



Schémas volumes finis pour des problèmes multiphasiques

Flore Nabet

► To cite this version:

Flore Nabet. Schémas volumes finis pour des problèmes multiphasiques. Mathématiques [math]. Aix
Marseille université, 2014. Français. NNT: . tel-01110741

HAL Id: tel-01110741

<https://theses.hal.science/tel-01110741>

Submitted on 28 Jan 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

ECOLE DOCTORALE 184

UFR DES SCIENCES

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE MARSEILLE (I2M), UMR 7373

Thèse présentée pour obtenir le grade universitaire de docteur

Discipline : Mathématiques

Flore NABET

Schémas volumes finis pour des problèmes multiphasiques

Soutenue publiquement le 08/12/2014 devant le jury composé de

Pierre BOUSQUET	Université Toulouse 3 - Paul Sabatier	Codirecteur de thèse
Franck BOYER	Aix-Marseille Université	Directeur de thèse
Claire CHAINAIS-HILLAIRET	Université Lille 1	Rapporteuse
Florence HUBERT	Aix-Marseille Université	Examinatrice
Emmanuel MAITRE	Université Joseph Fourier	Examineur
Roland MASSON	Université de Nice Sophia Antipolis	Examineur
Alain MIRANVILLE	Université de Poitiers	Rapporteur

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent, bien entendu, à Franck Boyer et Pierre Bousquet.

Je remercie Franck qui, malgré son emploi du temps chargé, s'est toujours rendu disponible pour répondre à mes questions, me faire partager ses connaissances, résoudre mes (trop nombreux??) problèmes informatiques... Merci pour sa patience, ses conseils, son soutien. Il m'a permis de réaliser cette thèse dans d'excellentes conditions autant d'un point de vue scientifique que d'un point de vue humain, je l'en remercie.

Je remercie Pierre d'avoir toujours porté beaucoup d'intérêt à mes travaux malgré l'éloignement de mon sujet de thèse avec ses thèmes de recherches. Merci pour sa disponibilité et son investissement. Il s'est toujours montré présent lorsque j'en avais besoin, je l'en remercie.

Mes plus sincères remerciements vont à Claire Chainais-Hillairet et Alain Miranville pour avoir accepté de rapporter ma thèse et pour l'attention qu'ils ont portée à mes travaux.

Je tiens également à remercier Florence Hubert, Emmanuel Maitre et Roland Masson d'avoir accepté de participer à mon jury.

Un grand merci à Stella Krell et Sebastian Minjeaud pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant ma thèse et mon stage de M2, pour leurs nombreux conseils avisés ainsi que pour les moments de détente et les multiples parties de cartes que nous avons partagées.

Je souhaite remercier très chaleureusement tous les membres du LATP. Je remercie particulièrement l'équipe d'analyse appliquée ainsi que le café du 3ème étage. Grâce à eux mes années de thèse se sont déroulées dans une ambiance très agréable. Merci pour leur sympathie, leur soutien, leurs encouragements ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir (mathématiques ou non). Merci Julia, Julien O., Nicolas et Mihaï avec qui j'ai également eu le plaisir de partager mes enseignements, Ana, Julien G. (et ses pauses forcées?), Guillemette, Florence, Raphaële, Thierry, Sylvie, Pascal, Emmanuel, Christophe, Olivier G., Assia, Yves, Stéphane, Christian.

Merci à l'ensemble de l'équipe administrative et technique. Ils ont toujours répondu présent lorsque j'avais besoin de leur aide : Gérard, Kai, Marie-Christine, Nelly, Sonia, Tino, Valérie D. et bien sûr Valérie J. avec qui je fais souvent la fermeture du CMI. Merci Julien grâce à qui nous travaillons dans de bonnes conditions.

Je remercie également tous les thésards/post-doc avec qui j'ai eu le plaisir de partager mes repas, de grandes discussions, de nombreuses parties de cartes ou encore d'excellentes soirées. Merci Caro, Julie et Jordan pour les soirées crêpes, pizzas ou autres, les séances d'escalade et d'accrobranche ainsi que pour le soutien que vous m'avez apporté durant cette thèse. Merci à Seb et Thomas A. pour leur accueil lorsque je suis arrivée en stage de M2 ainsi que pour les nombreux débats que nous avons pu avoir. Merci à ceux qui ont partagé mon bureau durant ma thèse (et surtout qui ont réussi à y rester) : Fanny, Rima, Guillaume, Benjamin C. ainsi que ceux récemment arrivés, qui ont eu la lourde tâche de me supporter pendant la rédaction de ce manuscrit et la préparation de ma soutenance : Rémi, Thomas B. Merci à Jonathan, Romaric, Thomas Z. et Lionel sans qui ces 3 années auraient certes été beaucoup plus calmes mais également beaucoup moins agréables. Merci à mon partenaire de contrée François ainsi qu'à Federico, Niklas, Peter, Bien, Nicolas, Benjamin H., Cécile, Juliette, Chady, Ayuna, Brice, Boris.

J'ai également une pensée pour tous les jeunes chercheurs que j'ai eu le plaisir de rencontrer au cours de ma thèse et avec qui j'ai partagé de très agréables moments : Ludo, Marianne, Nelly, Nina, Cindy, Simon, Yoann, ...

Merci Christèle, Jess et Jérémy sur qui je peux compter depuis de nombreuses années maintenant, je ne compte plus les bons moments passés ensemble. Merci Aude pour les balades à cheval, les soirées cosmétiques, Just Dance ou autres... Merci à mes amis matheux qui sont là depuis la licence : Allan, Cédric, David, Gaby, Joffrey, Sophie. Enfin merci à Mathieu d'avoir toujours été là lorsque j'en avais besoin, de m'avoir toujours soutenue et d'avoir cru en moi lorsque je n'y croyais plus.

Je conclus mes remerciements par ceux qui sont là depuis toujours et qui, chacun à leur manière, m'apportent leur soutien au quotidien. Merci à toute ma famille et en particulier mon frère, ma sœur et mes parents pour leur patience (et il leur en a fallu!!) et leur soutien constant.

Table des matières

Introduction

vii

Partie 1

Discrétisation Volumes Finis du modèle de Cahn-Hilliard

Chapitre I	L'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann	3
I.1	Le modèle de Cahn-Hilliard	3
I.2	Le cadre Volumes Finis	5
I.3	Discrétisation VF4 de l'équation de Cahn-Hilliard	7
I.4	Théorèmes d'existence et de convergence	9
I.5	Estimations d'erreur pour le schéma VF4	11
I.6	Quelques remarques sur l'implémentation	24
I.7	Illustrations numériques	27
I.8	Conclusion	29
Chapitre II	Discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami	31
II.1	Le problème de Laplace-Beltrami sur un domaine courbe 1D	31
II.2	Le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel	38
II.3	Quelques remarques sur l'implémentation	46
II.4	Tests numériques	47
II.5	Conclusion	53
Chapitre III	Le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques	55
III.1	La condition aux limites dynamique	55
III.2	Approximation VF4 de l'équation de Cahn-Hilliard avec CL dynamiques	57
III.3	Estimations d'énergie	60
III.4	Existence de solutions au problème discret	62
III.5	Convergence des solutions approchées	67
III.6	Démonstration du Lemme III.20	102
III.7	Quelques remarques sur l'implémentation	108
III.8	Résultats numériques	109
III.9	Conclusion et perspectives	117

Partie 2

Stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes

Chapitre IV	Méthode numérique pour le calcul de la constante Inf-Sup discrète	123
IV.1	Description générale du cadre DDFV	123
IV.2	Modèle de Stokes et condition Inf-Sup	127
IV.3	Calcul de la constante Inf-Sup	129
IV.4	Quelques remarques sur l'implémentation	133
Chapitre V	Etude de la stabilité Inf-Sup du problème de Stokes	137
V.1	Stabilité Inf-Sup inconditionnelle	137
V.2	Stabilité Inf-Sup de codimension 1	144
V.3	Résultats numériques supplémentaires et perspectives	160
V.4	Conclusion	164

Partie 3

Discrétisation DDFV d'un modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes

Chapitre VI	Discrétisation DDFV de l'équation de Cahn-Hilliard	167
VI.1	Cadre DDFV du problème étudié	167
VI.2	Les conditions aux limites de Neumann	169
VI.3	Les conditions aux limites dynamiques	171
VI.4	Quelques remarques sur l'implémentation	175
VI.5	Tests numériques	179
VI.6	Conclusion	184
Chapitre VII	Couplage de l'équation de Cahn-Hilliard avec le problème de Stokes	185
VII.1	Construction de nouveaux opérateurs discrets	186
VII.2	Les conditions aux limites de Neumann	192
VII.3	Les conditions aux limites dynamiques	201
VII.4	Quelques remarques sur l'implémentation	203
VII.5	Tests numériques	207
VII.6	Conclusion	216

Conclusions et perspectives	217
------------------------------------	------------

Annexe	221
---------------	------------

Références	229
-------------------	------------

Introduction

Dans ce manuscrit nous nous intéressons à l'analyse numérique de schémas de types volumes finis pour deux systèmes particuliers d'équations : les équations de Cahn-Hilliard et les équations de Stokes ainsi que des modèles couplant ces deux équations.

Les méthodes de type volumes finis ont été largement étudiées depuis plusieurs années dans différents domaines de l'ingénierie. En effet, ces méthodes sont bien adaptées à l'approximation numérique des lois de conservation apparaissant par exemple en mécanique des fluides, en génie pétrolier et dans de nombreux autres domaines. L'analyse théorique des schémas volumes finis (analyse de convergence, estimations d'erreur, ...) a commencé à la fin des années 1980 et a connu une rapide expansion dans les années 1990 : voir par exemple le livre de Eymard, Gallouët, Herbin [EGH00] et les références qui s'y trouvent.

En ce qui concerne le problème de Stokes, son étude par des méthodes de types volumes finis a déjà fait l'objet de nombreux travaux. Au contraire le modèle de Cahn-Hilliard n'a jamais été étudié, à notre connaissance, par une méthode de types volumes finis. L'approximation volumes finis de ce modèle présente pourtant plusieurs avantages. En effet, d'un point de vue numérique les schémas volumes finis sont faciles à implémenter et permettent de traiter des géométries complexes. De plus, dans ces travaux nous étudions une condition aux limites particulière (appelée condition aux limites dynamique) qui couple l'équation dans le domaine Ω avec une équation sur sa frontière Γ par un terme de dérivée normale. Les schémas volumes finis sont bien adaptés à ce problème car ils permettent de coupler naturellement le domaine et sa frontière par un terme de flux y compris en géométrie courbe.

Dans une première partie, nous nous intéresserons principalement à la discrétisation du système de Cahn-Hilliard par une première méthode très classique de type volumes finis en espace, appelée VF4 ou TPFA (acronyme de "Two Point Flux Approximation"). La seconde partie est consacrée au problème de Stokes et notamment à l'étude de la stabilité Inf-Sup discrète pour un second schéma volumes finis, le schéma DDFV (acronyme de "Discrete Duality Finite Volume"). Enfin, dans une troisième partie, nous couplons les résultats obtenus dans les Parties 1 et 2 et nous proposons un schéma DDFV original pour la discrétisation du couplage entre le modèle de Cahn-Hilliard et le problème de Stokes.

Dans la suite de cette introduction, nous décrivons brièvement les différents chapitres présentés dans cette thèse et nous présentons les résultats principaux. Dans la majorité des chapitres de ce manuscrit, nous décrivons l'implémentation numérique des codes réalisés pendant cette thèse avec le logiciel Scilab.

Notons que pour tous les résultats présentés dans ces travaux nous nous plaçons sur un ouvert Ω borné et connexe de $\mathbb{R}^2$ mais que le cas tridimensionnel est bien sûr intéressant et important en pratique mais fera l'objet de travaux futurs.

1. Discrétisation volumes finis de l'équation de Cahn-Hilliard

L'équation de Cahn-Hilliard est une équation issue de la physique introduite initialement par J.W Cahn et J.E Hilliard dans [CH58] pour décrire le processus de séparation de phases qui se produit lors du refroidissement d'un alliage solide au dessous d'une température critique. Au cours de cette séparation de phases, également appelée décomposition spinodale, les deux constituants d'un alliage métallique binaire se séparent spontanément et forment plusieurs régions distinctes constituées de phases pures. Ces phases pures vont ensuite se regrouper entre elles pour former des motifs plus gros et finalement ne former plus que deux zones. Si nous notons c_1 la concentration du premier constituant et c_2 celle du second, ces concentrations vérifient la relation suivante $c_1 + c_2 = 1$ et nous supposons qu'elles varient continûment entre 0 et 1. Ainsi, il suffit d'étudier la concentration $c = c_1$ du premier constituant. Si $c = 1$ cela signifie donc que nous observons la phase pure constituée seulement du premier composant et si $c = 0$ nous observons la phase pure constituée seulement du

second composant. Ce modèle est désormais utilisé dans des situations plus générales que celles des travaux de Cahn et Hilliard pour modéliser par exemple des mélanges de fluides non-miscibles.

Le modèle de Cahn-Hilliard fait partie de la classe de modèles de type interface diffuse car les interfaces sont représentées par des zones d'épaisseur faible mais non nulle. Un des intérêts du modèle, d'un point de vue numérique notamment, est de pouvoir considérer en pratique des interfaces épaisses tout en maintenant les propriétés macroscopiques du système. Ces équations permettent ainsi de modéliser la non-miscibilité des phases en présence en maintenant l'épaisseur d'interface à une valeur prescrite ε (cf Figure 1b).

Le but principal de la première partie est de proposer et d'analyser un premier schéma volumes finis à deux points pour l'équation de Cahn-Hilliard associée à des conditions aux limites dites dynamiques (car elles font intervenir la dérivée en temps du paramètre d'ordre).

Le problème est le suivant : Trouver la concentration $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de l'une des deux phases satisfaisant,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \mu = -\frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \Delta c + \frac{12}{\varepsilon} \sigma_b f'_b(c), & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \nabla \mu \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega; \\ \frac{\varepsilon^3}{64 \Gamma_b \Gamma_s} \partial_t c_{|\Gamma} = \frac{3}{8} \varepsilon^2 \sigma_b \sigma_s \Delta_\Gamma c_{|\Gamma} - 6 \sigma_b f'_s(c_{|\Gamma}) - \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \partial_n c, & \text{sur } (0, T) \times \partial \Omega; \\ c(0, \cdot) = c_0, & \text{dans } \Omega; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (1a) \\ (1b) \\ (1c) \\ (1d) \\ (1e) \end{array}$$

où μ est une inconnue intermédiaire appelée potentiel chimique.

Le terme $c_{|\Gamma}$ désigne la trace de c sur $\Gamma = \partial \Omega$, Δ_Γ est l'opérateur de Laplace-Beltrami et ∂_n l'opérateur de dérivée normale.

Des paramètres physiques décrivant les propriétés des deux constituants du mélange interviennent dans l'équation dans Ω : la tension de surface $\sigma_b > 0$ entre les deux composants (densité d'énergie de l'interface) et le coefficient de mobilité (que nous choisissons constant dans ces travaux) $\Gamma_b > 0$. Rappelons que $\varepsilon > 0$ désigne la valeur de l'épaisseur d'interface que nous imposons. A cela s'ajoute des paramètres physiques qui permettent de décrire les différentes propriétés de la paroi : un paramètre de relaxation $\Gamma_s > 0$ et un coefficient de capillarité $\sigma_s > 0$. Le terme f_b possède une structure de double-puits (voir Figure 1a) et est appelé potentiel volumique de Cahn-Hilliard, le terme f_s est appelé potentiel de Cahn-Hilliard surfacique.

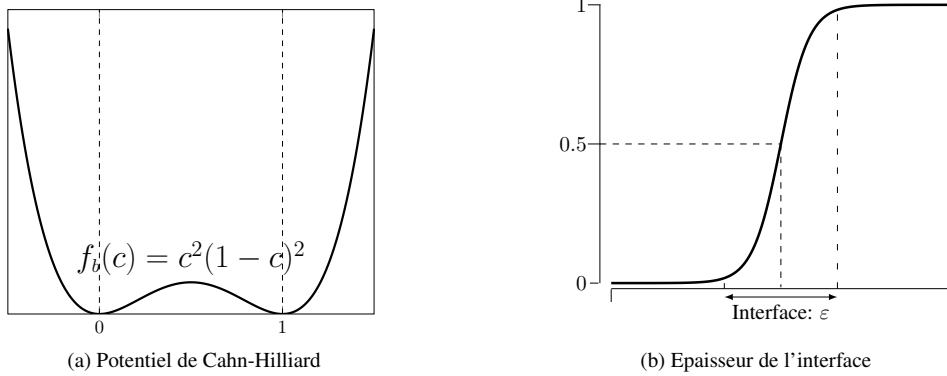


Figure 1: Structure double puits du potentiel f_b et définition de l'épaisseur de l'interface

Quelles que soient les conditions aux limites qui lui sont associées, l'équation de Cahn-Hilliard n'a, à notre connaissance, jamais été étudiée par une méthode de type volumes finis. C'est la raison pour laquelle nous commençons dans le Chapitre I par décrire une approximation volumes finis (appelée approximation VF4) de l'équation de Cahn-Hilliard associée à des conditions aux limites de Neumann pour le paramètre d'ordre qui sont celles que l'on trouve le plus souvent dans la littérature.

L'équation de Cahn-Hilliard présente plusieurs difficultés. En effet, c'est une équation parabolique, du 4^{ème} ordre non-linéaire (car le potentiel volume $f_b(c) = c^2(1-c)^2$ n'est pas quadratique) et qui ne satisfait pas de principe du maximum à cause du terme de diffusion d'ordre 4.

Par ailleurs, la condition aux limites dynamique (1d) apporte des difficultés supplémentaires. L'une de ces difficultés vient du fait que l'opérateur de Laplace-Beltrami Δ_Γ intervient dans cette condition aux limites et donc la géométrie du

domaine, qui n'est alors nécessairement plus polygonal, intervient dans l'équation. De plus, un couplage s'effectue entre l'équation dans Ω par le terme Δc et l'équation sur $\Gamma = \partial\Omega$ par l'intermédiaire du terme de dérivée normale $\nabla c \cdot \vec{n}$. De ce fait, dans le Chapitre II, nous nous concentrons sur l'analyse du schéma volumes finis utilisé pour deux problèmes plus simples mais faisant intervenir ces ingrédients : le problème de Laplace-Beltrami sur la courbe fermée Γ et le problème de Laplace dans Ω avec des conditions aux limites de Ventcel sur Γ . En couplant les résultats des Chapitres I et II nous serons alors en mesure, dans le Chapitre III, de réaliser l'étude mathématique du problème (1) en utilisant le schéma VF4 (pour la discrétisation spatiale).

Dans ce manuscrit nous utilisons principalement le potentiel de Cahn-Hilliard donné par la fonction polynomiale double-puits $f_b(c) = c^2(1 - c)^2$ (cf Figure 1a). Notons cependant que le potentiel thermodynamique introduit dans [CH58] est donné par la fonction logarithmique suivante :

$$f_b^l(c) = \frac{\theta_c}{2}c(1 - c) + \frac{\theta}{4}[(1 - c)\ln(1 - c) + c\ln c], \quad 0 < \theta < \theta_c,$$

où θ_c représente la température critique.

Les termes logarithmiques décrivent alors l'entropie du mélange et la condition $\theta < \theta_c$ assure que le potentiel f_b^l ait une structure double-puits. L'approximation polygonale que nous utilisons est pertinente lorsque l'abaissement de la température est faible, c'est à dire lorsque θ est proche de la température critique θ_c . Le potentiel logarithmique f_b^l permet notamment d'assurer que c reste compris entre 0 et 1, même sans principe du maximum. L'analyse numérique du modèle de Cahn-Hilliard en utilisant le potentiel logarithmique f_b^l serait donc très intéressante mais la forme particulière de ce potentiel ajoute des difficultés supplémentaires dans l'analyse du schéma. Ce potentiel ne sera donc pas considéré dans ces travaux mais l'analyse du modèle de Cahn-Hilliard associé à ce potentiel pourrait faire l'objet de travaux futurs tout comme la comparaison, d'un point de vue numérique, des résultats obtenus avec le potentiel polynomial f_b et avec le potentiel logarithmique f_b^l .

Pour plus de détails concernant l'analyse de l'équation de Cahn-Hilliard avec un potentiel logarithmique nous renvoyons à [CMZ11] et aux références qui s'y trouvent.

Chapitre I : Etude de l'équation de Cahn-Hilliard avec des C.L. de Neumann

Le modèle de Cahn-Hilliard décrit l'évolution du système à travers la minimisation d'une énergie libre $\mathcal{F}_b$:

$$\mathcal{F}_b(c) = \frac{3}{4}\varepsilon\sigma_b \int_{\Omega} |\nabla c|^2 + \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b \int_{\Omega} f_b(c). \quad (2)$$

L'équation d'évolution associée à la minimisation de cette énergie est le flot de gradient dans H^{-1} sous la contrainte de conservation du volume, plus précisément nous résolvons le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

$$\begin{cases} \partial_t c = \Delta \mu, \\ \mu = -\frac{3}{2}\varepsilon\sigma_b \Delta c + \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b f_b'(c), \end{cases}$$

où le potentiel chimique μ est une inconnue intermédiaire égale à la dérivée fonctionnelle de l'énergie libre $\mathcal{F}_b$ par rapport au paramètre d'ordre c .

Il n'y a aucun flux de masse à travers la frontière : nous imposons donc une condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique. Dans ce chapitre, nous imposons également une condition au bord de Neumann homogène pour le paramètre d'ordre (avant de présenter dans le Chapitre III une condition aux limites plus générale). Notons que ∇c est orienté dans la direction transverse à l'interface qu'il faut comprendre comme la ligne de niveau $\{c = \frac{1}{2}\}$ et donc cette condition au bord impose un angle de contact égal à $\frac{\pi}{2}$ entre l'interface et la paroi. Cette description n'est pas toujours réaliste, c'est l'une des raisons pour lesquelles nous étudierons par la suite des conditions aux limites plus générales.

De plus, nous observons que l'énergie libre $\mathcal{F}_b$ est dissipée au cours du temps car en multipliant par μ l'équation d'évolution sur c , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_b(c) = - \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 \leq 0. \quad (3)$$

L'étude de l'équation de Cahn-Hilliard associée à ces conditions aux bords de Neumann homogènes a déjà fait l'objet de nombreux travaux autant d'un point de vue théorique [EZ86, Zhe86, Ell89, Dlo94, CM95, Tem97, RH99, NC08, MW09] que d'un point de vue numérique [EF87, EFM89, EF89, Ell89, DN91, EL92, Eyr98, CCK00, Fur01a, FP04, FP05, SY10] où de nombreuses méthodes de type différences finies ou éléments finis ont été proposées.

Nous proposons ici une nouvelle méthode, de type volumes finis, qui utilise l'approximation volumes finis classique basée sur l'approximation consistante à deux points (Two Point Flux Approximation) de l'opérateur de Laplace décrite

par exemple dans [EGH00]. Notons que si le maillage utilisé est constitué de triangles, ce schéma présente un stencil de 4 points, c'est la raison pour laquelle ce schéma est couramment appelé VF4.

Dans ce chapitre, nous supposons que Ω est un ouvert borné, connexe et polygonal de $\mathbb{R}^2$.

Ce chapitre nous donne tout d'abord l'opportunité de rappeler le cadre général des schémas volumes finis. Rappelons brièvement la définition d'un maillage orthogonal admissible du domaine Ω (voir Figure 2). Nous décomposons le domaine Ω en polygones convexes disjoints notés $\mathcal{K}$ et appelés volumes de contrôle tels que $\bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathcal{K} = \overline{\Omega}$, ce qui permet de construire un maillage polygonal $\mathfrak{M} = (\mathcal{K})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$ de Ω . A chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ est associé un point $x_{\mathcal{K}}$ appelé centre du volume de contrôle $\mathcal{K}$ et nous imposons la condition suivante, appelé condition d'orthogonalité : si $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$ sont les centres de deux volumes de contrôle voisins nous demandons que le segment $[x_{\mathcal{K}}x_{\mathcal{L}}]$ soit orthogonal à l'arête σ séparant $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$. Le pas du maillage est défini par $\text{size}(\mathfrak{M}) = \sup\{\text{diam}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \in \mathfrak{M}\}$.

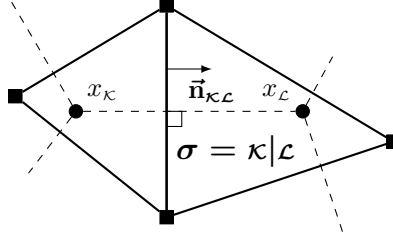


Figure 2: Maillage orthogonal admissible $\mathfrak{M}$

Pour tout temps t^n fixé, à chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ le schéma VF4 associe une inconnue $c_{\mathcal{K}}^n$ pour le paramètre d'ordre.

Ensuite, nous décrivons la méthode utilisée pour obtenir le schéma associé à l'équation de Cahn-Hilliard (que nous appellerons par la suite schéma VF4). De manière analogue à la décroissance de l'énergie (3) obtenue dans le cas continu, nous pouvons montrer la décroissance de l'énergie au niveau discret ce qui permet de démontrer :

- l'existence d'au moins une solution au problème discret (Théorème I.8);
- des bornes sur les solutions discrètes et notamment une borne $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ sur le paramètre d'ordre et une borne $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ sur le potentiel chimique (Proposition I.12);
- la convergence des solutions approchées vers une solution faible du problème continu et donc en l'occurrence l'existence de cette solution (Théorème I.11).

Le résultat principal démontré dans ce chapitre est le théorème d'estimation d'erreur pour le schéma complètement discrétisé (Théorème I.16) que nous énonçons ici.

Théorème 1 (Estimation d'erreur pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des CL de Neumann)

Soit $(c, \mu) \in \mathcal{C}^3([0, T] \times \overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^2([0, T] \times \overline{\Omega})$ solution de l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann. Soit $M > 0$ tel que $\|c\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq M$ et $M' > M$. Alors, pour toute solution $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ du Problème discret telle que :

$$c_{\mathfrak{M}}^0 = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c^0 \quad \text{et} \quad \sup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} |c_{\mathcal{K}}^n| \leq M', \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket,$$

il existe une constante positive $C > 0$ (dépendant de M et M') telle que l'estimation suivante est vérifiée (pour Δt assez petit),

$$\sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} \|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n) - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{1, \mathfrak{M}} \leq C(\Delta t + \text{size}(\mathfrak{M})).$$

Le terme $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c$ désigne la projection centrée (voir définition I.18) de la solution exacte c sur le maillage $\mathfrak{M}$ et $\|\cdot\|_{1, \mathfrak{M}}$ la semi-norme H^1 discrète sur $\mathfrak{M}$ (définie dans la Section I.2.2).

La condition de borne a priori sur la solution approchée sera commentée en détail dans la Section I.5 dédiée à la démonstration du Théorème 1.

Le point le plus délicat dans la démonstration de ce résultat provient du terme non-linéaire $f'_b(c)$ auquel il faut porter une attention particulière. Pour cela nous nous inspirons des méthodes décrites dans [EFM89, KSW08]. Cependant, des difficultés supplémentaires s'ajoutent dans le cas qui nous intéresse. Tout d'abord, le cadre volume finis complique l'étude de ce terme. En effet, lorsque nous utilisons une méthode de type éléments finis conformes nous travaillons (du moins en espace) sur des espaces H^1 -conformes. Ce n'est pas le cas lorsque nous utilisons une méthode de type volumes finis où ces espaces sont discrets. De plus, nous utilisons dans ces travaux deux discrétisations en temps différentes du

potentiel non-linéaire f'_b : la discrétisation implicite classique et une seconde discrétisation appelée semi-implicite, qui permet d'obtenir une inégalité d'énergie discrète sans condition sur le pas de temps. C'est cette seconde discrétisation qui complique également la démonstration du théorème d'estimation d'erreur.

Nous concluons ce chapitre en présentant différents résultats numériques qui permettent de valider le schéma VF4 pour le modèle de Cahn-Hilliard en illustrant différentes propriétés connues de ce modèle.

Chapitre II : L'opérateur de Laplace-Beltrami

Ce chapitre a essentiellement pour but d'introduire l'opérateur de Laplace-Beltrami et de traiter, dans un cadre plus simple, plusieurs des difficultés qui interviennent lorsque nous prenons en compte la condition aux limites dynamique (1d) dans le problème de Cahn-Hilliard :

- la géométrie du domaine, qui n'est plus polygonal, intervient dans l'équation sur le bord;
- un couplage s'effectue entre l'équation dans Ω et la condition aux limites sur $\partial\Omega$.

Dans un premier temps nous nous intéressons à la discrétisation volumes finis de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur une courbe fermée Γ .

Plus précisément le problème s'écrit : Trouver $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant,

$$-\Delta_\Gamma u + u = g \text{ sur } \Gamma \text{ avec } g \in L^2(\Gamma). \quad (4)$$

Nous sommes donc en dimension 1 mais contrairement au cadre habituel le domaine Γ n'est pas une droite et les volumes de contrôle ne sont pas des segments. Nous définissons donc un maillage $\partial\mathfrak{M}$ de Γ constitué d'arcs de courbe comme décrit sur la Figure 3.

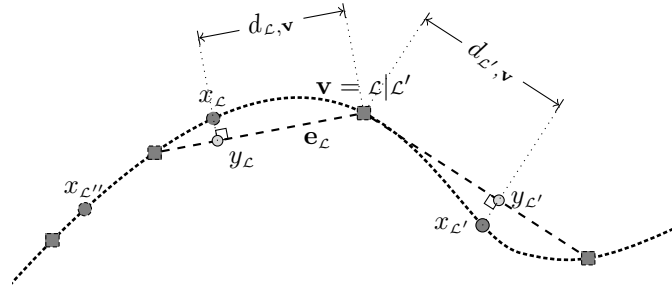


Figure 3: Maillage $\partial\mathfrak{M}$ de la courbe Γ

Ainsi, la Section II.1 permet d'introduire les notations en rapport avec le maillage $\partial\mathfrak{M}$ mais elle permet également de définir l'opérateur de gradient tangentiel discret utilisant une approximation à deux points consistante.

Pour tout volume de contrôle $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, l'approximation volumes finis à deux points du problème (4) s'écrit :

$$\left(-\frac{u_{\mathcal{L}'} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \right) - \left(-\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}''}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}''}} \right) + m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} = m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} g_{\mathcal{L}}, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}.$$

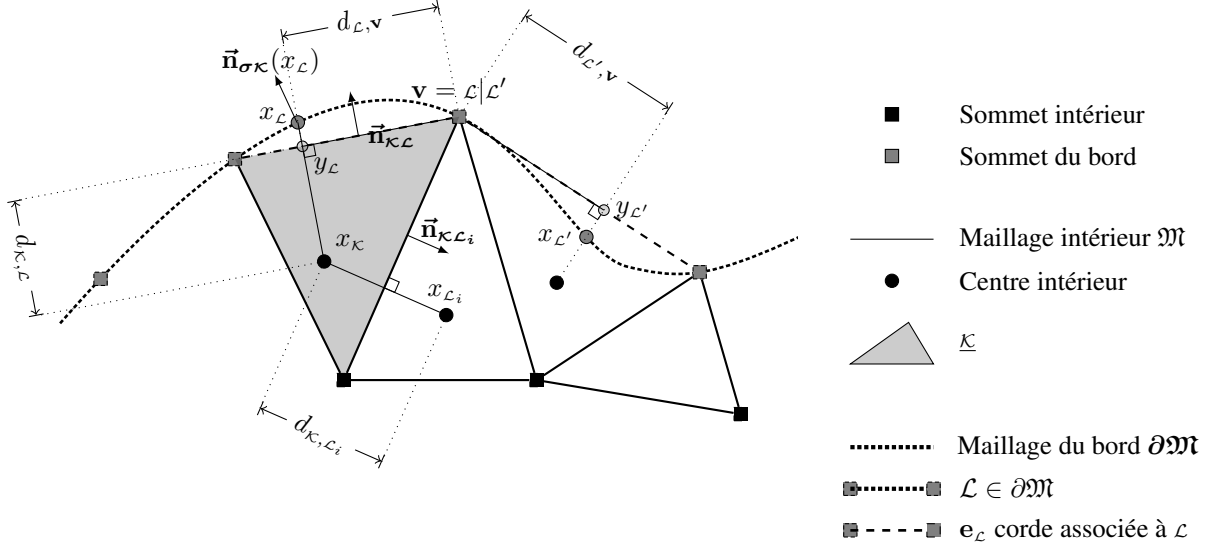
Dans un second temps, nous considérons le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel. Le problème est le suivant : Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que,

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{dans } \Omega; \\ -\Delta_\Gamma(u|_\Gamma) + u|_\Gamma + \nabla u \cdot \vec{\mathbf{n}} &= g && \text{sur } \Gamma; \end{aligned} \quad (5)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ et $\vec{\mathbf{n}}$ la normale unitaire sortante au domaine.

Comme dans le cas des conditions aux limites dynamiques, ce problème couple une équation dans le domaine Ω avec une équation sur le bord Γ . Ainsi, l'étude de ce problème, plus simple que l'équation de Cahn-Hilliard, va permettre d'étudier ce couplage. Plus précisément nous verrons que le schéma VF4 permet de coupler naturellement l'équation dans le domaine Ω et celle sur sa frontière par un terme de flux. De plus, cette section permet également de décrire entièrement le maillage $\mathcal{T} = (\mathfrak{M}, \partial\mathfrak{M})$ du domaine courbe Ω comme décrit sur la Figure 4.

La différence principale entre le maillage $\mathfrak{M}$ défini dans le Chapitre I et le maillage intérieur $\mathfrak{M}$ décrit ici est que les volumes de contrôle $\mathcal{K}$ ayant un côté inclus dans Γ ne sont plus polygonaux et peuvent même ne pas être convexes.

Figure 4: Maillage $\mathcal{T}$ associé à un domaine Ω non polygonal

D'un point de vue théorique, pour chacun des deux problèmes (4) et (5) étudiés dans ce chapitre nous démontrons une estimation d'erreur d'ordre 1 ce qui est bien ce à quoi nous nous attendions au vu des propriétés connues du schéma VF4 (cf [EGH00]).

Remarquons également que, d'un point de vue numérique, lorsque nous programmons le schéma VF4 pour ces deux problèmes, les seules informations à notre disposition sur la courbe Γ sont les coordonnées des sommets des mailles $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$ qui composent la frontière et qui sont fournies par le mailleur (en l'occurrence le logiciel Gmsh). Cependant, plusieurs mesures font intervenir des mailles du bord :

- l'aire $m_{\mathcal{K}}$ de la maille $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ telle qu'il existe une arête $\sigma \subset \partial\mathcal{K} \cap \Gamma$;
- la longueur $m_{\mathcal{L}}$ de la maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$;
- la distance $d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})$ du centre $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ au centre $x_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ si $\mathcal{L} = \sigma \in \partial\mathcal{M}$ est une maille du bord;
- la mesure $m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}$ de l'arc $\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ joignant deux centres voisins du bord $x_{\mathcal{L}}$ et $x_{\mathcal{L}'}$.

Ainsi, pour construire le schéma VF4 nous ne pourrions pas utiliser ces mesures exactes mais seulement des approximations. Nous pourrions penser que pour obtenir un schéma VF4 adapté à la géométrie courbe du domaine il est nécessaire de trouver une approximation précise de la courbure de Γ pour toutes les mailles $\mathcal{L}$ du bord. Pourtant, comme nous allons le démontrer ceci n'est pas nécessaire. En effet nous choisissons de réaliser une approximation polygonale, c'est à dire que nous considérons :

- l'aire $m_{\underline{\mathcal{K}}}$ du polygone $\underline{\mathcal{K}}$ construit à partir des sommets de la maille $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$;
- la longueur $m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}$ de la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ associée à la maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$;
- la distance $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = d(x_{\mathcal{K}}, y_{\mathcal{L}})$ entre le centre $x_{\mathcal{K}} \in \mathcal{K}$ et le centre $y_{\mathcal{L}} \in \mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ si $\mathcal{L} = \sigma \in \partial\mathcal{M}$ est une maille du bord;
- la longueur $d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = d_{\mathcal{L},\mathbf{v}} + d_{\mathcal{L}',\mathbf{v}} = d(x_{\mathcal{L}}, \mathbf{v}) + d(x_{\mathcal{L}'}, \mathbf{v})$.

L'un des intérêts de ce chapitre est de montrer, d'un point de vue théorique, que ces approximations sont suffisantes mais également d'observer que, d'un point de vue numérique, nous n'obtenons pas un schéma plus précis en réalisant une approximation très précise des quantités géométriques qui interviennent.

Chapitre III : Le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques

Rappelons que la condition aux limites de Neumann homogène sur le paramètre d'ordre impose que l'interface soit orthogonale au bord du domaine. Or pour certains systèmes physiques, cette condition dans l'équation de Cahn-Hilliard est trop restrictive. Par exemple, lorsqu'un premier fluide déplace un second fluide non-miscible la ligne de contact par rapport à la paroi solide dévie de l'angle de contact statique $\frac{\pi}{2}$. Pour tenir compte des interactions ayant lieu entre les

composants du modèle de Cahn-Hilliard et la paroi solide, des physiciens [FMD97, FMD98, KEM⁺01] ont introduit de nouvelles conditions aux limites appelées conditions aux limites dynamiques.

Pour cela, ils décomposent l'énergie libre $\mathcal{F}$ associée au modèle de Cahn-Hilliard en une énergie libre volumique (qui est égale à l'énergie libre du modèle de Cahn-Hilliard associé à des conditions aux limites de Neumann définie par (2)) et une énergie libre surfacique $\mathcal{F}_s$:

$$\mathcal{F}(c) = \mathcal{F}_b(c) + \mathcal{F}_s(c)$$

$$\text{avec } \mathcal{F}_b(c) = \int_{\Omega} \left(\frac{3}{4} \varepsilon \sigma_b |\nabla c|^2 + \frac{12}{\varepsilon} \sigma_b f_b(c) \right) \text{ et } \mathcal{F}_s(c) = \int_{\Gamma} \left(\frac{3}{16} \varepsilon^2 \sigma_b \sigma_s |\nabla_{\Gamma} c_{|\Gamma}|^2 + 6 \sigma_b f_s(c_{|\Gamma}) \right). \quad (6)$$

Nous voyons alors que la définition de l'énergie libre implique que nous allons travailler dans ce chapitre dans un espace de fonctions particulier :

$$H_{\Gamma}^1(\Omega) = \{c \in H^1(\Omega) \text{ tel que } c_{|\Gamma} \in H^1(\Gamma)\}.$$

La condition aux limites dynamique (1d) est alors obtenue de sorte que le système tende à minimiser son énergie totale.

Le but de ce chapitre est de réaliser l'analyse numérique de ce modèle en utilisant le schéma VF4 introduit dans les chapitres précédents. Bien que d'un point de vue théorique, l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (1) soit désormais assez bien comprise (voir par exemple [RZ03, WZ04, MZ05, CFP06, PRZ06]), d'un point de vue numérique il existe beaucoup moins de résultats. Des méthodes de type différences finis sur grille cartésienne ont été utilisées dans [FMD97, FMD98, KEM⁺01] mais sans preuve de convergence. Dans [CPP10] les auteurs démontrent des résultats de convergence et d'estimations d'erreur pour le schéma semi-discrétisé en espace en utilisant une méthode de type éléments finis et donc la discrétisation en temps n'est pas prise en compte. De plus, dans cette étude, les auteurs imposent des conditions aux limites périodiques dans la direction latérale et donc la géométrie potentiellement courbe du domaine n'est pas considérée.

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre II le schéma VF4 s'adapte facilement à la géométrie courbe du domaine et permet de coupler naturellement l'équation dans Ω avec la condition aux limites sur Γ par un terme de flux. Pour ces raisons, nous avons choisi d'étudier le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques en utilisant une discrétisation de type VF4 en espace.

En utilisant les pré-requis introduits dans les Chapitres I et II nous sommes maintenant en mesure de réaliser l'analyse mathématique du schéma VF4 pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (1). Pour cela nous commençons par donner l'approximation VF4 de cette équation ainsi que les estimations d'énergies associées. Notons que nous décrivons deux discrétisations possibles des termes non-linéaires f_b et f_s (appelées implicite et semi-implicite) dont une inconditionnellement stable. Avec chacune de ces deux discrétisations, nous obtenons la décroissance de l'énergie au niveau discret (pour un pas de temps suffisamment petit lorsque nous utilisons une discrétisation implicite, voir Proposition III.9 et pour tout pas de temps pour la discrétisation semi-implicite, voir Proposition III.10), ce qui permet de démontrer :

- l'existence d'au moins une solution au problème discret (voir Théorème III.12) dont la démonstration fait l'objet de la Section III.4;
- des bornes sur les solutions discrètes (voir Proposition III.26) et notamment une borne $L^{\infty}(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour le paramètre d'ordre, une borne $L^{\infty}(0, T, H^1(\Gamma))$ -discrète pour sa trace et une borne $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour le potentiel chimique;
- la convergence des solutions discrètes vers une solution faible du problème continu (voir Théorème III.18) ce qui permet d'ailleurs par la même occasion d'obtenir l'existence de cette solution faible.

Ce dernier théorème (cf Théorème III.18) est le résultat majeur de ce chapitre, nous en énonçons le résultat :

Théorème 2 (Théorème de convergence des solutions approchées vers une solution faible)

Soit $c^0 \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$ et $\left((c_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)}, (\mu_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations obtenues sur une famille de mailles et de pas de temps telle que le pas de temps et le pas d'espace, $\Delta t^{(m)}$ (avec $\Delta t^{(m)} < \Delta t_0$ pour une discrétisation implicite des termes non-linéaires) et $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ respectivement, tendent vers 0. Alors, il existe une solution faible (c, μ) du problème (1) pour la donnée initiale c^0 telle que, à sous-suite près, les convergences suivantes sont vérifiées pour tout $q \geq 1$:

$$(c_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} \rightarrow c \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)), \quad (c_{\partial \Omega}^{\Delta t})^{(m)} \rightarrow c_{|\Gamma} \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Gamma)),$$

$$\text{et } (\mu_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} \rightharpoonup \mu \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)) \text{ faiblement.}$$

La démonstration de ce résultat présente plusieurs difficultés. La première difficulté vient du fait que le domaine Ω n'est plus polygonal. En effet, la majorité des schémas volumes finis existant à ce jour sont réalisés sur un domaine Ω polygonal. Ainsi, tous les résultats nécessaires à la démonstration de ce théorème (lorsqu'ils sont déjà connus) sont donnés sur un domaine polygonal. Il faut donc dans un premier temps vérifier que ces résultats s'adaptent à la géométrie courbe du domaine. Bien que ce soit le cas de beaucoup d'entre eux ce n'est pas le cas du lemme suivant :

Lemme 3

Il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de la régularité du maillage telle que :

- *pour tout segment $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ et pour tout polygone $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ de mesure non nulle,*
- *pour tout pseudo-triangle $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ possédant un côté courbe $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ (vérifiant une propriété de régularité que nous détaillerons plus loin),*

et pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$|u_{\mathcal{P}} - u_{\sigma}|^2 \leq C_{27} \frac{(m_{\sigma} + \text{diam}(\mathcal{Q}))^2}{m_{\mathcal{P}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla u(z)|^2 dz,$$

où $u_{\mathcal{P}}$ désigne la moyenne de u sur $\mathcal{P}$, u_{σ} la moyenne de u sur σ et :

- *$\mathcal{Q} = \widehat{\mathcal{P}_{\sigma}}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{P} \cup \sigma$ dans le cas où σ est un segment;*
- *$\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ dans le cas où $\sigma \subset \partial\mathcal{P}$ est l'arête courbe du pseudo-triangle $\mathcal{P}$ (comme décrit sur la Figure 5).*

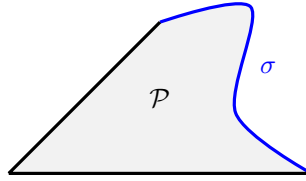


Figure 5: Le triangle à bord courbe

La démonstration de ce lemme est classique dans le cas où σ est un segment (premier cas) mais est plus compliquée dans le second cas. Dans le premier cas la preuve peut par exemple se trouver dans [EGH00]. Dans le second cas, la démonstration, plus complexe, est donnée dans la Section III.6 et fait l'objet d'un article actuellement en cours de rédaction en collaboration avec P. Bousquet et F. Boyer [BBN14].

La seconde difficulté provient de la condition aux limites dynamique. En effet, en plus des difficultés liées à la nature de l'équation de Cahn-Hilliard (qui est rappelons-le une équation parabolique non-linéaire du 4^{ème} ordre) et de celles déjà introduites dans le Chapitre II dues à la prise en compte de l'opérateur de Laplace-Beltrami et au couplage entre une équation 2D et une équation 1D, la condition aux limites dynamique est elle-même non-linéaire. Remarquons que dans [FMD97] lorsque les auteurs introduisent cette condition aux limites, le potentiel de Cahn-Hilliard surfacique f_s est quadratique. Cependant, s'intéresser à un potentiel surfacique f_s non-quadratique (et donc imposer une condition aux limites non-linéaire) permet d'une part de considérer des problèmes plus généraux mais également de prendre un compte le potentiel qui apparaît lorsque nous nous intéressons à la dynamique d'angle de contact. Ce potentiel présente d'autant plus d'importance que c'est le potentiel utilisé dans [YZF10, Don12] lors du couplage des équations de Navier-Stokes avec le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques qui est un sujet de recherche important (voir le Chapitre VII).

Ainsi, pour passer à la limite dans le schéma nous allons avoir besoin de compacité forte dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ (du fait du potentiel volumique f_b) mais également dans $L^2(0, T, L^2(\Gamma))$. Nous allons donc devoir utiliser le théorème de Kolmogorov et donc utiliser des estimations de translations en espace et en temps.

Nous allons construire un opérateur de prolongement en espace original qui utilise la trace discrète de la solution. Cet opérateur permet alors d'obtenir des estimations en espace et en temps dans Ω et sur Γ simultanément. A partir de là nous pouvons appliquer le théorème de Kolmogorov sur $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ pour obtenir la compacité forte. Pour finir, la nature particulière du prolongement que nous avons construit permet d'obtenir l'existence d'un certain $c \in L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ tel que $\text{Tr } c \in L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$ qui satisfait les convergences fortes suivantes (à sous-suite près) :

$$(c_T^{\Delta t})^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} c \text{ dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)) \quad \text{et} \quad (c_{\partial\Omega}^{\Delta t})^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \text{Tr } c \text{ dans } L^2(0, T, L^2(\Gamma)).$$

A partir de là nous pouvons passer à la limite dans le schéma et obtenir le résultat de convergence annoncé.

Pour conclure ce chapitre nous présentons plusieurs résultats numériques. Nous commençons avec des résultats d'estimations d'erreur numérique qui mettent en évidence :

- La convergence d'ordre 1 en temps attendue;
- Une convergence d'ordre 2 en espace pour les normes L^2 -discrètes à la fois dans Ω et sur Γ . D'un point de vue théorique, pour le problème de Laplace, nous savons que le schéma VF4 converge à l'ordre 1 en norme L^2 . Cependant, un phénomène de super-convergence, qui reste à ce jour un problème ouvert, s'observe dans ce cas là. Il n'est donc pas étonnant de l'observer également pour le problème qui nous intéresse.
- Une convergence d'ordre 1 en semi-norme H^1 -discrète ce qui est ce à quoi nous nous attendions au regard des propriétés du schéma VF4 pour le problème de Laplace.
- Un phénomène de super-convergence d'ordre 2 en norme H^1 -discrète sur Γ que nous expliquons par la construction particulière (réalisée avec le logiciel Gmsh) des volumes de contrôle du bord.

Dans un second temps nous proposons plusieurs résultats plus qualitatifs qui permettent d'observer l'influence des différents paramètres intervenant dans la condition aux limites dynamique sur l'évolution de la solution.

Les principaux résultats de ce chapitre ont été annoncés dans des actes de conférences soumis à comité de lecture [Nab14c, Nab14b] et un article détaillant ces résultats est actuellement en préparation [Nab14a].

2. Etude de la stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes

Cette partie est consacrée à l'étude du problème de Stokes incompressible 2D suivant : Trouver le champ de vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad m(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} p = 0.$$

où Ω est un ouvert polygonal borné connexe de $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^2$.

L'approximation volumes finis du problème de Stokes fait l'objet de nombreux travaux et peut être divisé en deux classes de méthodes : colocalisées (toutes les inconnues sont approchées aux mêmes points) et décalées (dans le cas contraire).

Notons que pour l'approximation du problème de Stokes nous ne pouvons pas utiliser le schéma VF4 car l'opérateur de divergence associé à ce schéma n'est pas consistant et le schéma ne converge pas. Nous nous intéressons donc ici à l'approximation de ce problème par la méthode Discrete Duality Finite Volume (DDFV) [Del07, Kre11] qui est une méthode décalée car l'approximation du champ de vitesse et celle du champ de pression sont localisées sur des maillages différents. Cette méthode de volumes finis a notamment pour avantages de pouvoir s'adapter aisément à des maillages quelconques ou à des écoulement bi-fluides (avec une viscosité non-constante), tout en conservant les propriétés des opérateurs différentiels mis en jeu.

Rappelons que le caractère bien posé de ce problème vient du fait que l'inégalité suivante appelée inégalité Inf-Sup (ou LBB) est vérifiée :

$$\inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \left(\sup_{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1} \|p\|_{L^2}} \right) > 0, \quad (7)$$

où $b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} p(\operatorname{div} \mathbf{v})$ et $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : m(p) = 0\}$.

La méthode DDFV pour le problème de Stokes a été introduite dans [Del07] mais la question de la stabilité Inf-Sup uniforme n'avait, à ce jour, pas été traitée. En l'absence d'une preuve de stabilité Inf-Sup, dans [Kre11] l'auteur propose d'ajouter un terme de stabilisation dans l'équation de conservation de la masse. Cependant, d'un point de vue numérique il a été observé que ce terme de stabilisation ne semblait pas nécessaire. C'est la raison pour laquelle nous avons choisi de réaliser dans cette partie l'étude théorique et numérique de la stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes. De plus, notons que si nous montrons la stabilité Inf-Sup de ce schéma, alors l'analyse d'erreur présentée dans [Kre11] pourra directement être appliquée au schéma sans terme de stabilisation.

Le Chapitre IV a pour but de poser le cadre DDFV associé à ce problème et de présenter une méthode numérique (basée sur la recherche de valeurs propres d'une matrice appropriée) permettant de calculer la constante Inf-Sup discrète pour un maillage donné. Le Chapitre V est alors consacré à l'étude théorique et numérique de la stabilité Inf-Sup pour différentes familles de maillages.

Chapitre IV : Méthode numérique pour le calcul de la constante Inf-Sup discrète

Le but de ce chapitre est de décrire une méthode numérique permettant de calculer, pour un maillage donné, la constante Inf-Sup discrète du schéma DDFV.

Nous commençons donc par rappeler le cadre général de la méthode DDFV (décrit par exemple dans [ABH07]). Un maillage DDFV $\mathcal{T}$ est constitué d'un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ et d'un maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ (voir Figure 6).

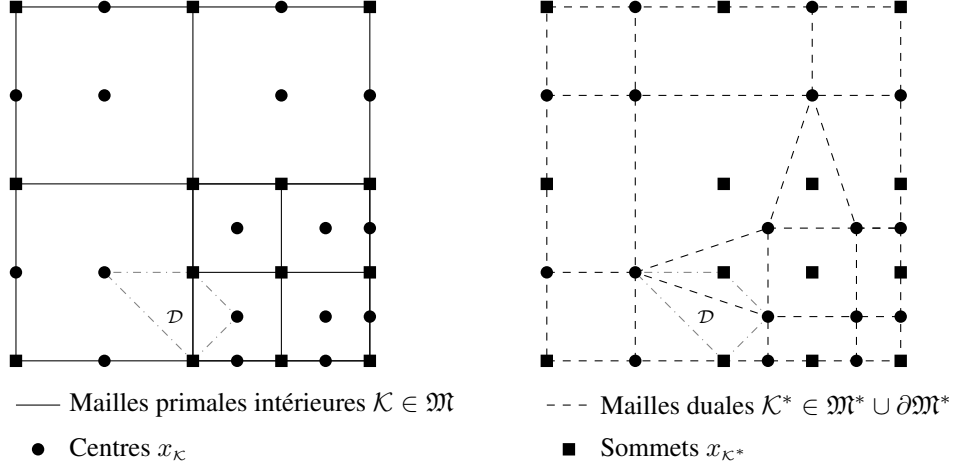


Figure 6: (Gauche) Le maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$; (Droite) Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$.

Le maillage primal intérieur $\mathfrak{M}$ est essentiellement le même que le maillage VF4 sur domaine polygonal construit dans le Chapitre I à la différence que les centres $x_{\mathcal{K}}$ des volumes de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ ne respectent plus nécessairement la condition d'orthogonalité imposée par le schéma VF4. Le maillage primal extérieur $\partial\mathfrak{M}$ est alors l'ensemble des arêtes du maillage $\mathfrak{M}$ incluses dans $\partial\Omega$.

A partir du maillage primal $\mathfrak{M}$ nous définissons le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ de sorte que les centres du maillage dual soient en fait les sommets du maillage primal. Pour cela, pour chaque sommet $x_{\mathcal{K}^*}$ du maillage primal nous relierons entre eux tous les centres des volumes de contrôle voisins (en parcourant les volumes de contrôle dans le sens horaire). Le polygone $\mathcal{K}^*$ ainsi construit constitue alors un volume de contrôle dual dont le centre est en fait le sommet $x_{\mathcal{K}^*}$.

L'approximation DDFV du problème de Stokes que nous considérons ici associe à chaque maille primaire $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $\mathbf{u}_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^2$ et à chaque maille duale $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ une inconnue $\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \in \mathbb{R}^2$ pour la vitesse. Les inconnues en pression sont alors localisées sur un troisième maillage, appelé maillage diamant, noté $\mathfrak{D}$ et défini de la manière suivante. Pour toute arête $\sigma = [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$ du maillage primal séparant les volumes de contrôle $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, nous définissons la maille diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ comme le quadrangle dont les diagonales sont $\sigma^* = [x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}]$ et $\sigma = [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$ comme décrit sur la Figure 6.

Il y a donc une bijection entre les arêtes du maillage primal et les mailles diamants.

L'approximation DDFV du problème de Stokes associe à chaque maille diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ une inconnue $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}$ pour la pression.

Ces différents maillages nous permettent de définir de façon consistante les opérateurs gradients et divergences discrets suivants (voir Section IV.1.3)

$$\begin{aligned}
 \nabla^{\mathfrak{D}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\
 \operatorname{div}^{\mathfrak{D}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \\
 \operatorname{div}^{\mathcal{T}} : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} &\rightarrow \mathbb{E}_0, \\
 \nabla^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} &\rightarrow \mathbb{E}_0,
 \end{aligned}$$

où l'ensemble $\mathbb{E}_0$ est le sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ qui permet de prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet,

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}^*} = 0 \right\}.$$

Nous pouvons maintenant définir la constante Inf-Sup discrète associée à un maillage $\mathcal{T}$ de la manière suivante :

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}} \left(\sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{(\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2} \|p_{\mathfrak{D}} - m(p_{\mathfrak{D}})\|_{\mathfrak{D},2}} \right). \quad (8)$$

Ainsi, pour un maillage donné $\mathcal{T}$ le schéma DDFV associé au problème de Stokes est bien posé si et seulement si $\beta_{\mathcal{T}} > 0$. De plus, pour une famille de maillage dont le pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0, le schéma est stable si et seulement si

$$\liminf_{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \beta_{\mathcal{T}} > 0.$$

En réécrivant la constante Inf-Sup discrète (8) sous forme matricielle, nous montrons alors que $\beta_{\mathcal{T}}$ est la racine carrée de la seconde plus petite valeur propre d'une matrice appropriée. Plus précisément, en notant respectivement $M_{\mathfrak{D}}$, $B_{\mathfrak{D},\mathcal{T}}$ et $R_{\mathcal{T}}$ les matrices de masse en pression, de divergence et de rigidité du système; nous avons le résultat suivant :

Lemme 4 (Relation avec le complément de Schur)

La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}}$ satisfait $\beta_{\mathcal{T}}^2 = \lambda_2(S_{\mathfrak{D}})$, où $S_{\mathfrak{D}}$ est la matrice symétrique définie par :

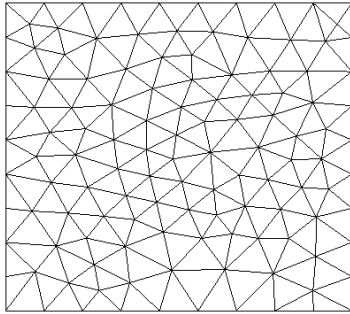
$$S_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{-\frac{1}{2}} B_{\mathfrak{D},\mathcal{T}} R_{\mathcal{T}}^{-1} B_{\mathfrak{D},\mathcal{T}}^T M_{\mathfrak{D}}^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}}(\mathbb{R}).$$

Dans le Chapitre V, nous utilisons alors une méthode d'itération de sous-espaces avec projection de Rayleigh-Ritz décrite dans la Section IV.3.2 pour calculer les valeurs propres de la matrice $S_{\mathfrak{D}}$.

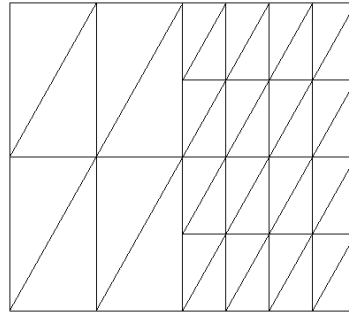
Chapitre V : Etude de la stabilité Inf-Sup pour le problème de Stokes

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un point de vue théorique et numérique de la propriété de stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes.

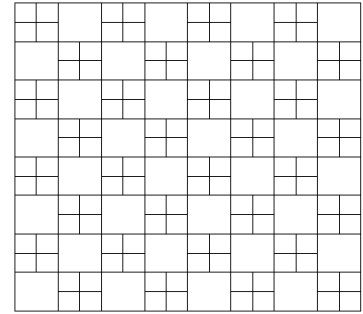
Nous commençons notre analyse par une première série de maillages (cf Figure 7) pour lesquels nous sommes en mesure de démontrer qu'ils vérifient la propriété de stabilité Inf-Sup, ce que nous observons également numériquement (voir Figure 8).



(a) Maillage triangles conformes



(b) Maillage triangles non-conformes



(c) Maillage en damier

Figure 7: Série de maillages Inf-Sup stables

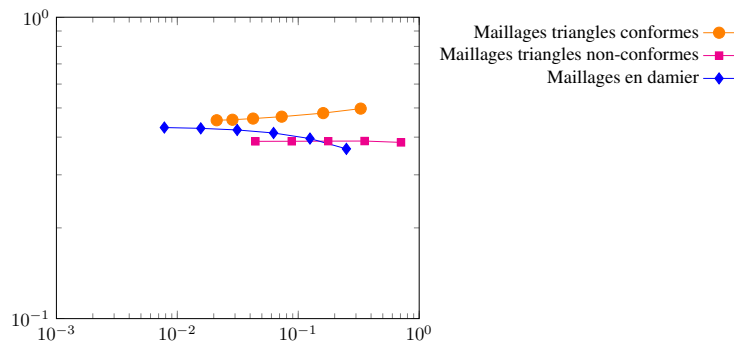


Figure 8: Etude de la stabilité pour une première série de maillages; $\beta_{\mathcal{T}}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

La démonstration de cette propriété de stabilité Inf-Sup repose sur le résultat suivant :

Théorème 5 (Résultat général de stabilité Inf-Sup)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV sur un domaine connexe polygonal Ω . Supposons qu'il existe $\alpha_{\mathcal{T}} \geq 1$ tel que :

$$|p_{\mathcal{D}}|_h \leq \alpha_{\mathcal{T}} \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2}, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}. \quad (9)$$

Alors il existe une constante $C > 0$, dépendant seulement de la régularité du maillage, telle que :

$$\frac{C}{\alpha_{\mathcal{T}}} \|p_{\mathcal{D}} - m(p_{\mathcal{D}})\|_{\mathcal{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})}{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{D},2}}, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}, \quad (10)$$

c'est à dire $\beta_{\mathcal{T}} \geq C/\alpha_{\mathcal{T}}$.

Les normes discrètes utilisées dans ce théorème seront définies dans la Section IV.1.4, en particulier la semi-norme $|\cdot|_h$ sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est définie par

$$|p_{\mathcal{D}}|_h^2 = \sum_{\substack{\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathcal{D} \\ \mathcal{D}|\mathcal{D}'}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2) (p_{\mathcal{D}'} - p_{\mathcal{D}})^2, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}},$$

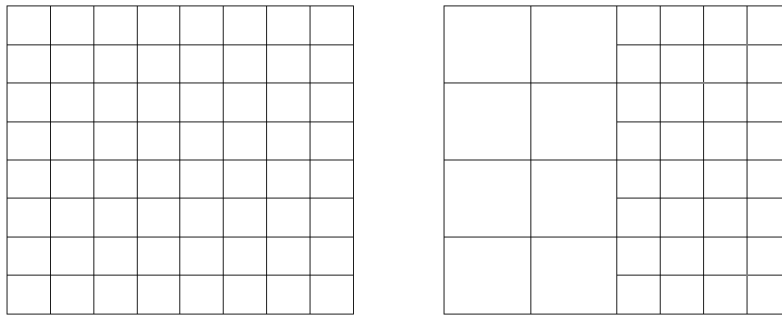
où la notation $\mathcal{D}|\mathcal{D}'$ signifie que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un côté commun (nous dirons que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont voisins) et $h_{\mathcal{D}}$ représente le diamètre de la maille diamant $\mathcal{D}$.

La stratégie présentée dans la Section V.1 consiste alors à vérifier si, pour une famille donnée de maillage, l'inégalité (9) est vérifiée pour un certain $\alpha_{\mathcal{T}}$ uniformément borné lorsque le pas du maillage tend vers 0. Cette estimation signifie en fait que nous allons devoir estimer la différence entre deux pressions sur des mailles diamants voisines $p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}$ en terme du gradient de pression sur des mailles primales et duales. Rappelons la valeur du gradient de pression (défini dans la Section IV.1.3) pour une maille $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ par exemple,

$$m_{\mathcal{K}} \nabla^{\mathcal{K}} p_{\mathcal{D}} = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} p_{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}.$$

Ainsi, la valeur du gradient de pression sur une maille donnée dépend de la valeur des pressions sur toutes les mailles diamants qui lui sont associées. C'est la raison pour laquelle il n'est pas forcément facile d'obtenir une estimation de la différence de deux pressions sur des mailles diamants voisines. Par conséquent, l'étude de la validité de l'hypothèse (10) dépend fortement de la géométrie des mailles que nous considérons et il faudra donc vérifier cette hypothèse pour chaque famille de maillages décrits sur la Figure 7.

Dans un second temps, dans la Section V.2 nous nous intéressons à une seconde série de maillage, de type cartésien (voir Figure 9), pour lesquels nous montrons que la propriété de stabilité Inf-Sup n'est pas vérifiée.



(a) Maillage conforme uniforme

(b) Maillage non-conforme

Figure 9: Série de maillages Inf-Sup instables

Plus précisément, dans le cas du maillage cartésien conforme uniforme nous montrons que $\beta_{\mathcal{T}} = 0$ (Théorème V.8) et pour le cas non-conforme nous prouvons que $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ mais que $\beta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0$ lorsque le pas du maillage tend vers 0 (Théorème V.9), comme nous l'observons également numériquement sur la Figure 10a (droite en orange).

Nous démontrons ainsi l'existence d'au moins un mode de pression instable (décrit sur la Figure 10b). Cependant, nous établissons qu'il existe en fait un unique mode instable (Théorème V.11) ce qui signifie que la propriété de stabilité

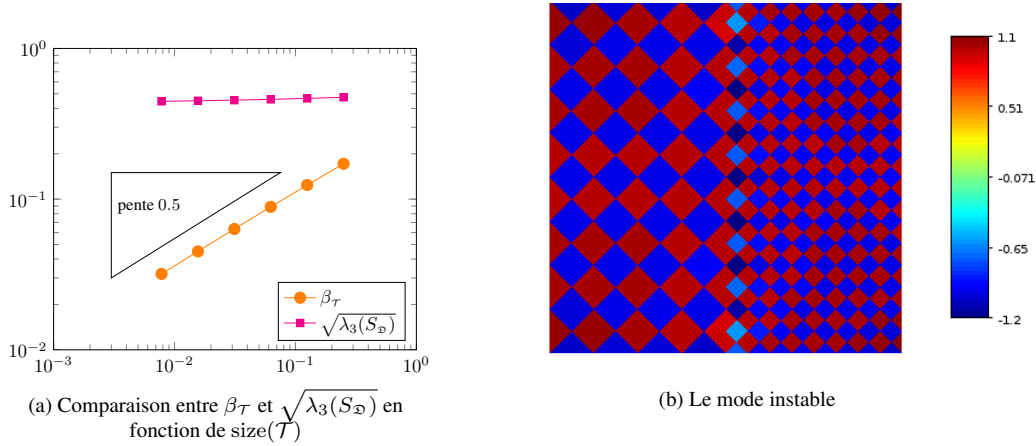


Figure 10: Instabilité Inf-Sup pour le maillage cartésien non-conforme

Inf-Sup est satisfaite si nous imposons aux modes de pression d'être orthogonaux au mode instable. C'est cette propriété que nous appelons la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1.

D'un point de vue numérique, nous traçons la racine carrée de la valeur propre suivante $\lambda_3(S_D)$ du complément de Schur du système défini dans le Lemme 4. Nous observons alors (voir Figure 10a, droite en violet) que $\sqrt{\lambda_3(S_D)}$ semble minorée lorsque le pas du maillage tend vers 0 ce qui confirme la présence d'un unique mode instable.

Cette étude semble donc expliquer pourquoi même dans le cas d'un maillage Inf-Sup instable, les propriétés de convergence de la méthode DDFV sont conservées même sans terme de stabilisation comme cela a été observé dans [Kre11].

Notons que pour démontrer la propriété de stabilité Inf-Sup inconditionnelle tout comme pour démontrer la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1, l'idée sous-jacente de notre analyse est de construire une sorte d'approximation de l'opérateur de Fortin (voir Propositions V.1 et V.12). Une fois cet opérateur construit, la démonstration des théorèmes de stabilité Inf-Sup correspondants (cf Théorème V.2 et Théorème V.11), se divise alors en deux cas de la même manière que pour la preuve classique de la stabilité Inf-Sup de l'élément de Taylor-Hood.

Pour conclure ce chapitre, nous présentons divers résultats numériques permettant d'observer que la propriété de stabilité Inf-Sup est vérifiée pour plusieurs familles de maillages très généraux bien que nous ne soyons pas en mesure, pour le moment, de le démontrer d'un point de vue théorique.

Pour conclure, cette étude montre que le schéma DDFV semble être très robuste vis à vis de la propriété de stabilité Inf-Sup même en ce qui concerne des maillages non-conformes.

Le travail présenté dans cette partie a été accepté pour publication dans *Mathematics of Computation* et a été réalisé en collaboration avec F. Boyer et S. Krell [BKN14a].

3. Discrétisation DDFV d'un modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes

Le couplage des équations de Cahn-Hilliard avec les équations de Navier-Stokes est un sujet important de recherche actuel. Ce modèle permet de décrire l'écoulement d'un mélange de deux fluides incompressibles non-miscibles. Les équations de Navier-Stokes permettent alors de prendre en compte l'hydrodynamique de l'écoulement.

Ce modèle de champ de phases permet de capturer l'interface en imposant la valeur de l'épaisseur d'interface à une valeur $\varepsilon > 0$ faible mais plus grande que sa valeur réelle.

Si nous considérons deux fluides de densité ρ_1 et ρ_2 et de viscosité η_1 et η_2 , ce couplage est réalisé :

- en ajoutant un terme de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla c$ dans l'équation d'évolution du paramètre d'ordre (équation de Cahn-Hilliard);
- en ajoutant un terme de force capillaire $\mu \nabla c$ dans le bilan de quantité de mouvement (équations de Navier-Stokes);
- en définissant la densité ρ et la viscosité η comme des fonctions régulières du paramètre d'ordre (telles que $\rho(1) = \rho_1$, $\eta(1) = \eta_1$, $\rho(0) = \rho_2$ et $\eta(0) = \eta_2$).

Alors, le problème s'écrit : Trouver la concentration de l'un des deux constituants $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de vitesse $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \Gamma_b \Delta \mu, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (11a) \\ \mu = -\frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \Delta c + \frac{12}{\varepsilon} \sigma_b f'_b(c), & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (11b) \\ \partial_t(\rho(c)\mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho(c)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \operatorname{div}(2\eta(c)D\mathbf{u}) + \nabla p + \mathbb{T} = \mu \nabla c + \rho(c)\mathbf{g}, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (11c) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (11d) \\ \mathbf{u} = 0; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \quad (11e) \\ \nabla \mu \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \quad (11f) \end{array} \right.$$

où le vecteur $\mathbf{g}$ représente la gravité et $D\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$.

Notons que le choix du terme $\mathbb{T}$ est sujet à débat (voir par exemple [Boy02, BLM⁺10, AGG12] et les références qui s'y trouvent pour des choix différents). En effet, lors du couplage entre les équations de Cahn-Hilliard et les équations de Navier-Stokes, la vitesse $\mathbf{u}$ représente la vitesse moyenne des deux fluides mis en jeu et donc lorsque ρ est une fonction dépendante du paramètre d'ordre, l'équation de conservation de la masse $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$ n'est plus vérifiée. Ainsi, selon les auteurs, différentes solutions sont proposées pour obtenir le bilan local d'énergie cinétique.

Notons que pour que le système (11) soit bien posé, il faut ajouter une condition aux limites sur le paramètre d'ordre c . Habituellement, ces équations sont étudiées en choisissant une condition aux limites de Neumann homogène [Jac99, Boy02, LS03, KSW08, AF08, Abe09, BLM⁺10, AGG12].

Cependant, là encore cette condition aux limites impose un angle de contact entre l'interface et la paroi égal à $\frac{\pi}{2}$. Cette condition est trop restrictive car lorsqu'un premier fluide déplace un second fluide, l'énergie de relaxation de la paroi produit un angle de contact dynamique qui dévie de l'angle de contact statique $\frac{\pi}{2}$. C'est la raison pour laquelle dans [Jac00] l'auteur introduit l'énergie libre de surface suivante :

$$\mathcal{F}_s(c) = 6\sigma_b \int_{\Gamma} f_s(c_{|\Gamma}) \quad \text{avec } f_s(c_{|\Gamma}) = \cos(\theta_s) c^2 \left(\frac{1}{3} c - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{12\sigma_b} + \frac{\cos(\theta_s)}{12},$$

où σ_1 représente la tension de surface entre le fluide 1 (l'inconnue du modèle de Cahn-Hilliard de concentration c) et la paroi, σ_2 la tension de surface entre le fluide 2 (celui de concentration $1 - c$) et la paroi et θ_s est l'angle de contact statique entre l'interface et la paroi (mesuré du côté du fluide 1).

Alors, l'équation de Young est vérifiée à l'angle de contact θ_s avec la paroi :

$$\sigma_b \cos(\theta_s) = \sigma_2 - \sigma_1,$$

et la fonction f_s ainsi construite satisfait :

$$6\sigma_b f_s(1) = \sigma_1, \quad 6\sigma_b f_s(0) = \sigma_2, \quad 6\sigma_b f_s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad f'_s(0) = f'_s(1) = 0.$$

La condition aux limites correspondante s'écrit ainsi :

$$\frac{3}{2} \frac{\varepsilon \sigma_b}{\Gamma_s} \partial_t c_{|\Gamma} = -6\sigma_b f'_s(c_{|\Gamma}) - \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \partial_n c.$$

Notons que cette condition aux limites est en fait la condition aux limites dynamique introduite dans le Chapitre III (hormis le fait que les coefficients intervenant devant le terme $\partial_t c_{|\Gamma}$ sont différents) pour un potentiel de surface f_s particulier et en imposant qu'il n'y ait pas de diffusion sur la paroi ($\sigma_s = 0$). L'étude de ces conditions aux limites fait l'objet de travaux récents [QWS06, WQS08, YZF10, YF11, CQA11, Don12].

Dans ces travaux nous nous plaçons dans un cas simplifié : nous supposons la viscosité constante et nous étudions le couplage avec les équations de Stokes en négligeant le terme d'inertie et en faisant l'hypothèse de l'approximation Boussinesq. Ainsi, l'équation (11c) se réécrit :

$$\partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\rho^*} \mu \nabla c + \frac{\rho(c)}{\rho^*} \mathbf{g}, \quad \text{avec } \frac{1}{\mathcal{R}_e} = \frac{\eta^*}{\rho^*}, \quad (12)$$

où nous avons noté ρ^* (respectivement η^*) la densité (respectivement la viscosité) du fluide le plus lourd.

Il s'agit ici de se concentrer sur les difficultés liées au couplage et à la condition aux limites dynamique. L'étude du système couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes complet sera bien sûr la suite logique de ces travaux.

Rappelons que pour étudier le couplage entre les équations de Stokes et celles de Cahn-Hilliard nous ne pourrions pas utiliser le schéma VF4 décrit dans la Partie 1 (car il n'est pas adapté à l'approximation du problème de Stokes). Dans la Partie 2 nous avons présenté un schéma DDFV efficace pour le problème de Stokes n'imposant pas de condition d'orthogonalité et permettant notamment l'utilisation de maillages non-conformes. Nous avons donc choisi d'utiliser le schéma DDFV défini dans la Partie 2 pour l'analyse du couplage entre les équations de Cahn-Hilliard et les équations de Stokes. Dans un premier temps nous allons donc, dans le Chapitre VI, étudier l'approximation DDFV associée aux équations de Cahn-Hilliard puis dans le Chapitre VII nous présenterons un schéma DDFV original pour le couplage Cahn-Hilliard/Stokes qui permet de prendre en compte la condition aux limites dynamique et non-linéaire.

Dans cette partie, le domaine Ω sera un ouvert borné, connexe, régulier de $\mathbb{R}^2$ (pas forcément polygonal).

Chapitre VI : Discrétisation DDFV de l'équation de Cahn-Hilliard

Ce chapitre est dédié à l'établissement d'un schéma DDFV pour l'équation de Cahn-Hilliard associée à deux types de conditions aux limites pour le paramètre d'ordre : la condition aux limites de Neumann étudiée dans le Chapitre I et la condition aux limites dynamique décrite dans le Chapitre III.

Dans un premier temps, nous définissons un maillage DDFV sur un domaine Ω non polygonal. Pour cela, nous utilisons des méthodes similaires à celles décrites dans le Chapitre III pour obtenir un maillage VF4 sur un domaine courbe. Puis, nous définissons des opérateurs gradients et divergence discrets qui sont en dualité.

Le point délicat de ce chapitre réside dans l'établissement du schéma DDFV pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques. Dans ce cas là, les mailles duales du bord jouent un rôle particulier. En effet, lors de la discrétisation de l'équation sur le potentiel chimique elles interviennent comme inconnues duales intérieures mais elles interviennent également en tant qu'inconnues duales du bord dans la prise en compte de la condition aux limites dynamique. Notons que ce sont les seules mailles pour lesquelles ce problème intervient. En effet, les mailles primales du bord n'interviennent pas dans l'équation dans Ω mais seulement dans l'équation sur Γ . Détaillons donc ici la méthode utilisée pour obtenir l'approximation DDFV associée à une maille duale du bord $\mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*$.

- Pour commencer, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, nous intégrons l'équation sur le potentiel chimique sur la maille $\mathcal{K}^*$,

$$\int_{\mathcal{K}^*} \mu(t, x) dx = -\mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} d\sigma(x) \\ - \mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \int_{\sigma \cap \mathcal{K}^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{K}^*} d\sigma(x) + \mathcal{A}_{f_b} \int_{\mathcal{K}^*} f'_b(c(t, x)) dx.$$

- Nous intégrons ensuite la condition aux limites dynamique sur $\sigma_{\Gamma}^* = \partial\mathcal{K}^* \cap \Gamma$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous obtenons :

$$\mathcal{A}_{\partial t} \int_{\sigma_{\Gamma}^*} \partial_t c_{\Gamma}(t, x) d\sigma(x) = \mathcal{A}_{\Delta_{\Gamma}} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \nabla_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, \mathbf{v}^*) n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau} - \mathcal{A}_{f_s} \int_{\sigma_{\Gamma}^*} f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) d\sigma(x) \\ - \mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \int_{\sigma \cap \mathcal{K}^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{K}^*} d\sigma(x).$$

- Nous allons ensuite éliminer le terme de flux qui est encadré en soustrayant les deux équations ci-dessus.
- Ainsi, en intégrant l'équation obtenue pour $t \in [t^n, t^{n+1}]$ nous obtenons finalement :

$$-\mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} d\sigma(x) dt + \mathcal{A}_{f_b} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}^*} f'_b(c(t, x)) dx dt \\ - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}^*} \mu(t, x) dx dt + \mathcal{A}_{\partial t} \int_{\sigma_{\Gamma}^*} (c_{\Gamma}(t^{n+1}, x) - c_{\Gamma}(t^n, x)) d\sigma(x) \\ - \mathcal{A}_{\Delta_{\Gamma}} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, \mathbf{v}^*) n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau} dt + \mathcal{A}_{f_s} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_{\Gamma}^*} f'_s(c_{\Gamma}) d\sigma(x) dt = 0.$$

- Alors, en utilisant les opérateurs discrets définis dans la Section VI.1, l'approximation DDFV de l'équation sur le

potentiel chimique associée à la condition aux limites dynamique pour une maille duale du bord s'écrit :

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{A}_\Delta \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_b} m_{\mathcal{K}^*} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) - m_{\mathcal{K}^*} \mu_{\mathcal{K}^*}^{n+1} + \mathcal{A}_{\partial t} m_{\sigma_{\Gamma}^*} \frac{c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n}{\Delta t} \\
 - \mathcal{A}_{\Delta_{\Gamma}} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \nabla_{\Gamma}^{\mathbf{v}^*} c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_s} m_{\sigma_{\Gamma}^*} d^{f_s}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) = 0.
 \end{aligned}$$

Pour chacune des conditions aux limites étudiées dans ce chapitre, nous donnons également l'égalité d'énergie correspondante qui permet d'aboutir (de la même manière que pour le schéma VF4) à la décroissance de l'énergie au niveau discret. Nous pouvons ainsi démontrer l'existence d'au moins une solution au problème discret ainsi que les bornes sur les solutions discrètes.

Pour conclure ce chapitre nous présentons plusieurs résultats numériques qui permettent de montrer que le schéma DDFV est bien adapté à l'approximation de l'équation de Cahn-Hilliard tout en autorisant la présence de mailles non-conformes.

Chapitre VII : Couplage de l'équation de Cahn-Hilliard avec le problème de Stokes

Nous pouvons maintenant nous intéresser au cas du couplage avec les équations de Stokes. Commençons par remarquer que bien que nous ayons déjà défini le schéma DDFV pour le problème de Stokes (cf Partie 2) et pour les équations de Cahn-Hilliard (cf Chapitre VI) le couplage entre ces deux équations ne sera pas si simple :

- Pour coupler ces deux équations nous avons ajouté un terme de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla c$ dans l'équation d'évolution du paramètre d'ordre (11a). Or les inconnues en vitesse sont localisées aux centres et aux sommets alors que le gradient discret du paramètre d'ordre est constant par diamant. Nous n'allons donc pas pouvoir discrétiser le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla c$ en utilisant une approximation DDFV classique. Cependant, la vitesse est à divergence nulle ce qui implique que $\mathbf{u} \cdot \nabla c = \text{div}(\mathbf{u}c)$. Nous allons donc construire dans la Section VII.1.1 un nouvel opérateur discret $\text{div}_{\pi}^T(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}})$ permettant d'approcher le terme $\text{div}(\mathbf{u}c)$ (dans la même idée que ce que font les auteurs dans [GK14]).
- Lors du couplage nous avons également ajouté un terme de force capillaire $\mu \nabla c$ dans le bilan de quantité de mouvement des équations de Stokes (12). Or, les inconnues sur le potentiel chimique sont également localisées aux centres et aux sommets. Le même problème se pose alors pour discrétiser le terme $\mu \nabla c$. Nous définissons donc dans la Section VII.1.2 un nouvel opérateur discret $\mathcal{G}^T(\mu_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}})$ ayant pour but d'approcher ce terme.

Notons que ces opérateurs sont construits de sorte que l'égalité suivante soit conservée au niveau discret :

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mu \nabla c = \int_{\Omega} \text{div}(\mathbf{u}c) \mu, \quad \forall \mathbf{u} \text{ tel que } \text{div} \mathbf{u} = 0.$$

Nous montrons ensuite dans la Section VII.1.3 que ces nouveaux opérateurs discrets sont, en un certain sens, consistants.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter un schéma découplé pour l'approximation DDFV du couplage entre l'équation de Cahn-Hilliard et le problème de Stokes tel que la dissipation de l'énergie totale au niveau discret soit vérifiée pour un pas de temps suffisamment petit.

Nous concluons ce chapitre par des résultats numériques permettant d'une part d'illustrer le comportement du schéma DDFV vis à vis du système étudié et d'autre part d'observer l'influence de la condition aux limites dynamique sur la dynamique d'angles de contact.

L'une des simulations que nous présentons modélise la chute d'une goutte le long d'un plan incliné (nous donnons ici l'exemple d'une inclinaison $\alpha = 70^\circ$) à laquelle nous demandons de satisfaire un angle de contact θ_s fixé (dans les figures ci-dessous $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$). La configuration initiale du modèle est décrite sur la Figure 11.

Nous observons alors (voir Section VII.5) l'influence des différents paramètres qui interviennent : l'angle d'inclinaison α du plan, l'angle de contact θ_s choisi et le coefficient de relaxation Γ_s .

Dans le cas que nous présentons ici (voir Figures 12 et 13) nous faisons seulement varier le coefficient Γ_s en maintenant fixé les paramètres $\alpha = 70^\circ$ et $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$.

Nous pouvons alors clairement observer l'influence du coefficient de relaxation :

- d'une part sur la vitesse de la goutte : plus le coefficient de relaxation est faible plus la goutte tombe lentement;
- d'autre part sur la vitesse d'établissement de l'angle de contact θ_s choisi : plus le coefficient de relaxation est élevé plus l'angle de contact θ_s entre la paroi solide et l'interface fluide se forme rapidement.

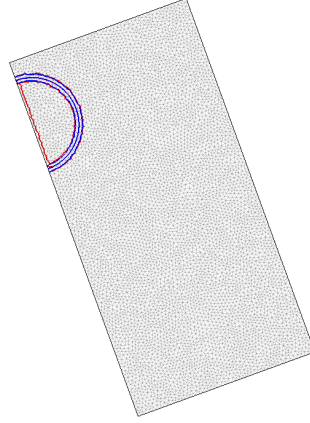


Figure 11: Configuration initiale d'une goutte tombant le long d'un plan incliné de 70°

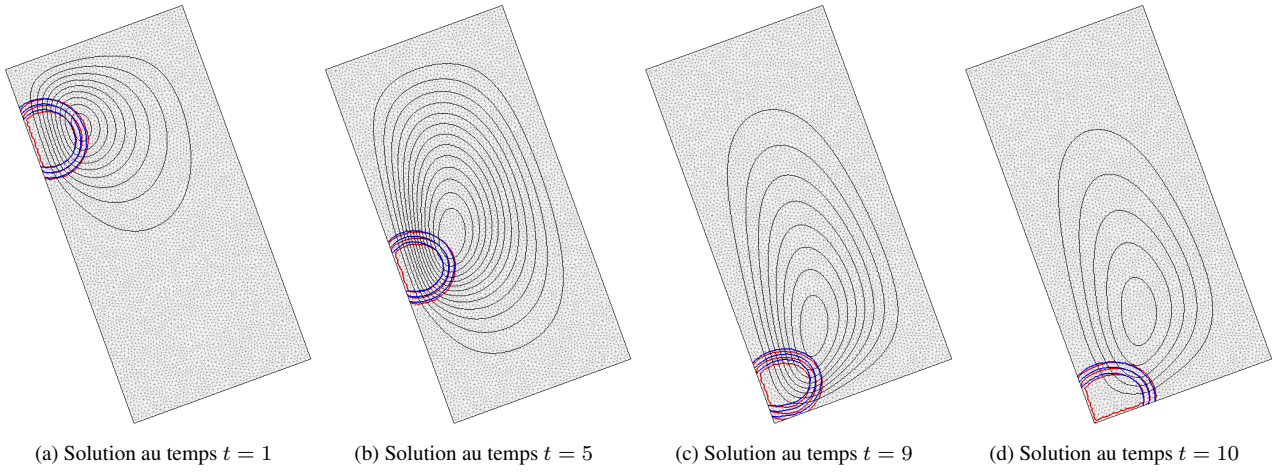


Figure 12: Coefficient de relaxation $\Gamma_s = 20$
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

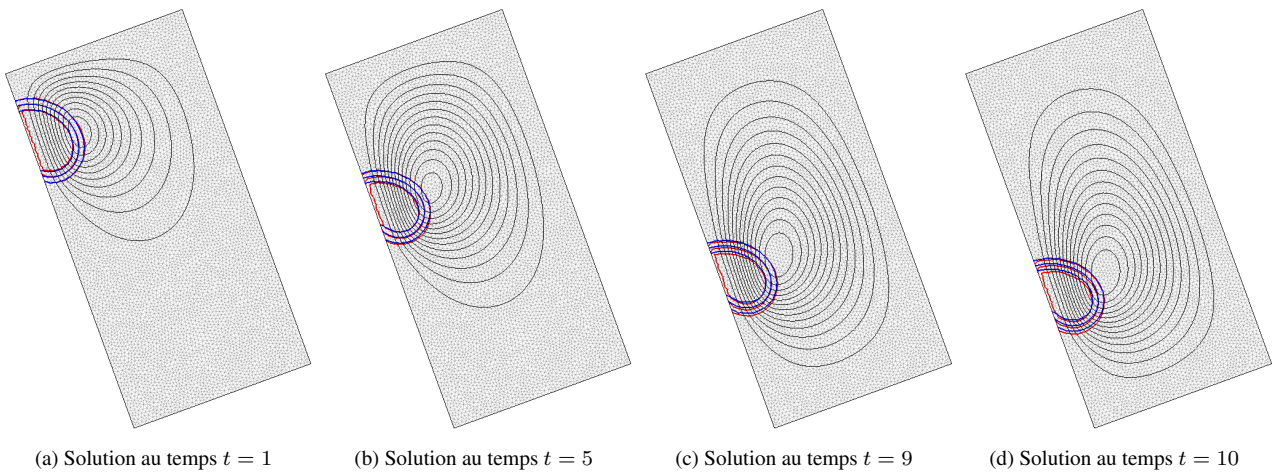


Figure 13: Coefficient de relaxation $\Gamma_s = 0.2$
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

4. Publications

L'ensemble de ces travaux a donné lieu à une publication dans une revue à comité de lecture et trois actes de conférence à comité de lecture. Par ailleurs, trois articles sont en cours de rédaction.

4.1 Article dans une revue à comité de lecture

[BKN14a]

F. Boyer, S. Krell, F. Nabet, *Inf-Sup stability of the Discrete Duality Finite Volume method for the 2D Stokes problem*.

Mathematics of Computation, 2014, à paraître.

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00795362>

Cet article présente l'étude, autant d'un point de vue théorique que numérique, de la propriété de stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes pour différentes familles de maillages. Son contenu est essentiellement celui de la Partie 2.

4.2 Articles en cours de rédaction

[Nab14a]

F. Nabet, *Convergence of a finite-volume scheme for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, 2014.

Cet article reprend essentiellement le contenu du Chapitre III et en particulier la démonstration du théorème de convergence des solutions discrètes vers une solution faible du problème continu présenté dans la Section III.5.

[BBN14]

P. Bousquet, F. Boyer, F. Nabet, *On a functional inequality arising in the analysis of finite volume methods*, 2014.

Cet article reprend le contenu de la Section III.6 dans laquelle nous démontrons une inégalité de type Poincaré entre la moyenne d'une fonction u sur un pseudo-triangle à bord courbe et la moyenne de u sur ce bord courbe.

[BN14]

F. Boyer, F. Nabet, *A DDFV method for a Cahn-Hilliard-Stokes phase field model*, 2014.

Cet article reprend le contenu de la Partie 3 dans laquelle nous proposons un schéma DDFV adapté au couplage entre l'équation de Cahn-Hilliard et le problème de Stokes, en particulier associé à une condition aux limites dynamique sur le paramètre d'ordre.

4.3 Actes de conférences à comité de lecture

[Nab14c]

F. Nabet, *Finite-Volume method for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*, Proceeding SMAI 2013 (Seignosse Le Penon, Landes).

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00872690>

[Nab14b]

F. Nabet, *Finite-Volume analysis for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions*,

Finite Volumes for Complex Applications VII Methods and Theoretical Aspects,

Proceedings of the 7th international symposium of Finite Volumes for Complex Applications (Berlin, Allemagne), 2014 .

<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00974585>

4.4 Acte de conférence

[BKN14b]

F. Boyer, S. Krell, F. Nabet, *Stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes 2D*.

Actes du colloque EDP-Normandie, (Caen) 2013.

Partie 1

Discrétisation Volumes Finis du modèle de Cahn-Hilliard

Chapitre I

L'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann

Ce chapitre est consacré à la présentation d'une approximation de type volumes finis de l'équation de Cahn-Hilliard diphasique avec des conditions aux limites de Neumann et un potentiel polynomial. Ces équations ont largement été étudiées autant d'un point de vue théorique que numérique (voir par exemple [EZ86, Zhe86, Eli89, Dlo94, CM95, Tem97, RH99, NC08, MW09]). L'analyse numérique de ce modèle par des méthodes de type éléments finis ou différences finies a déjà fait l'objet de nombreux travaux (cf [EF87, EFM89, EF89, Eli89, DN91, EL92, Eyr98, CCK00, Fur01a, FP04, FP05, SY10]) mais il n'a, à notre connaissance jamais été étudié par une méthode de type volumes finis. Le but de ce chapitre est d'introduire le schéma VF4 (appelé ainsi car pour le problème de Laplace ce schéma a un stencil de 4 points en 2D sur un maillage triangles), également appelé TPFA (acronyme de "Two Point Flux Approximation"), qui sera par la suite étendu dans le Chapitre III à d'autres types de conditions aux limites.

Nous commençons par rappeler, d'une part le modèle de Cahn-Hilliard auquel nous nous intéressons (Section I.1) et d'autre part (Section I.2) les notations volumes finis usuelles. Dans la Section I.3 nous décrivons le schéma numérique que nous utilisons ainsi que les estimations d'énergie qui en découlent. Nous énonçons ensuite les résultats d'existence de solutions au problème discret (Théorème I.8) et de convergence des solutions discrètes vers une solution faible du problème continu (Théorème I.11). Le résultat principal de ce chapitre est le théorème d'estimation d'erreur pour le schéma complètement discrétisé (Théorème I.16) dont la démonstration fait l'objet de la Section I.5. Enfin, nous détaillons (Section I.6) l'implémentation de ce schéma réalisée avec le logiciel Scilab puis nous présentons dans la Section I.7 plusieurs résultats numériques illustrant les différentes propriétés du système de Cahn-Hilliard.

Notons que ce chapitre a notamment pour but de décrire, dans un cadre volumes finis classique (le domaine Ω est polygonal et nous imposons des conditions aux limites de Neumann), le schéma que nous utiliserons dans le Chapitre III. C'est la raison pour laquelle nous ne démontrerons pas tous les résultats énoncés dans ce chapitre. Cependant, si un résultat n'est pas démontré, sa preuve sera alors détaillée dans le Chapitre III pour le cas plus complexe des conditions aux limites dynamiques. Pour chacun des résultats en question nous préciserons quel est le résultat correspondant qui sera démontré dans le Chapitre III.

Dans ce chapitre, nous nous plaçons sur un domaine Ω ouvert, borné, connexe et polygonal de $\mathbb{R}^2$.

I.1 Le modèle de Cahn-Hilliard

Dans cette section nous rappelons brièvement les principales propriétés (décrites par exemple dans [Lap06, Min10]) du modèle de Cahn-Hilliard.

Ce système modélise un mélange composé de deux phases dont les concentrations c_1 et c_2 varient entre 0 et 1 (valeurs qui représentent les phases pures) et sont reliées par la relation $c_1 + c_2 = 1$.

L'équation de Cahn-Hilliard est un modèle de type interface diffuse, nous imposons donc l'épaisseur entre les deux phases du mélange égale à une valeur $\varepsilon > 0$, faible mais tout de même plus grande que sa valeur réelle.

Ainsi, l'inconnue du modèle est la concentration c de l'une des deux phases qui vaut 1 dans une des phases, 0 dans l'autre et qui varie continûment entre 0 et 1 dans l'interface.

Ce modèle repose sur l'introduction d'une l'énergie libre $\mathcal{F}_b$ dépendant de l'épaisseur de l'interface ε et de la tension de surface entre les deux phases σ_b :

$$\mathcal{F}_b(c) = \frac{3}{4}\varepsilon\sigma_b \int_{\Omega} |\nabla c|^2 + \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b \int_{\Omega} f_b(c). \quad (\text{I.1})$$

La minimisation de cette énergie fait entrer en compétition les deux termes qui la composent :

- Un terme proportionnel à $\int_{\Omega} |\nabla c|^2$ dont la minimisation pénalise les fortes variations de la concentration et donc tend à augmenter l'épaisseur de l'interface.
- Un terme proportionnel à $\int_{\Omega} f_b(c)$ qui modélise la non-miscibilité des phases. En effet, la fonction double puits $f_b(c) = c^2(1-c)^2$ (cf Figure I.1a), appelée potentiel de Cahn-Hilliard, est minimale dans les phases pures, c'est à dire pour $c = 0$ et $c = 1$. Par conséquent, contrairement au terme précédent, ce terme tend à minimiser l'épaisseur de l'interface.

Les coefficients devant ces deux termes sont obtenus en résolvant le problème de minimisation 1D sur un domaine infini. Nous obtenons le profil minimisant (cf Figure I.1b) suivant :

$$c_{eq}(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \frac{2x}{\varepsilon} \right),$$

et nous choisissons d'identifier ε à l'épaisseur de l'interface et l'énergie $\mathcal{F}_b(c_{eq})$ à la tension de surface σ_b .

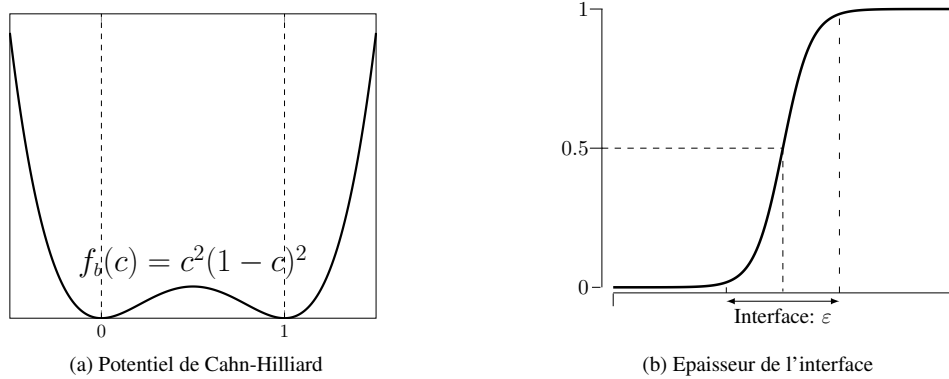


Figure I.1: Structure double puits du potentiel f_b et définition de l'épaisseur de l'interface

L'équation d'évolution associée est le flot de gradient dans H^{-1} sous la contrainte de conservation du volume total au cours du temps : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\int_{\Omega} c(t, x) dx = \int_{\Omega} c(0, x) dx$.

Ainsi, pour un temps final $T > 0$ donné, l'évolution du paramètre d'ordre $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est décrite par l'équation de Cahn-Hilliard,

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu; \\ \mu = -\frac{3}{2}\varepsilon\sigma_b \Delta c + \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b f'_b(c). \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Nous avons introduit une inconnue intermédiaire μ appelée potentiel chimique qui est la dérivée fonctionnelle de l'énergie libre $\mathcal{F}_b$ par rapport au paramètre d'ordre c . Le paramètre $\Gamma_b > 0$ est constant et représente un coefficient de diffusion appelé mobilité.

Nous pouvons dès à présent remarquer que l'équation de Cahn-Hilliard présente plusieurs difficultés : c'est une équation parabolique du 4^{ème} ordre et non-linéaire du fait de la nature du potentiel de Cahn-Hilliard f_b (cf Figure I.1a).

A ce système s'ajoute une condition initiale dans Ω ,

$$c(0, \cdot) = c^0, \quad (\text{I.3})$$

ainsi que deux conditions aux limites. Il n'y a aucun échange de masse à travers la paroi, ainsi dans ces travaux nous imposerons toujours une condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique μ . En ce qui concerne le paramètre d'ordre, dans ce chapitre nous imposerons également une condition de Neumann homogène (voir le Chapitre III pour une analyse de conditions plus générales). Les conditions aux limites associées à l'équation (I.2) s'écrivent donc :

$$\begin{cases} \nabla \mu \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \\ \nabla c \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(I.4a)} \\ \text{(I.4b)} \end{matrix}$$

où $\vec{n}$ est la normale unitaire sortante à Ω .

Les solutions du système de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann satisfont l'égalité d'énergie suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}_b(c) = -\Gamma_b \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2. \quad \text{(I.5)}$$

Pour plus de clarté, nous noterons dans la suite $\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{3}{2}\varepsilon\sigma_b$ le coefficient qui se trouve devant le terme Δc dans l'équation sur le potentiel chimique et $\mathcal{A}_{f_b} = \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b$ celui qui est devant la dérivée du potentiel de Cahn-Hilliard f'_b .

Dans ces travaux, nous nous plaçons dans un cadre général pour lequel le potentiel de Cahn-Hilliard satisfait les hypothèses standard : f_b est une fonction positive de classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ qui vérifie :

- Dissipativité :

$$\liminf_{|c| \rightarrow \infty} f_b''(c) > 0, \quad \text{(I.6)}$$

donc il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 \geq 0$ tels que pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$f_b(c) \geq \alpha_1 c^2 - \alpha_2.$$

- Croissance polynomiale : il existe $C_b > 0$ et un réel $p \geq 2$ tels que :

$$\left| f_b^{(m)}(c) \right| \leq C_b (1 + |c|^{p-m}), \quad m = \{0, 1, 2\}. \quad \text{(I.7)}$$

Notons cependant que le potentiel f_b décrit par la fonction double-puits présentée sur la Figure I.1a vérifie ces hypothèses et rentre donc dans le cadre de notre étude.

I.2 Le cadre Volumes Finis

Rappelons que Ω est un ouvert polygonal connexe de $\mathbb{R}^2$ et que nous nous plaçons donc dans le cadre des volumes finis 2D.

I.2.1 Maillage et notations

Nous rappelons dans cette section les notations volumes finis usuelles (cf par exemple [EGH00]) que nous utiliserons dans ce chapitre.

Maillage orthogonal admissible: Un maillage admissible $\mathfrak{M}$ est un ensemble de polygones disjoints appelés mailles ou volumes de contrôle et notés $\mathcal{K}$ tels que :

- $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathcal{K}$;
- si $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathfrak{M}, \mathcal{K} \neq \mathcal{L}$, alors $\mathring{\mathcal{K}} \cap \mathring{\mathcal{L}} = \emptyset$;
- si $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathfrak{M}, \mathcal{K} \neq \mathcal{L}$ tels que la dimension de $\bar{\mathcal{K}} \cap \bar{\mathcal{L}}$ est égale à 1, alors $\bar{\mathcal{K}} \cap \bar{\mathcal{L}}$ est l'arête qui sépare les volumes de contrôle $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$;
- pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous nous donnons un point $x_{\mathcal{K}}$, appelé centre de la maille $\mathcal{K}$, tel que si $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ sont deux mailles voisines, l'arête qui sépare $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$ est orthogonale à la droite joignant $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{L}}$. Cette condition est appelée "condition d'orthogonalité".

Notations : Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes du maillage $\mathfrak{M}$, $\mathcal{E}_{int}$ désigne l'ensemble des arêtes intérieures et $\mathcal{E}_{ext}$ l'ensemble des arêtes extérieures.

Si $\sigma = \kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}$ est une arête qui sépare la maille κ de la maille $\mathcal{L}$, nous définissons :

- m_σ la longueur de l'arête σ ;
- $\vec{n}_{\kappa\mathcal{L}}$ (ou $\vec{n}_{\sigma\kappa}$) la normale unitaire à σ allant de κ vers $\mathcal{L}$;
- $d_{\kappa,\mathcal{L}}$ la distance entre les centres x_κ et $x_\mathcal{L}$.

A chaque arête $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$, nous associons le quadrilatère dont les diagonales sont σ et le segment $[x_\kappa, x_\mathcal{L}]$, appelé diamant et noté $\mathcal{D}$ (ou $\mathcal{D}_\sigma$). Remarquons que si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$, le diamant $\mathcal{D}_\sigma$ dégénère en triangle.

Pour une maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, notons :

- $m_\mathcal{K}$ la mesure de la maille $\mathcal{K}$;
- $\mathcal{E}_\mathcal{K}$ l'ensemble des arêtes de la maille $\mathcal{K}$ et $\mathcal{E}_\mathcal{K}^{int} = \mathcal{E}_\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_{int}$.

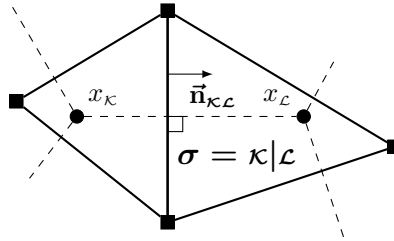


Figure I.2: Notations pour un maillage orthogonal admissible

Régularité du maillage : Le pas du maillage est défini par $\text{size}(\mathfrak{M}) = \sup\{\text{diam}(\kappa), \kappa \in \mathfrak{M}\}$. Appelons $\mathcal{N}$ le nombre maximal d'arêtes passant par un sommet du maillage et $\mathcal{N}^*$ le nombre maximal d'arêtes que peut posséder un volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$. Nous introduisons alors un nombre positif $\text{reg}(\mathfrak{M})$ défini par :

$$\text{reg}(\mathfrak{M}) := \max \left(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*, \max_{\substack{\kappa \in \mathfrak{M} \\ \sigma \in \mathcal{E}_\kappa}} \frac{\text{diam}(\kappa)}{\text{diam}(\mathcal{D}_\sigma)}, \max_{\mathcal{D}} \frac{\text{diam}(\mathcal{D})}{\sqrt{m_\mathcal{D}}}, \max_{\kappa \in \mathfrak{M}} \frac{\text{diam}(\kappa)}{\sqrt{m_\kappa}} \right).$$

Cette constante mesure la régularité du maillage et interviendra dans toutes les constantes des résultats suivants. Dans l'analyse de convergence elle sera supposée bornée indépendamment du pas du maillage ce qui revient à supposer que les mailles ne s'aplatissent pas trop lorsque nous raffinons le maillage.

Inconnues discrètes : La méthode VF4 associe à chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, une inconnue scalaire $u_\mathcal{K}$. Ainsi, nous définissons la fonction constante par morceaux $u_\mathfrak{M} \in \mathbb{R}^\mathfrak{M}$ de la manière suivante :

$$u_\mathfrak{M} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_\kappa 1_\kappa \in L^\infty(\Omega),$$

où 1_κ désigne la fonction indicatrice de la maille κ .

Soit $N \in \mathbb{N}$, l'intervalle de temps $[0, T]$ est discrétisé avec un pas de temps constant $\Delta t = \frac{T}{N}$. Pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, nous définissons le temps $t^n = n\Delta t$. Alors, $u_\mathfrak{M}^{\Delta t}$ désigne la fonction constante par morceaux sur $(0, T) \times \Omega$ telle que pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}[$,

$$u_\mathfrak{M}^{\Delta t}(t, x) = u_\kappa^{n+1} \text{ si } x \in \kappa.$$

Ainsi, pour tout temps t^n , le schéma VF4 associe à chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ une inconnue $c_\mathcal{K}^n$ pour la concentration et une inconnue $\mu_\mathcal{K}^n$ pour le potentiel chimique.

I.2.2 Produits scalaires discrets et normes associées

Pour tout $u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$, nous introduisons le produit scalaire L^2 -discret et le semi-produit scalaire H^1 -discret suivants :

$$(u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} \quad \text{et} \quad \llbracket u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}} \rrbracket_{1, \mathfrak{M}} = \sum_{\sigma = \mathcal{K} | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} (u_{\mathcal{K}} - u_{\mathcal{L}}) (v_{\mathcal{K}} - v_{\mathcal{L}}). \quad (\text{I.8})$$

Remarquons que seules les arêtes intérieures du maillage $\mathfrak{M}$ interviennent dans la définition du semi-produit scalaire H^1 -discret $\llbracket \cdot, \cdot \rrbracket_{1, \mathfrak{M}}$. Ceci est une conséquence du fait que le problème étudié est associé à des conditions aux limites de Neumann.

La norme L^2 et la semi-norme H^1 correspondantes sont alors données par :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)} = (u_{\mathfrak{M}}, u_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad |u_{\mathfrak{M}}|_{1, \mathfrak{M}} = \llbracket u_{\mathfrak{M}}, u_{\mathfrak{M}} \rrbracket_{1, \mathfrak{M}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}},$$

et la norme H^1 -discrete est définie par :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{1, \mathfrak{M}}^2 = \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u_{\mathfrak{M}}|_{1, \mathfrak{M}}^2, \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}.$$

De même, nous définissons la norme L^p -discrete de la manière suivante :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} |u_{\mathcal{K}}|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}.$$

I.3 Discrétisation VF4 de l'équation de Cahn-Hilliard

Dans cette section, nous donnons une approximation VF4 du problème de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann. Nous proposons deux discrétisations en temps différentes (décrites dans la Section I.3.2) du potentiel de Cahn-Hilliard non-linéaire : implicite et semi-implicite. Nous présentons également les estimations d'énergie correspondants à ces deux discrétisations.

I.3.1 Principe du schéma VF4

Rappelons rapidement le principe de l'approximation VF4 : nous intégrons formellement le problème continu sur chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. Ainsi, en ce qui concerne l'équation d'évolution du paramètre d'ordre dans le système (I.2), nous avons :

$$\int_{\mathcal{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t c = \Gamma_b \int_{\mathcal{K}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \Delta \mu$$

et la formule de Stokes implique

$$\int_{\mathcal{K}} (c(t^{n+1}, x) - c(t^n, x)) = \Gamma_b \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}.$$

Alors, en utilisant la condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique μ nous pouvons considérer seulement les arêtes intérieures du maillage $\mathfrak{M}$ et cette équation se réécrit :

$$\int_{\mathcal{K}} (c(t^{n+1}, x) - c(t^n, x)) = \Gamma_b \int_{t^n}^{t^{n+1}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} \int_{\sigma} \nabla \mu \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}.$$

Appliquons maintenant les formules de Taylor à l'ordre 2, ainsi pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}]$ et pour tout $x \in \sigma$,

$$\mu(t, x_{\mathcal{L}}) - \mu(t, x_{\mathcal{K}}) = \nabla \mu(t, x) \cdot (x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}}) + \mathcal{O}((\text{size}(\mathfrak{M}))^2)$$

donc en utilisant la condition d'orthogonalité $x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} = d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K} \mathcal{L}}$, nous obtenons :

$$m_{\sigma} \frac{\mu(t, x_{\mathcal{L}}) - \mu(t, x_{\mathcal{K}})}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} = \int_{\sigma} \nabla \mu(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K} \mathcal{L}} + \mathcal{O}((\text{size}(\mathfrak{M}))^2).$$

Un raisonnement similaire pour l'équation sur le potentiel chimique μ en utilisant la condition aux limites de Neumann homogène sur le paramètre d'ordre c nous permet d'obtenir le problème suivant. Si $c_{\mathfrak{M}}^n$ est donné, l'approximation VF4 du problème (I.2) avec les conditions aux limites (I.4) au temps t^{n+1} s'écrit :

Problème I.1 (Formulation VF4 du problème de Cahn-Hilliard avec des CL de Neumann)

Trouver $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ tels que pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\begin{cases} m_{\mathcal{K}} \frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} + \Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_{\sigma} \frac{\mu_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} = 0, \end{cases} \quad (\text{I.9a})$$

$$\begin{cases} m_{\mathcal{K}} \mu_{\mathcal{K}}^{n+1} = \mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_{\sigma} \left(\frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \right) + \mathcal{A}_{f_b} m_{\mathcal{K}} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1}), \end{cases} \quad (\text{I.9b})$$

où d^{f_b} désigne la discrétisation du terme non-linéaire $f'_b(c)$ décrite dans la Section I.3.2.

Définition I.2 (Projection moyenne discrète)

Nous définissons la projection moyenne sur le maillage $\mathfrak{M}$ de la manière suivante. Pour toute fonction u intégrable, $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m u = (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$ avec :

$$\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} u(x) dx.$$

Nous définissons alors $c_{\mathfrak{M}}^0$ par :

$$c_{\mathfrak{M}}^0 = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m c^0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}. \quad (\text{I.10})$$

Remarque I.3

En sommant l'équation (I.9a) sur toutes les mailles $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous remarquons qu'il y a bien conservation du volume au niveau discret :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^{n+1}, \quad \forall n \in \{0, \dots, N\}. \quad (\text{I.11})$$

I.3.2 Énergie libre et discrétisation du potentiel de Cahn-Hilliard

L'énergie libre discrète associée à l'énergie continue définie par (I.1) est donnée par :

$$\mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}) = \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} f_b(c_{\mathcal{K}}).$$

La preuve de la propriété suivante est analogue à celle de la Proposition III.8 détaillée dans le Chapitre III.

Proposition I.4 (Égalité d'énergie discrète)

Soit $c_{\mathfrak{M}}^n \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$. Supposons qu'il existe une solution $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ au Problème I.1, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n) + \Delta t \Gamma_b |\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ &= \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} (f_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1})(c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n)). \end{aligned} \quad (\text{I.12})$$

Nous décrivons maintenant les deux discrétisations du terme non-linéaire f_b que nous utiliserons dans ces travaux.

Discrétisation implicite : La première discrétisation utilisée est une discrétisation implicite, c'est à dire que d^{f_b} est donnée par :

$$d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1}) = f'_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}.$$

En utilisant l'égalité d'énergie (I.12), nous obtenons l'inégalité d'énergie suivante.

Proposition I.5 (Inégalité d'énergie discrète)

Il existe $\Delta t_0 > 0$ indépendant du maillage tel que si $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ est solution du Problème I.1, alors pour tout pas

de temps $\Delta t \leq \Delta t_0$, l'inégalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n) + \frac{\Delta t \Gamma_b}{2} |\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4} |c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq 0. \quad (\text{I.13})$$

Nous renvoyons à la Proposition III.9 pour la démonstration de ce résultat.

Discretisation semi-implicite : L'inconvénient de la discrétisation implicite est que la décroissance de l'énergie au niveau discret n'est vérifiée que pour un pas de temps suffisamment petit, ce qui peut être contraignant d'un point de vue numérique. En effet $\Delta t_0 = \frac{\varepsilon^3}{96\Gamma_b\sigma_b}$ dépend fortement de la valeur de l'épaisseur d'interface ε , que nous choisissons petite (de l'ordre du pas du maillage) pour pouvoir observer au mieux les phénomènes qui se produisent au niveau de l'interface. C'est la raison pour laquelle nous utilisons également la discrétisation suivante :

$$d^{f_b}(x, y) = \frac{f_b(y) - f_b(x)}{y - x} = \int_0^1 f'(x + s(y - x)) ds. \quad (\text{I.14})$$

Dans le cas particulier du potentiel $f_b(c) = c^2(1 - c)^2$, cette discrétisation s'écrit :

$$d^{f_b}(x, y) = f'_b\left(\frac{x + y}{2}\right) - \frac{1}{2}(1 - x - y)(x - y)^2.$$

Remarquons que cette discrétisation d^{f_b} est construite de sorte que le second membre de l'égalité (I.12) soit exactement égal à 0. Ainsi, nous avons l'estimation d'énergie suivante valable pour tout pas de temps.

Proposition I.6 (Inégalité d'énergie discrète)

Supposons qu'il existe une solution $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ au Problème I.1, alors l'égalité suivante est satisfaite :

$$\mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n) + \Delta t \Gamma_b |\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 = 0. \quad (\text{I.15})$$

Remarque I.7

Pour chacune des deux discrétisations choisies, nous avons donc bien décroissance de l'énergie : si $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ est solution du Problème I.1, alors il existe une constante $C_1 > 0$ indépendante de Δt et $\text{size}(\mathfrak{M})$ telle que :

$$\mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n) + C_1 \left(\Delta t \Gamma_b |\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 \right) \leq 0, \quad (\text{I.16})$$

avec $\Delta t \leq \Delta t_0$ pour une discrétisation implicite du potentiel f_b .

