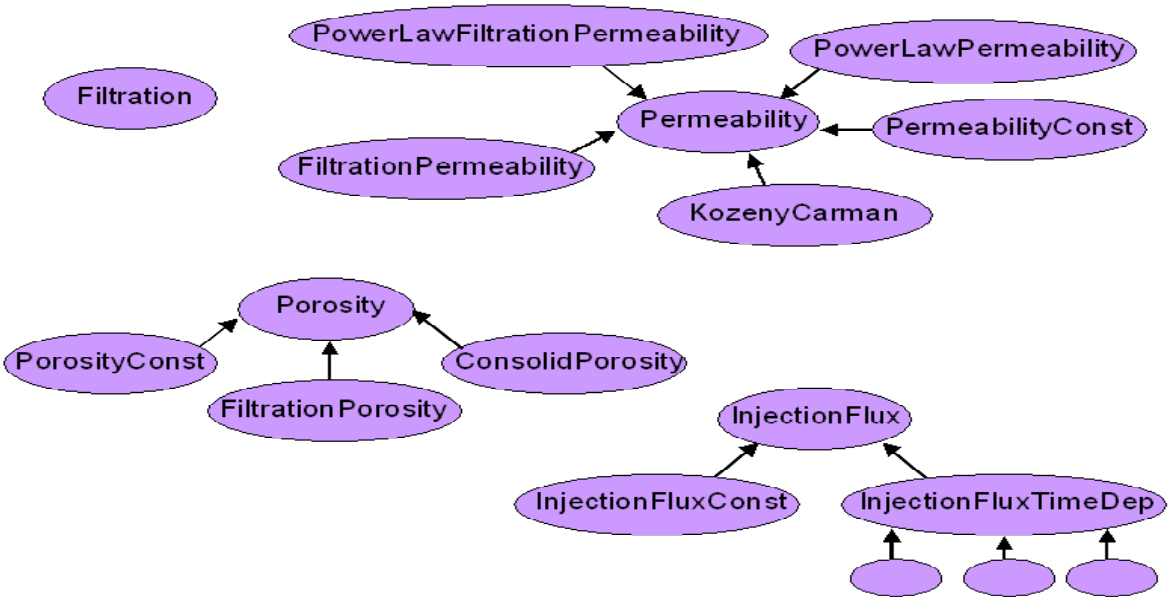
La classe de base CdEquation contient les principales variables membres et définit la syntaxe d'appel des fonctions membres d'après les fonctionnalités requises (annexe 10.1.4). Les classes qui utilisent CdEquation, Coupling en particulier, voient l'ensemble de la hiérarchie à travers cette interface publique, et ce indépendament de la classe particulière de la hiérarchie (Fig.6-4) qui est choisie à l'exécution. La structure du code permet ainsi une utilisation flexible de l'ensemble des fonctionnalités définies pour l'équation de transport. Les autres solveurs individuels (FlowEquation, Elasticity) sont implémentés selon le même principe. Ainsi, les différents modules partagent autant de code commun que possible. La classe CdLinear implémente le problème linéaire, la classe CdNonLinear implémente la version non linéaire



Figure~6-5: Gestion des relations communes par CommonRel.



Figure~6-6: Gestion des lois d'état et des coefficients communs : CommonRel.

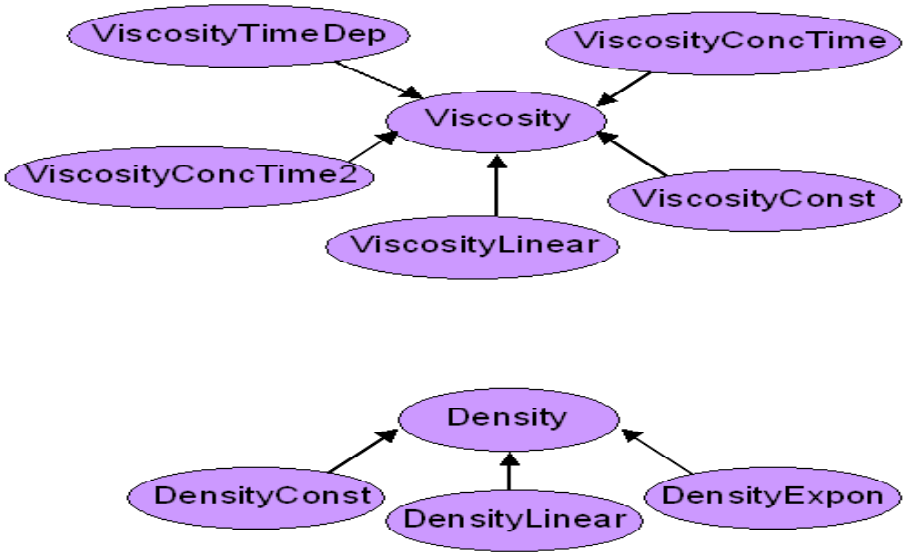


Figure~6-7: Hiérarchies de classes : Permeability, Filtration, InjectionFlux, Porosity.

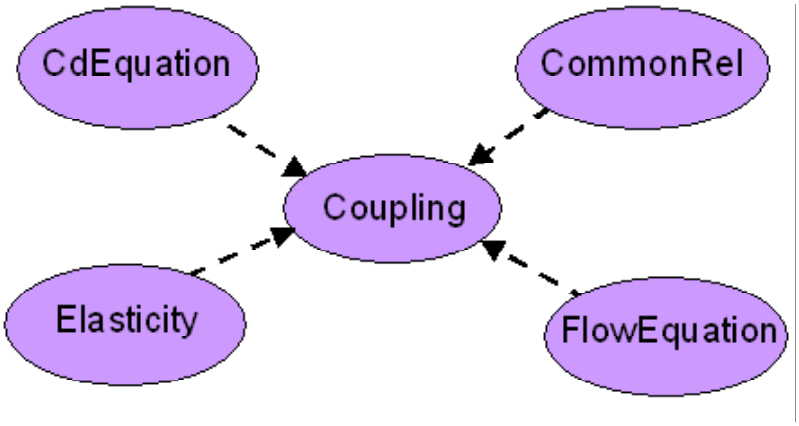
(coefficients fonction de $\overline{\rho^g}^f$ dans l'équation de transport Eqn.4.70).

La classe Cdlinear implémente la résolution avec θ-méthode par défaut. Pour développer d'autres méthodes, qui diffèrent par l'algorithme de résolution (marche en temps) ou par la forme de l'intégrande élément finie, les sous-classes TaylorGalerkin (méthode de TaylorGalerkin), GenTaylorGalerkin (méthode de TaylorGalerkin généralisée, ([8])), et LeapFrog ([94]), ont été dérivées à partir de CdLinear. La $\theta-$méthode est implémentée dans la classe principale; les autres types de discrétisations temporelles font l'objet de sous-classes particulières à l'extrêmité inférieure de la hiérarchie, car seule la marche en temps et le système assemblé doivent être modifiés, les structures de données restant les mêmes.

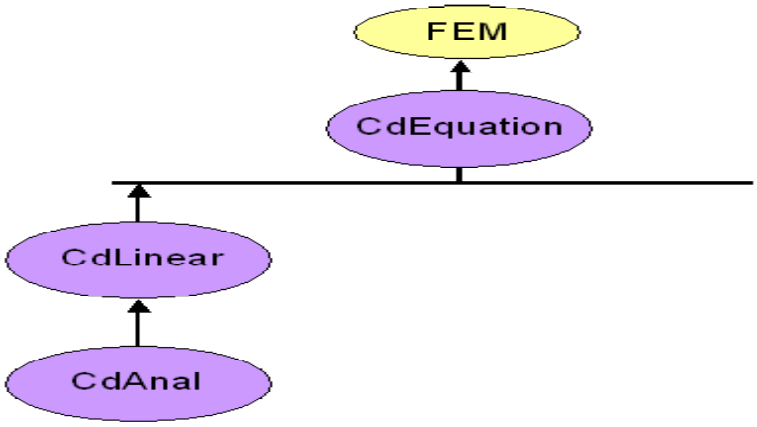
Pour l'implémentation des solutions analytiques, la classe solveur est séparée de la classe qui donne l'expression de la solution de référence (Advonin en section 6.4.1, CdAs en annexe 10.2.1 par exemple). Ainsi n'importe quelle solution peut être combinée avec n'importe quel solveur de la hiérarchie CdEquation (Figs.6-10 et 6-11). Les solutions analytiques sont implémentées sous forme d'une hiérarchies de classes qui sont également des fonctions (functors, cf. [75]). L'implémentation est très flexible, car la solution de référence peut être une de ces fonctions, ou être prise égale à un champ élément fini (résultat d'une autre simulation).



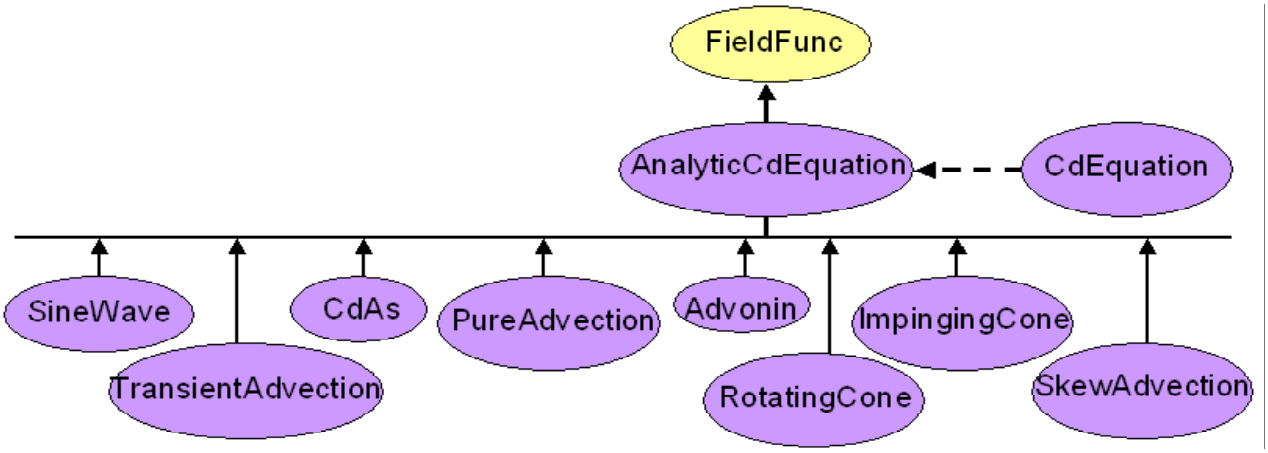
Figure~6-8: Hiérarchie de classes : Density, Viscosity.



Figure~6-9: Classe manager pour la résolution du système global : Coupling.



Figure~6-10: Traitement des solutions analytiques.



Figure~6-11: Solutions analytiques de l'équation de transport.

6.4 Validation numérique

Les équations discrètes de transport Eqn.5.44, d'écoulement Eqn.5.43 et d'équilibre Eqn.5.45, ont d'abord été testées séparément, avant d'être couplées pour la confrontation à des programmes existants ([122], [58]).

6.4.1 Solutions analytiques continues

Equation de transport

Un certain nombre de solutions analytiques ont été programmées pour l'équation d'advection-dispersion Eqn.4.70, pour plusieurs raisons. Cette équation a posé problème lors de sa discrétisation par la méthode de Galerkin, des oscillations inacceptables sont apparues dans la solution pour des cas bidimensionnels et tridimensionnels simples (injection en cuve cylindrique par exemple). Si les oscillations dans le cas unidimensionnel peuvent toujours être éliminées par le raffinement du maillage, le coût d'un tel raffinement devient rapidement prohibitif en dimension deux ou trois. Une partie des difficultés provient également des conditions aux limites de type Dirichlet homogène, des régimes d'écoulement non parallèles aux axes de coordonnées (souvent rencontrés dans la pratique, cas de l'injection cylindrique par exemple), ou des termes source (terme de filtration et termes de couplage dans l'Eqn.4.70) lorsqu'ils sont présents dans l'équation d'advection-dispersion. Toutes ces difficultés sont illustrées dans ce qui suit à travers la discussion des solutions analytiques. Afin de vérifier la validité et la précision du schéma SUPG implémenté ([59]), et d'étudier l'apport de la formulation SUPG pour la stabilisation du comportement oscillatoire de la solution, plusieurs cas simplifiés de l'équation de transport, conduisant à des solutions analytiques, sont étudiés. Ces exemples montrent l'utilité de la formulation SUPG par rapport à la formulation de Galerkin classique, sans modification des fonctions de pondération. Les résultats sont comparés à la solution exacte lorsque celle-ci est disponible.

Des éléments linéaires sont employés pour les problèmes unidimensionnels, et des éléments quadrilatéraux isoparamétriques bilinéaires sont employés dans les problèmes bidimensionnels. Une règle d'intégration classique par points de Gauss est employée.

Les solutions analytiques étudiées et les résultats sont présentés en annexe 10.2.1.

Soit l'équation suivante du type advection-dispersion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \sum_{k=1}^{nsd} (V_f)_k \frac{\partial c}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{nsd} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(D_k \frac{\partial c}{\partial x_k} \right) + f \tag{6.1}$$

obtenue à partir de l'Eqn.4.70 plus générale en réduisant le tenseur de dispersion à un vecteur, et en substituant aux termes de filtration et de couplage (hydrodynamique, termes de dépôt également)

le terme source f, et avec $\overline{\rho^g}^f = c$ pour alléger l'écriture. Cette équation simplifiée est immédiatement disponible dans le code du fait de l'implémentation qui dissocie le calcul des coefficients de la procédure de résolution élément fini proprement dite. Ainsi, le système programmé aux noeuds reste inchangé, pour toute les solutions analytiques étudiées, quel que soit le type de coefficients (constants ou non, correspondant à un système couplé ou non). Outre la flexibilité accrue, cette conception du code garantit une validation sûre (c'est toujours la même procédure élément fini qui est validée, et non une procédure dérivée dans une sous-classe, ou obtenue après modification de la fonction *integrands*). Dans tous les cas tests qui sont présentés, les fonctions *integrands* et *integrands4side* qui donnent le système élément fini aux noeuds ou aux bords du domaine, restent inchangées.

Solution d'Advonin

La solution d'Advonin ou d'Ogata ([90]) est à l'origine de la méthode de détermination expérimentale de la constante de dispersion longitudinale détaillée dans la section 7.6. Il s'agit d'un problème de transport idéalisé dans un système d'écoulement unidimensionnel de longueur L. L'équation Eqn.6.1 est considérée pour le cas unidimensionnel. Le système possède une concentration initiale uniforme

$$c(x, t = 0) = c_0(x) \tag{6.2}$$

la vitesse fluide est constante $\|\mathbf{V}_f\| = |\mathbf{V}_f| = V_f = cte$, et le coefficient de diffusion effectif $D = cte$. Les conditions aux limites sont fixées à

$$c(0, t) = c_1(t) \tag{6.3}$$

et

$$c(L, t) = c_2(t) \tag{6.4}$$

respectivement. Sous ces conditions aux limites et initiale, le profil de concentration est déplacé à vitesse constante, avec de la diffusion au niveau de l'interface. Il s'agit d'un test intéressant pour les algorithmes numériques dans le cas unidimensionnel, car le front produit est très abrupt pour des conditions dominées par la convection.

Lorsque $L \to \infty$ et $c_2(t) = 0$, la solution analytique de ce problème aux limites a été donnée par Advonin et Ogata ([90]) et s'écrit :

$$\begin{aligned} c(x,t) &= c(x,0) + \frac{c(0,t) - c(x,0)}{2}\left[\operatorname{erf} c\left(\frac{x - V_f t}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left(\frac{xV_f}{D}\right)\operatorname{erf} c\left(\frac{x + V_f t}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \\ &= c_0(x) + \frac{c_1(t) - c_0(x)}{2}\left[\operatorname{erf} c\left(\frac{x - V_f t}{2\sqrt{Dt}}\right) + \exp\left(\frac{xV_f}{D}\right)\operatorname{erf} c\left(\frac{x + V_f t}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \end{aligned} \tag{6.5}$$

$\operatorname{erf} c$ est la fonction erreur complémentaire définie par :

$$\operatorname{erf} c\,(\beta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta} \exp\left(\varepsilon^2\right) d\varepsilon \tag{6.6}$$

Un paramètre α est employé pour la formulation des fonctions de pondération upstream, qui correspond dans le cas unidimensionnel (voir section 5.2.1) au paramètre τ de la méthode SUPG. Pour $\alpha = 0$, la méthode de Galerkin standard est obtenue. Dans le cas unidimensionnel, c'est le coefficient α qui amène la stabilité numérique de la discrétisation élément fini du problème posé. Il est donc nécessaire de trouver la valeur minimale de α qui permette d'approcher au mieux la solution réelle, tout en lui assurant un poids suffisant afin d'amortir les oscillations numériques. Heinrich et al. ([54]) montrent que la stabilité de la formulation centrée d'une équation d'advection-diffusion dépend du nombre de Péclet sur un élément:

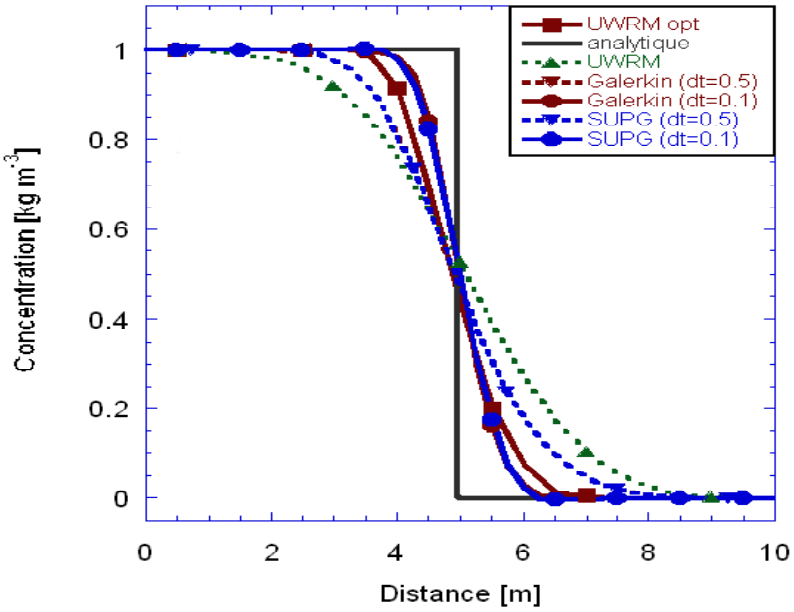
$$Pe_{él} = \frac{|V_f| \triangle x}{D} = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} \tag{6.7}$$

Eqn.6.7 définit le nombre de Peclet local du maillage.

D'après Heinrich et al. ([54]), c'est la valeur du nombre de Peclet $Pe_{él}$ qui décide de l'approximation : si $Pe_{él} > (Pe_{él})_{\text{lim}} = 2$, il faut introduire un coefficient de compensation, la méthode upwind est employée. Par contre α doit être pris nul (méthode de Galerkin) pour $Pe_{él} < 2$. Heinrich et al. ([54]) donnent l'expression du coefficient α dans le cas stationnaire. Cette valeur stabilisante pour le schéma induit encore des erreurs. Sur la base de l'analyse du système élément fini unidimensionnel assemblé en un noeud, Christie et al. ([25]) concluent par une étude plus poussée en conditions stationnaires à la valeur optimale de α suivante :

$$\alpha_{opt} = \coth\left(\frac{Pe_{él}}{2}\right) - \frac{2}{Pe_{él}} \tag{6.8}$$

Il est intéressant de comparer les résultats de la méthode SUPG au schéma upwind classique et à la méthode de Galerkin. Les résultats donnés pour la méthode UWRM (Upwind Weighted Residual Method) sont ceux obtenus par Honma ([58]). Les Figs.6-12 et 6-13 offrent une comparaison entre les solutions analytique d'Advonin, de Galerkin, SUPG et Upwind pour un nombre de Peclet $Pe_{él} = 100$ et pour un nombre de Peclet $Pe_{él} = \infty$ respectivement. La solution d'Advonin est étudiée pour un modèle simple. Le modèle possède 20 éléments de longueur égale ($\triangle x = 0.5\ m$), avec une vitesse constante ($V_f = 0.5\ m \cdot s^{-1}$) et une dispersivité $D = 2.5 \times 10^{-3}\ m^2 \cdot s^{-1}$, représentant une situation dominée par la convection : $Pe = \frac{V_f \triangle x}{D} = 100$. Les résultats sont donnés à t=10 s, sous forme de concentration adimensionnelle, à comparer à la solution analytique exacte. Les résultats de la méthode de Galerkin,

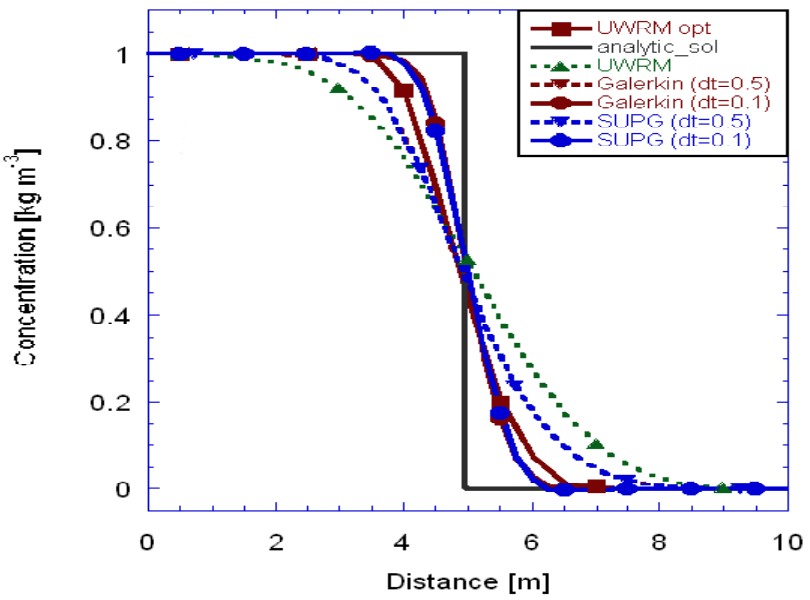


Figure~6-12: Solution d'Advonin à $t = 10\ s$, $Pe_{él} = 100$. Comparaison entre solution analytique et plusieurs solutions numériques.

qui constitue la meilleure méthode lorsqu'elle converge ([94]), sont confondus avec le schéma SUPG, montrant qu'aucune dissipation artificielle ne doit être introduite pour stabiliser le schéma dans le cas particulier étudié. En unidimensionnel, une solution acceptable peut toujours être obtenue, y compris et surtout en employant Galerkin, dès que deux noeuds contigus sont distants de moins de $\sqrt{\varepsilon}$, si ε désigne la taille de la zone de transition. La méthode UWRM qui emploie α_{opt} ne présente aucune oscillation, mais un étalement plus important du front de concentration, appelé fausse dispersion (smearing), se produit, qui résulte de la diffusion artificielle excessive présente dans le schéma numérique. L'étalement du front, qui n'est pas d'origine physique, est introduit par la technique particulière de résolution employée.

Si le pas de temps est varié ($\triangle t = 0.1\ s$ et $\triangle t = 0.5\ s$ sur les Figs.6-12 et 6-13), les autres paramètres étant fixés ($Pe_{él} = cte$), il apparaît que la résolution est notablement améliorée.

Les solutions de Galerkin et SUPG sont plus proches de la solution exacte que le schéma upwind trop dissipatif, même dans le cas unidimensionnel. En particulier, pour les méthodes de Galerkin ou SUPG, le cas $Pe_{él} = 100$ offre les mêmes difficultés que le cas $Pe_{él} = \infty$ supposé plus difficile ([58]), les solutions numériques obtenues dans les deux cas présentent les mêmes caractéristiques, et sont exemptes d'oscillations si les discrétisations temporelle et spatiale garantissent une précision suffisante ([49]).



Figure~6-13: Solution d'Advonin à $t = 10\ s$, $Pe_{él} = \infty$. Comparaison entre solution analytique et plusieurs solutions numériques.

L'attention s'est largement portée vers l'identification d'un paramètre de pondération upstream optimal, qui élimine les oscillations numériques tout en minimisant la dispersion numérique. Outre l'expression obtenue pour le paramètre de pondération optimal α_{opt}, sur la base des algorithmes de CFD (Computational Fluid Dynamics), Morton et al. ([88]) emploient le critère $Cr_{él} = 1$ en convection pure unidimensionnelle, lorsque la vitesse est constante. $Cr_{él}$ désigne le nombre de Courant de l'élément, défini par :

$$Cr_{él} = \frac{|V_f| \triangle t}{\triangle x} \tag{6.9}$$

Jusqu'à présent toutefois, aucun critère général n'a été proposé.

Dans le cas transitoire, il n'existe pas a priori de critère optimum pour choisir α, du fait de la diversité des schémas possibles d'intégration dans le temps. La valeur de α optimal est généralement déduite à partir de cas simples pour être généralisée lors de l'étude de cas plus complexes. Comme le critère donné par l'Eqn.6.8 n'est applicable qu'à des conditions stationnaires, Honma ([58]) tente d'obtenir un critère pour les conditions transitoires, tenant compte de la taille du pas de temps choisi pour l'intégration de l'équation de transport transitoire. Afin de quantifier cet effet, le nombre de Courant est employé. Une série d'expériences numériques est conduite par Honma afin de déterminer la valeur optimale de α qui minimise la dispersion numérique, par l'emploi de différentes valeurs du nombre de Peclet et du nombre de Courant. Le nombre de Peclet est varié par l'emploi de différentes dispersivités, et le nombre de Courant est varié en choisissant différentes tailles de pas de temps. Les expériences numériques effectuées par Honma le conduisent à un paramètre de pondération optimal α'_{opt} étroitement relié au nombre de Courant. Une fonction approchée, afin de calculer le paramètre optimal α'_{opt} en fonction du nombre de Courant, est donnée par :

$$\alpha'_{opt} = 0.11 \exp\left(1.1 Cr_{él}\right) \tag{6.10}$$

pour le cas $Pe_{él} = \infty$. Pour $Pe_{él} \neq \infty$, le paramètre optimal α'_{opt} est situé légèrement au-dessous de la ligne donnée par Eqn.6.10, mais d'après Honma, l'influence du nombre de Peclet sur l'oscillation numérique et la dispersion est moins dominante que celle du nombre de Courant. Lorsque le nombre de Courant est tel que $1 \leq Cr_{él} \leq 2$, de légères oscillations sont observées par Honma au cours des premiers pas de temps. Les oscillations diminuent assez rapidement aux pas de temps ultérieurs. Lorsque $Cr_{él} < 1$, aucune oscillation numérique n'apparaît si α'_{opt} est choisi conformément à Eqn.6.10.

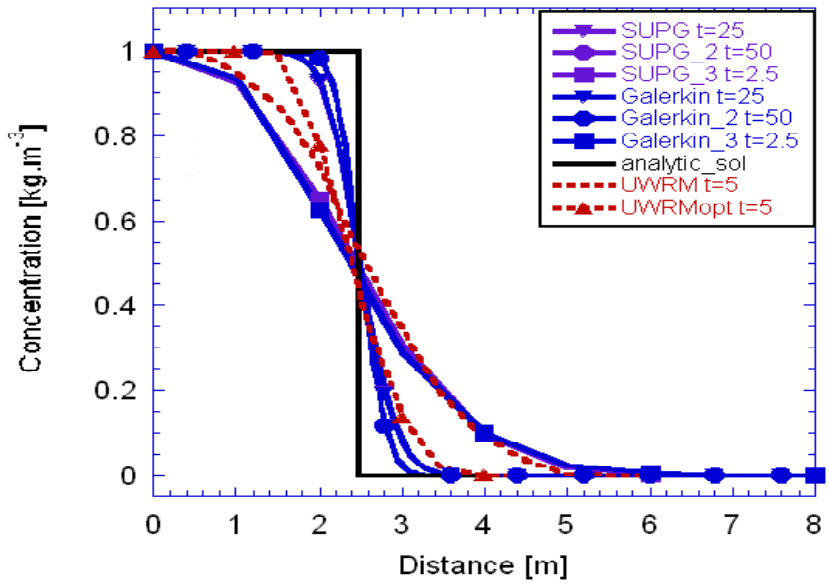
L'adéquation du critère est vérifiée par Honma pour le modèle unidimensionnel dont l'espacement nodal et la vitesse sont identiques à la solution d'Advonin étudiée dans le cas précédent. Le pas de temps est pris égal à $\triangle t = 0.5\ s$ dans la résolution UWRM ([58]), et le nombre de Courant vaut $Cr_{él} = 0.5$. La Fig.6-13 illustre la comparaison entre le schéma de Galerkin standard ($\triangle t = 0.1\ s$ et $\triangle t = 0.5\ s$), le schéma SUPG ($\triangle t = 0.1\ s$ et $\triangle t = 0.5\ s$), les schémas UWRM (basés sur α_{opt} et α'_{opt}) et la solution

analytique exacte. Le schéma UWRM basé sur α'_{opt} donne de meilleures résultats que celui construit sur α_{opt} pour la minimisation de la dispersion numérique.

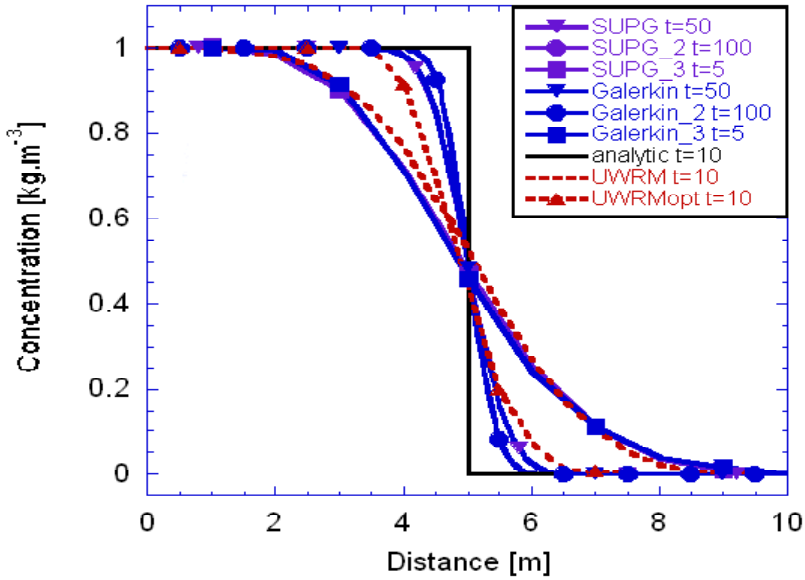
D'après Honma, lorsque la taille du maillage est restreinte ou fixée, la taille du pas de temps doit être choisie de manière à ce que le nombre de Courant $Cr_{él} < 1$, afin de minimiser la dispersion numérique. Honma considère en outre que l'influence de Pe sur l'oscillation numérique est moins dominante que celle du nombre de Courant. Les conclusions de Honma vont en partie à l'encontre de nos résultats numériques. En effet, limiter la taille du pas de temps semble correspondre à une exigence de précision pour Galerkin comme pour SUPG dans le cas traité et non à une question de stabilité. Sur la Fig.6-12, le fait que Galerkin converge pour $\triangle t = 0.5\ s$, et présente un étalement important du front par rapport à la solution de Galerkin avec $\triangle t = 0.1\ s$ et par rapport à la solution analytique, atteste que la discrétisation est grossière, et doit être raffinée pour offrir une précision suffisante.

Des résolutions numériques ont été effectuées avec la méthode SUPG pour des discrétisations différentes, lorsque $\triangle t$, $\triangle x$ et D varient, tout en conservant $Pe_{él} = \infty$ et $Cr = 0.5$ constants. Les Figs.6-14 et 6-15 représentent l'ensemble des solutions à $t = 5\ s$ et $t = 10\ s$, comparées à la solution analytique. SUPG et Galerkin désignent les solutions obtenues respectivement par la méthode SUPG et la méthode de Galerkin en employant $\triangle x = 0.1\ m$, $\triangle t = 0.5\ s$, $V_f = 0.5\ m \cdot s^{-1}$, $D = 0\ m^2 \cdot s^{-1}$. SUPG_2 et Galerkin_2 désignent les solutions SUPG et de Galerkin obtenues avec $\triangle x = 0.05\ m$, $\triangle t = 0.5\ s$, $V_f = 0.05\ m \cdot s^{-1}$, $D = 0\ m^2 \cdot s^{-1}$. SUPG_3 et Galerkin_3 désignent les solutions SUPG et de Galerkin obtenues avec $\triangle x = 1\ m$, $\triangle t = 0.5\ s$, $V_f = 1\ m \cdot s^{-1}$, $D = 0\ m^2 \cdot s^{-1}$. UWRM désigne la solution d'Advonin donnée par Honma à $t = 5\ s$ et $t = 10\ s$ lorsque $\triangle x = 0.5\ m$, $\triangle t = 0.5\ s$, $V_f = 0.5\ m \cdot s^{-1}$, $D = 0\ m^2 \cdot s^{-1}$, en employant l'Eqn.6.8 pour le calcul de la fonction de pondération upwind. UWRMopt représente la solution d'Advonin donnée par Honma à t=5 s et t=10 s sous les mêmes conditions, en employant Eqn.6.10 pour le calcul de la fonction de pondération upwind. Pour une même valeur des nombres de Courant et de Peclet, la qualité des solutions est très variable. La solution optimale est donnée par SUPG_2 et Galerkin_2, lorsque le produit $V_f \triangle t$ qui représente la distance parcourue sur un pas de temps, est minimum. Même avec un nombre de Courant relativement réduit, la solution peut présenter une dispersion importante, c'est le cas pour la méthode UWRM, ou lorsqu'une discrétisation grossière (Galerkin_3, SUPG_3) affecte la précision de la solution calculée de manière rédhibitoire.

Il apparaît que la solution optimale donnée par Honma (UWRMopt basé sur α'_{opt}), pourtant obtenue en minimisant la dispersion numérique sur la solution d'Advonin, présente une dispersion plus importante que les méthodes de Galerkin et SUPG (Fig.6-13, Fig.6-14, Fig.6-15). En conséquence, les nombres de Peclet et de Courant ne semblent pas toujours constituer des indicateurs suffisants de l'adéquation de la discrétisation choisie, du point de vue de la stabilité et de la précision de la solution numérique. De même, parmi les cas bidimensionnels étudiés (cf. SkewAdvection, RotatingCone en annexe 10.2.1), les



Figure~6-14: Solutions d'Advonin pour $Pe_{él} = \infty$, $Cr_{él} = 0.5$ à $t = 5\ s$.



Figure~6-15: Solutions d'Advonin pour $Pe_{él} = \infty$, $Cr_{él} = 0.5$ à $t = 10\ s$.

problèmes pour lesquels la solution présente des variations abruptes montrent que les valeurs du nombre de Peclet local ou du nombre de Courant local ne permettent pas d'indiquer l'irrégularité de la solution, qui constitue pourtant la principale source de difficulté. En particulier, dans le problème d'advection non parallèle aux axes (SkewAdvection, défini sur la Fig.10-6), avec le maillage uniforme employé, le nombre de Peclet numérique local $Pe_{él} = \frac{|\mathbf{V}_f|\triangle x}{D} = cte = 10^5$ semble indiquer des difficultés de résolution sur l'ensemble du domaine, pourtant la solution est régulière sur la quasi-totalité du domaine, excepté au voisinage de la discontinuité des conditions aux limites essentielles imposées (Figs.10-14 et 10-15). Un critère basé sur le nombre de Peclet conduit à affiner inutilement la discrétisation sur l'ensemble du domaine, car seules les zones de discontinuité de $\overline{\rho^g}^f$ doivent être raffinées. En conséquence, un critère de raffinement efficace doit s'appuyer sur la valeur locale du gradient de concentration $\nabla\overline{\rho^g}^f$.

Les valeurs du nombre de Courant et de Peclet ne sont pas des critères généraux pour l'évaluation de la méthode de pondération ou de la discrétisation employées, ni pour juger de l'instabilité d'une approximation numérique, c'est la distance parcourue au cours d'un pas de temps de la résolution numérique, soit $x = \|\mathbf{V}_f\| \times \Delta t$, qui conditionne l'erreur de dissipation (cf. étude de l'advection d'une onde sinusoïdale présentée en annexe 10.2.1, et solution d'Advonin présentée plus haut). De plus, les critères obtenus dans le cas unidimensionnel ne sont pas généralisables en dimension deux et trois. Les difficultés rencontrées en dimension deux ou trois (conditions aux limites abruptes, orientation du maillage par rapport à l'écoulement, zone de transition qui est une surface et non une ligne) ne peuvent pas être anticipées par une étude simple en unidimensionnel.

La condition de stabilité dans le cas général couplé, et sous des conditions réelles d'écoulement et de propagation, est trop complexe pour pouvoir être exprimée sous une forme analytique. Il n'existe pas de critère simple de calcul de α dans le cas général, bidimensionnel ou tridimensionnel, instationnaire, avec coefficients (vitesse, porosité, terme source) variables, et c'est pourquoi les solutions numériques obtenues, basées sur la valeur du nombre de Peclet pour calculer le terme upwind, peuvent être peu précises. La recherche d'une solution numérique stable et précise doit s'appuyer sur les caractéristiques physiques du problème. En particulier, des tests doivent systématiquement être effectués en 2D et 3D pour offrir une comparaison probante avec les méthodes existantes, et valider le choix de la méthode employée.

Une fois que la stabilité est assurée, par l'emploi d'une pondération SUPG par exemple, la méthode de discrétisation retenue doit être suffisamment précise pour capturer des variations (spatiales ou temporelles) rapides de la solution; et il est probable qu'avec une discrétisation temporelle d'ordre de précision suffisamment élevé, la contribution du terme de pondération upwind de la méthode SUPG soit minimisée. En effet, Gresho et al. ([49]), par l'emploi d'une technique de discrétisation temporelle qui rend négligeable l'erreur de troncature temporelle par rapport à l'erreur globale, combinée à un raffinement

local du maillage, parviennent à converger avec la méthode de Galerkin pour des problèmes variés (de la conduction de la chaleur aux équations de Navier-Stokes en passant par l'équation d'advection-diffusion) qui conduisent habituellement à des oscillations. De la même manière, pour la solution d'Advonin, c'est le pas de temps qu'il faut réduire pour avoir une solution satisfaisante. La mise au point de techniques plus performantes d'intégration de l'équation de transport dominée par la convection doit passer par la recherche d'algorithmes d'intégration temporelle appropriés.

Pour l'ensemble des solutions présentées, il apparaît que la méthode SUPG possède la robustesse d'une méthode upwind classique ([54], [55]), les oscillations sont éliminées dans la plupart des cas, tandis que la méthode n'est pas dégradée par une diffusion artificielle excessive, et s'identifie pratiquement à la méthode de Galerkin lorsque celle-ci converge. Cependant le choix du paramètre upwind reste dans une certaine mesure arbitraire dans les cas multidimensionnels ou transitoires, et plus encore dans le cas de problèmes couplés tels que celui traité ici. Un schéma plus général que le schéma SUPG est la méthode des éléments finis de Galerkin Least Squares, pour laquelle des formes aux moindres carrées du résidu sont ajoutées à la méthode de Galerkin, permettant un contrôle optimal de l'erreur ([62], [67], [45], [44]). Ce schéma, qui coïncide avec le schéma SUPG pour les cas hyperboliques, est plus simple lorsque la diffusion est présente. Les termes additionnels améliorent la stabilité de la méthode de Galerkin, sans en dégrader la précision, tout en conduisant à des problèmes variationnels bien posés qui garantissent la convergence de la solution ([26]).

La méthode SUPG se comporte de façon satisfaisante pour l'ensemble des problèmes de référence passés en revue, néanmoins la validité de la méthode est acquise lorsqu'elle est confrontée à des problèmes réels.

Equation d'équilibre

L'équation d'équilibre a été validée en élasticité linéaire isotrope et en plasticité (loi de Drucker-Prager avec plasticité associée) pour un certain nombre de cas simples, par comparaison à des solutions analytiques existantes, et à un logiciel commercial ([122]). Pour chaque problème, les conditions aux limites, les caractéristiques des matériaux, et les résultats de plusieurs comparaisons sont reportés en annexe (10.2.2). Les solutions obtenues à partir du logiciel développé et du logiciel commercial sont quasiment confondues pour tous les cas étudiés.

Equation d'écoulement

Différentes solutions ont été testées (problèmes de conduction de chaleur, problème d'écoulement axisymétrique) sur l'équation d'écoulement. Les solutions ne sont pas présentées car elles n'appelent aucune remarque particulière. En outre, une validation de l'équation d'écoulement lors de la résolution couplée

est proposée avec l'étude de l'injection à l'eau qui précède l'injection au coulis dans le modèle cylindrique, par confrontation avec une solution analytique (cf. chapitre 8). Une autre validation est proposée pour la résolution couplée de l'équation d'équilibre et l'équation de transport par confrontation aux expériences et au code numérique développés par Honma ([58]).

6.4.2 Problème couplé

Les résultats du code développé sont comparés à des résultats d'essais expérimentaux et numériques effectués par Honma ([58]). Seuls les champs de pression et de concentration ont pu être comparés, car le modèle de Honma se limite à la résolution de l'équation d'écoulement et de l'équation de transport dans un milieu poreux indéformable. Les paramètres du modèle sont ajustés de manière à concorder avec les équations de Honma, essentiellement par l'élimination de la filtration et du couplage hydromécanique. Dans l'analyse numérique effectuée, la viscosité est supposée varier linéairement en fonction de la concentration en coulis.

Injection unidimensionnelle en laboratoire

Le modèle considéré consiste en une colonne d'injection verticale de longueur totale 1.75 m et de diamètre 0.165 m. Le coulis est injecté depuis la base de la colonne sous débit constant. Le débit d'injection s'élève à $Q = 7.675 \cdot 10^{-6}\ m^3 \cdot s^{-1}$. Un gel de silicate très concentré est employé, la viscosité du coulis pur est donnée par $\overline{\mu^g}^f = 15 \times \overline{\mu^w}^f$. Les valeurs numériques employées lors de l'essai sont résumées dans le tableau 6.1, le taux de filtration est pris nul car le modèle de Honma ne considère pas la filtration. Un maillage de 40 éléments finis est employé lors de la discrétisation.

Tableau 6.1 Paramètres utilisés dans les comparaisons au modèle de Honma (données d'après ([58])).

porosité n	0.3
densité du squelette $(\overline{\rho_s}^s)_0$	$2.05 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
perméabilité intrinsèque k	$1.57 \cdot 10^{-11}\ m^2$
dispersivité longitudinale a_L	$1 \cdot 10^{-3}\ m$
taux de filtration λ	$0\ s^{-1}$
viscosité initiale du fluide (eau) $\overline{\mu^g}^f$	$1.1 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
viscosité du coulis pur $\overline{\mu^g}^f$	$16.5 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
densité initiale du fluide (eau) $\overline{\rho^w}^f$	$10^3\ kg \cdot m^{-3}$
densité du coulis $\overline{\rho^g}^f$	$1.1 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
compressibilité fluide β_p	$3.66 \cdot 10^{-8}\ Pa^{-1}$
coefficient de concentration β_c	$0\ Pa^{-1}$
diffusion moléculaire D^{*gw}	$10^{-10}\ m^2 \cdot \sec^{-1}$

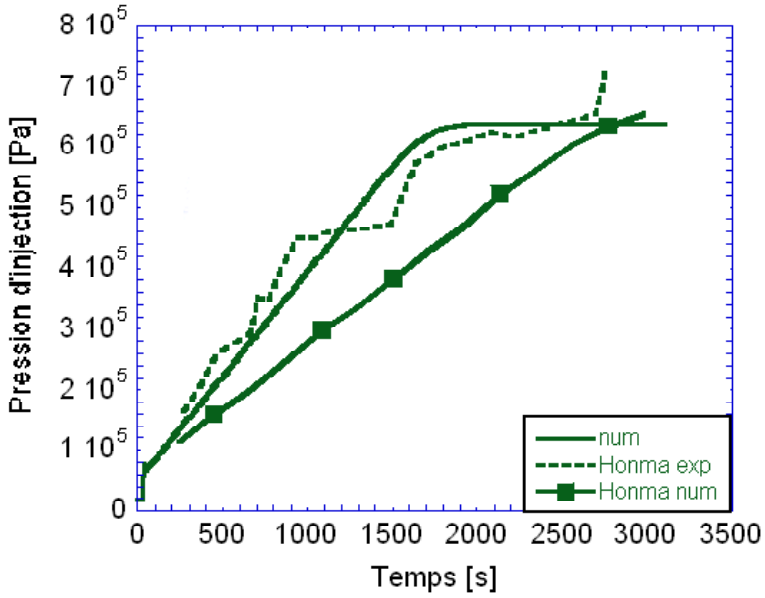
La comparaison entre les pressions d'injection expérimentale et numérique de Honma, et la pression d'injection calculée à partir du modèle développé au chapitre 4 (désigné dans la suite par l'abbréviation ADF pour modèle d'Advection-Dispersion-Filtration) est représentée sur la Fig.6-16. Il est à noter l'excellente concordance qualitative et quantitative entre la pression d'injection expérimentale et les pressions obtenues par le modèle ADF, tandis que l'évolution de la pression d'injection chez Honma est qualitativement différente, et ne concorde avec les valeurs expérimentales que sur la fin de l'essai.

Au cours de l'injection, des échantillons de coulis sont prélevés à intervalles réguliers par Honma en six positions le long de la colonne, et le temps de gel du coulis est mesuré. La technique employée pour déterminer la position du front n'est pas précisée dans ([58]), toutefois aucune mesure directe de la concentration n'est effectuée, et il semble que le front expérimental soit établi d'après les prélèvements successifs effectués le long de la colonne lorsque le coulis arrive au niveau d'un point d'échantillonnage. Les mesures de temps de gel et l'observation visuelle servent vraisemblablement à établir la propagation du front expérimental le long de la colonne.

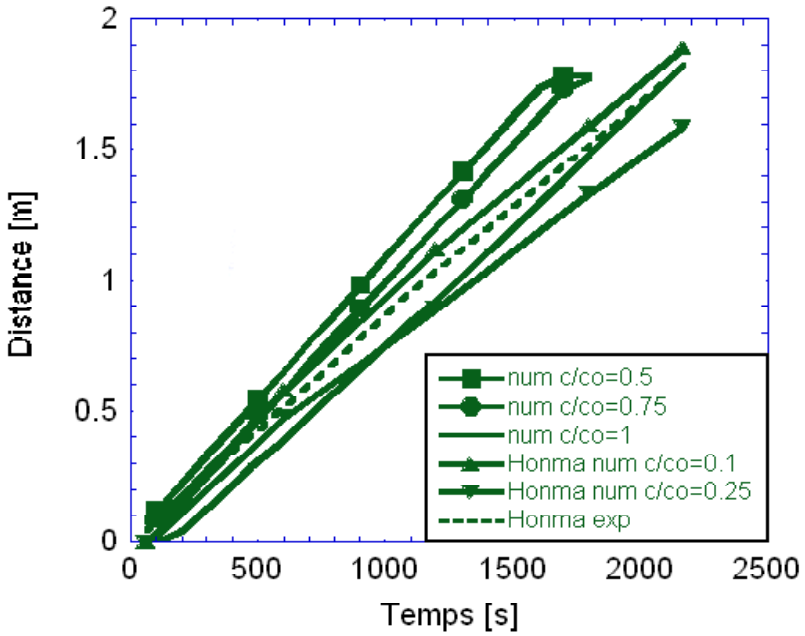
La comparaison entre le front expérimental, le front numérique de Honma et le front calculé par le modèle ADF est illustrée sur la Fig.6-17. Le front expérimental est compris entre les concentrations relatives $\frac{c}{c_{imp}} = 0.10$ et $\frac{c}{c_{imp}} = 0.25$ pour le modèle de Honma (plus proche de $\frac{c}{c_{imp}} = 0.10$), tandis que pour le modèle ADF le front expérimental est encadré par les fronts numériques $\frac{c}{c_{imp}} = 0.75$ et $\frac{c}{c_0} = 1$. En l'absence d'informations précises sur la détermination du front, il est difficile de conclure. Néanmoins les résultats numériques obtenus par Honma indiquent que le coulis est très dilué au niveau du front, tandis que le front de concentration est théoriquement situé approximativement à $\frac{c}{c_{imp}} \approx 0.50 - 0.6$ (voir Fig.7-4 du chapitre 7).

Lors de la détermination de la constante de dispersion longitudinale (section 7.6), les positions du front déterminées par analyse d'images ont été comparées à une détermination "à la main", obtenue par observation visuelle des photos obtenues. Il est apparu que le front ainsi déterminé est systématiquement en retard sur le front obtenu par analyse d'images, il est proche de $\frac{c}{c_{imp}} = 1$, qui correspond à l'arrière de la zone de transition. En particulier, pour un fluide miscible, et d'après les résultats obtenus en laboratoire lors de l'identification de la constante de dispersion longitudinale, la méthode employée par Honma pour la détermination du front ne semble pas assez précise pour pouvoir déceler des concentrations relatives en coulis de l'ordre de 10%.

Par ailleurs, pour une même concentration en coulis, le temps de gel déterminé en condition d'écoulement au cours de l'injection est généralement supérieur à celui mesuré en conditions stagnantes ([7]). En effet, Azzar ([7]) et Honma ([58]) ont montré que l'injection peut être poursuivie bien après que le temps de gel limite supposé, mesuré sur une solution au repos, ait été dépassé, et alors même que l'espace interstitiel est saturé de coulis pur. Ainsi, à la différence des mesures de temps de gel au



Figure~6-16: Injection unidimensionnelle. Evolution de la pression d'injection au cours du temps.



Figure~6-17: Injection unidimensionnelle. Evolution du front.

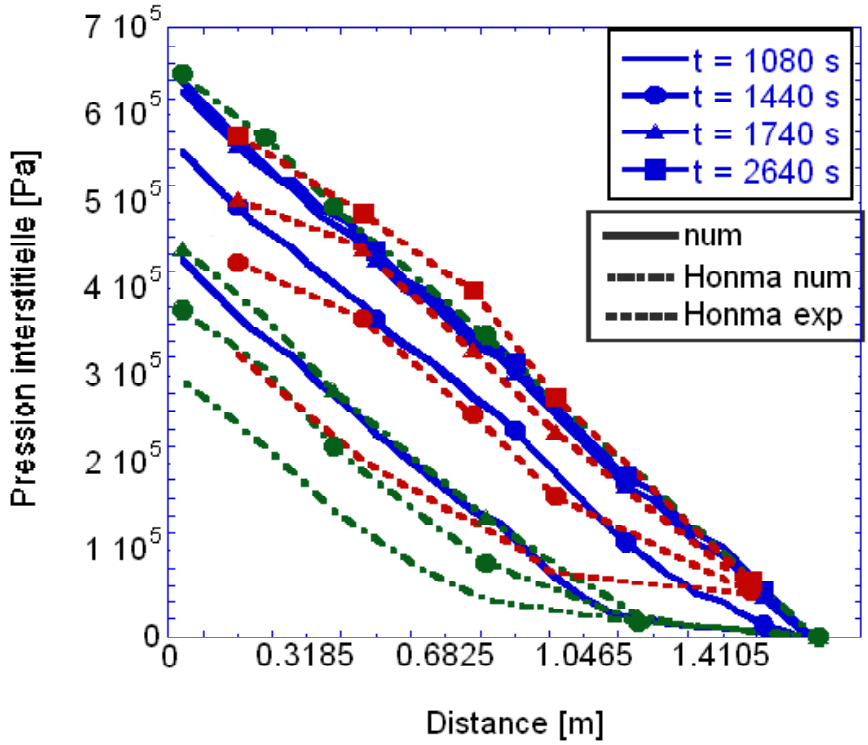
repos qui peuvent être reliées à la proportion relative de coulis dans la solution étudiée (cf. résultats de Caron cité dans [58], le temps de gel augmente avec la concentration en coulis), le temps de gel réel en conditions d'écoulement dépend de la concentration en coulis mais également de l'effet d'agitation lié à l'écoulement; l'écoulement provoque une fluidification notable, et donc une augmentation du temps de gel limite de la solution injectée, qui conduit à une sous-estimation de la valeur de la concentration du coulis dans l'espace interstitiel, si les corrélations employées sont les mêmes que pour le temps de gel au repos. En conséquence, la mesure du temps de gel sur les échantillons prélevés au cours de la propagation ne permet pas de remonter à la concentration, et les concentrations déduites par Honma sont vraisemblablement plus faibles que les concentrations réelles. En outre, la faible valeur de la constante de dispersion employée ($a_L = 1 \cdot 10^{-3}\ m$) impose que la zone de transition soit étroite (voir Fig.7-4 du chapitre 7), et il est probable que le front détecté lors des expériences corresponde à $\frac{c}{c_{imp}} \in [0.75, 1.]$.

Cette dernière remarque est appuyée par l'excellente concordance obtenue sur les pressions entre modèle ADF et valeurs expérimentales, car il apparaîtra dans l'étude des essais unidimensionnels en laboratoire (chapitre 8) que l'augmentation des pressions est directement couplée à la propagation du front en l'absence de filtration. Le développement transitoire de la pression, provoqué par la propagation du coulis, qui induit une augmentation de viscosité et donc une variation de pression, concorde entre modèle ADF et résultats expérimentaux. En particulier, le palier de pression indique la saturation de la colonne en coulis (observé lors des expériences et corroboré par les essais numériques, voir section 8.2.1), et à cet égard le champ de pression expérimental, le champ de pression du modèle ADF, et les concentrations du modèle ADF concordent, tandis que les résultats de Honma accusent un certain retard. Honma emploie la méthode upwind classique ([55], [121]) pour la discrétisation de l'équation de transport, qui montre une diffusion excessive (voir solution d'Advonin en section 6.4.1), et pourrait expliquer en partie le retard observé dans la propagation du front.

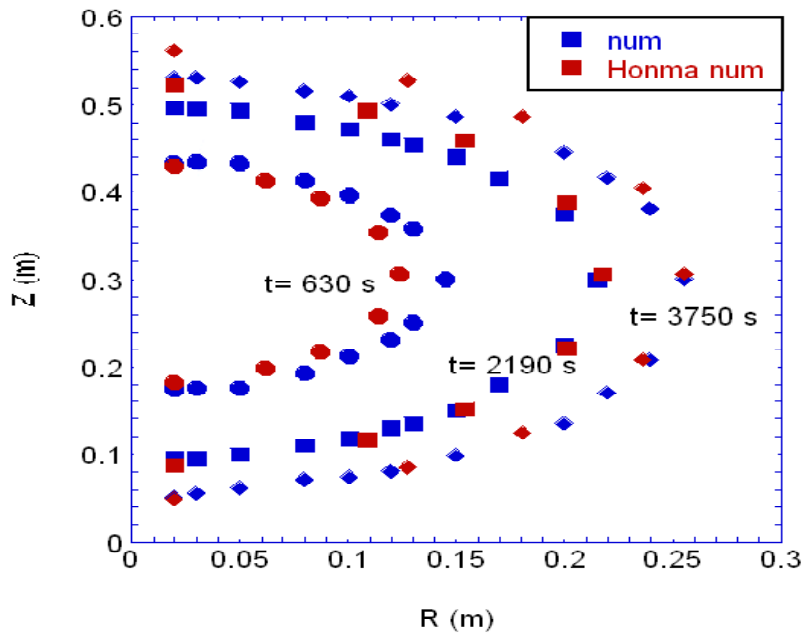
Les profils de pression sont représentés sur la Fig.6-18. Hormis à la fin de l'essai, les pressions calculées par Honma sont plus faibles que les pressions expérimentales et celles données par le modèle ADF. A $t = 2640\ s$ toutefois, lorsque l'état stationnaire est établi avec le modèle numérique de Honma, les trois profils de pression concordent.

Injection sphérique tridimensionnelle en laboratoire

Une comparaison est également effectuée avec les résultats d'une expérience d'injection sphérique réalisée en laboratoire par Honma ([58]). Le modèle d'injection est un cube de côté $0.6\ m$, le coulis est injecté sous débit constant dans le sable saturé depuis l'extrêmité d'un tube de diamètre $0.04\ m$. Sous l'hypothèse de symétrie sphérique du problème (pas tout à fait vérifiée à cause de la présence du tube), et en négligeant l'effet de la gravité, Honma développe les équations d'injection en coordonnées sphériques, ce qui ramène



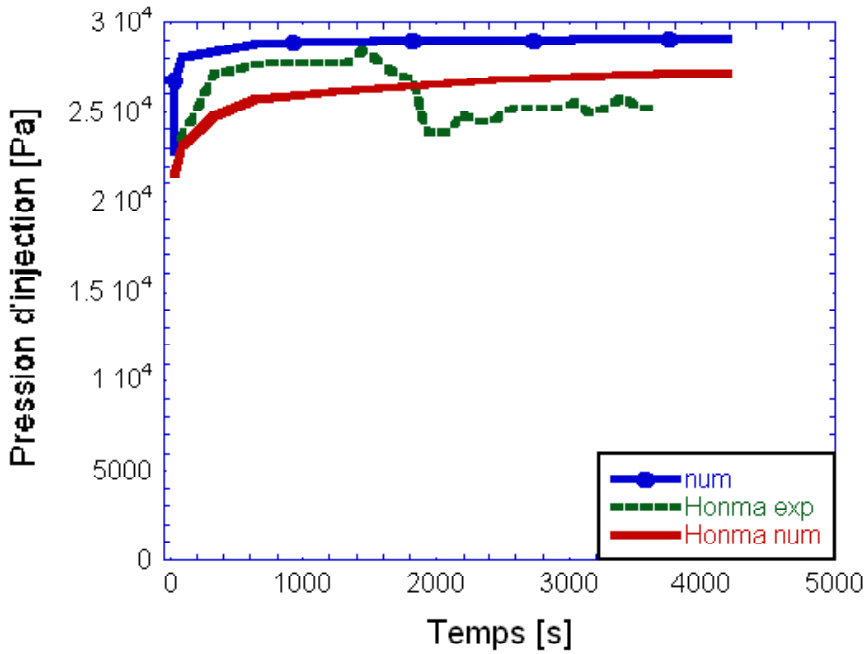
Figure~6-18: Injection unidimensionnelle. Profil de pression entre $t = 1080\ s$ et $t = 2640\ s$.



Figure~6-19: Injection sphérique, résultats numériques du modèle ADF et de Honma. Positions du front aux instants $t = 630$, 2190, et 3750 s.

la résolution à un problème unidimensionnel. Pour le modèle ADF, le problème est traité comme un problème axisymétrique, en considérant une section droite arbitraire comme domaine de résolution. Le débit d'injection s'élève à $Q = 1.2 \cdot 10^{-5}\ m^3 \cdot s^{-1}$. Les caractéristiques du problème sont les mêmes que celles du cas précédent, excepté la viscosité ($\overline{\mu^g}^f = 5 \times \overline{\mu^w}^f$). Dans l'analyse numérique, le modèle cubique est approximé par une sphère équivalente de même volume par Honma, avant de ramener le problème à une résolution unidimensionnelle le long d'un rayon. Un maillage uniforme unidimensionnel de 20 éléments est employé par Honma pour la résolution du problème. Avec le modèle ADF, le modèle cubique est approximé par un cylindre de révolution de volume identique, avant de résoudre les équations bidimensionnelles en axisymétrie. Afin d'offrir une discrétisation équivalente à celle de Honma, le modèle ADF emploie un maillage bidimensionnel uniforme de [20x8] éléments.

Au cours de l'essai, plusieurs colorants sont introduits dans la préparation du coulis, à $t = 1560\ s$ et à $t = 3120\ s$. L'essai se déroule pendant 3750 s. Le bulbe est dégagé lorsque l'hydratation du coulis est complétée, puis découpé selon une section, ce qui permet d'obtenir les positions approximatives du front à $t = 630$, 2190, et 3750 s. La comparaison entre les fronts numériques est illustrée sur la Fig.6-19, sachant que le front expérimental, relativement irrégulier, est proche des résultats numériques. Le front



Figure~6-20: Injection sphérique. Evolution de la pression d'injection.

de coulis est identifié par Honma à la surface de concentration relative $\frac{c}{c_{imp}} = 0.5$. La concordance entre les résultats du modèle de Honma et du modèle ADF est bonne, la légère avance du modèle ADF s'atténue au cours du temps, et les deux fronts sont pratiquement confondus à la fin de l'essai.

La comparaison entre pressions d'injection expérimentale et numériques est illustrée sur la Fig.6-20. Les pressions sont assez proches, la pression du modèle ADF est voisine de la pression expérimentale jusqu'à $t = 2000\ s$, et légèrement au-dessus du modèle de Honma. Les pressions numériques sont à peu près stabilisées tout au long de l'essai après une rapide augmentation au début de l'essai. Une chute soudaine de pression a été constatée au cours de l'essai autour de $t = 30$ min, cette décroissance est attribuée par Honma à une légère fissuration au voisinage du tube d'injection, qui explique l'écart entre le modèle ADF, qui ne tient pas compte de la rupture possible du matériau, et résultats expérimentaux sur la seconde partie de l'essai. Le modèle de Honma, qui n'est pas non plus un modèle d'endommagement, est plus proche des résultats expérimentaux sur le seconde partie de l'essai.

6.5 Conclusion

L'implémentation des équations du modèle développé au chapitre 4 a été présentée dans ce chapitre. Une validation partielle du code a également été effectuée en comparant d'abord l'équation de transport (Eqn.4.70), puis l'équation d'écoulement (Eqn.4.68) et l'équation d'équilibre (4.71) à des solutions analytiques existantes sous certaines conditions restrictives, ainsi qu'à des solutions numériques ([122]). Le problème couplé de transport et d'écoulement a également été comparé à un code numérique et à des expériences en laboratoires développés par Honma ([58]). Par contre aucun benchmark n'a pu être trouvé dans la littérature sur les problèmes de consolidation avec transport.

La validité de l'implémentation numérique a été vérifiée dans ce chapitre, il reste à valider le modèle développé sur le plan phénoménologique, par confrontation aux expériences en laboratoire.

Chapitre 7

ASPECTS EXPERIMENTAUX

7.1 Introduction

Les essais entrepris sont de deux types. Une partie des essais réalisés vise à l'identification des paramètres inconnus figurant dans la formulation du modèle : viscosité, densité, perméabilité, taux de filtration, constante de dispersion longitudinale. Une fois que le modèle est complètement renseigné, des essais de validation peuvent être effectués. Les essais de validation comportent des essais d'injection sur colonne unidimensionnelle, ainsi que des essais d'injection en grandeur réelle. Dans ce chapitre, les essais d'identification sont décrits. L'absence de données de dispersion dans la littérature pour une suspension de coulis de ciment, a conduit au développement d'un modèle unidimensionnel afin de caractériser les propriétés de dispersion. Le principe d'identification de la constante de dispersion longitudinale est détaillé dans ce chapitre, les principaux résultats sont donnés et commentés. Le modèle de dispersion employé est celui de Bear ([13]), qui implique que sous des conditions isotropes la dispersion est fonction de deux paramètres, la constante de dispersion longitudinale a_L colinéaire au vecteur vitesse d'écoulement macroscopique, et la constante de dispersion transversale a_T (cf. section 4.6.4). Seule la constante de dispersion longitudinale est identifiée.

Les essais de validation du modèle sont traités dans le chapitre suivant.

7.2 Matériaux

7.2.1 Sable

Deux types de sable ont été utilisés.

Le sable du Léman, de granulométrie étendue, donnée sur la Fig.10-90, a été employé pour les essais

d'injection sur colonne unidimensionnelle avec filtration, et pour les essais d'injection tridimensionnelle réalisés en cuve cylindrique. La perméabilité intrinsèque du sable à l'eau est prise constante sous conditions saturées, elle est de l'ordre de $1.5 - 2 \cdot 10^{-11}\ m^2$ pour l'ensemble des essais réalisés. Les propriétés mécaniques du sable, obtenues par des essais triaxiaux, sont données en annexe 10.4.

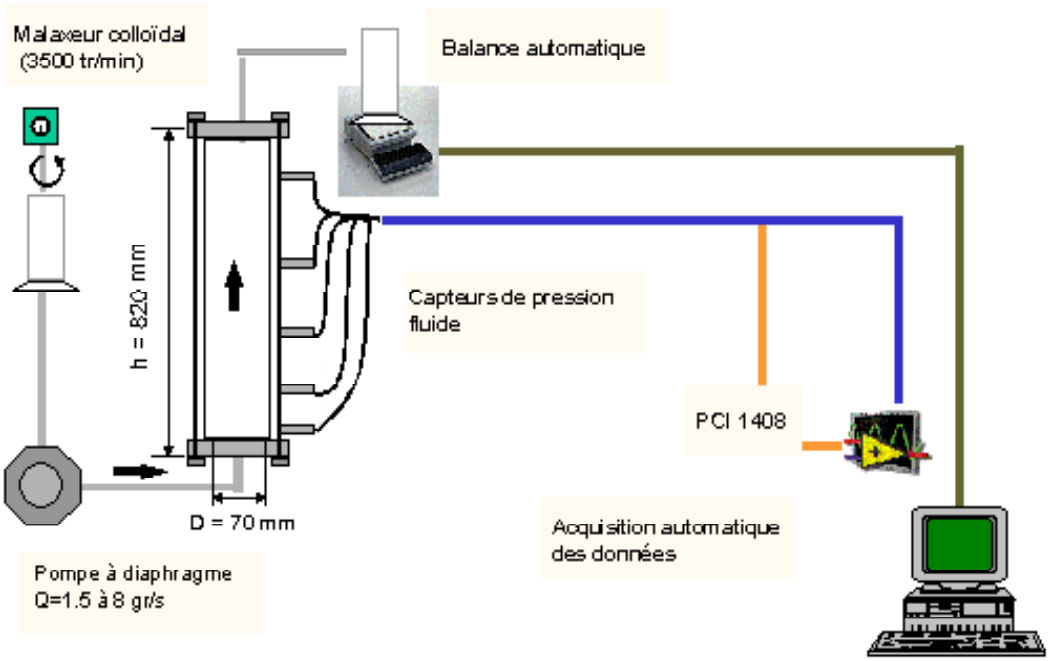
Le sable employé pour les essais d'identification de la constante de dispersion, et pour les essais d'injection sur colonne unidimensionnelle sans filtration, diffère de celui utilisé dans les autres essais en colonne ou en cuve (voir section 8.4). Pour éviter l'apparition d'une dispersion mégascopique, une granulométrie uniforme a été recherchée, afin d'obtenir un milieu poreux le plus homogène possible lors de l'identification de la constante de dispersion macroscopique a_L. La colonne est remplie de sable de quartz de forme quasi-sphérique, de diamètre moyen des grains 1 mm, de granulométrie quasi-constante donnée dans le tableau suivant :

Tamis (mm)	Refus (%)
2	0.0
1	91.5
0.5	8.5
Total	100

La perméabilité moyenne intrinsèque du sable de quartz, estimée à partir d'essais d'injection à l'eau, s'élève à $4 - 5 \cdot 10^{-10}\ m^2$ pour l'ensemble des essais réalisés.

7.2.2 Coulis de micro-ciment

Le coulis d'injection est un coulis de ciment micro-fin (Spinor A12, Ciments d'Origny), avec un rapport ciment-eau de $\frac{C}{E} = \frac{Ciment}{Eau} = \frac{1}{3}$, additionné d'un superplastifiant (Sika HE50+agent stabilisateur, EucoInjex **9**3), et mélangé à de l'eau désaérée (6 ppm d'oxygène total dissous) avec un malaxeur colloïdal, conformément aux spécifications industrielles. La plupart des essais ont été réalisés avec un rapport ciment-eau $\frac{C}{E} = \frac{Ciment}{Eau} = 0.25$, dans un rapport massique par rapport au ciment de 4 % pour le dispersant. Un état dispersé optimal de la suspension de coulis est ainsi assuré. Les mesures de fluidité et de stabilité effectuées sur des échantillons de coulis pour chaque essai montrent que la solution de coulis est suffisamment stable et dispersée pour être vue comme un mélange homogène Newtonien au cours de la phase de propagation (cône de Marsh = 28.2 s, 10% de sédimentation après 8 h, temps de prise supérieur à 20 heures). L'adjonction de superplastifiant permet de diminuer notablement la vitesse de rigidification, tout en augmentant le temps de prise. La granulométrie du coulis de micro-ciment est donnée sur la **F**ig.10-**9**0.



Figure~7-1: Dispositif d'acquisition des essais sur colonne unidimensionnelle.

7.3 Description des essais sur colonne unidimensionnelle

Plusieurs types d'essais ont été effectués.

7.3.1 Essais sur petite colonne

Mesures de perméabilité au coulis

Les essais sur petite colonne ont été initalement mis au point pour effectuer des mesures de perméabilité au coulis sous une différence de pression constante. Le dispositif, représenté sur la **F**ig.10-73 en annexe 10.4 comprend une petite colonne en plexiglas, de 0.07 m de diamètre intérieur et de 0.08 m de longueur, remplie de sable. L'échantillon de sol, de densité intrinsèque $\overline{\rho_s}^s$ et de volume connus, est saturé en eau. La porosité est déterminée par pesée des masses de sable et d'eau. Le coulis est ensuite introduit depuis la base de l'échantillon sous une pression constante, tandis que le sommet de l'échantillon est soumis à la pression atmosphérique. La différence de pressions appliquées est prise pour pression de l'échantillon, car celui-ci est de dimensions réduites. L'échantillon est en effet traité comme un seul point dans l'espace, bien qu'il soit de taille finie. L'injection est pratiquée vers le haut sous une pression d'injection constante $p_{injection} = 50\ kPa$ pour tous les essais sur petite colonne. Une balance numérique permet l'acquisition automatique de la masse effluente. Deux flasques métalliques empêchent tout dé-

placement des extrêmités de la colonne. L'expérience consiste en plusieurs parties : la colonne remplie de sable est d'abord saturée en eau, et la pression imposée est maintenue un certain temps après que l'état permanent ait été atteint pour permettre la mesure de perméabilité à l'eau.

Le coulis est ensuite injecté sous une différence de pression constante. Les essais sur petite colonne n'ont pas pu être exploités pour la mesure de perméabilité au coulis, en revanche ils ont été utiles pour mettre en évidence la filtration (voir section 3.2.4). L'injection au coulis est suivie d'une injection à l'eau afin d'étudier de façon qualitative l'amplitude du dépôt et l'altération de la structure du milieu poreux, à partir d'un calcul de porosité effective.

7.3.2 Essais sur colonne longue

Les essais sur colonne longue ont été exploités pour l'estimation du taux de dépôt inital λ_0 qui fait l'objet de la section 4.6.5, l'identification du coefficient de dispersion longitudinal a_L figurant dans l'Eqn.4.36, et l'évaluation critique du modèle théorique et numérique qui fait l'objet du chapitre suivant. Le dispositif expérimental de l'essai d'injection en colonne unidimensionnelle est représenté sur la **F**ig.7-1.

Identification du taux de filtration λ

La colonne longue de plexiglas, de 0.07 m de diamètre intérieur et de 0.82 m de longueur, est instrumentée : 5 capteurs de pression sont insérés le long de la colonne (les positions des capteurs sont reportées sur la **F**ig.10-74 en annexe 10.4), pour mesurer l'évolution de la pression interstitielle au cours de l'injection. Une structure métallique permet d'accrocher la colonne le long du mur, et de la maintenir en compression lors de l'injection. L'injection est effectuée de bas en haut sous débit constant pour tous les essais sur ce type de colonne, une pompe à diaphragme permet d'ajuster la valeur du débit d'injection ($Q = 1.5$ à $8\ gr \cdot s^{-1}$). Une balance numérique sert à l'acquisition automatique de la masse effluente. L'ensemble des capteurs et la balance sont connectés à l'ordinateur, un programme d'acquisition automatisé (Labview V5.1, [73]) est employé pour contrôler les paramètres d'essai et les valeurs de pression mesurées. L'expérience comprend deux parties : la colonne remplie de sable est d'abord saturée à l'eau sous un débit entrant constant. La porosité, supposée uniforme, est déterminée pour chaque essai par pesée des masses de sable et d'eau introduites dans la colonne. Le débit est ensuite varié afin de mieux saturer la colonne. Le régime permanent est maintenu pendant une certaine durée afin de mesurer la perméabilité à l'eau. Le coulis est ensuite injecté sous un débit entrant constant. Des détails supplémentaires sur l'instrumentation sont donnés dans l'annexe 10.4.