I.4 Théorèmes d'existence et de convergence

La démonstration de ces théorèmes impose des hypothèses générales sur la discrétisation d^{f_b} du potentiel de Cahn-Hilliard : d^{f_b} est de classe $\mathcal{C}^1$ et il existe $C_b \geq 0$ et un réel $p > 2$ tels que :

$$|d^{f_b}(a, b)| \leq C_b (1 + |a|^{p-1} + |b|^{p-1}) \quad \text{et} \quad |D(d^{f_b}(a, \cdot))(b)| \leq C_b (1 + |a|^{p-2} + |b|^{p-2}). \quad (\text{I.17})$$

Nous renvoyons à la démonstration du Théorème III.12 pour une preuve détaillée (dans le cas de conditions aux limites dynamiques) du résultat suivant.

Théorème I.8 (Existence d'une solution au problème discret)

Soit $c_{\mathfrak{M}}^n \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$. Supposons que :

- le potentiel de Cahn-Hilliard f_b satisfait les hypothèses de dissipativité (I.6) et de croissance polynomiale (I.7);
- la discrétisation du terme non-linéaire d^{f_b} vérifie l'hypothèse (I.17) ainsi que la propriété suivante : il existe

$K_b^{c_{\mathfrak{M}}^n} > 0$ (pouvant dépendre de $c_{\mathfrak{M}}^n$) tel que pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} (f_b(u_{\mathcal{K}}) - f_b(c_{\mathcal{K}}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, u_{\mathcal{K}})(u_{\mathcal{K}} - c_{\mathcal{K}}^n)) \leq K_b^{c_{\mathfrak{M}}^n}, \quad \forall u_{\mathcal{K}}. \quad (\text{I.18})$$

Alors, il existe au moins une solution $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ au problème discret (I.1).

Remarque I.9

Pour chacune des deux discrétisations en temps d^{f_b} du potentiel de Cahn-Hilliard l'hypothèse (I.18) est bien satisfaite :

- si nous choisissons la discrétisation implicite la démonstration est donnée dans [Min10, Proposition V.13];
- si nous utilisons la discrétisation semi-implicite alors le membre de gauche de (I.18) est toujours égal à 0.

Définition I.10 (Formulation faible)

Le couple $(c, \mu) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ est solution du problème (I.2) avec les conditions aux limites (I.4) au sens faible si pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \bar{\Omega})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (-\partial_t \phi(t, x) c(t, x) + \Gamma_b \nabla \mu(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x)) \, dx dt &= \int_{\Omega} c^0(x) \phi(0, x) \, dx, \\ \int_0^T \int_{\Omega} (\mu(t, x) \phi(t, x) - \mathcal{A}_{\Delta} \nabla c(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) - \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c(t, x)) \phi(t, x)) \, dx dt &= 0. \end{aligned}$$

La preuve du théorème de convergence suivant sera détaillée dans le cas plus complexe des conditions aux limites dynamiques lors de la démonstration du Théorème III.18.

Théorème I.11 (Théorème de convergence)

Soit $c^0 \in H^1(\Omega)$ et $((c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(i)}, (\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations obtenues sur une famille de maillages admissibles et de pas de temps telle que le pas de temps et le pas d'espace, $\Delta t^{(i)}$ et $\text{size}(\mathfrak{M}^{(i)})$ respectivement (avec $\Delta t^{(i)} < \Delta t_0$ si nous utilisons une discrétisation implicite), tendent vers 0.

Alors, il existe une solution faible (c, μ) du problème (I.2) définie sur $[0, T[$ au sens de la Définition I.10 pour la donnée initiale c^0 telle que, en supposant que $\text{reg}(\mathfrak{M}^{(i)})$ est borné lorsque $i \rightarrow +\infty$, à sous-suite près, les convergences suivantes sont satisfaites pour tout $q \geq 1$:

$$\begin{aligned} (c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(i)} &\xrightarrow{i \rightarrow +\infty} c \quad \text{dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)) \text{ fortement,} \\ \text{et } (\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(i)} &\xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \mu \quad \text{dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)) \text{ faiblement.} \end{aligned}$$

L'inégalité d'énergie (I.16) permet d'obtenir les bornes sur les solutions suivantes : une borne $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ discrète pour la concentration, une borne $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ discrète pour le potentiel chimique et une borne pour la dérivée en temps discrète du paramètre d'ordre.

Nous nous référons à la preuve de la Proposition III.26 pour l'obtention des bornes en question.

Proposition I.12 (Bornes sur les solutions discrètes)

Supposons que les hypothèses du théorème I.11 soient satisfaites.

Alors, il existe des constantes positives M_1 , M_2 et M_3 indépendantes de Δt et $\text{size}(\mathfrak{M})$ telles que :

$$\sup_{n \leq N} \|c_{\mathfrak{M}}^n\|_{1, \mathfrak{M}} \leq M_1, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1, \mathfrak{M}}^2 \leq M_2 \quad \text{et} \quad \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{1, \mathfrak{M}}^2 \leq M_3. \quad (\text{I.19})$$

Cette proposition est l'un des points clés de la démonstration du théorème de convergence. En effet, le terme $f'_b(c)$ étant non-linéaire nous avons besoin de compacité forte dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ pour pouvoir passer à la limite dans le schéma. La Proposition I.12 associée aux estimations de translations en espace et en temps suivantes nous permettent

d'appliquer le théorème de Kolmogorov (voir Annexe, Théorème A.11) et ainsi d'obtenir, d'une part, l'existence de la limite dans le théorème de convergence et d'autre part de passer à la limite dans le terme non-linéaire $f'_b(c)$.

Notation : Pour toute fonction constante par morceaux $u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ définie sur $(0, T) \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$, nous notons $u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ son prolongement par 0 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$.

Le Lemme I.13 est un résultat général valable pour toute fonction $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ qui permet d'obtenir une estimation de translation en espace faisant intervenir la norme $L^2(0, T; H^1)$ -discrète du paramètre d'ordre. Ainsi, en appliquant la Proposition I.12 qui nous donne une estimation $L^\infty(0, T; H^1)$ -discrète du paramètre d'ordre, nous obtenons une estimation de translation en espace d'ordre 1 avec une constante ne dépendant que de la régularité du maillage $\text{reg}(\mathfrak{M})$ (que nous supposons bornée lorsque nous raffinons le maillage).

Lemme I.13 ([EGH00, Lemme 4.3 et Remarque 4.13])

Soit $\eta \in \mathbb{R}^2$, alors il existe $C_2 > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathfrak{M})$, Δt et η telle que pour toute fonction $u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$,

$$\|\widetilde{u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}}(\cdot, \cdot + \eta) - \widetilde{u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq C_2 |\eta| \|u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{1, \mathfrak{M}})}^2.$$

Au contraire, l'estimation de translation en temps I.14 est spécifique au problème que nous étudions. En effet, pour la démontrer (cf preuve du Théorème III.39) nous utilisons que le couple $(c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}, \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})$ est solution du Problème discret (I.1). Cette estimation est donc seulement valable pour les solutions du Problème (I.1).

En utilisant la borne $L^\infty(0, T; H^1)$ -discrète du paramètre d'ordre ainsi que la borne $L^2(0, T; H^1)$ -discrète sur le potentiel chimique obtenues dans la Proposition I.12 nous obtenons une estimation de translation en temps d'ordre 1 avec une constante indépendante de $\text{size}(\mathfrak{M})$, Δt et τ .

Théorème I.14 (Estimation de translations en temps)

Supposons les hypothèses du Théorème I.8 satisfaites de manière à ce qu'une solution $(c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}, \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t})$ au Problème discret (I.1) existe pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout maillage admissible $\mathfrak{M}$.

Soit $\tau > 0$, alors il existe une constante $C_3 > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathfrak{M})$, Δt et τ telle que :

$$\|\widetilde{c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}}(\cdot + \tau, \cdot) - \widetilde{c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq C_3 \tau \left(\|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))}^2 + \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0, T; \|\cdot\|_{1, \mathfrak{M}})} \|\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{1, \mathfrak{M}})} \right).$$

Remarque I.15

Les constantes C_3 (cf Théorème I.14) et C_2 (cf Lemme I.13) dépendent de la régularité du maillage $\text{reg}(\mathfrak{M})$ que nous supposons bornée lorsque le pas du maillage tend vers 0.

I.5 Estimations d'erreur pour le schéma VF4

Le but de cette section est de démontrer le théorème d'estimation d'erreur suivant pour le Problème complètement discrétisé I.1.

Pour démontrer ce théorème nous nous inspirons des techniques analogues à celles présentées dans [EFM89, KSW08] (pour des schémas éléments finis) que nous adaptons au cadre volumes finis qui nous intéresse. Notons cependant que lorsque nous utilisons des méthodes de type volumes finis, nous travaillons sur des espaces discrets en espace contrairement au cadre éléments finis conformes où ces espaces sont continus. La principale difficulté de cette preuve réside dans la prise en compte du terme non-linéaire et le fait d'utiliser une norme H^1 -discrète sur Ω rajoute une difficulté supplémentaire lors du traitement de ce terme (voir Lemme I.32). De plus, le fait d'utiliser une discrétisation semi-implicite (voir (I.14)) pour la discrétisation du terme non-linéaire f'_b complique également la démonstration.

Théorème I.16 (Estimation d'erreur)

Pour tout couple $(c, \mu) \in \mathcal{C}^3([0, T] \times \overline{\Omega}) \times \mathcal{C}^2([0, T] \times \overline{\Omega})$ solution de l'équation de Cahn-Hilliard (I.1) avec les conditions aux limites (I.4). Soit $M > 0$ tel que $\|c\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq M$. Alors, pour toute solution $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ du Problème discret I.1 telle que :

$$c_{\mathfrak{M}}^0 = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c^0 \quad \text{et} \quad \sup_{\kappa \in \mathfrak{M}} |c_{\kappa}^n| \leq M', \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad (\text{I.20})$$

alors il existe une constante positive $C_4 > 0$ (dépendant de M et M') telle que l'estimation suivante est vérifiée (avec $\Delta t \leq \Delta t^e$),

$$\sup_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n) - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1, \mathfrak{M}} \leq C_4(\Delta t + \text{size}(\mathfrak{M})).$$

Nous avons noté $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c$ la projection centrée (voir définition I.18) de la solution exacte c sur le maillage $\mathfrak{M}$.

Remarque I.17

La solution exacte c du problème continu (I.2) est supposée appartenir à $\mathcal{C}^3([0, T] \times \overline{\Omega})$ donc il existe $M > 0$ tel que $\|c\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega))} \leq M$.

Choisissons maintenant un potentiel tronqué $\widetilde{f}_b$ de f_b vérifiant $\widetilde{f}_b = f_b$ sur $[-M', M']$ et tel que $\widetilde{f}_b(x)$ soit constant à l'infini. La fonction $\widetilde{f}_b$ ainsi construite (ainsi que toutes ses dérivées) est Lipschitzienne. De plus, notons que la définition (I.14) de la discrétisation semi-implicite du terme non-linéaire f'_b implique,

$$d^{f_b}(x, y) = \int_0^1 f'_b(x + s(y - x)) ds$$

donc de la même manière la discrétisation $d^{\widetilde{f}_b}$ de la fonction $\widetilde{f}_b$ coïncide avec d^{f_b} sur $[-M', M']^2$ est Lipschitzienne. Nous pouvons alors remarquer plusieurs choses :

- Si nous prenons $\widetilde{f}_b$ à la place de f_b dans l'équation de Cahn-Hilliard, l'hypothèse (I.20) est toujours vérifiée et donc le Théorème I.16 est toujours satisfait.
- Cas d'une famille de maillages quasi-uniforme :
Si nous démontrons le Théorème d'estimation d'erreur I.16 en utilisant le potentiel tronqué $\widetilde{f}_b$ de f_b en considérant une solution $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ du Problème discret I.1 avec le potentiel $\widetilde{f}_b$ à la place du potentiel f_b , alors il existe $C(\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M})) > 0$ ne dépendant que de la régularité uniforme du maillage (voir la Définition A.9) tel que pour tout q et pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ nous avons :

$$\|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n) - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C(\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M}))}{\text{size}(\mathfrak{M})^{2/q}} \|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n) - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^q(\Omega)}$$

et pour tout $1 \leq q < +\infty$, le Lemme I.25 et le Théorème I.16 impliquent,

$$\|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n) - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_9 C_4 C(\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M})) \left(\frac{\Delta t}{\text{size}(\mathfrak{M})^{2/q}} + \text{size}(\mathfrak{M})^{1-2/q} \right).$$

Ainsi, si Δt et $\text{size}(\mathfrak{M})$ tendent vers 0 tout en étant liés par une relation du type $\Delta t \leq C \text{size}(\mathfrak{M})^\alpha$ pour un certain $\alpha > 0$, alors cette estimation permet d'affirmer que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\|c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M'$.

Vu que les fonctions f_b et $\widetilde{f}_b$ coïncident sur $[-M', M']$, si $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ est solution du Problème discret I.1 avec le potentiel de Cahn-Hilliard $\widetilde{f}_b$, elle l'est aussi avec le potentiel f_b (et réciproquement).

En conclusion, pour une famille de maillages quasi-uniforme (au sens de la Définition A.9), si Δt et $\text{size}(\mathfrak{M})$ sont reliés par la relation $\Delta t \leq \text{size}(\mathfrak{M})^\alpha$ (pour une valeur arbitraire $\alpha > 0$) alors l'hypothèse (I.20) est toujours vérifiée pour Δt et $\text{size}(\mathfrak{M})$ assez petits et il existe donc des solutions $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ au Problème discret I.1 qui la vérifie.

- Nous pouvons également vérifier numériquement que l'hypothèse (I.20) est bien satisfaite lorsque nous utilisons le potentiel f_b .

Ainsi, nous pouvons effectuer toute la démonstration du Théorème I.16 avec la fonction $\widetilde{f}_b$ qui vérifie bien toutes les hypothèses de régularité dont nous avons besoin. Par souci de simplicité nous noterons dans la suite f_b à la place de $\widetilde{f}_b$.

I.5.1 Définitions et propriétés des projections discrètes

Dans cette section nous commençons par définir deux projections : la projection elliptique et la projection centrée.

Définition I.18 (Projection centrée)

La projection centrée $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c : C^0(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ est définie de la manière suivante. Soit $u \in C^0(\overline{\Omega})$, nous posons

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u = (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^c u)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{K}}^c u = u(x_{\mathcal{K}}).$$

Définition I.19 (Projection elliptique)

Notons $H_N^2(\Omega) = \{u \in H^2(\Omega) : \nabla u \cdot \vec{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$, alors la projection elliptique $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell} : H_N^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ est définie de la manière suivante. Soit $u \in H_N^2(\Omega)$, la projection elliptique $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell} u = (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^{ell} u)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$ est la solution du problème discret suivant :

Trouver $v_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ tel que $\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}} = \int_{\Omega} u$ et :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_{\sigma} \frac{v_{\mathcal{K}} - v_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} = - \int_{\mathcal{K}} \Delta u, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}.$$

Remarque I.20

La projection elliptique est en fait la solution de l'approximation VF4 du problème continu :

$$\begin{cases} -\Delta v = f & \text{dans } \Omega, \\ \nabla v \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{I.21})$$

avec $f = -\Delta u$.

Lorsque u est une fonction dépendant également du temps, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, nous noterons $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell}(u(t))$ la projection elliptique de la fonction $v = u(t, \cdot)$.

Nous donnons maintenant les propriétés de ces projections qui nous seront utiles dans la section suivante pour la démonstration du Théorème I.16.

Lemme I.21

Soit $u \in H^2(\Omega)$, alors il existe une constante $C_5 > 0$ ne dépendant que de Ω et $\text{reg}(\mathfrak{M})$ telle que :

$$\|u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_5 \text{size}(\mathfrak{M}) \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Démonstration : Soit $u \in H^2(\Omega)$, alors en utilisant les formules de Taylor avec reste intégral, nous avons :

$$u(x_{\mathcal{K}}) - u(x) = \nabla u(x) \cdot (x_{\mathcal{K}} - x) + \int_0^1 (1-s) (D^2 u((1-s)x + sx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x)) \cdot (x_{\mathcal{K}} - x) ds$$

et l'inégalité de Jensen implique :

$$\begin{aligned} \|u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u\|_{L^q(\Omega)}^q &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} |u(x_{\mathcal{K}}) - u(x)|^q dx \\ &\leq 2^{q-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} |\nabla u(x) \cdot (x_{\mathcal{K}} - x)|^q dx \\ &\quad + 2^{q-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} \int_0^1 |(1-s) \langle D^2 u((1-s)x + sx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x) \rangle|^q ds dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $y = (1-s)x + sx_{\mathcal{K}}$ implique :

$$\|u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u\|_{L^q(\Omega)}^q \leq 2^{q-1} (\text{size}(\mathfrak{M}))^q \|\nabla u\|_{L^q(\Omega)}^q + 2^{q-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} (\text{size}(\mathfrak{M}))^{2q} \int_{\mathcal{K}} |D^2 u(y)|^q dy,$$

ce qui conclut la preuve. ■

Lemme I.22

Soit $u \in H_N^2(\Omega)$, alors il existe une constante $C_6 > 0$ ne dépendant que de Ω et $\text{reg}(\mathfrak{M})$ telle que :

$$\left\| \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6 \text{size}(\mathfrak{M}) \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad \left| \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u \right|_{1,\mathfrak{M}} \leq C_6 \text{size}(\mathfrak{M}) \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Démonstration : Par définition, la projection elliptique $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u$ est solution du problème discret (I.21) donc la différence $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u$ représente l'erreur associée au problème (I.21). Or, nous savons (cf [EGH00, Section 3.2.3] par exemple) que l'estimation d'erreur du schéma VF4 pour le problème de Laplace satisfait bien les estimations annoncées. ■

Corollaire I.23

Soit $u \in H_N^2(\Omega)$, alors il existe une constante $C_7 > 0$ ne dépendant que de Ω et $\text{reg}(\mathfrak{M})$ telle que :

$$\left\| \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u - u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Nous énonçons maintenant les inégalités de Poincaré et de Poincaré-Sobolev suivantes.

Lemme I.24 (Inégalité de Poincaré moyenne discrète [EGH00, Lemme 3.7])

Il existe $C_8 > 0$ dépendant seulement de Ω tel que pour tout maillage admissible $\mathfrak{M}$ et pour tout $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$,

$$\|u_{\mathfrak{M}} - m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}})\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 |u_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}} \quad \text{avec} \quad m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} u_{\kappa}$$

et donc, nous avons également :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_8^2 |u_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + 2|\Omega| m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}})^2.$$

Lemme I.25 (Inégalité de Poincaré-Sobolev, [BCCHF, Théorème 3])

Soit $1 \leq q < +\infty$, alors il existe une constante $C_9 > 0$ dépendant seulement de q , Ω et $\text{reg}(\mathfrak{M})$ telle que :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^q(\Omega)} \leq C_9 \|u_{\mathfrak{M}}\|_{1,\mathfrak{M}}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}. \quad (\text{I.22})$$

I.5.2 Démonstration du Théorème I.16

Définition I.26 (Erreur)

Pour toute fonction $u : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $u_{\mathfrak{M}}^n$ une approximation de u au temps t^n , nous notons $e_{\mathfrak{M}}^{u,n} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ l'erreur associée à u au temps $t = t^n$ et nous la définissons de la manière suivante :

$$e_{\mathfrak{M}}^{u,n} = \ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{u,n} + \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{u,n} \quad \text{avec} \quad \ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{u,n} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u(t^n) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u(t^n) \quad \text{et} \quad \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{u,n} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u(t^n) - u_{\mathfrak{M}}^n.$$

Nous notons également $\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{u,n} = u(t^n, \cdot) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\text{ell}} u(t^n)$.

Proposition I.27

Considérons un couple (c, μ) solution de l'équation de Cahn-Hilliard (I.2) avec les conditions aux limites (I.4) et un

couple $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ solution du Problème discret [I.1](#). Alors, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \Gamma_b \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left(|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 - |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 \right) \\ &= \Delta t \left(R_c^{n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1} \right)_{L^2(\Omega)} - \left(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1} \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n} \right)_{L^2(\Omega)} \\ & \quad - \mathcal{A}_{f_b} \left((f'_b(c(t^{n+1}, \cdot)) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n} \right)_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

où pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ nous avons noté :

$$R_c^{n+1}(x) = \frac{c(t^{n+1}, x) - c(t^n, x)}{\Delta t} - \partial_t c(t^{n+1}, x), \quad \forall x \in \mathcal{K}. \quad (\text{I.24})$$

Démonstration : Appliquons la Définition [I.19](#) de la projection elliptique au couple (c, μ) solution de l'équation de Cahn-Hilliard [\(I.2\)](#) associée aux conditions aux limites [\(I.4\)](#). Ainsi, pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous avons :

$$\int_{\mathcal{K}} \partial_t c(t^{n+1}, x) dx + \Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^{ell} \mu(t^{n+1}) - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^{ell} \mu(t^{n+1})}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} = 0 \quad (\text{I.25})$$

et

$$\mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^{ell} c(t^{n+1}) - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^{ell} c(t^{n+1})}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} + \mathcal{A}_{f_b} \int_{\mathcal{K}} f'_b(c(t^{n+1}, x)) dx - \int_{\mathcal{K}} \mu(t^{n+1}, x) dx = 0. \quad (\text{I.26})$$

Soustrayons l'équation [\(I.9a\)](#) du Problème discret à l'équation [\(I.25\)](#), nous obtenons :

$$\Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{\mu, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{L}}^{\mu, n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} - m_{\mathcal{K}} \frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} = - \int_{\mathcal{K}} \partial_t c(t^{n+1}, x) dx$$

et donc,

$$\Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{\mu, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{L}}^{\mu, n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} + m_{\mathcal{K}} \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{K}}^{c, n}}{\Delta t} = m_{\mathcal{K}} \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^{ell} c(t^{n+1}) - \mathbb{P}_{\mathcal{K}}^{ell} c(t^n)}{\Delta t} - \int_{\mathcal{K}} \partial_t c(t^{n+1}, x) dx.$$

La définition [\(I.24\)](#) de R_c^{n+1} entraîne :

$$\Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{\mu, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{L}}^{\mu, n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} + m_{\mathcal{K}} \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{K}}^{c, n}}{\Delta t} = \int_{\mathcal{K}} R_c^{n+1}(x) dx - m_{\mathcal{K}} \frac{\bar{e}_{\mathcal{K}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathcal{K}}^{c, n}}{\Delta t}. \quad (\text{I.27})$$

Soustrayons maintenant l'équation [\(I.9b\)](#) du Problème discret à l'équation [\(I.26\)](#),

$$\mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \frac{\dot{e}_{\mathcal{K}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathcal{L}}^{c, n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} - m_{\mathcal{K}} \dot{e}_{\mathcal{K}}^{\mu, n+1} = - \mathcal{A}_{f_b} \int_{\mathcal{K}} (f'_b(c(t^{n+1}, x)) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1})) dx + \int_{\mathcal{K}} \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1} dx. \quad (\text{I.28})$$

Multiplions maintenant l'équation [\(I.27\)](#) par $v_{\mathcal{K}}$ et sommons sur $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, ainsi :

$$\Gamma_b \llbracket \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, v_{\mathfrak{M}} \rrbracket_{1, \mathfrak{M}} + \left(\frac{\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}}{\Delta t}, v_{\mathfrak{M}} \right)_{L^2(\Omega)} = (R_c^{n+1}, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} - \left(\frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}}{\Delta t}, v_{\mathfrak{M}} \right)_{L^2(\Omega)} \quad (\text{I.29})$$

puis multiplions l'équation [\(I.28\)](#) par $u_{\mathcal{K}}$ et sommons sur $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Delta \llbracket \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1}, u_{\mathfrak{M}} \rrbracket_{1, \mathfrak{M}} - (\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, u_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} &= - \mathcal{A}_{f_b} \left((f'_b(c(t^{n+1}, \cdot)) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})), u_{\mathfrak{M}} \right)_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, u_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (\text{I.30})$$

En choisissant $v_{\mathfrak{M}} = \Delta t \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}$ dans l'équation [\(I.29\)](#) et $u_{\mathfrak{M}} = \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}$ dans l'équation [\(I.30\)](#) puis en additionnant les deux équations nous obtenons l'identité souhaitée. ■

Proposition I.28

Considérons un couple (c, μ) solution de l'équation de Cahn-Hilliard (I.2) avec les conditions aux limites (I.4) et le couple $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})$ solution du problème discret I.1. Alors, pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket$ l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned}
& \frac{\Gamma_b}{2} \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left(\frac{1}{2} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 - |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 \right) \\
& \leq \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \left(1 + \frac{2}{\Gamma_b}\right) C_8^2 \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left(\|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, 1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2C_8^2}{\mathcal{A}_\Delta} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n_0+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_8^2}{2} \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + \frac{\mathcal{A}_{f_b}^2}{2} \|g_{\mathfrak{M}}(t^1, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4C_8^2 \mathcal{A}_{f_b}^2}{\mathcal{A}_\Delta} \|g_{\mathfrak{M}}(t^{n_0+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + C_8^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{g_{\mathfrak{M}}(t^n, \cdot) - g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot)}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{|\Omega|}{2C_8^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4}\right) m_{\mathfrak{M}} (\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0})^2 \\
& \quad + (1 + 2\Gamma_b) \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left(|f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1})|_{1, \mathfrak{M}}^2 + |d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})|_{1, \mathfrak{M}}^2 \right),
\end{aligned} \tag{I.31}$$

où nous avons noté $g_{\mathfrak{M}}$ la fonction telle que pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

$$g_{\mathfrak{M}}(t, x) = f'_b(c(t, x)) - f'_b(c(t, x_{\mathcal{K}})), \quad \forall x \in \mathcal{K}, t \in \mathbb{R}. \tag{I.32}$$

Démonstration : Commençons par sommer l'identité (I.23) pour n allant de 0 à n_0 , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \Gamma_b \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left(|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 - |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 \right) \\
& = \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t (R_c^{n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} - \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - \mathcal{A}_{f_b} \sum_{n=0}^{n_0} ((f'_b(c(t^{n+1}, \cdot)) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant la définition (I.32) de la fonction $g_{\mathfrak{M}}$ nous pouvons alors réécrire cette somme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& \Gamma_b \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left(|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 - |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \sum_{n=0}^{n_0} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 \right) \\
& = \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t (R_c^{n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} - \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - \mathcal{A}_{f_b} \sum_{n=0}^{n_0} (g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \\
& \quad - \mathcal{A}_{f_b} \sum_{n=0}^{n_0} ((f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{I.33}$$

Pour obtenir l'estimation (I.31), il faut maintenant appliquer l'inégalité de Young aux différents termes du membre de droite de cette égalité.

- Commençons par étudier les deux premiers termes du membre de droite de (I.33). Remarquons tout d'abord que si $v_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ est une fonction à moyenne nulle, pour tout $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$, nous avons :

$$(u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} = (u_{\mathfrak{M}} - m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}}), v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} \leq \|u_{\mathfrak{M}} - m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}})\|_{L^2(\Omega)} \|v_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}$$

et donc d'après l'inégalité de Poincaré moyenne du Lemme I.24, nous obtenons :

$$(u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} \leq C_8 |u_{\mathfrak{M}}|_{1, \mathfrak{M}} \|v_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{I.34}$$

- Le couple (c, μ) est solution de l'équation de Cahn-Hilliard (I.2) avec les conditions au bord (I.4), ce qui implique :

$$\int_{\Omega} \partial_t c(t^{n+1}, x) dx = \Gamma_b \int_{\Omega} \Delta \mu((t^{n+1}, x)) dx = \Gamma_b \int_{\partial \Omega} \nabla \mu(t^{n+1}, x) \cdot \vec{n} = 0, \quad \forall n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket, \tag{I.35}$$

ainsi que :

$$\int_{\Omega} (c(t^{n+1}, x) - c(t^n, x)) dx = \int_{\Omega} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t c(s, x) ds = 0. \quad (\text{I.36})$$

Nous en déduisons donc que pour tout $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$:

$$m_{\mathfrak{M}}(R_c^{n+1}) = \int_{\Omega} \left(\frac{c(t^{n+1}, x) - c(t^n, x)}{\Delta t} - \partial_t c(t^{n+1}, x) \right) dx = 0, \quad (\text{I.37})$$

et l'estimation (I.34) permet d'obtenir :

$$(R_c^{n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} \leq C_8 |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}} \|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}.$$

En appliquant l'inégalité de Young à cette inégalité nous avons finalement :

$$\Delta t (R_c^{n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\Gamma_b}{8} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{2C_8^2}{\Gamma_b} \Delta t \|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket. \quad (\text{I.38})$$

– Par définition de la projection elliptique, nous avons également pour tout $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$:

$$m_{\mathfrak{M}}(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}) = \int_{\Omega} c(t^n, \cdot) - \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbb{P}_{\kappa}^{ell} c(t^n) = 0.$$

Nous en déduisons que $m_{\mathfrak{M}}(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}) = 0$ et d'après l'estimation (I.34) nous avons :

$$(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} \leq C_8 |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}\|_{L^2(\Omega)}$$

et l'inégalité de Young implique :

$$(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1})_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\Gamma_b}{8} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{2C_8^2}{\Gamma_b} \Delta t \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket. \quad (\text{I.39})$$

- Nous allons maintenant nous intéresser aux troisième et quatrième termes du membre de droite de l'égalité (I.33). Pour cela, nous allons effectuer une intégration par parties en temps discrète. Commençons par le terme faisant intervenir $\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n}$.

$$\sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} = -(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, 1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0})_{L^2(\Omega)} + \sum_{n=1}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} + (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n_0+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1})_{L^2(\Omega)}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (I.34) (car par définition de la projection elliptique, nous avons $m_{\mathfrak{M}}(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n}) = 0$) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, 1}\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}\|_{L^2(\Omega)} + C_8 \sum_{n=1}^{n_0} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}\|_{L^2(\Omega)} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}} \\ &\quad + C_8 \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n_0+1}\|_{L^2(\Omega)} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}|_{1, \mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young nous avons finalement,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{n_0} (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}, \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \frac{1}{2} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, 1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_8^2}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2C_8^2}{\mathcal{A}_{\Delta}} \|\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu, n_0+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}|_{1, \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{8} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}|_{1, \mathfrak{M}}^2. \end{aligned} \quad (\text{I.40})$$

Nous effectuons maintenant une intégration par parties en temps discrète sur le terme faisant intervenir $g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot)$. Cependant la fonction $g_{\mathfrak{M}}(t, \cdot)$ n'étant pas à moyenne nulle par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous obtenons,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{n_0} (g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n})_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \|g_{\mathfrak{M}}(t^1, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, 0}\|_{L^2(\Omega)} + \|g_{\mathfrak{M}}(t^{n_0+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n_0+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^{n_0} \|g_{\mathfrak{M}}(t^n, \cdot) - g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c, n}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En remarquant que la définition de la projection elliptique et la conservation du volume au niveau discret (I.11) impliquent que tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}) = m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0})$, l'inégalité de Poincaré du Lemme I.24 et l'inégalité de Young entraînent :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{f_b} \left| \sum_{n=0}^{n_0} (g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot), \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n})_{L^2(\Omega)} \right| &\leq \frac{\mathcal{A}_{f_b}^2}{2} \|g_{\mathfrak{M}}(t^1, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{4C_8^2 \mathcal{A}_{f_b}^2}{\mathcal{A}_{\Delta}} \|g_{\mathfrak{M}}(t^{n_0+1}, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + C_8^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 \sum_{n=1}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{g_{\mathfrak{M}}(t^n, \cdot) - g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot)}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{8} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n_0+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ &\quad + \frac{|\Omega|}{2C_8^2} \left(1 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{4}\right) m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0})^2. \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

- Il reste à étudier le dernier terme du membre de droite de l'égalité (I.33).

Pour cela, nous choisissons $v_{\mathfrak{M}} = \Delta t (f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))$ dans l'identité (I.29), nous obtenons :

$$\begin{aligned} (\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))_{L^2(\Omega)} &= -\Gamma_b \Delta t [\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n+1}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})]_{1,\mathfrak{M}} \\ &\quad + \Delta t (R_c^{n+1}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))_{L^2(\Omega)} \\ &\quad - (\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (I.34) (car $m_{\mathfrak{M}}(R_c^{n+1}) = m_{\mathfrak{M}}(\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}) = 0$), nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\left| (\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))_{L^2(\Omega)} \right| \\ &\leq \Delta t \left(\Gamma_b |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n+1}|_{1,\mathfrak{M}} + C_8 \|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)} + C_8 \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d^{f_b}(x, x) = f'_b(x)$ (cf définition (I.14)) nous avons :

$$\left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}} \leq \left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}} + \left| d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}$$

Appliquons maintenant l'inégalité de Young à cette inégalité, nous en déduisons que pour tout $n \in \llbracket 0, n_0 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} &\left| (\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}, f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}))_{L^2(\Omega)} \right| \leq \frac{\Gamma_b}{4} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ &\quad + C_8^2 \Delta t \left(\|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\quad + (1 + 2\Gamma_b) \Delta t \left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ &\quad + (1 + 2\Gamma_b) \Delta t \left| d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2. \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

En regroupant les inégalités (I.38), (I.39), (I.40), (I.41) et (I.42), l'équation (I.33) donne bien l'estimation (I.31). ■

Pour pouvoir appliquer le lemme de Gronwall discret, il faut maintenant estimer les termes du membre de droite de l'inégalité (I.31) indépendamment de n .

Proposition I.29

Pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket$, le terme de reste R_c^{n+1} défini par (I.24) satisfait

$$\sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\partial_{tt} c\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \Delta t^2. \quad (\text{I.43})$$

Démonstration : En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral au terme R_c^{n+1} défini par (I.24), nous obtenons :

$$R_c^{n+1}(x) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^n - s) \partial_{tt} c(s, x) ds.$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \|R_c^{n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{1}{\Delta t^2} \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} (t^n - s)^2 ds \right) \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_{tt} c(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) \\ &\leq \Delta t \left(\int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_{tt} c(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right), \end{aligned}$$

et en sommant ces inégalités pour n allant de 0 à n_0 nous obtenons le résultat attendu. $\blacksquare$

Proposition I.30

Pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket$, les estimations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_7^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\partial_t c\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2, \\ \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{\bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n+1}}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C_7^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\partial_t \mu\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2, \end{aligned} \quad (\text{I.44})$$

et pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$ nous avons,

$$\left\| \mu(t^n, \cdot) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell} \mu(t^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \|\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}. \quad (\text{I.45})$$

Démonstration :

- Par construction, la projection elliptique est linéaire donc le Corollaire I.23 implique :

$$\begin{aligned} \left\| \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n} \right\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \left\| c(t^{n+1}, \cdot) - c(t^n, \cdot) \right\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \left\| \int_{t^n}^{t^{n+1}} \partial_t c(t, \cdot) dt \right\|_{H^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalement, nous avons donc :

$$\left\| \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \bar{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_6^2 \Delta t \text{size}(\mathfrak{M})^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt,$$

et l'inégalité (I.44) est démontrée en sommant ces estimations pour n allant de 0 à n_0 .

- Pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, en appliquant le Corollaire I.23 à la fonction $\mu(t^n, \cdot)$ nous obtenons directement :

$$\left\| \mu(t^n, \cdot) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell} \mu(t^n) \right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \|\mu(t^n, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \leq C_7 \text{size}(\mathfrak{M}) \|\mu\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}.$$

$\blacksquare$

Proposition I.31

Pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $g_{\mathfrak{M}}$ définie par (I.32) satisfait l'identité suivante :

$$\|g_{\mathfrak{M}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2L_{f'_b}^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\nabla c(t, \cdot)\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad (\text{I.46})$$

où nous avons noté $L_{f'_b} > 0$ la constante de Lipschitz de f'_b .

De plus, il existe une constante $C_{10} > 0$ ne dépendant que de f_b (et de ses dérivées) telle que pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left\| \frac{g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot) - g_{\mathfrak{M}}(t^n, \cdot)}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{10} M_{\infty}^c \|\partial_t c\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \quad (\text{I.47})$$

où nous avons noté,

$$M_{\infty}^c = \max \left(1, \|\nabla c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}^4, \|D^2 c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}^2 \right).$$

Démonstration : Soit $t \in [0, T]$, la définition (I.32) de la fonction $g_{\mathfrak{M}}$ et le fait que la fonction f'_b est Lipschitzienne impliquent :

$$\|g_{\mathfrak{M}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq L_{f'_b}^2 \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} |c(t, x) - c(t, x_{\mathcal{K}})|^2 dx.$$

Alors, en utilisant les formules de Taylor avec reste intégral nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|g_{\mathfrak{M}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq L_{f'_b}^2 \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} \left| \nabla c(t, x) \cdot (x - x_{\mathcal{K}}) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (1-s) \langle D^2 (\partial_t c(t^{n+1}, x_{\mathcal{K}} + s(x - x_{\mathcal{K}})) (x - x_{\mathcal{K}}), (x - x_{\mathcal{K}})) \rangle ds \right|^2 dx \end{aligned}$$

ce qui implique,

$$\|g_{\mathfrak{M}}(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2L_{f'_b}^2 (\text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\nabla c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \text{size}(\mathfrak{M})^4 \|D^2 c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2)$$

et l'inégalité (I.46) est démontrée.

Montrons maintenant l'estimation (I.47). Pour cela, pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ nous définissons la fonction h^n telle que pour tout $x \in \Omega$,

$$h^n(x) = f'_b(c(t^{n+1}, x)) - f'_b(c(t^n, x)),$$

de sorte que pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, x) - g_{\mathfrak{M}}(t^n, x) = h^n(x_{\mathcal{K}}) - h^n(x), \quad \forall x \in \mathcal{K}.$$

En utilisant le même raisonnement que pour le terme précédent, les formules de Taylor avec reste intégrale impliquent :

$$\|g_{\mathfrak{M}}(t^{n+1}, \cdot) - g_{\mathfrak{M}}(t^n, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\nabla h^n\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Or, il existe M_{f_b} qui ne dépend que des constantes de Lipschitz des dérivées de la fonction f_b (jusqu'à l'ordre 3) tel que :

$$\begin{aligned} \|\nabla h^n\|_{H^1(\Omega)}^2 &\leq M_{f_b} \Delta t \left(\left(\|\nabla c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}^4 + \|D^2 c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}^2 \right) \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t \nabla c\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

En sommant ces relations pour n allant de 0 à n_0 nous obtenons bien le résultat annoncé. $\blacksquare$

Il reste maintenant à estimer les deux derniers termes du membre de droite de l'identité (I.31). Le raisonnement étant similaire pour ces deux termes nous commençons par démontrer le résultat général suivant.

Lemme I.32

Considérons une fonction $\phi \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre 2 soient bornées. Alors, il existe une constante positive C_{11} ne dépendant que de ϕ et de la régularité du maillage $\text{reg}(\mathfrak{M})$, telle que pour tout $a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ l'estimation suivante est vérifiée :

$$|\phi(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) - \phi(b_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq C_{11} \left(|a_{\mathfrak{M}} - b_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + |b_{\mathfrak{M}} - \tilde{b}_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\tilde{b}_{\mathfrak{M}})^2 \|a_{\mathfrak{M}} - b_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right);$$

pour tout $\tilde{b}_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$, où nous avons noté :

$$\text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\tilde{b}_{\mathfrak{M}}) = \sup_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \left| \frac{\tilde{b}_{\mathcal{K}} - \tilde{b}_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \right|.$$

Démonstration : Par définition de la semi-norme H^1 -discrète, nous avons :

$$|\phi(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) - \phi(b_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})|_{1,\mathfrak{M}}^2 = \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\kappa,\mathcal{L}} \left(\frac{[\phi(a_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(a_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}})] - [\phi(b_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(b_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}})]}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right)^2.$$

Par soucis de simplicité, pour tout $\sigma = \kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}$ nous posons :

$$\phi_{\sigma}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) = [\phi(a_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(a_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}})] - [\phi(b_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(b_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}})].$$

Remarquons maintenant que

$$\begin{aligned} \phi(a_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(a_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}}) &= \int_0^1 \left((a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}) \partial_1 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right. \\ &\quad \left. + (b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}) \partial_2 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi(b_{\kappa}, b_{\kappa}) - \phi(b_{\mathcal{L}}, b_{\mathcal{L}}) &= \int_0^1 \left((b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}) \partial_1 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right. \\ &\quad \left. + (b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}) \partial_2 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right) ds. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ le terme $\phi_{\sigma}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$ s'écrit :

$$\phi_{\sigma}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) = \phi_{\sigma}^1(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) + \phi_{\sigma}^2(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) \quad (\text{I.48})$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma}^1(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) &= \int_0^1 (b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}) \left(\partial_2 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) - \partial_2 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) - \partial_1 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right) ds \end{aligned}$$

et

$$\phi_{\sigma}^2(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) = \int_0^1 \left((a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}) - (b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}) \right) \partial_1 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) ds.$$

Intéressons nous tout d'abord au terme $\phi_{\sigma}^2(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$. En remarquant que la fonction $\partial_1 \phi$ est bornée nous avons,

$$\sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\kappa,\mathcal{L}} \left(\frac{\phi_{\sigma}^2(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right)^2 \leq \|\partial_1 \phi\|_{L^{\infty}}^2 |a_{\mathfrak{M}} - b_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2.$$

Etudions le terme $\phi_{\sigma}^1(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$. Pour cela, écrivons le terme $\phi_{\sigma}^1(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$ sous la forme :

$$\phi_{\sigma}^1(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) = \phi_{\sigma}^{1,1}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) + \phi_{\sigma}^{1,2}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$$

avec :

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma}^{1,1}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) &= \int_0^1 ((b_{\kappa} - \tilde{b}_{\kappa}) - (b_{\mathcal{L}} - \tilde{b}_{\mathcal{L}})) \left(\partial_2 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right. \\ &\quad - \partial_2 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \\ &\quad + \partial_1 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \\ &\quad \left. - \partial_1 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right) ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \phi_{\sigma}^{1,2}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}}) &= \int_0^1 (\tilde{b}_{\kappa} - \tilde{b}_{\mathcal{L}}) \left(\partial_2 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) - \partial_2 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right. \\ &\quad \left. + \partial_1 \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) - \partial_1 \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right) ds. \end{aligned}$$

En notant que les fonctions $\partial_1 \phi$ et $\partial_2 \phi$ sont bornées nous avons immédiatement :

$$\sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}} \left(\frac{\phi_{\sigma}^{1,1}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right)^2 \leq (\max(\|\partial_1 \phi\|_{L^\infty}, \|\partial_2 \phi\|_{L^\infty}))^2 |b_{\mathfrak{M}} - \tilde{b}_{\mathfrak{M}}|_{1,\mathfrak{M}}^2.$$

Il reste maintenant à étudier le terme $\phi_{\sigma}^{1,2}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})$.

Pour $i = 1, 2$, en utilisant que la fonction $\partial_{1,i} \phi$ est bornée nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} & \left| \partial_i \phi(a_{\mathcal{L}} + s(a_{\kappa} - a_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) - \partial_i \phi(b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}}), b_{\mathcal{L}} + s(b_{\kappa} - b_{\mathcal{L}})) \right| \\ & \leq \|\partial_{1,i} \phi\|_{L^\infty} \left| (1-s)(a_{\mathcal{L}} - b_{\mathcal{L}}) + s(a_{\kappa} - b_{\kappa}) \right|. \end{aligned}$$

Pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, nous avons donc :

$$\left(\frac{\phi_{\sigma}^{1,2}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right)^2 \leq 2 (\max(\|\partial_{1,1} \phi\|_{L^\infty}, \|\partial_{1,2} \phi\|_{L^\infty}))^2 \left| \frac{\tilde{b}_{\kappa} - \tilde{b}_{\mathcal{L}}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right|^2 (|a_{\kappa} - b_{\kappa}|^2 + |a_{\mathcal{L}} - b_{\mathcal{L}}|^2).$$

Donc, il existe $C(\text{reg}(\mathfrak{M}))$ ne dépendant que de la régularité du maillage $\text{reg}(\mathfrak{M})$ tel que :

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}} \left(\frac{\phi_{\sigma}^{1,2}(a_{\mathfrak{M}}, b_{\mathfrak{M}})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right)^2 \\ & \leq C(\text{reg}(\mathfrak{M})) (\max(\|\partial_{1,1} \phi\|_{L^\infty}, \|\partial_{1,2} \phi\|_{L^\infty}))^2 \text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\tilde{b}_{\mathfrak{M}})^2 \|a_{\mathfrak{M}} - b_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

ce qui conclut le lemme. ■

Proposition I.33

Pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N \rrbracket$, l'identité suivante est vérifiée (avec C_{11} dépendant de f_b),

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t \left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \left| d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \leq C_{11} \left(4 + C_{12} \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \right) \sum_{n=1}^{n_0+1} \Delta t |e_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \quad + 3C_{11} \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \right) \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |e_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - e_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \quad + 4TC_{11}C_6^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|c\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + TC_{11}C_{12} \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \left(\|c^0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|c\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 \right) \text{size}(\mathfrak{M})^2 \\ & \quad + 3|\Omega|C_{11} \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t \nabla c\|_{L^2(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \Delta t^2 \\ & \quad + 3C_{11}C_6^2 \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \right) \|\partial_t c\|_{L^2(0,T;H^2(\Omega))}^2 \Delta t^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2. \end{aligned}$$

Démonstration : Nous allons appliquer deux fois le Lemme I.32 en choisissant bien les fonctions intervenant dans ce Lemme. Nous l'appliquons une première fois à la fonction ϕ définie par $\phi(x, y) = f'_b(x)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Nous choisissons alors $a_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{M}}^{n+1}$ et $b_{\mathfrak{M}} = \tilde{b}_{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))$. Nous obtenons ainsi,

$$\left| f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq C_{11} \left(|e_{\mathfrak{M}}^{c,n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1})))^2 \|e_{\mathfrak{M}}^{c,n+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{I.49})$$

Nous appliquons maintenant une seconde fois le Lemme I.32 mais cette fois à la fonction $\phi = d^{f_b}$ avec $a_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{M}}^n$, $b_{\mathfrak{M}} = c_{\mathfrak{M}}^{n+1}$ et $\tilde{b}_{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))$. Ceci implique,

$$\begin{aligned} & \left| d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \right|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq C_{11} \left(|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 + |e_{\mathfrak{M}}^{c,n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \right. \\ & \quad \left. + \text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1})))^2 \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Nous avons par l'inégalité des accroissements finis,

$$\text{Lip}_{\mathfrak{M}}(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) = \sup_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} \left| \frac{c(t^{n+1}, x_{\kappa}) - c(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right| \leq \|\nabla c(t^{n+1}, \cdot)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|\nabla c\|_{L^{\infty}(0,T;L^{\infty}(\Omega))}. \quad (\text{I.51})$$

De plus, pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, nous avons :

$$\|e_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2\|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\|\ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{I.52})$$

La définition de la projection elliptique et la propriété de conservation du volume au niveau discret (I.11) impliquent $m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}) = m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0})$, nous déduisons donc du Lemme I.24,

$$\|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_8^2 |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + 2|\Omega|m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0})^2.$$

Or, d'après la définition (I.20) de $c_{\mathfrak{M}}^0$ prise dans le Théorème I.16 et le Lemme I.22, nous avons :

$$m_{\mathfrak{M}}(\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0}) = m_{\mathfrak{M}}(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell}c^0 - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c^0) \leq \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} \|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell}c^0 - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c^0\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}} C_6 \text{size}(\mathfrak{M}) \|c^0\|_{H^2(\Omega)}, \quad (\text{I.53})$$

ce qui entraîne,

$$\|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2C_8^2 |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + 2C_6^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|c^0\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (\text{I.54})$$

De plus, le Lemme I.22 donne directement,

$$\|\ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C_6 \text{size}(\mathfrak{M}) \|c(t^n, \cdot)\|_{H^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |\ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}} \leq C_6 \text{size}(\mathfrak{M}) \|c(t^n, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}. \quad (\text{I.55})$$

Ainsi, en regroupant les inégalités (I.52), (I.54) et (I.55) il existe $C_{12} > 0$ tel que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\|e_{\mathfrak{M}}^{c,n}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{12} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + C_{12} \text{size}(\mathfrak{M})^2 (\|c^0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|c\|_{L^{\infty}(0,T;H^2(\Omega))}^2). \quad (\text{I.56})$$

Intéressons nous maintenant aux termes du membre de droite de l'estimation (I.50). Pour commencer nous pouvons écrire,

$$|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}} \leq |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}} + |\ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}} + |\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^{n+1}) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n)|_{1,\mathfrak{M}}.$$

Alors, les projections $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell}$ et $\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c$ étant linéaires nous pouvons appliquer le Lemme I.22 ce qui entraîne :

$$|\ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \ddot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq C_6^2 \Delta t \text{size}(\mathfrak{M})^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt.$$

De plus,

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^{n+1}) - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c(t^n)|_{1,\mathfrak{M}}^2 &= \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\kappa,\mathcal{L}} \left| \frac{\int_{t^n}^{t^{n+1}} (\partial_t c(t, x_{\kappa}) - \partial_t c(t, x_{\mathcal{L}})) dt}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right|^2 \\ &\leq \Delta t \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\kappa,\mathcal{L}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \frac{(\partial_t c(t, x_{\kappa}) - \partial_t c(t, x_{\mathcal{L}}))}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right|^2 dt \\ &\leq \Delta t \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L}\in\mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\kappa,\mathcal{L}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \int_0^1 \partial_t \nabla c(t, x_{\mathcal{L}} + s(x_{\kappa} - x_{\mathcal{L}})) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\kappa\mathcal{L}} \right|^2 dt \\ &\leq |\Omega| \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t \nabla c(t, \cdot)\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} |c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n|_{1,\mathfrak{M}}^2 &\leq 3 |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + 3C_6^2 \Delta t \text{size}(\mathfrak{M})^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt \\ &\quad + 3|\Omega| \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t \nabla c(t, \cdot)\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2 dt. \end{aligned} \quad (\text{I.57})$$

Enfin, en remarquant que la conservation du volume au niveau discret (I.11) implique $m_{\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n) = 0$, l'inégalité de Poincaré entraîne,

$$\|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{L^2(\Omega)} \leq C_8 \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{1,\mathfrak{M}} \quad (\text{I.58})$$

En sommant les termes (I.49) et (I.50) et en regroupant les estimations (I.51), (I.55), (I.56), (I.57) et (I.58) nous obtenons :

$$\begin{aligned} & |f'_b(\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c(c(t^{n+1}))) - f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1})|_{1,\mathfrak{M}}^2 + |df_b(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - df_b(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \leq C_{11} \left(4 + C_{12} \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2\right) |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \quad + 4C_{11}C_6^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|c\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2 \\ & \quad + C_{11}C_{12} \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2 \left(\|c^0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|c\|_{L^\infty(0,T;H^2(\Omega))}^2\right) \\ & \quad + 3C_{11} \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2\right) |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \quad + 3|\Omega|C_{11} \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2\right) \Delta t \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}^2 dt \\ & \quad + 3C_{11}C_6^2 \left(1 + C_8^2 \|\nabla c\|_{L^\infty(0,T;L^\infty(\Omega))}^2\right) \Delta t \text{size}(\mathfrak{M})^2 \int_{t^n}^{t^{n+1}} \|\partial_t c(t, \cdot)\|_{H^2(\Omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

En sommant cette estimation pour n allant de 0 à n_0 nous obtenons le résultat attendu. ■

Fin de la démonstration du Théorème I.16:

Les Propositions I.29, I.30, I.31, I.33 et l'estimation (I.53) sur le terme $m_{\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^0)$ permettent d'estimer les termes du membre de droite de l'inégalité (I.31) (cf Proposition I.28). Ainsi, il existe $C_{13} > 0$ (dépendant de c et μ) indépendant de $\text{size}(\mathfrak{M})$ et Δt tel que pour tout $n_0 \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma_b}{2} \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{\mu,n+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n_0+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \sum_{n=0}^{n_0} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \leq C_{13} \|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0}\|_{1,\mathfrak{M}}^2 + (1 + C_{13}) \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + C_{13} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n_0+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + C_{13} \sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n+1} - \dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \\ & \quad + C_{13} (\text{size}(\mathfrak{M})^2 + \Delta t^2). \end{aligned}$$

Remarquons alors que le Lemme I.22 implique :

$$\|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0}\|_{1,\mathfrak{M}}^2 = \left\| \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c c^0 - \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{ell} c^0 \right\|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq 2C_6^2 \text{size}(\mathfrak{M})^2 \|c^0\|_{H^2(\Omega)}^2. \quad (\text{I.59})$$

Donc choisissant $\Delta t \leq \frac{\mathcal{A}_\Delta}{8C_{13}}$ il existe $C_{14} > 0$ (dépendant de c , c^0 et μ) indépendant de $\text{size}(\mathfrak{M})$ et Δt tel que :

$$\frac{\mathcal{A}_\Delta}{8} |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n_0+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq C_{14} \left(\sum_{n=0}^{n_0} \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n}|_{1,\mathfrak{M}}^2 + (\text{size}(\mathfrak{M})^2 + \Delta t^2) \right),$$

Nous pouvons maintenant appliquer le Lemme de Gronwall discret (cf Lemme A.7) et nous obtenons :

$$|\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,n_0+1}|_{1,\mathfrak{M}}^2 \leq \frac{8C_{14}}{\mathcal{A}_\Delta} (\text{size}(\mathfrak{M})^2 + \Delta t^2 + \Delta t |\dot{e}_{\mathfrak{M}}^{c,0}|_{1,\mathfrak{M}}^2) e^{\frac{8TC_{14}}{\mathcal{A}_\Delta}}.$$

Le Théorème I.16 se déduit alors des estimations (I.55) et (I.59). ■

I.6 Quelques remarques sur l'implémentation

Tous les tests numériques de ce manuscrit ont été réalisés à l'aide d'un code en Scilab.

I.6.1 Lecture du maillage

Dans un premier temps, il faut réaliser un programme qui pour un maillage donné (par exemple construit avec le logiciel Gmsh) nous renvoie les informations qui nous seront utiles pour assembler les matrices. L'assemblage des matrices d'un schéma de type volumes finis se fait par arêtes. Ces informations sont rassemblées dans une structure appelée `mesh` qui contient les coordonnées des sommets et des centres ainsi que les informations sur les arêtes qui permettent de définir de façon unique le maillage considéré.

- Sommets : coordonnées du sommet numéro i

`mesh.sommets(i,_X), mesh.sommets(i,_Y)`

- Centres : coordonnées du centre numéro j

`mesh.centres(j,_X), mesh.sommets(j,_Y)`

- Arêtes : pour l'arête numéro k

- Les numéros des deux sommets x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$ notés `_KS` et `_LS`

`mesh.aretes(k,_KS), mesh.aretes(k,_LS)`

- Les numéros des deux centres x_{κ} et $x_{\mathcal{L}}$

`mesh.aretes(k,_K), mesh.aretes(k,_L)`

Par convention, `mesh.aretes(k,_L)=0` si c'est une arête du bord.

- Mesure de l'arête $m_{\sigma} = d(x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$

`mesh.aretes(k,_MES)`

- Distance $d_{\kappa,\mathcal{L}} = d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}})$ entre les centres x_{κ} et $x_{\mathcal{L}}$

`mesh.aretes(k,_DKL)`

- Mesure des quarts de diamants

`mesh.aretes(k,_MES_K_KS), mesh.aretes(k,_MES_K_LS),
mesh.aretes(k,_MES_L_KS), mesh.aretes(k,_MES_L_LS)`

Remarquons que si l'arête k est une arête du bord, nous avons :

`mesh.aretes(k,_MES_L_KS)=mesh.aretes(k,_MES_L_LS)=0.`

- Normale unitaire $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ allant de κ vers $\mathcal{L}$

`mesh.aretes(k,_N_KL_X), mesh.aretes(k,_N_KL_Y)`

Remarque I.34

1. Lorsque nous décomposons Ω en mailles triangles, pour pouvoir satisfaire la condition d'orthogonalité du maillage nous imposons que le maillage soit Delaunay.
2. Pour le schéma VF4, si les mailles sont des triangles alors le centre x_{κ} de la maille κ sera le centre du cercle circonscrit à ce triangle.
3. Si σ est une arête du bord alors le centre $x_{\mathcal{L}}$ associé à cette arête sera le milieu de σ .

A partir de ces données nous pouvons maintenant assembler les matrices permettant d'écrire le Problème I.1 sous forme matricielle.

I.6.2 Ecriture sous forme matricielle

Numériquement, la résolution du Problème discret I.1 se fait sous forme matricielle. Dans le cas de conditions aux limites de Neumann, il nous suffit de construire deux matrices : la matrice du Laplacien $A_{\mathfrak{M}}$ et la matrice de masse $M_{\mathfrak{M}}$. Notons $N_{\mathfrak{M}} = \text{Card}(\mathfrak{M})$, alors ces matrices sont définies de la manière suivante :

- La matrice du Laplacien $A_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{M}}, N_{\mathfrak{M}}}$ telle que pour tout $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$,

$$A_{\mathfrak{M}} u_{\mathfrak{M}} = \left(\left(- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathfrak{M}}^{\text{int}}} m_{\sigma} \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \right).$$

- La matrice de masse $M_{\mathfrak{M}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{M}}, N_{\mathfrak{M}}}$ telle que,

$$\text{diag}(M_{\mathfrak{M}}) = (m_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \langle M_{\mathfrak{M}} u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}} \rangle = (u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}};$$

où nous avons noté $\text{diag}(M_{\mathfrak{M}})$ la diagonale de la matrice $M_{\mathfrak{M}}$.

Ainsi, nous pouvons écrire le Problème I.1 sous la forme suivante :

Problème I.35

Supposons $c_{\mathfrak{M}}^n \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ donné. Trouver $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ tels que,

$$\begin{cases} M_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^{n+1} + \Gamma_b \Delta t A_{\mathfrak{M}} \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = M_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^n, \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathfrak{M}} d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - M_{\mathfrak{M}} \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

Par définition de la matrice du Laplacien $A_{\mathfrak{M}}$, nous devons calculer le rapport suivant (appelé transmissivité) :

$$\text{flux} := \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} = \text{mesh.ares}(\text{:, _MES}) ./ \text{mesh.ares}(\text{:, _DKL});$$

Pour la matrice de masse, nous calculons la valeur des demi-diamants :

$$\begin{aligned} \text{MES_D_K} &= \text{mesh.ares}(\text{:, _MES_K_KS}) + \text{mesh.ares}(\text{:, _MES_K_LS}); \\ \text{MES_D_L} &= \text{mesh.ares}(\text{:, _MES_L_KS}) + \text{mesh.ares}(\text{:, _MES_L_LS}); \end{aligned}$$

Nous assemblons chacune des matrices par arêtes.

```
// Pour toutes les arêtes
A(mesh.ares(:, _K), mesh.ares(:, _K)) ← +flux;
M(mesh.ares(:, _K), mesh.ares(:, _K)) ← +MES_D_K;
// Seulement pour les arêtes intérieures
v_INT = find(mesh.ares(:, _L) > 0);
A(mesh.ares(v_INT, _K), mesh.ares(v_INT, _L)) ← -flux(v_INT);
A(mesh.ares(v_INT, _L), mesh.ares(v_INT, _L)) ← +flux(v_INT);
A(mesh.ares(v_INT, _L), mesh.ares(v_INT, _K)) ← -flux(v_INT);
M(mesh.ares(v_INT, _L), mesh.ares(v_INT, _L)) ← +MES_D_L(v_INT);
```

où la notation $a \leftarrow \pm b$ signifie $a = a \pm b$.

I.6.3 Traitement du terme non-linéaire

Pour chacune des discrétisations du potentiel de Cahn-Hilliard f_b , nous devons résoudre un système non-linéaire et donc à chaque itération $n \in \{1, \dots, N\}$ nous utilisons une méthode de Newton. A l'itération $n + 1$, la solution $(c_{\mathfrak{M}}^n, \mu_{\mathfrak{M}}^n)$ du Problème I.35 à l'instant t^n est connu. Nous cherchons $(c_{\mathfrak{M}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ solution de $F(X, Y) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ définie par :

$$F(X, Y) = \begin{pmatrix} M_{\mathfrak{M}} X + \Gamma_b \Delta t A_{\mathfrak{M}} Y - M_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^n \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathfrak{M}} X + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathfrak{M}} d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, X) - M_{\mathfrak{M}} Y \end{pmatrix}.$$

Le principe de la méthode de Newton associée à cette fonction F est le suivant :

Algorithme I.36 (Méthode de Newton pour les CL de Neumann)• *Initialisation :*

- $u_{\mathfrak{M}}^0 = c_{\mathfrak{M}}^n$ et $v_{\mathfrak{M}}^0 = \mu_{\mathfrak{M}}^n$;
- Critère d'arrêt : eps ;
- Erreur : $\text{err}(0) = 1$.

• *Algorithme : Tant que $\text{err}(i) > \text{eps}$, nous calculons :*

$$w_{\mathfrak{M}}^{i+1} = w_{\mathfrak{M}}^i - DF^{-1}(w_{\mathfrak{M}}^i)F(w_{\mathfrak{M}}^i) \quad \text{et} \quad \text{err}(i+1) = \frac{\|w_{\mathfrak{M}}^{i+1} - w_{\mathfrak{M}}^i\|}{\|w_{\mathfrak{M}}^i\|}$$

où $w_{\mathfrak{M}}^i$ est le vecteur $\begin{pmatrix} u_{\mathfrak{M}}^i \\ v_{\mathfrak{M}}^i \end{pmatrix}$.

• *Lorsque nous obtenons $i=i_{n+1}$ tel que $\text{err}(i_{n+1}) < \text{eps}$ nous posons $c_{\mathfrak{M}}^{n+1} = u_{\mathfrak{M}}^{i_{n+1}}$ et $\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = v_{\mathfrak{M}}^{i_{n+1}}$.***Remarque I.37**

Le calcul du terme $DF^{-1}(w_{\mathfrak{M}}^i)F(w_{\mathfrak{M}}^i)$ se fait en résolvant le système linéaire :

$$DF(w_{\mathfrak{M}}^i)z_{\mathfrak{M}}^i = F(w_{\mathfrak{M}}^i) \quad \text{avec} \quad DF(w_{\mathfrak{M}}^i) = \begin{pmatrix} M_{\mathfrak{M}} & \Gamma_b \Delta t A_{\mathfrak{M}} \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathfrak{M}} + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathfrak{M}} Dd^{f_b}(u_{\mathfrak{M}}^i) & -M_{\mathfrak{M}} \end{pmatrix},$$

où $Dd^{f_b}(u_{\mathfrak{M}}^i)$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à la dérivée de d^{f_b} par rapport à la seconde variable au point $(c_{\mathfrak{M}}^n, u_{\mathfrak{M}}^i)$.

Pour chacune des discrétisations, la méthode de Newton converge très rapidement (en moins de 5 itérations en prenant $\text{eps}=10^{-6}$). Ainsi, l'utilisation d'une discrétisation implicite ou semi-implicite plutôt qu'une discrétisation explicite du terme non-linéaire, qui engendrerait une condition de stabilité, n'augmente pas significativement le temps de calcul vu que nous pouvons prendre des Δt sensiblement plus grands.

I.7 Illustrations numériques

Dans cette section, nous présentons quelques résultats numériques qui illustrent les différents comportements du modèle de Cahn-Hilliard. Pour chacun des cas tests, nous utiliserons une discrétisation semi-implicite du terme non-linéaire $f_b(c) = c^2(1-c)^2$.

Pour tous les domaines utilisés, nous utilisons un maillage constitué de triangles Delaunay et pour toute maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ le centre $x_{\mathcal{K}}$ est le centre du cercle circonscrit au triangle $\mathcal{K}$, donc la condition d'orthogonalité est bien vérifiée.

I.7.1 Dynamique de l'interface

Ce cas test illustre la stabilité de l'épaisseur d'interface proche de ε . Il est réalisé sur le carré unité avec les paramètres suivants : la mobilité $\Gamma_b = 4$, la tension de surface $\sigma_b = 0.25$ et l'épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.25$. Nous choisissons un pas de temps $\Delta t = 10^{-4}$ et le pas du maillage est $\text{size}(\mathfrak{M}) = 0.04$.

La donnée initiale dépend seulement de la composante en x et est définie par :

$$c^0(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{2(x - 0.5)}{10\varepsilon} \right) \right), \quad \forall x, y \in [0, 1]^2.$$

En une dimension le profil d'équilibre (cf Figure I.3) donné par :

$$c_{eq}(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{2(x - 0.5)}{\varepsilon} \right) \right), \quad \forall x, y \in [0, 1]^2,$$

est obtenu en résolvant le problème suivant en dimension infinie :

$$\begin{cases} -\frac{3}{2}\varepsilon\sigma_b c_{eq}'' + \frac{12}{\varepsilon}\sigma_b f_b'(c_{eq}(x)) = 0, & \forall x \in \mathbb{R}, \\ \lim_{+\infty} c_{eq} = 1, & \lim_{-\infty} c_{eq} = 0, & c_{eq}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

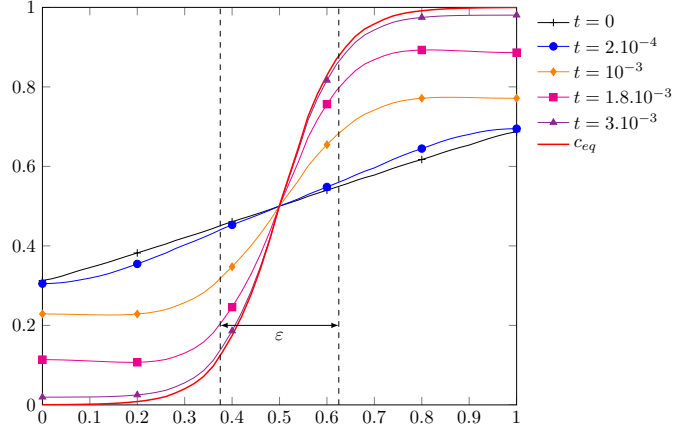


Figure I.3: Evolution du paramètre d'ordre

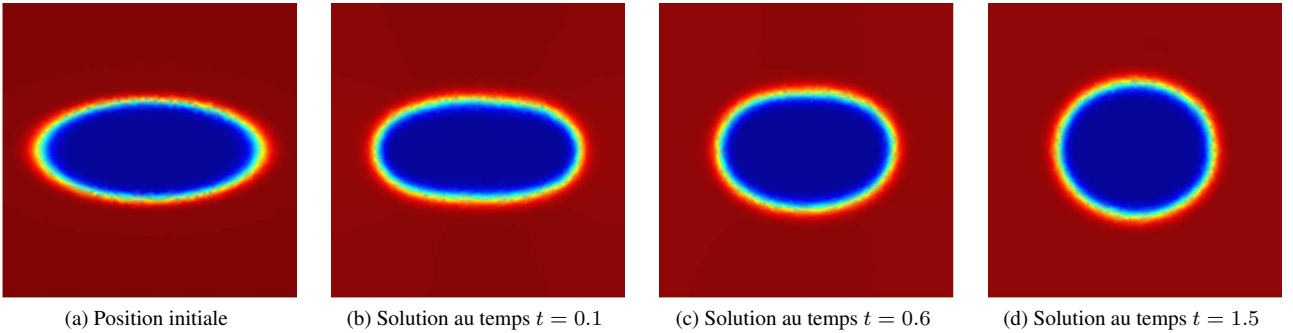
En réalisant une coupe suivant le plan $y = 0.5$, nous traçons sur la Figure I.3 le profil du paramètre d'ordre à différents instants ainsi que le profil d'équilibre c_{eq} . Nous observons bien l'évolution du paramètre d'ordre vers la solution stationnaire.

I.7.2 Minimisation de la longueur de l'interface

Ce test est réalisé sur le domaine $] -0.2, 0.2[^2$ avec les paramètres suivants : une mobilité $\Gamma_b = 10^{-4}$, une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.02$ et une tension de surface entre les deux phases $\sigma_b = 1$. Le pas du maillage est $\text{size}(\mathfrak{M}) = 10^{-2}$ et le pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$. Le donnée initiale est une bulle ellipsoïdale (cf Figure I.4a) définie par :

$$c^0(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{2}{\varepsilon} \left[\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + a^2 y^2} - 0.1 \right] \right) \right]; \quad \text{avec } a = 1.5.$$

Le système de Cahn-Hilliard va tendre à minimiser la longueur de l'interface sous contrainte de conservation du volume. La Figure I.4 montre l'évolution de la forme de l'interface qui va tendre vers une position d'équilibre avec une interface circulaire.



(a) Position initiale

(b) Solution au temps $t = 0.1$

(c) Solution au temps $t = 0.6$

(d) Solution au temps $t = 1.5$

Figure I.4: Evolution de la position de l'interface

I.7.3 Décomposition spinodale

Ce test est réalisé sur le carré unité avec les paramètres suivants : une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.05$, une mobilité $\Gamma_b = 0.08$ et une tension de surface $\sigma_b = 0.004$. Le pas de temps est $\Delta t = 10^{-3}$ et le pas d'espace est $\text{size}(\mathfrak{M}) \sim 0.04$. La donnée initiale est une concentration aléatoire comprise entre 0.49 et 0.51.

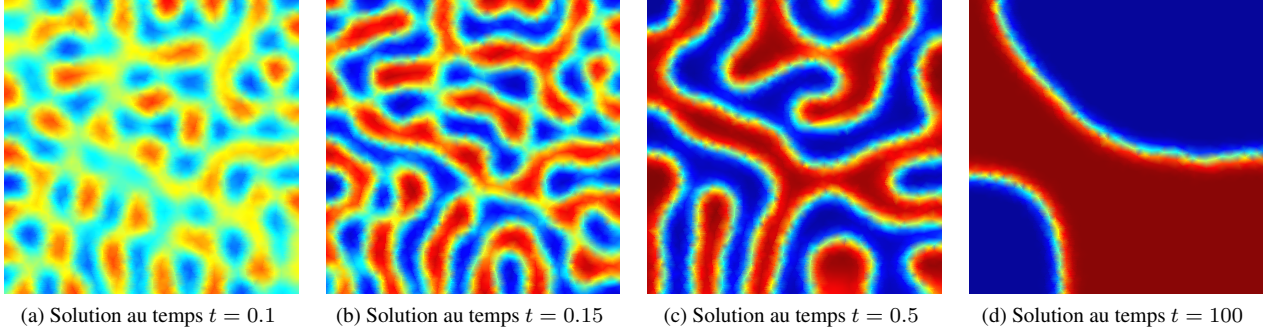


Figure I.5: Dynamique de séparation de phases

La Figure I.5 montre l'évolution du mélange : la concentration initiale est homogène avec une très faible perturbation aléatoire, puis dans un premier temps une séparation de phases s'effectue rapidement et les phases pures vont finalement se regrouper entre elles pour former des motifs plus gros. Notons qu'au temps $t = 100$ la solution stationnaire n'est pas encore atteinte. Une fois celle-ci atteinte il ne restera que deux zones : l'une composée de la phase pure $c = 0$ et l'autre composée de la phase pure $c = 1$. Les résultats que nous obtenons ici sont bien en accord avec ceux observés dans la littérature lors du phénomène de séparation de phase (cf par exemple [EF87, Ell89, Fur01b, WKG06, SCM08]).

I.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté un nouveau schéma pour la discrétisation du modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann.

L'étude de ce schéma nous a permis d'obtenir des résultats d'existence et de convergence des solutions approchées et nous avons établi une estimation d'erreur d'ordre 1 pour le schéma complètement discrétisé.

Numériquement, nous avons pu observer différents comportements connus du système de Cahn-Hilliard et ainsi valider le schéma proposé.

Ce chapitre nous a donc permis de valider le schéma volumes finis VF4 pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann et représente la première étape vers l'étude de problèmes et de schémas plus complexes.

Chapitre II

Discrétisation de l'opérateur de Laplace-Beltrami

Dans le Chapitre III, nous étudierons le modèle de Cahn-Hilliard associé à des conditions aux limites dites dynamiques dans lesquelles la géométrie du domaine ainsi que l'opérateur de Laplace-Beltrami posé sur $\partial\Omega$ interviennent. Le but de ce chapitre est dans un premier temps d'introduire l'opérateur de Laplace-Beltrami et le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel ainsi que leurs discrétisations par une méthode volumes finis. D'autre part, nous étudions le comportement du schéma VF4 introduit dans le chapitre précédent lorsque le domaine n'est plus polygonal mais un domaine suffisamment régulier quelconque.

Notons cependant que les résultats de ce chapitre pourraient également être utilisés à d'autres fins, comme par exemple pour des méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz. En effet, dans [Jap98] l'auteur introduit un algorithme de Ventcel-Schwarz dans lequel la condition de raccord entre les différents sous-domaines fait intervenir une condition de Ventcel ce qui permet d'améliorer la vitesse de convergence de l'algorithme de Schwarz. De plus, dans [HH14] les auteurs s'intéressent à cet algorithme de Ventcel-Schwarz en utilisant une discrétisation de type volumes finis. L'étude de la discrétisation volumes finis d'une équation ayant des conditions aux limites de Ventcel sur un domaine courbe (et non plus polygonal) peut donc être intéressante pour des applications en décomposition de domaines.

Nous commençons notre étude par le problème de Laplace-Beltrami sur une courbe fermée (Section II.1) puis nous l'élargissons au cas du problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel (Section II.2). Nous établissons des relations entre les approximations des quantités géométriques (dus à la présence d'un domaine courbe) que nous utilisons et leur valeur exacte qui nous permettent de démontrer des résultats d'estimations d'erreur (Théorèmes II.11 et II.19). Dans la Section II.3 nous complétons la description de l'implémentation effectuée durant cette thèse et nous présentons dans la Section II.4 des estimations d'erreur numériques qui d'une part, illustre le résultat démontré dans le Théorème II.19 et d'autre part, permettent de montrer l'intérêt des schémas de type volumes finis pour des domaines non polygonaux.

Dans ce qui suit, nous nous plaçons sur un domaine Ω ouvert, borné, connexe et régulier de $\mathbb{R}^2$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$ et nous choisissons une orientation de Γ (nous renvoyons à l'Annexe pour plus de précisions sur Γ).

II.1 Le problème de Laplace-Beltrami sur un domaine courbe 1D

Dans cette section, nous considérons le problème suivant posé sur la courbe régulière Γ .

Trouver $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$-\Delta_\Gamma u + u = g \text{ sur } \Gamma, \quad (\text{II.1})$$

avec $g \in L^2(\Gamma)$.

II.1.1 Construction d'un maillage associé à Γ

Notations : Pour construire un maillage $\partial\mathcal{M}$ (cf Fig. II.1) associé à Γ , nous décomposons Γ en arcs de courbe notés $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$ et appelés mailles ou volumes de contrôle tels que $\Gamma = \cup_{\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}} \mathcal{L}$. Nous notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets du maillage $\partial\mathcal{M}$.

Pour tout volume de contrôle $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$, nous définissons :

- $m_{\mathcal{L}}$ sa longueur;
- un point $x_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}$ que nous appelons le centre de la maille $\mathcal{L}$;
- e (ou $e_{\mathcal{L}}$) la corde associée à $\mathcal{L}$ et m_e sa longueur;
- $y_{\mathcal{L}}$ le point d'intersection entre la corde e et la perpendiculaire e passant par $x_{\mathcal{L}}$;
- $\mathcal{V}_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des sommets de la maille $\mathcal{L}$.

Pour tout sommet $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}'$ séparant les mailles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$, nous notons :

- $d_{\mathcal{L},\mathbf{v}}$ la distance entre le sommet $\mathbf{v}$ et le centre $y_{\mathcal{L}}$: c'est une approximation de la mesure $m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}$ de l'arc $\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}} \subset \mathcal{L}$ dont les extrémités sont le centre $x_{\mathcal{L}}$ et le sommet $\mathbf{v}$;
- $d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = d_{\mathcal{L},\mathbf{v}} + d_{\mathcal{L}',\mathbf{v}}$: c'est une approximation de la mesure $m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}$ de l'arc $\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'} \subset \Gamma$ passant par le sommet $\mathbf{v}$ et dont les extrémités sont les centres $x_{\mathcal{L}}$ et $x_{\mathcal{L}'}$;
- $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = \pm 1$ tel que $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = -n_{\mathbf{v}\mathcal{L}'}$, donc $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}}$ donne une orientation de la courbe $\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}$ en fonction de l'orientation donnée à la courbe Γ : $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = 1$ si l'orientation de Γ va de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$.

Le pas du maillage est défini par $\text{size}(\partial\mathcal{M}) = \sup\{m_{\mathcal{L}}, \mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}\}$.

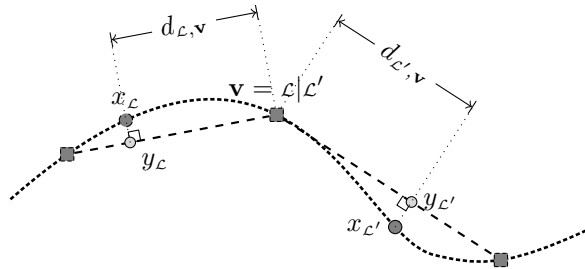


Figure II.1: Notations du maillage $\partial\mathcal{M}$

Inconnues discrètes : L'approximation TPFA de (II.1) associe à chaque maille $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$, une inconnue scalaire $u_{\mathcal{L}}$. Nous définissons alors la fonction constante par morceaux $u_{\partial\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{M}}$ de la manière suivante :

$$u_{\partial\mathcal{M}} = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}} u_{\mathcal{L}} 1_{\mathcal{L}} \in L^{\infty}(\Gamma),$$

où $1_{\mathcal{L}}$ désigne la fonction indicatrice de la maille $\mathcal{L}$.

Définitions des projection discrètes : Nous définissons deux projections sur le maillage $\partial\mathcal{M}$: la projection moyenne $\mathbb{P}_{\partial\mathcal{M}}^m$ et la projection centrée $\mathbb{P}_{\partial\mathcal{M}}^c$.

Définition II.1 (Projection moyenne sur le maillage $\partial\mathcal{M}$)

Nous définissons la projection moyenne sur le maillage $\partial\mathcal{M}$ de la manière suivante. Pour toute fonction u intégrable sur Γ ,

$$\mathbb{P}_{\partial\mathcal{M}}^m u = (\mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u)_{\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u = \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} u(x) d\sigma(x), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}.$$

Définition II.2 (Projection centrée sur le maillage $\partial\mathfrak{M}$)

La projection centrée sur le maillage $\partial\mathfrak{M}$ est définie de la manière suivante. Pour toute fonction u continue sur Γ ,

$$\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^c u = (\mathbb{P}_{\mathcal{L}}^c u)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^c u = u(x_{\mathcal{L}}), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}.$$

Le résultat suivant est alors immédiat.

Lemme II.3

Soit $u \in H^1(\Gamma)$, alors il existe une constante $C_{15} > 0$ indépendante de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ telle que :

$$\|u - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^c u\|_{L^2(\Gamma)} \leq C_{15} \text{size}(\partial\mathfrak{M}) \|u\|_{H^1(\Gamma)}.$$

II.1.2 Définitions et propriétés sur le maillage $\partial\mathfrak{M}$ **Proposition II.4**

Pour toute maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, la relation suivante est vérifiée :

$$m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^3).$$

En particulier, il existe $C_{\Gamma} > 0$ indépendant de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ tel que $m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \leq m_{\mathcal{L}} \leq C_{\Gamma} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}$.

Démonstration : Soit $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ les deux sommets de la maille $\mathcal{L}$, alors les formules de Taylor nous donnent :

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} + m_{\mathcal{L}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \frac{m_{\mathcal{L}}^2}{2} \vec{\tau}'_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^3),$$

où $\vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est le vecteur tangent à $\mathcal{L}$ allant de $\mathbf{v}$ vers $\mathbf{w}$.

Nous avons alors,

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2 &= |\mathbf{v} - \mathbf{w}|^2 \\ &= \left\langle m_{\mathcal{L}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \frac{m_{\mathcal{L}}^2}{2} \vec{\tau}'_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^3), m_{\mathcal{L}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \frac{m_{\mathcal{L}}^2}{2} \vec{\tau}'_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^3) \right\rangle \\ &= m_{\mathcal{L}}^2 + m_{\mathcal{L}}^3 \langle \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}), \vec{\tau}'_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(\mathbf{v}) \rangle + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^4). \end{aligned}$$

En remarquant que pour tout $x \in \mathcal{L}$, $\langle \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x), \vec{\tau}'_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x) \rangle = 0$, nous obtenons :

$$m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2 = m_{\mathcal{L}}^2 + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^4) \tag{II.2}$$

et donc :

$$m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} = m_{\mathcal{L}} \sqrt{1 + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^2)} = m_{\mathcal{L}} (1 + \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^2)),$$

ce qui conclut la preuve. ■

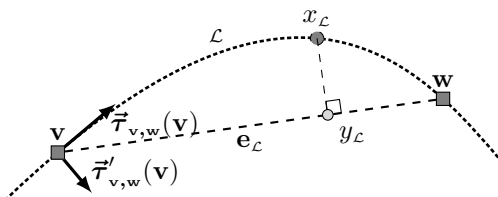


Figure II.2: Notations utilisées dans la démonstration de la Proposition II.4

Définition II.5 (Définition formelle de $y_{\mathcal{L}}$)

Pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, le point $y_{\mathcal{L}}$ peut être défini par la relation :

$$y_{\mathcal{L}} = \mathbf{v} + \left\langle \frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}, (x_{\mathcal{L}} - \mathbf{v}) \right\rangle \frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}},$$

où $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont les deux sommets de la maille $\mathcal{L}$.

Proposition II.6

Considérons une maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ et un sommet $\mathbf{v}$ de $\mathcal{L}$, alors la relation suivante est vérifiée :

$$m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} - d_{\mathcal{L},\mathbf{v}} = \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}).$$

Démonstration : Notons $\mathbf{w}$ le second sommet de la maille $\mathcal{L}$, alors les formules de Taylor impliquent :

$$\mathbf{v} = x_{\mathcal{L}} - m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}^2), \quad (\text{II.3})$$

$$\mathbf{w} = x_{\mathcal{L}} + m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{w}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{w}}}^2), \quad (\text{II.4})$$

où nous rappelons que $\vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}$ est le vecteur tangent à $\mathcal{L}$ allant de $\mathbf{v}$ vers $\mathbf{w}$.

Soustrayons les équations (II.3) et (II.4), en remarquant que $m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} + m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{w}}} = m_{\mathcal{L}}$ nous obtenons :

$$\frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} = \frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right). \quad (\text{II.5})$$

La Définition II.5 et les égalités (II.3) et (II.5) permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} y_{\mathcal{L}} - \mathbf{v} &= \left\langle \frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right), m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}^2) \right\rangle \left(\frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right) \right) \\ &= \left(\frac{m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right) \right) \left(\frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right) \right) \\ &= \frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \frac{m_{\mathcal{L}}^3}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}\right) \end{aligned}$$

ce qui donne,

$$d_{\mathcal{L},\mathbf{v}} - m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} = |y_{\mathcal{L}} - \mathbf{v}| - m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} = \frac{m_{\mathcal{L}}^2 - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} m_{\mathcal{L}}^3}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}\right).$$

L'équation (II.2) et la Proposition II.4 permettent alors de conclure. ■

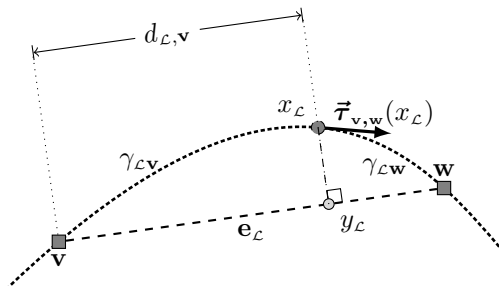


Figure II.3: Notations utilisées dans la démonstration de la Proposition II.6

Produits scalaires sur $\partial\mathfrak{M}$: Nous allons maintenant définir deux produits scalaires L^2 -discrets sur $\mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$: un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Gamma)}$ qui utilise les longueurs exactes des arcs $\mathcal{L}$ et un produit scalaire $(\cdot, \cdot)_{\partial\mathfrak{M}}$ qui utilise les valeurs des cordes correspondantes. Pour tout $u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$,

$$(u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)} = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} u_{\mathcal{L}} v_{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad (u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}})_{\partial\mathfrak{M}} = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} v_{\mathcal{L}},$$

et nous notons $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ et $\|\cdot\|_{0,\partial\mathfrak{M}}$ les normes correspondantes.

De la même manière nous introduisons deux normes L^p -discrètes dans $\mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$,

$$\|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^p(\Gamma)}^p = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}}|^p \quad \text{et} \quad \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,p,\partial\mathfrak{M}}^p = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} |u_{\mathcal{L}}|^p. \quad \forall u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}.$$

Nous pouvons alors remarquer que ces normes sont équivalentes et les constantes sont indépendantes de $\text{size}(\mathcal{T})$ (cf Proposition II.4).

Nous définissons également un semi-produit scalaire H^1 -discret sur Γ de la manière suivante :

$$[[u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}}]]_{1,\partial\mathfrak{M}} = \sum_{\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \right) \left(\frac{v_{\mathcal{L}} - v_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \right), \quad \forall u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}};$$

ainsi que la semi-norme correspondante $|\cdot|_{1,\partial\mathfrak{M}}$.

Pour finir, nous définissons la norme H^1 -discrète sur Γ par :

$$\|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 = \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 + |u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2, \quad \forall u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}.$$

II.1.3 Approximation TPFA de l'opérateur de Laplace-Beltrami

Définitions et propriétés des opérateurs tangentiels

Les définitions et les principales propriétés des opérateurs différentiels mis en jeu sont rappelées dans l'Annexe.

Pour obtenir l'approximation TPFA associée à ce problème, le principe est le même que dans le chapitre précédent. Nous intégrons l'équation (II.1) sur chaque maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{L}} g(x) d\sigma(x) &= \int_{\mathcal{L}} -\Delta_{\Gamma} u(x) d\sigma(x) + \int_{\mathcal{L}} u(x) d\sigma(x) \\ &= \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} -\nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}(\mathbf{v}) + \int_{\mathcal{L}} u(x) d\sigma(x); \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

où $\vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}} = n_{\mathbf{v},\mathcal{L}} \vec{\tau}$ est le vecteur unitaire tangent à Γ allant de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$.

Proposition II.7

Le gradient tangentiel de $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ au sommet $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}'$ satisfait l'estimation :

$$\left| \frac{u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} - \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}(\mathbf{v}) \right| \leq \int_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} |(u \circ \varphi)''(\varphi^{-1}(x))| d\sigma(x),$$

où φ est la paramétrisation choisie de Γ (voir Annexe).

Démonstration : Considérons les points $t_{\mathcal{L}}, t_{\mathcal{L}'}, t_{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}$ tels que $x_{\mathcal{L}} = \varphi(t_{\mathcal{L}})$, $x_{\mathcal{L}'} = \varphi(t_{\mathcal{L}'})$ et $\mathbf{v} = \varphi(t_{\mathbf{v}})$, alors les formules de Taylor à l'ordre 2 nous donnent :

$$\begin{aligned} u(x_{\mathcal{L}'} - u(x_{\mathcal{L}})) &= (u(\varphi(t_{\mathcal{L}'})) - u(\varphi(t_{\mathbf{v}}))) - (u(\varphi(t_{\mathcal{L}})) - u(\varphi(t_{\mathbf{v}}))) \\ &= (t_{\mathcal{L}'} - t_{\mathbf{v}})(u \circ \varphi)'(t_{\mathbf{v}}) + \int_{t_{\mathbf{v}}}^{t_{\mathcal{L}'}} (t_{\mathcal{L}'} - s)(u \circ \varphi)''(s) ds \\ &\quad - (t_{\mathcal{L}} - t_{\mathbf{v}})(u \circ \varphi)'(t_{\mathbf{v}}) - \int_{t_{\mathbf{v}}}^{t_{\mathcal{L}}} (t_{\mathcal{L}} - s)(u \circ \varphi)''(s) ds. \end{aligned}$$

En remarquant que $t_{\mathcal{L}'} - t_{\mathcal{L}} = m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} n_{\mathbf{v},\mathcal{L}}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} - \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}(\mathbf{v}) &= \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} \int_{t_{\mathbf{v}}}^{t_{\mathcal{L}'}} (t_{\mathcal{L}'} - s)(u \circ \varphi)''(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} \int_{t_{\mathcal{L}}}^{t_{\mathbf{v}}} (t_{\mathcal{L}} - s)(u \circ \varphi)''(s) ds, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure la preuve. ■

Nous définissons alors le gradient tangentiel discret de la manière suivante.

Définition II.8 (Gradient tangentiel discret)

L'opérateur de gradient tangentiel discret $\nabla_{\Gamma}^{\partial\mathfrak{M}} : \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{V}}$ est tel que pour tout $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$,

$$\nabla_{\Gamma}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}} = (\nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}})_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}}, \text{ avec } \nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}} = \frac{u_{\mathcal{L}'} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} n_{\mathbf{v}\mathcal{L}}, \quad \forall \mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}.$$

Rappelons que $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = 1$ si la courbe Γ est orientée de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$ et $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = -1$ si Γ est orientée de $\mathcal{L}'$ vers $\mathcal{L}$.

Principe du schéma TPFA pour l'opérateur de Laplace-Beltrami

L'approximation TPFA de l'équation (II.1) s'écrit alors :

Problème II.9 (Formulation VF du problème de Laplace-Beltrami)

Trouver $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$ tel que :

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} -\nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}} n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} + m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} = m_{\mathcal{L}} \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m g, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{II.7})$$

Notons que ce schéma fait simplement intervenir les coordonnées des sommets $\mathbf{v}$ du maillage $\partial\mathfrak{M}$. Toutes les autres quantités géométriques que nous utilisons sont calculées à partir de ces coordonnées. En effet, d'un point de vue numérique, nous ne connaissons pas forcément l'équation de la courbe Γ lorsque nous programmons ce schéma. Les seules informations à notre disposition sont les coordonnées des sommets du maillage $\partial\mathfrak{M}$. C'est la raison pour laquelle nous devons approcher les valeurs réelles des quantités géométriques qui interviennent dans ce schéma.

Proposition II.10

Considérons une solution $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$ au Problème II.9, alors il existe une constante $C_{16} > 0$ indépendante de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ telle que :

$$|u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0, \partial\mathfrak{M}}^2 \leq C_{16} \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Démonstration : Considérons une solution $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$ au Problème II.9. Pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, multiplions alors l'équation (II.7) par $u_{\mathcal{L}}$ puis sommions sur l'ensemble des mailles $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, nous obtenons :

$$|u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0, \partial\mathfrak{M}}^2 = (\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m g, u_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, puis le fait que les normes $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ et $\|\cdot\|_{0, \partial\mathfrak{M}}$ sont équivalentes et enfin l'inégalité de Young nous pouvons conclure la preuve. ■

II.1.4 Estimation d'erreur

Nous montrons dans cette section qu'en réalisant une approximation polygonale de la courbe Γ (obtenue en reliant entre eux les sommets du maillage $\partial\mathfrak{M}$ en parcourant la courbe dans le sens horaire) le schéma volumes finis TPFA pour le problème de Laplace-Beltrami sur Γ est d'ordre 1.

L'erreur $e_{\partial\mathfrak{M}}$ du problème (II.1) est définie de la manière suivante :

$$e_{\partial\mathfrak{M}} = u_{\partial\mathfrak{M}} - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^c u.$$

Théorème II.11

Supposons que la solution u du problème continu (II.1) appartienne à $H^2(\Gamma)$. Considérons la solution $u_{\partial\mathfrak{M}}$ du Problème discret II.9. Alors, il existe une constante $C_{17} > 0$ indépendante de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ telle que :

$$|e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_{17} \text{size}(\partial\mathfrak{M})^2 \left(\|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u\|_{H^2(\Gamma)}^2 \right).$$

Nous décomposons la preuve de ce résultat en deux étapes. Dans un premier temps (cf Proposition II.12) nous majorons l'erreur H^1 -discrète par la somme de l'erreur de consistance $R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ (due au terme de Laplace-Beltrami) et de l'erreur de consistance $R_{\partial\mathfrak{M}}^u$ sur u qui contient également l'erreur due à l'approximation polygonale. Il nous restera ensuite à estimer ces deux erreurs de consistance pour démontrer le Théorème II.11

Proposition II.12

Considérons la solution u du problème (II.1) et la solution $u_{\partial\mathfrak{M}}$ du Problème discret II.9, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$|e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + \|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \quad (\text{II.8})$$

où nous avons noté :

$$R_{\mathbf{v},\mathcal{L}} = u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}}) - d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}, \quad \forall \mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V};$$

$$R_{\partial\mathfrak{M}}^u = (R_{\mathcal{L}}^u)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \quad \text{avec } R_{\mathcal{L}}^u = \frac{(m_{\mathcal{L}} - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}})}{m_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} + \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} (u(x) - u(x_{\mathcal{L}})) d\sigma(x), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}.$$

Démonstration de la Proposition II.12 : Commençons par soustraire l'équation (II.6) du problème continu au Problème discret II.9. Ainsi, pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, nous obtenons :

$$\sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} -(\nabla_{\Gamma,\mathbf{v}}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}} n_{\mathbf{v},\mathcal{L}} - \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}) + (m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}}) u_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}} e_{\mathcal{L}} + \int_{\mathcal{L}} (u(x_{\mathcal{L}}) - u(x)) d\sigma(x) = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \frac{e_{\mathcal{L}} - e_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + m_{\mathcal{L}} e_{\mathcal{L}} = \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + m_{\mathcal{L}} R_{\mathcal{L}}^u.$$

Multiplions maintenant cette équation par $e_{\mathcal{L}}$ et sommons sur $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$:

$$|e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} R_{\mathbf{v},\mathcal{L}} \frac{e_{\mathcal{L}} - e_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + (R_{\partial\mathfrak{M}}^u, e_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)};$$

où nous avons utilisé la relation de conservativité $R_{\mathbf{v},\mathcal{L}} = -R_{\mathbf{v},\mathcal{L}'}$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young nous permettent de conclure la preuve. ■

Fin de la démonstration du Théorème II.11 : Il nous suffit maintenant de majorer les termes du membre de droite de l'estimation (II.8).

- En utilisant la définition de $R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}$ donnée dans la Proposition II.12, nous pouvons écrire pour tout $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}$,

$$\frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} = (u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})) \left(\frac{1}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} - \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} \right) + \left(\frac{u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} - \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}} \right),$$

ce qui donne :

$$\frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \leq 2 \frac{(u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}}))^2}{m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} \frac{(m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} - d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'})^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} + 2 d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} \left(\frac{u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} - \nabla_{\Gamma} u(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}} \right)^2.$$

D'après la Proposition II.6, il existe une constante $C_{\Gamma} > 0$ indépendante de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ telle que :

$$\frac{(m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} - d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'})^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}} \leq C_{\Gamma} \text{size}(\partial\mathfrak{M})^2$$

et en utilisant le paramétrage normal φ de Γ , nous avons :

$$(u(x_{\mathcal{L}'}) - u(x_{\mathcal{L}})) = \int_{t_{\mathcal{L}}}^{t_{\mathcal{L}'}} (u \circ \varphi)'(t) dt = \int_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \nabla_{\Gamma} u(x) \cdot \vec{\tau}(x) d\sigma(x),$$

ce qui permet d'obtenir :

$$(u(x_{\mathcal{L}'})) - u(x_{\mathcal{L}}))^2 \leq m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} \int_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} |\nabla_{\Gamma} u(x)|^2 d\sigma(x).$$

En utilisant la Proposition II.7, nous pouvons alors écrire :

$$\sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \leq 2C_{\Gamma} \text{size}(\partial\mathfrak{M})^2 \left(\|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u\|_{H^2(\Gamma)}^2 \right). \quad (\text{II.9})$$

- La définition de $R_{\partial\mathfrak{M}}^u$ donne :

$$\begin{aligned} \|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq 2 \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \frac{(m_{\mathcal{L}} - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}})^2}{m_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}}^2 + 2 \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \left(\int_{\mathcal{L}} (u(x) - u(x_{\mathcal{L}})) d\sigma(x) \right)^2 \\ &\leq 2 \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \frac{(m_{\mathcal{L}} - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}})^2}{m_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}}^2 + 2 \|u - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^c u\|_{L^2(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Le Lemme II.3 et la Proposition II.4 permettent d'obtenir :

$$\|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2 \left(C_{\Gamma} \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 + C_{15} \|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right) \text{size}(\partial\mathfrak{M})^2 \quad (\text{II.10})$$

et la Proposition II.10 implique

$$\|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2 \left(C_{\Gamma} C_{16} \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C_{15} \|u\|_{H^1(\Gamma)}^2 \right) \text{size}(\partial\mathfrak{M})^2.$$

■

II.2 Le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel

Dans cette section, nous couplons le problème de Laplace sur un domaine Ω de $\mathbb{R}^2$ avec une condition aux limites sur la courbe Γ faisant intervenir l'opérateur de Laplace-Beltrami.

Le problème est le suivant : Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega; \end{cases} \quad (\text{II.11a})$$

$$\begin{cases} -\Delta_{\Gamma} u_{|\Gamma} + u_{|\Gamma} + \partial_n u = g & \text{sur } \Gamma; \end{cases} \quad (\text{II.11b})$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\Gamma)$ et $u_{|\Gamma}$ la trace de u sur Γ .

II.2.1 Maillage VF4 sur un domaine courbe

Pour obtenir un maillage $\mathcal{T}$ associé à ce type de problème, nous allons coupler les notations du maillage $\partial\mathfrak{M}$ de la section précédente avec celles du maillage $\mathfrak{M}$ du Chapitre I que nous modifierons un peu pour les adapter à la géométrie courbe du domaine. Les notations de ce maillage sont rassemblées sur la Figure II.4.

Maillage orthogonal admissible $\mathcal{T}$: Un maillage $\mathcal{T}$ de Ω est dit admissible s'il est constitué d'un maillage intérieur $\mathfrak{M}$ et d'un maillage du bord $\partial\mathfrak{M}$ tels que :

- Le maillage intérieur $\mathfrak{M}$ satisfait les propriétés énoncées dans la Section I.2.1 à ceci près que les mailles $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ possédant une arête sur le bord ne sont plus polygonales.
- Le maillage du bord $\partial\mathfrak{M}$ est celui décrit dans la Section II.1.1 en notant que les volumes de contrôle $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ sont les arêtes (qui sont en fait des arcs de courbes) des volumes de contrôle de $\mathfrak{M}$ incluses dans Γ . Notons que les éléments de $\partial\mathfrak{M}$ sont à la fois des arêtes du maillages $\mathfrak{M}$ et des volumes de contrôle du bord. C'est la raison pour laquelle nous utilisons deux notations différentes : lorsque nous les considérons comme des mailles du bord, nous les notons $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ alors que lorsque nous les considérons comme des arêtes (extérieures) du maillage $\mathfrak{M}$ nous les notons $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$. Nous imposons là aussi des conditions d'orthogonalité : pour toute maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ qui est également une arête σ de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous imposons que la droite reliant les centres $x_{\mathcal{L}}$ et $x_{\mathcal{K}}$ soit orthogonale à la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$.

Nous donnons maintenant les notations spécifiques à ce maillage.

Pour une maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ ayant une arête appartenant à $\partial\mathfrak{M}$, $\mathcal{K}$ n'est plus polygonal et peut même ne pas être convexe. Nous notons alors :

- $\underline{\mathcal{K}}$ le polygone formé par les sommets de $\mathcal{K}$, remarquons alors que $\underline{\mathcal{K}}$ peut ne pas être inclus dans Ω ;
- $m_{\mathcal{K}}$ (respectivement $m_{\underline{\mathcal{K}}}$) le mesure de $\mathcal{K}$ (respectivement $\underline{\mathcal{K}}$).

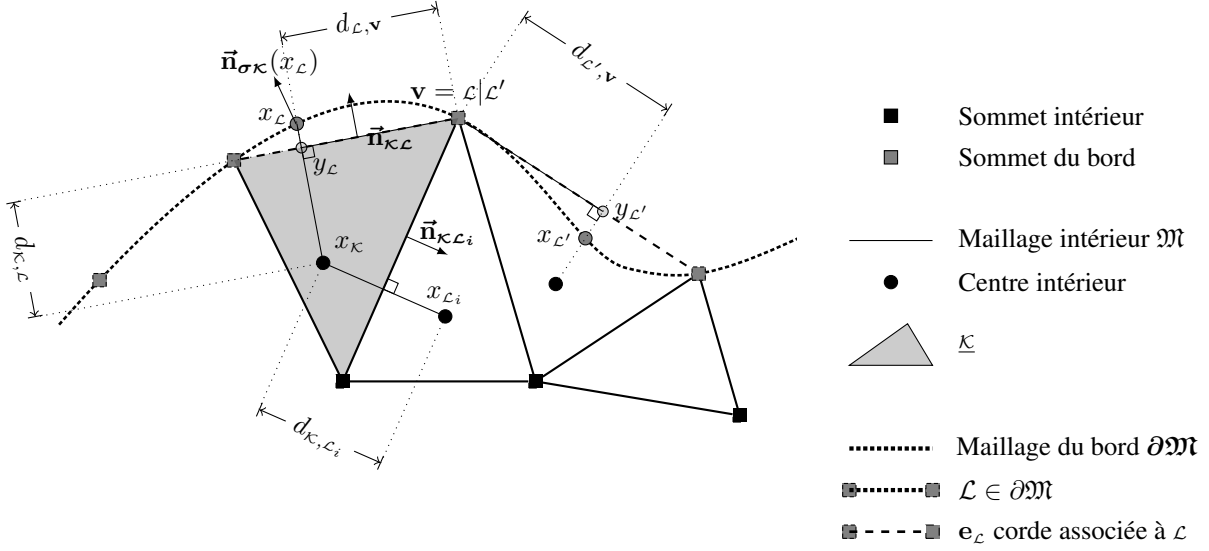


Figure II.4: Maillage $\mathcal{T}$ associé à Ω

Rappelons que $\mathcal{E}$ est l'ensemble des arêtes sur le maillage $\mathcal{T}$, $\mathcal{E}_{int}$ l'ensemble des arêtes intérieures et $\mathcal{E}_{ext}$ les arêtes extérieures (notons que $\mathcal{E}_{ext} = \partial\mathfrak{M}$). Les notations concernant les arêtes intérieures ont été décrites dans la section I.2.1 et ne changent pas. En ce qui concerne une arête du bord $\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{ext}$, nous définissons :

- m_{σ} sa longueur et m_e la longueur de la corde e associée à σ ;
- $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma} = \{tx + (1-t)x_{\mathcal{K}}, t \in [0, 1], x \in \sigma\}$ le diamant associé à σ . Nous définissons alors $\underline{\mathcal{D}}$ de la manière suivante : $\underline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$ et $\underline{\mathcal{D}}$ est le triangle dont les sommets sont les sommets de σ et le centre $x_{\mathcal{K}}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$;
- $m_{\mathcal{D}}$ la mesure de $\mathcal{D}$ et $m_{\underline{\mathcal{D}}}$ celle de $\underline{\mathcal{D}}$;
- $\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ la normale unitaire à la corde $e_{\mathcal{L}}$ sortante à $\mathcal{K}$ et $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ la distance entre les centres $x_{\mathcal{K}}$ et $y_{\mathcal{L}}$;
- $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)$ la normale unitaire à σ au point $x \in \sigma$ sortante à $\mathcal{K}$.

Par souci de simplicité, nous notons $\underline{\mathcal{K}} = \mathcal{K}$ si la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ n'a aucune arête sur le bord et nous introduisons la transmissivité :

$$a_{\sigma} = \begin{cases} \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} & \text{si } \sigma = \mathcal{K}|_{\mathcal{L}} \in \mathcal{E}_{int} \\ \frac{m_{e_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} & \text{si } \sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{K}} \end{cases}$$

Le pas du maillage est défini par $\text{size}(\mathcal{T}) = \sup\{\text{diam}(\mathcal{K}), \mathcal{K} \in \mathfrak{M}\}$ et la constante de régularité du maillage est celle définie dans la Section I.2.1 : $\text{reg}(\mathcal{T}) = \text{reg}(\mathfrak{M})$.

Inconnues discrètes : L'approximation VF4 associée à chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ et à chaque maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ une inconnue scalaire $u_{\mathcal{L}}$. Nous associons alors à la fonction discrète $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, un couple de fonctions $u_{\mathcal{T}} = (u_{\mathfrak{M}}, u_{\partial\mathfrak{M}})$ dans $L^{\infty}(\Omega) \times L^{\infty}(\Gamma)$.

II.2.2 Définitions et propriétés du maillage $\mathcal{T}$

Proposition II.13

Soit $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, alors :

$$m_{\mathcal{K}} - m_{\underline{\mathcal{K}}} = \mathcal{O}(\text{diam}(\mathcal{K})^3).$$

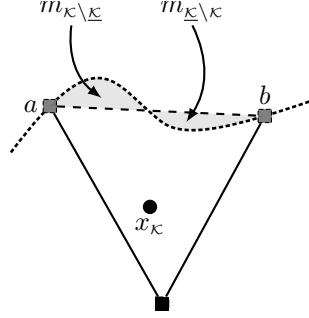


Figure II.5: Différences entre la maille $\mathcal{K}$ et son approximation $\underline{\mathcal{K}}$

Démonstration : Soit $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ tel que $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{ext} \neq \emptyset$ (si $\mathcal{E}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{ext} = \emptyset$, alors $\mathcal{K} = \underline{\mathcal{K}}$ et il n'y a rien à démontrer).

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\text{size}(\mathcal{T})$ assez petit et Γ assez régulière, de manière à ce que $\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{ext}$ soit localement le graphe d'une fonction régulière ϕ sur $[a, b]$. Notons ϕ_e l'équation affine de la corde associée à σ , alors :

$$m_{\mathcal{K}} - m_{\underline{\mathcal{K}}} = \int_a^b (\phi(x) - \phi_e(x)) dx$$

et il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que :

$$\phi(x) - \phi_e(x) = (x - a)(x - b) \frac{\phi''(\xi_x)}{2}.$$

Nous obtenons finalement,

$$|m_{\mathcal{K}} - m_{\underline{\mathcal{K}}}| \leq \frac{\|\phi''\|_{L^\infty}}{12} (b - a)^3,$$

où $\|\phi''\|_{L^\infty}$ ne dépend que de la courbure maximale de Γ .

En remarquant que $|b - a| \leq \text{diam}(\mathcal{K})$, nous pouvons conclure la preuve. ■

Proposition II.14

Considérons une maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ telle que $\mathcal{L} = \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ où $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ est une maille intérieure, alors :

$$d(x_{\mathcal{L}}, y_{\mathcal{L}}) = |d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}) - d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}| = \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}),$$

où $\mathbf{v}$ est un des deux sommets de la maille $\mathcal{L}$.

Démonstration : La Définition II.5 de $y_{\mathcal{L}}$ donne :

$$x_{\mathcal{L}} - y_{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{L}} - \mathbf{v} - \left\langle \frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}, (x_{\mathcal{L}} - \mathbf{v}) \right\rangle \frac{\mathbf{w} - \mathbf{v}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}},$$

et les égalités (II.3) et (II.5) permettent alors d'obtenir :

$$\begin{aligned} x_{\mathcal{L}} - y_{\mathcal{L}} &= m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}^2) \\ &\quad - \left\langle \frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}\right), m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}^2) \right\rangle \left(\frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}\right) \right) \\ &= m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}^2) - \left(\frac{m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}\right) \right) \left(\frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}\right) \right) \\ &= m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathbf{w}}(x_{\mathcal{L}}) \left(\frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2 - m_{\mathcal{L}}^2}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2} \right) + \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}} m_{\mathcal{L}}). \end{aligned}$$

L'égalité (II.2) permet de conclure la preuve. ■

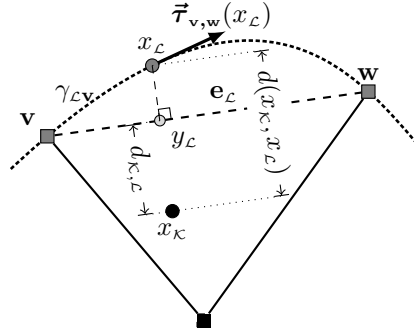


Figure II.6: Notations utilisées dans la démonstration de la Proposition II.14

Proposition II.15

Pour tout point $x \in \sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}$, l'égalité suivante est vérifiée :

$$\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x) - \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}).$$

Démonstration : Notons v et w les deux sommets de $\mathcal{L}$, alors en utilisant l'identité (II.5) au point $x \in \sigma$, nous avons :

$$\frac{w - v}{m_{e_{\mathcal{L}}}} = \frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{e_{\mathcal{L}}}} \vec{\tau}_{v,w}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{e_{\mathcal{L}}}}\right).$$

Or, par définition la normale $\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ est égale au vecteur $\frac{w-v}{m_{e_{\mathcal{L}}}}$ tourné de $\pm \frac{\pi}{2}$ et le vecteur $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)$ est égal au vecteur $\vec{\tau}_{v,w}(x)$ tourné de $\pm \frac{\pi}{2}$. Ainsi, en remarquant que $\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ et $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)$ sont des normales sortantes à Ω nous obtenons :

$$\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \frac{m_{\mathcal{L}}}{m_{e_{\mathcal{L}}}} \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x) + \mathcal{O}\left(\frac{m_{\mathcal{L}}^2}{m_{e_{\mathcal{L}}}}\right),$$

et la Proposition II.4 conclut la preuve. ■

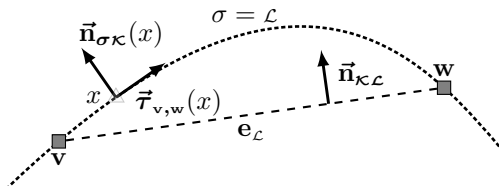


Figure II.7: Notations utilisées dans la démonstration de la Proposition II.15

Les différents produits scalaires et normes discrets sur Γ ont été décrits dans la Section II.1.1. En ce qui concerne le produit scalaire L^2 -discret dans Ω , nous définissons :

$$(u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}})_{\mathfrak{M}} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} u_{\mathcal{K}} v_{\mathcal{K}}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$$

et nous notons $\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}}$ la norme associée.

Nous définissons également la norme L^p -discrète dans Ω suivante:

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{0,p,\mathfrak{M}}^p = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} |u_{\mathcal{K}}|^p \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}.$$

Ces définitions sont quelque peu différentes de celles introduites dans la Section I.2.1 car elle font intervenir la valeur approchée de la mesure d'une maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ ayant une arête sur le bord plutôt que sa valeur exacte. Cependant, les

normes L^p -discrètes $\|\cdot\|_{0,p,\mathfrak{M}}$ et $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ sont équivalentes et les constantes sont indépendantes de $\text{size}(\mathcal{T})$ (cf Proposition II.13).

Le semi-produit scalaire H^1 -discrét dans Ω est défini de la manière suivante : Pour tout $u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$\begin{aligned} \llbracket u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \rrbracket_{1,\mathcal{T}} &= \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) (v_{\kappa} - v_{\mathcal{L}}) + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) (v_{\kappa} - v_{\mathcal{L}}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} a_{\sigma} (u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) (v_{\kappa} - v_{\mathcal{L}}). \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

Notons que contrairement au produit scalaire H^1 -discrét dans Ω introduit dans le Chapitre I par la relation (I.8), ce produit scalaire fait intervenir les arêtes extérieures ($\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$) du maillage $\mathfrak{M}$ (et pas seulement les arêtes intérieures). Ceci est dû au fait que le produit scalaire défini par (I.8) est adapté aux conditions aux limites de Neumann que nous avons imposées à l'équation de Cahn-Hilliard dans le Chapitre I. Dans cette section le problème que nous étudions est associé à des conditions aux limites plus générales, c'est la raison pour laquelle nous utilisons un produit scalaire faisant intervenir toutes les arêtes du maillages. Si nous cherchons $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ l'approximation d'une certaine fonction continue $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant des conditions aux limites de Neumann homogène, il est naturel d'imposer à $u_{\mathcal{T}}$ de satisfaire $u_{\mathcal{L}} = u_{\kappa}$ si $\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext} \cap \mathcal{E}_{\kappa}$ (puisque $d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}}) \nabla u(x) \cdot \vec{n}(x) = (u(x_{\mathcal{L}}) - u(x_{\kappa})) + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^2)$). Dans ce cas là, ces deux produits scalaires sont bien égaux.

Nous notons $|\cdot|_{1,\mathcal{T}}$ la semi-norme H^1 -discrète correspondant au produit scalaire (II.12) et nous définissons la norme H^1 -discrète dans Ω par :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}}^2 = \|u_{\mathfrak{M}}\|_{0,\mathfrak{M}}^2 + |u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2, \forall u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Nous énonçons maintenant une inégalité de Poincaré faisant intervenir la norme L^2 -discrète sur Γ et qui sera utile pour démontrer la Proposition II.18 (et donc le Théorème d'estimation d'erreur II.19). Nous ne donnons pas la démonstration de ce Lemme dans ce manuscrit car c'est une adaptation immédiate de l'inégalité de Poincaré discrète pour des conditions aux limites de Dirichlet (voir [EGH00, Lemme 3.1] pour plus de détails).

Lemme II.16 (Inégalité de Poincaré)

Il existe une constante $C_{18} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{18} (|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2).$$

II.2.3 Approximation VF4 couplant le domaine et sa frontière

Pour obtenir le schéma VF4 associé aux équations (II.11), nous procédons en deux étapes :

- Nous intégrons l'équation (II.11a) sur toutes les mailles intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ comme nous l'avons fait dans la Section I.3.1 :

$$\int_{\mathcal{K}} f(x) dx = - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}^{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}} d\sigma(x) - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}(x) d\sigma(x). \quad (\text{II.13})$$

- Nous intégrons la condition aux limites (II.11b) sur chaque maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ de la même manière que dans la Section II.1.3 :

$$\int_{\mathcal{L}} g(x) d\sigma(x) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} -\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}} + \int_{\mathcal{L}} u_{\Gamma}(x) d\sigma(x) + \int_{\sigma} \nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}(x) d\sigma(x). \quad (\text{II.14})$$

Le couplage entre l'équation dans le domaine Ω et celle sur sa frontière s'effectue alors naturellement par le terme de flux $\int_{\sigma} \nabla u \cdot \vec{n}$ sur les arêtes extérieures.

L'approximation VF4 du problème (II.11) s'écrit alors :

Problème II.17

Trouver $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}^{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \frac{u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \frac{u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} = m_{\mathcal{K}} \mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m f, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}; \end{array} \right. \quad (\text{II.15a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} -\nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}} n_{\mathbf{v},\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}} u_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}} \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\kappa}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} = m_{\mathcal{L}} \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m g, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \end{array} \right. \quad (\text{II.15b})$$

Proposition II.18

Considérons une solution $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ du Problème II.17, alors il existe une constante $C_{19} > 0$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ (que nous supposons borné lorsque le pas du maillage tend vers 0) telle que l'estimation suivante soit vérifiée :

$$|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq C_{19} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right).$$

Démonstration : Si $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ est solution du Problème II.17, alors pour tout $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, nous avons :

$$[[u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}]]_{1,\mathcal{T}} + [[u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}}]]_{1,\partial\mathfrak{M}} + (u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}})_{\partial\mathfrak{M}} = (\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m f, v_{\mathfrak{M}})_{L^2(\Omega)} + (\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m g, v_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)}.$$

Choisissons $v_{\mathcal{T}} = u_{\mathcal{T}}$, alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m f\|_{L^2(\Omega)} \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m g\|_{L^2(\Gamma)} \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Le Lemme II.16 et le fait que les normes $\|\cdot\|_{0,\partial\mathfrak{M}}$ et $\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ sont équivalentes nous permettent d'obtenir :

$$|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \sqrt{C_{18}} \|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m f\|_{L^2(\Omega)} \left(|u_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}} + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}} \right) + C_{\Gamma} \|\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m g\|_{L^2(\Gamma)} \|u_{\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}},$$

et l'inégalité de Young donne le résultat. ■

II.2.4 Estimation d'erreur

Nous définissons l'erreur $e_{\mathcal{T}}$ associé au problème (II.11) de la manière suivante :

$$e_{\mathcal{T}} = u_{\mathcal{T}} - \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^c u \quad \text{avec} \quad \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^c u = (\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^c u, \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^c u).$$

Du fait de la géométrie courbe de Ω , il est possible que nous prenions en compte des points $x \in \Omega^c$ dans la démonstration de l'estimation d'erreur. Nous allons donc utiliser un prolongement dans $\mathbb{R}^2$ de la fonction u pour que toutes les quantités que nous utiliserons dans la preuve du Théorème II.19 soient bien définies. La fonction u appartenant à $H^2(\Omega)$, il existe un prolongement $\tilde{u} \in H^2(\mathbb{R}^2)$ (fixé dans la suite) tel que :

$$\tilde{u}(x) = u(x), \quad \forall x \in \Omega \quad \text{et} \quad \|\tilde{u}\|_{H^2(\mathbb{R}^2)} \leq C_{20} \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad (\text{II.16})$$

avec $C_{20} > 0$ ne dépendant que de Ω .

Théorème II.19

Supposons que la solution u du problème continu (II.11) appartienne à $H^2(\Omega)$ et que sa trace $u_{1\Gamma} \in H^2(\Gamma)$. Considérons la solution $u_{\partial\mathfrak{M}}$ du Problème discret II.9. Alors, il existe une constante $C_{21} > 0$ indépendante de $\text{size}(\partial\mathfrak{M})$ telle que :

$$|e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq C_{21} \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_{1\Gamma}\|_{H^2(\Gamma)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right). \quad (\text{II.17})$$

Nous décomposons la preuve du Théorème II.19 en deux étapes. Dans un premier temps, nous démontrons (cf Proposition II.20) que le membre de gauche de l'inégalité (II.17) est majoré par les différentes erreurs de consistance intervenant dans ce problème. Il nous reste alors, dans un second temps, à estimer ces différentes erreurs de consistance.

Proposition II.20

Considérons la solution u du problème (II.11) ainsi que la solution $u_{\mathcal{T}}$ du Problème discret II.17, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} |e_{\mathcal{T}}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} (R_{\sigma,\mathcal{K}}^{int})^2 + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} (R_{\sigma,\mathcal{K}}^{ext})^2 \\ &\quad + \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + \|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2; \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

où nous avons noté :

$$\begin{aligned} R_{\sigma,\kappa}^{int} &= \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\kappa)}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} - \frac{1}{m_\sigma} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} dx, & \forall \sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_\kappa \cap \mathcal{E}_{int}; \\ R_{\sigma,\kappa}^{ext} &= \frac{u(x_\mathcal{L}) - u(x_\kappa)}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} - \frac{1}{m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}} \int_\sigma \nabla u(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}(x) dx, & \forall \sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_\kappa \cap \mathcal{E}_{ext}; \\ R_{\mathbf{v},\mathcal{L}} &= u_{|\Gamma}(x_{\mathcal{L}'}) - u_{|\Gamma}(x_\mathcal{L}) - d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} \nabla_\Gamma u_{|\Gamma}(\mathbf{v}) \vec{\tau}_{\mathbf{v},\mathcal{L}}, & \forall \mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}; \\ R_{\partial\mathfrak{M}}^u &= (R_\mathcal{L}^u)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \quad \text{avec } R_\mathcal{L}^u = \frac{(m_\mathcal{L} - m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}})}{m_\mathcal{L}} u_\mathcal{L} + \frac{1}{m_\mathcal{L}} \int_\mathcal{L} (u_{|\Gamma}(x) - u_{|\Gamma}(x_\mathcal{L})) d\sigma(x), & \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \end{aligned}$$

Démonstration :

Commençons par soustraire les équations (II.13) et (II.15a), alors les définitions de $R_{\sigma,\kappa}^{int}$ et $R_{\sigma,\kappa}^{ext}$ données dans la Proposition II.20 impliquent :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}} a_\sigma (e_\kappa - e_\mathcal{L}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma R_{\sigma,\kappa}^{int} + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} R_{\sigma,\kappa}^{ext}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}. \quad (\text{II.19})$$

De la même manière, soustrayons les équations (II.14) et (II.15b), nous obtenons alors :

$$\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mathcal{L}} \frac{e_\mathcal{L} - e_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + m_\mathcal{L} e_\mathcal{L} + m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{e_\mathcal{L} - e_\kappa}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} = \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mathcal{L}} \frac{R_{\mathbf{v},\mathcal{L}}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + m_\mathcal{L} R_\mathcal{L}^u - m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} R_{\sigma,\kappa}^{ext}, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{II.20})$$

Multiplions maintenant l'équation (II.19) par e_κ puis sommons sur $\kappa \in \mathfrak{M}$ et multiplions l'équation (II.20) par $e_\mathcal{L}$ puis sommons sur $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$. Alors, en sommant les deux équations obtenues nous avons :

$$\begin{aligned} |e_\mathcal{T}|_{1,\mathcal{T}}^2 + |e_{\partial\mathfrak{M}}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \|e_{\partial\mathfrak{M}}\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma (e_\kappa - e_\mathcal{L}) R_{\sigma,\kappa}^{int} + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} (e_\kappa - e_\mathcal{L}) R_{\sigma,\kappa}^{ext} \\ &\quad + \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}} R_{\mathbf{v},\mathcal{L}} \frac{e_\mathcal{L} - e_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} + (R_{\partial\mathfrak{M}}^u, e_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis l'inégalité de Young et nous obtenons l'estimation (II.18). ■

Fin de la démonstration du Théorème II.19 : Il nous suffit maintenant d'estimer les termes du membre de droite de l'inégalité (II.18).

- Soit $\sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}$ alors les formules de Taylor nous donnent :

$$\begin{aligned} u(x_\mathcal{L}) &= u(x) + \langle \nabla u(x), (x_\mathcal{L} - x) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle D^2 u((1-t)x + tx_\mathcal{L})(x_\mathcal{L} - x), (x_\mathcal{L} - x) \rangle, \\ u(x_\kappa) &= u(x) + \langle \nabla u(x), (x_\kappa - x) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle D^2 u((1-t)x + tx_\kappa)(x_\kappa - x), (x_\kappa - x) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} R_{\sigma,\kappa}^{int} &= \frac{1}{m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}}} \int_\sigma \int_0^1 (1-t) \langle D^2 u((1-t)x + tx_\mathcal{L})(x_\mathcal{L} - x), (x_\mathcal{L} - x) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}}} \int_\sigma \int_0^1 (1-t) \langle D^2 u((1-t)x + tx_\kappa)(x_\kappa - x), (x_\kappa - x) \rangle. \end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen et le changement de variable $(t, x) \in [0, 1] \times \sigma \mapsto y = x + t(x_\mathcal{L} - x)$ (ou $(t, x) \in [0, 1] \times \sigma \mapsto y = x + t(x_\kappa - x)$ pour le second terme) permettent d'obtenir :

$$(R_{\sigma,\kappa}^{int})^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \frac{\text{size}(\mathcal{T})^2}{m_\mathcal{D}} \int_\mathcal{D} |D^2 u(y)|^2 dy.$$

En remarquant que $m_\mathcal{D} = \frac{m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}}}{2}$, nous avons finalement :

$$\sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}} (R_{\sigma,\kappa}^{int})^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \text{size}(\mathcal{T})^2 \|D^2 u\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.21})$$

- Soit $\sigma = \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, d'après la définition (II.16) de $\tilde{u}$ nous avons $u(x_{\mathcal{L}}) = \tilde{u}(x_{\mathcal{L}})$ et $u(x_{\mathcal{K}}) = \tilde{u}(x_{\mathcal{K}})$ donc pour tout $x \in \sigma$,

$$\begin{aligned} u(x_{\mathcal{L}}) &= \tilde{u}(x) + \langle \nabla \tilde{u}(x), (x_{\mathcal{L}} - x) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}} - x), (x_{\mathcal{L}} - x) \rangle dt, \\ u(x_{\mathcal{K}}) &= \tilde{u}(x) + \langle \nabla \tilde{u}(x), (x_{\mathcal{K}} - x) \rangle + \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x) \rangle dt. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $x_{\mathcal{L}} - x_{\mathcal{K}} = d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}) \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$, la définition de $R_{\sigma, \mathcal{K}}^{ext}$ implique :

$$\begin{aligned} R_{\sigma, \mathcal{K}}^{ext} &= \frac{d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} d\sigma(x) - \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{\sigma} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x) d\sigma(x) \\ &\quad + \frac{1}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}} - x), (x_{\mathcal{L}} - x) \rangle dt d\sigma(x) \\ &\quad - \frac{1}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x) \rangle dt d\sigma(x) \\ &= \frac{d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}) - d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} d\sigma(x) + \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}}}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} \nabla \tilde{u}(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x) d\sigma(x) \\ &\quad + \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} \nabla \tilde{u}(x) \cdot (\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)) d\sigma(x) \\ &\quad + \frac{1}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{L}})(x_{\mathcal{L}} - x), (x_{\mathcal{L}} - x) \rangle dt d\sigma(x) \\ &\quad - \frac{1}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t) \langle D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{K}})(x_{\mathcal{K}} - x), (x_{\mathcal{K}} - x) \rangle dt d\sigma(x). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} (R_{\sigma, \mathcal{K}}^{ext})^2 &\leq \frac{(d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}) - d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}})^2}{5d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} |\nabla \tilde{u}(x)|^2 d\sigma(x) + d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} \frac{(m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}})^2}{5m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} |\nabla \tilde{u}(x)|^2 d\sigma(x) \\ &\quad + d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{5m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} |\nabla \tilde{u}(x)|^2 |\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)|^2 d\sigma(x) \\ &\quad + \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t)^2 |D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{L}})|^2 |x_{\mathcal{L}} - x|^4 dt d\sigma(x) \\ &\quad + \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_0^1 (1-t)^2 |D^2 \tilde{u}((1-t)x + tx_{\mathcal{K}})|^2 |x_{\mathcal{K}} - x|^4 dt d\sigma(x). \end{aligned}$$

Or, d'après les Propositions II.4, II.14 et II.15 il existe une constante $C_{\Gamma} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$|d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}) - d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}| \leq C_{\Gamma} (m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{K}}})^2, \quad |m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}}|^2 \leq C_{\Gamma} m_{\mathcal{L}}^6 \quad \text{et} \quad |\vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} - \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x)|^2 \leq C_{\Gamma} m_{\mathcal{L}}^2.$$

Ainsi, par changement de variable dans les deux dernières intégrales du membre du droite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} (R_{\sigma, \mathcal{K}}^{ext})^2 &\leq C_{\Gamma} (\text{reg}(\mathcal{T})) \text{size}(\mathcal{T})^3 \int_{\mathcal{L}} |\nabla \tilde{u}(x)|^2 d\sigma(x) \\ &\quad + C (\text{reg}(\mathcal{T})) \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\int_{\mathcal{D}_{\mathcal{L}}} |D^2 \tilde{u}(y)|^2 dy + \int_{\mathcal{D}} |D^2 \tilde{u}(y)|^2 dy \right) \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{L}} = \{(1-t)x + tx_{\mathcal{L}} : t \in [0, 1], x \in \sigma = \mathcal{L}\}$.

Alors, en utilisant la définition de $\tilde{u}$ et la relation (II.16), nous pouvons écrire :

$$\sum_{\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}} (R_{\sigma, \mathcal{K}}^{ext})^2 \leq C_{\Gamma} (\text{reg}(\mathcal{T})) C_{20} \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\|\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \right). \quad (\text{II.22})$$

- Pour finir, l'estimation (II.10) associée à la Proposition II.18 implique :

$$\|R_{\partial\mathfrak{M}}^u\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 2(C_{\Gamma} C_{19} \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) + C_{15} \|u_{\Gamma}\|_{H^1(\Gamma)}^2 \text{size}(\mathcal{T})^2). \quad (\text{II.23})$$

En regroupant les estimations (II.21), (II.22), (II.9) et (II.23), nous obtenons le résultat attendu. ■

II.3 Quelques remarques sur l'implémentation

II.3.1 Ecriture sous forme matricielle

D'un point de vue numérique le Problème II.9 fait intervenir les matrices suivantes :

- La matrice du Laplace-Beltrami $L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma \in \mathcal{M}_{N_{\partial\mathfrak{M}}, N_{\partial\mathfrak{M}}}$ telle que pour tout $u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$,

$$L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}} = \left(\left(- \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mathcal{L}} \frac{u_{\mathcal{L}'} - u_\mathcal{L}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \right) \quad \text{et} \quad \langle L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \rangle = \llbracket u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \rrbracket_{1, \partial\mathfrak{M}}.$$

- La matrice de masse du bord $M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma \in \mathcal{M}_{N_{\partial\mathfrak{M}}, N_{\partial\mathfrak{M}}}$ telle que pour tout $u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$,

$$\langle M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}} \rangle = (u_{\partial\mathfrak{M}}, v_{\partial\mathfrak{M}})_{L^2(\Gamma)}.$$

Nous pouvons alors écrire le Problème II.9 sous forme matricielle.

Problème II.21

Trouver $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$ tel que :

$$(L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma + M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma) u_{\partial\mathfrak{M}} = g_{\partial\mathfrak{M}}, \quad \text{avec } g_{\partial\mathfrak{M}} = \left(\int_{\mathcal{L}} g(x) d\sigma(x) \right)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}.$$

En ce qui concerne le Problème II.17, il va falloir ajouter la construction de deux matrices :

- La matrice du Laplacien $A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{M}}, N_{\mathcal{T}}}$ telle que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = \left(\left(- \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\mathcal{K}} a_\sigma (u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}) \right)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \right).$$

- La matrice $N_{\partial\mathfrak{M}, \mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_{\partial\mathfrak{M}}, N_{\mathcal{T}}}$ correspondant au terme de dérivée normale telle que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$N_{\partial\mathfrak{M}, \mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = \left(\left(m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{u_\mathcal{L} - u_\mathcal{K}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \right).$$

Remarque II.22

La matrice du Laplacien $A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}}$ que nous venons d'introduire est différente de la matrice $A_{\mathfrak{M}}$ introduite dans la Section I.6 car elle prend également en compte les arêtes extérieures.

Le Problème II.17 s'écrit alors :

Problème II.23

Trouver $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ tel que :

$$\begin{cases} A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = f_{\mathfrak{M}}, \\ (L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma + M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma) u_{\partial\mathfrak{M}} + N_{\partial\mathfrak{M}, \mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = g_{\partial\mathfrak{M}}, \end{cases}$$

avec $f_{\mathfrak{M}} = \left(\int_{\mathcal{K}} f(x) dx \right)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$ et $g_{\partial\mathfrak{M}} = \left(\int_{\mathcal{L}} g(x) d\sigma(x) \right)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}.$

II.3.2 Construction des matrices

A partir de la structure `mesh` que nous avons décrite dans la Section I.6, nous allons pouvoir construire les matrices associées aux Problèmes II.9 et II.17.

Pour construire les matrices $A = A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}}$ et $N = N_{\partial\mathfrak{M}, \mathcal{T}}$ nous avons besoin de calculer la transmissivité pour toutes les arêtes $\sigma \in \mathcal{E}$:

$$\text{flux} = a_\sigma = \text{mesh.arettes}(:, \text{_MES}) ./ \text{mesh.arettes}(:, \text{_DKL});$$

Nous assemblons les matrices $A_{\mathfrak{M},\tau}$, $N_{\partial\mathfrak{M},\tau}$ et $Mg = M_{\partial\mathfrak{M}}^{\Gamma}$ par arête de la manière suivante :

```
// Pour toutes les arêtes
A(mesh.arettes(:,_K), mesh.arettes(:,_K)) ← +flux;
// Seulement pour les arêtes intérieures
v_INT=find(mesh.arettes(:,_L)>0);
A(mesh.arettes(v_INT,_K), mesh.arettes(v_INT,_L)) ← -flux(v_INT);
A(mesh.arettes(v_INT,_L), mesh.arettes(v_INT,_L)) ← +flux(v_INT);
A(mesh.arettes(v_INT,_L), mesh.arettes(v_INT,_K)) ← -flux(v_INT);
// Seulement pour les arêtes extérieures
v_EXT=find(mesh.arettes(:,_L)==0);
A(mesh.arettes(v_EXT,_K), mesh.nb_vol+v_EXT) ← -flux(v_EXT);
N(v_EXT, mesh.nb_vol+v_EXT) ← +flux(v_EXT);
N(v_EXT, mesh.arettes(v_EXT,_K)) ← -flux(v_EXT);
Mg(v_EXT, v_EXT) ← +mesh.arettes(v_EXT,_MES);
```

où nous avons noté mesh.nb_vol le nombre de volumes de contrôles intérieurs $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$.

Pour construire la matrice $L = L_{\partial\mathfrak{M}}^{\Gamma}$ correspondant à la matrice du Laplacien en 1D, nous parcourons cette fois les sommets du maillage $\partial\mathfrak{M}$. Nous avons donc besoin de compléter la structure `mesh` introduite dans la Section I.6 : Pour le sommet numéro i du maillage du bord nous ajoutons :

- Les numéros des deux arêtes `_sigL` et `_sigLp` ayant pour sommet $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}'$

```
mesh.sommets(i,_sigL), mesh.sommets(i,_sigLp)
```

- Les numéros des deux sommets voisins `_VL` et `_VLp` (correspondants respectivement aux arêtes `_sigL` et `_sigLp`)

```
mesh.sommets(i,_VL), mesh.sommets(i,_VLp)
```

- La distance $d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = d(y_{\mathcal{L}}, \mathbf{v}) + d(y_{\mathcal{L}'}, \mathbf{v})$

```
mesh.sommets(i,_DLLp)
```

Par convention, toutes ces quantités sont nulles pour un sommet intérieur. Nous pouvons alors identifier facilement les sommets du bord $\partial\mathfrak{M}$:

```
som_bord=find(mesh.sommets(:,_VL)>0);
```

Pour tous les sommets du maillage extérieur, nous avons besoin de calculer la quantité :

$$\text{flux_bord} := \frac{1}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} = 1 \quad . / (\text{mesh.sommets}(\text{som_bord}, \text{DLLp})) ;$$

Nous sommes maintenant en mesure de construire la matrice L :

```
// Pour tous les sommets du bord
L(mesh.sommets(som_bord,_sigL), mesh.sommets(som_bord,_sigL)) ← +flux_bord;
L(mesh.sommets(som_bord,_sigL), mesh.sommets(som_bord,_sigLp)) ← -flux_bord;
L(mesh.sommets(som_bord,_sigLp), mesh.sommets(som_bord,_sigLp)) ← +flux_bord;
L(mesh.sommets(som_bord,_sigLp), mesh.sommets(som_bord,_sigL)) ← -flux_bord;
```

II.4 Tests numériques

Nous avons vu dans ce chapitre que nous approchons le domaine Ω par un domaine polygonal pour obtenir toutes les mesures dans lesquelles la géométrie du bord du domaine intervient. En effet, les seules informations que nous avons sur la courbe Γ pour construire le schéma VF4 sont les coordonnées des sommets $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, nous ne connaissons pas l'équation de Γ . Ainsi, nous avons fait plusieurs approximations pour les longueurs des quantités faisant intervenir des points de Γ dans les Problèmes II.9 et II.17 :

- $m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}$ est une approximation de $m_{\mathcal{L}}$;
- $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = d(x_{\mathcal{K}}, y_{\mathcal{L}})$ est une approximation de $d(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})$;

- $d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'} = d(y_{\mathcal{L}}, \mathbf{v}) + d(y_{\mathcal{L}'}, \mathbf{v})$ est une approximation de $m_{\gamma_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}}$.

Le but de cette section est de confirmer que ces approximations n'influent pas sur la précision du schéma numérique.

Pour cela, nous allons essayer d'approcher à un ordre supérieur les quantités géométriques liées au domaine.

Pour chaque sommet $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, nous calculons le rayon $R_{\mathbf{v}}$ du cercle passant par $\mathbf{v}$ ainsi que par ses deux sommets voisins.

Nous en déduisons donc les quantités suivantes (cf Figure II.8) :

- le rayon de courbure $R_{\mathcal{L}} = \frac{R_{\mathbf{v}} + R_{\mathbf{w}}}{2}$ associé à la maille $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$ dont les sommets sont $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$;
- la mesure $\widetilde{m}_{\mathcal{L}}$ de l'arc de cercle de rayon $R_{\mathcal{L}}$ et d'angle $\theta_{\mathcal{L}} = 2 \arcsin\left(\frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{2R_{\mathcal{L}}}\right)$;
- le centre $\widetilde{x}_{\mathcal{L}} = y_{\mathcal{L}} + \left(R_{\mathcal{L}} - \sqrt{R_{\mathcal{L}}^2 - \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}^2}{4}}\right) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}_{\mathcal{L}}}$. Notons que pour une courbe Γ quelconque, nous avons en général $\widetilde{x}_{\mathcal{L}} \notin \Gamma$.

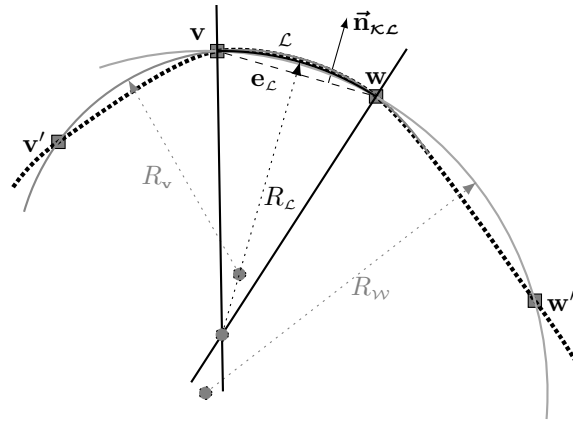


Figure II.8: Constructions des approximations d'ordre supérieur

Remarque II.24

Si Ω est un cercle alors $R_{\mathcal{L}}$ est le rayon du cercle, $\widetilde{m}_{\mathcal{L}} = m_{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{x}_{\mathcal{L}} = x_{\mathcal{L}} \in \Gamma$.

Nous allons présenter plusieurs estimations d'erreur (pour le problème de Laplace-Beltrami sur Γ et pour le problème de Laplace dans Ω avec des conditions aux limites de Ventcel) et pour chacune de ces estimations nous comparons les résultats obtenus en utilisant :

- les longueurs $m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}$, $d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}$ et $d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}$ utilisées dans ce chapitre (approximation polygonale basique);
- les nouvelles approximations $R_{\mathcal{L}}$, $\widetilde{m}_{\mathcal{L}}$ et $\widetilde{x}_{\mathcal{L}}$ que nous venons de définir (approximation d'ordre supérieur).

Pour toute maille $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$ (respectivement $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$), nous calculons l'erreur relative entre la solution exacte $u(x_{\mathcal{K}})$ (respectivement $u(x_{\mathcal{L}})$) et la solution approchée :

- $u_{\mathcal{K}}$ (respectivement $u_{\mathcal{L}}$) obtenue en résolvant le Problème II.17;
- $\widetilde{u}_{\mathcal{K}}$ (respectivement $\widetilde{u}_{\mathcal{L}}$) obtenue en résolvant un problème similaire au Problème II.17 mais avec la nouvelle définition des quantités géométriques décrite ci-dessus.

Notons que les calculs réalisés pour obtenir les second membres des différents problèmes considérés dans cette section en fonction de la solution exacte que nous choisissons sont détaillés dans l'Annexe.

Commençons par l'étude du problème de Laplace-Beltrami sur Γ . Nous choisissons comme domaine Γ le cercle unité et la solution exacte est donnée par :

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{2} (\tanh(px) + \tanh(qy)), \quad \forall (x, y) \in \Gamma, \quad \text{avec } p = q = 10. \quad (\text{II.24})$$

Rappelons (cf Remarque II.24) que sur le cercle les nouvelles quantités géométriques que nous venons de définir sont en fait égales aux quantités géométriques exactes correspondantes.

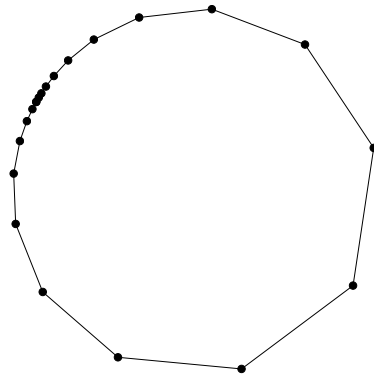
Dans un premier temps nous considérons un maillage non-uniforme du cercle unité (cf Figure II.9a).

Notons $u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex} = (u(x_{\mathcal{L}}))_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}$, nous traçons alors les erreurs relatives en norme L^2 -discrète (cf Figure II.10a) suivantes :

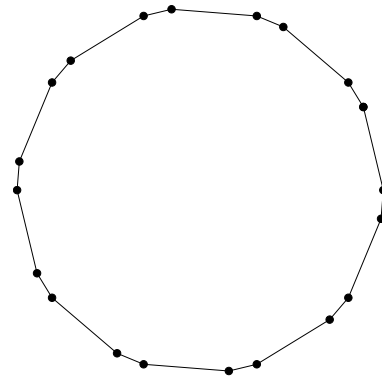
$$\frac{\|u_{\partial\mathfrak{M}} - u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Gamma)}} \quad \text{et} \quad \frac{\|\widetilde{u_{\partial\mathfrak{M}}} - u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Gamma)}}{\|u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Gamma)}} \quad (\text{II.25})$$

ainsi que les erreurs relatives en semi-norme H^1 discrète (cf Figure II.10b) suivantes :

$$\frac{|u_{\partial\mathfrak{M}} - u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}|_{1,\partial\mathfrak{M}}}{|u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}|_{1,\partial\mathfrak{M}}} \quad \text{et} \quad \frac{|\widetilde{u_{\partial\mathfrak{M}}} - u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}|_{1,\partial\mathfrak{M}}}{|u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}|_{1,\partial\mathfrak{M}}}. \quad (\text{II.26})$$

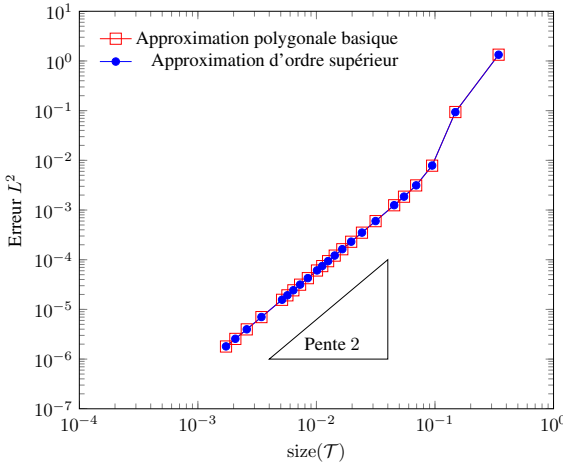


(a) Maillage non-uniforme du disque

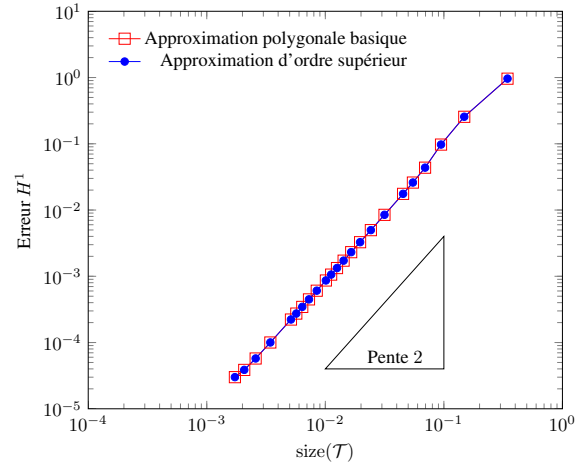


(b) Maillage périodique du disque

Figure II.9: Les différents maillages du cercle utilisés



(a) Erreur en norme L^2 -discrète sur Γ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(b) Erreur en semi-norme H^1 -discrète en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

Figure II.10: Erreurs relatives pour un maillage non-uniforme du cercle unité

Nous observons sur la Figure II.10 une convergence d'ordre 2 en norme L^2 -discrète mais également en norme H^1 -discrète. La convergence d'ordre 2 en norme L^2 n'est pas étonnante car c'est également ce que nous observons pour le cas du problème de Laplace en 1D et d'un point de vue théorique ce résultat a été démontré (voir [FS88, EGH00]) dans le cas où $x_{\mathcal{L}}$ est le centre de gravité de la maille $\mathcal{L}$ (ce qui est bien le cas ici). Cependant nous nous attendions à obtenir de l'ordre 1 en norme H^1 . Remarquons alors que le maillage non-uniforme du cercle représenté sur la Figure II.9a est en fait l'image d'un maillage uniforme par une application régulière. C'est la raison pour laquelle nous obtenons ici de l'ordre 2 plutôt que de l'ordre 1.

Pour ne pas observer ce phénomène de super-convergence dû à la particularité du maillage nous traçons cette fois les différentes erreurs relatives (avec la même solution exacte) sur un maillage périodique du cercle unité (cf Figure II.9b).

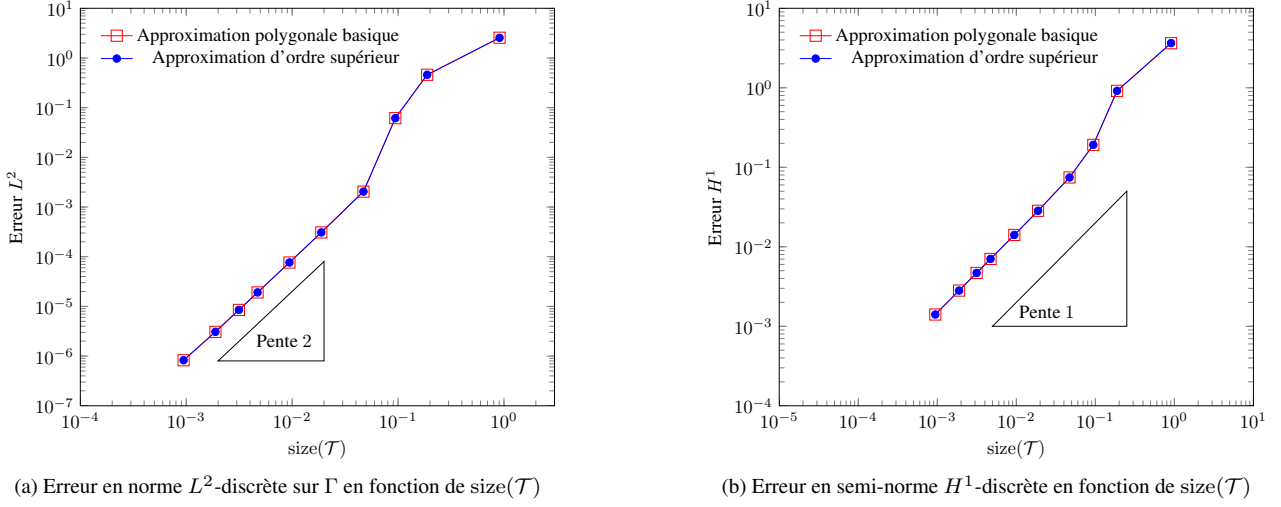


Figure II.11: Erreurs relatives pour un maillage périodique du cercle unité

Nous observons alors sur la Figure II.11 un ordre de convergence égal à 2 en norme L^2 et à 1 en norme H^1 , ce qui est donc bien en accord avec les résultats attendus.

Remarquons que pour chacun des tests ci-dessus nous observons que les deux types d'erreurs calculées (avec une approximation polygonale basique en rouge et avec une approximation d'ordre supérieure en bleu) sont quasiment confondues. Ces résultats semblent donc montrer que l'approximation polygonale basique est suffisante lorsque nous réalisons une approximation TPFA du problème de Laplace-Beltrami.

Intéressons nous maintenant au problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel. Cette étude est réalisée pour deux domaines Ω différents et deux solutions exactes différentes. Le premier cas test est réalisé en prenant Ω égal au disque unité qui est plus raffiné d'un côté que de l'autre (cf Figures II.12a et II.12b) de manière à obtenir un maillage non-uniforme de Γ . Notons que nous avons également réalisé ces tests numériques avec un maillage uniforme du disque unité et que nous obtenons des résultats similaires.

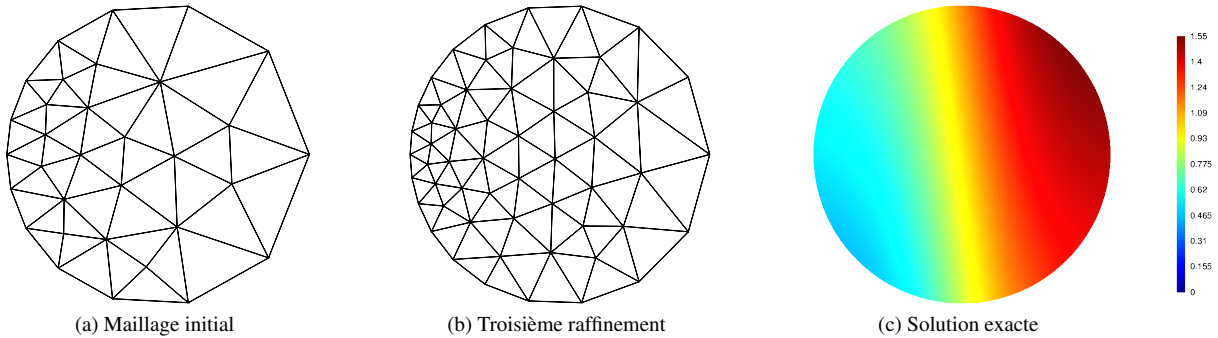


Figure II.12: Les différents raffinements du disque unité utilisés (à gauche) et la solution exacte considérée (à droite)

Nous considérons la solution exacte définie par (II.24) avec $p = 2$ et $q = 0.3$ (cf Figure II.12c). Nous traçons alors (en fonction du pas du maillage) les erreurs relatives en norme L^2 -discrète dans Ω (cf Figure II.13a) suivantes :

$$\frac{\|u_{\mathfrak{M}} - u_{\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Omega)}} \quad \text{et} \quad \frac{\|\widetilde{u}_{\mathfrak{M}} - u_{\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_{\partial\mathfrak{M}}^{ex}\|_{L^2(\Gamma)}}, \quad (\text{II.27})$$

les erreurs relatives dans Ω en semi-norme H^1 discrète (cf Figure II.13c) suivantes :

$$\frac{|u_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}}^{ex}|_{1,\mathfrak{M}}}{|u_{\mathcal{T}}^{ex}|_{1,\mathcal{T}}} \quad \text{et} \quad \frac{|\widetilde{u}_{\mathcal{T}} - u_{\mathcal{T}}^{ex}|_{1,\mathcal{T}}}{|u_{\mathcal{T}}^{ex}|_{1,\mathcal{T}}} \quad (\text{II.28})$$

ainsi que les erreurs relatives sur Γ pour la trace de la solution définies par (II.25) et (II.26) (cf Figures II.13b et II.13c respectivement).

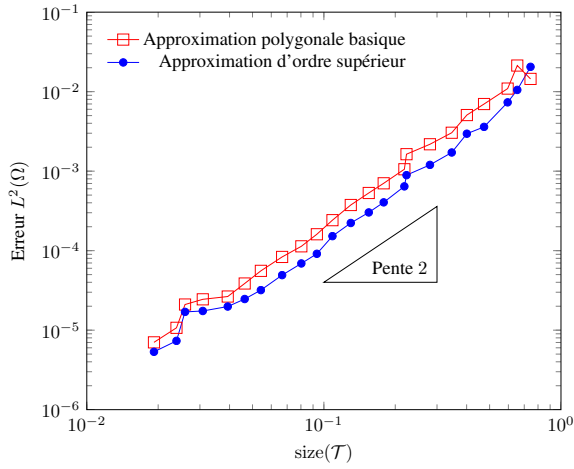
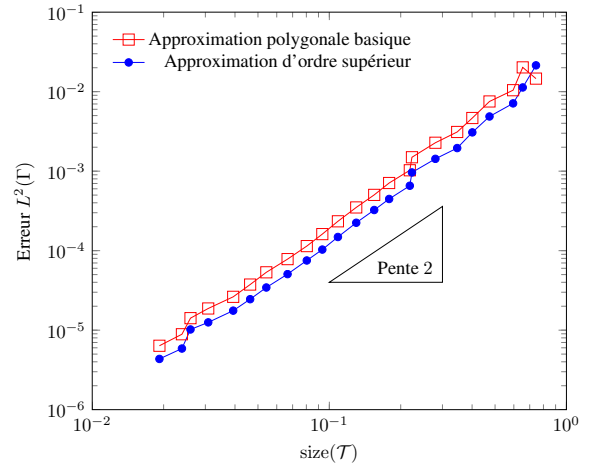
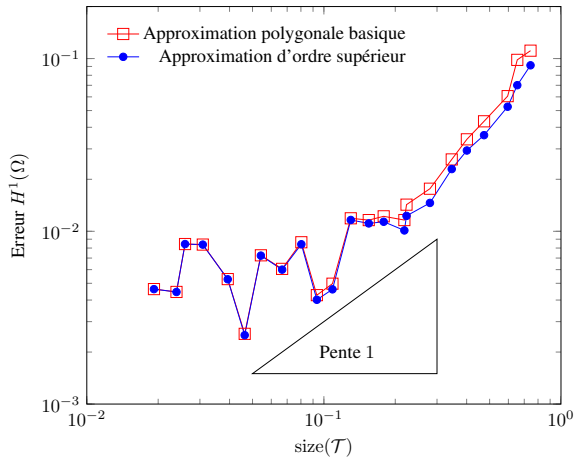
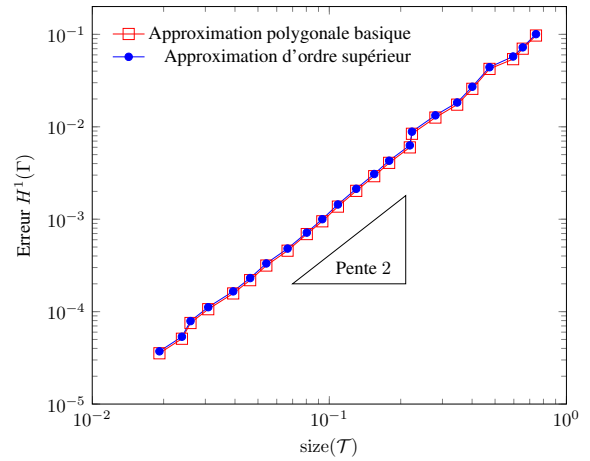
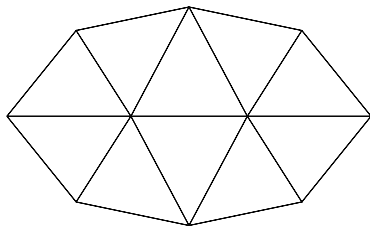
(a) Erreur L^2 -discrète dans Ω en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$ (b) Erreur L^2 -discrète sur Γ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$ (c) Erreur H^1 -discrète dans Ω en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$ (d) Erreur H^1 -discrète sur Γ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

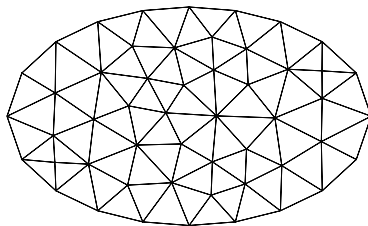
Figure II.13: Erreurs relatives pour le disque unité

Pour le second cas test, le domaine Ω est l'ellipse de demi-grand axe $a = 0.5$ et de demi-petit axe $b = 0.3$. Nous considérons la solution exacte polynomiale suivante (cf Figure II.14c) :

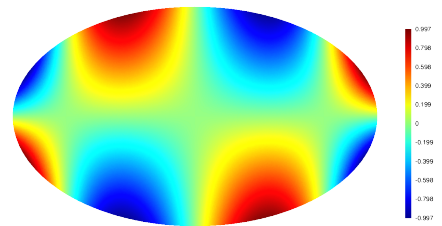
$$u(x, y) = 4 \frac{xy}{ab} \left(2 \frac{x^2}{a^2} - 1 \right).$$



(a) Maillage initial



(b) Troisième raffinement

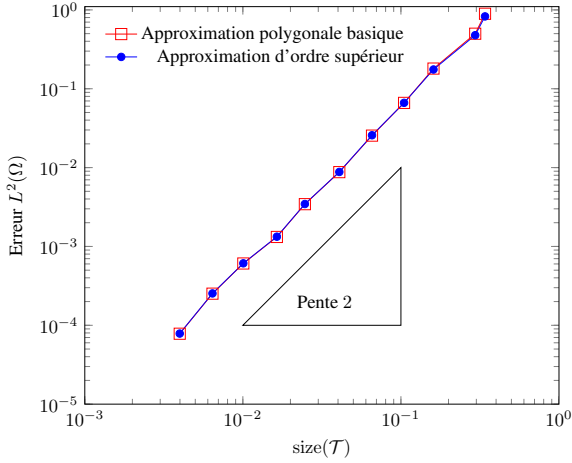


(c) Solution exacte

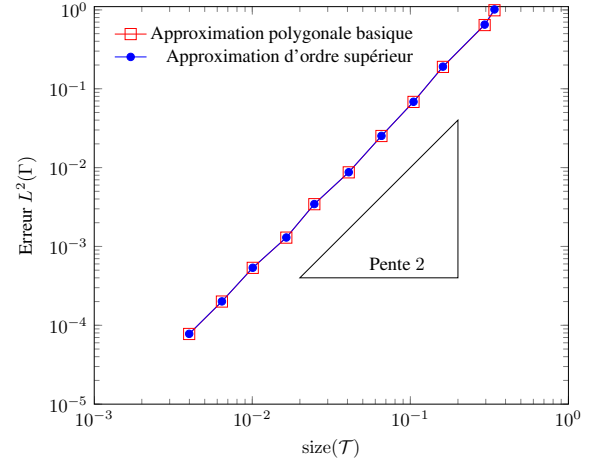
Figure II.14: Les différents raffinements de l'ellipse

Notons que contrairement au cas précédent nous avons effectué ici un raffinement uniforme de Γ . Cependant, nous obtenons des résultats similaires en raffinant de façon non-uniforme la frontière de l'ellipse. De plus, remarquons que dans ce cas là nous n'avons pas calculé la valeur du centre x_c , la solution exacte est donc calculée au point $\tilde{x}_c$ qui est une meilleure approximation du point x_c que le centre y_c .

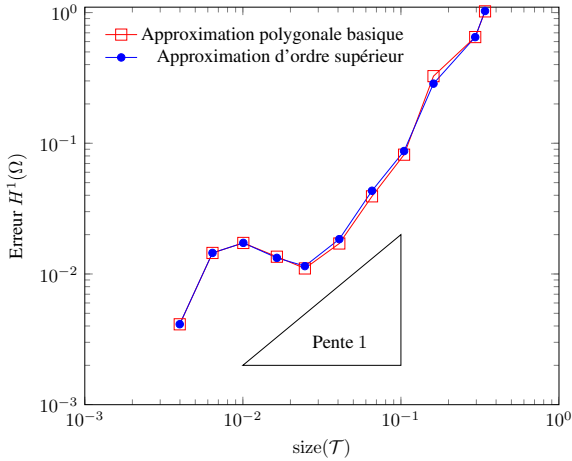
Comme pour le cas précédent, nous traçons sur la Figure II.15 les différentes erreurs relatives définies par (II.25), (II.26), (II.27) et (II.28) associées à ce problème.



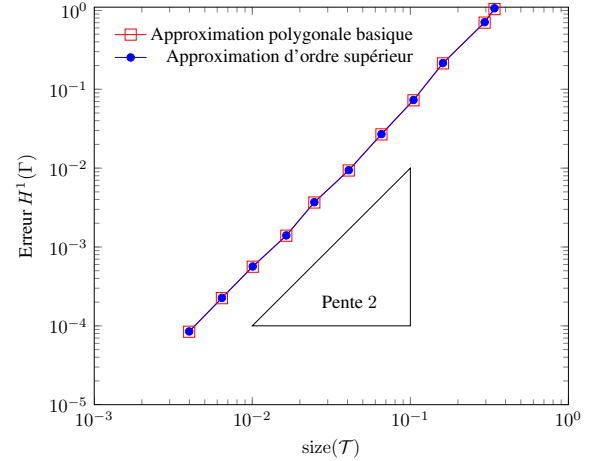
(a) Erreur L^2 -discrète dans Ω en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(b) Erreur L^2 -discrète sur Γ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(c) Erreur H^1 -discrète dans Ω en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(d) Erreur H^1 -discrète sur Γ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

Figure II.15: Erreurs relatives pour l'ellipse

Dans chacun des cas (cf Figures II.13 et II.15), nous observons les mêmes comportements :

- Les valeurs des erreurs calculées avec les deux approximations sont très proches et même parfois confondues.
- L'ordre de convergence est égal à 2 en norme L^2 aussi bien dans Ω que sur Γ . Or bien que nous ayons montré dans le Théorème II.19 que le schéma VF4 convergeait à l'ordre 1 ce n'est pas surprenant d'observer de l'ordre 2 en norme L^2 dans Ω car ce phénomène de super-convergence s'observe également pour le problème de Laplace avec le schéma VF4. Ce phénomène de super-convergence en norme L^2 reste pour le moment un problème ouvert. En ce qui concerne la norme L^2 sur Γ nous avons également obtenu de l'ordre 2 (cf Figures II.10a et II.11a) dans le cas du problème de Laplace-Beltrami sur Γ ce n'est donc pas étonnant de l'observer également ici.
- Nous observons bien de l'ordre 1 en semi-norme H^1 -discrète dans Ω ce qui est en accord avec le résultat obtenu dans le Théorème II.19.
- Enfin, nous obtenons de l'ordre 2 pour l'erreur relative en semi-norme H^1 -discrète sur Γ . Comme pour le cas du problème de Laplace-Beltrami, le logiciel Gmsh construit des maillages non-uniforme du bord comme image par

une fonction régulière d'un maillage uniforme. C'est (sûrement) la raison pour laquelle nous observons là aussi ce phénomène de super-convergence en norme H^1 que le couplage ne semble d'ailleurs pas affecter.

En conclusion, nous avons pu observer numériquement que l'approximation polygonale du domaine Ω n'affecte pas l'ordre du schéma numérique ni sa précision.

II.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approximation VF4 sur un domaine courbe qui permet de coupler une équation dans le domaine Ω avec une équation sur sa frontière Γ .

Le premier intérêt de cette méthode est que ce couplage s'effectue naturellement par un terme de flux. De plus, nous avons montré que cette méthode s'adaptait facilement à la géométrie courbe du domaine sans avoir besoin de connaître l'équation de Γ ni de faire une approximation précise de sa géométrie.

D'un point de vue numérique, l'implémentation de ces deux problèmes est aisée et ne fait jamais intervenir la géométrie courbe du domaine. Ainsi, ces premiers résultats permettent d'envisager des conditions aux limites plus complexes pour l'équation de Cahn-Hilliard.

Chapitre III

Le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques

Ce chapitre est dédié à l'analyse numérique de l'équation de Cahn-Hilliard (III.1) associée aux conditions aux limites (III.2) appelées conditions aux limites dynamiques et décrites dans la Section III.1. Cette condition aux limites sur le paramètre d'ordre prend en compte la géométrie du domaine Ω du fait de la présence de l'opérateur de Laplace-Beltrami qui a été introduit dans le Chapitre II. De plus, le potentiel de Cahn-Hilliard f_s rend cette condition au bord non-linéaire et un couplage s'effectue entre l'équation dans le domaine et cette condition aux limites par le biais du terme $\partial_n c$. Nous avons vu dans le chapitre précédent, que le schéma VF4 permet facilement de prendre en compte la géométrie du domaine mais aussi de coupler naturellement l'équation dans le domaine et celle sur sa frontière.

Nous présentons le schéma VF4 associé au modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (Section III.2) puis nous démontrons les différentes estimations d'énergie en fonction de la discrétisation des termes non-linéaires que nous utilisons (Section III.3). Ces estimations d'énergies sont essentielles à la démonstration des théorèmes d'existence (Théorème III.12) et de convergence des solutions approchées (Théorème III.18). La section III.5 est consacrée à la démonstration du théorème de convergence. Du fait des non-linéarités dans l'équation à la fois dans Ω et sur Γ , le point clé de cette démonstration réside dans l'obtention de compacité forte pour les solutions approchées ainsi que pour leur trace. Dans ce but, nous introduisons un opérateur de prolongement original permettant d'obtenir une nouvelle estimation de translations en espace qui permet de mettre en évidence une limite dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ dont la trace est dans $L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$.

Finalement, après avoir donné quelques remarques sur l'implémentation complétant les Sections I.6 et II.3, nous présentons deux types de tests numériques : des estimations d'erreurs permettant de valider le schéma et des résultats plus qualitatifs, en accord avec ceux observés dans la littérature, permettant d'illustrer les différentes propriétés des conditions aux limites dynamiques.

Ce travail fait l'objet d'un article en préparation [Nab14a].

Dans la suite de ce chapitre, nous considérons un domaine régulier, borné, connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière elle-même connexe et de classe $C^{3,1}$.

III.1 La condition aux limites dynamique

Rappelons que l'équation de Cahn-Hilliard dans Ω s'écrit de la manière suivante : Trouver la concentration de l'une des deux phases $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu, & \text{(III.1a)} \\ \mu = -\frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \Delta c + \frac{12}{\varepsilon} \sigma_b f'_b(c); & \text{(III.1b)} \\ c(0, \cdot) = c_0. & \text{(III.1c)} \end{cases}$$

La condition aux limites de Neumann homogène imposée sur le paramètre d'ordre dans le Chapitre I est trop restrictive pour modéliser le comportement de certains systèmes physiques. En effet, elle impose un angle de contact statique égal à $\frac{\pi}{2}$ entre l'interface et la paroi. Cependant, dans de nombreux systèmes binaires, il y a une interaction dynamique du système avec les parois. Prenons l'exemple d'un système confiné : lorsqu'un fluide déplace un second fluide non-miscible, la ligne de contact par rapport à la paroi solide bouge et dévie de l'angle de contact statique. Pour tenir compte des interactions avec les parois solides, des physiciens (cf [FMD97, FMD98, KEM⁺01]) ont introduit la condition aux limites (III.2b). Ainsi, les conditions aux limites étudiées dans ce chapitre s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \mu \cdot \vec{n} = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \\ \frac{\varepsilon^3}{64\Gamma_b\Gamma_s} \partial_t c_{|\Gamma} = \frac{3}{8} \varepsilon^2 \sigma_b \sigma_s \Delta_\Gamma c_{|\Gamma} - 6\sigma_b f'_s(c_{|\Gamma}) - \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b \partial_n c & \text{sur } (0, T) \times \Gamma, \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(III.2a)} \\ \text{(III.2b)} \end{matrix}$$

Rappelons que nous avons noté $c_{|\Gamma}$ la trace de c sur Γ , Δ_Γ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Γ et ∂_n la dérivée normale. Des paramètres physiques décrivant les propriétés de la paroi interviennent : $\Gamma_s > 0$ est un paramètre de relaxation, $\sigma_s > 0$ un coefficient de capillarité et f_s le potentiel de Cahn-Hilliard surfacique (qui peut être non-linéaire).

Remarque III.1

Si nous prenons $\sigma_s = f_s = 0$ et $\Gamma_s = +\infty$ nous retrouvons la condition aux limites de (I.4b).

Remarque III.2

Les valeurs des coefficients de l'équation (III.2b) ont été obtenus en effectuant le changement d'échelle inverse à celui réalisé dans [FMD97].

Le potentiel volumique f_b et le potentiel surfacique f_s vérifient la condition de dissipativité suivante :

$$\liminf_{|c| \rightarrow \infty} f''_b(c) > 0 \quad \text{et} \quad \liminf_{|c| \rightarrow \infty} f''_s(c) > 0. \quad \text{(III.3)}$$

Ces conditions impliquent qu'il existe $\alpha_1 > 0$ et $\alpha_2 \geq 0$ tels que

$$f_b(c) \geq \alpha_1 c^2 - \alpha_2 \quad \text{et} \quad f_s(c) \geq \alpha_1 c^2 - \alpha_2.$$

Le potentiel f_b satisfait également l'hypothèse de croissance polynomiale (I.7) donnée dans le Chapitre I. Le potentiel volumique utilisé est là encore le potentiel double-puits $f_b(c) = c^2(1 - c)^2$ (cf Figure I.1a) bien que pour l'analyse nous nous plaçons dans un cadre plus général (qui contient f_b). Le potentiel surfacique f_s prendra plusieurs expressions en fonction des propriétés de la paroi que nous chercherons à modéliser.

Par souci de simplicité, pour l'équation sur le potentiel chimique dans Ω nous notons $\mathcal{A}_\Delta$ le coefficient se trouvant devant le terme Δc (ainsi que devant la terme de flux $\partial_n c$ dans la condition aux limites dynamique) et $\mathcal{A}_{f_b}$ celui devant le terme non-linéaire $f'_b(c)$. Pour la condition aux limites sur le paramètre d'ordre nous désignons par $\mathcal{A}_{\partial t}$ le coefficient devant la dérivée en temps de la trace du paramètre d'ordre $\partial_t c_{|\Gamma}$, $\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}$ celui devant le Laplace-Beltrami $\Delta_\Gamma c_{|\Gamma}$ et $\mathcal{A}_{f_s}$ le coefficient devant le terme $f'_s(c_{|\Gamma})$. Plus précisément nous avons :

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_b, \quad \mathcal{A}_{f_b} = \frac{12}{\varepsilon} \sigma_b, \quad \mathcal{A}_{\partial t} = \frac{\varepsilon^3}{64\Gamma_b\Gamma_s}, \quad \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} = \frac{3}{8} \varepsilon^2 \sigma_b \sigma_s \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{f_s} = 6\sigma_b,$$

et le système de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques s'écrit ainsi :

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu; & \text{dans } (0, T) \times \Omega; & \text{(III.4a)} \\ \mu = -\mathcal{A}_\Delta \Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c); & \text{dans } (0, T) \times \Omega; & \text{(III.4b)} \\ \mathcal{A}_{\partial t} \partial_t c_{|\Gamma} = \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \Delta_\Gamma c_{|\Gamma} - \mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{|\Gamma}) - \mathcal{A}_\Delta \partial_n c; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; & \text{(III.4c)} \\ \partial_n \mu = 0; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; & \text{(III.4d)} \\ c(0, \cdot) = c^0; & \text{dans } \Omega. & \text{(III.4e)} \end{cases}$$

L'énergie libre associée à cette équation se décompose alors en une énergie volumique (égale à l'énergie de Cahn-Hilliard donnée dans le Chapitre I) et une énergie surfacique.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(c) &= \mathcal{F}_b(c) + \mathcal{F}_s(c) \\ \text{avec } \mathcal{F}_b(c) &= \int_\Omega \left(\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |\nabla c|^2 + \mathcal{A}_{f_b} f_b(c) \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_s(c) = \int_\Gamma \left(\frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |\nabla_\Gamma c_{|\Gamma}|^2 + \mathcal{A}_{f_s} f_s(c_{|\Gamma}) \right). \end{aligned} \quad \text{(III.5)}$$

Comme nous pouvons le voir dans la définition de l'énergie libre ci-dessus, nous allons travailler dans un espace de fonctions particulier :

$$H_\Gamma^1(\Omega) = \{c \in H^1(\Omega) \text{ tel que } c|_\Gamma \in H^1(\Gamma)\}, \quad (\text{III.6})$$

qui est adapté au fait que l'opérateur de Laplace-Beltrami apparaît dans la condition aux limites.

Notons que la condition (III.2b) est obtenue de sorte que le système tende à minimiser son énergie totale $\mathcal{F}$. Nous avons alors dissipation de l'énergie :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(c(t, \cdot)) = -\Gamma_b \int_\Omega |\nabla \mu(t, \cdot)|^2 - \mathcal{A}_{\partial t} \int_\Gamma |\partial_t c|_\Gamma(t, \cdot)|^2, \quad t \in [0, T[. \quad (\text{III.7})$$

D'un point de vue théorique, l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques est désormais assez bien comprise. Le lecteur peut se référer à [RZ03, WZ04, MZ05, PRZ06, CFP06] et aux références s'y trouvant pour les détails sur l'existence, l'unicité et la régularité de solutions, l'existence d'attracteurs et la convergence vers des états stationnaires. De plus, dans [GMS09] les auteurs démontrent (dans un cadre plus général) l'existence de solutions au problème continu (III.4) dans les espaces d'énergie.

Dans ce chapitre, nous démontrons un théorème de convergence des solutions approchées (cf Théorème III.18) qui permet alors d'obtenir directement l'existence d'une solution faible au problème continu (III.4).

Par contre, d'un point de vue numérique il existe beaucoup moins de résultats. Dans [FMD97, FMD98, KEM⁺01] les auteurs utilisent des méthodes de type différences finies et donnent des résultats numériques mais sans de preuve de convergence. Une approche éléments finis est proposée dans [CPP10] où les auteurs prouvent des résultats de convergence et d'estimations d'erreur pour le schéma semi-discrétisé en espace. Ces résultats sont obtenus sur une plaque en imposant des conditions aux limites périodiques dans la direction latérale et donc les géométries potentiellement courbes des domaines ne sont pas prises en compte.

Nous pouvons dès à présent remarquer que le modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (III.4) présente plusieurs difficultés. Les premières difficultés sont dues à la nature même de l'équation de Cahn-Hilliard qui est une équation parabolique non-linéaire du 4^{ème} ordre (en particulier nous ne disposons pas d'un principe du maximum). A celles-ci s'ajoutent les difficultés liées à la condition aux limites dynamiques :

- la géométrie courbe du domaine intervient dans l'équation sur Γ du fait de la présence de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans la condition aux limites sur le paramètre d'ordre;
- cette condition aux limites est non-linéaire (en raison du terme $f'_s(c)$);
- un couplage s'effectue entre l'équation sur le potentiel chimique dans Ω (par le terme Δc) et l'équation sur le paramètre d'ordre sur Γ (par le terme $\partial_n c$).

Notons que nous avons montré dans le Chapitre II que le schéma volumes finis VF4 permet de coupler facilement l'équation dans le domaine Ω avec celle sur sa frontière Γ tout en prenant facilement en compte la géométrie courbe du domaine.

Néanmoins, lors de la démonstration du Théorème de convergence III.18 plusieurs difficultés vont apparaître :

- A cause des non-linéarités qui apparaissent dans l'équation à la fois dans Ω et sur Γ nous allons avoir besoin de compacité forte dans $L^2(0, T, L^2(\Omega))$ mais également dans $L^2(0, T, L^2(\Gamma))$ pour passer à la limite dans le schéma.
- Obtenir l'existence de la limite dans Ω est un résultat classique en volumes finis obtenu en utilisant des estimations de translations en espace et en temps appropriées et en appliquant le Théorème de Kolmogorov. Cependant, le cas qui nous intéresse est moins classique : nous voulons obtenir l'existence d'une limite dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ telle que sa trace soit dans $L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$. Pour cela nous proposons une nouvelle estimation de translations en espace (cf Théorème III.33) dont la démonstration fait l'objet de la Section III.5.4.
- La géométrie courbe du domaine va faire intervenir des difficultés supplémentaires même dans le cas de certains résultats classiques en volumes finis (mais qui sont démontrés pour un domaine polygonal) comme nous le verrons en particulier dans la Section III.6.

III.2 Approximation VF4 de l'équation de Cahn-Hilliard avec CL dynamiques

Les notations concernant la discrétisation en espace de type volumes finis qui seront utilisées dans ce chapitre ont été décrites dans le Chapitre II.

III.2.1 Localisation des inconnues

Rappelons que nous avons défini dans les chapitres précédents les fonctions constantes par morceaux $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ et $u_{\partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$:

$$u_{\mathfrak{M}} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} u_{\kappa} 1_{\kappa} \in L^{\infty}(\Omega) \quad \text{et} \quad u_{\partial\mathfrak{M}} = \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} u_{\mathcal{L}} 1_{\mathcal{L}} \in L^{\infty}(\Gamma)$$

ainsi que la fonction discrète $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ à laquelle nous associons le couple $u_{\mathcal{T}} = (u_{\mathfrak{M}}, u_{\partial\mathfrak{M}})$.

Intéressons nous maintenant à la discrétisation en temps. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, nous discrétisons uniformément l'intervalle de temps $[0, T]$ avec un pas de temps $\Delta t = \frac{T}{N}$.

Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous posons $t^n = n\Delta t$. Nous définissons $u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ (respectivement $u_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$) comme la fonction constante par morceaux sur $(0, T) \times \Omega$ (respectivement $(0, T) \times \Gamma$) telle que pour tout $t \in [t^n, t^{n+1}[$,

$$u_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) = u_{\kappa}^{n+1} \text{ si } x \in \kappa \quad \text{et} \quad u_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) = u_{\mathcal{L}}^{n+1} \text{ si } x \in \mathcal{L}.$$

Pour un pas de temps t^n donné, le schéma VF4 associe donc à chaque maille intérieure $\kappa \in \mathfrak{M}$ une inconnue c_{κ}^n et à chaque maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $c_{\mathcal{L}}^n$ pour le paramètre d'ordre. En ce qui concerne le potentiel chimique, les mêmes notations sont utilisées en associant une inconnue μ_{κ}^n pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$ et une inconnue $\mu_{\mathcal{L}}^n$ pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$. Remarquons cependant que μ vérifie des conditions aux limites de Neumann homogène, nous imposons donc la valeur des inconnues du bord $\mu_{\partial\mathfrak{M}}^n \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$ de la manière suivante :

$$\mu_{\mathcal{L}}^n = \mu_{\kappa}^n, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M} \text{ telle que } \mathcal{L} = \sigma \in \mathcal{E}_{\kappa} \cap \mathcal{E}_{ext}.$$

Remarque III.3

Avec cette convention, pour tout $v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ nous avons $[\mu_{\mathfrak{M}}, v_{\mathfrak{M}}]_{1, \mathfrak{M}} = [\mu_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}]_{1, \mathcal{T}}$ où $[\cdot, \cdot]_{1, \mathfrak{M}}$ est le semi-produit scalaire H^1 -discret introduit dans le Chapitre I (cf définition (I.8)) et $[\cdot, \cdot]_{1, \mathcal{T}}$ celui que nous utiliserons ici (cf définition (II.12)).

Les normes discrètes en espaces ont déjà été introduites, définissons maintenant des normes en espace et en temps.

Définition III.4 (Normes discrètes en espace et en temps)

Considérons une norme discrète $\mathcal{N}$ sur un espace donné $\mathcal{B}$, nous définissons alors :

- La norme discrète dans $L^p(0, T; \mathcal{N}(\mathcal{B}))$ par :

$$\|u^{\Delta t}\|_{L^p(0, T; \mathcal{N}(\mathcal{B}))} = \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t (\mathcal{N}(u^{n+1}))^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- La norme discrète dans $L^{\infty}(0, T; \mathcal{N}(\mathcal{B}))$ par :

$$\|u^{\Delta t}\|_{L^{\infty}(0, T; \mathcal{N}(\mathcal{B}))} = \sup_{n \leq N} \mathcal{N}(u^n).$$

III.2.2 Principe du schéma VF4

Définition III.5 (Projection moyenne)

Nous définissons la projection moyenne sur le maillage $\mathcal{T}$ de la manière suivante. Pour toute fonction u intégrable sur Ω et qui admet une trace $u_{|\Gamma}$ intégrable sur Γ , nous posons $\mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m u = (\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m u, \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u_{|\Gamma})$ avec

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m u = \left(\frac{1}{m_{\kappa}} \int_{\kappa} u(x) dx \right)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u_{|\Gamma} = \left(\frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} u_{|\Gamma}(x) d\sigma(x) \right)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}.$$

Avec cette définition et en choisissant $c^0 \in H_{\Gamma}^1(\Omega)$ (où $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ est défini par (III.6)), la concentration initiale discrète est définie par :

$$c_{\mathcal{T}}^0 = \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m c^0. \quad (\text{III.8})$$

Notons que nous commenterons ce choix dans la Remarque III.21.

Pour obtenir l'approximation VF4 associée au problème (III.4) nous allons procéder comme dans les chapitres précédents :

- Nous intégrons l'équation (III.1a) sur chaque maille intérieure $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ en prenant en compte la condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique (III.2a). Remarquons alors qu'en ce qui concerne cette équation, le schéma VF4 est le même que celui décrit dans le Chapitre I (si nous omettons les approximations dues à la géométrie courbe du domaine).
- Nous intégrons l'équation (III.1b) sur chaque maille intérieure $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. En ce qui concerne l'opérateur de Laplace sur le paramètre d'ordre, nous utilisons l'approximation consistante décrite dans la Section II.2 pour le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel. Les autres termes de l'équation sont traités de la même manière que dans le Chapitre I.
- Nous intégrons la condition aux limites (III.2b) sur chaque maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$. L'opérateur de Laplace-Beltrami est discrétisé en utilisant l'approximation consistante décrite dans la Section II.1.

Ainsi si $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ est donné, l'approximation VF4 du problème (III.4) s'écrit :

Problème III.6

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{\underline{\mathcal{K}}} \frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} = -\Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (\mu_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}; \quad (\text{III.9a}) \\ m_{\underline{\mathcal{K}}} \mu_{\mathcal{K}}^{n+1} = \mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} \frac{m_\sigma}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) + \mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \\ \quad + \mathcal{A}_{f_b} m_{\underline{\mathcal{K}}} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}; \quad (\text{III.9b}) \\ \mathcal{A}_{\partial t} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n}{\Delta t} = -\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} \frac{(c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1})}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} - \mathcal{A}_{f_s} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \\ \quad - \mathcal{A}_\Delta \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{III.9c}) \end{array} \right.$$

Remarquons que dans l'équation (III.9a) l'approximation VF4 du terme $\Delta\mu$ fait simplement intervenir les arêtes intérieures du maillage $\mathfrak{M}$ alors que dans l'équation (III.9b) l'approximation du terme Δc utilise toutes les arêtes du maillage (intérieures et extérieures). Cette différence est due au fait que μ satisfait une condition aux limites de Neumann homogène (donc les arêtes extérieures n'interviennent pas) alors que c satisfait la condition aux limites dynamique (III.2b) dans laquelle les arêtes extérieures interviennent (ce terme est d'ailleurs indispensable pour permettre le couplage avec l'équation sur le maillage du bord (III.9c)).

Le terme d^{f_b} (respectivement d^{f_s}) désigne la discrétisation du potentiel de Cahn-Hilliard volumique f_b (respectivement surfacique f_s). Nous décrivons dans la Section III.3 les deux discrétisations (implicite ou semi-implicite) que nous utilisons dans ces travaux.

En sommant l'équation (III.9a) sur tous les volumes de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous remarquons que nous avons bien conservation du volume au niveau discret :

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\mathcal{K}}} c_{\mathcal{K}}^n = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\mathcal{K}}} c_{\mathcal{K}}^0, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \quad (\text{III.10})$$

Pour l'analyse qui va suivre, il sera plus pratique d'utiliser une formulation "variationnelle" (équivalente) du Problème III.6.

Problème III.7

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que pour tout $u_\tau, v_\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{c_\tau^{n+1} - c_\tau^n}{\Delta t}, v_\tau \right)_\mathfrak{M} = -\Gamma_b \llbracket \mu_\tau^{n+1}, v_\tau \rrbracket_{1,\tau}, \end{array} \right. \quad (\text{III.11a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_\tau^{n+1}, u_\tau)_\mathfrak{M} = \mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (c_\kappa^{n+1} - c_\mathcal{L}^{n+1}) (u_\kappa - u_\mathcal{L}) \\ \quad + \mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (c_\kappa^{n+1} - c_\mathcal{L}^{n+1}) u_\kappa \\ \quad + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) u_\kappa, \end{array} \right. \quad (\text{III.11b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A}_{\partial t} \left(\frac{c_\tau^{n+1} - c_\tau^n}{\Delta t}, u_{\partial \mathfrak{M}} \right)_{\partial \mathfrak{M}} = -\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \llbracket c_\tau^{n+1}, u_{\partial \mathfrak{M}} \rrbracket_{1,\partial \mathfrak{M}} - \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1}) u_\mathcal{L} \\ \quad - \mathcal{A}_\Delta \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\kappa^{n+1}) u_\mathcal{L}. \end{array} \right. \quad (\text{III.11c})$$

III.3 Estimations d'énergie

En s'inspirant de l'énergie libre continue (III.5), nous définissons l'énergie libre discrète qui se décompose en une contribution volumique $\mathcal{F}_{b,\tau}$ et une contribution surfacique $\mathcal{F}_{s,\partial \mathfrak{M}}$.

$$\mathcal{F}_\tau(c_\tau) = \underbrace{\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau|_{1,\tau}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa f_b(c_\kappa)}_{:=\mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau)} + \underbrace{\frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} f_s(c_\mathcal{L})}_{:=\mathcal{F}_{s,\partial \mathfrak{M}}(c_{\partial \mathfrak{M}})}, \quad \forall c_\tau \in \mathbb{R}^\tau. \quad (\text{III.12})$$

Nous avons alors l'égalité d'énergie suivante.

Proposition III.8 (Egalité d'énergie)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ donné. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ au Problème III.7, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_\tau^{n+1} - c_\tau^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \\ + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 \\ = \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} (f_s(c_\mathcal{L}^{n+1}) - f_s(c_\mathcal{L}^n) - d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1})(c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n)). \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

Démonstration : Choisissons $u_\tau = c_\tau^{n+1} - c_\tau^n$ et $v_\tau = -\Delta t \mu_\tau^{n+1}$ comme fonctions test dans le Problème III.7 puis additionnons les trois équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} -\frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_\tau^{n+1} - c_\tau^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 = \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \mathcal{A}_\Delta \llbracket c_\tau^{n+1}, c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_{1,\tau} + \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \llbracket c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n \rrbracket_{1,\partial \mathfrak{M}} \\ + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n) + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1})(c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n). \end{aligned}$$

La relation $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ implique,

$$\begin{aligned} \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_\tau^{n+1} - c_\tau^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} (|c_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 - |c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2) \\ + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} (|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 - |c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 + |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2) \\ = -\mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n) - \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1})(c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n). \end{aligned}$$

Or la définition (III.12) de l'énergie libre, nous donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) &= \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left(|c_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 - |c_\tau^n|_{1,\tau}^2 \right) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} \left(|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 - |c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \right) \\ &\quad + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} (f_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}}^n)) + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} (f_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - f_s(c_{\mathcal{L}}^n)), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous ne connaissons pas, a priori, le signe des termes du membre de droite de l'égalité (III.13). Pour obtenir la décroissance de l'énergie au niveau discret, il va falloir traiter indépendamment les deux discrétisations des termes non-linéaires utilisées.

III.3.1 Discrétisation implicite

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre I, la première discrétisation que nous utilisons est une discrétisation totalement implicite des termes non-linéaires :

$$d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1}) = f'_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) = f'_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{III.14})$$

Nous avons alors l'inégalité d'énergie suivante.

Proposition III.9

Il existe $\Delta t_0 > 0$ tel que si $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ est donné et si $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ est une solution du Problème (III.7); alors pour tout pas de temps $\Delta t \leq \Delta t_0$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) &+ \frac{\Delta t \Gamma_b}{2} |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{2\Delta t} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \\ &+ \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Démonstration : D'après l'hypothèse de dissipativité (III.3), il existe $\alpha_b, \alpha_s \geq 0$ tels que $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f_b(x) - f_b(y) - f'_b(x)(x - y) &\leq \alpha_b(x - y)^2, \\ f_s(x) - f_s(y) - f'_s(x)(x - y) &\leq \alpha_s(x - y)^2. \end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité d'énergie (III.13) devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) &+ \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \\ &+ \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \\ &\leq \alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0,\mathfrak{M}}^2 + \alpha_s \mathcal{A}_{f_s} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2. \end{aligned}$$

Choisissons maintenant $v_\tau = c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ comme fonction test dans l'équation (III.11a), alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young impliquent :

$$\begin{aligned} \alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0,\mathfrak{M}}^2 &= -\alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \Delta t \Gamma_b \llbracket \mu_\tau^{n+1}, c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_{1,\tau} \\ &\leq \frac{\Delta t \Gamma_b}{2} |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + (\mathcal{A}_{f_b} \alpha_b)^2 \frac{\Delta t \Gamma_b}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2. \end{aligned}$$

Nous pouvons ainsi conclure la preuve en choisissant $\Delta t_0 = \min(\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2\Gamma_b(\mathcal{A}_{f_b}\alpha_b)^2}, \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{2\mathcal{A}_{f_s}\alpha_s})$. ■

Comme pour la Proposition I.5, Δt dépend fortement des paramètres de l'équation. De plus, nous avons ajouté une condition supplémentaire sur Δt_0 qui dépend des paramètres surfaciques.

III.3.2 Discrétisation semi-implicite

Comme dans le Chapitre I, nous choisissons d^{f_b} et d^{f_s} de sorte que le membre de droite de l'égalité (III.13) soit exactement égal à 0.

$$d^{f_b}(x, y) = \frac{f_b(y) - f_b(x)}{y - x} \quad \text{et} \quad d^{f_s}(x, y) = \frac{f_s(y) - f_s(x)}{y - x}, \quad \forall x, y, x \neq y. \quad (\text{III.16})$$

Rappelons qu'en pratique nous n'avons pas de problème d'instabilité numérique lorsque x et y sont très proches car les termes d^{f_b} et d^{f_s} s'écrivent comme des polynômes en x et y . Plus précisément, pour les différents potentiels f_s que nous utilisons, nous avons toujours :

$$d^{f_s}(x, y) = f'_s\left(\frac{x+y}{2}\right) + (x-y)^2 P(x, y);$$

où P est un polynôme en x, y . Les valeurs exactes des termes d^{f_s} en fonction du choix du potentiel f_s seront décrits dans la Section III.8.

Alors, l'égalité d'énergie suivante est immédiate pour tout pas de temps Δt .

Proposition III.10

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ donné. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ au Problème III.7, alors l'estimation suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \\ + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Remarque III.11

Pour chacune des deux discrétisations choisies, nous avons décroissance de l'énergie : si c_τ^n est donné et si $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ est solution du Problème III.7, alors il existe une constante $C_{22} > 0$ indépendante de Δt et τ telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) + C_{22} \left(\Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 \right) \leq 0, \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

avec une condition $\Delta t \leq \Delta t_0$ pour une discrétisation implicite.

III.4 Existence de solutions au problème discret

Rappelons que la discrétisation du potentiel volumique de Cahn-Hilliard satisfait l'hypothèse suivante : d^{f_b} est de classe $\mathcal{C}^1$ et il existe $C_b \geq 0$ et un réel $p > 2$ tels que :

$$\begin{aligned} |d^{f_b}(a, b)| &\leq C_b (1 + |a|^{p-1} + |b|^{p-1}), \\ |D(d^{f_b}(a, \cdot))(b)| &\leq C_b (1 + |a|^{p-2} + |b|^{p-2}). \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

Théorème III.12 (Existence d'une solution au problème discret)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$. Supposons que :

- les potentiels f_b et f_s satisfassent l'hypothèse de dissipativité (III.3) et que le potentiel volumique satisfasse l'hypothèse de croissance polynomiale (I.7);
- la discrétisation du potentiel volumique d^{f_b} satisfasse l'hypothèse de croissance polynomiale (I.17);

- il existe $K_b^{c_\tau^n}, K_s^{c_\tau^n} > 0$ (pouvant dépendre de c_τ^n) tels que,

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} (f_b(u_\kappa) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, u_\kappa)(u_\kappa - c_\kappa^n)) &\leq K_b^{c_\tau^n}, \quad \forall u_\kappa; \\ \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} (f_s(u_{\mathcal{L}}) - f_s(c_{\mathcal{L}}^n) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, u_{\mathcal{L}})(u_{\mathcal{L}} - c_{\mathcal{L}}^n)) &\leq K_s^{c_\tau^n}, \quad \forall u_{\mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Alors, il existe au moins une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ au Problème (III.6).

Remarque III.13

- Le membre de droite des inégalités (III.20) est toujours nul lorsque nous utilisons une discrétisation semi-implicite des potentiels de Cahn-Hilliard. Dans ce cas cette condition est donc toujours vérifiée.
- Lorsque nous utilisons une discrétisation complètement implicite des termes non-linéaires, le potentiel double-puits $f_b(c) = c^2(1-c)^2$ vérifie cette hypothèse (cf [Min10, Proposition V.13]). Dans la Section III.8, nous vérifierons si les différents potentiels surfaciques f_s utilisés vérifient cette hypothèse. Cependant si ce n'est pas le cas, le Théorème III.12 est tout de même satisfait pour tout pas de temps suffisamment petit $\Delta t \leq \Delta t_0$.

Commençons par rappeler deux lemmes énoncés dans le Chapitre I et qui nous seront très utiles dans la suite : l'inégalité de Poincaré et l'inégalité Poincaré-Sobolev. Les preuves sont données dans [BCCHF] pour le cas d'un ouvert Ω polygonal et des conditions aux limites de Neumann mais ces résultats s'adaptent facilement au cadre qui nous intéresse.

Lemme III.14 (Inégalité de Poincaré, [BCCHF, Théorème 5])

Il existe une constante $C_{23} > 0$ dépendant seulement de Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|u_{\mathfrak{M}} - m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}})\|_{0,\mathfrak{M}} \leq C_{23} |u_\tau|_{1,\mathcal{T}}, \quad \forall u_\tau \in \mathbb{R}^\tau; \quad (\text{III.21})$$

avec $m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}}) = \frac{1}{M_\Omega} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} u_\kappa$ et $M_\Omega = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}}$.

Ainsi, pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$, nous avons

$$\|u_\tau\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq (2C_{23}^2 + 1) |u_\tau|_{1,\mathcal{T}}^2 + 2M_\Omega (m_{\mathfrak{M}}(u_{\mathfrak{M}}))^2. \quad (\text{III.22})$$

Lemme III.15 (Inégalité de Poincaré-Sobolev, [BCCHF, Théorème 3])

Soit $1 \leq q < +\infty$, alors il existe une constante $C_{24} > 0$ dépendant seulement de q , Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{0,q,\mathfrak{M}} \leq C_{24} \|u_\tau\|_{1,\mathcal{T}}, \quad \forall u_\tau \in \mathbb{R}^\tau. \quad (\text{III.23})$$

Donnons maintenant l'inégalité de Sobolev sur Γ , sous-variété de dimension 1.

Lemme III.16

Il existe une constante positive C_{25} dépendant seulement de Γ et de $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|u_{\partial \mathfrak{M}}\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{25} \|u_{\partial \mathfrak{M}}\|_{1,\partial \mathfrak{M}}. \quad (\text{III.24})$$

Démonstration : Soit $\mathcal{L}_1 \in \partial \mathfrak{M}$, alors :

$$u_{\mathcal{L}_1} = \left(u_{\mathcal{L}_1} - \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} \right) + \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} u_{\mathcal{L}} \quad \text{avec} \quad M_\Gamma = \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\begin{aligned} |u_{\mathcal{L}_1}|^2 &\leq 2 \left(\left| u_{\mathcal{L}_1} - \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} u_\mathcal{L} \right|^2 + \left| \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} u_\mathcal{L} \right|^2 \right) \\ &\leq 2 \left(\frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}_1} - u_\mathcal{L}|^2 + \frac{1}{M_\Gamma} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} |u_\mathcal{L}|^2 \right) \\ &\leq \frac{2}{M_\Gamma} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}_1} - u_\mathcal{L}|^2 + \|u_{\partial \mathfrak{M}}\|_{0, \partial \mathfrak{M}}^2 \right). \end{aligned}$$

Remarquons que si $u_{\mathcal{L}_1}, u_{\mathcal{L}_2} \in \partial \mathfrak{M}$, nous avons par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |u_{\mathcal{L}_1} - u_{\mathcal{L}_2}| &\leq \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} |u_\mathcal{L} - u_{\mathcal{L}'}| \\ &\leq \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} \frac{|u_{\mathcal{L}'} - u_{\mathcal{L}}|}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \\ &\leq \left(\sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} \right)^{\frac{1}{2}} |u_{\partial \mathfrak{M}}|_{1, \partial \mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

Donc, d'après la Proposition II.6, il existe une constante $C_\Gamma > 0$ ne dépendant que de Γ telle que :

$$|u_{\mathcal{L}_1}|^2 \leq 2 \left(C_\Gamma |u_{\partial \mathfrak{M}}|_{1, \partial \mathfrak{M}}^2 + \frac{1}{M_\Gamma} \|u_{\partial \mathfrak{M}}\|_{0, \partial \mathfrak{M}}^2 \right),$$

ce qui conclut la preuve. ■

Les points clés de la démonstration du Théorème III.12 sont les estimations *a priori* données par l'estimation d'énergie III.13 couplées avec le lemme A.8 issu de la théorie du degré topologique en dimension finie [Dei85].

Démonstration du théorème III.12 :

Reformulation du problème :

Soit W l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{R}^\mathcal{T} \times \mathbb{R}^\mathcal{T}$ auquel nous associons la norme suivante :

$$\|\omega_\mathcal{T}\|_W^2 = \|c_\mathcal{T}\|_{1, \mathcal{T}}^2 + \|c_{\partial \mathfrak{M}}\|_{1, \partial \mathfrak{M}}^2 + \|\mu_\mathcal{T}\|_{1, \mathcal{T}}^2, \quad \forall \omega_\mathcal{T} = (c_\mathcal{T}, \mu_\mathcal{T}) \in W.$$

Considérons l'application h définie de la manière suivante :

$$h : W \times [0, 1] \rightarrow W$$

$$(\omega_\mathcal{T}^{n+1}, \delta) = (c_\mathcal{T}^{n+1}, \mu_\mathcal{T}^{n+1}, \delta) \mapsto (E_\delta^{c, \mathfrak{M}}, E_\delta^{c, \partial \mathfrak{M}}, E_\delta^\mu)$$

où nous avons noté $E_\delta^{c, \mathfrak{M}} = (E_\delta^{c, \mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$, $E_\delta^{c, \partial \mathfrak{M}} = (E_\delta^{c, \mathcal{L}})_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}}$ et $E_\delta^\mu = (E_\delta^{\mu, \mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$:

$$E_\delta^{\mu, \mathcal{K}} = m_{\mathcal{K}} \left(\frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} \right) + \Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \left(\frac{\mu_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M};$$

$$\begin{aligned} E_\delta^{c, \mathcal{K}} &= \mathcal{A}_{f_b} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_\sigma \left(\frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left(\frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right) \right) \\ &\quad + \mathcal{A}_\Delta \delta m_{\mathcal{K}} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1}) - m_{\mathcal{K}} \mu_{\mathcal{K}}^{n+1}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_\delta^{c, \mathcal{L}} &= \mathcal{A}_{\partial t} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left(\frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n}{\Delta t} \right) + \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mathcal{L}} \frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} + \mathcal{A}_{f_s} \delta m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \\ &\quad + \mathcal{A}_\Delta m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}}, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}. \end{aligned}$$

La fonction g est définie par :

$$\begin{aligned} g : W &\rightarrow W \\ \omega_\mathcal{T} &\mapsto h(\omega_\mathcal{T}, 1), \end{aligned}$$

ainsi le problème "Trouver $\omega_\mathcal{T}^{n+1} \in W$ tel que $g(\omega_\mathcal{T}^{n+1}) = 0$ " est équivalent au Problème III.6. Il faut donc montrer que les fonctions g et h vérifient bien les hypothèses du Lemme A.8.

L'hypothèse (III.19) sur la discrétisation d^{f_b} du potentiel volumique nous permet d'obtenir la continuité de la fonction h .

Vérification de l'hypothèse (ii) du Lemme A.8 :

Soit $(\omega_\tau^{n+1}, \delta) \in W \times [0, 1]$ tels que $h(\omega_\tau^{n+1}, \delta) = 0$. Remarquons que ceci signifie que $\omega_\tau^{n+1} = (c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ est solution d'un problème similaire au Problème III.6 avec δf_b à la place de d^{f_b} et δd^{f_s} à la place de d^{f_s} . Nous pouvons alors appliquer les résultats précédents et obtenir une égalité d'énergie similaire à (III.13), ainsi nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^n) + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \\ + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 \\ = \delta \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ + \delta \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} (f_s(c_\mathcal{L}^{n+1}) - f_s(c_\mathcal{L}^n) - d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1})(c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n)) \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau) = \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau|_{1,\tau}^2 + \delta \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} f_b(c_\kappa) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 + \delta \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} f_s(c_\mathcal{L}).$$

L'hypothèse (III.20) et le fait que $\delta \geq 0$ impliquent

$$\mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^{n+1}) + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \leq \delta K_b^{c_\tau^n} + \delta K_s^{c_\tau^n} + \mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^n) \quad (\text{III.25})$$

donc en remarquant que $\delta \leq 1$, il existe $K_1^{c_\tau^n} > 0$ indépendant de δ et c_τ^{n+1} tel que :

$$\mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^{n+1}) + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \leq K_1^{c_\tau^n}. \quad (\text{III.26})$$

De plus, les potentiels f_b et f_s sont minorés (hypothèse (III.3)) et $0 \leq \delta \leq 1$ donc :

$$\mathcal{F}_\tau^\delta(c_\tau^{n+1}) \geq \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 - \alpha_2 (\mathcal{A}_{f_b} M_\Omega + \mathcal{A}_{f_s} M_\Gamma). \quad (\text{III.27})$$

Ainsi, en regroupant les estimations (III.26) et (III.27), il existe $K_2^{c_\tau^n} := K_1^{c_\tau^n} + \alpha_2 (\mathcal{A}_{f_b} M_\Omega + \mathcal{A}_{f_s} M_\Gamma) > 0$ tel que :

$$\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 + \Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 \leq K_2^{c_\tau^n},$$

ce qui mène aux bornes suivantes avec $K_3^{c_\tau^n}, K_4^{c_\tau^n}, K_5^{c_\tau^n}, K_6^{c_\tau^n} > 0$

$$\begin{aligned} |c_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 &\leq \frac{2}{\mathcal{A}_\Delta} K_2^{c_\tau^n} := K_3^{c_\tau^n}, & |c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 &\leq \frac{2}{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}} K_2^{c_\tau^n} := K_4^{c_\tau^n}, \\ \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2 &\leq \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_{\partial t}} K_2^{c_\tau^n} := K_5^{c_\tau^n}, & |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 &\leq \frac{K_2^{c_\tau^n}}{\Delta t \Gamma_b} := K_6^{c_\tau^n}. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi l'une des bornes attendues : il existe $K_7^{c_\tau^n} > 0$ tel que

$$\|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1,\partial \mathfrak{M}}^2 \leq 2 (K_5^{c_\tau^n} + \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial \mathfrak{M}}^2) + K_4^{c_\tau^n} := K_7^{c_\tau^n}. \quad (\text{III.28})$$

Pour obtenir la seconde borne sur le paramètre d'ordre, nous appliquons l'inégalité de Poincaré (III.22) en remarquant que nous avons conservation du volume au niveau discret $m_{\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n) = m_{\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^{n+1})$. Ainsi, il existe $K_8^{c_\tau^n} > 0$ telle que :

$$\|c_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^2 \leq (2C_{23}^2 + 1) K_3^{c_\tau^n} + 2M_\Omega (m_{\mathfrak{M}}(c_{\mathfrak{M}}^n))^2 := K_8^{c_\tau^n}. \quad (\text{III.29})$$

Il reste maintenant à obtenir la borne sur le potentiel chimique. Nous devons donc évaluer la moyenne de μ_τ^{n+1} sur Ω . Vu que $E_\delta^{c,\mathfrak{M}} = E_\delta^{c,\partial \mathfrak{M}} = 0$, nous avons :

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \mu_\kappa^{n+1} = \mathcal{A}_{\partial t} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n}{\Delta t} + \delta \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) + \delta \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1})$$

et puisque $\delta \leq 1$,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \mu_{\kappa}^{n+1} \right| &\leq \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n| \\ &\quad + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \left| d^{f_b}(c_{\kappa}^n, c_{\kappa}^{n+1}) \right| + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \left| d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \right|. \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il existe $K_9^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ telle que :

$$\sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n| \leq \sqrt{M_{\Gamma}} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0, \partial \mathfrak{M}} \leq \sqrt{M_{\Gamma}} \sqrt{K_5^{c_{\mathcal{T}}^n}} := K_9^{c_{\mathcal{T}}^n}. \quad (\text{III.31})$$

De plus, l'hypothèse de croissance polynomiale (III.19) et l'inégalité de Poincaré-Sobolev (III.23) impliquent l'existence d'une constante $K_{10}^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \left| d^{f_b}(c_{\kappa}^n, c_{\kappa}^{n+1}) \right| &\leq C_b \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} (1 + |c_{\kappa}^n|^{p-1} + |c_{\kappa}^{n+1}|^{p-1}) \\ &\leq C_b (M_{\Omega} + \|c_{\mathcal{T}}^n\|_{0, p-1, \mathfrak{M}}^{p-1} + \|c_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{0, p-1, \mathfrak{M}}^{p-1}) \\ &\leq C_b (M_{\Omega} + \|c_{\mathcal{T}}^n\|_{0, p-1, \mathfrak{M}}^{p-1} + C_{24}^{p-1} \|c_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{1, \mathcal{T}}^{p-1}) \\ &\leq C_b \left(M_{\Omega} + \|c_{\mathcal{T}}^n\|_{0, p-1, \mathfrak{M}}^{p-1} + \left(C_{24} \sqrt{K_8^{c_{\mathcal{T}}^n}} \right)^{p-1} \right) := K_{10}^{c_{\mathcal{T}}^n}. \end{aligned} \quad (\text{III.32})$$

D'après l'inégalité de Sobolev (III.24), nous avons :

$$\|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \leq C_{25} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1, \partial \mathfrak{M}} \leq C_{25} \sqrt{K_7^{c_{\mathcal{T}}^n}},$$

donc en distinguant les deux discrétisations possibles de d^{f_s} , il existe $K_{11}^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ tel que pour $\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}$:

- pour une discrétisation implicite de d^{f_s} , en posant $M^{c_{\mathcal{T}}^n} := C_{25} \sqrt{K_7^{c_{\mathcal{T}}^n}}$,

$$\left| d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \right| = |f'_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1})| \leq \max_{\overline{B}(0, M^{c_{\mathcal{T}}^n})} |f'_s| := K_{11}^{c_{\mathcal{T}}^n};$$

- pour une discrétisation semi-implicite de d^{f_s} , en posant $M^{c_{\mathcal{T}}^n} := \max \left(C_{25} \sqrt{K_7^{c_{\mathcal{T}}^n}}, \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \right)$,

$$\left| d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \right| = \left| \frac{f_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - f_s(c_{\mathcal{L}}^n)}{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n} \right| \leq \max_{\overline{B}(0, M^{c_{\mathcal{T}}^n})} |f'_s| := K_{11}^{c_{\mathcal{T}}^n}.$$

Ainsi, il existe une constante $K_{12}^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ telle que :

$$\sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \left| d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) \right| \leq M_{\Gamma} K_{11}^{c_{\mathcal{T}}^n} := K_{12}^{c_{\mathcal{T}}^n}. \quad (\text{III.33})$$

Donc, en regroupant les estimations (III.30) à (III.33), il existe $K_{13}^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ telle que :

$$|m_{\mathfrak{M}}(\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1})| = M_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} K_9^{c_{\mathcal{T}}^n} + \mathcal{A}_{f_b} K_{10}^{c_{\mathcal{T}}^n} + \mathcal{A}_{f_s} K_{12}^{c_{\mathcal{T}}^n} \right) := K_{13}^{c_{\mathcal{T}}^n}. \quad (\text{III.34})$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Poincaré (III.22), il existe $K_{14}^{c_{\mathcal{T}}^n} > 0$ telle que :

$$\|\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1, \mathcal{T}}^2 \leq (2C_{23}^2 + 1) K_6^{c_{\mathcal{T}}^n} + 2M_{\Omega} \left(K_{13}^{c_{\mathcal{T}}^n} \right)^2 := K_{14}^{c_{\mathcal{T}}^n}. \quad (\text{III.35})$$

En combinant les bornes obtenues dans les estimations (III.28), (III.29) et (III.29), nous obtenons finalement :

$$\|\omega_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_W^2 \leq K_8^{c_{\mathcal{T}}^n} + K_7^{c_{\mathcal{T}}^n} + K_{14}^{c_{\mathcal{T}}^n} := K^{c_{\mathcal{T}}^n}.$$

Donc, prendre $R > \sqrt{K^{c_{\mathcal{T}}^n}} \geq 0$, assure que pour tout $(\omega_{\mathcal{T}}^{n+1}, \delta) \in W \times [0; 1]$,

$$h(\omega_{\mathcal{T}}^{n+1}, \delta) = 0 \Rightarrow |\omega_{\mathcal{T}}^{n+1}|_W \neq R.$$

Vérification de l'hypothèse (iii) du Lemme A.8 :

Nous devons montrer l'existence d'une solution au problème linéaire $h(\omega_\tau^{n+1}, 0) = 0$, que nous pouvons écrire sous la forme :

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que pour tout $u_\tau, v_\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$:

$$\begin{aligned} \Gamma_b \llbracket \mu_\tau^{n+1}, v_\tau \rrbracket_{1,\tau} - (\mu_\tau^{n+1}, u_\tau)_{\mathfrak{M}} + \mathcal{A}_\Delta \llbracket c_\tau^{n+1}, u_\tau \rrbracket_{1,\tau} + \frac{1}{\Delta t} (c_\tau^{n+1}, v_\tau)_{\mathfrak{M}} + \mathcal{A}_{\Delta\Gamma} \llbracket c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}, u_{\partial\mathfrak{M}} \rrbracket_{1,\partial\mathfrak{M}} \\ + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} (c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}, u_{\partial\mathfrak{M}})_{\partial\mathfrak{M}} = \frac{1}{\Delta t} (c_\tau^n, v_\tau)_{\mathfrak{M}} + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} (c_{\partial\mathfrak{M}}^n, u_{\partial\mathfrak{M}})_{\partial\mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

Puisque ce problème est linéaire et de dimension finie, il suffit de montrer que le couple $(0, 0)$ est l'unique solution du problème homogène :

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que pour tout $u_\tau, v_\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$:

$$\begin{aligned} \Gamma_b \llbracket \mu_\tau^{n+1}, v_\tau \rrbracket_{1,\tau} - (\mu_\tau^{n+1}, u_\tau)_{\mathfrak{M}} + \mathcal{A}_\Delta \llbracket c_\tau^{n+1}, u_\tau \rrbracket_{1,\tau} + \frac{1}{\Delta t} (c_\tau^{n+1}, v_\tau)_{\mathfrak{M}} \\ + \mathcal{A}_{\Delta\Gamma} \llbracket c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}, u_{\partial\mathfrak{M}} \rrbracket_{1,\partial\mathfrak{M}} + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} (c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}, u_{\partial\mathfrak{M}})_{\partial\mathfrak{M}} = 0, \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

Choisissons $u_\tau = c_\tau^{n+1}$ et $v_\tau = \Delta t \mu_\tau^{n+1}$ dans (III.36) alors :

$$\begin{aligned} \Delta t \Gamma_b \|\mu_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^2 + \mathcal{A}_\Delta \|c_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^2 + \mathcal{A}_{\Delta\Gamma} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 = 0 \\ \Rightarrow \|\mu_\tau^{n+1}\|_{1,\tau} = \|c_\tau^{n+1}\|_{1,\tau} = \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1,\partial\mathfrak{M}} = \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0,\partial\mathfrak{M}} = 0. \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi $c_\tau^{n+1} = 0$ et μ_τ^{n+1} est constant. En injectant ceci dans (III.36), nous obtenons $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) = (0, 0)$. ■

III.5 Convergence des solutions approchées

Le but de cette section est de démontrer la convergence des solutions approchées du Problème III.6 vers une solution faible du modèle de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (III.4).

Définition III.17 (Formulation faible)

Un couple $(c, \mu) \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)) \times L^2(0, T; H^1(\Omega))$ tel que $c_{|\Gamma} \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma))$ est appelé solution faible de l'équation de Cahn-Hilliard (III.4) si pour tout $\phi \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$, les identités suivantes sont satisfaites :

$$\int_0^T \int_\Omega (-\partial_t \phi c + \Gamma_b \nabla \mu \cdot \nabla \phi) \, dx \, dt = \int_\Omega c^0 \phi(0, \cdot) \, dx, \quad (\text{III.37})$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (-\mu \phi + \mathcal{A}_\Delta \nabla c \cdot \nabla \phi + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c) \phi) \, dx \, dt \\ + \int_0^T \int_\Gamma (-\mathcal{A}_{\partial t} \partial_t \phi c_{|\Gamma} + \mathcal{A}_{\Delta\Gamma} \nabla_\Gamma c_{|\Gamma} \cdot \nabla_\Gamma \phi + \mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{|\Gamma}) \phi) \, d\sigma(x) \, dt \\ = \mathcal{A}_{\partial t} \int_\Gamma \text{Tr}(c^0) \phi(0, \cdot) \, d\sigma(x). \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

Théorème III.18 (Théorème de convergence)

Soit $c^0 \in H_\Gamma^1(\Omega)$ (cf définition (III.6)) et $\left((c_\tau^{\Delta t})^{(m)} \right), \left((\mu_\tau^{\Delta t})^{(m)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$ une suite d'approximations obtenues sur une famille de maillages admissibles et de pas de temps telle que le pas de temps et le pas d'espace, $\Delta t^{(m)}$ (avec $\Delta t^{(m)} < \Delta t_0$ pour une discrétisation implicite des termes non-linéaires) et $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ respectivement, tendent vers 0. Alors, en supposant que $\text{reg}(\mathcal{T}^{(m)})$ est borné lorsque $m \rightarrow +\infty$, il existe une solution faible (c, μ) du problème

(III.6) (au sens de la Définition III.17) pour la donnée initiale c^0 telle que, à sous-suite près, les convergences suivantes sont vérifiées pour tout $q \geq 1$:

$$\begin{aligned} (c_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} &\rightarrow c \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)), & (c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(m)} &\rightarrow \text{Tr}(c) \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Gamma)), \\ \text{et } (\mu_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} &\rightharpoonup \mu \text{ dans } L^2(0, T; L^q(\Omega)) \text{ faiblement.} \end{aligned}$$

En raison de la présence de termes non-linéaires dans l'équation à la fois dans Ω et sur Γ pour pouvoir démontrer ce Théorème nous allons avoir besoin de compacité forte à la fois dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ et dans $L^2((0, T) \times \Gamma)$. Ainsi, la preuve du Théorème III.18 réside dans l'application du Théorème de Kolmogorov A.11 qui permet d'obtenir l'existence de la limite et des convergences fortes. Nous pouvons ensuite passer à la limite dans le schéma et en particulier dans les termes non-linéaires. Pour appliquer le théorème de Kolmogorov, nous allons utiliser trois éléments essentiels : les bornes sur les solutions discrètes du Problème III.6 (cf Proposition III.26), un théorème d'estimation de translations en espace (cf Théorème III.33) ainsi qu'un théorème d'estimation de translations en temps (cf Théorème III.39).

La principale difficulté dans la démonstration du Théorème III.18 se trouve dans la démonstration de l'estimation de translations en espace. En effet, si nous appliquons le théorème de translations en espace classique (cf Lemme I.13) il faudra procéder en trois étapes :

- Dans un premier temps, en utilisant le lemme de translations en espace I.13 couplé avec une estimation de translations en temps, nous pourrions appliquer le théorème de Kolmogorov une première fois dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ et obtenir l'existence d'une limite $c \in L^2(0, T, L^2(\Omega))$ (à sous-suite près).
- Nous devrions ensuite établir un théorème de translations en espace sur Γ qui, associé à une estimation de translations en temps, permettra d'appliquer une seconde fois le théorème de Kolmogorov mais cette fois-ci sur $L^2((0, T) \times \Gamma)$ et obtenir l'existence d'une limite $\tilde{c} \in L^2(0, T, L^2(\Gamma))$. Notons cependant que du fait de la présence du terme $\partial_n c$ dans la condition aux limites nous devons tout de même utiliser le couplage qui s'effectue entre le domaine et sa frontière (et donc l'équation dans Ω) pour obtenir l'estimation de translations en temps sur Γ .
- Enfin il restera à montrer que $\text{Tr}(c) = \tilde{c}$.

Pour éviter ceci, nous démontrons le Théorème III.33 qui permet d'obtenir directement (en appliquant une seule fois le théorème de Kolmogorov) l'existence d'un certain c dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ dont la trace est dans $L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$. Pour démontrer ce théorème, nous définissons un maillage d'un certain voisinage de Γ et nous construisons un opérateur de prolongement particulier (cf Définition III.30) qui utilise la trace discrètes des solutions approchées et qui prend en compte la géométrie courbe du domaine sur ce nouveau maillage. Des difficultés apparaissent alors qui sont liées à la géométrie courbe du domaine et donc à la présence d'arêtes courbe dans le maillage.

III.5.1 Propriétés de la projection moyenne

La définition (III.8) de la concentration initiale discrète nous incite à donner les propriétés suivantes sur la projection moyenne qui nous seront utiles dans la suite.

Proposition III.19

Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C_{26} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m u\|_{0,p,\mathfrak{M}} \leq C_{26} \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

En utilisant l'inégalité de Jensen et le fait que les normes $\|\cdot\|_{0,p,\mathfrak{M}}$ et $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ sont équivalentes la preuve de cette proposition est immédiate.

Lemme III.20

Pour tout $p \geq 1$, il existe une constante $C_{27} > 0$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et p telle que :

- pour tout segment $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ et pour tout polygone $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ de mesure non nulle,
- pour tout pseudo-triangle $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ possédant un côté courbe $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ et vérifiant la propriété de régularité (III.144) décrite dans le Théorème III.40,

et pour tout $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$, alors :

$$|u_{\mathcal{P}} - u_{\sigma}|^p \leq C_{27} \frac{(m_{\sigma} + \text{diam}(\mathcal{Q}))^p}{m_{\mathcal{P}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla u(z)|^p dz,$$

où $u_{\mathcal{P}}$ désigne la moyenne de u sur $\mathcal{P}$, u_{σ} la moyenne de u sur σ et :

- $\mathcal{Q} = \widehat{\mathcal{P}_{\sigma}}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{P} \cup \sigma$ dans le cas où σ est un segment;
- $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$ dans le cas où $\sigma \subset \partial\mathcal{P}$ est l'arête courbe du pseudo-triangle $\mathcal{P}$.

Dans le cas qui nous intéresse nous voulons appliquer ce lemme (le deuxième point plus précisément) aux mailles intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ possédant une arête σ appartenant à Γ (c'est à dire que σ est une arête courbe). Nous vérifions en annexe (voir la Proposition A.3) que, pour ces mailles $\mathcal{K}$, l'hypothèse de régularité (III.144) est bien satisfaite pour un maillage $\mathcal{T}$ suffisamment régulier et un pas $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit.

Remarque III.21

Ce lemme est crucial pour démontrer la proposition suivante qui sera utilisée dans la démonstration de la Proposition III.26 permettant d'obtenir les bornes sur les solutions discrètes qui est un résultat essentiel dans la démonstration du Théorème de convergence III.18.

En effet, pour obtenir les bornes sur les solutions discrètes il faut arriver à projeter la donnée initiale de sorte que les normes H^1 -discrètes sur Ω et Γ soient contrôlées par la norme $H^1_{\Gamma}(\Omega)$ de la donnée initiale. Nous savons que lorsque σ est un segment la démonstration de ce lemme est classique et peut être trouvée dans [EGH00, Lemme 3.4] par exemple. Ainsi, nous pourrions penser que nous pouvons éviter d'utiliser le cas où σ est une arête courbe, dont la démonstration est beaucoup plus complexe, en choisissant comme donnée initiale la moyenne sur les cordes. Cependant, si nous faisons ce choix nous perdons l'estimation H^1 du bord. En effet, si nous choisissons la projection moyenne sur les cordes plutôt que sur les arêtes courbes nous ne sommes plus en mesure de démontrer la Proposition III.23 qui nous permet d'obtenir l'estimation H^1 du bord. C'est pour cette raison que nous choisissons comme donnée initiale discrète la projection moyenne sur les arêtes courbes (voir la définition (III.8) de $c_{\mathcal{T}}^0$). Dans ce cas là nous avons donc besoin d'utiliser le deuxième point du Lemme III.20 qui constitue un résultat technique dont la preuve fera l'objet de la Section III.6.