Identification de la constante de dispersion longitudinale a_L

Le dispositif employé est le même que pour l'identification du taux de filtration λ (voir **F**ig.7-1), la procédure est légèrement plus complexe.

Comme pour l'ensemble des essais conduits sur colonne longue, l'expérience consiste en une injection

à débit constant de bas en haut. Le front de coulis de ciment se déplace dans la colonne et provoque le développement d'une zone de transition. Afin d'éviter toute interférence liée à une possible dépendance du facteur de dispersion à l'égard de la vitesse de déplacement globale, et afin de vérifier les conditions d'existence de la solution analytique exploitée pour le calcul de a_L ([90]), la vitesse d'injection est constante.

Lors de l'essai d'identification de a_L, une caméra CDD, équivalent numérique d'un boîtier photographique, est également connectée à l'ordinateur. Un programme automatique d'acquisition (LabView [73] avec outils spécifiques pour l'analyse d'images, ImacVision) permet une acquisition et une interprétation automatiques des photos prises de la colonne, ainsi qu'une exploitation immédiate pour la détermination des positions successives du front de coulis.

7.4 Identification du taux de filtration

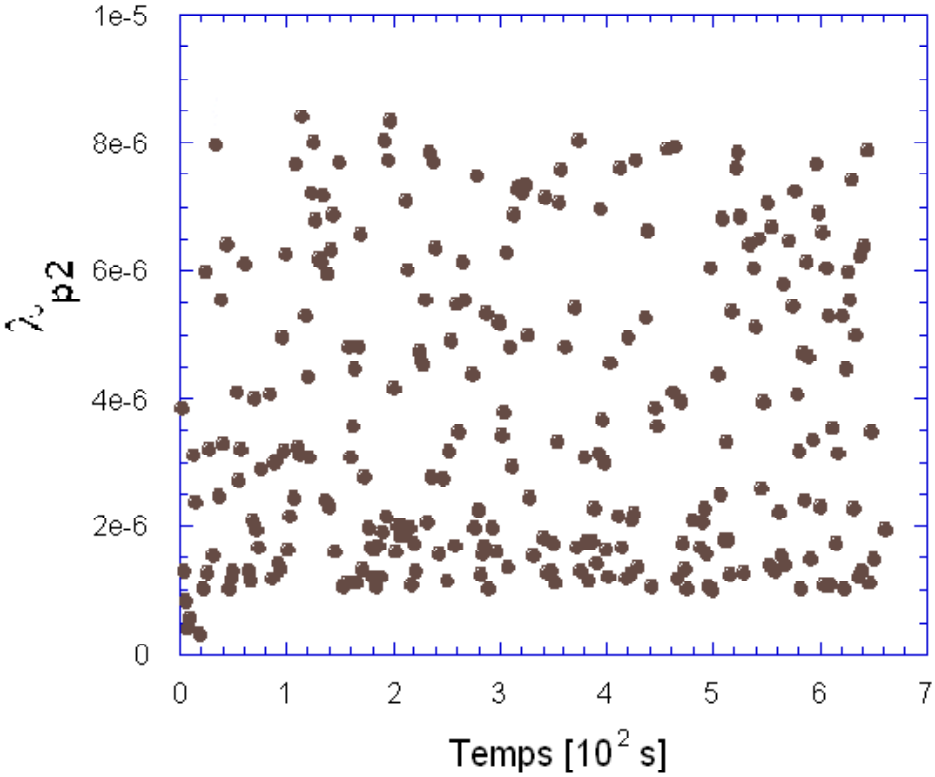
La filtration a été décelée lors d'essais de perméabilité entrepris au laboratoire (section 3.2.4). La procédure pour l'estimation du taux de dépôt initial a été développée dans la section 4.6.5. Le taux de dépôt intermédiaire λ_{p2} (Eqn.4.50) est illustré sur la figure Fig.7-2 pour un essai d'injection représentatif sur colonne unidimensionnelle. Ainsi qu'il apparaît sur cette figure, les résultats sont relativement dispersés, et doivent être manipulés à l'aide de fonctions statistiques ([82]) pour faire ressortir les valeurs prépondérantes.

Les variations de $g(\rho_\sigma)$ de l'Eqn.4.49 sont limitées, $g(\rho_\sigma) \in [0.0036; 0.0046]$ lorsque $\rho_\sigma \in \left[0; \rho_{\sigma\,\max} = 300\ kg \cdot m^{-3}\right]$ et l'équation de Kozeny-Carman (Eqn.4.35) est employée, ce qui permet de réduire l'incertitude sur l'encadrement de λ_0. Les résultats pour l'ensemble de la série d'essais effectués sont donnés ci-dessous.

La notation ∇p_{ij} désigne le gradient de pression formé à partir des capteurs i et j : $\nabla p_{ij} = \frac{p_i - p_j}{l_{ij}}$, l_{ij} étant la distance entre les points i et j, $i, j = 1, 4$ (les positions et les numéros respectifs des capteurs sont reportés sur la figure Fig.10-74). Le tableau 7.1 donne les intervalles de valeurs estimées pour λ_{p2}^x à partir de l'Eqn.4.50, et l'estimation du taux de dépôt λ_0^x obtenue à partir de l'encadrement Eqn.4.51. La notation λ_{p2}^x signifie que l'intervalle donné comprend x ($x = 30,\ 95$) % de l'ensemble des valeurs estimées.

Tableau 7.1. Valeurs de λ estimées pour différents gradients de pression pris le long de la colonne.

gradient	$\langle\lambda_{p2}\rangle$	λ_{p2}^{30}	λ_{p2}^{95}
∇p_{12}	$4.882 \cdot 10^{-7}$	$\left[1.5 \cdot 10^{-6}; 4 \cdot 10^{-6}\right]$	$\left[0.5 \cdot 10^{-6}; 1 \cdot 10^{-5}\right]$
∇p_{23}	$3.309 \cdot 10^{-6}$	$\left[1.2 \cdot 10^{-6}; 3.2 \cdot 10^{-6}\right]$	$\left[0.5 \cdot 10^{-6}; 9 \cdot 10^{-6}\right]$
∇p_{34}	$3.343 \cdot 10^{-6}$	$\left[0.8 \cdot 10^{-6}; 2 \cdot 10^{-6}\right]$	$\left[0.5 \cdot 10^{-6}; 7 \cdot 10^{-6}\right]$
∇p_{14}	$2.100 \cdot 10^{-6}$	$\left[1.5 \cdot 10^{-6}; 3.5 \cdot 10^{-6}\right]$	$\left[0.4 \cdot 10^{-6}; 7.6 \cdot 10^{-6}\right]$



Figure~7-2: Evolution de λ_{p2} $\left(\left[kg \cdot m^{-3} \cdot s^{-1}\right]^{-1}\right)$ en fonction du temps.

gradient	$\langle\lambda_0\rangle^{\min}$	$\left(\lambda_0^{30}\right)^{\min}$	$\left(\lambda_0^{95}\right)^{\min}$
∇p_{12}	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$\left[3.26 \cdot 10^{-4}; 8.7 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.08 \cdot 10^{-4}; 2.17 \cdot 10^{-3}\right]$
∇p_{23}	$7.19 \cdot 10^{-4}$	$\left[2.608 \cdot 10^{-4}; 6.95 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.08 \cdot 10^{-4}; 1.95 \cdot 10^{-3}\right]$
∇p_{34}	$7.26 \cdot 10^{-4}$	$\left[1.739 \cdot 10^{-4}; 4.34 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.08 \cdot 10^{-4}; 1.52 \cdot 10^{-3}\right]$
∇p_{14}	$4.56 \cdot 10^{-4}$	$\left[3.26 \cdot 10^{-4}; 7.61 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[8.7 \cdot 10^{-5}; 1.65 \cdot 10^{-3}\right]$

gradient	$\langle\lambda_0\rangle^{\max}$	$\left(\lambda_0^{30}\right)^{\max}$	$\left(\lambda_0^{95}\right)^{\max}$
∇p_{12}	$1.35 \cdot 10^{-4}$	$\left[4.16 \cdot 10^{-4}; 1.11 \cdot 10^{-3}\right]$	$\left[1.38 \cdot 10^{-4}; 2.77 \cdot 10^{-4}\right]$
∇p_{23}	$9.19 \cdot 10^{-4}$	$\left[3.33 \cdot 10^{-4}; 8.88 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.38 \cdot 10^{-4}; 2.5 \cdot 10^{-3}\right]$
∇p_{34}	$9.28 \cdot 10^{-4}$	$\left[2.22 \cdot 10^{-4}; 5.55 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.38 \cdot 10^{-4}; 1.94 \cdot 10^{-3}\right]$
∇p_{14}	$5.83 \cdot 10^{-4}$	$\left[4.16 \cdot 10^{-4}; 9.72 \cdot 10^{-4}\right]$	$\left[1.1 \cdot 10^{-4}; 2.11 \cdot 10^{-3}\right]$

Les valeurs du taux de dépôt sont relativement élevées, ce qui atteste un processus d'adsorption non négligeable. Au cours de la simulation, λ_0 est pris égal à sa valeur minimale $\lambda_0 = 1.5 * 10^{-4}\ s^{-1}$, parce que les effets visqueux ont été incorporés dans l'estimation précédente; la variation de viscosité, supposée négligeable lors du calcul de λ_0, est présente au cours de la phase initiale de propagation et conduit à une légère surestimation du taux de dépôt.

7.5 Mesure du champ de concentration

Afin d'offrir une procédure de validation phénoménologique complète, outre les champs de pression et de déplacement, le champ de concentration numérique et le champ de concentration réel doivent pouvoir être confrontés lors d'un essai d'injection en laboratoire. Plusieurs recherches ont été conduites au laboratoire pour déterminer la concentration en coulis de ciment lors de sa propagation le long d'une colonne de sable saturé, et lors d'une injection en grandeur réelle ([3], [20], [34]). La détermination de la distribution de concentration en coulis permet en effet de caractériser précisément l'étendue de la zone de transition liée à la dispersion hydrodynamique, ainsi que des zones d'inhomogénéité éventuelles. En outre, la donnée du champ de concentration permet une étude locale de la filtration.

7.5.1 Mesures de résistivité électrique

Une première recherche s'est attachée à développer une méthode de mesure basée sur les variations de résistivité électrique du milieu poreux pendant l'injection ([34]). La résistivité de l'eau étant beaucoup plus importante que celle d'un coulis de microciment, la mesure de résistivité du milieu (au niveau d'une électrode) semble constituer une technique possible, simple et peu coûteuse, de suivre la propagation du

coulis, le passage du front étant associé à une chute de résistivité. Plusieurs séries de mesures ont été faites. Des mesures de résistivité sur le coulis seul ont d'abord été effectuées. Le rapport $\frac{C}{E} \in [0, 0.5]$ a été varié, dans le but de déterminer une relation entre la concentration en coulis et la résistivité, et l'évolution de la résistivité au cours du temps a été étudiée. La conductivité (inverse de la résistivité) mesurée varie très vite en fonction de $\frac{C}{E}$, dans un rapport allant de 10 ($\frac{C}{E}$ très faible) à 30 ($\frac{C}{E} = 0.33$) fois celle de l'eau (**F**ig.10-6**9** en annexe 10.3). La conductivité évolue dans le temps, car elle est liée aux réactions chimiques d'hydratation du ciment : elle augmente dans un premier temps, se stabilise avant de chuter. Dans l'intervalle de temps lié à la propagation, les valeurs de résistivité augmentent légèrement. Le défloculant, qui agit comme un retardateur de prise et d'hydratation, stabilise l'évolution temporelle, aussi les valeurs de résistivité peuvent être prises à peu près constantes au cours de la propagation.

Une deuxième série de mesures ont été faites sur un mélange homogène de sable saturé de coulis, en variant le rapport $\frac{C}{E}$ et la porosité. Le sable crée un effet d'écran. La conductivité est environ trois fois plus faible que dans le cas du coulis seul (**F**ig.10-70 en annexe 10.3). Mais cette baisse est généralisée, et l'ensemble des mesures prises en variant $\frac{C}{E}$ varie dans les mêmes proportions que pour le coulis seul. L'augmentation de la conductivité au passage du coulis reste détectable, et la présence de sable ne réduit pas l'augmentation relative de résistivité en fonction du rapport $\frac{C}{E}$.

La dernière, et la plus importante série d'essais, consiste en des mesures de résistivité lors de l'injection en colonne unidimensionnelle. La présence de coulis peut être localisée, même pour des rapports $\frac{C}{E}$ très faibles (**F**ig.10-71 en annexe 10.3). Par contre, la mesure de concentration ne peut pas être déduite de mesures de conductivité. Il n'apparaît pas de corrélation simple entre concentration en coulis et résistivité lors des essais d'injection en colonne.

Ces résultats sont liés au fait que la mesure de résistivité n'est pas suffisamment discriminatoire en fonction du rapport $\frac{C}{E}$. Dès qu'il y a du coulis, même en quantité infime, l'électrode réagit (aucun effet de seuil), ce qui signifie que ce n'est pas le passage du front, mais l'arrivée de la zone de transition située en avant du front (cf. **F**ig.7-3) qui est détectée. Cette remarque est corroborée par la confrontation des positions successives du front détectées par des mesures de résistivité, aux positions obtenues par analyse d'image (seconde technique étudiée). La mesure de résistivité donne des positions du front en avance sur celles obtenues par imagerie numérique (**F**ig.10-72 en annexe 10.3). La mesure de résistivité permet de détecter la présence ou l'absence de coulis, mais sans indiquer à quelles proportions relatives de coulis et d'eau interstitielle initialement présente correspond la valeur de résistivité obtenue. La présence de coulis détectée ne correspond pas à la position du front, mais à des valeurs de concentration inférieures. Cette technique ne permet pas d'étudier la dispersion du front de coulis, mais ne doit pas être complètement abandonnée, car elle peut s'avérer utile lors de l'étude de l'hydratation et de la solidification.

7.5.2 Absorption par rayonnement gamma

Une technique de détermination de la concentration a également été tentée par Azzar à partir de mesures de rayonnement gamma ([7]), mais les résultats obtenus ne sont pas satisfaisants. Le coulis étant essentiellement composé d'eau, son coefficient d'absorption est proche de celui de l'eau, ce qui empêche d'obtenir des résultats de concentration. En réalité, une telle méthode, qui repose sur la donnée des coefficients d'adsorption des différentes constituants et la mesure des épaisseurs respectives des phases traversées par le rayonnement gamma, n'est pas exploitable pour des fluides miscibles. Lorsque les constituants sont miscibles, il est impossible de distinguer le volume réel occupé par l'eau du volume réel occupé par le coulis, car il existe une zone de transition d'étendue variable sur laquelle eau et coulis coexistent pendant la propagation. Les coefficients d'adsorption peuvent être déterminés pour chaque constituant pris séparement, mais pour le mélange, l'épaisseur totale de la phase eau traversée par le rayonnement gamma ne peut être distinguée de l'épaisseur totale de la phase coulis traversée par le rayonnement gamma.

7.5.3 Analyse d'images

L'analyse d'images a été retenue pour la détermination du front, car elle offre l'avantage de permettre le suivi des positions successives du front de concentration, avec un nombre élevé de mesures possibles au cours de l'essai, tout en assurant une précision suffisante pour notre étude ([3]). La précision peut en outre être améliorée selon la proximité de la camera à la colonne. Toutefois, quelle que soit la technique employée, il a été impossible de remonter à la valeur de la concentration, et seule la position du front, défini comme le gradient de concentration maximal, a pu être acquise lors des essais.

7.6 Essais de dispersion sur colonne unidimensionnelle

Un modèle mathématique et numérique de propagation d'un coulis miscible dans un milieu poreux saturé déformable a été développé. La question de l'adéquation de l'hypothèse de déplacements par fluides miscibles, pour les fluides particuliers considérés que sont le coulis de ciment et l'eau interstitielle, s'est trouvée posée lors de l'écriture du modèle. L'hypothèse de miscibilité entre le coulis de ciment et l'eau a été postulée sur la base d'observations préliminaires.

Dans ce chapitre, le mouvement du front de coulis lors de l'injection dans un milieu poreux saturé indéformable est étudié. Afin de renseigner le modèle, on cherche à identifier la constante de dispersion longitudinale a_L en milieu poreux figurant dans l'écriture du tenseur de dispersion (Eqn.4.36), par le suivi du front de coulis lors de l'injection d'une colonne de sable saturé.

La série d'essais entrepris se justifie également par le fait que la plupart des modèles ou des études sur les fluides miscibles ([42], [58]) se réfèrent à une vaste campagne d'essais entrepris par Pfankuch à l'Institut Français du Pétrole ([96]), les corrélations établies par Pfankuch sont ensuite employées pour fixer un ordre de grandeur du coefficient de dispersion hydrodynamique ([31], [58]). Une autre remarque porte sur la disparité des mesures de dispersion. Azzar ([7]) mesure la taille de la zone de transition comme indication qualitative de la dispersion, à un instant arbitraire de l'injection d'une colonne unidimensionnelle. Azzar diminue la vitesse d'injection lorsque le coulis arrive à mi-hauteur, afin de pouvoir mesurer l'épaisseur de la zone claire de façon approximative. L'injection est reprise après mesure. Ce type de mesure ne constitue en aucun cas une mesure de dispersion, une mesure appropriée de la dispersion hydrodynamique doit en effet s'effectuer sous conditions d'écoulement. De plus, la taille de la zone de transition ne constitue pas une caractéristique intrinsèque de la dispersion, elle ne cesse de croître au cours de l'injection, proportionnellement à la distance parcourue ([14]).

Outre que les procédures de caractérisation de la dispersion sont parfois discutables, les grandeurs qui sont censées influer sur la dispersion ne sont pas clairement établies ([30], [42], [96]). Les théories statistiques de dispersion conduisent toutes à l'équation d'advection-dispersion, mais diffèrent sur la forme du tenseur de dispersion ([104]). Il existe différentes expressions proposées pour le tenseur de dispersion ([13], [104]), et tout essai de dispersion doit s'apppuyer sur l'une de ces expressions pour conduire à des résultats tangibles. Aussi, la détermination de la constante de dispersion présente un intérêt théorique certain.

Dans l'expression du tenseur de dispersion donnée par Scheidegger ([103]) et Bear ([14]), a_L est postulé égal à une constante, et les essais expérimentaux tendent à prouver que a_L est une constante dans le cas de suspensions diluées ([14], [96]). D'autres modèles permettent de corréler le coefficient de dispersion au nombre de Reynolds basé sur la perméabilité intrinsèque k ([50]), en incluant également des coefficients qui indiquent le degré de mélange entre les fluides et dépendent de la non-uniformité du milieu si le milieu est isotrope. D'après Josselin de Jong ([30]), a_L est une propriété du milieu poreux, et doit donc être corrélée à des propriétés du milieu telles que les distributions de taille des grains ou des pores, et l'arrangement des grains. Plusieurs tentatives ont été faites afin de déterminer ces corrélations, mais aucun résultat concret n'a pu être obtenu jusqu'à présent.

Il a été expérimentalement mis en évidence ([96]) que pour des vitesses faibles, le mélange est gouverné par la diffusion moléculaire. Pour des vitesses plus importantes ($V_f \in \left[10^{-4}; 10^{-2}\right]\ m \cdot s^{-1}$), la dispersion hydrodynamique longitudinale D_L est nettement plus élevée, et la dépendance est approximativement linéaire par rapport à V_f (V_f désignant la composante de vitesse $\overline{\mathbf{V}_f^m}^{\alpha}$ suivant x), ce qui valide les modèles statistiques pour lesquels ([13]) :

$$D_L = D_{mol} + a_L V_f \tag{7.1}$$

avec D_{mol} le coefficient de diffusion moléculaire en milieu poreux. Le coefficient de dispersion pour le cas unidimensionnel est généralement corrélé à la vitesse du fluide dans les pores. La théorie de dispersion semble prédire correctement les facteurs de dispersion pour des vitesses faibles (diffusion moléculaire prédominante) ou des vitesses élevées (dispersion convective prédominante), mais il n'existe pas de théorie satisfaisante applicable à la zone intermédiaire sur laquelle la dispersion convective et la diffusion moléculaire ont une influence variable. A partir des données disponibles dans la littérature, la dispersion longitudinale semble être contrôlée par la diffusion pour des valeurs $\frac{V_f \delta}{D_0} < 0.01$, et par la convection pour des valeurs $\frac{V_f \delta}{D_0} > 1$ (D_0 est le coefficient de diffusion moléculaire réel, différent du coefficient de diffusion apparent en milieu poreux D_{mol}, δ est le diamètre poreux). Les expériences d'injection réalisées sont théoriquement dominées par la convection.

En laboratoire, la relation suivante a également été obtenue ([50], [104]) :

$$D_L = D_{mol} + a\,|\mathbf{V}_f|^{\alpha} \tag{7.2}$$

D_{mol} et a sont des constantes. L'exposant α est proche de l'unité.

La théorie statistique et le modèle de dispersion de Bear employé conduisent à une décomposition additive des contributions de diffusion moléculaire et de dispersion mécanique dans l'équation de transport Eqn.4.70. L'Eqn.7.1 peut être interprétée en supposant que la constante D_{mol} représente le mélange dû à la diffusion moléculaire, additionnelle par rapport à la dispersion, qui se produit également en l'absence d'écoulement. Mais une telle formulation amène naturellement à négliger la composante D_{mol} dans l'Eqn.7.1 car, s'il est admis que sans la diffusion moléculaire, la dispersion hydrodynamique n'a pas lieu ([42]), il est également vrai que le coefficient de diffusion moléculaire en milieu binaire est très faible pour la plupart des substances. Aussi, outre la confrontation à la formule théorique démontrée par Bachmat et Bear ([**9**]), le but est également d'établir l'existence d'une constante de dispersion dans le cas de l'injection d'un coulis de micro-ciment. L'obtention d'une valeur constante de la dispersion constitue à la fois une preuve de la miscibilité du coulis de ciment et de l'eau interstitielle initialement présente, et une validation du modèle particulier de fluides miscibles employé, en ce qui concerne les aspects de dispersion. Sinon l'hypothèse de miscibilité ou l'adéquation du modèle de Bear devront être mises en cause.

Un modèle unidimensionel est employé pour caractériser la dispersion du coulis dans l'espace interstitiel au cours de sa propagation, et sa dilution avec l'eau interstitielle initialement présente. La détermination de la constante de dispersion longitudinale en milieu poreux repose sur une solution analytique

existant sous des conditions initiales et aux limites particulières que l'on se propose de reproduire par l'expérience. L'emploi de cette solution analytique pour décrire la distribution du coulis lors de l'injection suppose que le fluide miscible considéré n'est soumis qu'à des effets convectifs et dispersifs au cours de sa propagation. En particulier, les couplages (filtration, consolidation) doivent être rendus négligeables lors de l'essai. La constante de dispersion du milieu poreux est déterminée de manière semi-analytique en résolvant la solution d'Ogata ([**9**0]) en fonction de a_L à partir des positions successives du front de coulis déterminées de manière expérimentale ([82]).

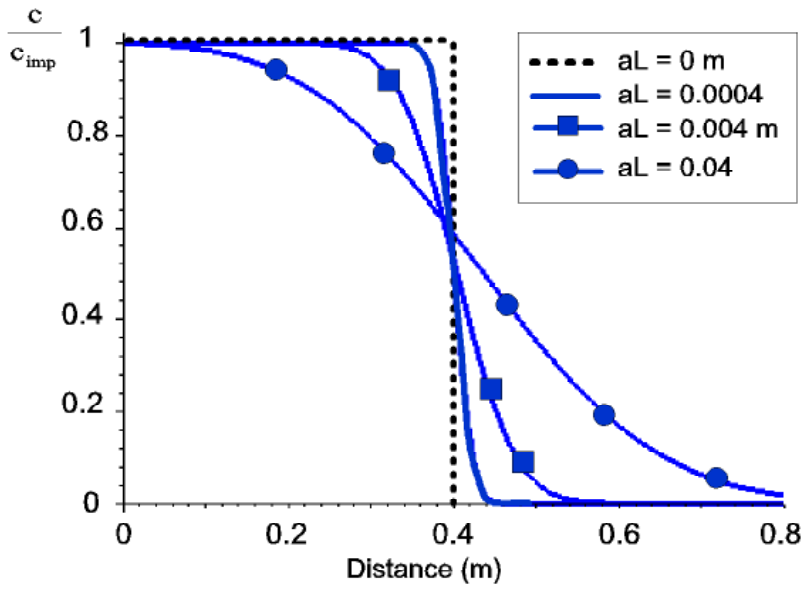
Aucun effet d'instabilité (viscous fingering) n'a été observé dans ces expériences, ce qui est conforme au fait que le fluide déplaçant est plus dense et plus visqueux que le fluide déplaçé ([64], [**9**6]).

7.6.1 Principe : solution analytique unidimensionnelle (Ogaka, 1961) et analyse d'images

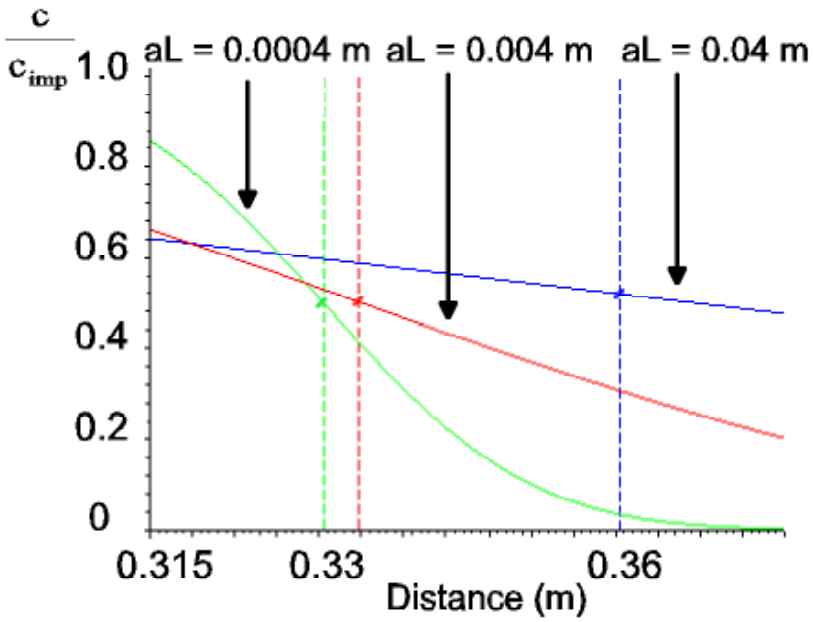
La valeur du coefficient de dispersion longitudinale a_L (Eqn.4.36) est intimement liée à la taille de la zone de transition. Plus a_L est grand, plus la dispersion est importante. La **F**ig.7-3 représente, dans un modèle unidimensionnel, la concentration relative d'un fluide injecté à vitesse constante dans le milieu en fonction de la distance, obtenue à partir d'une solution analytique en conditions unidimensionnelles ([**9**0]). En l'absence de dispersion ($a_L = 0$), la courbe est discontinue en fonction de la position dans le milieu : le fluide est présent, ou ne l'est pas. Il s'agit du cas immiscible, la concentration relative en traceur est discontinue. Le front est alors naturellement défini par l'endroit où se produit la discontinuité. En revanche, plus a_L est élevé, plus la zone de transition s'agrandit, et plus la courbe de concentration s'étale de part et d'autre, et de manière non symétrique, de la courbe de front sans dispersion. La concentration relative décroît continûment de 1 à 0 lorsque $a_L \neq 0$, avec un étalement du front de plus en plus marqué à mesure que a_L augmente.

Le front régulier peut être défini par l'endroit où le gradient de concentration est maximal. Plus a_L est grand, et plus le front est éloigné du front abrupt limite d'un modèle sans dispersion : c'est ce qu'illustre la **F**ig.7-4, qui constitue un agrandissement de la figure précédente, sur laquelle les lignes verticales indiquent les positions respectives des fronts. En outre, la valeur de concentration relative assoçiée au front croît avec la constante de dispersion longitudinale, étant d'environ 0.5 pour des valeurs de a_L faibles, et plus proche de 0.6 pour des valeurs de a_L de l'ordre du centimètre. $0.5 \preceq \frac{c}{c_{imp}} \preceq 0.6$ pour $a_L \in [0.0004; 0.04]\ m$.

La solution d'Advonin (ou d'Ogata), décrite dans le chapitre précédent (cf. section 6.4.1), est à nouveau considérée. L'équation de dispersion unidimensionnelle en milieu poreux indéformable est obtenue à partir de l'équation de transport Eqn.4.70 dérivée lors de l'écriture du modèle général de propagation, en supprimant tous les couplages (filtration nulle, aucun couplage hydro-mécanique) :



Figure~7-3: Profil de concentration en fonction de la valeur de la constante de dispersion longitudinale a_L.



Figure~7-4: Position du front en fonction de la valeur de la constante de dispersion a_L.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D_L \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - V_f \frac{\partial c}{\partial x} \tag{7.3}$$

avec $D_L = a_L \left| \overline{\mathbf{V}_f^m}^{\alpha} \right| = a_L V_f$, obtenu après division de l'équation de transport par la porosité, supposée constante. Afin d'alléger les notations, c désigne à présent la concentration du coulis dans la phase fluide. Le coefficient de dispersion D_L et V_f sont supposés constants.

Les conditions aux limites semi-infinies suivantes :

$$\begin{aligned} c(x,0) &= 0,\ x > 0 \\ c(0,t) &= c_{imp},\ t \geq 0 \\ c(\infty,t) &= 0,\ t \geq 0 \end{aligned}$$

avec c_{imp} la valeur de la concentration d'entrée, conduisent à la solution analytique suivante ([**9**0]) :

$$\frac{c}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erf} c \left\{ \frac{x - V_f t}{2\sqrt{V_f t a_L}} \right\} + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{x}{a_L}\right) \operatorname{erf} c \left\{ \frac{x + V_f t}{2\sqrt{V_f t a_L}} \right\} \tag{7.4}$$

erf c désigne la fonction erreur complémentaire définie par :

$$\operatorname{erf} c\,(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) dt \tag{7.5}$$

Il existe plusieurs méthodes employées pour la détermination du coefficient de dispersion. La plupart des méthodes passées en revue s'appuient sur la détermination de la courbe effluente; la concentration est mesurée à l'extrêmité de la colonne en fonction du temps et l'Eqn.7.4 est ensuite employée pour déterminer a_L ([50], [104]).

Ces méthodes ne sont pas utilisables en vue de l'application à un coulis de ciment, car il a été impossible de mettre au point une technique fiable de mesure de la concentration en coulis, les propriétés des deux solutions aqueuses étant trop proches.

Une nouvelle méthode est proposée qui s'appuie sur les techniques d'analyse d'images. Le calcul de la constante de dispersion longitudinale a_L reste basé sur la solution donnée en Eqn.7.4, dont l'emploi requière le développement d'un modèle unidimensionnel en laboratoire en se plaçant dans les conditions les plus proches possibles des conditions d'existence de la solution analytique. Toutefois la procédure d'identification de a_L diffère légèrement de la procédure classique.

Les couples (x_{front}, t_{front}) donnant les positions successives du front et les temps correspondants lors de la propagation du coulis sont fournis par traitement numérique d'images lors de l'expérience

et permettent de renseigner la solution analytique Eqn.7.4, tandis que l'amplitude de la vitesse V_f est connue et fixée (contrôlée au cours de l'essai par la mesure des débits d'entrée et de sortie). Les conditions d'existence (conditions aux limites, conditions initiales) de la solution analytique sont réunies lors de l'expérience. La viscosité entraîne une lègère augmentation de pression mais pas de variations de la vitesse car l'essai s'effectue à débit imposé. Les déformations du squelette solide sont négligeables (colonne indéformable), le fluide est quasi-incompressible et aucune filtration n'a été décelée au cours de la phase initiale de propagation (aucune montée en pression, voir **F**ig.10-78 en annexe 10.4), ce qui permet de garantir la conservation du débit le long de la colonne.

En se reportant à la solution d'Ogata Eqn.7.4, si $(x_{front}, t, V_f = cte)$ sont connus lorsque $\frac{c}{c_{imp}} = \left(\frac{c}{c_{imp}}\right)_{front}$ est égal à la concentration relative qui caractérise la position du front réel x_{front} à l'instant t_{front}, la seule inconnue est la constante de dispersion a_L qui peut être déterminée par une résolution numérique particulière. Eqn.7.4 est alors équivalente à la relation $\left(\frac{c}{c_{imp}}\right)_{front} = f(a_L)$, qui peut être inversée afin de remonter à a_L.

Puisque la valeur $\left(\frac{c}{c_{imp}}\right)_{front}$ ne peut pas être mesurée par imagerie numérique (section 7.5), le front est alors non plus associé à une valeur définie de concentration mais défini comme le point de gradient de concentration maximal. La résolution de l'Eqn.7.4 pour trouver a_L est ramenée à la résolution de l'équation suivante qui définit le front comme le point de gradient de concentration maximal :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c}{c_0}(x,t) = 0 \tag{7.6}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned} & \exp\left(\frac{x}{a_L}\right)\left[\frac{1}{2a_L^2}\operatorname{erf}c\left(\frac{x+V_f t}{2\sqrt{V_f t a_L}}\right) + \frac{\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{(x+V_f t)^2}{V_f t a_L}\right)}{a_L\sqrt{\pi V_f t a_L}}\left(\frac{x+V_f t}{4V_f t a_L} - 1\right)\right] \\ = & -\frac{1}{4}\frac{(x-V_f t)\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{(x-V_f t)^2}{V_f t a_L}\right)}{\sqrt{\pi}\,(V_f t a_L)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \tag{7.7}$$

(Il a été vérifié que $\frac{\partial}{\partial a_L}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{c}{c_0}(x,t)\right) \neq 0$)

Il apparaîtra également par la suite que les algorithmes d'analyse d'images sont mieux adaptés à une recherche de gradient maximal de concentration qu'à une recherche de valeur de concentration.

L'équation Eqn.7.7 est résolue par rapport à la seule inconnue a_L de manière approchée dans Maple ([82]) à l'aide de la commande $fsolve$ qui utilise des algorithmes de point fixe. La condition aux limites $c(\infty, t) = 0$ employée pour le calcul de la solution analytique est vérifiée de manière approchée sur une colonne de longueur finie, et il convient de considérer avec prudence les valeurs obtenues à mesure qu'on s'approche du bord supérieur de la colonne. Toutefois Scheidegger ([104]) montre que la déviation par

rapport à la solution liée à la non satisfaction de la condition $c(\infty, t) = 0$ est négligeable pour les ordres de grandeur usuels de la dispersion.

L'algorithme de détermination de a_L a été vérifié pour l'eau. Le calcul de a_L dans le cas de la saturation à l'eau doit théoriquement donner $a_L \sim 0$; $a_L \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ m est obtenu pour le mouvement d'un front abrupt ($x = V_f t$), soit une précision suffisante pour garantir la validité de la méthode d'identification.

7.6.2 Calcul de la constante de dispersion

Principe du traitement d'images

Une image digitale est composée d'entités carrées appelées pixels. Chaque pixel est codé sur un byte numérique (8 bits), et peut donc prendre des valeurs entre 0 (noir) et 255 (blanc). Les valeurs intermédiaires décrivent toute la palette des gris. L'image prise par la caméra est un rectangle, et comporte 256 niveaux possibles de gris. L'image brute est une courbe de niveaux de gris, décomposée en matrice de niveaux de gris. L'image se traduit mathématiquement une matrice d'entiers valant entre 0 et 255, l'élément M_{ij} reproduisant la luminosité (niveau de gris) du point (pixel) de coordonnées (i, j). Pour traiter l'image, des opérateurs sont appliqués à l'image qui sont des matrices (produit matriciel).

La convolution est une technique simple, rapide et largement utilisée de traitement d'images. Elle sert à éliminer les erreurs de l'image de manière globale, et est également à la base d'un des deux algorithmes employés pour la détermination du front. Elle consiste à remplacer la valeur de chaque pixel par une somme pondérée de la valeur de ses voisins. C'est donc un filtre linéaire. L'image ainsi obtenue peut être très proche ou très différente de l'image originale. L'image peut être uniformisée (filtre passe-bas), ou au contraire, les différences d'intensité peuvent être mises en relief (filtre passe-haut).

Algorithmes de détermination du front

Il reste ensuite à appliquer un algorithme de détermination du front. Le front est déterminé par prise de photos lors de l'injection. Deux procédés se sont imposés parmi ceux qui agissent au cours de l'expérience :

- Le seuil, qui consiste à transformer l'image en une image binaire : au-delà d'un certain seuil de luminosité (fixé par l'utilisateur), un point est blanc, et en-dessous, il est noir. A partir d'une image renforçée, une image binaire est obtenue. Lorsqu'une image en noir et blanc a été obtenue, la frontière entre les deux zones indique la position du front (**F**ig.10-80 en annexe 10.4); l'image est parcourue de haut en bas à la recherche du premier point noir. La moyenne des valeurs trouvées sur la largeur de la colonne est ensuite calculée. Une estimation de la justesse du résultat est l'écart-type de ces valeurs. Le front étant normalement perpendiculaire à la direction de l'écoulement

macroscopique, l'écart-type doit être faible.

- Le gradient consiste à appliquer un opérateur linéaire qui accentue les différences entre des points consécutifs dans la direction spécifiée (verticale). En revanche, les différences dans d'autres directions sont atténuées, voire gommées, ce qui permet de se débarrasser des bruits ou des reflets. Les zones de changement de luminosité sont alors plus marquées. Il s'agit d'une solution en apparence plus "physique", qui rejoint la notion de front de concentration défini comme la zone où le gradient de concentration est maximal. Le seuil marque en effet la différence de valeur entre deux points à partir de laquelle on passe d'un milieu à l'autre, il indique la position de la zone de transition. La valeur du seuil n'a donc rien à voir avec celle du seuil employé dans le premier algorithme. L'image résultante est blanche là où il y a beaucoup de variation de contraste, et noire là où les contrastes sont peu marqués. L'image obtenue est presque exclusivement noire, avec une bande blanche quelque part le long de la colonne représentant la zone de transition (zone de variation de contraste) (**F**ig.10-81 en annexe 10.4).

Les résultats de l'analyse d'images pour une expérience sont illustrés en annexe 10.4. La méthode du gradient paraît plus adaptée à l'injection à l'eau qu'à l'injection au coulis. L'injection au coulis est en revanche mieux traitée par l'algorithme de seuil. Cette différence s'explique par les reflets de certains grains de quartz : comme la différence de luminosité entre sable mouillé et coulis (injection au coulis) est plus faible que la différence de luminosité entre sable sec et sable mouillé (injection à l'eau), un seuil de gradient plus faible doit être employé lors de l'injection au coulis, ce qui laisse apparaître de petites hétérogénéités lumineuses.

Précision des résultats

La caméra employée possède une résolution de 768 points dans sa plus grande dimension. La précision théorique est connue. La colonne mesurant environ 80 cm, un point (pixel) représente environ 1 mm (soit le diamètre d'un grain). Par contre, la précision réelle reste à déterminer. Elle est fonction de la qualité optique de la caméra, de l'algorithme de résolution employé pour la détermination de la position du front, des variations lumineuses (hétérogénéités), de la vérification effective de l'hypothèse d'axisymétrie, de la précision de positionnement de la caméra. Une précision plus grande peut être obtenue en rapprochant la caméra et en ne considérant que la moitié inférieure de la colonne par exemple, mais il ne faut pas perdre de vue le fait que les essais doivent être réalisés à la même échelle (celle du V.E.R.) que celle du modèle développé. Si une précision trop fine est retenue, compte tenu de la granulométrie employée, le comportement discontinu de la matrice de grains va gêner les mesures faites dans le but de renseigner un modèle développé par une approche continue. Ce n'est pas le comportement à l'échelle du grain, mais à

l'échelle du milieu continu constitué du squelette solide et de la phase fluide, qui doit être étudié.

Une autre question cruciale qui se pose est celle de la possibilité d'un écoulement préférentiel le long des parois. Une étude expérimentale citée dans ([96]) montre que pour un rapport $\frac{d_p}{\emptyset} < 0.033$, avec d_p le diamètre des grains et $\emptyset$ le diamètre intérieur de la colonne, et un nombre de Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{d_p V_f \overline{\rho_f}^f}{\overline{\mu}^f} < 20$, la vitesse près des parois est pratiquement confondue avec la vitesse d'écoulement. Ce critère est vérifié car $\frac{d_p}{d}_{\max} = \frac{1 \cdot 10^{-3}}{7.5 \cdot 10^{-2}} = 0.0133$, et le nombre de Reynolds peut être estimé $\mathrm{Re} = \frac{d_p V_f \rho_f}{\mu_f} \approx \frac{10^{-3} \cdot 10^{-3} \cdot 10^3}{10^{-3}} \approx O(1)$. Il est donc supposé par la suite qu'il n'existe ps d'écoulement préférentiel le long de la paroi de la colonne.

7.6.3 Discussion des résultats

Les données enregistrées sont les suivantes :

- les valeurs de pression interstitielle à différentes hauteurs le long de la colonne, qui permettent de calculer les variations locales de perméabilité, et de s'assurer de l'absence de filtration (aucune montée en pression)

- la mesure de la la masse sortante au cours du temps donnant le débit Q en sortie en fonction du temps, et l'amplitude de la vitesse d'écoulement $V_f = \frac{Q}{nS}$ dans la colonne (S désigne l'aire de la section droite de la colonne)

- les photos prises au cours de l'expérience, traitées numériquement afin de déterminer les positions successives du front au cours du temps.

Les perméabilités locales sont obtenues par application de la loi de Darcy. Entre deux capteurs i et j, en posant $\nabla \overline{p}^f \simeq \frac{p_i - p_j}{d(i,j)}$, on a $k_{ij} = \overline{\mu}^f \frac{Q}{S} \frac{1}{\nabla \overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f g}$, où k_{ij} est la perméabilité intrinsèque entre les points i et j, p_i la pression au point i, $d(i,j)$ la distance entre les points i et j, $\overline{\rho_f}^f$ la masse volumique de la phase fluide.

L'évolution des pressions pour une injection à l'eau est illustrée sur la **F**ig.10-77 en annexe 10.4. Les capteurs de pression se déclenchent au fur et à mesure que l'eau arrive à leurs niveaux. La distribution des pressions en fonction du temps est représentée sur la **F**ig.10-78 en annexe 10.4 pour un essai type d'injection au coulis. Les données de pression sont utiles pour s'assurer qu'il n'y a pas de filtration, le gradient de pression augmente invariablement lorsque la filtration est présente ([56], [65]). Les pressions se stabilisent très vite après un changement de débit, et l'absence d'augmentation notable de pression indique que les effets de filtration sont négligeables. L'allure des pressions est identique pour les deux essais, la différence de pression sous un même régime hydraulique entre les injections au coulis et à l'eau (le débit employé est identique pour l'injection à l'eau et au coulis) peut être attribuée à la viscosité.

Calcul de porosité effective

Un calcul approximatif de porosité peut être obtenu à partir des positions successives occupées par le front de coulis. La porosité calculée n_v est une porosité effective donnée par :

$$n_v = \frac{\text{volume total déplacé}}{\text{distance parcourue par le front} \times S}$$

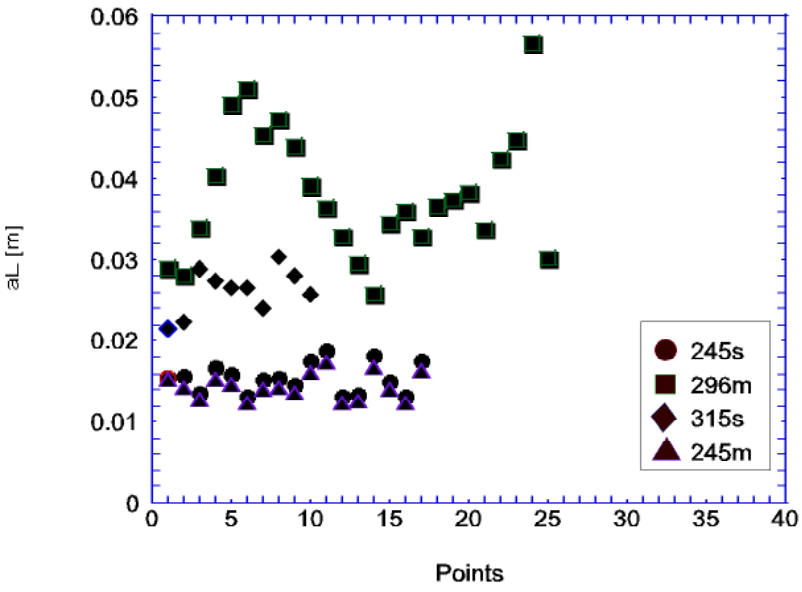
à un instant donné t. La valeur calculée n_v est comparée aux valeurs obtenues à partir des mesures massiques. Les valeurs de porosité calculées à partir des masses de sable et d'eau introduites sont à peu près égales au cours des essais. Les valeurs de porosité reportées sont des valeurs moyennes. Le volume total déplacé est obtenu à partir de la mesure de masse effluente, qui est convertie en volume. Le volume total d'écoulement est ensuite comparé au chemin total parcouru par le front de coulis. Le calcul de la porosité, différent de la porosité calculée à partir des masses respectives des constituants introduits, correspond en réalité à un calcul de porosité cinématique, ou porosité effective qui permet d'évaluer l'efficacité du balayage (efficacité de l'injection), l'efficacité de récupération étant définie par : Eff$= \frac{\text{porosité effective}}{\text{porosité calculée}} = \frac{n_v}{n}$.

Le tableau 7.2 reporte l'ensemble des valeurs de porosité initiale (mesurée lors de la saturation à l'eau initiale), de porosité effective et d'efficacité de récupération qui ont été obtenues.

Tableau 7.2. Valeurs de porosité initiale, de porosité effective et d'efficacité de récupération.

porosité mesurée	porosité effective	efficacité de récupération
0.42	0.432	103 %
0.40	0.41	102.5 %
0.42	0.393	93.57 %
0.38	0.36	94.73 %
0.39	0.41	105 %
0.39	0.40	102.5 %
0.40	0.42	105 %
0.40	0.41	102.5 %
0.41	0.43	104.8 %
0.40	0.43	107.5 %

Les valeurs très élevées de n_v calculées sont qualitatives, mais attestent toutefois une efficacité de récupération optimale, nettement supérieure à celle d'un déplacement par fluides immiscibles ([70], [83]).



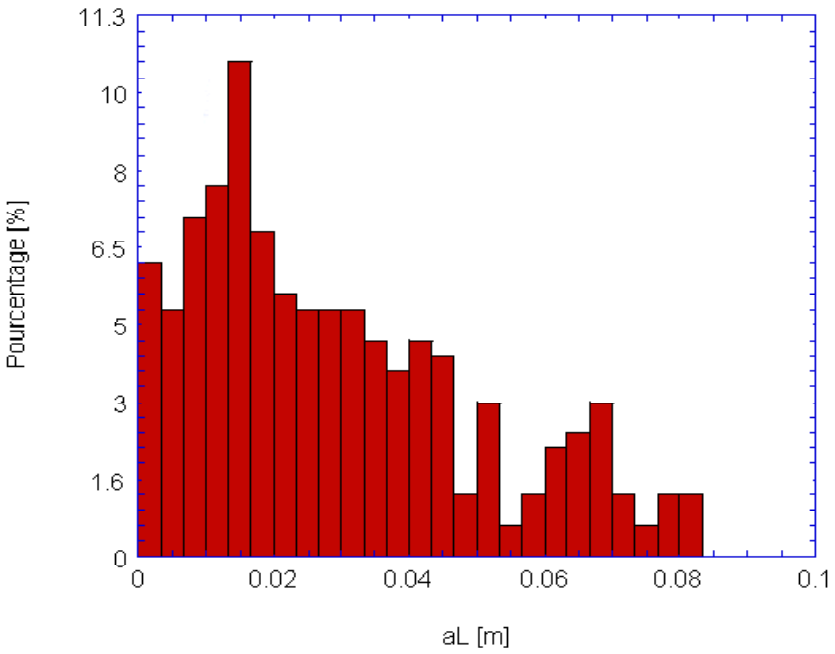
Figure~7-5: Variations typiques de a_L au cours d'un essai.

Tableau des valeurs trouvées pour a_L

Sur une expérience, une valeur de a_L est obtenue pour chaque couple (x, t). La valeur moyenne de a_L sur un essai est ensuite obtenue par une procédure aux moindres carrés ([28], [82]). La procédure est répétée sur l'ensemble des essais.

Un exemple de résultat d'essai est illustré sur la **F**ig.3-2 au chapitre 3, qui représente les positions successives du front en fonction du temps, issues du traitement des photos par LabView ([73]). La **F**ig.7-5 représente la variation de a_L sur un essai pour plusieurs expériences. La **F**ig.7-6 donne la répartition de l'ensemble des valeurs de a_L en pourcentage. Il apparaît sur cette figure que la dispersion des résultats est importante. Sur l'ensemble des valeurs mesurées, 50 % des valeurs sont inférieures à 3 cm, 70 % des valeurs sont inférieures à 4.5 cm, 90 % des valeurs sont inférieures à 6 cm.

Si la variation de a_L est traçée pour un essai, il apparaît généralement un palier pour lequel les valeurs de a_L obtenues sont proches d'un essai à l'autre (**F**ig.7-5). Le palier correspond généralement à l'endroit où les positions de front trouvées sont les plus précises, il est présent le plus souvent au milieu de l'expérience, i.e. à l'endroit où l'éclairage est le meilleur, et où les effets de bord (non satisfaction rigoureuse des conditions aux limites) se font le moins sentir. Le tableau 7.3 résume, pour chaque essai, la valeur moyenne du palier $\langle a_L \rangle_{palier}$ de a_L trouvée, la valeur moyenne $\langle a_L \rangle$ de a_L, les écarts-types



Figure~7-6: Répartition des valeurs de a_L.

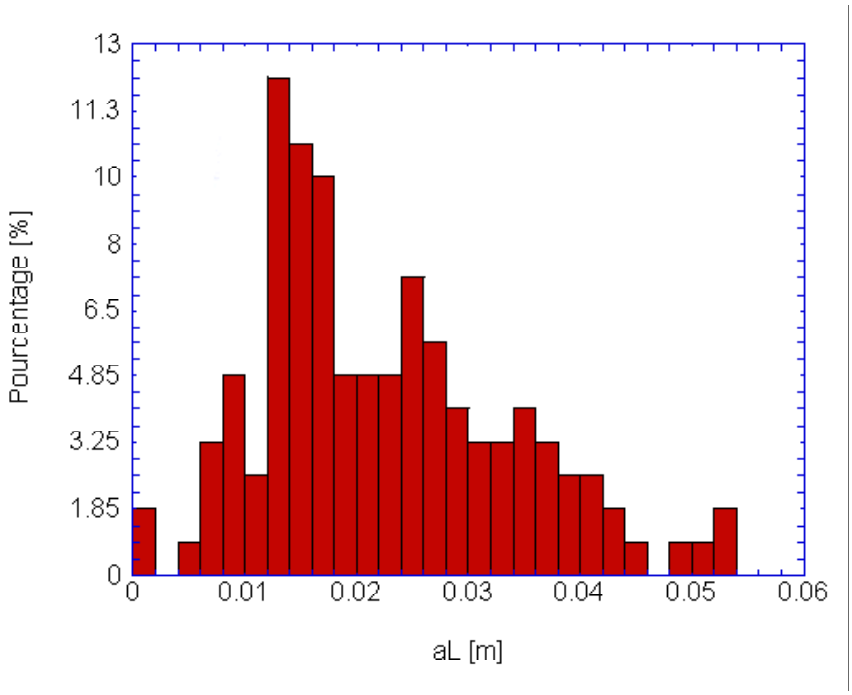
respectifs, en pourcentage de ces valeurs, la porosité n, le module de la vitesse de pore V_f, ainsi que la valeur de perméabilité intrinsèque k.

Tableau 7.3. Résultats des essais pour la détermination de la constante de dispersion.

$\langle a_L \rangle$ (m)	écart-type	$\langle a_L \rangle_{palier}$ (m)	écart-type	vitesse $(m \cdot s^{-1})$	perméabilité (m^2)	porosité
0.02350	0.019433	0.02900	0.003799	0.003990	1.2320×10^{-9}	0.429
0.02615	0.023046	0.02370	0.028701	0.002195	6.9800×10^{-10}	0.398
0.04376	0.033378	0.01060	0.004591	0.003216	6.8160×10^{-10}	0.420
0.02129	0.012175	0.01580	0.001405	0.002600	2.4760×10^{-10}	0.402
0.03393	0.019901	0.03330	0.002368	0.002800	5.4730×10^{-10}	0.408
0.02393	0.013176	0.02590	0.003837	0.001670	4.3620×10^{-10}	0.404
0.01417	0.004040	0.01540	0.001946	0.001024		0.398
0.04303	0.036969	0.01760	0.008680	0.003560	1.9810×10^{-10}	0.414
0.04139	0.007349	0.02310	0.003535	0.003430	3.7490×10^{-10}	0.382
0.05552	0.017843	0.04180	0.006241	0.006010	6.8330×10^{-10}	0.380
0.01165	0.004478	0.01560	0.003607	0.004255	4.9220×10^{-10}	0.376
0.01722	0.009563	0.02220	0.002255	0.003527	5.3600×10^{-10}	0.390
0.01690	0.010274	0.01490	0.006332	0.004992	1.3600×10^{-9}	0.388
0.03110	0.016229	0.02790	0.005180	0.005669	6.0130×10^{-10}	0.378
0.02153	0.019388	0.00969	0.006537	0.005435	4.0540×10^{-10}	0.396
0.04821	0.016800	0.04130	0.002344	0.005192	6.4000×10^{-10}	0.382
0.03022	0.018551	0.02360	0.004027	0.005193	6.4590×10^{-10}	0.378
0.02476	0.021697			0.003890	4.3510×10^{-10}	0.399
0.01548	0.009283	0.01430	0.0021247	0.004319	1.0000×10^{-9}	0.401
0.03289	0.022797	0.03910	0.0009624	0.004585	8.0900×10^{-10}	0.407
0.02851	0.004807	0.0390	0.0023116	0.003188	7.4170×10^{-10}	0.393

Les valeurs trouvées pour $\langle a_L \rangle$ varient entre 1.41 cm et 4.8 cm, avec des erreurs relatives assez faibles, de l'ordre de 15 % sur une même expérience. La valeur moyenne sur l'ensemble des valeurs de a_L (pour tous les couples de valeurs (x_{front}, t_{front})) s'élève à 2.92 cm, avec un écart-type de 2.81 cm (l'écart-type est défini par $\sum_i ((a_L)_i - \langle a_L \rangle)^2$). La moyenne des valeurs de paliers $\langle a_{L_{palier}} \rangle = 2.72$ cm, est obtenue avec Maple ([82]) par un algorithme aux moindres carrés, avec une erreur de 35 %. La moyenne obtenue pour les valeurs de $\langle a_L \rangle$ vaut 2.88 cm, avec une erreur de 41 %. La moyenne sur les paliers moyens $\langle a_{L_{palier}} \rangle$ vaut 2.48 cm.

La **F**ig.7-7 représente la distribution en pourcentage des valeurs de la constante de dispersion avec palier $a_{L_{palier}}$. La plage de variation de la constante de dispersion est notablement réduite : 50 % des valeurs sont inférieures à 2.2 cm. 70 % des valeurs sont inférieures à 3 cm, tandis 90 % des valeurs sont inférieures à 4 cm.

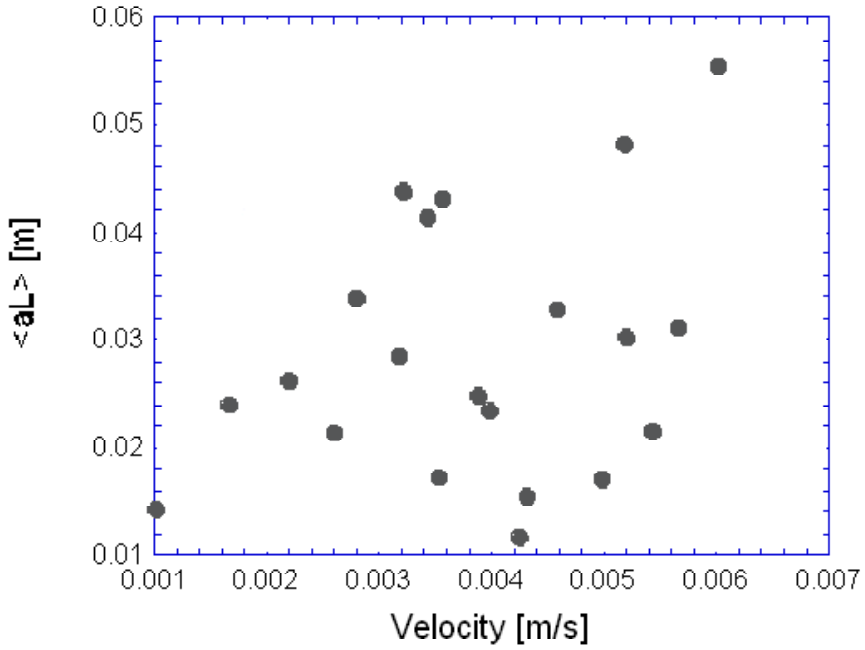


Figure~7-7: Répartition des valeurs de $a_{L_{palier}}$ avec palier.

Analyse statistique des résultats; répétabilité des essais; Régression linéaire : dépendance de a_L par rapport à V_f...

Les résultats obtenus font l'objet d'une analyse statistique succinte et d'une comparaison à des résultats existants. Les résultats trouvés dans la littérature portent sur des solutions diluées ([14], [50], [**9**6], [104]), lorsque les constituants injectés peuvent être traités comme des traceurs, et l'effet des variations de densité et de viscosité est négligeable sur l'allure de l'écoulement. Une des difficultés de cette étude est liée aux fluides miscibles particuliers employés, de viscosités et de densités différentes, la question de l'extension de l'expression du tenseur de dispersion ([13]) à des solutions non homogènes se trouve ainsi posée.

La **F**ig.7-8 représente la distribution des valeurs de $\langle a_L \rangle$ en fonction de la vitesse de pore V_f. Il apparaît une légère évolution en fonction de V_f, la constante de dispersion semble augmenter avec V_f pour les valeurs de vitesse les plus faibles et les plus élevées. Dans la zone intermédiaire de variation des vitesses, aucune tendance de variation ne peut être établie. Les résultats dispersion-porosité figurent sur la **F**ig.7-**9**. L'influence de la porosité n'a pu être véritablement évaluée car celle-ci reste à peu près constante lors de nos expériences. Théoriquement, la dispersion doit augmenter avec n car les effets d'inhomogénéité et de mélange sont vraisemblablement accrus ([**9**6]), mais il n'existe pas de corrélation



Figure~7-8: Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de V_f.

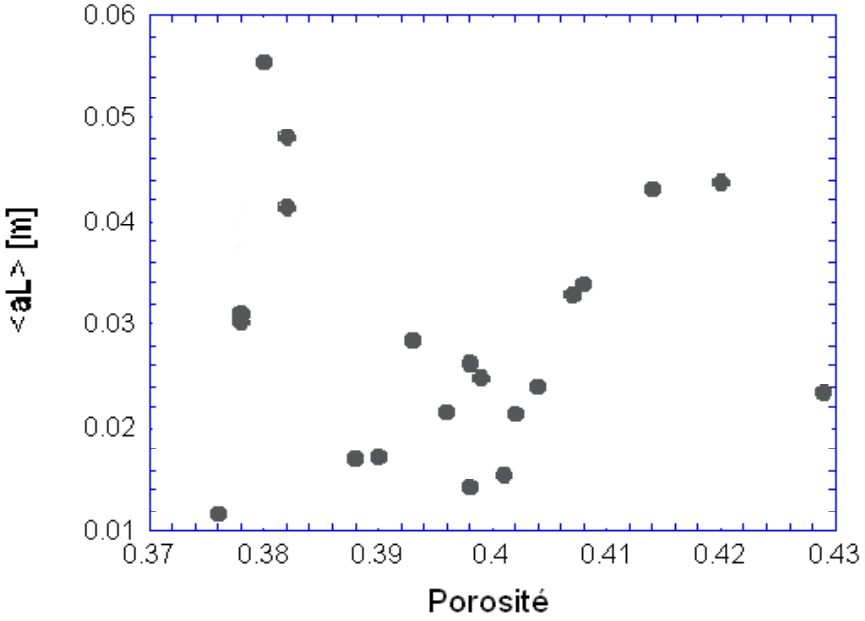
bien établie à l'heure actuelle. De même, la courbe $\langle a_L \rangle$ –perméabilité (**F**ig.7-10) ne fait apparaître aucune tendance significative d'évolution.

Par ailleurs les possibilités de corrélations linéaires ont été étudiées par une régression linéaire simple dans Maple ([82]), d'autres types de corrélations n'ont pas été envisagées.

Sur l'ensemble des valeurs moyennes $\langle a_L \rangle$ obtenues pour a_L, il apparaît une certaine corrélation (0.3 sur une échelle de 0 à 1) entre les valeurs de la constante de dispersion et la vitesse de pore, et les deux grandeurs $\langle a_L \rangle$ et V_f ont le même sens de variation. La corrélation linéaire est faible entre $\langle a_L \rangle$ et la valeur de perméabilité (0.1), et lorsque a_L croît, la perméabilité décroît. La corrélation linéaire est quasiment nulle entre $\langle a_L \rangle$ et la valeur de la porosité.

Sur l'ensemble des paliers moyens $\langle a_L \rangle_{palier}$ obtenus pour a_L, la corrélation entre $\langle a_L \rangle_{palier}$ et la vitesse est nulle. Il existe une certaine corrélation entre constante de dispersion et perméabilité (0.3), dont la croissance s'effectue dans le même sens que $\langle a_L \rangle_{palier}$. La corrélation entre $\langle a_L \rangle_{palier}$ et la porosité reste nulle.

D'autres types de corrélations sont possibles ([50]), qui restent à approfondir sur la base d'une campagne d'essais plus poussée, en faisant varier la porosité, n, la vitesse fluide V_f et la perméabilité k de manière plus significative, afin d'établir l'influence de la structure poreuse et des paramètres d'écoule-



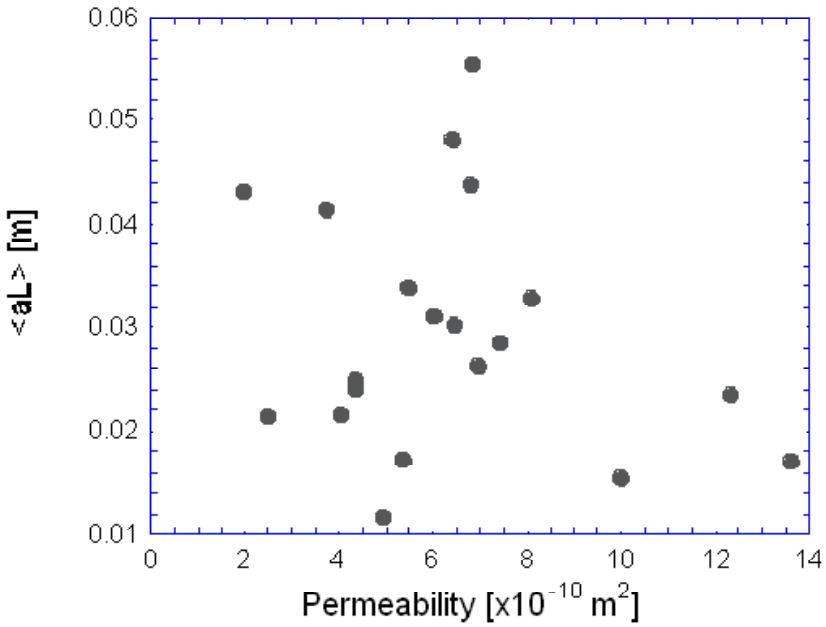
Figure~7-**9**: Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de la porosité.

ment. Les résultats sont en nombre insuffisant pour mener à bien une étude statistique concluante, mais il est intéressant de constater l'absence de corrélation entre les caractéristiques de la matrice poreuse (porosité, perméabilité) et la constante de dispersion a_L, pourtant supposée dépendre des propriétés du milieu poreux ([30]). Une possibilité de corrélation entre la constante de dispersion a_L et la vitesse fluide est à étudier.

Comparaison à des résultats existants

Très peu d'exemples de détermination de la constante de dispersion ont pu être trouvés dans la littérature ([14], [50], [**9**6]).

Une certain nombre d'études expérimentales ont été conduites afin d'étudier la relation entre la diffusion moléculaire et la dispersion mécanique. Pfannkuch ([**9**6]) en particulier reporte 175 points de données existantes. Pfannkuch ([**9**6]) donne des résultats de dispersion pour les sables $D_L \in [0.000485; 0.6345]$ $cm^2 \cdot s^{-1}$, avec une dispersion transversale réduite d'un facteur allant de 5 à 20. Comme Pfannkuch mesure une valeur de dispersion longitudinale D_L, pour pouvoir la comparer à nos résultats, elle est divisée par la vitesse V_f en supposant $D_L = a_L V_f$, qui conduit à l'encadrement suivant sur la constante de dispersion : $a_L \in \left[8.04 \cdot 10^{-4}; 1.63 \cdot 10^{-2}\right]$ m dans le régime d'écoulement dominé par la convection



Figure~7-10: Variation de $\langle a_L \rangle$ en fonction de la perméabilité.

mais lorsque la diffusion est quand même présente. Les résultats donnés par Pfannkuch ([**9**6]) ont été analysés de la même manière à l'aide des fonctions statistiques de Maple ([82]). La dispersion des résultats obtenus par Pfannkuch est comparable à celle de nos essais. Il est intéressant de constater que les valeurs de constante de dispersion a_L obtenues à partir des mesures de Pfannkuch, présentent une certaine corrélation avec les valeurs de vitesses V_f correspondantes lorsque la diffusion moléculaire est prédominante (facteur de corrélation de 0.6 sur une échelle allant de 0 à 1). La corrélation est nette pour les résultats obtenus en régime de superposition (les mélanges dûs à la diffusion moléculaire et à la convection sont du même ordre de grandeur et leurs effets sont additifs) : le facteur de corrélation trouvé s'élève à 0.85 sur une échelle allant de 0 à 1. Par contre, dans le régime de convection dominante (la convection et la diffusion moléculaire ne sont plus additives, mais il existe un effet de la diffusion moléculaire), la corrélation partielle obtenue dans nos essais entre a_L et V_f est quasiment nulle. La corrélation partielle obtenue entre les valeurs de $\langle a_L \rangle$ et les valeurs de la vitesse de pore V_f pourraient indiquer un effet de diffusion moléculaire plus important que prévu.

Bear ([14]) obtient, à partir de mesure de déviations standard de la courbe effluente de concentration, les valeurs suivantes : $a_L = 5.1 \cdot 10^{-4}\ m$ (essai unidimensionnel), $a_L = 6.22 \cdot 10^{-4}\ m$, $a_L = 8.3 \cdot 10^{-4}\ m$, $a_L = 9.3 \cdot 10^{-4}\ m$, $a_L = 6.5 \cdot 10^{-4}\ m$. La dispersion des résultats de Bear est très grande. La précision

des résultats donnés par Bear est inconnue.

Gupta et Greenkorn ([50]) reportent les résultats suivants pour la dispersion: $D_L \in [0.128; 2.158]$ $cm^2 \cdot \min^{-1}$. D'après l'expression du tenseur de dispersion hydrodynamique (Eqn.4.36) en unidimensionnel, $D_L = a_L V_f$, $a_L \in \left[1.28 \cdot 10^{-4}; 2.158 \cdot 10^{-3}\right]$ m, et la dispersion des résultats est importante.

Les valeurs obtenues dans la littérature sont plus faibles que les valeurs mesurées avec le coulis de ciment, mais les solutions étudiées par les autres auteurs sont nettement plus diluées, en particulier l'hypothèse de traceur peut être effectuée, l'introduction de la solution de modifie pas la densité de la phase fluide interstitielle. Un tel écart peut s'expliquer par l'inhomogénéité des deux fluides et une concentration d'entrée en fluide déplaçant plus élevée, qui implique une dispersion plus grande ([50]). La diffusion moléculaire est vraisemblablement amenée à jouer un plus grand rôle car le gradient de concentration est plus élevé.

Plusieurs considérations permettent d'expliquer la variabilité des résultats obtenus. En premier lieu, il faut invoquer les imprécisions et approximations successives liées à la procédure expérimentale (le débit varie légèrement lors de l'essai, les conditions aux limites ne sont pas parfaitement assurées), à la méthode de détermination du front, puis à l'algorithme de détermination de a_L. Par ailleurs, d'autres phénomènes peuvent influer sur la valeur mesurée. La saturation du milieu, quoique optimale, n'est pas parfaite, et l'effet des phénomènes capillaires sur la dispersion n'est pas connu. Le couplage possible entre dispersion et filtration doit également être envisagé. Des mécanismes additionnels tels que la filtration, le transfert de masse et la capture dans les pores de dimensions réduites ou occlus, peuvent retarder encore la marche du coulis, et conduire ainsi à une dispersion apparente ([42], [50]) plus élevée que la dispersion réelle. Les effets liés à la présence d'une microstructure particulière du milieu poreux, particulièrement appropriée pour le dépôt ou la capture des particules (aire surfacique variable), ont toutefois été minimisés par l'emploi d'un sable à granulométrie uniforme et non filtrant.

Les fluides étudiés sont de viscosité et de densité inégales. Selon la théorie statistique, seuls les concepts géométriques entrent en considération pour la dispersion ([104]). La dispersion est causée principalement par les interconnections des canaux d'écoulement dans le milieu poreux, et dans une moindre mesure par la diffusion moléculaire. Aussi des rapports de densité et de viscosité inégaux ne doivent pas affecter les prédictions de la théorie, excepté la diffusion moléculaire résiduelle à des taux d'écoulement très faibles .

La diffusion moléculaire a été négligée lors de l'identification de a_L, seule la dispersion a été considérée ([13], [104]). Néanmois, la diffusion moléculaire est le seul mécanisme qui va provoquer un mélange et une dispersion dans un champ d'écoulement fluctuant. Cette remarque rejoint celle de Dullien ([42]) selon laquelle Bear néglige la diffusion moléculaire dans son étude théorique puis expérimentale de la dispersion. Bear et Bachmat ([**9**]) obtiennent l'expression du flux dispersif en fonction de la constante

de dispersion longitudinale a_L et du champ d'écoulement, avant de valider l'expression du tenseur de dispersion Eqn.4.36 par des essais de dispersion sur des solutions diluées ([14]). Le modèle de Bear repose sur une conception particulière du milieu poreux, et sur un découpage arbitraire du flux de masse, qui impose que le flux dispersif résulte de la fluctuation de la vitesse microscopique par rapport à la vitesse macroscopique (Eqn.4.36). Le développement du terme de flux dispersif ne comprend pas la diffusion moléculaire. Par un processus de moyenne macroscopique, le flux dispersif s'exprime de manière analogue à la loi de Fick, mais la similitude entre les deux lois ne doit pas masquer le fait qu'elles sont obtenues à partir d'expressions microscopiques très différentes. Suivant la démarche adoptée par Bear ([13]), la diffusion moléculaire est ajoutée de manière artificielle au tenseur de dispersion Eqn.4.36 dans l'équation de transport Eqn.4.70 pour donner le tenseur global de dispersion hydrodynamique.