Proposition III.22

Il existe une constante $C_{28} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$,

$$|\mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m u|_{1,\mathcal{T}} \leq C_{28} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration : Par définition de la semi-norme $|\cdot|_{1,\mathcal{T}}$, nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m u|_{1,\mathcal{T}}^2 &= \sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u)^2 + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u)^2 \\ &\leq 2 \sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} [(\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u - u_{\sigma})^2 + (u_{\sigma} - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u)^2] + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (\mathbb{P}_{\mathcal{K}}^m u - \mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u)^2. \end{aligned}$$

Alors, le Lemme III.20 implique :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m u|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq 2C_{27} \sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \left(\frac{4\text{diam}(\widehat{\mathcal{K}})^2}{m_{\mathcal{K}}} \int_{\widehat{\mathcal{K}}} |\nabla u(z)|^2 dz + \frac{4\text{diam}(\widehat{\mathcal{L}})^2}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\widehat{\mathcal{L}}} |\nabla u(z)|^2 dz \right) \\ &\quad + C_{27} \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} (m_{\sigma} + \text{diam}(\mathcal{K}))^2}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}} m_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} |\nabla u(z)|^2 dz. \end{aligned}$$

Il existe une constante positive $C_{\Gamma}(\text{reg}(\mathcal{T}))$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$|\mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m u|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq C_{27} C_{\Gamma}(\text{reg}(\mathcal{T})) \left(\sum_{\sigma=\mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \left(\int_{\widehat{\mathcal{K}}} |\nabla u(z)|^2 dz + \int_{\widehat{\mathcal{L}}} |\nabla u(z)|^2 dz \right) + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \int_{\mathcal{K}} |\nabla u(z)|^2 dz \right)$$

et la régularité du maillage permet de conclure la preuve. ■

Proposition III.23

Considérons une fonction $u \in H^1(\Gamma)$, alors il existe une constante $C_{29} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u\|_{1,\partial\mathfrak{M}} \leq C_{29} \|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Démonstration : Considérons deux volumes de contrôle voisins du bord $\mathcal{L}, \mathcal{L}' \in \partial\mathfrak{M}$, alors nous avons :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u - \mathbb{P}_{\mathcal{L}'}^m u|^2 &= \left| \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} u(x) d\sigma(x) - \frac{1}{m_{\mathcal{L}'}} \int_{\mathcal{L}'} u(y) d\sigma(y) \right|^2 \\ &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}'}} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}'} |u(x) - u(y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq \frac{1}{m_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}'}} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}'} \left| \int_{\widehat{xy}} \nabla_{\Gamma} u(z) \cdot \vec{\tau}(z) d\sigma(z) \right|^2 d\sigma(x) d\sigma(y). \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m u - \mathbb{P}_{\mathcal{L}'}^m u|^2 &\leq \frac{m_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}'}}{m_{\mathcal{L}} m_{\mathcal{L}'}} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}'} \left(\int_{\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z) \right) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq (m_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}'}) \int_{\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z). \end{aligned}$$

Nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u\|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 &= \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathbf{v}} \frac{(\mathbb{P}_{\mathcal{L}}^m - \mathbb{P}_{\mathcal{L}'}^m)^2}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \\ &\leq \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathbf{v}} \frac{m_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}'}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \int_{\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z) \\ &\leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathbf{v}} \int_{\mathcal{L} \cup \mathcal{L}'} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z) \\ &\leq 2C(\text{reg}(\mathcal{T})) \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. ■

Proposition III.24 ([ABH07, Proposition 3.5])

Il existe une constante $C_{30} > 0$ dépendant seulement de Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que,

$$\|\mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^m u - u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{30} \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Proposition III.25

Pour toute fonction $u \in H^1(\Gamma)$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|u - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u\|_{L^2(\Gamma)} \leq \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla_{\Gamma} u\|_{L^2(\Gamma)}.$$

Démonstration : La définition de la projection moyenne $\mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m$ donne :

$$\begin{aligned} \|u - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &= \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \int_{\mathcal{L}} \left| u(x) - \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} u(y) d\sigma(y) \right|^2 d\sigma(x) \\ &\leq \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \frac{1}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}} |u(x) - u(y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y). \end{aligned}$$

En remarquant que $|u(x) - u(y)| = \left| \int_{xy} \nabla_{\Gamma} u(z) \cdot \vec{\tau}(z) d\sigma(z) \right|$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \|u - \mathbb{P}_{\partial\mathfrak{M}}^m u\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \int_{\mathcal{L}} \int_{\mathcal{L}} \int_{xy} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &\leq \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \int_{\mathcal{L}} |\nabla_{\Gamma} u(z)|^2 d\sigma(z), \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. $\blacksquare$

III.5.2 Bornes sur les solutions du Problème III.6

Proposition III.26 (Bornes sur les solutions discrètes)

Supposons les hypothèses du Théorème III.18 satisfaites. Alors, il existe des constantes positives M_1, M_2, M_3, M_4 et M_5 indépendante de Δt et $\text{size}(\mathcal{T})$ telles que :

$$\begin{aligned} \sup_{n \leq N} \|c_{\mathcal{T}}^n\|_{1,\mathcal{T}} &\leq M_1, \quad \sup_{n \leq N} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{1,\partial\mathfrak{M}} \leq M_2, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{1,\mathcal{T}}^2 \leq M_3, \\ \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n}{\Delta t} \right\|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \frac{M_4}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 + \Delta t^2 \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq M_5. \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

Démonstration :

1. L'estimation d'énergie (III.18) donne une borne uniforme sur l'énergie discrète,

$$\forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket, \quad \mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^n) \leq \mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^0). \quad (\text{III.40})$$

Ainsi, en utilisant l'hypothèse de croissance polynomiale (I.7), l'énergie initiale $\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^0)$ peut être majorée indépendamment du pas du maillage. En effet, on écrit d'abord :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^0) &= \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathcal{T}}^0|_{1,\mathcal{T}}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f_b(c_{\kappa}^0) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^0|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} f_s(c_{\mathcal{L}}^0) \\ &\leq \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathcal{T}}^0|_{1,\mathcal{T}}^2 + \mathcal{A}_{f_b} C_b \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} (1 + |c_{\kappa}^0|^p) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^0|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_s} M_{\Gamma} \max_{\overline{B}(0, \|c^0\|_{L^\infty(\Gamma)})} |f_s| \\ &\leq \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathcal{T}}^0|_{1,\mathcal{T}}^2 + \mathcal{A}_{f_b} C_b (M_{\Omega} + \|c_{\mathcal{T}}^0\|_{0,p,\mathfrak{M}}^p) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^0|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_s} M_{\Gamma} \max_{\overline{B}(0, \|c^0\|_{L^\infty(\Gamma)})} |f_s|. \end{aligned}$$

La définition (III.8) de $c_{\mathcal{T}}^0$ et les Propositions III.19, III.22 et III.23 impliquent ensuite que :

$$\|c_{\mathcal{T}}^0\|_{0,p,\mathfrak{M}} \leq C_{26} \|c^0\|_{L^p(\Omega)}, \quad |c_{\mathcal{T}}^0|_{1,\mathcal{T}} \leq C_{28} \|\nabla c^0\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{et} \quad |c_{\partial\mathfrak{M}}^0|_{1,\partial\mathfrak{M}} \leq C_{29} \|\nabla_{\Gamma} c^0\|_{L^2(\Gamma)},$$

donc il existe une constante positive K_0 telle que :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^0) \leq K_0. \quad (\text{III.41})$$

De plus, d'après l'hypothèse de dissipativité (III.3) nous avons :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}^n) \geq \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} |c_{\mathcal{T}}^n|_{1,\mathcal{T}}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \alpha_1 \|c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0,\mathfrak{M}}^2 - \mathcal{A}_{f_b} \alpha_2 M_{\Omega} + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 + \mathcal{A}_{f_s} \alpha_1 \|c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 - \mathcal{A}_{f_s} \alpha_2 M_{\Gamma}. \quad (\text{III.42})$$

Ainsi, en combinant les estimations (III.40), (III.41) et (III.42) et en posant $K_1 := K_0 + \alpha_2 (\mathcal{A}_{f_b} M_{\Omega} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\Gamma}) > 0$, il existe des constantes positives K_2, K_3, K_4 et K_5 telles que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \|c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0,\mathfrak{M}}^2 &\leq \frac{K_1}{\mathcal{A}_{f_b} \alpha_1} := K_2, & |c_{\mathcal{T}}^n|_{1,\mathcal{T}}^2 &\leq \frac{2K_1}{\mathcal{A}_{\Delta}} := K_3, \\ \|c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 &\leq \frac{K_1}{\mathcal{A}_{f_s} \alpha_1} := K_4, & |c_{\mathcal{T}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 &\leq \frac{2K_1}{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}} := K_5. \end{aligned}$$

Ces estimations étant vraies pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, nous obtenons finalement,

$$\sup_{n \leq N} \|c_\tau^n\|_{1,\tau} \leq \sqrt{K_2 + K_3} := M_1, \quad \sup_{n \leq N} \|c_\tau^n\|_{1,\partial\mathfrak{M}} \leq \sqrt{K_4 + K_5} := M_2. \quad (\text{III.43})$$

2. Sommons maintenant les équations (III.18) pour n allant de 0 à $N - 1$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\tau(c_\tau^N) + C_{22} \sum_{n=0}^{N-1} \left(\Delta t \Gamma_b |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}}{2} |c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \right) \leq \mathcal{F}_\tau(c_\tau^0). \end{aligned} \quad (\text{III.44})$$

Les estimations (III.41) et (III.42) donnent alors :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 \leq \frac{K_1}{C_{22}\Gamma_b} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\Delta t} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \frac{K_1}{C_{22}\mathcal{A}_{\partial t}}. \quad (\text{III.45})$$

Prenons pour u_τ la fonction constante égale à 1 dans le Problème III.7 puis additionnons les équations (III.11b) et (III.11c). Pour tout $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$, nous obtenons :

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mu_\kappa^{n+1} = \mathcal{A}_{f_b} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_s} \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1}) + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} (c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n).$$

L'hypothèse de croissance polynomiale (I.17) donne

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \left| d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) \right| \leq C_b \left(M_\Omega + \|c_\mathfrak{M}^n\|_{0,p-1,\mathfrak{M}}^{p-1} + \|c_\mathfrak{M}^{n+1}\|_{0,p-1,\mathfrak{M}}^{p-1} \right),$$

donc en utilisant le Lemme III.15 et la borne (III.43), il existe une constante $K_6 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \left| d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) \right| &\leq C_b \left(M_\Omega + C_{24}^{p-1} \|c_\tau^n\|_{1,\tau}^{p-1} + C_{24}^{p-1} \|c_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^{p-1} \right) \\ &\leq C_b \left(M_\Omega + 2(M_1)^{p-1} C_{24}^{p-1} \right) := K_6. \end{aligned}$$

De plus, pour chacune des discrétisations du potentiel surfacique f_s (cf définition (III.14) pour une discrétisation implicite et (III.16) pour une discrétisation semi-implicite), il existe une constante $K_7 > 0$ telle que :

$$\left| d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1}) \right| \leq \max_{B(0,M_2)} |f'_s| := K_7, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Poincaré (III.22) appliquée à μ_τ^{n+1} il existe $K_8 = \frac{4}{M_\Omega} (\mathcal{A}_{f_b} K_6 + \mathcal{A}_{f_s} K_7)^2 > 0$ tel que :

$$\|\mu_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^2 \leq (2C_{23}^2 + 1) |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}^2 + \frac{4\mathcal{A}_{\partial t}^2 M_\Gamma}{M_\Omega} \frac{1}{\Delta t^2} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 + K_8.$$

Les bornes (III.45) permettent finalement d'obtenir :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mu_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^2 \leq (2C_{23}^2 + 1) \frac{K_1}{C_{22}\Gamma_b} + \frac{4\mathcal{A}_{\partial t} M_\Gamma K_1}{M_\Omega C_{22}} + T K_8 := M_3. \quad (\text{III.46})$$

3. De (III.41), (III.42) et (III.44), nous déduisons

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_\tau^{n+1} - c_\tau^n|_{1,\tau}^2 \leq \frac{2K_1}{C_{22}\mathcal{A}_\Delta}$$

et la forme discrète de conservation du volume $m_\mathfrak{M} (c_\mathfrak{M}^{n+1} - c_\mathfrak{M}^n) = 0$ combinée à l'inégalité de Poincaré (III.21) impliquent

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{c_\tau^{n+1} - c_\tau^n}{\Delta t} \right\|_{1,\tau}^2 \leq \frac{1}{\Delta t^2} (1 + C_{23}) \frac{2K_1}{C_{22}\mathcal{A}_\Delta} := \frac{M_4}{\Delta t^2}.$$

4. De la même manière, nous avons :

$$\sum_{n=0}^{N-1} |c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \frac{2K_1}{C_{22}\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \frac{K_1}{C_{22}\mathcal{A}_{\partial t}}$$

ce qui entraîne,

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left\| \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \left| \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{K_1}{C_{22}\mathcal{A}_{\partial t}} + \frac{2K_1}{C_{22}\mathcal{A}_{\Delta\Gamma}} \right) := \frac{M_5}{\Delta t}.$$

■

III.5.3 Convergence faible du gradient discret

Définition III.27 (Gradient discret)

L'opérateur de gradient discret $\nabla^\tau : \mathbb{R}^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\mathcal{E}$ est défini de la manière suivante. Pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$,

$$\nabla^\tau u_\tau = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} 1_{\mathcal{D}} \nabla_\sigma^\tau u_\tau \in (L^2(\Omega))^2, \quad \text{avec} \quad \nabla_\sigma^\tau u_\tau = 2 \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}, \quad \forall \sigma \in \mathcal{E},$$

où $1_{\mathcal{D}}$ est la fonction indicatrice du diamant $\mathcal{D}$.

Proposition III.28 (Convergence faible du gradient)

Considérons une suite de fonctions $(u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}^{(m)}}$ associée à une suite de discrétisations dont le pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ tend vers 0 (tout en maintenant borné la régularité du maillage $\text{reg}(\mathcal{T}^{(m)})$). Supposons qu'il existe une constante positive M indépendante de $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ telle que :

$$\|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{1,\mathcal{T}^{(m)}} \leq M, \quad \forall m \geq 0. \quad (\text{III.47})$$

Alors, $(u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement (à sous-suite près) dans $L^q(\Omega)$ ($q \geq 1$) vers un certain $u \in H^1(\Omega)$ et $(\nabla^\tau u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers ∇u dans L^2 .

Par soucis de clarté nous rappelons ici la preuve de cette proposition qui est un résultat classique en volumes finis. La démonstration que nous présentons ici est inspirée de celle donnée dans [EG02, Lemme 2] avec une définition un peu différente du gradient discret.

Démonstration :

Soit $\phi \in (\mathcal{C}_c^\infty(\Omega))^2$. La borne (III.47) nous permet d'extraire une sous-suite, toujours notée $(u_{\mathcal{T}^{(m)}})$ par simplicité, qui converge faiblement vers un certain $u \in L^q(\Omega)$ ($q \geq 1$), ainsi :

$$\int_{\Omega} u_{\mathcal{T}^{(m)}}(x) \text{div} \phi(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} u(x) \text{div} \phi(x) dx. \quad (\text{III.48})$$

De plus, en utilisant la formule de Stokes et le fait que $\phi = 0$ sur $\partial\Omega$, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}^{(m)}}(x) \text{div} \phi(x) dx &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} u_{\mathcal{K}^{(m)}} \int_{\mathcal{K}} \text{div} \phi(x) dx \\ &= \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} u_{\mathcal{K}^{(m)}} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} \phi(x) \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}(x) d\sigma(x) \right) \\ &= \sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} (u_{\mathcal{K}^{(m)}} - u_{\mathcal{L}^{(m)}}) \int_{\sigma} \phi(x) \cdot \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} d\sigma(x). \end{aligned}$$

Remarquons alors que $m_{\mathcal{D}} = \frac{m_{\sigma} d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}}{2}$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{\text{int}}$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}^{(m)}}(x) \text{div} \phi(x) dx &= \sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} m_{\mathcal{D}} \left(2 \frac{u_{\mathcal{K}^{(m)}} - u_{\mathcal{L}^{(m)}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} \right) \cdot \left(\frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right) \\ &= - \sum_{\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{\text{int}}} m_{\mathcal{D}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}^{(m)}} \cdot \left(\frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right), \end{aligned}$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \operatorname{div} \phi(x) &= - \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)} \cdot \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx \\ &\quad + \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_{\mathcal{D}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)} \cdot \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx - \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.49})$$

Or, nous savons que $\phi \in (\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega))^2$, donc :

$$0 = - \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)} \cdot \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathcal{D}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)} \cdot \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx - \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right), \quad (\text{III.50})$$

ainsi en ajoutant les équations (III.49) et (III.50), nous obtenons :

$$\int_{\Omega} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \operatorname{div} \phi(x) = - \int_{\Omega} \nabla^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \cdot \phi(x) dx + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} m_{\mathcal{D}} \nabla_{\sigma}^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)} \cdot \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx - \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right).$$

Puisque ϕ est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$,

$$\left| \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \phi(x) dx - \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \phi(x) d\sigma(x) \right| \leq C \|\nabla \phi\|_{L^{\infty}(\Omega)} \operatorname{size}(\mathcal{T}), \quad \forall \sigma \in \mathcal{E}.$$

De plus, la borne (III.47) signifie que la suite $(\nabla^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans L^2 , donc :

$$\int_{\Omega} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \operatorname{div} \phi(x) = - \int_{\Omega} \nabla^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \cdot \phi(x) dx + \mathcal{O}_{\phi}(\operatorname{size}(\mathcal{T}))$$

et, à sous-suite près, $(\nabla^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers un certain $G \in (L^2(\Omega))^2$, ainsi nous obtenons :

$$\int_{\Omega} u_{\mathcal{T}(m)}(x) \operatorname{div} \phi(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} - \int_{\Omega} G(x) \cdot \phi(x) dx. \quad (\text{III.51})$$

Puisque les convergences (III.48) et (III.51) sont satisfaites pour tout $\phi \in (\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega))^2$, nous en déduisons que $u \in H^1(\Omega)$ et $(\nabla^{\tau} u_{\mathcal{T}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement (à sous-suite près) vers ∇u dans L^2 . ■

Remarquons que dans cette preuve nous avons choisi ϕ à support compact dans Ω ainsi les arêtes extérieures du maillage n'interviennent pas et donc la géométrie courbe du domaine n'intervient pas.

III.5.4 Estimation de translations en espace

Pour passer à la limite dans le schéma, du fait des non-linéarités, nous devons utiliser de la compacité forte dans le domaine Ω mais aussi sur sa frontière Γ . C'est pourquoi, dans cette section, nous allons donner des estimations de translations en espace qui, couplées avec des estimations de translations en temps, vont nous permettre d'obtenir la convergence d'une suite de fonctions $((c_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ solutions du Problème discret III.6 vers un certain c dans $L^2((0, T) \times \Omega)$ et celle de $((c_{\partial \Omega}^{\Delta t})^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ vers $\operatorname{Tr} c$ dans $L^2((0, T) \times \Gamma)$.

Dans ce but, nous construisons un opérateur de prolongement particulier sur un voisinage ouvert de $\bar{\Omega}$.

Pour plus de clarté, la majorité des résultats de cette section seront présentés pour des fonctions indépendantes du temps mais s'adaptent bien sûr facilement au cas qui nous intéresse.

Construction de l'opérateur de prolongement

Dans l'Annexe (cf Définition A.1) nous rappelons la définition de la projection $\mathbb{P}_{\Gamma}$ sur Γ en utilisant la fonction :

$$\psi : (x_{\Gamma}, s) \in \Gamma \times \mathbb{R}_{+}^{*} \mapsto x_{\Gamma} + s \vec{n}(x_{\Gamma}) \in \mathbb{R}^2,$$

où $\vec{n}(x_{\Gamma})$ est la normale unitaire sortante à Ω au point $x_{\Gamma} \in \Gamma$.

Pour construire l'opérateur de prolongement associé à un maillage $\mathcal{T}$ de Ω nous considérons l'ouvert $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega^c, d(x, \Gamma) < \alpha\} = \psi(\Gamma \times]0, \alpha[)$, voisinage de Γ . Notons que dans le cas continu, nous pouvons définir un opérateur de prolongement $P : H^1_\Gamma(\Omega) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$ de la manière suivante :

$$Pu(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \text{Tr } u(\mathbb{P}_\Gamma x) \theta(d(x, \Gamma)) & \text{si } x \in \Omega_\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifie $\theta(0) = 1$ et $\theta(\alpha) = 0$.

Nous nous inspirons alors du cas continu pour construire ce prolongement discret.

Par souci de simplicité commençons par donner l'idée de ce prolongement $\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})$ pour le cas où Ω est le demi-espace (cf Figure III.1). Dans ce cas là nous avons $\Omega_\alpha = \mathbb{R} \times]0, \alpha[$ et nous construisons un maillage cartésien de pas $h_\alpha \leq \text{size}(\mathcal{T})$ de Ω_α en utilisant le maillage $\partial\mathcal{M}$ de Γ . Or nous sommes ici dans le cas discret, nous devons donc affecter une valeur par maille au prolongement $\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})$. Pour cela, si nous notons $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$ la maille à distance $(i-1)h_\alpha$ (pour $i \in \llbracket 1, \frac{\alpha}{h_\alpha} \rrbracket$) de l'arête $\mathcal{L}$ du maillage du bord $\partial\mathcal{M}$, nous définissons le centre $x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}$ de cette maille de la manière suivante :

$$x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} = x_\mathcal{L} + \left(ih_\alpha - \frac{h_\alpha}{2} \right) \mathbf{e}_y,$$

et pour tout $(x, y) \in \mathcal{R}_\mathcal{L}^i$, nous posons

$$\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})(x, y) = u_\mathcal{L} \theta(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, \Gamma)) = u_\mathcal{L} \theta\left(ih_\alpha - \frac{h_\alpha}{2} \right).$$

En conclusion, dans le cas du demi-espace, le prolongement $\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})$ est donc défini par :

$$\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})(x, y) = \begin{cases} u_\mathcal{T}(x, y) & \text{si } y \leq 0 \\ u_{\partial\mathcal{M}}(x) \theta\left(ih_\alpha - \frac{h_\alpha}{2} \right) & \text{si } (i-1)h_\alpha \leq y \leq ih_\alpha, 1 \leq i \leq \frac{\alpha}{h_\alpha} \\ 0 & \text{si } y \geq \alpha \end{cases}$$

$$\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T}) = 0$$

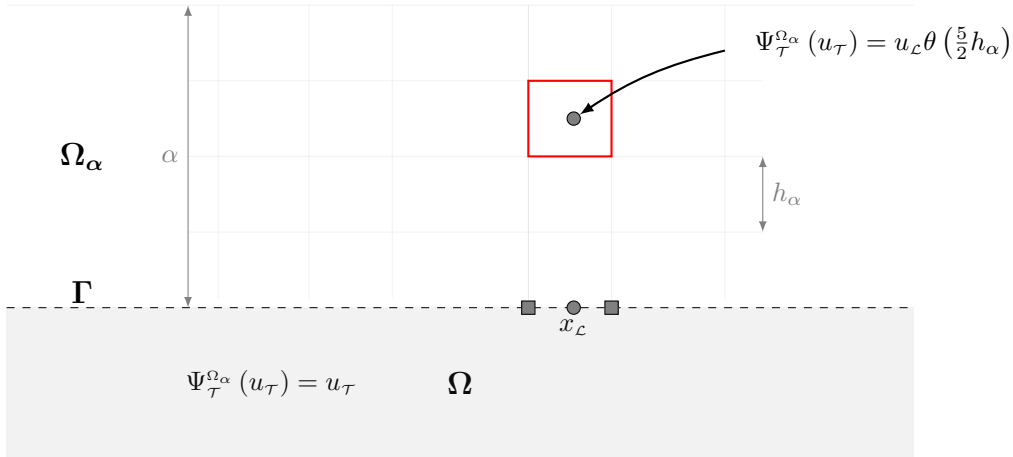


Figure III.1: Définition du prolongement $\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T})$ dans le cas du demi-espace

Nous allons maintenant adapter cette construction à la géométrie courbe du domaine Ω que nous considérons, pour définir un maillage $\mathcal{M}_\alpha$ de l'ouvert Ω_α (cf Figure III.2):

- Posons $\tilde{n}_\alpha = \frac{\alpha}{\text{size}(\mathcal{T})}$ alors en notant E la fonction partie entière, nous introduisons :

$$n_\alpha = \begin{cases} \tilde{n}_\alpha & \text{si } \tilde{n}_\alpha \in \mathbb{N} \\ E(\tilde{n}_\alpha) + 1 & \text{si } \tilde{n}_\alpha \notin \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{et} \quad h_\alpha = \frac{\alpha}{n_\alpha} \leq \text{size}(\mathcal{T}).$$

- Pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, nous définissons n_α volumes de contrôles de la manière suivante :

$$\mathcal{R}_\mathcal{L}^i = \psi(\mathcal{L} \times [(i-1)h_\alpha, ih_\alpha]), \quad \forall i \in \{1, \dots, n_\alpha\}.$$

A chacun de ces volumes de contrôle, nous associons le point $x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} = \psi(\{x_\mathcal{L}\} \times \{(i - \frac{1}{2})h_\alpha\})$ appelé centre du volume de contrôle $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$.

- Nous notons $\mathcal{E}_{int}^\alpha$ l'ensemble des arêtes intérieures du maillage $\mathfrak{M}_\alpha$ et $\mathcal{E}_{ext}^\alpha$ l'ensemble des arêtes extérieures du maillage $\mathfrak{M}_\alpha$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{E}_{ext}$. Nous décomposons l'ensemble $\mathcal{E}_{int}^\alpha$ en deux sous-ensembles :
 - $\mathcal{E}_{\alpha\parallel}$ est l'ensemble des arêtes séparant des volumes de contrôle $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}$ (pour $i \in \{1, \dots, n_\alpha - 1\}$) qui sont construits à partir de la même maille du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$. Pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}$, nous notons $\sigma = \sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}$ l'arête séparant les volumes de contrôle $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}$ et $m_{\sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}}$ sa longueur. Remarquons que ces arêtes sont des arcs de courbes, donc nous désignons par $e_\mathcal{L}^{i,i+1}$ la corde associée à $\sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}$ et $m_{e_\mathcal{L}^{i,i+1}}$ sa longueur.
 - $\mathcal{E}_{\alpha\perp}$ est l'ensemble des arêtes qui séparent un volume de contrôle $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$ (construit à partir de $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$) d'un volume de contrôle $\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}$ (construit à partir de $\mathcal{L}' \in \partial\mathfrak{M}$) où $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ sont deux mailles voisines du bord. Pour une arête $\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}$ séparant les volumes de contrôle $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i$, nous notons $\gamma_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i \mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}$ l'arc de courbe reliant les centres $x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}$ et $x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}$, c'est à dire $\gamma_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i \mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i} = \psi(\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'} \times \{(i - \frac{1}{2})h_\alpha\})$ et $m_{\gamma_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i \mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}}$ sa longueur.

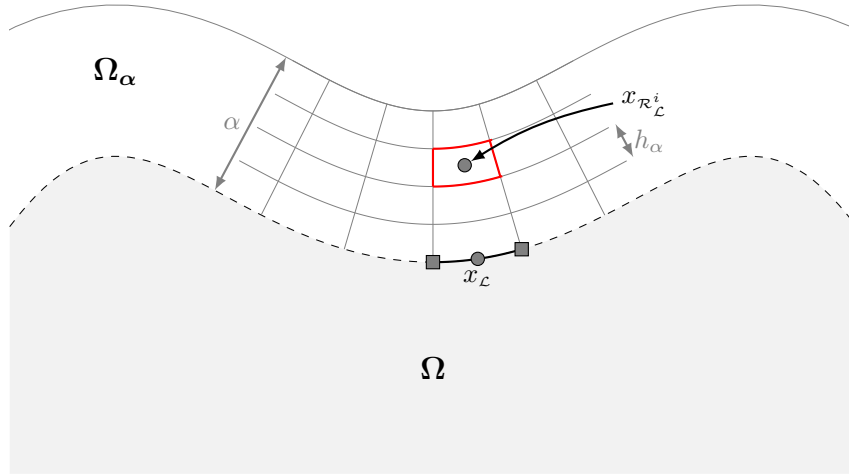


Figure III.2: Définition du maillage $\mathfrak{M}_\alpha$

Notons que ce maillage est simplement défini pour les besoins de la preuve du théorème de translations en espace et que d'un point de vue numérique nous ne le construisons jamais.

La proposition suivante permet de relier les longueurs des arêtes du maillage $\mathfrak{M}_\alpha$ à celles du maillage $\partial\mathfrak{M}$.

Proposition III.29

Considérons γ un arc de courbe inclus dans Γ et ς l'arc de courbe défini par $\varsigma = \psi(\gamma \times \{\delta\})$ avec $\delta \in [0, \alpha]$ et ψ la fonction introduite dans la Définition A.1. Alors, en notant κ la courbure de Γ , la relation suivante est vérifiée :

$$|m_\varsigma - m_\gamma| \leq \delta \|\kappa\|_\infty m_\gamma.$$

Démonstration : Introduisons la fonction $\psi_\delta(t) = \varphi(t) + \delta \vec{n}(\varphi(t))$ où φ est une paramétrisation par longueur d'arc de Γ . Alors, ψ_δ est une paramétrisation de l'arc ς donc il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$m_\varsigma = \int_{t_1}^{t_2} |\psi'_\delta(t)| dt.$$

La définition de ψ_δ implique :

$$\begin{aligned} |\psi'_\delta(t)|^2 &= (\varphi'_1(t) - \delta\varphi''_2(t))^2 + (\varphi'_2(t) + \delta\varphi''_1(t))^2 \\ &= \underbrace{(\varphi'_1(t)^2 + \varphi'_2(t)^2)}_{=|\varphi'(t)|^2=1} - 2\delta \underbrace{(\varphi'_1(t)\varphi''_2(t) - \varphi'_2(t)\varphi''_1(t))}_{=\kappa(\varphi(t))} + \delta^2 \underbrace{(\varphi''_1(t)^2 + \varphi''_2(t)^2)}_{=|\kappa(\varphi(t))|^2} \\ &= (1 - \delta\kappa(\varphi(t)))^2. \end{aligned}$$

Or, nous avons :

$$1 - \delta\|\kappa\|_\infty \leq 1 - \delta|\kappa(\varphi(t))| \leq |\psi'(t)| = |1 - \delta\kappa(\varphi(t))| \leq 1 + \delta|\kappa(\varphi(t))| \leq 1 + \delta\|\kappa\|_\infty,$$

et en remarquant que $m_\gamma = \int_{t_1}^{t_2} |\varphi'(t)| dt$, nous obtenons :

$$(1 - \delta\|\kappa\|_\infty) m_\gamma \leq m_\varsigma \leq (1 + \delta\|\kappa\|_\infty) m_\gamma$$

ce qui conclut la preuve. ■

Nous définissons alors le maillage $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T} \cup \mathfrak{M}_\alpha$ et nous notons $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha$ les volumes de contrôle de ce maillage.

Définition III.30 (Opérateur de prolongement en espace)

Nous définissons l'opérateur de prolongement $\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha}$ de la manière suivante. Pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})(x) = \begin{cases} u_{\mathcal{T}} & \text{si } x \in \Omega, \\ u_{\mathcal{R}_L^i} = u_L \theta(d(x_{\mathcal{R}_L^i}, \Gamma)) & \text{si } x \in \mathcal{R}_L^i \in \mathfrak{M}_\alpha, \end{cases}$$

où $\theta \in C_c^\infty([0, \alpha])$ et satisfait $\theta(x) = 1$ pour tout $x \in [0, \frac{\alpha}{2}]$.

Estimation de translations en espace

Le maillage $\mathfrak{M}_\alpha$ fait intervenir des arêtes courbes ce qui complique les notations et ainsi la compréhension des résultats. Nous allons donc nous ramener à un domaine polygonal dont les arêtes sont des segments.

Remarquons que le problème discret est écrit sur le maillage polygonal car nous utilisons une approximation polygonale de toutes les quantités géométriques qui apparaissent dans l'équation (en raison de la géométrie courbe du domaine). De la même manière, lors de l'implémentation nous ne calculons jamais les valeurs réelles de ces quantités géométriques mais seulement leurs approximations. Ainsi, le schéma numérique est résolu sur le domaine polygonal Ω^P . Nous allons là aussi utiliser un domaine polygonal Ω_α^P qui est une approximation du domaine Ω_α mais notons que nous utilisons ce domaine polygonal simplement pour les besoins de la preuve du Théorème de translations en espace III.33. Par contre, pour le passage à la limite dans le théorème de convergence il est plus simple de raisonner sur le domaine Ω_α . En effet, le domaine Ω_α est indépendant du maillage considéré il dépend simplement de Γ et de α alors que le domaine Ω_α^P dépend du maillage $\mathcal{T}$ de Ω et en particulier du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ (plus précisément nous avons $\Omega_\alpha^P \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \Omega_\alpha$) ce qui complique le passage à la limite.

Construisons un maillage $\mathcal{T}_\alpha^P$ à partir du maillage $\mathcal{T}_\alpha$. Comme pour le cas du maillage $\mathcal{T}$, pour tout $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha$ nous notons $\underline{\mathcal{K}}$ le polygone formé par les sommets de $\mathcal{K}$. Nous pouvons alors définir le maillage $\mathcal{T}_\alpha^P$ comme l'union, sur tous les volumes de contrôle de $\mathcal{T}_\alpha$, des mailles $\underline{\mathcal{K}}$. Le centre d'une maille $\underline{\mathcal{K}}$ est le même que celui de la maille $\mathcal{K}$ associée et sera donc noté $x_{\mathcal{K}}$. Notons $\Omega^P = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \underline{\mathcal{K}}$ et $\Omega_\alpha^P = \bigcup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}_\alpha} \underline{\mathcal{K}}$.

Remarquons que la construction du maillage $\mathfrak{M}_\alpha$ ainsi que les Propositions III.29 et II.4 impliquent qu'il existe $C_{\alpha, \Gamma} > 0$ indépendant de $\text{size}(\mathcal{T})$ tel que $\text{size}(\mathfrak{M}_\alpha) \leq C_{\alpha, \Gamma} \text{size}(\mathcal{T})$ et $\text{size}(\mathcal{T}_\alpha^P) \leq C_{\alpha, \Gamma} \text{size}(\mathcal{T})$.

Définition III.31

Nous définissons l'application $\zeta^{\mathcal{T}_\alpha} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha^P}$ de la manière suivante. Pour tout $u_{\mathcal{T}_\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha}$,

$$\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(u_{\mathcal{T}_\alpha}) = (\zeta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}_\alpha}(u_{\mathcal{T}_\alpha}))_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha^P} \quad \text{avec} \quad \zeta_{\mathcal{K}}^{\mathcal{T}_\alpha}(u_{\mathcal{T}_\alpha}) = u_{\mathcal{K}}.$$

Si nous notons $\underline{\sigma}$ les arêtes du maillage $\mathcal{T}_\alpha^P$, $m_{\underline{\sigma}}$ leur longueur et $d_{\kappa,\mathcal{L}}$ la distance entre les centres x_κ et $x_{\mathcal{L}}$ de deux mailles voisines $\underline{\kappa}$ et $\underline{\mathcal{L}}$, la norme H^1 -discrète associée au maillage $\mathcal{T}_\alpha^P$ est définie de la manière suivante :

$$\|\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(u_{\mathcal{T}_\alpha})\|_{1,\mathcal{T}_\alpha^P}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{int}^\alpha} \frac{m_\sigma}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} |u_\kappa - u_{\mathcal{L}}|^2.$$

Proposition III.32

Il existe une constante positive C_{31} indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que pour tout $u_\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T}))\|_{1,\mathcal{T}_\alpha^P}^2 \leq C_{31} \left(|u_\mathcal{T}|_{1,\mathcal{T}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{1,\partial\mathfrak{M}}^2 \right), \quad \forall u_\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}.$$

Démonstration : En utilisant les Définitions III.30 et III.31 des opérateurs $\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}$ et $\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \|\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_\mathcal{T}^{\Omega_\alpha}(u_\mathcal{T}))\|_{1,\mathcal{T}_\alpha^P}^2 &= \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} (u_\kappa - u_{\mathcal{L}})^2 + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}}{d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})} (u_\kappa - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})^2 \\ &\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} \frac{m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}^{i,i+1}}}{d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}})} (u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}})^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{m_\sigma}{d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})} (u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})^2. \end{aligned}$$

Il faut maintenant exprimer les trois dernières sommes du membre de droite en fonction de $u_\mathcal{T}$.

- Les définitions de $u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}$ et θ , nous donnent :

$$|u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}| = |u_{\mathcal{L}}| |\theta(d(x_{\mathcal{L}}, \Gamma)) - \theta(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}, \Gamma))| \leq C_\theta \frac{h_\alpha}{2} |u_{\mathcal{L}}|,$$

et en utilisant que $\frac{h_\alpha}{2} \leq d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})$ et $d(x_\kappa, x_{\mathcal{L}}) \leq d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{|u_\kappa - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}|^2}{d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})} &\leq 2 \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{|u_\kappa - u_{\mathcal{L}}|^2 + |u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}|^2}{d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})} \\ &\leq 2 \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{|u_\kappa - u_{\mathcal{L}}|^2}{d(x_\kappa, x_{\mathcal{L}})} + C_\theta^2 h_\alpha \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}}|^2. \end{aligned}$$

Or, d'après la Proposition II.14, il existe une constante C_Γ ne dépendant que de Γ telle que :

$$|d(x_\kappa, x_{\mathcal{L}}) - d_{\kappa,\mathcal{L}}| \leq C_\Gamma (m_{\mathcal{L}} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathbf{v}}}),$$

nous obtenons ainsi

$$\sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{|u_\kappa - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1}|^2}{d(x_\kappa, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^1})} \leq 2C_\Gamma \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{|u_\kappa - u_{\mathcal{L}}|^2}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} + C_\theta^2 h_\alpha \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0,\partial\mathfrak{M}}^2. \quad (\text{III.52})$$

- De la même manière, les définitions des centres $x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}$ et $x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}$ permettent d'écrire :

$$|u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}| = |u_{\mathcal{L}}| |\theta(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, \Gamma)) - \theta(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}, \Gamma))| \leq C_\theta h_\alpha |u_{\mathcal{L}}|$$

et ainsi, en remarquant que $d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}) = h_\alpha$,

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}^{i,i+1}} \frac{|u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}|^2}{d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}})} \leq C_\theta^2 h_\alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}^{i,i+1}} |u_{\mathcal{L}}|^2.$$

Or, d'après les Propositions II.4 et III.29, nous avons :

$$m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}^{i,i+1}} - m_{\sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}} = \mathcal{O}(m_{\sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}}^3), \quad |m_{\sigma_\mathcal{L}^{i,i+1}} - m_{\mathcal{L}}| \leq i h_\alpha \|\kappa\|_\infty m_{\mathcal{L}} \quad \text{et} \quad m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} - m_{\mathcal{L}} = \mathcal{O}(m_{\mathcal{L}}^3),$$

donc il existe une constante positive $C_{\Gamma,\alpha,\kappa}$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}^{i,i+1}} \frac{|u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} - u_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}|^2}{d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}}, x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^{i+1}})} \leq C_\theta^2 C_{\Gamma,\alpha,\kappa} h_\alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}}|^2.$$

Ainsi, en notant qu'à chaque volume de contrôle $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ correspondent $n_\alpha - 1$ (avec $n_\alpha = \frac{\alpha}{h_\alpha}$) arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}$, nous obtenons :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\parallel}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}^{i,i+1}} \frac{|u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^{i+1}}|^2}{d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^{i+1}}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i})} \leq \alpha C_\theta^2 C_{\Gamma, \alpha, \kappa} \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{0, \partial\mathfrak{M}}^2. \quad (\text{III.53})$$

- Enfin, les définitions de $u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}$ et $u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}$ et le fait que $\theta \leq 1$ impliquent :

$$|u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}| = |u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}'}| |\theta(d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, \Gamma))| \leq |u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}'}|$$

donc en remarquant que pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}$, $m_\sigma = h_\alpha$ nous avons :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{m_\sigma}{d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})} (u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})^2 \leq h_\alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{|u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}'}|^2}{d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})}$$

Or, les Propositions II.4, II.6 et III.29 donnent :

$$\begin{aligned} d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i}) - m_{\gamma_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}} &= \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}}^3), \quad |m_{\gamma_{\mathcal{R}\mathcal{R}'}} - m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}| \leq \left(i - \frac{1}{2}\right) h_\alpha \|\kappa\|_\infty m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} \\ \text{et } m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} - d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} &= \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}(m_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}'})). \end{aligned}$$

Donc il existe une constante positive $C_{\Gamma, \alpha, \kappa}$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{m_\sigma}{d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})} (u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})^2 \leq C_{\Gamma, \alpha, \kappa} h_\alpha \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{|u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{L}'}|^2}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}}.$$

En remarquant qu'à chaque sommet $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}$ correspondent n_α arêtes $\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}$, nous avons finalement :

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\alpha\perp}} \frac{m_\sigma}{d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})} (u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} - u_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}'}^i})^2 \leq \alpha C_{\Gamma, \alpha, \kappa} |u_{\partial\mathfrak{M}}|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2. \quad (\text{III.54})$$

En regroupant les estimations (III.52), (III.53) et (III.54), nous obtenons le résultat attendu. $\blacksquare$

Nous pouvons maintenant appliquer le lemme classique de translations en espace (cf [EGH00, Lemme 3.3] rappelé dans l'Annexe, Lemme A.12) à la fonction $\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha^P}$ sur le maillage polygonal $\mathcal{T}_\alpha^P$ (en notant que $\text{size}(\mathcal{T}_\alpha^P) \leq C_{\alpha, \Gamma} \text{size}(\mathcal{T})$).

Théorème III.33 (Estimation de translations en espace)

Il existe une constante positive $C_{32} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ et η telle que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et pour tout $\eta \in \mathbb{R}^2$, l'estimation suivante est vérifiée :

$$\left\| \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))}(\cdot + \eta) - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_{32} |\eta| (|\eta| + \text{size}(\mathcal{T})) (|u_{\mathcal{T}}|_{1, \mathcal{T}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2),$$

où nous avons noté $\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))}$ le prolongement par 0 de la fonction $\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))$ hors de Ω_α^P .

Remarquons que l'estimation de translations en espace que nous venons d'obtenir utilise l'opérateur de prolongement $\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))}$ défini sur le domaine polygonal Ω^P (vérifiant $\Omega^P = \cup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathcal{K} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \Omega$). Cependant, pour démontrer le théorème de convergence nous allons raisonner sur le maillage $\mathcal{T}$ du domaine Ω (qui vérifie $\Omega = \cup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathcal{K}$ quel que soit $\text{size}(\mathcal{T})$) et donc utiliser l'opérateur de prolongement $\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})$ défini sur ce domaine. Il faut donc commencer par montrer que lorsque le pas du maillage tend vers 0 ces opérateurs convergent bien vers la même limite.

Pour une fonction $u_{\mathcal{T}_\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha}$, nous notons $\widetilde{u_{\mathcal{T}_\alpha}}$ le prolongement par 0 de $u_{\mathcal{T}_\alpha}$ hors de Ω_α .

Proposition III.34

Il existe une constante positive C_{33} indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que pour toute fonction $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, la relation suivante soit vérifiée pour $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit :

$$\left\| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_{33} \text{size}(\mathcal{T})^2 (|u_{\mathcal{T}}|_{1, \mathcal{T}}^2 + \|u_{\partial\mathfrak{M}}\|_{1, \partial\mathfrak{M}}^2).$$

Démonstration : Pour toute maille $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha$, notons $1_{\mathcal{K}}$ la fonction indicatrice de la maille $\mathcal{K}$ et $1_{\underline{\mathcal{K}}}$ celle de la maille $\underline{\mathcal{K}}$. Alors pour $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit, pour tout $w_{\mathcal{T}_\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha}$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \left| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha}) \right| &= \left| \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha} w_{\mathcal{K}} 1_{\mathcal{K}} - \sum_{\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha} w_{\mathcal{K}} 1_{\underline{\mathcal{K}}} \right| \\ &= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{int}^\alpha} (1_{\mathcal{K} \cap \underline{\mathcal{L}}} (w_{\mathcal{K}} - w_{\underline{\mathcal{L}}}) + 1_{\underline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{K}} (w_{\underline{\mathcal{L}}} - w_{\mathcal{K}})) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha} w_{\mathcal{K}} (1_{\mathcal{K}^{ext}} - 1_{\underline{\mathcal{K}}^{ext}}) \right|, \end{aligned}$$

où $\mathcal{K}^{ext} = \{x \in (\Omega^P \cup \Omega_\alpha^P)^c : x \in \mathcal{K} \text{ et } x \notin \underline{\mathcal{K}}\}$ et $\underline{\mathcal{K}}^{ext} = \{x \in (\Omega \cup \Omega_\alpha)^c : x \in \underline{\mathcal{K}} \text{ et } x \notin \mathcal{K}\}$.

Or, les ensembles qui apparaissent dans les fonctions indicatrices mises en jeu sont deux à deux disjoints, nous obtenons alors :

$$\left| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha}) \right|^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{int}^\alpha} (1_{\mathcal{K} \cap \underline{\mathcal{L}}} - 1_{\underline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{K}})^2 |w_{\mathcal{K}} - w_{\underline{\mathcal{L}}}|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha} (1_{\mathcal{K}^{ext}} - 1_{\underline{\mathcal{K}}^{ext}})^2 |w_{\mathcal{K}}|^2.$$

Notons que pour tout $w_{\mathcal{T}_\alpha} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}_\alpha}$,

$$\left\| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \int_{\Omega \cup \Omega_\alpha \cup \Omega_\alpha^P} \left| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}}(x) - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha})(x) \right|^2 dx.$$

Alors, en remarquant que pour tout $\sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \in \mathcal{E} \cap \mathcal{E}_{int}^\alpha$ (respectivement $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha$) les ensembles $\mathcal{K} \cup \underline{\mathcal{L}}$ et $\underline{\mathcal{K}} \cup \mathcal{L}$ (respectivement $\mathcal{K}^{ext}$ et $\underline{\mathcal{K}}^{ext}$) sont disjoints, nous avons :

$$\left\| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 = \sum_{\sigma \in \mathcal{E} \cup \mathcal{E}_{int}^\alpha} (m_{\mathcal{K} \cap \underline{\mathcal{L}}} + m_{\underline{\mathcal{L}} \cap \mathcal{K}}) |w_{\mathcal{K}} - w_{\underline{\mathcal{L}}}|^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha} (m_{\mathcal{K}^{ext}} + m_{\underline{\mathcal{K}}^{ext}}) |w_{\mathcal{K}}|^2.$$

En utilisant un raisonnement similaire à celui donné dans la preuve de la Proposition II.13, il existe une constante positive $C_{\Omega_\alpha}(\text{reg}(\mathcal{T}))$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\left| \widetilde{w_{\mathcal{T}_\alpha}} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(w_{\mathcal{T}_\alpha}) \right|^2 \leq C_{\Omega_\alpha}(\text{reg}(\mathcal{T})) \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\|\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(w_{\mathcal{T}_\alpha})\|_{1, \mathcal{T}_\alpha^P}^2 + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha} \text{size}(\mathcal{T}) |w_{\mathcal{K}}|^2 \right).$$

Ainsi, en prenant $w_{\mathcal{T}_\alpha} = \Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})$ et en remarquant que si $\mathcal{K} \in \mathcal{T}_\alpha^P$ tel que $\sigma = \psi(\mathcal{L} \times \{\alpha\}) \in \mathcal{E}_{ext}^\alpha \cap \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$, alors

$$|w_{\mathcal{K}}| = |\Psi_{\mathcal{K}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})| = |u_{\mathcal{L}} \theta(d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^{\Omega_\alpha}}, \Gamma))| \leq |u_{\mathcal{L}}|,$$

nous obtenons :

$$\left| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})} - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}})) \right|^2 \leq C_{\Omega_\alpha}(\text{reg}(\mathcal{T})) \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\|\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}}))\|_{1, \mathcal{T}_\alpha^P}^2 + \|u_{\partial \mathfrak{M}}\|_{0, \partial \mathfrak{M}}^2 \right)$$

et la Proposition III.32 permet de conclure la preuve. ■

Proposition III.35

Considérons $(u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}^{(m)}}$ associée à une suite de discrétisations telle que le pas d'espace $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ tende vers 0 et que la régularité $\text{reg}(\mathcal{T}^{(m)})$ reste bornée. Supposons qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{1, \mathcal{T}^{(m)}} \leq M \quad \text{et} \quad \|u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}\|_{1, \partial \mathfrak{M}^{(m)}} \leq M, \quad \forall m \geq 0. \quad (\text{III.55})$$

Alors nous pouvons extraire une sous-suite, encore notée $(u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ par simplicité, qui converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers une certaine fonction $u \in H^1(\Omega)$ dont la trace appartient à $H^1(\Gamma)$ et telle que $(u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\Gamma)$ vers $u|_\Gamma$. De plus, à sous-suite près, $(\nabla^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers ∇u dans $L^2(\Omega)$ et $(\nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\nabla_{\Gamma} u|_\Gamma$ dans $L^2(\Gamma)$.

Pour pouvoir utiliser ce résultat pour le cas qui nous intéresse où les fonctions considérées dépendent également du temps, nous en donnons ci-dessous une version adaptée à ces fonctions.

Proposition III.36

Considérons une famille de fonctions $((u_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ associée à une suite de discrétisations telle que le pas de temps et le pas d'espace, $\Delta t^{(m)}$ et $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ respectivement, tendent vers 0 et telle que la régularité $\text{reg}(\mathcal{T}^{(m)})$

reste bornée. Supposons qu'il existe une constante positive M telle que :

$$\sup_{n \leq N^{(m)}} \left\| (u_{\mathcal{T}}^n)^{(m)} \right\|_{1, \mathcal{T}^{(m)}} \leq M \quad \text{et} \quad \sup_{n \leq N^{(m)}} \left\| (u_{\partial \mathfrak{M}}^n)^{(m)} \right\|_{1, \partial \mathfrak{M}^{(m)}} \leq M, \quad \forall m \geq 0. \quad (\text{III.56})$$

Supposons de plus qu'il existe une fonction $\tilde{u} \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ telle que la convergence suivante soit vérifiée (à sous-suite près) :

$$\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} \left((u_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} \right) \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{u} \text{ dans } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2). \quad (\text{III.57})$$

Si nous notons u la restriction de $\tilde{u}$ à Ω alors, $u \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\text{Tr}(u) \in L^2(0, T; H^1(\Gamma))$.

De plus, les convergences suivantes sont vérifiées (à sous-suite près) :

$$\begin{aligned} (u_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u \text{ dans } L^2((0, T) \times \Omega), & (\nabla^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nabla u \text{ faiblement dans } L^2((0, T) \times \Omega), \\ (u_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(m)} &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u_{|\Gamma} \text{ dans } L^2((0, T) \times \Gamma), & (\nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(m)} &\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \nabla_{\Gamma} u_{|\Gamma} \text{ faiblement dans } L^2((0, T) \times \Gamma). \end{aligned}$$

Notons que dans ce cas là nous avons besoin, par l'ajout de l'hypothèse (III.57), de supposer que nous avons convergence forte de la suite de fonctions $\left((u_{\mathcal{T}}^{\Delta t})^{(m)} \right)_{m \in \mathbb{N}}$. En effet, les fonctions considérées dépendant du temps, il faudrait également avoir des estimations de translations en temps pour obtenir cette convergence (ce que nous ferons dans la suite). Ainsi, l'hypothèse (III.57) permet d'obtenir la convergence (III.59) (que nous obtiendrions avec des estimations de translations en temps).

Nous donnons ici la preuve de la Proposition III.35 où les fonctions sont supposées indépendantes du temps mais notons qu'une fois la convergence (III.59) obtenue, le cœur de la preuve est le même : il suffit simplement d'ajouter la dépendance en temps.

Démonstration : Nous décomposons cette preuve en plusieurs étapes et nous notons que toutes les convergences ci-dessous ont lieu à sous-suite près.

- Montrons que la suite $\left(\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ vers un certain $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$:

Le Théorème III.33 et l'hypothèse (III.55) impliquent que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) (\cdot + \eta) - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2M^2 C_{32} |\eta| (|\eta| + \text{size}(\mathcal{T}^{(m)})). \quad (\text{III.58})$$

De plus, la Proposition III.34 donne :

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &\leq 2 \left\| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) - \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + 2 \left\| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &\leq 2C_{33} \text{size}(\mathcal{T}^{(m)})^2 \left(\|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{1, \mathcal{T}}^2 + \|u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}\|_{1, \partial \mathfrak{M}}^2 \right) + 2 \left\| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \end{aligned}$$

et la Définition III.30 de l'opérateur d'extension $\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}$ implique,

$$\begin{aligned} \left\| \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha}} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 &= \int_{\Omega} |\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}})|^2 dx + \int_{\Omega_\alpha} |\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}})|^2 dx \\ &= \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} |u_{\kappa}^{(m)}|^2 + \sum_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i \in \mathfrak{M}_\alpha} \int_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} |u_{\mathcal{L}^{(m)}}|^2 \left| \theta \left(d(x_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i}, \Gamma) \right) \right|^2 \\ &\leq \|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i \in \mathfrak{M}_\alpha} m_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}^i} |u_{\mathcal{L}^{(m)}}|^2 \\ &\leq \|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + n_\alpha C_{\alpha, \kappa} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} |u_{\mathcal{L}^{(m)}}|^2 \\ &\leq M_\Omega \|u_{\mathcal{T}^{(m)}}\|_{0, \mathfrak{M}^{(m)}}^2 + n_\alpha C_{\alpha, \kappa} \|u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}\|_{0, \partial \mathfrak{M}^{(m)}}^2. \end{aligned}$$

Alors, d'après l'hypothèse (III.55) la suite $\left(\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right)_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. Donc en utilisant (III.58), le théorème de Kolmogorov permet d'extraire une sous-suite, toujours notée $\left(\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \right)_{m \in \mathbb{N}}$, et il existe une fonction $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^2)$ telle que :

$$\widetilde{\zeta^{\mathcal{T}_\alpha}} \left(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_\alpha} (u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{u} \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2). \quad (\text{III.59})$$

En faisant tendre $\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})$ vers 0 dans (III.58), le résultat de convergence (III.59) mène à :

$$\|\tilde{u}(\cdot + \eta) - \tilde{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq 2M^2 C_{32} |\eta|^2, \quad (\text{III.60})$$

et donc $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

- D'après la Proposition III.34 et l'hypothèse III.55 nous avons :

$$\left| \widetilde{\zeta^{\mathcal{T}^\alpha}}(\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}})) - \widetilde{\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \right| \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^2), \quad (\text{III.61})$$

donc en posant $u = \tilde{u}|_\Omega$ nous obtenons, par restriction à Ω :

$$u_{\mathcal{T}^{(m)}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ et } u \in H^1(\Omega).$$

- Montrons que la sous-suite $(u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}})_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(\Gamma)$ vers $\text{Tr}(u)$:

Notons $\Omega_{\alpha/2} = \{x \in \Omega^c, d(x, \Gamma) < \frac{\alpha}{2}\}$, alors la Définition III.30 de $\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}$ et notamment le fait que $\theta \equiv 1$ sur $[0, \frac{\alpha}{2}]$ impliquent,

$$(\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x) = u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}(\mathbb{P}_\Gamma x), \quad \forall x \in \Omega_{\alpha/2}.$$

Donc pour tout $x_\Gamma \in \Gamma$, $s \in [0, \frac{\alpha}{2}]$,

$$u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}(x_\Gamma) = (\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) \quad (\text{III.62})$$

et ainsi pour tout $x_\Gamma \in \Gamma$ nous avons :

$$u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}(x_\Gamma) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) ds.$$

Pour tout $x_\Gamma \in \Gamma$, nous définissons :

$$w(x_\Gamma) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{u}(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) ds.$$

En utilisant la formule de changement de variable sur $\Omega_{\alpha/2}$ (cf Proposition A.2) nous avons alors,

$$\begin{aligned} \int_\Gamma |w(x_\Gamma) - u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}(x_\Gamma)|^2 dx_\Gamma &\leq \frac{2}{\alpha} \int_\Gamma \int_0^{\frac{\alpha}{2}} |\tilde{u}(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) - (\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma))|^2 ds dx_\Gamma \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha/2}} |\tilde{u}(x) - (\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x)|^2 \frac{1}{|1 - d(x, \Gamma)\kappa(\mathbb{P}_\Gamma x)|} dx, \end{aligned}$$

où nous avons noté $\kappa(x)$ la courbure de Γ au point x .

En remarquant que pour tout $x \in \Omega_{\alpha/2}$, $|1 - d(x, \Gamma)\kappa(\mathbb{P}_\Gamma x)| \geq 1 - \frac{\alpha}{2}\|\kappa\|_\infty$, nous obtenons :

$$\int_\Gamma |w(x_\Gamma) - u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}}(x_\Gamma)|^2 dx_\Gamma \leq C_{\alpha, \kappa} \|\tilde{u} - \Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}})\|_{L^2(\Omega_{\alpha/2})}^2.$$

Or d'après les convergences (III.59) et (III.61) nous savons que $\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ nous en déduisons donc :

$$u_{\partial \mathfrak{M}^{(m)}} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} w = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} \tilde{u}(\cdot + s\vec{n}(\cdot)) ds \text{ dans } L^2(\Gamma). \quad (\text{III.63})$$

De plus la formule de changement de variable sur $\Omega_{\alpha/2}$ (cf Proposition A.2) implique :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{\alpha/2}} |(\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x) - w(\mathbb{P}_\Gamma x)|^2 dx &= \int_\Gamma \int_0^{\frac{\alpha}{2}} |1 - s\kappa(x_\Gamma)| |(\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) - w(x_\Gamma)|^2 ds dx_\Gamma \\ &\leq \left(1 + \frac{\alpha}{2}\|\kappa\|_\infty\right) \int_\Gamma \int_0^{\frac{\alpha}{2}} |(\Psi_{\mathcal{T}^\alpha}^{\Omega_\alpha}(u_{\mathcal{T}^{(m)}}))(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) - w(x_\Gamma)|^2 ds dx_\Gamma \end{aligned}$$

et donc en utilisant l'égalité (III.62) et la convergence (III.63) nous obtenons :

$$\int_{\Omega_{\alpha/2}} |(\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_{\alpha}}(u_{\mathcal{T}(m)}))(x) - w(\mathbb{P}_{\Gamma}x)|^2 \leq \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \|\kappa\|_{\infty}\right) \int_{\Gamma} |u_{\partial\mathfrak{M}(m)}(x_{\Gamma}) - w(x_{\Gamma})|^2 dx_{\Gamma} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement, en rappelant que $\Psi_{\mathcal{T}}^{\Omega_{\alpha}}(u_{\mathcal{T}(m)}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{u}$ dans $L^2(\mathbb{R}^2)$ (donc dans $L^2(\Omega_{\alpha/2})$), nous déduisons :

$$w(\mathbb{P}_{\Gamma}x) = \tilde{u}(x), \quad \forall x \in \Omega_{\alpha/2}. \quad (\text{III.64})$$

La fonction w est donc la trace de $\tilde{u}$ sur $\partial(\Omega^c)$ et comme $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ c'est aussi la trace de u . Ainsi la convergence (III.63) implique

$$u_{\partial\mathfrak{M}(m)} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \text{Tr}(u) \text{ dans } L^2(\Gamma).$$

Il reste maintenant à vérifier que $u_{\Gamma} = \text{Tr}(u) \in H^1(\Gamma)$. Notons que l'égalité (III.64) entraîne que pour tout $x \in \Omega_{\alpha/2}$, $\tilde{u}(x)$ ne dépend pas de $d(x, \Gamma)$. Donc, l'égalité (A.6) permet d'obtenir :

$$\nabla \tilde{u}(x) = \nabla_{\Gamma d(x, \Gamma)} \tilde{u}(x), \quad \forall x \in \Omega_{\alpha/2}.$$

De la Proposition A.6, nous déduisons que pour tout $x \in \Omega_{\alpha/2}$:

$$\nabla \tilde{u}(x) = \frac{1}{(1 - d(x, \Gamma)\kappa(\mathbb{P}_{\Gamma}x))} \nabla_{\Gamma} w(\mathbb{P}_{\Gamma}x),$$

c'est à dire que pour tout $x_{\Gamma} \in \Gamma$ et pour tout $s \in [0, \frac{\alpha}{2}]$, nous pouvons écrire :

$$\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(x_{\Gamma}) = (1 - s\kappa(x_{\Gamma})) \nabla \tilde{u}(x_{\Gamma} + s\vec{n}(x_{\Gamma})).$$

Donc en intégrant cette équation pour $s \in [0, \frac{\alpha}{2}]$, pour tout $x_{\Gamma} \in \Gamma$ nous obtenons :

$$\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(x_{\Gamma}) = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} (1 - s\kappa(x_{\Gamma})) \nabla \tilde{u}(x_{\Gamma} + s\vec{n}(x_{\Gamma})) ds.$$

Alors, la formule de changement de variable sur $\Omega_{\alpha/2}$ (cf Proposition A.2) entraîne :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(x_{\Gamma})|^2 dx_{\Gamma} &\leq \frac{2}{\alpha} \int_{\Gamma} \int_0^{\frac{\alpha}{2}} |1 - s\kappa(x_{\Gamma})|^2 |\nabla \tilde{u}(x_{\Gamma} + s\vec{n}(x_{\Gamma}))|^2 ds dx_{\Gamma} \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \int_{\Omega_{\alpha/2}} |1 - d(x, \Gamma)\kappa(\mathbb{P}_{\Gamma}x)| |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{2}{\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{2} \|\kappa\|_{\infty}\right) \int_{\Omega_{\alpha/2}} |\nabla \tilde{u}(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Or, nous savons que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ce qui implique $\text{Tr}(u) \in H^1(\Gamma)$.

- La suite $(u_{\mathcal{T}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $u \in H^1(\Omega)$ donc la Proposition III.28 associée à la borne (III.55) dans $H^1(\Omega)$ implique que $(\nabla^{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\Omega)$ vers ∇u .
- Montrons que la suite $(\nabla_{\Gamma}^{\partial\mathfrak{M}} u_{\partial\mathfrak{M}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement dans $L^2(\Gamma)$ vers $\nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}$.
Considérons un champ de vecteurs $\phi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ et tangent à l'hypersurface Γ . La suite $(u_{\partial\mathfrak{M}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ converge dans $L^2(\Gamma)$ vers $\text{Tr } u$, alors en notant div_{Γ} l'opérateur de divergence tangentielle nous avons :

$$\int_{\Gamma} u_{\partial\mathfrak{M}(m)}(x) \text{div}_{\Gamma} \phi(x) d\sigma(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \text{Tr } u(x) \text{div}_{\Gamma} \phi(x) d\sigma(x) \quad (\text{III.65})$$

et le fait que $\text{Tr } u \in H^1(\Gamma)$ implique,

$$\int_{\Gamma} \text{Tr } u(x) \text{div}_{\Gamma} \phi(x) dx = - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(x) \cdot \phi(x) d\sigma(x). \quad (\text{III.66})$$

De plus, en utilisant la formule de Stokes nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} u_{\partial \mathfrak{M}(m)}(x) \operatorname{div}_{\Gamma} \phi(x) d\sigma(x) &= \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} u_{\mathcal{L}(m)} \int_{\mathcal{L}} \operatorname{div}_{\Gamma} \phi(x) d\sigma(x) \\
&= \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} u_{\mathcal{L}(m)} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} \phi(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}} \\
&= \sum_{\mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}} \left(u_{\mathcal{L}(m)} - u_{\mathcal{L}'}^{(m)} \right) \phi(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}} \\
&= - \sum_{\mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} \nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)} \phi(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{v}) \\
&= - \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)} \phi(x) \cdot \vec{\tau}(x) d\sigma(x) \\
&\quad + \sum_{\mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}} d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} \nabla_{\Gamma, \mathbf{v}}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)} \left(\frac{1}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \int_{\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \phi(x) \cdot \vec{\tau}(x) d\sigma(x) - \phi(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{v}) \right).
\end{aligned}$$

D'après la Proposition II.6, nous avons $m_{\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} - d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'} = \mathcal{O}(m_{\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}}(m_{\mathcal{L}} + m_{\mathcal{L}'}))$ et ϕ étant de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, nous obtenons :

$$\left| \frac{1}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \int_{\gamma_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \phi(x) \cdot \vec{\tau}(x) d\sigma(x) - \phi(\mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}(\mathbf{v}) \right| \leq C \|\nabla_{\Gamma} \phi\|_{L^{\infty}(\Gamma)} \operatorname{size}(\mathcal{T}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Or, la borne (III.55) dans $H^1(\Gamma)$ implique que la suite $(\nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\Gamma)$, donc :

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)}(x) \phi(x) \cdot \vec{\tau}(x) d\sigma(x) = - \int_{\Gamma} u_{\partial \mathfrak{M}(m)}(x) \operatorname{div}_{\Gamma} \phi(x) + \mathcal{O}_{\phi}(\operatorname{size}(\mathcal{T})),$$

et les équations (III.65) et (III.66) permettent d'obtenir :

$$\int_{\Gamma} \phi(x) \cdot \nabla_{\Gamma}^{\partial \mathfrak{M}} u_{\partial \mathfrak{M}(m)}(x) \vec{\tau}(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma} \phi(x) \cdot \nabla_{\Gamma} u_{\Gamma}(x) dx.$$

■

III.5.5 Estimation de translations en temps

Nous définissons un opérateur de prolongement en temps qui utilise l'opérateur de prolongement en espace que nous venons d'étudier.

Définition III.37 (Opérateur de prolongement pour des fonctions dépendantes du temps)

Nous définissons l'opérateur de prolongement $\zeta_T^{\tau\alpha}$ pour des fonctions qui dépendent du temps en utilisant les opérateurs $\Psi_{\tau}^{\Omega\alpha}$ et $\zeta^{\tau\alpha}$ introduits dans les Définitions III.30 et III.31 de la manière suivante

$$\zeta_T^{\tau\alpha}(u_{\tau}^{\Delta t})(t, x) = \begin{cases} \widetilde{\zeta^{\tau\alpha}}(\Psi_{\tau}^{\Omega\alpha}(u_{\tau}^{\Delta t}))(t, \cdot) & \text{si } t \in [0, T], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par souci de simplicité, nous utiliserons la notation $u_{\tau_P}^{\Delta t}(t, \cdot) = \widetilde{\zeta^{\tau\alpha}}(\Psi_{\tau}^{\Omega\alpha}(u_{\tau}^{\Delta t}))(t, \cdot)$.

Lemme III.38 ([GHL, Lemme A.1])

Soient $(t^n)_{0 \leq n \leq N}$ telle que $t^0 = 0$, $t^n = n\Delta t$, $t^N = T$, τ un nombre réel positif et $\chi_{\tau}^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\chi_{\tau}^n(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < t^n \leq t + \tau, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (\text{III.67})$$

Alors, pour toute famille de nombres réels $(\beta_n)_{1 \leq n \leq N}$ et pour tout nombre réel t , les identités suivantes sont satisfaites :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{n=1}^N \beta_n \chi_{\tau}^n(t) \right] dt = \tau \sum_{n=1}^N \beta_n. \quad (\text{III.68})$$

Comme nous venons de le voir, l'estimation de translations en espace (cf Théorème III.33) n'utilise pas le fait que $c_\tau^{\Delta t}$ est solution du Problème (III.6). En fait cette estimation est vérifiée pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$ et ensuite pour obtenir la convergence de solutions approchées il faut lui associer les bornes H^1 -discrètes sur la solution et sur sa trace (cf hypothèse (III.55) de la Proposition III.35). Ainsi, si nous considérons un problème différent du modèle de Cahn-Hilliard mais dont les solutions discrètes vérifient également les bornes H^1 -discrètes (III.55) nous pouvons appliquer les résultats précédents.

Au contraire, pour obtenir les estimations en temps suivantes nous avons besoin de savoir que le couple $(c_\tau^{\Delta t}, \mu_\tau^{\Delta t})$ est solution du Problème discret (III.6) et cette estimation est propre au problème que nous étudions ici.

Nous donnons maintenant l'estimation de translations en temps qui nous permet d'obtenir la compacité forte qui nous manquait dans la Proposition III.36.

Grâce à la forme particulière de l'opérateur de prolongement que nous avons défini qui utilise la trace des solutions discrètes, le couplage entre le domaine Ω et sa frontière permet d'obtenir des estimations de translations en temps dans Ω et sur Γ simultanément.

Théorème III.39 (Estimation de translations en temps)

Supposons les hypothèses du Théorème III.12 satisfaites de manière à ce qu'il existe une solution $(c_\tau^{\Delta t}, \mu_\tau^{\Delta t})$ au Problème (III.6) pour tout $N \in \mathbb{N}$ et pour tout maillage admissible $\mathcal{T}$.
Soit $\tau > 0$, il existe une constante positive C_{34} indépendante de $\mathcal{T}$, Δt et τ telle que :

$$\|\zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(\cdot + \tau, \cdot) - \zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq C_{34}\tau.$$

Nous allons adapter la preuve du Théorème A.1 donné dans [GHLL].

Démonstration : Soit $t \in \mathbb{R}$. En utilisant la Définition III.37 de l'opérateur $\zeta_T^{\tau\alpha}$ et la définition (III.67) de χ_τ^n , nous avons :

$$\zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t + \tau, \cdot) - \zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t, \cdot) = \chi_\tau^0(t)c_{\tau\alpha}^1 - \chi_\tau^N(t)c_{\tau\alpha}^N + \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t)(c_{\tau\alpha}^{n+1} - c_{\tau\alpha}^n). \quad (\text{III.69})$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, nous définissons :

$$n(s) = \begin{cases} -2 & \text{si } s \leq 0; \\ \text{l'indice tel que } t^{n(s)} < s \leq t^{n(s)+1} & \text{si } 0 < s \leq t^N; \\ N & \text{si } s > t^N. \end{cases} \quad (\text{III.70})$$

Notons $n_0(t)$ et $n_1(t)$ les indices tels que $n_0(t) = n(t)$ et $n_1(t) = n(t + \tau)$. Par convention, nous choisissons de poser $c_\tau^{-1} = c_\tau^{N+1} = 0$. Avec cette notation, l'équation (III.69) est équivalente à :

$$\zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t + \tau, \cdot) - \zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t, \cdot) = c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1}. \quad (\text{III.71})$$

En regroupant les égalités (III.69) et (III.71), nous pouvons écrire :

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t + \tau, x) - \zeta_T^{\tau\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(t, x))^2 dx = T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) \quad (\text{III.72})$$

avec

$$\begin{aligned} T_1(t) &= \chi_\tau^0(t) \int_{\Omega^P \cup \Omega_\alpha^P} (c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1}) c_{\tau\alpha}^1 dx := T_1^{\Omega^P}(t) + T_1^{\Omega_\alpha^P}(t); \\ T_2(t) &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \int_{\Omega^P \cup \Omega_\alpha^P} (c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1}) (c_{\tau\alpha}^{n+1} - c_{\tau\alpha}^n) dx := T_2^{\Omega^P}(t) + T_2^{\Omega_\alpha^P}(t); \\ T_3(t) &= -\chi_\tau^N(t) \int_{\Omega^P \cup \Omega_\alpha^P} (c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1}) c_{\tau\alpha}^N dx := T_3^{\Omega^P}(t) + T_3^{\Omega_\alpha^P}(t). \end{aligned}$$

- Commençons par étudier les termes $T_\bullet^{\Omega^P}(t)$ qui concernent les contributions dans Ω^P .

Puisque $\chi_\tau^0(t)$ est égal à 1 sur $[-\tau, 0[$ et 0 ailleurs et vu que $c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1} = 0$ pour tout t négatif ou nul, nous avons :

$$\int_{\mathbb{R}} T_1^{\Omega^P}(t) dt = \int_{-\tau}^0 \int_{\Omega^P} (c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\tau\alpha}^{n_0(t)+1}) c_{\tau\alpha}^1 dx dt = \int_{-\tau}^0 \int_{\Omega^P} c_{\tau\alpha}^{n_1(t)+1} c_{\tau\alpha}^1 dx dt,$$

donc la définition de la norme $\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}}$ implique :

$$\int_{\mathbb{R}} T_1^{\Omega^P}(t) dt \leq \tau \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})}^2. \quad (\text{III.73})$$

Des arguments similaires avec χ_τ^N et $c_{\mathfrak{M}}^{n_1(t)+1}$ donnent,

$$\int_{\mathbb{R}} T_3^{\Omega^P}(t) dt \leq \tau \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})}^2. \quad (\text{III.74})$$

En ce qui concerne le terme $T_2^{\Omega^P}$, nous utilisons le Problème III.7 en choisissant $v_\tau = c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1}$ comme fonction test dans l'équation (III.11a), alors :

$$\begin{aligned} T_2^{\Omega^P}(t) &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \left(c_\kappa^{n_1(t)+1} - c_\kappa^{n_0(t)+1} \right) (c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n) \\ &= -\Delta t \Gamma_b \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \llbracket \mu_\tau^{n+1}, c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1} \rrbracket_{1,\tau}, \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz mène à :

$$\begin{aligned} T_2^{\Omega^P}(t) &\leq \Delta t \Gamma_b \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau} \left| c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1} \right|_{1,\tau} \\ &\leq 2\Gamma_b \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;|\cdot|_{1,\tau})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \Delta t |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau}. \end{aligned}$$

L'identité (III.68) du Lemme III.38 permet d'obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}} T_2^{\Omega^P}(t) dt \leq 2\Gamma_b \tau \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;|\cdot|_{1,\tau})} \sum_{n=1}^{N-1} \Delta t |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau},$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$\int_{\mathbb{R}} T_2^{\Omega^P}(t) dt \leq 2\sqrt{T}\Gamma_b \tau \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;|\cdot|_{1,\tau})} \|\mu_\tau^{\Delta t}\|_{L^2(0,T;|\cdot|_{1,\tau})}. \quad (\text{III.75})$$

- Intéressons nous maintenant aux termes $T_{\bullet}^{\Omega^P}(t)$ concernant les contributions dans Ω_α^P . Les mêmes arguments que pour le terme $T_1^{\Omega^P}(t)$ donnent :

$$\int_{\mathbb{R}} T_1^{\Omega_\alpha^P}(t) dt = \int_{-\tau}^0 \int_{\Omega_\alpha^P} c_{\mathfrak{M}_\alpha}^{n_1(t)+1} c_{\mathfrak{M}_\alpha}^1 dx dt$$

et en notant $m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}$ la mesure du quadrilatère dont les sommets sont ceux de la maille $\mathcal{R}_\mathcal{L}^i$, la Définition III.30 (en notant que $\theta \leq 1$) de $c_{\mathfrak{M}_\alpha}$ permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} T_1^{\Omega_\alpha^P}(t) dt &= \int_{-\tau}^0 \sum_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i \in \mathfrak{M}_\alpha} m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} c_{\mathcal{L}}^1 \left(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, \Gamma) \right)^2 dt \\ &\leq \int_{-\tau}^0 \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} c_{\mathcal{L}}^1 \sum_{i=1}^{n_\alpha} m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} dt. \end{aligned}$$

Or les Propositions II.4 et III.29 impliquent $\sum_{i=1}^{n_\alpha} m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} = C_{\Gamma,\alpha,\kappa} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}$ où $C_{\Gamma,\alpha,\kappa}$ est une constante positive indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$, donc :

$$\int_{\mathbb{R}} T_1^{\Omega_\alpha^P}(t) dt \leq C_{\Gamma,\kappa,\alpha} \tau \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\partial \mathfrak{M}})}^2. \quad (\text{III.76})$$

Un raisonnement similaire donne :

$$\int_{\mathbb{R}} T_3^{\Omega_\alpha^P}(t) dt \leq C_{\Gamma,\kappa,\alpha} \tau \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\partial \mathfrak{M}})}^2. \quad (\text{III.77})$$

Il reste à étudier le terme $T_2^{\Omega_P}$, la Définition III.30 de $c_{\mathfrak{M}_\alpha}$ donne :

$$\begin{aligned} T_2^{\Omega_P}(t) &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \int_{\Omega_P} \left(c_{\mathfrak{M}_\alpha}^{n_1(t)+1} - c_{\mathfrak{M}_\alpha}^{n_0(t)+1} \right) (c_{\mathfrak{M}_\alpha}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}_\alpha}^n) dx \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i \in \mathfrak{M}_\alpha} m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} \left(c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathcal{L}}^{n_0(t)+1} \right) (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n) \theta \left(d(x_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i}, \Gamma) \right)^2 dx \\ &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} \left(c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathcal{L}}^{n_0(t)+1} \right) (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n) \sum_{i=1}^{n_\alpha} m_{\mathcal{R}_\mathcal{L}^i} \\ &\leq C_{\Gamma, \kappa, \alpha} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left(c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathcal{L}}^{n_0(t)+1} \right) (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n). \end{aligned}$$

Choisissons $u_\tau = c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1}$ comme fonction test dans les équations (III.11b) et (III.11c) du Problème III.7, nous obtenons :

$$T_2^{\Omega_P}(t) \leq C_{\Gamma, \kappa, \alpha} \frac{\Delta t}{\mathcal{A}_{\partial t}} \left(\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} T_{2,1}^{\Omega_P}(t) + \mathcal{A}_\Delta T_{2,2}^{\Omega_P}(t) + \mathcal{A}_{f_s} T_{2,3}^{\Omega_P}(t) + T_{2,4}^{\Omega_P}(t) + \mathcal{A}_{f_b} T_{2,5}^{\Omega_P}(t) \right) \quad (\text{III.78})$$

où nous avons noté :

$$\begin{aligned} T_{2,1}^{\Omega_P}(t) &= - \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \llbracket c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\partial \mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \rrbracket_{1, \partial \mathfrak{M}}, \\ T_{2,2}^{\Omega_P}(t) &= - \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \llbracket c_\tau^{n+1}, c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1} \rrbracket_{1, \tau}, \\ T_{2,3}^{\Omega_P}(t) &= - \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1}) \left(c_\mathcal{L}^{n_1(t)+1} - c_\mathcal{L}^{n_0(t)+1} \right), \\ T_{2,4}^{\Omega_P}(t) &= \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left(\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \right)_{\mathfrak{M}}, \\ \text{et } T_{2,5}^{\Omega_P}(t) &= - \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) \left(c_\kappa^{n_1(t)+1} - c_\kappa^{n_0(t)+1} \right). \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons :

$$\begin{aligned} T_{2,1}^{\Omega_P}(t) &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left| c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} \right|_{1, \partial \mathfrak{M}} \left| c_{\partial \mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \right|_{1, \partial \mathfrak{M}} \\ &\leq 2 \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0, T; |\cdot|_{1, \partial \mathfrak{M}})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left| c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} \right|_{1, \partial \mathfrak{M}}, \\ T_{2,2}^{\Omega_P}(t) &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left| c_\tau^{n+1} \right|_{1, \tau} \left| c_\tau^{n_1(t)+1} - c_\tau^{n_0(t)+1} \right|_{1, \tau} \\ &\leq 2 \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0, T; |\cdot|_{1, \tau})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left| c_\tau^{n+1} \right|_{1, \tau}, \\ \text{et } T_{2,4}^{\Omega_P}(t) &\leq \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left\| \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} \right\|_{0, \mathfrak{M}} \left\| c_{\mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \right\|_{0, \mathfrak{M}} \\ &\leq 2 \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0, T; \|\cdot\|_{0, \mathfrak{M}})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left\| \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} \right\|_{0, \mathfrak{M}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev (III.24) sur Γ , pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ nous avons :

$$\|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{25} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{1, \partial \mathfrak{M}},$$

donc en utilisant les bornes sur les solutions discrètes (III.39), le terme $T_{2,3}^{\Omega_P}$ satisfait :

$$T_{2,3}^{\Omega_P}(t) \leq \max_{B(0, C_{25} M_2)} |f'_s| \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left| c_{\mathcal{L}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathcal{L}}^{n_0(t)+1} \right|,$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique :

$$T_{2,3}^{\Omega_P}(t) \leq 2\sqrt{M_\Gamma} \max_{B(0, C_{25}M_2)} |f'_s| \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\partial\mathfrak{M}})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t).$$

De plus, l'hypothèse de croissance polynomiale (I.17) et l'inégalité de Hölder permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} T_{2,5}^{\Omega_P}(t) &\leq C_b \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (1 + |c_\kappa^n|^{p-1} + |c_\kappa^{n+1}|^{p-1}) \left| c_\kappa^{n_1(t)+1} - c_\kappa^{n_0(t)+1} \right| \\ &\leq C_b \sqrt{M_\Omega} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left\| c_{\mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \right\|_{0,\mathfrak{M}} \\ &\quad + C_b \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left(\|c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0,p,\mathfrak{M}}^{p-1} + \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0,p,\mathfrak{M}}^{p-1} \right) \left\| c_{\mathfrak{M}}^{n_1(t)+1} - c_{\mathfrak{M}}^{n_0(t)+1} \right\|_{0,p,\mathfrak{M}}, \end{aligned}$$

et l'inégalité de Poincaré-Sobolev (III.23) donne :

$$\begin{aligned} T_{2,5}^{\Omega_P}(t) &\leq 2C_b \sqrt{M_\Omega} \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \\ &\quad + 2C_b C_{24}^p \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{1,\tau})} \sum_{n=1}^{N-1} \chi_\tau^n(t) \left(\|c_\tau^n\|_{1,\tau}^{p-1} + \|c_\tau^{n+1}\|_{1,\tau}^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Intégrons maintenant les termes $T_{2,\bullet}^{\Omega_P}(t)$ par rapport à t . En utilisant le Lemme III.38 et l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}} T_{2,1}^{\Omega_P}(t) \leq 2\sqrt{T}\tau \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{1,\partial\mathfrak{M}})} \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0,T;\|\cdot\|_{1,\partial\mathfrak{M}})}, \quad (\text{III.79})$$

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}} T_{2,2}^{\Omega_P}(t) \leq 2\sqrt{T}\tau \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{1,\tau})} \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^2(0,T;\|\cdot\|_{1,\tau})}, \quad (\text{III.80})$$

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}} T_{2,3}^{\Omega_P}(t) \leq 2\sqrt{M_\Gamma} T \tau \max_{B(0, C_{25}M_2)} |f'_s| \|c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\partial\mathfrak{M}})}, \quad (\text{III.81})$$

$$\Delta t \int_{\mathbb{R}} T_{2,4}^{\Omega_P}(t) \leq 2\sqrt{T}\tau \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})} \|\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})}, \quad (\text{III.82})$$

$$\text{et } \Delta t \int_{\mathbb{R}} T_{2,5}^{\Omega_P}(t) \leq 2C_b \sqrt{M_\Omega} T \tau \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{0,\mathfrak{M}})} \quad (\text{III.83})$$

$$+ 4C_b C_{24}^p T^{\frac{1}{p}} \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^\infty(0,T;\|\cdot\|_{1,\tau})} \|c_\tau^{\Delta t}\|_{L^p(0,T;\|\cdot\|_{1,\tau})}^{p-1}. \quad (\text{III.84})$$

En regroupant les équations (III.72) à (III.83) et en utilisant la Proposition III.26 sur les bornes des solutions discrètes, nous obtenons le résultat annoncé. ■

III.5.6 Démonstration du théorème de convergence

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve du Théorème III.18.

Nous décomposons cette démonstration en trois étapes. Tout d'abord en utilisant les résultats précédents nous démontrons l'existence des limites. Ensuite, nous étudions le passage à la limite tout d'abord pour l'équation d'évolution en temps dans le domaine Ω (cf équation (III.1a)) qui est plus simple car il n'y a pas de terme non-linéaire. Enfin, nous nous intéressons au passage à la limite dans l'équation sur le potentiel chimique en utilisant l'équation donnée sur Γ par la condition aux limites dynamique (cf équation (III.1b) et condition aux limites (III.2b)).

Etape 1: Existence des limites

En utilisant les estimations de translations en espace et en temps (cf Théorèmes III.33 et III.39) ainsi que les bornes sur les solutions discrètes (cf Proposition III.26), il existe $M > 0$ indépendant de $\text{size}(\mathcal{T})$, Δt , η et τ tel que :

$$\begin{aligned} &\|\zeta_T^{\tau_\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(\cdot, \cdot + \eta) - \zeta_T^{\tau_\alpha}(c_\tau^{\Delta t})\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq M|\eta|(|\eta| + \text{size}(\mathcal{T})) \\ \text{et } &\|\zeta_T^{\tau_\alpha}(c_\tau^{\Delta t})(\cdot + \tau, \cdot) - \zeta_T^{\tau_\alpha}(c_\tau^{\Delta t})\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq M\tau. \end{aligned}$$

De plus, les Définitions III.30 et III.37 des opérateurs de prolongement $\Psi_T^{\Omega\alpha}$ et $\zeta_T^{\tau\alpha}$ ainsi que la Proposition III.34 et les bornes sur les solutions discrètes (III.39) permettent d'obtenir :

$$\|\zeta_T^{\tau\alpha}(c_T^{\Delta t})\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq M.$$

Nous pouvons alors appliquer le théorème de Kolmogorov (voir Théorème A.11). Ainsi, il existe une fonction $\tilde{c} \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ telle que la convergence suivante soit satisfaite (à sous-suite près) :

$$\zeta_T^{\tau\alpha}(c_T^{\Delta t}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \tilde{c} \text{ dans } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2).$$

Nous pouvons alors appliquer la Proposition III.36, la sous-suite $\left((c_T^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ vers la fonction $c = \tilde{c}|_{\Omega} \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et la sous-suite $\left((c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortement dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ vers $c|_{\Gamma} = \text{Tr } c \in L^\infty(0, T; H^1(\Gamma))$. De plus, la sous-suite $\left((\nabla^\tau c_T^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers ∇c dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ et $\left((\nabla_{\Gamma}^{\partial\mathfrak{M}} c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\nabla_{\Gamma} c|_{\Gamma}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$.

En utilisant la Proposition III.26 et en appliquant la Proposition III.28 à la suite $\left((\mu_T^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ nous obtenons qu'elle converge faiblement, à sous-suite près, dans $L^2(0, T; L^q(\Omega))$ ($q \geq 1$) vers une certaine fonction $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et $\left((\nabla^\tau \mu_T^{\Delta t})^{(m)}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ converge faiblement vers $\nabla \mu$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$.

Dans la suite, pour améliorer la lisibilité de la preuve, nous omettons l'indice (m) .

Etape 2: Convergence de l'équation d'évolution en temps dans Ω

Considérons une fonction $\phi \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$ et $\nabla \phi \cdot \vec{n} = 0$ sur $(0, T) \times \Gamma$. En utilisant le fait que Ω est un ouvert $\mathbb{R}^2$ avec une frontière $\mathcal{C}^{3,1}$, le sous-ensemble contenant de telles fonctions ϕ est dense pour la norme $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ dans l'ensemble des fonctions $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ satisfaisant $\tilde{\phi}(T, \cdot) = 0$ (cf [Dro02]).

Multiplions l'équation (III.9a) du Problème (III.6) par $\phi_{\mathcal{K}}^n = \phi(t^n, x_{\mathcal{K}})$ et sommons sur chaque volume de contrôle intérieur $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, nous obtenons :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \left[m_{\mathcal{K}}(c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n) + \Delta t \Gamma_b \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_{\sigma} \left(\frac{\mu_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right) \right] = 0.$$

Posons,

$$T_1 = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} \phi_{\mathcal{K}}^{n+1} (c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n)$$

et

$$T_2 = \Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \phi_{\mathcal{K}}^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} m_{\sigma} \left(\frac{\mu_{\mathcal{K}}^{n+1} - \mu_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}} \right).$$

- Le terme T_1 peut se décomposer de la manière suivante :

$$T_1 = \underbrace{- \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^0 \phi_{\mathcal{K}}^1}_{:=T_{1,1}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^n (\phi_{\mathcal{K}}^n - \phi_{\mathcal{K}}^{n+1})}_{:=T_{1,2}} + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} \underbrace{\phi_{\mathcal{K}}^N}_{=\phi(T, x_{\mathcal{K}})=0} c_{\mathcal{K}}^N, \quad (\text{III.85})$$

alors le premier terme de T_1 s'écrit :

$$T_{1,1} = - \int_{\Omega} c^0(x) \phi(0, x) dx + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} (c^0(x) - c_{\mathcal{K}}^0) \phi(0, x) dx + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^0 R_{\mathcal{K}}^{\phi} \quad (\text{III.86})$$

où nous avons noté,

$$R_{\mathcal{K}}^{\phi} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} \phi(0, x) dx - \phi(\Delta t, x_{\mathcal{K}}).$$

D'après la Proposition III.24, $c_{\mathfrak{M}}^0$ converge vers c^0 dans $L^2(\Omega)$, alors puisque $\phi(0, \cdot) \in \mathcal{C}^{2,1}(\Omega)$,

$$\left| \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} (c^0(x) - c_{\mathcal{K}}^0) \phi(0, x) dx \right| \leq \|c^0 - c_{\mathfrak{M}}^0\|_{L^2(\Omega)} \|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.87})$$

De plus, en utilisant la régularité de la fonction ϕ et la Proposition II.13, nous avons :

$$\begin{aligned} R_{\kappa}^{\phi} &\leq \left| \frac{1}{m_{\kappa}} \int_{\mathcal{K}} (\phi(0, x) - \phi(\Delta t, x_{\kappa})) dx \right| + \frac{|m_{\kappa} - m_{\kappa}|}{m_{\kappa}} |\phi(\Delta t, x_{\kappa})| \\ &\leq C_{\phi} \frac{1}{m_{\kappa}} \int_{\mathcal{K}} |(0, x) - (\Delta t, x_{\kappa})| + C_{\Gamma} \text{size}(\mathcal{T}) |\phi(\Delta t, x_{\kappa})| \\ &\leq C_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})). \end{aligned}$$

Alors, la définition (III.8) de $c_{\mathfrak{M}}^0$ et la Proposition II.13 impliquent :

$$\left| \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} c_{\kappa}^0 R_{\kappa}^{\phi} \right| \leq \widetilde{C}_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \|c^0\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} 0. \quad (\text{III.88})$$

En regroupant les équations (III.86) à (III.88), nous obtenons :

$$T_{1,1} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_{\Omega} c^0(x) \phi(0, x) dx. \quad (\text{III.89})$$

En ce qui concerne le second terme de T_1 , le fait que $\phi_{\kappa}^N = \phi_{\kappa}^{N+1} = 0$ permet d'écrire :

$$T_{1,2} = \sum_{n=1}^N \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \Delta t c_{\kappa}^n R_{\kappa, n}^{\partial_t \phi} - \int_0^{T=t^N} \int_{\Omega} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} \partial_t \phi(t, x) dx dt \quad (\text{III.90})$$

où nous avons noté,

$$R_{\kappa, n}^{\partial_t \phi} = \frac{1}{m_{\kappa} \Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\mathcal{K}} \partial_t \phi(t, x) dx dt - \frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\kappa}^n}{\Delta t}.$$

La régularité de la fonction ϕ donne,

$$\begin{aligned} \left| \partial_t \phi(t, x) - \frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\kappa}^n}{\Delta t} \right| &\leq |\partial_t \phi(t, x) - \partial_t \phi(t^n, x_{\kappa})| + \left| \partial_t \phi(t^n, x_{\kappa}) - \frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\kappa}^n}{\Delta t} \right| \\ &\leq \widetilde{C}_{\phi}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) + \frac{\Delta t}{2} \left| \int_0^s (1-s) \partial_{tt} \phi(t^n + s\Delta t, x_{\kappa}) ds \right| \\ &\leq C_{\phi}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})), \end{aligned}$$

et la Proposition II.13 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} R_{\kappa, n}^{\partial_t \phi} &\leq \frac{1}{m_{\kappa} \Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\mathcal{K}} \left| \partial_t \phi(t, x) - \frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\kappa}^n}{\Delta t} \right| + \frac{|m_{\kappa} - m_{\kappa}|}{m_{\kappa} \Delta t} |\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\kappa}^n| \\ &\leq C_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})). \end{aligned}$$

Alors, la conservation du volume au niveau discret (III.10) implique :

$$\left| \sum_{n=1}^N \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \Delta t c_{\kappa}^n R_{\kappa, n}^{\partial_t \phi} \right| \leq C_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{n=1}^N \Delta t \left| \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} c_{\kappa}^0 \right|$$

et la définition (III.8) de $c_{\mathfrak{M}}^0$ associée à la Proposition II.13 entraîne :

$$\left| \sum_{n=1}^N \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \Delta t c_{\kappa}^n R_{\kappa, n}^{\partial_t \phi} \right| \leq T \widetilde{C}_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \|c^0\|_{L^1(\Omega)} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} 0. \quad (\text{III.91})$$

De plus, nous savons que $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge vers c dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, donc :

$$\int_0^T \int_{\Omega} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} \int_0^T \int_{\Omega} c(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt, \quad (\text{III.92})$$

et en regroupant les équations (III.90), (III.91) et (III.92), nous obtenons :

$$T_{1,2} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_0^T \int_{\Omega} c(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt. \quad (\text{III.93})$$

Finalement, la définition (III.85) du terme T_1 et les convergences (III.89) et (III.93) permettent de conclure :

$$T_1 \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_{\Omega} c^0(x) \phi(0, x) dx - \int_0^T \int_{\Omega} c(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx dt. \quad (\text{III.94})$$

- Intéressons nous maintenant au terme T_2 .

Commençons par remarquer que le terme T_2 peut s'écrire :

$$T_2 = \Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \mu_\kappa^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{int}} m_\sigma \left(\frac{\phi_\kappa^{n+1} - \phi_\mathcal{L}^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right).$$

Alors, puisque $\nabla \phi \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ sur $(0, T) \times \Omega$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ la formule de Stokes donne :

$$\int_{\mathcal{K}} \Delta \phi(t, x) dx = \int_{\partial \mathcal{K}} \nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}} d\sigma(x) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} d\sigma(x)$$

et le terme T_2 s'écrit :

$$\begin{aligned} T_2 = & -\Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \mu_\kappa^{n+1} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\mathcal{K}} \Delta \phi(t, x) dx - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}^{int}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} d\sigma(x) \right) dt \\ & + \Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \mu_\kappa^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{int}} m_\sigma \left(\frac{\phi_\kappa^{n+1} - \phi_\mathcal{L}^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant

$$R_{\sigma,n+1}^\phi = \frac{1}{m_\sigma \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} d\sigma(x) dt - \frac{\phi_\mathcal{L}^{n+1} - \phi_\kappa^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}}, \quad (\text{III.95})$$

nous avons :

$$T_2 = -\Gamma_b \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \phi(t, x) \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) dx + \Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma (\mu_\kappa^{n+1} - \mu_\mathcal{L}^{n+1}) R_{\sigma,n+1}^\phi. \quad (\text{III.96})$$

Or, nous savons que $\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge faiblement (à sous-suite près) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ vers μ , donc :

$$T_{2,1} = - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \phi(t, x) \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) dx dt \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \phi(t, x) \mu(t, x) dx dt.$$

En utilisant que $\mu \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$ et que $\nabla \phi \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ sur $(0, T) \times \Omega$, nous avons :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} \Delta \phi(t, x) \mu(t, x) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \phi(t, x) \cdot \nabla \mu(t, x) dx dt,$$

c'est à dire :

$$T_{2,1} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla \phi(t, x) \cdot \nabla \mu(t, x) dx dt. \quad (\text{III.97})$$

De plus, le terme $R_{\sigma,n+1}^\phi$ satisfait :

$$\begin{aligned} R_{\sigma,n+1}^\phi \leq & \frac{1}{m_\sigma \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \left| \nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\kappa \mathcal{L}} - \frac{\phi(t, x_\mathcal{L}) - \phi(t, x_\kappa)}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right| \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left| \frac{\phi(t, x_\mathcal{L}) - \phi(t, x_\kappa)}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} - \frac{\phi_\mathcal{L}^{n+1} - \phi_\kappa^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right|. \end{aligned}$$

Pour tout $\sigma = \kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}$, la condition d'orthogonalité du maillage implique $x_\mathcal{L} - x_\kappa = d_{\kappa,\mathcal{L}} \vec{\mathbf{n}}_{\kappa \mathcal{L}}$ donc en utilisant les formules de Taylor, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \sigma$ nous avons :

$$\nabla \phi(t, x) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\kappa \mathcal{L}} = \frac{\phi(t, x_\mathcal{L}) - \phi(t, x_\kappa)}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})),$$

et en appliquant également les formules de Taylor aux fonctions $\phi(t, x_\kappa)$ et $\phi(t, x_\mathcal{L})$ au point t^{n+1} , nous obtenons :

$$R_{\sigma,n+1}^\phi \leq C_\phi(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})). \quad (\text{III.98})$$

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous déduisons donc :

$$\begin{aligned}
|T_{2,2}| &= \left| \Gamma_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\kappa} \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma (\mu_\kappa^{n+1} - \mu_\mathcal{L}^{n+1}) (R_\phi)_\sigma^{n+1} \right| \\
&\leq \Gamma_b C_\phi (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \left(\sum_{\sigma=\kappa} \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma d_{\kappa,\mathcal{L}} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |\mu_\tau^{n+1}|_{1,\tau} \\
&\leq \Gamma_b \sqrt{T} C_\phi |\Omega|^{\frac{1}{2}} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \|\mu_\tau^{n+1}\|_{L^2(0,T;|\cdot|_{1,\tau})},
\end{aligned}$$

donc en utilisant les bornes sur les solutions (III.39), le second terme de T_2 vérifie :

$$T_{2,2} \leq \Gamma_b \sqrt{T} C_\phi |\Omega|^{\frac{1}{2}} \sqrt{M_3} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.99})$$

Ainsi, la définition (III.96) du terme T_2 et les convergences (III.97) et (III.99) impliquent :

$$T_2 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \Gamma_b \int_0^T \int_\Omega \nabla \phi(t, x) \cdot \nabla \mu(t, x) dx dt. \quad (\text{III.100})$$

- Pour conclure, puisque $T_1 + T_2 = 0$, les convergences (III.94) et (III.100) impliquent que l'identité suivante est satisfaite pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^{2,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$ et $\nabla \phi \cdot \vec{n} = 0$ sur $(0, T) \times \Gamma$:

$$\int_0^T \int_\Omega (-c(t, x) \partial_t \phi(t, x) + \Gamma_b \nabla \phi(t, x) \cdot \nabla \mu(t, x)) dx dt = \int_\Omega c^0(x) \phi(0, x) dx. \quad (\text{III.101})$$

Par densité, nous obtenons l'égalité (III.101) pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$.

Etape 3: Convergence de l'équation sur μ et de la condition aux limites dynamique

Soit $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$.

Multiplions l'équation (III.9b) du Problème III.6 par $\Delta t \phi_\kappa^{n+1} = \Delta t \phi(t^{n+1}, x_\kappa)$ puis sommions sur chaque volume de contrôle intérieur $\kappa \in \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Delta \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \phi_\kappa^{n+1} &\left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{int}} m_\sigma \left(\frac{c_\kappa^{n+1} - c_\mathcal{L}^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left(\frac{c_\kappa^{n+1} - c_\mathcal{L}^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right) \right) \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \phi_\kappa^{n+1} (\mathcal{A}_{f_b} m_{\underline{\kappa}} d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1}) - m_{\underline{\kappa}} \mu_\kappa^{n+1}) = 0.
\end{aligned}$$

Multiplions maintenant l'équation (III.9c) par $\phi_\mathcal{L}^{n+1} = \phi(t^{n+1}, x_\mathcal{L})$ et sommions sur chaque volume de contrôle du bord $\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}$ et sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \phi_\mathcal{L}^{n+1} &\left(\mathcal{A}_{\partial t} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \left(\frac{c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\mathcal{L}^n}{\Delta t} \right) + \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_\mathcal{L}} \frac{c_\mathcal{L}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}}{d_{\mathcal{L},\mathcal{L}'}} \right) \\
&+ \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \phi_\mathcal{L}^{n+1} \left(\mathcal{A}_{f_s} m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} d^{f_s}(c_\mathcal{L}^n, c_\mathcal{L}^{n+1}) + \mathcal{A}_\Delta m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}} \frac{c_\mathcal{L}^{n+1} - c_\kappa^{n+1}}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Donc, en sommant ces deux équations nous obtenons l'identité suivante :

$$\mathcal{A}_\Delta T_1 + T_2 + \mathcal{A}_{f_b} T_3 + \mathcal{A}_{\partial t} T_4 + \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} T_5 + \mathcal{A}_{f_s} T_6 = 0 \quad (\text{III.102})$$

où nous avons noté :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \phi_{\kappa}^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{int}} m_{\sigma} \left(\frac{c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \phi_{\kappa}^{n+1} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \left(\frac{c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right) + \sum_{\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} \frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\kappa}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right), \\
T_2 &= - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \phi_{\kappa}^{n+1} \mu_{\kappa}^{n+1}, \\
T_3 &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \phi_{\kappa}^{n+1} d^{fb}(c_{\kappa}^n, c_{\kappa}^{n+1}), \\
T_4 &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n), \\
T_5 &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} \left(\frac{c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right), \\
\text{et } T_6 &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} d^{fs}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}).
\end{aligned}$$

- Commençons avec le terme T_1 . Notons que pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, la formule de Stokes donne :

$$\int_{\kappa} \Delta \phi(t, x) dx - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{\tilde{n}}_{\sigma \kappa}(x) d\sigma(x) = 0,$$

alors en réordonnant les termes de la somme, le terme T_1 s'écrit :

$$\begin{aligned}
T_1 &= - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} c_{\kappa}^{n+1} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\kappa} \Delta \phi(t, x) dx - \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{\tilde{n}}_{\sigma \kappa}(x) d\sigma(x) \right) dt \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} c_{\kappa}^{n+1} \left(\sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{int}} m_{\sigma} \left(\frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right) + \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}^{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \left(\frac{\phi_{\kappa}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right) \right) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^{n+1} \left(\frac{\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\kappa}^{n+1}}{d_{\kappa, \mathcal{L}}} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, en reprenant la définition (III.95) du terme de reste $R_{\sigma, n+1}^{\phi}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
T_1 &= - \int_0^T \int_{\Omega} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta \phi(t, x) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{\tilde{n}}(x) d\sigma(x) dt \\
&\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma = \kappa | \kappa \in \mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} (c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\sigma, n+1}^{\phi} + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} (c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\sigma, n+1}^{\phi}.
\end{aligned} \tag{III.103}$$

Puisque $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge vers c dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, nous avons :

$$\int_0^T \int_{\Omega} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta \phi(t, x) dx dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} c(t, x) \Delta \phi(t, x) dx dt$$

et de la même manière, la convergence de $c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}$ vers c_{Γ} dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ donne :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{\tilde{n}}(x) d\sigma(x) dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, x) \nabla \phi(t, x) \cdot \mathbf{\tilde{n}}(x) d\sigma(x) dt.$$

Or, nous savons que $c \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$, donc :

$$- \int_0^T \int_{\Omega} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta \phi dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \nabla \phi \cdot \mathbf{\tilde{n}} d\sigma(x) dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla c \cdot \nabla \phi dx dt. \tag{III.104}$$

D'après l'inégalité (III.98) obtenue dans l'étape précédente, pour toute arête intérieure $\sigma \in \mathcal{E}_{int}$, nous avons :

$$R_{\sigma, n+1}^{\phi} \leq C_{\phi}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})),$$

donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée aux bornes sur les solutions (III.39) donne :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\kappa|\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} m_{\sigma} (c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\sigma,n+1}^{\phi} \right| \leq C_{\phi} |\Omega|^{\frac{1}{2}} M_1 T (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.105})$$

Pour une arête extérieure $\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}$, nous avons :

$$\begin{aligned} R_{\sigma,n+1}^{\phi} &= \frac{1}{m_{\sigma} \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot (\vec{n}_{\sigma\kappa}(x) - \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}}) d\sigma(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{m_{\sigma} \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} (\nabla \phi(t, x) - \nabla \phi(t^{n+1}, x)) \cdot \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}} d\sigma(x) dt \\ &\quad + \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \left(\nabla \phi(t^{n+1}, x) \cdot \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}} - \frac{\phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}}) - \phi(t^{n+1}, x_{\kappa})}{d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}})} \right) d\sigma(x) \\ &\quad + (\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\kappa}^{n+1}) \left(\frac{1}{d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}})} - \frac{1}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right). \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant majorer les termes du membre de droite de cette égalité.

- La Proposition II.15 implique :

$$\left| \frac{1}{m_{\sigma} \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} \nabla \phi(t, x) \cdot (\vec{n}_{\sigma\kappa}(x) - \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}}) d\sigma(x) dt \right| \leq C_{\phi} \text{size}(\mathcal{T}).$$

- Les formules de Taylor appliquées à la fonction $\nabla \phi$ au point $t \in [t^n, t^{n+1}]$ pour $x \in \sigma$ fixé permettent d'obtenir :

$$\left| \frac{1}{m_{\sigma} \Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma} (\nabla \phi(t, x) - \nabla \phi(t^{n+1}, x)) \cdot \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}} d\sigma(x) dt \right| \leq C_{\phi} \Delta t.$$

- La condition d'orthogonalité sur les arêtes extérieures donne $x_{\mathcal{L}} - x_{\kappa} = d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}}) \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \sigma$, nous avons :

$$\nabla \phi(t, x) \cdot \vec{n}_{\kappa\mathcal{L}} = \frac{\phi(t, x_{\mathcal{L}}) - \phi(t, x_{\kappa})}{d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}})} + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})).$$

- La Proposition II.14, la régularité du maillage et les formules de Taylor appliquées à la fonction $\phi(t^{n+1}, \cdot)$ aux points x_{κ} et $x_{\mathcal{L}}$ entraînent :

$$\left| (\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\kappa}^{n+1}) \left(\frac{1}{d(x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}})} - \frac{1}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} \right) \right| \leq C_{\phi} \text{size}(\mathcal{T}).$$

Alors, comme pour le cas des arêtes intérieures, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les bornes sur les solutions (III.39) permettent d'obtenir :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} (c_{\kappa}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\sigma,n+1}^{\phi} \right| \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.106})$$

Ainsi de la définition (III.103) du terme T_1 et des convergences (III.104), (III.105) et (III.106), nous déduisons :

$$T_1 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \nabla c(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) dx dt. \quad (\text{III.107})$$

- Nous pouvons réécrire le terme T_2 de la manière suivante :

$$T_2 = - \int_0^T \int_{\Omega} \phi(t, x) \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} dx dt + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mu_{\kappa}^{n+1} R_{\kappa,n}^{\phi} \quad (\text{III.108})$$

avec

$$R_{\kappa,n}^{\phi} = \frac{1}{\Delta t m_{\kappa}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\kappa} \phi(t, x) dx dt - \phi(t^{n+1}, x_{\kappa}). \quad (\text{III.109})$$

Puisque $\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge faiblement vers μ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, nous avons :

$$\int_0^T \int_{\Omega} \phi(t, x) \mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} dx dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} \phi(t, x) \mu(t, x) dx dt. \quad (\text{III.110})$$

La régularité de la fonction ϕ et la Proposition II.13 impliquent :

$$\begin{aligned} R_{\kappa, n}^{\phi} &\leq \frac{1}{\Delta t m_{\underline{\kappa}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}} |\phi(t, x) - \phi(t^{n+1}, x_{\kappa})| dx dt + \frac{|m_{\kappa} - m_{\underline{\kappa}}|}{m_{\underline{\kappa}}} |\phi(t^{n+1}, x_{\kappa})| \\ &\leq C_{\phi, r}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \end{aligned} \quad (\text{III.111})$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \mu_{\kappa}^{n+1} R_{\kappa, n}^{\phi} \right| &\leq M_{\Omega} C_{\phi, r}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0, \mathfrak{M}} \\ &\leq M_{\Omega} C_{\phi, r} \sqrt{T}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \|\mu_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{0, m})}. \end{aligned}$$

Des bornes (III.39) sur les solutions discrètes, nous déduisons donc :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \mu_{\kappa}^{n+1} R_{\kappa, n}^{\phi} \right| \leq M_{\Omega} C_{\phi, r} \sqrt{T M_3}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.112})$$

Finalement la définition (III.108) du terme T_2 et les convergences (III.110) et (III.112), permettent d'obtenir :

$$T_2 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} - \int_0^T \int_{\Omega} \phi(t, x) \mu(t, x) dx dt. \quad (\text{III.113})$$

- En ce qui concerne le terme T_3 , rappelons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d^{f_b}(x, x) = f'_b(x)$, ainsi :

$$T_3 = \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \phi_{\kappa}^{n+1} (d^{f_b}(c_{\kappa}^n, c_{\kappa}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\kappa}^{n+1}, c_{\kappa}^{n+1})) + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \phi_{\kappa}^{n+1} f'_b(c_{\kappa}^{n+1}). \quad (\text{III.114})$$

D'après l'hypothèse de croissance polynomiale (III.19), nous avons :

$$\begin{aligned} |d^{f_b}(a, b) - d^{f_b}(a, a)| &\leq \left(\sup_{s \in [0, 1]} |D(d^{f_b}(a, \cdot))(sa + (1-s)b)| \right) |b - a| \\ &\leq C_b \left(1 + |a|^{p-2} + \sup_{s \in [0, 1]} |sa + (1-s)b|^{p-2} \right) |b - a| \\ &\leq C_b (1 + |a|^{p-2} + (|b| + |b - a|)^{p-2}) |b - a| \\ &\leq \widetilde{C}_b (1 + |a|^{p-2} + |b|^{p-2}) |b - a|. \end{aligned}$$

Donc le premier terme de T_3 satisfait :

$$\begin{aligned} T_{3,1} &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} \phi_{\kappa}^{n+1} (d^{f_b}(c_{\kappa}^n, c_{\kappa}^{n+1}) - d^{f_b}(c_{\kappa}^{n+1}, c_{\kappa}^{n+1})) \\ &\leq \widetilde{C}_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} |\phi_{\kappa}^{n+1}| |c_{\kappa}^{n+1} - c_{\kappa}^n| (1 + |c_{\kappa}^n|^{p-2} + |c_{\kappa}^{n+1}|^{p-2}). \end{aligned}$$

De l'inégalité de Hölder nous déduisons :

$$|T_{3,1}| \leq \widetilde{C}_b \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\phi_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0, p, \mathfrak{M}} \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\mathfrak{M}}^n\|_{0, p, \mathfrak{M}} \|1 + |c_{\mathfrak{M}}^n|^{p-2} + |c_{\mathfrak{M}}^{n+1}|^{p-2}\|_{0, \frac{p}{p-2}, \mathfrak{M}},$$

donc en utilisant l'inégalité de Poincaré-Sobolev (III.23) et les bornes sur les solutions (III.39), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |T_{3,1}| &\leq \widetilde{C}_b C_{\phi} C_{24} \left(M_{\Omega}^{\frac{p-2}{p}} + 2(C_{24} M_1)^{p-2} \right) \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n}{\Delta t} \right\|_{1, \mathcal{T}} \\ &\leq \widetilde{C}_b C_{\phi} C_{24} \sqrt{T} \left(M_{\Omega}^{\frac{p-2}{p}} + 2(C_{24} M_1)^{p-2} \right) \Delta t \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n}{\Delta t} \right\|_{1, \mathcal{T}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \widetilde{C}_b C_{\phi} C_{24} \sqrt{T M_4} \left(M_{\Omega}^{\frac{p-2}{p}} + 2(C_{24} M_1)^{p-2} \right) \sqrt{\Delta t}. \end{aligned}$$

Nous avons donc :

$$T_{3,1} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.115})$$

Intéressons nous maintenant au second terme de T_3 ,

$$T_{3,2} = \int_0^T \int_{\Omega} \phi(t, x) f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}) dx dt - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f'_b(c_{\kappa}^{n+1}) R_{\kappa, n}^{\phi} \quad (\text{III.116})$$

où $R_{\kappa, n}^{\phi}$ est défini par (III.109).

Commençons par étudier la convergence du premier terme de $T_{3,2}$.

Pour tout $r \geq 1$, l'inégalité de Poincaré-Sobolev (III.23) et la Proposition III.26 impliquent :

$$\|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{0, r, \mathfrak{M}})}^2 \leq C_{24}^2 \|c_{\mathcal{T}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{1, \mathcal{T}})}^2 \leq C_{24}^2 T M_1^2.$$

Donc, la suite $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge faiblement (à sous-suite près) vers une certaine fonction $\tilde{c}$ dans $L^2(0, T; L^r(\Omega))$. Sachant que $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ vers $c \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$, nous en déduisons que $\tilde{c} = c$ et $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge faiblement (à sous-suite près) vers c dans $L^2(0, T; L^r(\Omega))$.

De plus, pour tout $u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ et pour tout $s \in]0, 1]$ l'inégalité de Hölder donne :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^p(\Omega)}^s \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^q(\Omega)}^{1-s} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{r} = \frac{s}{p} + \frac{1-s}{q},$$

et en prenant $p = 2$, pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, \cdot) - c(t, \cdot)\|_{L^r(\Omega)} \leq \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, \cdot) - c(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^s \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, \cdot) - c(t, \cdot)\|_{L^q(\Omega)}^{1-s}$$

donc,

$$\|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} - c\|_{L^2(0, T; L^r(\Omega))}^2 \leq \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} - c\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}^{2s} \|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} - c\|_{L^2(0, T; L^q(\Omega))}^{2(1-s)}.$$

Ainsi, puisque $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge fortement vers c dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, nous obtenons :

$$\|c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t} - c\|_{L^2(0, T; L^r(\Omega))}^2 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0,$$

et la convergence faible de $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ dans $L^2(0, T; L^r(\Omega))$, permet de conclure que $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge fortement vers c dans $L^2(0, T; L^r(\Omega))$. Alors, d'après la réciproque du théorème de Lebesgue il existe une sous-suite (toujours notée $c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}$) telle que :

$$\begin{cases} c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) \rightarrow c(t, x) \quad \text{p.p sur } (0, T) \times \Omega, \\ |c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)| \leq S(t, x) \quad \text{p.p sur } (0, T) \times \Omega \text{ avec } S \in L^2(0, T; L^r(\Omega)). \end{cases} \quad (\text{III.117})$$

L'hypothèse de croissance polynomiale (I.7) implique :

$$\begin{aligned} |f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)) \phi(t, x)| &\leq C_b (1 + |c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)|^{p-1}) |\phi(t, x)| \\ &\leq C_b (1 + |S(t, x)|^{p-1}) |\phi(t, x)| \in L^1(0, T; \Omega). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant le résultat (III.117) nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée,

$$\int_0^T \int_{\Omega} f'_b(c_{\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)) \phi(t, x) dx dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f'_b(c(t, x)) \phi(t, x) dx dt. \quad (\text{III.118})$$

Il nous reste maintenant à étudier la convergence du second terme de $T_{3,2}$. L'hypothèse de croissance polynomiale (I.7), la majoration (III.111) et l'inégalité de Hölder impliquent :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f'_b(c_{\kappa}^{n+1}) R_{\kappa, n}^{\phi} \right| &\leq C_b C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} (1 + |c_{\kappa}^{n+1}|^{p-1}) \\ &\leq C_b C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \left(T M_{\Omega} + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|c_{\mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0, p-1, \mathfrak{M}}^{p-1} \right). \end{aligned}$$

De l'inégalité de Poincaré-Sobolev (III.23) nous déduisons :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f'_b(c_{\kappa}^{n+1}) R_{\kappa, n}^{\phi} \right| \leq C_b C_{\phi, \Gamma} C_{24}^{p-1} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \left(T M_{\Omega} + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|c_{\mathcal{T}}^{n+1}\|_{1, \mathcal{T}}^{p-1} \right),$$

et la Proposition III.26 entraîne :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} f'_b(c_{\kappa}^{n+1}) R_{\kappa,n}^{\phi} \right| \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.119})$$

Ainsi, la définition (III.116) du terme $T_{3,2}$ et les convergences (III.118) et (III.119) impliquent

$$T_{3,2} \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f'_b(c(t, x)) \phi(t, x) dx dt, \quad (\text{III.120})$$

et donc les convergences (III.115) et (III.120) associées à la définition (III.114) du terme T_3 donnent finalement :

$$T_3 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} f'_b(c(t, x)) \phi(t, x) dx dt. \quad (\text{III.121})$$

- Etudions maintenant la convergence du terme T_4 :

$$T_4 = - \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^0 \phi_{\mathcal{L}}^1 + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^n (\phi_{\mathcal{L}}^n - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}) + \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \underbrace{\phi_{\mathcal{L}}^N}_{\phi(T, x_{\mathcal{L}})=0} c_{\mathcal{L}}^N. \quad (\text{III.122})$$

En posant

$$R_{\mathcal{L}}^{\phi} = \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{\mathcal{L}} \phi(0, x) d\sigma(x) - \phi(\Delta t, x_{\mathcal{L}}),$$

le premier terme de T_4 s'écrit :

$$T_{4,1} = - \int_{\Gamma} c^0(x) \phi(0, x) d\sigma(x) + \int_{\Gamma} (c^0(x) - c_{\partial \mathfrak{M}}^0) \phi(0, x) d\sigma(x) + \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^0 R_{\mathcal{L}}^{\phi}. \quad (\text{III.123})$$

La définition (III.8) de $c_{\partial \mathfrak{M}}^0$ et la Proposition III.25 impliquent :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} (c^0(x) - c_{\partial \mathfrak{M}}^0) \phi(0, x) d\sigma(x) \right| &\leq \|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Gamma)} \|c^0 - c_{\partial \mathfrak{M}}^0\|_{L^2(\Gamma)} \\ &\leq \|\phi(0, \cdot)\|_{L^2(\Gamma)} \|\nabla_{\Gamma} c^0\|_{L^2(\Gamma)} \text{size}(\mathcal{T}), \end{aligned}$$

donc :

$$\int_{\Gamma} (c^0(x) - c_{\partial \mathfrak{M}}^0) \phi(0, x) d\sigma(x) \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.124})$$

La régularité de la fonction ϕ et la Proposition II.4 permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{L}}^{\phi} &\leq \left| \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{\mathcal{L}} (\phi(0, x) - \phi(\Delta t, x_{\mathcal{L}})) d\sigma(x) \right| + \frac{|m_{\mathcal{L}} - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}|}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} |\phi(\Delta t, x_{\mathcal{L}})| \\ &\leq C_{\phi} \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{\mathcal{L}} |(0, x) - (\Delta t, x_{\mathcal{L}})| d\sigma(x) + C_{\Gamma} \text{size}(\mathcal{T})^2 |\phi(\Delta t, x_{\mathcal{L}})| \\ &\leq C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})), \end{aligned}$$

donc la définition (III.8) de $c_{\partial \mathfrak{M}}^0$ entraîne,

$$\left| \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^0 R_{\mathcal{L}}^{\phi} \right| \leq C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} \frac{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}}{m_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{L}} |c^0(x)| d\sigma(x).$$

Nous obtenons ainsi :

$$\left| \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^0 R_{\mathcal{L}}^{\phi} \right| \leq \widetilde{C}_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \|c^0\|_{L^1(\Gamma)} \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.125})$$

La définition (III.123) du terme $T_{4,1}$ et les convergences (III.124) et (III.125) donnent :

$$T_{4,1} \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} - \int_{\Gamma} c^0(x) \phi(0, x) d\sigma(x). \quad (\text{III.126})$$

Remarquons que $\phi_{\mathcal{L}}^N = \phi_{\mathcal{L}}^{N+1} = 0$, alors en réordonnant les termes de la somme le second terme de T_4 s'écrit :

$$T_{4,2} = \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^n R_{\mathcal{L},n}^{\partial_t \phi} - \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt \quad (\text{III.127})$$

où nous avons noté :

$$R_{\mathcal{L},n}^{\partial_t \phi} = \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\mathcal{L}} \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt - \frac{\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^n}{\Delta t}.$$

La régularité de la fonction ϕ et la Proposition II.4 permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{L},n}^{\partial_t \phi} &\leq \frac{1}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \Delta t} \int_{t^{n-1}}^{t^n} \int_{\mathcal{L}} \left| \partial_t \phi(t, x) - \frac{\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^n}{\Delta t} \right| + \frac{|m_{\mathcal{L}} - m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}|}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \left| \frac{\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^n}{\Delta t} \right| \\ &\leq C_{\phi, \Gamma}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})), \end{aligned}$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\left| \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^n R_{\mathcal{L},n}^{\partial_t \phi} \right| \leq C_{\phi, \Gamma} \sqrt{M_{\Gamma}}(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{n=1}^N \Delta t \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{0, \partial \mathfrak{M}}.$$

Donc, en utilisant les bornes sur les solutions (III.39), nous obtenons :

$$\left| \sum_{n=1}^N \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} c_{\mathcal{L}}^n R_{\mathcal{L},n}^{\partial_t \phi} \right| \leq C_{\phi, \Gamma} \sqrt{M_{\Gamma}} T M_2(\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} 0. \quad (\text{III.128})$$

De plus, la suite $c_{\partial \mathfrak{M}}$ converge vers $\text{Tr}(c)$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ donc le second terme de $T_{4,2}$ satisfait :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, x) \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt. \quad (\text{III.129})$$

Alors, la définition (III.127) associée aux convergences (III.128) et (III.129) impliquent :

$$T_{4,2} \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, x) \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt, \quad (\text{III.130})$$

et finalement la convergence du terme T_4 est obtenue en regroupant les convergences (III.126) et (III.130),

$$T_4 \xrightarrow[\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} - \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\Gamma}(t, x) \partial_t \phi(t, x) d\sigma(x) dt - \int_{\Gamma} \text{Tr} c^0(x) \phi(0, x) d\sigma(x). \quad (\text{III.131})$$

- Rappelons que pour tout $\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}$,

$$\int_{\mathcal{L}} \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) = \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathcal{L}}} \nabla_{\Gamma} \phi(t, \mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}), \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

alors en réordonnant les termes de la somme le terme T_5 s'écrit :

$$\begin{aligned} T_5 &= - \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} c_{\mathcal{L}}^{n+1} \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\int_{\mathcal{L}} \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) - \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathcal{L}}} \nabla_{\Gamma} \phi(t, \mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) \right) dt \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} c_{\mathcal{L}}^{n+1} \sum_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_{\mathcal{L}}} \left(\frac{\phi_{\mathcal{L}}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}'}^{n+1}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right). \end{aligned}$$

En posant

$$R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \left(\nabla_{\Gamma} \phi(t, \mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) - \frac{\phi_{\mathcal{L}'}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right) dt,$$

nous avons donc :

$$T_5 = - \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathbf{V}} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}) R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi}. \quad (\text{III.132})$$

Puisque $c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge vers $\text{Tr } c = c_{|\Gamma}$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ le premier terme de T_5 satisfait :

$$\int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma} c_{|\Gamma}(t, x) \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt$$

et le fait que $\text{Tr}(c) \in L^2(0, T; H^1(\Gamma))$ entraîne :

$$- \int_0^T \int_{\Gamma} c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t} \Delta_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} c_{|\Gamma}(t, x) \cdot \nabla_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt. \quad (\text{III.133})$$

Le terme de reste $R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi}$ se réécrit :

$$\begin{aligned} R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla_{\Gamma} \phi(t, \mathbf{v}) - \nabla_{\Gamma} \phi(t^{n+1}, \mathbf{v})) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) \\ &\quad + \left(\nabla_{\Gamma} \phi(t^{n+1}, \mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) - \frac{\phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}'}) - \phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} \right) \\ &\quad + (\phi_{\mathcal{L}'}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}) \left(\frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} - \frac{1}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right). \end{aligned}$$

Il faut donc estimer les trois termes de $R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi}$.

– La régularité de la fonction ϕ entraîne :

$$\left| \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} (\nabla_{\Gamma} \phi(t, \mathbf{v}) - \nabla_{\Gamma} \phi(t^{n+1}, \mathbf{v})) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) \right| \leq C_{\phi} \Delta t.$$

– La Proposition II.7 implique :

$$\left| \nabla_{\Gamma} \phi(t^{n+1}, \mathbf{v}) \cdot \vec{\tau}_{\mathbf{v}, \mathcal{L}}(\mathbf{v}) - \frac{\phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}'}) - \phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}})}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} \right| \leq C_{\phi} m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}.$$

– La Proposition II.6 donne :

$$\begin{aligned} |\phi_{\mathcal{L}'}^{n+1} - \phi_{\mathcal{L}}^{n+1}| \left| \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} - \frac{1}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right| &\leq \left| \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}}} - \frac{1}{d_{\mathcal{L}, \mathcal{L}'}} \right| \int_{\gamma_{\mathcal{L}\mathcal{L}'}} |\nabla_{\Gamma} \phi(t^{n+1}, x)| d\sigma(x) \\ &\leq C_{\phi, \Gamma} \text{size}(\mathcal{T}). \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons :

$$R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi} \leq C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})),$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}) R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi} \right| \leq \widetilde{C}_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t |c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}|_{1, \partial\mathfrak{M}}.$$

La Proposition III.26 permet alors d'obtenir :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathbf{v}=\mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}'}^{n+1}) R_{\mathbf{v}, n+1}^{\phi} \right| \leq \widetilde{C}_{\phi, \Gamma} M_2 T (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.134})$$

La définition (III.132) du terme T_5 et les convergences (III.133) et (III.134) mènent à la convergence suivante :

$$T_5 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} c_{|\Gamma}(t, x) \cdot \nabla_{\Gamma} \phi(t, x) d\sigma(x) dt. \quad (\text{III.135})$$

- Pour finir, étudions la convergence du terme T_6 que nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} T_6 &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} (d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, c_{\mathcal{L}}^{n+1})) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} f'_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}). \end{aligned} \quad (\text{III.136})$$

Rappelons que pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et pour tout $\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}$ l'inégalité de Sobolev (III.24) sur Γ et la Proposition III.26 impliquent :

$$c_{\mathcal{L}}^n \leq \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{L^\infty(\Gamma)} \leq C_{25} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^n\|_{1, \partial \mathfrak{M}} \leq C_{25} M_2,$$

donc, pour tout $\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}$ et pour tout $n \in \{0, \dots, N-1\}$, nous avons :

$$\begin{aligned} |d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, c_{\mathcal{L}}^n) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, c_{\mathcal{L}}^{n+1})| &\leq \left(\sup_{y \in [c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}]} |D(d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, \cdot))(y)| \right) |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n| \\ &\leq \left(\sup_{y \in B(0, C_{25} M_2)} |D(d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, \cdot))(y)| \right) |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n| \\ &\leq \underbrace{\left(\sup_{x, y \in B(0, C_{25} M_2)} |D(d^{f_s}(x, \cdot))(y)| \right)}_{:= B_{f_s}} |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n|. \end{aligned}$$

Alors, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz le premier terme de T_6 satisfait :

$$\begin{aligned} T_{6,1} &= \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} \phi_{\mathcal{L}}^{n+1} (d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^{n+1}, c_{\mathcal{L}}^{n+1})) \\ &\leq B_{f_s} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} |\phi_{\mathcal{L}}^{n+1}| |c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n| \\ &\leq B_{f_s} \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\phi_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}\|_{0, \partial \mathfrak{M}} \left\| \frac{c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{0, \partial \mathfrak{M}} \\ &\leq B_{f_s} \|\phi_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{0, \partial \mathfrak{M}})} \Delta t \left(\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \frac{c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n}{\Delta t} \right\|_{0, \partial \mathfrak{M}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Les bornes sur les solutions (III.39) et la régularité de la fonction ϕ permettent d'obtenir :

$$T_{6,1} \leq B_{f_s} C_{\phi} \sqrt{M_5} \Delta t \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.137})$$

Pour la convergence du second terme de T_6 , le raisonnement est similaire à celui donné dans l'étude de la convergence du terme T_3 .

$$T_{6,2} = \int_0^T \int_{\Gamma} \phi(t, x) f'_s(c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}) d\sigma(x) dt + \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} f'_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\mathcal{L}, n}^{\phi} \quad (\text{III.138})$$

où nous avons noté

$$R_{\mathcal{L}, n}^{\phi} = \phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}}) - \frac{1}{\Delta t m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{L}} \phi(t, x) d\sigma(x) dt.$$

Tout d'abord, l'inégalité de Sobolev sur Γ du Lemme III.16 et la Proposition III.26, impliquent que pour tout $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{0, r, \partial \mathfrak{M}})}^2 &\leq M_{\Gamma}^{\frac{2}{r}} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; L^\infty(\Gamma))}^2 \\ &\leq M_{\Gamma}^{\frac{2}{r}} C_{25}^2 \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}\|_{L^2(0, T; \|\cdot\|_{1, \partial \mathfrak{M}})}^2 \\ &\leq M_{\Gamma}^{\frac{2}{r}} C_{25}^2 T M_2^2. \end{aligned}$$

Or, nous savons que $c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ vers $\text{Tr } c \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$ donc, à sous-suite près, $c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge faiblement vers $\text{Tr } c$ dans $L^2(0, T; L^r(\Gamma))$. De plus, pour tout $s \in]0, 1]$ l'inégalité de Hölder (avec $\frac{1}{r} = \frac{s}{2} + \frac{1-s}{q}$) donne,

$$\|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} - \text{Tr } c\|_{L^2(0, T; L^r(\Gamma))}^2 \leq \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} - \text{Tr } c\|_{L^2(0, T; L^2(\Gamma))}^{2s} \|c_{\partial \mathfrak{M}}^{\Delta t} - \text{Tr } c\|_{L^2(0, T; L^q(\Gamma))}^{2(1-s)}.$$

Puisque $c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge fortement vers $\text{Tr } c$ dans $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$, nous obtenons :

$$\|c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t} - \text{Tr } c\|_{L^2(0, T; L^r(\Gamma))}^2 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, la convergence en norme associée à la convergence faible de $c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ dans $L^2(0, T; L^r(\Gamma))$, permettent de conclure que $c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$ converge fortement vers $\text{Tr } c$ dans $L^2(0, T; L^r(\Gamma))$. D'après la réciproque du théorème de Lebesgue, il existe une sous-suite (toujours notée $c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}$) telle que :

$$\begin{cases} c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x) \rightarrow \text{Tr } c(t, x) \text{ p.p sur } (0, T) \times \Gamma, \\ |c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)| \leq \tilde{S}(t, x) \text{ p.p sur } (0, T) \times \Gamma \text{ avec } \tilde{S} \in L^2(0, T; L^r(\Gamma)). \end{cases} \quad (\text{III.139})$$

Posons $B_{\tilde{S}} = B(0, \|\tilde{S}\|_{L^\infty(0, T, L^\infty(\Gamma))})$, alors :

$$|f'_s(c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}(t, x)) \phi(t, x)| \leq \sup_{B_{\tilde{S}}} |f'_s| |\phi(t, x)| \in L^1(0, T; \Gamma)$$

et la relation (III.139) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée, donc le premier terme de $T_{6,2}$ satisfait :

$$\int_0^T \int_\Gamma f'_s(c_{\partial\mathfrak{M}}^{\Delta t}) \phi(t, x) d\sigma(x) dt \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Gamma f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) \phi(t, x) d\sigma(x) dt. \quad (\text{III.140})$$

Il nous reste à étudier la convergence du second terme de $T_{6,2}$. La régularité de la fonction ϕ et la Proposition II.4 impliquent :

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{L}, n}^\phi &\leq \frac{|m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} - m_{\mathcal{L}}|}{m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} |\phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}})| + \frac{1}{\Delta t m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{L}} |\phi(t^{n+1}, x_{\mathcal{L}}) - \phi(t, x)| d\sigma(x) dt \\ &\leq C_{\phi, \Gamma} (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})). \end{aligned}$$

Donc, le Lemme III.16 et la Proposition III.26 permettent d'obtenir :

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} f'_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) R_{\mathcal{L}, n}^\phi \right| \leq C_{\phi, \Gamma} \sup_{B(0, C_{25} M_2)} |f'_s| T M_\Gamma (\Delta t + \text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \quad (\text{III.141})$$

Ainsi, en regroupant les convergences (III.140) et (III.141), la définition (III.138) du terme $T_{6,2}$ donne :

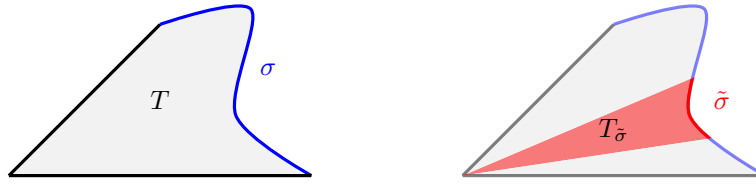
$$T_{6,2} \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Gamma f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) \phi(t, x) d\sigma(x) dt, \quad (\text{III.142})$$

et donc la définition (III.136) du terme T_6 et les convergences (III.137) et (III.142) permettent finalement d'obtenir :

$$T_6 \xrightarrow{\Delta t, \text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \int_0^T \int_\Gamma f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) \phi(t, x) d\sigma(x) dt. \quad (\text{III.143})$$

- Pour conclure la preuve, il suffit maintenant de regrouper les convergences (III.107), (III.113), (III.121), (III.131), (III.135) et (III.143) et l'équation (III.102), ainsi l'égalité suivante est vérifiée pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(T, \cdot) = 0$:

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega (\mathcal{A}_\Delta \nabla c(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) - \mu(t, x) \phi(t, x) + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c(t, x)) \phi(t, x)) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_\Gamma (-\mathcal{A}_{\partial t} c_{\Gamma}(t, x) \partial_t \phi(t, x) + \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} \nabla_\Gamma c_{\Gamma}(t, x) \cdot \nabla_\Gamma \phi(t, x) + \mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) \phi(t, x)) d\sigma(x) dt \\ &= \mathcal{A}_{\partial t} \int_\Gamma \text{Tr } c^0(x) \phi(0, x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Figure III.3: Le triangle à bord courbe T et l'un de ses sous-triangles

III.6 Démonstration du Lemme III.20

Dans cette section, nous revenons sur la démonstration de la partie du Lemme III.20 qui n'est pas classique. Nous précisons les hypothèses que doivent satisfaire le pseudo-triangle et l'arête courbe correspondante.

Les résultats de cette section font l'objet d'un article actuellement en cours de rédaction [BBN14] en collaboration avec P. Bousquet et F. Boyer.

On considère ici un (pseudo-)triangle T dont l'un des côtés est un morceau de courbe de classe C^1 appelé σ , voir Figure III.3. On suppose que T est étoilé par rapport au sommet opposé à σ .

Le résultat principal de cette section est le suivant

Théorème III.40

On suppose qu'il existe $\mu, \nu > 0$, tels que pour tout sous-arc $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, le sous-triangle $T_{\tilde{\sigma}}$ (voir figure III.3) correspondant vérifie

$$\mu \leq \frac{m_{T_{\tilde{\sigma}}}}{m_{\tilde{\sigma}}} \leq \nu. \quad (\text{III.144})$$

Alors, pour tout $p \in [1, +\infty]$, et tout $u \in W^{1,p}(T)$, nous avons

$$\left| \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} u - \frac{1}{m_T} \int_T u \right|^p \leq C(m_{\sigma} + \text{diam}(T))^p \frac{1}{m_T} \int_T |Du|^p,$$

où la constante C ne dépend que du rapport $\frac{\nu}{\mu}$.

Notons que, pour un T donné, l'existence d'une constante $C > 0$ vérifiant l'inégalité précédente est très claire (en appliquant par exemple le lemme de Bramble-Hilbert) mais il s'agit ici de déterminer de quelle manière elle dépend de la géométrie de ce triangle, et de σ en particulier.

Remarque III.41

Pour un vrai triangle plat T , la quantité $\frac{m_{T_{\tilde{\sigma}}}}{m_{\tilde{\sigma}}}$ ne dépend pas de $\tilde{\sigma}$ et vaut $\frac{m_T}{m_{\sigma}}$. On a donc en particulier $\mu = \nu$ et le rapport ν/μ vaut donc 1. Ce résultat redonne bien l'inégalité usuelle dans ce cadre, avec une constante C universelle.

Dans la suite, on note $Q =]0, 1[^2$ le carré unité de $\mathbb{R}^2$. Sans perte de généralité, on suppose que l'origine est située en le sommet de T opposé à σ . Ainsi, le triangle T peut s'écrire sous la forme

$$T = \{r\gamma(\theta) : r \in]0, 1[, \theta \in]0, 1[\},$$

où γ est une paramétrisation de σ que l'on supposera normalisée de sorte que $|\gamma'(\theta)| = m_{\sigma}$ pour tout $\theta \in]0, 1[$. On suppose de plus l'orientation choisie de telle sorte que $\gamma \wedge \gamma' \geq 0$ (le caractère étoilé de T par rapport à son sommet implique que cette quantité ne peut changer de signe).

Remarque III.42

L'hypothèse (III.144) implique la propriété suivante

$$\mu \leq \gamma(\theta) \wedge \gamma'(\theta) \leq \nu, \quad \forall \theta \in [0, 1]. \quad (\text{III.145})$$

En effet, pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, si on note $\tilde{\sigma} = \gamma([a, b])$, alors nous avons

$$m_{\tilde{\sigma}} = (b - a)m_{\sigma}, \text{ et } m_{T_{\tilde{\sigma}}} = m_{\sigma} \int_a^b \gamma(\theta) \wedge \gamma'(\theta) d\theta,$$

ainsi d'après (III.144), nous avons

$$\mu \leq \frac{\int_a^b \gamma(\theta) \wedge \gamma'(\theta) d\theta}{b-a} \leq \nu,$$

ce qui donne (III.145) en faisant tendre b vers a .

Remarquons tout d'abord qu'il suffit bien sûr, d'après l'inégalité de Jensen, de montrer le cas $p = 1$. Nous allons commencer par montrer que le résultat attendu est la conséquence de l'existence d'un difféomorphisme convenable entre T et le carré unité. Notons que l'existence d'un tel difféomorphisme est assuré par un résultat général de [DM90] mais qu'il nous faut ici être capable d'estimer les dérivées de ce difféomorphisme en fonction de la géométrie de T . C'est la raison pour laquelle nous reprenons de façon explicite la démarche de [DM90] qui nous permet de contrôler toutes les constantes mises en jeu dans les estimations.

Lemme III.43

Supposons qu'il existe un C^1 homéomorphisme $\Phi : Q \rightarrow T$ tel que

1. $\Phi(0, \theta) = (0, 0)$,
2. $\Phi(1, \theta) = \gamma(\theta)$,
3. $\text{Jac } \Phi(s, \theta) = 2m_T s$.

Alors pour tout $u \in W^{1,1}(T)$, nous avons

$$\frac{1}{m_\sigma} \int_\sigma u - \frac{1}{m_T} \int_T u = \frac{1}{2m_T} \int_T Du(x, y) [s \partial_s \Phi(s, \theta)]_{(s, \theta) = \Phi^{-1}(x, y)} dx dy.$$

Démonstration : Par un argument usuel de densité, il suffit de supposer que $u \in C^1(\bar{T})$. On pose alors

$$v(s, \theta) = u \circ \Phi(s, \theta) \text{Jac } \Phi(s, \theta),$$

et pour tout $(t, \theta) \in Q$, nous écrivons

$$v(1, \theta) - v(t, \theta) = \int_t^1 \partial_s v(s, \theta) ds.$$

Il vient, grâce aux hypothèses sur Φ ,

$$2m_T u(\gamma(\theta)) - u \circ \Phi(t, \theta) \text{Jac } \Phi(t, \theta) = \int_t^1 (\partial_s(u \circ \Phi) \text{Jac } \Phi + 2m_T(u \circ \Phi)) ds.$$

En intégrant cette identité sur Q et par changement de variables, nous obtenons

$$2 \frac{m_T}{m_\sigma} \int_\sigma u - \int_T u = \int_0^1 d\theta \int_0^1 dt \int_t^1 (\partial_s(u \circ \Phi) \text{Jac } \Phi + 2m_T(u \circ \Phi)) ds. \quad (\text{III.146})$$

On applique alors le théorème de Fubini

$$\int_0^1 d\theta \int_0^1 dt \int_t^1 (\partial_s(u \circ \Phi) \text{Jac } \Phi + 2m_T(u \circ \Phi)) ds = \int_Q s (\partial_s(u \circ \Phi) \text{Jac } \Phi + 2m_T(u \circ \Phi)) ds d\theta.$$

Comme nous avons $\text{Jac } \Phi(s, \theta) = 2m_T s$, le même changement de variable donne

$$\int_Q s (\partial_s(u \circ \Phi) \text{Jac } \Phi + 2m_T(u \circ \Phi)) ds d\theta = \int_T Du(x, y) [s \partial_s \Phi(s, \theta)]_{(s, \theta) = \Phi^{-1}(x, y)} dx dy + \int_T u.$$

Cette égalité jointe à (III.146) fournit le résultat. ■

Dans le cas où T est un vrai triangle, c'est-à-dire que σ est un segment droit, on observe que l'application

$$\phi_2 : (s, \theta) \in \bar{Q} \rightarrow s\gamma(\theta) \in \bar{T},$$

vérifie les hypothèses du lemme précédent. On retrouve alors la preuve usuelle de l'inégalité recherchée, voir par exemple [EGH00].

Dans le cas général où σ est courbe, nous avons

$$\text{Jac } \phi_2(s, \theta) = s\gamma(\theta) \wedge \gamma'(\theta),$$

et cette quantité n'est pas indépendante de θ . On ne peut donc pas prendre $\Phi = \phi_2$. On va donc chercher à composer ϕ_2 avec des difféomorphismes du carré unité de telle sorte que nous vérifions les bonnes propriétés, voir la Figure III.4.

Pour simplifier l'écriture, nous définissons g par

$$g : (s, \theta) \in \overline{Q} \mapsto |\text{Jac } \phi_2(s, \theta)| = s|\gamma \wedge \gamma'|(\theta).$$

Nous construisons alors un premier difféomorphisme ϕ_1 de Q de sorte que $\phi_2 \circ \phi_1$ satisfasse les deux premières hypothèses du Lemme III.43 et une version plus faible (intégrée par rapport à s) de la troisième hypothèse.

Lemme III.44

Il existe un C^1 homéomorphisme $\phi_1 : \overline{Q} \rightarrow \overline{Q}$ tel que

1. Pour tout $x \in \partial Q$, $\phi_1(x) = x$,
2. Pour tout $\theta \in (0, 1)$,

$$\int_0^1 \text{Jac}(\phi_2 \circ \phi_1)(s, \theta) ds = \int_0^1 g \circ \phi_1(s, \theta) \text{Jac } \phi_1(s, \theta) ds = m_T. \quad (\text{III.147})$$

Démonstration : Soit

$$\varepsilon = \frac{\mu}{10\nu} \quad (\text{III.148})$$

et $\zeta \in \mathcal{C}_c^\infty(0, 1)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1 + \varepsilon$, $|\zeta'|_{L^\infty} \leq \frac{10}{\varepsilon}$ et

$$\int_0^1 \zeta = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 |\zeta - 1| < \varepsilon. \quad (\text{III.149})$$

Nous introduisons alors l'application

$$G : (a, b) \mapsto \int_0^1 s \int_0^{a+\zeta(s)b} |\gamma \wedge \gamma'|(\theta) d\theta ds.$$

Alors G est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble $\{(a, b) : 0 \leq a \leq 1, \frac{-a}{1+\varepsilon} \leq b \leq \frac{1-a}{1+\varepsilon}\}$. Par ailleurs, nous avons

$$\partial_a G(a, b) = \int_0^1 |\gamma \wedge \gamma'| (a + \zeta(s)b) s ds$$

$$\partial_b G(a, b) = \int_0^1 |\gamma \wedge \gamma'| (a + \zeta(s)b) \zeta(s) s ds.$$

Par (III.145), il vient

$$\partial_b G(a, b) \geq \mu \int_0^1 \zeta(s) s ds > 0. \quad (\text{III.150})$$

Montrons maintenant que

$$G\left(a, \frac{-a}{1+\varepsilon}\right) \leq m_T a. \quad (\text{III.151})$$

En effet, par (III.145), nous avons

$$G\left(a, \frac{-a}{1+\varepsilon}\right) \leq \nu \int_0^1 s \left(a - \frac{a}{1+\varepsilon} \zeta(s)\right) ds \leq \frac{\nu a}{1+\varepsilon} \int_0^1 (1 + \varepsilon - \zeta(s)) ds.$$

Par (III.149), cela implique

$$G\left(a, \frac{-a}{1+\varepsilon}\right) \leq \frac{\nu a \varepsilon}{1+\varepsilon} \leq \nu a \varepsilon.$$

Comme

$$m_T = \frac{1}{2} \int_0^1 |\gamma \wedge \gamma'|(\theta) d\theta \geq \frac{\mu}{2},$$

nous déduisons de (III.148) que

$$G\left(a, \frac{-a}{1+\varepsilon}\right) \leq m_T a,$$

ce qui prouve la propriété attendue.

De la même façon, nous pouvons montrer que

$$\int_0^1 s ds \int_{a+\zeta(s)\frac{1-a}{1+\varepsilon}}^1 |\gamma \wedge \gamma'|(\theta) d\theta \leq m_T(1-a).$$

Ceci peut s'écrire

$$G(1,0) - G\left(a, \frac{1-a}{1+\varepsilon}\right) \leq m_T(1-a),$$

et comme

$$G(1,0) = \int_0^1 s ds \int_0^1 |\gamma \wedge \gamma'| = m_T,$$

nous déduisons que

$$G\left(a, \frac{1-a}{1+\varepsilon}\right) \geq m_T a. \quad (\text{III.152})$$

En utilisant (III.150), (III.151) et (III.152) nous voyons que pour tout $a \in [0, 1]$, il existe un unique $w(a) \in [-a/(1+\varepsilon), (1-a)/(1+\varepsilon)]$ tel que

$$G(a, w(a)) = m_T a.$$

Par le théorème des fonctions implicites, la fonction w ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $[0, 1]$ et vérifie

$$\partial_a G(a, w(a)) + \partial_b G(a, w(a))w'(a) = m_T. \quad (\text{III.153})$$

Comme $G(0,0) = 0$ et $G(1,0) = m_T$, nous avons $w(0) = 0 = w(1)$.

Montrons maintenant que pour tout $s \in (0, 1)$, et tout $a \in (0, 1)$, nous avons

$$1 + \zeta(s)w'(a) > 0. \quad (\text{III.154})$$

Pour cela, il suffit de montrer que $\partial_b G(a, w(a))(1 + \zeta(s)w'(a)) > 0$. Par (III.153), cela revient à montrer que

$$\partial_b G(a, w(a)) + \zeta(s)(-\partial_a G(a, w(a)) + m_T) > 0,$$

ce qui est à nouveau équivalent à

$$\partial_b G(a, w(a)) - \partial_a G(a, w(a)) + \zeta(s)m_T + (1 - \zeta(s))\partial_a G(a, w(a)) > 0. \quad (\text{III.155})$$

Notons que

$$\partial_b G(a, w(a)) - \partial_a G(a, w(a)) = \int_0^1 |\gamma \wedge \gamma'| (a + \zeta(s)w(a)) (\zeta(s) - 1) s ds \geq -\nu \int |\zeta - 1| \geq -\nu\varepsilon.$$

Dans la dernière inégalité, nous avons utilisé (III.149). De plus, comme $0 \leq \zeta \leq 1 + \varepsilon$, il vient

$$\zeta(s)m_T + (1 - \zeta(s))\partial_a G(a, w(a)) \geq \min(\partial_a G(a, w(a)), (1 + \varepsilon)m_T - \varepsilon\partial_a G(a, w(a))).$$

Comme $\mu/2 \leq \partial_a G(a, w(a)) \leq \nu/2$ et $m_T \geq \mu/2$, nous obtenons

$$\zeta(s)m_T + (1 - \zeta(s))\partial_a G(a, w(a)) \geq \frac{\mu}{2} - \varepsilon\frac{\nu}{2}.$$

Grâce à (III.148), ceci implique (III.155) et donc la propriété souhaitée (III.154).

Nous posons maintenant

$$\phi_1(s, \theta) = (s, \theta + \zeta(s)w(\theta)),$$

et observons que ϕ_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $\overline{Q}$ et vérifie $\text{Jac } \phi_1(s, \theta) = 1 + \zeta(s)w'(\theta) > 0$. Comme pour tout $s \in [0, 1]$, la fonction $\theta \mapsto \theta + \zeta(s)w(\theta)$ est continue croissante, elle envoie $[0, 1]$ sur $[0, 1]$. Ainsi, ϕ_1 est un difféomorphisme de $\overline{Q}$ sur $\overline{Q}$. De plus, ϕ_1 coïncide avec l'identité sur le bord du carré ∂Q . Il reste à prouver (III.147).

Soit $a \in [0, 1]$. Par définition de w et g , il vient

$$\int_0^1 ds \int_0^{a+\zeta(s)w(a)} g(s, \theta) d\theta = m_T a.$$

La définition de ϕ_1 , donne à son tour,

$$\int_{\phi_1((0,1) \times (0,a))} g = m_T a.$$

On effectue alors un changement de variables pour obtenir

$$\int_0^a d\theta \int_0^1 g \circ \phi_1(s, \theta) \text{Jac } \phi_1(s, \theta) ds = m_T a.$$

Ceci implique que pour tout $\theta \in (0, 1)$,

$$\int_0^1 g \circ \phi_1(s, \theta) \text{Jac } \phi_1(s, \theta) ds = m_T,$$

et conclut la preuve du lemme. ■

Remarque III.45

Cette preuve montre que pour tout $(s, \theta) \in Q$,

$$\partial_b G(a, w(a))(1 + \zeta(s)w'(a)) \geq \frac{\mu}{3}.$$

De la même façon, nous pouvons prouver que

$$\partial_b G(a, w(a))(1 + \zeta(s)w'(a)) \leq \nu.$$

On écrit alors

$$\mu \int_0^1 \zeta(s)s ds \leq \partial_b G(a, b) \leq \nu \int_0^1 \zeta(s)s ds,$$

et on peut estimer le membre de droite ν alors que

$$\mu \int_0^1 \zeta(s)s ds \geq \mu \left(\int_0^1 s ds - \int_0^1 |\zeta(s) - 1| ds \right) \geq \mu \left(\int_0^1 s ds - \varepsilon \right) \geq \frac{\mu}{3}.$$

Ainsi, nous obtenons

$$\frac{\mu}{3} \leq \partial_b G(a, b) \leq \nu$$

et donc nous avons estimé $1 + \zeta w'$ de la façon suivante

$$\frac{\mu}{3\nu} \leq 1 + \zeta(s)w'(a) \leq 3\frac{\nu}{\mu}. \quad (\text{III.156})$$

On termine la construction du difféomorphisme Φ que l'on va chercher sous la forme $\phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_0$. Pour simplifier les écritures, nous introduisons l'application $g_1 : Q \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} g_1(s, \theta) &= \text{Jac } (\phi_2 \circ \phi_1)(s, \theta) \\ &= g \circ \phi_1(s, \theta) \text{Jac } \phi_1(s, \theta) \\ &= s|\gamma \wedge \gamma'|(\theta + \zeta(s)w(\theta))(1 + \zeta(s)w'(\theta)), \end{aligned}$$

dont on note qu'elle vérifie pour tous $s \in (0, 1]$, $\theta \in [0, 1]$, $g_1(s, \theta) > 0$.

Lemme III.46

Il existe un homéomorphisme $\phi_0 : \overline{Q} \rightarrow \overline{Q}$ de classe $\mathcal{C}^1$ dans Q et tel que

1. Pour tout $\theta \in (0, 1)$, $\phi_0(0, \theta) = (0, \theta)$ et $\phi_0(1, \theta) = (1, \theta)$,
2. Pour tout $(s, \theta) \in Q$,

$$\text{Jac}(\phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_0)(s, \theta) = g_1 \circ \phi_0(s, \theta) \text{Jac} \phi_0(s, \theta) = 2m_T s. \quad (\text{III.157})$$

Démonstration : Pour tout $(s, \theta) \in \overline{Q}$, nous introduisons $v(s, \theta)$ l'unique élément de $[0, 1]$ tel que

$$\int_0^{v(s, \theta)} g_1(s', \theta) ds' = m_T s^2. \quad (\text{III.158})$$

L'application v est bien définie car $g_1(s, \theta) > 0$ pour tout $s \in (0, 1]$, $\theta \in [0, 1]$ et de surcroît

$$\int_0^1 g_1(s', \theta) ds' = m_T.$$

C'est d'ailleurs exactement pour cette raison que nous avons construit g_1 comme dans le Lemme III.44. Observons que $v(0, \theta) = 0$ et $v(1, \theta) = 1$. Par le théorème des fonctions implicites, v est de classe $\mathcal{C}^1$ dans $(0, 1] \times [0, 1]$ et vérifie $g_1(v(s, \theta), \theta) \partial_s v(s, \theta) = 2m_T s$; ou encore

$$v(s, \theta) |\gamma \wedge \gamma'| (\theta + \zeta \circ v(s, \theta) w(\theta)) (1 + \zeta \circ v(s, \theta) w'(\theta)) \partial_s v(s, \theta) = 2m_T s. \quad (\text{III.159})$$

En particulier, pour tout $(s, \theta) \in Q$, $\partial_s v(s, \theta) > 0$.

Nous déduisons de la Remarque III.45 que pour tout $(s, \theta) \in Q$,

$$\frac{\mu^2}{3\nu} s \leq g_1(s, \theta) \leq \frac{3\nu^2}{\mu} s.$$

Comme $\mu/2 \leq m_T \leq \nu/2$, nous déduisons de (III.158) que

$$\frac{\mu}{\sqrt{3}\nu} s \leq v(s, \theta) \leq \frac{\sqrt{3}\nu}{\mu} s. \quad (\text{III.160})$$

On peut dès lors poser

$$\phi_0(s, \theta) = (v(s, \theta), \theta).$$

On voit clairement que ϕ_0 est bien un homéomorphisme de $\overline{Q}$ sur $\overline{Q}$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ dans Q et que, de plus, $\phi_0(0, \theta) = (0, \theta)$, $\phi_0(1, \theta) = (1, \theta)$ et $\text{Jac} \phi_0(s, \theta) = \partial_s v(s, \theta)$. En dérivant la formule (III.158), on obtient

$$2sm_T = g_1(v(s, \theta), \theta) \partial_s v(s, \theta) = g_1 \circ \phi_0(s, \theta) \text{Jac} \phi_0(s, \theta),$$

et la preuve est complète. ■

Remarque III.47

Nous déduisons de (III.159) et (III.156), les estimations plus précises suivantes

$$|v(s, \theta) \partial_s v(s, \theta)| \leq \frac{3\nu^2}{\mu^2} s,$$

qui, avec (III.160), impliquent que

$$|\partial_s v(s, \theta)| \leq \frac{3\sqrt{3}\nu^3}{\mu^3}.$$

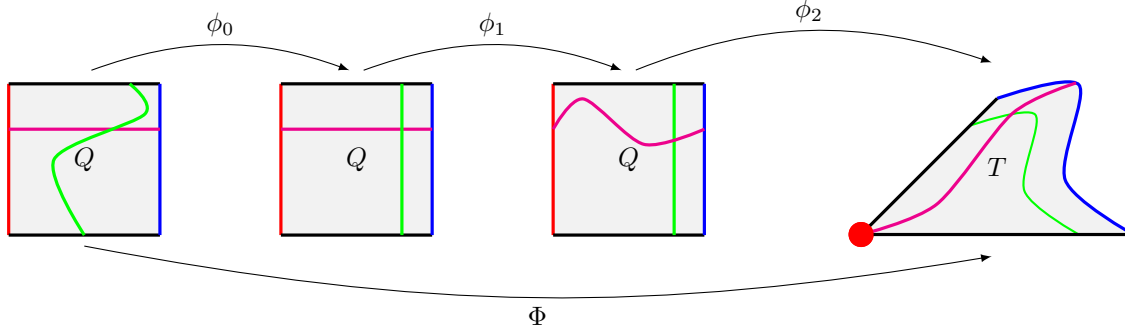
Les lemmes III.44, III.46 montrent bien que, comme annoncé, l'application

$$\Phi = \phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_0,$$

vérifie bien toutes les hypothèses du lemme III.43. La construction est résumée dans la figure III.4:

- Le côté $\{s = 0\}$ de Q (en rouge sur la figure) est préservé point par point par ϕ_0 et ϕ_1 et envoyé sur le sommet de T (en rouge également) par ϕ_2 .

- Le côté $\{s = 1\}$ de Q (en bleu sur la figure) est préservé point par point par ϕ_0 et ϕ_1 et envoyé sur σ par ϕ_2 .
- Les segments horizontaux $\{\theta = \text{cte}\}$ de Q (en violet) sont globalement préservés par ϕ_0 puis déformés par ϕ_1 et ϕ_2 .
- Les segments verticaux $\{s = \text{cte}\}$ (en vert) sont globalement préservés par ϕ_1 et déformés par ϕ_0^{-1} et ϕ_2 .

Figure III.4: La construction du difféomorphisme Φ

Pour terminer la preuve du Théorème III.40, il reste à établir l'estimation suivante.

Lemme III.48

Il existe un $C > 0$ universel tel que

$$|\partial_s \Phi(s, \theta)| \leq C \frac{\nu^3}{\mu^3} (\text{diam}(T) + m_\sigma).$$

Démonstration : Par définition, nous avons

$$\Phi(s, \theta) = v(s, \theta) \gamma(\theta + \zeta \circ v(s, \theta) w(\theta)).$$

Ainsi, nous pouvons calculer

$$\partial_s \Phi(s, \theta) = (\partial_s v(s, \theta)) \gamma(\theta + \zeta \circ v(s, \theta) w(\theta)) + v(s, \theta) \partial_s v(s, \theta) \zeta'(v(s, \theta)) w(\theta) \gamma'(\theta + \zeta \circ v(s, \theta) w(\theta)).$$

Par construction, $|\zeta'|_{L^\infty} \leq 10/\varepsilon = 100\nu/\mu$ et $|w|_{L^\infty} \leq 1$. Nous déduisons alors, avec la Remarque III.47, que

$$|\partial_s \Phi(s, \theta)| \leq C \frac{\nu^3}{\mu^3} (|\gamma|_{L^\infty} + m_\sigma) \leq C \frac{\nu^3}{\mu^3} (\text{diam}(T) + m_\sigma).$$

■

III.7 Quelques remarques sur l'implémentation

En utilisant les matrices définies dans les Sections I.6 et II.3, nous pouvons écrire le Problème III.6 sous "forme matricielle" (appelé ainsi par abus de langage mais notons tout de même que ce problème n'est pas linéaire à cause du terme $d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1})$) de la manière suivante.

Problème III.49

Soit $c_{\mathcal{T}}^n \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ donné. Trouver $(c_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}$ tels que,

$$\begin{cases} M_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^{n+1} + \Gamma_b \Delta t A_{\mathfrak{M}} \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = M_{\mathfrak{M}} c_{\mathfrak{M}}^n, \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathfrak{M}, \mathcal{T}} c_{\mathcal{T}}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathfrak{M}} d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}) - M_{\mathfrak{M}} \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = 0, \\ \mathcal{A}_{\partial t} M_{\partial \mathfrak{M}}^{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{\Delta_{\Gamma}} L_{\partial \mathfrak{M}}^{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\partial \mathfrak{M}}^{\Gamma} d^{f_s}(c_{\partial \mathfrak{M}}^n, c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}) + \mathcal{A}_{\Delta} N_{\partial \mathfrak{M}, \mathcal{T}} c_{\mathcal{T}}^{n+1} = \mathcal{A}_{\partial t} M_{\partial \mathfrak{M}}^{\Gamma} c_{\partial \mathfrak{M}}^n. \end{cases}$$

Comme dans la Section I.6, du fait des discrétisations des termes non-linéaires, nous utilisons une méthode de Newton à chaque itération. A l'itération $n + 1$, la solution $(c_{\mathcal{T}}^n, \mu_{\mathcal{M}}^n)$ du Problème III.49 à l'instant t^n est connu. Nous cherchons $(c_{\mathcal{T}}^{n+1}, \mu_{\mathcal{M}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}}$ solution de $F(X, Y) = 0$ avec $F : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{M}} \times \mathbb{R}^{\partial \mathcal{M}}$ définie par :

$$F(X, Y) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{M}} X_{\mathcal{M}} + \Gamma_b \Delta t A_{\mathcal{M}} Y - M_{\mathcal{M}} c_{\mathcal{M}}^n \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathcal{M}, \mathcal{T}} X + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathcal{M}} d^{f_b}(c_{\mathcal{M}}^n, X_{\mathcal{M}}) - M_{\mathcal{M}} Y \\ \mathcal{A}_{\partial t} M_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma} X_{\partial \mathcal{M}} + \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} L_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma} X_{\partial \mathcal{M}} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma} d^{f_s}(c_{\partial \mathcal{M}}^n, X_{\partial \mathcal{M}}) + \mathcal{A}_{\Delta} N_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}} X - \mathcal{A}_{\partial t} M_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma} c_{\partial \mathcal{M}}^n \end{pmatrix},$$

avec $X = (X_{\mathcal{M}}, X_{\partial \mathcal{M}})$.

Le principe de la méthode de Newton est le même que celui décrit dans la Section I.6.

Algorithme III.50 (Méthode de Newton pour les CL dynamiques)

• *Initialisation :*

- $u_{\mathcal{T}}^0 = c_{\mathcal{T}}^n$ et $v_{\mathcal{M}}^0 = \mu_{\mathcal{M}}^n$;
- Critère d'arrêt : eps ;
- Erreur : $\text{err}(0) = 1$.

• *Algorithme : Tant que $\text{err}(i) > \text{eps}$, nous calculons :*

$$w^{i+1} = w^i - DF^{-1}(w^i)F(w^i) \quad \text{et} \quad \text{err}(i+1) = \frac{\|w^{i+1} - w^i\|}{\|w^i\|}$$

où w^i est le vecteur $\begin{pmatrix} u_{\mathcal{T}}^i \\ v_{\mathcal{M}}^i \end{pmatrix}$.

• *Lorsque nous obtenons $i = i_{n+1}$ tel que $\text{err}(i_{n+1}) < \text{eps}$ nous posons $c_{\mathcal{T}}^{n+1} = u_{\mathcal{T}}^{i_{n+1}}$ et $\mu_{\mathcal{M}}^{n+1} = v_{\mathcal{M}}^{i_{n+1}}$.*

Remarque III.51

Le calcul du terme $DF^{-1}(w^i)F(w^i)$ se fait en résolvant le système linéaire $DF(w^i)z^i = F(w^i)$ avec

$$DF(w^i) = \begin{pmatrix} M_{\mathcal{M}, \mathcal{T}} & \Gamma_b \Delta t A_{\mathcal{M}} \\ \mathcal{A}_{\Delta} A_{\mathcal{M}, \mathcal{T}} + \mathcal{A}_{f_b} M_{\mathcal{M}, \mathcal{T}} Dd^{f_b}(u_{\mathcal{M}}^i) & -M_{\mathcal{M}} \\ \mathcal{A}_{\partial t} M_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma} + \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} L_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma} Dd^{f_s}(u_{\partial \mathcal{M}}^i) + \mathcal{A}_{\Delta} N_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}} & 0_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{M}} \end{pmatrix},$$

où $0_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{M}} \in \mathcal{M}_{N_{\partial \mathcal{M}}, N_{\mathcal{M}}}$ est la matrice nulle et $Dd^{f_b}(u_{\mathcal{M}}^i)$ (respectivement $Dd^{f_s}(u_{\partial \mathcal{M}}^i)$) est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont égaux à la dérivée de d^{f_b} (respectivement de d^{f_s}) par rapport à la seconde variable au point $(c_{\mathcal{M}}^n, u_{\mathcal{M}}^i)$ (respectivement $(c_{\partial \mathcal{M}}^n, u_{\partial \mathcal{M}}^i)$). Nous avons noté $M_{\mathcal{M}, \mathcal{T}}$, $M_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma}$ et $L_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma}$ les matrices :

$$M_{\mathcal{M}, \mathcal{T}} = (M_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}, \partial \mathcal{M}}), \quad M_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma} = (M_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma}, 0_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{M}}), \quad \text{et} \quad L_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{T}}^{\Gamma} = (L_{\partial \mathcal{M}}^{\Gamma}, 0_{\partial \mathcal{M}, \mathcal{M}})$$

III.8 Résultats numériques

Dans cette section nous présentons quelques illustrations numériques. Nous commençons par donner des estimations d'erreur numériques qui permettent de valider le schéma VF4. Ensuite, nous présentons quelques résultats qualitatifs qui permettent de comparer ce schéma avec ceux présentés dans la littérature. Nous observons également l'influence des différents paramètres apparaissant dans la condition aux limites dynamique sur la solution obtenue. Lorsque nous ne le précisons pas, nous utiliserons une discrétisation semi-implicite des termes non-linéaires qui est inconditionnellement stable et nous choisirons comme potentiel volumique de Cahn-Hilliard la fonction double-puits $f_b(c) = c^2(1 - c)^2$.

Les maillages utilisés sont constitués de triangles conformes. Nous choisissons comme centre x_{κ} de la maille κ , le centre du cercle circonscrit au triangle $\underline{\kappa}$. Si $\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}$, $y_{\mathcal{L}}$ est alors le milieu de la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$.

III.8.1 Estimations d'erreur

Nous comparons ici la solution discrète obtenue avec le schéma VF4 avec la solution exacte du modèle de Cahn-Hilliard. Cependant, nous ne connaissons pas de solution non-triviale de l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux

limites dynamiques. Nous devons donc modifier le modèle (III.4). Nous construisons une solution exacte en ajoutant un terme source g_b dans l'équation (III.4a) et un autre g_s dans la condition aux limites (III.4c). De plus, le potentiel chimique satisfait désormais des conditions aux limites de Neumann non-homogène.

Le problème s'écrit alors de la manière suivante. Trouver la concentration de l'une des deux phases $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu + g_b; & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \mu = -\mathcal{A}_\Delta \Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c); & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \mathcal{A}_{\partial t} \partial_t c_{|\Gamma} = \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \Delta_\Gamma c_{|\Gamma} - \mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{|\Gamma}) - \mathcal{A}_\Delta \partial_n c + g_s; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \\ \partial_n \mu = g_\mu \neq 0; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \\ c(0, \cdot) = c^0; & \text{dans } \Omega; \end{cases}$$

Le domaine Ω est le cercle unité, nous pouvons donc calculer facilement les coordonnées exactes des centres $x_\mathcal{L}$. Pour un temps fixé $t^n > 0$, pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ (respectivement pour tout $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$) nous pouvons comparer la solution exacte $c(t^n, x_\mathcal{K})$ (respectivement $c(t^n, x_\mathcal{L})$) avec la solution approchée $c_\mathcal{K}^n$ (respectivement $c_\mathcal{L}^n$).

Nous choisissons comme solution exacte la fonction $c(t, (x, y)) = \frac{1}{2}(1 + \tanh(5(x + t)))$ et nous calculons, au temps $T = N\Delta t = 0.5$, les normes suivantes

$$\frac{\|e_\mathfrak{M}^T\|_{L^2(\Omega)}}{\|c_\mathfrak{M}^T\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \frac{\|e_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{L^2(\Gamma)}}{\|c_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{L^2(\Gamma)}}, \quad \frac{|e_\mathcal{T}^T|_{1,\mathcal{T}}}{|c_\mathcal{T}^T|_{1,\mathcal{T}}} \quad \text{et} \quad \frac{|e_{\partial\mathfrak{M}}^T|_{1,\partial\mathfrak{M}}}{|c_{\partial\mathfrak{M}}^T|_{1,\partial\mathfrak{M}}},$$

où nous avons noté $e_\mathcal{T}^T = (e_\mathfrak{M}^T, e_{\partial\mathfrak{M}}^T)$ et $c_\mathcal{T}^T = (c_\mathfrak{M}^T, c_{\partial\mathfrak{M}}^T)$ avec :

$$e_\mathfrak{M}^T = (c(T, x_\mathcal{K}) - c_\mathcal{K}^N)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, \quad e_{\partial\mathfrak{M}}^T = (c(T, x_\mathcal{L}) - c_\mathcal{L}^N)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad c_\mathfrak{M}^T = (c(T, x_\mathcal{K}))_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, \quad c_{\partial\mathfrak{M}}^T = (c(T, x_\mathcal{L}))_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}.$$

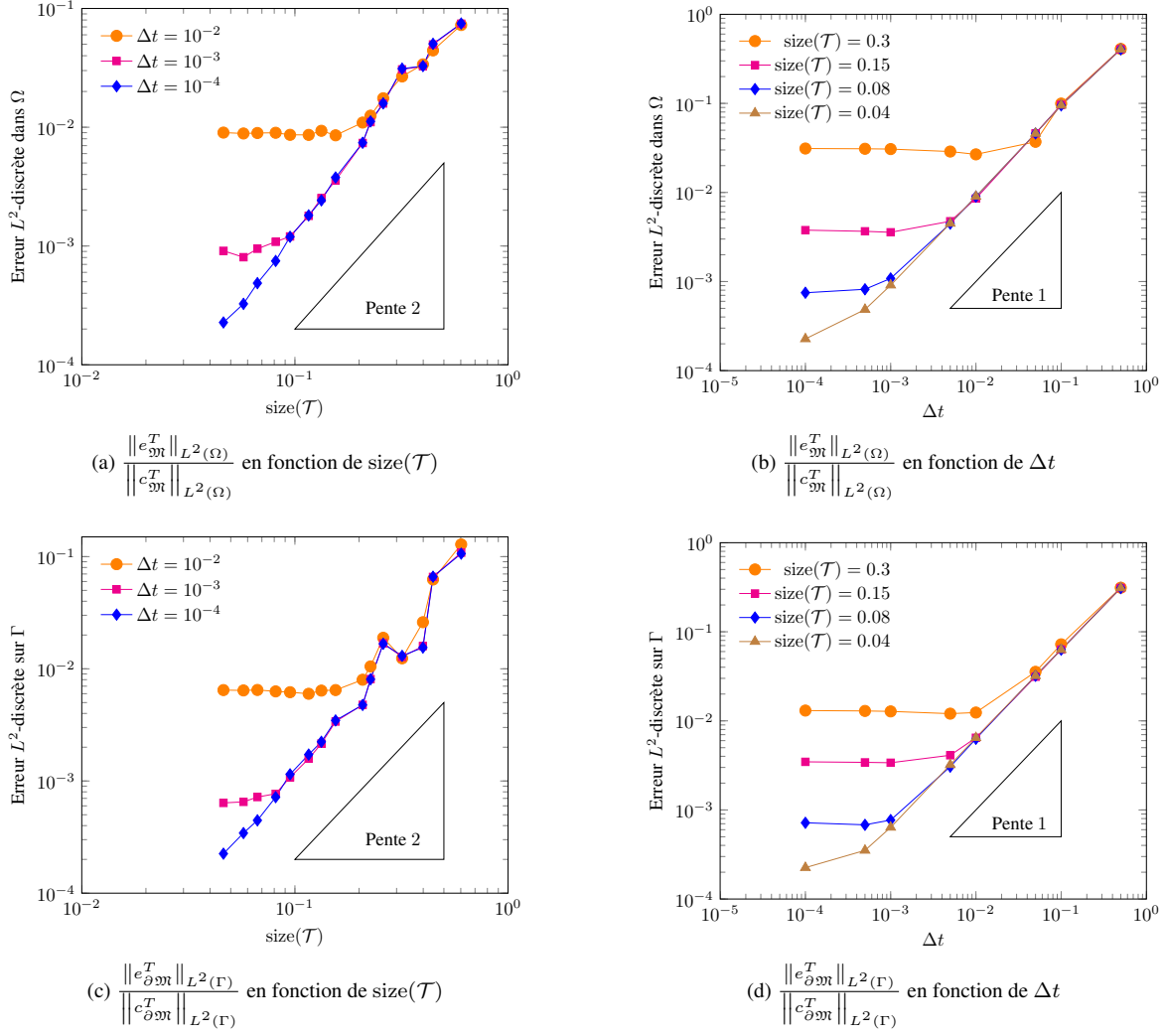
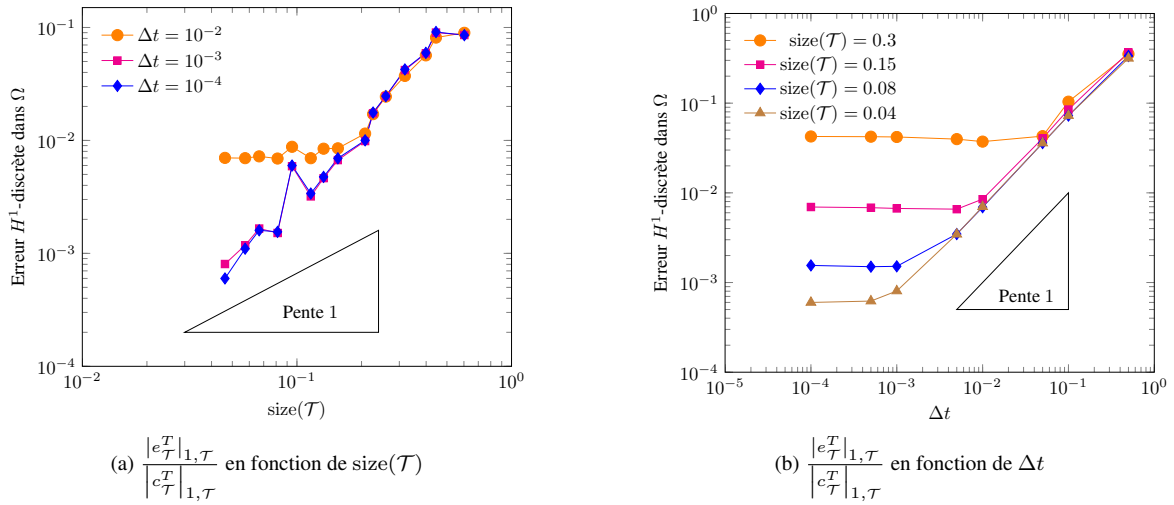
Nous traçons ensuite (cf Figures III.5 et III.6) ces erreurs relatives

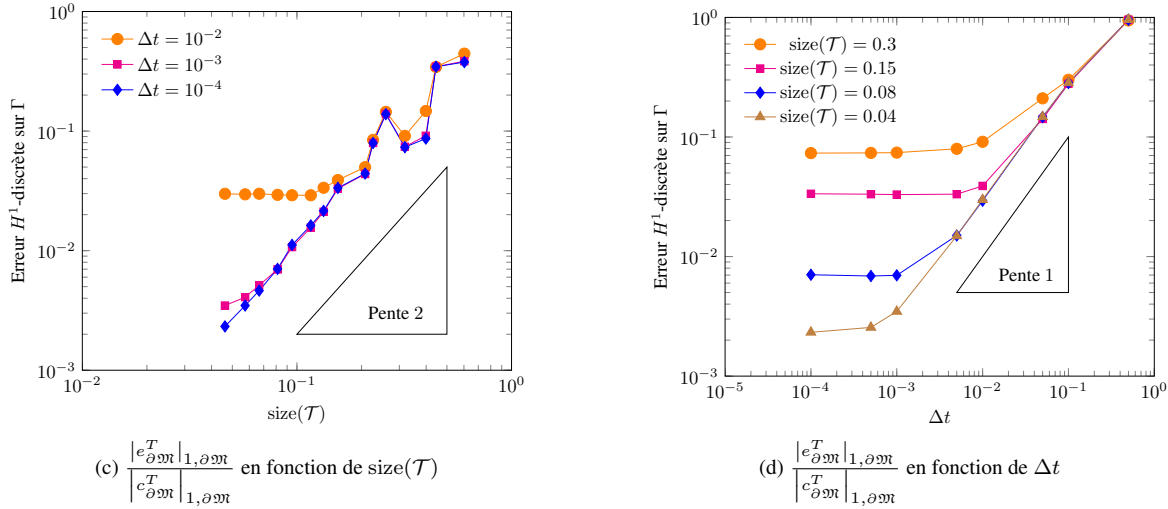
- lorsque le pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0 et que le pas de temps est fixé;
- lorsque le pas de temps Δt tend vers 0 et que le pas du maillage est fixé.

Nous choisissons les paramètres volumiques suivants $\varepsilon = 0.5$, $\Gamma_b = \sigma_b = 0.1$ et les paramètres surfaciques $\Gamma_s = 10$, $\sigma_s = 5$ avec $f_b(c) = f_s(c) = c^2(1 - c)^2$ comme potentiels de Cahn-Hilliard.

Comme nous nous y attendions, dans chaque cas nous observons une convergence d'ordre 1 en temps au-dessus d'un certain seuil qui dépend du pas du maillage (cf Figures III.5b, III.5d, III.6b et III.6d). En ce qui concerne la convergence en espace, au-dessus d'un certain seuil dépendant du pas de temps, nous observons :

- Un ordre 2 en norme L^2 -discrète à la fois dans Ω et sur Γ (cf Figures III.5a et III.5c) : ce phénomène de super-convergence n'est pas étonnant car il apparaît également pour le problème de Laplace pour le schéma VF4 (et nous l'avons également observé dans le Chapitre II dans le cas de l'équation de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel). La démonstration d'un point de vue théorique de cette convergence d'ordre 2 reste à ce jour un problème ouvert.
- Une convergence d'ordre 1 en norme H^1 -discrète dans Ω (cf Figure III.6a) ce qui est bien ce à quoi nous nous attendions. En fait lorsque le pas du maillage est grossier nous avons l'impression d'obtenir de l'ordre 2 mais lorsque nous raffinons le maillage l'ordre observé se rapproche de plus en plus de l'ordre 1. Pour mieux visualiser cet ordre 1 il faudrait raffiner encore le pas du maillage mais les limitations du logiciel Scilab (dues au manque de mémoire disponible) nous en empêche.
- Une convergence d'ordre 2 en norme H^1 -discrète sur Γ (cf Figure III.6c). Nous nous attendions à observer de l'ordre 1 mais comme dans le cas du Chapitre II un phénomène de super-convergence apparaît ici qui doit sûrement être dû là encore à la géométrie particulière des maillages que construit le logiciel Gmsh (en tout cas sur Γ).

Figure III.5: Erreurs relatives en norme L^2 

Figure III.6: Erreurs relatives en norme H^1 -discrète

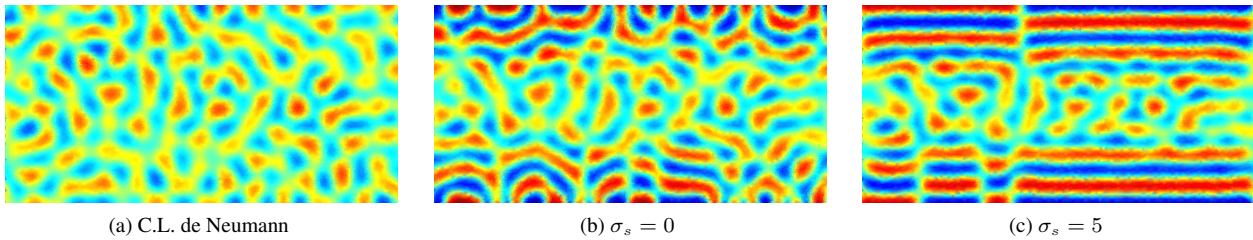
III.8.2 Décomposition spinodale

Dans cette section, nous observons l'influence des conditions aux limites dynamiques sur la dynamique de séparation de phase. La donnée initiale est une concentration aléatoire comprise entre 0.49 et 0.51. Notons que lorsque nous utilisons un maillage identique pour deux cas tests différents la concentration initiale est identique.

Influence du terme de diffusion de surface

Nous allons montrer ici l'influence de l'opérateur de Laplace-Beltrami sur la dynamique de séparation de phase. Le potentiel surfacique de Cahn-Hilliard sera égal au potentiel volumique : $f_s(c) = c^2(1 - c)^2$.

Pour pouvoir comparer ces résultats avec ceux obtenus dans [FMD97], le premier test est réalisé sur le rectangle $[0, 8] \times [0, 4]$ avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.15$ en imposant des conditions périodiques dans les directions latérales. Nous choisissons les paramètres fixes suivants : une mobilité $\Gamma_b = 1.25$, une tension de surface $\sigma_b = 0.015$, une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.2$ et un coefficient cinétique de surface $\Gamma_s = 10$. Nous faisons varier le coefficient de capillarité $\sigma_s = 0$ ou $\sigma_s = 5$. Remarquons que dans l'analyse présentée dans ce chapitre nous avons toujours imposé $\sigma_s > 0$ et le cas $\sigma_s = 0$ n'a pas été pris en compte. En effet, le fait d'imposer $\sigma_s > 0$ nous permet d'obtenir une borne H^1 -discrète sur Γ des solution approchées et plus précisément de leur trace discrète. Cette borne est ensuite essentielle pour obtenir l'estimation de translations en espace (et ainsi le théorème de convergence). D'un point de vue théorique l'étude de ce cas particulier reste à faire.

Figure III.7: Rectangle au temps $t = 0.11$

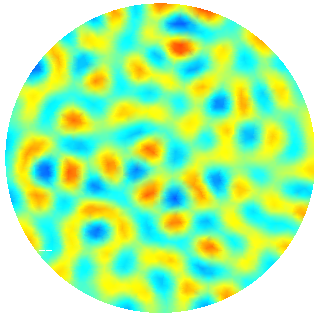
Le premier phénomène que nous observons est que la séparation de phase apparaît beaucoup plus rapidement que dans le cas de conditions aux limites de Neumann. De plus, dans le cas des conditions aux limites dynamiques, des structures latérales apparaissent rapidement. Lorsque $\sigma_s > 0$ ces structures sont plus larges que les structures apparaissant à l'intérieur alors que lorsque $\sigma_s = 0$ elles sont plus petites ce qui est bien en accord avec les résultats observés dans [FMD97].

Nous voulons maintenant étudier l'influence de la géométrie du domaine sur ce phénomène. Pour cela nous considérons trois domaines :

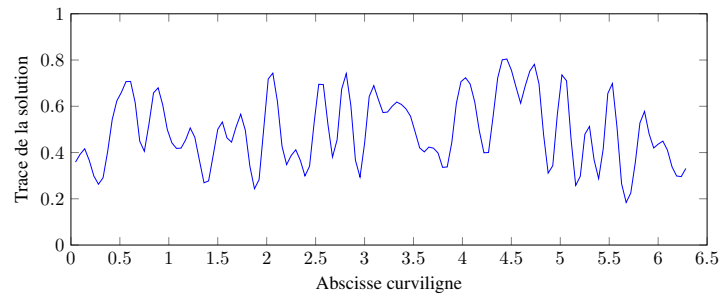
- le cercle unité avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.065$ et les paramètres suivants : $\Gamma_b = 0.2$, $\sigma_b = 0.006$, $\varepsilon = 0.08$ et $\Gamma_s = 10$;
- l'ellipse de demi-grand axe $a = 0.5$ et de demi-petit axe $b = 0.3$ avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.025$ et les paramètres suivants : $\Gamma_b = 0.03$, $\sigma_b = 0.0025$, $\varepsilon = 0.03$ et $\Gamma_s = 10$;
- domaine courbe sans géométrie particulière avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.065$ et les paramètres suivants : $\Gamma_b = 0.15$, $\sigma_b = 0.006$, $\varepsilon = 0.07$ et $\Gamma_s = 10$.

Le pas de temps est constant $\Delta t = 10^{-3}$. Nous traçons alors :

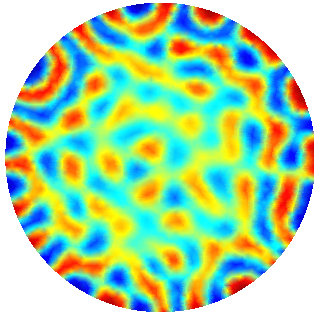
- La valeur de la solution à l'instant t dans Ω en fonction des différents conditions aux limites.
- La valeur de la trace de la solution au même instant en fonction de l'abscisse curviligne en partant d'un point donné sur Γ puis en parcourant Γ dans le sens trigonométrique.



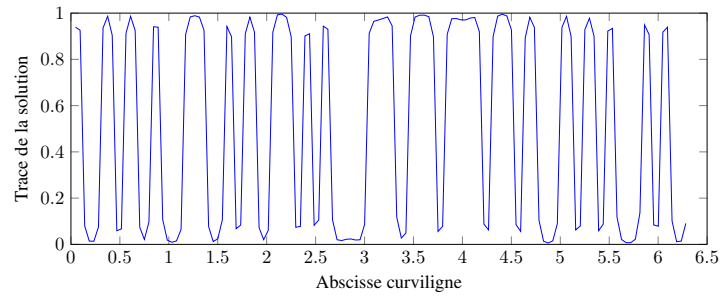
(a) C.L. de Neumann, Solution dans Ω



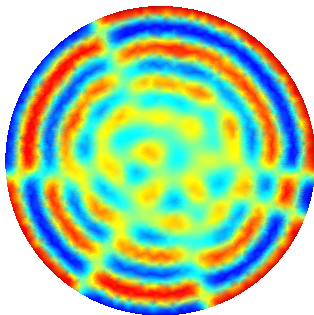
(b) C.L. de Neumann, Trace de la solution



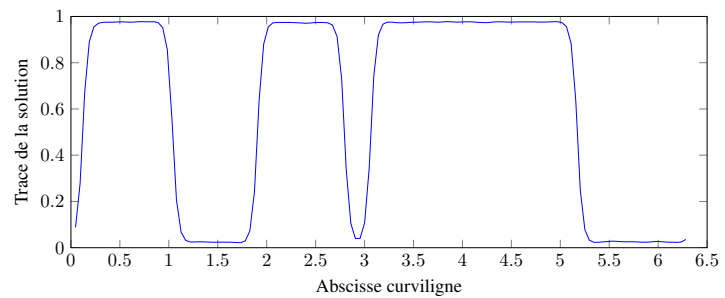
(c) $\sigma_s = 0$, Solution dans Ω



(d) $\sigma_s = 0$, Trace de la solution

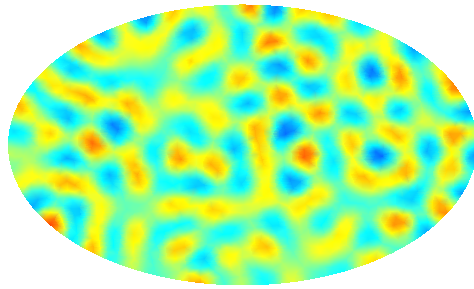
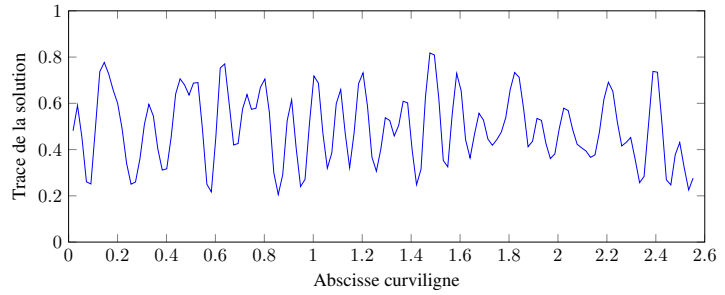


(e) $\sigma_s = 5$, Solution dans Ω

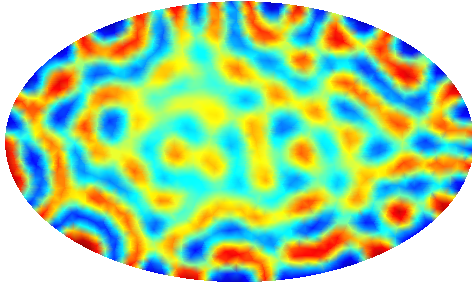
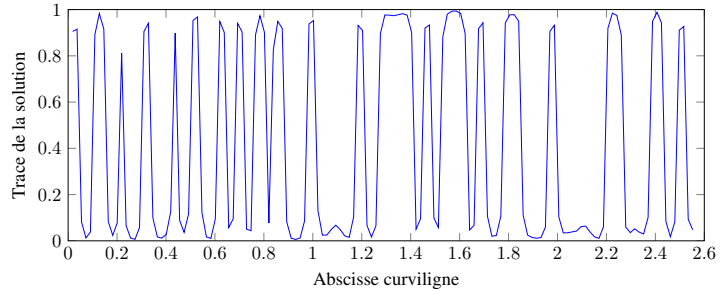
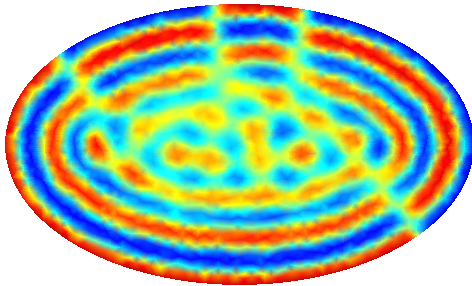
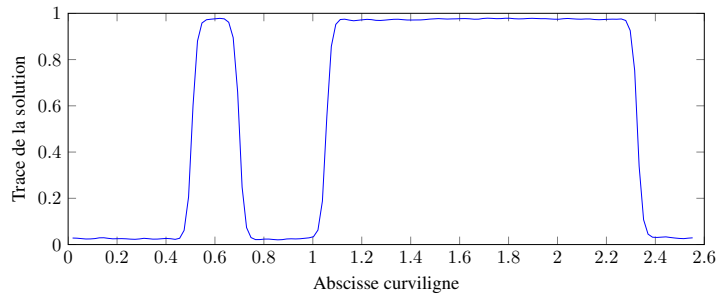


(f) $\sigma_s = 5$, Trace de la solution

Figure III.8: Cercle au temps $t = 0.1$

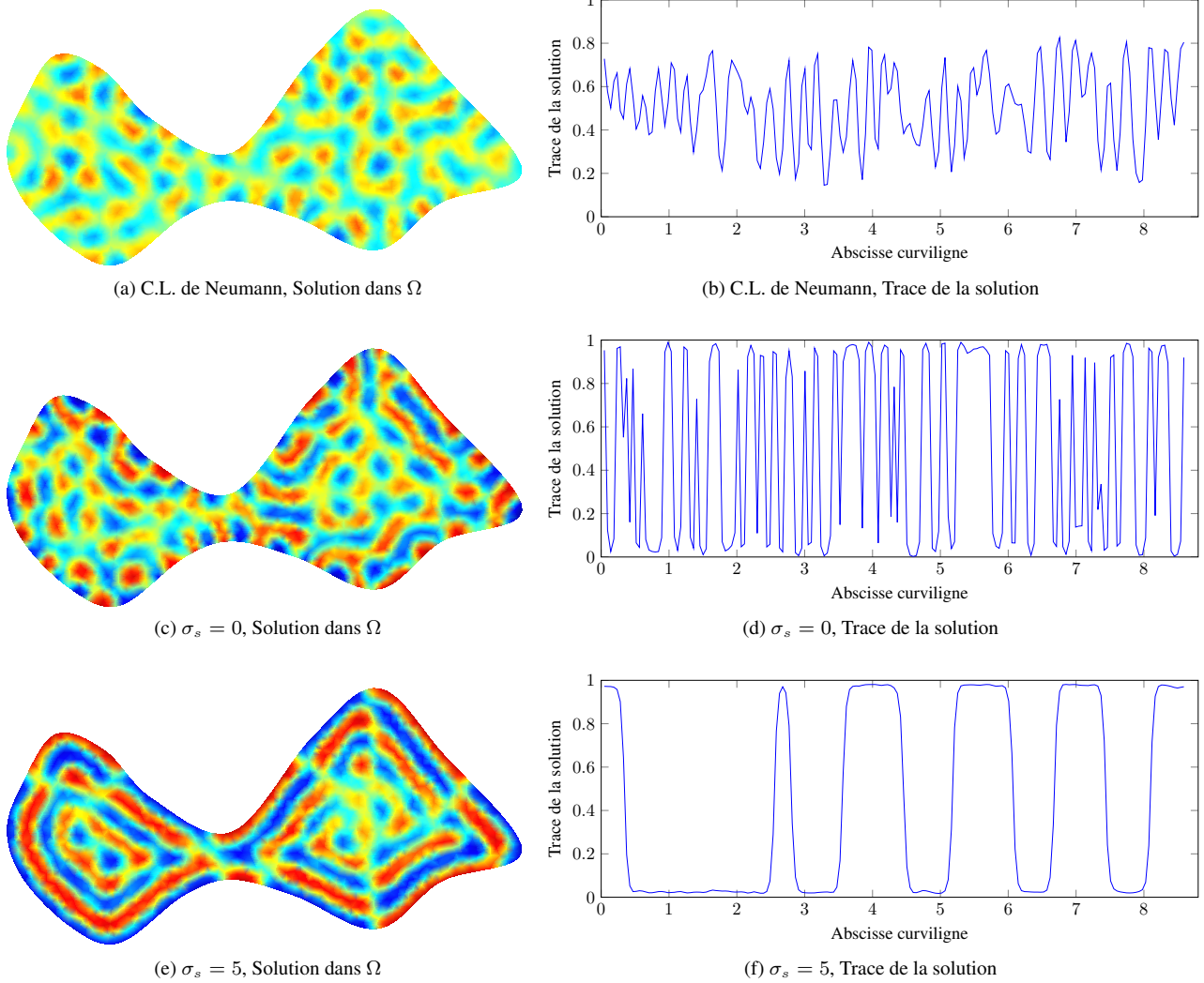
(a) C.L. de Neumann, Solution dans Ω 

(b) C.L. de Neumann, Trace de la solution

(c) $\sigma_s = 0$, Solution dans Ω (d) $\sigma_s = 0$, Trace de la solution(e) $\sigma_s = 5$, Solution dans Ω (f) $\sigma_s = 5$, Trace de la solutionFigure III.9: Ellipse au temps $t = 0.085$

Pour les trois domaines étudiés, nous observons les mêmes comportements :

- la séparation de phase s'effectue plus rapidement avec les conditions aux limites dynamiques;
- des structures particulières dont la taille dépend de σ_s apparaissent sur la paroi;
- la trace de la solution lorsque $\sigma_s = 0$ fluctue très rapidement en prenant alternativement les valeurs 0 et 1 (approximativement) alors que pour $\sigma_s = 5$ la valeur de la trace est beaucoup plus régulière même si là encore elle prend alternativement les valeurs 0 et 1;
- nous voyons apparaître des motifs qui s'organisent parallèlement au bord.

Figure III.10: Domaine quelconque au temps $t = 0.09$

Attraction préférentielle de la paroi

Dans cette section, nous considérons le cas où les propriétés physiques de la paroi entraînent que l'un des deux composants est préférentiellement attiré par la paroi. Pour modéliser ce phénomène, nous considérons le potentiel surfacique $f_s(c) = \frac{g_s}{2}c^2 - \frac{h_s + g_s}{2}c$ avec $g_s > 0$, ainsi :

- lorsque $h_s = 0$, le minimum de f_s se trouve en $c = \frac{1}{2}$ et donc la paroi a le même comportement vis à vis des deux composants;
- lorsque $h_s > 0$, le minimum de f_s se trouve en $c = \frac{h_s + g_s}{2g_s} > \frac{1}{2}$ et donc la paroi attire préférentiellement la phase pure $c = 1$;
- inversement, lorsque $h_s < 0$ le minimum de f_s se trouve en $c = \frac{h_s + g_s}{2g_s} < \frac{1}{2}$ et donc la paroi attire préférentiellement la phase pure $c = 0$.

Remarque III.52

- La discrétisation semi-implicite de ce potentiel de surface f_s s'écrit :

$$df_s(x, y) = f'_s\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

- Dans le cas d'une discrétisation complètement implicite, pour $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ donné et pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$, nous avons :

$$f_s(u_\mathcal{L}) - f_s(c_\mathcal{L}^n) - f'_s(u_\mathcal{L})(u_\mathcal{L} - c_\mathcal{L}^n) = -\frac{g_s}{2}(u_\mathcal{L} - c_\mathcal{L}^n)^2 < 0, \quad \forall \mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}.$$

Ainsi, l'hypothèse III.20 est bien vérifiée.

Ce test est réalisé sur le domaine quelconque présenté ci-dessus avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.065$ et les paramètres suivants : $\Gamma_b = 0.3$, $\sigma_b = 0.008$, $\varepsilon = 0.1$, $\sigma_s = 0.1$, $\Gamma_s = 10$ et $g_s = 1$. Ces résultats sont donnés au temps $t = 0.25$ avec un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$.

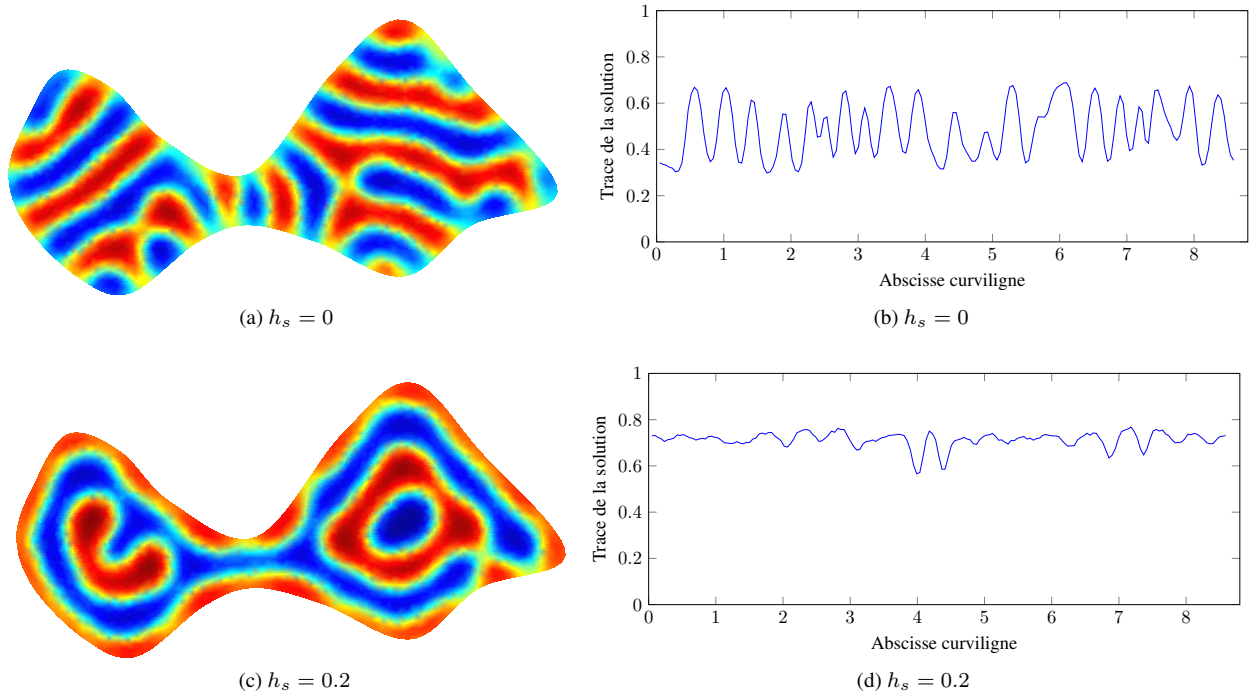


Figure III.11: Influence du paramètre h_s

Les structures parallèles que nous observons lorsque $h_s = 0$ (cf Figure III.11a) sont similaires à celles observées dans [KEM⁺01, CPP10] et l'alternance des phases pures confirme bien que la paroi n'attire aucun des deux composants. En revanche, dans la Figure III.11c la paroi exerce une attraction sur la phase pure $c = 1$ (en rouge) ce qui est bien en accord avec le choix de $h_s > 0$.

III.8.3 Angles de contact

Rappelons que les conditions aux limites de Neumann imposent un angle de contact entre la paroi solide et l'interface égal à $\frac{\pi}{2}$. Ce cas test illustre l'influence des conditions aux limites dynamiques sur l'angle de contact entre la paroi et l'interface.

Nous choisissons le potentiel surfacique suivant (introduit initialement dans [Jac00], voir aussi [YZF10, Don12]) :

$$f_s(c) = \cos(\theta_s)c^2 \left(\frac{1}{3}c - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{12\sigma_b} + \frac{\cos(\theta_s)}{12},$$

où σ_1 représente la tension de surface entre le fluide 1 (l'inconnu du modèle de Cahn-Hilliard de concentration c) et la paroi, σ_2 la tension de surface entre le fluide 2 (celui de concentration $1 - c$) et la paroi et θ_s est l'angle de contact statique entre l'interface et la paroi (mesuré du côté du fluide 1).

Alors, l'équation de Young est vérifiée à l'angle de contact θ_s avec la paroi :

$$\sigma_b \cos(\theta_s) = \sigma_2 - \sigma_1,$$

où nous rappelons que σ_b est la tension de surface entre les deux fluides et la fonction f_s ainsi construite satisfait (où nous rappelons que $\mathcal{A}_{f_s} = 6\sigma_b$) :

$$\mathcal{A}_{f_s} f_s(1) = \sigma_1, \quad \mathcal{A}_{f_s} f_s(0) = \sigma_2, \quad \mathcal{A}_{f_s} f_s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \quad \text{et} \quad f'_s(0) = f'_s(1) = 0.$$

Notons que ce potentiel ne vérifie pas l'hypothèse de dissipativité (III.3). Or, d'un point de vue numérique nous observons que la concentration c reste bornée et donc dans les cas que nous avons considérés cette hypothèse n'intervient pas en pratique. Nous n'observons donc aucune difficulté supplémentaire (d'un point de vue numérique) lorsque nous utilisons ce potentiel de surface.

Dans ce cas, la discrétisation semi-implicite du potentiel de surface s'écrit :

$$d^{f_s}(x, y) = f'_s\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{\cos(\theta_s)}{12}(x-y)^2.$$

Nous nous plaçons dans les mêmes conditions que celles décrites dans les références [YZF10, Don12] (bien que dans ces articles les auteurs étudient le couplage entre les équations de Cahn-Hilliard et celles de Navier-Stokes), il n'y a donc pas de diffusion sur la paroi et $\sigma_s = 0$. Nous choisissons une condition aux limites stationnaire $\Gamma_s = +\infty$ donc la condition aux limites (III.4c) se réécrit :

$$\mathcal{A}_\Delta \partial_n c = -\mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_\Gamma); \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma.$$

Nous nous plaçons sur le rectangle $\Omega = [0, 8] \times [0, 4]$ avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.15$ et des conditions périodiques dans les directions latérales. Nous choisissons les paramètres volumiques fixes suivants : une mobilité $\Gamma_b = 0.1$, une tension de surface $\sigma_b = 0.07$ et une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.35$. La concentration initiale est une bulle posée sur le bord (cf Figure III.12a) donnée par :

$$c^0(x, y) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{2}{\varepsilon} \left(\sqrt{(x-4)^4 + y^2} - 2 \right) \right) \right)$$

Le pas de temps est $dt = 0.1$ et nous traçons sur les Figures III.12b et III.12c l'état stationnaire pour différentes valeurs de θ_s .

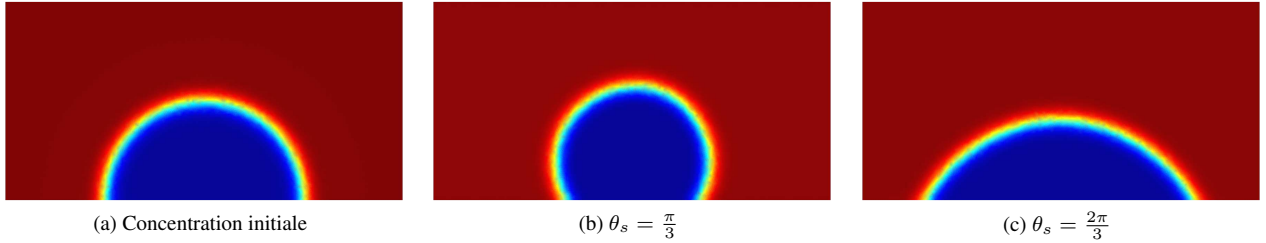


Figure III.12: Angles de contact et dynamique de l'interface

Nous observons que l'angle de contact dans la phase pure $c = 1$ (en rouge) entre l'interface fluide et la paroi solide que nous demandons est toujours réalisé : $\frac{\pi}{3}$ sur la Figure III.12b et $\frac{2\pi}{3}$ sur la Figure III.12c.

Dans le Chapitre VII nous étudierons un modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes pour lequel nous observerons également (avec le même potentiel surfacique f_s) la dynamique d'angles de contact.

III.9 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé dans ce chapitre un schéma de type volumes finis pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques sur un domaine régulier.

D'un point de vue théorique, nous avons montré la convergence des solutions approchées vers une solution faible (et donc en particulier l'existence de cette solution) du système de Cahn-Hilliard. De plus, nous avons présenté une nouvelle estimation de translations en espace qui permet directement d'obtenir l'existence d'une limite dans $L^\infty(0, T, H^1(\Omega))$ telle que sa trace soit dans $L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$.

Du point de vue numérique, cette méthode est simple à implémenter du fait de la bonne prise en compte par le schéma du couplage entre le domaine et sa frontière et de la géométrie courbe du domaine. Nous avons également présenté des

résultats d'estimations d'erreur qui permettent de valider ce schéma et des résultats qualitatifs qui illustrent les différentes propriétés du modèle de Cahn-Hilliard en fonction des propriétés physiques de la paroi et des composants.

L'une des perspectives de ce travail serait de démontrer un théorème d'estimation d'erreur d'ordre 1 en temps et en espace similaire à celui présenté dans la Section I.5.

De plus, nous avons vu dans la Section III.8.3 que lorsque nous nous intéressons à la dynamique d'angles de contact, il n'y a pas de diffusion sur la paroi et donc le coefficient σ_s , que nous avons supposé strictement positif dans ces travaux, est nul. Or, le fait de supposer $\sigma_s > 0$ nous permet d'obtenir la borne H^1 discrète sur la trace des solutions approchées $c_{\partial\Omega}^{\Delta t}$ (cf Proposition III.26) et donc d'obtenir que la trace de la limite est bien dans $L^\infty(0, T, H^1(\Gamma))$ (cf Théorème III.33 et Proposition III.35). Une seconde perspective serait donc d'étudier d'un point de vue théorique le cas $\sigma_s = 0$ qui est d'ailleurs le cas qui nous intéressera principalement lors du couplage avec les équations de Stokes (cf Chapitre VII).

Partie 2

Stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes

L'approximation volumes finis du problème de Stokes est un sujet de recherche actuel et peut être divisée en deux familles de méthodes : colocalisées et décalées. Citons par exemple les méthodes de différences finies mimétiques [BdVGLM09, BdVL10, BdVLM10], les schémas "Discrete Duality Finite Volume" (DDFV) [Del07, Kre11], les schémas volumes finis mixtes [DE09], le schéma SUSHI (Scheme Using Stabilization and Hybrid Interfaces) [EHL06]. Le schéma décalé le plus célèbre est le schéma MAC [HW65, Nic92] sur des maillages cartésiens.

Dans cette partie, nous nous concentrons sur l'approximation DDFV des équations de Stokes stationnaires. Il s'agit d'une méthode décalée car l'approximation du champ de vitesse et celle du champ de pression sont localisées sur des volumes de contrôle différents. En fait, pour un maillage cartésien, le schéma que nous proposons ici est équivalent (excepté sur le bord) à deux schémas MAC découplés écrits sur deux maillages différents et décalés. Par conséquent, la méthode DDFV pour le problème de Stokes peut être considérée comme une possible extension du schéma MAC sur des maillages généraux.

Le schéma DDFV 2D requiert des inconnues en vitesse à la fois aux sommets et aux "centres" des volumes de contrôle. Ces deux ensembles d'inconnues permettent de reconstituer des opérateurs de gradient discret bidimensionnel (défini sur de nouveaux éléments géométriques appelés mailles diamants) et de divergence discrète qui sont en dualité, au sens discret, ce qui donne son nom à la méthode. Cette approche a été introduite dans [Del07] mais certains points importants de l'analyse n'ont pas été traités, comme la question de la stabilité Inf-Sup uniforme de la méthode qui est le sujet principal de notre travail.

Notons que, pour surmonter ces difficultés dans l'analyse, l'auteur de [Del07] propose une formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes et alors d'approcher la vitesse sur les mailles diamants et la pression à la fois sur les sommets et les centres des mailles primales. Cette approche duale ne semble pas être adaptée aux conditions aux limites de Dirichlet ou à des problèmes plus généraux comme le problème de Stokes multifluides pour lequel la viscosité n'est plus constante sur Ω . C'est la raison pour laquelle nous pensons que l'étude de la méthode DDFV en utilisant la formulation naturelle vitesse-pression est toujours un sujet important.

Afin de surmonter les difficultés dues à l'absence, à l'époque, d'une inégalité Inf-Sup discrète appropriée pour la formulation DDFV naturelle, il a également été proposé dans [Kre11] d'ajouter un terme de stabilisation dans l'équation de conservation de la masse. Avec cette technique de stabilisation habituelle, une analyse complète du schéma a été donnée. Cependant, il a été observé numériquement dans cette référence que des approximations très précises peuvent être obtenues sans stabilisation (ou du moins avec des paramètres de stabilisation très petits).

Ceci est notre principale motivation, dans cette partie, pour aller plus loin dans l'analyse de la stabilité Inf-Sup du schéma DDFV (non-stabilisé). Ce schéma est facile à implémenter sur des maillages généraux (avec seulement une boucle sur les mailles diamants), possède un stencil raisonnablement petit, est sans paramètre et possède la structure algébrique standard de point-selle bien adaptée à de nombreux solveurs itératifs et préconditionneurs. De plus, en utilisant les résultats de stabilité Inf-Sup démontrés dans cette partie, l'analyse d'erreur présentée dans [Kre11] peut directement être appliquée au schéma non-stabilisé. Nous ne considérons ici que le cas 2D, mais il est intéressant de noter que les schémas DDFV ont été étendus avec succès au cas 3D dans [CH11, CPRT09, Her07, ABHK12] pour des équations de diffusion scalaire linéaire anisotrope et dans [KM12] pour le problème de Stokes.

La question de la stabilité Inf-Sup a été largement étudiée dans le cadre des approximations de type éléments finis/Galerkin conformes et les résultats principaux dans ce domaine peuvent être trouvés dans [BF91, EG04, GR86] par exemple; voir aussi l'article [BBF08]. Dans de nombreux cas, la stabilité Inf-Sup peut être analysée en prouvant l'existence de l'opérateur, appelé opérateur de Fortin, tel que présenté initialement dans [For77].

Cette stratégie a été par exemple utilisée avec succès pour l'élément de Crouzeix-Raviart [CR73] ou l'élément (mini) $\mathbb{P}^1$ +bulle/ $\mathbb{P}^1$ [ABF84]. Pour l'élément généralisé de Taylor-Hood $\mathbb{P}^2/\mathbb{P}^1$ ou son équivalent linéaire $\mathbb{P}^1$ iso $\mathbb{P}^2/\mathbb{P}^1$, une adaptation de la méthode de Fortin est nécessaire [Ver84]. Les preuves données dans cette partie peuvent en fait être vues comme des adaptations au cadre DDFV des idées de Verfürth, même si notre approximation du champ de pression n'est pas continue.

En ce qui concerne les méthodes de Galerkin discontinues (voir [DPE12] pour une étude plus détaillée de cette classe de méthodes), nous pouvons citer par exemple [CKSS02] où la méthode LDG en variables vitesse-vitesse gradient de pression est analysée en détail, en particulier ses propriétés de stabilités Inf-Sup. Puisque cette méthode est localement conservative, elle peut être vue en un certain sens comme une approximation volumes finis d'ordre élevé. Cependant, cette méthode nécessite un terme de stabilisation de la pression dans l'équation de conservation de la masse. Une autre méthode DG en formulation vitesse/pression sans stabilisation de la pression (au moins sur des maillages simplexes) est analysée dans [GRW05]. Aucune de ces méthodes ne peut prendre en compte des maillages généraux sans stabilisation de la pression contrairement à la méthode DDFV présentée ici. C'est une caractéristique importante des méthodes décalées.

Cette partie est organisée comme suit. Dans le Chapitre IV nous rappelons d'abord le cadre DDFV, puis nous introduisons le schéma DDFV pour le problème de Stokes, nous définissons la constante Inf-Sup discrète associée et nous

décrivons une méthode numérique permettant de la calculer. Dans le Chapitre [V](#) nous étudions d'un point de vue théorique et numérique si la propriété de stabilité Inf-Sup est satisfaite pour différentes familles de maillages. Nous obtenons des comportements différents qui dépendent de la géométrie particulière des mailles. Dans la Section [V.1](#), nous étudions trois exemples de familles de maillages pour lesquelles nous sommes en mesure de prouver la stabilité Inf-Sup inconditionnelle du schéma et nous présentons des illustrations numériques de ces propriétés. À l'inverse, dans la Section [V.2](#), nous prouvons que pour d'autres familles de maillages (de type cartésiens), la stabilité Inf-Sup n'est pas vérifiée. Cependant, nous pouvons fournir une description précise de cette instabilité en établissant qu'il existe un seul mode instable de sorte que la stabilité Inf-Sup est vérifiée si nous imposons aux champs de pression d'être orthogonaux au mode instable. Cela semble expliquer pourquoi, dans ces cas là, l'instabilité Inf-Sup du schéma est suffisamment faible pour que les propriétés de convergence de la méthode soit préservées même sans stabilisation comme cela a été observé dans [\[Kre11\]](#).

L'idée générale sous-jacente de notre analyse est de construire une sorte d'approximation de l'opérateur de Fortin, car la construction d'un véritable opérateur de Fortin semble compliquée, en particulier pour des maillages non conformes (voir Propositions [V.1](#) et [V.12](#)).

Enfin, dans la Section [V.3](#) nous présentons plusieurs résultats numériques pour vérifier si la stabilité Inf-Sup est vérifiée ou non pour différentes familles de maillages pour lesquelles nous ne sommes pas encore en mesure de fournir des résultats théoriques. La conclusion de cette étude est que le schéma DDFV semble être très robuste en ce qui concerne la propriété de stabilité Inf-Sup.

Ce travail a été accepté pour publication dans *Mathematics of Computation* et a été réalisé en collaboration avec F. Boyer et S. Krell [\[BKN14a\]](#).

Chapitre IV

Méthode numérique pour le calcul de la constante Inf-Sup discrète

Le but de ce chapitre est de décrire la méthode numérique utilisée dans le Chapitre V pour étudier le comportement de la constante Inf-Sup discrète du schéma DDFV pour le problème de Stokes et ainsi la stabilité Inf-Sup de ce schéma.

Nous commençons par rappeler les définitions et notations associées à la méthode DDFV (Section IV.1) puis dans la Section IV.2 nous introduisons le schéma DDFV pour le problème de Stokes et nous définissons la condition Inf-Sup discrète associée. Après avoir réécrit le problème sous forme matricielle (Section IV.3.1) nous décrivons dans la Section IV.3.2 la méthode numérique utilisée pour calculer la constante Inf-Sup discrète pour un maillage donné. La Section IV.4 est dédiée à l'implémentation du calcul de la constante Inf-Sup discrète avec le logiciel Scilab.

Dans toute la suite de cette partie, Ω est un ouvert borné, connexe et polygonal de $\mathbb{R}^2$.

IV.1 Description générale du cadre DDFV

IV.1.1 Définition des maillages DDFV

Considérons deux vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^2$, nous notons $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = {}^t \mathbf{a} \mathbf{b} \in \mathbb{R}$ leur produit scalaire euclidien, $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} {}^t \mathbf{b} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ leur produit tensoriel et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}$ leur produit vectoriel. De plus, $\mathbf{e}_x = {}^t(1 \ 0)$ et $\mathbf{e}_y = {}^t(0 \ 1)$ forment la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

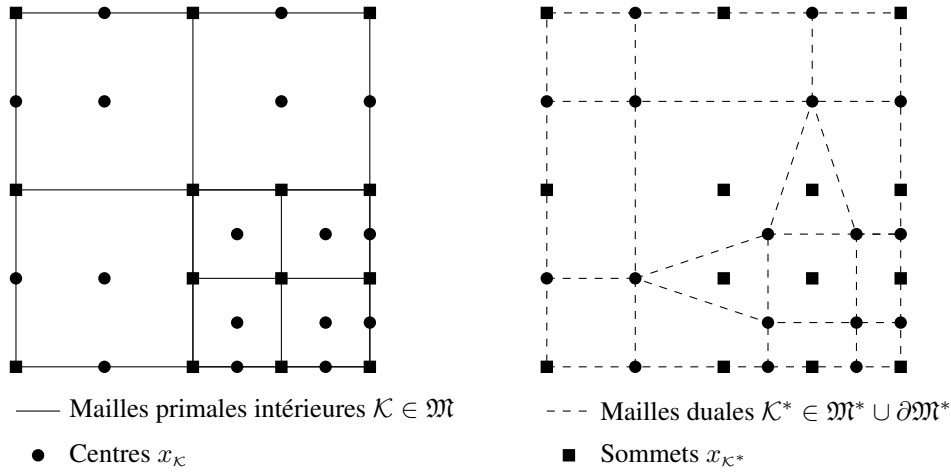
Pour deux matrices $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, nous notons $(\xi : \tilde{\xi}) = \text{Tr}({}^t \xi \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}$ leur produit contracté et $|\xi| = (\xi : \xi)^{1/2}$ la norme associée.

Les maillages Nous rappelons ici les notations principales et les définitions des maillages DDFV décrites dans [ABH07]. Un maillage DDFV $\mathcal{T}$ est constitué d'un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ et d'un maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$. L'exemple d'un domaine carré avec un maillage primal localement raffiné est donné sur la Figure IV.1.

Le maillage primal (intérieur) $\mathfrak{M}$ est un ensemble de polygones disjoints $\mathcal{K} \subset \Omega$ appelées mailles intérieures telles que $\cup \overline{\mathcal{K}} = \overline{\Omega}$. L'ensemble $\partial\mathfrak{M}$ désigne les arêtes des volumes de contrôle du maillage $\mathfrak{M}$ qui sont incluses dans $\partial\Omega$ qui sont considérées comme des volumes de contrôle dégénérés.

- A chaque volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, nous associons un point $x_{\mathcal{K}}$. Plusieurs choix sont possibles, dans toute cette partie nous supposons que $x_{\mathcal{K}}$ est l'isobarycentre de la maille $\mathcal{K}$.
- Pour tout volume de contrôle dégénéré $\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}$, nous associons le point $x_{\mathcal{K}}$ égal au milieu de la maille $\mathcal{K}$.

Cette famille de points est notée $X = \{x_{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}\}$.

Figure IV.1: (Gauche) Le maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$; (Droite) Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$.

Remarque IV.1

Contrairement à la partie précédente, ici nous n'imposons pas de condition d'orthogonalité entre les centres de deux mailles voisines.

Nous désignons par X^* l'ensemble des sommets des volumes de contrôle du maillage $\mathfrak{M}$ et nous le décomposons de la manière suivante $X^* = X_{int}^* \cup X_{ext}^*$ où $X_{int}^* \cap \partial\Omega = \emptyset$ et $X_{ext}^* \subset \partial\Omega$. A chaque point $x_{\mathcal{K}^*} \in X_{int}^*$ (respectivement $x_{\mathcal{K}^*} \in X_{ext}^*$), nous associons le polygone $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ (respectivement $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$) dont les sommets sont $\{x_{\mathcal{K}} \in X, \text{ tels que } x_{\mathcal{K}^*} \in \bar{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \in \mathfrak{M}\}$ (respectivement $\{x_{\mathcal{K}^*}\} \cup \{x_{\mathcal{K}} \in X, \text{ tels que } x_{\mathcal{K}^*} \in \bar{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})\}$) et construit en respectant le sens horaire des volumes de contrôle correspondants. L'ensemble des mailles $\mathcal{K}^*$ ainsi construites permet de définir l'ensemble $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ des mailles duales.

Pour toutes mailles primales $\mathcal{K}$ et $\mathcal{L}$, nous supposons que $\partial\mathcal{K} \cap \partial\mathcal{L}$ est soit vide, soit un sommet commun, soit une arête du maillage primal notée $\sigma = \mathcal{K}|_{\mathcal{L}}$. Nous notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes de ce maillage. Nous notons également $\sigma^* = \mathcal{K}^*|_{\mathcal{L}^*}$ une arête du maillage dual et $\mathcal{E}^*$ l'ensemble des arêtes du maillage dual.

Les maillages primal et dual étant définis, nous introduisons le maillage diamant $\mathfrak{D}$ tel que $\bar{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \bar{\mathcal{D}}$. L'ensemble des mailles diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ est défini de la manière suivante : la maille $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ est le quadrilatère dont les diagonales sont l'arête primale $\sigma = \mathcal{K}|_{\mathcal{L}} = (x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et l'arête duale correspondante $\sigma^* = \mathcal{K}^*|_{\mathcal{L}^*} = (x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}})$ (cf Figure IV.2). Notons que les mailles diamants ne sont pas nécessairement convexes. Si $\sigma \in \mathcal{E} \cap \partial\bar{\Omega}$, le quadrangle $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ dégénère en un triangle.

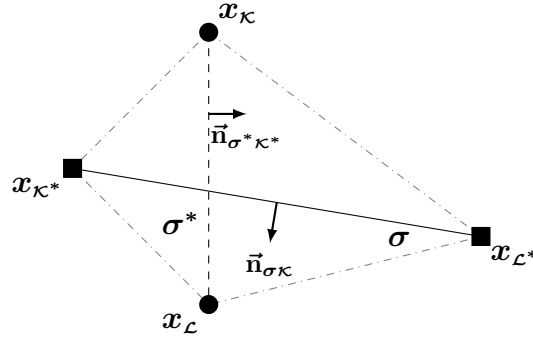
Notations Pour tout volume de contrôle $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, nous notons :

- $m_{\mathcal{K}}$ la mesure de la maille $\mathcal{K}$,
- $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ l'ensemble de ses arêtes (si $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$) ou le singleton $\{\mathcal{K}\}$ si $\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}$.
- $\mathfrak{D}_{\mathcal{K}} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}, \sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}\}$,
- $h_{\mathcal{K}}$ son diamètre.

Nous utilisons également les notations duales correspondantes : $m_{\mathcal{K}^*}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{K}^*}$, $\mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}$ et $h_{\mathcal{K}^*}$.

Pour la maille diamant $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ dont les sommets sont $(x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}, x_{\mathcal{L}^*})$ (cf Figure IV.2), nous définissons :

- m_{σ} la longueur de l'arête primale σ ,
- m_{σ^*} la longueur de l'arête duale σ^* ,
- $\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}$ la normale unitaire à σ orientée de $x_{\mathcal{K}}$ vers $x_{\mathcal{L}}$,
- $\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}$ la normale unitaire à σ^* orientée de $x_{\mathcal{K}^*}$ vers $x_{\mathcal{L}^*}$,
- $h_{\mathcal{D}}$ son diamètre,
- $m_{\mathcal{D}}$ sa mesure.

Figure IV.2: Notations d'une maille diamant $\mathcal{D}$

Nous définissons $\mathcal{D}_{ext}$ comme l'ensemble des mailles diamants dont un des côtés est inclus dans $\partial\Omega$; l'ensemble des diamants intérieurs est alors noté $\mathcal{D}_{int} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{ext}$.

Mesure de régularité du maillage Le pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ est le maximum des diamètres des mailles diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$. Nous introduisons un nombre positif $\text{reg}(\mathcal{T})$ qui mesure la régularité d'un maillage donné et qui est utilisé pour effectuer l'analyse de convergence de schémas volumes finis :

$$\text{reg}(\mathcal{T}) := \max \left(\mathcal{N}, \mathcal{N}^*, \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \frac{m_\sigma m_{\sigma^*}}{m_{\mathcal{D}}}, \max_{\substack{\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \\ \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}}} \frac{h_{\mathcal{K}}}{h_{\mathcal{D}}}, \max_{\substack{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^* \\ \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}}} \frac{h_{\mathcal{K}^*}}{h_{\mathcal{D}}}, \right. \\ \left. \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \frac{h_{\mathcal{D}}}{\sqrt{m_{\mathcal{D}}}}, \max_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} \frac{h_{\mathcal{K}^*}}{\sqrt{m_{\mathcal{K}^*}}}, \max_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \frac{h_{\mathcal{K}}}{\sqrt{m_{\mathcal{K}}}} \right), \quad (\text{IV.1})$$

où $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}^*$ sont respectivement le nombre maximal d'arêtes que peut comporter une maille primale et le nombre maximal d'arêtes incidentes à un sommet. Le nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ doit être uniformément borné lorsque $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ pour obtenir les résultats de convergence.

IV.1.2 Inconnues discrètes et projection moyenne

La méthode DDFV pour le problème de Stokes fait intervenir des inconnues décalées. Nous associons à chaque maille primale $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $\mathbf{u}_{\mathcal{K}} \in \mathbb{R}^2$ pour la vitesse, à chaque maille duale $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ une inconnue $\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \in \mathbb{R}^2$ pour la vitesse et à chaque maille diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ une inconnue $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}$ pour la pression. Ces inconnues sont rassemblées de la manière suivante :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \\ \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}} \\ \mathbf{u}_{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \\ \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad p_{\mathcal{D}} = ((p_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}}) \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}.$$

Nous introduisons un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ qui permet de prendre en compte les conditions aux limites de Dirichlet,

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}^*} = 0 \right\}.$$

Nous définissons maintenant la projection moyenne pour tout champ de vecteurs $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$:

$$\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{M}} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \right), \quad \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \int_{\mathcal{K}^*} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \right). \quad (\text{IV.2})$$

Nous rassemblons finalement ces projections en utilisant la notation suivante :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{M}} \mathbf{v} \\ 0 \\ \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_0, \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2. \quad (\text{IV.3})$$

IV.1.3 Définitions des opérateurs discrets

Dans cette section nous définissons les opérateurs discrets dont nous aurons besoin pour écrire et analyser le schéma DDFV.

Définition IV.2 (Gradient discret d'un champ de vecteurs)

Nous définissons l'opérateur de gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}}$ qui envoie un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ vers un champ de matrices de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [m_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + m_{\sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}], \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D},$$

pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$.

Définition IV.3 (Divergence discrète d'un champ de vecteurs)

Nous définissons l'opérateur de divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{D}}$ qui envoie un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ vers un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \text{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [m_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + m_{\sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}], \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D},$$

pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$.

Définition IV.4 (Divergence discrète d'un champ de matrices)

Nous définissons l'opérateur de divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}}$ qui envoie un champ de matrices de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ vers un champ de vecteurs de $\mathbb{E}_0$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \xi^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ \text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \end{cases}$$

pour tout $\xi_{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$.

Pour pouvoir écrire le schéma DDFV sous forme plus condensée, nous définissons la divergence discrète sur le maillage primal et sur le maillage dual par :

$$\text{div}^{\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, \quad \text{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}.$$

Définition IV.5 (Gradient discret d'un champ scalaire)

Nous définissons l'opérateur de gradient discret $\nabla^{\mathcal{T}}$ envoyant un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ vers un champ de vecteurs de $\mathbb{E}_0$ de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}} = \text{div}^{\mathcal{T}}(p_{\mathcal{D}} \text{Id}), \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}.$$

Remarque IV.6

Nous insistons sur le fait que, par définition, $\text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}}$ et $\nabla^{\mathcal{K}^*} p_{\mathcal{D}}$ sont imposés égaux à 0 pour les mailles duales du bord $\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*$.

En résumé, nous avons introduit quatre opérateurs :

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}, \\ \text{div}^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{D}}, \\ \text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} &\rightarrow \mathbb{E}_0, \\ \nabla^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{D}} &\rightarrow \mathbb{E}_0. \end{aligned}$$

IV.1.4 Produits scalaires discrets et normes associées

Tout d'abord, nous définissons les trois produits scalaires de type L^2 -discrets suivants :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} \cdot \mathbf{v}_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{v}_{\kappa^*} \right), \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \\ (p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} q_{\mathfrak{D}}, \quad \forall p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \\ (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}}), \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors définir les normes correspondantes :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{T},2} &= \llbracket \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \\ \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} &= (p_{\mathfrak{D}}, p_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \\ \|\xi^{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} &= (\xi^{\mathfrak{D}} : \xi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}. \end{aligned}$$

La formule de Stokes discrète ci-dessous est vérifiée, donnant ainsi son nom à la méthode (voir par exemple [ABH07, DO05]).

Théorème IV.7 (Formule de Stokes discrète)

Pour tout $\xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, nous avons :

$$\llbracket \operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}}.$$

Nous rappelons finalement (voir par exemple [ABH07]) que $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \mapsto \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}$ est une norme dans $\mathbb{E}_0$ (vérifiant une inégalité de Poincaré appropriée) et qu'il existe $C_1 > 0$ dépendant seulement de $\operatorname{reg}(\mathcal{T})$ telle que l'estimation de stabilité suivante soit vérifiée :

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_{\mathfrak{D},2} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{H^1}, \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2. \quad (\text{IV.4})$$

IV.2 Modèle de Stokes et condition Inf-Sup

IV.2.1 Le problème de Stokes

Nous nous intéressons à une approximation volumes finis du problème de Stokes incompressible 2D suivant : Trouver le champ de vitesse $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad m(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{m_{\Omega}} \int_{\Omega} p = 0. \quad (\text{IV.5})$$

Nous supposons que $\mathbf{f}$ est une fonction de $(L^2(\Omega))^2$ et nous notons m_{Ω} la mesure de Ω .

Rappelons que le caractère bien posé de ce problème est lié à la validité de l'inégalité suivante appelée inégalité Inf-Sup (ou LBB),

$$\inf_{p \in L_0^2(\Omega)} \left(\sup_{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2} \frac{b(\mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_{H^1} \|p\|_{L^2}} \right) > 0, \quad (\text{IV.6})$$

où $b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} p (\operatorname{div} \mathbf{v})$ et $L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) : m(p) = 0\}$. Cette inégalité est connue pour être équivalente à l'existence d'un inverse à droite continu de l'opérateur de divergence comme indiqué dans le résultat suivant (cf [GR86, BF13]).

Proposition IV.8

Il existe un opérateur linéaire continu $\Pi : L_0^2(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^2$ tel que

$$\operatorname{div}(\Pi(p)) = p, \quad \forall p \in L_0^2(\Omega).$$

Avant de donner l'approximation DDFV du problème de Stokes expliquons brièvement pourquoi nous n'utilisons pas le schéma VF4 décrit dans la Partie précédente. Pour construire le schéma VF4 associé au problème de Stokes (IV.5) nous intégrons le bilan de quantité de mouvement sur chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$m_{\mathcal{K}} \mathbf{f}_{\mathcal{K}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{K}} \mathbf{f} = \int_{\mathcal{K}} (-\Delta \mathbf{u} + \nabla p) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \underbrace{\int_{\sigma} (-\nabla \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} + p \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}})}_{\stackrel{\text{def}}{=} \bar{F}_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u},p)}.$$

Alors, pour pouvoir approcher le flux exact $\bar{F}_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u},p)$ sur chaque maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ il semble naturel de considérer les inconnues discrètes suivantes :

$$\mathbf{u}_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{u}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{M}} \quad \text{et} \quad p_{\varepsilon} = (p_{\sigma})_{\sigma \in \mathcal{E}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{E}},$$

et d'approcher le flux exact $\bar{F}_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u},p)$ par le flux approché :

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}_{\mathfrak{M}}, p_{\varepsilon}) \stackrel{\text{def}}{=} -m_{\sigma} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} + p_{\sigma} m_{\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Cela conduit naturellement à définir l'opérateur de gradient de pression discret suivant :

$$(\nabla^{\varepsilon} p_{\varepsilon})_{\mathcal{K}} = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} p_{\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Or pour obtenir un schéma stable, bien posé et pouvoir démontrer des résultats de convergence il est nécessaire de définir l'opérateur de divergence discret comme l'adjoint de l'opérateur de gradient, c'est à dire :

$$(\text{div}^{\mathfrak{M}} \mathbf{u}_{\mathfrak{M}})_{\sigma} = \frac{2}{d_{\mathcal{K},\mathcal{L}}} (\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}.$$

Ainsi, nous pouvons mettre en évidence deux problèmes majeurs si nous effectuons une approximation VF4 du problème de Stokes :

- Cet opérateur de divergence discret n'est pas consistant car il ne tient compte du champ de vitesse que dans une direction, celle de la normale. C'est donc une approximation incomplète de l'opérateur de divergence.
- Pour un maillage cartésien, avec cette définition, le vecteur $\mathbf{u}_{\mathfrak{M}} = 0$ est l'unique champ de vecteurs à divergence nulle qui s'annule sur la frontière. Ceci signifie qu'il y a trop de degrés de liberté en pression par rapport aux degrés de liberté en vitesse.