Dans le cas de solutions inhomogènes telles que la phase fluide interstitielle lors de l'injection d'un coulis de micro-ciment, le gradient de concentration au niveau du front de coulis est vraisemblablement plus élevé que pour l'étude de suspensions diluées. Bien que lors des essais réalisés en laboratoire, la plage de vitesses corresponde théoriquement au domaine pour lequel la convection est dominante, il est possible que l'effet de diffusion moléculaire, ou toute influence de l'écoulement induit par la viscosité ou la densité, soient incorporés de manière globale dans le calcul du coefficient de dispersion longitudinale. Or le développement théorique du terme de dispersion hydrodynamique exclut la prise en compte de l'effet de diffusion moléculaire, ce qui pourrait expliquer les fluctuations de la constante de dispersion a_L déterminée au cours des essais, et amène à envisager des développements additionnels pour l'expression du tenseur de dispersion, qui intègrent le coefficient de diffusion moléculaire de manière explicite et non additive par rapport au terme de dispersion donné par l'Eqn.4.36.

7.7 Conclusion

Les principaux paramètres constitutifs ont été déterminés expérimentalement. Le taux de filtration a été estimé, et la constante de dispersion longitudinale en milieu poreux saturé a été déterminée expérimentalement pour une suspension de coulis de microciment.

Le développement d'une zone de transition, lorsqu'une interface intialement abrupte entre deux fluides miscibles est déplaçée à partir de sa position initiale, a été expérimentalement mis en évidence. La misciblité entre l'eau et le coulis a été postulée lors de l'établissement du modèle, et les résultats des essais précédents montrent qu'il s'agit d'une hypothèse valide. La valeur du coefficient de dispersion mesuré doit être vue comme un ordre de grandeur. L'ordre de grandeur des valeurs obtenues pour a_L est plus élevé que les valeurs généralement affectées ([7], [58]), sur la base de corrélations existantes qui ne tiennent pas compte du type particulier de fluides en présence, à cette constante physique qui devrait

pourtant faire l'objet d'une détermination systématique ([**9**6]). Cette remarque justifie l'intérêt de la mesure de la constante de dispersion longitudinale.

Toutes les caractéristiques fluides étant connues (coefficient de filtration, propriétés de dispersion déterminés par des mesures indépendantes), des essais additionnels vont permettre de valider le modèle développé.

Chapitre 8

VALIDATION DU MODELE - DISCUSSION DES RESULTATS

8.1 Introduction

Les essais unidimensionnels ont été décrits au chapitre précédent, lors de l'identification du taux de filtration λ et de la constante de dispersion longitudinale a_L. Des essais unidimensionnels ont également été réalisés pour évaluer l'adéquation du modèle développé. La procédure pour ces essais est strictement identique aux essais d'identification, on se reportera donc au chapitre précédent pour la description des essais.

Cette partie concerne la validation phénoménologique du modèle par confrontation aux essais en laboratoire. Après que tous les paramètres nécessaires à la caractérisation du modèle aient été identifiés, des essais unidimensionnels supplémentaires sont entrepris, afin d'étudier le comportement fondamental de l'écoulement du coulis à travers une configuration géométrique simple, tout en validant les hypothèses inhérentes au modèle proposé. Les essais undimensionnels, réalisés avec le sable du Léman, pour lesquels la filtration est présente, sont d'abord confrontés aux résultats numériques. Ensuite, les essais unidimensionnels sans filtration, réalisés avec le sable de quartz, et qui comportent une acquisition de la position du front, permettent de comparer les évolutions de pression mesurées et calculées, ainsi que les positions successives du front et le champ de concentration numérique.

Si les essais en laboratoire, réalisables en grande quantité et sous des conditions idéales, sont utiles pour renseigner le modèle théorique, ce dernier n'est réellement validé que par confrontation avec des essais en grandeur réelle. Cependant, les résultats d'injections sur site sont rares et difficilement exploitables, en raison de l'hétérogénéité des massifs injectés, et de l'impossibilité de suivre la propagation

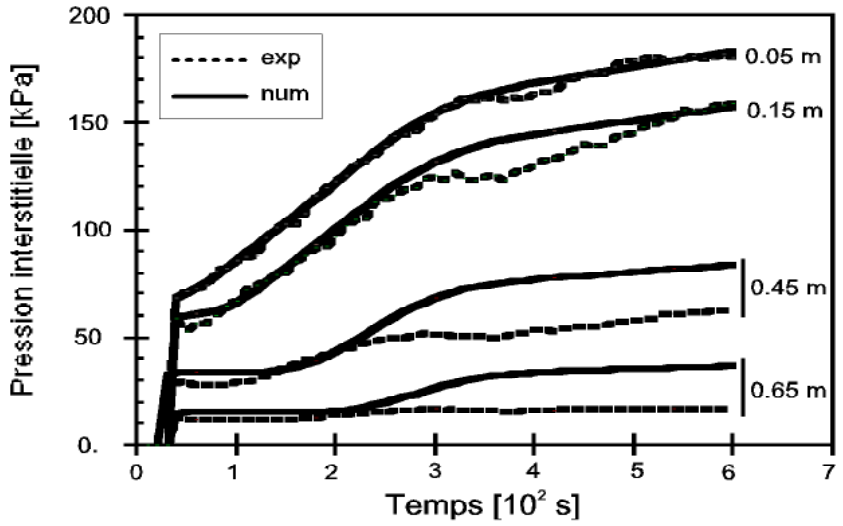
du coulis dans le sol pendant l'injection ([113]). En revanche, un essai en vraie grandeur (un plot d'injection), réalisé en laboratoire de manière à l'instrumenter de façon complète, tout en contrôlant les conditions aux limites hydrauliques et mécaniques, est extrêmement utile pour l'étude des mécanismes de propagation dans des conditions proches des conditions réelles, et permet une confrontation complète aux résultats du modèle numérique. L'essai en cuve présenté au cours de ce chapitre a permis d'atteindre ces objectifs. Le second modèle à analyser est un modèle tridimensionnel à symétrie cylindrique, pour lequel le coulis est injecté depuis une source linéique distribuée le long de l'axe du cylindre. Sous des hypothèses de symétrie du chargement (hydraulique, mécanique) et des propriétés du sol, l'injection en cuve peut être étudiée comme un problème d'écoulement radial bidimensionnel. Ce dernier modèle a permis d'examiner l'allure de l'écoulement fluide, la propagation du coulis et la déformation du massif durant l'injection à des fins de validation du modèle, pour une situation similaire à une opération réelle d'injection.

8.2 Essais unidimensionnels avec filtration

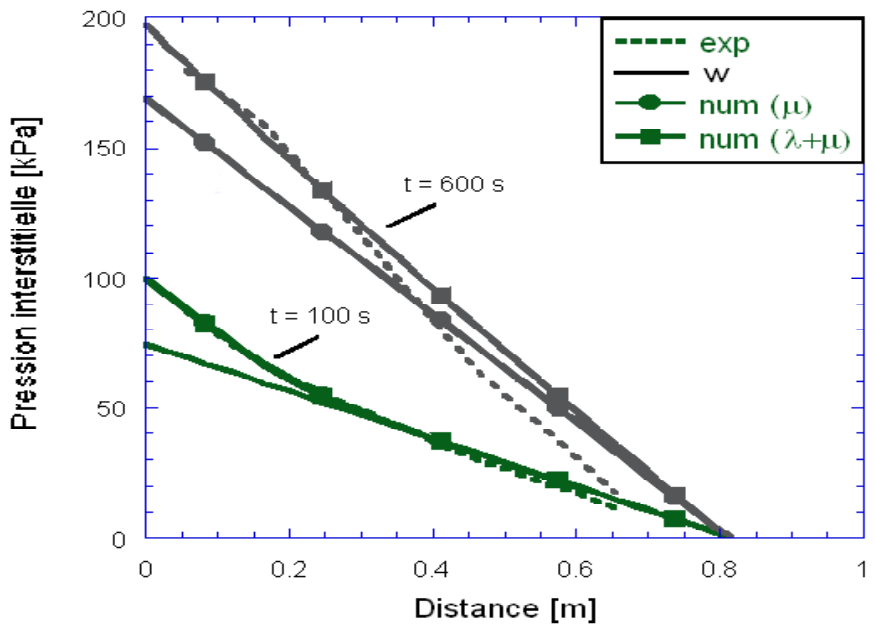
Les résultats d'un essai unidimensionnel de validation en laboratoire sont représentés sur la Fig.8-1, montrant l'évolution de la pression interstitielle suivant les positions des capteurs, lors d'une injection au coulis, tandis que sur la Fig.8-2 le profil de pression expérimental est reporté aux instants $t = 100\ s$ et $t = 600\ s$, avec les résultats numériques qui seront discutés par la suite.

Comme l'atteste la Fig.8-1, la charge hydraulique dans la colonne varie très vite après le début de l'injection. Sous l'effet d'un flux d'injection constant, la pression fluide augmente sans atteindre un état stationnaire. En se reportant aux essais sur petite colonne, lorsque la différence de pression fluide est maintenue constante aux extrêmités de l'échantillon, le taux d'écoulement décroît continûment, sans atteindre d'état stabilisé. Les deux types d'essais renvoient au même phénomène, et attestent que la filtration est un processus intrinsèquement transitoire. Il peut être constaté sur la Fig.8-1 que les valeurs de pression atteignent un état stable temporaire autour de $t = 300\ s$, correspondant à la sortie du coulis, qui est par ailleurs détectée lors de l'essai en observant l'apparence du mélange en sortie : l'eau effluente se trouble, révélant la présence de coulis dans la solution effluente.

La Fig.8-2 montre la croissance de pression dans l'échantillon, tandis qu'un débit d'injection constant est maintenu. A $t = 100\ s$, une partie de l'échantillon est encore saturée en eau interstitielle, et le profil de pression est séparé en deux régions bien distinctes. La région au voisinage du point d'injection subit une augmentation de pression régulière, à un taux quasi-constant, tandis que le profil de pression d'eau initial règne encore dans l'autre partie de la colonne poreuse, à mesure que la distance radiale augmente. A $t = 600\ s$, l'ensemble du massif est rempli de coulis, et l'augmentation de pression est généralisée.



Figure~8-1: Evolution de la pression interstitielle d'après les positions des capteurs, résultats expérimentaux et modèle $(\lambda + \mu)$



Figure~8-2: Profils de pression à $t = 100\ s$ et $t = 600\ s$, résultats expérimentaux et numériques. Pour le modèle (w), le profil de pression est stationnaire.

8.2.1 Etude numérique et comparaison entre modèles numériques

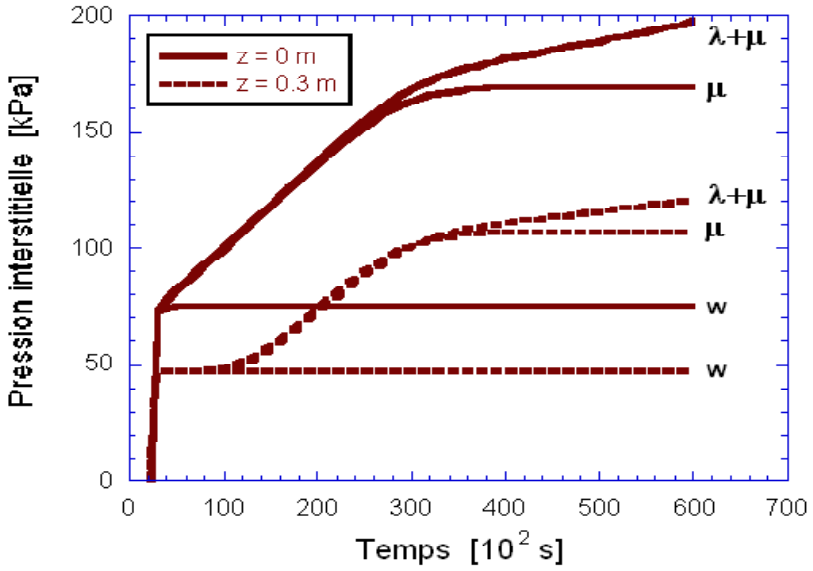
En ce qui concerne le modèle numérique, le colonne de longueur 0.82 m est modélisée par 40 éléments finis de longueur égale. Les propriétés du sol et du coulis employées dans l'analyse sont listées dans le Tableau 8.1. L'analyse est effectuée en conditions saturées, un taux d'injection constant est appliqué au point d'injection (débit entrant constant $Q \simeq 4.5 \cdot 10^{-3}\ gr \cdot s^{-1}$), tandis que le sommet de la colonne est maintenu à la pression atmosphérique.

Table 8.1. Propriétés du sable et de la phase fluide employées dans l'analyse.

module d'Young E	45 MPa
coefficient de Poisson ν	0.3
porosité initiale n_0	0.4
densité initiale du squelette $(\overline{\rho_s}^s)_0$	$2.66 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
perméabilité intrinsèque k	$2 \cdot 10^{-11}\ m^2$
dispersivité longitudinale a_L	$2 \cdot 10^{-2}\ m$
taux de filtration λ	$1.5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$
viscosité initiale du fluide (eau) $\overline{\mu^w}^f$	$1.1 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
viscosité du coulis pur $\overline{\mu^g}^f$	$2.5 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
densité initiale du fluide (eau) $\overline{\rho^w}^f$	$10^3\ kg \cdot m^{-3}$
densité du coulis $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$	$1.15 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
compressibilité fluide β_p	$3 \cdot 10^{-8}\ Pa^{-1}$
coefficient de concentration β_c	$0\ Pa^{-1}$
diffusion moléculaire D^{*gw}	$10^{-10}\ m^2 \cdot \sec^{-1}$

Les densité et viscosité du fluide sont prises linéaires par rapport à la concentration du coulis, d'après les Eqns.4.60 et 4.61 respectivement. Au cours des simulations numériques, un taux de filtration constant sera retenu. Les résultats des calculs numériques effectués sur une période de 30 min sont illustrés sur les Fig.8-2 à Fig.8-6. Il est intéressant de comparer les trois modèles théoriques suivants : modèle eau (modèle (w)) pour lequel la filtration est absente, la viscosité est constante et égale à la viscosité de l'eau; modèle visqueux ou modèle (μ) correspondant à une dépendance linéaire de la viscosité vis-à-vis de la concentration, le taux de filtration étant pris égal à zéro ($\lambda = 0$); le modèle le plus complexe suppose une dépendance linéaire de la viscosité à l'égard de la concentration, et un taux de dépôt constant $\lambda \neq 0$. La comparaison entre modèles est illustrée sur les Fig.8-2 à Fig.8-6.

D'après les Figs.8-2 et 8-3, le modèle eau est le plus simple, à une valeur de flux imposé correspond un champ de pression stationnaire, car pour un fluide quasiment incompressible, un régime d'écoulement constant est tout de suite atteint, la valeur de pression est proportionnelle à la valeur de flux sortant (loi



Figure~8-3: Evolution de la pression interstitielle pour différents modèles numériques.

de Darcy pour une fonction de perméabilité constante).

Pour le modèle visqueux, caractérisé par une variation linéaire de la viscosité par rapport à la concentration (Eqn.4.61), lorsque le flux sortant est maintenu à un niveau défini, les effets visqueux transitoires persistent tandis que le front de coulis se propage le long de la colonne. La courbe de pression sur la Fig.8-3 révèle un point d'inflexion au voisinage de $t = 300\ s$, cet instant coïncide avec l'arrivée du coulis au sommet de la colonne (d'après les observations expérimentales), montrant qu'avec le modèle (μ) la pression fluide atteint une asymptote lorsque l'ensemble de l'échantillon est injecté. En effet, la vitesse de Darcy (Eqn.4.34) reste constante, la relation

$$n\left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) = -\frac{k}{\overline{\mu}^f}\left(\nabla\overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f\mathbf{g}\right) = cte \tag{8.1}$$

est vérifiée partout dans le milieu poreux pour une expérence à débit d'injection constant, comme l'atteste la vitesse d'avançée constante du front de coulis numérique (voir section 8.2.2). La phase fluide interstitielle est homogène lorsque l'ensemble de l'échantillon est injecté : $\overline{\rho_f}^f(\mathbf{x},t) \approx \overline{\rho^g}^f(\mathbf{x},t) \approx cte$, ce qui implique $\overline{\mu_f}^f = \overline{\mu_f}^f\left(\overline{\rho^g}^f\right) \simeq cte$. De plus $k \simeq cte$ en l'absence de filtration, et lorsque les effets liés à la déformation du squelette solide (tels que la variation de porosité) sont négligeables (voir section 8.3).

En conséquence,

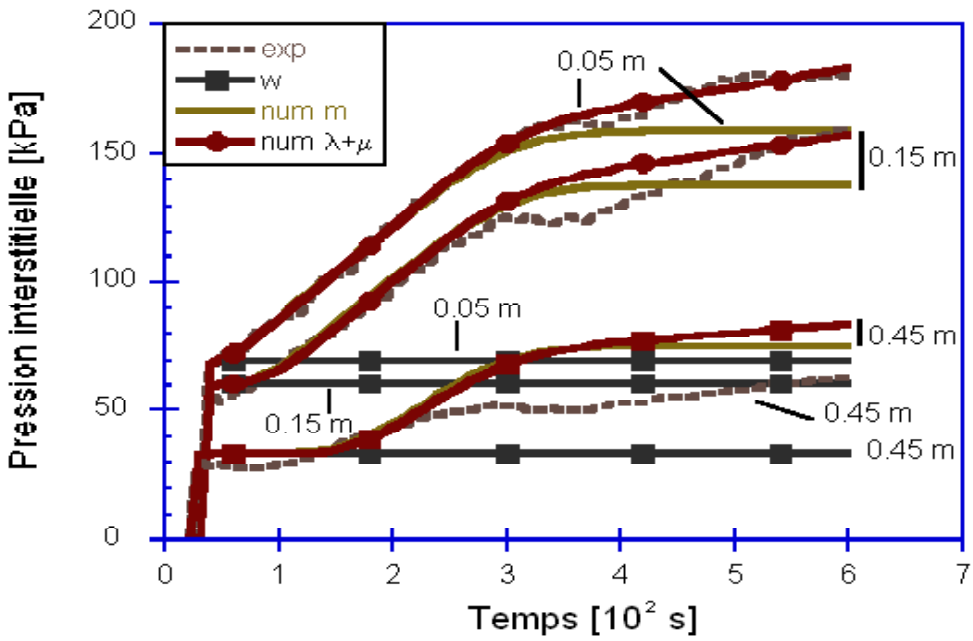
$$\left(\nabla\overline{p}^f - \overline{\rho_f}^f \mathbf{g}\right) \simeq \nabla\overline{p}^f = -\frac{\overline{\mu}^f}{k} n \left(\overline{\mathbf{V}_f^m}^f - \overline{\mathbf{V}_s^m}^s\right) \simeq cte \tag{8.2}$$

illustrant le fait que le gradient de pression est constant lorsque l'injection est complétée, en l'absence de filtration. Une fois la colonne remplie de coulis, la valeur de pression se stabilise, en accord avec un déplacement monophasique de coulis, de viscosité constante, dans un milieu unidimensionnel.

Depuis le début de l'essai jusqu'à ce que le coulis atteigne le sommet de la colonne, c'est-à-dire durant la phase de propagation initiale, le modèle (μ), le modèle $(\lambda + \mu)$ et les résultats expérimentaux sont confondus, comme l'indique la Fig.8-4, montrant que la filtration, si elle est présente, n'est pas significative par rapport aux effets visqueux au cours de la phase initiale de propagation. La confrontation entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle (μ) d'une part, et les résultats du modèle (μ) et du modèle $(\lambda + \mu)$ d'autre part, montre que l'effet de dépôt est trop faible au départ (lors de la progression du coulis au sein de la colonne) par rapport à la viscosité pour être conséquent, la variation de viscosité fluide est prédominante durant la phase de propagation, et les effets de viscosité, présents lors de l'essai, sont bien reproduits par le modèle théorique.

Le modèle (μ) conduit à une stabilisation des pressions, tandis que sur le modèle $(\lambda + \mu)$, aucun point d'inflexion n'est détectable. La confrontation des courbes de pression du modèle $(\lambda + \mu)$ et du modèle (μ) montre que les effets de viscosité ne sont plus conséquents dès que $t > 300\ s$, lorsque le coulis commence à être récupéré dans la masse effluente. Seule la filtration demeure pour induire des variations de pression. Pour le modèle $(\lambda + \mu)$, l'évolution est présente tant que le dépôt se produit, parce que la filtration est un processus intrinsèquement transitoire, qui induit un couplage entre la structure du milieu poreux et la dynamique de l'écoulement. Pour observer une stabilisation des pressions, λ doit être pris non constant, avec $\lambda \longrightarrow 0$.

La filtration devient le processus transitoire prédominant lorsque l'échantillon est complètement injecté de coulis, et la masse de dépôt cumulée atteint une valeur critique, alors que la variation de viscosité n'a plus d'effet. A cet égard, les effets visqueux et les effets de filtration sont complémentaires l'un de l'autre. Tandis que la viscosité se manifeste avec l'arrivée du coulis, la filtration nécessite que le dépôt induise une modification significative de la structure poreuse pour se faire sentir.



Figure~8-4: Comparaison des pressions interstitielles expérimentales et numériques.

8.2.2 Simulations numériques avec le modèle $(\lambda + \mu)$ et comparaison aux expériences

Pressions

Comme l'atteste la Fig.8-4, le modèle $(\lambda + \mu)$ offre la meilleure adéquation avec les résultats de laboratoire tout au long de l'essai, révélant l'intérêt d'une formulation de type convection-dispersion-filtration pour modéliser le processus de propagation du coulis. L'évolution du champ de pression est plus régulière lors des simulations que dans les expériences. L'asymptote temporaire sur la courbe de pression expérimentale est légèrement perceptible seulement avec le modèle $(\lambda + \mu)$ sous la forme d'un point d'inflexion. La même allure d'évolution des pressions a également été observée lors des essais en grandeur réelle effectués à l'aide des mêmes matériaux (section 8.4).

L'expérience peut être dissociée en deux parties. La première partie correspond à la phase de propagation du coulis, depuis le début de l'injection au coulis jusqu'à l'arrivée du coulis au sommet de la colonne. La seconde partie débute lorsque le coulis commence à être récupéré dans la masse effluente.

Au cours de la phase initiale de propagation du coulis $(0 - 300\ s)$, une excellente concordance entre les valeurs mesurées et les valeurs calculées peut être constatée, illustrant la capacité du modèle

développé à traduire les effets visqueux. L'hypothèse d'une dépendance linéaire de la viscosité vis-à-vis de la concentration conduit à un comportement prédictif remarquable du modèle, et atteste le couplage entre l'écoulement de la phase fluide et la propagation du coulis par l'intermédiaire des effets de viscosité, tant que le dépôt cumulé (densité de coulis filtré) n'a pas atteint un niveau critique. Par la suite, la seule source de variation de la pression réside dans les effets de dépôt de surface, et la concordance entre les simulations numériques et les expériences dépend de la position dans le massif.

La pression augmente constamment sur les courbes numériques, tandis que la pression connaît une stagnation temporaire sur les courbes expérimentales, avant de subir une augmentation constante, ce qui révèle une sorte d'effet de retard entre les deux évolutions de pression. Un tel effet de retard ne peut être attribué qu'à la filtration, puisque la viscosité se manifeste de concert avec l'avancée du front de propagation du coulis (effet instantané). Les effets de filtration ont pu être retardés par un mode de dépôt qui ne commence pas avec la propagation du coulis. L'asymptote temporaire sur les courbes de pression expérimentale peut également se référer à un mode de dépôt en plusieurs étapes - parmi lesquelles le mode de dépôt régulier, le mode d'occlusion peuvent être compliqués par le réentraînement et la redéposition des particules - ou à une évolution non-uniforme du taux de filtration : λ peut croître initialement, puis diminuer conformément à l'hypothèse faite sur le mode de dépôt ([29], [95]).

La Fig.8-1 offre une comparaison entre les distributions de pression expérimentale et numérique (modèle $(\lambda + \mu)$) le long de la colonne, d'après les positions des capteurs. Sur la Fig.8-1, le champ de pression numérique concorde bien avec les résultats expérimentaux au voisinage de la colonne, les écarts s'accroissent à mesure que la distance au point d'injection augmente. Une explication possible est que le taux de dépôt λ ne soit pas uniforme le long de la colonne, et dépende des valeurs de concentration.

Le raisonnement physique est le suivant : si la valeur de $\overline{\rho^g}^f$ est faible, la solution fluide est une solution diluée, le transport des grains de ciment dans la phase fluide s'en trouve facilité (les grains sont plus distants les uns des autres, ainsi que des parois). Si la valeur de $\overline{\rho^g}^f$ est élevée, la solution de coulis est une solution concentrée, et les forces d'interaction entre particules, qui affectent fortement le taux de filtration, peuvent être très importantes. Au cours de la période initiale de propagation, $\rho_\sigma << 1$ et $\lambda << 1$ impliquent $\lambda\overline{\rho^g}^f << 1$ sur la majeure partie de l'échantillon, et durant cette période le modèle numérique pour lequel $\lambda = cte$ ne montre aucun écart significatif avec les expériences. Le dépôt peut être présent, mais suffisamment faible pour qu'un modèle de dépôt du premier ordre, $\lambda = cte$, garantisse une bonne concordance entre le modèle $(\lambda + \mu)$ et les valeurs expérimentales au cours de l'initiation de la filtration, tandis que le coulis progresse à l'intérieur de l'espace interstitiel. Ensuite, pendant que l'injection se poursuit, avec une hypothèse $\lambda = cte$, la quantité de dépôt croît constamment dans le modèle numérique, en particulier au voisinage de la base de la colonne (là où le squelette solide est en contact constant avec le coulis depuis le début de l'expérience d'injection). Cependant, il est raisonnable

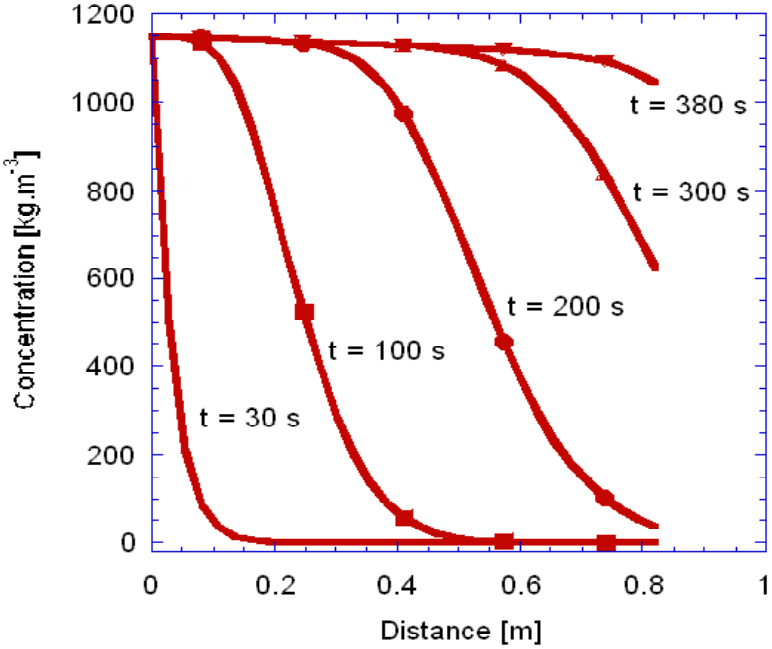
de considérer qu'un nombre fini de sites, dépendant de l'aire de la surface spécifique du milieu poreux, sont disponibles pour le dépôt. Lorsque ces sites sont tous saturés par le coulis filtré, les particules cessent d'être capturées et les valeurs de pression se stabilisent, ou bien un mode de dépôt plus critique peut débuter, avec une nouvelle loi d'évolution du dépôt. Il est raisonnable de penser que λ, qui dépend fortement de l'arrangement local des grains, n'est pas uniforme. Ces considérations militent en faveur d'une loi du type $\lambda = \lambda\left(\overline{\rho^g}^f, \rho_\sigma\right)$, qui est plus en accord avec le développement théorique du terme de filtration (cf. section 4.6.2), que la relation $\lambda = cte$ utilisée en première approximation dans les simulations numériques (essentiellement par manque de données de filtration).

Concentration

La figure Fig.8-5 illustre les profils de concentration de coulis à différents instants. Un étalement du front de concentration se produit à mesure que la perméation progresse, sous l'effet de la dilution du coulis au niveau du front de concentration (dispersion hydrodynamique). Aucune oscillation n'apparaît dans la solution, mais l'étalement du front de concentration ne doit pas être attribué à la dispersion numérique parce que le schéma SUPG se réduit au schéma de Galerkin pour le cas unidimensionnel et des valeurs de paramètres optimales ([59]) (voir solution d'Advonin en section 6.4.1). Comme l'indique la Fig.8-5, le profil de concentration dans ce cas révèle une vitesse d'avance constante, sous l'effet d'un débit d'injection constant.

Une vérification approximative est effectuée pour localiser la position du front de coulis en supposant pour simplifier que le coulis déplace complètement l'eau, sans dilution et sans filtration. La valeur du flux sortant $Q \simeq 4.5 \cdot 10^{-3}\ gr \cdot s^{-1}$ fournit $n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f = \frac{Q}{S} \simeq 1.17 \cdot 10^{-3}\ m \cdot s^{-1}$, l'injection au coulis débute à $t = 30$ s lors des expériences en laboratoire (temps fini mis par le coulis pour atteindre la base de la colonne), cet instant est donc pris comme origine dans les simulations numériques. En conséquence, à $t = 100\ s$, la position du front de coulis x est donnée par : $x = \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \times t = \frac{n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f}{n} \times t = 0.24\ m$. A $t = 300\ s$ la position approximative du front de coulis est : $x = \overline{\mathbf{V}_f^m}^f \times t = \frac{n\overline{\mathbf{V}_f^m}^f}{n} \times t = 0.92\ m$, montrant que le coulis a déjà saturé la colonne, comme l'atteste au cours de l'essai l'apparence de l'eau effluente. Cette observation empirique et les calculs simples ci-dessus offrent une bonne concordance avec les positions successives du front de coulis numérique correspondant à $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} \approx 0.5$ (où $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$ est la valeur de concentration imposée au niveau du point d'injection), ce qui permet de valider partiellement les résultats numériques obtenus pour la concentration, en l'absence de données expérimentales de concentration pour les essais unidimensionnels avec filtration. Le calcul de la concentration fait l'objet d'une validation appropriée dans le paragraphe suivant, à partir des positions successives du front déterminées par analyse d'image.

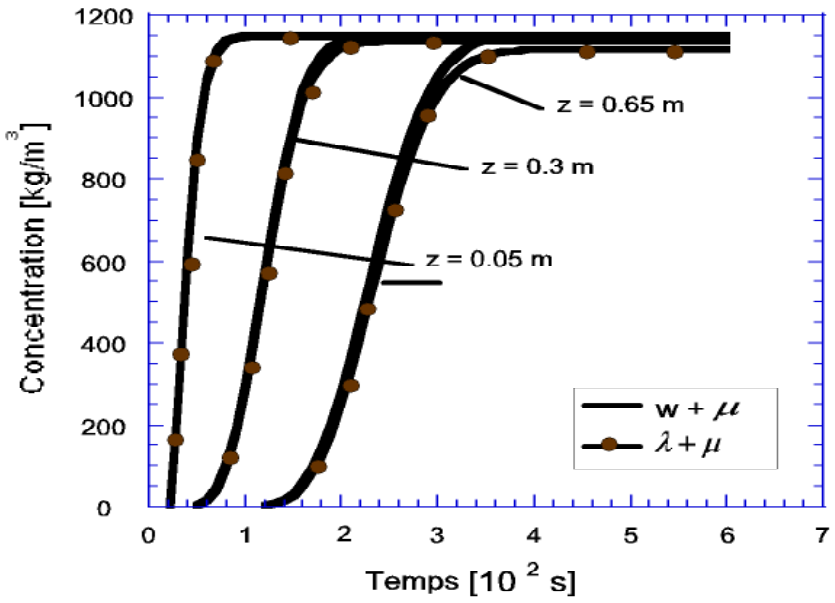
Les courbes de pression et de concentration sur les Fig.8-3 et Fig.8-5 révèlent le couplage entre l'évolution du champ de pression et la propagation du coulis. D'après la Fig.8-3, la pression au niveau



Figure~8-5: Evolution de la concentration

du point d'injection, et ailleurs dans le milieu lorsque le coulis est présent, augmente quasi-linéairement durant les 300 premières secondes, et la perte de charge dans le sable rempli de coulis (les positions successives du front sont données sur la Fig.8-5) est plus importante que dans le domaine encore saturé en eau. Le profil de pression dans l'espace interstitiel saturé en eau est proche du profil initial au début de l'injection. Le profil de pression dans l'échantillon injecté change constamment à mesure que le coulis déplace l'eau dans l'espace intestitiel, avec une croissance des pressions qui suit l'avancée du front, jusqu'à ce que le coulis atteigne le sommet de la colonne. Cette observation illustre le couplage entre le mouvement du front et l'augmentation linéaire de la pression par l'intermédiaire de la dépendance (linéaire dans le modèle numérique) de la viscosité à l'égard de la concentration.

Ainsi qu'il apparaît sur la Fig.8-4, les gradients de pression sont constants après que l'injection ait été complétée, l'asymptote présente sur toutes les courbes du modèle (μ), indique la présence du coulis au sommet de l'échantillon (à $t = 300$ s, le front de coulis a déjà atteint le sommet de l'échantillon sur la Fig.8-5). Tant que le champ de concentration continue d'évoluer dans l'échantillon, sous l'effet de la convection principalement dans la phase initiale de propagation, conjointement à des effets de dispersion qui produisent un étalement du front de concentration (modèle (μ) et modèle ($\lambda + \mu$)), et sous l'effet de la filtration et de l'apport continuel de coulis au cours de la seconde partie de l'essai (modèle ($\lambda + \mu$)), le champ de pression interstitielle continue d'évoluer.



Figure~8-6: Distribution des concentrations. Comparaison entre modèles numériques

Pour un taux de dépôt constant $\lambda = cte$, la valeur maximale de $\overline{\rho^g}^f$ diminue à mesure que la distance au point d'injection augmente, comme l'atteste la Fig.8-6. Si un taux de dépôt constant est maintenu, la solution demeure moins concentrée en coulis près du sommet de la colonne par rapport aux valeurs atteintes au voisinage du point d'injection, en dépit de l'avançée du coulis. A mesure que le front de coulis avance, $\frac{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{\max}}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} \leq 1$ loin du point d'injection, si $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{\max}$ est la valeur maximale atteinte par le coulis dans la colonne. Ce phénomène est dû au dépôt qui retient les particules au voisinage du point d'injection, là où les sites du squelette solide sont en contact constant avec la suspension de coulis depuis le début de l'injection, et la solution est plus diluée en aval de l'écoulement. Ce gradient de concentration contrôlé par la filtration se superpose au gradient de concentration induit par la convection pure. Cet effet s'accentue lorsque la longueur d'injection augmente (voir résultats de l'essai cuve en section 8.4).

8.3 Essais unidimensionnels : cas sans filtration

Des tests additionnels sont effectués à des fins de comparaison entre les positions expérimentales du front de coulis et les solutions numériques, obtenues à partir du modèle d'advection-dispersion-filtration, lorsque la filtration peut être négligée. Ces essais sont en tous points analogues à ceux décrits dans le

chapitre précédent (section 7.3), excepté qu'au lieu d'être exploitée pour le calcul de la constante de dispersion, l'analyse d'image sert uniquement à déterminer les positions successives du front au cours de la propagation du coulis.

Table 8.2. Propriétés du sable et de la phase fluide employées pour le cas sans filtration.

module d'Young E	$45\ MPa$
coefficient de Poisson ν	0.3
porosité initiale n_0	0.405
densité initiale du squelette $(\overline{\rho_s}^s)_0$	$2.66 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
perméabilité intrinsèque k	$5 \cdot 10^{-10}\ m^2$
dispersivité longitudinale a_L	$2 \cdot 10^{-2}\ m$
taux de filtration λ	$0\ s^{-1}$
viscosité initiale du fluide (eau)	$1.1 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
viscosité du coulis pur	$2.5 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
densité initiale du fluide (eau) $\overline{\rho^w}^f$	$10^3\ kg \cdot m^{-3}$
densité du coulis $\overline{\rho^g}^f$	$1.15 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
compressibilité fluide β_p	$3 \cdot 10^{-8}\ Pa^{-1}$
coefficient de concentration β_c	$0\ Pa^{-1}$
diffusion moléculaire D^{*gw}	$10^{-10}\ m^2 \cdot \sec^{-1}$

Tout en gardant à l'esprit le fait que la discrétisation employée n'est qu'une méthode approchée dont la précision est subordonnées à celles des méthodes numériques et des résultats de mesure (front expérimental employé pour caractériser a_L), la confrontation aux essais en colonne sans filtration doit valider le code d'un point de vue phénoménologique pour le calcul de la concentration. Les caractéristiques employées dans l'analyse sont données dans le Tableau 8.2. Les caractéristiques mécaniques sont obtenues à partir d'essais triaxiaux en laboratoire (annexe 10.4). Le domaine unidimensionnel est représenté par un maillage uniforme de 40 éléments.

Le débit d'injection s'élève à $Q = 4.64 \cdot 10^{-6}\ m^3 \cdot s^{-1}$.

Les résultats de la simulation sont représentés sur les Fig.8-7 à Fig.8-11.

Aucune mesure de déplacements n'est effectuée dans cet essai. Les déplacements attendus sont très faibles, car les déplacements sont empêchés aux deux extrêmités et sur les parois latérales (colonne indéformable). Les déplacements calculés, de l'ordre du μm, sont illustrés sur la Fig.8-7. Les déplacements calculés montrent que le couplage hydro-mécanique est négligeable, et justifient l'hypothèse arbitraire de milieu indéformable préalable à l'identification de a_L (Eqn.7.3). Le couplage avec les pressions est faible, et cesse dès que celles-ci sont stabilisées, par suite de la loi élastique linéaire employée. Un ordre de grandeur identique est obtenu pour les déplacements mesurés au cours de l'essai en grandeur réelle

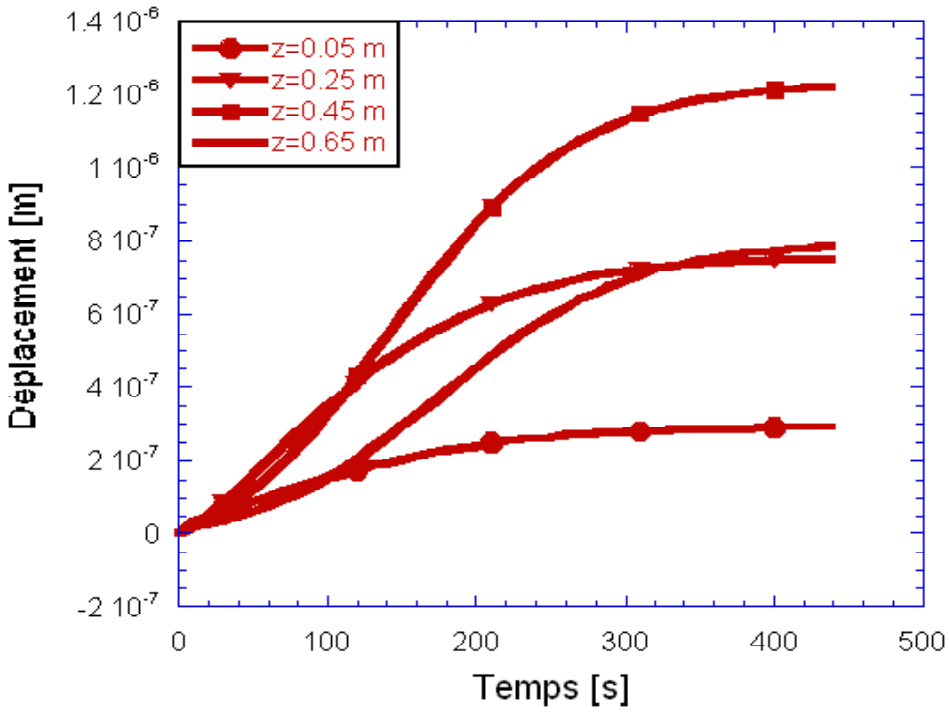
(section 8.4), attestant l'adéquation du modèle élastique linéaire pour les expériences en laboratoire qui ont été réalisées par imprégnation, sans montée en pression appréciable.

La confrontation entre courbes de pressions numériques et courbes de pressions expérimentales est donnée Fig.8-8. Les simulations numériques ont été réalisées avec une filtration nulle. L'excellente concordance sur les champs de pression expérimentale et numérique valide a posteriori cette hypothèse pour l'essai, hypothèse qu'il a été nécessaire d'admettre pour pouvoir exploiter la solution d'Ogata ([90]).

La confrontation entre courbes de concentration numériques et fronts expérimentaux est effectuée en employant $a_L = 2 \times 10^{-2}\ m$ (Fig.8-9), puis $a_L = 3 \times 10^{-2}\ m$ (Fig.8-10). La Fig.8-11 donne l'évolution du champ de concentration dans la colonne au cours de l'injection, pour trois valeurs différentes de la constante de dispersion. La confrontation est également satisfaisante avec $a_L = 2 \times 10^{-2}\ m$ et $a_L = 3 \times 10^{-2}\ m$, montrant que seul un ordre de grandeur de la dispersion peut être obtenu par les essais et validé par le modèle. A cet égard, il est intéressant de reporter une étude théorique et expérimentale faite par Scheidegger ([104]) qui recense un certain nombre d'expériences de dispersion. Après que le facteur de dispersion ait été calculé à partir des données de courbes effluentes, la valeur obtenue est employée pour calculer la valeur de concentration effluente, qui peut alors être comparée à la valeur mesurée. Il apparaît des déviations systématiques, difficilement explicables, entre les valeurs observées et les valeurs calculées, qui peuvent être considérées comme l'erreur standard dans les expériences de déplacement du type effectué, si elles sont comparées à l'équation de transport. En retour, la valeur de déviation doit être considérée comme l'erreur standard attendue si l'équation d'advection-dispersion est appliquée à un processus de déplacement par fluides miscibles.

La déviation systématique reportée par Scheidegger est de l'ordre de a_L, et n'est donc pas négligeable, aussi la confrontation entre fronts mesurés et fronts calculés à partir de l'équation de dispersion, après identification de a_L, est-elle essentiellement qualitative. Cette remarque en amène une autre. Des essais de détermination de la constante de dispersion longitudinale a_L doivent être indépendants de l'équation de dispersion pour valider l'existence d'une constante de dispersion et le choix d'une représentation par fluides miscibles. Ce constat milite en faveur d'un nouveau type d'identification de a_L, qui ne repose pas directement sur l'équation de dispersion, car sinon il est implicitement supposé que l'équation est valable pour décrire le mouvement du fluide. La méthode proposée au cours de la thèse est une première tentative dans ce sens.

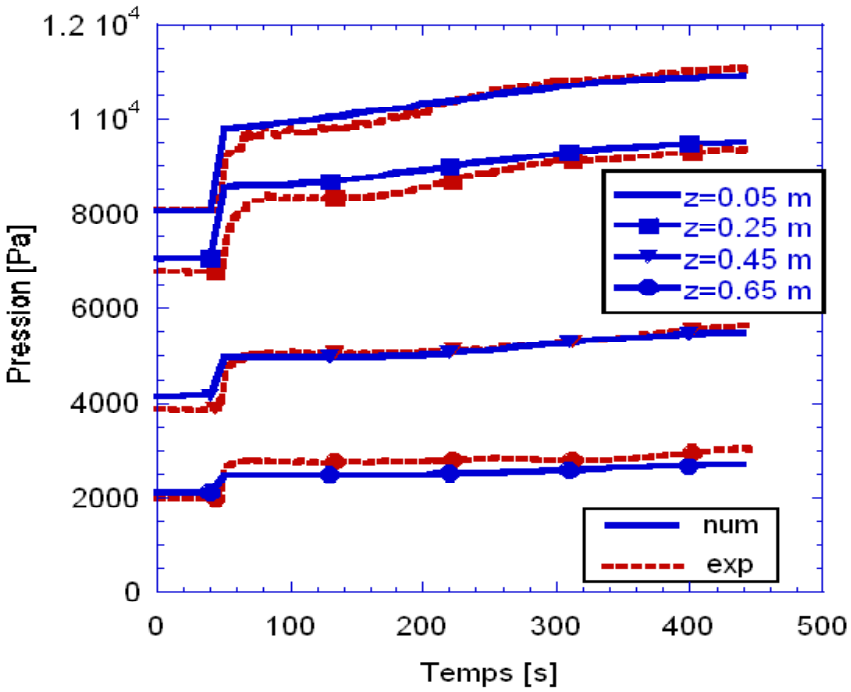
La solution numérique obtenue pour l'injection unidimensionnelle sans filtration a été comparée à la solution d'Advonin obtenue en employant $V_f = \frac{Q}{nS}$, Q désignant la valeur du débit imposé dans la colonne. Les conditions aux limites et initiales de la solution d'Advonin sont identiques à celles de l'essai en colonne, excepté la condition aux limites en $x = L$ relaxée lors de l'injection unidimensionnelle. La solution en concentration du modèle d'injection unidimensionnel est confondue avec la solution d'Ad-



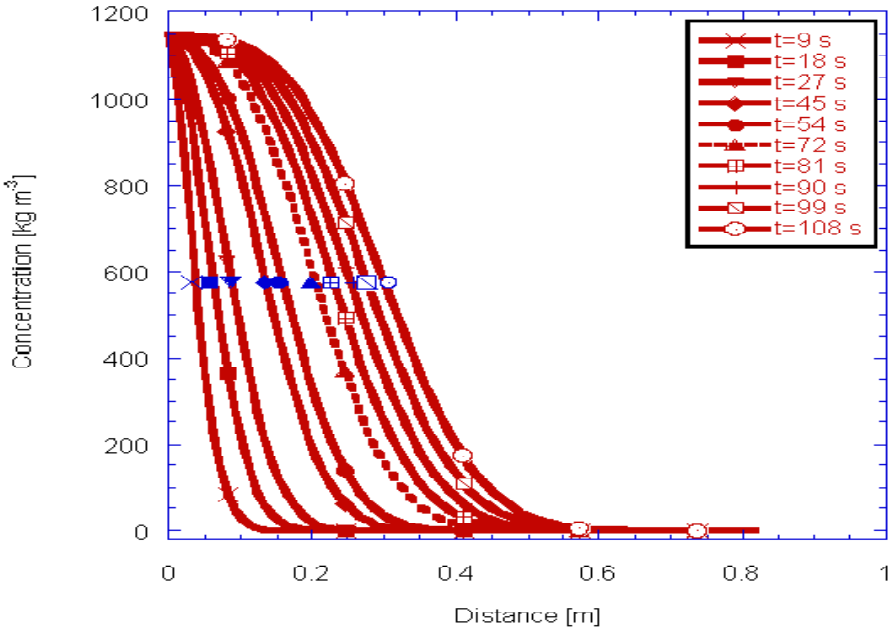
Figure~8-7: Distribution des déplacements le long de la colonne.

vonin jusqu'en $t = 200\ s.$, après l'effet de la condition aux limites relaxée en $x = L$ se fait sentir. La concordance entre le champ de concentration pour l'injection unidimensionnelle à débit imposé, et la solution d'Advonin, illustre le couplage unilatéral entre le champ de concentration et le champ de pression. En effet, sous débit imposé, la vitesse d'avance du front de coulis est quasiment constante tout au long de l'essai, l'augmentation de pression n'induit aucune variation de vitesse. A l'inverse, la variation de pression dépend fortement, par l'intermédiaire de l'évolution des propriétés fluides et du dépôt, du transport du coulis dans le milieu poreux saturé.

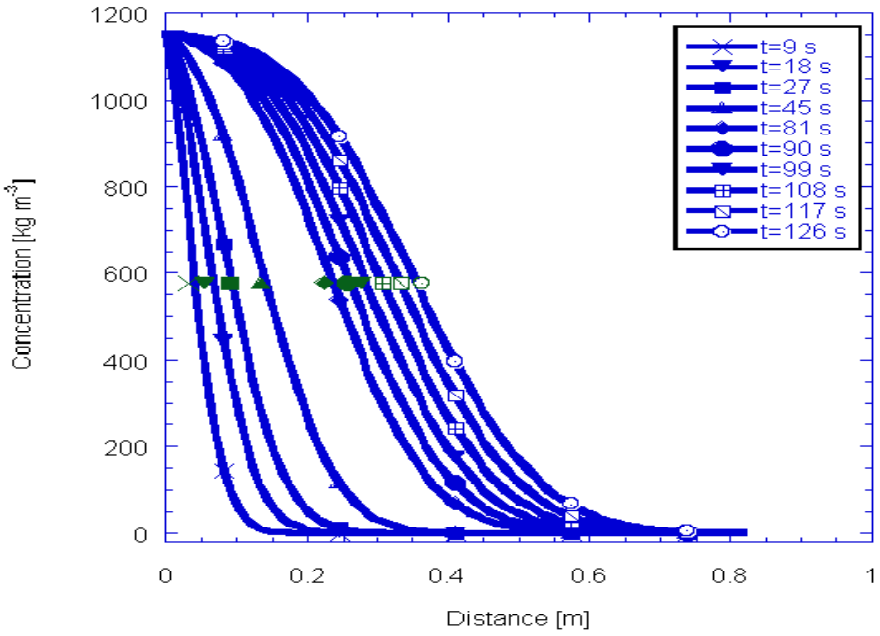
Les résultats obtenus à partir du modèle théorique concordent avec les résultats expérimentaux de pression et de concentration. Les résultats numériques obtenus pour les expériences d'injection unidimensionnelles tendent à valider, pour un cas simplifié et de façon partielle, le modèle mathématique et numérique général développé pour des situations physiques plus complexes, incluant les variations de propriétés rhéologiques du fluide, les effets de filtration et de couplage hydro-mécanique.



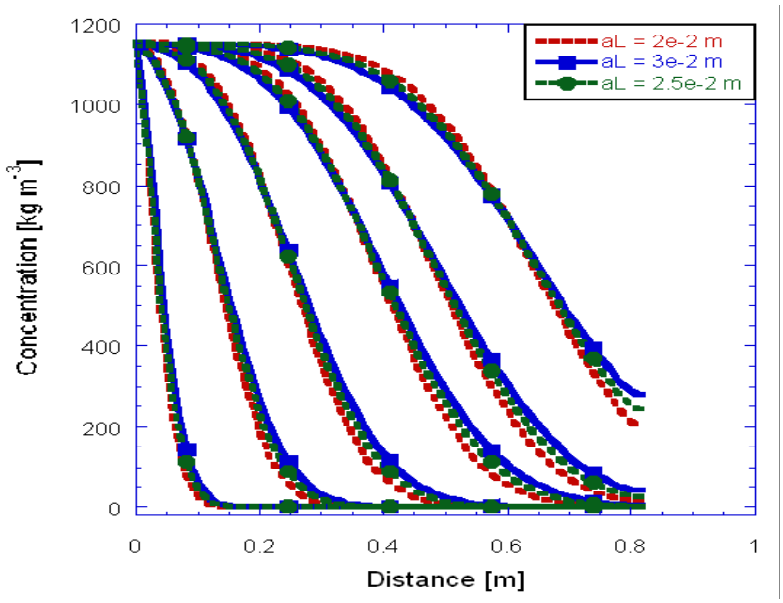
Figure~8-8: Distribution des pressions expérimentales et numériques.



Figure~8-9: Comparaison entre solution numérique ($a_L = 2 \cdot 10^{-2}\ m$) et résultats expérimentaux. Seules les positions expérimentales du front sont disponibles.



Figure~8-10: Comparaison entre solution numérique ($a_L = 3 \cdot 10^{-2}\ m$) et résultats expérimentaux. Seules les positions expérimentales du front sont disponibles.



Figure~8-11: Evolution de la concentration aux instants successifs $t = 9$, 45, 90, 144, 180, et 243 s.

8.4 Essai en grandeur réelle : essai en cuve

8.4.1 Introduction

Un modèle d'injection cylindrique tridimensionnel est étudié afin d'examiner la nature et l'allure de l'écoulement du coulis pour des situations similaires aux opérations réelles d'injection. La validation du modèle proposé est effectuée à l'aide d'un dispositif expérimental en grandeur réelle sous des conditions d'axisymétrie. Plusieurs quantités macroscopiques sont censées jouer un rôle important et doivent être plus particulièrement étudiées :

(i) l'étalement du front de coulis au cours de la propagation, comparé au déplacement du front abrupt sous l'effet de la convection seule;

(ii) l'effet de retard de la progression du coulis lié au dépôt en surface de la matrice solide;

(iii) l'efficacité de l'injection (donnée par la taille et la forme du bulbe après la solidification);

(iv) l'amplitude des déplacements mesurés au cours de l'injection;

(v) les valeurs limites atteintes par la pression interstitielle, spécialement au voisinage du tube d'injection (augmentation de pression localisée).

Les processus physiques reliés aux quantités précédentes sont :

(i) l'importance du transport convectif,

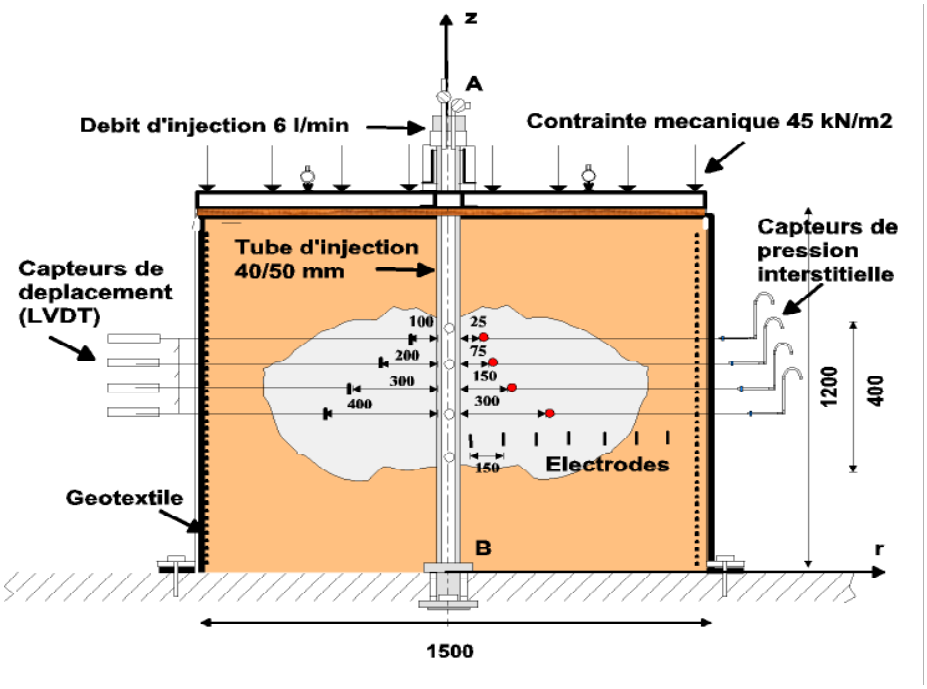
(ii) le rôle de la misciblité du coulis avec l'eau interstitielle initialement présente (dispersion hydromécanique);

(iii) les interactions physiques et chimiques, telles que les effets de filtration en surface de la matrice solide, induisant des variations de la structure poreuse;

(iv) le couplage entre la propagation du front de coulis et les variations des propriétés physiques du fluide interstitiel (densité et viscosité);

(v) le couplage hydromécanique

Chaque phénomène physique se manifeste par des réactions observables, qui doivent être présentes dans le modèle théorique. Chaque hypothèse du modèle de propagation sera discutée à la lumière des résultats des essais d'injection expérimentaux et numériques. Les différences constatées entre l'injection à l'eau et l'injection au coulis d'une part, et entre le modèle théorique et les résultats expérimentaux d'autre part, permettent de valider ou d'infirmer plusieurs hypothèses arbitraires du modèle postulées comme base de travail. L'exploitation de l'essai en grandeur réelle est également enrichie par les résultats des essais unidimensionnels. L'étude comparative des modèles expérimental et numérique contribue au développement itératif du modèle théorique.



Figure~8-12: Schéma d'ensemble de l'essai en cuve.

8.4.2 Description de l'essai en cuve cylindrique

La section droite du modèle est représentée sur la Fig.8-12, incluant les conditions de géométrie, de chargement et d'instrumentation. Le modèle consiste en une cuve cylindrique de diamètre intérieur 1.50 m et de hauteur 1.20 m. Un tube d'injection de longueur finie est positionné de manière à coïncider avec l'axe de révolution du modèle cylindrique.

Le modèle est rempli de sable du Léman (voir chapitre 7). Le milieu est saturé, la porosité initiale et la densité de sable sont mesurées avant le début de l'injection. Les caractéristiques du coulis et du sable employés sont données dans la Table 8.3. Les caractéristiques mécaniques sont celles obtenues après chargement mécanique (cycle de charges-décharges).

Le coulis est injecté dans le massif par l'intermédiaire de 40 (5 mm de diamètre intérieur) trous régulièrement espacés le long d'un tube d'injection de longueur 1.2 m perçé sur une longueur 0.4 m et de diamètre intérieur 40 mm, qui constitue une source d'injection continue. Le coulis d'injection est une suspension de ciment microfin (voir section 7.2.2).

Table 8.3. Propriétés du coulis et du sol employées

grandeur	valeur	méthode d'identification
module d'Young E	$45\ MPa$	injection à l'eau (cycles charge-décharge)
coefficient de Poisson ν	0.3	injection à l'eau (cycles charge-décharge)
porosité initiale n_0	0.33	saturation cuve (pesée et volume)
densité initiale du squelette $(\overline{\rho_s}^s)_0$	$2.66 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$	volume et masse (picnomètre en labo)
perméabilité intrinsèque k	$2 \cdot 10^{-11}\ m^2$	injection à l'eau (essai oedométrique)
dispersivité longitudinale a_L	$2 * 10^{-2}\ m$	analyse d'image (essai 1D)
dispersivité transverse a_T	$10^{-3}\ m$	$\frac{1}{20} a_L$ (litt.)
taux de filtration λ	$1.5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$	essai sur colonne 1D
viscosité initiale du fluide (eau) $\overline{\mu^w}^f$	$1.1 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$	litt.
viscosité du coulis pur $\overline{\mu^g}^f$	$2.5 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$	cône de **M**arsh
densité initiale du fluide (eau) $\overline{\rho^w}^f$	$10^3\ kg \cdot m^{-3}$	litt.
densité du coulis $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$	$1.15 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$	laboratoire
compressibilité fluide β_p	$3 \cdot 10^{-8}\ Pa^{-1}$	
coefficient de concentration β_c	$0\ Pa^{-1}$	
diffusion moléculaire D^{*gw}	$10^{-10}\ m^2 \cdot \sec^{-1}$	litt. (chemical handbook)

Les parois supérieure et inférieure du cylindre sont des frontières imperméables (lignes de courant), la paroi cylindrique verticale est une frontière équipotentielle prescrite. La distribution de pression hydrostatique est assurée par l'emploi d'un géotextile disposé tout autour de la circonférence du modèle.

La paroi supérieure subit un effort imposé $\mathbf{F} = (0, -80\ )\ kN$. Le chargement mécanique vise à simuler $3\ m$ de profondeur, et à prévenir un soulèvement trop important du massif. La paroi inférieure, les parois latérales sont rigides et sans frottement. Le flux entrant de coulis est maintenu durant 50 min à la valeur $Q = 6\ l \cdot \text{min}^{-1}$ par une pompe à membrane (asservissement en débit), et $\overline{\rho^g}^f = \left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp} = 1150\ kg \cdot m^{-3}$ le long du tube d'injection entre $z = 0.3\ m$ and $z = 0.7\ m$. L'instrumentation a pour but d'assurer le suivi des paramètres d'injection (pression d'injection, débit d'injection), le contrôle du chargement de surface imposé et la mesure du déplacement de surface, ainsi que les mesures des pressions interstitielle et des déplacements dans le massif (le long d'une section droite). La détection du passage du coulis a également été tentée.

8.4.3 Instrumentation

L'instrumentation comprend :

- un capteur de pression à l'entrée du tube d'injection, un second capteur de pression à la base du tube (sensibilité $= \pm 0.2\ kPa$).

- 2 balances automatiques pour l'évaluation des débits entrant et sortant respectivement (sensibilité : fonction de la plage de valeurs mesurées = $\pm 20\ g$ entre $0 - 60\ kg$, $\pm 50\ g$ entre $60 - 150\ kg$, $\pm 100\ g$ entre $150 - 240\ kg$).

- 4 extensomètres (associés à des capteurs à effet électromagnétique) mesurant le déplacement radial

- 2 capteurs pour la mesure du déplacement vertical sont fixés au sol (sensibilité = $\pm 5\ \mu m$)

- 4 capteurs à effet inductif sont employés pour les mesures de pression différentielle dans le massif. La référence est faite par rapport à l'état hydrostatique initial (sensibilité = $\pm 0.2\ kPa$)

- 2 capteurs de déplacement situés sur la paroi supérieure mesurent le tassement développé par le chargement mécanique, et le soulèvement éventuel au cours de l'injection (sensibilité = $\pm 1\ \mu m$).

- 1 capteur d'effort fixé sur le vérin hydraulique contrôle la valeur de la force imposée au cours de l'injection (charge maximale 2000 kN, sensibilité = $\pm 1\ kN$)

- 7 éléctrodes (système de Werner) sont insérées le long d'une section droite du massif pour détecter la position du front de coulis au cours de sa propagation, par des mesures de conductivité.

Les positions des capteurs sont reportées en Fig.8-12. Tous les dispositifs mentionnés ci-dessus sont connectés à un programme d'acquisition automatique (LabView 5.1, [73]). Le drainage est assuré par des évacuations situées en surface du massif (Fig.10-87).

8.4.4 Discrétisation élément fini

La résolution aux Eléments Finis est effectuée en employant un maillage 12×12 d'éléments bidimensionnels quadrilatéraux linéaires pour les fonctions de pondération et les fonctions de base. Sous l'hypothèse d'axisymétrie du milieu poreux, et puisque des conditions de symétrie cylindrique sont assurées pour les conditions de charge et aux limites, le modèle peut être analysé comme un problème d'écoulement et de consolidation radial bidimensionnel, et le domaine de résolution numérique est réduit à une section droite arbitraire du cylindre. Les conditions d'axisymétrie, fréquentes dans les situations d'injection, sont prises en compte dans le logiciel. Le débit s'élève à $Q = 6\ l \cdot \mathrm{min}^{-1}$ et est réparti uniformément aux noeuds compris entre $z \in [0.3\ m; 0.7\ m]$ afin de simuler une injection depuis une source linéique de longueur $0.4\ m$. Les conditions de chargement mécanique sont modélisées par les conditions numériques suivantes : $\mathbf{u}_s \cdot \boldsymbol{\nu} = 0$ (absence de déplacement radial sur les parois latérales, déplacement vertical nul à la base), $F_T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} = 0$ (absence de contraintes tangentielles) sur les parois latérale et inférieure.

8.4.5 Injection à l'eau

Avant d'effectuer l'injection au coulis, plusieurs injections à l'eau ont été entreprises, afin de vérifier l'injectabilité du milieu, de calculer la perméabilité à l'eau (condition initiale, donné nécessaire requise par l'injection au coulis), ainsi que pour étudier les propriétés générales de l'écoulement. L'allure générale de l'écoulement est comparée à une solution analytique existante sous des conditions d'écoulement radial. Enfin, l'intérêt principal des essais d'injection à l'eau, outre qu'ils contribuent à la validation du code numérique, est de fournir une référence lors de l'exploitation des résultats d'essais d'injection au coulis. Le modèle théorique d'écoulement pour l'eau, celui d'un fluide Newtonien légèrement visqueux, sert de référence pour l'établissement du modèle de propagation sous l'effet de la convection seule (sans viscosité, sans filtration). Ensuite, si l'injection au coulis montre des caractéristiques différentes de celles de l'injection à l'eau, ces différences peuvent être attribuées à des phénomènes additionnels.

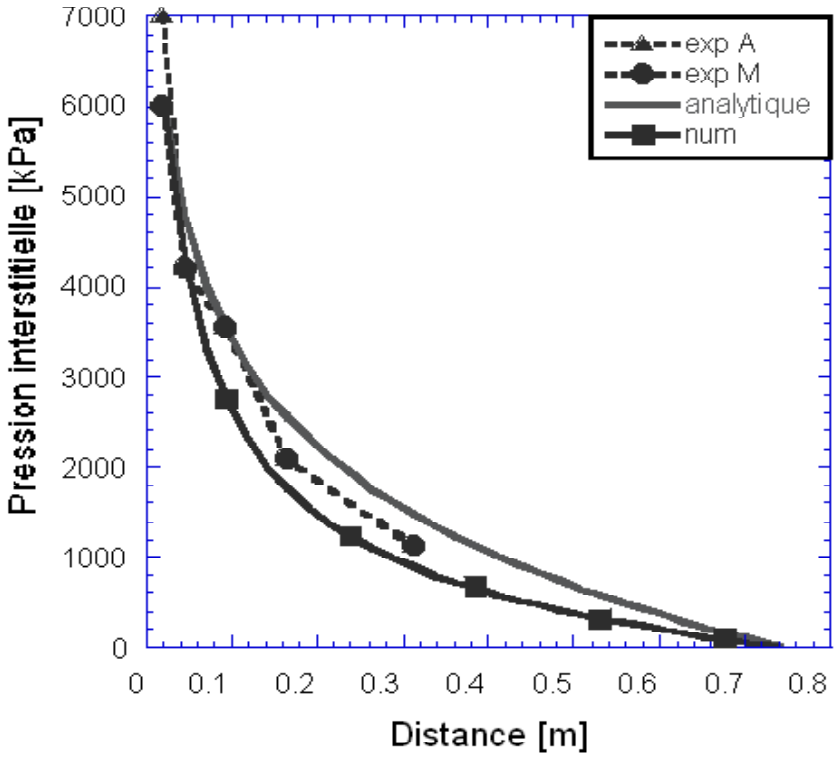
Les résultats des essais d'injection à l'eau sont comparés à une solution analytique, obtenue à partir de l'équation d'écoulement en supposant un écoulement stationnaire, incompressible et axisymétrique, lorsque la source d'injection continue est distribuée tout le long de $r = R_{int}$. Le couplage hydromécanique et la filtration sont négligés dans ce cas et la distribution de la pression interstitielle est donnée par l'expression suivante :

$$\overline{p}^f = \overline{p}^f(r) = \frac{\overline{\mu}^f}{k} q_{imp} R_{int} \ln\left(\frac{R_{ext}}{r}\right) \tag{8.3}$$

La pression interstitielle s'exprime comme une fonction de la distance radiale r mesurée depuis le centre du tube d'injection de rayon R_{int}, et R_{ext} est le rayon externe du modèle.

La Fig.8-13 montre une comparaison entre les résultats de l'injection à l'eau, la solution analytique Eqn.8.3 et les résultats du modèle numérique. Bien que l'injection du modèle cylindrique s'effectue depuis un tube d'injection de longueur finie en $r = R_{int}$, les conditions expérimentales sont proches des conditions aux limites de la solution analytique, plus particulièrement au voisinage du tube d'injection. Les résultats analytiques et numériques montrent un profil de pression régulier, tandis que les valeurs expérimentales sont comprises entre les résultats numériques et analytiques. La majeure partie de la chute de pression se produit dans la premier quart du modèle.

En observant la Fig.8-13, il apparaît que le profil de pression au cours de l'essai d'injection à l'eau diffère de façon significative de celui correspondant à la solution analytique, donnée par l'Eqn.8.3. Cependant, au voisinage de la zone d'injection, là où les conditions d'existence de la solution analytique sont le mieux vérifiées, les pressions numérique et expérimentale sont proches de la solution analytique. Les résultats expérimentaux sont assez concordants avec les simulations numériques, quoique la solution numérique montre un profil plus régulier des pressions, qualitativement similaire à celui de la solution



Figure~8-13: Profils de pression de l'injection à l'eau.

analytique. A mesure que l'on s'éloigne du point d'injection, la concordance expérimentale et numérique avec la solution analytique se détériore, les valeurs expérimentale et numérique sont plus faibles que leurs contreparties analytiques.

Les différences entre résultats analytiques et numériques s'expliquent aisément par le fait que la dépendance du problème vis-à-vis de la coordonnée verticale a été négligée dans le calcul de la solution analytique.

Au cours de l'injection, un écart croissant a été observé entre les pressions relevées par le capteur A à l'entrée du tube et les valeurs enregistrées par le capteur B au bas du tube d'injection (voir Fig.8-12); cet écart peut être attribué à la perte de charge hydraulique provoquée par la réduction de section entre le tube extérieur et le tube d'injection, ainsi qu'à la hauteur de colonne d'eau. Du fait de l'incertitude sur la valeur de la pression d'injection réelle, deux possibilités sont considérées pour la pression d'injection : $p_{injection} = p_A$, et $p_{injection} = \frac{p_A + p_B}{2}$. Deux courbes de pression d'injection expérimentales sont systématiquement reportées par la suite, à savoir A (désignant la pression au point A) et M pour la pression moyenne (moyenne entre le point A et le point B).

A noter que p_{extube} est plus élevé que la solution analytique obtenue pour la même valeur de débit d'injection imposé, tandis que les courbes analytique et numérique concordent parfaitement au voisinage du tube : p_{extube} n'est pas la pression d'injection.

Les valeurs réelles de pression sont plus élevées à mesure que l'on s'éloigne du bord intérieur, cet écart par rapport aux valeurs numériques peut être attribué à une non-satisfaction rigoureuse des conditions hydrostatiques. En conclusion, la solution analytique permet de valider approximativement le calcul du régime d'écoulement sous conditions axisymétriques et stationnaires.

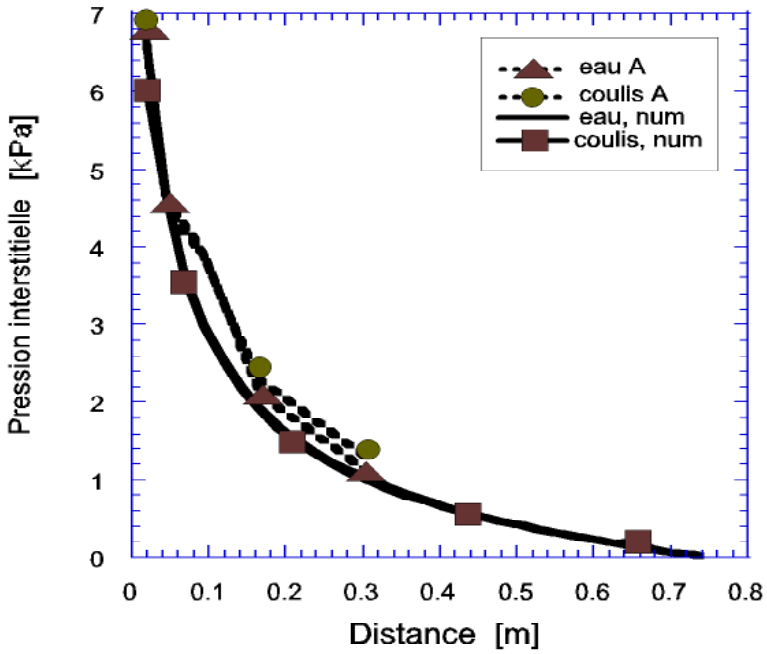
8.4.6 Injection au coulis

La Fig.8-14 compare le profil de pression initial lors de l'injection au coulis au profil de pression stationnaire d'une injection à l'eau conduite sous un même débit. A l'exception de la valeur de la pression d'injection qui est légèrement plus élevée pour le coulis que pour l'eau, la chute de pression initiale, provoquée par les effets de compressibilité du fluide et du squelette solide, est analogue pour le coulis et pour l'eau. Aux premiers instants de l'injection au coulis, seule un légère différence peut être constatée avec l'injection à l'eau. Il apparaît des différences entre résultats expérimentaux et numériques analogues à celles constatées lors de l'essai eau, mais qui vont s'amplifier au cours du déroulement de l'injection.