Il est donc nécessaire d'utiliser des méthodes un peu plus complexes lors de l'analyse numérique du problème de Stokes. Nous avons choisi d'utiliser le schéma DDFV qui a notamment pour avantages de ne plus imposer de condition d'orthogonalité au maillage et de pouvoir traiter des maillages non-conformes.

IV.2.2 Approximation DDFV du problème de Stokes

Le schéma DDFV pour le Problème (IV.5) s'écrit :

Problème IV.9

Trouver $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} \text{div}^{\mathfrak{M}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + p_{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\ \text{div}^{\mathfrak{M}*}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + p_{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, \\ \text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0, \\ m(p_{\mathcal{D}}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} = 0, \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

avec $\mathbf{f}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{M}} \mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^{\mathfrak{M}*} = \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\mathfrak{M}*} \mathbf{f}$, où les projections sont définies par (IV.2).

Formellement, pour obtenir ce schéma nous intégrons le bilan de quantité de mouvement du problème (IV.5) sur le maillage primal intérieur $\mathfrak{M}$ et sur le maillage dual intérieur $\mathfrak{M}^*$ et l'équation de conservation de la masse sur le maillage diamant $\mathcal{D}$. Les flux de masse et de quantité de mouvement sont alors approchés en utilisant les gradients DDFV définis

dans la Section IV.1.3. La condition aux bords de Dirichlet homogène est imposée sur $\partial\mathcal{M}$ et $\partial\mathcal{M}^*$ grâce à la définition de l'espace $\mathbb{E}_0$.

Nous tenons également à souligner qu'en pratique l'implémentation de ce schéma est facile car, pour tout type de maillage, chaque flux numérique devant être évalué dans l'équation de quantité de mouvement dépend, tout au plus, de quatre inconnues de vitesse. En outre, la matrice du système (cf Section IV.3.1) peut être assemblée diamant par diamant (cf Section IV.4), c'est à dire arête par arête du maillage primal.

Dans [Del07] l'auteur montre que, pour un maillage triangulaire (à angles aigus) ou un maillage de rectangle non-conforme, le Problème IV.9 possède une unique solution. Cependant, même dans ce cas, aucune estimation de stabilité n'a été démontrée, c'est la raison pour laquelle nous nous intéressons ici à l'étude de la condition Inf-Sup discrète pour ce schéma.

IV.2.3 La constante Inf-Sup discrète

Etant donné $\mathcal{T}$ un maillage DDFV, nous définissons la constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}}$ associée au schéma (IV.7) de la manière suivante :

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}} \left(\sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})}{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{D},2} \|p_{\mathcal{D}} - m(p_{\mathcal{D}})\|_{\mathcal{D},2}} \right), \quad (\text{IV.8})$$

où nous avons noté :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) = (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} = -[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}]_{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}. \quad (\text{IV.9})$$

Pour un maillage donné $\mathcal{T}$, nous savons que le schéma (IV.7) est bien posé si et seulement si nous avons $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ (voir par exemple [EG04]). En fait, puisque le problème est posé en dimension finie, il est facile de voir que $\beta_{\mathcal{T}} = 0$ si et seulement si, il existe un mode de pression non nul $p_{\mathcal{D}}$ tel que $m(p_{\mathcal{D}}) = 0$ et $\nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}} = 0$. Dans ce cas, le couple $(\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0, p_{\mathcal{D}})$ est une solution non triviale du Problème IV.9 avec 0 comme terme source, ce qui prouve que le schéma n'est pas bien posé.

Pour une famille de maillage telle que $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$, nous savons que le schéma est stable si et seulement si

$$\liminf_{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \beta_{\mathcal{T}} > 0. \quad (\text{IV.10})$$

En supposant que cette propriété est vérifiée, il est très facile d'adapter les preuves des estimations d'erreur données dans [Kre11] pour obtenir un résultat de convergence de notre schéma sans terme de stabilisation.

Le but de cette partie est donc d'étudier d'un point de vue théorique et numérique, si la condition de stabilité (IV.10) est vérifiée ou non pour divers types de familles de maillages. Nous allons voir que les résultats dépendent de la géométrie particulière des mailles, en particulier pour des maillages non conformes, qui est un cas particulièrement intéressant pour l'application de la méthode DDFV.

IV.3 Calcul de la constante Inf-Sup

Dans cette section, nous décrivons une méthode pratique pour calculer numériquement, pour un maillage donné, la constante Inf-Sup discrète (IV.8) associée au schéma DDFV pour le problème de Stokes. Le point clé est de relier la valeur de $\beta_{\mathcal{T}}$ aux valeurs propres d'une matrice appropriée.

IV.3.1 Reformulation sous forme d'un problème de valeurs propres

Pour être plus précis, nous définissons $N_{\mathcal{T}} = \text{Card}(\mathcal{T})$, $N_{\mathcal{D}} = \text{Card}(\mathcal{D})$, nous notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire euclidien sur les espaces $\mathbb{R}^{2N_{\mathcal{T}}}$ et $\mathbb{R}^{N_{\mathcal{D}}}$ et $\|\cdot\|$ les normes euclidiennes associées. Nous allons réécrire (IV.7) et (IV.8) au moyen des matrices suivantes :

- La matrice de rigidité $R_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{2N_{\mathcal{T}}}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$,

$$R_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ((-m_{\kappa} \text{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})))_{\kappa \in \mathcal{M}} \\ \mathbf{u}_{\partial\mathcal{M}} \\ ((-m_{\kappa^*} \text{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})))_{\kappa^* \in \mathcal{M}^*} \\ \mathbf{u}_{\partial\mathcal{M}^*} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $R_{\mathcal{T}}$ satisfait :

$$\langle R_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \rangle = (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}}, \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0.$$

De plus, la matrice $R_{\mathcal{T}}$ envoie $\mathbb{E}_0$ dans $\mathbb{E}_0$ et est symétrique définie positive sur $\mathbb{E}_0$. Par conséquent, $R_{\mathcal{T}}^{-1}$ et $R_{\mathcal{T}}^{\pm 1/2}$ sont des opérateurs bien définis qui envoient $\mathbb{E}_0$ sur lui-même.

- La matrice de divergence $B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}, 2N_{\mathcal{T}}}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$,

$$\langle B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}} \rangle = b_{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}).$$

Notons que

$$B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = ((m_{\mathfrak{D}} \operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}) \quad \text{et} \quad {}^t B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} ((-m_{\mathcal{K}} \nabla^{\mathcal{K}} p_{\mathfrak{D}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}) \\ 0 \\ ((-m_{\mathcal{K}^*} \nabla^{\mathcal{K}^*} p_{\mathfrak{D}})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observons que, par construction, ${}^t B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{E}_0$ pour tout $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$.

- La matrice (diagonale) de masse en pression $M_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}}(\mathbb{R})$ telle que pour tout $p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$,

$$\langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}} \rangle = (p_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}.$$

La formulation matricielle du schéma (IV.7) s'écrit alors : Trouver $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} R_{\mathcal{T}} & -{}^t B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \\ B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \\ p_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbb{P}_{\mathfrak{M}}^{\mathcal{T}} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0. \end{cases} \quad (\text{IV.11})$$

En utilisant les matrices définies ci-dessus, nous pouvons maintenant reformuler (IV.8) de la manière suivante :

$$\beta_{\mathcal{T}} = \inf_{\substack{p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \\ \langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0}} \left(\sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{\langle B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}} \rangle}{\langle R_{\mathcal{T}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \rangle^{\frac{1}{2}} \langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}, p_{\mathfrak{D}} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (\text{IV.12})$$

Nous montrons dans le lemme suivant que, pour un maillage donné $\mathcal{T}$, calculer $\beta_{\mathcal{T}}$ revient à résoudre un problème de valeurs propres approprié (cf [Mal81] et [BF91, Section II.3]). Nous résolvons ensuite ce problème en utilisant une méthode d'itération de sous-espaces avec projection de Rayleigh-Ritz (cf Section IV.3.2). Nous sommes alors en mesure de calculer la valeur réelle de $\beta_{\mathcal{T}}$ pour différents maillages et ainsi d'étudier les propriétés de stabilité Inf-Sup du schéma DDFV, y compris dans le cas où l'analyse théorique fait défaut.

Notation: A partir de maintenant, pour toute matrice carrée réelle M possédant des valeurs propres réelles, nous définissons $\lambda_i(M)$ comme la $i^{\text{ème}}$ plus petite valeur propre de M .

Lemme IV.10 (Relation avec le complément de Schur)

La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}}$ satisfait $\beta_{\mathcal{T}}^2 = \lambda_2(S_{\mathfrak{D}})$, où $S_{\mathfrak{D}}$ est la matrice symétrique définie par :

$$S_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{-\frac{1}{2}} B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} R_{\mathcal{T}}^{-1} {}^t B_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} M_{\mathfrak{D}}^{-\frac{1}{2}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}}(\mathbb{R}).$$

Remarque IV.11

Si nous posons $p_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} 1_{\mathfrak{D}}$ nous avons $S_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}} = 0$, donc la plus petite valeur propre de la matrice $S_{\mathfrak{D}}$ est toujours $\lambda_1(S_{\mathfrak{D}}) = 0$.

Démonstration : Effectuons le changement de variable $\mathbf{u}_\tau = R_\tau^{\frac{1}{2}} \mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0$ dans (IV.12), alors :

$$\begin{aligned} \beta_\tau &= \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \left(\sup_{\mathbf{u}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{\langle B_{\mathfrak{D},\tau} R_\tau^{-\frac{1}{2}} \mathbf{u}_\tau, p_\mathfrak{D} \rangle}{\langle \mathbf{u}_\tau, \mathbf{u}_\tau \rangle^{\frac{1}{2}} \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, p_\mathfrak{D} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \frac{1}{\langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, p_\mathfrak{D} \rangle^{\frac{1}{2}}} \left(\sup_{\mathbf{u}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{\langle \mathbf{u}_\tau, R_\tau^{-\frac{1}{2}t} B_{\mathfrak{D},\tau} p_\mathfrak{D} \rangle}{|\mathbf{u}_\tau|} \right) \\ &= \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \frac{|R_\tau^{-\frac{1}{2}t} B_{\mathfrak{D},\tau} p_\mathfrak{D}|}{\langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, p_\mathfrak{D} \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant β_τ^2 et effectuons le changement de variable $q_\mathfrak{D} = M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} p_\mathfrak{D}$, nous obtenons :

$$\beta_\tau^2 = \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \frac{\langle B_{\mathfrak{D},\tau} R_\tau^{-1t} B_{\mathfrak{D},\tau} p_\mathfrak{D}, p_\mathfrak{D} \rangle}{\langle M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} p_\mathfrak{D}, M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} p_\mathfrak{D} \rangle} = \inf_{\substack{q_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \\ \langle M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} q_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \frac{\langle S_\mathfrak{D} q_\mathfrak{D}, q_\mathfrak{D} \rangle}{|q_\mathfrak{D}|^2}. \quad (\text{IV.13})$$

Ainsi, en utilisant la Remarque IV.11, nous avons effectivement montré que β_τ^2 est la seconde plus petite valeur propre de la matrice $S_\mathfrak{D}$. ■

IV.3.2 Méthode de Rayleigh-Ritz

Nous décrivons ici la méthode numérique utilisée, en pratique, pour calculer la constante Inf-Sup discrète associée à un maillage donné. En fait, ce qui nous intéresse est le calcul des k plus petites valeurs propres du complément de Schur $S_\mathfrak{D}$, avec k choisi raisonnablement petit. En effet, lorsque nous étudions le cas d'un maillage Inf-Sup instable (cf Section V.2), c'est à dire lorsque $\lambda_2(S_\mathfrak{D}) \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0$, nous voudrions connaître le nombre de mode instables. Nous sommes donc intéressés par le comportement des valeurs propres $\lambda_3(S_\mathfrak{D})$ et $\lambda_4(S_\mathfrak{D})$ par exemple.

Nous utilisons une méthode d'itération de sous-espaces avec projection, décrite par exemple dans [Saa03], qui permet de calculer les k plus petites valeurs propres d'une matrice symétrique. Cependant, numériquement le calcul de la matrice $M_\mathfrak{D}^{-\frac{1}{2}}$ est très coûteux, nous voudrions donc éviter ce calcul. Notons que les valeurs propres de la matrice $S_\mathfrak{D}$ sont les mêmes que celles de la matrice $\tilde{S}_\mathfrak{D} = M_\mathfrak{D}^{-1} B_{\mathfrak{D},\tau} R_\tau^{-1t} B_{\mathfrak{D},\tau} \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D}}(\mathbb{R})$ qui n'est plus symétrique.

Nous supposons ici que $\beta_\tau > 0$, c'est à dire que le schéma DDFV pour le problème de Stokes est bien posé sur le maillage $\mathcal{T}$. Si ce n'est pas le cas, une version adaptée de la méthode décrite ci-dessous (que nous ne décrivons pas ici) doit être utilisée. Notons que parmi tous les maillages que nous considérons, le seul pour lequel $\beta_\tau = 0$ est le maillage cartésien uniforme (cf Théorème V.8).

Algorithme de calcul des valeurs propres $\lambda_2(\tilde{S}_\mathfrak{D}), \dots, \lambda_{k+1}(\tilde{S}_\mathfrak{D})$:

1. Choisissons $Q_\mathfrak{D} = [q_\mathfrak{D}^1, \dots, q_\mathfrak{D}^k] \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D},k}(\mathbb{R})$ tel que :

$$\langle M_\mathfrak{D} q_\mathfrak{D}^i, q_\mathfrak{D}^j \rangle = 0, \quad \forall (i, j) \in \{1, \dots, k\}, i \neq j$$

et

$$\langle M_\mathfrak{D} q_\mathfrak{D}^i, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}, \quad (\text{IV.14})$$

où $1_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ est le vecteur constant égal à 1.

Ceci est obtenu en réalisant une procédure d'orthonormalisation de Gram-Schmidt standard.

2. Nous cherchons $P_\mathfrak{D} = [p_\mathfrak{D}^1, \dots, p_\mathfrak{D}^k] \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D},k}(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{S}_\mathfrak{D} P_\mathfrak{D} = Q_\mathfrak{D}$.

Cela revient à résoudre k problèmes de Stokes discrets de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} R_\tau & {}^t B_{\mathfrak{D},\tau} \\ B_{\mathfrak{D},\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_\tau \\ P_\mathfrak{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_\mathfrak{D} Q_\mathfrak{D} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.15})$$

$$\langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}^i, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Remarquons que cette matrice de Stokes n'est pas inversible. La condition (IV.14) assure l'existence et l'unicité de la solution.

3. Nous réalisons un processus d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sur les colonnes de la matrice $P_{\mathfrak{D}}$ pour le produit scalaire associé à la matrice de masse $M_{\mathfrak{D}}$. Nous obtenons $\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ et $\widetilde{R} \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que :

$${}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} = \text{Id} \quad \text{et} \quad P_{\mathfrak{D}} = \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} \widetilde{R}. \quad (\text{IV.16})$$

4. Nous pouvons maintenant introduire la matrice symétrique $C = {}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} \widetilde{S}_{\mathfrak{D}} \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$.
Or, $\widetilde{S}_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{-1} B_{\mathfrak{D},\tau} R_{\tau}^{-1} {}^t B_{\mathfrak{D},\tau}$ donc,

$$C = {}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{D},\tau} R_{\tau}^{-1} {}^t B_{\mathfrak{D},\tau} \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}},$$

et en utilisant la seconde égalité de (IV.16), nous obtenons :

$$C = {}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{D},\tau} R_{\tau}^{-1} ({}^t B_{\mathfrak{D},\tau} P_{\mathfrak{D}}) \widetilde{R}^{-1}.$$

Ainsi, le problème de Stokes (IV.15) permet finalement d'écrire :

$$\begin{aligned} C &= {}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{D},\tau} R_{\tau}^{-1} (-R_{\tau} \mathbf{U}_{\tau}) \widetilde{R}^{-1} \\ &= -{}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} (B_{\mathfrak{D},\tau} \mathbf{U}_{\tau}) \widetilde{R}^{-1} \\ &= -{}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} (-M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}}) \widetilde{R}^{-1} \\ &= {}^t\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} \widetilde{R}^{-1}. \end{aligned}$$

Cette nouvelle expression de C ne contient plus la matrice R_{τ} mais simplement la matrice plus petite $\widetilde{R}$ qui peut être explicitement inversée et donc C peut facilement être calculée.

5. Nous calculons maintenant les vecteurs propres Y et les valeurs propres $\lambda(C)$ de la matrice C . La matrice C étant de petite taille ($C \in \mathcal{M}_{k,k}(\mathbb{R})$ avec en pratique k plus petit que 10), nous pouvons utiliser un solveur quelconque pour ce calcul, celui de Scilab par exemple (avec la commande `spec`).
6. Notons D la matrice diagonale dont les coefficients sont les valeurs propres de la matrice C associées aux vecteurs propres Y (c'est à dire tels que $CY = YD$) et posons $Q_{\mathfrak{D}} = \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} Y$. Alors,

$${}^t Q_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} = {}^t Y {}^t \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} Y = \text{Id},$$

et

$${}^t Q_{\mathfrak{D}} M_{\mathfrak{D}} \widetilde{S}_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} = {}^t Y {}^t \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{D},\tau} R_{\tau}^{-1} {}^t B_{\mathfrak{D},\tau} \widetilde{Q}_{\mathfrak{D}} Y = {}^t Y C Y = D.$$

Remarquons que pour pouvoir itérer ce processus, il reste à vérifier que le vecteur $Q_{\mathfrak{D}}$ ainsi construit satisfait bien la condition (IV.14) :

- Notons $\widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^i \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) les vecteurs colonnes de la matrice $Q_{\mathfrak{D}}$. Commençons par montrer :

$$\langle M_{\mathfrak{D}} \widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Notons $(r_{l,j})_{1 \leq l, j \leq k}$ les coefficients de la matrice $\widetilde{R}$, alors la définition des matrices $\widetilde{Q}_{\mathfrak{D}}$ et $\widetilde{R}$ implique,

$$p_{\mathfrak{D}}^i = \sum_{l=1}^i r_{l,i} \widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^l \Rightarrow \langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = \sum_{l=1}^i r_{l,i} \langle M_{\mathfrak{D}} \widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^l, 1_{\mathfrak{D}} \rangle, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Le résultat se déduit alors facilement par récurrence en remarquant que les coefficients diagonaux de la matrice $\widetilde{R}$ sont strictement positifs.

- Notons $y^i = (y_l^i)_{1 \leq l \leq N_{\mathfrak{D}}}$ les vecteurs colonnes de la matrice Y , alors la définition de $Q_{\mathfrak{D}}$ implique :

$$q_{\mathfrak{D}}^i = \sum_{l=1}^k y_l^i \widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^l \Rightarrow \langle M_{\mathfrak{D}} q_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = \sum_{l=1}^k y_l^i \langle M_{\mathfrak{D}} \widetilde{q}_{\mathfrak{D}}^l, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

7. Nous itérons ce processus jusqu'à ce que le critère d'arrêt suivant soit vérifié :

$$\frac{|\lambda_j(C) - \lambda_j(C_{old})|}{|\lambda_j(C)|} < \text{tol}, \quad \forall j \in \{1, \dots, k\},$$

où C_{old} est la matrice C calculée à l'itération précédente et $\text{tol} > 0$ est une tolérance fixée que nous avons définie.

A la fin de cet algorithme, les valeurs propres de la matrice C sont des approximations de $\lambda_2(S_{\mathcal{D}}), \dots, \lambda_{k+1}(S_{\mathcal{D}})$.

Remarque IV.12

Considérons un vecteur propre $p_{\mathcal{D}}$ associé à la constante Inf-Sup $\beta_{\mathcal{T}}$, alors le changement de variable $q_{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}} p_{\mathcal{D}}$ dans la démonstration du Lemme IV.10 implique que le vecteur $M_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}} p_{\mathcal{D}}$ est un vecteur propre de la matrice $S_{\mathcal{D}}$ associé à la valeur propre $\beta_{\mathcal{T}}^2$. De plus, l'équivalence suivante est satisfaite :

$$\begin{aligned} q_{\mathcal{D}} \text{ vecteur propre de } S_{\mathcal{D}} &\Leftrightarrow M_{\mathcal{D}}^{-1} B_{\mathcal{D},\mathcal{T}} R_{\mathcal{T}}^{-1t} B_{\mathcal{D},\mathcal{T}} \left(M_{\mathcal{D}}^{-\frac{1}{2}} q_{\mathcal{D}} \right) = \lambda \left(M_{\mathcal{D}}^{-\frac{1}{2}} q_{\mathcal{D}} \right) \\ &\Leftrightarrow p_{\mathcal{D}} = M_{\mathcal{D}}^{-\frac{1}{2}} q_{\mathcal{D}} \text{ vecteur propre de } \tilde{S}_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Ainsi, cet algorithme nous fournit également une approximation du mode propre associé à la constante Inf-Sup. Cela nous sera utile pour tracer, si besoin, les modes instables du problème de Stokes discret.

IV.4 Quelques remarques sur l'implémentation

IV.4.1 Construction des matrices

A partir de la structure `mesh` définie dans la Section I.6 nous pouvons construire les matrices définies dans la Section IV.3.1 en les assemblant diamant par diamant. Pour cela, pour tout $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, nous avons besoin de définir la normale unitaire à une arête duale σ^* sortante à $\mathcal{K}^*$. Ainsi, pour l'arête numéro k nous ajoutons l'information suivante dans la structure `mesh` : Normale unitaire au segment $[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}]$ allant de $x_{\mathcal{K}^*}$ vers $x_{\mathcal{L}^*}$,

$$\text{mesh.arettes}(k, \text{NS_KSLX_X}), \text{mesh.arettes}(k, \text{NS_KSLX_Y})$$

Rappelons les définition des matrices de rigidité $R_{\mathcal{T}}$ et de divergence $B_{\mathcal{D},\mathcal{T}}$, pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ nous avons :

$$R_{\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \left(\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} -m_{\sigma} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \right)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \right) \\ \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}} \\ \left(\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} -m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \right)_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \right) \\ \mathbf{u}_{\partial\mathfrak{M}^*} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_{\mathcal{D},\mathcal{T}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = ((m_{\mathcal{D}} \text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}}).$$

Nous introduisons donc les flux suivants :

$$\text{flux_NN} = \frac{m_{\sigma}^2}{2m_{\mathcal{D}}}, \quad \text{flux_NNS} = \text{flux_NSN} = \frac{m_{\sigma} m_{\sigma^*}}{2m_{\mathcal{D}}} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}, \quad \text{flux_NSNS} = \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_{\mathcal{D}}}$$

et la Définition IV.2 du gradient discret permet d'écrire pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} -m_{\sigma} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} &= \text{flux_NN} * (\mathbf{u}_{\mathcal{K}} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NNS} * (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}), \\ -m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} &= \text{flux_NSN} * (\mathbf{u}_{\mathcal{K}} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NSNS} * (\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

De plus, la Définition IV.3 de la divergence discrète donne pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$m_{\mathcal{D}} \text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = \text{flux_N}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) + \text{flux_NS}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}),$$

où nous avons noté :

$$\text{flux_N} = \frac{1}{2} m_{\sigma} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \quad \text{et} \quad \text{flux_NS} = \frac{1}{2} m_{\sigma^*} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}.$$

Nous construisons alors la mesure des diamants `mesD` et le produit scalaire entre les normales primale et duale `N_sca_NS` :

```

mesD=mesh.arettes(:,_MES_K_KS)+mesh.arettes(:,_MES_K_LS)...
      +mesh.arettes(:,_MES_L_KS)+mesh.arettes(:,_MES_L_LS);
N_sca_NS=mesh.arettes(:,_N_KL_X).*mesh.arettes(:,_NS_KSLS_X)...
      +mesh.arettes(:,_N_KL_Y).*mesh.arettes(:,_NS_KSLS_Y);

```

nous pouvons ainsi définir les différents flux :

```

flux_NN=0.5*mesh.arettes(:,_MES).^2 ./mesD;
flux_NNS=0.5*mesh.arettes(:,_MES).*mesh.arettes(:,_DKL).*N_sca_NS ./mesD;
flux_NNS=flux_NSN
flux_NSNS=0.5*mesh.arettes(:,_DKL).^2 ./mesD;
flux_N_X=  $\frac{1}{2}m_\sigma \vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \mathbf{e}_x = 0.5*mesh.arettes(:,_MES).*mesh.arettes(:,_N_KL_X)$ ;
flux_N_Y=  $\frac{1}{2}m_\sigma \vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \mathbf{e}_y = 0.5*mesh.arettes(:,_MES).*mesh.arettes(:,_N_KL_Y)$ ;
flux_NS_X=  $\frac{1}{2}m_\sigma \vec{n}_{\sigma\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_x = 0.5*mesh.arettes(:,_MES).*mesh.arettes(:,_N_KSLS_X)$ ;
flux_NS_Y=  $\frac{1}{2}m_\sigma \vec{n}_{\sigma\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_y = 0.5*mesh.arettes(:,_MES).*mesh.arettes(:,_N_KSLS_Y)$ ;

```

Numériquement, pour tout $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$, nous choisissons d'ordonner l'inconnue $\mathbf{u}$ correspondante de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} (\mathbf{u}_\kappa \cdot \mathbf{e}_x)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \\ (\mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_x)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \\ (\mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_x)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*} \\ (\mathbf{u}_\kappa \cdot \mathbf{e}_y)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \\ (\mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_y)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \\ (\mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_y)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*} \end{pmatrix}$$

Remarquons que nous ne prenons pas en compte l'inconnue $\mathbf{u}_{\partial \mathfrak{M}}$ qui est nulle (du fait des conditions de Dirichlet homogène). De plus, d'après la définition de la matrice $R_\mathcal{T}$, nous avons besoin d'identifier les sommets du bord :

// Identification des sommets intérieurs

```

v_INT=find(mesh.arettes(:,_L)>0);
som_bord(mesh.arettes(v_INT,_KS)=1;
som_bord(mesh.arettes(v_INT,_LS)=1;

```

// Identification des sommets du bord

```

v_EXT=find(mesh.arettes(:,_L)==0);
som_bord(mesh.arettes(v_EXT,_KS)=0;
som_bord(mesh.arettes(v_EXT,_LS)=0;

```

Notons mesh.nb_som le nombre de sommets du maillage primal et mesh.nb_vol le nombre de mailles primales intérieures, alors nous pouvons construire les matrices $R_\mathcal{T} = \mathbf{R}$, $B_{\mathfrak{D},\mathcal{T}} = \mathbf{B}$ et $M_{\mathfrak{D}} = \mathbf{M_D}$ de la manière suivante :

- Pour toutes les arêtes :

```

R(mesh.arettes(:,_K),mesh.arettes(:,_K)) ← +flux_NN;
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(:,_KS),mesh.nb_som+mesh.arettes(:,_KS))
  ← +flux_NSNS.*som_bord(mesh.arettes(:,_KS))...
  +1-som_bord(mesh.arettes(:,_KS));
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(:,_LS),mesh.nb_som+mesh.arettes(:,_LS))
  ← +flux_NSNS.*som_bord(mesh.arettes(:,_LS))...
  +1-som_bord(mesh.arettes(:,_LS));
B_X(:,mesh.arettes(:,_K)) ← -flux_N_X;
B_Y(:,mesh.arettes(:,_K)) ← -flux_N_Y;
M_D(mesh.arettes(:,_K),mesh.arettes(:,_K)) ← +mesD;

```

- Seulement pour les arêtes intérieures :

- Contribution à l'équation de la maille $\kappa \in \mathfrak{M}$:

```

R(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_L)) ← -flux_NN(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← +flux_NNS(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← -flux_NNS(v_INT);

```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$:

```

R(mesh.arestes(v_INT,_L),mesh.arestes(v_INT,_L)) ← +flux_NN(v_INT);
R(mesh.arestes(v_INT,_L),mesh.arestes(v_INT,_K)) ← -flux_NN(v_INT);
R(mesh.arestes(v_INT,_L),mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS))
  ← +flux_NNS(v_INT);
R(mesh.arestes(v_INT,_L),mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NNS(v_INT);
B_X(v_INT,mesh.arestes(v_INT,_L)) ← +flux_N_X;
B_Y(v_INT,mesh.arestes(v_INT,_L)) ← +flux_N_Y;

```

– Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS),mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS))
  ← -flux_NSNS(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_KS));
R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS),mesh.arestes(v_INT,_K))
  ← +flux_NSN(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_KS));
R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS),mesh.arestes(v_INT,_L))
  ← -flux_NSN(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_KS));
B_X(v_INT,mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NS_X.*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_KS));
B_Y(v_INT,mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NS_Y.*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_KS));

```

– Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NSNS(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_LS));
R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.arestes(v_INT,_L))
  ← +flux_NSN(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_LS));
R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.arestes(v_INT,_K))
  ← -flux_NSN(v_INT).*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_LS));
B_X(v_INT,mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS))
  ← +flux_NS_X.*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_LS));
B_Y(v_INT,mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS))
  ← +flux_NS_Y.*som_bord(mesh.arestes(v_INT,_LS));

```

Pour finir la construction de la matrice $R_\tau = R$, nous effectuons les opérations suivantes :

```
R=0.5*R;   et   R=[R , spzeros(R) ; spzeros(R) , R];
```

et pour la matrice $B_{\mathfrak{D},\tau} = B$, nous avons :

```
B=[B_X , B_Y];
```

IV.4.2 Le problème des pressions constantes

Dans l'algorithme de calcul de la constante Inf-Sup (cf Section IV.3.2), lors de l'étape 2, nous devons résoudre le problème de Stokes (IV.15). Comme nous l'avons déjà précisé, pour que ce système admette une unique solution, nous devons imposer que tous les vecteurs colonnes de $P_{\mathfrak{D}}$ soient à moyenne nulle. Numériquement, pour réaliser cette condition, nous résolvons en fait le problème suivant : Trouver $\widetilde{P}_{\mathfrak{D}} = [\widetilde{p}_{\mathfrak{D}}^1, \dots, \widetilde{p}_{\mathfrak{D}}^k] \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}-1,k}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{U}_{\tau} = [u_{\tau}^1, \dots, u_{\tau}^k] \in \mathcal{M}_{2N_{\tau},k}(\mathbb{R})$ tels que :

$$\begin{pmatrix} R_{\tau} & \widetilde{B}_{\mathfrak{D},\tau} \\ \widetilde{B}_{\mathfrak{D},\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\tau} \\ \widetilde{P}_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\widetilde{M}_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix}, \quad (\text{IV.17})$$

où $\widetilde{B}_{\mathfrak{D},\tau} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}-1,k}$ (respectivement $\widetilde{M}_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}-1,N_{\mathfrak{D}}}$) est la matrice $B_{\mathfrak{D},\tau}$ (respectivement $M_{\mathfrak{D}}$) privée de sa dernière ligne.

Une fois ce système (qui admet bien une unique solution) résolu, nous posons :

$$\overline{P}_{\mathfrak{D}} = [\overline{p}_{\mathfrak{D}}^1, \dots, \overline{p}_{\mathfrak{D}}^k] \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R}) \quad \text{avec} \quad \overline{p}_{\mathfrak{D}}^i = \begin{pmatrix} \widetilde{p}_{\mathfrak{D}}^i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\},$$

puis finalement pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$p_{\mathfrak{D}}^i = \overline{p_{\mathfrak{D}}^i} - \frac{1}{m_{\Omega}} \langle M_{\mathfrak{D}} \overline{p_{\mathfrak{D}}^i}, 1 \rangle 1_{\mathfrak{D}}. \quad (\text{IV.18})$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ nous avons bien $\langle M_{\mathfrak{D}} p_{\mathfrak{D}}^i, 1 \rangle = 0$. Il reste à vérifier que $P_{\mathfrak{D}} = [p_{\mathfrak{D}}^1, \dots, p_{\mathfrak{D}}^k] \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}}, k}(\mathbb{R})$ ainsi construit est bien solution du problème de Stokes (IV.15) :

- En remarquant que ${}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} 1_{\mathfrak{D}} = 0$, la définition (IV.18) de $P_{\mathfrak{D}}$ donne,

$$R_{\tau} \mathbf{U}_{\tau} + {}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} P_{\mathfrak{D}} = R_{\tau} \mathbf{U}_{\tau} + {}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} \overline{P_{\mathfrak{D}}} = R_{\tau} \mathbf{U}_{\tau} + \widetilde{{}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} P_{\mathfrak{D}}} = 0.$$

- Notons $B_{\mathfrak{D}, \tau}^l$ (respectivement $M_{\mathfrak{D}}^l$) la $l^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $B_{\mathfrak{D}, \tau}$ (respectivement $M_{\mathfrak{D}}$), alors sachant que $\widetilde{B_{\mathfrak{D}, \tau} \mathbf{U}_{\tau}} = -\widetilde{M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}}}$, il suffit de montrer que :

$$B_{\mathfrak{D}, \tau}^{N_{\mathfrak{D}}} u_{\tau}^i = -M_{\mathfrak{D}}^{N_{\mathfrak{D}}} q_{\mathfrak{D}}^i, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Or, le fait que ${}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} 1_{\mathfrak{D}} = 0$ et la condition (IV.14) impliquent :

$$\langle B_{\mathfrak{D}, \tau} u_{\tau}^i + M_{\mathfrak{D}} q_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = \langle u_{\tau}^i, {}^t B_{\mathfrak{D}, \tau} 1_{\mathfrak{D}} \rangle + \langle M_{\mathfrak{D}} q_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Donc, en remarquant que si $\widetilde{B_{\mathfrak{D}, \tau} \mathbf{U}_{\tau}} = -\widetilde{M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}}}$ alors $B_{\mathfrak{D}, \tau}^l u_{\tau}^i = -M_{\mathfrak{D}}^l q_{\mathfrak{D}}^i$ pour tout $l \in \{1, \dots, N_{\mathfrak{D}} - 1\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ nous avons :

$$B_{\mathfrak{D}, \tau}^{N_{\mathfrak{D}}} u_{\tau}^i + M_{\mathfrak{D}}^{N_{\mathfrak{D}}} q_{\mathfrak{D}}^i = - \sum_{l=1}^{N_{\mathfrak{D}}-1} (B_{\mathfrak{D}, \tau}^l u_{\tau}^i + M_{\mathfrak{D}}^l q_{\mathfrak{D}}^i) = 0.$$

Nous venons donc de montrer que $B_{\mathfrak{D}, \tau} \mathbf{U}_{\tau} = -M_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}}$.

Chapitre V

Etude de la stabilité Inf-Sup du problème de Stokes

Ce chapitre est dédié à l'analyse de la propriété de stabilité Inf-Sup pour le schéma DDFV aussi bien d'un point de vue théorique que numérique (en utilisant la méthode décrite dans le Chapitre IV). Nous commençons (cf Section V.1) par l'étude de trois familles de maillages pour lesquelles nous montrons une propriété de stabilité Inf-Sup inconditionnelle. Ensuite dans la Section V.2 nous nous intéressons au cas des maillages cartésiens (conformes uniformes et non-conformes) pour lesquels nous montrons que la propriété de stabilité Inf-Sup n'est pas vérifiée. Cependant, nous démontrons également qu'il existe un unique mode instable et que si nous imposons aux champs de pressions d'être orthogonaux à ce mode, alors la propriété de stabilité Inf-Sup est vérifiée, c'est ce que nous appelons la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1. Pour finir, la Section V.3 est consacrée à la présentation de résultats numériques (que nous ne sommes pas pour le moment en mesure de démontrer) permettant d'observer si la propriété de stabilité Inf-Sup est vérifiée ou non pour différents types de maillages très généraux.

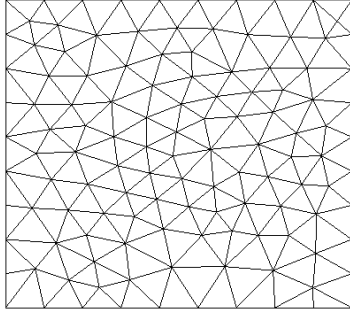
V.1 Stabilité Inf-Sup inconditionnelle

Dans cette section nous étudions trois familles de maillages sur le carré unité $\Omega =]0, 1[^2$ pour lesquelles nous sommes en mesure de prouver la stabilité Inf-Sup inconditionnelle du schéma DDFV pour le problème de Stokes :

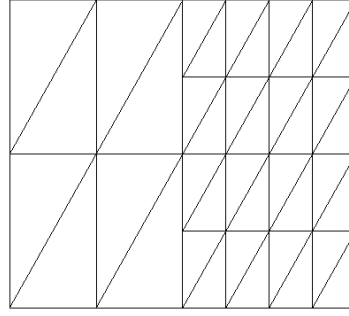
- La famille de maillages composés de triangles conformes (cf Figure V.1a) : notons que tous les résultats concernant cette famille de maillages sont également vérifiés pour tout autre domaine Ω connexe et polygonal (avec un maillage composé de triangles).
- La famille de maillages composés de triangles non-conformes (cf Figure V.1b) : ces maillages sont obtenus en commençant par effectuer un maillage rectangle $k \times k$ du sous-domaine $]0, 0.5[\times]0, 1[$ et un maillage rectangle $2k \times 2k$ du sous-domaine $]0.5, 1[\times]0, 1[$, puis en divisant chaque rectangle en deux triangles. Nous obtenons un maillage de triangles non-conformes. Notons que les arêtes non-conformes sont situées le long d'une unique droite appelée interface.
- La famille de maillages en damier (cf Figure V.1c) : nous partons d'un maillage cartésien uniforme de Ω , puis nous divisons la moitié des mailles en quatre carrés plus petits comme décrit sur la figure. Ceci nous donne une famille de quadrangles non-conformes. Notons que, contrairement au cas précédent, il y a un grand nombre d'arêtes non-conformes dans ce maillage (en proportion quasi-constante par rapport au nombre total d'arêtes du maillage).

V.1.1 Observations numériques pour une première série de maillages

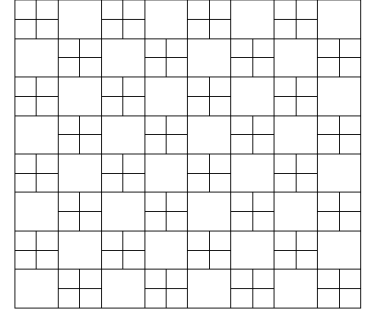
Pour chacune des trois familles de maillages décrites ci-dessus, nous calculons numériquement la racine carrée de la seconde plus petite valeur propre de la matrice $S_{\mathcal{D}}$ obtenue par la méthode d'itération de sous-espaces avec projection de



(a) Maillage triangles conformes



(b) Maillage triangles non-conformes

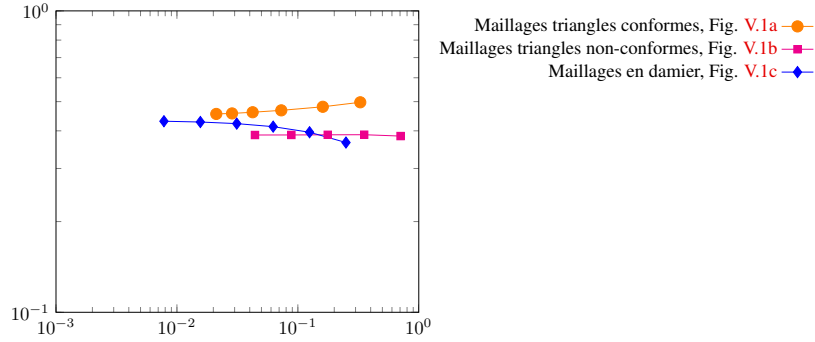


(c) Maillage en damier

Figure V.1: Série de maillages Inf-Sup stables

Rayleigh-Ritz (décrite dans la Section IV.3.2)

Dans chaque cas, nous observons le comportement de $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{D}})}$ en fonction du pas du maillage (voir Figure V.2).

Figure V.2: Etude de la stabilité pour une première série de maillages; $\beta_{\mathcal{T}}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

Nous déduisons de ces tests numériques que le schéma DDFV semble être Inf-Sup stable pour ces familles de maillages, puisque nous observons que $\beta_{\mathcal{T}}$ est minorée par une constante strictement positive lorsque le pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0.

V.1.2 Démonstration de la stabilité Inf-Sup pour certaines familles de maillages

Dans cette section, nous montrons que la stabilité observée numériquement sur la Figure V.2 a effectivement lieu pour ces familles de maillages.

L'analyse est basée sur le théorème général que nous donnons ci-dessous (Théorème V.2). Il s'appuie sur la propriété suivante qui est démontrée dans [Kre11, Prop. 5.5]. Elle consiste à montrer que l'opérateur de projection $\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}}$ est, en un certain sens, proche d'un opérateur de Fortin.

Proposition V.1

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C_2 > 0$, dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$ et $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$,

$$\left| \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \text{div} \mathbf{v}) \, dz \right| \leq C_2 |p_{\mathcal{D}}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1}, \quad (\text{V.1})$$

où $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$ est la projection moyenne de $\mathbf{v}$ sur le maillage $\mathcal{T}$ (cf (IV.3)).

Dans ce résultat, la semi-norme $|\cdot|_h$ sur $\mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est définie par

$$|p_{\mathcal{D}}|_h^2 = \sum_{\substack{\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathcal{D} \\ \mathcal{D}|\mathcal{D}'}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2)(p_{\mathcal{D}'} - p_{\mathcal{D}})^2, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}, \quad (\text{V.2})$$

où la notation $\mathcal{D}|\mathcal{D}'$ signifie que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un côté commun; nous dirons qu'ils sont voisins.

Théorème V.2 (Résultat général de stabilité Inf-Sup)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV sur un domaine connexe polygonal Ω . Supposons qu'il existe $\alpha_{\mathcal{T}} \geq 1$ tel que :

$$|p_{\mathcal{D}}|_h \leq \alpha_{\mathcal{T}} \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2}, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}. \quad (\text{V.3})$$

Alors il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que :

$$\frac{C_3}{\alpha_{\mathcal{T}}} \|p_{\mathcal{D}} - m(p_{\mathcal{D}})\|_{\mathcal{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})}{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{D},2}}, \quad \forall p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}, \quad (\text{V.4})$$

c'est à dire $\beta_{\mathcal{T}} \geq C_3/\alpha_{\mathcal{T}}$.

En conséquence, si nous considérons une famille régulière de maillages (c'est à dire telle que $\text{reg}(\mathcal{T})$ est bornée quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$), alors la stabilité Inf-Sup du schéma sera prouvée si nous pouvons obtenir la propriété d'équivalence des normes (V.3) avec un nombre $\alpha_{\mathcal{T}}$ qui est borné lorsque $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Prouver cette dernière propriété sera le but des Propositions V.3, V.5 et V.6 pour différents types de familles de maillages.

Démonstration : Fixons $p_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. Quitte à ajouter une constante à $p_{\mathcal{D}}$, il est clair que nous pouvons toujours supposer que $m(p_{\mathcal{D}}) = 0$.

Soit $C_2 > 0$ la constante apparaissant dans (V.1) et Π l'inverse à droite continu de la divergence, tel qu'il a été introduit dans la Proposition IV.8.

Nous divisons l'analyse en deux cas de la même manière que pour la preuve classique de la stabilité Inf-Sup de l'élément fini de Taylor-Hood (cf [EG04, GR86]).

- Dans le premier cas, nous supposons que $p_{\mathcal{D}}$ est tel que

$$\|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2} \leq \frac{1}{2\|\Pi\|C_2\alpha_{\mathcal{T}}} \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}. \quad (\text{V.5})$$

Puisque l'intégrale de la fonction constante par morceaux $p_{\mathcal{D}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} \mathbf{1}_{\mathcal{D}} \in L^2(\Omega)$ est égale à 0 sur Ω , nous pouvons prendre $\mathbf{v} = \Pi(p_{\mathcal{D}})$ (cf Définition IV.8) de sorte que :

$$\text{div} \mathbf{v} = p_{\mathcal{D}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq \|\Pi\| \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}. \quad (\text{V.6})$$

Nous posons maintenant $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$ ainsi, par construction, nous avons $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$. En utilisant (IV.4), nous obtenons :

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{D},2} \leq C_1 \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq \|\Pi\| C_1 \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}. \quad (\text{V.7})$$

Nous ajoutons et soustrayons $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} \text{div} \mathbf{v}$ à $b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}})$ et nous utilisons (V.6) ce qui donne :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) = \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}^2 + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \text{div} \mathbf{v}).$$

La Proposition V.1 et l'estimation (V.6) impliquent,

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \geq \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}^2 - \|\Pi\| C_2 |p_{\mathcal{D}}|_h \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}.$$

Appliquons maintenant l'hypothèse (V.3),

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \geq \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}^2 - \|\Pi\| C_2 \alpha_{\mathcal{T}} \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2} \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}.$$

Par l'hypothèse (V.5), il est alors clair que :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathcal{D}}) \geq \frac{1}{2} \|p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2}^2.$$

Ainsi, selon (V.7), en posant $\beta_1 = \frac{1}{2\|\Pi\|C_1}$ nous obtenons finalement :

$$\beta_1 \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}}.$$

- Pour le second cas, nous supposons que $p_{\mathfrak{D}}$ est tel que :

$$\|h^{\tau} \nabla^{\tau} p_{\mathfrak{D}}\|_{\tau,2} \geq \frac{1}{2\|\Pi\|C_2\alpha_{\tau}} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}. \quad (\text{V.8})$$

Dans ce cas, nous n'utilisons pas l'opérateur Π mais nous construisons directement $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\kappa} = -h_{\kappa}^2 \nabla^{\kappa} p_{\mathfrak{D}}, & \forall \kappa \in \mathfrak{M}, & \mathbf{v}_{\kappa} = 0, & \forall \kappa \in \partial \mathfrak{M}, \\ \mathbf{v}_{\kappa^*} = -h_{\kappa^*}^2 \nabla^{\kappa^*} p_{\mathfrak{D}}, & \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & \mathbf{v}_{\kappa^*} = 0, & \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*. \end{cases} \quad (\text{V.9})$$

Pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, en utilisant la Définition IV.2 nous avons, pour un certain $C > 0$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$,

$$\begin{aligned} m_{\mathfrak{D}} |\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|^2 &\leq C (|\mathbf{v}_{\kappa} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}}|^2 + |\mathbf{v}_{\kappa^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}^*}|^2) \\ &\leq 2C (|\mathbf{v}_{\kappa}|^2 + |\mathbf{v}_{\mathcal{L}}|^2 + |\mathbf{v}_{\kappa^*}|^2 + |\mathbf{v}_{\mathcal{L}^*}|^2) \\ &= 2C (|h_{\kappa}^2 \nabla^{\kappa} p_{\mathfrak{D}}|^2 + |h_{\mathcal{L}}^2 \nabla^{\mathcal{L}} p_{\mathfrak{D}}|^2 + |h_{\kappa^*}^2 \nabla^{\kappa^*} p_{\mathfrak{D}}|^2 + |h_{\mathcal{L}^*}^2 \nabla^{\mathcal{L}^*} p_{\mathfrak{D}}|^2) \\ &\leq 2C \text{reg}(\mathcal{T})^2 (m_{\kappa} |h_{\kappa} \nabla^{\kappa} p_{\mathfrak{D}}|^2 + m_{\mathcal{L}} |h_{\mathcal{L}} \nabla^{\mathcal{L}} p_{\mathfrak{D}}|^2 + m_{\kappa^*} |h_{\kappa^*} \nabla^{\kappa^*} p_{\mathfrak{D}}|^2 + m_{\mathcal{L}^*} |h_{\mathcal{L}^*} \nabla^{\mathcal{L}^*} p_{\mathfrak{D}}|^2). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, pour un certain $C_4 > 0$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, nous avons :

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq C_4 \|h^{\tau} \nabla^{\tau} p_{\mathfrak{D}}\|_{\tau,2}.$$

De plus, par (V.9) nous obtenons :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}) = -[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \nabla^{\tau} p_{\mathfrak{D}}]_{\tau} = \|h^{\tau} \nabla^{\tau} p_{\mathfrak{D}}\|_{\tau,2}^2.$$

Ainsi, nous concluons en posant $\beta_2 = \frac{1}{2C_4\|\Pi\|C_2}$, ce qui donne :

$$\frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}} \geq \frac{1}{C_4} \|h^{\tau} \nabla^{\tau} p_{\mathfrak{D}}\|_{\tau,2} \geq \frac{\beta_2}{\alpha_{\tau}} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}.$$

En remarquant que par définition $\alpha_{\tau} \geq 1$, le résultat est démontré avec $C_3 = \min(\beta_1, \beta_2)$ qui ne dépend en effet que de $\text{reg}(\mathcal{T})$. ■

Notre stratégie consiste désormais à étudier si, pour chacune des familles de maillages décrites ci-dessus, l'inégalité (V.3) est satisfaite pour un certain α_{τ} uniformément borné quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Cette inégalité correspond à une estimation de la différence entre deux valeurs de pression sur des mailles diamants voisines, en terme de gradient de pression DDFV qui est défini sur les maillages primal et dual. La difficulté vient du fait que la valeur du gradient de pression sur une maille donnée dépend de la valeur des pressions sur toutes les mailles diamants qui lui sont associées. Par conséquent, il n'est pas forcément facile de déduire une estimation de la différence entre deux valeurs de pression.

Pour effectuer cette analyse, nous introduisons les notations suivantes :

Notations Considérons une maille primale κ et trois mailles diamants $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}''$ de κ

- Nous notons $p_{\mathfrak{D}} \xrightarrow{\kappa} p_{\mathfrak{D}'}$ s'il existe C dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ tel que

$$|p_{\mathfrak{D}} - p_{\mathfrak{D}'}| \leq C \frac{m_{\kappa}}{h_{\kappa}} |\nabla^{\kappa} p_{\mathfrak{D}}|.$$

Nous écrirons $\begin{cases} p_{\mathfrak{D}'} \\ p_{\mathfrak{D}''} \end{cases} \xrightarrow{\kappa} p_{\mathfrak{D}}$ si nous avons à la fois $p_{\mathfrak{D}} \xrightarrow{\kappa} p_{\mathfrak{D}'}$ et $p_{\mathfrak{D}} \xrightarrow{\kappa} p_{\mathfrak{D}''}$.

- Nous notons $p_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\kappa} \begin{cases} p_{\mathcal{D}'} \\ p_{\mathcal{D}''} \end{cases}$ s'il existe C dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et un certain $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$|\theta(p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'} + (1 - \theta)(p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}''})| \leq C \frac{m_{\kappa}}{h_{\kappa}} |\nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}}|.$$

- Des notations similaires sont utilisées pour les mailles duales $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ à la place des mailles primales $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$.

Proposition V.3 (Le cas du maillage triangles conformes)

Pour une famille de maillages triangles conformes (cf Figure V.1a), l'inégalité (V.3) est satisfaite avec $\alpha_{\mathcal{T}}$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$.

En conséquence, pour une famille régulière de maillages triangles conformes, le schéma DDFV est Inf-Sup stable.

Démonstration : Pour tout volume de contrôle primal κ , il existe trois mailles diamants appartenant à $\mathfrak{D}_{\kappa}$ (une par arête), que nous notons $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$. Par définition du gradient de pression discret, nous avons :

$$m_{\kappa} \nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}} = \sum_{i=1}^3 m_{\sigma_i} p_{\mathcal{D}_i} \vec{n}_{\sigma_i \kappa} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^3 m_{\sigma_i} \vec{n}_{\sigma_i \kappa} = 0.$$

Ce qui implique, par exemple,

$$m_{\kappa} \nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}} = m_{\sigma_1} (p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_3}) \vec{n}_{\sigma_1 \kappa} + m_{\sigma_2} (p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_3}) \vec{n}_{\sigma_2 \kappa}.$$

Nous utilisons maintenant la formule

$$2m_{\kappa} = |(m_{\sigma_i} \vec{n}_{\sigma_i \kappa}) \wedge (m_{\sigma_j} \vec{n}_{\sigma_j \kappa})|, \quad \forall i \neq j,$$

pour obtenir

$$|p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_3}| = \frac{m_{\sigma_2}}{2} |\nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}} \wedge \vec{n}_{\sigma_2 \kappa}| \leq C \frac{m_{\kappa}}{h_{\kappa}} |\nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}}|.$$

Nous venons donc de prouver que $p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa} p_{\mathcal{D}_3}$ et les mêmes arguments permettent d'obtenir une estimation similaire pour les deux autres possibilités de couples de mailles diamants associées à κ .

La somme des ces estimations sur tout le domaine donne le résultat :

$$\begin{aligned} |p_{\mathcal{D}}|_h^2 &= \sum_{\substack{\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathfrak{D} \\ \mathcal{D} | \mathcal{D}'}} (h_{\mathcal{D}}^2 + h_{\mathcal{D}'}^2) (p_{\mathcal{D}'} - p_{\mathcal{D}})^2 \\ &\leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} h_{\kappa}^2 m_{\kappa} |\nabla^{\kappa} p_{\mathcal{D}}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T}, 2}^2. \end{aligned}$$

■

Remarque V.4

Notons que, dans cette preuve, nous n'avons pas utilisé le gradient de pression sur les mailles duales. En fait, la même preuve est valable si nous supposons seulement que les mailles duales sont des mailles triangles conformes.

Proposition V.5 (Le cas du maillage triangles non-conformes)

Pour la famille de maillages triangles non-conformes décrites sur la Figure V.1b, l'inégalité (V.3) est vérifiée avec $\alpha_{\mathcal{T}}$ dépendant seulement de $\text{reg}(\mathcal{T})$.

En conséquence, pour cette famille particulière de maillages triangles non-conformes, le schéma DDFV est Inf-Sup stable.

Démonstration : Notons que si le volume de contrôle κ n'a aucune arête sur l'interface ou si κ se trouve du côté droit de l'interface, alors nous pouvons appliquer la même preuve que pour la proposition précédente.

Ainsi, le seul cas que nous devons étudier est celui où une maille primale κ se trouve juste à gauche de l'interface. Même s'il est en forme de triangle un tel volume de contrôle est en fait un quadrangle dégénéré puisqu'il a 4 mailles voisines donc 4 arêtes et 4 mailles diamants associées. C'est la raison pour laquelle cette situation est différente, et plus compliquée, que celle étudiée dans la proposition précédente.

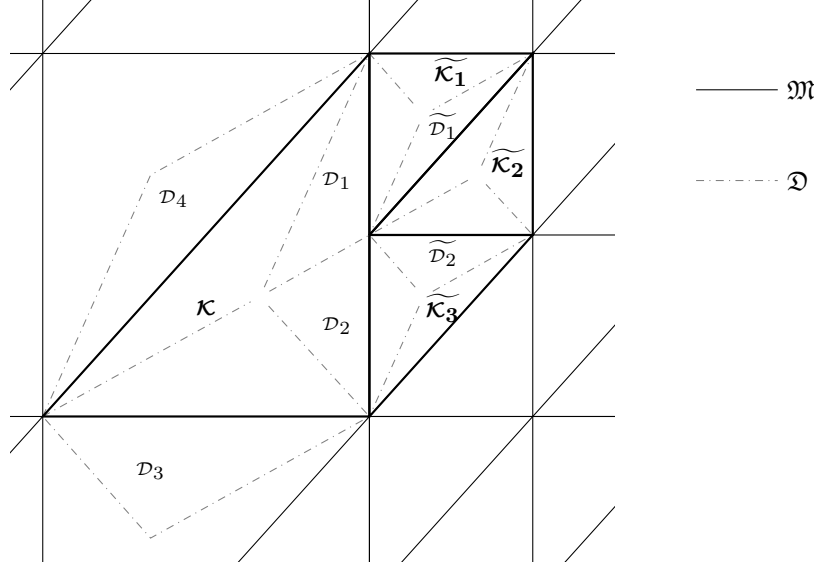


Figure V.3: Notations près de l'interface pour le maillage V.1b

La situation que nous étudions est décrite sur la Figure V.3. Nous devons borner toutes les différences de pressions voisines possibles dans la maille κ (c'est à dire $p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}$, $p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_4}$, $p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_3}$ et $p_{\mathcal{D}_3} - p_{\mathcal{D}_4}$) par une certaine quantité dépendant seulement de la valeur du gradient de pression sur un petit nombre (fixé) de mailles. Ici, nous allons obligatoirement avoir besoin d'utiliser les mailles primales voisines pour obtenir le résultat attendu. En effet, la différence de pression $p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}$, par exemple, ne peut pas être majorée en utilisant simplement le gradient de pression sur la maille primale κ donnée. En effet, si $p_{\mathcal{D}_3} = p_{\mathcal{D}_4} = 0$ et $p_{\mathcal{D}_1} = -\frac{m_{\sigma_2}}{m_{\sigma_1}} p_{\mathcal{D}_2} \neq 0$, alors $\nabla^\kappa p_\mathcal{D}$ est nul alors que $p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2} \neq 0$.

- Nous commençons par obtenir une borne sur la différence de pressions $p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}$ en utilisant les gradients de pression sur les volumes de contrôle se trouvant autour de κ . Nous pouvons voir sur la Figure V.3, et en utilisant le même argument que dans la preuve de la Proposition V.3, que la suite suivante est vérifiée :

$$p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\widetilde{\kappa}_1} p_{\widetilde{\mathcal{D}}_1} \xrightarrow{\widetilde{\kappa}_2} p_{\widetilde{\mathcal{D}}_2} \xrightarrow{\widetilde{\kappa}_3} p_{\mathcal{D}_2},$$

de sorte que, par l'inégalité triangulaire nous obtenons :

$$|p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}| \leq C \left(\frac{m_{\widetilde{\kappa}_1}}{h_{\widetilde{\kappa}_1}} |\nabla^{\widetilde{\kappa}_1} p_\mathcal{D}| + \frac{m_{\widetilde{\kappa}_2}}{h_{\widetilde{\kappa}_2}} |\nabla^{\widetilde{\kappa}_2} p_\mathcal{D}| + \frac{m_{\widetilde{\kappa}_3}}{h_{\widetilde{\kappa}_3}} |\nabla^{\widetilde{\kappa}_3} p_\mathcal{D}| \right).$$

- Nous pouvons maintenant étudier le gradient de pression dans le volume de contrôle étudié κ et utiliser que $\vec{n}_{\sigma_1\kappa} = \vec{n}_{\sigma_2\kappa}$, de sorte que :

$$m_\kappa \nabla^\kappa p_\mathcal{D} = (m_{\sigma_1}(p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_4}) + m_{\sigma_2}(p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_4})) \vec{n}_{\sigma_1\kappa} + m_{\sigma_3}(p_{\mathcal{D}_3} - p_{\mathcal{D}_4}) \vec{n}_{\sigma_3\kappa},$$

ce qui implique,

$$|p_{\mathcal{D}_3} - p_{\mathcal{D}_4}| = \frac{m_{\sigma_1} + m_{\sigma_2}}{2} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D} \wedge \vec{n}_{\sigma_1\kappa}| \leq C \frac{m_\kappa}{h_\kappa} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D}|.$$

Remarquons alors que nous pouvons écrire :

$$m_\kappa \nabla^\kappa p_\mathcal{D} \wedge m_{\sigma_3} \vec{n}_{\sigma_3\kappa} = ((m_{\sigma_1} + m_{\sigma_2}) \vec{n}_{\sigma_1\kappa} \wedge m_{\sigma_3} \vec{n}_{\sigma_3\kappa}) (p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_4}) + (m_{\sigma_2} \vec{n}_{\sigma_1\kappa} \wedge m_{\sigma_3} \vec{n}_{\sigma_3\kappa}) (p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_4}),$$

ce qui donne

$$|p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_4}| \leq \frac{m_{\sigma_3}}{2} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D} \wedge \vec{n}_{\sigma_3\kappa}| + |p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}| \leq C \frac{m_\kappa}{h_\kappa} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D}| + |p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}|.$$

Un raisonnement similaire permet également d'obtenir :

$$|p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_3}| \leq \frac{m_{\sigma_4}}{2} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D} \wedge \vec{n}_{\sigma_4\kappa}| + |p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}| \leq C \frac{m_\kappa}{h_\kappa} |\nabla^\kappa p_\mathcal{D}| + |p_{\mathcal{D}_1} - p_{\mathcal{D}_2}|.$$

En regroupant toutes les estimations ci-dessus, nous observons que toutes les différences entre deux valeurs de pression voisines peuvent être bornées en utilisant au plus 4 valeurs du gradient de pression sur des mailles primales voisines. Nous pouvons alors conclure la preuve de la même manière que dans la proposition précédente. ■

Pour finir, nous sommes en mesure de prouver la même propriété de stabilité Inf-Sup pour des maillages hautement non-conformes, c'est à dire pour des maillages qui possèdent une proportion constante d'arêtes non-conformes. Ce résultat semble montrer que la stabilité Inf-Sup de la méthode DDFV est très robuste vis-à-vis de la non-conformité du maillage.

Proposition V.6 (Le maillage en damier)

Pour la famille de maillages en damier décrite sur la Figure V.1c, l'inégalité (V.3) est satisfaite avec $\alpha_{\mathcal{T}}$ indépendant de $\text{size}(\mathcal{T})$.

Ainsi, le schéma DDFV est Inf-Sup stable pour cette famille particulière de maillages non-conformes.

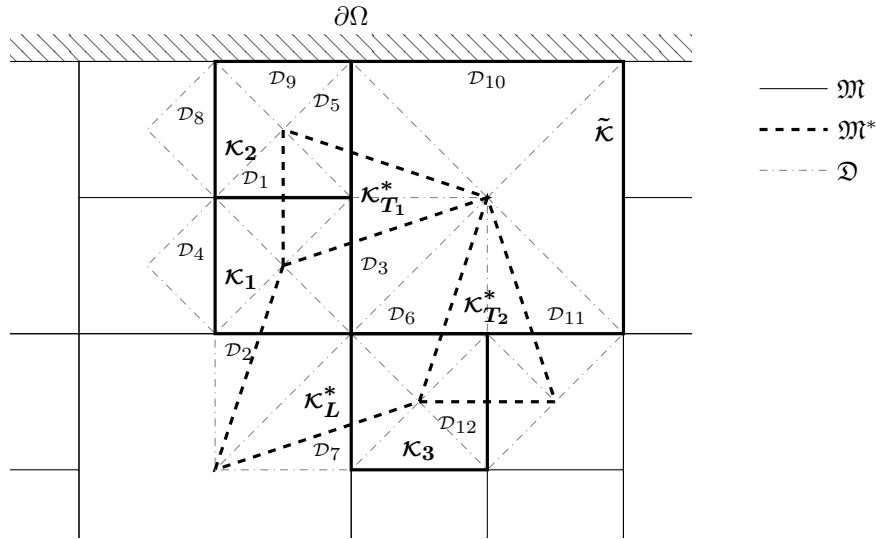


Figure V.4: Configurations possibles des mailles diamants voisines pour le maillage en damier, cf Fig. V.1c

Démonstration : Commençons par quelques remarques. Tout d'abord, les plus petites mailles primales sont des carrés pour lesquels il est impossible de borner toutes les différences possibles de pressions qui leur sont associées en utilisant simplement le gradient de pression primal (puisque le mode de pression pour lequel deux pressions opposées sont égales à 1 et les deux autres à -1 possède clairement un gradient de pression nul). Deuxièmement, les plus grandes mailles primales sont des octogones dégénérés puisqu'elles sont associées à 8 arêtes/mailles diamants différentes. Ces deux raisons rendent l'analyse assez compliquée.

Toutes les configurations possibles de mailles diamants voisines sont présentées sur la Figure V.4.

- Etudions d'abord la situation loin du bord. En utilisant que le volume de contrôle primal κ_1 est un carré, nous déduisons

$$p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_1} p_{\mathcal{D}_2} \text{ et } p_{\mathcal{D}_3} \xrightarrow{\kappa_1} p_{\mathcal{D}_4}.$$

De plus, en utilisant que la maille duale $\kappa_{T_1}^*$ est un triangle, nous avons :

$$p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_3}, \quad p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5} \text{ et } p_{\mathcal{D}_3} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5}.$$

Finalement, nous utilisons que κ_L^* est un parallélogramme donc $m_{\sigma_3} = m_{\sigma_7}$, $\vec{n}_{\sigma_3\kappa} = -\vec{n}_{\sigma_7\kappa}$ et $m_{\sigma_2} = m_{\sigma_6}$, $\vec{n}_{\sigma_2\kappa} = -\vec{n}_{\sigma_6\kappa}$ de sorte que :

$$m_{\kappa_L^*} \nabla^{\kappa_L^*} p_{\mathcal{D}} = m_{\sigma_2} (p_{\mathcal{D}_2} - p_{\mathcal{D}_6}) \vec{n}_{\sigma_2\kappa} + m_{\sigma_3} (p_{\mathcal{D}_3} - p_{\mathcal{D}_7}) \vec{n}_{\sigma_3\kappa}.$$

Ainsi, tout comme dans un carré, les différences entre deux pressions opposées peuvent être contrôlées par le gradient de pression :

$$p_{\mathcal{D}_2} \xrightarrow{\kappa_L^*} p_{\mathcal{D}_6} \text{ et } p_{\mathcal{D}_3} \xrightarrow{\kappa_L^*} p_{\mathcal{D}_7}.$$

Nous pouvons alors regrouper les relations précédentes, pour obtenir :

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}_1} &\xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_3} \xrightarrow{\kappa_1} p_{\mathcal{D}_4}, & p_{\mathcal{D}_1} &\xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5} \xrightarrow{\kappa_2} p_{\mathcal{D}_8}, \\ p_{\mathcal{D}_3} &\xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_1} p_{\mathcal{D}_2}, & p_{\mathcal{D}_3} &\xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_1} p_{\mathcal{D}_2} \xrightarrow{\kappa_L^*} p_{\mathcal{D}_6}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de symétrie du maillage, nous pouvons voir que toutes les différences de pressions possibles entre deux mailles diamants intérieures voisines peuvent être estimées par les calculs précédents. Notons que certaines de ces estimations utilisent à la fois le gradient de pression primal et le gradient de pression dual.

- Il reste à étudier le cas des mailles diamants sur le bord car, rappelons-le, nous avons imposé que le gradient de pression sur les mailles duales du bord soit égal à 0 (cf Remarque IV.6) et par conséquent nous ne pouvons pas l'utiliser pour obtenir les estimations recherchées.

Nous observons sur la Figure V.4 que nous devons étudier deux types de mailles diamants sur le bord.

- Les termes impliquant la maille diamant $\mathcal{D}_9$ peuvent être traités, comme dans le cas des mailles diamants intérieures, en utilisant le gradient de pression primal sur κ_2 et le gradient de pression dual sur $\kappa_{T_1}^*$:

$$p_{\mathcal{D}_9} \xrightarrow{\kappa_2} p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5} \quad \text{et} \quad p_{\mathcal{D}_9} \xrightarrow{\kappa_2} p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5} \xrightarrow{\kappa_2} p_{\mathcal{D}_8}.$$

- En utilisant les symétries du maillage, nous voyons que le seul terme impliquant la maille diamant $\mathcal{D}_{10}$ que nous devons étudier avec soin est le terme $p_{\mathcal{D}_{10}} - p_{\mathcal{D}_5}$, puisque la maille duale correspondante est une maille duale du bord pour laquelle le gradient de pression correspondant ne peut pas être utilisé.

Notons que, par définition du gradient de pression sur la maille duale $\tilde{\kappa}$, nous avons

$$m_{\sigma_{10}} \left(p_{\mathcal{D}_{10}} - \frac{1}{2}(p_{\mathcal{D}_6} + p_{\mathcal{D}_{11}}) \right) = m_{\tilde{\kappa}} \left(\nabla^{\tilde{\kappa}} p_{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma_{10}\tilde{\kappa}} \right).$$

Il en résulte que la relation suivante est vérifiée :

$$p_{\mathcal{D}_{10}} \xrightarrow{\tilde{\kappa}} \begin{cases} p_{\mathcal{D}_6} & \xrightarrow{\kappa_{T_2}^*} p_{\mathcal{D}_{12}} \xrightarrow{\kappa_3} p_{\mathcal{D}_7} \xrightarrow{\kappa_L^*} p_{\mathcal{D}_3} \xrightarrow{\kappa_{T_1}^*} p_{\mathcal{D}_5}, \\ p_{\mathcal{D}_{11}} \end{cases}$$

ce qui termine la preuve. ■

V.2 Stabilité Inf-Sup de codimension 1

Dans cette section, nous étudions les propriétés de stabilité du schéma DDFV pour le problème de Stokes pour deux familles de maillages cartésiens sur le carré unité : le maillage cartésien uniforme standard et le maillage cartésien non-conforme séparé en deux sous-domaines (cf Figure V.5). Notons que la même analyse peut être appliquée à d'autres types de maillages cartésiens comme nous le verrons dans la Section V.3.

Dans chacun des cas, nous prouvons (Théorèmes V.8 et V.9) que la stabilité Inf-Sup n'est pas satisfaite. Plus précisément, nous prouvons que $\beta_{\mathcal{T}} = 0$ dans le cas conforme uniforme, et que $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ avec

$$\beta_{\mathcal{T}} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0,$$

dans le cas non-conforme.

Ce comportement de $\beta_{\mathcal{T}}$ démontre l'existence d'au moins un mode de pression instable. Plus précisément, nous prouvons (Théorème V.11) qu'il y a en fait un unique mode instable. Cela signifie que la propriété de stabilité Inf-Sup est satisfaite si nous imposons aux champs de pression d'être orthogonaux au mode instable, ou si nous ajoutons un terme approprié de stabilisation de rang 1 dans l'équation de la divergence. Nous appelons cette propriété la stabilité Inf-Sup de codimension 1.

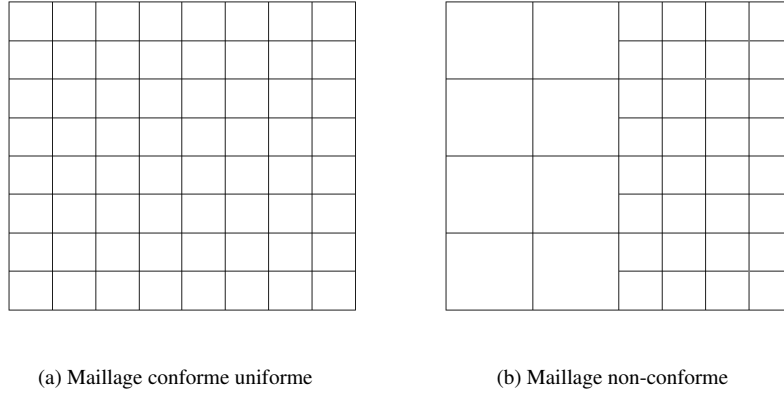
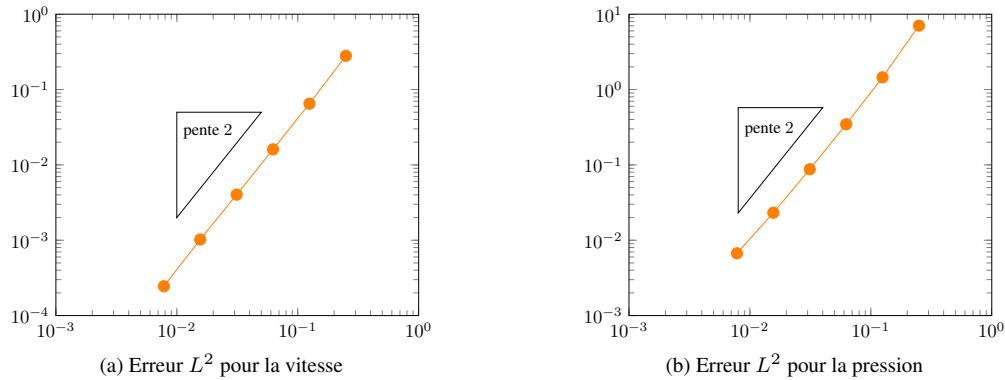


Figure V.5: Les maillages cartésiens étudiés

Ceci est cohérent avec le fait qu'en pratique le schéma DDFV se comporte très bien vis-à-vis de ce type de maillages. Pour illustrer ceci, nous traçons sur la Figure V.6, l'erreur L^2 pour la vitesse et la pression en utilisant la famille de maillages non-conformes de la Figure V.5b pour la solution exacte régulière donnée par :

$$u(x, y) = \begin{pmatrix} -2\pi \sin^2(\pi x) \cos(\pi y) \sin(\pi y) \\ 2\pi \sin^2(\pi y) \cos(\pi x) \sin(\pi x) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad p(x, y) = x + y - 1.$$

Nous observons la convergence à l'ordre deux pour la vitesse et la pression.

Figure V.6: Erreur L^2 en fonction du pas du maillage pour le maillage non-conforme (cf Fig. V.5b)

V.2.1 Instabilité Inf-Sup

Les maillages que nous considérons dans cette section sont cartésiens. Cela signifie que toutes les arêtes primales sont soit horizontales, soit verticales (notons que ce n'est pas nécessairement le cas pour les arêtes duales). Par conséquent, nous pouvons adopter les notations suivantes :

- $\mathfrak{D}^h$ est l'ensemble des mailles diamants dont l'arête primale associée est horizontale,
- $\mathfrak{D}^v$ est l'ensemble des mailles diamants dont l'arête primale associée est verticale.

De la même manière, nous notons $\partial\Omega^h$ (respectivement $\partial\Omega^v$) la partie horizontale (respectivement verticale) du bord du domaine.

Dans la suite, nous allons démontrer que la partie instable du schéma est entièrement contenue dans un mode de pression qui est très proche du mode en damier défini de la manière suivante.

Définition V.7 (Mode en damier)

Le mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ est défini par :

$$\psi_{\mathfrak{D}} = \begin{cases} +1, & \text{pour } \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}^v, \\ -1, & \text{pour } \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}^h. \end{cases}$$

Notons que $m(\psi_{\mathfrak{D}}) = 0$ et $\|\psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = 1$ pour les deux types de maillages cartésiens étudiés dans cette section (cf Figure V.5).

Nous obtenons facilement le résultat suivant.

Théorème V.8 (Instabilité Inf-Sup pour le maillage cartésien uniforme)

Pour un maillage cartésien uniforme $\mathcal{T}$, le mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ satisfait

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathfrak{D}}) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0.$$

En conséquence, nous avons $\beta_{\mathcal{T}} = 0$.

Démonstration : Par définition de $\psi_{\mathfrak{D}}$ et puisque toutes les mailles primales et duales intérieures sont des carrés, nous avons :

$$\nabla^{\mathcal{K}} \psi_{\mathfrak{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad \text{et} \quad \nabla^{\mathcal{K}^*} \psi_{\mathfrak{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*.$$

Cela implique évidemment que :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathfrak{D}}) = -[\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \nabla^{\mathcal{T}} \psi_{\mathfrak{D}}]_{\mathcal{T}} = 0.$$

■

Dans le cas des maillages cartésiens non-conformes, l'analyse n'est pas aussi simple et nous devons prouver que $\nabla^{\mathcal{T}} \psi_{\mathfrak{D}}$ ne s'annule pas mais est "petit" dans un sens adéquat. Ceci implique que $\beta_{\mathcal{T}}$ n'est pas nul dans ce cas mais tend vers 0 quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Le résultat exact est le suivant.

Théorème V.9 (Instabilité Inf-Sup pour le maillage cartésien non-conforme)

Pour la famille de maillages décrite sur la Figure V.5b, il existe des constantes $C_5, C_6 > 0$, indépendantes de $\text{size}(\mathcal{T})$, telles que le mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ satisfasse :

$$C_5 \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}} \leq C_6 \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}.$$

Ceci implique en particulier que $\beta_{\mathcal{T}} \leq C_6 \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}$.

Démonstration : Cette preuve est divisée en plusieurs étapes. Pour tout $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, nous commençons par évaluer la contribution des mailles primales dans $b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathfrak{D}})$, puis celle des mailles duales dans le but d'obtenir (V.10). La Définition V.7 du mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ conduit alors à la borne supérieure. Pour conclure, avec un choix particulier de la vitesse discrète $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$, nous sommes en mesure de prouver la borne inférieure.

Pour simplifier les notations dans cette démonstration, nous notons h la longueur des arêtes primales du côté où les mailles sont le moins raffinées.

- Tout d'abord nous montrons que, pour tout $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, la contribution des mailles primales dans le terme $b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathfrak{D}})$ est nulle.

Nous pouvons noter que si $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ possède exactement quatre arêtes primales, alors le même calcul que celui effectué pour les maillages cartésiens uniformes montre que $\nabla^{\mathcal{K}} \psi_{\mathfrak{D}} = 0$. Il reste à étudier le cas des mailles primales possédant cinq arêtes, c'est à dire les volumes de contrôle situés juste à gauche de l'interface (cf Figure V.7). Pour un tel volume de contrôle primal κ_i^l , nous avons :

$$m_{\kappa_i^l} \nabla^{\kappa_i^l} \psi_{\mathfrak{D}} = h(\psi_{\mathfrak{D}_{i+1/2}^l} - \psi_{\mathfrak{D}_{i-1/2}^l}) \mathbf{e}_y + \frac{h}{2}(\psi_{\mathfrak{D}_i^+} + \psi_{\mathfrak{D}_i^-} - 2\psi_{\mathfrak{D}_i^l}) \mathbf{e}_x.$$

Puisque $\mathfrak{D}_i^+, \mathfrak{D}_i^-, \mathfrak{D}_i^l$ sont des mailles diamants verticales et $\mathfrak{D}_{i+1/2}^l, \mathfrak{D}_{i-1/2}^l$ des mailles diamants horizontales, nous avons :

$$\psi_{\mathfrak{D}_i^+} = \psi_{\mathfrak{D}_i^-} = \psi_{\mathfrak{D}_i^l} = 1 \quad \text{et} \quad \psi_{\mathfrak{D}_{i+1/2}^l} = \psi_{\mathfrak{D}_{i-1/2}^l} = -1,$$

de sorte que nous avons également dans ce cas $\nabla^{\kappa_i^l} \psi_{\mathfrak{D}} = 0$.

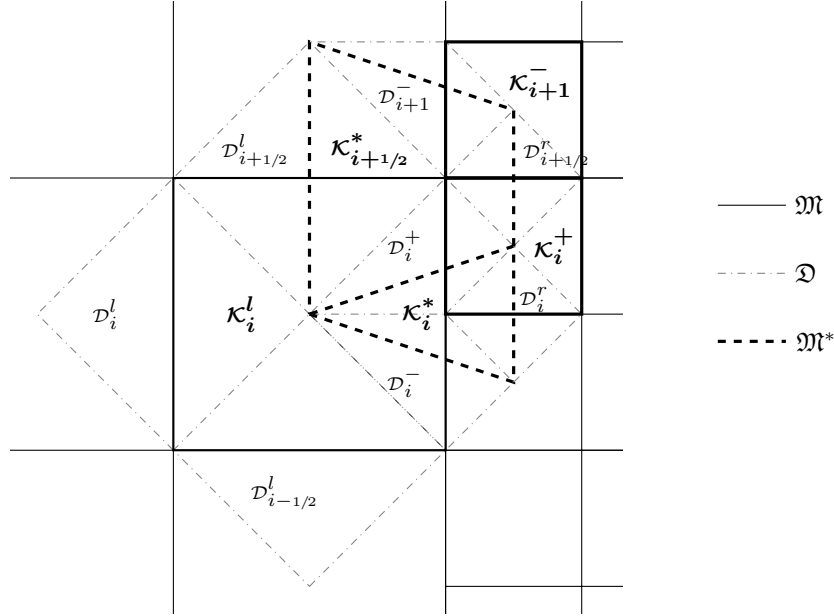


Figure V.7: Quelques notations près de l'interface pour le maillage cartésien non-conforme, Fig. V.5b

- Intéressons nous maintenant aux mailles duales. Pour une maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ associée à un sommet $x_{\mathcal{K}^*}$ qui n'est pas sur l'interface I , nous avons $\nabla^{\mathcal{K}^*} \psi_{\mathcal{D}} = 0$. La preuve est la même que pour le cas des maillages cartésiens uniformes.

Il reste à étudier les contributions des mailles duales associées à des sommets situés sur l'interface. La géométrie du maillage est telle que ces mailles sont décomposées en deux catégories. Certaines d'entre elles sont des mailles triangles $\mathcal{K}_i^*$, pour $i = 1, \dots, N$, les autres sont des mailles trapèzes $\mathcal{K}_{i+1/2}^*$, pour $i = 1, \dots, N-1$ (cf Figure V.7). Ici, nous avons posé $N = n_e/2$, n_e étant le nombre total d'arêtes primales qui constituent l'interface.

- Commençons par remarquer que sur la maille duale triangle $\mathcal{K}_i^*$, nous avons :

$$m_{\sigma_{i+}^*} \vec{n}_{\sigma_{i+}^*} = -\frac{h}{4} \mathbf{e}_x + \frac{3h}{4} \mathbf{e}_y \quad \text{et} \quad m_{\sigma_{i-}^*} \vec{n}_{\sigma_{i-}^*} = -\frac{h}{4} \mathbf{e}_x - \frac{3h}{4} \mathbf{e}_y$$

où nous avons noté σ_{i+}^* (respectivement σ_{i-}^*) l'arête duale associée à la maille diamant $\mathcal{D}_i^+$ (respectivement $\mathcal{D}_i^-$).

Alors, la Définition V.7 du mode en damier implique :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}_i^*} \nabla^{\mathcal{K}_i^*} \psi_{\mathcal{D}} &= \frac{h}{2} \left(\psi_{\mathcal{D}_i^+} - \frac{1}{2} (\psi_{\mathcal{D}_i^-} + \psi_{\mathcal{D}_{i+1}^+}) \right) \mathbf{e}_x + \frac{3h}{4} (\psi_{\mathcal{D}_i^+} - \psi_{\mathcal{D}_i^-}) \mathbf{e}_y \\ &= -h \mathbf{e}_x, \quad \forall i = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

- De la même manière, pour la maille duale trapèze $\mathcal{K}_{i+1/2}^*$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \nabla^{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \psi_{\mathcal{D}} &= h \left(\frac{1}{2} \psi_{\mathcal{D}_{i+1/2}^+} - \psi_{\mathcal{D}_{i+1/2}^-} + \frac{1}{4} (\psi_{\mathcal{D}_i^+} + \psi_{\mathcal{D}_{i+1}^-}) \right) \mathbf{e}_x + \frac{3h}{4} (\psi_{\mathcal{D}_{i+1}^-} - \psi_{\mathcal{D}_i^+}) \mathbf{e}_y \\ &= h \mathbf{e}_x, \quad \forall i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Nous observons que les orientations de ces deux gradients sont exactement opposées; c'est précisément la raison pour laquelle nous sommes en mesure de prouver que la contribution de ces termes dans $b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathcal{D}})$ est petite. Plus précisément, pour tout $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, nous avons :

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \psi_{\mathcal{D}}) = -\frac{h}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{v}_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{K}_i^*}) \cdot \mathbf{e}_x, \quad (\text{V.10})$$

où nous rappelons que sur la maille $\mathcal{K}_{N+1/2}^*$ du bord $\mathbf{v}_{\mathcal{K}_{N+1/2}^*}$ est égal à 0 car $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$.

- Pour tout $1 \leq i \leq N$, nous considérons la maille diamant $\mathcal{D}_i^+$. Par définition du gradient de vitesse discret sur $\mathcal{D}_i^+$, nous avons :

$$(\mathbf{v}_{\kappa_{i+1/2}^*} - \mathbf{v}_{\kappa_i^*}) \cdot \mathbf{e}_x = \frac{h}{2} \mathbf{e}_x \cdot \nabla^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_\tau \cdot \mathbf{e}_y.$$

Par conséquent, pour un certain $C > 0$ indépendant du pas du maillage, nous obtenons :

$$\frac{h}{2} \left| (\mathbf{v}_{\kappa_{i+1/2}^*} - \mathbf{v}_{\kappa_i^*}) \cdot \mathbf{e}_x \right| \leq C m_{\mathcal{D}_i^+} |\nabla^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_\tau|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{v}_\tau, \psi_\mathfrak{D}) &\leq C \sum_{i=1}^N m_{\mathcal{D}_i^+} |\nabla^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_\tau| \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2} \left(\sum_{i=1}^N m_{\mathcal{D}_i^+} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2} \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

et la borne supérieure est démontrée.

- Il reste à prouver la borne inférieure. Pour cela, nous construisons un champ de vitesse discret particulier $\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0$ parallèle à $\mathbf{e}_x$, qui est nul partout sauf sur la composante horizontale de chaque maille diamant triangle de l'interface κ_i^* , $i = 1, \dots, N$, pour laquelle nous choisissons $\mathbf{v}_{\kappa_i^*} = \mathbf{e}_x$.

Par des calculs simples, en utilisant (V.10) nous obtenons :

$$b(\mathbf{v}_\tau, \psi_\mathfrak{D}) = \frac{hN}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2} \leq \frac{C}{\text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}},$$

qui impliquent la borne inférieure annoncée. ■

V.2.2 Stabilité Inf-Sup orthogonalement au mode en instable

Malgré l'instabilité Inf-Sup du schéma DDFV sur les maillages cartésiens que nous avons établi dans la section précédente, nous observons (cf Figure V.6) que ce schéma est tout de même très précis. Notons que, dans le cas des maillages cartésiens uniformes, nous devons ajouter un terme de stabilisation (car sinon le schéma n'est pas bien posé puisque $\beta_\tau = 0$), mais l'ordre de ce terme ne semble pas avoir d'influence sur la précision de la méthode.

Nous proposons une interprétation de cet étonnamment bon comportement en montrant qu'il y a essentiellement un seul mode instable et que, dans l'orthogonal de ce mode, l'inégalité Inf-Sup uniforme est vérifiée. De plus, ce mode instable est très proche (mais pas toujours égal) du mode en damier $\psi_\mathfrak{D}$ que nous avons défini précédemment (cf Théorème V.14). Nous renvoyons, par exemple, à la discussion se trouvant dans [BF91, Section II.3].

Etude numérique des maillages cartésiens

Tout d'abord, nous illustrons numériquement ce phénomène sur la Figure V.8 en traçant en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$:

- la valeur de β_τ ,
- la valeur de $\sqrt{\lambda_3(S_\mathfrak{D})}$ où $\lambda_3(S_\mathfrak{D})$ est la valeur propre suivante du complément de Schur du système,
- la valeur de la constante Inf-Sup de codimension 1 suivante :

$$\widetilde{\beta}_\tau = \inf_{\substack{p_\mathfrak{D} \in \{\psi_\mathfrak{D}\}^\perp \\ m(p_\mathfrak{D})=0}} \left(\sup_{\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{b(\mathbf{v}_\tau, p_\mathfrak{D})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2} \|p_\mathfrak{D}\|_{\mathfrak{D},2}} \right), \quad (\text{V.11})$$

où $\{\psi_\mathfrak{D}\}^\perp = \{p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} : \langle M_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}, \psi_\mathfrak{D} \rangle = 0\}$. Notons que $\widetilde{\beta}_\tau$ peut aussi être calculée en résolvant un problème de valeurs propres approprié que nous décrivons ci-dessous (Lemme V.10).

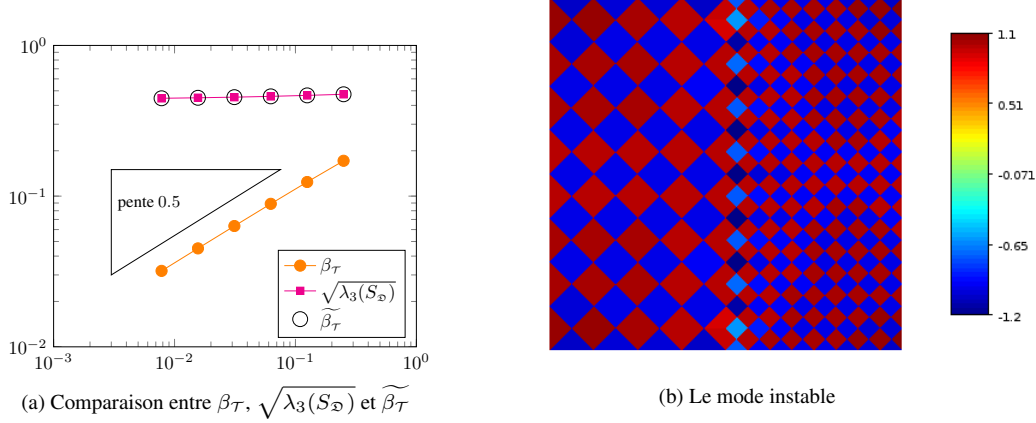


Figure V.8: Instabilité Inf-Sup pour le maillage cartésien non-conforme, cf Fig. V.5b

Nous observons sur la Figure V.8a que, conformément au Théorème V.9, $\beta_\tau \rightarrow 0$ quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Nous observons également que $\sqrt{\lambda_3(S_\mathfrak{D})}$ est minorée, ce qui confirme la présence d'un unique mode instable. De plus, $\widetilde{\beta}_\tau$ paraît également minorée et semble presque coïncider avec $\sqrt{\lambda_3(S_\mathfrak{D})}$. Ceci suggère que le mode instable (qui est le mode de pression pour lequel l'inégalité Inf-Sup est une égalité et est lié au vecteur propre de $S_\mathfrak{D}$ associé à $\lambda_2(S_\mathfrak{D})$) ne devrait pas être trop éloigné du mode en damier $\psi_\mathfrak{D}$ que nous avons introduit précédemment (cf Définition V.7). Ceci est confirmé par la Figure V.8b où nous traçons le mode instable obtenu numériquement, que nous notons $q_\mathfrak{D}$.

Même si nous ne connaissons pas la formule explicite de ce mode, nous montrons dans le Théorème V.14 que $\|q_\mathfrak{D} - \psi_\mathfrak{D}\|_{\mathfrak{D},2} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}$.

Lemme V.10

La constante Inf-Sup de codimension 1 définie en (V.11) satisfait :

$$\widetilde{\beta}_\tau^2 = \lambda_2(H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D}) \quad \text{avec} \quad H_\mathfrak{D} = \text{Id} - M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D}^t (M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D}) \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D}}(\mathbb{R}). \quad (\text{V.12})$$

Démonstration : En utilisant le même raisonnement que pour le Lemme IV.10, la définition (V.11) de $\widetilde{\beta}_\tau$ et les définitions des matrices données dans la Section IV.3.1 permettent d'obtenir :

$$\widetilde{\beta}_\tau^2 = \inf_{\substack{q_\mathfrak{D} \in M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \{\psi_\mathfrak{D}\}^\perp \\ \langle M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} q_\mathfrak{D}, 1_\mathfrak{D} \rangle = 0}} \frac{\langle S_\mathfrak{D} q_\mathfrak{D}, q_\mathfrak{D} \rangle}{\|q_\mathfrak{D}\|^2}.$$

Remarquons que $M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \{\psi_\mathfrak{D}\}^\perp = \{M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D}\}^\perp$ et notons $H_\mathfrak{D}$ la matrice de la projection orthogonale sur $\{M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} q_\mathfrak{D}\}^\perp$, alors pour tout $p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ nous avons :

$$H_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D} = p_\mathfrak{D} - \left\langle p_\mathfrak{D}, M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D} \right\rangle M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D},$$

de sorte que,

$$H_\mathfrak{D} = \text{Id} - M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D}^t (M_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}} \psi_\mathfrak{D}).$$

■

Algorithme de calcul de $\widetilde{\beta}_\tau$: Notons que la matrice $H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D}$ n'est pas inversible.

Cependant, considérons une valeur propre λ non nulle de $H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D}$, alors il existe $p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tel que

$$H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D} = \lambda p_\mathfrak{D},$$

ce qui implique que $p_\mathfrak{D} \in \text{Im}(H_\mathfrak{D})$. Or $H_\mathfrak{D}$ est une matrice de projection donc $H_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D} = p_\mathfrak{D}$. Ainsi, pour tout r , si λ est valeur propre de la matrice $H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D}$ alors λ est également valeur propre de la matrice $H_\mathfrak{D} S_\mathfrak{D} H_\mathfrak{D} + r(\text{Id} - H_\mathfrak{D})$.

Considérons maintenant $q_{\mathfrak{D}} \in (\text{Im} H_{\mathfrak{D}})^{\perp} = \text{Ker} H_{\mathfrak{D}}$ alors pour tout r ,

$$(H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})) q_{\mathfrak{D}} = r q_{\mathfrak{D}},$$

ce qui signifie que r est également valeur propre de la matrice $H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})$.

En conclusion, si nous choisissons $r > 0$ assez grand (de sorte que $r > \lambda_2(H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}})$), alors $\widetilde{\beta}_{\tau}$ est aussi la racine carrée de la seconde plus petite valeur propre de la matrice symétrique définie positive $H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})$.

Pour calculer $\widetilde{\beta}_{\tau}^2$ nous utilisons la méthode de Rayleigh-Ritz décrite dans la Section IV.3.2 sur la matrice $H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})$. Rappelons que lors de l'étape 2, $Q_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ étant connu, nous cherchons $P_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ tel que :

$$(H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})) P_{\mathfrak{D}} = Q_{\mathfrak{D}}. \quad (\text{V.13})$$

Pour résoudre ce système, nous le décomposons en plusieurs étapes :

- Dans un premier temps, nous cherchons $\widehat{p}_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\mathbf{u}_{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\tau}$ tels que $S_{\mathfrak{D}} \widehat{p}_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}}$. Pour cela, nous cherchons donc $\overline{p}_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\mathbf{u}_{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\tau}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} R_{\tau} & {}^t B_{\mathfrak{D},\tau} \\ B_{\mathfrak{D},\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\tau} \\ \overline{p}_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_{\mathfrak{D}} \psi_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix},$$

$$\langle M_{\mathfrak{D}} \overline{p}_{\mathfrak{D}}, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0.$$

Puis, nous posons $\widehat{p}_{\mathfrak{D}} = M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \overline{p}_{\mathfrak{D}}$.

Remarquons que cette étape est indépendante de $Q_{\mathfrak{D}}$ et peut donc être réalisée avant d'effectuer la méthode d'itération de sous-espaces.

- Nous cherchons ensuite $\ddot{P}_{\mathfrak{D}} = [\ddot{p}_{\mathfrak{D}}^1 \dots \ddot{p}_{\mathfrak{D}}^k] \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ tel que :

$$S_{\mathfrak{D}} \ddot{P}_{\mathfrak{D}} = H_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} + S_{\mathfrak{D}} \frac{\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}}{r} Q_{\mathfrak{D}},$$

ce qui revient à résoudre le problème de Stokes suivant :

Trouver $\widetilde{P}_{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{U}_{\tau} \in \mathcal{M}_{2N_{\tau},k}(\mathbb{R})$ tels que,

$$\begin{pmatrix} R_{\tau} & {}^t B_{\mathfrak{D},\tau} \\ B_{\mathfrak{D},\tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{\tau} \\ \widetilde{P}_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} H_{\mathfrak{D}} Q_{\mathfrak{D}} \end{pmatrix},$$

$$\langle M_{\mathfrak{D}} \widetilde{P}_{\mathfrak{D}}^i, 1_{\mathfrak{D}} \rangle = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Alors, $\ddot{P}_{\mathfrak{D}}$ est défini par $\ddot{P}_{\mathfrak{D}} = \frac{\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}}{r} Q_{\mathfrak{D}} + M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{P}_{\mathfrak{D}}$.

- Pour finir, nous posons $P_{\mathfrak{D}} = \widehat{P}_{\mathfrak{D}} + \ddot{P}_{\mathfrak{D}}$ avec $\widehat{P}_{\mathfrak{D}} = [\alpha_1 \widehat{p}_{\mathfrak{D}}, \dots, \alpha_k \widehat{p}_{\mathfrak{D}}] \in \mathcal{M}_{N_{\mathfrak{D}},k}(\mathbb{R})$ où nous allons convenablement choisir α_i pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$.

Rappelons que nous cherchons $P_{\mathfrak{D}}$ satisfaisant :

$$(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) Q_{\mathfrak{D}} = (\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) (H_{\mathfrak{D}} S_{\mathfrak{D}} H_{\mathfrak{D}} + r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})) P_{\mathfrak{D}}$$

et donc en remarquant que $H_{\mathfrak{D}}$ est une matrice de projection, nous avons :

$$(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) Q_{\mathfrak{D}} = r(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}})^2 P_{\mathfrak{D}}.$$

Alors, les définitions de $P_{\mathfrak{D}}$ et $\ddot{P}_{\mathfrak{D}}$ impliquent :

$$(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) \widehat{P}_{\mathfrak{D}} = (\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) \left(\frac{\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}}{r} Q_{\mathfrak{D}} - \ddot{P}_{\mathfrak{D}} \right) = -(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{P}_{\mathfrak{D}}.$$

De plus, rappelons que la définition (V.12) de la matrice de projection $H_{\mathfrak{D}}$ donne :

$$(\text{Id} - H_{\mathfrak{D}}) x_{\mathfrak{D}} = \left\langle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}}, x_{\mathfrak{D}} \right\rangle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}}, \quad \forall x_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}},$$

donc pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, α_i doit vérifier :

$$\alpha_i \left\langle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}}, \widehat{p_{\mathfrak{D}}} \right\rangle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}} = \left\langle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}}, M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \widetilde{p_{\mathfrak{D}}^i} \right\rangle M_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}} \psi_{\mathfrak{D}},$$

c'est à dire,

$$\alpha_i = - \frac{\left\langle M_{\mathfrak{D}} \widetilde{p_{\mathfrak{D}}^i}, \psi_{\mathfrak{D}} \right\rangle}{\left\langle M_{\mathfrak{D}} \overline{p_{\mathfrak{D}}^i}, \psi_{\mathfrak{D}} \right\rangle}.$$

Il est alors facile de vérifier que $P_{\mathfrak{D}}$ ainsi construit satisfait bien (V.13).

Démonstration de la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1

Nous sommes maintenant en mesure de fournir une justification théorique de ces observations avec le résultat suivant.

Théorème V.11 (Stabilité Inf-Sup de Codimension 1)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV cartésien uniforme ou non-conforme comme décrit sur la Figure V.5. Alors, il existe une constante $C_7 > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que pour tout $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$,

$$\left[(p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0 \text{ et } m(p_{\mathfrak{D}}) = 0 \right] \implies \left[C_7 \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0} \frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}} \right],$$

ce qui signifie que $\widetilde{\beta}_{\mathcal{T}} \geq C_7$.

Ce théorème repose sur la proposition suivante qui est une généralisation de la Proposition V.1 adaptée au cadre que nous étudions.

Proposition V.12

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV cartésien, uniforme ou non-conforme, comme décrit sur la Figure V.5. Il existe $\alpha_{\mathcal{T}} > 0$, indépendant de $\text{size}(\mathcal{T})$, tel que pour tout $\mathbf{v}^h, \mathbf{v}^v \in (H_0^1(\Omega))^2$ satisfaisant

$$\text{div} \mathbf{v}^h = 0 \text{ sur } \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v} \mathcal{D}, \quad \text{et} \quad \text{div} \mathbf{v}^v = 0 \text{ sur } \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^h} \mathcal{D}, \quad (\text{V.14})$$

il existe $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ tel que

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \alpha_{\mathcal{T}} (\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} + \|\mathbf{v}^v\|_{H^1}), \quad (\text{V.15})$$

et pour tout $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$,

$$\left| \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} \left(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \text{div} \left(\frac{\mathbf{v}^h + \mathbf{v}^v}{2} \right) \right) \right| \leq \alpha_{\mathcal{T}} (\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} + \|\mathbf{v}^v\|_{H^1}) \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathcal{T},2}. \quad (\text{V.16})$$

Commençons par donner la preuve du Théorème V.11 en utilisant cette proposition.

Démonstration du Théorème V.11 Soit $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tel que $m(p_{\mathfrak{D}}) = 0$ et $(p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0$. Nous introduisons les parties "verticale" et "horizontale" de ce champ de pression définies par :

$$p_{\mathfrak{D}^v} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v} p_{\mathcal{D}} 1_{\mathcal{D}} \text{ et } p_{\mathfrak{D}^h} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^h} p_{\mathcal{D}} 1_{\mathcal{D}},$$

où $1_{\mathcal{D}}$ est la fonction indicatrice de la maille diamant $\mathcal{D}$.

Par définition du mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ (cf Définition V.7) nous notons que :

$$\int_{\Omega} p_{\mathfrak{D}^v} + \int_{\Omega} p_{\mathfrak{D}^h} = m(p_{\mathfrak{D}}) = 0 \text{ et } \int_{\Omega} p_{\mathfrak{D}^v} - \int_{\Omega} p_{\mathfrak{D}^h} = (p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0.$$

Il s'ensuit que les deux pressions $p_{\mathfrak{D}^h}$ et $p_{\mathfrak{D}^v}$ sont à moyenne nulle, de sorte que nous pouvons appliquer la Proposition IV.8 et définir $\mathbf{v}^h = \Pi(p_{\mathfrak{D}^h})$, $\mathbf{v}^v = \Pi(p_{\mathfrak{D}^v})$.

Nous pouvons remarquer que, par construction, $\text{div} \mathbf{v}^h = 0$ sur toutes les mailles diamants verticales, $\text{div} \mathbf{v}^v = 0$ sur toutes les mailles diamants horizontales et que $\text{div} \mathbf{v}^h + \text{div} \mathbf{v}^v = p_{\mathfrak{D}}$. Nous considérons maintenant $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ donné par la Proposition V.12 qui satisfait

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \alpha_{\mathcal{T}} (\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} + \|\mathbf{v}^v\|_{H^1}) \leq 2\alpha_{\mathcal{T}} \|\Pi\| \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}.$$

Nous pouvons à présent calculer

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}) = \frac{1}{2} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} \left(\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{v}^h + \mathbf{v}^v}{2} \right) \right).$$

De la Proposition V.12, nous déduisons

$$b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}}) \geq \frac{1}{2} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}^2 - 2\alpha_{\mathcal{T}} \|\Pi\| \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathcal{T},2}. \quad (\text{V.17})$$

- Dans le cas où $\|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathcal{T},2} \leq \frac{1}{8\alpha_{\mathcal{T}} \|\Pi\|} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}$, l'estimation (V.17) donne directement

$$\frac{b_{\mathcal{T}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}} \geq \frac{1}{4} \frac{\|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}^2}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}} \geq \frac{1}{8\alpha_{\mathcal{T}} \|\Pi\|} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2},$$

et le résultat est démontré.

- Supposons maintenant que $\|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathcal{T},2} \geq \frac{1}{8\alpha_{\mathcal{T}} \|\Pi\|} \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}$. Dans ce cas, nous définissons $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ par (V.9) comme pour le Théorème V.2 et le résultat se démontre de la même manière. ■

Il reste à donner la preuve de la proposition préliminaire. Pour cela, nous utilisons le lemme suivant qui est une conséquence directe de résultats classiques dans le cadre des volumes finis (cf par exemple [ABH07, Lemme 3.3]).

Lemme V.13

Il existe une constante $C_8 > 0$ telle que si σ_1 et σ_2 sont deux segments de $\mathbb{R}^2$ contenus dans un même ensemble convexe $\mathcal{P}$ d'intérieur non vide, alors nous avons :

$$\left| \frac{1}{m_{\sigma_1}} \int_{\sigma_1} \mathbf{v} - \frac{1}{m_{\sigma_2}} \int_{\sigma_2} \mathbf{v} \right| \leq C_8 \left(\frac{1}{m_{\sigma_1}} + \frac{1}{m_{\sigma_2}} \right) \frac{\operatorname{diam}(\mathcal{P})^2}{m_{\mathcal{P}}} \int_{\mathcal{P}} |\nabla \mathbf{v}|, \quad (\text{V.18})$$

pour tout $\mathbf{v} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$.

Notons que ce lemme est une conséquence immédiate du Lemme III.20 donné dans le Chapitre III.

Démonstration de la Proposition V.12 :

Afin de simplifier la présentation de cette preuve, nous posons $\mathbf{v}^{v,h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbf{v}^v + \mathbf{v}^h}{2}$.

La preuve est divisée en plusieurs étapes. Nous commençons par traiter le cas conforme (qui est plus simple) puis ensuite le cas non-conforme pour lequel une attention particulière est portée aux volumes de contrôle proches de l'interface.

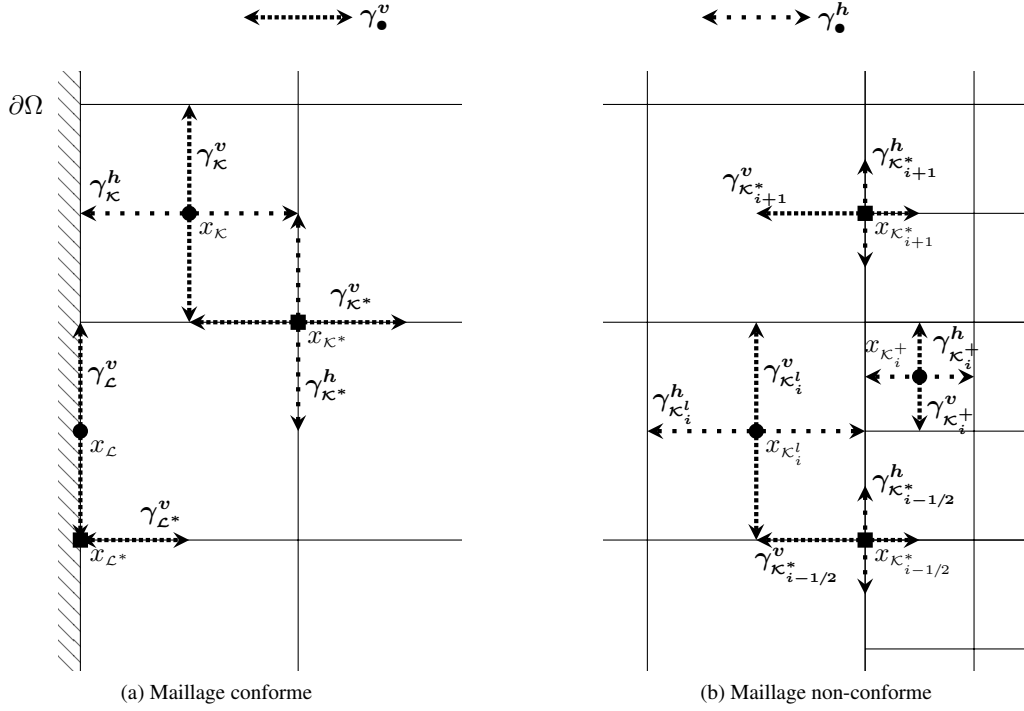
Tout d'abord, nous allons donner une formule explicite (V.19) pour la vitesse discrète $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ qui vérifiera toutes les conditions requises. L'estimation de stabilité (V.15) sera alors une simple conséquence du Lemme V.13.

La partie la plus difficile sera de prouver (V.16). Dans le cas de maillages uniformes, nous obtiendrons qu'en réalité seules les mailles diamants du bord contribuent à l'estimation et que la somme de toutes ces contributions peut être bornée par une certaine quantité dépendant du gradient de vitesse et des gradients de pression discrets. Pour les maillages non-conformes, des contributions supplémentaires provenant des mailles diamants près de l'interface doivent soigneusement être prises en compte.

- Pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ (respectivement $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$), nous considérons deux segments $\gamma_{\mathcal{K}}^v$ et $\gamma_{\mathcal{K}}^h$ (respectivement $\gamma_{\mathcal{K}^*}^v$ et $\gamma_{\mathcal{K}^*}^h$) inclus dans Ω passant par le point $x_{\mathcal{K}}$ (respectivement $x_{\mathcal{K}^*}$) comme décrits sur la Figure V.9. Notons que $\gamma_{\mathcal{K}^*}^v$ est horizontal et que $\gamma_{\mathcal{K}^*}^h$ est vertical; ceci est dû au fait que l'exposant indique le type du diamant (horizontal ou vertical) auquel contribuera $\gamma_{\bullet}^{\bullet}$ et non son orientation.

Nous pouvons maintenant construire $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ en posant

$$\begin{cases} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x, & \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}}^h}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}}^h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_y, & \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^h}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x, & \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*} \cdot \mathbf{e}_y = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y, & \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*. \end{cases} \quad (\text{V.19})$$

Figure V.9: Définition des segments $\gamma_{\bullet}^{\bullet}$

- Prouvons l'estimation de stabilité (V.15). Notons que,

$$m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) (|\mathbf{v}_{\kappa} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}}|^2 + |\mathbf{v}_{\kappa^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}^*}|^2),$$

et d'après le Lemme V.13,

$$|\mathbf{v}_{\kappa} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \int_{\widehat{\kappa \cup \mathcal{L}}} (|\nabla \mathbf{v}^v|^2 + |\nabla \mathbf{v}^h|^2),$$

$$|\mathbf{v}_{\kappa^*} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}^*}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \int_{\widehat{\kappa^* \cup \mathcal{L}^*}} (|\nabla \mathbf{v}^v|^2 + |\nabla \mathbf{v}^h|^2).$$

En utilisant que l'ensemble de toutes les enveloppes convexes de type $\widehat{\kappa \cup \mathcal{L}}$, par exemple, recouvre le domaine Ω au plus 5 fois, nous pouvons sommer toutes ces inégalités afin d'obtenir finalement :

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\mathfrak{D},2}^2 = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) (\|\mathbf{v}^v\|_{H^1}^2 + \|\mathbf{v}^h\|_{H^1}^2).$$

- Démontrons (V.16) dans le cas du maillage cartésien uniforme. Soit $p_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ et $\mathcal{D}$ une maille diamant. Nous devons étudier différents cas.

- Le cas où $\mathcal{D}$ n'est pas une maille diamant du bord. Nous supposons par exemple que $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v \setminus \mathfrak{D}_{ext}$, le cas d'une maille diamant horizontale étant similaire. Nous nous reportons à la Figure V.9a pour les notations.

En utilisant la définition de l'opérateur de divergence discret $\text{div}^{\mathfrak{D}}$ (cf Définition IV.3) et celle de $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ donnée par (V.19), nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{D}} \text{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} [m_{\sigma} (\mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{e}_x - \mathbf{v}_{\kappa} \cdot \mathbf{e}_x) + m_{\sigma^*} (\mathbf{v}_{\mathcal{L}^*} \cdot \mathbf{e}_y - \mathbf{v}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{e}_y)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_{\gamma_{\mathcal{L}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x - \int_{\gamma_{\kappa}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x + \int_{\gamma_{\mathcal{L}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\kappa^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right]. \end{aligned}$$

Nous utilisons la formule de Stokes sur le rectangle $R_{\mathcal{D}}$ dont les côtés sont γ_{κ}^v , $\gamma_{\kappa^*}^v$, $\gamma_{\mathcal{L}}^v$ et $\gamma_{\mathcal{L}^*}^v$ ce qui implique :

$$m_{\mathcal{D}} \text{div}^{\mathfrak{D}} (\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2} \int_{R_{\mathcal{D}}} \text{div} \mathbf{v}^v.$$

Puisque $\mathcal{D}$ est une maille diamant verticale, nous remarquons que $R_{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$ est inclus dans la réunion de toutes les mailles diamants horizontales. De l'hypothèse (V.14), nous déduisons que $\operatorname{div} \mathbf{v}^v$ est nul sur $R_{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}$. De plus, en utilisant encore une fois (V.14) nous obtenons $\operatorname{div} \mathbf{v}^h = 0$ sur $\mathcal{D}$. Il s'ensuit que :

$$m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \left(\frac{\mathbf{v}^v + \mathbf{v}^h}{2} \right) = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}.$$

Par conséquent, le terme correspondant dans le membre de gauche de (V.16) est tout simplement nul.

- Le cas où $\mathcal{D}$ est une maille diamant du bord. Nous supposons par exemple que $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v \cap \mathfrak{D}_{ext}$, car le cas d'une maille diamant horizontale du bord est similaire. Nous nous reportons à la Figure V.10 pour les notations.

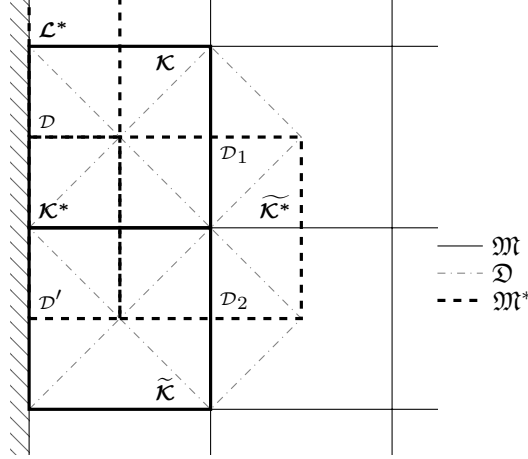


Figure V.10: Notations pour l'étude de la contribution des mailles diamants du bord

Puisque $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, nous avons $\mathbf{v}_{\mathcal{K}^*} = \mathbf{v}_{\mathcal{L}^*} = 0$ et vu que, par hypothèse, $\mathbf{v}^v$ est nul sur $\partial\Omega$ et que $\gamma_{\mathcal{L}}^v \subset \partial\Omega$, nous avons :

$$\mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \mathbf{e}_x = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_{\mathcal{L}} \cdot \mathbf{e}_x = 0 = \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{L}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x.$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left[- \int_{\gamma_{\mathcal{L}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x + \int_{\gamma_{\mathcal{K}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{R_{\mathcal{D}}} \operatorname{div} \mathbf{v}^v + \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\mathcal{L}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right), \end{aligned}$$

où $R_{\mathcal{D}}$ est le rectangle de côtés $\gamma_{\mathcal{K}}^v$, $\gamma_{\mathcal{K}^*}^v$, $\gamma_{\mathcal{L}}^v$ et $\gamma_{\mathcal{L}^*}^v$.