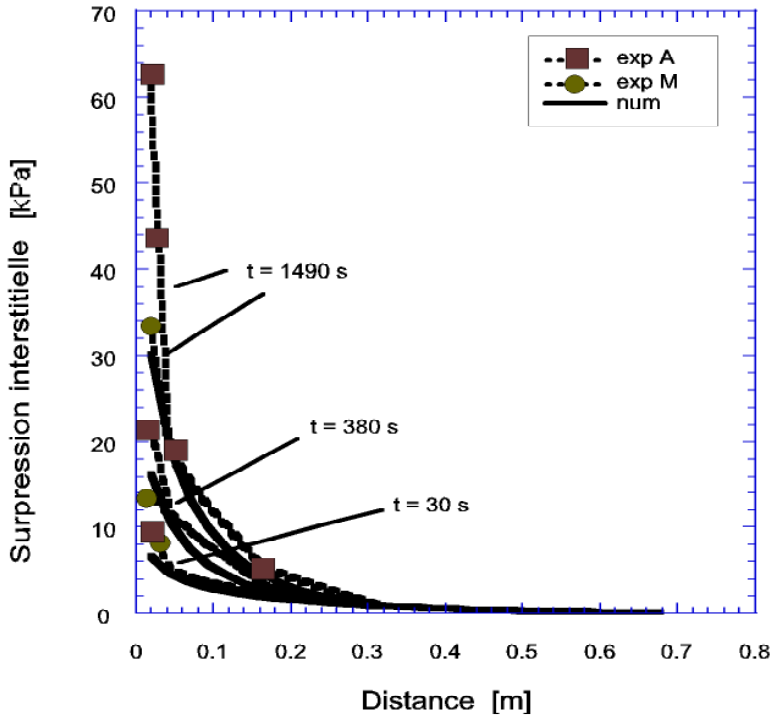
La Fig.8-15 montre les profils de pression expérimentaux et numériques à $t = 30$, 380 et 1490 s pour l'expérience d'injection au coulis. La pression du coulis injecté décroît très rapidement suivant la direction radiale, et de façon plus marquée que lors de l'injection à l'eau au voisinage du point d'injection. La première mesure de pression (capteur 2) au sein du massif, au voisinage du tube d'injection, s'est avérée utile pour saisir la chute de pression abrupte qui affecte surtout le voisinage de la zone d'injection. Le gradient de pression est très élevé au voisinage du point d'injection, tandis que dans la majeure partie du modèle les valeurs de pression sont fortement réduites suivant la coordonnée radiale, en restant proches du profil de pression initial. Ainsi, en $r = 0.32$ m, la valeur de pression reste inchangée durant tout l'essai.

La Fig.8-17 représente la variation de pression intertitielle en plusieurs points de la section droite du modèle, en $r = 0.02$ m, $r = 0.045$, 0.095, 0.17 et 0.32 m (référence est faite par rapport à l'axe du tube d'injection). Une allure sans cesse croissante des pressions le long de la direction radiale est obtenue à mesure que l'injection progresse, pourtant l'évolution spatiale en un point du massif est moins importante que l'évolution temporelle. Très vite après le début de l'injection (quelques centaines de secondes), le flux d'injection imposé implique une augmentation importante de la pression d'injection au voisinage du tube d'injection.

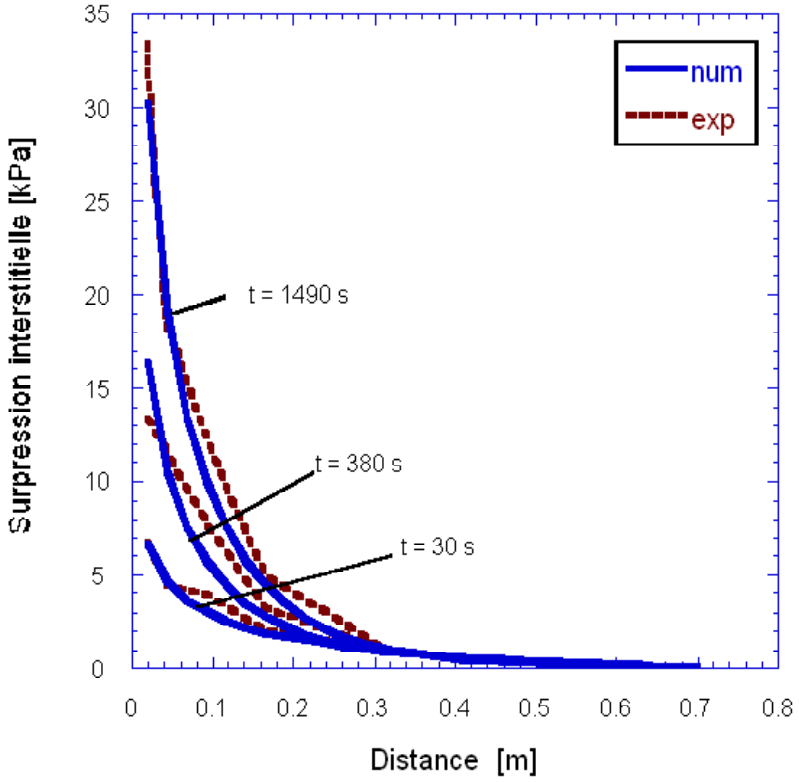
Malgré l'incertitude sur la valeur réelle de la pression d'injection (Fig.8-15), l'évolution qualitative des pressions reste la même pour les deux points A et M. Cette évolution, caractérisée par la présence de



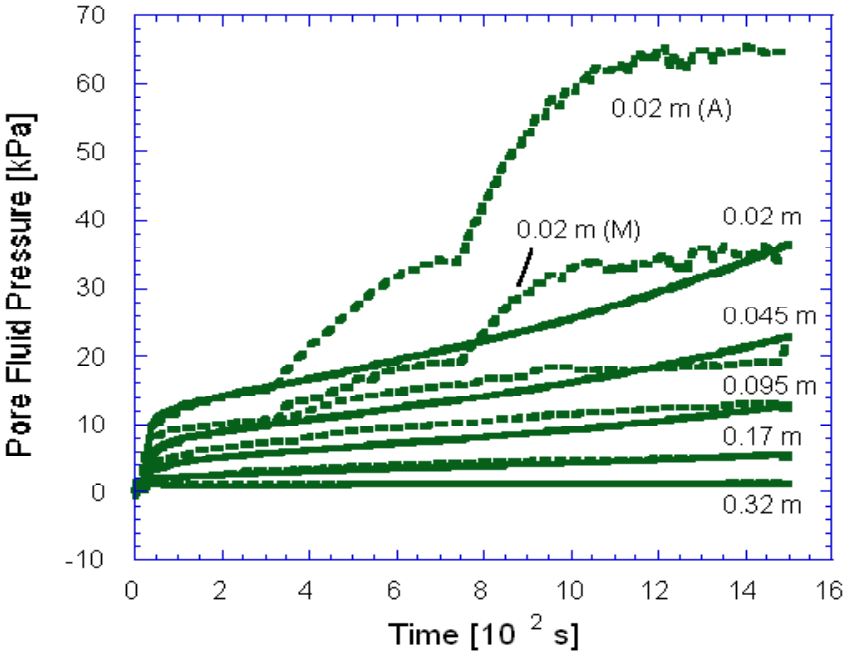
Figure~8-14: Profil de pression initial de l'injection au coulis.



Figure~8-15: Profils de pression expérimentaux et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) à $t = 30$, 380, et 1480 s.



Figure~8-16: Profils de pression expérimentaux et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) à $t = 30$, 380 s, et 1480 s.



Figure~8-17: Distribution des pressions expérimentales et numériques (modèle $(\lambda + \mu)$) dans le massif.

plusieurs points d'inflexion, et un taux de croissance constant de la pression entre deux points d'inflexion, doit également être vérifiée par la pression d'injection réelle ($p_A < p_{injection} < p_B$ constitue une hypothèse raisonnable). Quelle que soit la valeur de pression d'injection considérée (A ou M), la croissance de la pression d'injection se produit en plusieurs étapes, chaque étape parabolique se terminant par une asymptote temporaire.

L'évolution de pression est qualitativement similaire en $r = 0.045$, 0.095, 0.17 m et pour p_A, les courbes respectives de pression montrent les mêmes points d'inflexion, bien que les valeurs de pression limites soient réduites à mesure que la distance au point d'injection s'accentue. Très tôt dans le massif, l'information sur les processus physiques se produisant au voisinage de la zone d'injection est disponible. La plupart des caractéristiques observées sont partagées par le modèle numérique, ainsi que l'illustrent les Figs.8-15 et 8-17, excepté pour la croissance de pression d'injection qui est moins prononçée dans le modèle numérique que dans les expériences. Ce point est discuté plus loin.

8.4.7 Modélisation numérique avec une complexité physique croissante

Les différents résultats numériques obtenus en variant certains paramètres sont discutés dans cette section. Tous les autres paramètres étant constants et donnés en Table 8.3, la viscosité $\overline{\mu}^f$ et le taux de

filtration λ sont variés, afin de dissocier les contributions respectives des phénomènes étudiés : dilution, filtration, transport convectif du coulis, et leurs effets sur la pression, qui constitue la variable pertinente pour évaluer la performance de l'injection sous débit constant. Cette étude comparative améliore la compréhension de la physique de l'injection d'un coulis de type dispersion-suspension.

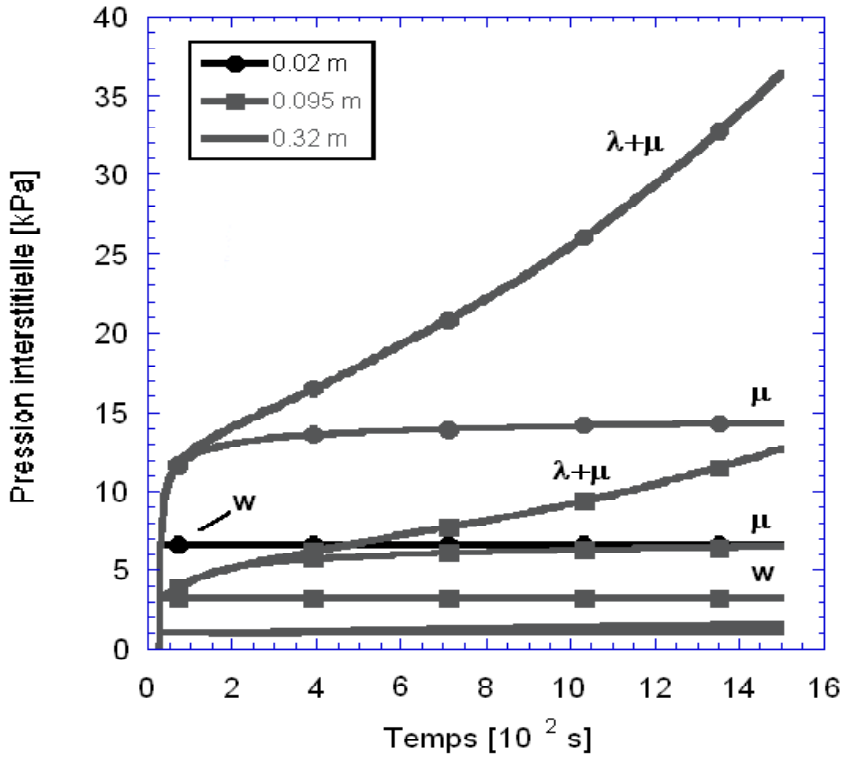
Dans ce qui suit, (w) se réfère à la simulation dans laquelle viscosité et densité sont prises égales à celles de l'eau, tandis que le taux de filtration est pris nul ($\lambda = 0$). Pour le modèle de viscosité ou modèle (μ), aucune filtration n'est présente, mais une dépendance linéraire à l'égard de la concentration en coulis est considérée pour la densité et la viscosité, selon les Eqns.4.60 et 4.61 respectivement. Le modèle le plus complexe est le modèle $(\lambda + \mu)$, pour lequel la viscosité et la densité dépendent linéairement du champ de concentration du coulis, tandis que le taux de filtration λ est constant. Les valeurs de λ, $\overline{\rho^w}^f$, $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$, $\overline{\mu^w}^f$ et $\overline{\mu^g}^f$ sont données dans la Table 8.3.

La Fig.8-18 donne l'évolution de la pression interstitielle en différentes positions d'après le modèle (w), le modèle (μ) et le modèle $(\lambda + \mu)$. Les différences entre les trois modèles sont assez importantes. Comme prévu pour un fluide incompressible dans un milieu quasi-indéformable, le modèle (w) conduit à une solution stationnaire. Les modèles (μ) et $(\lambda + \mu)$ montrent une même croissance initiale en pression, mais le modèle (μ) se stabilise rapidement à un niveau défini, tandis que le modèle $(\lambda + \mu)$ conduit à une croissance continue en pression pour tous les points du massif compris entre $r = 0.02$ m et $r = 0.095$ m. Les écarts entre modèles numériques s'atténuent avec l'éloignement au tube d'injection, en $r = 0.32$ m les valeurs de pression sont pratiquement confondues pour les trois modèles.

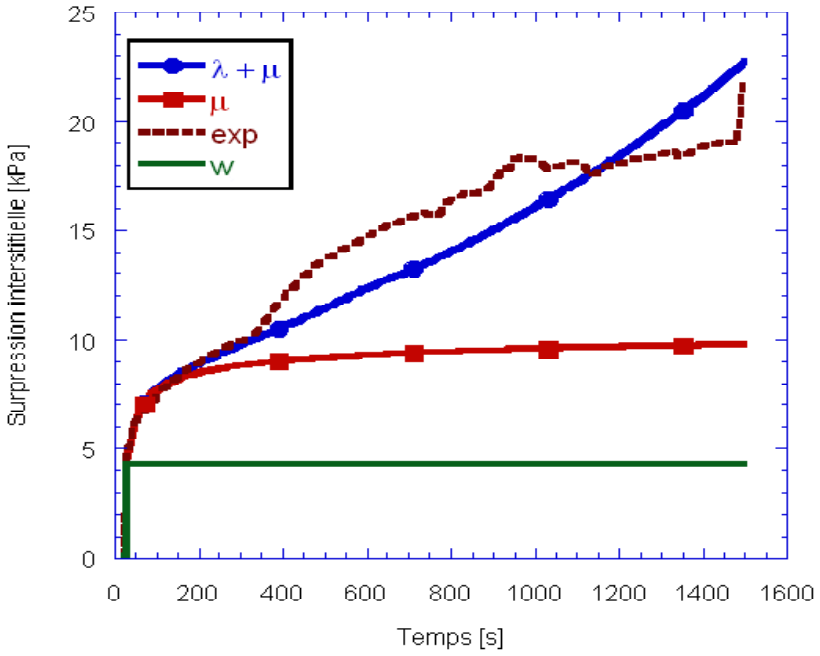
La croissance initiale en pression peut être en partie attribuée à l'effet de la dépendance de la viscosité vis-à-vis de la concentration, ainsi que l'atteste la Fig.8-19 par comparaison des modèles (μ) et (w), une partie de l'augmentation en pression est également liée aux compressibilités solide et fluide.

Le profil de pression initial de l'injection au coulis (modèles (μ) et $(\lambda + \mu)$) est au-dessus du profil de pression pour l'injection à l'eau (modèle (w)), à cause de l'influence instantanée de la viscosité. D'après les hypothèses du modèle, les variations de viscosité et l'étendue du dépôt sont reliées à la progression du coulis dans le milieu, et provoquent une augmentation progressive de la pression interstitielle, accroissant les différences entre les régions injectées et les parties non encore atteintes par le coulis.

Sur la Fig. 8-19, il apparaît que les variations de viscosité, induites par la propagation du coulis et le mélange avec l'eau ambiante, sont moins significatives pour les variations de pression que les effets de filtration : comme l'atteste le modèle (μ), lorsqu'aucune filtration n'est présente, l'écoulement radial s'accompagne d'un profil stable de pression après une croissance initiale rapide. Ce résultat est corroboré par l'étude du dépôt progressif par injection d'un coulis de ciment à travers un filtre métallique. Desbrières ([33]) montre que la réduction de perméabilité du cake qui se forme progressivement, qui varie de k_0 (perméabilité initiale) à $\frac{1}{1000}k_0$ sous l'effet de la filtration, est beaucoup plus importante que



Figure~8-18: Distribution des pressions numériques dans le massif.



Figure~8-19: Evolution des pressions. Comparaison entre modèles numériques et pression mesurée en $r = 0.045\ m$.

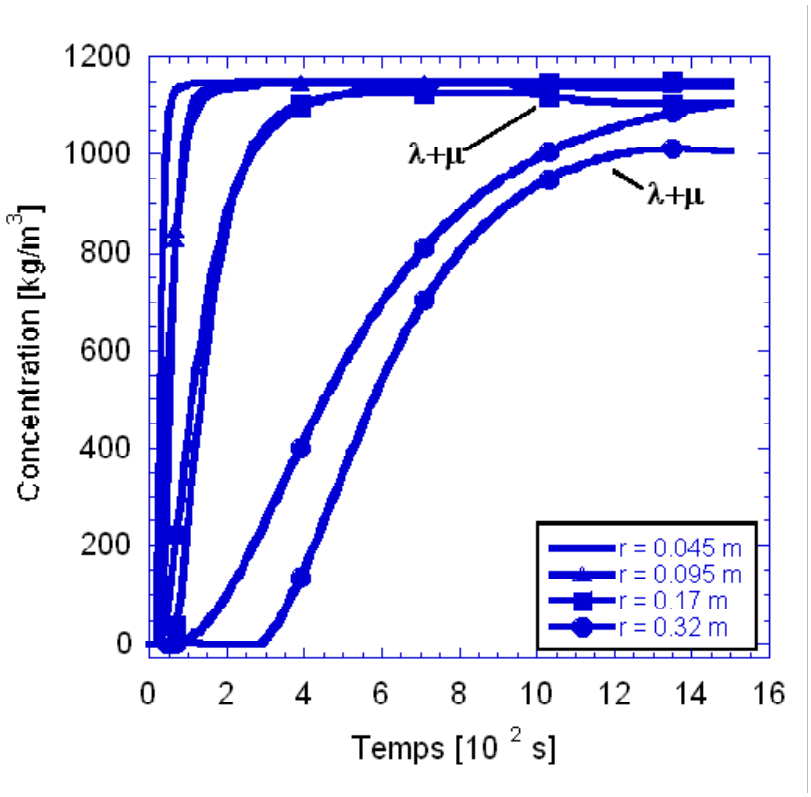
l'augmentation de viscosité, qui augmente d'un facteur 5.

La propagation du coulis dans le modèle (μ) s'accompagne d'une pression très vite stabilisée après une augmentation brusque aux premiers instants de l'injection. L'évolution du profil de pression est moins affectée par la variation de viscosité que dans le cas d'injection unidimensionnel (Fig.8-3). Comme pour l'injection unidimensionnelle, le processus de filtration, même sous l'hypothèse d'un dépôt qui débute avec la pénétration du coulis, affecte le champ de pression lorsque la valeur de densité de coulis adsorbé est suffisamment élevée pour induire une altération significative de la structure du milieu poreux, caractérisée dans l'approche continue adoptée ici par la porosité macroscopique. A l'inverse, les effets de viscosité sont présents dès que le transport convectif du coulis s'initie, comme l'indique la croissance généralisée de la pression initiale pour le modèle (μ) (entre $r = 0.02\ m$ et $r = 0.095\ m$) comparé au modèle (w).

La Fig.8-20 représente la distribution de concentration du coulis dans le milieu poreux pour le modèle (μ) sans filtration et le modèle $(\lambda + \mu)$ avec un taux de filtration constant. En $r = 0.045\ m$ et $r = 0.095\ m$, les deux résultats sont confondus, tandis qu'en $r = 0.17\ m$ et surtout en $r = 0.32\ m$, les valeurs de concentration du modèle $(\lambda + \mu)$ présentent un effet de retard marqué par rapport aux courbes du modèle (μ).

Pour le modèle $(\lambda + \mu)$, le taux de dépôt étant constant, le terme de filtration $\lambda\overline{\rho^g}^f$ provoque la croissance cumulée de la masse de coulis adsorbé, et donc une diminution persistante de la porosité et de la perméabilité, qui explique le comportement transitoire observé sur la courbe de pression sous un taux d'injection constant tout au long de l'expérience. Comme il apparaît sur les courbes de pression du modèle $(\lambda + \mu)$ (Fig.8-19), en soustrayant à ces courbes les courbes correspondantes de pression du modèle (μ), la croissance en pression liée aux effets de filtration devient effective après que l'espace interstitiel ait été complètement saturé en coulis autour de ce point ($\overline{\rho^g}^f = \left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$) d'après les courbes de concentration (Fig.8-20).

Comme dans le cas unidimensionnel, la viscosité et la filtration jouent des rôles complémentaires pour l'augmentation des pressions. L'effet de viscosité cesse à mesure que la solution interstitielle s'homogénéise, tandis que la filtration manifeste un comportement essentiellement transitoire (Figs.8-19 et 8-20). La Fig.8-19 montre clairement le rôle de la filtration pour l'obtention d'un modèle réellement prédictif, et l'adéquation du modèle $(\lambda + \mu)$.



Figure~8-20: Distribution des concentrations dans le massif. Comparaison entre modèles numériques (μ) et ($\lambda + \mu$).

8.4.8 Comparaison entre le modèle $(\lambda + \mu)$ et les expériences

Pressions

La Fig.8-17 compare la variation des pressions dans le modèle cylindrique entre le modèle $(\lambda + \mu)$ avec un taux de filtration constant et les résultats expérimentaux. Sur la majeure partie du domaine, la pression numérique augmente de façon régulière, en particulier la pression d'injection croît continûment.

Concernant le modèle numérique, le champ de pression est couplé au champ de concentration, la croissance en pression dans le milieu est subordonnée à la propagation du coulis par l'intermédiaire de la viscosité et de la filtration. D'après la Fig.8-20, le coulis doit être présent en proportions suffisantes pour induire des variations de viscosité et de filtration qui provoquent une montée en pression. Par contre, le coulis est suffisamment dilué loin de la zone d'injection, à cause notamment de la filtration qui s'opère en amont, contrôlée par le terme $\lambda\overline{\rho^g}^f$, pour que l'écoulement se produise avec une filtration et donc une croissance en pression réduites en aval de l'écoulement.

Comme indiqué par les profils de pression (Fig.8-15), à mesure que le coulis se propage dans le sol, l'évolution réelle des pressions est reproduite par le modèle numérique dans le massif (entre $r = 0.045$ m et $r = 0.32$ m, voir Fig.8-17), à l'exception de la zone restreinte comprise entre le tube d'injection et le premier capteur de pression. En injectant à un taux constant, une allure de pression d'injection augmentant graduellement, et un profil de pression subissant une montée régulière au cours du temps, ont été observés lors de l'analyse numérique. Les valeurs expérimentales sont caractérisées par plusieurs sommets, suivis d'une croissance abrupte. Les écarts entre résultats expérimentaux et numériques, concernant la pression d'injection, peuvent être partiellement attribués (outre les raisons invoquées plus haut) à des pertes de charge hydraulique entre le tube d'injection et le grillage disposé autour du tube afin de prévenir un écoulement préférentiel le long du tube. De tels écarts, entre pression d'injection et pressions dans le massif d'une part, et pressions d'injection expérimentale et numérique d'autre part, ont également été reportés par Honma lors d'expériences effectuées sous des conditions similaires ([58]). De même, selon Azzar ([7]), la pression mesurée au niveau du tube n'est pas représentative du niveau des pressions dans le massif. En ce qui concerne les résultats expérimentaux, la valeur de pression du capteur en $r = 0.045$ m est bien plus faible que la valeur p_A, malgré la distance réduite (2.5 cm) qui les sépare. Une telle différence peut être reliée à une occlusion partielle se produisant au voisinage des trous d'injection, non détectée lorsque le bulbe cimenté a été dégagé, ou à une augmentation localisée du taux de dépôt, voire une modification de la morphologie du dépôt ([65]), non reproduite par le modèle numérique, parce qu'un dépôt constant et uniforme a été considéré lors des simulations.

Il est intéressant à ce stade de reporter une étude expérimentale de filtration de suspensions diluées de particules sphériques ou anguleuses à travers un arrangement bidimensionnel (tubes connectés en

parallèles et en série) et un milieu poreux réel. Deux modes différents d'obstruction des pores ont été observés par **M**aroudas et al. ([84]) : une constriction graduelle des pores pour les particules sphériques (mode de dépôt régulier), ou un blocage rapide (mode d'occlusion) pour les particules anguleuses. **M**aroudas démontre également que la chute de pression est différente si tous les pores sont partiellement recouverts de dépôt (dépôt régulier ou constriction), ou si certains des pores sont complètement bloqués, tandis que d'autres restent complètement ouverts (dépôt hétérogène par mode de blocage ou occlusion). Les expériences conduisent en particulier à une augmentation de la pression dans un rapport maximal de 10 pour le mode de blocage par rapport au mode de constriction. Les particules constitutives du squelette poreux étant constituées de particules de taille irrégulière et d'arrangement aléatoire ([103]) dans un domaine tridimensionnel, il est possible que les modes de dépôt régulier puis d'occlusion dominent successivement, et le mode d'occlusion, plus critique, s'accompagne d'une augmentation de pression significative lorsque le nombre de constrictions occluses est suffisamment élevé. Chez **M**aroudas, les disparités croissent très vite dès que le dépôt est présent, les canaux étant tous interconnectés, la vitesse dans les pores les moins obstrués augmente, et élimine le dépôt, tandis que dans les pores les plus obstrués, la vitesse diminue, conduisant à une obstruction plus importante encore; l'hétérogénéité du dépôt ne cesse d'augmenter.

Une telle augmentation critique de la pression ne peut pas être traduite par la loi de filtration employée, qui suppose implicitement que le dépôt se traduit uniquement par une diminution régulière du diamètre des pores, par recouvrement progressif de la surface intérieure du tube capillaire (cf. section 4.6.5), et conduit invariablement à une augmentation régulière de la pression, tandis que la vitesse d'écoulement reste constante. Il semble en effet peu problable que le dépôt ne se produise qu'au niveau des sites de surface des pores, il existe d'autres modes de rétention ([56]). Avec l'équation de Kozeny, l'augmentation de pression obtenue est trop faible pour traduire des cas d'occlusion, le modèle de Kozeny est précis pour l'écoulement de suspensions de faible diamètre à travers des milieux à filtration faible ([56]). De plus, la porosité ne peut pas être employée pour décrire l'étendue du dépôt si le mode de blocage est dominant. Il a été nécessaire de supposer un mode de dépôt régulier pour arriver à des résultats quantitatifs, mais un modèle de filtration complet doit tenir de la morphologie du dépôt.

L'observation suivante vient appuyer les considérations précédentes. D'après la Fig.8-17, la croissance initiale, suivie d'une décroissance du rapport $\frac{p_{ri}}{p_A}$ (comme du rapport $\frac{p_{r_i}}{p_M}$), p_{r_i} étant la valeur du capteur de pression au point $r_i = 0.045, 0.095, 0.17\,m$, se produit en plusieurs étapes, chaque étant marquée par un taux constant : $\frac{dp_{r_i}}{dt} \simeq \frac{dp_A}{dt} \simeq \frac{dp_M}{dt}$. Si l'évolution en pression est supposée induite par un dépôt croissant de coulis, la variation temporelle de la pression relative observée en plusieurs points au sein du milieu poreux, peut s'expliquer par le processus de dépôt non uniforme suivant : $\frac{\lambda_{r_i}}{\lambda_0}$ $(r_i = 0.045, 0.095, 0.17\ m)$ augmente d'abord jusqu'à $t = 300\ s$, puis décroît de manière continue jusqu'à la fin de l'expérience. Ce

type d'évolution a été observé dans ([29]) pour des suspensions diluées en écoulement dans des milieux granulaires (sable). Deb ([29]) mesure une croissance linéaire du taux de filtration λ en fonction du dépôt spécifique ρ_σ sur la majeure partie de l'essai, suivie d'une décroissance non linéaire aux étapes ultérieures de filtration. En l'absence d'information disponible sur la morphologie du dépôt, cette morphologie doit être postulée dans la plupart des cas et les hypothèses concernant la nature du processus de dépôt (mode de dépôt régulier supposé implicitement dans cette étude) sont toujours quelque peu arbitraires ([111]). A $t = 300\ s$, la croissance des valeurs de pression relative par rapport à la pression d'injection est généralisée dans le domaine poreux, ce qui signifie qu'à cet instant les pressions dans le milieu continuent de croître, tandis que la pression d'injection est temporairement stabilisée. Une telle observation peut être reliée à une diminution du dépôt au voisinage du tube d'injection, succédant à une complétion des sites disponibles pour l'adsorption ([104]).

En l'absence de valeurs expérimentales de dépôt, le type de relation semi-empirique employée pour le taux de dépôt (Eqn.4.42) ne peut pas être complètement identifiée pour la suspension de ciment microfin particulière considérée, et la simulation actuelle ne reflète pas les effets éventuels d'hétérogénéité du dépôt.

Si la pression d'injection est prise égale à la pression moyenne : $p_{injection} = p_M$, la pression d'injection est plus faible que sa contrepartie numérique au cours de la première partie de l'expérience, mais la concordance est meilleure au cours de la seconde partie de l'expérience (Fig.8-16).

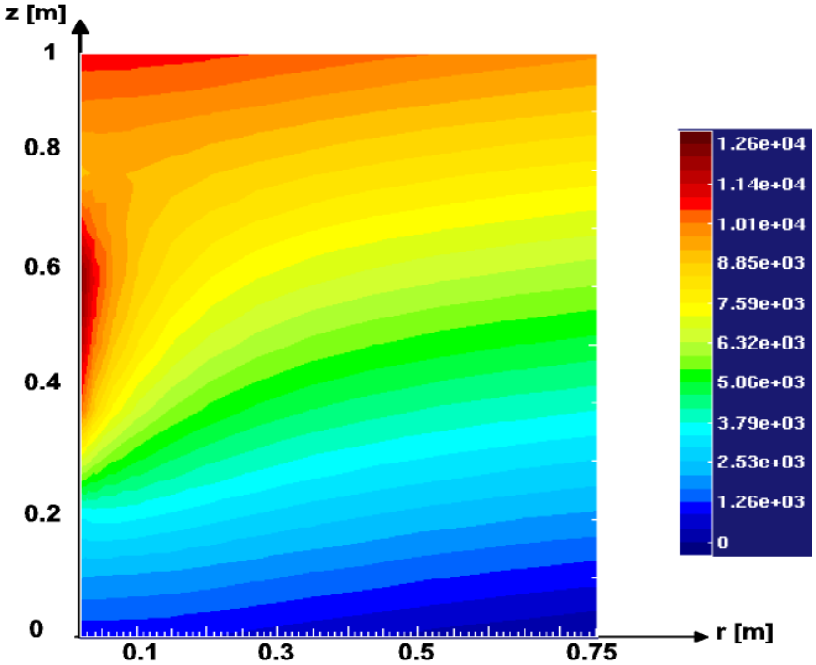
Les effets de viscosité sont reproduits avec précision par le modèle numérique, l'influence du dépôt devient prédominante avec le temps, et comprend probablement des effets d'inhomogénéité.

Sur les Figs.8-21, 8-22, et 8-23, le champ de pression est représenté à $t = 30$, 600, et 1490 s respectivement. Une répartition des pressions hydrostatique est imposée sur la paroi latérale de la cuve, et les équipotentielles initiales de pression sont progressivement déviées par l'injection. Sous l'effet de l'injection, les lignes d'égale pression subissent une distorsion importante dans le domaine d'écoulement, et un gradient de pression élevé est observé au voisinage du point d'injection.

Le champ de surpression est illustré sur les Fig.8-24 et 8-25 aux instants $t = 30\ s$ et $t = 1490\ s$ respectivement. Il peut être observé sur ces figures que l'augmentation des pressions n'est significative qu'au voisinage de la zone d'injection.

Déplacements

La comparaison entre les déplacements correspondant aux expériences d'injection au coulis et à l'eau est reportée sur la Fig.8-26, qui montre l'évolution des déplacements en $r = 0.2\ m$ pour le modèle $(\lambda + \mu)$, le modèle (w) et les résultats expérimentaux. L'évolution des déplacements expérimentaux est similaire à l'évolution des pressions, la croissance de la courbe de déplacement suit celle de la courbe de pression

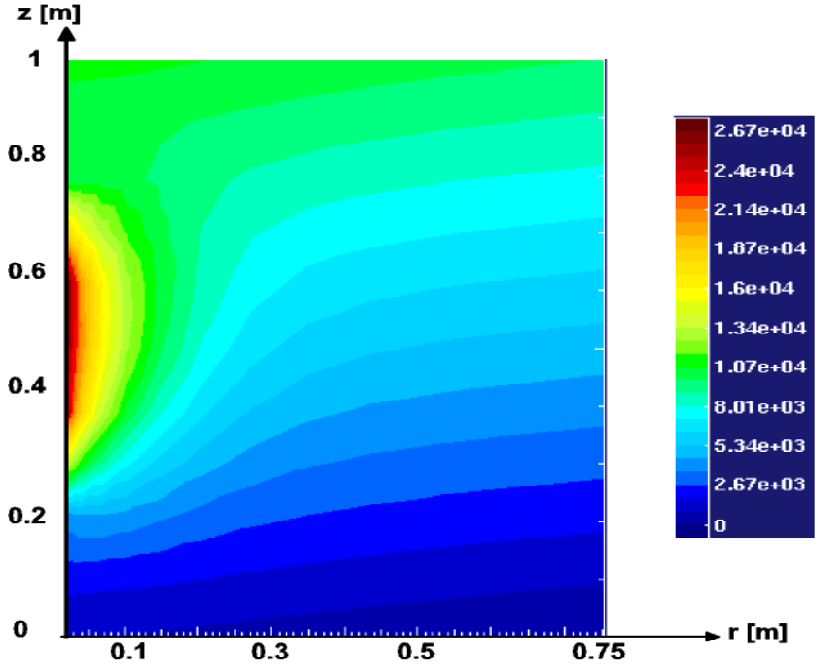


Figure~8-21: Champ de pression interstitielle à $t = 30\ s$.

correspondante sur la Fig.8-17. Tandis qu'une évolution transitoire se manifeste lors de l'injection au coulis, les déplacements restent constants au cours de l'expérience d'injection à l'eau.

Il est utile de comparer les déplacements au cours de l'injection à l'eau aux déplacements enregistrés lors de l'injection au coulis, afin de mettre en évidence le couplage entre la propagation du coulis et les déplacements induits dans le massif par le champ de pression.

Comme prévu, la réponse en déplacement à l'injection et la croissance de pression résultante sont instantanées lors de l'expérience d'injection pour le modèle (w). Avec la loi élastique linéaire employée, lorsque le régime permanent est atteint, les pressions se stabilisent, le couplage disparaît et les déplacements n'évoluent plus ([79]). Au cours de l'injection du coulis, le couplage hydromécanique est convenablement reproduit par le modèle numérique, et bien que les déplacements mesurés soient très faibles, le couplage hydromécanique est présent. La Fig.8-27 reporte la distribution des déplacements lors de l'essai d'injection au coulis, pour le modèle $(\lambda + \mu)$ et les résultats expérimentaux. Au cours de la période de propagation du coulis miscible, les variations de déplacements du squelette solide sont couplées, par l'intermédiaire des variations de pression, aux effets visqueux prédominants, ensuite le dépôt est le mécanisme dominant. La variation de structure poreuse est traduite dans le modèle continu développé par la variation de porosité (voir Eqn.4.40). Sous l'effet d'un dépôt croissant de coulis au cours de la

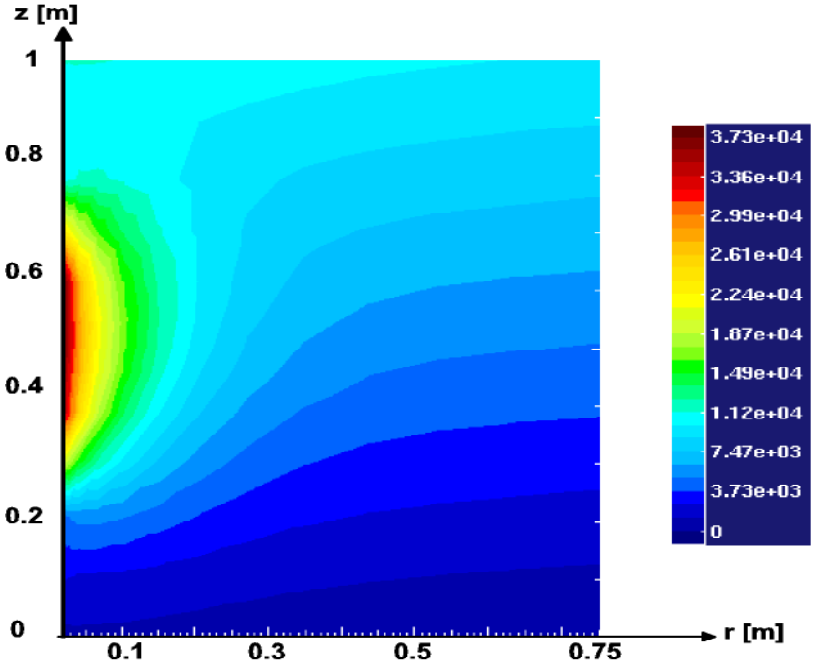


Figure~8-22: Champ de pression interstitielle à $t = 630\ s$.

propagation dans l'espace interstitiel, la réduction de porosité entraîne une réduction de perméabilité, puis une augmentation de pression à son tour responsable de l'augmentation des déplacements.

Les déplacements sont très faibles au cours de l'essai d'injection à l'eau ($\propto \mu m$) et demeurent du même ordre de grandeur au cours de l'essai d'injection au coulis. Ce résultat important est justifié par les déplacements empêchés sous les conditions de chargement mécaniques et sous l'effet de la rigidité du modèle. L'ordre de grandeur des déplacements obtenus renvoie à des déplacements situés dans le domaine élastique, aussi une loi élastique linéaire est considérée. Un couplage hydrodynamique classique, basé sur le principe des contraintes effectives, a servi à formuler le modèle. A mesure que la pression croît, lorsqu'aucune autre source de variation pour le déplacement solide n'est présente, il est immédiat de vérifier, d'après la linéarité du modèle retenu, que la solution du problème d'élasticité est gouvernée par les variations de pression, et est proportionnelle à l'amplitude des pressions (voir Fig.8-19).

L'adéquation du modèle théorique est démontrée par la bonne concordance quantitative et qualitative avec les résultats expérimentaux lors des expériences d'injection à l'eau ou au coulis. Les hypothèses du modèle concernant le couplage hydromécanique ne sont pas discutées à l'issue des expériences en laboratoire. La présence d'un troisième constituant, la suspension diluée de coulis de ciment, et ses interactions avec la phase fluide et le solide, ne modifie pas, en première approximation, les transferts de

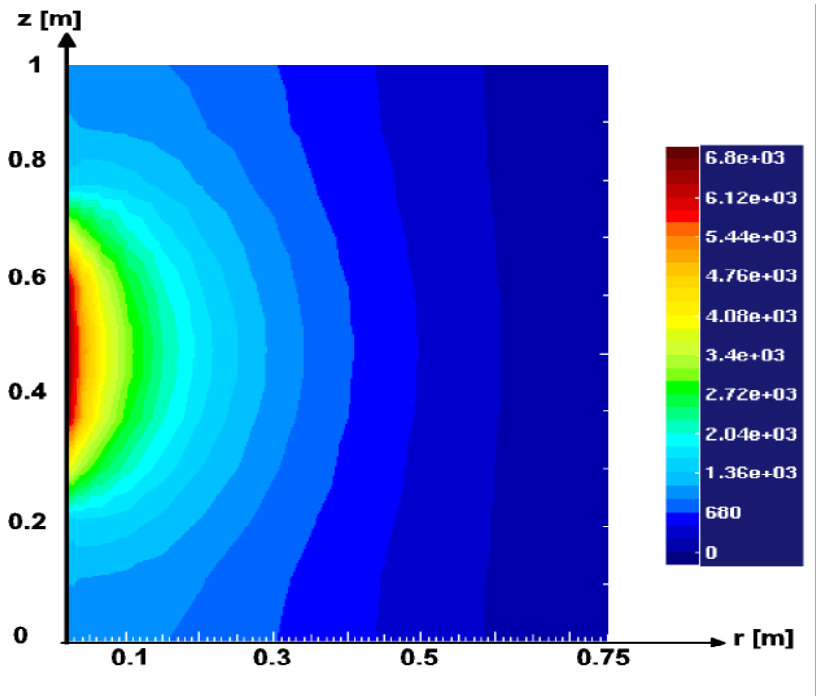


Figure~8-23: Champ de pression interstitielle à $t = 1530\ s$.

quantité de mouvement, qui sont supposés similaires à ceux existants au sein d'un milieu poreux saturé (principe des contraintes effectives).

Un léger effet de retard peut être constaté sur les courbes expérimentales, comparées aux courbes numériques, qui peut être lié à un effet de nonlinéarité ou à un retard dans la réponse du capteur. Néanmoins, à cause des conditions aux limites particulières imposées, qui empêchent tout déplacement au niveau des parois, et sont assez éloignées de ce fait des conditions mécaniques sur site, l'essai en cuve n'est pas concluant sur l'aspect du couplage hydromécanique.

Un commentaire sur le déplacement en $r = 0.1\ m$ mérite d'être fait. Les déplacements mesurés par le premier capteur en $r = 0.1\ m$ montrent un comportement quasi-oscillatoire, tandis que les déplacements mesurés plus loin de la source d'injection connaissent une évolution plus régulière. Le comportement oscillatoire observé peut être causé par la proximité du capteur de déplacement considéré à la source d'injection et à d'autres instruments de mesure, ou peut être attribué à un flux entrant fluctuant. La pression fluide est la première grandeur à être affectée par les variations de flux hydraulique, or les pressions mesurées ne révèlent pas une telle tendance à osciller au voisinage de la source d'injection ou ailleurs dans le massif, le régime hydraulique n'est donc pas la cause du comportement fluctuant du déplacement mesuré en $r = 0.1\ m$. Comme les autres capteurs de déplacement ne suivent pas la même



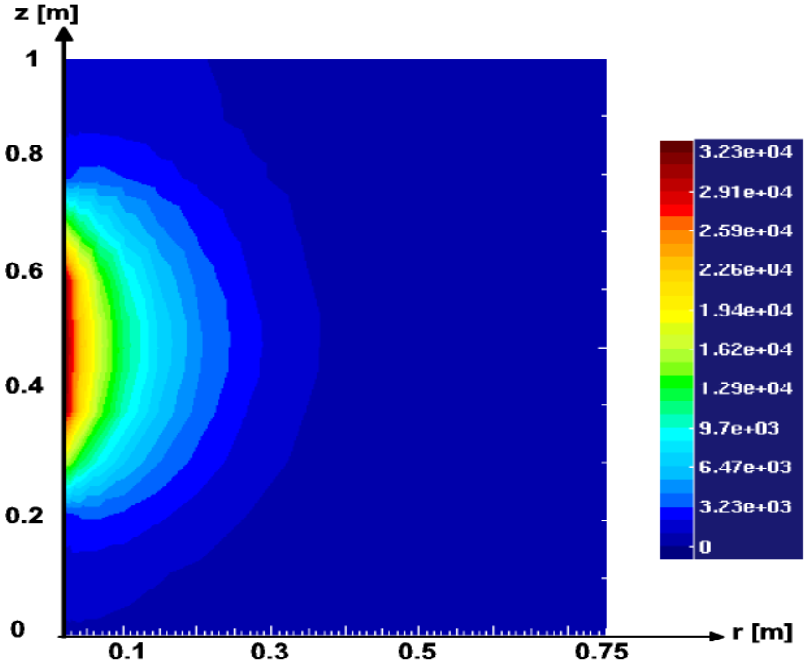
Figure~8-24: Champ de surpression interstitielle à $t = 30\ s$.

évolution que le premier capteur, il est raisonnable de considérer que les mesures de déplacements en $r = 0.1\ m$ sont entachées par les imperfections du capteur. De plus, il a été observé des oscillations analogues avec le même capteur de déplacement lors des essais d'injection à l'eau préliminaires. Enfin, les valeurs mesurées sont proches de la limite de sensibilité de ces derniers, aussi les mesures obtenues doivent être considérées comme représentatives d'un ordre de grandeur et d'une évolution qualitative particulière, plutôt que comme des mesures précises.

Concentration

Le coulis a été injecté dans le sol saturé durant 45 min. La Fig.8-28 représente le profil de concentration à différents instants pour le modèle $(\lambda + \mu)$ et le modèle (μ). Les profils de concentration respectifs des modèles $(\lambda + \mu)$ et (μ) restent confondus depuis le début de l'essai jusqu'en $t = 380\ s$, ensuite les écarts entre les deux modèles augmentent, le modèle $(\lambda + \mu)$ montre des effets de retard par rapport au modèle (μ).

La progression du coulis n'est pas constante comme dans le cas unidimensionnel. Ainsi que l'illustre la Fig.8-28, du fait de la décroissance rapide du gradient de pression le long de la direction radiale, le taux d'avançée du front de coulis n'est pas uniforme et décroît de façon significative après que la position

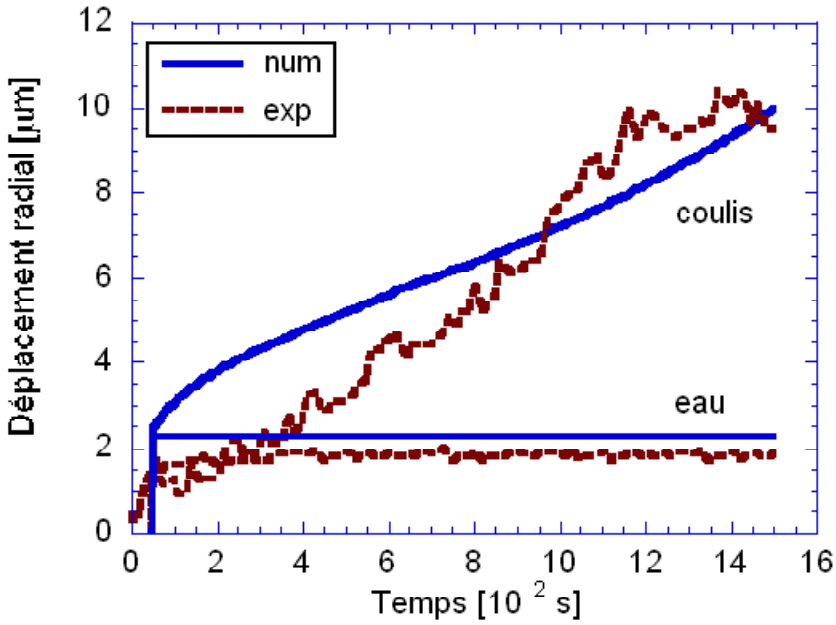


Figure~8-25: Champ de surpression interstitielle à $t = 1530\ s$.

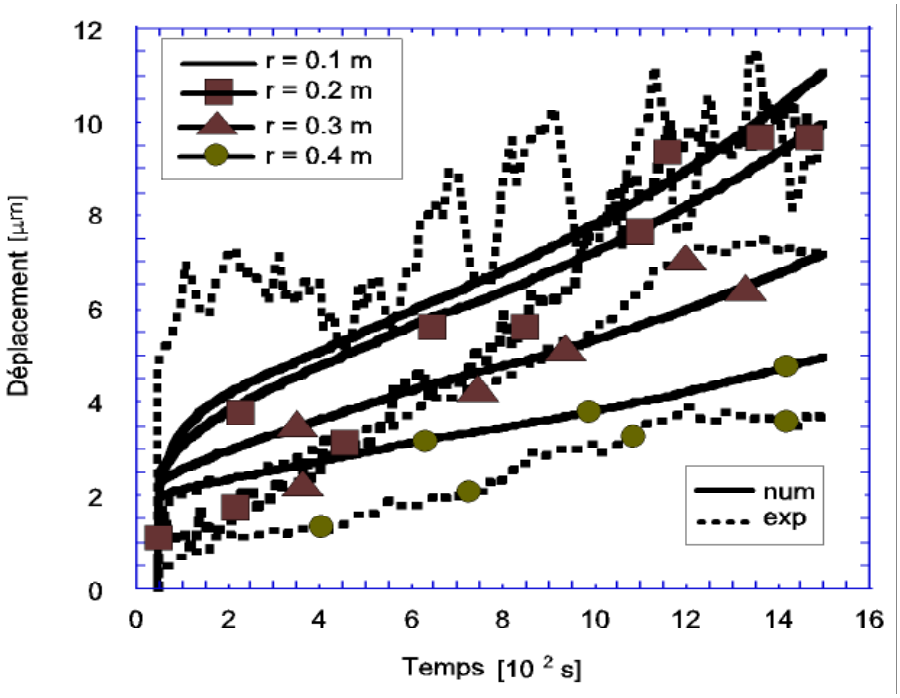
du front ait atteint $x = 0.3\ m$ à $t = 380\ s$. La progression du front est très rapide au début de l'injection sous l'effet du gradient de pression élevé au voisinage des trous d'injection. Par exemple, à $t = 5$ min, le coulis a parcouru plus de la moitié de la distance parcourue pendant les 15 min suivantes.

La progression inégale du front de coulis est directement liée à la distribution de pression interstitielle (vitesse de Darcy). En contrepartie, l'évolution des pressions est fortement couplée à la distribution des concentrations. Une telle constatation a déjà été faite lors des essais unidimensionnels en laboratoire. Pour illustrer ce fait, il est supposé que toute région qui subit le même type de croissance en pression que p_{inj} (pris égal à p_{extube} ou toute valeur intermédiaire), est une région fluide connexe qui contient du coulis, transmettant l'information concernant le processus de propagation transitoire. Sur la Fig.8-17, le point d'inflexion à $t = 400\ s$ est présent jusqu'en $r = 0.17\ m$, ce qui atteste la présence du coulis en ce point, présence observée également durant les simulations numériques (voir Fig.8-28). Plus avant dans le massif, le coulis n'est pas présent en proportions suffisantes pour induire une variation significative de pression.

Le second point d'inflexion détecté en $t = 750\ s$ se maintient sur les courbes expérimentales jusqu'en $r = 0.32\ m$, qui coïncide avec la position du front de coulis à cet instant, comme indiqué sur la courbe de concentration numérique concernée de la Fig.8-28. Au cours des simulations numériques, la confrontation



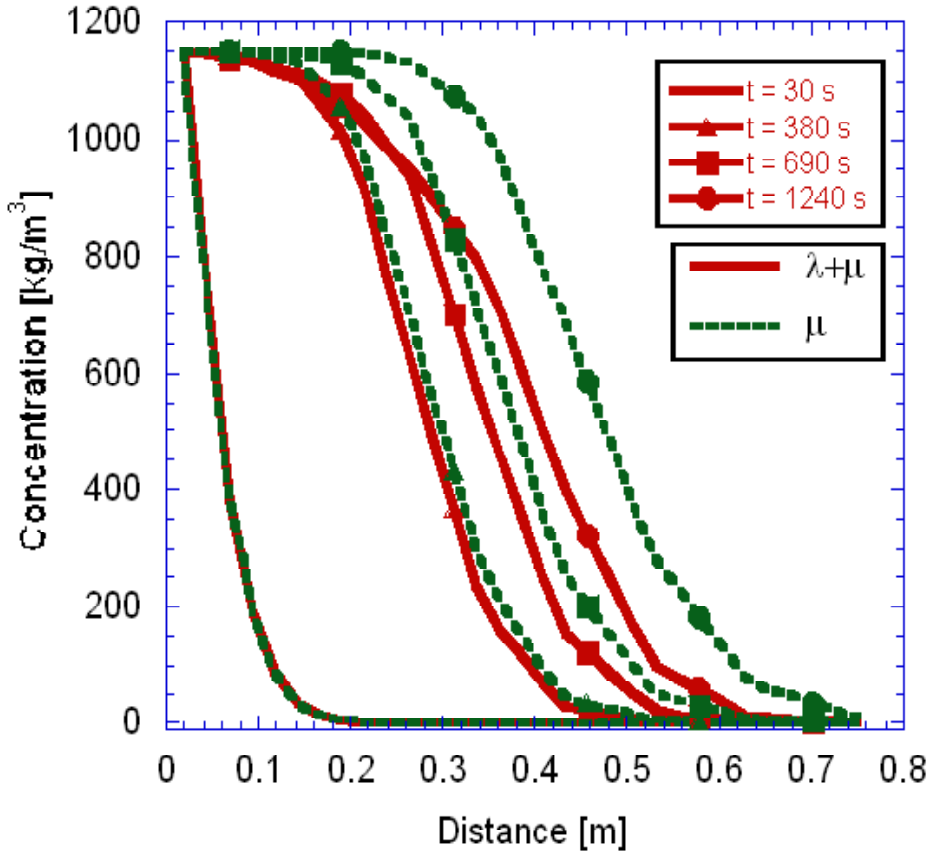
Figure~8-26: Déplacements expérimentaux et numériques en $r = 0.2\ m$. Comparaison entre injection à l'eau et au coulis



Figure~8-27: Distributions des déplacements expérimentaux et numériques dans le massif.

des profils de pression (Fig.8-15) aux profils de concentration (Fig.8-28) entre deux instants successifs, met en évidence le fait que l'augmentation de pression s'étend d'une position à l'autre dans le sol, en relation étroite avec la présence de coulis (dès que le coulis est présent en proportions suffisantes au sein de l'espace interstitiel, $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} \geq 0.5$). Néanmoins, si une augmentation de pression en une position donnée indique vraisemblablement la présence du coulis, aucune information n'est disponible pour déduire la valeur correspondante de la concentration du coulis au sein de la phase.

Chaque courbe de concentration est caractérisée par une zone de transition à travers laquelle la concentration $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}}$ varie de 1 à 0. Le profil de concentration représenté sur la Fig.8-28 et la distribution de coulis sur la Fig.8-20 montrent que la dilution s'accroît à mesure que le coulis imprègne le sol. Au début de l'injection, le profil de concentration du coulis est abrupt et la distribution de concentration du coulis est presque discontinue au sein de l'espace interstitiel. Tandis que le coulis progresse au sein du milieu poreux, il se mélange à l'eau interstitielle, attestant de l'adéquation d'un modèle miscible pour traduire l'étalement du front de coulis au cours de la propagation. L'importance de la miscibilité dans la distribution de coulis a été constatée lors des essais unidimensionnels en laboratoire, la taille de la zone de transition augmente avec la longueur de l'injection. Le développement d'une zone de transition est traduit par le tenseur de dispersion (Eqn.4.36) qui illustre la dépendance de la dispersion à l'égard de la



Figure~8-28: Evolution du profil de concentration. Comparaison entre modèles numériques (μ) et ($\lambda + \mu$).

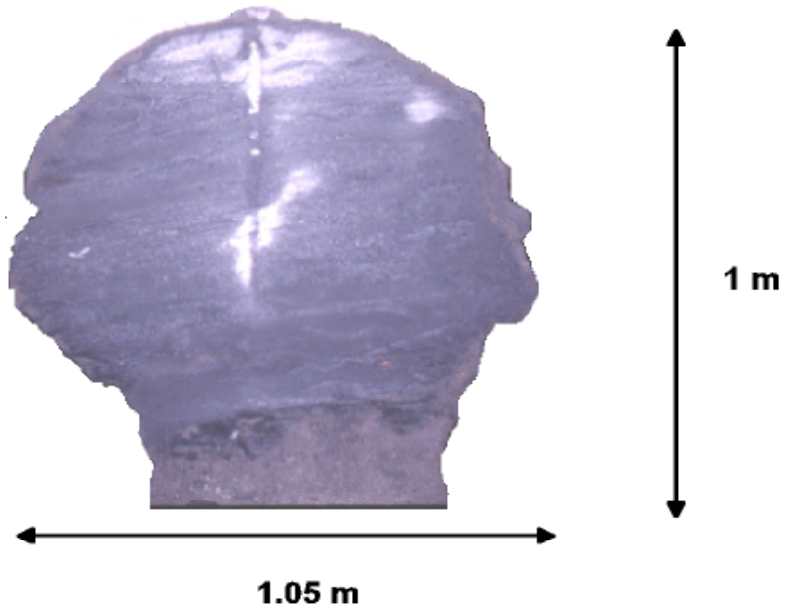
vitesse et, en conséquence, à l'égard du chemin total parcouru par le coulis et du temps écoulé depuis le début de l'injection.

La dispersion du coulis est mesurée par la largeur de la zone de transition comprise entre les valeurs relatives de concentration $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} = 0.159$ et $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{input}} = 0.841$ ([14]). En comparant le modèle (μ) au modèle $(\lambda + \mu)$, il est observé que la filtration n'entraîne pas de dispersion additionelle du coulis, la pente des courbes de concentration étant la même sur les deux modèles. Une sorte d'effet de retard peut par contre être constaté pour le modèle avec filtration. A mesure que la durée de l'injection augmente, le ralentissement de la vitesse d'avance du front de coulis, lié à la filtration, est plus marqué comparé à celui de la vitesse d'avance pour le modèle (μ).

De plus, $\overline{\rho^g}^f$ ne peut pas atteindre la valeur maximum $\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}$ à cause du processus de dépôt qui élimine une partie du coulis de la phase fluide, qui se dépose en surface du squelette solide. La dilution du coulis est donc plus importante pour le modèle $(\lambda + \mu)$ que pour le modèle (μ), à cause du phénomène de dépôt (filtration) en amont de l'écoulement. Les valeurs maximales de concentration en aval de l'écoulement sont plus réduites que lorsque la filtration est absente.

Après que l'injection ait été complétée, le modèle expérimental a été démonté 27 jours plus tard, et la masse de sol cimenté dégagée du modèle après solidification. La Fig.8-29 est une photographie du bulbe cimenté, retiré du modèle après solidification complète (et en retirant également les éléments les plus friables), qui montre une section approximativement circulaire, et une symétrie de révolution sphérique du bulbe a été constatée. Les dimensions verticales et radiales du bulbe sont reportées sur la figure. La seule information disponible est la taille et la forme du bulbe cimenté, qui indique la position approximative du front final en $r = 0.525\ m$ à $t \simeq 2500\ s$ (fin de l'injection).

La Fig.8-30 représente le champ de concentration numérique selon une section droite de la cuve à la fin de l'expérience d'injection au coulis. La zone injectée est de forme sphérique, conformément aux conditions d'axisymétrie et d'isotropie matérielle supposées pendant l'essai numérique. La zone comprise entre le tube d'injection et le rayon $r = 0.4\ m$ est presque complètement saturée en coulis, tandis que la région entre $r = 0.4\ m$ et $r = 0.6\ m$ atteste de l'importance du mélange du coulis avec l'eau interstitielle. Bien que la position finale du front sur cette figure corresponde à un coulis fluide, au comportement de type Newtonien avant que la prise et l'hydratation ne fassent sentir leurs effets, il peut être supposé que seul le domaine pour lequel $\frac{\overline{\rho^g}^f}{\left(\overline{\rho^g}^f\right)_{imp}} > 0.5$ produira un bulbe solide après prise et hydratation. Aussi, comme indiqué sur la Fig.8-30, les dimensions de la zone injectée (le front est situé en $r = 0.51\ m$) et les dimensions du bulbe concordent assez bien. Le front expérimental dans son plus grand diamètre est légèrement en avance (front situé à $r = 0.525\ m$), mais des effets d'inhomogénéité (mise en place des couches de sable) sont vraisemblablement présents. Une comparaison exacte requière une considération des couplages hydro-thermo-mécaniques induits par la prise et l'hydratation. Une partie du coulis injecté

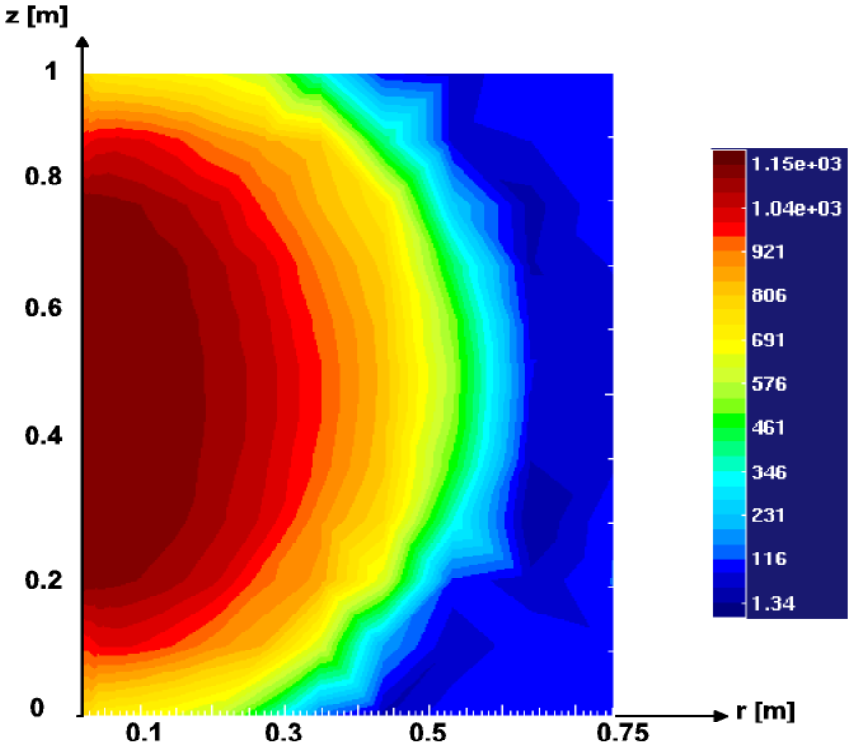


Figure~8-29: Bulbe solidifié.

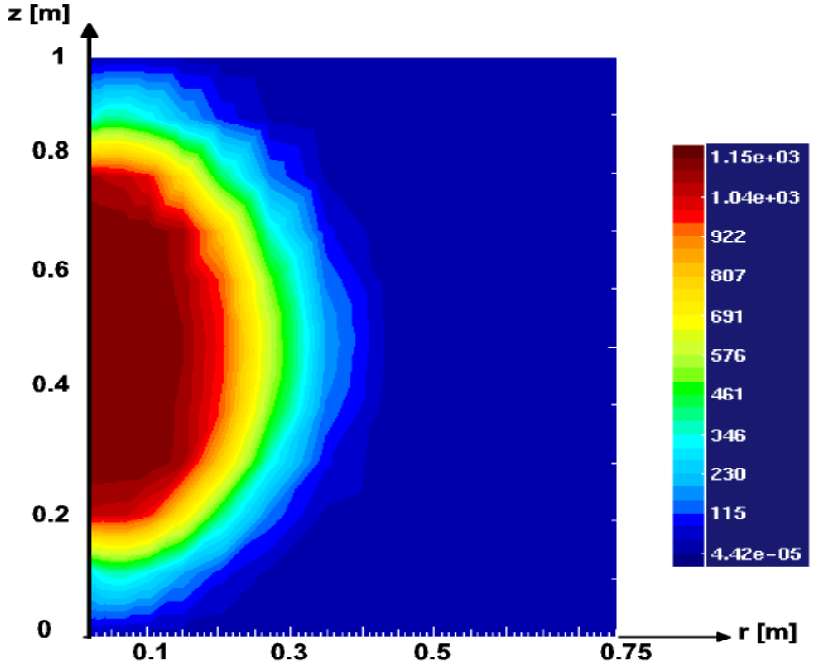
est évacuée avec l'eau interstitielle et ne va pas faire prise. Plusieurs modèles numériques ont été envisagés (modèle (w) , modèle (μ) et modèle $(\lambda + \mu)$), et le modèle $(\lambda + \mu)$ donne la meilleure adéquation avec l'allure observée de la zone injectée lors de l'essai, l'étendue de la zone injectée est trop importante pour les autres modèles pour concorder avec les dimensions latérales du bulbe.

Le volume total de coulis injecté pour la durée de l'essai coïncide complètement avec la quantité calculée à partir du modèle numérique (coulis présent dans la phase fluide interstitielle et coulis filtré). La quantité totale de coulis injecté s'élève à 249 litres. La position du front numérique et la distribution du coulis filtré permettent de calculer la quantité totale de coulis injecté dans le modèle numérique, qui s'élève à 242 litres (219 litres de coulis en solution, et 23 litres de coulis déposé).

Pour illustrer l'évolution de la propagation du coulis, le champ de concentration est représenté sur les Fig.8-31, 8-32 et 8-33, pour les instants $t = 300\ s$, $t = 900\ s$ et $t = 1500\ s$ respectivement. La décroissance radiale de la vitesse de déplacement explique l'avancée inégale du coulis au cours du temps, rapide au début de l'injection et plus progressive ensuite.



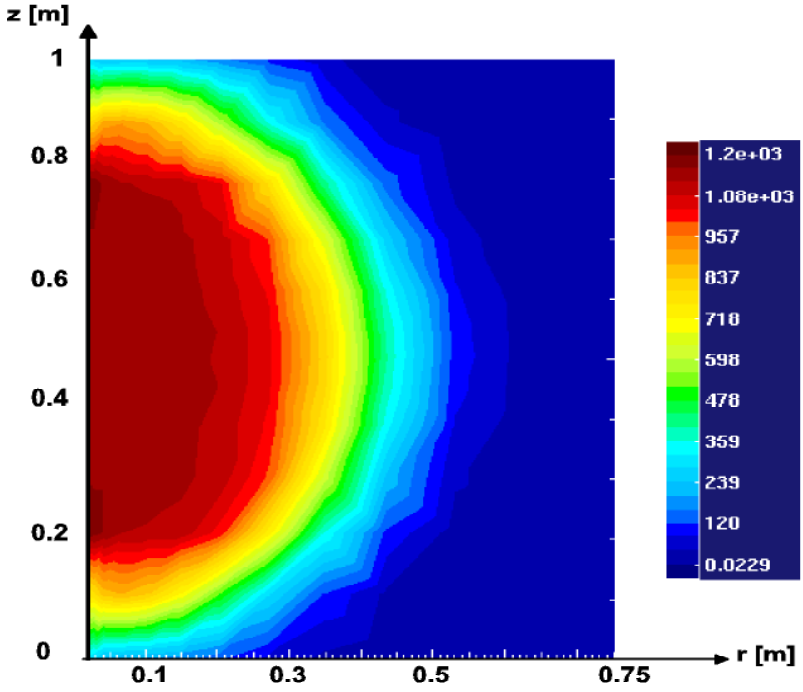
Figure~8-30: Champ de concentration à $t = 2500\ s$.



Figure~8-31: Champ de concentration à $t = 300\ s$.

8.5 Cas réel

Dans cette section, le modèle est confronté à une situation concrète d'injection précédant l'excavation d'un tunnel. Cette technique, décrite dans ([11]), permet de creuser des tunnels dans un sol incohérent, en minimisant les mouvements du massif consolidé par l'injection. Nicolini et Nova ([89]) présentent une série d'analyses élément fini de l'excavation d'un tunnel dans un soil non cohésif. Les résultats de l'analyse sont comparés à des déplacements mesurés pendant les phase d'injection puis d'excavation. Afin de retrouver les déplacements mesurés dans le massif durant la phase d'injection, une procédure complexe est suivie. Il est d'abord supposé que le massif initial comme le massif injecté ont un comportement élasto-plastique, le critère de Mohr-Coulomb est employé avec une plasticité non associée. Le module de compressibilité volumique K dépend de la contrainte hydrostatique, il est en outre supposé que seule la cohésion est affectée par le renforcement du massif. L'étape principale du calcul consiste ensuite en la simulation de l'effet de l'injection, et non de l'injection, sur le massif. Le régime hydraulique (pression, débit d'injection) et la propagation du coulis injecté ne sont pas pris en considération, leurs effets sur la déformation du squelette solide est traduit par une déformation anélastique imposée. L'incrément de

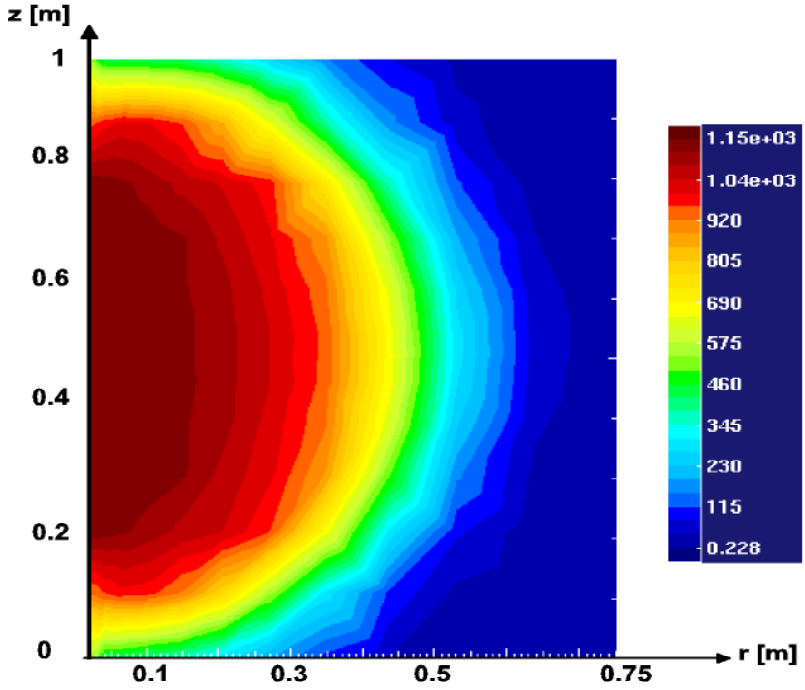


Figure~8-32: Champ de concentration à $t = 900\ s$.

déformation total est donné par ([89]) :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \Delta\varepsilon^{e}_{ij} + \Delta\varepsilon^{p}_{ij} + \Delta\varepsilon^{i}_{ij} \tag{8.4}$$

Dans l'Eqn.8.4, les indices e, p, et i désignent respectivement les déformations élastiques, plastiques et inélastiques. A partir d'une déformation imposée $\Delta\varepsilon^{i}_{ij}$, l'équilibre du massif est calculé en élasto-plasticité classique ([32]). Pour traduire la possibilité de claquage du massif (fissures autour du tube d'injection, qui sont comblées par le coulis et induisent des déplacements verticaux importants), la déformation inélastique imposée est anisotrope. Un paramètre α est introduit, lié à la forme et à la taille du bulbe injecté, en supposant que l'injection produit un bulbe sphérique (sans claquage) ou elliptique (avec claquage). Si des claquages horizontaux se forment le sol se soulève. Le phénomène se produit lorsque la valeur de la contrainte imposée dépasse celle résultant du poids du sol augmentée de la cohésion du massif. La valeur de α est fixée par analyse inverse à partir des déplacements mesurés sur site au cours de l'injection. Le modèle développé par Nicolini est Nova n'est donc pas un modèle prédictif, un grand nombre de simulations est effectué par les auteurs, en variant α et en combinant un certain nombre de bulbes, avant d'arriver à s'accorder avec les déplacements mesurés.



Figure~8-33: Champ de concentration à $t = 1500\ s$.