Par le même argument que pour le cas précédent, en utilisant (V.14), nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}} \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\mathcal{L}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right).$$

La somme de toutes les contributions des mailles diamants verticales du bord donne :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v \cap \mathfrak{D}_{ext}} p_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v \cap \mathfrak{D}_{ext}} p_{\mathcal{D}} \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\mathcal{L}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^* \\ x_{\mathcal{K}^*} \in \partial \Omega^v}} (p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}) \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ représentent les deux mailles diamants du bord ayant $x_{\mathcal{K}^*}$ comme sommet comme le montre la Figure V.10.

En utilisant les notations de la Figure V.10, pour tout maille $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ telle que $x_{\mathcal{K}^*} \in \partial\Omega^v$ nous voyons que la suite $p_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\mathcal{K}} p_{\mathcal{D}_1} \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{K}}^*} p_{\mathcal{D}_2} \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{K}}} p_{\mathcal{D}'}$ est vérifiée. Il s'ensuit que,

$$|p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}| \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))\text{size}(\mathcal{T})(|\nabla^{\mathcal{K}} p_{\mathcal{D}}| + |\nabla^{\widetilde{\mathcal{K}}} p_{\mathcal{D}}| + |\nabla^{\widetilde{\mathcal{K}}^*} p_{\mathcal{D}}|).$$

De plus, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}^v \cap \mathfrak{D}_{ext}$ l'estimation (V.18) du Lemme V.13 donne :

$$\left| \frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \underbrace{\frac{1}{m_{\gamma_{\mathcal{L}}^v}} \int_{\gamma_{\mathcal{L}}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y}_{=0} \right| \leq \frac{C(\text{reg}(\mathcal{T}))}{m_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v}} \int_{\mathcal{K} \cup \widetilde{\mathcal{K}}} |\nabla \mathbf{v}^v|$$

de sorte que finalement, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left| \sum_{\substack{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^* \\ x_{\mathcal{K}^*} \in \partial\Omega^v}} (p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}) \int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right| \leq C \|\mathbf{v}^v\|_{H^1} \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2}.$$

– En conclusion, nous avons prouvé que :

$$\left| \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \text{div} \mathbf{v}^{v,h}) \right| \leq C (\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} + \|\mathbf{v}^v\|_{H^1}) \|h^{\mathcal{T}} \nabla^{\mathcal{T}} p_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{T},2}.$$

- Prouvons maintenant (V.16) pour le cas du maillage cartésien non-conforme défini sur la Figure V.5b. Nous commençons par écrire le terme étudié de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}} (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \text{div} \mathbf{v}^{v,h}) &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^* \\ x_{\mathcal{K}^*} \in \partial\Omega^v}} (p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}) \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^* \\ x_{\mathcal{K}^*} \in \partial\Omega^h \\ x_{\mathcal{K}^*} \notin I}} (p_{\mathcal{D}} - p_{\mathcal{D}'}) \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}^*}^h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x \right) + T_I. \end{aligned} \quad (\text{V.20})$$

Les deux premiers termes contiennent les contributions des mailles diamants du bord loin de l'interface, le calcul est le même que pour le cas conforme. Ces termes peuvent être estimés comme nous l'avons fait précédemment.

Il reste à calculer et estimer les contributions des mailles diamants près de l'interface que nous avons regroupées dans le terme T_I .

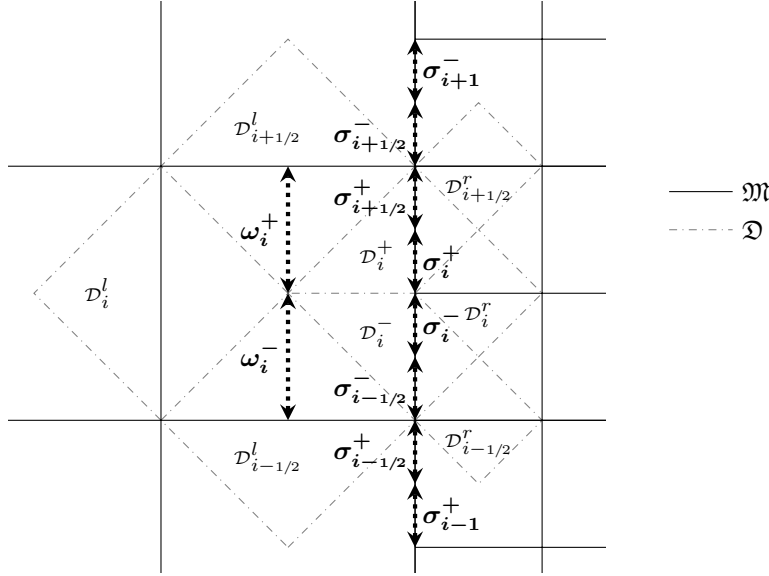
Nous notons $\mathfrak{D}^I$ l'ensemble des mailles diamants qui possèdent au moins un sommet sur l'interface. Cet ensemble contient à la fois des mailles diamants horizontales et des mailles diamants verticales et nous devons distinguer les deux cas. Une numérotation particulière de ces mailles diamants est donnée sur la Figure V.11. Sur la même figure, nous définissons des segments verticaux notés $\omega_{\bullet}^{\pm}$ et $\sigma_{\bullet}^{\pm}$ qui seront utiles dans la preuve.

Nous introduisons les flux suivants associés à chacun de ces segments :

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}^+ &= \int_{\sigma_{i+1/2}^+} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x, & F_i^+ &= \int_{\sigma_i^+} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x, \\ F_{i-1/2}^- &= \int_{\sigma_{i-1/2}^-} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x, & F_i^- &= \int_{\sigma_i^-} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x, \\ G_i^+ &= \int_{\omega_i^+} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x, & G_i^- &= \int_{\omega_i^-} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x. \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

Par souci de simplicité, nous utilisons la convention suivante :

$$F_{N+1/2}^- = F_{N+1/2}^+, \quad F_{1/2}^+ = F_{1/2}^-, \quad \text{et} \quad F_{N+1}^- = F_N^+.$$

Figure V.11: Définition de $\sigma_i^\pm$ et $\omega_i^\pm$ pour le maillage cartésien non-conforme

- Nous commençons par la contribution des diamants appartenant à $\mathcal{D}^v \cap \mathcal{D}^l$. Nous considérons par exemple le cas où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_i^+$ pour un certain $i \in \{1, \dots, N-1\}$. D'après la Figure V.12a et la définition de la divergence discrète, nous avons :

$$m_{\mathcal{D}_i^+} \operatorname{div}^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_\tau = \frac{1}{2} \left(m_{\gamma_{\mathcal{K}_i^+}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_i^+} \cdot \mathbf{e}_x - m_{\gamma_{\mathcal{K}_i^l}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_i^l} \cdot \mathbf{e}_x + m_{\gamma_{\mathcal{K}_i^*}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_i^*} \cdot \mathbf{e}_y - m_{\gamma_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \cdot \mathbf{e}_y \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m_{\gamma_{\mathcal{K}_i^+}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \cdot \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} m_{\gamma_{\mathcal{K}_i^+}^v} \mathbf{v}_{\mathcal{K}_i^*} \cdot \mathbf{e}_x \right).$$

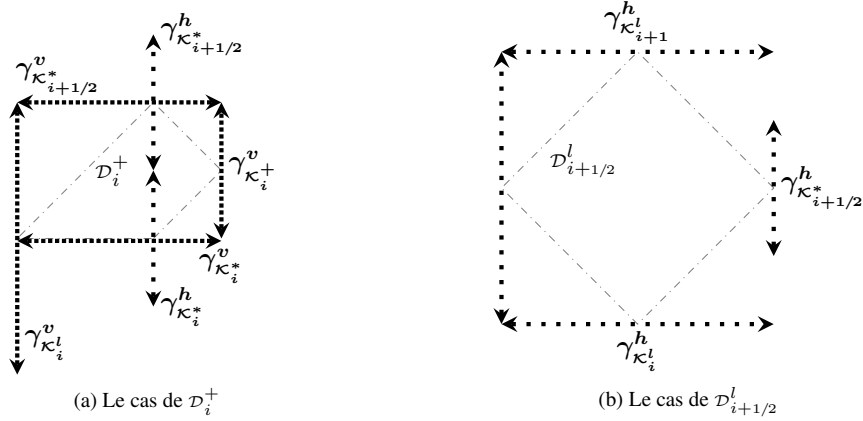


Figure V.12: Calcul des mailles diamants verticales de l'interface

La définition de $\mathbf{v}_\tau$ donnée par (V.19) donne :

$$m_{\mathcal{D}_i^+} \operatorname{div}^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_\tau = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_{\mathcal{K}_i^+}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\mathcal{K}_i^l}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x + \int_{\gamma_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\mathcal{K}_i^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\mathcal{K}_i^*}^h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*}^h} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x \right).$$

Si nous notons R_i^+ le rectangle de côtés $\gamma_{\kappa_i^*}^v, \gamma_{\kappa_i^+}^v, \gamma_{\kappa_{i+1/2}^*}^v, \omega_i^+$, en utilisant (V.14) nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}_i^+} \operatorname{div} \mathbf{v}^v &= \int_{R_i^+} \operatorname{div} \mathbf{v}^v \\ &= \int_{\gamma_{\kappa_i^+}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x - \int_{\omega_i^+} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x + \int_{\gamma_{\kappa_{i+1/2}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\kappa_i^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y. \end{aligned}$$

Par soustraction et en utilisant que $\operatorname{div} \mathbf{v}^h = 0$ sur $\mathcal{D}_i^+$ qui est une maille diamant verticale ainsi que la définition des flux (V.21), il s'ensuit que :

$$\int_{\mathcal{D}_i^+} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}_i^+} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{4} (G_i^+ - G_i^- + F_i^+ + F_i^- - F_{i+1/2}^+ - F_{i+1/2}^-).$$

Dans le cas où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_i^-$ pour $i \in \{2, \dots, N\}$, des calculs similaires permettent d'obtenir :

$$\int_{\mathcal{D}_i^-} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}_i^-} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{4} (-G_i^+ + G_i^- + F_i^+ + F_i^- - F_{i-1/2}^+ - F_{i-1/2}^-).$$

Pour la maille diamant du bord $\mathcal{D}_N^+$, en remarquant que $\mathbf{v}_{\kappa_{N+1/2}^*} = 0$ car $\kappa_{N+1/2}^* \in \partial \mathcal{M}^*$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, nous obtenons :

$$m_{\mathcal{D}_N^+} \operatorname{div}^{\mathcal{D}_N^+} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left(m_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}_{\kappa_N^+} \cdot \mathbf{e}_x - m_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}_{\kappa_N^+} \cdot \mathbf{e}_x - m_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}_{\kappa_N^+} \cdot \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} m_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}_{\kappa_N^+} \cdot \mathbf{e}_x \right).$$

Or, $\gamma_{\kappa_{N+1/2}^*}^v \in \partial \Omega^h$ donc $\int_{\gamma_{\kappa_{N+1/2}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y = 0$ (car $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$) et la définition de $\mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ donnée par (V.19) implique :

$$m_{\mathcal{D}_N^+} \operatorname{div}^{\mathcal{D}_N^+} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x - \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_x + \int_{\gamma_{\kappa_{N+1/2}^*}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y - \int_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}^v \cdot \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} \int_{\gamma_{\kappa_N^+}^v} \mathbf{v}^h \cdot \mathbf{e}_x \right).$$

Finalement, un raisonnement similaire à celui donné pour la maille diamant $\mathcal{D}_i^+$ permet d'obtenir :

$$\int_{\mathcal{D}_N^+} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}_N^+} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{4} (G_N^+ - G_N^- + F_N^+ + F_N^-).$$

Enfin, un raisonnement analogue pour la maille diamant du bord $\mathcal{D}_1^-$ donne :

$$\int_{\mathcal{D}_1^-} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}_1^-} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{4} (-G_1^+ + G_1^- + F_1^+ + F_1^-).$$

- Considérons maintenant les mailles diamants horizontales qui touchent l'interface. Nous pouvons facilement voir, par définition des segments $\gamma_{\kappa^*}^h$, que les mailles diamants intérieures se trouvant à droite de l'interface (c'est à dire $\mathcal{D}_i^r, i = 1, \dots, N$ et $\mathcal{D}_{i+1/2}^r, i = 1, \dots, N-1$, cf Figure V.11) ne contribuent pas à la somme étudiée. En fait, le calcul est exactement le même que pour le cas du maillage cartésien uniforme.

Il reste à étudier les contributions des mailles diamants horizontales de l'interface se trouvant du côté gauche de l'interface et notées $\mathcal{D}_{i+1/2}^l$ pour $i = 1, \dots, N-1$ (cf Figure V.12b).

Des calculs similaires à ceux détaillés ci-dessus donnent :

$$\int_{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} \mathbf{v}_{\mathcal{T}} - \operatorname{div} \mathbf{v}^{v,h}) = \frac{1}{2} (F_{i+1/2}^+ + F_{i+1/2}^- - F_i^+ - F_{i+1}^-).$$

Rassembler tous ces termes nous conduit à l'expression suivante du terme regroupant les contributions des mailles

diamants de l'interface :

$$\begin{aligned}
T_I = & \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N p_{\mathcal{D}_i^+} (G_i^+ - G_i^- + F_i^+ + F_i^- - F_{i+1/2}^+ - F_{i+1/2}^-) \\
& + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N p_{\mathcal{D}_i^-} (-G_i^+ + G_i^- + F_i^+ + F_i^- - F_{i-1/2}^+ - F_{i-1/2}^-) \\
& + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} (F_{i+1/2}^+ + F_{i+1/2}^- - F_i^+ - F_{i+1}^-) \\
& - \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} (F_{1/2}^- + F_1^-) + \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_1^-} F_{1/2}^- + \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_{1/2}^r} F_{1/2}^- \\
& - \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^l} (F_{N+1/2}^+ + F_N^+) + \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_N^+} F_{N+1/2}^+ + \frac{1}{2} p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^r} F_{N+1/2}^+.
\end{aligned}$$

Dans ce calcul nous avons fait attention au fait qu'une partie de la contribution des diamants du bord $\mathcal{D}_{1/2}^l$, $\mathcal{D}_{1/2}^r$, $\mathcal{D}_{N+1/2}^l$ et $\mathcal{D}_{N+1/2}^r$ a déjà été prise en compte dans le second terme du membre de droite de (V.20).

Nous pouvons maintenant réorganiser tous ces termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
4T_I = & \sum_{i=1}^N (p_{\mathcal{D}_i^+} - p_{\mathcal{D}_i^-}) (G_i^+ - G_i^-) \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} (2p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_i^+} - p_{\mathcal{D}_{i+1}^-}) (F_{i+1/2}^+ + F_{i+1/2}^- - F_i^+ - F_{i+1}^-) \\
& + \sum_{i=1}^{N-1} (F_{i+1}^- - F_i^+) (p_{\mathcal{D}_{i+1}^-} - p_{\mathcal{D}_i^-}) \\
& + \sum_{i=1}^N (F_i^- - F_{i+1}^-) (p_{\mathcal{D}_i^+} - p_{\mathcal{D}_i^-}) \\
& + 2F_1^- (p_{\mathcal{D}_1^-} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}) + 2F_{1/2}^- (p_{\mathcal{D}_{1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}) \\
& + 2F_N^+ (p_{\mathcal{D}_N^+} - p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^l}) + 2F_{N+1/2}^+ (p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^l}).
\end{aligned} \tag{V.22}$$

Dans cette formule, la différence des flux peut être estimée, comme précédemment, en terme de gradients de vitesse grâce au Lemme V.13. Il reste donc à borner toutes les différences de pression apparaissant dans cette formule au moyen des gradients de pression DDFV.

Pour $i \in \{1, \dots, N\}$, d'après la Figure V.7 nous avons :

$$m_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \nabla \kappa_{i+1/2}^* p_{\mathfrak{D}} = \left(-h p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} + \frac{h}{2} p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^r} + \frac{h}{4} (p_{\mathcal{D}_{i+1}^-} + p_{\mathcal{D}_i^+}) \right) \mathbf{e}_x + \frac{3h}{4} (p_{\mathcal{D}_{i+1}^-} - p_{\mathcal{D}_i^+}) \mathbf{e}_y \tag{V.23}$$

de sorte que,

$$2p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_i^+} - p_{\mathcal{D}_{i+1}^-} = \frac{1}{2} (p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_i^+}) + \frac{1}{2} (p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{i+1}^-}) - \frac{2}{h} m_{\mathcal{K}_{i+1/2}^*} \nabla \kappa_{i+1/2}^* p_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{e}_x.$$

De plus, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{array}{ccccc}
p_{\mathcal{D}_{i+1}^-} & \xrightarrow{\kappa_{i+1/2}^*} & p_{\mathcal{D}_i^+} & \xrightarrow{\kappa_i^*} & p_{\mathcal{D}_i^-}, \\
p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^r} & \xrightarrow{\kappa_i^+} & p_{\mathcal{D}_i^r} & \xrightarrow{\kappa_i^*} & p_{\mathcal{D}_i^+}, \\
p_{\mathcal{D}_{i+1/2}^r} & \xrightarrow{\kappa_{i+1}^-} & p_{\mathcal{D}_{i+1}^r} & \xrightarrow{\kappa_{i+1}^*} & p_{\mathcal{D}_{i+1}^-}.
\end{array}$$

Nous devons également borner les différences de pression $p_{\mathcal{D}_1^-} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}$, $p_{\mathcal{D}_{1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}$, $p_{\mathcal{D}_N^+} - p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^l}$ et $p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{N+1/2}^l}$ correspondant aux termes de bord. Donnons par exemple les détails du raisonnement pour $p_{\mathcal{D}_1^-} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}$ et

$p_{\mathcal{D}_{1/2}^r} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^l}$. Nous écrivons simplement,

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_1^-} &= \left(p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_1^+} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_1^+} - p_{\mathcal{D}_1^-} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} - p_{\mathcal{D}_1^r} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_1^r} - p_{\mathcal{D}_1^-} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_1^r} &= \left(p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} - p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_1^+} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_1^+} - p_{\mathcal{D}_1^r} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} - p_{\mathcal{D}_1^r} \right) + \left(p_{\mathcal{D}_1^r} - p_{\mathcal{D}_{1/2}^r} \right). \end{aligned}$$

En appliquant (V.23) à la maille duale $\kappa_{3/2}^*$, nous avons :

$$\frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} \right) + \frac{1}{2} \left(p_{\mathcal{D}_{3/2}^l} - p_{\mathcal{D}_1^+} \right) = \frac{1}{h} \left(\frac{1}{3} m_{\kappa_{3/2}^*} \nabla^{\kappa_{3/2}^*} p_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{e}_y - m_{\kappa_{3/2}^*} \nabla^{\kappa_{3/2}^*} p_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{e}_x \right).$$

De plus, les relations suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} p_{\mathcal{D}_{1/2}^l} &\xrightarrow{\kappa_1^l} p_{\mathcal{D}_{3/2}^l}, \\ p_{\mathcal{D}_1^+} &\xrightarrow{\kappa_1^*} p_{\mathcal{D}_1^r}, & p_{\mathcal{D}_1^r} &\xrightarrow{\kappa_1^*} p_{\mathcal{D}_1^-}, \\ p_{\mathcal{D}_{3/2}^r} &\xrightarrow{\kappa_1^+} p_{\mathcal{D}_1^r}, & p_{\mathcal{D}_1^r} &\xrightarrow{\kappa_1^-} p_{\mathcal{D}_{1/2}^r}. \end{aligned}$$

Pour conclure, nous utilisons toutes les estimations des différences de pression ci-dessus, le Lemme V.13 dans la formule (V.22) ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour obtenir :

$$|T_I| \leq C \left(\|\mathbf{v}^h\|_{H^1} + \|\mathbf{v}^v\|_{H^1} \right) \|h^\tau \nabla^\tau p_{\mathfrak{D}}\|_{\tau,2},$$

et le théorème est démontré en revenant à (V.20). ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que, asymptotiquement, le mode instable $q_{\mathfrak{D}}$ est sensiblement égal au mode en damier. Nous rappelons que d'après (IV.8), le mode instable $q_{\mathfrak{D}}$ est entièrement caractérisé par :

$$\beta_\tau = \sup_{\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{b(\mathbf{v}_\tau, q_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2}}, \quad m(q_{\mathfrak{D}}) = 0, \quad \|q_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = 1 \quad \text{et} \quad (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} > 0. \quad (\text{V.24})$$

Théorème V.14 (Asymptotique du mode instable)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV cartésien non-conforme comme décrit sur la Figure V.5b et $q_{\mathfrak{D}}$ le mode instable observé numériquement sur la Figure V.8b et caractérisé par (V.24). Il existe une constante $C_9 > 0$, ne dépendant pas de $\text{size}(\mathcal{T})$, telle que :

$$\|q_{\mathfrak{D}} - \psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq C_9 \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration : Nous posons

$$p_{\mathfrak{D}} = q_{\mathfrak{D}} - (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \psi_{\mathfrak{D}}, \quad (\text{V.25})$$

de sorte que $(p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0$ et $m(p_{\mathfrak{D}}) = 0$.

Nous appliquons le Théorème V.11 de manière à obtenir, en utilisant (V.24) et (V.25),

$$C_7 \|p_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \sup_{\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{b(\mathbf{v}_\tau, p_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2}} \leq \beta_\tau + (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \sup_{\mathbf{v}_\tau \in \mathbb{E}_0} \frac{b(\mathbf{v}_\tau, \psi_{\mathfrak{D}})}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}_\tau\|_{\mathfrak{D},2}}.$$

En notant que $\|\psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = \|q_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} = 1$ et $(q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \leq 1$, le Théorème V.9 implique :

$$\|q_{\mathfrak{D}} - (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq 2 \frac{C_6}{C_7} \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{V.26})$$

De plus, nous avons $(q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^2 = ((q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \psi_{\mathfrak{D}} - q_{\mathfrak{D}}, q_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} + \|q_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}^2$ et en utilisant le fait que $(p_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} = 0$ et l'inégalité (V.26), nous obtenons :

$$(q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^2 = 1 - \|q_{\mathfrak{D}} - (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}}) \psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2}^2 \geq 1 - 4 \frac{C_6^2}{C_7^2} \text{size}(\mathcal{T}).$$

Nous concluons la preuve en remarquant que,

$$\|q_{\mathfrak{D}} - \psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} \leq \|q_{\mathfrak{D}} - (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}}) \psi_{\mathfrak{D}}\|_{\mathfrak{D},2} + (1 - (q_{\mathfrak{D}}, \psi_{\mathfrak{D}})).$$

■

Vérifions maintenant que le mode instable $q_{\mathfrak{D}}$ converge faiblement vers 0. Le Théorème V.14 implique qu'il suffit de montrer que $\psi_{\mathfrak{D}}$ converge faiblement vers 0.

Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\Omega)$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_{\mathfrak{D}} f &= \int_{\Omega} \psi_{\mathfrak{D}} (f - \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m f) + \int_{\Omega} \psi_{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m f \\ &\leq \|\psi_{\mathfrak{D}}\|_{L^2(\Omega)} \|f - \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m f\|_{L^2(\Omega)} + \int_{\Omega} \psi_{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m f. \end{aligned}$$

Or, la Définition V.7 du mode en damier $\psi_{\mathfrak{D}}$ ainsi que le fait que les mailles primales sont toutes carrées impliquent :

$$\int_{\mathcal{K}} \psi_{\mathfrak{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}.$$

De plus, la définition de la projection moyenne implique :

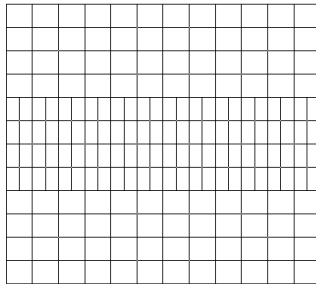
$$\|f - \mathbb{P}_{\mathcal{T}}^m f\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0.$$

Donc en notant que $\|\psi_{\mathfrak{D}}\|_{L^2(\Omega)} = 1$, par un argument classique de densité, nous obtenons bien la convergence faible de $\psi_{\mathfrak{D}}$ vers 0 et donc $q_{\mathfrak{D}}$ converge également faiblement vers 0.

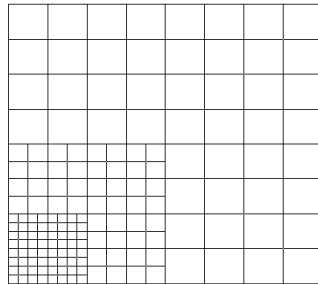
V.3 Résultats numériques supplémentaires et perspectives

Dans un premier temps nous considérons dans cette section d'autres types maillages cartésiens non conformes :

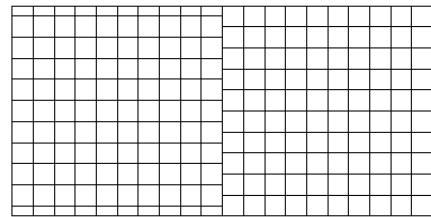
- deux sur le carré unité $\Omega =]0, 1[^2$ (cf Figures V.13a et V.13b) qui présentent plus d'une interface non-conforme;
- un sur le rectangle $\Omega =]-1, 1[\times]0, 1[$ (cf Figure V.13c) raffiné uniformément mais avec une interface non-conforme.



(a) Maillage avec deux interfaces



(b) Maillage localement raffiné



(c) Maillage uniforme non-conforme

Figure V.13: Autres maillages cartésiens non-conformes

Nous observons (cf Figure V.14) les mêmes résultats que dans le cas précédent, à savoir que la constante Inf-Sup $\beta_{\mathcal{T}}$ tend vers 0 et que $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathfrak{D}})}$ est minorée quand $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0. Dans chacun des cas, nous en déduisons que la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1 est vérifiée. Nous observons également (cf Figure V.15) que dans chaque cas le mode instable a encore la même forme que le mode en damier.

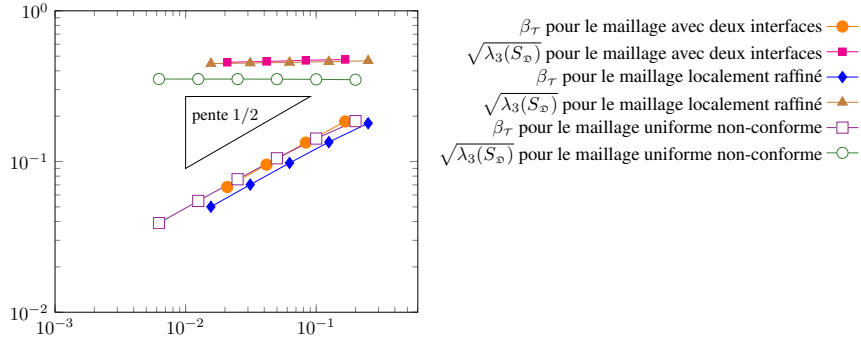


Figure V.14: La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{D}})}$ et $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{D}})}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

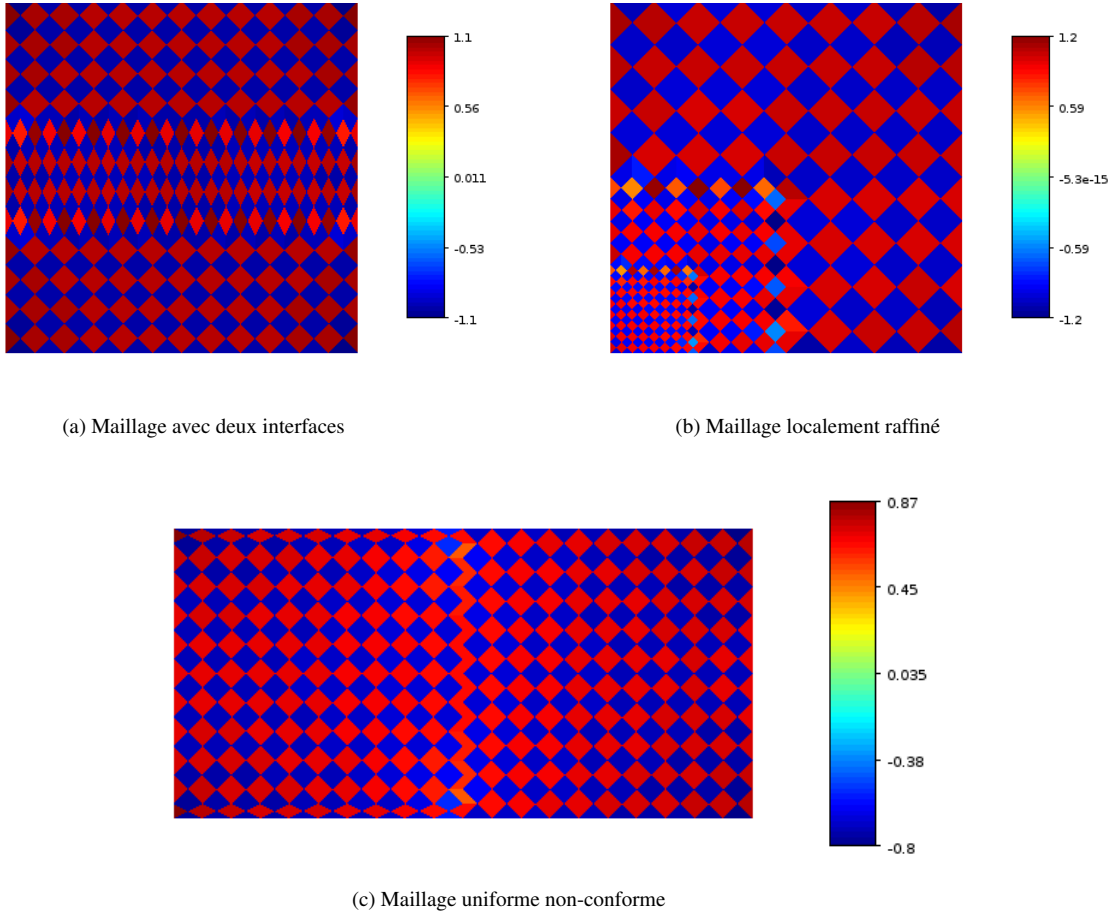
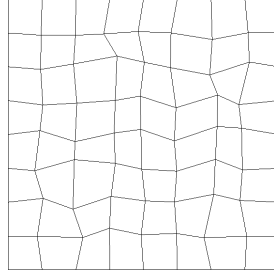
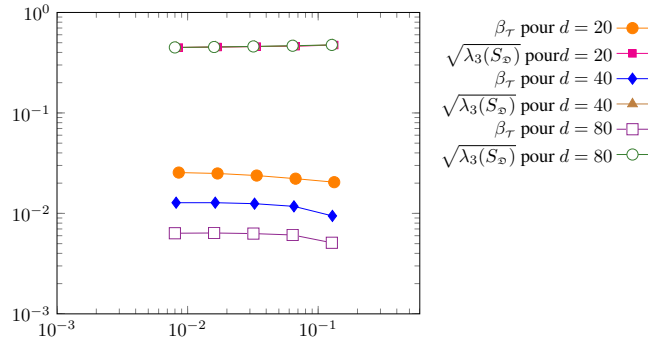


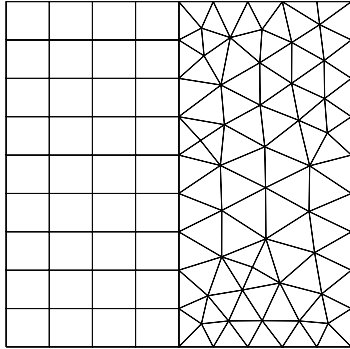
Figure V.15: Modes propres correspondants

Dans un second cas test, nous partons d'un maillage cartésien uniforme que nous déformons très légèrement (cf Figure V.16 pour un exemple avec une déformation plus forte) et nous observons numériquement le comportement de la constante Inf-Sup discrète associée. Plus précisément, nous considérons un maillage cartésien $\mathcal{T}$, nous choisissons un nombre $d > 0$ et nous déplaçons aléatoirement chacun des sommets intérieurs de ce maillage de $\pm \frac{\text{size}(\mathcal{T})}{d}$.

Nous observons alors (cf Figure V.17) que bien que l'amplitude de la déformation affecte la valeur de la constante Inf-Sup discrète, elle n'influe pas sur la stabilité Inf-Sup du maillage. En effet, même lorsque le maillage est très légèrement déformé, la propriété de stabilité Inf-Sup est toujours vérifiée. Remarquons également que la valeur de $\sqrt{\lambda_3(S_{\mathcal{D}})}$ quant à elle n'est pas du tout affectée par l'amplitude de la déformation. Ainsi, ces résultats semblent montrer que dès que nous déformons très légèrement un maillage cartésien uniforme (qui est Inf-Sup instable et vérifie $\beta_{\mathcal{T}} = 0$) alors le maillage obtenu est Inf-Sup stable.

Figure V.16: Exemple d'un maillage cartésien déformé avec $d = 3$ Figure V.17: La constante Inf-Sup discrète $\beta_T = \sqrt{\lambda_2(S_D)}$

Nous étudions maintenant la propriété de stabilité Inf-Sup pour trois familles de maillages conformes décomposés en sous-domaines avec soit un maillage cartésien uniforme, soit un maillage triangles conformes (cf Figure V.18).



(a) Maillage avec une interface

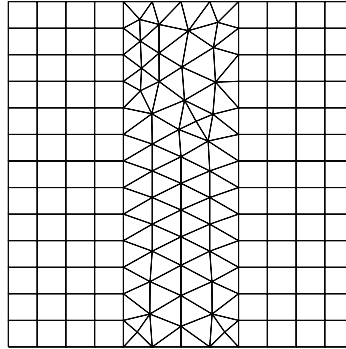
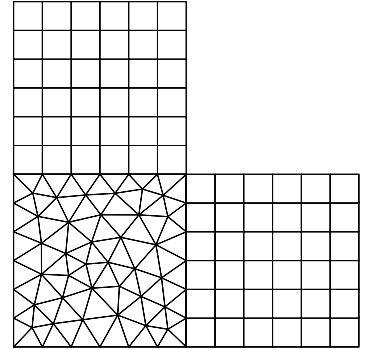
(b) $\Omega =]0, 1[^2$ avec 2 interfaces(c) $\Omega =]0, 1[^2 \setminus [0.5, 1[^2$ avec 2 interfaces

Figure V.18: Maillages divisés en plusieurs sous-domaines avec un maillage différent

Nos résultats (cf Figure V.19) montrent que β_T est minoré par une constante strictement positive quand $\text{size}(\mathcal{T})$ tend vers 0, et donc le schéma DDFV semble être Inf-Sup stable pour de telles familles de maillages. Cependant, il semble que l'adaptation des preuves précédentes à ces maillages ne soit pas si simple. En effet, comme nous l'avons vu la preuve démontrant qu'un maillage constitué de triangles conformes est Inf-Sup stable (cf Section V.1) repose essentiellement sur le fait que les mailles sont des triangles et que nous pouvons ainsi facilement exprimer le gradient de pression dans une maille en fonction de la différence de deux pressions sur des mailles diamants voisines. Au contraire, les maillages cartésiens sont Inf-Sup instables (cf Section V.2) et pour démontrer la propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1 nous construisons une vitesse discrète particulière qui vérifie l'inégalité Inf-Sup. Ces deux preuves étant très différentes,

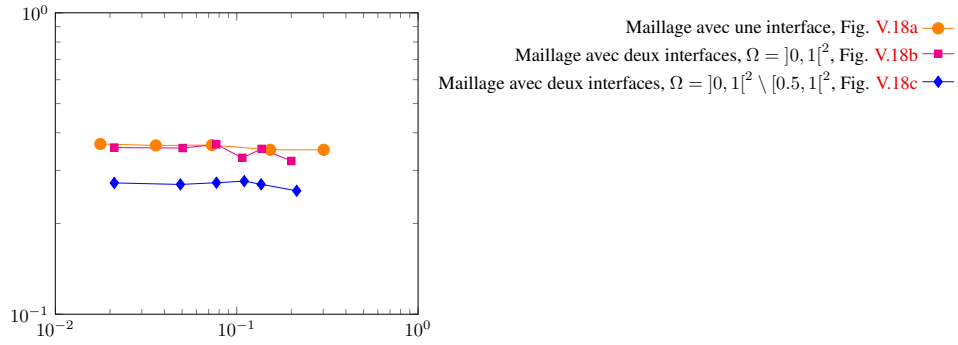
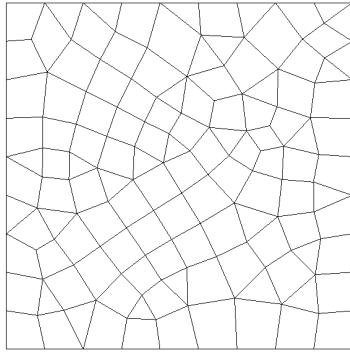


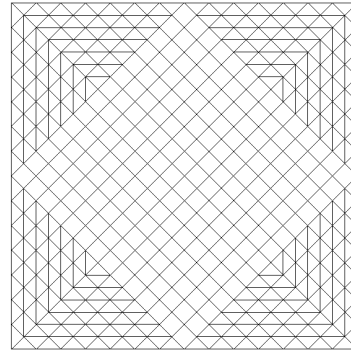
Figure V.19: Domaine décomposé en plusieurs sous-domaines, $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{D}})}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

à ce jour nous ne sommes pas en mesure de coupler ces deux démonstrations pour obtenir un résultat de stabilité Inf-Sup pour ces maillages. L'étude théorique de la stabilité Inf-Sup pour ces maillages pourrait donc faire l'objet d'un travail à venir.

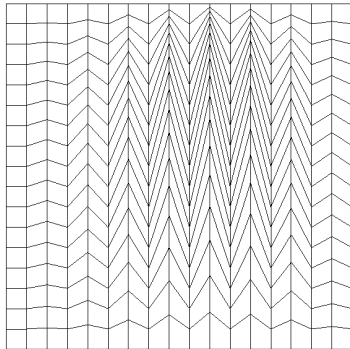
Pour finir, nous observons sur la Figure V.21 que la méthode DDFV semble être Inf-Sup stable pour des mailles composées de quadrangles et de triangles (Figure V.20a) ou de losanges et de triangles (Figure V.20b) mais aussi pour des maillages plus généraux constitués de quadrangles fortement déformés (Figure V.20c) ou d'hexagones (Figure V.20d) par exemple.



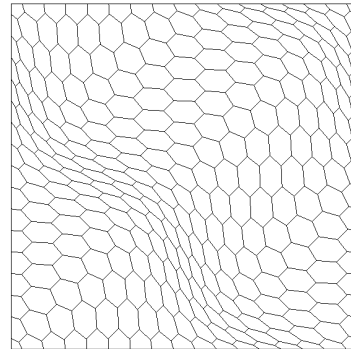
(a) Maillage conforme quadrangles et triangles



(b) Maillage conforme losanges et triangles



(c) Maillage quadrangles déformés



(d) Maillage hexagones

Figure V.20: Différents types de maillages

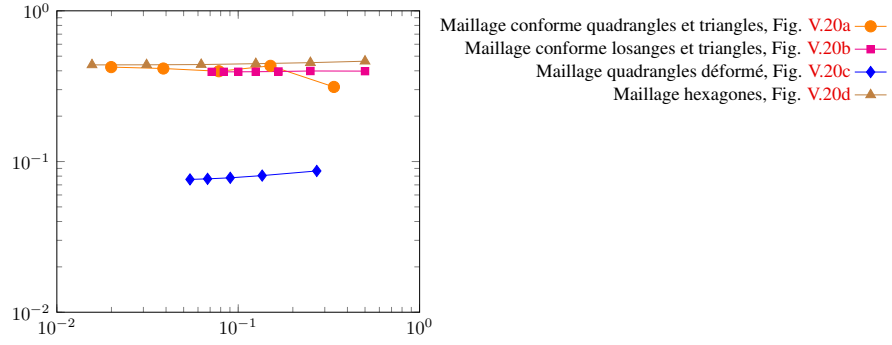


Figure V.21: La constante Inf-Sup discrète $\beta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\lambda_2(S_{\mathcal{D}})}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

V.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié d'un point de vue théorique et numérique si la propriété de stabilité Inf-Sup était satisfaite ou non pour le schéma DDFV pour différents types de familles de maillages. Nous observons que le schéma DDFV semble être très robuste en ce qui concerne la propriété de stabilité Inf-Sup, en particulier dans le cas des maillages non-conformes. Nous avons prouvé cette propriété pour différentes familles de maillages mais cette preuve dépend fortement de la géométrie des mailles. De plus, dans le cas de maillages cartésiens qui sont, à notre connaissance, les seuls pour lesquels la propriété de stabilité Inf-Sup pour le schéma DDFV n'est pas vérifiée nous avons démontré une propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1. Jusqu'à présent, nous ne sommes pas en mesure de prouver cette propriété de stabilité pour des maillages polygonaux généraux, même si nous avons présenté des résultats numériques montrant que le schéma DDFV semble être Inf-Sup stable pour des familles très variées de maillages.

Partie 3

Discrétisation DDFV d'un modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes

Chapitre VI

Discrétisation DDFV de l'équation de Cahn-Hilliard

Dans les Chapitres I et III, nous avons décrit une méthode de type volumes finis (VF4) pour l'équation de Cahn-Hilliard. Cependant le schéma VF4 impose des conditions très restrictives sur la géométrie du maillage dues à la condition d'orthogonalité imposée entre les centres de deux mailles voisines. Dans de nombreux cas, cette condition d'orthogonalité ne peut pas être satisfaite comme par exemple dans le cas de maillages non-conformes. Comme nous l'avons vu dans la Partie 2, le schéma DDFV permet de traiter des maillages très généraux ne vérifiant pas cette condition d'orthogonalité. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous allons étudier dans ce chapitre le schéma DDFV associé à l'équation de Cahn-Hilliard. La seconde raison est que lorsque nous voulons étudier un couplage de type Cahn-Hilliard/Stokes (voir Chapitre VII), nous ne pouvons pas utiliser le schéma VF4 car, comme nous l'avons expliqué dans le Chapitre IV, ce schéma n'est pas adapté à ce type de problème (l'opérateur de divergence n'est pas consistant et le schéma ne converge pas).

Contrairement au cas étudié dans la Partie 2, ici le domaine Ω n'est pas forcément polygonal, nous commençons donc par définir les notations DDFV propres à un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ régulier, non polygonal (cf Section VI.1.1). Nous définissons également des opérateurs gradient et divergence discrets (Définitions VI.1 et VI.2) qui sont en dualité (cf Théorème VI.4). Nous commençons par donner l'approximation DDFV du cas, plus simple, des conditions aux limites de Neumann pour le paramètre d'ordre (Section VI.2) puis nous nous intéressons au cas des conditions aux limites dynamiques (Section VI.3) dans lequel le point délicat est la discrétisation sur les mailles duales du bord de l'équation sur le potentiel chimique car elles interviennent à la fois dans l'équation dans Ω et dans l'équation sur Γ par le biais de la condition aux limites dynamique. Finalement, après avoir décrit l'implémentation du schéma DDFV (Section VI.4) nous présentons des résultats numériques (Section VI.5) qui permettent de valider ce schéma.

VI.1 Cadre DDFV du problème étudié

VI.1.1 Notations DDFV sur un maillage courbe

Dans cette section, nous complétons les notations introduites dans le Chapitre II pour le schéma VF4 sur un domaine non polygonal et celles décrites dans le Chapitre IV pour l'approximation DDFV du problème de Stokes sur un domaine polygonal, afin de pouvoir écrire le schéma DDFV associé à l'équation de Cahn-Hilliard sur un domaine Ω non polygonal.

- Rappelons que nous notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des sommets du maillage primal inclus dans Γ , $\mathbf{v} = \mathcal{L}|\mathcal{L}' \in \mathcal{V}$ désigne le sommet qui sépare les mailles primales du bord $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{V}$ est l'ensemble des sommets de la maille $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$. De la même manière, nous notons $\mathcal{V}^*$ l'ensemble des sommets du maillage dual inclus dans Γ . Remarquons que $\mathcal{V}^*$ est en fait l'ensemble des centres $x_{\mathcal{L}}$ pour $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$. Ainsi, pour $\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}$, si $x_{\mathcal{L}}$ est le point de Γ séparant les mailles duales du bord $\mathcal{K}^*$ et $\mathcal{L}^*$ nous le notons (quand nous le considérons comme un sommet du maillage dual) $\mathbf{v}^* = \mathcal{K}^*|\mathcal{L}^*$. L'ensemble $\mathcal{V}_{\mathcal{K}^*} \subset \mathcal{V}^*$ désigne l'ensemble des sommets de la maille $\mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*$ qui appartiennent à Γ .

- Si $x_{\mathcal{L}}$ est le centre de la maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$, nous définissons $y_{\mathcal{L}}$ de la même manière que dans la Section II.1. Ce qui signifie que $y_{\mathcal{L}}$ est la projection orthogonale sur la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ du point $x_{\mathcal{L}}$. Notons qu'en pratique nous ne connaissons pas le point $x_{\mathcal{L}}$ nous choisissons donc $y_{\mathcal{L}} \in \mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ tel que si $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{K}}$ le segment $[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}]$ soit orthogonal à la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$.
- Les arêtes (primales et duales) incluses dans Γ pouvant être courbes, nous introduisons :

$$m_{\underline{\sigma}} = \begin{cases} m_{\mathbf{e}_{\mathcal{L}}} & \text{si } \sigma = \mathcal{L} \subset \Gamma, \\ m_{\sigma} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } m_{\underline{\sigma}^*} = \begin{cases} d(y_{\mathcal{L}}, \mathbf{v}) + d(y_{\mathcal{L}'}, \mathbf{v}) & \text{si } \sigma^* = \widehat{x_{\mathcal{L}}x_{\mathcal{L}'}} \subset \Gamma \text{ et } \mathbf{v} = \mathcal{L}|_{\mathcal{L}'}, \\ m_{\sigma^*} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Rappelons que si $\sigma = \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}$, $\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}}$ (ou $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}$) désigne la normale unitaire à la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ sortante à Ω .

- Si $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ tel que $\partial\mathcal{K}^* \cap \Gamma = \widehat{x_{\mathcal{L}}x_{\mathcal{L}'}}$, nous notons $\underline{\mathcal{K}^*}$ le polygone formé par les sommets intérieurs de la maille duale $\mathcal{K}^*$, le sommet $\mathbf{v} = \mathcal{L}|_{\mathcal{L}'} \in \Gamma$ et par les centres $y_{\mathcal{L}}$ et $y_{\mathcal{L}'}$ et $m_{\underline{\mathcal{K}^*}}$ sa mesure. Si $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$, nous notons $\underline{\mathcal{K}^*} = \mathcal{K}^*$. Rappelons que les notations similaires $\underline{\mathcal{K}}$ et $\underline{\mathcal{D}}$ ont été définies dans la Section II.2 et seront réutilisées ici.
- Si $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ est une maille duale du bord, nous notons $\sigma_{\Gamma}^* \subset \Gamma$ l'arête duale du bord définie par $\sigma_{\Gamma}^* = \partial\mathcal{K}^* \cap \Gamma$.

VI.1.2 Formule de Green

Dans la partie 2, l'inconnue en vitesse $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ est un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ auquel nous imposons des conditions aux limites de Dirichlet homogène, nous avons donc défini les opérateurs de gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ et de divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{E}_0$ (cf Définitions IV.2 et IV.4). Ici, les inconnues $c_{\mathcal{T}}$ et $\mu_{\mathcal{T}}$ sont des champs scalaires, nous devons donc définir deux nouveaux opérateurs discrets : le gradient discret d'un champ scalaire $\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ et la divergence discrète d'un champ de vecteurs $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. Nous donnons ensuite la formule de Green associée à ces opérateurs.

Définition VI.1 (Gradient discret d'un champ scalaire)

L'opérateur de gradient discret qui envoie un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ vers un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ est défini de la manière suivante. Soit $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, nous posons $\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} = (\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}}$, où pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\underline{\mathcal{D}}}} (m_{\underline{\sigma}}(u_{\mathcal{L}} - u_{\mathcal{K}})\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + m_{\underline{\sigma}^*}(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*})\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}).$$

Définition VI.2 (Divergence discrète d'un champ de vecteurs)

Nous définissons l'opérateur de divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}}$ qui envoie un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ vers un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante. Soit $\xi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$, nous posons

$$\text{div}^{\mathcal{T}} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}}, \text{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}}, \text{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}}, \text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}})$$

avec

$$\text{div}^{\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, \quad \text{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi_{\mathcal{D}} = 0, \quad \text{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}, \quad \text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$$

tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad \text{div}^{\mathcal{K}} \xi_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\underline{\mathcal{K}}}} \sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} m_{\underline{\sigma}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}, \\ \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\underline{\mathcal{K}^*}}} \sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\underline{\sigma}^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} \\ \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\underline{\mathcal{K}^*}}} \left(\sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\underline{\sigma}^*} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathcal{K}^*} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \right). \end{aligned}$$

Nous avons noté $d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} = d(y_{\mathcal{L}}, x_{\mathcal{K}^*})$ qui est une approximation de la longueur de l'arc $\widehat{x_{\mathcal{L}}x_{\mathcal{K}^*}}$.

Remarque VI.3

Remarquons que le gradient discret que nous définissons ici est simplement l'analogue de celui introduit dans la Définition IV.2 dans le cas d'un champ de vecteur de $(\mathbb{R}^2)^T$ et sur un domaine Ω polygonal. Par contre, il faut faire attention au fait que dans la Définition IV.4 la divergence d'un champ de matrices $\xi_{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ est définie de sorte que $\text{div}^{\kappa^*} \xi_{\mathcal{D}} = 0$ pour toute maille duale $\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*$ ce qui n'est pas le cas ici. Ceci est dû au fait que, pour pouvoir prendre en compte la condition aux limites dynamique sur les mailles duales du bord, nous allons également devoir intégrer cette condition aux limites sur les mailles duales du bord (cf Section VI.3).

Afin d'écrire la formule de Green associée à ces opérateurs discrets, nous introduisons deux opérateurs de traces :

- un opérateur de trace sur $\mathbb{R}^T$ défini par $\gamma^T : u_T \in \mathbb{R}^T \mapsto \gamma^T(u_T) = (\gamma^{\mathcal{L}}(u_T))_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial \mathfrak{M}}$ tel que

$$\gamma^{\mathcal{L}}(u_T) = \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}} u_{\kappa^*} + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} u_{\mathcal{L}^*} + m_{\sigma} u_{\mathcal{L}}}{2m_{\sigma}}, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M};$$

- un opérateur de trace sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ défini par $\gamma^{\mathcal{D}} : \phi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \mapsto (\phi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}_{ext}}$.

Nous définissons également les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \llbracket u_T, v_T \rrbracket_T &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} u_{\kappa} v_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} u_{\kappa^*} v_{\kappa^*} \right), \quad \forall u_T, v_T \in \mathbb{R}^T, \\ (\phi_{\mathcal{D}}, v_{\partial \mathfrak{M}})_{\partial \Omega} &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\sigma} \phi_{\mathcal{D}} v_{\mathcal{L}}, \quad \forall \phi_{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}_{ext}}, v_{\partial \mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial \mathfrak{M}}, \\ (\xi_{\mathcal{D}}, \phi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \phi_{\mathcal{D}}, \quad \forall \xi_{\mathcal{D}}, \phi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

Les normes associées sont définies par :

$$\|u_T\|_{T,2} = \llbracket u_T, u_T \rrbracket_T^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u_T \in \mathbb{R}^T \quad \text{et} \quad \|\xi_{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{D},2} = (\xi_{\mathcal{D}}, \xi_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi_{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}.$$

Nous obtenons alors la formule de Green suivante qui implique que les deux opérateurs discrets introduits (cf Définitions VI.1 et VI.2) sont en dualité (c'est d'ailleurs cette propriété de dualité qui a donné son nom à la méthode DDFV). Nous ne donnons pas la preuve de cette propriété ici, nous nous référons à [DO05, ABH07].

Théorème VI.4 (Formule de Green)

Pour tout $\xi_{\mathcal{D}}, u_T \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^T$, nous avons :

$$\llbracket \text{div}^T \xi_{\mathcal{D}}, u_T \rrbracket_T = -(\xi_{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}} u_T)_{\mathcal{D}} + (\gamma^{\mathcal{D}}(\xi_{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_T, \gamma^T(u_T))_{\partial \Omega}, \quad (\text{VI.1})$$

avec $\vec{n}_T = ((\vec{n}_{\kappa_{\mathcal{L}}})_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}_{ext}}$ où nous rappelons que pour tout $\mathcal{L} = \sigma \in \partial \mathfrak{M}$, $\vec{n}_{\kappa_{\mathcal{L}}}$ désigne la normale unitaire à la corde $e_{\mathcal{L}}$ sortante à Ω .

VI.2 Les conditions aux limites de Neumann

Rappelons que l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann (cf Chapitre I) s'écrit de la manière suivante : Trouver $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu, & \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \end{cases} \quad (\text{VI.2a})$$

$$\begin{cases} \mu = -\mathcal{A}_{\Delta} \Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c), & \forall (t, x) \in (0, T) \times \Omega; \end{cases} \quad (\text{VI.2b})$$

$$\begin{cases} \partial_n c = \partial_n \mu = 0, & \forall (t, x) \in (0, T) \times \Gamma; \end{cases} \quad (\text{VI.2c})$$

$$\begin{cases} c(0, x) = c^0(x), & \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{VI.2d})$$

VI.2.1 Principe du schéma DDFV pour l'équation de Cahn-Hilliard

Soit $\mathcal{T} = (\mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}, \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*)$ un maillage DDFV associé au domaine Ω . Les inconnues discrètes de l'équation de Cahn-Hilliard sont localisées aux centres des mailles primales et duales (c'est à dire aux centres et aux sommets). A l'instant t^n , nous cherchons donc :

$$c_{\mathcal{T}}^n = \begin{pmatrix} (c_{\kappa}^n)_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}} \\ (c_{\kappa^*}^n)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T \quad \text{et} \quad \mu_{\mathcal{T}}^n = \begin{pmatrix} (\mu_{\kappa}^n)_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}} \\ (\mu_{\kappa^*}^n)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^T.$$

De manière analogue à ce que nous fait pour le schéma VF4 (cf Section III.2), afin d'obtenir le schéma DDFV associé à ce problème nous intégrons les équations (VI.2a) et (VI.2b) sur chaque maille primale intérieure $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque maille duale $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ en utilisant les conditions aux limites de Neumann imposées sur μ et c . Remarquons que contrairement au cas du schéma DDFV pour le problème de Stokes avec des conditions au bord de Dirichlet (cf Section IV.2), pour pouvoir prendre en compte les conditions aux limites de Neumann, nous intégrons également l'équation sur les mailles duales du bord.

En utilisant les opérateurs discrets définis dans la Section VI.1.2, si nous supposons que $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ est donné, l'approximation DDFV du problème (VI.2) au temps t^{n+1} est donnée par :

Problème VI.5 (Approximation DDFV de l'équation de Cahn-Hilliard avec des CL de Neumann)

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_\tau^{n+1} - c_\tau^n}{\Delta t} - \Gamma_b \operatorname{div}^\tau (\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}) = 0, \end{cases} \quad (\text{VI.3a})$$

$$\begin{cases} \mu_\tau^{n+1} = -\mathcal{A}_\Delta \operatorname{div}^\tau (\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}), \end{cases} \quad (\text{VI.3b})$$

$$\begin{cases} \gamma^\mathfrak{D} (\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}) \cdot \vec{n}_\tau = \gamma^\mathfrak{D} (\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1}) \cdot \vec{n}_\tau = 0, \end{cases} \quad (\text{VI.3c})$$

où, par convention, nous notons $u_{\tau_0} = \begin{pmatrix} (u_\mathcal{K})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \\ (0)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \\ (u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\tau$.

Notons que nous avons introduit la notation u_{τ_0} pour que les mailles primales du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ n'interviennent pas dans les équations (VI.3a) et (VI.3b). Ainsi, l'équation sur le maillage primal du bord $\partial\mathfrak{M}$ est vide dans ces deux équations. Sans cette notation, l'équation (VI.3a) entraînerait que $c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} = c_{\partial\mathfrak{M}}^n$ et l'équation (VI.3b) que $\mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\partial\mathfrak{M}}^n, c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}) = \mu_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}$, ce qui n'est évidemment pas le cas.

Sur le maillage primal intérieur, l'équation (VI.3a) s'écrit :

$$m_{\underline{\mathcal{K}}} \frac{c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n}{\Delta t} - m_{\underline{\mathcal{K}}} \Gamma_b \operatorname{div}^\mathcal{K} (\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}) = 0, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}.$$

Alors, en sommant ces équations sur toutes les mailles primales intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ nous retrouvons bien la conservation du volume au niveau discret sur le maillage primal $\mathfrak{M}$. Le même raisonnement sur le maillage dual (intérieur et du bord) $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ implique la conservation du volume sur le maillage dual. Ainsi,

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\mathcal{K}}} (c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n) = \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\mathcal{K}^*}} (c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n) = 0. \quad (\text{VI.4})$$

VI.2.2 Estimation d'énergie

Nous définissons l'énergie libre associée au problème VI.5 (correspondant à l'énergie libre continue (I.1)) de la manière suivante :

$$\mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau) = \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket f_b(c_\tau), 1_\tau \rrbracket_\tau, \quad \forall c_\tau \in \mathbb{R}^\tau; \quad (\text{VI.5})$$

où $1_\tau \in \mathbb{R}^\tau$ est la fonction constante égale à 1 sur chaque volume de contrôle primal intérieur et dual (intérieur et du bord).

Nous obtenons alors l'estimation d'énergie suivante :

Proposition VI.6 (Egalité d'énergie DDFV)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ au problème VI.5, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^n) + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ &= \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\mathcal{K}}} (f_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1})(c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n)) \\ & \quad + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\mathcal{K}^*}} (f_b(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}^*}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1})(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n)). \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

Démonstration : Commençons par calculer le produit scalaire de l'équation (VI.3a) avec μ_{τ}^{n+1} , nous obtenons alors :

$$\llbracket c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n, \mu_{\tau}^{n+1} \rrbracket_{\tau} - \Gamma_b \Delta t \llbracket \operatorname{div}^{\tau} \nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1} \rrbracket_{\tau} = 0,$$

donc en utilisant la formule de Green discrète (VI.1) ainsi que la condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique, nous avons

$$\llbracket c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n, \mu_{\tau}^{n+1} \rrbracket_{\tau} + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 = 0. \quad (\text{VI.7})$$

Calculons maintenant le produit scalaire de l'équation (VI.3b) avec $c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n$. En utilisant la formule de Green discrète (VI.1) et la condition aux limites de Neumann homogène sur la concentration, nous en déduisons :

$$\mathcal{A}_{\Delta} (\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}, \nabla^{\mathcal{D}} (c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n))_{\mathfrak{D}} + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket d^{f_b}(c_{\tau}^n, c_{\tau}^{n+1}), c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n \rrbracket_{\tau} - \llbracket \mu_{\tau}^{n+1}, c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n \rrbracket_{\tau} = 0.$$

La relation $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ implique

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} \left(\left\| \nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 - \left\| \nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^n \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \left\| \nabla^{\mathcal{D}} (c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \right) \\ & + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket d^{f_b}(c_{\tau}^n, c_{\tau}^{n+1}), c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n \rrbracket_{\tau} - \llbracket \mu_{\tau}^{n+1}, c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n \rrbracket_{\tau} = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

En utilisant la définition (VI.5) de l'énergie libre et en sommant les équations (VI.7) et (VI.8), nous obtenons le résultat attendu. ■

Remarquons qu'en utilisant les mêmes discrétisations, implicite ou semi-implicite, pour le potentiel de Cahn-Hilliard f_b que celle décrites dans la Section I.3.2 nous obtenons des résultats similaires à ceux donnés dans le Chapitre I. Plus précisément, nous pouvons montrer :

- la décroissance de l'énergie DDFV définie par (VI.5) (telle que dans les Propositions I.5 et I.6);
- l'existence d'au moins une solution au Problème discret VI.5 (telle que dans le Théorème I.8);
- les bornes sur les solutions discrètes (telles que dans la Proposition I.12) notamment une borne $L^{\infty}(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour la concentration et une borne $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour le potentiel chimique.

VI.3 Les conditions aux limites dynamiques

VI.3.1 Définitions de nouveaux opérateurs discrets

Nous notons $\mathcal{W} = (\mathcal{V}, \mathcal{V}^*)$ l'ensemble des sommets du maillage $\mathcal{T}$ inclus dans Γ (c'est à dire l'ensemble des sommets du maillage $\partial\mathcal{T} = (\partial\mathfrak{M}, \partial\mathfrak{M}^*)$). Pour simplifier l'écriture du schéma, nous définissons ici deux nouveaux opérateurs discrets : le gradient tangentiel $\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}}$ et la divergence tangentielle $\operatorname{div}_{\Gamma}^{\partial\mathcal{T}}$.

Définition VI.7 (Gradient tangentiel discret d'un champ scalaire)

L'opérateur de gradient tangentiel discret $\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} : \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{W}}$ est défini de la manière suivante. Soit $u_{\partial\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}$, nous posons $\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} u_{\partial\mathcal{T}} = (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}} u_{\partial\mathfrak{M}}, \nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}^*} u_{\partial\mathfrak{M}^*})$ avec $\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}} u_{\partial\mathfrak{M}} = (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}} u_{\partial\mathfrak{M}})_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}}$ et $\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}^*} u_{\partial\mathfrak{M}^*} = (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}^*} u_{\partial\mathfrak{M}^*})_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}^*}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} = \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}, \quad \nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}} u_{\partial\mathfrak{M}} &= \frac{u_{\mathcal{L}'} - u_{\mathcal{L}}}{m_{\sigma_{\Gamma}^*}} n_{\mathbf{v}\mathcal{L}}; \\ \forall \mathbf{v}^* = \mathcal{K}^* | \mathcal{L}^* \in \mathcal{V}^*, \quad \nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}^*} u_{\partial\mathfrak{M}^*} &= \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} n_{\mathbf{v}^*\mathcal{K}^*}; \end{aligned}$$

où nous avons noté $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = \pm 1$ tel que $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = -n_{\mathbf{v}\mathcal{L}'}$ et $n_{\mathbf{v}^*\mathcal{K}^*} = \pm 1$ tel que $n_{\mathbf{v}^*\mathcal{K}^*} = -n_{\mathbf{v}^*\mathcal{L}^*}$.

En fait ces nombres permettent de donner une orientation aux arcs de courbe $\widehat{x_{\mathcal{L}}x_{\mathcal{L}'}}$ et $\widehat{x_{\mathcal{K}^*}x_{\mathcal{L}^*}}$. Plus précisément,

- $n_{\mathbf{v}\mathcal{L}} = 1$ si l'orientation de Γ est choisie telle que nous parcourons l'arc $\widehat{x_{\mathcal{L}}x_{\mathcal{L}'}}$ de $x_{\mathcal{L}}$ vers $x_{\mathcal{L}'}$,
- $n_{\mathbf{v}^*\mathcal{K}^*} = 1$ si l'orientation de Γ est choisie telle que nous parcourons l'arc $\widehat{x_{\mathcal{K}^*}x_{\mathcal{L}^*}}$ de $x_{\mathcal{K}^*}$ vers $x_{\mathcal{L}^*}$.

Définition VI.8 (Divergence tangentielle discrète d'un champ scalaire)

Nous définissons l'opérateur de divergence tangentielle $\text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{T}} : \mathbb{R}^\mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}$ de la manière suivante. Soit $\xi_\mathcal{W} \in \mathbb{R}^\mathcal{V}$, nous posons $\text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{T}} \xi_\mathcal{W} = (\text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{M}} \xi_\mathcal{V}, \text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{M}^*} \xi_{\mathcal{V}^*})$ avec $\text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{M}} \xi_\mathcal{V} = (\text{div}_\Gamma^{\mathcal{L}} \xi_\mathcal{V})_{\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}}$ et $\text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{M}^*} \xi_{\mathcal{V}^*} = (\text{div}_\Gamma^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{V}^*})_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*}$ tels que :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}, \quad \text{div}_\Gamma^{\mathcal{L}} \xi_\mathcal{V} &= \frac{1}{m_{\underline{\sigma}}} \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathcal{L}}} \xi_{\mathbf{v}} n_{\mathbf{v}\mathcal{L}}; \\ \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*, \quad \text{div}_\Gamma^{\mathcal{K}^*} \xi_{\mathcal{V}^*} &= \frac{1}{m_{\underline{\sigma}^*}} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \xi_{\mathbf{v}^*} n_{\mathbf{v}^*\mathcal{K}^*}. \end{aligned}$$

Afin d'obtenir une formule de Green associée à ces opérateurs tangentiels discrets, nous introduisons également deux produit scalaires L^2 -discrets sur Γ :

$$\begin{aligned} \llbracket u_{\partial\mathcal{T}}, v_{\partial\mathcal{T}} \rrbracket_{\partial\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathcal{M}} m_{\underline{\sigma}} u_{\mathcal{L}} v_{\mathcal{L}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*} m_{\underline{\sigma}^*} u_{\mathcal{K}^*} v_{\mathcal{K}^*} \right), \quad \forall u_{\partial\mathcal{T}}, v_{\partial\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}, \\ (\xi_\mathcal{W}, \phi_\mathcal{W})_\mathcal{W} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{L} | \mathcal{L}' \in \mathcal{V}} m_{\underline{\sigma}^*} \xi_{\mathbf{v}} \phi_{\mathbf{v}} + \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{K}^* | \mathcal{L}^* \in \mathcal{V}^*} m_{\underline{\sigma}} \xi_{\mathbf{v}^*} \phi_{\mathbf{v}^*} \right), \quad \forall \xi_\mathcal{W}, \phi_\mathcal{W} \in \mathbb{R}^\mathcal{V}. \end{aligned}$$

Les normes correspondantes sont définies par :

$$\|u_{\partial\mathcal{T}}\|_{\partial\mathcal{T},2} = \llbracket u_{\partial\mathcal{T}}, u_{\partial\mathcal{T}} \rrbracket_{\partial\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u_{\partial\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}, \quad \|\xi_\mathcal{W}\|_{\mathcal{W},2} = (\xi_\mathcal{W}, \xi_\mathcal{W})_\mathcal{W}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi_\mathcal{W} \in \mathbb{R}^\mathcal{V}.$$

En utilisant la définition des opérateurs tangentiels discrets et des produits scalaires ci-dessus, nous obtenons immédiatement la formule de Green suivante.

Théorème VI.9 (Formule de Green pour les opérateurs tangentiels)

Pour tout $\xi_\mathcal{W}, u_{\partial\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^\mathcal{V} \times \mathbb{R}^{\partial\mathcal{T}}$, nous avons

$$\llbracket \text{div}_\Gamma^{\partial\mathcal{T}} \xi_\mathcal{W}, u_{\partial\mathcal{T}} \rrbracket_{\partial\mathcal{T}} = -(\xi_\mathcal{W}, \nabla_\Gamma^\mathcal{W} u_{\partial\mathcal{T}})_\mathcal{W}. \quad (\text{VI.9})$$

VI.3.2 Approximation DDFV en prenant en compte la condition aux limites dynamiques

Rappelons que l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques (cf Chapitre III) s'écrit de la manière suivante : Trouver $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que,

$$\begin{cases} \partial_t c = \Gamma_b \Delta \mu; & \text{in } (0, T) \times \Omega; & (\text{VI.10a}) \\ \mu = -\mathcal{A}_\Delta \Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c); & \text{in } (0, T) \times \Omega; & (\text{VI.10b}) \\ \mathcal{A}_{\partial t} \partial_t c_{|\Gamma} = \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \Delta_\Gamma c_{|\Gamma} - \mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{|\Gamma}) - \mathcal{A}_\Delta \partial_n c; & \text{on } (0, T) \times \Gamma; & (\text{VI.10c}) \\ \partial_n \mu = 0; & \text{on } (0, T) \times \Gamma; & (\text{VI.10d}) \\ c(0, \cdot) = c^0; & \text{in } \Omega. & (\text{VI.10e}) \end{cases}$$

Le point délicat dans l'obtention de l'approximation DDFV de ce problème provient de la discrétisation de la condition aux limites dynamique sur les mailles duales du bord. Ceci est dû au fait que les inconnues duales du bord ont un statut particulier car elles interviennent à la fois en tant qu'inconnues duales intérieures dans l'équation (VI.10b) et en tant qu'inconnues duales du bord dans la condition aux limites dynamique (VI.10c). Remarquons que ce n'est pas le cas des inconnues primales du bord qui n'interviennent que dans la condition aux limites (VI.10c). Le traitement des mailles duales du bord sera donc différent de celui des mailles primales du bord.

Détaillons la méthode que nous utilisons ici pour obtenir l'approximation DDFV de l'équation (VI.10b) avec la condition aux limites (VI.10c) sur les mailles duales du bord. Considérons une maille duale du bord $\mathcal{K}^* \in \partial\mathcal{M}^*$ et intégrons l'équation (VI.10b) sur cette maille, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{K}^*} \mu(t, x) dx &= -\mathcal{A}_\Delta \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{\sigma^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} d\sigma(x) \\ &\quad - \mathcal{A}_\Delta \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \int_{\sigma \cap \mathcal{K}^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{K}^*} d\sigma(x) + \mathcal{A}_{f_b} \int_{\mathcal{K}^*} f'_b(c(t, x)) dx. \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Nous intégrons maintenant l'équation (VI.10c) sur $\partial\mathcal{K}^* \cap \Gamma = \sigma_\Gamma^*$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ nous obtenons :

$$\mathcal{A}_{\partial t} \int_{\sigma_\Gamma^*} \partial_t c_{\Gamma}(t, x) d\sigma(x) = \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \nabla_\Gamma c_{\Gamma}(t, \mathbf{v}^*) n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau} - \mathcal{A}_{f_s} \int_{\sigma_\Gamma^*} f'_s(c_{\Gamma}(t, x)) d\sigma(x) - \mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \int_{\sigma \cap \mathcal{K}^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{K}^*} d\sigma(x). \quad (\text{VI.12})$$

Nous intégrons maintenant les équations (VI.11) et (VI.12) sur l'intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$ puis nous remplaçons le terme encadré dans l'équation (VI.11) par la valeur que nous obtenons dans l'équation (VI.12). Nous pouvons alors écrire,

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma^*} \nabla c(t, x) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} d\sigma(x) dt + \mathcal{A}_{f_b} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}^*} f'_b(c(t, x)) dx dt \\ - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\mathcal{K}^*} \mu(t, x) dx dt + \mathcal{A}_{\partial t} \int_{\sigma_\Gamma^*} (c_{\Gamma}(t^{n+1}, x) - c_{\Gamma}(t^n, x)) d\sigma(x) \\ - \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \nabla_\Gamma c(t, \mathbf{v}^*) n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau} dt + \mathcal{A}_{f_s} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\sigma_\Gamma^*} f'_s(c_{\Gamma}) d\sigma(x) dt = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.13})$$

Ainsi, pour toute maille duale du bord $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$, l'approximation DDFV choisie de l'équation (VI.10b) associée à la condition au bord (VI.10c) s'écrit :

$$\begin{aligned} -\mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} c_\tau^{n+1} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_b} m_{\mathcal{K}^*} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) - m_{\mathcal{K}^*} \mu_{\mathcal{K}^*}^{n+1} + \mathcal{A}_{\partial t} m_{\sigma_\Gamma^*} \frac{c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n}{\Delta t} \\ - \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \sum_{\mathbf{v}^* \in \mathcal{V}_{\mathcal{K}^*}} \nabla_\Gamma^{\mathbf{v}^*} c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1} n_{\mathbf{v}^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_s} m_{\sigma_\Gamma^*} d^{f_s}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) = 0, \end{aligned}$$

où nous rappelons que nous avons noté $\sigma_\Gamma^* = \partial\mathcal{K}^* \cap \Gamma$.

En ce qui concerne les autres termes du schéma, nous utilisons la méthode classique :

- Comme dans le cas de la Section VI.2, nous intégrons l'équation (VI.10a) sur chaque maille primale intérieure $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur chaque maille duale $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$. Nous prenons en compte la condition au bord de Neumann homogène sur le potentiel chimique grâce aux mailles primales du bord.
- Nous intégrons l'équation (VI.10b) sur les mailles primales intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur les mailles duales intérieures $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$.
- Enfin, nous intégrons les équations (VI.10c) sur les mailles primales du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$.

Ainsi, si nous supposons $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ connu, l'approximation DDFV de l'équation (VI.10) est donnée par :

Problème VI.10 (Approximation DDFV de l'équation de CH avec des CL dynamiques)

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_{\tau_0}^{n+1} - c_{\tau_0}^n}{\Delta t} - \Gamma_b \operatorname{div}^\tau (\nabla^{\mathcal{D}} \mu_\tau^{n+1}) = 0; & (\text{VI.14a}) \\ \gamma^{\mathcal{D}} (\nabla^{\mathcal{D}} \mu_\tau^{n+1}) \cdot \vec{n}_\tau = 0; & (\text{VI.14b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{\mathfrak{M}}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \operatorname{div}^{\mathfrak{M}} (\nabla^{\mathcal{D}} c_\tau^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}}^n, c_{\mathfrak{M}}^{n+1}), \\ \mu_{\mathfrak{M}^*}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*} (\nabla^{\mathcal{D}} c_\tau^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\mathfrak{M}^*}^n, c_{\mathfrak{M}^*}^{n+1}), \\ m_{\mathcal{K}^*} \mu_{\mathcal{K}^*}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} c_\tau^{n+1} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_b} m_{\mathcal{K}^*} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) \\ \quad + \mathcal{A}_{\partial t} m_{\sigma_\Gamma^*} \frac{c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n}{\Delta t} - \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} m_{\sigma_\Gamma^*} \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*} (\nabla_\Gamma^{\mathbf{v}^*} c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1}) \\ \quad + \mathcal{A}_{f_s} m_{\sigma_\Gamma^*} d^{f_s}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}), \quad \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*; \end{cases} \quad (\text{VI.15a})$$

$$\mathcal{A}_{\partial t} \frac{c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial\mathfrak{M}}^n}{\Delta t} - \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} \operatorname{div}_\Gamma^{\mathfrak{M}} (\nabla_\Gamma^{\mathbf{v}} c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_s} d^{f_s}(c_{\partial\mathfrak{M}}^n, c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}) + \mathcal{A}_{\Delta} \gamma^{\mathcal{D}} (\nabla^{\mathcal{D}} c_\tau^{n+1}) \cdot \vec{n}_\tau = 0. \quad (\text{VI.15b})$$

Notons que nous avons là encore utilisé la notation $c_{\tau_0}^n$ de sorte que l'équation sur le maillage primal du bord $\partial\mathfrak{M}$ soit vide dans l'équation (VI.14a).

VI.3.3 Estimation d'énergie

Rappelons que pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques, l'énergie libre continue $\mathcal{F}$ est la somme d'une énergie libre volumique $\mathcal{F}_b$ et d'une énergie libre surfacique $\mathcal{F}_s$ (cf Définition III.5). L'énergie libre volumique est en fait l'énergie libre associée à l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites de Neumann. Ainsi, l'énergie libre volumique discrète est donnée par la formule (VI.5). L'énergie libre totale discrète est définie par la formule suivante : Pour tout $c_\tau \in \mathbb{R}^\tau$,

$$\mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau) = \underbrace{\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathcal{D} c_\tau \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket f_b(c_\tau), 1_\tau \rrbracket_\tau}_{:= \mathcal{F}_b(c_\tau)} + \underbrace{\frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} \left\| \nabla_\Gamma^\mathcal{W} c_{\partial\tau} \right\|_{\mathcal{W},2}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket f_s(c_{\partial\tau}), 1_{\partial\tau} \rrbracket_{\partial\tau}}_{:= \mathcal{F}_{s,\partial\mathfrak{M}}(c_{\partial\tau})}, \quad (\text{VI.16})$$

où $1_{\partial\tau} \in \mathbb{R}^{\partial\tau}$ est la fonction constante égale à 1 sur chaque volume de contrôle du bord (primal et dual).

Proposition VI.11 (Egalité d'énergie DDFV avec conditions aux limites dynamiques)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ au problème VI.10, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^n) + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathcal{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathcal{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} \left\| \nabla_\Gamma^\mathcal{W} (c_{\partial\tau}^{n+1} - c_{\partial\tau}^n) \right\|_{\mathcal{W},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \left\| c_{\partial\tau}^{n+1} - c_{\partial\tau}^n \right\|_{\partial\tau,2}^2 \\ & = \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\underline{\kappa}} (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\kappa}^*} (f_b(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_b(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_b}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} m_{\underline{\mathcal{L}}} (f_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - f_s(c_{\mathcal{L}}^n) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1})(c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\sigma_\Gamma^*}} (f_s(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_s(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_s}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)). \end{aligned}$$

Démonstration : Commençons par l'équation d'évolution sur la concentration. En prenant le produit scalaire de l'équation (VI.14a) avec μ_τ^{n+1} et en utilisant la formule de Green discrète du Théorème VI.4 associée à la condition aux limites de Neumann homogène (VI.14b), nous obtenons :

$$\llbracket c_\tau^{n+1} - c_\tau^n, \mu_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathcal{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 = 0. \quad (\text{VI.17})$$

Intéressons nous maintenant à l'équation sur le potentiel chimique (VI.15a). Nous multiplions chaque équation d'une maille primale intérieure $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ par $\frac{m_{\underline{\mathcal{K}}}}{2}(c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n)$, chaque équation d'une maille duale intérieure $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ par $\frac{m_{\underline{\mathcal{K}^*}}}{2}(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n)$ et chaque équation d'une maille duale du bord $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ par $\frac{1}{2}(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n)$. En sommant les identités obtenues sur les mailles primales intérieures et les mailles duales, nous avons :

$$\begin{aligned} & -\mathcal{A}_\Delta \llbracket \text{div}^\tau (\nabla^\mathcal{D} c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{D}} \nabla^\mathcal{D} c_\tau^{n+1} \cdot \vec{n}_{\sigma_\kappa} (c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n) \\ & + \mathcal{A}_{f_b} \llbracket d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau - \llbracket \mu_\tau^{n+1}, c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{2\Delta t} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\sigma_\Gamma^*}} (c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)^2 \\ & - \frac{\mathcal{A}_{\Delta_\Gamma}}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\sigma_\Gamma^*}} \text{div}_\Gamma^{\kappa^*} (\nabla_\Gamma^{\mathcal{V}^*} c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1}) (c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} m_{\underline{\sigma_\Gamma^*}} d^{f_s}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

Il reste maintenant à prendre en compte la condition aux limites dynamique (VI.15b) sur les mailles primales intérieures. Nous multiplions chaque équation d'une maille primale du bord $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$ par $\frac{m_{\underline{\mathcal{L}}}}{2}(c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n)$ puis nous sommons sur les

mailles primales du bord, ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{2\Delta t} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\sigma} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n)^2 - \frac{\mathcal{A}_{\Delta \Gamma}}{2} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\sigma} \operatorname{div}_{\Gamma}^{\mathcal{L}} (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{V}} c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}) (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\sigma} d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1}) (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n) + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} \nabla^{\mathcal{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} (c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n) = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

Remarquons alors que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, $\xi_{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}$, nous avons :

$$\sum_{\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^* \cap \mathfrak{D}_{ext}}} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \xi_{\mathcal{D}} u_{\mathcal{K}^*} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} (d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} u_{\mathcal{K}^*} + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} u_{\mathcal{L}^*}) \xi_{\mathcal{D}}.$$

En appliquant cette égalité aux fonctions $u_{\mathcal{T}} = (c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n)$ et $\xi_{\mathfrak{D}} = \gamma^{\mathfrak{D}} (\nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{T}}$ et en sommant les équations (VI.18) et (VI.19), nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} & -\mathcal{A}_{\Delta} [\operatorname{div}^{\mathcal{T}} (\nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1}), c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n]_{\mathcal{T}} + \mathcal{A}_{\Delta} (\gamma^{\mathfrak{D}} (\nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{T}}, \gamma^{\mathcal{T}} (c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n))_{\partial \Omega} \\ & + \mathcal{A}_{f_b} [d^{f_b}(c_{\mathcal{T}}^n, c_{\mathcal{T}}^{n+1}), c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n]_{\mathcal{T}} - [\mu_{\mathcal{T}}^{n+1}, c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n]_{\mathcal{T}} + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n\|_{\partial \mathcal{T}, 2}^2 \\ & - \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} [\operatorname{div}_{\Gamma}^{\partial \mathcal{T}} (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1}), c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n]_{\partial \mathcal{T}} + \mathcal{A}_{f_s} [d^{f_s}(c_{\partial \mathcal{T}}^n, c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1}), c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n]_{\partial \mathcal{T}} = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

En utilisant la formule de Green (VI.1) ainsi que la formule de Green sur les opérateurs tangentiels (VI.9), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_{\Delta} (\nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^{n+1}, \nabla^{\mathfrak{D}} (c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n))_{\mathfrak{D}} - [\mu_{\mathcal{T}}^{n+1}, c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n]_{\mathcal{T}} \\ & + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} \|c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n\|_{\partial \mathcal{T}, 2}^2 + \mathcal{A}_{\Delta \Gamma} (\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1}, \nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} (c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n))_{\mathcal{W}} \\ & = -\mathcal{A}_{f_b} [d^{f_b}(c_{\mathcal{T}}^n, c_{\mathcal{T}}^{n+1}), c_{\mathcal{T}}^{n+1} - c_{\mathcal{T}}^n]_{\mathcal{T}} - \mathcal{A}_{f_s} [d^{f_s}(c_{\partial \mathcal{T}}^n, c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1}), c_{\partial \mathcal{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathcal{T}}^n]_{\partial \mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

La somme des équations (VI.17) et (VI.20) ainsi que la relation $2a(a-b) = a^2 - b^2 + (a-b)^2$ donnent l'estimation annoncée. ■

Notons que nous utilisons les discrétisations des termes non-linéaires d^{f_b} et d^{f_s} décrites dans la Section III.3. Avec les mêmes arguments que ceux utilisés dans le Chapitre III, nous pouvons alors démontrer :

- la décroissance de l'énergie DDFV pour définie par (VI.16) (telle que dans les Propositions III.9 et III.10);
- l'existence d'au moins une solution au Problème discret VI.10 (telle que dans le Théorème III.12);
- les bornes sur les solutions discrètes (telles que dans la Proposition III.26) notamment une borne $L^{\infty}(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour la concentration ainsi que pour sa trace et une borne $L^2(0, T, H^1(\Omega))$ -discrète pour le potentiel chimique.

VI.4 Quelques remarques sur l'implémentation

VI.4.1 Principe de la méthode numérique utilisée

Rappelons que pour implémenter les schémas (VI.3) et (VI.15) nous réécrivons ces problèmes en utilisant des matrices adéquates. Nous définissons alors les matrices suivantes :

- La matrice de masse $M_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathcal{T}}}$ diagonale telle que pour tout $u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$M_{\mathcal{T}} = \operatorname{diag}((m_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, 0, (m_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}) \quad \text{et} \quad \langle M_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}} \rangle = 2[u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}}.$$

- La matrice de rigidité $R_{\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_{\mathcal{T}}}$ telle que pour tout $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$,

$$R_{\mathcal{T}} u_{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} ((-m_{\mathcal{K}} \operatorname{div}^{\mathcal{K}} (\nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}) \\ 0 \\ ((-m_{\mathcal{K}^*} \operatorname{div}^{\mathcal{K}^*} (\nabla^{\mathfrak{D}} u_{\mathcal{T}}))_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}) \\ \left(\left(- \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \nabla^{\mathcal{D}} u_{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} \right)_{\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*} \right) \end{pmatrix}.$$

- La matrice $N_{\partial\mathfrak{M},\tau} \in \mathcal{M}_{N_{\partial\mathfrak{M}},N_\tau}$ correspondant à l'opérateur de dérivée normale, c'est à dire que pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$,

$$N_{\partial\mathfrak{M},\tau} u_\tau = \left((m_\varepsilon \nabla^\mathcal{D} u_\tau \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{KL}})_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \right).$$

Notons alors que pour tout $u_\tau, v_\tau \in \mathbb{R}^\tau$ la relation suivante est vérifiée :

$$\langle R_\tau u_\tau, v_\tau \rangle + \langle N_{\partial\mathfrak{M},\tau} u_\tau, v_{\partial\mathfrak{M}} \rangle = 2 (\nabla^\mathcal{D} u_\tau, \nabla^\mathcal{D} v_\tau)_{\mathfrak{D}}.$$

Ces matrices permettent alors d'écrire le problème VI.5 de la manière suivante :

Problème VI.12

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$. Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\begin{cases} M_\tau c_\tau^{n+1} + \Gamma_b \Delta t R_\tau \mu_\tau^{n+1} = M_\tau c_\tau^n, \\ \mathcal{A}_\Delta R_\tau c_\tau^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_\tau d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}) - M_\tau \mu_\tau^{n+1} = 0, \\ N_{\partial\mathfrak{M},\tau} \mu_\tau^{n+1} = N_{\partial\mathfrak{M},\tau} c_\tau^{n+1} = 0. \end{cases}$$

Pour réécrire le schéma (VI.15) sous une forme similaire, il faut définir deux matrices supplémentaires :

- La matrice de masse du bord $M_{\partial\tau}^\Gamma \in \mathcal{M}_{N_{\partial\tau},N_{\partial\tau}}$ telle que pour tout $u_{\partial\tau} \in \mathbb{R}^{\partial\tau}$,

$$M_{\partial\tau}^\Gamma u_{\partial\tau} = \left(\begin{array}{c} M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}} \\ M_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}^*} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} (m_\varepsilon u_\varepsilon)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}} \\ (m_{\varepsilon^*} u_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \end{array} \right).$$

Ainsi, pour tout $u_{\partial\tau}, v_{\partial\tau} \in \mathbb{R}^{\partial\tau}$ nous avons :

$$\langle M_{\partial\tau}^\Gamma u_{\partial\tau}, v_{\partial\tau} \rangle = 2 \llbracket u_{\partial\tau}, v_{\partial\tau} \rrbracket_{\partial\tau}.$$

- La matrice $L_{\partial\tau}^\Gamma \in \mathcal{M}_{N_{\partial\tau},N_{\partial\tau}}$ correspondant à l'opérateur de Laplace-Beltrami telle que pour tout $u_{\partial\tau} \in \mathbb{R}^{\partial\tau}$,

$$L_{\partial\tau}^\Gamma u_{\partial\tau} = \left(\begin{array}{c} L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}} \\ L_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma u_{\partial\mathfrak{M}^*} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} ((m_\varepsilon \operatorname{div}_\Gamma^\mathcal{L} (\nabla_\Gamma^\mathcal{V} u_{\partial\mathfrak{M}}))_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}) \\ ((m_{\varepsilon^*} \operatorname{div}_{\Gamma^*}^{\mathcal{K}^*} (\nabla_{\Gamma^*}^{\mathcal{V}^*} u_{\partial\mathfrak{M}^*}))_{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*}) \end{array} \right).$$

Notons alors que pour tout $u_{\partial\tau}, v_{\partial\tau} \in \mathbb{R}^{\partial\tau}$, la relation suivante est vérifiée :

$$\langle L_{\partial\tau}^\Gamma u_{\partial\tau}, v_{\partial\tau} \rangle = 2 (\nabla_\Gamma^\mathcal{V} u_{\partial\tau}, \nabla_{\Gamma^*}^{\mathcal{V}^*} v_{\partial\tau})_{\mathcal{W}}.$$

Ainsi, le problème VI.10 se réécrit sous la forme :

Problème VI.13

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$. Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\begin{cases} M_\tau c_\tau^{n+1} + \Gamma_b \Delta t R_\tau \mu_\tau^{n+1} = M_\tau c_\tau^n, \\ N_{\partial\mathfrak{M},\tau} \mu_\tau^{n+1} = 0, \\ \mathcal{A}_\Delta R_\tau c_\tau^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_\tau d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}) - M_\tau \mu_\tau^{n+1} + \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} M_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1} \\ \quad + \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} L_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma d^{f_s}(c_{\partial\mathfrak{M}^*}^{n+1}, c_{\partial\mathfrak{M}^*}^n) = \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} M_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}^*}^n, \\ \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{\Delta_\Gamma} L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma d^{f_s}(c_{\partial\mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\partial\mathfrak{M}}^n) + \mathcal{A}_\Delta N_{\partial\mathfrak{M},\tau} c_\tau^{n+1} = \frac{\mathcal{A}_{\partial t}}{\Delta t} M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial\mathfrak{M}}^n, \end{cases}$$

où nous avons noté :

$$M_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma = \begin{pmatrix} 0_{N_{\mathfrak{M}}, N_{\partial\mathfrak{M}^*}} \\ 0_{N_{\mathfrak{M}^*}, N_{\partial\mathfrak{M}^*}} \\ M_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L_{\tau_0, \partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma = \begin{pmatrix} 0_{N_{\mathfrak{M}}, N_{\partial\mathfrak{M}^*}} \\ 0_{N_{\mathfrak{M}^*}, N_{\partial\mathfrak{M}^*}} \\ L_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma \end{pmatrix}.$$

VI.4.2 Construction des matrices

Commençons par construire, en parcourant les arêtes (donc les mailles diamants), les matrices permettant de résoudre le Problème VI.12. Les flux apparaissant dans la matrice de rigidité $R_{\mathcal{T}} = \mathbf{R}$ et la matrice de la dérivée normale $N_{\partial\mathfrak{M},\mathcal{T}} = \mathbf{N}$ ont déjà été définis dans la Section IV.4. En ce qui concerne les coefficients de la matrice de masse $M_{\mathfrak{D}} = \mathbf{M}$, nous calculons les mesures des demi-diamants suivants :

```
MES_D_K=mesh.arettes(:,_MES_K_KS)+mesh.arettes(:,_MES_K_LS);
MES_D_L=mesh.arettes(:,_MES_L_KS)+mesh.arettes(:,_MES_L_LS);
MES_D_KS=mesh.arettes(:,_MES_K_KS)+mesh.arettes(:,_MES_L_KS);
MES_D_LS=mesh.arettes(:,_MES_K_LS)+mesh.arettes(:,_MES_L_LS);
```

Rappelons que nous notons mesh.nb_are_ext le cardinal de $\mathcal{E}_{ext}$ et mesh.nb_som le nombre de volumes de contrôle du maillage primal intérieur. Nous pouvons alors construire les matrices $\mathbf{R}$, $\mathbf{N}$ et $\mathbf{M}$ de la manière suivante :

- Seulement pour les arêtes extérieures :

```
v_EXT=find(mesh.arettes(:,_L)==0);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

```
R(mesh.arettes(v_EXT,_K),mesh.arettes(v_EXT,_K)) ← +flux_NN(v_EXT);
R(mesh.arettes(v_EXT,_K),mesh.nb_vol+v_EXT) ← -flux_NN(v_EXT);
R(mesh.arettes(v_EXT,_K),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← +flux_NNS(v_EXT);
R(mesh.arettes(v_EXT,_K),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← -flux_NNS(v_EXT);
M(mesh.arettes(v_EXT,_K),mesh.arettes(v_EXT,_K)) ← +MES_D_K(v_EXT);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$:

```
N(v_EXT,mesh.arettes(v_EXT,_L)) ← +flux_NN(v_EXT);
N(v_EXT,mesh.arettes(v_EXT,_K)) ← -flux_NN(v_EXT);
N(v_EXT,mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← +flux_NNS(v_EXT);
N(v_EXT,mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← -flux_NNS(v_EXT);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$:

```
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← +flux_NSNS(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← -flux_NSNS(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),mesh.arettes(v_EXT,_K))
  ← +flux_NSN(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),mesh.nb_vol+v_EXT)
  ← -flux_NSN(v_EXT);
M(mesh.arettes(v_EXT,_KS),mesh.arettes(v_EXT,_KS)) ← +MES_D_KS(v_EXT);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$:

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← +flux_NSNS(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← -flux_NSNS(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),mesh.nb_vol+v_EXT)
  ← +flux_NSN(v_EXT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),mesh.arettes(v_EXT,_K))
  ← -flux_NSN(v_EXT);
M(mesh.arettes(v_EXT,_LS),mesh.arettes(v_EXT,_LS)) ← +MES_D_LS(v_EXT);

```

- Seulement pour les arêtes intérieures :

```
v_INT=find(mesh.arettes(:,_L)>0);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

```

R(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_K)) ← +flux_NN(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_L)) ← -flux_NN(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_K),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← +flux_NNS(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_K),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← -flux_NNS(v_INT);
M(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_K)) ← +MES_D_K(v_INT);

```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$:

```

R(mesh.arettes(v_INT,_L),mesh.arettes(v_INT,_L)) ← +flux_NN(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_L),mesh.arettes(v_INT,_K)) ← -flux_NN(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_L),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← +flux_NNS(v_INT);
R(mesh.arettes(v_INT,_L),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NNS(v_INT);
M(mesh.arettes(v_INT,_L),mesh.arettes(v_INT,_L)) ← +MES_D_L(v_INT);

```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← +flux_NSNS(v_INT); R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← -flux_NSNS(v_INT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),mesh.arettes(v_INT,_K))
  ← +flux_NSN(v_INT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),mesh.arettes(v_INT,_L))
  ← -flux_NSN(v_INT);
M(mesh.arettes(v_INT,_KS),mesh.arettes(v_INT,_KS)) ← +MES_D_KS(v_INT);

```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← +flux_NSNS(v_INT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← -flux_NSNS(v_INT);

```

```

R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.arestes(v_INT,_L))
  ← +flux_NSN(v_INT);
R(mesh.nb_vol+mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.arestes(v_INT,_K))
  ← -flux_NSN(v_INT);
M(mesh.arestes(v_INT,_LS),mesh.arestes(v_INT,_LS)) ← +MES_D_LS(v_INT);

```

Remarquons que les matrices $L_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma$ et $M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma$ ont déjà été construites dans la Section II.3. Ainsi, il nous reste simplement à construire les matrices $L_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma = L_dMS$ et $M_{\partial\mathfrak{M}^*}^\Gamma = Mg_dMS$. Nous commençons par définir le flux suivant :

$$\text{flux_bord_NS} := \frac{1}{m_\sigma} = 1 \quad . / (\text{mesh.sommets}(v_EXT, _MES));$$

ce qui nous permet de construire la matrice L_dMS :

```

// Contribution à l'équation de la maille  $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$  :
L_dMS(mesh.arestes(v_EXT,_KS),mesh.arestes(v_EXT,_KS)) ← +flux_bord_NS;
L_dMS(mesh.arestes(v_EXT,_KS),mesh.arestes(v_EXT,_LS)) ← -flux_bord_NS;
// Contribution à l'équation de la maille  $\mathcal{L}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$  :
L_dMS(mesh.arestes(v_EXT,_LS),mesh.arestes(v_EXT,_LS)) ← +flux_bord_NS;
L_dMS(mesh.arestes(v_EXT,_LS),mesh.arestes(v_EXT,_KS)) ← -flux_bord_NS;

```

En ce qui concerne la matrice de masse $M_{\partial\mathfrak{M}}^\Gamma = Mg_dMS$, il suffit d'écrire :

```

som_bord=find(mesh.sommets(:,_VL)>0);
Mg_dMS(som_bord,som_bord) ← +mesh.sommets(som_bord,_DLLp);

```

VI.5 Tests numériques

Dans toute cette section, le centre $x_{\mathcal{K}}$ est le centre de gravité de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et $y_{\mathcal{L}}$ est le milieu de la corde $\mathbf{e}_{\mathcal{L}}$ pour toute maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$. De plus, les potentiels de Cahn-Hilliard choisis ici sont donnés par $f_b(c) = f_s(c) = c^2(1-c)^2$.

VI.5.1 Estimations d'erreurs

Pour valider ce schéma, nous commençons par présenter des résultats d'estimations d'erreur numériques. Pour cela, nous étudions exactement le même problème que dans la Section III.8.1 avec les mêmes paramètres.

Nous nous plaçons donc sur le disque unité et la solution exacte régulière est donnée par $c(t, (x, y)) = (1 + \tanh(5(x+t)))$.

Notons $e_{\mathcal{T}}^T = (e_{\mathfrak{M}}^T, e_{\partial\mathfrak{M}}^T, e_{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}^T)$ et $c_{\mathcal{T}}^T = (c_{\mathfrak{M}}^T, c_{\partial\mathfrak{M}}^T, c_{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}^T)$ avec :

$$\begin{aligned}
e_{\mathfrak{M}}^T &= (c(T, x_{\mathcal{K}}) - c_{\mathcal{K}}^N)_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, & e_{\partial\mathfrak{M}}^T &= (c(T, x_{\mathcal{L}}) - c_{\mathcal{L}}^N)_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}, & e_{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}^T &= (c(T, x_{\mathcal{K}^*}) - c_{\mathcal{K}^*}^N)_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} \\
\text{et } c_{\mathfrak{M}}^T &= (c(T, x_{\mathcal{K}}))_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}, & c_{\partial\mathfrak{M}}^T &= (c(T, x_{\mathcal{L}}))_{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}}, & c_{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}^T &= (c(T, x_{\mathcal{K}^*}) - c_{\mathcal{K}^*}^N)_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}
\end{aligned}$$

Au temps $T = 0.5$, nous traçons alors

$$\frac{\|e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}{\|c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}, \quad \frac{\|e_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{\partial\mathfrak{M},2}}{\|c_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{\partial\mathfrak{M},2}}, \quad \frac{\|\nabla^{\mathfrak{D}} e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathfrak{D},2}}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathfrak{D},2}}, \quad \text{et} \quad \frac{\|\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} e_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{\mathcal{W},2}}{\|\nabla_{\Gamma}^{\mathcal{W}} c_{\partial\mathfrak{M}}^T\|_{\mathcal{W},2}}$$

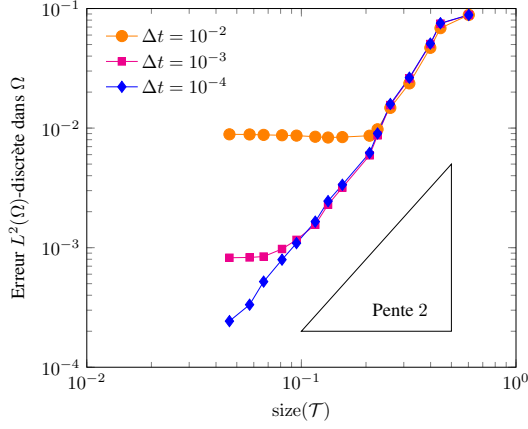
en fonction

- du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ lorsque le pas de temps est fixé;
- du pas de temps Δt lorsque le pas du maillage est fixé.

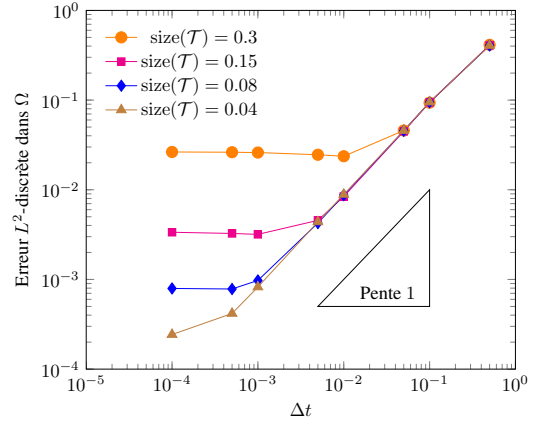
Nous observons le même comportement que pour le schéma VF4 c'est à dire que nous retrouvons bien une convergence d'ordre 1 en temps attendue au delà d'un certain palier dépendant du pas du maillage. De plus, en ce qui concerne la convergence en espace, nous observons (au delà d'un certain palier dépendant du pas de temps),

- une convergence d'ordre 2 norme L^2 à la fois dans Ω et sur Γ ;
- un ordre 1 (au moins asymptotiquement) en norme H^1 -discrète dans Ω ;
- une ordre 2 en norme H^1 -discrète sur Γ qui ne s'explique, là encore, que par la géométrie particulière des mailles du bord.

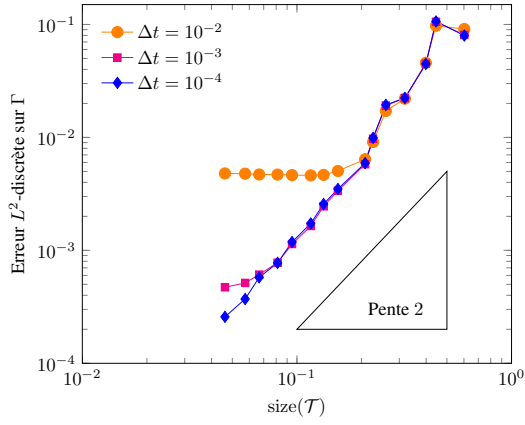
Remarquons que le schéma DDFV ne semble pas forcément gagner en précision par rapport au schéma VF4. Mais rappelons que l'intérêt principal du schéma DDFV par rapport au schéma VF4 est qu'il permet de traiter des maillages très généraux.



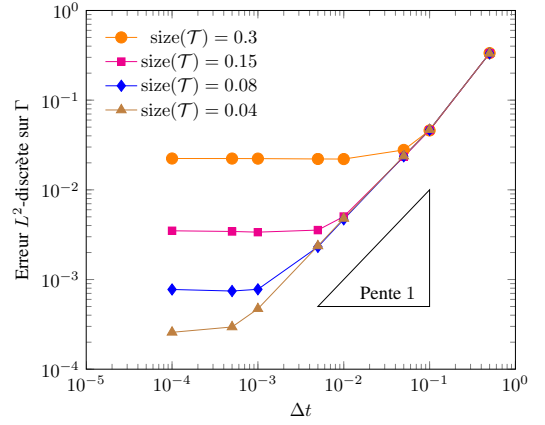
(a) $\frac{\|e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}{\|c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(b) $\frac{\|e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}{\|c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{T},2}}$ en fonction de Δt

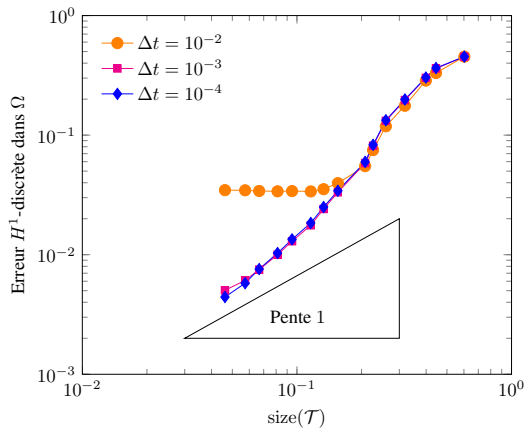


(c) $\frac{\|e_{\partial\mathcal{T}}^T\|_{\partial\mathcal{T},2}}{\|c_{\partial\mathcal{T}}^T\|_{\partial\mathcal{T},2}}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$

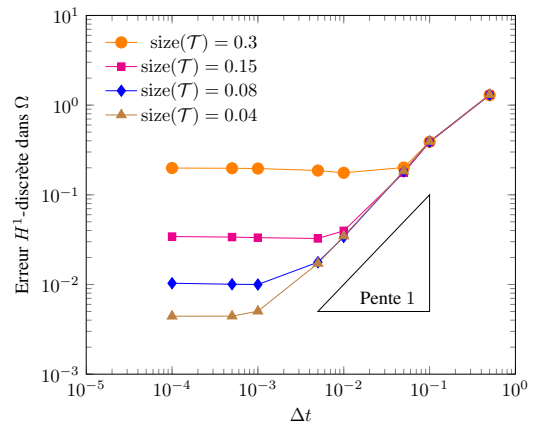


(d) $\frac{\|e_{\partial\mathcal{T}}^T\|_{\partial\mathcal{T},2}}{\|c_{\partial\mathcal{T}}^T\|_{\partial\mathcal{T},2}}$ en fonction de Δt

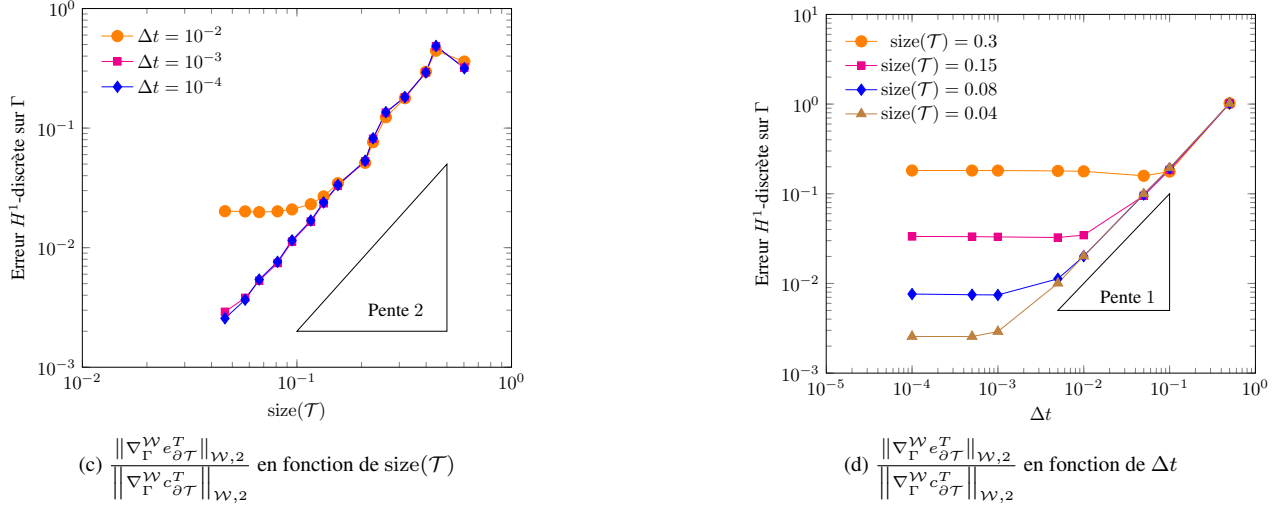
Figure VI.1: Erreurs relatives en norme L^2 -discrète



(a) $\frac{\|\nabla^{\mathcal{D}} e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{D},2}}{\|\nabla^{\mathcal{D}} c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{D},2}}$ en fonction de $\text{size}(\mathcal{T})$



(b) $\frac{\|\nabla^{\mathcal{D}} e_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{D},2}}{\|\nabla^{\mathcal{D}} c_{\mathcal{T}}^T\|_{\mathcal{D},2}}$ en fonction de Δt

Figure VI.2: Erreurs relatives en norme H^1 -discrète

VI.5.2 Décomposition spinodale

Nous nous intéressons maintenant à des résultats plus qualitatifs. Nous commençons par reprendre un exemple donné dans la Section III.8.2 avec le schéma VF4. Etudions le phénomène de séparation de phases avec des conditions aux limites dynamiques et en présence de diffusion sur la paroi. Nous nous plaçons sur le domaine courbe sans symétrie particulière avec un pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.065$ et les paramètres suivants : $\Gamma_b = 0.15$, $\sigma_b = 0.006$, $\varepsilon = 0.07$, $\Gamma_s = 10$ et $\sigma_s = 5$.

Nous choisissons une concentration initiale aléatoire comprise entre 0.49 et 0.51. Remarquons que la concentration initiale ne sera pas exactement la même que dans la Section III.8.2 car ici nous avons ajouté des inconnues aux sommets. Nous traçons alors la solution obtenue sur le maillage primal et celle obtenue sur le maillage dual ainsi que les traces correspondantes.

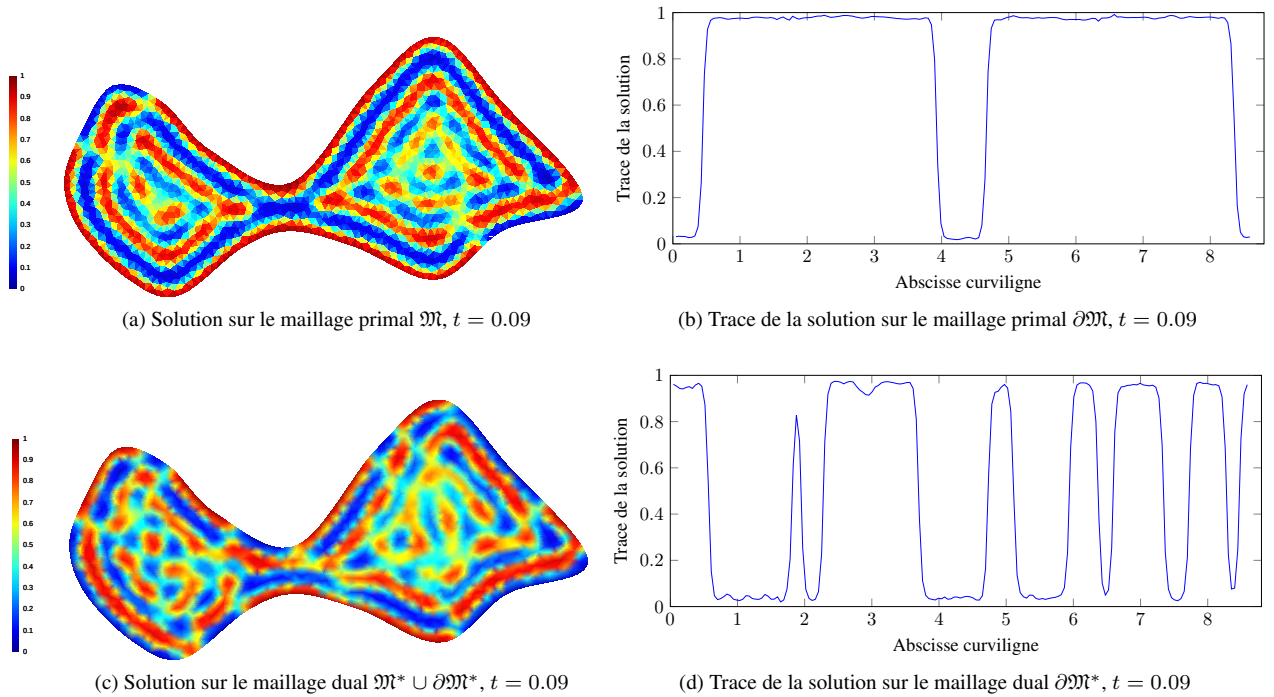


Figure VI.3: Le schéma DDFV et le phénomène de séparation de phases

Nous observons que, bien que le comportement de la solution soit similaire à celui observé sur la Figure III.10e avec l'apparition de larges structures au niveau de la paroi avec alternance des deux phases pures, nous n'avons pas la même solution sur les deux maillages. Ce phénomène est dû au fait que le schéma DDFV est en fait résolu sur deux maillages différents et faiblement couplés. Ainsi, vu que nous avons choisi une concentration initiale complètement aléatoire celle-ci est en fait différente sur le maillage primal et sur le maillage dual. C'est la raison pour laquelle nous observons très rapidement une évolution différente du paramètre d'ordre. Ce phénomène n'est pas étonnant et n'est pas propre au schéma DDFV. En effet, la concentration initiale étant différente sur le maillage primal et sur le maillage dual nous résolvons en fait deux problèmes de Cahn-Hilliard différents. Nous observerions le même phénomène si nous utilisions deux schémas éléments finis avec deux maillages différents. Le problème de Cahn-Hilliard étant un problème raide ce n'est pas une bonne idée de partir d'une solution complètement aléatoire sur les deux maillages alors que les deux schémas résolus sur ces maillages sont faiblement couplés.

Nous choisissons donc maintenant une concentration aléatoire mais telle que la condition initiale sur le maillage primal ne soit pas trop éloignée de celle sur le maillage dual.

Pour cela, nous partons d'une concentration aléatoire (comprise entre 0.49 et 0.51) $c_{\mathfrak{M}}^0$ définie sur les centres du maillage primal. A partir de $c_{\mathfrak{M}}^0$ nous construisons le vecteur $c_{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}^0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}$ tel que :

$$c_{\mathcal{K}^*}^0 = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M} : \partial\mathcal{K} \cap x_{\mathcal{K}^*} \neq \emptyset} m_{\mathcal{K}} c_{\mathcal{K}}^0, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$$

puis le vecteur $c_{\partial\mathfrak{M}}^0$ tel que :

$$c_{\mathcal{L}}^0 = \frac{c_{\mathcal{K}^*}^0 + c_{\mathcal{L}^*}^0}{2}, \quad \forall \mathcal{L} = \widehat{x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}^*}} \in \partial\mathfrak{M}.$$

Notons que nous gardons les mêmes paramètres que précédemment et que la concentration initiale est choisie telle qu'elle coïncide avec celle du cas précédent sur le maillage primal intérieur $\mathfrak{M}$.