Le modèle de Nicolini et Nova est donc un modèle de milieu solide, aux interactions réelles entre matrice solide et phase fluide au cours de l'injection est substituée une déformation surajoutée qui s'apparente à un effort imposé. En particulier, aucune information n'est disponible sur les pressions fluides régnant dans le massif au cours de l'injection, ni sur la valeur du débit imposé ou les caractéristiques rhéologiques du coulis employé. Par ailleurs, le modèle élasto-plastique de Nova est plus complexe que la simple loi de Drucker-Prager qui a été implémentée (voir section 4.8.5). Compte tenu de ces considérations, il a été difficile de simuler, avec des caractéristiques physiques réalistes pour le coulis et pour le fluide, l'injection pratiquée par Nova. Partant de l'information sur la largeur du bulbe final - l'épaisseur de l'arche à injecter est d'environ 3 m, et en s'appuyant sur des valeurs concrètes de pressions et de débit d'injection ([113]), l'injection de l'arche autour de la voûte du tunnel à creuser a été simulée en élasticité linéaire. Les caractéristiques employées sont données dans le tableau 8.4, les caractéristiques du coulis sont celles de l'essai en cuve. Les caractéristiques élastiques sont celles données par Nicolini et Nova. Le domaine est discrétisé par un maillage [30x30] régulier. Le problème est un problème de contraintes planes. Les points d'injection sont disposés de manière à figurer une voûte de tunnel, la zone de traitement étant limitée à une arche de 15 m de diamètre intérieur, d'épaisseur 3 m, et de 12.5 m de hauteur. Le débit d'injection imposé s'élève à 30 $l \cdot \mathrm{min}^{-1}$.

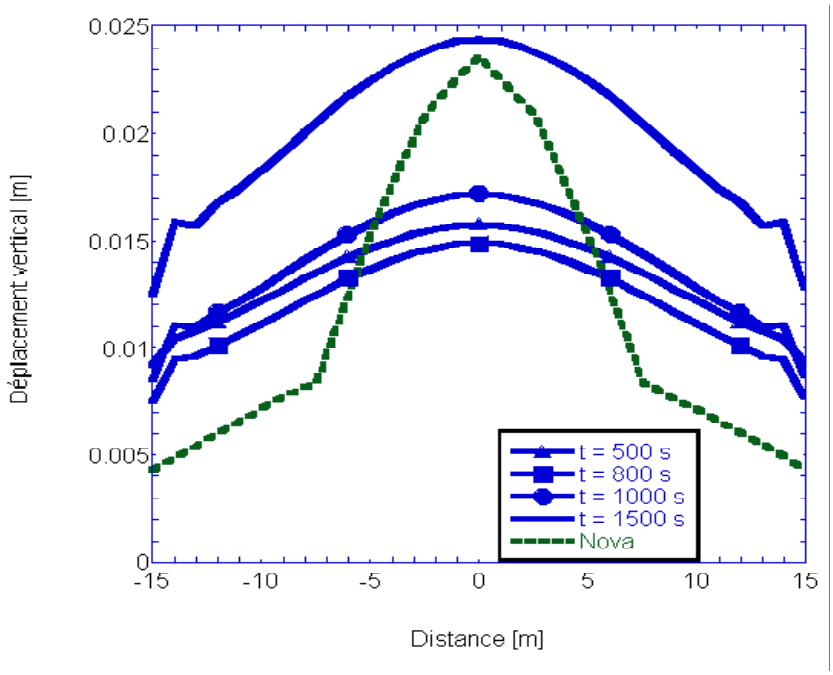
Table 8.4 Propriétés du sable et de la phase fluide employées.

module d'Young E	105 MPa (Nova)
coefficient de Poisson ν	0.25 (Nova)
porosité initiale n_0	0.34
densité initiale du squelette $(\overline{\rho_s}^s)_0$	$2.66 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
perméabilité intrinsèque k	$2 \cdot 10^{-11}\ m^2$
dispersivité longitudinale a_L	$2 \cdot 10^{-2}\ m$
taux de filtration λ	$1.5 \cdot 10^{-4}\ s^{-1}$
viscosité initiale du fluide (eau)	$1.1 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
viscosité du coulis pur	$2.5 \cdot 10^{-3}\ Pa \cdot s$
densité initiale du fluide (eau) $\overline{\rho^w}^f$	$10^3\ kg \cdot m^{-3}$
densité du coulis $\overline{\rho^g}^f$	$1.15 \cdot 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
compressibilité fluide β_p	$3 \cdot 10^{-8}\ Pa^{-1}$
coefficient de concentration β_c	$0\ Pa^{-1}$
diffusion moléculaire D^{*gw}	$10^{-10}\ m^2 \cdot \sec^{-1}$

8.5.1 Calcul élastique

Les résultats du calcul élastique sont donnés sur les Figs.8-34 à 8-39. Sur la Fig.8-34 qui représente le soulèvement du massif sous l'effet de l'injection, la confrontation avec les résultats de Nicolini et Nova montre un écart important entre les déplacements calculés par analyse élastique et les déplacements déterminés par Nicolini et Nova à partir d'une analyse élasto-plastique complexe, pour laquelle seule la composante verticale des déformations anélastiques $\Delta\varepsilon^i_{ij}$ est prise non nulle. Par contre les déplacements en clé de voûte concordent pour les deux simulations, les ordres de grandeur du déplacement sont proches ailleurs, ce qui permet de valider en partie les choix arbitraires effectués pour calculer le régime hydraulique. Le calcul purement élastique et la disposition approximative des points d'injection (voir Fig.8-35, les points d'injection correspondent à la zone de concentration maximale) peuvent expliquer les écarts observés. En particulier, contrairement à la déformation verticale imposée dans ([89]), la pression d'injection n'induit pas des déplacements purement verticaux, ce qui explique que le massif ne subisse pas un mouvement d'ensemble comme celui observé dans ([89]).

Les Figs.8-35 à 8-39 représentent les résultats de concentration et de pression obtenus à partir du problème couplé d'écoulement, de transport et d'équilibre (Eqns.5.41 à 5.45 du chapitre 5). Les pressions sont particulièrement élevées au niveau de la clé de voûte de l'arche injectée (Fig.8-39), néanmoins l'augmentation de pression est conséquente sur l'ensemble du massif injecté. Les résultats, s'ils sont confrontés à des essais sur site, paraissent réalistes. Dans ([113]), la pression relevée au cours de l'injection



Figure~8-34: Soulèvement lié à l'injection. Comparaison entre résultats numériques.

de consolidation d'une section de tunnel s'élève à 3 $bars$.

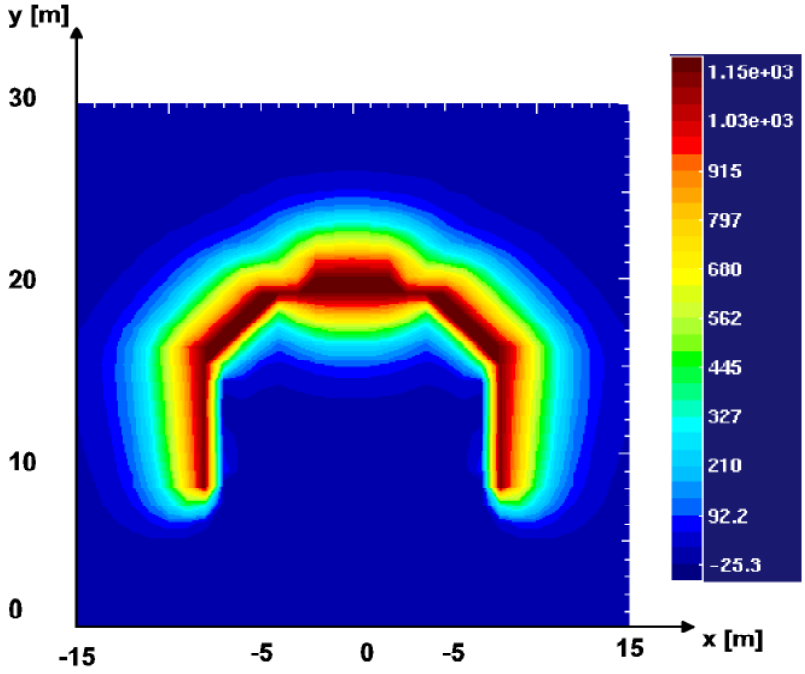
8.5.2 Calcul plastique

Dans le même esprit que Nicolini et Nova qui étudient plusieurs configurations d'injection cylindriques et sphériques, dans un ordre de difficulté croissante, partant d'une injection sphérique avec un point d'injection unique, une injection sphérique avec deux points d'injection est simulée avec la loi de plasticité de Drucker-Prager. Les caractéristiques du problème sont les mêmes que pour le cas précédent, excepté les caractéristiques élastiques et plastiques : $E = 45\ MPa$, $\nu = 0.3$, $c = 21\ kPa$ et $\phi = 0.5$ (sable du Léman). Le problème est plan. Le coulis est injecté depuis deux tubes de longueur finie $0.2\ m$, positionnés en $x = -0.2\ m$ et $x = 0.2\ m$ respectivement. Le débit d'injection s'élève à $6.4 \cdot 10^{-4}\ m^3 \cdot s^{-1}$.

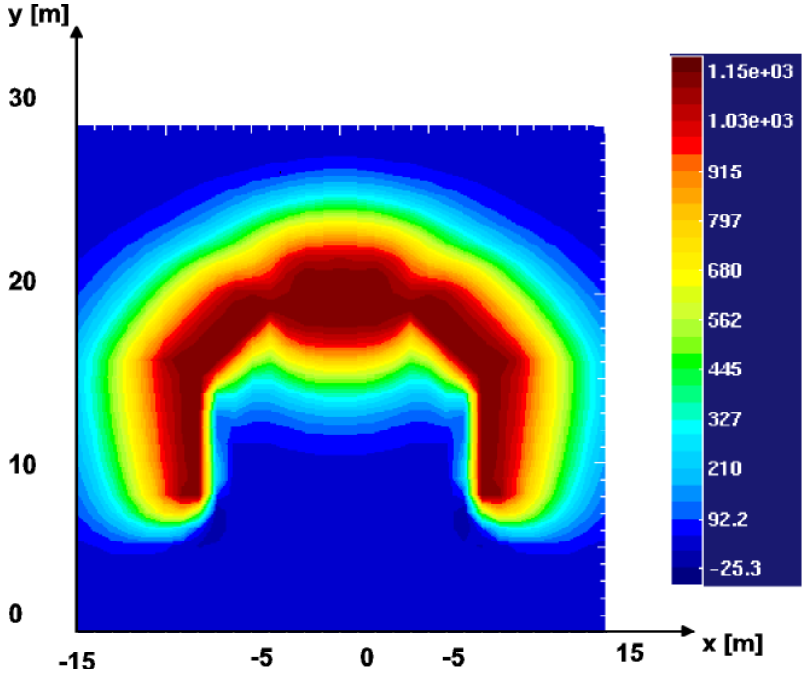
Le soulèvement vertical en surface est représenté sur la Fig.8-40. Le développement de la zone plastique apparaît sur la Fig.8-41, montrant que la plastification débute et se poursuit autour du tube d'injection.

Les champs de pression et de concentration sont représentés sur les Figs.8-42 à 8-46. Compte tenu des conditions imposées, les solutions obtenus sont symétriques par rapport à l'axe central du massif.

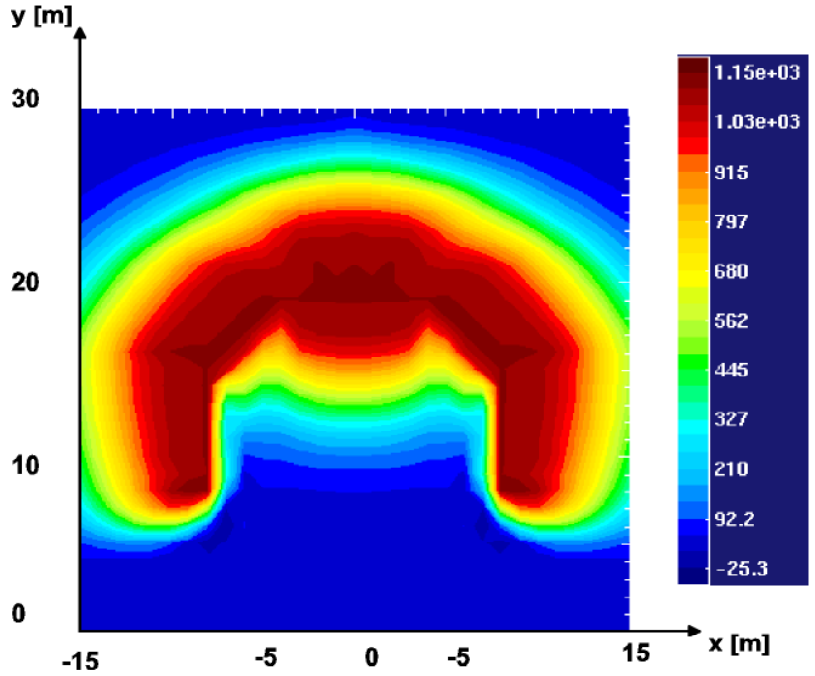
Pour conclure, en l'absence de valeurs de pression ou de concentration, les résultats présentés ne



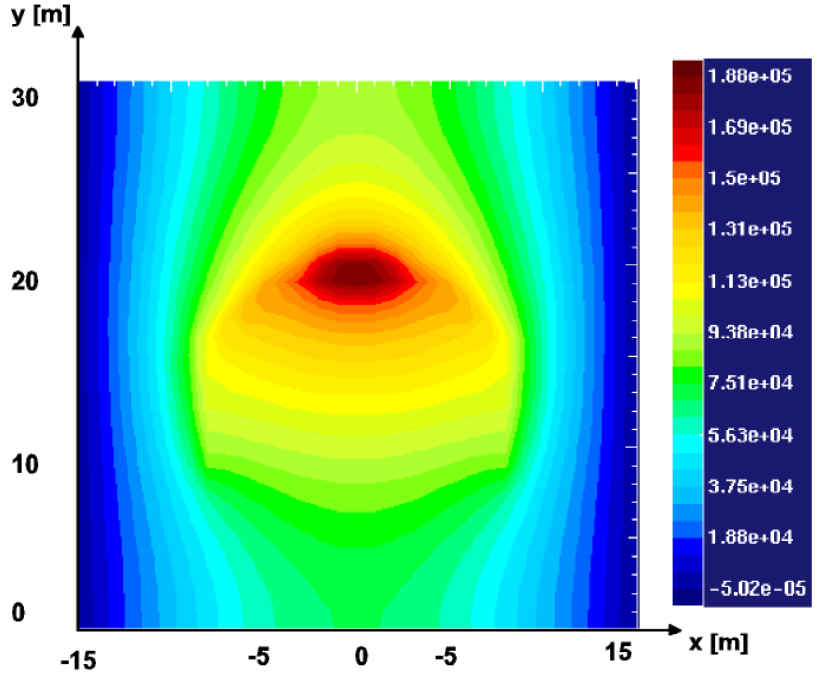
Figure~8-35: Champ de concentration à $t = 500\ s$.



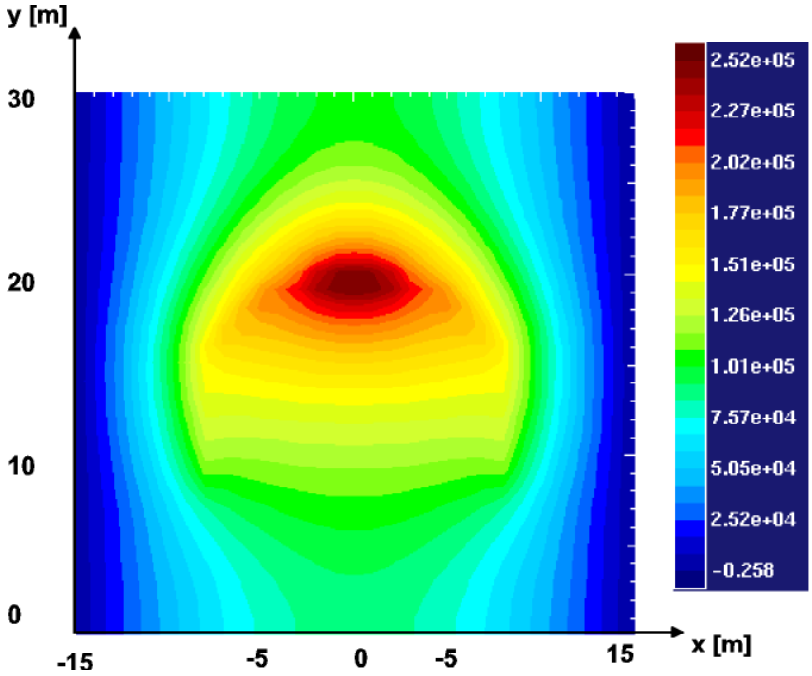
Figure~8-36: Champ de concentration à $t = 1000\ s$.



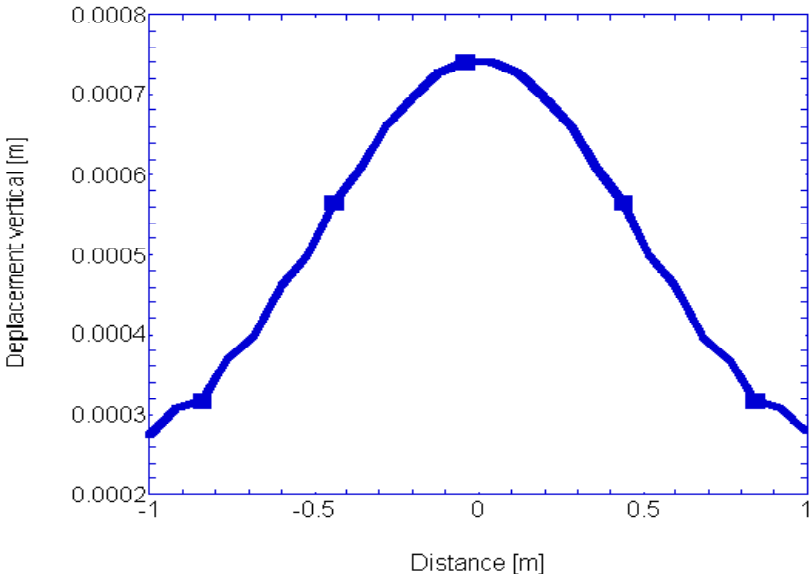
Figure~8-37: Champ de concentration à $t = 1500\ s$.



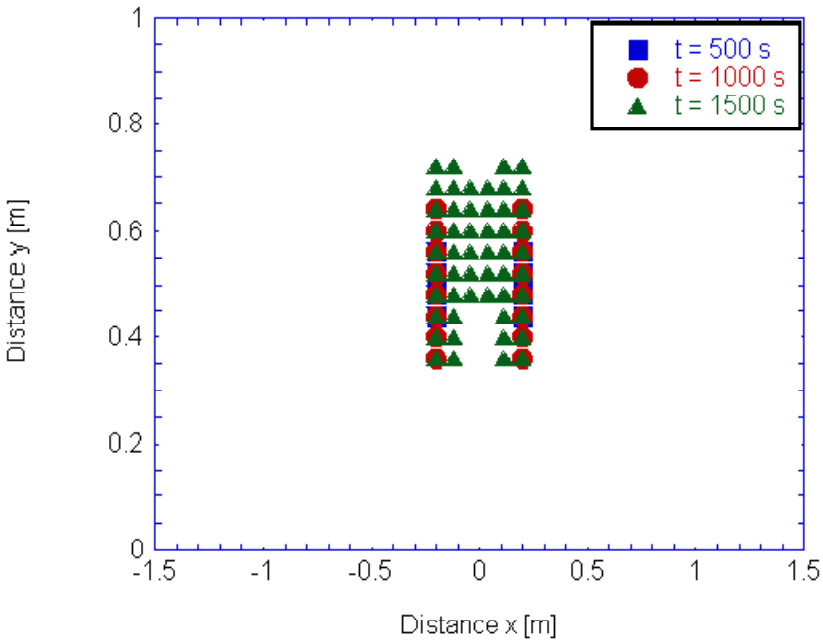
Figure~8-38: Champ de surpression interstitielle à $t = 500\ s$.



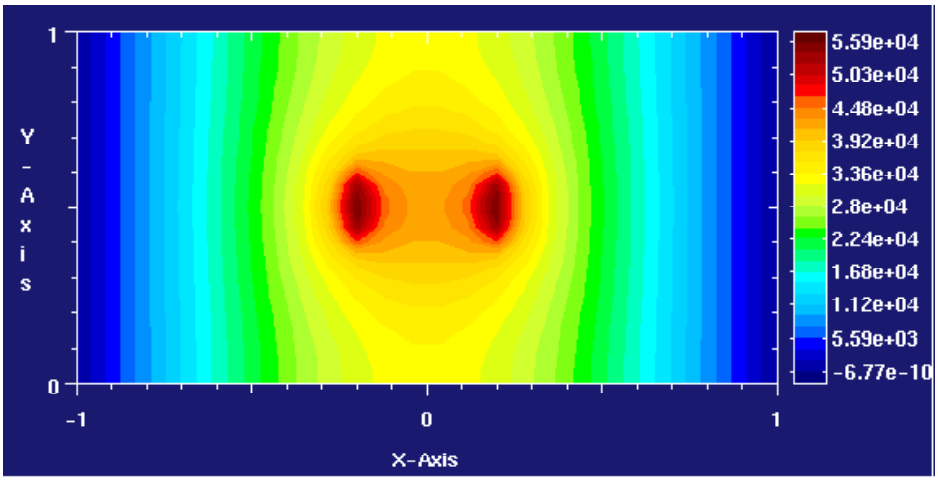
Figure~8-39: Champ de surpression interstitielle à $t = 1500\ s$.



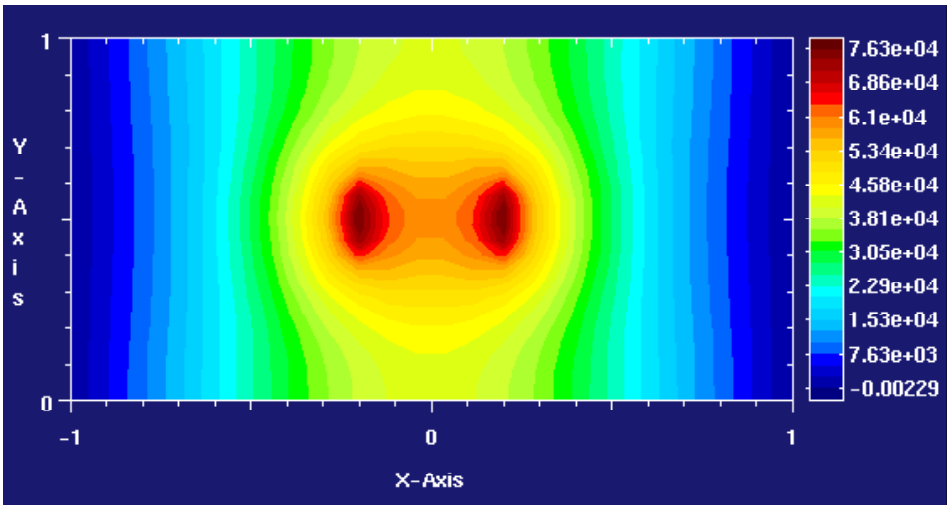
Figure~8-40: Déplacement vertical à la fin de l'injection ($t = 1500\ s$).



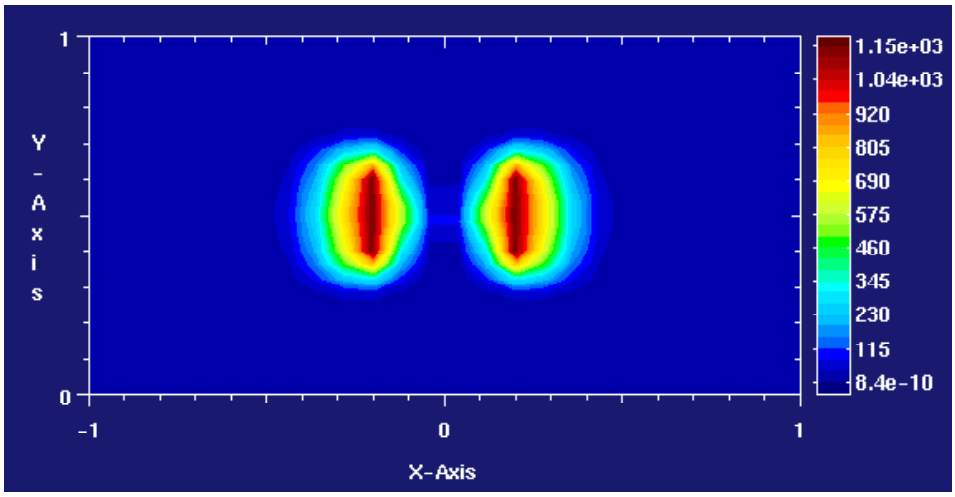
Figure~8-41: Plastification du massif.



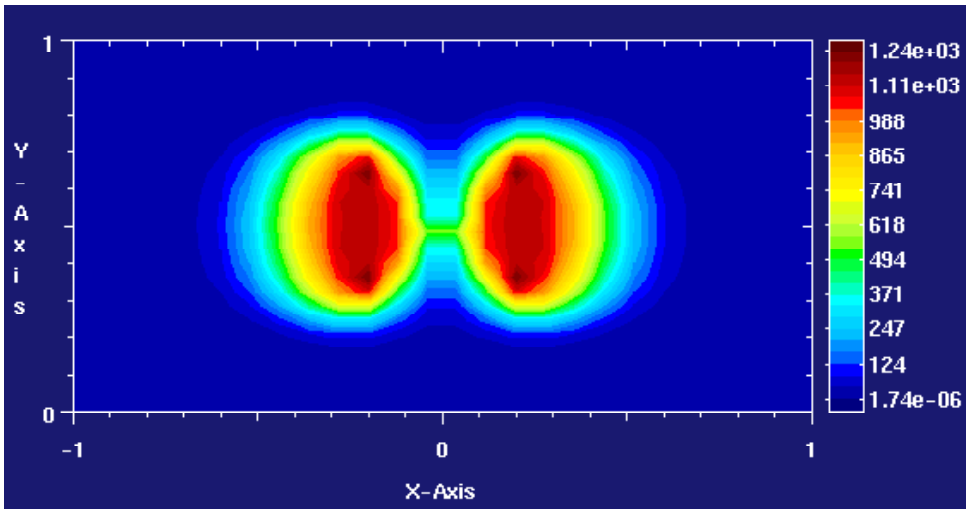
Figure~8-42: Champ de surpression interstitielle à $t = 100\ s$.



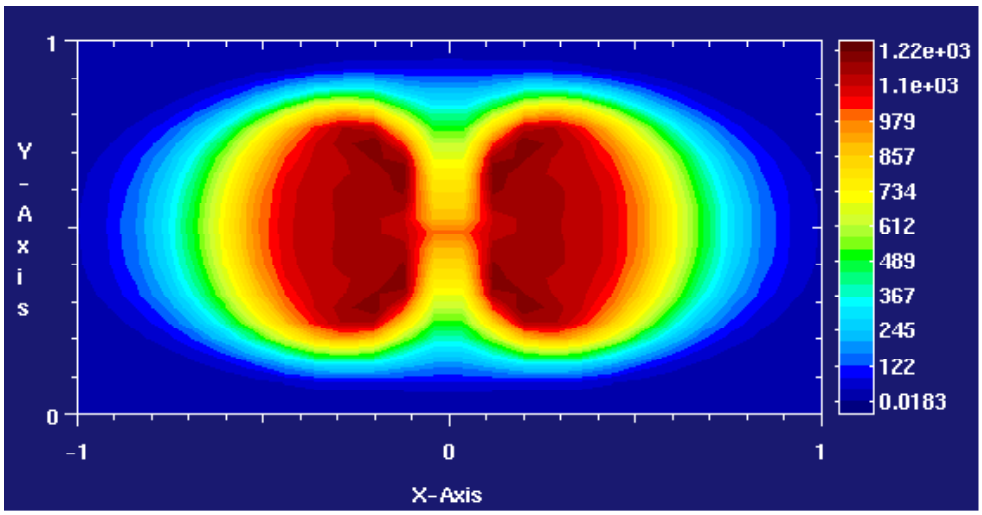
Figure~8-43: Champ de surpression interstitielle à $t = 1500\ s$.



Figure~8-44: Champ de concentration à $t = 100\ s$.



Figure~8-45: Champ de concentration à $t = 500\ s$.



Figure~8-46: Champ de concentration à $t = 1500\ s$.

constituent que des scénarios possibles d'injection ([89]), qui s'avèrent utiles toutefois pour améliorer la compréhension de l'effet de l'injection sur les structures avoisinantes. Sans offrir une validation du modèle, l'étude précédente montre que les résultats du code développé sont réalistes, pour les déplacements et les pressions calculés, et proches de valeurs rencontrées en situations concrètes d'injection. L'ordre de grandeur des déplacements obtenus, pour le cas élastique comme pour le cas plastique, illustre l'importance d'un modèle qui intègre de manière non discriminatoire les aspects d'écoulement et les aspects de déformation du squelette solide, sans accorder de préférence au problème d'écoulement ([7], [58]) ou d'équilibre ([89]).

8.6 Conclusion

Sur la base des résultats et des observations précédentes, le processus d'injection dans un milieu déformable peut être décrit à un niveau macroscopique par l'ensemble des équations de champ obtenues en exprimant la conservation de la masse pour le coulis miscible, la phase fluide et la phase solide, ainsi que la conservation de la quantité de mouvement globale, en s'appuyant sur la représentation conceptuelle d'un milieu poreux donnée par Bear, complétée par l'ajout d'hypothèses physiques concernant la propagation de la suspension de coulis miscible. La propagation du front de coulis sous l'effet du transport convectif au sein de la phase fluide, la dilution du front de coulis par dispersion hydromécanique, et le retard de l'avançée du front de coulis sous l'effet de la filtration sont compris dans l'équation de transport, et illustrés par l'évolution du front de concentration du coulis au cours de l'injection. L'équation d'écoulement donne la distribution de pression dans le milieu poreux, une croissance importante des pressions est constatée à mesure que le front de coulis progresse dans le massif, révélant le couplage entre l'écoulement de la phase fluide dans son ensemble et le transport du coulis.

Comme il a été observé au cours des essais unidimensionnels, et confirmé par les essais en grandeur réelle, le profil de pression peut être séparé en deux régions distinctes durant la propagation du coulis. La zone du massif dans laquelle se produit une montée en pression conséquente est la zone qui contient du coulis en quantité suffisante pour provoquer une montée en pression, tandis que les valeurs de pression dans la zone restante restent proches du niveau de pression initial.

En l'absence de filtration, la pression se stabilise lorsque la quasi-totalité du domaine est injectée lors des essais en colonne ou en cuve. Lorsque la filtration est présente, la croissance de pression se complique d'autres phénomènes, le régime transitoire se poursuit bien au-delà de la phase initiale de propagation.

Une autre remarque mérite d'être faite concernant l'allure des courbes de pression obtenues lors des essais avec filtration. L'évolution des pressions est en accord avec les courbes classiques de pression dans les processus de filtration : l'augmentation des pressions est linéaire, puis est suivie d'une courbe à

gradient constant ([84]). La présence de points d'inflexion sur les courbes de pression a également été constatée lors des essais d'injection en grandeur réelle avec les mêmes matériaux. Une explication possible peut être avançée en considérant un mode de dépôt en plusieurs étapes, parmi lesquelles : dépôt régulier, occlusion, compliquées éventuellement d'effets de réentraînement et de redéposition des particules.

Le taux de croissance de la pression d'injection est affecté par la viscosité dynamique de la solution de coulis, mais également par la variation de perméabilité du milieu sous l'effet de la filtration, lorsque les effets de dépôt cumulé deviennent dominants. Les variations de viscosité et de perméabilité sont gouvernées par la variation de concentration du coulis, induisant un couplage bilatéral entre l'augmentation de pression et l'évolution de concentration. Les effets de filtration et de viscosité sont complémentaires.

La confrontation précédente entre les résultats expérimentaux et en laboratoire montre que la pression fluide, la concentration du coulis et le déplacement solide sont fortement couplés non seulement au cours de la phase de propagation, mais tant qu'un flux d'injection est maintenu. En particulier, en l'absence de données de concentration, le progrès de l'injection peut être suivi d'après l'évolution des pressions dans le massif injecté. Du point de vue du monitoring de l'injection, sans fournir la position exacte du front de coulis, le profil de pression constitue néanmoins un bon indicateur de la propagation du coulis.

Les résultats de l'injection en cuve montrent que la filtration et les variations des propriétés physiques du fluide influencent beaucoup plus les déplacements solides, la pression fluide et les distributions de concentration, que les aspects de consolidation classique. Les essais entrepris sur des modèles unidimensionnels ou tridimensionnels ne sont pas concluants concernant les déformations solides au cours de la propagation : les déplacements sont faibles, mais les déformations sont empêchées par les conditions aux limites imposées, bien plus contraignantes que celles existantes sur site. L'intérêt s'est donc naturellement porté sur la propagation et l'écoulement.

Par contre, l'étude de cas réel montre l'importance du couplage hydro-mécanique.

Chapitre 9

CONCLUSION GENERALE

Dans le but d'analyser le mécanisme de propagation d'un coulis de type suspension dispersée à travers un sol lors d'une injection, un modèle mathématique a été développé, basé sur la théorie des écoulements de fluides miscibles en milieu poreux déformable. Les résultats numériques ont été comparés aux expériences en laboratoire afin de valider les performances du modèle d'un point de vue phénoménologique. Plusieurs quantités importantes concernant l'opération d'injection, telles que la pression d'injection, la distance de perméation (longueur d'injection), les champs de pression, de concentration et de déplacement ont été examinées en détail. Parmi les processus physiques qui ont été étudiés, on peut citer : le transport de masse du coulis, la miscibilité du coulis avec l'eau interstitielle, le dépôt de masse du coulis en surface du squelette solide, incluant des modifications structurales, le couplage hydro-mécanique, l'évolution des propriétés fluides (viscosité, densité) sous l'effet de la propagation du coulis.

Les résultats numériques simulant la propagation d'un coulis à base de ciment microfin, ont été confrontés à des essais en laboratoire, unidimensionnels et en grandeur réelle, et montrent la capacité du modèle théorique à prédire l'allure de l'écoulement dans son ensemble et la distribution du coulis, ainsi que les déformations solides sous des conditions d'injection réalistes. L'essai en cuve a véritablement permis d'effectuer une validation du modèle sur le plan phénoménologique. De cet essai, il est possible de conclure à un couplage important entre l'évolution des pressions et des concentrations, à l'effet de retard du champ de concentration lié à la filtration, à un couplage hydromécanique faible, mais sous des conditions aux limites restrictives.

Le logiciel développé permet d'évaluer la distribution d'un coulis injecté dans un sol et les effets liés à l'injection (montée en pression, déplacements), et peut servir de base au développement d'une méthodologie d'injection efficace et rationnelle. Le modèle proposé est une première tentative pour représenter le processus de propagation du coulis dans un milieu poreux saturé déformable, en tenant

compte des mécanismes physiques prépondérants, au moins à une premier ordre d'approximation.

Les résultats numériques obtenus lors de l'étude de cas réel sont représentatifs, lorsqu'ils sont confrontés à des résultats obtenus sur site, et doivent être considérés comme des résultats préliminaires en vue de l'application à des cas concrets d'injection.

Les essais en grandeur réelle ont permis de retrouver le phénomène de filtration qui engendre une montée en pression plus conséquente que dans les essais sur colonne unidimensionnelle. En ce sens, les deux types d'essais entrepris s'éclairent mutuellement. L'analyse des essais unidimensionnels et en grandeur réelle a montré que la filtration doit être étudiée plus en détail. La prise en compte de la filtration dans le modèle s'est appuyée sur la littérature existante dans le domaine de la chimie. En l'absence de données expérimentales de filtration, aux expressions générales établies ont dues être substituées des lois semi-empiriques, lois qui reposent toutefois sur des hypothèses cohérentes concernant le mode de dépôt, la morphologie du dépôt, les interactions entre grain et suspension et leur conséquence sur la structure du milieu filtre. L'approche macroscopique, employée pour l'écriture des lois de filtration, simplifie considérablement les phénomènes microscopiques qui se produisent réellement au cours de l'écoulement dans les milieux filtres.

Des études expérimentales et théoriques additionnelles restent nécessaires afin de conduire à un modèle plus complet : le taux de dépôt λ peut être une fonction du champ de concentration, et peut décroître avec la masse de dépôt cumulé. La morphologie du dépôt et les mécanismes conduisant au dépôt restent à étudier pour la suspension particulière de coulis étudiée, avant d'envisager des généralisations plus poussées. Les lois semi-empiriques de filtration employées autorisent un mode de dépôt critique (colmatage, obstruction des pores) par l'ajustement de constantes expérimentales arbitraires. Un modèle plus raffiné doit intégrer des caractéristiques de la structure poreuse autres que la porosité, telles que la surface spécifique. Si seule la porosité est retenue pour traduire les effets de dépôt, seul un mode de dépôt régulier et isotrope (n est un scalaire) peut être reproduit.

L'amélioration du modèle de filtration passe par une étude microscopique et l'obtention de données de filtration. La connaissance de la quantité de dépôt ne suffit pas à définir l'effet du dépôt de particules, il faut connaître également la façon dont le dépôt affecte la microstructure du milieu poreux ([111]). Un modèle de filtration complet impose de connaître le mécanisme de dépôt des particules sur les grains du milieu poreux ([95]). Comme pour la dispersion, la microstructure est essentielle dans l'étude de la filtration. Néanmoins, plus que l'expression employée pour le terme de filtration au cours des confrontations aux expériences, c'est la manière dont il est introduit dans le modèle et sa forme générale qui comptent.

Un des problèmes majeurs rencontrés lors de l'établissement et du développement itératif du modèle est relié à l'insuffisance des informations expérimentales. Aucune information n'a pu être trouvée dans

la littérature concernant la filtration de coulis de ciment microfins, et parce que les caractéristiques de filtration dépendent fortement des espèces en solution (potentiel ionique), l'information ne peut pas être extrapolée à partir d'autres matériaux possédant les mêmes propriétés physiques. Bien que des taux de dépôt hétérogènes soient possibles avec le modèle développé, une expression du taux de dépôt au premier ordre $\lambda\overline{\rho^g}^f$ avec $\lambda = cte$ a été retenue, principalement par manque de données de concentration ou de densité de coulis déposé. Des données de filtration complètes incluent des mesures de concentration en coulis dans l'échantillon. La détection du front de coulis a été rendue possible par des procédés d'analyse d'images, mais la mesure de champ de concentration dans l'échantillon demeure inaccessible. A cet égard, la confrontation entre le modèle et l'expérience est incomplète.

En l'absence d'information sur les mécanismes de prise et d'hydratation, et sur l'exothermie des réactions impliquées, les transferts d'énergie ont été négligés. Ils n'ont pas été décelés lors des essais en laboratoire, et sur site, ils apparaissent au bout de plusieurs heures, après la phase de propagation proprement dite. Toutefois, si les aspects énergétiques sont négligeables lors de la propagation du coulis, les couplages thermiques existent bel et bien lors de la prise et l'hydratation progressives d'un coulis de ciment injecté dans un milieu poreux déformable ([113]). Au cours de l'hydratation, la suspension devient solide, la modification de la structure interne du coulis s'accompagne d'un dégagement de chaleur (exothermie de la réaction). Un parallèle intéressant peut être fait entre la filtration et la réaction d'hydratation. La filtration et l'hydratation sont des phénomènes réactifs. La filtration peut a priori être traitée par modification de la loi de perméabilité et par un terme de réaction dans les équations de conservation de la masse des différents constituants, et l'hydratation pourrait être traitée par un terme analogue. Si l'hydratation se produit dans la masse du fluide, le terme de réaction volumique est concerné. Si l'hydratation a lieu au niveau de l'interface solide-fluide, comme pour la filtration, c'est le terme d'interface qui doit être reconsidéré. Toutefois un modèle plus rigoureux passe par une formulation thermodynamique. Cette formulation n'a pas été abordée, une approche plus pragmatique ayant été poursuivie jusqu'à présent pour postuler la forme des lois constitutives. Une étude thermodynamique doit être entreprise, pour couvrir les aspects d'hydratation, et achever le développement du modèle théorique (premier et second principes).

Enfin, il convient de mentionner une étude portant sur la filtration en surface de collecteurs isolés, particulièrement intéressante car elle permet d'avoir une vue unifiée sur la filtration et l'hydratation. Beizaie ([16]) distingue trois étapes successives au cours du dépôt. Au cours de l'étape initiale, le collecteur reste pratiquement intact, la présence de particules déposées a un effet négligeable. La seconde étape est une étape de croissance dendritique, caractérisée par la formation et la croissance de dendrites. Au cours de cette étape, une quantité croissante de particules se déposent sur des particules déjà déposées. L'étape finale est l'étape de croissance solide. La récupération des particules est entièrement due au dépôt sur

les particules déposées, et les dendrites individuelles se dstinguent de moins en moins à mesure qu'elles sont mélangées et interconnectées. L'emploi du modèle de Bezaie empêche la considération de l'effet dû à la présence de grains voisins. Cependant, la conjonction du modèle de Bezaie avec un modèle de milieu poreux plus réaliste peut être appliquée à l'étude de l'occlusion du milieu filtre. Par ailleurs, cette étude est à rapprocher d'une autre étude se rapportant aux problèmes de solidification des alliages ([2]). La solidification se traduit par l'existence d'une phase solide qui occupe progressivement le domaine initialement occupé par la phase liquide initiale, et d'une zone de transition. Si la solidification est de type dendritique, le liquide et la fraction solide s'interpénètrent, et l'interface qui les sépare est de forme irrégulière. Aussi, même si les phénomènes physiques auxquels renvoient respectivement la solidification et la filtration sont fondamentalement différents, les mécanismes concernés pourraient posséder des similitudes permettant d'envisager un traitement unifié. Si l'hydratation du coulis de ciment dans le sol s'effectue par un mécanisme du type croissance dendritique, une même formulation théorique peut être envisagée pour traiter à la fois la filtration et la solidification. Pour répondre à cette question, la physique de l'hydratation d'un coulis de ciment dans un sol doit être préalablement étudiée. En particulier, la formulation développée dans la thèse peut être facilement étendue pour traiter la solidification, en tenant compte cette fois des transferts thermiques.

Au cours du processus de solidification, les contraintes mécaniques et thermo-mécaniques induites sont vraisemblablement suffisamment élevées pour provoquer des déplacements et des déformations non négligeables au sein du milieu injecté pour des conditions d'injection en grandeur réelle. Des développements additionnels incluent la prise en compte des effets thermo-hydro-mécanique induits lorsque l'hydratation et la solidification débutent. En particulier, une relation contrainte-déformation plus complexe est attendue lors de l'hydratation et de la solidification du coulis.

L'efficacité du traitement doit être évaluée en termes d'augmentation de la résistance mécanique, de réduction de perméabilité et de diminution de porosité. En particulier, pour évaluer l'uniformité du traitement de la zone injectée, des essais de porosimétrie au mercure peuvent être employés afin de caractériser la microstructure du sol injecté (distribution de taille des pores, [101]). La confrontation de la ditribution de porosité du milieu injecté à la distribution initiale de porosité, plus étendue, est particulièrement utile pour étayer l'étude des phases de prise et d'hydratation du coulis injecté.

Le milieu poreux étudié dans les essais en laboratoire est un milieu idéalisé. Le milieu poreux réel est hétérogène par nature, son comportement est généralement anisotrope, il comporte des fissures (fractures) et des vides qui provoquent des effets indésirables lors de l'injection. La zone effectivement traitée peut être très différente du résultat voulu ([23]). Lors de l'injection des sols, les vides ne sont pas nécessairement tous comblés, la conséquence est immédiate pour les propriétés mécaniques du sol injecté consolidé. La présence de vides non comblés ou de poches d'eau résiduelles conduit à des zones de moindre

résistance ([89]). Dans les poches d'eau résiduelle, le coulis est dilué une fois au repos avant de faire prise, et la concentration est inférieure à la concentration imposée. Cette hétérogénéité dans la distribution du coulis renvoie aux propriétés du sol en place. Une loi de perméabilité anisotrope et hétérogène est plus représentative du milieu, mais il est difficile de traduire de manière mathématique dans un modèle macroscopique le fait que tous les pores ne sont pas ouverts au coulis. Une contribution au modèle dans ce sens constituerait un apport essentiel.

Chapitre 10

ANNEXES

Bibliographie

[1] Recommendations on Grouting for Underground Works. *Tunneling and Underground Space Technology*, vol. 6, no. 4, 1991.

[2] Ahmad N., *Numerical Simulation of Transport Processes in Multicomponent Systems Related to Solidification Problems*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne n0. 1349, 134 p., 1995.

[3] Almosni A., *Injection d'un Fluide Miscible dans un Milieu Poreux*, Rapport de Stage Scientifique LMS-EPFL, 34 p., avril-juillet 2000.

[4] Arge E., Bruaset A.R., Langtangen H.P., Object-Oriented Numerics, p. 7-26, in : *Numerical Methods and Software Tools in Industrial Mathematics*, ed. M. Daehlen, A. Tveito, Birkhäuser, Boston, 1997.

[5] Arge E., Bruaset A.M., Calvin P.B., Kanney J.F., Langtangen H.P., Miller C.T., On the Numerical Efficiency of C++ in Scientific Computing, p. 91-118, in : *Numerical Methods and Software Tools in Industrial Mathematics*, ed. M. Daehlen, A. Tveito, Birkhäuser, Boston, 1997.

[6] Auriault J.L., Caillerie D., Quelques Remarques sur les Méthodes d'Homogénéisation, *Revue Française de Géotechnique*, vol. 49, p. 43-50, octobre 1989.

[7] Azzar G., *Modélisation des Injections de Coulis de Bentonite-Ciment dans les Sols*, Thèse de l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers de Bordeaux, 255 p., 1997.

[8] Baca R.G., *Development of Advanced Computational Techniques for the Equations of Porous Flow and Transport*, Ph.D. Thesis, The Washington State University, 110 p., May 1997.

[9] Bachmat Y., The Dispersive Flux in Transport Phenomena in Porous Media, *Advances in Water Resources*, vol. 6, p. 169-174, september 1983.

[10] Balat & Krish, *Grouting Theory and Practice*, E.Nonveiller, Ed. Elsevier, 1982.

[11] Balossi Restelli A., Castellotti U., Ceccolini E., Ghelfi G., Finzi B., Blind Hole Tunnel for an Underground Station in Milan: Finite Element Analysis and Comparison with in Situ Measured Settlements, in: *Proceedings Int. Conf. Tunnels et Microtunnels en Terrain Meuble, Paris, Presses Ponts et Chaussées*, p. 295-306, 1989.

[12] Barton J.J., Nackman L.R., *Scientific and Engineering C++, An Introduction with Advanced Techniques and Examples*, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.

[13] Bear J. and Yehuda Bachmat, *Introduction to Modeling of Transport Phenomena in Porous Media*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[14] Bear J., Some Experiments in Dispersion, *Journal of Geophysical Research*, vol. 66, n0. 8, p. 2455-2467, august 1961.

[15] Bear J., Verruijt A., *Modeling Groundwater Flow and Pollution, Theory and Application to Transport in Porous Media*, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht,1987.

[16] Beizaie M., *Particle Deposition on Single Collectors*, Ph.D Thesis, Syracuse University, N.Y., 1977.

[17] Bird R.B., Stewart W.E., Lightfoot E.N., *Transport Phenomena*, Wiley, 1960.

[18] Bouchelaghem F., Laloui L., Vulliet L., Descoeudres F., Numerical Model of Miscible Grout Propagation in Deformable Saturated Porous Media, *7th Int. Symp. on Numerical Models in Geomechanics*, NUMOG, Graz, p. 243-248, 1999.

[19] Bouchelaghem F., Vulliet L., Mathematical and Numerical Filtration-Advection-Dispersion Model of Miscible Grout Propagation in Saturated Porous Media, accepted for publication in *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.

[20] Bouchelaghem F., Vulliet L., Leroy D., Laloui L., Descoeudres F., Real Scale Miscible Grout Injection Experiment and Performance of Advection-Dispersion-Filtration Model, to be published in *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*.

[21] Brooks A.N., Hughes T.J.R., Streamline Upwind/Petrov Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 32, p. 199-259, North-Holland, 1982.

[22] Bruaset A.M., Langtangen H.P., A Comprehensive Set of Tools for Solving Partial Differential Equations: Diffpack, p. 61-90, in: *Numerical Methods and Software Tools in Industrial Mathematics*, ed. M. Daehlen, A. Tveito, Birkhäuser, Boston, 1997.

[23] Cambefort H., *Injection des Sols*, Ed. Eyrolles, Paris, 1964.

[24] Chen W.F., Mizuno E., *Nonlinear Analysis in Soil Mechanics*, ed. Elsevier, 1990.

[25] Christie I., Griffiths D.F., Mitchell A.R., Zienkiewicz O.C., Finite Element Methods for Second Order Differential Equations with Significant First Derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, p. 1389-1396, 1976.

[26] Chung T.J., Karr G.R., Significance of Convective Term in Transport Equation, in *Finite Element Methods for for Convection Dominated Flows*, ed. T.J.R. Hughes, AMD, vol.34, p.137-147, ASME, New York, 1979.

[27] Coussy O., *Mécanique des Milieux Poreux*, Ed. Technip, Paris, 1991.

[28] Daniel & Wood, *Fitting Equations to Data*, 2nd Edition, Wiley Classics Library, 1999.

[29] Deb A.K., Theory of Sand Filtration, *Proceedings ASCE, Journal Sanitary Engineering Division*, vol. 95, p. 399-422, 1969.

[30] De Josselin de Jong G., Longitudinal and Transverse Diffusion in Granular Deposits, *Trans. Am. Geophys. Union*, vol. 37, p. 67- 74, 1958.

[31] De Marsily, *Hydrogéologie Quantitative*, Masson, Paris, 1981.

[32] Desai C.S., Siriwardane H.J., *Constitutive Laws for Engineering Materials*, Prentice-Hall, 1984.

[33] Desbrières J., Cement Cake Properties in Static Filtration. Influence of Polymeric Additives on Cement Filter Cake Permeability, *Cement and Concrete Research*, vol. 23, p. 347-358, 1993.

[34] Descoeudres A., *Mesure de la Position du Front de Propagation d'un Coulis de Microciment dans un Milieu Poreux Basée sur les Variations de Résistivité Electrique*, Rapport de Stage LMS-EPFL, juillet-septembre 1999.

[35] De Wiest, *Flow Through Porous Media*, Academic Press Inc., London, 1969.

[36] *Diffpack User's Guide*, Numerical Objects AS, Oslo, 1997.

[37] Donea J., Giuliani S., Laval H., Explicit Finite Element Solution to Transient Convective-Conductive Heat Transfer Problems, *Proc. First Int. Conf. on Numerical Methods in Laminar and Turbulent Flow*, Swansea, 17-21 july, 1978.

[38] Donea J., Giuliani S., Laval H., Accurate Explicit Finite Element Schemes for Convective-Conductive Heat Transfer Problems, in *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, ed. T.J.R. Hughes, AMD, vol.34, ASME, New York, 1979.

[39] Donea J., Giuliani S., A Simple Method to Generate High-Order Accurate Convection Operators for Explicit Schemes Based on Linear Finite Elements, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, vol.1, p. 63-79, 1981.

[40] Dubois-Pellerin Y.D., *Object-Oriented Finite Elements: Programming Concepts and Implementation*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, n0. 1026, 93 p., 1992.

[41] Dukowicz J.K., Ramshaw J.D., Tensor Viscosity Method for Convection in Numerical Fluid Dynamics, *Journal of Computational Physics*, vol. 32, p.71-79, 1979.

[42] Dullien F.A.L., *Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure*, Academic Press, New York, 1979.

[43] Duvaut G., *Mécanique des Milieux Continus*, Masson, Paris, 1990.

[44] Eriksson K., Estep E., Hansbo P., Johnson C., *Computational Differential Equations*, Cambridge University Press, 1996.

[45] Franca L.P., Dutra do Carmo E.G., The Galerkin Gradient Least-Squares Method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* vol. 74, p. 41-54, North-Holland, 1989.

[46] Franca L.P., Frey S.L., Hughes T.J.R., Stabilised Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Diffusive Model, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 95, p. 253-276, 1992, North-Holland.

[47] Ghosh M.M., Jordan T.A., Porter R.L., Physiochemical Approach to Water and Wastewater Filtration, *Journal of the Environmental Engineering Division*, p. 71-86, feb. 1975.

[48] Gresho P.M, Lee R.L, Sani R.L., Advection-Dominated Flow, with Emphasis on the Consequences of Mass Lumping, in *Finite Elements in Fluids*, vol.4, ed. R.H. Gallager, p.335-351, 1982, J. Wiley and Sons.

[49] Gresho P., Lee R., Don't Suppress the Wiggles-They're Telling You Something! , in: T.J.R. Hughes ed., *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD, vol.34, p.37-61 , 1979.

[50] Gupta S.P., Greenkorn R.A., Determination of Dispersion and Nonlinear Adsorption Parameters for Flow in Porous Media, *Water Resources Research*, vol. 10, n0. 4, p. 839-846, august 1974.

[51] Hassanizadeh M., Gray W.G., General Conservation Equations for Multiphase Systems: 1. Averaging Procedure, *Advances in Water Resources*, vol. 2, p. 131-144, 1979a.

[52] Hassanizadeh M., Gray W.G., General Conservation Equations for Multiphase Systems: 2. Mass, Momenta, Energy and Entropy Equations, *Advances in Water Resources*, vol. 2, p. 191-203, 1979b.

[53] Haug E., Langtangen H.P., Basic Equations in Eulerian Continuum Mechanics, p. 121-156, in: *Numerical Methods and Software Tools in Industrial Mathematics*, ed. M. Daehlen, A. Tveito, Birkhäuser, Boston, 1997.

[54] Heinrich J.C., Huyakorn P.S., Zienkiewicz O.C., An Upwind Finite Element Method for Two-Dimensional Convective Transport Equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.11, p. 131-143, 1977.

[55] Heinrich J.C., Zienkiewicz O.C., Quadratic Finite Element Schemes for Two-Dimensional Convective Transport Problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol.11, p.1831-1844, 1977.

[56] Herzig J.P., Leclerc D.M., Le Goff P., Flow of Suspensions Through Porous Media - Application to Deep Bed Filtration, *Industrial and Engineering Chemistry*, vol. 62, no. 5, p. 8-35, may 1970.

[57] Hirt C.W., Heuristic Stability Theory for Finite Difference Equations, *Journal of Computational Physics*, vol.2, p.339-355, 1968.

[58] Honma S., *Finite Element Analysis of the Injection and Distribution of Chemical Grout in Soils*, Ph.D. Thesis, The University of Wisconsin-Milwaukee, 150 p., 1984.

[59] Hughes T.J.R., Mallet M., Mizukami A., A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: II. Beyond SUPG., *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 54, p.341-355, 1986.

[60] Hughes T.J.R., Brooks A., A Multi-Dimensional Upwind Scheme with no Crosswind Diffusion, in T.J.R. Hughes ed., *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD vol.34 ,ASME, New York, 1979.

[61] Hughes T.J.R., Brooks A., A Theoretical Framework for Petrov-Galerkin Methods with Discontinuous Weighting Functions: Application to the Streamline Upwind Procedure, in *Finite Elements in Fluids*, vol.4, ed. R.H. Gallager, p.47-65, J. Wiley and Sons, 1982.

[62] Hughes T.J.R., Franca L.P., Hulbert G.M., A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VIII. The Galerkin/Least Squares Method for Advective-Diffusive Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 73, p. 173-189, North-Holland, 1989.

[63] Hughes T.J.R., A Simple Finite Element Scheme for Developping Upwind Finite Elements, *Intern. J. Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, p. 1359-1365, 1978.

[64] Idigbe K.I, *Application of Stability Theory and Finite Element Simulation to Characterize Miscible Displacements*, Ph.D Thesis, The University of Texas at Austin, 141 p., 1989.

[65] Ives K.J., Filtration of Water and Wastewater, *Environmental Control*, vol. 2, p. 293, 1971.

[66] Jopan S., *Multiphase Immiscible Flow Through Porous Media*, Ph.D Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 1987.

[67] Johnson C., Nävert U., Pitkäranta J., Finite Element Methods for Linear Hyperbolic Problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 45, p. 285-312, 1985.

[68] Johnson C, U. Nävert, An Analysis of Some Finite Element Methods for Advection-Diffusion Problems, in: O.Axelsson, L.S. Frank and A. Van der Sluis, eds., *Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis*, p. 99-116, North-Holland, Amsterdam, 1981.

[69] Klubertanz G., *Zur Hydromechanischen Kopplung in Dreiphasigen Porösen Meiden*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, n0. 2027, 210 p., 1999.

[70] Klubertanz G., F. Bouchelaghem, L. Laloui, L. Vulliet, Miscible and Immiscible Multiphase Flow in Porous Media, *Symposium on Mathematical Models in Soil Mechanics*, Reggio di Calabria, sept. 2000, Proceedings to be published as a special issue in *Mathematical and Computer Modelling.*

[71] Krizek R.J., Peres T., Chemical Grouting in Soil Permeated by Water, *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, vol. 1, no. 30, p. 588-699, 1985.

[72] Krizek R.J., Liao H.J., Borden R.H., Mechanical Properties of Microfine Cement/Sodium Silicate Grouted Sand. *Grouting, Soil Improvement and Geosynthetics*, Ed. Bordan, Holtz and Juran, ASCE, vol. 111, no. 7, p. 898-915, 1992.

[73] Labview, *Graphical Programming for Instrumentation, Function and VI Reference Manual*, National Instruments, Copyright 1997.

[74] Landau L., Lifschitz E.M., *Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1960.

[75] Langtangen H.P., *Computational Partial Differential Equations. Numerical Methods and Diffpack Programming.* Springer-Verlag: Berlin, 1999.

[76] Legrand C., La Structure des Suspensions de Ciment, in *Le Béton Hydraulique.* Presses de l'ENPC, Paris, 1982.

[77] Lemaître J., Chaboche J.L., *Mécanique des Matériaux Solides*, Dunod, Paris, 1996.

[78] Leonard B.P., A Survey of Finite Differences of Opinion on Numerical Muddling of the Incomprehensible Defective Confusion Equation, in: T.J.R. Hughes, ed., *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD, vol.34, p. 1-17, 1979.

[79] Lewis R.W, Schrefler B.A., *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*, Chichester, Wiley, 1999.

[80] Lewis, R.W., Schrefler B.A., Simoni L. Coupling versus Uncoupling in Soil Consolidation, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* vol. 15, p. 533-548, 1991.

[81] Lewis, R.W., Sukirman Y., Finite Element Modelling for Simulating the Surface Subsidence Above a Compacting Hydrocarbon Reservoir, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* vol. 18, p. 619-639, 1993.

[82] Maple V Release 5.1, nov. 5 1998, copyright (c) 1981-1998, by Waterloo Maple Inc.

[83] Marle C., *Cours de Production, Les Ecoulements Polyphasiques en Milieu Poreux*, Tome IV, Editions Technip et Institut Français du Pétrole, Paris, 1972.

[84] Maroudas A., Eisenklam P., Clarification of Suspensions: A Study of Particle Deposition in Granular Media. Part I. Some Observations on Particle Deposition, *Chemical Engineering Science*, vol. 20, p. 867-873, 1964.

[85] Matsuoka H., Sun D., Konda T., Unified Constitutive Law for Cemented Sands by True Triaxial Tests, *Dodoku Gakkai Rombun-Hokokushu/ Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, no. 475, p. 3-24, p. 119-128, 1993.

[86] Mitchell G.P., Owen D.R.J., Numerical Solutions for Elastic-Plastic Problems, *Eng. Comput.* vol. 5, p. 274-284, december 1988.

[87] Mohanka S.S., Theory of Multilayer Filtration, *Proceedings of the ASCE, Journal Sanitary Engineering Division*, vol. 95, SA6, p.1079-1095, 1969.

[88] Morton K.W., Parrott A.K., Generalised Galerkin Methods for First-Order Hyperbolic Equations, *Journal of Computational Physics*, vol. 36, p. 249-270, 1980.

[89] Nicolini E., Nova R., Modelling of a Tunnel Excavation in a Non-cohesive Soil Improved with Cement Mix Injections, *Computers and Geotechnics*, vol. 27, p. 249-272, 2000.

[90] Ogata A., Banks R.B., A Solution of the Differential Equation of Longitudinal Dispersion in Porous Media, *Professional Paper 411-A, U.S. Geological Survey*, Washington D.C., 1961.

[91] Ortiz M., Popov E.P., Accuracy and Stability of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, p. 1561-1576, 1985.

[92] Ortiz M., Simo J.C., An Analysis of a New Class of Integration Algorithms for Elastoplastic Constitutive Relations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, p. 353-366, 1986.

[93] Pastor M., Zienkiewicz O.C., Chan H.C., Generalized Plasticity and the Modelling of Soil Behaviour, *Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 14, p. 151-190, 1990.

[94] Pironneau P.L., *La Méthode des Eléments Finis pour les Fluides*, Ed. Masson, Paris, 1988.

[95] Payatakes A.C, Tien C., Turian R.M., A New Model for Granular Porous Media: Part I. Model Formulation, *AIChE Journal*, vol. 19, n0. 1, p. 58-66, jan. 1973.

[96] Pfannkuch H.O., Contribution à l'Etude des Déplacements de Fluides Miscibles dans un Milieu Poreux, *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, vol. 18, n0. 2, p. 215-270, février 1963.

[97] Rahman N.A., Lewis R.W., Finite Element Modelling of Multiphase Immiscible Flow in Deforming Porous Media for Subsurface Systems, *Computers and Geotechnics*, vol. 24, no. 1, p. 41-63, 1999.

[98] Rajagopalan R., Tien C., Trajectory Analysis of Deep-Bed Filtration with Sphere-in-cell Porous Media Model, *AIChE Journal*, vol.22, No.3, May 1976.

[99] Roache P.J., *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, Albuquerque, New Mexico, 1976.

[100] Ruckenstein E., Prieve D.C., Adsorption and Desorption of Particles and their Chromatographic Separation, *AIChE Journal*, vol.22, no 2, p. 276-283, march 1976.

[101] Santagata M.C., Collepardi M., Selection of Cement-Based Grouts for Soil Treatment, *5Th CANMET-ACI International Conference on Superplasticizers and Others Chemical Admixtures in Concrete*, Rome, October 1997.

[102] Sharma M.M., Yortsos Y.C., A Network Model for Deep Bed Filtration Processes, *AIChE Journal*, vol. 33, no. 10, october 1987.

[103] Scheidegger A.E., General Theory of Dispersion in Porous Media, *Journal of Geophysical Research,* vol. 66, n0. 10, October 1961.

[104] Scheidegger A.E., *The Physics of Flow Through Porous Media*, University of Toronto Press, 3rd Edition, 1974.

[105] Scheidegger A.E., Statistical Hydrodynamics in Porous Media, J*ournal of Applied Physics*, vol. 25, no. 8, p.994-1001, 1954.

[106] Schrefler B.A., Zhan X., Simoni L., A Coupled Model for Water Flow, Airflow and Heat Flow in Deformable Porous Media, *International Journal for Numerical Methods in Heat Fluid Flow*, vol. 5, p. 531-547, 1995.

[107] Seker E., *Etude de la Déformation d'un Massif de Sol Non Saturé*, Thèse de l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne n0. 492, 224 p., 1983.

[108] Siriwardane H.J., Desai C.S., *Computational Procedures for Non-Linear Three-Dimensional Analysis with some Advanced Constitutive Laws, Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, vol. 7, p.143-171, 1983.

[109] Sukirman Y., Lewis, R.W., A Finite Element Solution of a Fully Coupled Implicit Formulation for Reservoir Simulation, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics,* vol. 17, p. 677-698, 1993.

[110] Tien C., Turian R.M., Pendse H., Simulation of the Dynamic Behaviour of Deep Bed Filters, *AIChE Journal,* vol. 25, n0. 3, may 1979.

[111] Tien C., Payatakes A., Advances in Deep Bed Filtration, *AIChE Journal*, vol. 25, n0. 5, sept. 1979.

[112] Tien C., Turian R.M., Pendse H., Simulation of the Dynamic Behavior of Deep Bed Filters, *AIChE Journal,* vol.25, n0.3, p. 385-394, may 1979.

[113] Tunnel de Vernier, Géotechnique et Travaux Souterrains, *Campagne d'Injection en Vue de la Consolidation de l'Effondrement du Tube Rhône*: *Rapport d'Activité et Interprétations*, note technique n0. 59, 1991.

[114] Vulliet L, Bouchelaghem F., Schillinger L., Leroy D., Laloui L., Descoeudres F., Injection of microcement in fine-grained soil: theory, modelling and laboratory testing, *Darmstädter Geotechnik-Kolloquim, Heft Nr.51*, p.157-175, 23 März 2000.

[115] Whitaker S., Flow in Porous Media I: A Theoretical Derivation of Darcy's Law, *Transport in Porous Media*, vol. 1, p. 3-25, 1986.

[116] Whitaker S., Flow in Porous Media III : Deformable Media, *Transport in Porous Media*, vol. 1, p. 127-134, 1986.

[117] Wnek W.J., Gidaspow D., Wasan D.T., The Role of Colloid Chemistry in Modelling Deep Bed Liquid Filtration, *Chemical Engineering Science*, vol. 30, p. 1035-1047, 1975.

[118] Xa Khien H., *Optimisation des Coulis d'Injection pour Gaines de Précontrainte*, Mémoire de Diplôme d'Etudes Approfondies, Ecole Normale Supérieure de Cachan, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, juin 1997.

[119] Yao K.M., Habibian M., O'Melia C.R., Water and Waste Water Filtration : Concepts and Applications, *Environmental Science and Technology*, vol. 5, no. 11, nov. 1971, p.1105-1113.

[120] Zienkiewicz O.C., *The Finite Element Method,* 2nd edition, Mac-Graw Hill, Maidenhead, England, 1977.

[121] Zienkiewicz O.C., The Finite Element Method and Convection Problems in Fluid Mechanics , in *Finite Elements in Fluids*, vol.4, ed. R.H. Gallager, p.1-22, 1982, J. Wiley and Sons.

[122] Zace Service, *ZSoil User's Manual*, version 4.0, 2D&Axisymmetry, 1998.

10.1 Implémentation dans Diffpack

10.1.1 Fonctions membres dans la classe simulateur

La classe doit fournir les fonctions principales suivantes :

- une procédure $fillEssBC$ qui impose les conditions aux limites essentielles (initialise les conditinos aux limites essentielles; pui parcourt les noeuds du maillage à la recherche des conditions aux limites de Dirichlet pour les imposer par pénalisation du système)

- une procédure *integrands* qui donne l'intégrande de la matrice et du vecteur élémentaires en un point d'intégration numérique. La procédure doit être écrite de manière à assurer une connexion la plus étroite possible entre le code Diffpack en C++ et les expressions numériques. Cette procédure donne les matrice et vecteur élémentaire sur un élément, en un point d'intégration numérique (intégrande des équations éléments finis au niveau de l'élément). D'autres modifications doivent être fates lorsque plusieurs équations élément fini doivent être résolues de manière séquentielle, et lorsqu'il existe des conditions aux limites naturelles (voir listing en annexe).

- une procédure *adm* pour administrer le menusystem

- une procédure $define$ pour définir les éléments du menu

- une procédure *scan* pour lire les données d'entrée du menu et initialiser les objets internes (champs, maillages, solveurs ...)

- une procédure principale *solveProblem* pour le déroulement du programme principal du solveur, qui appelle *scan*, *fillEssBC*, *makeSystem* (dans *FEM*) et *LinEqAdm* : : *solve* (fonction pour résoudre les systèmes linéaires)

- une procédure *resultReport* pour le rapport automatique des résultats choisis

Les procédures additionnelles qui doivent être explicitement programmées :

- *setIC* pour l'imposition des conditions initiales

- *calcElmMatVec* pour calculer les matrices et vecteur élémentaires nécessaire lorsqu'il apparaît des intégrales de surface par exemple

- *calcCoeff* pour le calcul des coefficients varialbes avant la procédure d'assemblage élément fini

- *integrands4side* pour définir les intégrandes qui correspondent aux intégrales de frontière dans la formulation faible

- *timeLoop* pour gérer la boucle en temps

- *solveAtThisTimeStep* pour avancer la solution d'un pas de temps dans les problèmes dépendant du temps

- *makeAndSolveLinearSystem* pour définir et résoudre le système linéaire dans les méthodes itératives pour les équations algébriques non linéaires

- *saveResults* pour stocker les résultats sur fichier (plasticité).

10.1.2 Variables membres dans la classe simulateur

Les structures de données dans un solveur élément fini sont constituées typiquement des entités suivantes :

- un objet élément fini de type *GridFE* pour rerpésenter le maillage

- un objet élément fini de type *FieldFE* (resp. FieldsFE) ou champ élément fini pour représenter un champ scalaire (resp. vectoriel) sur le mailage.

- un objet de type *LinEqAdm* contenant le système linéaire du problème courant et différents solveurs pour les systèmes linéaires.

- un objet de type *Handle*(*DegFreeFE*) qui contrôle la transformation entre la représentation sous forme de champ des fonctions inconnues et le vecteur des degrés de liberté dans le système linéaire (si le champ est scalaire, l'application est l'application identité).

- un objet de type *TimePrm* pour stocker les paramètres nécessaires pour tous les problèmes instationnaires (pas de temps, intervalles de temps) ou stationnaires (cas limite du cas instationnaire). Le pas de temps peut être varié au cours de la simulation à l'intérieur du code.

- des fonctions et constantes dépendant du problème

10.1.3 Création d'une instance particulière d'une classe appartenant à une hiérarchie

Soit la classe de base X ($X = CdEquation$, $FlowEquation$, $Elasticity$). Toutes les entités nécessaires pour initialiser des objets dans une sous-classe de X sont réunies dans un objet paramètre de la classe X_prm. Cette classe doit également contenir le nom de la sous-classe de X à créer, ainsi que tous les paramètres pour initialiser des objets dans la hiérarchie (de la sous-classe X). Une fonction $prm(X)$: : *create* crée l'objet de la sous-classe. La classe solveur individuel X doit alors posséder une instance de cette classe de paramètres ($prm(X)$), qui constitue ainsi un argument pour le constructeur du solveur individuel X ($prm(X)$ est alors une variable membre de la classe X), et sert à collecter les arguments d'initialisation et à les passer au solveur X. L'emploi de la classe $prm(X)$ et d'une interface utilisateur flexible (MenuSystem de diffpack ([36])) permet à l'utilisateur de fixer les différents paramètres au run-time. Comme l'objet $prm(X)$ est stocké dans la classe de base X, tous les algorithmes spécifiques implémentés dans les sous-classes de X ont accès à toutes les variables membres inconnues.

Il s'agit du seul endroit du code où des noms spécifiques de solveurs individuels sont manipulés, et donc du seul endroit à modifier si la hiérarchie de solveurs doit être étendue. Dans le reste du code de résolution séquentielle du problème couplé, les solveurs individuels sont vus comme des pointeurs $X*$.

10.1.4 Fichiers d'inclusion (Définition des classes implémentées)

La classe générique définit une interface générique ne contenant aucune donnée, qui se contente de décrire ce qui peut être fait avec ce type d'objets de données. Toute amélioration de la classe de base conduit à des optimisations immédiatement disponibles dans les sous-classes. Les sous-classes implémentent des types spécifiques et des fonctions membres définies comme des fonctions virtuelles (spécialisation). Le type particulier implémenté est masqué derrière une interface commune, ce qui simplifie considérablement le code (exemple de classes génériques, les classes de base qui implémentent les différentes lois de comportement).

Le code est écrit dans Diffpack de manière à être indépendant de la dimension d'espace. L'utilisateur, là où il programme, doit lui aussi respecter cette règle de manière à obtenir un code qui fonctionne en unidimensionnel, bidimensionnel ou tridimensionnel. Les définitions des principales classes implémentées sont données.

CdEquation.h

```
// -*- C++ -*-
    /*****************************************************************************/
    /* */
    /**/
    /**/ Classe de base pour la résolution de l'équation de transport
    /* */
    /**/
    /*****************************************************************************/
    //#include<Copyright.h>
    // $Id: CdEquation.h,v 1.5 1999/06/01 19: 32: 20 bru Exp $
    #ifndef CdEquation_h_IS_INCLUDED
    #define CdEquation_h_IS_INCLUDED
    #include <FEM.h> // FEM algorithms
    #include <DegFreeFE.h> /* mapping:  nodal values -> global values*/
    #include <PreproBox.h>
    #include <LinEqAdm.h> // linear system, storage and solution
    #include <TimePrm.h> // time discretization parameters
    #include <Store4Plotting.h> // storing results on file for later visualization
    #include <StreamlineUpwind.h> // computes the SUPG-functions used in the Petrov-Galerkin me-
thod
    #include <ErrorRate.h>
    #include <FieldFormat.h>
    #include <MatDiag_real.h>
    #include <FieldFESummary.h>
    #include <enum.h>
    #include <NonLinEqSolverUDC.h> // user's class interface to nonlinear solvers
    #include <NonLinEqSolver_prm.h> // parameters for nonlinear solvers
    #include <NonLinEqSolver.h> // interface to nonlinear solvers
    #include <AnalyticCdEquation.h> //analytical solutions base class
    class AnalyticCdEquation;
    class CommonRel;
    class Coupling;
    class InjectionConcentration;
```

```
/*<TransportEq-syntax: */
class CdEquation: public FEM, public Store4Plotting, public MenuUDC, public HandleId, public
NonLinEqSolverUDC
{
protected:
//general data:
Handle(GridFE) grid; // FEM grid
Handle(DegFreeFE) dof;
Handle(FieldFE) c; // grout concentration (primary unknown)
Handle(FieldFE) c_prev;
Handle(FieldsFE) gradc;
FieldFESummary c_summary;
//linear solution
Vec(real) linear_solution; // solution of linear subsystem
Handle(LinEqAdm) lineq; // linear system, storage and solution
//non linear solution
prm(NonLinEqSolver) nlsolver_prm;
Handle(NonLinEqSolver) nlsolver;
Vec(real) nonlin_solution;
Handle(TimePrm) tip; // time discretization parameters
real theta; // theta-method parameter
StreamlineUpwind SU; //weighting functions for SUPG
CommonRel* properties;
Handle(Field) reference_solution; //error computation
FieldFormat ref_solution_format;
real k_value;
Handle(FieldFE) error_field;
ErrorRate error_rate;
real L1_error, L2_error, Linf_error;
NumItgPoints error_itg_pt_tp;
real porosity; //matrix porosity
real div_du_dt; //hydromechanical coupling term
//fluid's properties
real density; //fluid phase density
```

```
real alphaL,alphaT;  // fluid's longitudinal & transversal dispersivity coefficients
real diffCoef,tortCoef;  // fluid's diffusion & tortuosity coefficients
Mat(real) DH;  // fluid's hydrodynamic dispersion matrix
real D_coeff;
Ptv(real) vfl;  //Drac'y velocity
//boundary conditions
Handle(Field) dirichlet_bc1;  //Dirichlet boundary condition
FieldFormat dirichlet_bc1_format;
Handle(Field) dirichlet_bc2;
FieldFormat dirichlet_bc2_format;
real neumann_val_1;  //Neumann b.c.
real neumann_val_2;
real dispersive_flux;  //Robin b.c.
real convective_flux;
Handle(Field) initial_c;  //initial condition
FieldFormat initial_c_format;
//filtration or adsorption
real source_term;
real filtration_term;
//Handle(field) source_func;
//Fieldformat source_func_format;
BooLean lumped_mass_matrix;
String users_comment;  // more detailed comment than casename
public:
CdEquation();
CdEquation(CommonRel* properties_);
CdEquation(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_);
~CdEquation();
virtual void attachGridFE(GridFE& grid_);
virtual void attachTimePrm(TimePrm& tip_);
virtual BooLean ok() const;
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE)
{ defineStatic(menu,level,externals);  }
```

```
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN){}
virtual void scan(MenuSystem& menu);
//multipleLoop will call adm, solveProblem and resultReport
virtual void adm(MenuSystem& menu);
virtual void solveProblem();
virtual void resultReport();
virtual void driver ();
virtual void print(Os os) const;
virtual void setIC();
virtual void timeLoop();
virtual void solveAtThisTimeLevel();
virtual void fillEssBC ();  //essential boundary conditions
//void print(const String& filename) const;
virtual void updateDataStructures();
virtual void saveResults();
void calcDerivedQuantities();
protected:
virtual void calcElmMatVec(int e, ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
//pure virtual, implemented in subclasses (CdLinear, CdNonlinear ...)
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe) = 0;
virtual void integrands4side //natural boundary conditions
(
int side,
int boind,
ElmMatVec& elmat,
FiniteElement& fe
);
virtual void calcCoeff (FiniteElement& fe);
virtual void computeVelocity(){}
virtual void computeDispersivityTensor();
virtual void computeConvectiveFlux (Ptv(real)& x, real time = DUMMY);
virtual void computeConvectiveFlux (FiniteElement& fe, real time = DUMMY);
//filtration or adsorption
//virtual void computeSourceTerm (Ptv(real)& x, real time = DUMMY);
```

```
//virtual void computeSourceTerm (FiniteElement& fe, real time = DUMMY);
virtual void compare2analyticalSolution() {}
virtual void computeErrorfield() {}
friend CommonRel;
friend Coupling;
friend AnalyticCdEquation;
};
#define ClassType CdEquation
#include <Handle.h>
#undef ClassType
/*>CdEquation -syntax: */
#endif CdEquation_h_IS_INCLUDED
```

Dans les sous-classes, un nombre restreint de fonctions sont redéfinies (ici integrands qui donne l'équation élément fini en un noeud, nécessaire à l'assemblage du système global), la réutilisation du code existant est optimale.

CdLinear.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe dérivée de CdEquation, qui implémente la résolution élément finie dans le cas linéaire
/**/ Classe de base pour différents algorithmes (TaylorGalerkin, LeapFrog, Generalized Taylor Galerkin)
/**/
/*****************************************************************************/
//#include<Copyright.h>
#ifndef CdLinear_h_IS_INCLUDED
#define CdLinear_h_IS_INCLUDED
#include <MenuUDC.h>
#include <MenuSystem.h>
#include <CdEquation.h>
/*<TransportEq-syntax: */
class CdLinear: public CdEquation
```

```
{
public:
CdLinear();
CdLinear(CommonRel* properties_): CdEquation(properties_){TRACE("CdLinear::
CdLinear(CommonRel& properties_)"); }
CdLinear(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_):
CdEquation(properties_,grid_,tip_){
TRACE("CdLinear:: CdLinear(CommonRel& properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_)"); }
~CdLinear();
protected:
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
};
#endif CdLinear_h_IS_INCLUDED
```

Seule la technique du Leap-Frog, qui est une méthode à trois pas de temps ([94]), nécessite le stockage et la mise à jour d'une variable supplémentaire $\left(\overline{\rho^g}^f\right)^{k-1}$ au pas de temps $k-1$. La procédure d'initialisation et d'actualisation des variables après chaque résolution s'en trouvent également modifiés, aussi la résolution LeapFrog fait-elle l'objet d'une sous-classe particulière, qui réutilise la plupart des fonctionnalités de la classe située au-dessus dans la hiérarchie (CdEquation), et redéfinit uniquement les fonctions *setIC*, *updateDataStructures*, *scan* et *integrands*.

CdNonLinear.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe dérivée de CdEquation, qui implémente la résolution élément finie dans le cas non linéaire
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
//#include<Copyright.h>
#ifndef CdNonLinear_h_IS_INCLUDED
#define CdNonLinear_h_IS_INCLUDED
#include <CdEquation.h>
/*<TransportEq-syntax: */
```

```
class CdNonLinear : public CdEquation
{
protected: //nonlinear coefficients
real K;
real mu,rho;
real dK_dc;
real dmu_dc, drho_dc;
Ptv(real) gradp_pt;
Vec(real) gravity;
//Product approximation
Vec(real) Kj;
Vec(real) rhoj;
Vec(real) muj;
Vec(real) dK_dcj;
Vec(real) dmu_dcj;
Vec(real) drho_dcj;
public:
CdNonLinear();
CdNonLinear(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_);
~CdNonLinear();
virtual void scan(MenuSystem& menu);
void solveAtThisTimeLevel();
virtual void makeAndSolveLinearSystem();
virtual void setIC();
virtual void timeLoop();
virtual void updateDataStructures();
protected:
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
virtual void integrands4side
(
int side,
int boind,
ElmMatVec& elmat,
FiniteElement& fe
```

```
);
virtual void calcCoeff (FiniteElement& fe);  // needed by integrands
};
#endif CdNonLinear_h_IS_INCLUDED
```

FlowEquation.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe pour la résolution de l'équation d'écoulement
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
//#include<Copyright.h>
#ifndef FlowEquation_h_IS_INCLUDED
#define FlowEquation_h_IS_INCLUDED
#include <FEM.h>
#include <DegFreeFE.h>
#include <PreproBox.h>
#include <LinEqAdm.h> // linear system, storage and solution
#include <TimePrm.h> // time discretization parameters
#include <Store4Plotting.h> // storing results on file for later visualization
#include <ErrorRate.h>
#include <FieldFormat.h>
#include <FieldConst.h>
#include <MatDiag_real.h>
#include <FieldFESummary.h>
#include <enum.h>
#include <NonLinEqSolverUDC.h> // user's class interface to nonlinear solvers
#include <NonLinEqSolver_prm.h> // parameters for nonlinear solvers
#include <NonLinEqSolver.h> // interface to nonlinear solvers
#include <AnalyticFlowEquation.h> //analytical solutions base class
class AnalyticFlowEquation;
```

```
class CommonRel;
class Coupling;
class Hydrostatic;
class InjectionPressure;
/*<TransportEq-syntax: */
class FlowEquation: public FEM, public Store4Plotting, public MenuUDC, public HandleId, public
NonLinEqSolverUDC
{
protected:
//general data:
Handle(GridFE) grid; // FEM grid
Handle(DegFreeFE) dof;
Handle(FieldFE) p; // fluid pressure (primary unknown)
Handle(FieldFE) dp; // overpressure (with respect to initial conditions)
Handle(FieldFE) p_prev;
Handle(FieldsFE) gradp;
FieldFESummary p_summary;
MatDiag(NUMT) mass_matrix; // for smoothing flux
//linear solution
Vec(real) linear_solution; // solution of linear subsystem
Handle(LinEqAdm) lineq; // linear system, storage and solution
//non linear solution
prm(NonLinEqSolver) nlsolver_prm;
Handle(NonLinEqSolver) nlsolver;
Vec(real) nonlin_solution;
Handle(TimePrm) tip; // time discretization parameters
real theta; // theta-method parameter
CommonRel* properties;
Handle(Field) reference_solution;
FieldFormat ref_solution_format;
Handle(FieldFE) error_field;
ErrorRate error_rate;
real L1_error, L2_error, Linf_error;
NumItgPoints error_itg_pt_tp;
```

```
//solid's properties
real porosity;  // matrix porosity
real div_du_dt;
real dc_dt;
Ptv(real) gradc;
Ptv(real) gradc_prev;
//fluid's properties
real concentration_coeff;
real compressibility_coeff;
real permeability;
real viscosity;
real density;
//filtration
real filtration_term;
Ptv(real) gravity_vector;
Ptv(real) velocity;  //in linear case only
//boundary conditions
real flux_1;  // grout's flux 3
real flux_2;  // grout's flux 4
Handle(Field) injection_flux;  //general flux function
FieldFormat injection_flux_format;
//modify essential boundary conditions:
Handle(Field) dirichlet_bc1;
FieldFormat dirichlet_bc1_format;
Handle(Field) dirichlet_bc2;
FieldFormat dirichlet_bc2_format;
//initial condition
Handle(Field) initial_p;
FieldFormat initial_p_format;
String users_comment;
public:
FlowEquation();
FlowEquation(CommonRel* properties_);
FlowEquation(CommonRel* properties_,GridFE& grid_, TimePrm& tip_);
```

```
~FlowEquation();
virtual BooLean ok() const;
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE)
{ defineStatic(menu,level,externals); }
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN){}
virtual void scan(MenuSystem& menu);
//multipleLoop will call adm, solveProblem and resultReport
virtual void adm(MenuSystem& menu);
virtual void solveProblem();
virtual void resultReport();
virtual void driver ();
virtual void print(Os os) const;
virtual void attachGridFE(GridFE& grid_);
virtual void attachTimePrm(TimePrm& tip_);
virtual void setIC();
virtual void timeLoop();
virtual void solveAtThisTimeLevel();
void updateDataStructures();
virtual void saveResults();
void calcDerivedQuantities(); // needed in order to apply Newton-Raphson or Successive Substitution
Ptv(real) calcDerivedQuantities(FiniteElement& fe); // needed in order to apply Newton-Raphson or Successive Substitution
virtual void fillEssBC (); // set essential boundary conditions
protected:
virtual void calcElmMatVec(int e, ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
virtual void integrands4side
(
int side,
int boind,
ElmMatVec& elmat,
FiniteElement& fe
```

```
);
virtual void calcCoeff (FiniteElement& fe);
virtual real computeInjectionFlux(Ptv(real)& x, real time = DUMMY);
virtual real computeInjectionFlux(FiniteElement& fe, real time = DUMMY);
virtual void computeOverPressure();
virtual void compare2analyticalSolution() {}
virtual void computeErrorfield() {}
friend CommonRel;
friend Hydrostatic;
friend Coupling;
friend InjectionPressure;
friend AnalyticFlowEquation;
};
#define ClassType FlowEquation
#include <Handle.h>
#undef ClassType
#endif FlowEquation_h_IS_INCLUDED
```

Elasticity.h

```
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe pour la résolution de l'équation d'équilibre en élasticité linéaire
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef Elasticity_h_IS_INCLUDED // Flag (to avoid multiple inclusions of fileElasticity.h)
#define Elasticity_h_IS_INCLUDED
#include <FEM.h> // FEM algorithms
#include <DegFreeFE.h>
#include <PreproBox.h>
#include <LinEqAdm.h> // linear system, storage and solution
#include <TimePrm.h> // time discretization parameters
#include <Store4Plotting.h> // storing results on file for later visualization
```

```
#include <FieldFormat.h>
#include <FieldFE.h>
#include <Ptv_real.h>
#include <Mat_real.h>
#include <Field.h>
#include <enum.h>
#include <ElmDefs.h>
#include <AnalyticElasticity.h>
class AnalyticElasticity;  //analytical solutions
class CommonRel;
class Coupling;
class SmoothStress;
class ElmTensorProd1;
/*<TransportEq-syntax:  */
class Elasticity :  public FEM, public HandleId, public Store4Plotting , public MenuUDC
{
protected:
//general data:
Handle(GridFE) grid;  // FEM grid
Handle(DegFreeFE) dof;
Handle(FieldsFE) u;  // skeleton displacement (primary unknown)
Handle(FieldsFE) u_prev;
Handle(FieldsFE) stress_vector;
Handle(FieldsFE) strain_vector;
Handle(FieldsFE) initial_u;
Handle(FieldsFE) u_corr;  // u -initial_u
//MatDiag(NUMT) mass_matrix;  // for smoothing flux
//non linear solution
Vec(real) linear_solution;  // solution of linear subsystem
Handle(LinEqAdm) lineq;  // linear system, storage and solution
Handle(TimePrm) tip;  // time discretization parameters
real theta;  // theta-method parameter
CommonRel* properties;
//solid's properties
```

```
real porosity;  // matrix porosity
real rhos;
real E,nu;  // Young's modulus & Poisson's coefficient
real lambda, mu;  // Lamé's coefficients
//fluid's properties
real density;  // fluid's density
real p_pt;
// gravity's vector
Ptv(real) gravity_vector;
//boundary conditions
Handle(Fields) displacement1;
FieldFormat displacement1_format;
Handle(Fields ) displacement2;
FieldFormat displacement2_format;
//Ptv(real) force1;  // force 1 boundary indicator 2*nsd -> 3*nsd
real force1;
Ptv(real) force2;  // force 2 boundary indicator 3*nsd -> 4*nsd
real t_start;  // beginning of mechanical effort
real t_stop;  // end of purely mechanical effort
Ptv(real) force3;
Handle(Fields) reference_solution;
FieldFormat ref_solution_format;
Handle(FieldsFE) error_field;
String users_comment;
BooLean A_has_changed;
public:
Elasticity();
Elasticity(CommonRel* properties_);
Elasticity(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_);
~Elasticity();
BooLean ok() const;
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE)
{ defineStatic(menu,level,externals);  }
```

```
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN){}
virtual void scan(MenuSystem& menu);
virtual void adm(MenuSystem& menu);
virtual void solveProblem();
virtual void driver ();
virtual void resultReport();
virtual void print(Os os) const;
virtual void attachGridFE(GridFE& grid_);
virtual void attachTimePrm(TimePrm& tip_);
void setIC();
virtual void timeLoop();
void solveAtThisTimeLevel();
// void print(const String& filename) const;
void calcDerivedQuantities();
void calcStrainVector();
void calcStressVector();
void updateDataStructures();
void saveResults();
virtual void fillEssBC ();  // set essential boundary conditions
//member functions
protected:
// must be redefined:  requires side integration
virtual void calcElmMatVec(int e, ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
virtual void integrands4side
(
int side,
int boind,
ElmMatVec& elmat,
FiniteElement& fe
);
virtual void Enu2LambdaMu();
virtual void LambdaMu2Enu();
virtual void calcCoeff (FiniteElement& fe);  // needed by integrands
```

```
virtual real computeDivDu(FiniteElement& fe);
virtual real computeDivu(FiniteElement& fe);
virtual void analyticalSolution(Ptv(real)& anal_sol, const Ptv(real)& x, real t){}
friend CommonRel;
friend Coupling;
friend SmoothStress;
friend AnalyticElasticity;
};
#define ClassType Elasticity
#include <Handle.h>
#undef ClassType
#endif Elasticity_h_IS_INCLUDED
```

Plasticity.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe de base pour la plasticité
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef Plasticity_h_IS_INCLUDED
#define Plasticity_h_IS_INCLUDED
#include <FEM.h> // FEM algorithms
#include <DegFreeFE.h>
#include <MenuSystem.h>
#include <Elasticity.h>
#include <Vec_real.h>
#include <Mat_real.h>
#include <MenuUDC.h>
class Plasticity: public Elasticity
{
protected:
```

```
Handle(FieldsFE) du;
Handle(FieldsFE) epsp;  //plastic strain
Handle(FieldsFE) depsilon
real cohesion,frict_angle;  //parameters of Mohr-Coulomb model
real alphaDP,akDP;
void radialReturn(Vec(real)& sigv,Mat(real)& Dchapeau,
Vec(real)& depsv,Vec(real)& epspv);
int nsd_;  // always available space-dimension counter
Handle(FieldsFE) Dchapeau;  // consistent tangent modulud vector field
Vec(real) sol_alt;
public:
Plasticity ();
Plasticity(CommonRel* properties_);
Plasticity(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_);
~Plasticity ();
BooLean ok() const;
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN,BooLean externals = dpFALSE);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN, BooLean externals = dpFALSE)
{ defineStatic(menu,level,externals);  }
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN)
{ defineStatic(menu,level,dpFALSE);  }
virtual void scan (MenuSystem& menu);
void plasticity (const BooLean praedictor);
virtual real J1(Vec(real)& sigv);
virtual real J2d(Vec(real)& sigv);
virtual real J3d(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J1ds(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J2ds(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J3ds(Vec(real)& sigv);
virtual void initializeParameters(const int& nsd);
virtual void calculateModelParameters(Vec(real)& sigv);
virtual void updateModelParameters(Vec(real)& sigv);
virtual real calculateYieldSurface(Vec(real)& sigv);
virtual real deriveHardening(Vec(real)& sigv);
```

```
virtual Vec(real) deriveYieldSurface(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) derivePotential(Vec(real)& sigv);
virtual Mat(real) secondDerivYieldFunc(Vec(real)& sigv);
virtual void updateHardening(real& kh,Vec(real)& sigv);
protected:
virtual void setIC();
virtual void solveAtThisTimeLevel();
virtual void calcDerivedQuantities();
virtual void calculateStrains();
// virtual void saveResults();
virtual void integrands(ElmMatVec& elmat, FiniteElement& fe);
};
#endif Plasticity_h_IS_INCLUDED
```

DruckerPrager.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe de base pour Drucker-Prager
/**/
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef DruckerPrager_h_IS_INCLUDED
#define DruckerPrager_h_IS_INCLUDED
#include <Plasticity.h>
class DruckerPrager: public Plasticity
{
protected:
public:
DruckerPrager ();
DruckerPrager(CommonRel* properties_): Plasticity(properties_){}
DruckerPrager(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_):
```

```
Plasticity(CommonRel* properties_, GridFE& grid_, TimePrm& tip_){}
~DruckerPrager ();
virtual real J1(Vec(real)& sigv);
virtual real J2d(Vec(real)& sigv);
virtual real J3d(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J1ds(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J2ds(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) J3ds(Vec(real)& sigv);
virtual void initializeParameters(const int& nsd);
virtual void calculateModelParameters(Vec(real)& sigv);
virtual void updateModelParameters(Vec(real)& sigv);
virtual real calculateYieldSurface(Vec(real)& sigv);
virtual real deriveHardening(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) deriveYieldSurface(Vec(real)& sigv);
virtual Vec(real) derivePotential(Vec(real)& sigv);
virtual Mat(real) secondDerivYieldFunc(Vec(real)& sigv);
virtual void updateHardening(real& kh,Vec(real)& sigv);
};
#endif Plasticity_h_IS_INCLUDED
```

Coupling.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe pour la résolution du problème couplé, qui couple les solveurs individuels développés
/**/ en une résolution séquentielle globale
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
//#include<Copyright.h>
#ifndef Coupling_h_IS_INCLUDED
#define Coupling_h_IS_INCLUDED
#include <PreproBox.h>
```

```
#include <TimePrm.h>
#include <Store4Plotting.h>
#include <MenuUDC.h>
#include <MenuSystem.h>
#include <CdEquation.h>
#include <CdLinear.h>
#include <CdNonLinear.h>
#include <FlowEquation.h>
#include <Elasticity.h>
#include <Plasticity.h>
#include <DruckerPrager.h>
#include <CommonRel.h>
class CommonRel;
class CdEquation;
class CdLinear;
class CdNonLinear;
class Elasticity;
class Plasticity;
class DruckerPrager;
class FlowEquation;
class Coupling : public MenuUDC, public Store4Plotting
{
protected:
//general data:
Handle(GridFE) grid;
Handle(TimePrm) tip;
Handle(Elasticity) equilibrium_eq;
Handle(FlowEquation) flow_equation;
Handle(CdEquation) cd_equation;
Handle(CommonRel) properties;
String users_comment;
Store4Plotting c_plot;
Store4Plotting p_plot;
Store4Plotting dp_plot;
```

```
Store4Plotting u_plot;
Store4Plotting u_corr_plot;
enum Equation {PRESSURE_EQ, CONCENTRATION_EQ, EQUILIBRIUM_EQ};
Equation eq_ind;
public:
Coupling();
~Coupling();
virtual BooLean ok() const;
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN);
virtual void scan(MenuSystem& menu);
virtual void adm(MenuSystem& menu);
virtual void solveProblem();
virtual void resultReport();
virtual void driver ();
protected:
virtual void setIC();
virtual void timeLoop();
virtual void solveAtThisTimeLevel();
//void print(const String& filename) const;
void updateDataStructures();
virtual void saveResults();
void calcDerivedQuantities();  // to apply Newton-Raphson or Successive Substitution
};
#endif Coupling_h_IS_INCLUDED
```

CommonRel.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe qui gère les coefficients communs et les échanges de variables entre classes solveurs individuels
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
//#include<Copyright.h>
#ifndef CommonRel_h_IS_INCLUDED
#define CommonRel_h_IS_INCLUDED
#include <MenuUDC.h>
#include <MenuSystem.h>
#include <FiniteElement.h>
#include <FieldFE.h>
#include <FieldFormat.h>
#include <CdEquation.h>
#include <FlowEquation.h>
#include <Elasticity.h>
#include <Viscosity.h>
#include <Density.h>
#include <InjectionFlux.h>
#include <Permeability.h>
#include <Porosity.h>
#include <Filtration.h>
#include <Vec_real.h>
#include <MatDiag_real.h>
#include <Store4Plotting.h>
#include <TimePrm.h>
class CdEquation;
class FlowEquation;
class Elasticity;
```

```
class Viscosity;
class ViscosityHonmaLinear;
class ViscosityHonmaTimeDep;
class ViscosityHonmaConcTime;
class ViscosityHonmaConcTime2;
class Density;
class DensityExpon;
class DensityHonmaLinear;
class InjectionFlux;
class InjectionFluxConst;
class Permeability;
class PermeabilityConst;
class KozenyCarman;
class FiltrationPermeability;
class Porosity;
class PorosityConst;
class ConsolidPorosity;
class FiltrationPorosity;
class Porosity_prm;
class Filtration;
class Filtration_prm;
class CommonRel: public HandleId, public Store4Plotting
{
Handle(Elasticity) equilibrium_eq;
Handle(FlowEquation) flow_equation;
Handle(CdEquation) cd_equation;
Handle(TimePrm) tip;
Handle(Density) density;
Handle(Viscosity) viscosity;
Handle(InjectionFlux) injection_flux;
Handle(Permeability) permeability;
Handle(Porosity) porosity;
Handle(Filtration) filtration;
real skeleton_density;
```

```
real input_concentration;
Vec(real) gravity_vector;
Handle(Field) c_field;
FieldFormat c_field_format;
Handle(Field) p_field;
FieldFormat p_field_format;
Handle(Fields) gradp_field;
FieldFormat gradp_field_format;
Handle(Fields) u_field;
FieldFormat u_field_format;
Handle(Fields) u_prev_field;
FieldFormat u_prev_field_format;
Handle(GridFE) grid;
MatDiag(real) mass_matrix;
real p_pt;
real c_pt;
Ptv(real) gradp_pt;
real divu_pt;
real divdudt_pt;
Ptv(real) u_pt;
Ptv(real) u_prev_pt;
real time;
real dtime;
public:
enum ProblemType { PLANE_STRAIN, PLANE_STRESS, AXISYMMETRIC, CLASSICAL };
ProblemType problem_type;
public:
CommonRel();
~CommonRel();
void attachCdEquation (const CdEquation& cd_equation_);
void attachFlowEquation (const FlowEquation& flow_equation_);
void attachEquilibriumEquation (const Elasticity& equilibrium_eq_);
void attachTimePrm (const TimePrm& tip_);
void saveResults();
```

```
virtual BooLean ok() const;
// define, defineStatic, scan, adm are given default values in MenuUDC
static void defineStatic(MenuSystem& menu, int level = MAIN);
virtual void define(MenuSystem& menu, int level = MAIN)
{ defineStatic(menu,level);  }
virtual void scan(MenuSystem& menu);
//updating of variables from CdEquation, FlowEquation & EquilibriumEq
virtual void loadDataForThisTimeStep() {}
virtual void updateDataStructures();
virtual void tabulate(FiniteElement& fe, TimePrm& tip);
virtual Ptv(real) computePressureGradient();
virtual real& getPorosity(FiniteElement& fe);
virtual real& getInitialPorosity(FiniteElement& fe);
virtual real computeViscosity();
virtual real& computePermeability();
virtual real& computePermeability(FiniteElement& fe);
virtual real computeFluidDensity();
virtual real computeInjectionFlux(Ptv(real)& x, real time);
virtual real computeInjectionFlux(FiniteElement& fe, real time);
virtual real& getSigma(FiniteElement& fe);
virtual real& getSigmaTran(FiniteElement& fe);
virtual real& getSigmaMax(FiniteElement& fe);
virtual real& getPrevPorosity(FiniteElement& fe);
virtual real& getMinimalPorosity(FiniteElement& fe);
virtual real& getMinimalPorosity();
virtual real& computeTransitionPorosity(FiniteElement& fe);
virtual real& computeSkeletonDensity(FiniteElement& fe);
virtual real& computePrevSkeletonDensity(FiniteElement& fe);
virtual real& computeFiltrationCoefficient(FiniteElement& fe);  //compute lambda*c
virtual real& computeLambda(FiniteElement& fe);
virtual real& getLambda0(FiniteElement& fe);
virtual void getCoeffVector(Vec(real)& coeff_vector);
virtual void getCoeffVector(Vec(real)& coeff_vector, FiniteElement& fe);
//Product approximation
```

```
virtual void computeViscosity(Vec(real)& muj, FiniteElement& fe);
virtual void computePermeability(Vec(real)& K, FiniteElement& fe);
virtual void computeFluidDensity(Vec(real)& rhoj, FiniteElement& fe);
virtual real computeBetac();
virtual real computeBetap();
virtual Vec(real) getGravityVector();
virtual Ptv(real) computeVelocity(FiniteElement& fe);
virtual real computePressure() const;
virtual real getDivDuDt();
//Galerkin approximation
virtual real dK_dc(FiniteElement& fe);
virtual real dmu_dc(FiniteElement& fe);
virtual real drho_dc(FiniteElement& fe);
virtual real drho_dp(FiniteElement& fe);
virtual real dK_dn(FiniteElement& fe);
//Product approximation (Group Finite Element Method)
virtual void dK_dcj(Vec(real)& dKdcj, FiniteElement& fe);
virtual void dmu_dcj(Vec(real)& dmudcj, FiniteElement& fe);
virtual void drho_dcj(Vec(real)& drhodcj, FiniteElement& fe);
friend Viscosity;
friend Density;
friend InjectionFlux;
friend Permeability;
friend Porosity;
friend Filtration;
protected:
virtual real computeDivDuDt(FiniteElement& fe);
};
#define ClassType CommonRel
#include <Handle.h>
#undef ClassType
#endif CommonRel_h_IS_INCLUDED
```

Par la création d'une interface publique appropriée dans CommonRel, les valeurs des coefficients variables au cours de la résolution peuvent être récupérés depuis chaque solveur individuel via un pointeur

à un objet de la classe CommonRel. CommonRel possède une copie en propre de ces champs d'inconnues primaires, afin d'éviter l'appel aux solveurs individuels à chaque fois que la valeur en un noeud d'une des variables est nécessaire. CommonRel emploie la représentation générale Field pour les différentes variables primaires ($\overline{\rho^g}^f$, $\overline{p}^f$, $\mathbf{u}_s$, n, ρ_σ) de manière à fonctionner indifféremment en mode couplé ou découplé (solveur individuel).

Exemple de loi de comportement : Permeability

A l'aide du concept de classe, une implémentation flexible est obtenue. Les fonctions coefficient sont implémentées dans une hiérarchie de classes. Le calcul de chaque coefficient variable (loi de comportement, condition aux limites variables) est implémenté dans une hiérarchie de classes.

La classe de base Permeability (séparée de la classe solveur et de la classe CommonRel) sert d'interface pour toute l'information concernant la fonction perméabilité, incluant l'évaluation du coefficient, la lecture de paramètres spécifiques au coefficient (la loi de comportement sous-jacente) depuis l'entrée, l'écriture de la fonction dans différents formats. La classe de base possède des versions simples des fonctions virtuelles qui calculent le coefficient, correspondant généralement à un coefficient constant. Les solveurs dérivés implémentent des formes plus spécifiques de la perméabilité (couplés aux autres solveurs par exemple). Aucun des paramètres spécifiques à la fonction perméabilité n'est visible depuis la classe simulateur (CommonRel ou classe solveur individuel). Tous les appels à la fonction perméabilité possèdent la même liste d'arguments (polymorphisme mis en relation avec l'héritage). Il est en effet important d'avoir une interface unifiée (la même dans la classe de base et les sous-classes) pour l'emploi d'une hiérarchie de fonctions implémentant le calcul d'un coefficient (polymorphisme). Dans la classe simulateur, l'appel de la fonction s'effectue de manière simplifiée via l'interface générale, sans connaître le choix du type particulier de coefficient fourni au run-time.

Permeability.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Classe de base (sert à définir les variables, la syntaxe d'appel fonctions membres)
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef Permeability_h_IS_INCLUDED
#define Permeability_h_IS_INCLUDED
```

```
#include <Permeability_prm.h>
#include <Vec_real.h>
#include <FiniteElement.h>
class CommonRel;
class Permeability: public HandleId
{
protected:
//Handle(CommonRel) common_rel;
CommonRel* common_rel;
real initial_permeability; //water permeability
real beta1,beta2,beta3; //PowerLawFiltrationPermeability
public:
Permeability(const prm(Permeability)& pm, CommonRel* properties_);
~Permeability();
virtual real computePermeability() = 0; //pure virtual functions, to be redefined in derived classes
virtual real computePermeability(FiniteElement& fe) = 0;
virtual void computePermeability(Vec(real)& kj, FiniteElement& fe) = 0;
virtual real computeInitialPermeability() {
TRACE("Permeability:: computeInitialPermeability");
return initial_permeability;
}
virtual real computeInitialPermeability(FiniteElement& fe) {
TRACE("Permeability:: computeInitialPermeability");
return initial_permeability;
}
String formula;
};
#define ClassType Permeability
#include <Handle.h>
#undef ClassType
#endif Permeability_h_IS_INCLUDED
```

PermeabilityConst.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
```

```
/**/
/**/
/**/ Fonction de perméabilité constante
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef PermeabilityConst_h_IS_INCLUDED
#define PermeabilityConst_h_IS_INCLUDED
#include <Permeability.h>
class PermeabilityConst: public Permeability
{
public:
PermeabilityConst(const prm(Permeability)& pm, CommonRel* properties_);
~PermeabilityConst();
// define, defineStatic, scan, adm are given default values in MenuUDC
virtual real computePermeability();
virtual real computePermeability(FiniteElement& fe);
virtual void computePermeability(Vec(real)& rhoj, FiniteElement& fe);
};
#endif PermeabilityConst_h_IS_INCLUDED
```

KozenyCarman.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Loi de perméabilité de Kozeny-Carman
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef KozenyCarman_h_IS_INCLUDED
#define KozenyCarman_h_IS_INCLUDED
#include <Permeability.h>
#include <CommonRel.h>
class KozenyCarman: public Permeability
```

```
{
public:
KozenyCarman(const prm(Permeability)& pm, CommonRel* properties_);
~KozenyCarman();
virtual real computePermeability();
virtual real computePermeability(FiniteElement& fe);
virtual void computePermeability(Vec(real)& rhoj, FiniteElement& fe);
};
#endif KozenyCarman_h_IS_INCLUDED
```

FiltrationPermeability.h

```
// -*- C++ -*-
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Loi de Kozeny-Carman modifiée pour la filtration (Ives, ([65]))
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef FiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
#define FiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
#include <Permeability.h>
#include <CommonRel.h>
class FiltrationPermeability: public Permeability
{
public:
FiltrationPermeability(const prm(Permeability)& pm, CommonRel* properties_);
~FiltrationPermeability();
virtual real computePermeability();
virtual real computePermeability(FiniteElement& fe);
virtual void computePermeability(Vec(real)& kj, FiniteElement& fe);
};
#endif FiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
```

PowerLawFiltrationPermeability.h

```
// -*- C++ -*-
```

```
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Loi de perméabilité généralisée pour la filtration (Herzig ([56]), Mohanka ([87]))
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
#ifndef PowerLawFiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
#define PowerLawFiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
#include <Permeability.h>
#include <CommonRel.h>
class PowerLawFiltrationPermeability: public Permeability
{
public:
PowerLawFiltrationPermeability(const prm(Permeability)& pm, CommonRel* properties_);
~PowerLawFiltrationPermeability();
virtual real computePermeability();
virtual real computePermeability(FiniteElement& fe);
virtual void computePermeability(Vec(real)& kj, FiniteElement& fe);
};
#endif FiltrationPermeability_h_IS_INCLUDED
```

Une hiérarchie analogue a été définie pour la viscosité fluide, la densité fluide, la porosité, le flux d'injection et le taux de filtration.

StreamlineUpwind.h

```
/*****************************************************************************/
/**/
/**/
/**/ Calcul des fonctions de pondération SUPG (Galerkin comme choix par défaut)
/**/
/**/
/*****************************************************************************/
// -*- C++ -*-
#ifndef StreamlineUpwind_h_IS_INCLUDED
#define StreamlineUpwind_h_IS_INCLUDED
#include <Vec_real.h>
#include <Ptv_real.h>
#include <Mat_real.h>
class FiniteElement;
class StreamlineUpwind
{
private:
int method;
int eta_formula;
Vec(real) weight_func;  // perturbed weighting functions
Mat(real) Dweight_func;  // derivatives of weight_func
Ptv(real) eta;  // help variable
Ptv(real) hlen;  // characteristic lengths of the element
//real alpha;  //Peclet number
//real eta_, eta_parel;
real tau;
real tau_parel;
void StreamlineUpwind::  calcPrm // compute hlen and eta
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D // diffusion
);
```

```
real StreamlineUpwind:: calcTau // compute tau1 and tau2 in PG3 and PG4
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D // diffusion
);
void StreamlineUpwind:: calcBrooksHughes
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D, // diffusion
real dt,
BooLean stationary,
int method
);
void StreamlineUpwind:: calcHughesEtAl
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D, // diffusion
real dt,
int method,
const Ptv(real)* grad_u = NULL // gradient of the dependent variable
);
void StreamlineUpwind:: calcHughesMallet
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D, // diffusion
real dt,
int method
);
public:
StreamlineUpwind () {}
```

```
~StreamlineUpwind () {}
void calcWeightingFunction
(
FiniteElement& fe,
const Ptv(real)& v, // velocity
const real D, // diffusion
real dt,
BooLean stationary,
const Ptv(real)* grad_u = NULL
);
real W (int i) { return weight_func(i); }
real dW (int i, int dir) { return Dweight_func(i,dir); }
BooLean ok () const { return weight_func.ok(); }
static void defineStatic (MenuSystem& menu, int level = MAIN);
void define (MenuSystem& menu, int level = MAIN);
void scan (MenuSystem& menu);
int getMethod () const { return method; }
void setMethod (int method_) { method = method_; } // usually set by scan
void print(Os os) const;
};
```

La classe StreamlineUpwind permet le calcul de plusieurs types de fonctions de pondération à partir d'un objet de type FiniteElement (classe prédéfinie dans Diffpack, qui définit l'élément fini dans son système de coordonnées locales, les fonctions de base, la relation entre noeuds locaux et globaux, les coodonnées nodale), d'un coefficient de diffusion,et d'un vecteur vitesse. Les méthodes possibles sont :

0) Galerkin

1) Les fonctions de pondération SUPG définies par Brooks et Hughes ([21]), dans le cas stationnaire

2) Les fonctions de pondération SUPG définies par Brooks et Hughes ([21]), dans le cas transitoire

3) Les fonctions de pondération SUPG avec discontinuity capturing (terme additionnel dans la fonction de pondération, qui agit dans la direction du gradient de concentration) définies par Hughes et al. ([59]) dans le cas stationnaire

4) Les fonctions de pondération SUPG avec discontinuity capturing définies par Hughes et al. ([59]) dans le cas transitoire

10.2 Solutions analytiques

10.2.1 Equation de transport

CdAs

Cette solution est proposée par Langtangen ([75]) pour tester l'équation de type advection-diffusion Eqn.6.1. Sous les conditions restrictives suivantes :

$$\mathbf{V}_{fl} = \mathbf{cte},\ D_k = cte\ \forall\ k = 1...nsd \tag{10.1}$$

$$f = 2\sum_{k=1}^{nsd} (V_f)_k\, x_k - 2\sum_{k=1}^{nsd} D_k + 1 \tag{10.2}$$

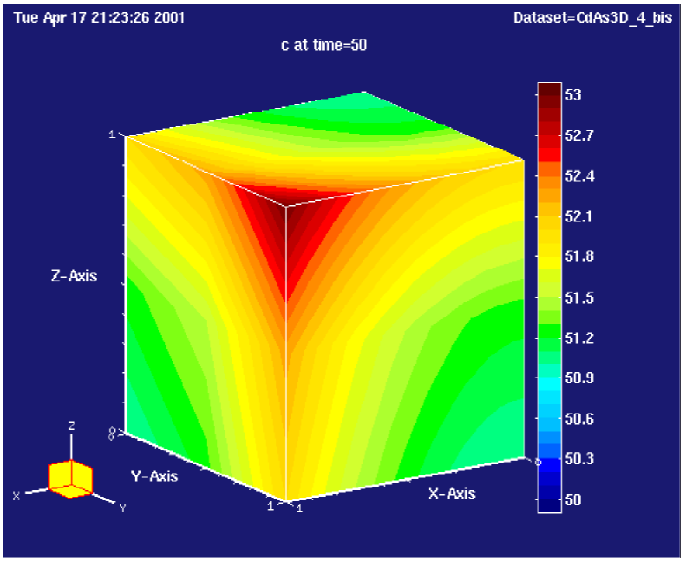
x_k désignant les coordonnées d'espace ($k = 1...nsd$, nsd=dimension spatiale), et l'ensemble des bords du domaine est soumis à la condition de Dirichlet suivante :

$$c_{imp} = t + \sum_{k=1}^{nsd} (x_k)^2 \tag{10.3}$$

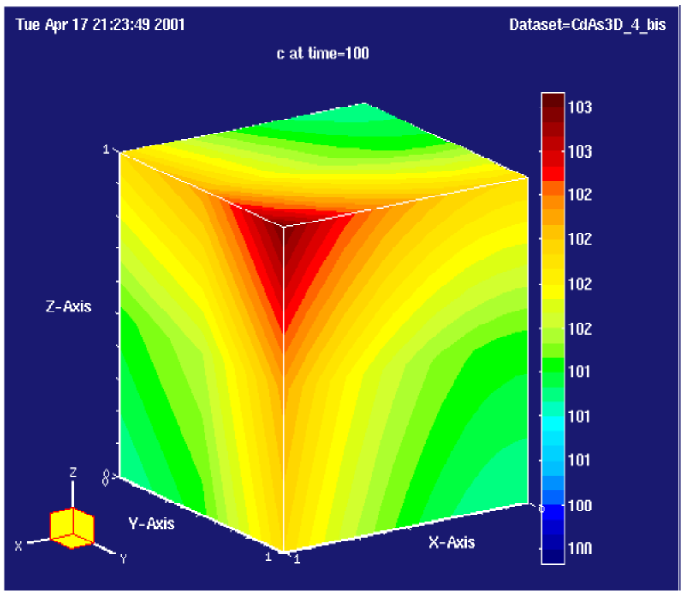
La solution de l'Eqn.6.1, en tout point du domaine, est donnée par la relation

$$c\,(\mathbf{x}, t) = t + \sum_{k=1}^{nsd} (x_k)^2 \tag{10.4}$$

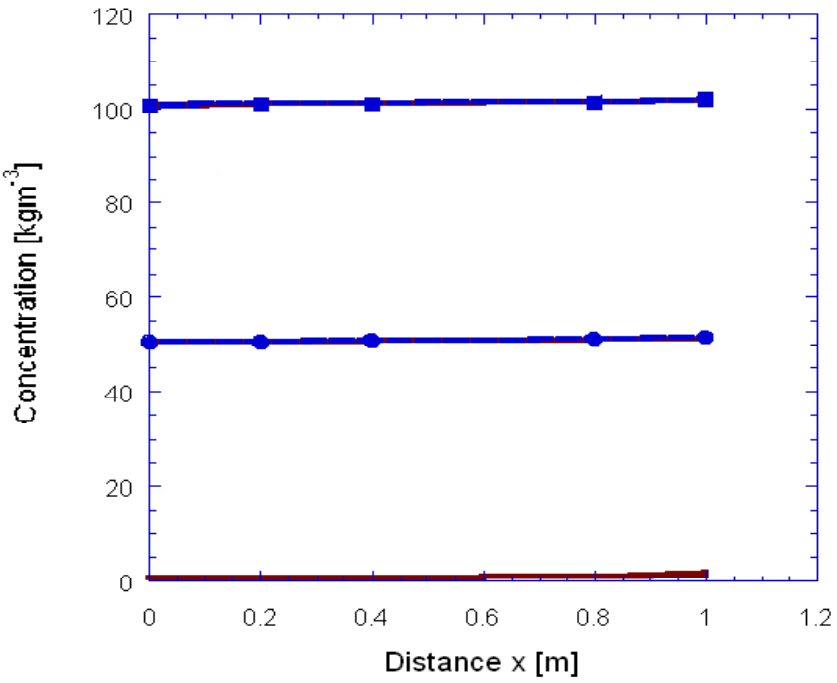
Les calculs doivent produire une solution numérique qui coïncide avec la solution analytique aux noeuds de la discrétisation, quelle que soit la taille des éléments finis, et quelle que soit l'ordre des éléments, linéaires ou quadratiques ([75]). $\mathbf{V}_f$, D_k, ainsi que les paramètres de discrétisation spatiale (taille du maillage), sont variés. Les Fig.10-1 et 10-2 représentent la solution du champ de concentration tridimensionnel à $t = 50\ s$ et $t = 100\ s$ respectivement, pour $\mathbf{V}_f = (0.5, 1., 0.5)$, un coefficient de diffusion $D_k = 0$ (nombre de Peclet infini). Les solutions de Galerkin et SUPG sont confondues pour ce cas. La Fig.10-3 reporte la solution calculée suivant la section ($y = 0.6\ m, z = 0.6\ m$). Il peut être vérifié d'après l'expression de la solution analytique Eqn.10.4 que solutions numérique et analytique coïncident parfaitement, la solution ne dépend que du temps et des coordonnées d'espace. L'erreur numérique est quasi-nulle (valeur maximale 10^{-13}) pour tous les cas testés, y compris avec un nombre de Peclet infini (convection pure).



Figure~10-1: CdAs. Solution SUPG à $t = 50\ s$.



Figure~10-2: CdAs. Solution SUPG à $t = 100\ s$.



Figure~10-3: CdAs. Solution SUPG suivant x sur la section $y = 0.6\ m$, $z = 0.4\ m$.

Advection pure avec un terme source

Leonard ([78]) insiste sur le fait que les différences upwind classiques ([58], [55]) donnent de très mauvais résultats lorsque des termes sources (ou plus généralement des termes non constants, autres que le terme de convection du premier ordre, des termes transitoires ou de couplage par exemple) sont présents. Ce problème est d'importance majeure pour la formulation développée, car le terme de filtration et le terme de couplage hydromécanique présents dans l'équation de transport peuvent être vus comme des termes sources. De plus le champ de concentration calculé à partir de l'équation de transport figure dans les équations d'écoulement, de porosité et de densité de coulis adsorbé. Aussi, si le calcul du champ de concentration est entaché d'erreurs liées à un traitement numérique erroné du terme de filtration, c'est la solution de l'ensemble du problème de transport, d'écoulement et de déformation qui se trouve faussée. Afin d'étudier le problème lorsque la solution est connue, le cas CdAs et le cas d'advection pure avec terme source ont été programmés. La solution numérique s'identifie à la solution exacte pour CdAs, et la solution du cas d'advection pure avec une terme source illustre également l'utilité d'une formulation consistante (cf. section 5.2.1).

A présent, les conditions imposées pour obtenir la solution d'advection pure sont les suivantes ([21], [78]). Le problème est unidimensionnel :

$$\mathbf{V}_{fl} = \mathbf{cte} = V_{fl}\mathbf{x},\ D_k = cte = 0,\ k = 1 \tag{10.5}$$

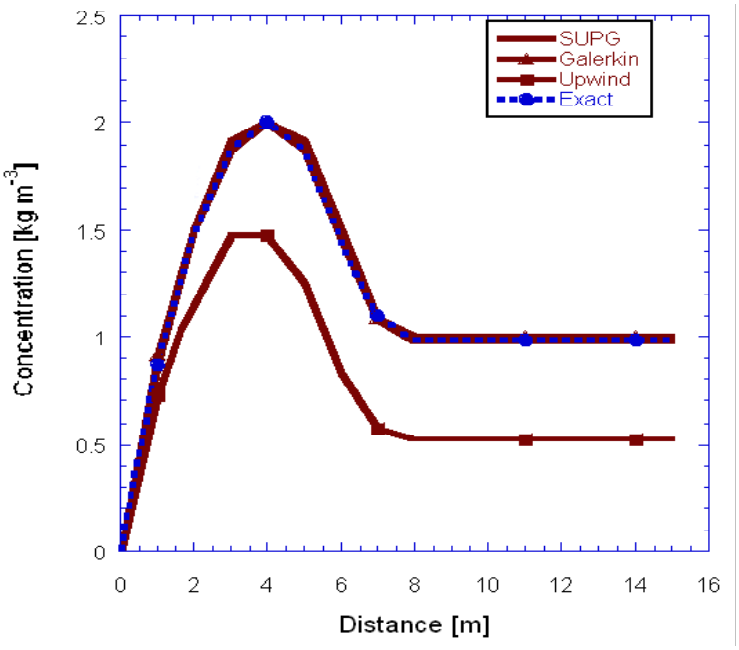
Le terme source est défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{4}(x-4) \text{ si } x \in [0;6] \\ &= \frac{1}{4}(x-8) \text{ si } x \in [6;8] \end{aligned} \tag{10.6}$$

La condition aux limites de Dirichlet est prise homogène en $x = 0$:

$$c(0,t) = 0\ \forall\ t \tag{10.7}$$

La Fig.10-4 donne un ensemble de solutions calculées pour un nombre de Peclet $Pe = \frac{V_f \Delta t}{\Delta x} = \infty$ (le nombre de Peclet infini correspond au cas où la diffusion est prise nulle, $D = 0$), une discrétisation de 15 éléments, un pas de temps $\Delta t = 1$, une vitesse $V_f = 1\ m \cdot s^{-1}$. Dans le cas de l'advection pure, $\overline{\xi} = sign(V_f)$, et la discrétisation SUPG équivaut à une différence arrière sur le terme de convection. La solution SUPG est comparée à la solution upwind classique donnée par Leonard ([78]), à la solution de Galerkin et à la solution exacte. La Fig.10-5 représente la solution pour $Pe = 2$, obtenue avec les mêmes paramètres de discrétisation et $D = 0.5$. La méthode SUPG est plus proche de la solution analytique pour



Figure~10-4: Advection pure. Solutions pour un nombre de Peclet infini.

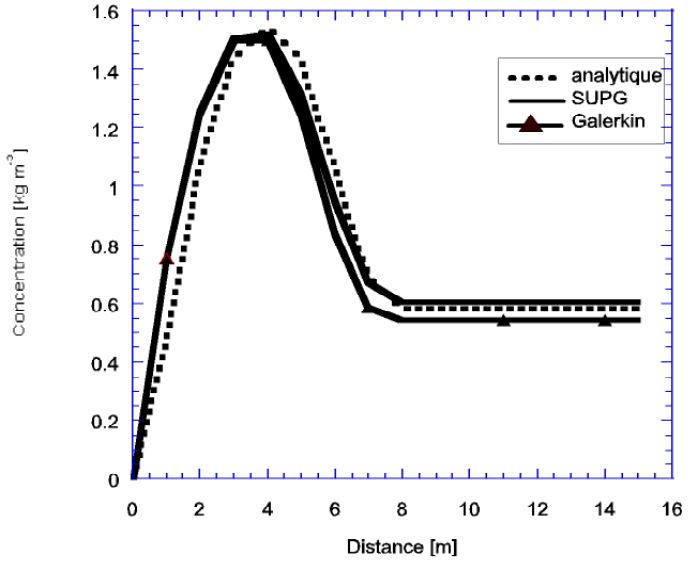
$Pe = 2$, les résultats obtenus coïncident presque avec la solution exacte. Pour $Pe = \infty$, les deux schémas sont équivalents, et sont meilleurs que la solution par pondération upwind classique ([78]), conformément aux résultats de Hughes ([60]). La pondération de Petrov-Galerkin constitue une amélioration notable par rapport à la méthode upwind, et donne même des résultats meilleurs que Galerkin, qui est le schéma de discrétisation le plus précis lorsqu'il converge.

Les solutions CdAs et d'advection pure avec un terme source montrent que l'existence d'un terme source n'embarrasse pas la résolution SUPG, contrairement aux résultats upwind reportés par Leonard, l'erreur de dissipation est négligeable.

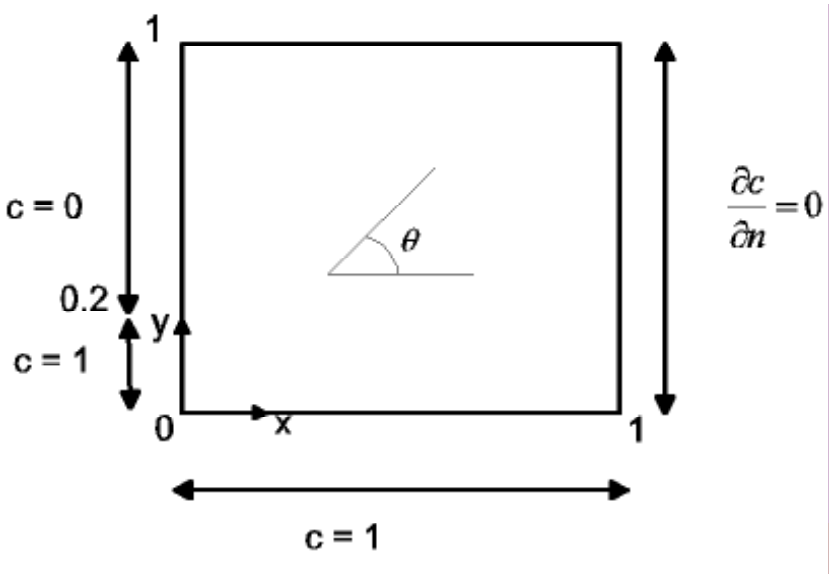
Advection non parallèle aux axes du maillage

Le problème de type stationnaire est représenté Fig.10-6. L'écoulement est unidirectionnel, de vitesse constante en amplitude et en direction ($\|\mathbf{V}_f\| = 1$). Les conditions imposées sont celles données par Hughes et al. ([21], [59], [60], [46]). Cet exemple est utile pour illustrer l'élimination de la diffusion transverse avec SUPG, et la minimisation des oscillations, qui figurent parmi les inconvénients majeurs des méthodes upwind classiques ([78]).

$$\|\mathbf{V}_f\| = cte = 1,\ \mathbf{V}_f = \|\mathbf{V}_f\|\,(\cos\theta, \sin\theta) \tag{10.8}$$



Figure~10-5: Advection pure. Solution pour $Pe_{él} = 2$.



Figure~10-6: Définition du problème. Condition aux limites naturelle en $x = 1$.

θ désignant l'angle entre le vecteur vitesse bidimensionnel et l'axe $\mathbf{x}$ du maillage.

$$D = cte = 10^{-7} \tag{10.9}$$

Le coefficient de diffusion est pris très faible afin d'avoir un nombre de Peclet $Pe = \frac{\|\mathbf{V}_{fl}\|\Delta x}{D} = 10^6$ avec un maillage uniforme de $[10, 10]$ éléments. L'amplitude du nombre de Peclet montre qu'il s'agit essentiellement d'un problème d'advection pure. La solution exacte correspond à un mouvement d'advection de la condition aux limites $c = 1$ en amont.

La condition aux limites upwind est discontinue en amont de l'écoulement, ce qui conduit à l'existence d'une couche limite interne inclinée par rapport au maillage. Deux types de conditions aux limites sont envisagées en aval de l'écoulement.

- **Condition aux limites naturelle**

La condition aux limites en amont est discontinue, et une condition aux limites naturelle est prise en aval: $\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0$.

L'implémentation s'effectue sans intégration réduite, la même technique (2×2 points de Gauss) est employée pour l'intégration de tous les termes de l'équation (matrice masse, terme de convection, terme de diffusion, second membre).

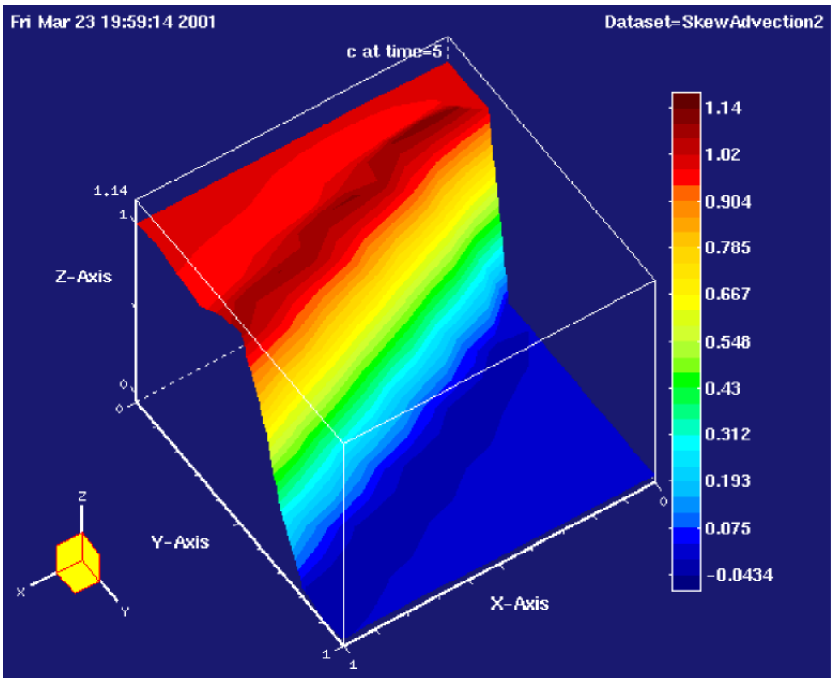
Trois inclinaisons différentes de la vitesse par rapport à l'axe $\mathbf{x}$ sont étudiées, soit $\theta = 22.5°, 45°, 67.5°$. $\theta = 0°$ n'est pas présenté parce que la solution est exacte aux noeuds dans ce cas.

Pour $\theta = 22.5°$, les résultats sont présentés sur les Fig.10-7 et Fig.10-8 pour les méthodes SUPG et Galerkin respectivement. Le dépassement (ou sous-évaluation) de la valeur exacte est largement réduit avec SUPG. La solution de Galerkin a présente des oscillations plus marquées qu'avec SUPG, montrant que le schéma SUPG est efficace pour le problème posé d'advection non parallèle aux axes de coordonnées.

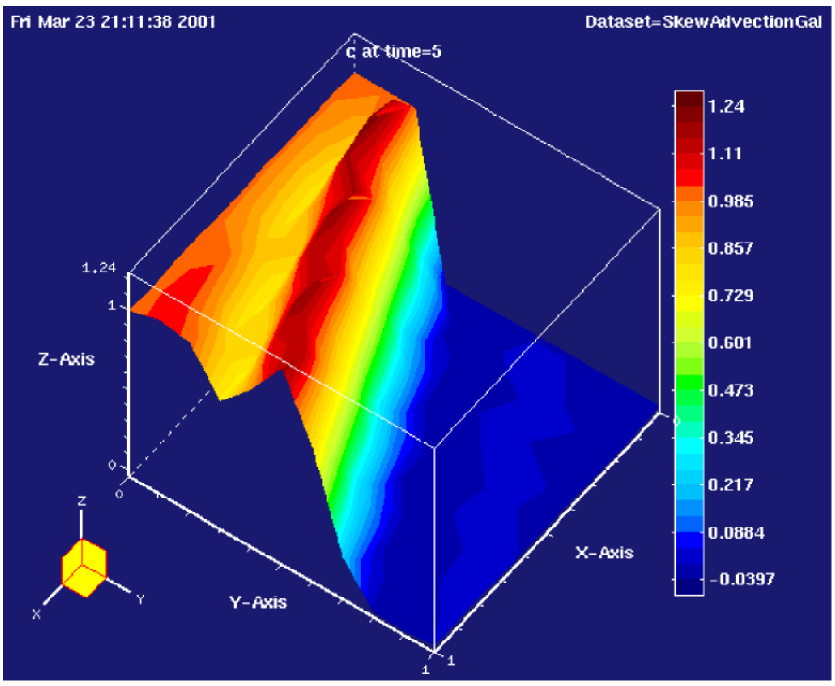
Les résultats sont conformes à ceux obtenus par Hughes ([60]). Les oscillations sont plus marquées en amont qu'en aval de la zone de transition au niveau du front.

Les résultats obtenus avec $\theta = 45°$ sont donnés sur les Fig.10-9 pour la méthode SUPG et 10-10 pour la pondération de Galerkin. La taille de la zone de transition est légèrement plus importante (dispersion numérique plus importante) dans le sens de l'écoulement car ce cas est plus exigeant que le précédent (inclinaison maximale de la vitesse par rapport au maillage). L'allure du champ de concentration est régulière, il n'en sera pas de même dans le second cas étudié (conditions aux limites essentielles discontinues en aval).

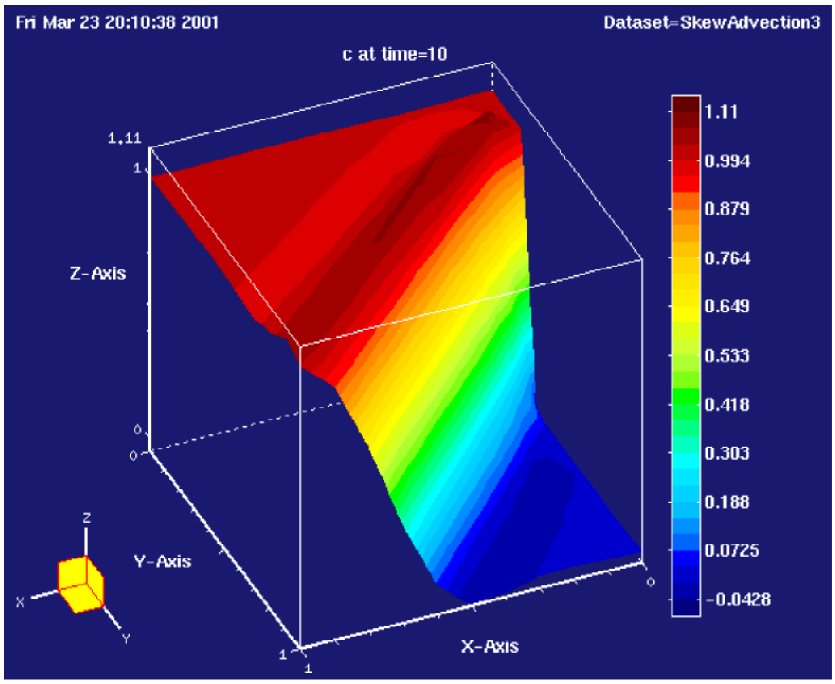
Pour le schéma de Galerkin, la solution s'est largement détériorée par rapport au cas $\theta = 22.5°$. L'amplitude des oscillations est nettement plus marquée, et porte sur l'ensemble du plateau (en arrière du front, dans la direction de l'écoulement). La zone en aval du front (pour laquelle la solution exacte vaut $c = 0$) n'est par contre pas perturbée.



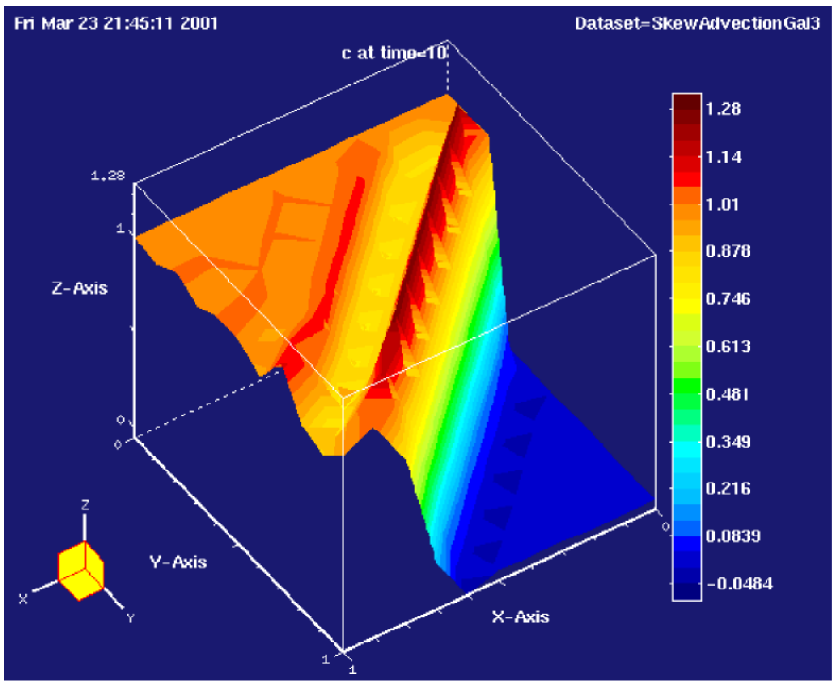
Figure~10-7: SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 22.5°$.



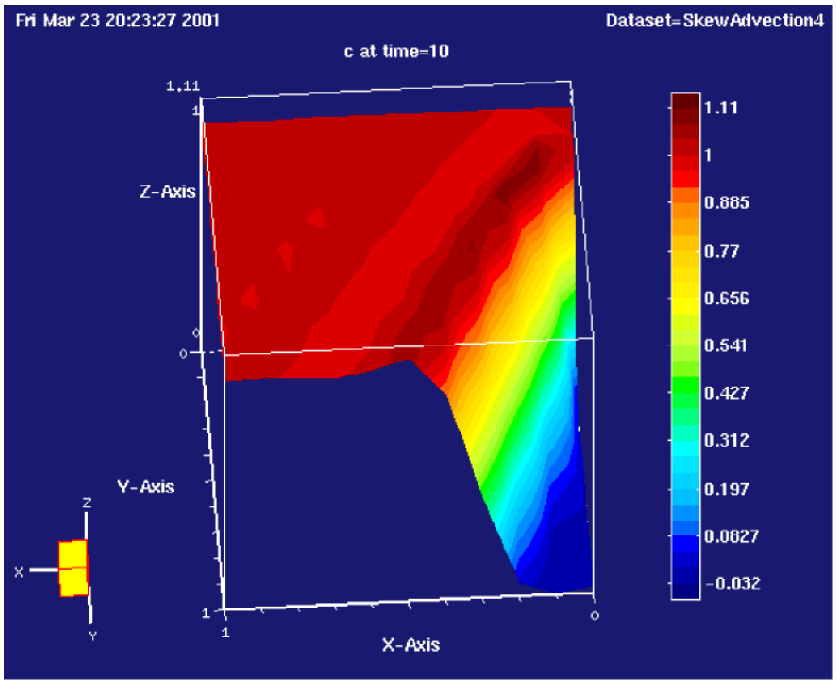
Figure~10-8: SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 22.5°$.



Figure~10-9: SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 45°$.



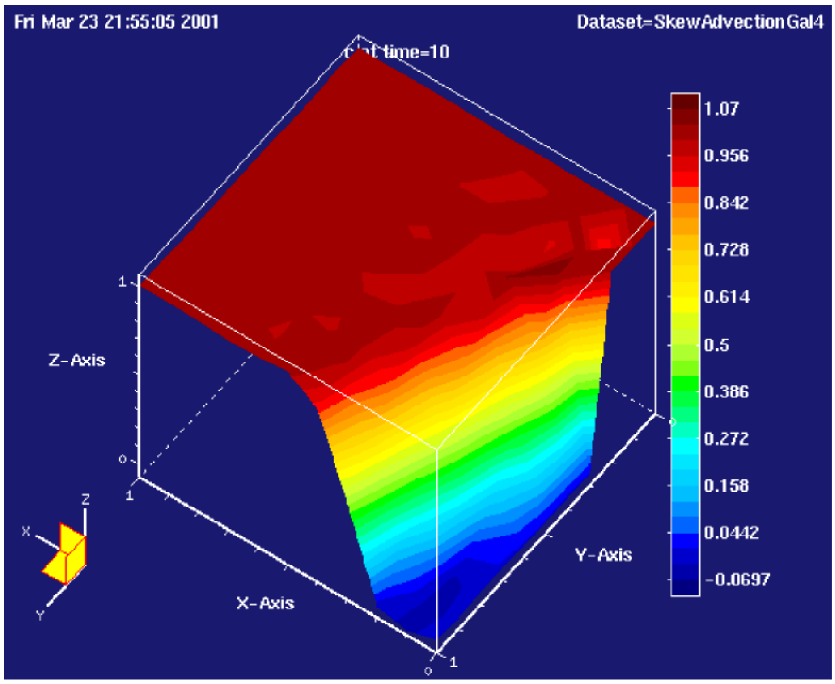
Figure~10-10: SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 45°$



Figure~10-11: SkewAdvection. Solution SUPG avec $\theta = 67.5°$

Le dernier cas $\theta = 67.5°$ est illustré sur les Fig.10-11 (SUPG) et Fig.10-12 (Galerkin). Par rapport au cas précédent, la solution SUPG est légèrement altérée au niveau de la zone de transition du front de concentration. Il apparaît des oscillations perpendiculaires à la direction de la vitesse, qui n'existaient pas auparavant. Ceci peut être lié au fait que la quasi-totalité du domaine correspond à un plateau $c = 1$, sauf une zone réduite le long de $y = 1$ et $x = 0$ pour laquelle $c = 0$ est imposée (condition aux limites essentielle qui est plus difficile à assurer). Par contre l'étalement du front est moins important que dans le cas précédent. Cette remarque montre que l'effet d'orientation du maillage par rapport à la direction de l'écoulement n'est pas négligeable sur la "fausse" dispersion (numérique) qui doit être introduite afin de régulariser le champ de concentration.

Pour la méthode de Galerkin, la solution avec $\theta = 67.5°$ est nettement meilleure que pour $\theta = 45°$, et proche de celle obtenue avec SUPG. Le même phénomène d'oscillations perpendiculaires à l'écoulement est observé dans la zone de transition. L'étalement du front est le même dans ce cas pour SUPG que pour Galerkin et, de manière générale, des solutions identiques seront obtenues avec les deux méthodes chaque fois que la solution présente des caractéristiques de régularité intrinsèques qui évitent de recourir à l'ajout de dispersion numérique. Néanmoins, sur l'ensemble des cas passés en revue, SUPG est supérieure à Galerkin avec des conditions aux limites naturelles.



Figure~10-12: SkewAdvection. Solution de Galerkin avec $\theta = 67.5°$

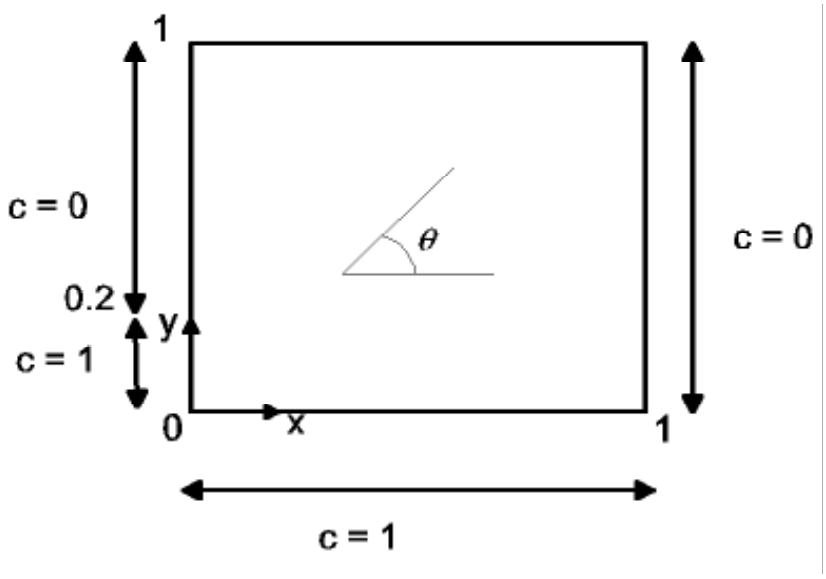
- **Condition aux limites essentielle**

Ce problème est plus difficile que le précédent (Fig.10-13). Au lieu d'une condition aux limites naturelles en aval de l'écoulement ($\frac{\partial c}{\partial x} = 0$ en $x = 1$), la condition aux limites essentielle $c = 0$ est imposée en $x = 1$, ce qui provoque le développement d'une "couche limite" au voisinage de la frontière aval. Les mêmes inclinaisons sont étudiées : $\theta = 22.5°, 45°, 67.5°$. Dans les deux cas $\theta = 45°, 67.5°$, deux couches limites sont présentes au niveau de la frontière du domaine. Dans le cas $\theta = 22.5°$ une seule couche limite est présente.

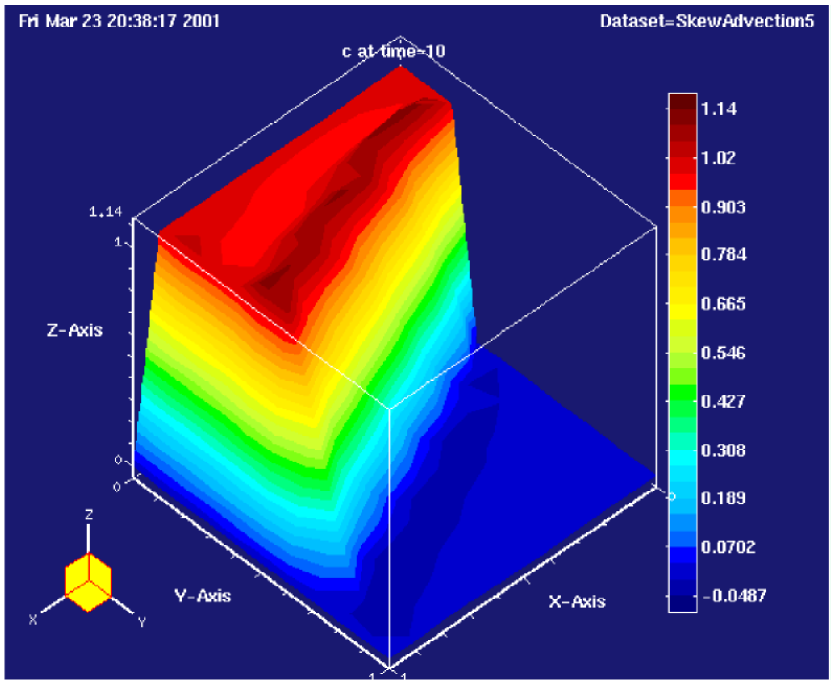
Lorsque $\theta = 22.5°$, la solution SUPG (Fig.10-14) présente les mêmes caractéristiques que la solution obtenue pour des conditions aux limites naturelles. La frontière abrupte introduite en $x = 1$ est correctement traitée par le problème numérique. Les oscillations possèdent une amplitude maximale identique à celles du cas analogue mais pour une condition de Neumann en $x = 1$.

La solution de Galerkin diverge complètement (Fig.10-15), la solution est complètement perturbée par l'introduction de la condition de Dirichlet homogène en $x = 1$. Des oscillations d'amplitude inacceptable apparaissent sur l'ensemble du domaine.

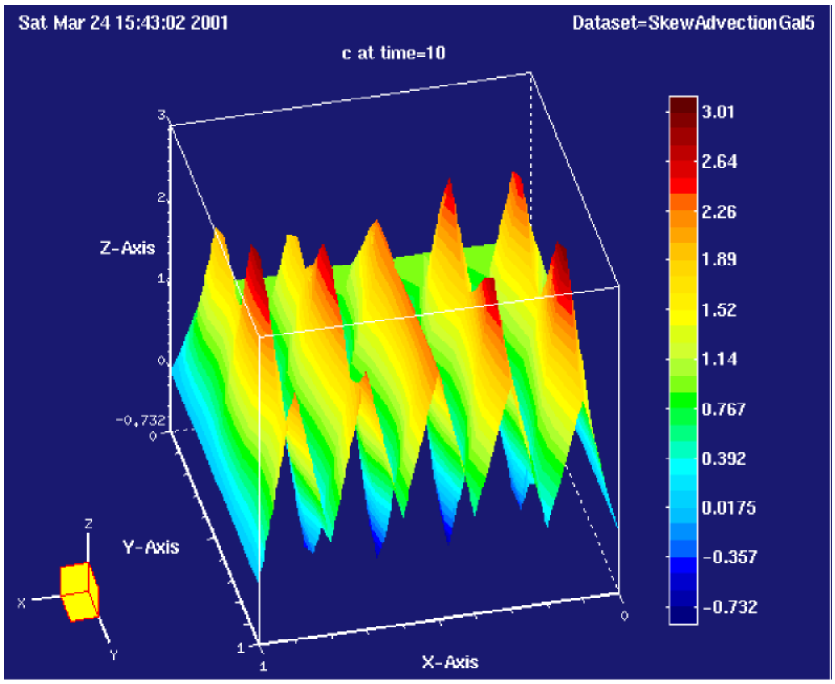
Avec $\theta = 45°$, la solution se détériore par rapport au cas précédent. Il apparaît des oscillations de la concentration au niveau de la condition aux limites de Dirichlet $c = 0$ en $x = 1$ pour la méthode



Figure~10-13: Définition du problème. Condition aux limites essentielle en $x = 1$.



Figure~10-14: SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 22.5$.

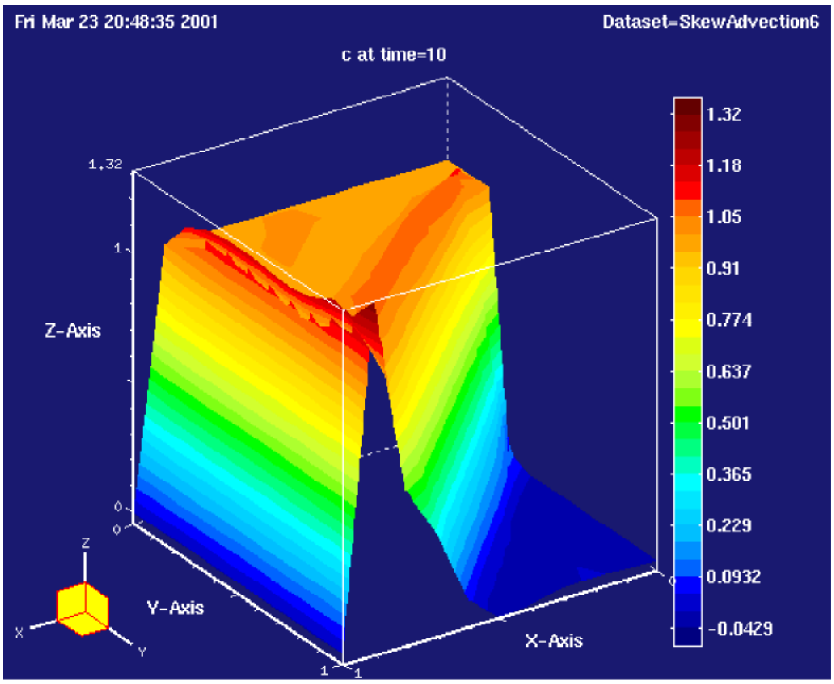


Figure~10-15: SkewAdvection. Condition essentielle. Solution de Galerkin pour $\theta = 22.5°$.

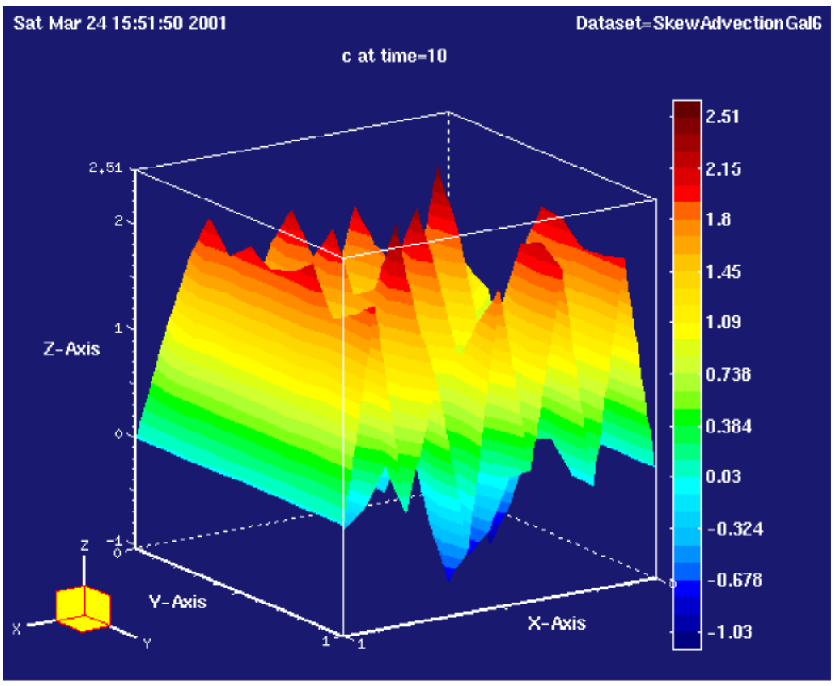
SUPG (10-16). Par contre le plateau principal montre très peu d'oscillations (inférieures à 5%). Partout ailleurs (y compris sur la zone de transition du front principal), la solution est très proche de la solution analytique. La solution de Galerkin diverge (Fig.10-17).

Avec $\theta = 67.5°$, la solution se détériore encore par rapport au cas précédent. La solution est représentée sur la Fig.10-18. Le problème principal réside dans le traitement de la condition aux limites essentielle en $x = 1$, difficile à assurer car la zone de transition est très étroite (à noter que cette condition est peu physique lorsque la quasi-totalité du domaine est à $c = 1$).

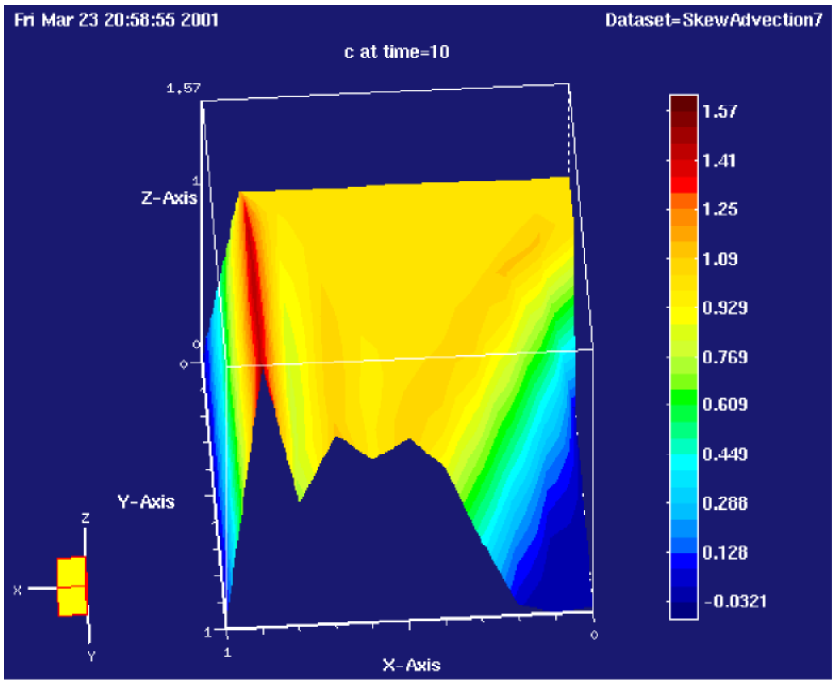
L'amplitude des oscillations au voisinage de la condition aux limites en $x = 1$ est très élevée (57% d'overshoot maximum, mais sur une bande très étroite), ailleurs les changements sont moins marqués et le caractère de la solution est conservé. Des oscillations perpendiculaires au sens de l'écoulement sont à noter au niveau de la zone de transition du front principal, mais qui restent de niveau acceptable. La solution de Galerkin diverge complètement. Les résultats obtenus concordent avec ceux donnés par Hughes ([59]), et illustrent l'utilité du schéma SUPG pour obtenir des solutions acceptables. Le schéma SUPG se comporte aussi bien que le schéma Galerkin Least Squares ([46]) pour ce cas à convection dominante. La solution est bonne avec toutes les couches et les plateaux qui apparaissent clairement. La solution de Galerkin diverge (Fig. 10-19).



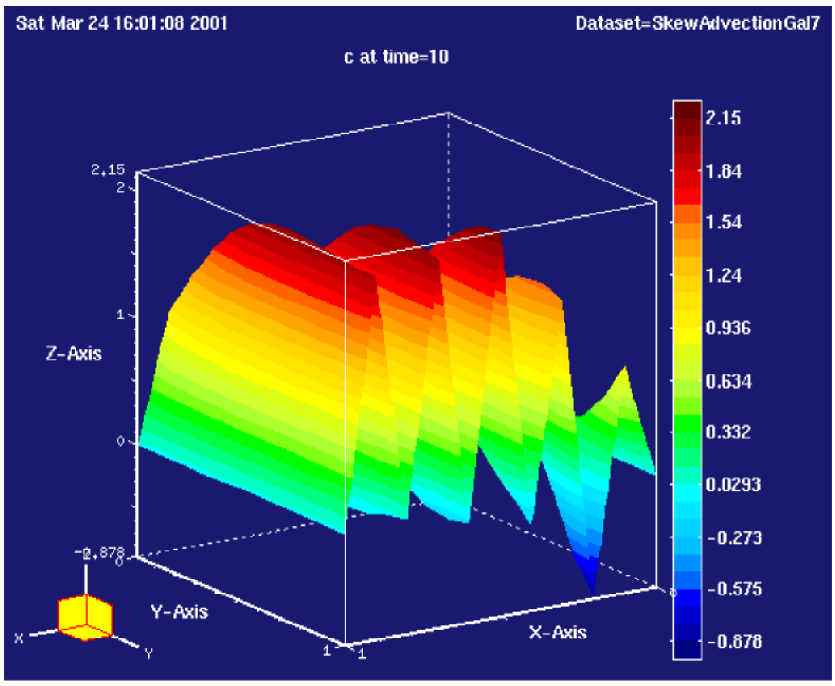
Figure~10-16: SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 45°$.



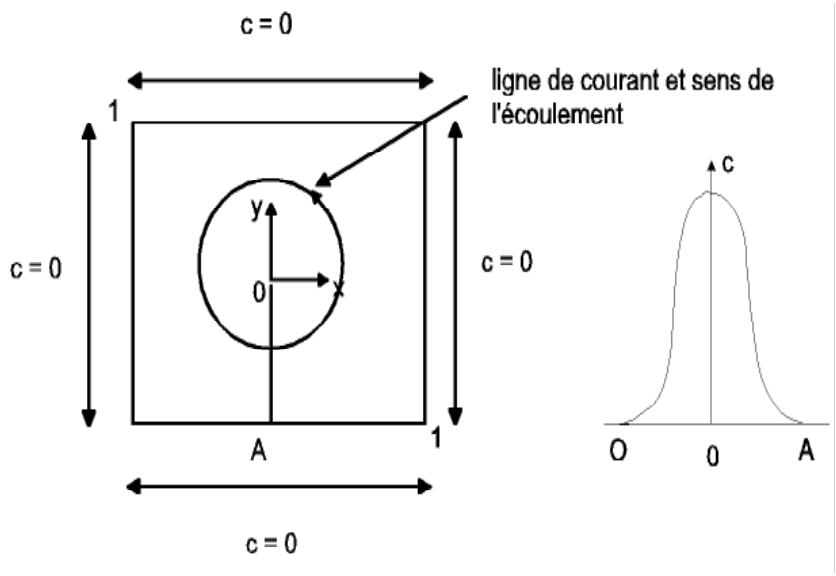
Figure~10-17: SkewAdvection. Condition essentielle. Solution de Galerkin pour $\theta = 45°$.



Figure~10-18: SkewAdvection. Condition essentielle. Solution SUPG pour $\theta = 67.5°$.



Figure~10-19: SkewAdvection. Solution de Galerkin pour $\theta = 67.5°$.



Figure~10-20: Advection d'une fonction sinusoïdale dans un champ d'écoulement tournant. Définition du problème.

Advection d'une fonction sinusoïdale dans un champ d'écoulement tournant

L'écoulement consiste en une rotation de corps rigide autour du centre d'un domaine bidimensionnel $[0,1] \times [0,1]$. Le problème est un cas étudié par de nombreux auteurs ([21], [59]). Le champ de vitesse est donné par

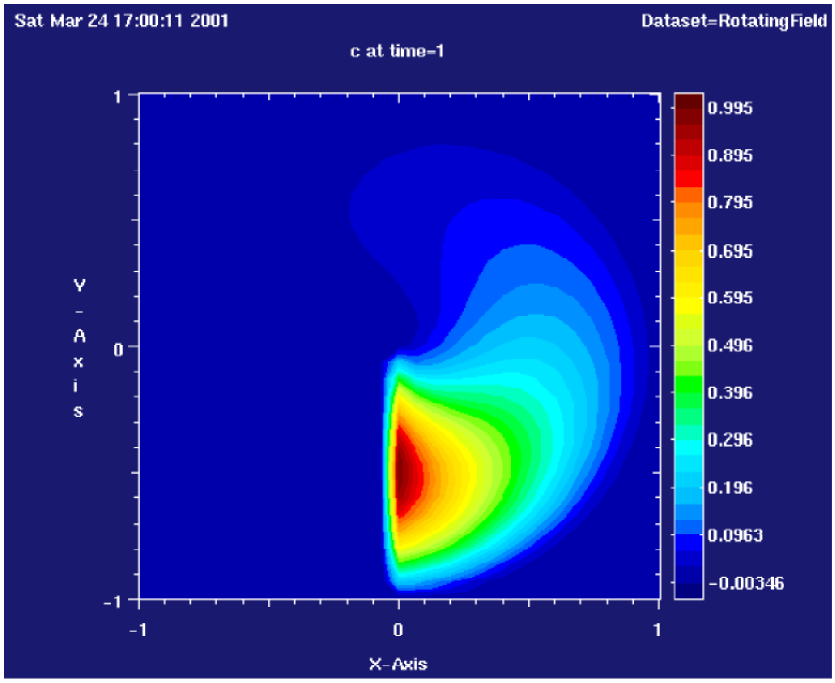
$$\mathbf{V}_f = \mathbf{z} \wedge \mathbf{x} = (-y, x) \tag{10.10}$$

La diffusion est rendue négligeable, en étant prise égale à

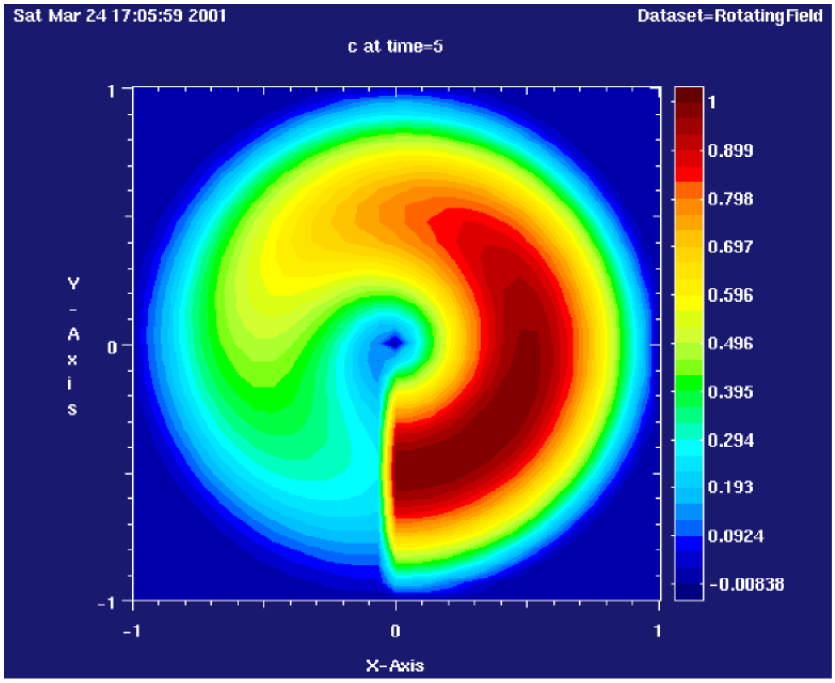
$$D = 10^{-6} \tag{10.11}$$

afin de traiter un problème dominé par la convection.

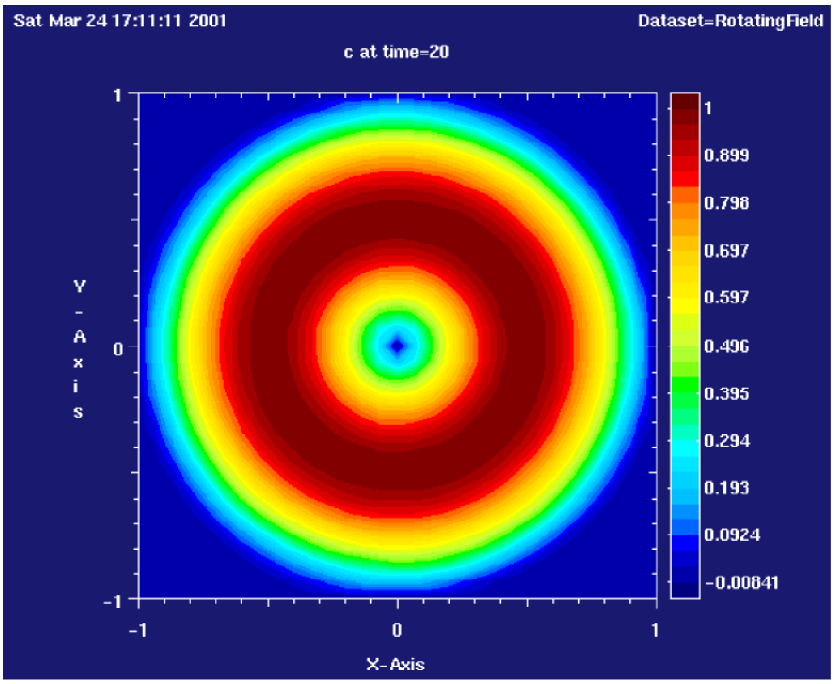
Les conditions aux limites (externes et le long de la frontière interne OA) du problème sont représentées sur la Fig.10-20. Sur l'ensemble de la frontière extérieure, une condition de Dirichlet homogène est considérée, tandis que le long de la frontière interne, une fonction sinusoïdale est prescrite. Un maillage uniforme $[30, 30]$ est employé. La solution exacte consiste en une advection pure de la frontière intérieure OA le long des lignes de courant circulaires. Les Figs.10-21 à 10-23 représentent le développement de la solution au cours du temps. La Fig.10-24 est une représentation tridimensionnelle de la solution stationnaire. Pour ce problème, la méthode SUPG se comporte de façon optimale.



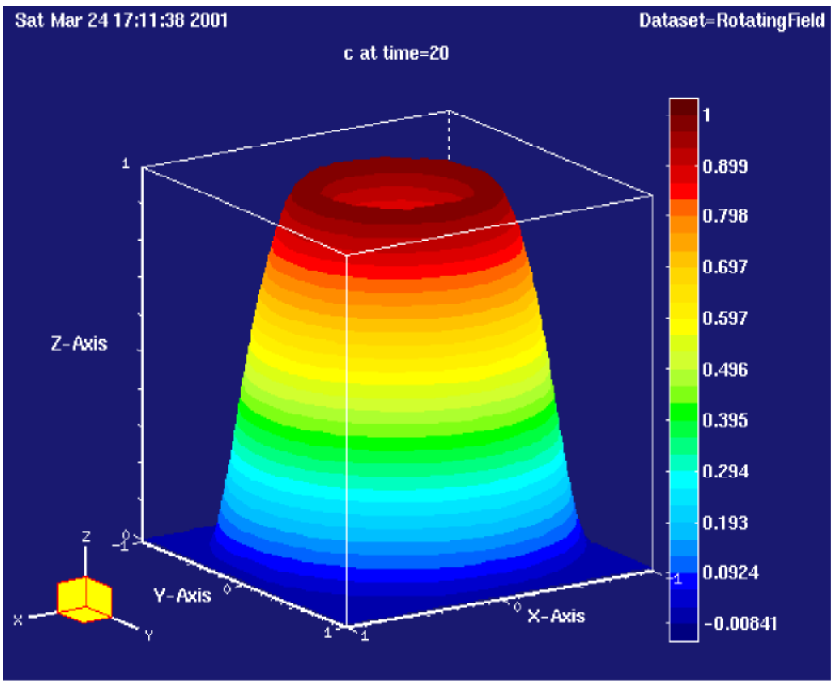
Figure~10-21: Advection dans un champ d'écoulement tournant. Solution de la méthode SUPG à $t = 1$ s.



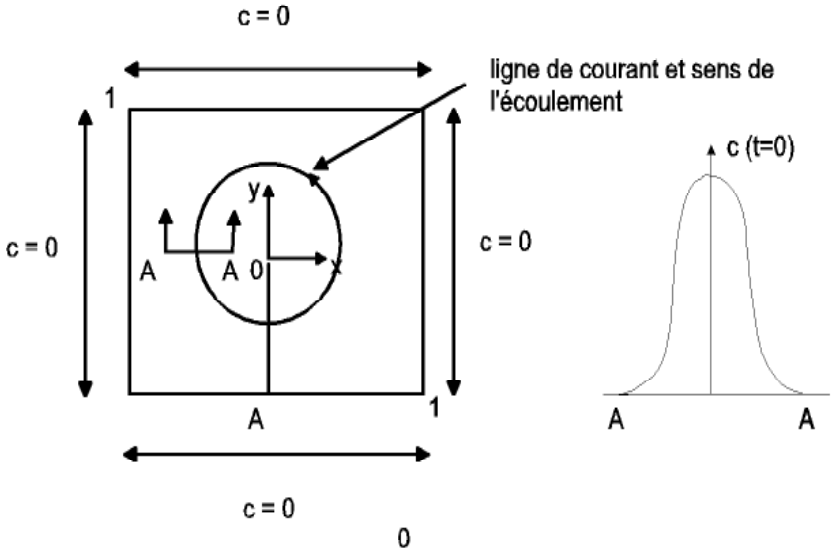
Figure~10-22: Solution de la méthode SUPG à $t = 5$ s.



Figure~10-23: Solution de la méthode SUPG à $t = 20\ s$.



Figure~10-24: Vue tridimensionnelle de la solution à $t = 20\ s$.



Figure~10-25: Rotation d'un cône dans un champ d'écoulement tournant. Définition du problème.

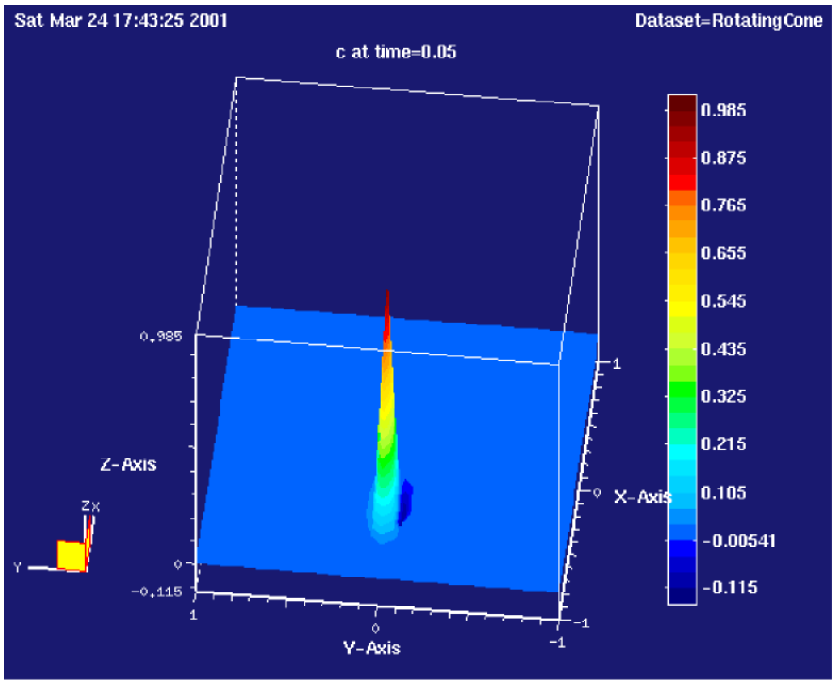
Les résultats pour SUPG sont quasi-exacts et peuvent être pris comme solution de référence ([59], [46]). Il n'apparaît ni oscillations, ni sur-évaluation ou sous-évaluation de la solution.

Rotation d'un cône (ou advection dans un champ d'écoulement tournant)

La rotation d'un cône dans un champ d'écoulement tournant un test classique pour les algorithmes de convection ([21], [37], [38], [60]). Le problème bidimensionnel et transitoire est représenté sur la Fig.10-25. C'est un problème analogue au précédent, excepté que la condition aux limites sinusoïdale est à présent une condition initiale du problème, qui ne s'applique plus que sur une partie du bord. La solution exacte consiste en une rotation de corps rigide autour du centre du maillage.

La solution numérique est caractérisée par une erreur de phase (oscillations en avant et en arrière du front) et par une erreur de dissipation (réduction de la taille du cône). Le nombre de Courant $Cr = \frac{\|\mathbf{V}_f\| dt}{\Delta x}$ est pris égal à $Cr = 0.25$ afin d'obtenir une rotation complète du cône après 200 pas de temps environ et comparer les résultats obtenus à ceux reportés dans ([21]). Ce cas d'étude montre en particulier l'utilité d'un traitement consistant des termes de dépendance par rapport au temps (la pondération par les fonctions de forme de Petrov-Galerkin ne doit pas porter uniquement sur le terme diffusif).

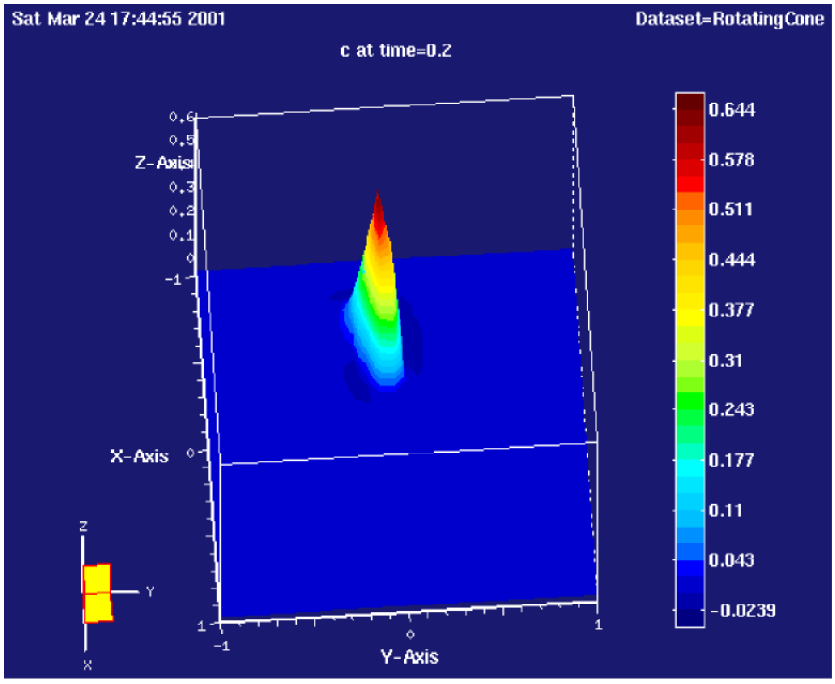
La méthode de discrétisation temporelle employée est la θ-méthode. Dans un premier temps, $\theta = 1$ (Euler implicite) a été employé. Les résultats des simulations avec $\theta = 1$ sont donnés Fig.10-26 à 10-30 pour un tour complet. La remarque essentielle pour la méthode SUPG est l'importance de l'erreur de dissipation. L'amplitude du cône est réduite de façon considérable au bout d'un tour, l'amplitude finale



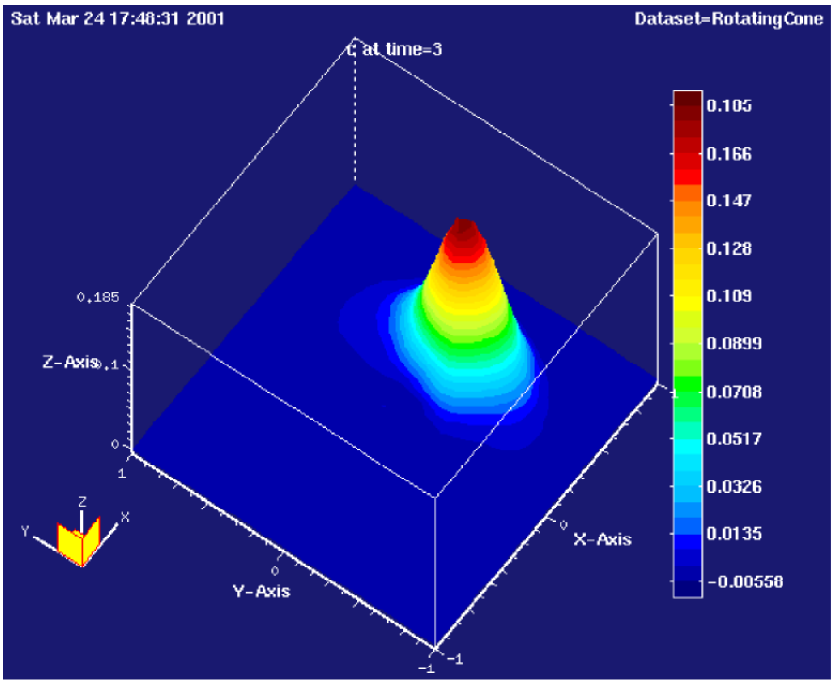
Figure~10-26: Rotating d'un cône. Vue tridimensionnelle de la solution à $t = 0.05\ s$.

est de l'ordre de 13.9% de l'amplitude de départ.

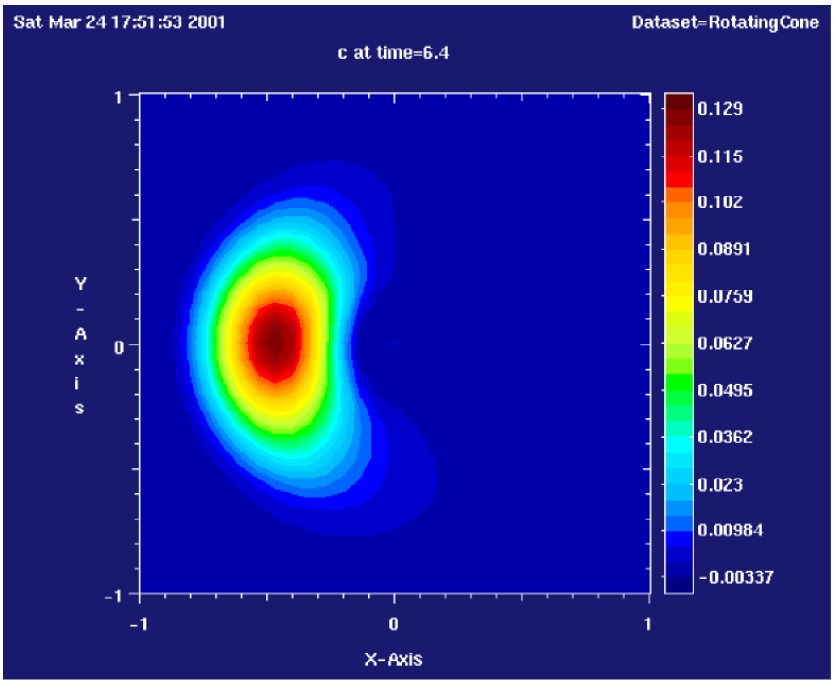
Afin d'étudier l'effet de la discrétisation temporelle employée, $\theta = 0.5$ est pris pour les simulations. Les Figs.10-31 et 10-32 montrent que l'erreur de dissipation est nettement réduite, l'amplitude au bout d'un tour s'élève à 31.6 % de l'amplitude initiale (68.4 % de réduction de l'amplitude). Les résultats avec le schéma SUPG sont meilleurs avec la θ-méthode et $\theta = 0.5$ que ceux obtenus par d'autres auteurs ([21]). Les divergences entre nos résultats et ceux reportés par Hughes peuvent s'expliquer par la procédure de discrétisation en temps employée. En effet pour les solutions stationnaires (advection avec un terme source, advection non parallèle aux axes du maillage), les écarts entre nos résultats et ceux donnés dans la littérature sont négligeables (le développement de la solution transitoire n'influe pas sur la solution finale dans le cas du terme source). Le schéma de discrétisation temporelle employé par Hughes n'est pas précisé dans le détail de la formulation de ([21]) et lorsque les solutions analytiques sont présentées. Ailleurs il est fait mention par Hughes ([59]) de l'emploi de la règle trapézoïdale pour l'intégration en temps.



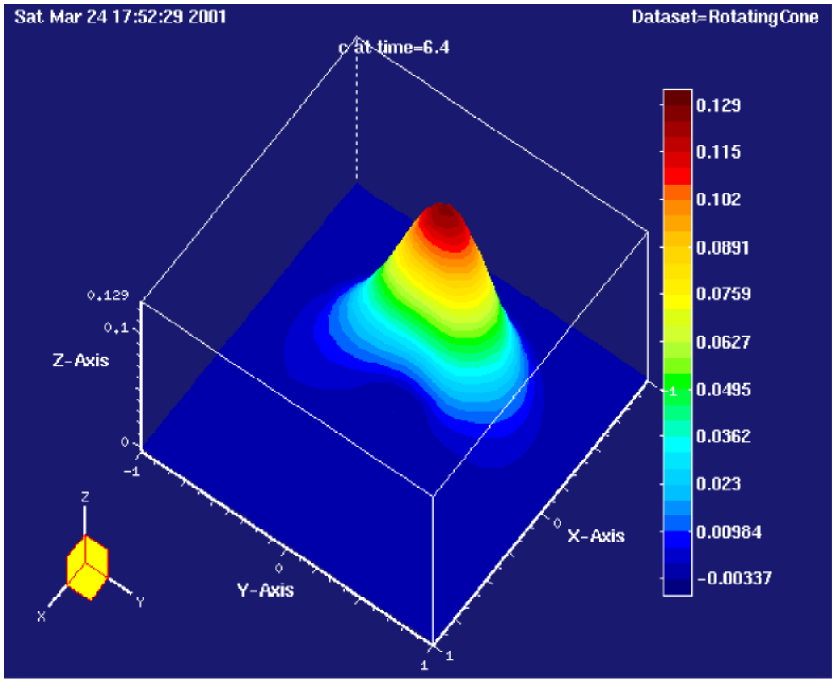
Figure~10-27: Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 0.2$ s. L'amplitude maximale du cône est significativement réduite.



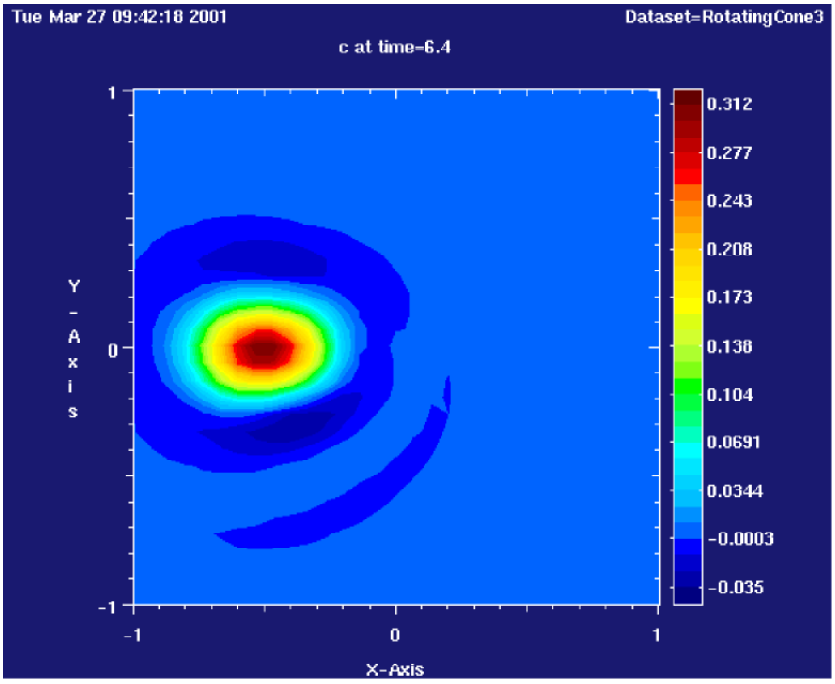
Figure~10-28: Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 3\ s$.



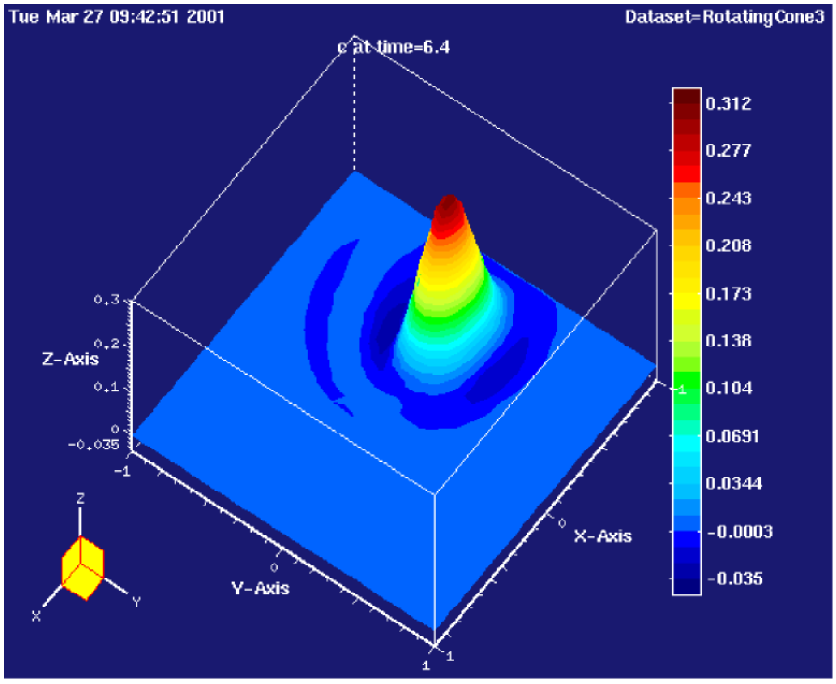
Figure~10-29: Solution SUPG au bout d'un tour complet ($t = 6.4\ s$).



Figure~10-30: Vue tridimensionnelle de la solution SUPG au bout d'un tour complet. L'amplitude maximale s'élève à 13.9 % de l'amplitude de fonction initiale. Les erreurs de phase sont négligeables.



Figure~10-31: Solution SUPG avec $\theta = 0.5$ au bout d'un tour complet. Les erreurs de phase sont plus marquées que pour $\theta = 1$.



Figure~10-32: Vue tridimensionnelle de la solution SUPG à $t = 6.4\ s$ ($\theta = 0.5$). L'amplitude finale s'élève à 31.6 % de l'amplitude initiale, ce qui constitue une amélioration notable par rapport au cas $\theta = 1$.

Mouvement d'un cône hors du domaine

Le problème de rotation d'un cône est repris, les conditions du problème sont les mêmes, excepté le champ de vitesse qui est pris unidimensionnel et constant afin d'expulser le cône hors du domaine par un des bords du domaine ([21]). Le problème est bidimensionnel et transitoire, de vitesse constante

$$\mathbf{V}_f = (-1, 0) \tag{10.12}$$

Deux types de conditions aux limites sont étudiées.

- **Condition aux limites naturelle**

$\frac{\partial c}{\partial n} = \frac{\partial c}{\partial x} = 0$ au bord $x = -1$, qui correspond au bord par lequel le cône doit théoriquement quitter le maillage. L'amortissement des oscillations est progressif (système non dissipatif).

Au bout de 30 pas ($t = 1.5\ s$), l'amplitude maximale des oscillations vaut 1.664×10^{-2} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-33).

Au bout de 40 pas ($t = 2\ s$), l'amplitude maximale des oscillations vaut 6.481×10^{-5} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-34).

Au bout de 100 pas ($t = 5\ s$), l'amplitude maximale des oscillations vaut 5.319×10^{-20} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-35).

Avec le schéma de Galerkin, le cône parvient également à sortir du domaine, mais l'amplitude des oscillations met plus de temps à s'amortir qu'avec le schéma SUPG.

Au bout de 30 pas, l'amplitude maximale des oscillations vaut 78.4 % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-36).

Au bout de 100 pas, l'amplitude maximale des oscillations vaut 4.767×10^{-4} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-37).

- **Condition aux limites essentielle**

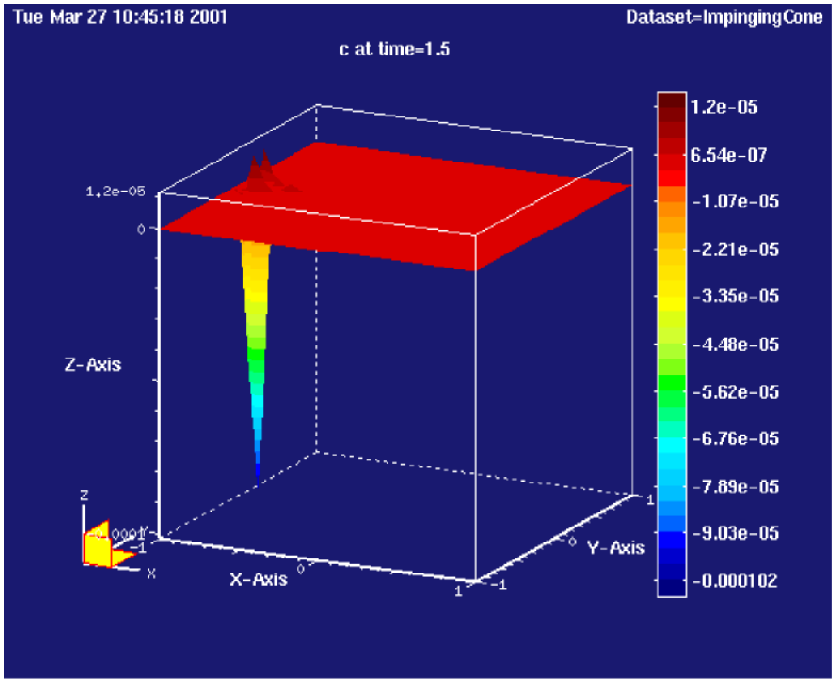
$c = 0$ au bord $x = -1$. pour le schéma SUPG, les résultats sont reportés sur les Fig. à .

Au bout de 30 pas, l'amplitude maximale des oscillations vaut 1.035×10^{-2} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-38).

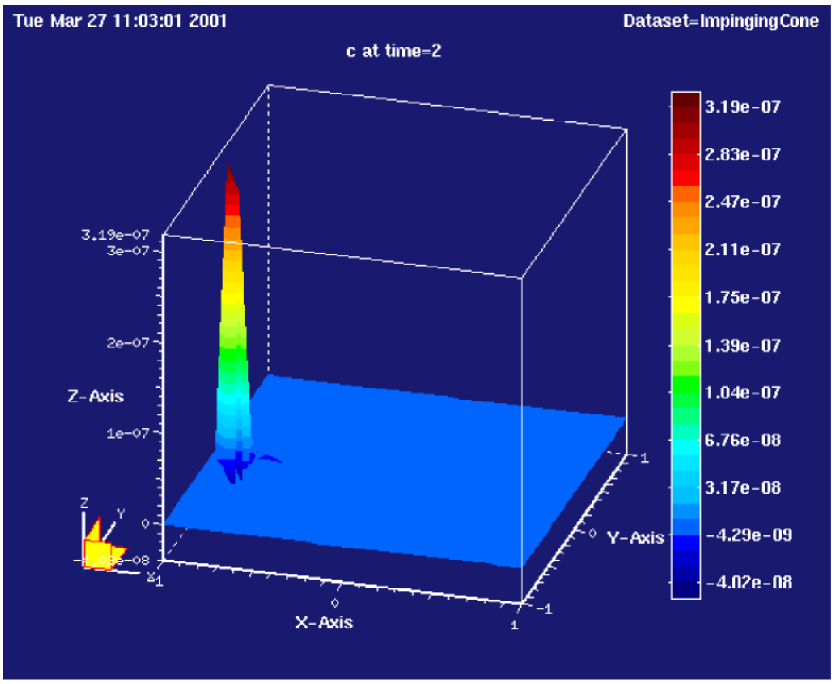
Au bout de 40 pas, l'amplitude maximale des oscillations vaut 3.142×10^{-5} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-39).

Au bout de 100 pas, l'amplitude maximale des oscillations vaut 8.234×10^{-21} % de la hauteur initiale du cône (Fig.10-40).

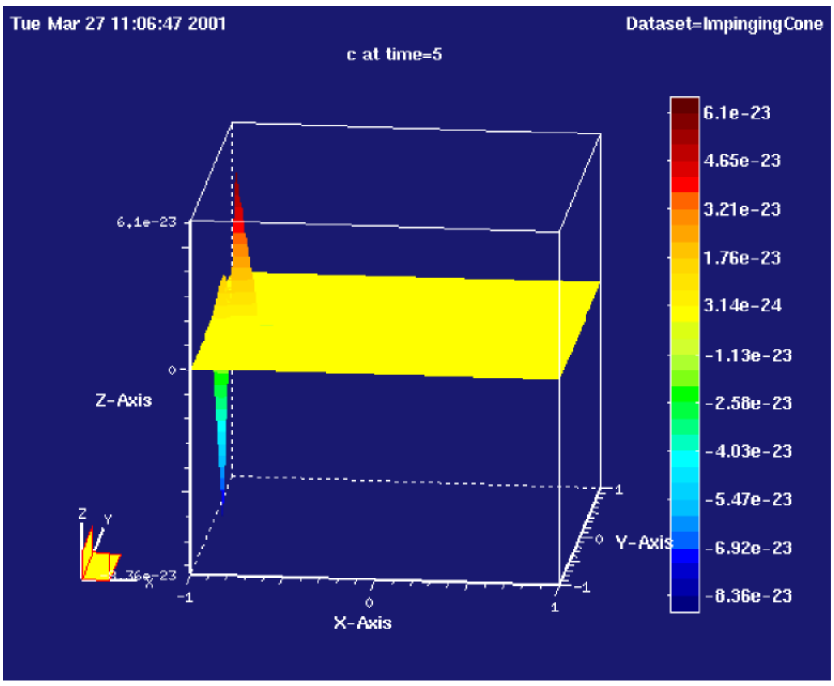
Le mouvement du cône hors du domaine s'effectue donc avec des oscillations qui s'atténuent très vite, et finissent par disparaître. Les résultats sont similaires à ceux obtenus avec l'imposition d'une condition aux limite naturelle, voire légèrement meilleurs, la condition aux limites homogène facilite l'annulation



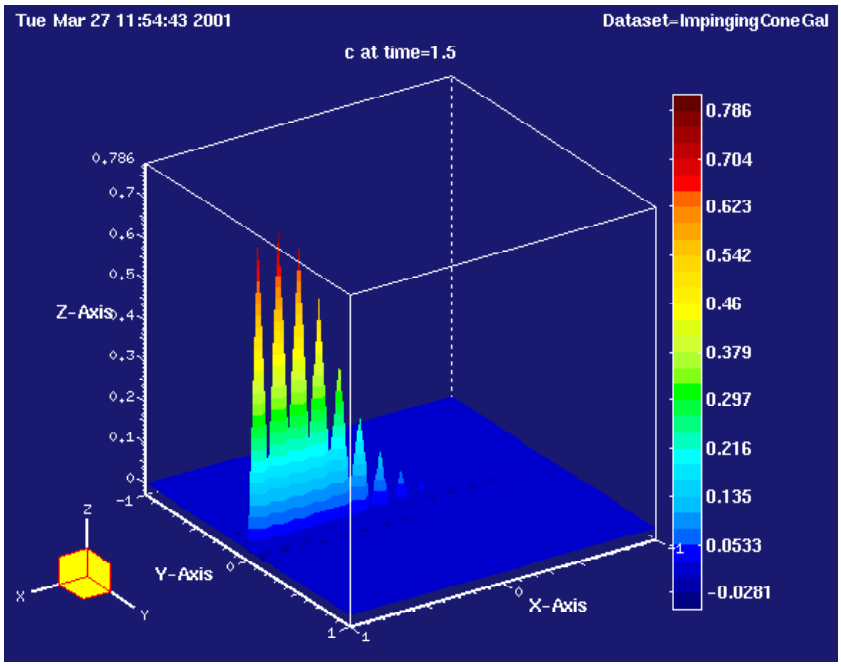
Figure~10-33: Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites naturelles. Solution SUPG au bout de 30 pas de temps.



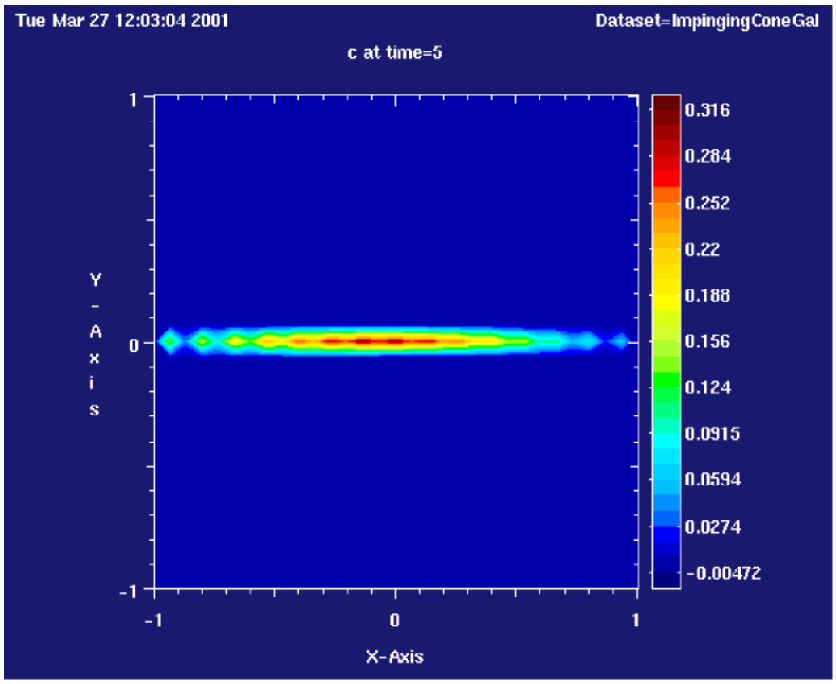
Figure~10-34: Solution SUPG au bout de 40 pas de temps.



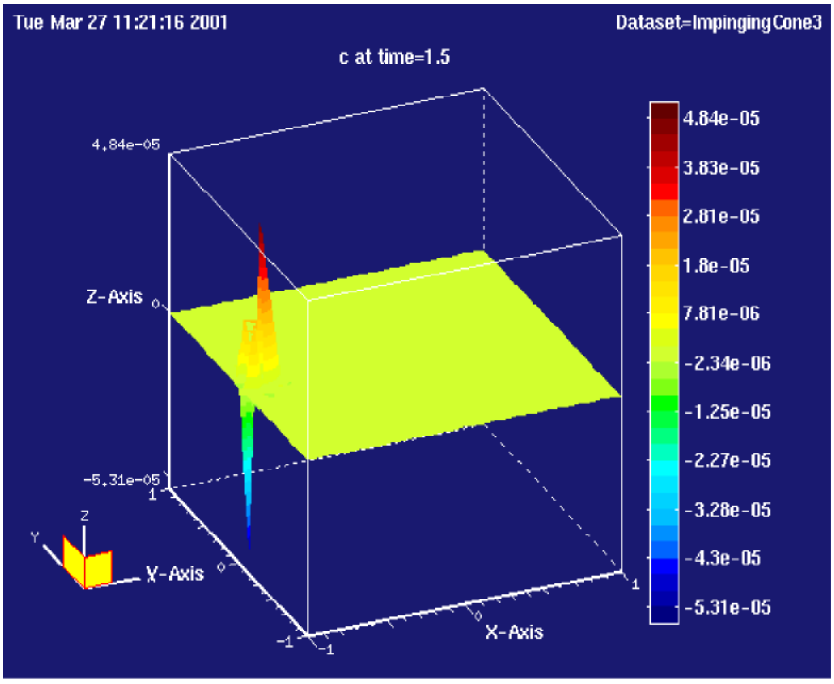
Figure~10-35: Solution SUPG au bout de 100 pas de temps.



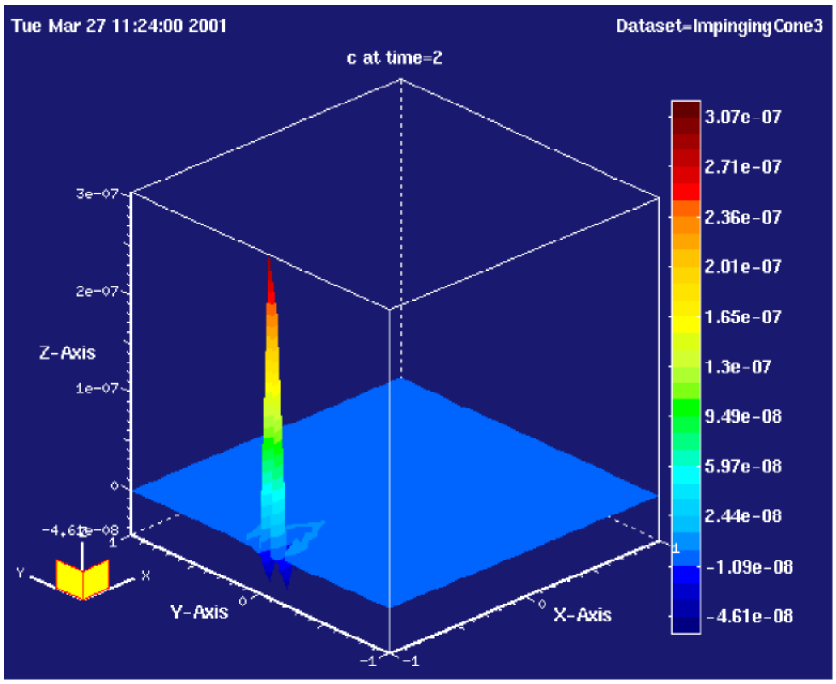
Figure~10-36: Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites naturelle. Solution de Galerkin au bout de 30 pas de temps



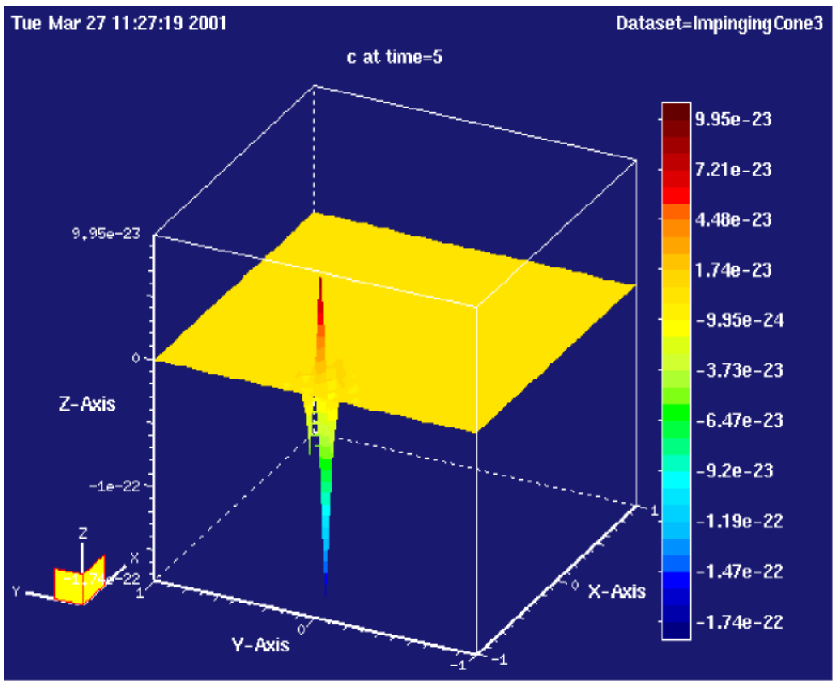
Figure~10-37: Solution de Galerkin au bout de 100 pas de temps.



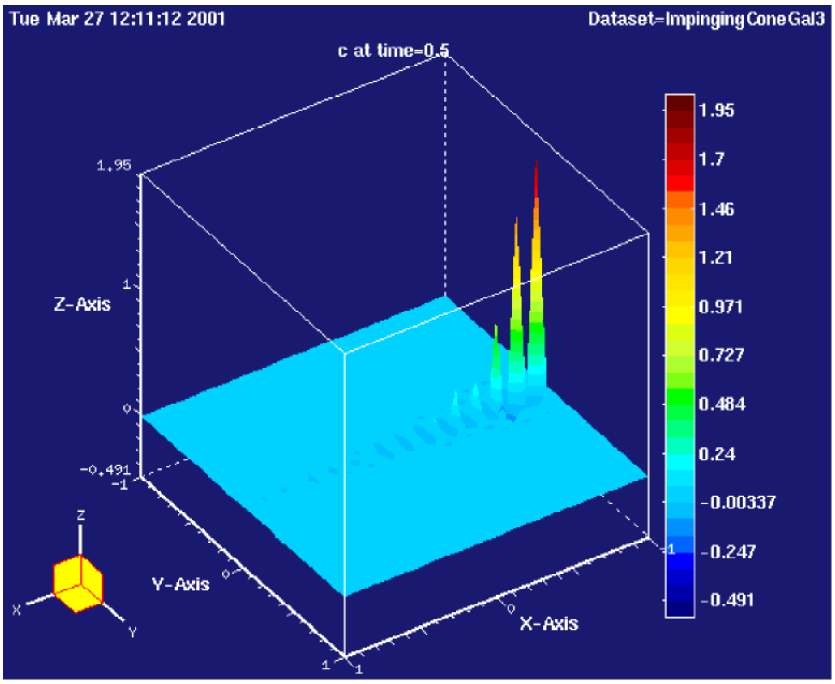
Figure~10-38: Mouvement d'un cône hors du domaine. Condition aux limites essentielle. Solution SUPG au bout de 30 pas de temps.



Figure~10-39: Solution SUPG au bout de 40 pas de temps.



Figure~10-40: Solution SUPG au bout de 100 pas de temps.



Figure~10-41: Solution de Galerkin à $t = 0.5\ s$.

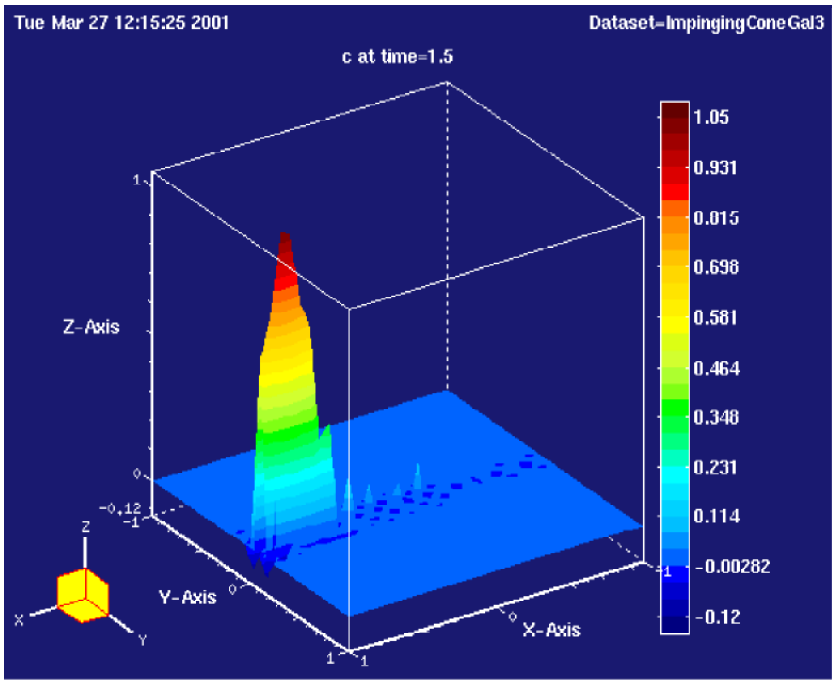
de l'amplitude des oscillations.

Le schéma de Galerkin conduit à un comportement radicalement différent. La fonction sinusoïdale initiale est refléchie par la frontière et se reconstitue de l'autre côté du domaine au 40ème pas de temps, puis continue de se déplacer d'un bord à l'autre, sans qu'aucune réduction des oscillations ne se manifeste. Les résultats (Figs.10-41 à 10-45) sont similaires à ceux reportés par Brooks et Hughes ([21]).

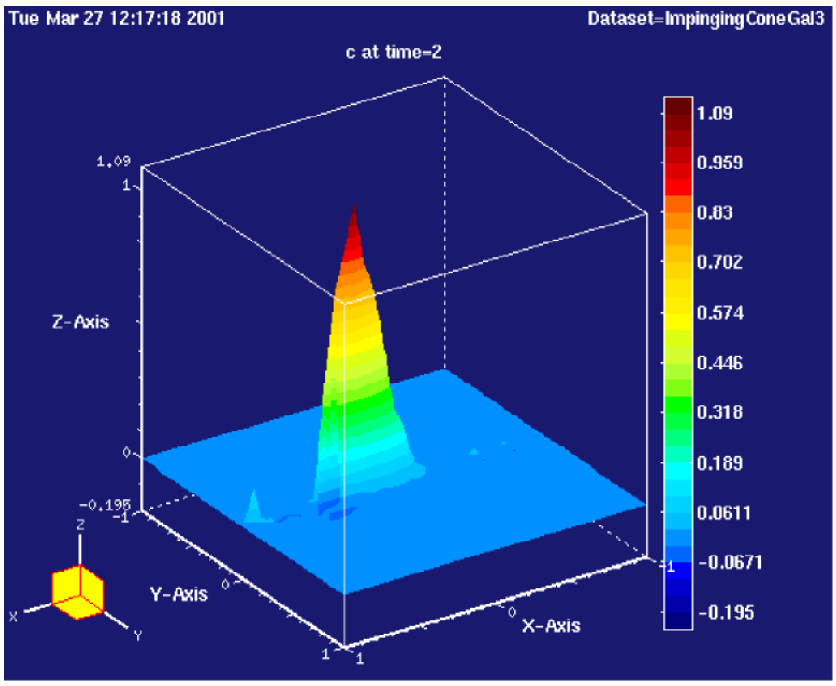
Advection transitoire (Convection d'une onde sinusoïdale)

Ce test consiste en la convection d'une fonction sinusoïdale unidimensionnelle, lorsque la diffusion est prise nulle ([37], [8], [88]). La solution exacte à l'instant t est obtenue par translation de la sinusoïde initiale d'une distance $x = \|\mathbf{V}_f\| \times t$ dans le sens positif de l'axe des x. Les schémas SUPG et Galerkin sont confondus pour cette solution, et ne présentent pas de diffusion numérique artificielle ([48]). Ce cas est plus difficile que la solution d'Advonin présentée dans le paragraphe 6.4.1 car la solution possède à la fois des propriétés de régularité et de discontinuité. Les oscillations qui appraissent sont liées au fait que la vitesse de phase numérique est plus grande ou plus (souvent plus) petite que la vitesse de phase exacte.

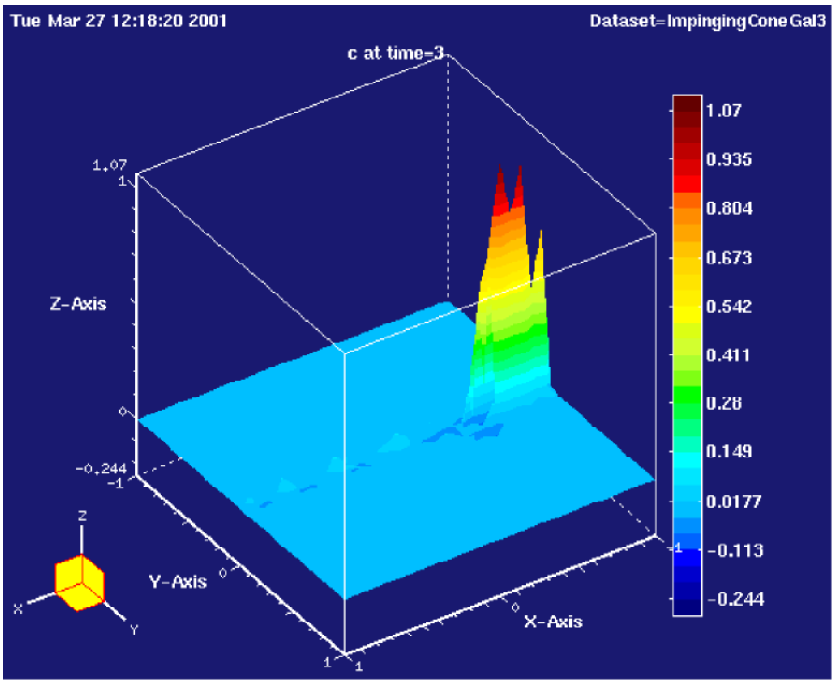
Plusieurs cas ont été étudiés, afin d'évaluer l'effet des paramètres de discrétisation et du champ de



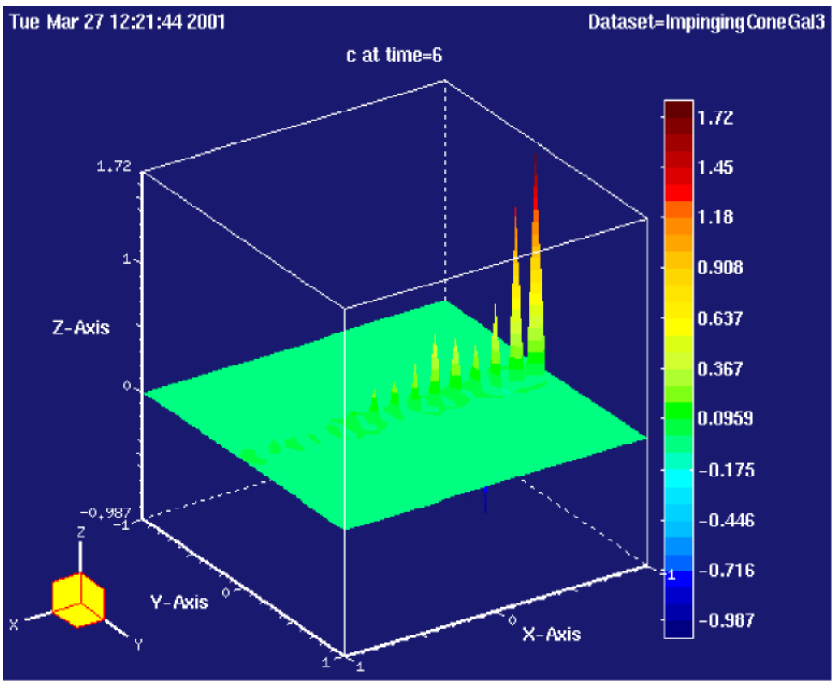
Figure~10-42: Solution de Galerkin à t=1.5 s. Le cône initial est refléchi par rapport à sa position initiale.



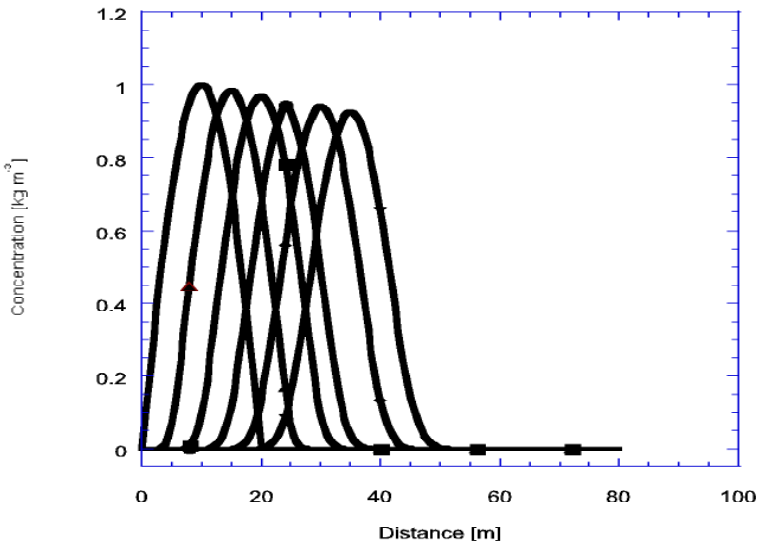
Figure~10-43: Solution de Galerkin à $t = 2$ s. Le cône repart vers la droite.



Figure~10-44: Solution de Galerkin à $t = 3$ s. Aucune réduction de l'amplitude initiale n'est constatée.



Figure~10-45: Solution de Galerkin à t=6 s. La solution diverge complèment.



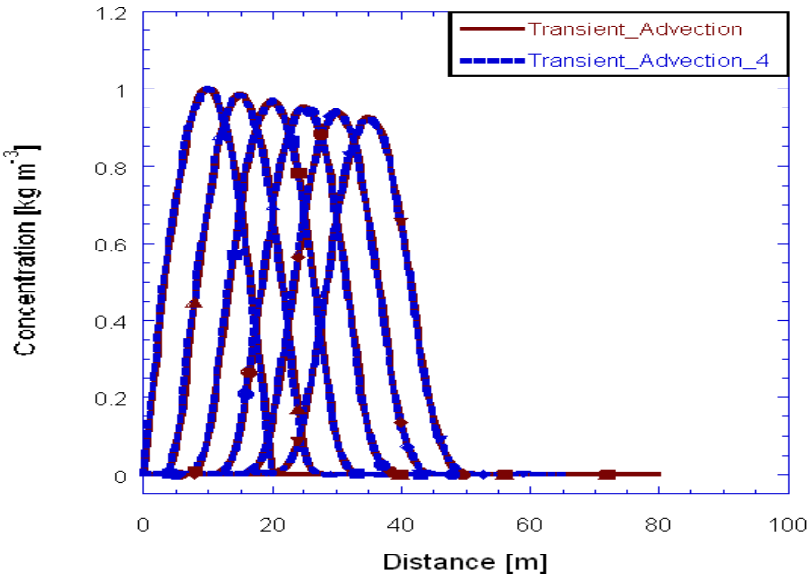
Figure~10-46: TransientAdvection. Solution à $t = 0$, 50, 100, 150 , 200 , et 250 s.

vitesses sur la réduction de l'amplitude de la sinusoïde initiale. Dans tous les cas, la diffusion est prise nulle, $D = 0$, conduisant à un nombre de Peclet $Pe = \frac{\|\mathbf{V}_f\|\Delta x}{D} = \infty$.

Cas 1. Dans la première simulation (TransientAdvection, Fig.10-46), $\|\mathbf{V}_f\| = 0.1\ m \cdot s^{-1}$ et le pas de temps est pris égal à $\Delta t = 2.5\ s$, tandis que le pas d'espace vaut $\Delta x = 0.5\ m$ (nombre de Courant numérique $Cr = \frac{\|\mathbf{V}_f\|\Delta t}{\Delta x} = 0.5$). La sinusoïde est progressivement amortie, à $t = 250\ s$, l'amplitude s'élève à 92.8 % de l'amplitude initiale, sans qu'aucune oscillation de la solution soit observée (erreur de phase nulle).

Cas 2. Dans la simulation suivante (TransientAdvection4, Fig.10-47), seule la taille du maillage est variée, $\Delta x = 1\ s$ afin d'étudier l'effet de la discrétisation spatiale sur l'erreur de dissipation (nombre de Courant $Cr = \frac{\|\mathbf{V}_f\|\Delta t}{\Delta x} = 0.25$). La solution est identique à celle obtenue avec $\Delta x = 0.5\ m$ pour le cas précédent, malgré un nombre de Courant plus faible supposé jouer un rôle dans les algorithmes de convection pour les cas transitoires ([58]). Il semble donc que ni les paramètres de discrétisation spatiale, ni le nombre de Courant, soient les garants d'une solution optimale.

Cas 3. La troisième simulation (TransientAdvection5, Fig.10-48) considère $\|\mathbf{V}_f\| = 0.05\ m \cdot s^{-1}$, $\Delta x = 1\ m$, les autres paramètres étant identiques aux deux premiers cas, afin d'évaluer l'effet de la vitesse d'advection sur la précision de la solution (erreur de dissipation). Le nombre de Courant $Cr = 0.125$.

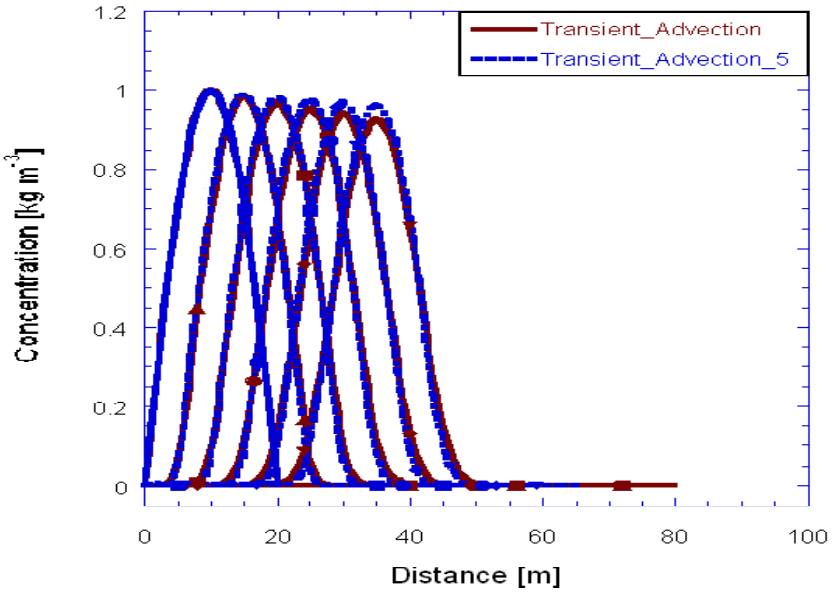


Figure~10-47: Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s.

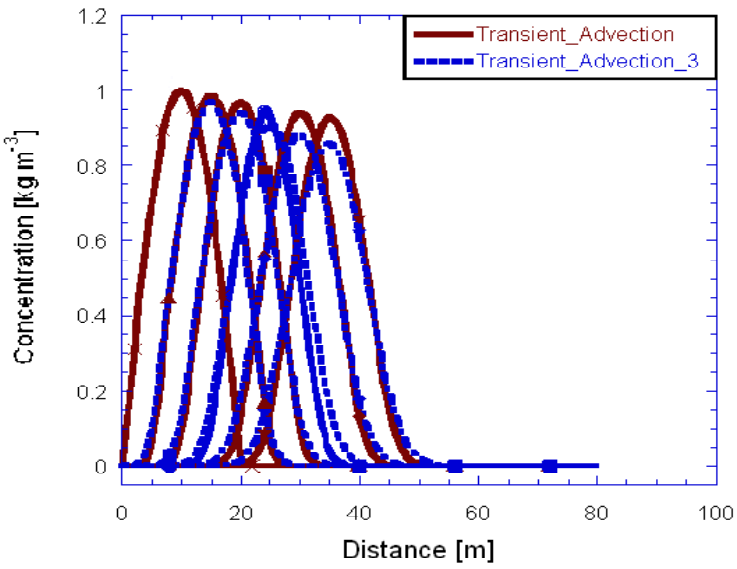
La solution est nettement améliorée par l'emploi d'une vitesse plus faible, l'amplitude de la sinusoïde à $t = 500$ s vaut 96.2 % de l'amplitude initiale. Dans un cas réel, la vitesse de propagation n'est pas un paramètre qui puisse être contrôlé, aussi par la suite c'est Δt qui est varié.

Cas 4. Dans la quatrième simulation (TransientAdvection3, Fig.10-49), $\|\mathbf{V}_f\| = 1\ m \cdot s^{-1}$, $\Delta t = 0.5$ s, $\Delta x = 1$ m et le nombre de Courant vaut $Cr = \frac{\|\mathbf{V}_f\|\Delta t}{\Delta x} = 0.5$. La solution est bien plus amortie que le cas 1, l'amplitude des oscillations à $t = 25$ s (même distance parcourue que le cas 1 avec une vitesse 10 fois plus élevée) s'élève à 85.86 % de la taille initiale de la fonction sinuoïdale, pourtant le nombre de Courant est le même.

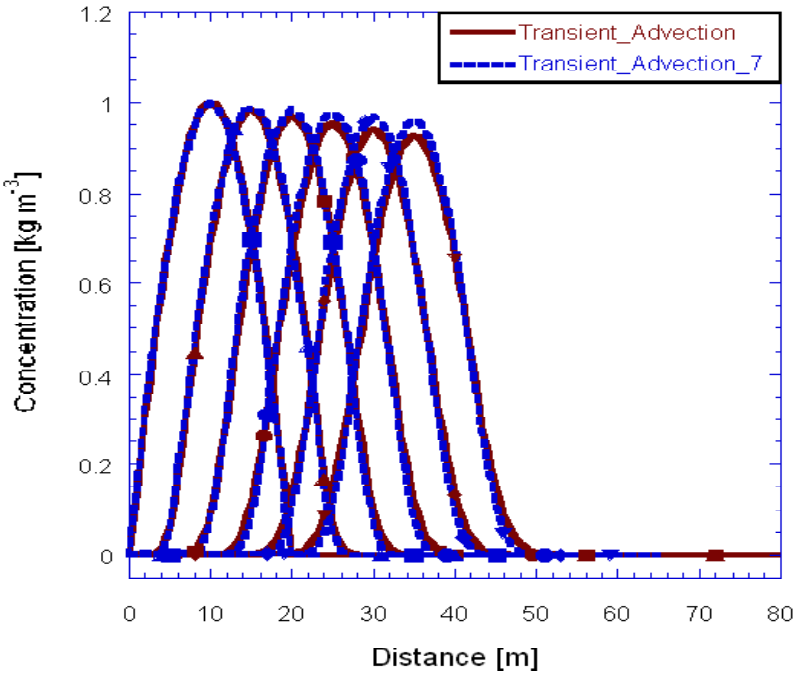
Cas 5. La dernière simulation (TransientAdvection7, Fig.10-50) emploie $\|\mathbf{V}_f\| = 1\ m{\cdot}s^{-1}$, $\Delta t = 0.125$ s, $\Delta x = 1$ m et le nombre de Courant vaut $Cr = 0.125$. Les résultats sont meilleurs que l'ensemble des cas précédents, excepté la troisième simulation avec un nombre de Courant identique. L'amplitude des oscillations à $t = 25$ s est identique à la troisième simulation. Par la suite, la taille du maillage a encore été réduite, ce qui provoque une augmentation de la valeur du nombre de Courant (avec $\|\mathbf{V}_f\| = 1$, $\Delta t = 0.125$ s, $\Delta x = 0.25$ m, le nombre de Courant vaut $Cr = 0.5$), sans provoquer d'amélioration ou de détérioration de la solution. Pour un même nombre de Courant $Cr = 0.5$, la solution est en particulier meilleure que les cas 1 et 4, et meilleure que le cas 2 qui pourtant est effectuée avec un nombre de Courant plus faible.



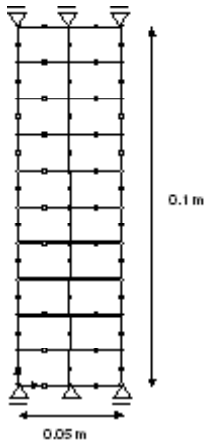
Figure~10-48: Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s.



Figure~10-49: Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s.



Figure~10-50: Solution à $t = 0$, 50, 100, 150, 200, et 250 s.



Figure~10-51: Conditions aux limites du problème et maillage.

10.2.2 Equation d'équilibre

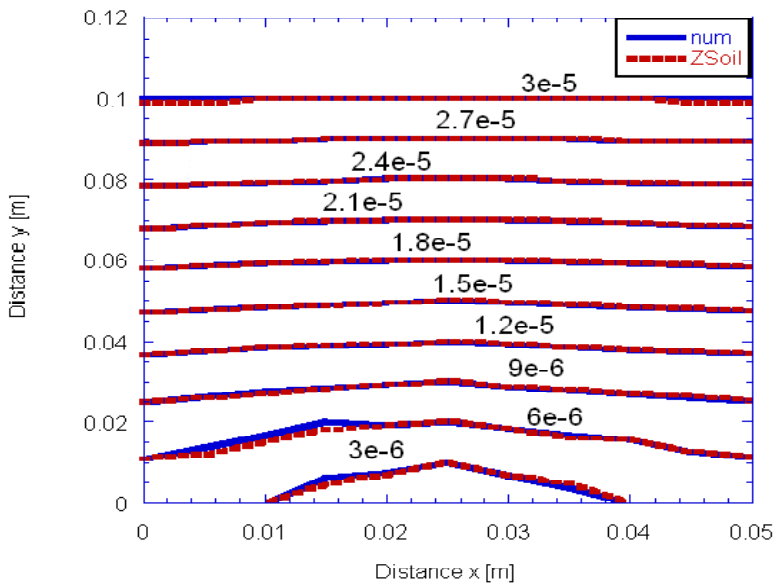
Elasticité linéaire isotrope

Premier cas

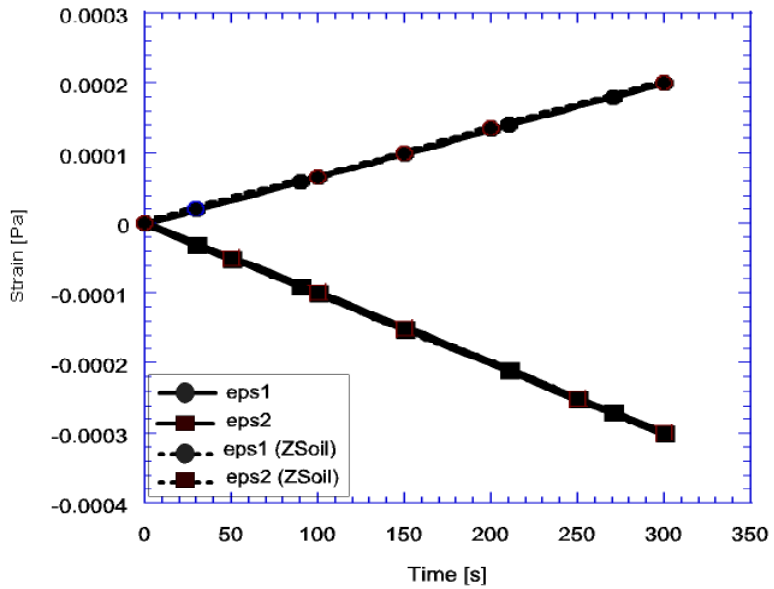
Le premier cas traité est un problème bidimensionnel de compression. La définition du problème est donnée sur la Fig.10-51. Un déplacement vertical est imposé par incréments ($\Delta\mathbf{u} = (0., -1e-6)\ m$ sur un pas de temps) au sommet de la colonne de sable, les parois latérales sont libres de contraintes, et le déplacement vertical est nul à la base de la colonne. Le déplacement horizontal est également imposé nul en $(x = 0, y = 0.025)\ m$. Les caractéristiques élastiques employées sont $E = 1.3e6\ Pa$, $\nu = 0.4$, $c = 1e6$, $\phi = 0.61$. Le problème est découplé des problèmes de transport et d'écoulement (conditions aux limites nulles en concentration et en pression, et $k = 10^{10}$ empêche tout écoulement). Il s'agit d'un problème régulier de type II ([43]) qui possède une solution unique après que toute rotation de corps rigide ait été éliminée (en annulant le déplacement horizontal par symétrie en $x = 0.025, z = 0$), et la comparaison avec le logiciel ZSoil ([122]) s'effectue sur les contraintes, les déformations et le déplacement. Les solutions en déplacements et en contraintes sont représentées sur les Figs.10-52 à 10-54. Le champ de contrainte est uniforme et unidimensionnel. Le champ de déplacement est vertical, il varie linéairement au cours du temps, et linéairement en espace, conformément à la linéarité de la relation de comportement employée. Les solutions obtenues à partir du logiciel développé et du logiciel commercial sont confondues.

Deuxième cas

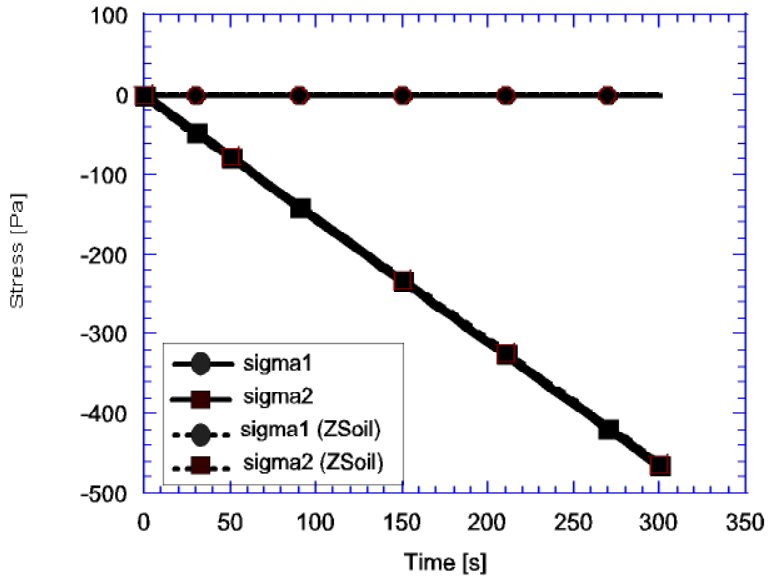
Le second cas traité est le cas complémentaire du précédent. Le problème est défini sur la Fig.10-55. Les conditions du problème sont analogues au cas précédent, excepté le déplacement vertical imposé qui



Figure~10-52: Déplacement vertical en mètres à $t = 300\ s$.



Figure~10-53: Déformations à $t = 300\ s$.

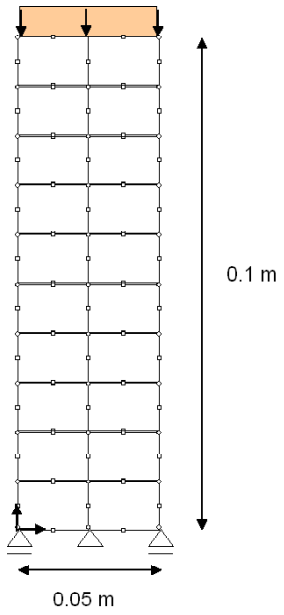


Figure~10-54: Contraintes à $t = 300\ s$.

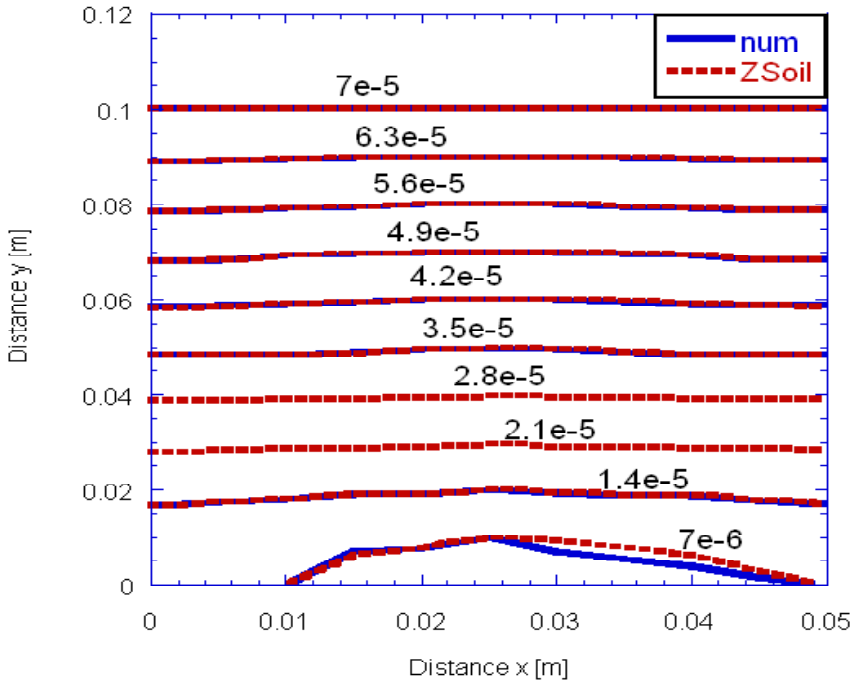
est remplacé par une force surfacique imposée $\mathbf{F} = (0., -1000)\ N$ au sommet de la colonne. Ce test permet de vérifier notamment la procédure d'intégration des contraintes. Le déplacement vertical est nul en $x = 0$ m, le déplacement horizontal est également imposé nul en $(x = 0, y = 0.025)\ m$. Les caractéristiques élastiques employées sont $E = 1.3e6\ Pa$, $\nu = 0.3$. Le problème est découplé des problèmes de transport et d'écoulement (conditions aux limites nulles en concentration et en pression, et $k = 10^{10}\ m^2$ empêche tout écoulement). Il s'agit également d'un problème régulier de type II, qui possède une solution unique à une translation horizontale près, translation arbitraire qui est éliminée dans la solution numérique par imposition du déplacement au point $(x = 0.025, z = 0)$. Les solutions numériques sont comparées au logiciel de référence sur les Figs.10-56 à 10-58. Le champ de contrainte obtenu est unidimensionnel, uniforme et constant, égal à la contrainte imposée au sommet de la colonne; le champ de déformations est bidimensionnel (état de déformations planes), uniforme et constant, et le champ de déplacement, bidimensionnel également, est proportionnel à la contrainte imposée. Les solutions numériques et de référence ([122]) coïncident parfaitement.

Troisième cas

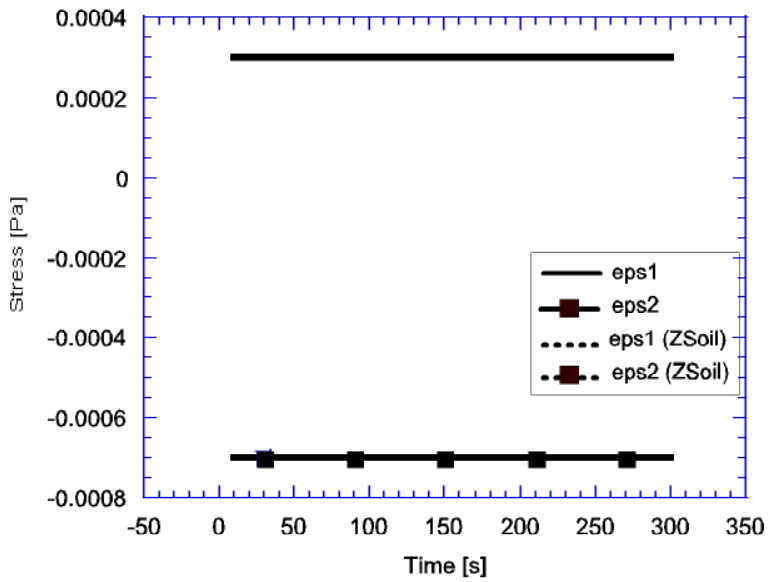
Le troisième cas traité est un test oedométrique. Le problème est défini sur la Fig.10-59. Le déplacement vertical est imposé incrément par incrément au sommet de la colonne ($\Delta u = -10^{-6}\ m$). Les



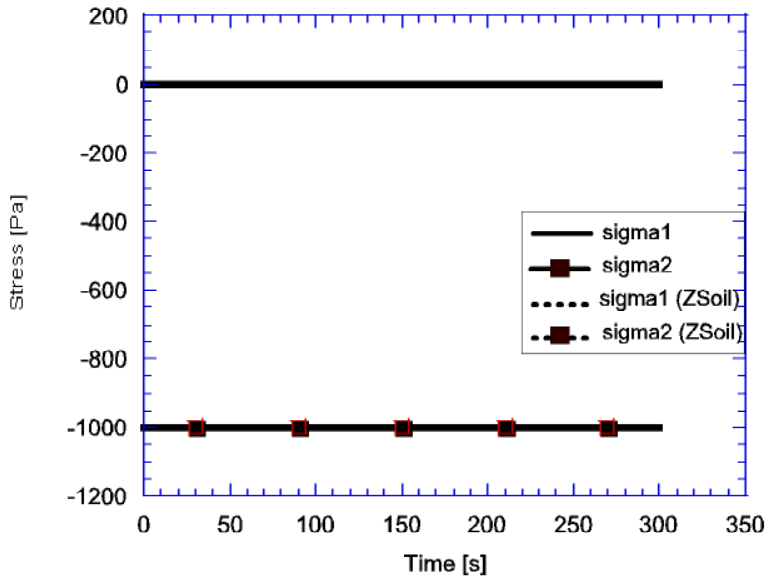
Figure~10-55: Définition du problème (conditions aux limites, maillage).



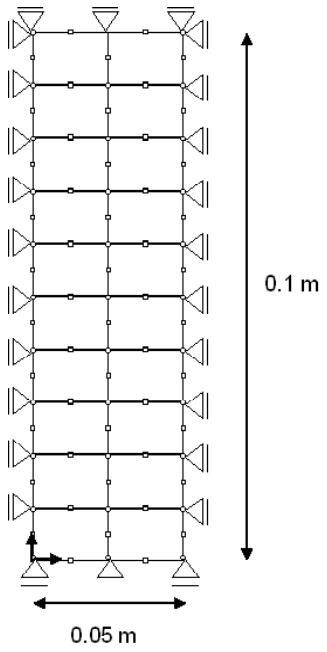
Figure~10-56: Déplacement vertical (m) à $t = 300\ s$.



Figure~10-57: Déformations à $t = 300\ s$.



Figure~10-58: Contraintes à $t = 300\ s$.

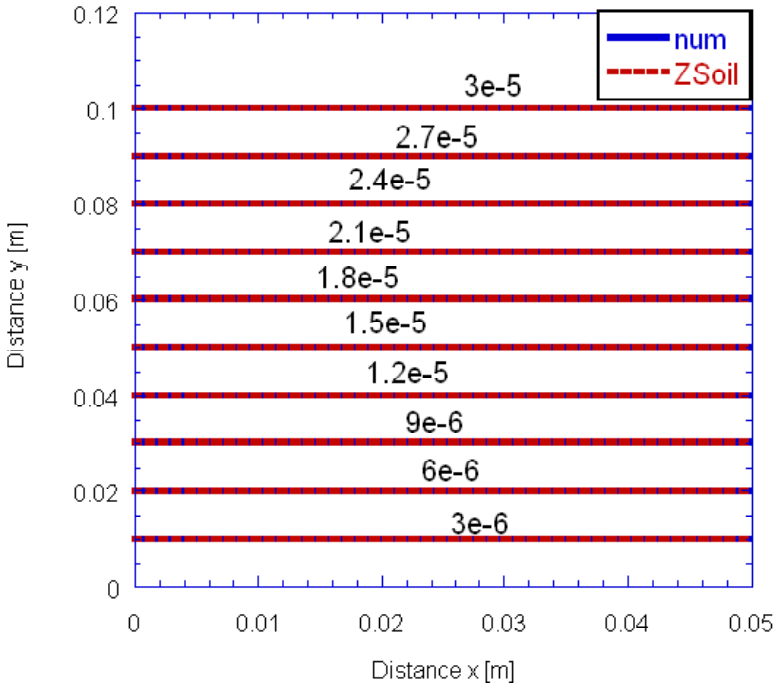


Figure~10-59: Définition du problème (maillage, conditions aux limites).

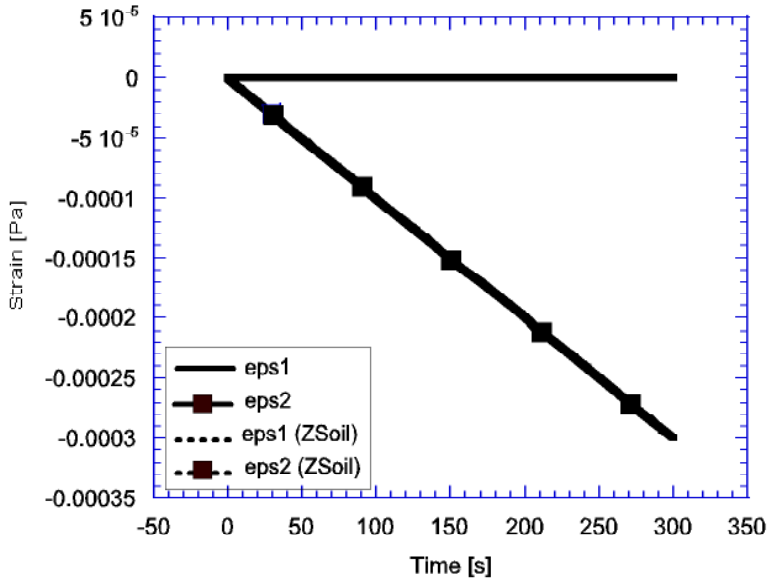
caractéristiques employées sont $E = 1.3e6\ Pa$, $\nu = 0.4$. Le problème est découplé des problèmes de transport et d'écoulement (conditions aux limites nulles en concentration et en pression, et $k = 10^{10}$ m^2 empêche tout écoulement). Le déplacement horizontal est imposé nul sur les parois latérales et en $x = 0\ m$. Il s'agit encore d'un problème régulier de type II car sur l'ensemble des frontières du domaine les conditions aux limites sont mixtes en effort et en déplacement. Tout déplacement de corps rigide est éliminé de la solution en fixant le point $(x = 0.025, z = 0)$, garantissant ainsi l'unicité de la solution en contrainte et en déplacement. Par rapport au premier problème traité (Fig.10-51), le déplacement horizontal est empêché sur les parois latérales. Les solutions obtenues (Figs.10-60 à 10-62) montrent que le problème est un problème de contraintes et de déformations planes, l'état de contrainte et de déformation est uniforme et varie linéairement avec le temps et la valeur croissante du déplacement imposé. Le champ de déplacement est unidimensionnel et linéaire. Les comparaisons avec le logiciel ZSoil (Figs.10-60 à 10-62) permettent de valider la résolution pour ce cas particulier.

Quatrième cas

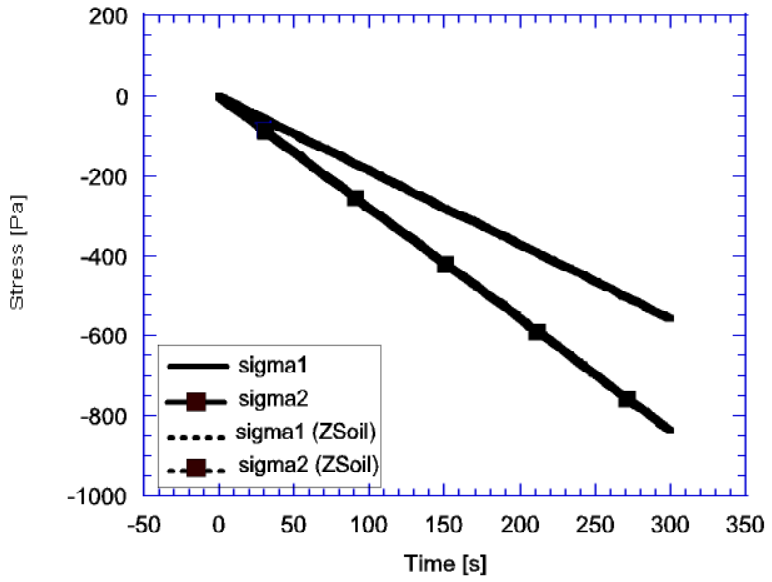
Le problème est défini sur la Fig.10-63. Le quatrième cas traité est un problème de type I, qui possède donc une solution unique ([43]), qui étudie le tassement du massif sous l'effet d'un effort volumique imposé (la gravité). La base de la colonne est fixée, le déplacement horizontal est pris nul sur les parois latérales, la surface supérieure est libre de contraintes, le massif se déforme sous l'effet de la gravité. Les



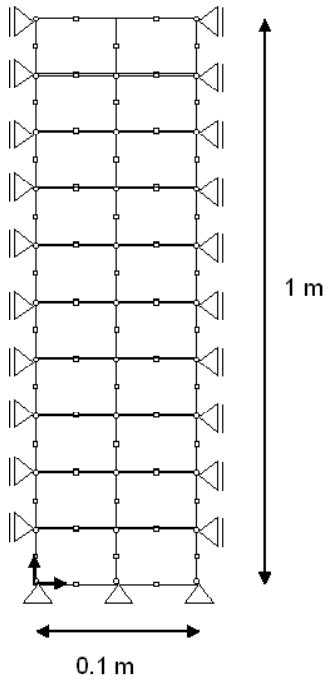
Figure~10-60: Déplacement vertical (m) à $t = 300\ s$.



Figure~10-61: Déformations à $t = 300\ s$.



Figure~10-62: Contraintes à $t = 300\ s$.



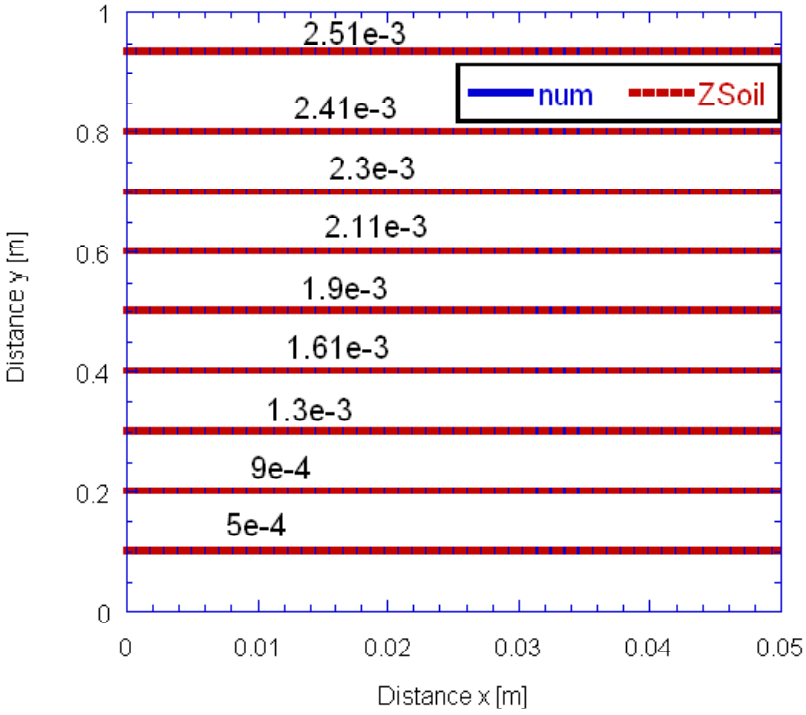
Figure~10-63: Définition et conditions aux limites du problème.

caractéristiques élastiques et plastiques sont les mêmes que pour le problème précédent. La base du massif est fixe, tandis que le déplacement horizontal est empêché sur les parois latérales. Les solutions élément fini sont représentées sur les Fig.10-64 à 10-67. Les solutions analytiques et numériques (Figs.10-64 à 10-67) coïncident encore parfaitement.

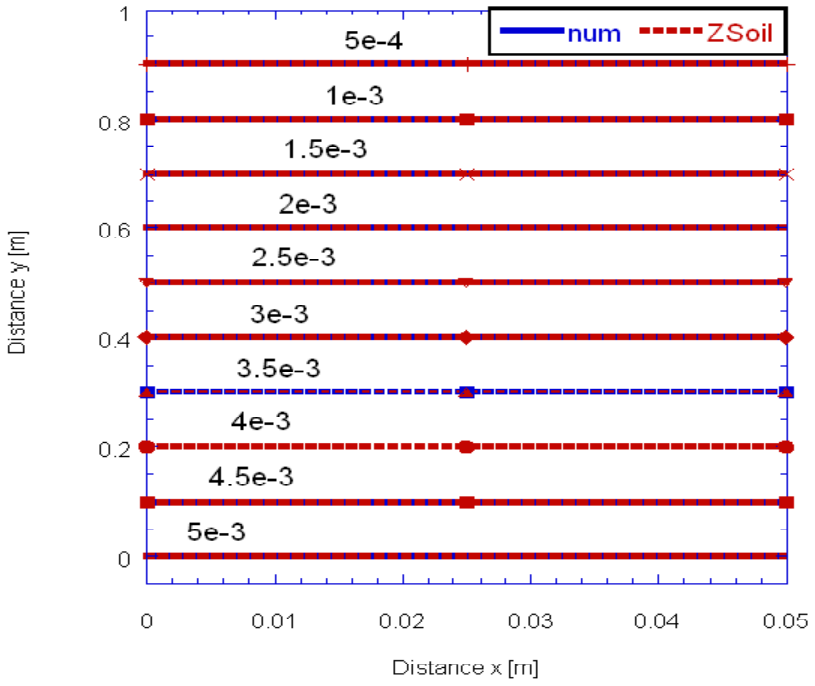
La déformation horizontale est nulle. La déformation verticale est représentée sur la Fig.10-65.

D'autres cas ont été testés d'après Duvaut ([43]), qui ne sont pas reportés, parmi lesquels : traction simple, cisaillement simple, compression sphérique, sous déplacements imposés sur les bords égaux à la solution analytique, puis sous conditions d'efforts imposés (conditions mixtes en efforts et en déplacements).

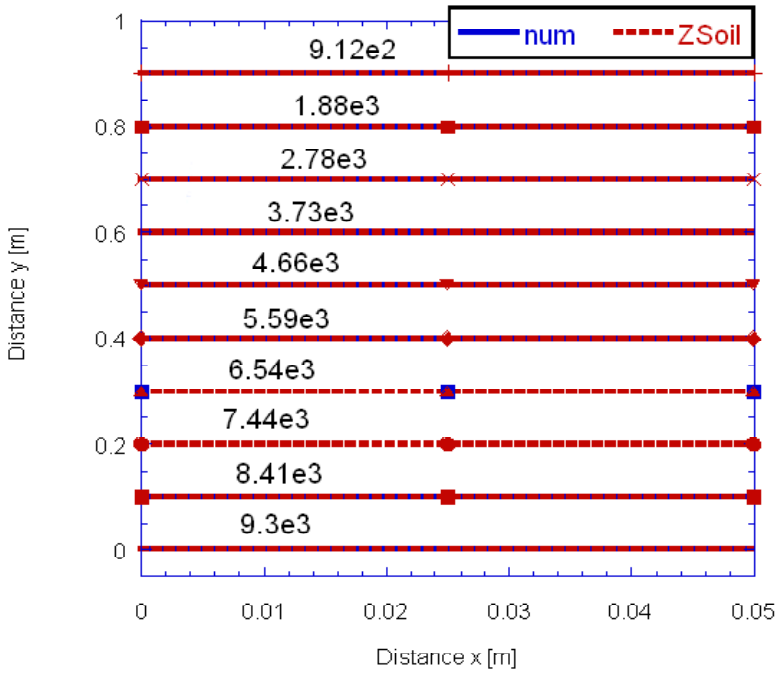
Bien que les résultats ne soient pas reportés ici, pour chaque cas traité, la linéarité de la solution (contraintes, déplacements) par rapport à l'effort ou au déplacement imposé a été vérifiée en multipliant la valeur de la condition imposée par un facteur donné, et en s'assurant que la solution obtenue varie selon le même facteur.



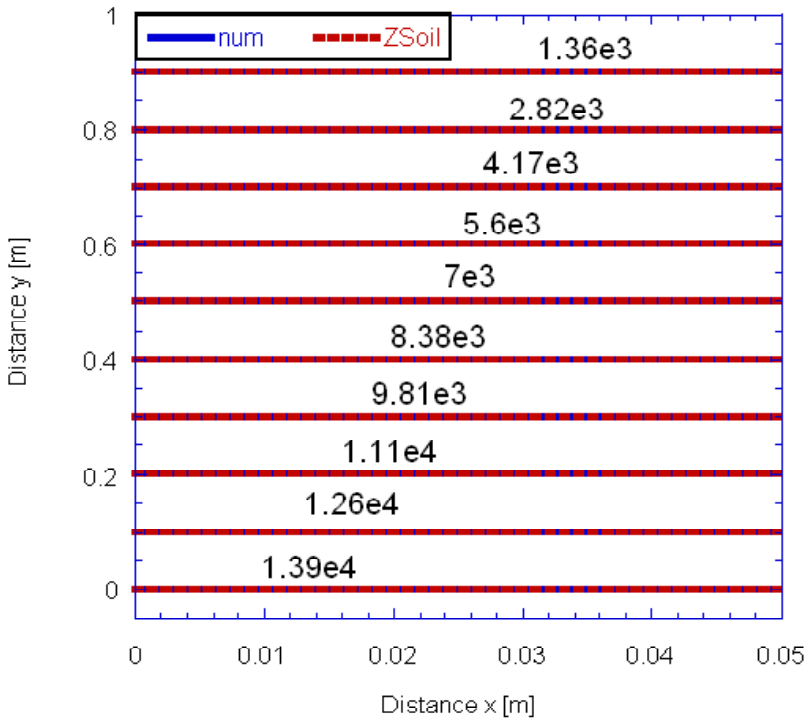
Figure~10-64: Déplacement vertical (m) à $t = 300\ s$.



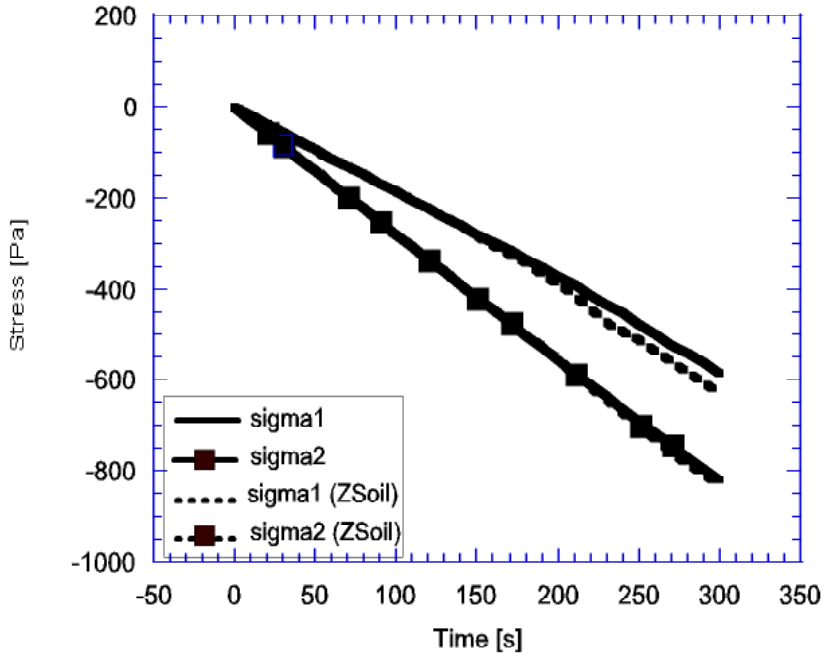
Figure~10-65: Déformations verticales à $t = 300\ s$.



Figure~10-66: Contraintes horizontales en Pa à $t = 300\ s$.



Figure~10-67: Contraintes verticales en Pa à $t = 300\ s$.

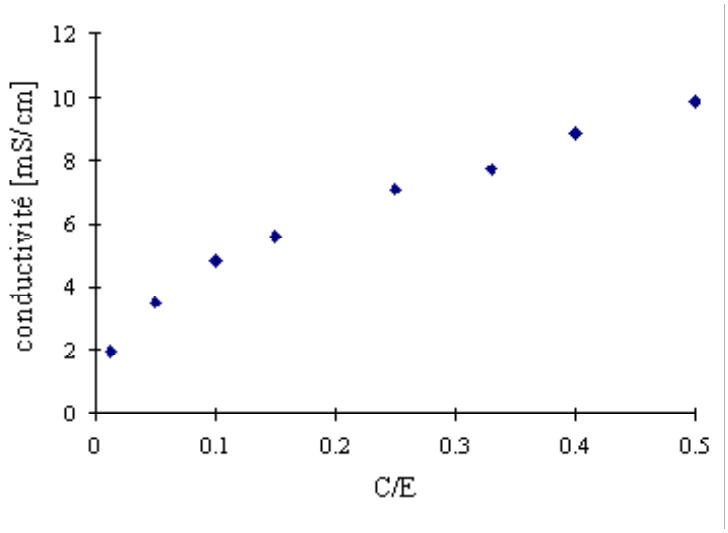


Figure~10-68: Contraintes à $t = 300\ s$.

Plasticité

Le cas traité en plasticité est un cas analogue au troisième cas reporté plus haut en élasticité, pour une loi de comportement élastique parfaitement plastique de type Drucker-Prager. Le problème est défini par la Fig.10-59, les caractéristiques élastiques sont données par $E = 1.3e6\ Pa$, $\nu = 0.4$, par contre les caractéristiques plastiques sont changées de manière à obtenir un écoulement plastique : $c = 50$, $\phi = 0.1$. La Fig.10-68 compare les contraintes calculées au contraintes issues du logiciel ZSoil ([122]). La concordance des résultats est très bonne.

Le nombre et le type de cas traités n'est pas exhaustif, et seule une utilisation extensive du logiciel développé, pour des cas de référence, puis pour des problèmes plus complexes, permettra d'évaluer son efficacité et de le valider complètement. Néanmoins les tests effectués sont suffisants en vue des applications étudiées (essai d'injection dans un modèle cylindrique ou sphérique, puis injection dans un tunnel avant excavation), et des tests additionnels devront être effectués pour chaque nouvelle application envisagée.



Figure~10-69: Conductivité du coulis pur en fonction du rapport $\frac{C}{E}$

10.3 Mesures de résistivité

Les courbes représentées sur les Fig.10-69 à Fig.10-72 sont tirées de ([34]).

10.4 Essais sur colonne unidimensionnelle

10.4.1 Essais de perméabilité (mise en évidence de la filtration)

Le dispositif d'essai sur petite colonne initialement conçu pour des essais de perméabilité est illustré sur la Fig.10-73.

10.4.2 Essais d'injection sur colonne unidimensionnelle

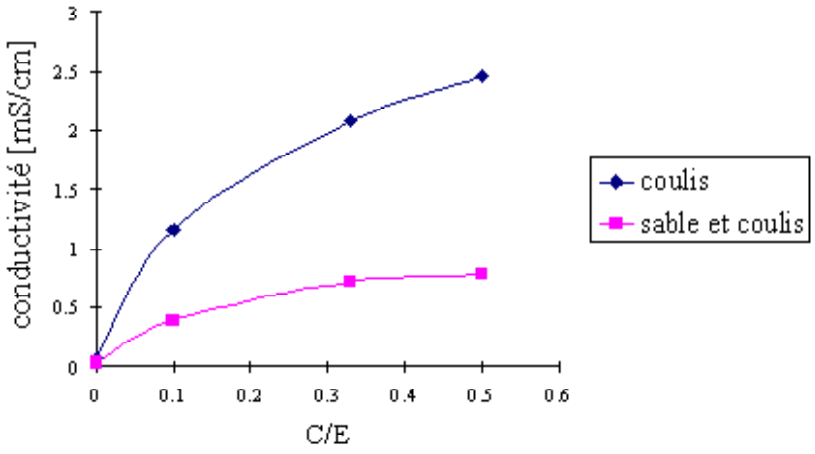
Figs.10-74 à 10-76.

10.4.3 Résultats d'essais 1D : distribution des pressions

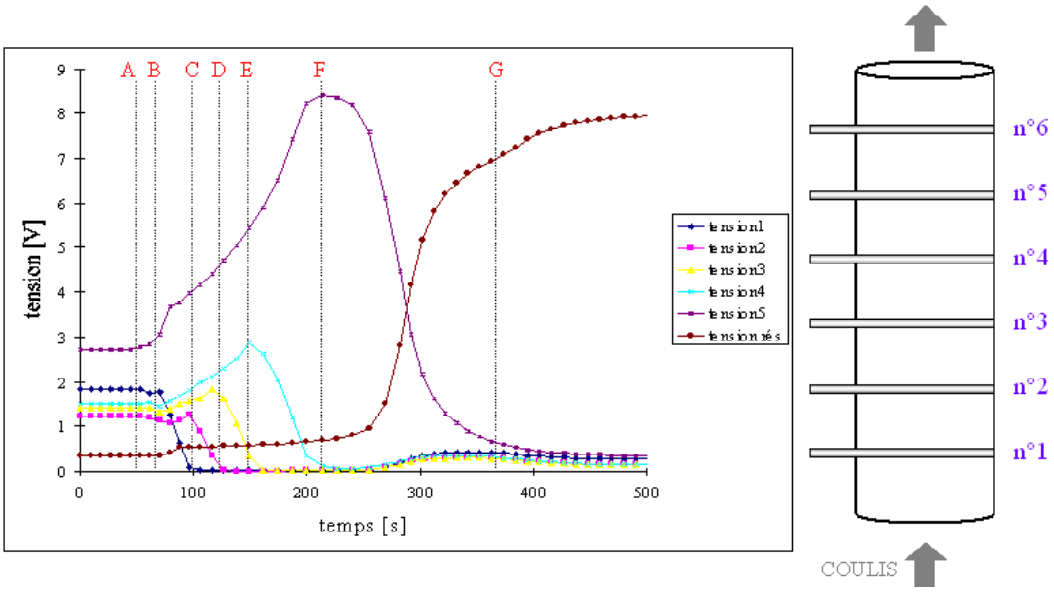
Figs.10-77 et 10-78.

10.4.4 Résultats du traitement d'images

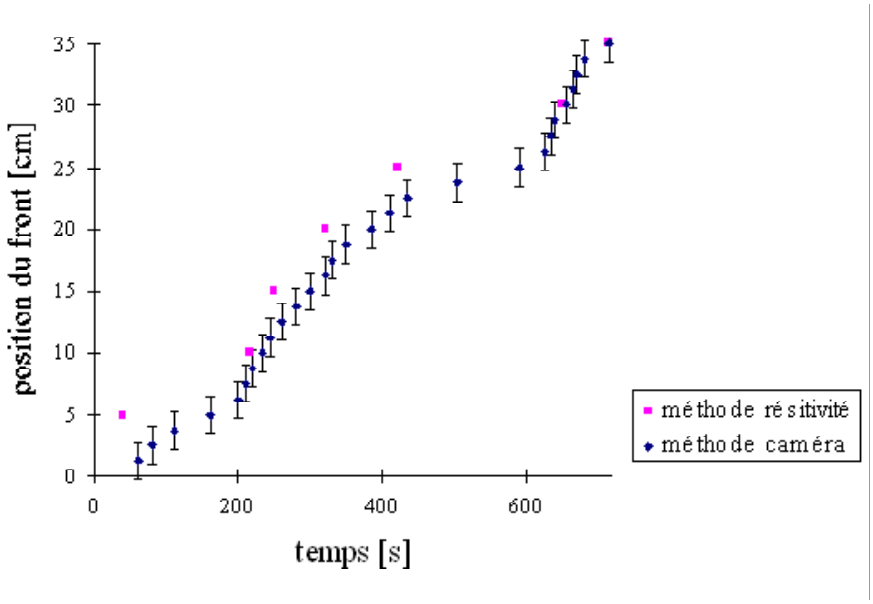
Les Figs.10-79 à 10-81 sont tirées de ([3]).



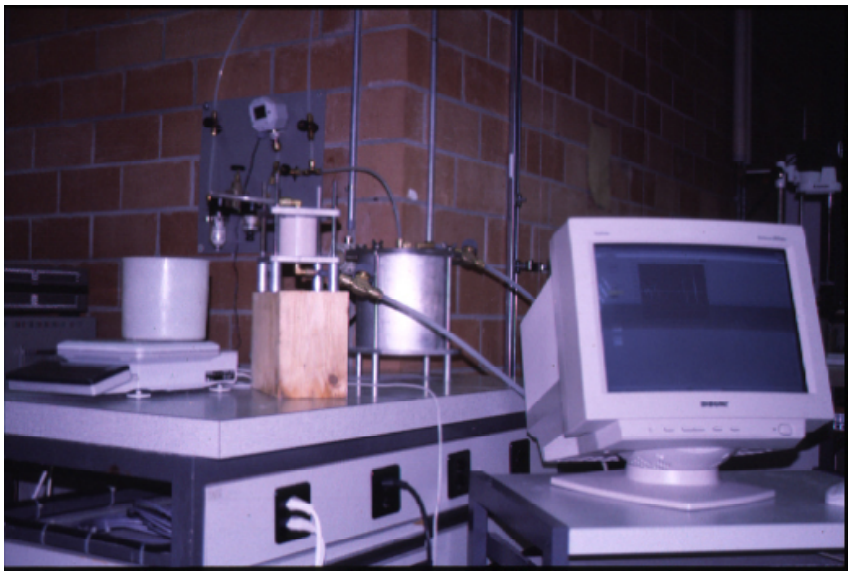
Figure~10-70: Conductivité du mélange coulis et sable.



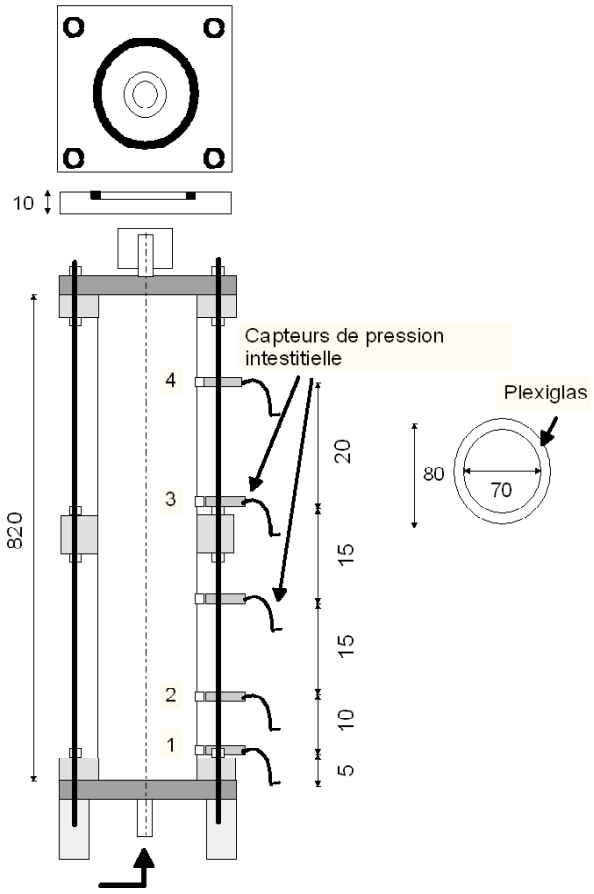
Figure~10-71: Mesure de conductivité dans la colonne.



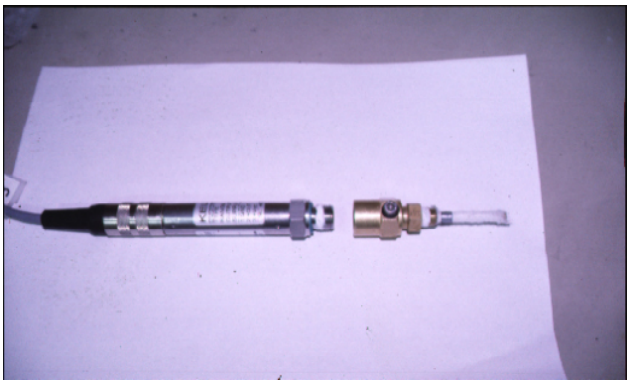
Figure~10-72: Comparaison entre front détecté par mesures de conductivité et par analyse d'images.



Figure~10-73: Dispositif d'essai sur petite colonne.

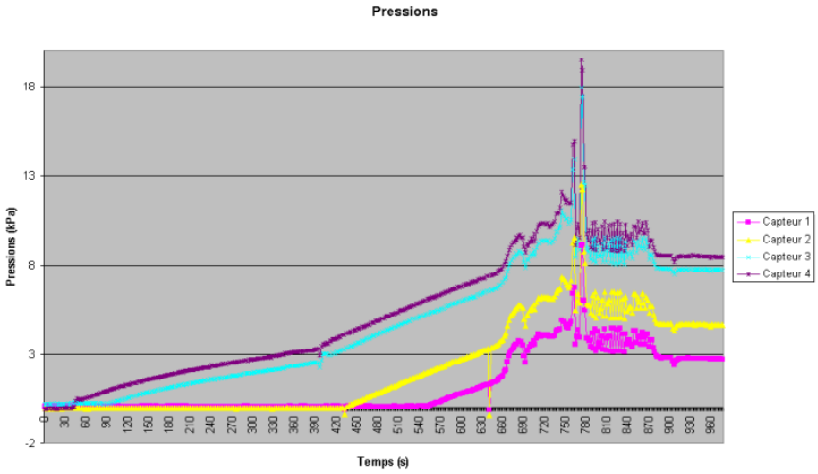


Figure~10-74: Colonne longue. Position des capteurs le long de la colonne.

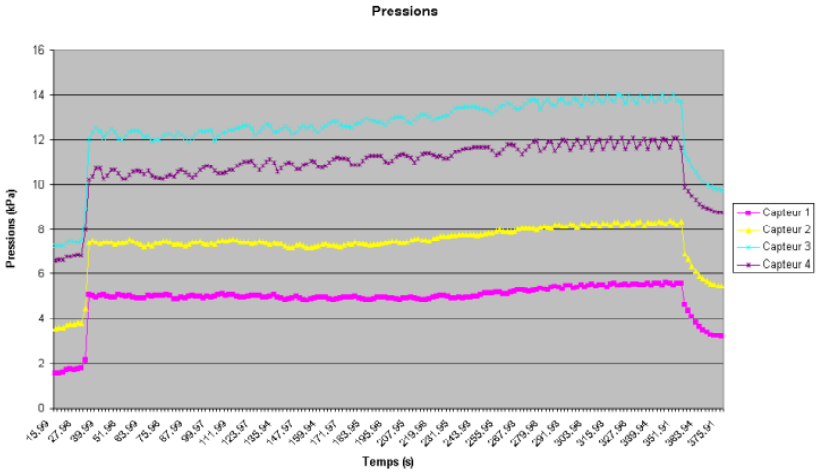


Figure~10-75: Capteur de pression interstitielle (Keller série 10).

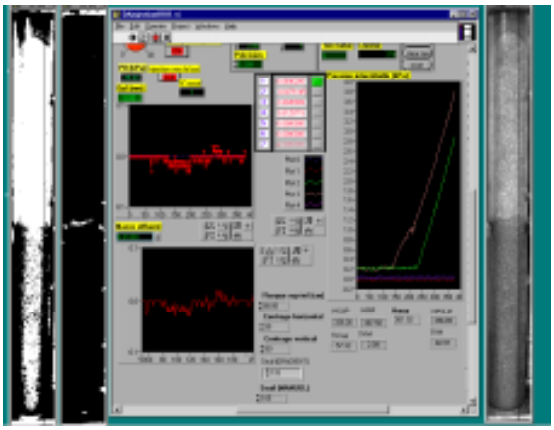
Figure~10-76: Essai d'injection à l'eau. Vue d'ensemble de la colonne. Le front d'eau est nettement visible.



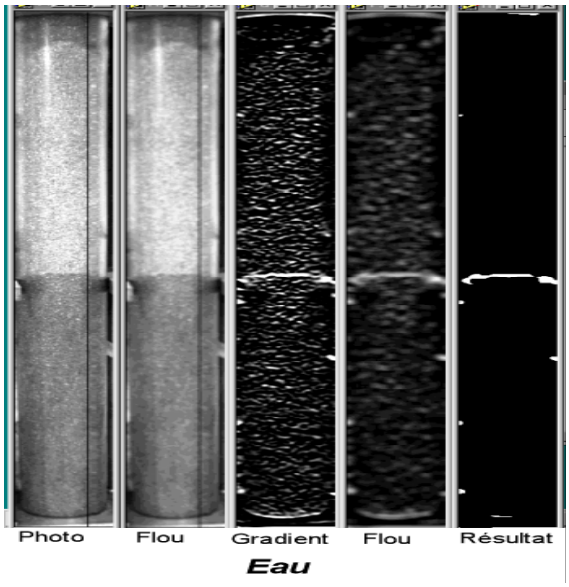
Figure~10-77: Saturation puis injection à l'eau.



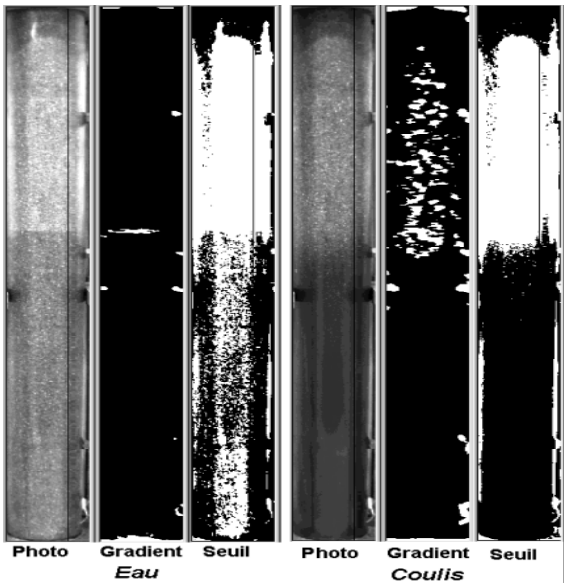
Figure~10-78: Injection au coulis



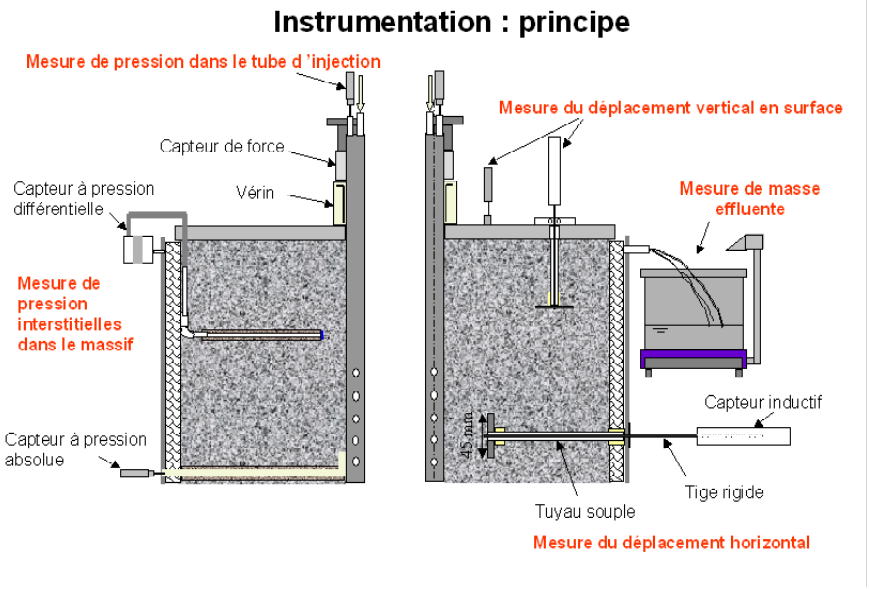
Figure~10-79: Détermination du front. Tableau de bord du programme d'acquisition LabView.



Figure~10-80: Analyse d'images. Algorithme du gradient lors d'une injection à l'eau.



Figure~10-81: Analyse d'images. Algorithmes du gradient et du seuil.



Figure~10-82: Instrumentation de la cuve. Grandeurs mesurées.

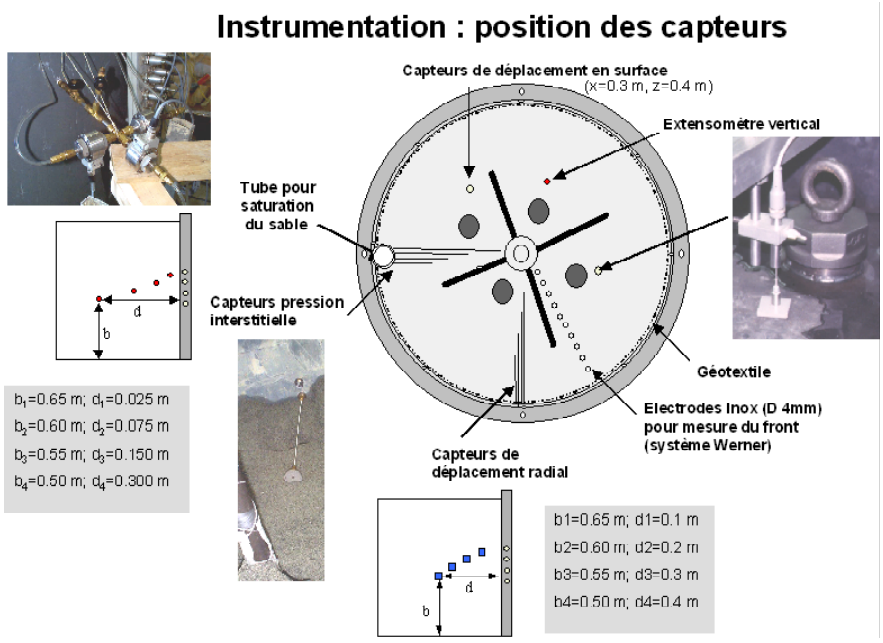
10.5 Essai en cuve

10.5.1 Instrumentation

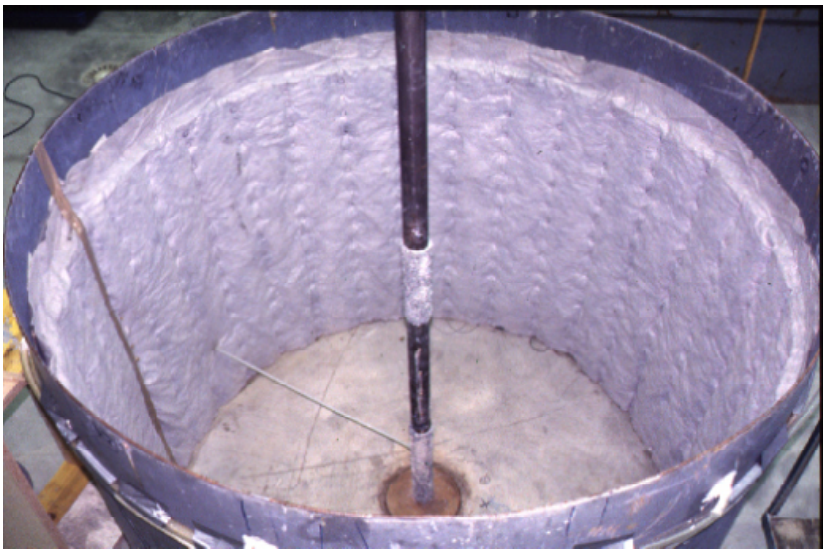
L'instrumentation de la cuve est détaillée sur les Figs.10-82 et 10-83.

10.5.2 Conditions aux limites et déroulement de l'essai

Les Figs.10-84 à 10-89 illustrent les conditions aux limites et le déroulement de l'essai d'injection en cuve.



Figure~10-83: Intrumentation de la cuve. Positions des capteurs.

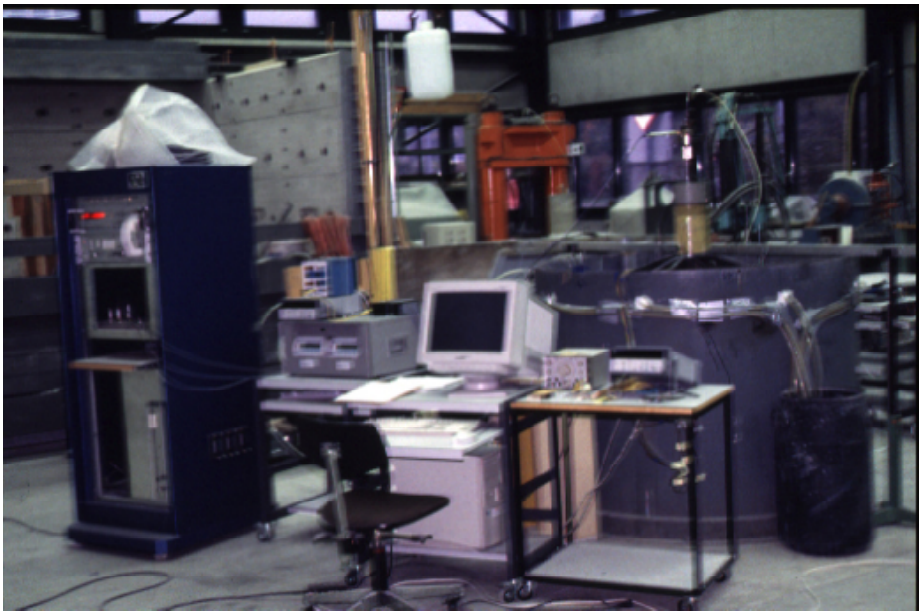


Figure~10-84: Géotextile (conditions aux limites hydrostatiques) et tube d'injection (débit et concentration imposés).

Figure~10-85: Plaque de chargement en acier et vérin hydraulique (effort mécanique).

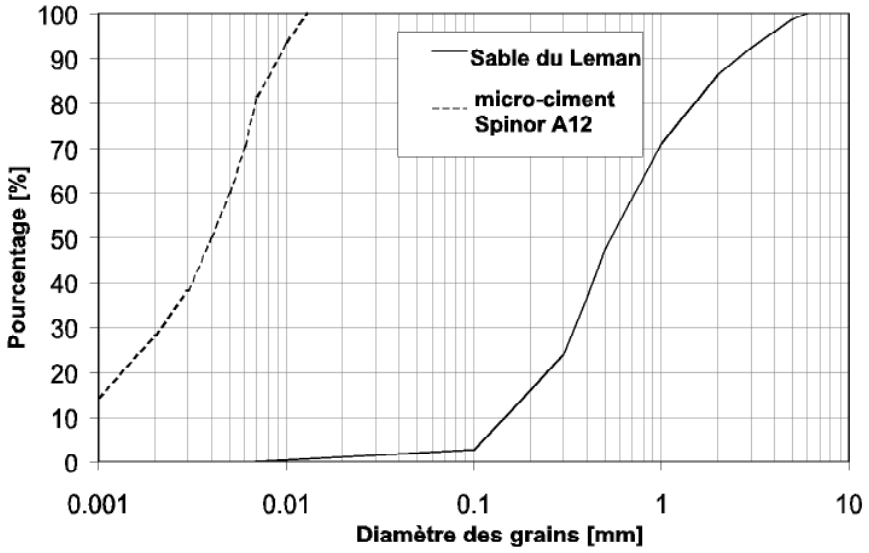
Figure~10-86: Dispositif d'injection.

Figure~10-87: Déroulement de l'essai en cuve.



Figure~10-88: Système d'acquisition.

Figure~10-89: Démontage de la cuve.



Figure~10-90: Granulométrie du sable du Léman et du micro-ciment Spinor A12.