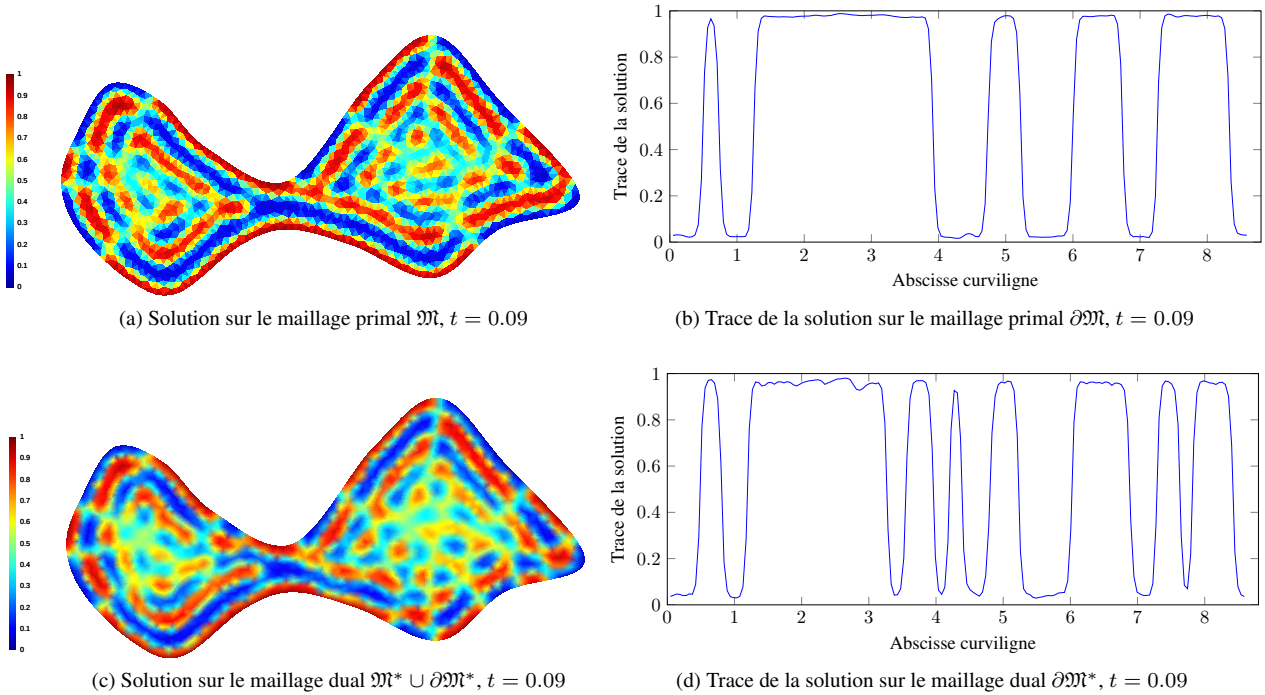


Figure VI.4: Le schéma DDFV avec une concentration initiale "proche" sur les maillages primal et dual

La première remarque que nous pouvons faire est que les solutions obtenues sur la Figure VI.4 sur les maillages primal et dual sont très proches l'une de l'autre contrairement à ce que nous avons obtenu sur la Figure VI.3. Ainsi, ceci confirme que de ne pas obtenir la même solution lorsque nous partons d'une concentration initiale sur le maillage primal n'ayant aucun lien avec la concentration initiale sur le maillage dual ne signifie pas que le schéma DDFV constitue un mauvais "schéma" pour l'étude du modèle de Cahn-Hilliard.

Cependant si nous comparons attentivement les résultats obtenus sur la Figure VI.4 nous observons que les solutions obtenues ne sont pas totalement identiques. Remarquons alors que l'épaisseur d'interface que nous avons choisi est faible

par rapport au pas du maillage, il y a seulement une maille dans l'interface il est donc normal que sur des maillages différents la solution puisse évoluer différemment. Raffinons donc un peu le maillage en prenant $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.04$ (de sorte à avoir à peu près deux mailles dans l'interface) et gardons tous les paramètres identiques. Notons que la condition initiale considérée ici ne sera pas égale à celle choisie dans les cas précédents.

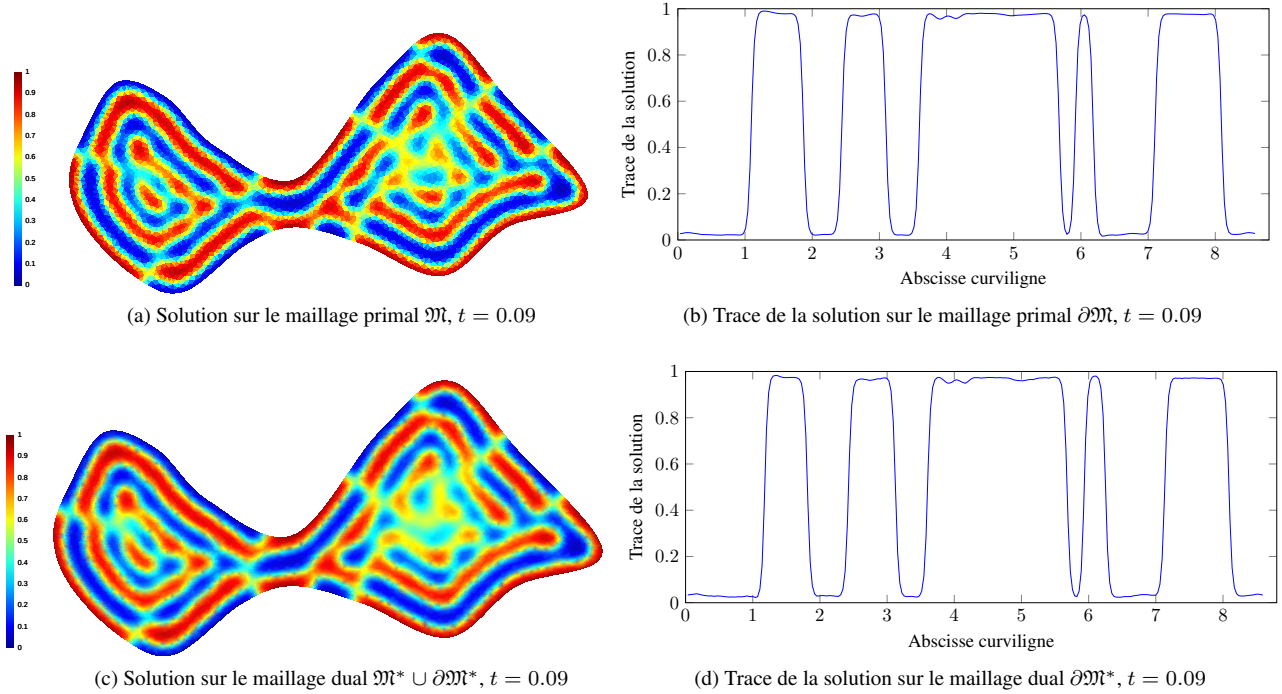


Figure VI.5: Le schéma DDFV et le phénomène de séparation de phases

Les résultats obtenus sur la Figure VI.5 montrent bien que dans ce cas nous obtenons la même solution sur le maillage primal et sur le maillage dual. Remarquons également que le comportement de la solution est en accord avec ce que nous avons observé avec le schéma VF4 (cf Figures III.10e et III.10f).

En conclusion bien que le problème de Cahn-Hilliard soit un problème raide, ces résultats montrent que le schéma DDFV est bien adapté à ce type de problème à partir du moment où nous choisissons une condition initiale "raisonnable" et un pas d'espace en accord avec la valeur de l'épaisseur d'interface choisie, c'est à dire un peu plus petit que l'épaisseur d'interface.

VI.5.3 Minimisation de la longueur de l'interface

Nous présentons maintenant un cas test qui permet d'observer l'une des propriétés du système de Cahn-Hilliard : ce système tend à minimiser la longueur de l'interface sous contrainte de conservation du volume. Pour cela, nous réalisons un test similaire à celui présenté dans la Section I.7.2. Ce test est réalisé sur le domaine $]0, 1[^2$ avec les paramètres suivants : une mobilité $\Gamma_b = 10^{-4}$, une tension de surface $\sigma_b = 1$ et l'épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.035$. Le maillage utilisé est un maillage non-conforme (comme décrit sur la Figure VI.6) de pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.01$. La concentration initiale est une bulle ellipsoïdale (voir figure VI.6a) donnée par :

$$c^0(x, y) = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh \left(\frac{2}{\varepsilon} \left[\sqrt{\frac{(x - \frac{1}{2})^2}{a^2} + a^2(y - 0.5)^2 - 0.25} \right] \right) \right]; \quad \text{avec } a = 1.5.$$

Nous observons sur la Figure VI.6 l'évolution de la position des interfaces. Le système tend à minimiser la longueur de l'interface tout en satisfaisant la propriété de conservation du volume. Notons qu'à la fin de notre calcul ($= 20$) l'état stationnaire (constitué d'une interface circulaire) n'est pas encore atteint.

Nous observons également très clairement que la solution sur le maillage primal est quasiment confondue avec celle sur le maillage dual bien que ce test soit réalisé sur un maillage hautement non-conforme. Ainsi, ces résultats confirment les bonnes propriétés de l'approximation DDFV de l'équation Cahn-Hilliard même pour des maillages non-conformes.

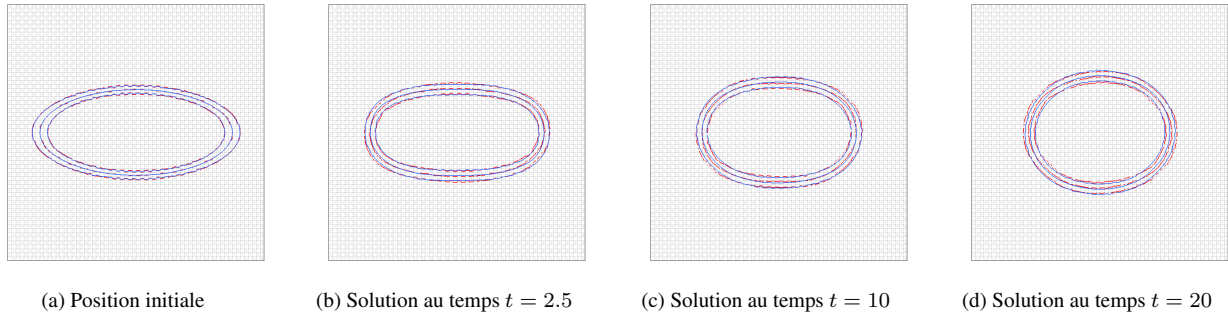


Figure VI.6: Evolution de la position de l'interface . Maillage primal en rouge, Maillage dual en bleu

VI.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit une méthode DDFV adaptée au modèle de Cahn-Hilliard permettant d'utiliser des maillages très généraux et même non-conformes. Nous avons également démontré les estimations d'énergie correspondantes qui permettent d'établir l'existence d'au moins une solution au problème discret ainsi que les bornes sur les solutions discrètes. A ce jour nous n'avons pas encore prouvé de résultat de convergence des solutions approchées vers une solution faible du problème continu. Une perspective de ce travail serait donc d'adapter la preuve du Théorème III.18 donnée dans le Chapitre III pour le schéma VF4 au cas du schéma DDFV.

De plus, d'un point de vue numérique, des estimations d'erreurs nous ont permis de valider ce schéma et des résultats plus qualitatifs ont montré que le schéma DDFV s'adaptait bien au modèle de Cahn-Hilliard tout en autorisant l'utilisation de maillages non-conformes. Ainsi, l'une des perspectives de ce travail serait de construire une méthode de raffinement adaptatif qui permettrait de suivre l'interface. De plus, pour améliorer ce schéma, une seconde perspective pourrait être de trouver une méthode permettant de coupler plus fortement le schéma résolu sur le maillage primal avec celui résolu sur le maillage dual et ainsi éviter des distorsions trop fortes liées aux maillages.

Chapitre VII

Couplage de l'équation de Cahn-Hilliard avec le problème de Stokes

Ce chapitre a pour but d'introduire un schéma DDFV qui permettrait, à terme, d'étudier le couplage entre le modèle de Cahn-Hilliard et les équations de Navier-Stokes. Ce travail est encore en cours et nous nous plaçons ici dans un cadre particulier simplifié que nous détaillerons plus loin mais qui contient les difficultés essentielles liées au couplage. Cependant, rappelons rapidement le principe du modèle Cahn-Hilliard/Navier-Stokes.

Ce modèle fait partie de la classe de modèles de type interfaces diffuses (ou champs de phase) et permet notamment de décrire les écoulements multiphasiques incompressibles. La non-miscibilité des phases est prise en compte par l'équation de Cahn-Hilliard qui permet de maintenir l'épaisseur d'interface à une valeur prescrite $\varepsilon > 0$ et l'hydrodynamique de l'écoulement est pris en compte par les équations de Navier-Stokes.

Considérons deux fluides de densité ρ_1 et ρ_2 et de viscosité η_1 et η_2 . Le couplage du modèle de Cahn-Hilliard avec les équations de Navier-Stokes est réalisé :

- en ajoutant un terme de transport $\mathbf{u} \cdot \nabla c$ dans l'équation d'évolution du paramètre d'ordre de l'équation de Cahn-Hilliard;
- en ajoutant un terme de force capillaire $\mu \nabla c$ dans le bilan de quantité de mouvement des équations de Navier-Stokes;
- en définissant la densité ρ et la viscosité η comme des fonctions régulières du paramètre d'ordre (vérifiant $\rho(1) = \rho_1$, $\eta(1) = \eta_1$, $\rho(0) = \rho_2$ et $\eta(0) = \eta_2$).

Le modèle couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes s'écrit alors : Trouver la concentration de l'un des deux constituants $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de vitesse $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \Gamma_b \Delta \mu, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (\text{VII.1a}) \\ \mu = -\mathcal{A}_\Delta \Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c), & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (\text{VII.1b}) \\ \partial_t(\rho(c)\mathbf{u}) + \text{div}(\rho(c)\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \text{div}(2\eta(c)D\mathbf{u}) + \nabla p + \mathbb{T} = \mu \nabla c + \rho(c)\mathbf{g}, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (\text{VII.1c}) \\ \text{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \quad (\text{VII.1d}) \\ \mathbf{u} = 0; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \quad (\text{VII.1e}) \\ \nabla \mu \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \quad (\text{VII.1f}) \end{array} \right.$$

où le vecteur $\mathbf{g}$ représente la gravité et $D\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)$.

Commençons par remarquer que pour que ce problème soit bien posé il faut également ajouter une condition au bord sur le paramètre d'ordre c . Nous étudierons deux types de condition au bord dans ces travaux que nous détaillerons plus loin. De plus, nous avons introduit un terme, noté $\mathbb{T}$, que nous n'avons pas défini et qui varie selon les auteurs (voir par exemple [Boy02, BLM⁺10, AGG12] et les références qui s'y trouvent). Ceci est dû au fait que, lorsque nous étudions

le problème couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes le champ de vitesse à divergence nulle $\mathbf{u}$ représente en fait la vitesse moyenne volumique des deux fluides. Alors bien que l'équation de conservation de la masse soit vérifiée pour chacun des deux fluides, l'équation de conservation de la masse totale $\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0$ n'est plus vérifiée lorsque la densité est une fonction dépendant du paramètre d'ordre. La question du choix de ce terme est donc sujette à débat et plusieurs solutions sont proposées selon les auteurs. Par exemple, dans [BLM⁺10] les auteurs choisissent :

$$\mathbb{T} = -\frac{1}{2} [\partial_t \rho(c) + \operatorname{div}(\rho(c) \mathbf{u})] \mathbf{u},$$

alors que dans [AGG12] les auteurs préfèrent prendre :

$$\mathbb{T} = -[\partial_t \rho(c) + \operatorname{div}(\rho(c) \mathbf{u})] \mathbf{u} - \Gamma_b (\rho'(c) \nabla \mu \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Ces deux possibilités permettent alors de retrouver le bilan local d'énergie cinétique.

La première condition aux limites sur le paramètre d'ordre que nous étudierons sera une condition aux limites de Neumann homogène. Cette condition au bord est celle la plus souvent étudiée et a déjà fait l'objet de nombreux travaux (voir [Jac99, Boy02, LS03, KSW08, AF08, Abe09, BLM⁺10, AGG12] par exemple et les références qui s'y trouvent). Cependant cette condition aux limites impose que l'interface fluide soit orthogonale à la paroi solide ce qui, en pratique, n'est pas très réaliste. C'est la raison pour laquelle dans [Jac00] l'auteur propose une énergie libre surfacique, et ainsi une condition aux limites dynamiques, permettant de prendre en compte cette dynamique d'angles de contact. Cette condition aux limites fait l'objet de travaux récents mais d'un point de vue numérique peu de résultats sont connus à ce jour (voir par exemple [WQS08, CQA11, Don12] et les références qui s'y trouvent).

Nous avons choisi de nous placer dans ce chapitre dans un cadre simplifié : nous faisons l'hypothèse de Boussinesq et nous négligeons le terme non-linéaire. Notons cependant que dans [GK14] les auteurs introduisent un schéma DDFV pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (dont nous nous sommes d'ailleurs inspirés pour construire le schéma DDFV présenté dans ce chapitre). Ainsi, l'adaptation du cas que nous étudions au cas plus général ne devrait pas poser de trop grandes difficultés et fait l'objet d'un travail en cours.

Dans ce chapitre, nous proposons donc un schéma de type volumes finis (DDFV) permettant de coupler l'équation de Cahn-Hilliard avec le problème de Stokes instationnaire et de prendre en compte la condition aux limites dynamique et non-linéaire.

Cependant, obtenir une approximation DDFV pour ce problème n'est pas si simple. Par exemple, dans l'équation du bilan de quantité de mouvement (VII.1c), la discrétisation du terme de force capillaire $\mu \nabla c$ est délicate. En effet, nous avons vu que les inconnues discrètes associées au potentiel chimique sont localisées aux centres et aux sommets alors que le gradient discret de la concentration est localisé sur les diamants. Il ne va donc pas être possible d'obtenir un schéma DDFV pour le système (VII.2) avec les opérateurs discrets précédemment définis.

Ainsi, un premier travail consiste à définir de nouveaux opérateurs discrets (Section VII.1) dont nous vérifions qu'ils sont (en un certain sens) consistants. Nous pouvons alors donner les approximations DDFV de ce problème en fonction des différentes conditions aux limites qui lui sont associées (Sections VII.2 et VII.3) ainsi que les estimations d'énergie correspondantes. Nous décrivons ensuite l'implémentation des opérateurs utilisés (Section VII.4) puis dans la Section VII.5 nous présentons des résultats numériques permettant d'une part de valider ce schéma et d'autre part d'illustrer l'influence des conditions aux limites dynamiques.

VII.1 Construction de nouveaux opérateurs discrets

Le problème que nous étudions s'écrit : Trouver la concentration de l'un des deux constituants $c : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, le champ de vitesse $\mathbf{u} : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et la pression $p : (0, T) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \Gamma_b \Delta \mu, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \mu = -\mathcal{A}_\Delta c + \mathcal{A}_{f_b} f'_b(c), & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \partial_t \mathbf{u} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \frac{1}{\rho^*} \mu \nabla c + \frac{\rho(c)}{\rho^*} \mathbf{g}, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, & \text{dans } (0, T) \times \Omega; \\ \mathbf{u} = 0; & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \\ \nabla \mu \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, & \text{sur } (0, T) \times \Gamma; \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(VII.2a)} \\ \text{(VII.2b)} \\ \text{(VII.2c)} \\ \text{(VII.2d)} \\ \text{(VII.2e)} \\ \text{(VII.2f)} \end{array}$$

auquel il faut ajouter la condition aux limites sur le paramètre d'ordre c .

Nous avons noté $\mathcal{R}_e$ le nombre de Reynolds et ρ^* la densité du fluide le plus lourd.

Commençons par énoncer les différents problèmes intervenant lorsque nous voulons discrétiser ce système avec un schéma DDFV classique.

- Lorsque nous discrétisons l'équation de Cahn-Hilliard par un schéma DDFV, nous avons vu dans le Chapitre VI que les inconnues sont localisées aux centres et aux sommets (aussi bien pour la concentration c que pour le potentiel chimique μ). Par contre, le gradient discret est constant par diamant. Le premier problème concerne donc la discrétisation du terme $\mu \nabla c$. Nous allons donc devoir définir un nouvel opérateur discret, noté $\mathcal{G}^\tau(\mu_\tau, c_\tau)$, qui va approcher le terme " $\mu \nabla c$ ".
- Les inconnues en vitesse étant également localisées aux centres et aux sommets (cf Chapitre IV), le même problème se pose alors pour le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla c$. Cependant, la vitesse est à divergence nulle ce qui implique que $\mathbf{u} \cdot \nabla c = \operatorname{div}(\mathbf{u}c)$. Nous allons donc construire un nouvel opérateur discret $\operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau, c_\tau)$ permettant d'approcher le terme " $\operatorname{div}(\mathbf{u}c)$ ".
- Enfin écrivons (formellement) l'obtention de l'estimation d'énergie dans le cas continu :
 - Nous multiplions l'équation (VII.2a) par μ puis nous l'intégrons sur Ω . Alors, en utilisant la condition aux limites de Neumann homogène sur le potentiel chimique, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} (\mu \partial_t c + \mathbf{u} \cdot (\mu \nabla c) + \Gamma_b |\nabla \mu|^2) = 0.$$

- Nous multiplions ensuite l'équation (VII.2b) par $\partial_t c$ puis nous l'intégrons sur Ω , alors :

$$\int_{\Omega} \mu \partial_t c = \int_{\Omega} \partial_t \left(\frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} |\nabla c|^2 + \mathcal{A}_{fb} f_b(c) \right) - \mathcal{A}_\Delta \int_{\Gamma} \partial_t c \nabla c \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

- Enfin, nous multiplions l'équation (VII.2c) par $\mathbf{u}$ et nous l'intégrons sur Ω . Alors, le fait que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ dans Ω et que $\mathbf{u} = 0$ sur Γ impliquent :

$$\int_{\Omega} (\mu \nabla c) \cdot \mathbf{u} = \int_{\Omega} \left(\frac{\rho^*}{2} \partial_t |\mathbf{u}|^2 + \frac{\rho^*}{\mathcal{R}_e} |\nabla \mathbf{u}|^2 \right) - \int_{\Omega} \rho(c) \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}.$$

- Pour finir, il reste à sommer ces trois égalités ce qui mène à :

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathcal{F}_b(c) + \frac{\rho^*}{2} |\mathbf{u}|^2 \right) = -\Gamma_b \int_{\Omega} |\nabla \mu|^2 - \frac{\rho^*}{\mathcal{R}_e} \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}|^2 + \int_{\Omega} \rho(c) \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \mathcal{A}_\Delta \int_{\Gamma} \partial_t c \nabla c \cdot \vec{\mathbf{n}}.$$

Ainsi, les contributions du terme de transport dans l'équation de Cahn-Hilliard et du terme capillaire dans l'équation de Stokes se compensent exactement. Il va donc falloir conserver, au moins en un sens faible, cette propriété dans le cas discret pour pouvoir obtenir des estimations d'énergie.

Remarquons que le terme $\int_{\Gamma} \partial_t c \nabla c \cdot \vec{\mathbf{n}}$ intervient de manière différente dans cette estimation en fonction des conditions aux limites que nous choisissons d'utiliser. Il est nul lorsque nous considérons des conditions aux limites de Neumann homogène sur le paramètre d'ordre alors qu'il permet de faire intervenir des termes surfaciques lorsque nous imposons une condition aux limites dynamique.

VII.1.1 Définition de l'opérateur $\operatorname{div}_\pi^\tau$

Soit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Intégrons la quantité $\operatorname{div}(\mathbf{u}c)$ sur chaque maille primale $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et utilisons la formule de Stokes, nous obtenons :

$$\int_{\mathcal{K}} \operatorname{div}(\mathbf{u}c) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} \int_{\sigma} c \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \sim \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\mathcal{K}}} c_{\sigma} F_{\sigma,\mathcal{K}}^\pi(\mathbf{u}_\tau)$$

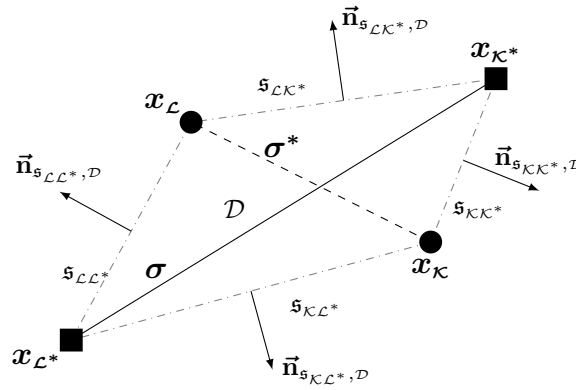
où c_{σ} est une inconnue (à déterminer) sur l'arête σ et $F_{\sigma,\mathcal{K}}^\pi(\mathbf{u}_\tau)$ une approximation de $\int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}}$.

Dans le même esprit que ce que font les auteurs dans [GK14], nous allons utiliser le fait que la vitesse est à divergence nulle pour obtenir l'expression de $F_{\sigma,\mathcal{K}}^\pi$.

Commençons par introduire les notations sur les mailles diamants que nous utilisons dans la suite.

Notations : Considérons la maille diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ défini par les centres $x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{L}}$ et les sommets $x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}$.

- Les côtés de $\mathcal{D}$ sont notés $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*} \in \partial \mathcal{D}$ est le segment d'extrémités $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{K}^*}$. Nous utiliserons des notations similaires pour les trois autres côtés de $\mathcal{D}$: $\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}$, $\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}$ et $\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*}$.

Figure VII.1: Définitions relatives au diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

- m_s est la longueur du côté s et $\vec{n}_{s,D}$ la normale unitaire à s sortante à $\mathcal{D}$.

Nous savons que pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$,

$$0 = \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [m_{\underline{\sigma}}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}}) \cdot \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} + m_{\underline{\sigma}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \vec{n}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*}]. \quad (\text{VII.3})$$

En utilisant les formules géométriques suivantes,

$$m_{\underline{\sigma}} \vec{n}_{\mathcal{K}\mathcal{L}} = \begin{cases} -m_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*},D} - m_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*},D} \\ + m_{s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*},D} + m_{s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*},D} \end{cases} \quad \text{et} \quad m_{\underline{\sigma}^*} \vec{n}_{\mathcal{K}^*\mathcal{L}^*} = \begin{cases} -m_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*},D} - m_{s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*},D} \\ + m_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*},D} + m_{s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*}} \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*},D} \end{cases}$$

et en réorganisant les termes de (VII.3), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} [s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*},D} + s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}) \cdot \vec{n}_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*},D} \\ &\quad + s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}) \cdot \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*},D} + s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}) \cdot \vec{n}_{s_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*},D}] \\ &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\substack{s \in \partial \mathcal{D} \\ s=[x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{K}^*}]}} m_s \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{n}_{s,D}. \end{aligned}$$

Nous posons alors :

$$F_{s,D}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = m_s \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{n}_{s,D} \quad \text{et} \quad F_{\sigma,\mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = - (F_{s_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*},D}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{s_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*},D}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})).$$

Le même raisonnement sur les mailles duales $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$, nous de définir l'opérateur $\operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}$.

Définition VII.1 (Définition de l'opérateur discret $\operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}$)

Nous définissons l'opérateur $\operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante.

Soit $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $c_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, alors :

$$\operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) = (\operatorname{div}_{\pi}^{\mathfrak{M}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \operatorname{div}_{\pi}^{\partial \mathfrak{M}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \operatorname{div}_{\pi}^{\mathfrak{M}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \operatorname{div}_{\pi}^{\partial \mathfrak{M}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}))$$

avec $\operatorname{div}_{\pi}^{\partial \mathfrak{M}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) = 0$ et,

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_{\sigma} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} c_{\sigma} F_{\sigma,\mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \quad \text{avec } c_{\sigma} = \frac{c_{\mathcal{K}} + c_{\mathcal{L}}}{2}; \\ \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*, \quad \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{D}_{\sigma} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} c_{\sigma} F_{\sigma,\mathcal{K}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \quad \text{avec } c_{\sigma} = \frac{c_{\mathcal{K}^*} + c_{\mathcal{L}^*}}{2}. \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

Ces flux de masse $F_{\bullet}^{\pi}$ qui interviennent sont définis de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}, \quad F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= - \left(F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \right), \\ \forall \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathfrak{D}_{int}, \quad F_{\sigma^*, \mathcal{K}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= - \left(F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \right), \\ \forall \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}, \quad F_{\sigma^*, \mathcal{K}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= -F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}), \end{aligned}$$

où le flux sortant de $\mathcal{D}$ à travers $\mathfrak{s}$ est donné par :

$$F_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{P}} + \mathbf{u}_{\mathcal{P}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}};$$

où $\mathfrak{s} = [x_{\mathcal{P}}, x_{\mathcal{P}^*}] \in \partial \mathcal{D}$ avec $\mathcal{P} \in \{\mathcal{K}, \mathcal{L}\}$ et $\mathcal{P}^* = \{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*\}$.

Notons que nous avons choisi d'utiliser une discrétisation centrée pour les inconnues d'arêtes c_{σ} et c_{σ^*} définies par (VII.4) car c'est le choix le plus simple et qu'il permet d'obtenir des résultats satisfaisants. Cependant, d'autres choix sont bien sûr envisageables.

Remarque VII.2

Pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, la définition des flux $F_{\bullet}^{\pi}$ que nous venons d'introduire implique que pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \partial \mathcal{D} \\ \mathfrak{s} = [x_{\mathcal{K}}, x_{\mathcal{K}^*}]}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}} \\ &= -\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} (F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\sigma^*, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \\ &= -\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} (F_{\sigma^*, \mathcal{K}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\sigma, \mathcal{L}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})). \end{aligned}$$

Ainsi, si $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ satisfait la condition $\operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0$, nous avons bien conservativité des flux, c'est à dire : $F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = -F_{\sigma^*, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})$ et $F_{\sigma^*, \mathcal{K}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = -F_{\sigma, \mathcal{L}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})$.

VII.1.2 Définition de l'opérateur $\mathcal{G}^{\mathcal{T}}$

Dans cette section, nous construisons l'opérateur discret $\mathcal{G}^{\mathcal{T}}$ tel que :

$$\llbracket \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \mu_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \llbracket \mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0, \quad \forall c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}; \quad (\text{VII.5})$$

où nous rappelons que

$$\mathbb{E}_0 = \left\{ \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{u}_{\partial \mathfrak{M}} = 0 \text{ et } \mathbf{u}_{\partial \mathfrak{M}^*} = 0 \right\}.$$

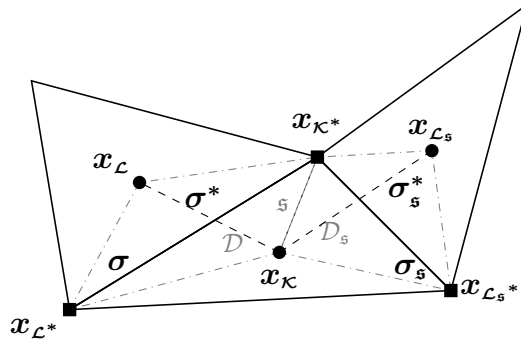


Figure VII.2: Définition du diamant $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}$

Soit $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. Si nous désignons par $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}$ le diamant voisin de $\mathcal{D}$ qui partage le côté $\mathfrak{s}$ (comme décrit sur la Figure VII.2) et par $\sigma_{\mathfrak{s}}, \sigma_{\mathfrak{s}}^*$ les arêtes primale et duale correspondantes, la Définition VII.1 donne pour toute

maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$,

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}} \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) &= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma}) \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right) + \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma}) \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right). \end{aligned}$$

où $\vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}}$ désigne la normale unitaire à $\mathfrak{s}$ allant de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}$.

De la même manière, pour toute maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, nous avons :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}^*} \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}) &= \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}^*, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*}) \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}^*, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*}) \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right) + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \cdot \left(\sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}^*, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}(c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right). \end{aligned}$$

Ces deux égalités impliquent,

$$\begin{aligned} \llbracket \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \mu_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}((c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma})\mu_{\mathcal{K}} + (c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*})\mu_{\mathcal{K}^*}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \cdot \left(\frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}^*, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} m_{\mathfrak{s}}((c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma})\mu_{\mathcal{K}} + (c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*})\mu_{\mathcal{K}^*}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.6})$$

Définition VII.3 (Définition de l'opérateur discret $\mathcal{G}^{\mathcal{T}}$)

Nous définissons l'opérateur $\mathcal{G}^{\mathcal{T}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante.

Pour tout $c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, nous posons $\mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) = (\mathcal{G}^{\mathfrak{M}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathcal{G}^{\partial\mathfrak{M}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathcal{G}^{\mathfrak{M}^*}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathcal{G}^{\partial\mathfrak{M}^*}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}))$ tels que $\mathcal{G}^{\partial\mathfrak{M}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) = \mathcal{G}^{\partial\mathfrak{M}^*}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) = 0$ et,

$$\begin{aligned} \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad \mathcal{G}^{\mathcal{K}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} \frac{m_{\mathfrak{s}}}{2} ((c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma})\mu_{\mathcal{K}} + (c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*})\mu_{\mathcal{K}^*}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}}; \\ \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \mathcal{G}^{\mathcal{K}^*}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*} \\ \mathfrak{s} \subset \mathcal{K}^*, \mathfrak{s} \notin \Gamma}} \frac{m_{\mathfrak{s}}}{2} ((c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma})\mu_{\mathcal{K}} + (c_{\sigma_{\mathfrak{s}}} - c_{\sigma^*})\mu_{\mathcal{K}^*}) \vec{\mathbf{n}}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_{\mathfrak{s}}}. \end{aligned}$$

Remarque VII.4

Comme nous l'avons vu dans la Partie 2, pour obtenir une approximation DDFV du problème de Stokes, nous intégrons le bilan de quantité de mouvement sur les mailles primales et duales intérieures seulement. C'est la raison pour laquelle malgré ce que nous obtenons dans l'équation (VII.6), nous avons imposé que $\mathcal{G}^{\partial\mathfrak{M}^*}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}) = 0$. Cependant la condition aux limites (VII.2e) implique que $u_{\mathcal{K}^*} = 0$ pour toute maille duale $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$, ainsi la formule (VII.5) est bien satisfaite.

VII.1.3 Etude de consistance

Nous allons montrer ici que les opérateurs $\operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}$ et $\mathcal{G}^{\mathcal{T}}$ définis ci-dessus sont consistants en un certain sens.

Pour plus de clarté, pour tout $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière, nous notons $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ex}$ le vecteur de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ tel que pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{K}}^{ex} = \mathbf{u}(x_{\mathcal{K}})$ et pour tout $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, $\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}^{ex} = \mathbf{u}(x_{\mathcal{K}^*})$.

De la même manière, pour tout $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, pour tout $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}$, nous définissons :

$$c_{\sigma}^{ex} := \frac{c(x_{\mathcal{K}}) + c(x_{\mathcal{L}})}{2} \quad \text{et} \quad c_{\sigma^*}^{ex} := \frac{c(x_{\mathcal{K}^*}) + c(x_{\mathcal{L}^*})}{2}.$$

Théorème VII.5 (Consistance faible de l'opérateur div_π^τ)

Soit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière telle que $\mathbf{u} = 0$ sur Γ et soit $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulière, alors pour tout $\mathcal{D}_\sigma \in \mathfrak{D}$, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m_\sigma} \left| c_\sigma^{ex} F_{\sigma, \kappa}^\pi(\mathbf{u}_\tau^{ex}) - \int_\sigma c(x) \mathbf{u}(x) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} d\sigma(x) \right| &\xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0, \\ \frac{1}{m_{\sigma^*}} \left| c_{\sigma^*}^{ex} F_{\sigma^*, \kappa^*}^\pi(\mathbf{u}_\tau^{ex}) - \int_{\sigma^*} c(x) \mathbf{u}(x) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} d\sigma(x) \right| &\xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Démonstration : Par définition du vecteur $\mathbf{u}_\tau^{ex}$ et du flux de masse $F_{\sigma, \kappa}^\pi$, nous avons :

$$F_{\sigma, \kappa}^\pi(\mathbf{u}_\tau^{ex}) = - \left(m_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}} \frac{\mathbf{u}(x_\kappa) + \mathbf{u}(x_{\kappa^*})}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}, \mathcal{D}} + m_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}} \frac{\mathbf{u}(x_\kappa) + \mathbf{u}(x_{\mathcal{L}^*})}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}, \mathcal{D}} \right).$$

Les formules de Taylor en $x \in \sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}$ impliquent,

$$\begin{aligned} F_{\sigma, \kappa}^\pi(\mathbf{u}_\tau^{ex}) &= - \left(m_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}} \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}, \mathcal{D}} + m_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}} \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}, \mathcal{D}} \right) \cdot \mathbf{u}(x) \\ &\quad - \frac{m_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}}}{2} \left([((x_\kappa - x) + (x_{\kappa^*} - x)) \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}, \mathcal{D}}] : \nabla \mathbf{u}(x) \right) \\ &\quad - \frac{m_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}}}{2} \left([((x_\kappa - x) + (x_{\mathcal{L}^*} - x)) \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}, \mathcal{D}}] : \nabla \mathbf{u}(x) \right) + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^3) \\ &= m_\sigma \mathbf{u}(x) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} - \frac{m_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}}}{2} \left([((x_\kappa - x) + (x_{\kappa^*} - x)) \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \kappa^*}, \mathcal{D}}] : \nabla \mathbf{u}(x) \right) \\ &\quad - \frac{m_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}}}{2} \left([((x_\kappa - x) + (x_{\mathcal{L}^*} - x)) \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\kappa \mathcal{L}^*}, \mathcal{D}}] : \nabla \mathbf{u}(x) \right) + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^3), \end{aligned}$$

où nous rappelons que pour tout $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$, $\xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, nous notons :

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} {}^t \mathbf{b} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad (\xi : \tilde{\xi}) = \text{Tr}({}^t \xi \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}, \quad \nabla \mathbf{u} = \begin{pmatrix} {}^t \nabla u^1 \\ {}^t \nabla u^2 \end{pmatrix}.$$

De la même manière,

$$c_\sigma^{ex} = c(x) + \frac{1}{2} ((x_\kappa - x) + (x_{\mathcal{L}^*} - x)) \cdot \nabla c(x) + \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^2).$$

Ainsi

$$\frac{1}{m_\sigma} \left| c_\sigma^{ex} F_{\sigma, \kappa}^\pi(\mathbf{u}_\tau^{ex}) - \int_\sigma c(x) \mathbf{u}(x) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} d\sigma(x) \right| \leq \mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})) \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} 0.$$

Un raisonnement similaire pour une arête duale σ^* conclut la preuve. ■

En ce qui concerne l'opérateur $\mathcal{G}^\tau$, nous n'allons pas pouvoir obtenir une telle propriété de consistance. Nous avons cependant consistance "au sens faible" de cet opérateur (c'est à dire modulo un gradient de pression).

Théorème VII.6 (Consistance faible de l'opérateur $\mathcal{G}^\tau$)

Soit $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ régulière tel que $\mathbf{u} = 0$ sur Γ et $\text{div} \mathbf{u} = 0$ dans Ω et soit $c, \mu : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ régulières, alors :

$$\llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{ex}, \mu_\tau^{ex}), \mathbf{u}_\tau^{ex} \rrbracket_\tau \xrightarrow{\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \langle \mu \cdot \nabla c, \mathbf{u} \rangle.$$

Démonstration : D'après la Section VII.1.2, nous avons :

$$\begin{aligned} |\langle \mu \cdot \nabla c, \mathbf{u} \rangle - \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{ex}, \mu_\tau^{ex}), \mathbf{u}_\tau^{ex} \rrbracket_\tau| &= |\langle \text{div}(\mathbf{u}c), \mu \rangle - \llbracket \text{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^{ex}, c_\tau^{ex}), \mu_\tau^{ex} \rrbracket_\tau| \\ &\leq \frac{1}{2} \left| \int_\Omega \mu \text{div}(\mathbf{u}c) - \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \text{div}_\pi^\kappa(\mathbf{u}_\tau^{ex}, c_\tau^{ex}) \mu(x_\kappa) \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} \left| \int_\Omega \mu \text{div}(\mathbf{u}c) - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \text{div}_\pi^{\kappa^*}(\mathbf{u}_\tau^{ex}, c_\tau^{ex}) \mu(x_{\kappa^*}) \right| \end{aligned}$$

Intéressons nous à la somme sur les mailles primales $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, le Théorème VII.5 implique :

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{M}} &= \left| \int_{\Omega} \mu \operatorname{div}(\mathbf{u}c) - \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{K}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ex}, c_{\mathcal{T}}^{ex}) \mu(x_{\mathcal{K}}) \right| \\ &= \left| \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mu(x_{\mathcal{K}}) \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} \left(\int_{\sigma} c \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} - c_{\sigma}^{ex} F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ex}) \right) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} (\mu(x) - \mu(x_{\mathcal{K}})) \operatorname{div}(\mathbf{u}c) \right|. \end{aligned}$$

En utilisant que pour toute arête $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$,

$$\int_{\sigma} c \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = 0 \quad \text{et} \quad F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ex}) = m_{s_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} + m_{s_{\mathcal{L}} \mathcal{L}^*} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = 0,$$

nous avons :

$$\begin{aligned} S_{\mathfrak{M}} &= \left| \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} (\mu(x_{\mathcal{K}}) - \mu(x_{\mathcal{L}})) \left(\int_{\sigma} c \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} - c_{\sigma}^{ex} F_{\sigma, \mathcal{K}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^{ex}) \right) + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} (\mu(x) - \mu(x_{\mathcal{K}})) \operatorname{div}(\mathbf{u}c) \right| \\ &\leq C_{\mathbf{u}, c} \operatorname{size}(\mathcal{T}) \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} |\mu(x_{\mathcal{K}}) - \mu(x_{\mathcal{L}})| + \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \int_{\mathcal{K}} |(x_{\mathcal{K}} - x) \cdot \nabla \mu(x)| |\operatorname{div}(\mathbf{u}c)| + \mathcal{O}(\operatorname{size}(\mathcal{T})) \\ &\leq C_{\mathbf{u}, c} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\mu_{\mathcal{T}}^{ex}\|_{1, \mathcal{T}} + \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mu\|_{L^2(\Omega)} \|\operatorname{div}(\mathbf{u}c)\|_{L^2(\Omega)} + \mathcal{O}(\operatorname{size}(\mathcal{T})) \end{aligned}$$

et donc :

$$S_{\mathfrak{M}} \xrightarrow[\operatorname{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0]{} 0.$$

Un raisonnement analogue pour la somme sur les mailles duales $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$ permet de conclure la preuve. ■

VII.2 Les conditions aux limites de Neumann

Dans cette section, nous imposons à l'équation (VII.2) une condition aux bords de Neumann homogène sur le paramètre d'ordre,

$$\nabla c \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0, \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma. \quad (\text{VII.7})$$

Rappelons que nous avons étudié dans la Partie 2 la propriété de stabilité Inf-Sup pour le problème de Stokes. Nous nous plaçons dans la suite de ces travaux dans le cas de maillages pour lesquels la constante Inf-Sup vérifie $\beta_{\mathcal{T}} > 0$ et ainsi le problème de Stokes est bien posé pour ces différents maillages. Notons que nous avons montré que de tels maillages existaient : c'est le cas pour plusieurs familles de maillages y compris les maillages cartésiens non-conformes (voir Théorèmes V.2 et V.9). A ce jour, le seul maillage pour lequel nous sommes sûrs qu'il ne vérifie pas cette hypothèse est le maillage cartésien conforme uniforme (voir Théorème V.8).

Notons que si nous étudions la convergence du schéma DDFV pour le problème couplé Cahn-Hilliard/Stokes (ce qui n'est pas le cas ici) il faudrait également supposer que la famille de maillages étudiée est Inf-Sup stable, c'est à dire $\liminf_{\operatorname{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0} \beta_{\mathcal{T}} > 0$.

VII.2.1 Principe du schéma DDFV

Pour obtenir l'approximation DDFV associée à ce problème :

- Comme dans le Chapitre VI, nous intégrons l'équation de Cahn-Hilliard sur les mailles primales intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur toutes les mailles duales $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$.
- En ce qui concerne l'équation de Stokes nous procédons comme dans la Partie 2 : nous intégrons le bilan de quantité de mouvement seulement sur les mailles primales intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur les mailles duales intérieures $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ et nous intégrons l'équation de conservation de la masse sur le maillage diamant $\mathfrak{D}$.

Ainsi, en utilisant les opérateurs discrets définis dans la Section VII.1, si nous supposons que $c_{\mathcal{T}}^n \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ sont donnés, l'approximation DDFV du problème (VII.2) au temps t^{n+1} assorti de la condition aux limites (VII.7) est donnée par :

Problème VII.7

Trouver $(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}, \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}, p_{\mathcal{D}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\tau} \times \mathbb{R}^{\tau} \times (\mathbb{R}^2)^{\tau} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_{\tau_0}^{n+1} - c_{\tau_0}^n}{\Delta t} + \operatorname{div}_{\pi}^{\tau}(\mathbf{u}_{\tau}^{n+1}, c_{\tau}^{n+1}) - \Gamma_b \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) = 0, \\ \mu_{\tau_0}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\tau_0}^n, c_{\tau_0}^{n+1}), \\ \frac{\mathbf{u}_{\tau}^{n+1} - \mathbf{u}_{\tau}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) + \nabla^{\tau} p_{\mathcal{D}}^{n+1} - \frac{1}{\rho^*} \mathcal{G}^{\tau}(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}) = \frac{\rho(c_{\tau}^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_{\tau}, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) = 0, \\ \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = 0, \\ m(p_{\mathcal{D}}^{n+1}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (\text{VII.8})$$

où nous rappelons que pour que les équations sur le maillage $\partial \mathfrak{M}$ soient vides dans l'équation de Cahn-Hilliard nous avons utilisé la notation :

$$v_{\tau_0} = \begin{pmatrix} v_{\mathfrak{M}} \\ 0 \\ v_{\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \end{pmatrix}, \quad \forall v_{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau}.$$

De plus, $\mathbf{g}_{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\tau}$ est défini de la manière suivante : pour tout $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$, $\mathbf{g}_{\mathcal{K}} = \mathbf{g}_{\mathcal{K}^*} = \mathbf{g}$ et $\mathbf{g}_{\partial \mathfrak{M}} = \mathbf{g}_{\partial \mathfrak{M}^*} = 0$.

VII.2.2 Approximation DDFV du problème découplé

L'inconvénient du problème (VII.8) est la présence d'un couplage fort entre les équations de Cahn-Hilliard et les équations de Stokes. En pratique, il sera alors difficile de résoudre ce problème numériquement. Pour y remédier, nous introduisons le problème découplé suivant en explicitant la vitesse dans l'équation d'évolution sur la concentration de l'équation de Cahn-Hilliard :

Problème VII.8

Trouver $(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}, \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}, p_{\mathcal{D}}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\tau} \times \mathbb{R}^{\tau} \times (\mathbb{R}^2)^{\tau} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_{\tau_0}^{n+1} - c_{\tau_0}^n}{\Delta t} + \operatorname{div}_{\pi}^{\tau}(\mathbf{u}_{\tau}^n, c_{\tau}^{n+1}) - \Gamma_b \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) = 0, & (\text{VII.9a}) \\ \mu_{\tau_0}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\tau_0}^n, c_{\tau_0}^{n+1}), & (\text{VII.9b}) \\ \frac{\mathbf{u}_{\tau}^{n+1} - \mathbf{u}_{\tau}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) + \nabla^{\tau} p_{\mathcal{D}}^{n+1} = \frac{1}{\rho^*} \mathcal{G}^{\tau}(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}) + \frac{\rho(c_{\tau}^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_{\tau}, & (\text{VII.9c}) \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) = 0, & (\text{VII.9d}) \\ \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = 0, & (\text{VII.9e}) \\ m(p_{\mathcal{D}}^{n+1}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^{n+1} = 0. & (\text{VII.9f}) \end{cases}$$

Remarquons que la condition aux bords sur la vitesse est prise en compte dans l'équation (VII.9c). La résolution numérique de ce schéma peut se faire en plusieurs étapes :

1. Résolution des équations de Cahn-Hilliard :

Supposons que $\mathbf{u}_{\tau}^n \in (\mathbb{R}^2)^{\tau}$ soit connu, nous cherchons $(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}) \in \mathbb{R}^{\tau} \times \mathbb{R}^{\tau}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_{\tau_0}^{n+1} - c_{\tau_0}^n}{\Delta t} + \operatorname{div}_{\pi}^{\tau}(\mathbf{u}_{\tau}^n, c_{\tau}^{n+1}) - \Gamma_b \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) = 0, \\ \mu_{\tau_0}^{n+1} = -\mathcal{A}_{\Delta} \operatorname{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\tau_0}^n, c_{\tau_0}^{n+1}), \\ \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau} = 0. \end{cases}$$

2. Résolution du problème de Stokes :

Le couple $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ est maintenant connu, nous cherchons $(\mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}) + \nabla^\tau p_\tau^{n+1} = \frac{1}{\rho^*} \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) + \frac{\rho(c_\tau^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_\tau, \\ \operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\tau^{n+1}) = 0, \\ m(p_\tau^{n+1}) = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}^{n+1} = 0. \end{cases}$$

Proposition VII.9 (Égalité d'énergie pour le problème découplé avec C.L. de Neumann)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$, $\mathbf{u}_\tau^n \in (\mathbb{R}^2)^\tau$. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}, \mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau \times (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ au problème VII.8, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^{n+1}) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\tau,2}^2 \right) - \left(\mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^n) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \right) \\ & + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{\mathcal{R}_e} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 - \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau \\ & = \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (f_b(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_b(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_b}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)) \\ & + \Delta t \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \rrbracket_\tau. \end{aligned} \quad (\text{VII.10})$$

Démonstration : Pour les équations de Cahn-Hilliard, nous procédons comme pour la Proposition VI.6 du chapitre précédent, nous obtenons l'estimation d'énergie (VI.6) modulo l'ajout du terme correspondant au terme de transport dans le système de Cahn-Hilliard, ainsi :

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^{n+1}) - \mathcal{F}_{b,\tau}(c_\tau^n) + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \Delta t \llbracket \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), \mu_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau \\ & = \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (f_b(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_b(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_b}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)). \end{aligned}$$

Prenons maintenant le produit scalaire de l'équation (VII.9c) avec $\mathbf{u}_\tau^{n+1}$ alors, en utilisant la formule de Stokes discrète donnée dans le Théorème IV.7 ainsi que l'égalité (IV.9), nous obtenons

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau + \frac{\Delta t}{\mathcal{R}_e} \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 - \Delta t \left(\operatorname{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1} \right)_\mathfrak{D} & = \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau \\ & + \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau. \end{aligned}$$

L'identité (VII.5) et le fait que $\operatorname{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} = 0$ permettent de conclure. ■

Pour pouvoir obtenir l'inégalité d'énergie associée nous utilisons le résultat suivant.

Lemme VII.10 (Estimation de l'opérateur $\mathcal{G}^\tau$ dans le cas quasi-uniforme)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV de Ω , pour tout $q \geq 2$ il existe une constante positive C_1 dépendant seulement de la régularité uniforme du maillage $\operatorname{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T})$ (voir Définition A.10), de Ω et de q telle que pour tout $c_\tau \in \mathbb{R}^\tau$, $\mu_\tau \in \mathbb{R}^\tau$ vérifiant :

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mu_\kappa = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mu_{\kappa^*} = 0,$$

l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\mathcal{G}^\tau(c_\tau, \mu_\tau)\|_{\tau,2} \leq \frac{C_1}{\text{size}(\mathcal{T})^{2/q}} \|\nabla^\mathcal{D} c_\tau\|_{\mathcal{D},2} \|\nabla^\mathcal{D} \mu_\tau\|_{\mathcal{D},2}.$$

Ainsi, la constante C_1 est uniforme sur une famille de maillages quasi-uniforme.

La démonstration de ce lemme utilise le résultat suivant démontré dans [BCCHF, Théorèmes 9 et 10]. Nous le présentons ici en adaptant l'énoncé au cas particulier qui nous intéresse.

Théorème VII.11 ([BCCHF, Théorèmes 9 et 10])

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV associé à Ω , alors pour tout $q \geq 2$ il existe une constante $C_2 > 0$ dépendant seulement de q , Ω et de la régularité du maillage $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que pour tout $u_\tau \in \mathbb{R}^\tau$ satisfaisant :

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa u_\kappa = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} u_{\kappa^*} = 0,$$

nous avons,

$$\|u_\tau\|_{0,q,\tau} \leq C_2 \|\nabla^\mathcal{D} u_\tau\|_{\mathcal{D},2}, \quad \text{où } \|u_\tau\|_{0,q,\tau} = \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa |u_\kappa|^q + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} |u_{\kappa^*}|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Démonstration du Lemme VII.10 : La Définition VII.3 de l'opérateur $\mathcal{G}^\tau$ permet d'écrire,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}^\tau(c_\tau, \mu_\tau)\|_{\tau,2}^2 &= \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \left(\sum_{\substack{s \in \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa \\ s \subset \kappa, s \notin \Gamma}} \frac{m_s}{2} ((c_{\sigma_s} - c_\sigma) \mu_\kappa + (c_{\sigma_s^*} - c_{\sigma^*}) \mu_{\kappa^*}) \vec{n}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_s} \right)^2 \\ &\quad + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \left(\sum_{\substack{s \in \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \\ s \subset \kappa^*, s \notin \Gamma}} \frac{m_s}{2} ((c_{\sigma_s} - c_\sigma) \mu_\kappa + (c_{\sigma_s^*} - c_{\sigma^*}) \mu_{\kappa^*}) \vec{n}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_s} \right)^2. \end{aligned}$$

Considérons une maille $\kappa \in \mathfrak{M}$, alors il existe $C(\text{reg}(\mathcal{T}))$ ne dépendant que de la régularité du maillage tel que :

$$\begin{aligned} (T_\kappa)^2 &= \left(\sum_{\substack{s \in \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa \\ s \subset \kappa, s \notin \Gamma}} \frac{m_s}{2} ((c_{\sigma_s} - c_\sigma) \mu_\kappa + (c_{\sigma_s^*} - c_{\sigma^*}) \mu_{\kappa^*}) \vec{n}_{\mathcal{D}\mathcal{D}_s} \right)^2 \\ &\leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\substack{s \in \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa \\ s \subset \kappa, s \notin \Gamma}} (m_s^2 (c_{\sigma_s} - c_\sigma)^2 \mu_\kappa^2 + m_s^2 (c_{\sigma_s^*} - c_{\sigma^*})^2 \mu_{\kappa^*}^2). \end{aligned}$$

Or, la définition de c_σ et c_{σ^*} donnée par (VII.4) implique,

$$c_{\sigma_s} - c_\sigma = \frac{c_\kappa - c_\mathcal{L}}{2} + \frac{c_{\mathcal{L}_s} - c_\kappa}{2} \quad \text{et} \quad c_{\sigma_s^*} - c_{\sigma^*} = \frac{c_{\kappa^*} - c_{\mathcal{L}^*}}{2} + \frac{c_{\mathcal{L}_s^*} - c_{\kappa^*}}{2}$$

donc en utilisant la Définition VI.1 du gradient discret DDFV, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (T_\kappa)^2 &\leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\substack{s \in \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa \\ s \subset \kappa, s \notin \Gamma}} (m_\mathcal{D}^2 |\nabla^\mathcal{D} c_\tau|^2 + m_{\mathcal{D}_s} |\nabla^{\mathcal{D}_s} c_\tau|^2) (|\mu_\kappa|^2 + |\mu_{\kappa^*}|^2) \\ &\leq 4C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\mu_\tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \sum_{\substack{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa \\ s \subset \kappa, s \notin \Gamma}} m_\mathcal{D} |\nabla^\mathcal{D} c_\tau|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, un raisonnement similaire pour une maille $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$ entraîne qu'il existe une constante positive (toujours notée $C(\text{reg}(\mathcal{T}))$) ne dépendant que de la régularité du maillage telle que,

$$\|\mathcal{G}^\tau(c_\tau, \mu_\tau)\|_{\tau,2}^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\mu_\tau\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \|\nabla^\mathcal{D} c_\tau\|_{\mathcal{D},2}^2. \quad (\text{VII.11})$$

Or, pour tout $q > 1$ nous avons :

$$\|\mu_\tau\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C(\text{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T}))}{\text{size}(\mathcal{T})^{2/q}} \|\mu_\tau\|_{0,q,\tau}, \quad (\text{VII.12})$$

où nous avons noté :

$$\|\mu_{\mathcal{T}}\|_{0,q,\mathcal{T}}^q = \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} |\mu_{\kappa}|^q + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} |\mu_{\kappa^*}|^q \right).$$

Alors, en appliquant le Théorème VII.11, pour tout $q \geq 2$ nous obtenons :

$$\|\mu_{\mathcal{T}}\|_{0,q,\mathcal{T}} \leq C_2 \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\mathcal{T}} \right\|_{\mathfrak{D},2}. \quad (\text{VII.13})$$

Regrouper les inégalités (VII.11), (VII.12) et (VII.13) permet de conclure la preuve. ■

Remarque VII.12

Pour tout $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ tel que $\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0$ et pour tout $\mu_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ nous avons :

$$\llbracket \mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \widetilde{\mu}_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \llbracket \mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}};$$

où nous avons défini $\widetilde{\mu}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante :

$$\widetilde{\mu}_{\kappa} = \mu_{\kappa} - \frac{1}{C_{\Omega}} M_{\mathfrak{M}}(\mu_{\mathcal{T}}), \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mu}_{\kappa^*} = \mu_{\kappa^*} - \frac{1}{C_{\Omega}} M_{\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}(\mu_{\mathcal{T}}), \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*; \quad (\text{VII.14})$$

avec

$$C_{\Omega} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*}, \quad M_{\mathfrak{M}}(\mu_{\mathcal{T}}) = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mu_{\kappa} \quad \text{et} \quad M_{\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}(\mu_{\mathcal{T}}) = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mu_{\kappa^*}.$$

Remarquons également que $\widetilde{\mu}_{\mathcal{T}}$ ainsi construit vérifie,

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \widetilde{\mu}_{\kappa} = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \widetilde{\mu}_{\kappa^*} = 0.$$

Démonstration de la Remarque VII.12 :

Par hypothèse $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ donc l'égalité (VII.5) implique :

$$\llbracket \mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \widetilde{\mu}_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \llbracket \mathcal{G}^{\mathcal{T}}(c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}), \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \widetilde{\mu}_{\mathcal{T}} - \mu_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

Montrons maintenant que le dernier terme du membre de droite de cette égalité est nul. Par définition de $\widetilde{\mu}_{\mathcal{T}}$ nous avons :

$$\begin{aligned} \llbracket \operatorname{div}_{\pi}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, c_{\mathcal{T}}), \widetilde{\mu}_{\mathcal{T}} - \mu_{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= -\frac{1}{2C_{\Omega}} M_{\mathfrak{M}}(\mu_{\mathcal{T}}) \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} c_{\sigma} F_{\sigma, \kappa}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \\ &\quad - \frac{1}{2C_{\Omega}} M_{\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}(\mu_{\mathcal{T}}) \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} c_{\sigma^*} F_{\sigma^*, \kappa^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

Alors si de plus nous supposons que $\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0$, nous avons :

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} c_{\sigma} F_{\sigma, \kappa}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}} c_{\sigma} (F_{\sigma, \kappa}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\sigma, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})) - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} c_{\sigma} F_{\sigma, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0,$$

où nous avons utilisé la conservativité des flux $F_{\sigma, \kappa}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = -F_{\sigma, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})$ et le fait que $F_{\sigma, \mathcal{L}}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = 0$ si $\sigma \in \mathcal{E}_{ext}$.

De la même manière, la définition des flux $F_{\sigma^*, \kappa^*}^{\pi}$ donnée dans la Définition VII.1 permet d'écrire,

$$\sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} c_{\sigma^*} F_{\sigma^*, \kappa^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}} c_{\sigma^*} (F_{\sigma^*, \kappa^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) + F_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})) = 0,$$

où nous avons là encore utilisé la conservativité des flux $F_{\sigma^*, \kappa^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = -F_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^{\pi}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}})$. ■

Théorème VII.13 (Existence d'une famille de solutions et Inégalité d'énergie)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV de Ω , soit $c_{\mathcal{T}}^0 \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^0 \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$. Il existe une famille de solutions $((c_{\mathcal{T}}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mu_{\mathcal{T}}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mathbf{u}_{\mathcal{T}}^n)_{1 \leq n \leq N}, (p_{\mathfrak{D}}^n)_{1 \leq n \leq N}) \in (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^N \times (\mathbb{R}^{\mathcal{T}})^N \times ((\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}})^N \times (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^N$ au problème VII.8

telle que s'il existe $q \geq 2$ tel que $\Delta t \leq \beta \text{size}(\mathcal{T})^{4/q}$ (où $\beta > 0$ est une constante fixée ne dépendant que de $\text{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T})$ et des données de l'équation), l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}_{b,\tau}(c_{\tau}^{n+1}) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_{\tau}^{n+1}\|_{\tau,2}^2 \right) - \left(\mathcal{F}_{b,\tau}(c_{\tau}^n) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_{\tau}^n\|_{\tau,2}^2 \right) + \frac{\Gamma_b}{2} \Delta t \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\rho^*}{2\mathcal{R}_e} \Delta t \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau}^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_{\Delta}}{4} \left\| \nabla^{\mathcal{D}} (c_{\tau}^{n+1} - c_{\tau}^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{4} \left\| \mathbf{u}_{\tau}^{n+1} - \mathbf{u}_{\tau}^n \right\|_{\tau,2}^2 \\ & \leq \Delta t \frac{\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*3}} \|\rho\|_{L^{\infty}}^2 |\mathbf{g}|^2. \end{aligned}$$

Remarque VII.14

Ce théorème donne l'existence d'une famille de solutions dès lors que la famille de maillages est quasi-uniforme.

Afin de démontrer ce théorème, rappelons l'inégalité de Poincaré suivante démontrée dans [ABH07].

Théorème VII.15 (Inégalité de Poincaré discrète, [ABH07, Lemme 3.2])

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV associé à Ω , il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $\mathbf{u}_{\tau} \in \mathbb{E}_0$:

$$\|\mathbf{u}_{\tau}\|_{\tau,2} \leq C_3 \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau} \right\|_{\mathfrak{D},2}.$$

Démonstration du Théorème VII.13 : Commençons par remarquer que la démonstration de ce théorème repose sur le Lemme du degré topologique A.8.

Soit $V_{\tau} = \{\mathbf{v}_{\tau} \in \mathbb{E}_0 : \text{div}^{\tau} \mathbf{v}_{\tau} = 0\}$. Définissons l'ensemble K des $((c_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mu_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mathbf{u}_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}) \in (\mathbb{R}^{\tau})^N \times (\mathbb{R}^{\tau})^N \times V_{\tau}$ vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\| \nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \leq M_0, \quad \sup_{n \leq N} \left\| \nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^n \right\|_{\mathfrak{D},2} \leq M_0, \quad \text{et} \quad \sup_{n \leq N} \left\| \mathbf{u}_{\tau}^n \right\|_{\tau,2} \leq M_0;$$

avec M_0 choisi suffisamment grand en fonction des données du problème (cf hypothèses (VII.22) et (VII.23)).

Considérons maintenant l'application H définie par :

$$\begin{aligned} H : \overline{K} \times [0, 1] &\rightarrow K \\ ((c_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mu_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mathbf{u}_{\tau}^n)_{1 \leq n \leq N}, \delta) &\mapsto ((E^{c_{\tau}^n})_{1 \leq n \leq N}, (E^{\mu_{\tau}^n})_{1 \leq n \leq N}, (E^{\mathbf{u}_{\tau}^n})_{1 \leq n \leq N}), \end{aligned}$$

où nous avons noté $E^{c_{\tau}^n} = (E^{c_{\tau_0}^n}, E^{c_{\partial \mathfrak{M}}^n})$, $E^{\mu_{\tau}^n} = (E^{\mu_{\tau_0}^n}, E^{\mu_{\partial \mathfrak{M}}^n})$ tels que :

$$\begin{aligned} E^{c_{\tau_0}^n} &= \frac{c_{\tau_0}^{n+1} - c_{\tau_0}^n}{\Delta t} + \delta \text{div}_{\pi}^{\tau}(\mathbf{u}_{\tau}^n, c_{\tau}^{n+1}) - \Gamma_b \text{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}), \\ E^{c_{\partial \mathfrak{M}}^n} &= \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} \mu_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau}, \\ E^{\mu_{\tau_0}^n} &= -\mathcal{A}_{\Delta} \text{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) + \delta \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_{\tau_0}^n, c_{\tau_0}^{n+1}) - \mu_{\tau_0}^{n+1}, \\ E^{\mu_{\partial \mathfrak{M}}^n} &= \gamma^{\mathcal{D}}(\nabla^{\mathcal{D}} c_{\tau}^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\tau}, \\ E^{\mathbf{u}_{\tau}^n} &= P_{V_{\tau}} \left(\frac{\mathbf{u}_{\tau}^{n+1} - \mathbf{u}_{\tau}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \text{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) - \frac{\delta}{\rho^*} \mathcal{G}^{\tau}(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}) - \frac{\rho(c_{\tau}^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_{\tau} \right), \end{aligned}$$

tel que $P_{V_{\tau}}$ désigne la projection sur l'ensemble V_{τ} . Ainsi $E^{\mathbf{u}_{\tau}^n}$ est défini de sorte que $E^{\mathbf{u}_{\tau}^n} = 0$ signifie que pour tout $\mathbf{v}_{\tau} \in V_{\tau}$,

$$\left\langle \mathbf{v}_{\tau}, \frac{\mathbf{u}_{\tau}^{n+1} - \mathbf{u}_{\tau}^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \text{div}^{\tau}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}_{\tau}^{n+1}) - \frac{\delta}{\rho^*} \mathcal{G}^{\tau}(c_{\tau}^{n+1}, \mu_{\tau}^{n+1}) - \frac{\delta}{\rho^*} \rho(c_{\tau}^{n+1}) \mathbf{g}_{\tau} \right\rangle = 0.$$

Notons que le paramètre δ intervient devant tous les termes non-linéaires apparaissant dans la fonction H .

La fonction H ainsi définie est bien continue et la fonction $H(\cdot, 0)$ est affine, vérifions maintenant les différentes hypothèses du Lemme A.8.

Vérification de l'hypothèse (ii) du Lemme A.8 :

Soit $(X, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} ((c_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mu_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mathbf{u}_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}, \delta) \in \overline{K} \times [0, 1]$ tels que $H(X, \delta) = 0$. Alors X est solution du Problème VII.8 avec :

- $\delta \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1})$ à la place de $\operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1})$;
- $\delta \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ à la place de $\mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$;
- δf_b à la place de f_b ;
- δd^{f_b} à la place de d^{f_b} ;
- $\delta \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}_\tau$ à la place de $\rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}_\tau$.

Rappelons que dans ce cas là, l'énergie libre $\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta$ est définie par :

$$\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau) = \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \delta \mathcal{A}_{f_b} [f_b(c_\tau), 1_\tau]_\tau, \quad \forall c_\tau \in \mathbb{R}^\tau. \quad (\text{VII.15})$$

Ainsi, de la même manière que pour l'égalité d'énergie VII.9 nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^{n+1}) + \frac{\rho^*}{2} \left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\tau,2}^2 \right) - \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^n) + \frac{\rho^*}{2} \left\| \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 \right) + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\rho^*}{\mathcal{R}_e} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{2} \left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 \\ & = \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \delta \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \delta \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (f_b(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_b(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_b}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)) \\ & + \delta \Delta t [\mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n]_\tau + \delta \frac{\Delta t}{\rho^*} [\rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1}]_\tau. \end{aligned} \quad (\text{VII.16})$$

Rappelons que si nous choisissons une discrétisation semi-implicite du potentiel de Cahn-Hilliard f'_b (voir (III.16)) les deux premiers termes du membre de droite de (VII.16) sont nuls.

Si nous choisissons une discrétisation complètement implicite du terme non-linéaire f'_b (voir (III.14)) en utilisant un raisonnement analogue à celui donné dans la preuve de la Proposition III.9, l'hypothèse de dissipativité (III.3) et le fait que $\delta \leq 1$ impliquent :

$$\begin{aligned} T_{f_b} &= \delta \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (f_b(c_\kappa^{n+1}) - f_b(c_\kappa^n) - d^{f_b}(c_\kappa^n, c_\kappa^{n+1})(c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n)) \\ & + \delta \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (f_b(c_{\kappa^*}^{n+1}) - f_b(c_{\kappa^*}^n) - d^{f_b}(c_{\kappa^*}^n, c_{\kappa^*}^{n+1})(c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n)) \\ & \leq \alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \left\| c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \right\|_{1,\tau}^2. \end{aligned}$$

Multiplions maintenant l'équation (VII.9a) du Problème VII.8 (avec le coefficient δ devant le terme de transport) par $\Delta t (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n)$ puis sommions sur les mailles primales intérieures $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ et sur les mailles duales $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$, alors :

$$\begin{aligned} \left\| c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \right\|_{1,\tau}^2 &= -\Delta t \delta [\operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n]_\tau + \Gamma_b \Delta t [\operatorname{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n]_\tau \\ &= -\Delta t \delta [\operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n]_\tau - \Gamma_b \Delta t (\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}, \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n))_{\mathfrak{D}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la formule de Green (VI.1).

Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Young permettent d'estimer le dernier terme du membre de droite de cette égalité :

$$\begin{aligned} \alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \Gamma_b \Delta t \left| (\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}, \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n))_{\mathfrak{D}} \right| &\leq \alpha_b \mathcal{A}_{f_b} \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2} \\ &\leq \frac{\Gamma_b}{4} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2. \end{aligned}$$

D'autre part, $\mathbf{u}_\tau^n \in V_\tau$ (donc $\mathbf{u}_\tau^n \in \mathbb{E}_0$ et $\operatorname{div}^\tau \mathbf{u}_\tau^n = 0$) nous pouvons donc appliquer l'égalité (VII.5) ce qui donne :

$$\llbracket \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau = \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, c_\tau^{n+1} - c_\tau^n), \mathbf{u}_\tau^n \rrbracket_\tau.$$

De plus, la conservation du volume au niveau discret (VI.4) implique,

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa (c_\kappa^{n+1} - c_\kappa^n) = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (c_{\kappa^*}^{n+1} - c_{\kappa^*}^n) = 0;$$

nous pouvons donc appliquer le Lemme VII.10 ce qui entraîne :

$$\llbracket \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau \leq \frac{C_1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{2/q}} \left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2} \left\| \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}.$$

Ainsi, l'inégalité de Poincaré VII.15, l'inégalité de Young et le fait que $\delta \in [0, 1]$ donnent :

$$\begin{aligned} \Delta t \delta \llbracket \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}), c_\tau^{n+1} - c_\tau^n \rrbracket_\tau &\leq \frac{\mathcal{A}_\Delta}{8} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ &\quad + \frac{4C_1^2}{\mathcal{A}_\Delta} \frac{\Delta t^2}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{4/q}} \left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \left(\left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 + C_3^2 \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \right). \end{aligned}$$

En regroupant toutes ces estimations et en utilisant que $\left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2} \leq M_0$ car $X \in \overline{K}$, nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} T_{f_b} &\leq \frac{\Gamma_b}{4} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{8} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ &\quad + \frac{4\alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 C_1^2}{\mathcal{A}_\Delta} \frac{\Delta t^2}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{4/q}} M_0^2 \left(\left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 + C_3^2 \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \right). \end{aligned}$$

Posons,

$$\Delta t_1 = \frac{\mathcal{A}_\Delta}{8\alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 \Gamma_b}, \quad \Delta t_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{A}_\Delta \rho^*}{32\alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 M_0^2 C_1^2}} \quad \text{et} \quad \Delta t_3 = \frac{\mathcal{A}_\Delta \rho^*}{16\alpha_b^2 \mathcal{A}_{f_b}^2 M_0^2 C_1^2 C_3^2 \mathcal{R}_e};$$

alors s'il existe $q \geq 2$ tel que $\Delta t \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2 \operatorname{size}(\mathcal{T})^{2/q}, \Delta t_3 \operatorname{size}(\mathcal{T})^{4/q})$, nous obtenons finalement :

$$T_{f_b} \leq \frac{\Gamma_b}{4} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4} \left\| \nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{8} \left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 + \frac{\rho^*}{4\mathcal{R}_e} \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2. \quad (\text{VII.17})$$

Etudions maintenant le troisième terme du membre de droite de l'égalité (VII.16).

En utilisant la Remarque VII.12, l'inégalité de Young et le fait que $\delta \leq 1$ nous avons,

$$\delta \Delta t \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \rrbracket_\tau \leq \frac{\rho^*}{8} \left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 + \frac{2\Delta t^2}{\rho^*} \left\| \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \widetilde{\mu_\tau^{n+1}}) \right\|_{\tau,2}^2$$

où $\widetilde{\mu_\tau^{n+1}}$ est défini par (VII.14).

En appliquant le Lemme VII.10 à $\widetilde{\mu_\tau^{n+1}}$, nous obtenons pour tout $q \geq 2$:

$$\left\| \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \right\|_{\tau,2} \leq \frac{C_1}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{2/q}} \left\| \nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2} \left\| \nabla^\mathfrak{D} \widetilde{\mu_\tau^{n+1}} \right\|_{\mathfrak{D},2}.$$

Alors, nous avons :

$$\frac{2\Delta t^2}{\rho^*} \left\| \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \right\|_{\tau,2}^2 \leq \frac{2C_1^2 M_0^2}{\rho^*} \frac{\Delta t^2}{\operatorname{size}(\mathcal{T})^{4/q}} \left\| \nabla^\mathfrak{D} \widetilde{\mu_\tau^{n+1}} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2$$

Ainsi, s'il existe $q \geq 2$ tel que $\Delta t \leq \Delta t_4 \operatorname{size}(\mathcal{T})^{4/q}$ avec $\Delta t_4 = \frac{\rho^* \Gamma_b}{8M_0^2 C_1^2}$, en remarquant que $\left\| \nabla^\mathfrak{D} \widetilde{\mu_\tau^{n+1}} \right\|_{\mathfrak{D},2} = \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}$, nous obtenons :

$$\delta \Delta t \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \rrbracket_\tau \leq \frac{\rho^*}{8} \left\| \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \right\|_{\tau,2}^2 + \frac{\Gamma_b}{4} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2. \quad (\text{VII.18})$$

Enfin, $\mathbf{u}_\tau^n \in \mathbb{E}_0$ donc, en appliquant l'inégalité de Poincaré et en utilisant que $\delta \leq 1$, le dernier terme du membre de droite de (VII.16) vérifie :

$$\left| \delta \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau \right| \leq \frac{\Delta t}{\rho^*} \|\rho\|_{L^\infty} |\mathbf{g}| \|\mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\tau,2} \leq \Delta t \frac{C_3}{\rho^*} \|\rho\|_{L^\infty} |\mathbf{g}| \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\mathfrak{D},2}.$$

L'inégalité de Young entraîne alors :

$$\left| \delta \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau \right| \leq \frac{\rho^*}{4\mathcal{R}_e} \Delta t \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \Delta t \frac{\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*3}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2. \quad (\text{VII.19})$$

Ainsi, en regroupant les estimations (VII.16), (VII.17), (VII.18) et (VII.19) s'il existe $q \geq 2$ tel que :

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_1, \Delta t_2 \text{size}(\mathcal{T})^{2/q}, \Delta t_3 \text{size}(\mathcal{T})^{4/q}, \Delta t_4 \text{size}(\mathcal{T})^{4/q}),$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^{n+1}) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\tau,2}^2 \right) - \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^n) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \right) + \frac{\Gamma_b}{2} \Delta t \|\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\rho^*}{2\mathcal{R}_e} \Delta t \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{4} \|\nabla^\mathfrak{D} (c_\tau^{n+1} - c_\tau^n)\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{4} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \\ & \leq \Delta t \frac{\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*3}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2. \end{aligned} \quad (\text{VII.20})$$

Cette estimation étant vraie pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, nous avons en particulier :

$$\left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^n) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \right) \leq \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^0) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^0\|_{\tau,2}^2 \right) + T \frac{\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*3}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2, \quad \forall n \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

De plus, la définition (VII.15) de l'énergie libre $\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta$ et la condition $\delta \leq 1$ donnent :

$$\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^0) \leq \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \|\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^0\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \mathcal{A}_{f_b} \|\llbracket f_b(c_\tau^0), 1_\tau \rrbracket_\tau\| \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0^{\mathcal{F}_{b,\tau}}. \quad (\text{VII.21})$$

Alors, la définition (VII.15) de l'énergie libre $\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta$, l'hypothèse de dissipativité (III.3) et le fait que $\delta \in [0, 1]$ impliquent que pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \|\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^n\|_{\mathfrak{D},2}^2 & \leq \frac{2}{\mathcal{A}_\Delta} \left(\mathcal{F}_{b,\tau}^\delta(c_\tau^n) + \delta \alpha_2 C_\Omega + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \right) \\ & \leq \frac{2}{\mathcal{A}_\Delta} \left(\alpha_0^{\mathcal{F}_{b,\tau}} + \alpha_2 C_\Omega + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^0\|_{\tau,2}^2 \right) + T \frac{\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*3}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0^c. \end{aligned}$$

De la même manière nous déduisons de (VII.20) et (VII.21) que :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}\|_{\mathfrak{D},2}^2 \leq \frac{2}{\Gamma_b} \left(\alpha_0^{\mathcal{F}_{b,\tau}} + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^0\|_{\tau,2}^2 \right) + \frac{2T\mathcal{R}_e C_3^2}{\Gamma_b \rho^{*3}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2 + \frac{2}{\Gamma_b} \alpha_2 C_\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0^\mu,$$

et pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$,

$$\|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \leq \frac{2}{\rho^*} \left(\alpha_0^{\mathcal{F}_{b,\tau}} + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^0\|_{\tau,2}^2 \right) + \frac{2T\mathcal{R}_e C_3^2}{\rho^{*4}} \|\rho\|_{L^\infty}^2 |\mathbf{g}|^2 + \frac{2}{\rho^*} \alpha_2 C_\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_0^{\mathbf{u}}.$$

Choisissons alors

$$M_0 > \max(\alpha_0^c, \alpha_0^\mu, \alpha_0^{\mathbf{u}}) \quad (\text{VII.22})$$

ainsi, si X est solution de $H(X, \delta) = 0$, alors $X \notin \partial K$.

Vérification de l'hypothèse (iii) du Lemme A.8 :

Regardons maintenant si l'équation $H(X, 0) = 0$ possède une solution.

Notons que lorsque $\delta = 0$ les termes de couplages et les termes non-linéaires disparaissent et nous nous retrouvons avec deux problèmes linéaires découplés :

- L'équation de Cahn-Hilliard linéaire pour laquelle nous avons démontré dans le chapitre précédent des estimations d'énergie. Pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, nous avons donc existence d'au moins une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1})$ à ce problème. De plus, de la même façon que dans la Proposition III.26, nous pouvons montrer que ces solutions vérifient les bornes suivantes :

$$\sup_{n \leq N} \|c_\tau^n\|_{\tau,2} \leq M_1 \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \|\mu_\tau^{n+1}\|_{\tau,2}^2 \leq M_2.$$

- Le problème de Stokes linéaire (écrit sous forme variationnelle dans l'espace des fonctions à divergence nulle) pour lequel nous savons qu'il existe au moins une solution $\mathbf{u}_\tau^n$ pour tout $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$. De plus, il existe $M_3 > 0$ tel que :

$$\sup_{n \leq N} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2} \leq M_3.$$

Choisissons alors M_0 tel que

$$M_0 > \max(M_1, M_2, M_3), \quad (\text{VII.23})$$

ainsi il existe bien une solution X au problème $H(X, 0) = 0$ telle que $X \in \mathring{K}$.

Les hypothèses du lemme A.8 étant satisfaites, il existe bien une solution $X = ((c_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mu_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}, (\mathbf{u}_\tau^n)_{1 \leq n \leq N}) \in K$ au problème $H(X, 1) = 0$.

De plus, nous avons supposé que la constante Inf-Sup vérifiait $\beta_\tau > 0$ et nous venons de montrer que pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$:

$$P_{V_\tau} \left(\frac{\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \mathbf{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}) - \frac{\delta}{\rho^*} \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) - \frac{\rho(c_\tau^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_\tau \right) = 0$$

donc il existe $p_\tau^{n+1} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tel que :

$$\frac{\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \mathbf{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}) - \frac{\delta}{\rho^*} \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) - \frac{\rho(c_\tau^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_\tau = -\nabla^\tau p_\tau^{n+1},$$

ce qui conclut la preuve. ■

VII.3 Les conditions aux limites dynamiques

Dans cette section nous nous intéressons à l'approximation DDFV des équations (VII.2) associées à la condition aux limites dynamique suivante :

$$\frac{\mathcal{A}_\Delta}{\Gamma_s} \partial_t c_{|\Gamma} = -\mathcal{A}_{f_s} f'_s(c_{|\Gamma}) - \mathcal{A}_\Delta \partial_n c, \quad \text{sur } (0, T) \times \Gamma. \quad (\text{VII.24})$$

Rappelons que cette condition aux limites a été introduite initialement dans [Jac00] pour permettre de modéliser de façon plus réaliste la dynamique d'angle de contact qui intervient, dans un système confiné, lorsque l'interface fluide rencontre la paroi solide. Pour cela l'auteur définit l'énergie libre de Cahn-Hilliard comme la somme de l'énergie libre de Cahn-Hilliard volumique $\mathcal{F}_b$ et d'une énergie libre surfacique $\mathcal{F}_s$ définie par :

$$\mathcal{F}_s(c) = 6\sigma_b \int_\Gamma f_s(c_{|\Gamma}) \quad \text{avec} \quad f_s(c_{|\Gamma}) = \cos(\theta_s) c^2 \left(\frac{1}{3} c - \frac{1}{2} \right) + \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{12\sigma_b} + \frac{\cos(\theta_s)}{12}, \quad (\text{VII.25})$$

où σ_1 représente la tension de surface entre le fluide 1 (l'inconnue du modèle de Cahn-Hilliard de concentration c) et la paroi, σ_2 la tension de surface entre le fluide 2 (celui de concentration $1-c$) et la paroi et θ_s est l'angle de contact statique entre l'interface et la paroi (mesuré du côté du fluide 1) .

Remarquons l'absence de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans la condition aux limites non-linéaire qui est due au fait qu'il n'y a pas de diffusion sur la paroi dans ce modèle.

L'étude des équations de Cahn-Hilliard a été traitée dans la Section VI.3 et celle des équations de Stokes dans la Partie 2. Ainsi si $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ et $\mathbf{u}_\tau^n \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ sont connus, l'approximation DDFV au temps t^{n+1} du problème (VII.2) associé à la condition aux limites (VII.24) est donnée par :

Problème VII.16

Trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}, \mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau \times (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tels que :

$$\begin{cases} \frac{c_\tau^{n+1} - c_\tau^n}{\Delta t} + \operatorname{div}_\pi^\tau(\mathbf{u}_\tau^n, c_\tau^{n+1}) - \Gamma_b \operatorname{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}) = 0; \\ \gamma^\mathfrak{D}(\nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_\tau = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(VII.26a)} \\ \text{(VII.26b)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \mu_\tau^{n+1} = -\mathcal{A}_\Delta \operatorname{div}^\mathfrak{M}(\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}), \\ \mu_\tau^{n+1} = -\mathcal{A}_\Delta \operatorname{div}^\mathfrak{M}^*(\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1}) + \mathcal{A}_{f_b} d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}), \\ m_{\mathcal{K}^*} \mu_{\mathcal{K}^*}^{n+1} = -\mathcal{A}_\Delta \sum_{\mathfrak{D}, \sigma^* \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} + \mathcal{A}_{f_b} m_{\mathcal{K}^*} d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) \\ \quad + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{\Gamma_s} m_{\sigma^*} \frac{c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n}{\Delta t} + \mathcal{A}_{f_s} m_{\sigma^*} d^{f_s}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}), \end{cases} \quad \forall \mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*; \quad \text{(VII.27a)}$$

$$\frac{\mathcal{A}_\Delta}{\Gamma_s} \frac{c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{M}}^n}{\Delta t} + \mathcal{A}_{f_s} d^{f_s}(c_{\partial \mathfrak{M}}^n, c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}) + \mathcal{A}_\Delta \gamma^\mathfrak{D}(\nabla^\mathfrak{D} c_\tau^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_\tau = 0; \quad \text{(VII.27b)}$$

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n}{\Delta t} - \frac{1}{\mathcal{R}_e} \operatorname{div}^\tau(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1}) + \nabla^\tau p_\tau^{n+1} = \frac{1}{\rho^*} \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) + \frac{\rho(c_\tau^{n+1})}{\rho^*} \mathbf{g}_\tau; \\ \operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}_\tau^{n+1}) = 0; \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{(VII.28a)} \\ \text{(VII.28b)} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} m(p_\tau^{n+1}) = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad \text{(VII.28c)}$$

Comme dans la section précédente, le problème est découplé. Nous procédons donc d'abord à la résolution des équations de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques puis à la résolution du problème de Stokes.

Remarque VII.17

En l'absence de diffusion sur la paroi, l'énergie libre surfacique associée à l'équation de Cahn-Hilliard s'écrit simplement :

$$\mathcal{F}_{s, \partial \mathfrak{M}}(c_{\partial \mathfrak{M}}) = \mathcal{A}_{f_s} \llbracket f_s(c_{\partial \mathfrak{M}}), 1_{\partial \mathfrak{T}} \rrbracket_{\partial \mathfrak{T}}, \quad \forall c_{\partial \mathfrak{T}} \in \mathbb{R}^{\partial \mathfrak{T}}.$$

Proposition VII.18 (Egalité d'énergie pour le problème découplé avec C.L. dynamiques)

Soit $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$, $\mathbf{u}_\tau^n \in (\mathbb{R}^2)^\tau$. Supposons qu'il existe une solution $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}, \mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau \times (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ au problème VII.16, alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}_\tau(c_\tau^{n+1}) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1}\|_{\tau,2}^2 \right) - \left(\mathcal{F}_\tau(c_\tau^n) + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 \right) + \Gamma_b \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mu_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\rho^*}{\mathcal{R}_e} \Delta t \left\| \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 \\ & + \frac{\rho^*}{2} \|\mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n\|_{\tau,2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta}{2} \left\| \nabla^\mathfrak{D}(c_\tau^{n+1} - c_\tau^n) \right\|_{\mathfrak{D},2}^2 + \frac{\mathcal{A}_\Delta \Gamma_s}{\Delta t} \|c_{\partial \mathfrak{T}}^{n+1} - c_{\partial \mathfrak{T}}^n\|_{\partial \mathfrak{T},2}^2 \\ & = \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} m_{\mathcal{K}} (f_b(c_{\mathcal{K}}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}}^n, c_{\mathcal{K}}^{n+1})(c_{\mathcal{K}}^{n+1} - c_{\mathcal{K}}^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_b}}{2} \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*} (f_b(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) - f_b(c_{\mathcal{K}^*}^n) - d^{f_b}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1})(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} m_{\mathcal{L}} (f_s(c_{\mathcal{L}}^{n+1}) - f_s(c_{\mathcal{L}}^n) - d^{f_s}(c_{\mathcal{L}}^n, c_{\mathcal{L}}^{n+1})(c_{\mathcal{L}}^{n+1} - c_{\mathcal{L}}^n)) \\ & + \frac{\mathcal{A}_{f_s}}{2} \sum_{\mathcal{K}^* \in \partial \mathfrak{M}^*} m_{\sigma^*} (f_s(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1}) - f_s(c_{\mathcal{K}^*}^n) - d^{f_s}(c_{\mathcal{K}^*}^n, c_{\mathcal{K}^*}^{n+1})(c_{\mathcal{K}^*}^{n+1} - c_{\mathcal{K}^*}^n)) \\ & + \Delta t \llbracket \mathcal{G}^\tau(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}), \mathbf{u}_\tau^{n+1} - \mathbf{u}_\tau^n \rrbracket_\tau + \frac{\Delta t}{\rho^*} \llbracket \rho(c_\tau^{n+1}) \mathbf{g}, \mathbf{u}_\tau^{n+1} \rrbracket_\tau. \end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit de reprendre la preuve de la Proposition VII.9 en utilisant l'égalité d'énergie donnée dans la Proposition VI.11 pour l'estimation d'énergie associée à l'équation de Cahn-Hilliard. ■

Remarquons que par un raisonnement similaire à celui détaillé dans le cas des conditions aux limites de Neumann dans le Théorème VII.13, nous obtenons dans ce cas également, pour une famille de maillages quasi-uniforme de Ω et sous une certaine condition entre $\text{size}(\mathcal{T})$ et Δt , l'existence d'une famille de solutions vérifiant une inégalité d'énergie appropriée.

VII.4 Quelques remarques sur l'implémentation

VII.4.1 Principe de la méthode numérique utilisée

Pour implémenter les schémas numériques des Problèmes VII.8 et VII.16 nous devons définir plusieurs matrices. Pour les équations de Cahn-Hilliard nous utilisons les matrices définies dans la Section VI.4. Il reste à définir :

- La matrice de rigidité $\mathbf{R}_\mathcal{T} \in \mathcal{M}_{2N_\mathcal{T}}$ associée à ce problème telle que pour tout $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$,

$$\mathbf{R}_\mathcal{T} \mathbf{u}_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} ((-m_\kappa \mathbf{div}^\kappa(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T}))_{\kappa \in \mathfrak{M}}) \\ 0 \\ ((-m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_\mathcal{T}))_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice de divergence $\mathbf{B}_{\mathfrak{D},\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_\mathfrak{D}, 2N_\mathcal{T}}$ associée à ce système telle que pour tout $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$, $p_\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$,

$$\mathbf{B}_{\mathfrak{D},\mathcal{T}} \mathbf{u}_\mathcal{T} = ((-2m_\mathfrak{D} \mathbf{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}_\mathcal{T})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}) \quad \text{et} \quad {}^t \mathbf{B}_{\mathfrak{D},\mathcal{T}} p_\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} ((m_\kappa \nabla^\kappa p_\mathfrak{D})_{\kappa \in \mathfrak{M}}) \\ 0 \\ ((m_{\kappa^*} \nabla^{\kappa^*} p_\mathfrak{D})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- La matrice de masse en vitesse $\mathbf{M}_\mathcal{T} \in \mathcal{M}_{2N_\mathcal{T}}$ telle que pour tout $\mathbf{u}_\mathcal{T} \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$,

$$\mathbf{M}_\mathcal{T} \mathbf{u}_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} ((m_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}) \\ (m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}})_{\mathcal{L} \in \partial \mathfrak{M}} \\ ((m_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*}) \end{pmatrix}.$$

- Pour un certain $\mathbf{u}_\mathcal{T}$ fixé, la matrice $D_\mathcal{T}^{\mathbf{u}_\mathcal{T}} \in \mathcal{M}_{N_\mathcal{T}}$ telle que :

$$D_\mathcal{T}^{\mathbf{u}_\mathcal{T}} c_\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \text{div}_\pi^\mathfrak{M}(\mathbf{u}_\mathcal{T}, c_\mathcal{T}) \\ \text{div}_\pi^{\mathfrak{M}^*}(\mathbf{u}_\mathcal{T}, c_\mathcal{T}) \\ \text{div}_\pi^{\partial \mathfrak{M}^*}(\mathbf{u}_\mathcal{T}, c_\mathcal{T}) \end{pmatrix}, \quad \forall c_\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}.$$

- Pour $c_\mathcal{T}, \mu_\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ fixés, le vecteur $\mathbf{G}_\mathcal{T}^{c_\mathcal{T}, \mu_\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ tel que :

$$\mathbf{G}_\mathcal{T}^{c_\mathcal{T}, \mu_\mathcal{T}} = \mathcal{G}^\mathcal{T}(c_\mathcal{T}, \mu_\mathcal{T}).$$

Nous pouvons alors réécrire le Problème VII.8 sous la forme :

Problème VII.19

Supposons $c_\mathcal{T}^n \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$ et $\mathbf{u}_\mathcal{T}^n \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$ connus, trouver $(c_\mathcal{T}^{n+1}, \mu_\mathcal{T}^{n+1}) \in \mathbb{R}^\mathcal{T} \times \mathbb{R}^\mathcal{T}$ tels que :

$$\begin{cases} M_\mathcal{T} c_\mathcal{T}^{n+1} + \Delta t D_{\mathcal{T}_0, \mathcal{T}}^{\mathbf{u}_\mathcal{T}^n} c_\mathcal{T}^{n+1} + \Gamma_b \Delta t R_\mathcal{T} \mu_\mathcal{T}^{n+1} = M_\mathcal{T} c_\mathcal{T}^n, \\ \mathcal{A}_\Delta R_\mathcal{T} c_\mathcal{T}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_\mathcal{T} d^{f_b}(c_\mathcal{T}^n, c_\mathcal{T}^{n+1}) - M_\mathcal{T} \mu_\mathcal{T}^{n+1} = 0, \\ N_{\partial \mathfrak{M}, \mathcal{T}} \mu_\mathcal{T}^{n+1} = N_{\partial \mathfrak{M}, \mathcal{T}} c_\mathcal{T}^{n+1} = 0, \end{cases}$$

puis trouver $(\mathbf{u}_\mathcal{T}^{n+1}, p_\mathfrak{D}^{n+1}) \in (\mathbb{R}^2)^\mathcal{T} \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_\mathcal{T} + \frac{\Delta t}{\mathcal{R}_e} \mathbf{R}_\mathcal{T} & \Delta t {}^t \mathbf{B}_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} \\ \mathbf{B}_{\mathfrak{D}, \mathcal{T}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\mathcal{T}^{n+1} \\ p_\mathfrak{D}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\mathcal{T} \mathbf{u}_\mathcal{T}^n + \frac{\Delta t}{\rho^*} \mathbf{G}_\mathcal{T}^{c_\mathcal{T}^n, \mu_\mathcal{T}^n} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De la même manière, le Problème VII.16 s'écrit :

Problème VII.20

Supposons $c_\tau^n \in \mathbb{R}^\tau$ et $\mathbf{u}_\tau^n \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ connus, trouver $(c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}) \in \mathbb{R}^\tau \times \mathbb{R}^\tau$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\tau c_\tau^{n+1} + \Gamma_b \Delta t R_\tau \mu_\tau^{n+1} = M_\tau c_\tau^n, \\ N_{\partial \mathfrak{M}, \tau} \mu_\tau^{n+1} = 0, \\ \mathcal{A}_\Delta R_\tau c_\tau^{n+1} + \mathcal{A}_{f_b} M_\tau d^{f_b}(c_\tau^n, c_\tau^{n+1}) - M_\tau \mu_\tau^{n+1} + \frac{\mathcal{A}_\Delta \Gamma_s}{\Delta t} M_{\tau_0, \partial \mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} \\ \quad + \mathcal{A}_{f_s} M_{\tau_0, \partial \mathfrak{M}}^\Gamma d^{f_s}(c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\partial \mathfrak{M}}^n) = \frac{\mathcal{A}_\Delta \Gamma_s}{\Delta t} M_{\tau_0, \partial \mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial \mathfrak{M}}^n, \\ \frac{\mathcal{A}_\Delta \Gamma_s}{\Delta t} M_{\partial \mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1} + \mathcal{A}_{f_s} M_{\partial \mathfrak{M}}^\Gamma d^{f_s}(c_{\partial \mathfrak{M}}^{n+1}, c_{\partial \mathfrak{M}}^n) + \mathcal{A}_\Delta N_{\partial \mathfrak{M}, \tau} c_\tau^{n+1} = \frac{\mathcal{A}_\Delta \Gamma_s}{\Delta t} M_{\partial \mathfrak{M}}^\Gamma c_{\partial \mathfrak{M}}^n, \end{array} \right.$$

puis trouver $(\mathbf{u}_\tau^{n+1}, p_\tau^{n+1}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tels que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_\tau + \frac{\Delta t}{\mathcal{R}_e} \mathbf{R}_\tau & \Delta t^t \mathbf{B}_{\mathfrak{D}, \tau} \\ \mathbf{B}_{\mathfrak{D}, \tau} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\tau^{n+1} \\ p_\tau^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\tau \mathbf{u}_\tau^n + \frac{\Delta t}{\rho^*} \mathbf{G}_\tau^{c_\tau^{n+1}, \mu_\tau^{n+1}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

VII.4.2 Construction des opérateurs de couplage

La construction des matrices du modèle de Cahn-Hilliard a été décrite dans la Section VI.4 et celle de la matrice de masse $\mathbf{M}_\tau$ est similaire à la construction des matrices M_τ et $M_{\partial \mathfrak{M}}^\Gamma$. De plus, les matrices $\mathbf{R}_\tau$ et $\mathbf{B}_{\mathfrak{D}, \tau}$ sont semblables aux matrices R_τ et $B_{\mathfrak{D}, \tau}$ construites dans la Section IV.4. Nous allons donc simplement détailler la construction de la matrice $D_\tau^{\mathbf{u}_\tau}$ et du vecteur $\mathbf{G}_\tau^{c_\tau, \mu_\tau}$. Pour cela, nous introduisons les flux à travers $\mathfrak{s}$ sortant à $\mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \text{fluxS_K_KS} &= \frac{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*} \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}}{2}, & \text{fluxS_K_LS} &= \frac{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*} \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{L}^*}, \mathcal{D}}}{2}, \\ \text{fluxS_L_KS} &= \frac{\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*} \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}}{2}, & \text{fluxS_L_LS} &= \frac{\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*} \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}_{\mathcal{L}\mathcal{L}^*}, \mathcal{D}}}{2}. \end{aligned}$$

Détaillons par exemple la construction du flux fluxS_K_KS : pour un diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ fixé,

- Nous calculons le vecteur $\text{vect_K_KS} = \overrightarrow{x_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{K}^*}}$:

```
vect_K_KS=mesh.sommets(mesh.arettes(:,_KS),[_X _Y])...
-mesh.centres(mesh.arettes(:,_K),[_X _Y]);
```

- Par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, nous calculons la valeur de $\pm \text{fluxS_K_KS}$:

```
fluxS_K_KS=0.5*[-vect_K_KS(:,_Y) , vect_K_KS(:,_X)];
```

- Nous corrigeons, si nécessaire, le signe de fluxS_K_KS :

//Calcul du vecteur $\overrightarrow{x_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{L}^*}}$:

```
vect_K_LS=mesh.sommets(mesh.arettes(:,_LS),[_X _Y])...
-mesh.centres(mesh.arettes(:,_K),[_X _Y]);
```

//Calcul du produit scalaire $\text{pscal} = \langle \text{fluxS_K_KS}, \overrightarrow{x_{\mathcal{K}} x_{\mathcal{L}^*}} \rangle$:

```
pscal=fluxS_K_KS(:,_X).*vect_K_LS(:,_X)+fluxS_K_KS(:,_Y).*vect_K_LS(:,_Y)
```

//Ce produit scalaire doit être négatif :

```
fluxS_K_KS=fluxS_K_KS.*[-sign(pscal) , -sign(pscal)];
```

Pour $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}$ fixé, il reste à calculer les quatre flux $F_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}^\pi(\mathbf{u}_\tau)$ correspondants (cf Définition VII.1). Par exemple, pour le flux $F_{\mathfrak{s}_{\mathcal{K}\mathcal{K}^*}, \mathcal{D}}^\pi(\mathbf{u}_\tau) = \text{fluxS_K_KS_u}$, nous avons :

```
fluxS_K_KS_u=(u(mesh.arettes(:,_K))+...
u(mesh.nb_vol+mesh.arettes(:,_KS)).*fluxS_K_KS(:,_X)...
+ (u(mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.arettes(:,_K))+...
u(2*mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.arettes(:,_KS)).*fluxS_K_KS(:,_Y);
```

Nous sommes maintenant en mesure de construire la matrice $D_{\tau}^{\mathbf{u}\tau} = D$.

- Seulement pour les arêtes extérieures :

```
v_EXT=find(mesh.arettes(:,_L)==0);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

```
D(mesh.arettes(v_EXT,_K),mesh.arettes(v_EXT,_K))
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_EXT)+fluxS_K_LS_u(v_EXT));
D(mesh.arettes(v_EXT,_K),mesh.nb_vol+v_EXT)
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_EXT)+fluxS_K_LS_u(v_EXT));
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$:

```
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← -0.5*fluxS_K_KS_u(v_EXT);
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← -0.5*fluxS_K_KS_u(v_EXT);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \partial\mathfrak{M}^*$:

```
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_LS))
  ← -0.5*fluxS_K_LS_u(v_EXT);
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_EXT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_EXT,_KS))
  ← -0.5*fluxS_K_LS_u(v_EXT);
```

- Seulement pour les arêtes intérieures :

```
v_INT=find(mesh.arettes(:,_L)>0);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$:

```
D(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_K))
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_INT)+fluxS_K_LS_u(v_INT));
D(mesh.arettes(v_INT,_K),mesh.arettes(v_INT,_L))
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_INT)+fluxS_K_LS_u(v_INT));
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$:

```
D(mesh.arettes(v_INT,_L),mesh.arettes(v_INT,_L))
  ← -0.5*(fluxS_L_KS_u(v_INT)+fluxS_L_LS_u(v_INT));
D(mesh.arettes(v_INT,_L),mesh.arettes(v_INT,_K))
  ← -0.5*(fluxS_L_KS_u(v_INT)+fluxS_L_LS_u(v_INT));
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_INT)+fluxS_L_KS_u(v_INT));
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_KS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← -0.5*(fluxS_K_KS_u(v_INT)+fluxS_L_KS_u(v_INT));
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$:

```
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_LS))
  ← -0.5*(fluxS_K_LS_u(v_INT)+fluxS_L_LS_u(v_INT));
D(mesh.nb_vol+mesh.arettes(v_INT,_LS),...
  mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.arettes(v_INT,_KS))
  ← -0.5*(fluxS_K_LS_u(v_INT)+fluxS_L_LS_u(v_INT));
```

Soit $c_{\mathcal{T}} = c$, $\mu_{\mathcal{T}} = \mu \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, le vecteur $\mathbf{G}_{\mathcal{T}}^{c_{\mathcal{T}}, \mu_{\mathcal{T}}} = vG$ étant nul sur les mailles duales du bord nous introduisons le vecteur `som_bord` nul sur les sommets du bords :

```
som_bord=ones(mesh.nb_som,1);
som_bord(mesh.aretas(v_EXT,DEB))=0;
som_bord(mesh.aretas(v_EXT,FIN))=0;
```

Par souci de simplicité, pour un vecteur $v = v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ nous notons :

```
v_K=v(mesh.aretas(:,_K));
v_L(v_INT)=v(mesh.aretas(:,_L));
v_L(v_EXT)=v(mesh.nb_vol+[1:mesh.nb_are_ext]);
v_KS=v(mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.aretas(:,_KS));
v_LS=v(mesh.nb_vol+mesh.nb_are_ext+mesh.aretas(:,_LS));
```

Nous avons alors,

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ pour toutes les arêtes :

```
vG(mesh.aretas(:,_K))
  ← -0.5*(c_K+c_L).*mu_K.*(fluxS_K_KS(:,_X)+fluxS_K_LS(:,_X));
vG(mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.aretas(:,_K))
  ← -0.5*(c_K+c_L).*mu_K.*(fluxS_K_KS(:,_Y)+fluxS_K_LS(:,_Y));
vG(mesh.aretas(:,_K))
  ← -0.5*(c_KS+c_LS).*(mu_KS.*fluxS_K_KS(:,_X)+mu_LS.*fluxS_K_LS(:,_X));
vG(mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.aretas(:,_K))
  ← -0.5*(c_KS+c_LS).*(mu_KS.*fluxS_K_KS(:,_Y)+mu_LS.*fluxS_K_LS(:,_Y));
```

- Seulement pour les arêtes intérieures :

```
v_INT=find(mesh.aretas(:,_L)>0);
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}$:

```
vG(mesh.aretas(v_INT,_L))
  ← -0.5*(c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*mu_L(v_INT).*(...
    fluxS_L_KS(v_INT,_X)+fluxS_L_LS(v_INT,_X));
vG(mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.aretas(v_INT,_L))
  ← -0.5*(c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*mu_L(v_INT).*(...
    fluxS_L_KS(v_INT,_Y)+fluxS_L_LS(v_INT,_Y));
vG(mesh.aretas(v_INT,_L))
  ← -0.5*(c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*(...
    mu_KS(v_INT).*fluxS_L_KS(v_INT,_X)+...
    mu_LS(v_INT).*fluxS_L_LS(v_INT,_X));
vG(mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.aretas(v_INT,_L))
  ← -0.5*(c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*(...
    mu_KS(v_INT).*fluxS_L_KS(v_INT,_Y)+...
    mu_LS(v_INT).*fluxS_L_LS(v_INT,_Y));
```

- Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$:

```
vG(mesh.nb_vol+mesh.aretas(v_INT,_KS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.aretas(v_INT,_KS)).*(...
    c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*mu_KS(v_INT).*(...
    fluxS_K_KS(v_INT,_X)+fluxS_L_KS(v_INT,_X));
vG(2*mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.aretas(v_INT,_KS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.aretas(v_INT,_KS)).*(...
    c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*mu_KS(v_INT).*(...
    fluxS_K_KS(v_INT,_Y)+fluxS_L_KS(v_INT,_Y));
vG(mesh.nb_vol+mesh.aretas(v_INT,_KS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.aretas(v_INT,_KS)).*(...
    c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*(...
    mu_K(v_INT).*fluxS_K_KS(v_INT,_X)+...
    mu_L(v_INT).*fluxS_L_KS(v_INT,_X));
```

```

vG(2*mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.ares(v_INT,_KS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.ares(v_INT,_KS)).*(...
    c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*(...
    mu_K(v_INT).*fluxS_K_KS(v_INT,_Y)+...
    mu_L(v_INT).*fluxS_L_KS(v_INT,_Y));

```

– Contribution à l'équation de la maille $\mathcal{L}^* \in \mathfrak{M}^*$:

```

vG(mesh.nb_vol+mesh.ares(v_INT,_LS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.ares(v_INT,_KS)).*(...
    (c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*mu_LS(v_INT).*(...
    fluxS_K_LS(v_INT,_X)+fluxS_L_LS(v_INT,_X));
vG(2*mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.ares(v_INT,_LS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.ares(v_INT,_KS)).*(...
    c_KS(v_INT)+c_LS(v_INT)).*mu_LS(v_INT).*(...
    fluxS_K_LS(v_INT,_Y)+fluxS_L_LS(v_INT,_Y));
vG(mesh.nb_vol+mesh.ares(v_INT,_LS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.ares(v_INT,_KS)).*(...
    c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*(...
    mu_K(v_INT).*fluxS_K_LS(v_INT,_X)+...
    mu_L(v_INT).*fluxS_L_LS(v_INT,_X));
vG(2*mesh.nb_vol+mesh.nb_som+mesh.ares(v_INT,_LS))
  ← -0.5*som_au_bord(mesh.ares(v_INT,_KS)).*(...
    c_K(v_INT)+c_L(v_INT)).*(...
    mu_K(v_INT).*fluxS_K_LS(v_INT,_Y)+...
    mu_L(v_INT).*fluxS_L_LS(v_INT,_Y));

```

VII.5 Tests numériques

Nous commençons par présenter un premier cas test avec des conditions aux limites de Neumann.

Pour cela, nous nous inspirons du cas test décrit dans le benchmark http://www.featflow.de/en/benchmarks/cfdbenchmarking/bubble/bubble_configurations.html en modifiant certains paramètres car nous sommes simplement dans le cas des équations de Stokes (et non de Navier-Stokes).

Nous nous plaçons donc sur le domaine $\Omega =]-0.5, 0.5[\times]0, 2[$ et nous choisissons les paramètres suivants : une tension de surface $\sigma_b = 24.5$, une mobilité $\Gamma_b = 10^{-4}$ et une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.05$ pour le système de Cahn-Hilliard. Pour le problème de Stokes, nous choisissons la densité de la phase pure $c = 0$ égale à $\rho^* = 1000$, le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \frac{\eta_{c=0}}{\rho_{c=0}} = 100$ (où $\eta_{c=0} = 10$ est la viscosité de la phase pure $c = 0$) et la gravité $\mathbf{g} = -0.98\mathbf{e}_y$.

La fonction $\rho(c)$ est égale à $\rho_{c=0} = \rho^* = 1000$ dans la phase pure $c = 0$ et à $\rho_{c=1} = 100$ dans la phase pure $c = 1$.

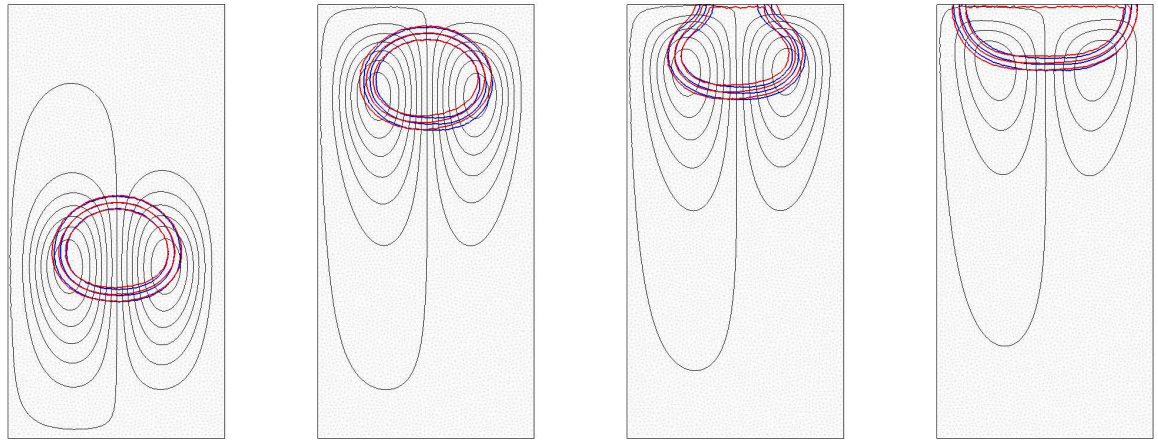
Pour pouvoir étudier l'influence de la géométrie du maillage, nous présentons le même cas test sur trois maillages ayant des géométries différentes :

- un maillage constitué de triangles conformes (voir Figure VII.3) de pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.03$;
- un maillage cartésien conforme uniforme (voir Figure VII.4) de pas $\text{size}(\mathcal{T}) = 0.01$;
- un maillage que nous appellerons maillage en damier construit à partir d'un maillage cartésien pour lequel une maille sur 2 est découpée en 4 carrés (voir Figure VII.5) de pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.01$. Ce maillage n'a qu'un intérêt académique pour tester la robustesse du schéma en présence de nombreuses non-conformités dans le maillage.

A l'instant initial la vitesse est nulle, la bulle (qui constitue la phase 1 c'est à dire que $c = 1$ dans la bulle) est de diamètre 0.5 et son centre est placé au point $(0, 0.5)$.

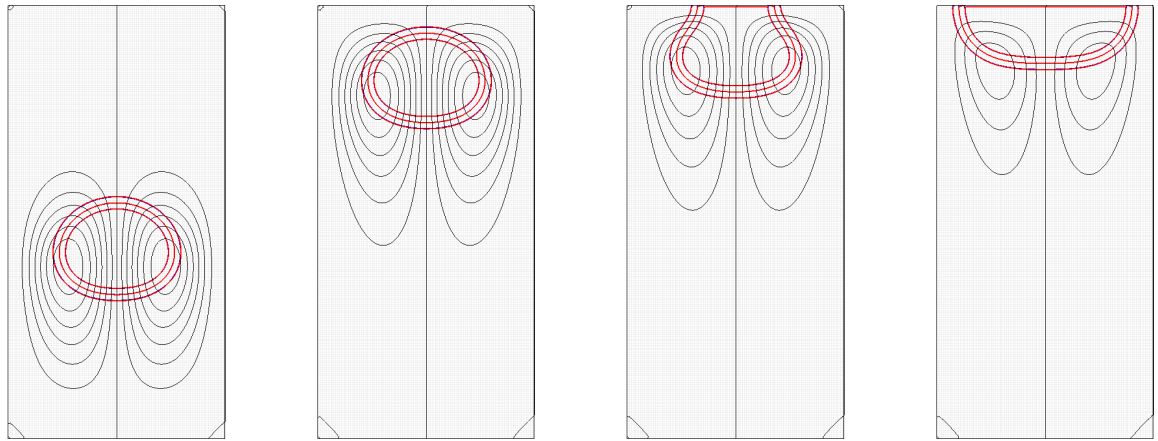
Nous choisissons un pas de temps $\text{dt} = 10^{-3}$ et nous traçons :

- l'évolution de l'interface, en traçant les isolignes ($c = 0.1$, $c = 0.5$ et $c = 0.9$), sur le maillage primal (en rouge);
- l'évolution de l'interface, en traçant les isolignes ($c = 0.1$, $c = 0.5$ et $c = 0.9$), sur le maillage dual (en bleu);
- la fonction de courant associée (15 isovaleurs, en noir);



(a) Solution au temps $t = 2.4$ (b) Solution au temps $t = 6.4$ (c) Solution au temps $t = 7.2$ (d) Solution au temps $t = 8$

Figure VII.3: Bulle immergée dans une colonne de liquide - C.L. de Neumann - Maillage primal triangles - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir



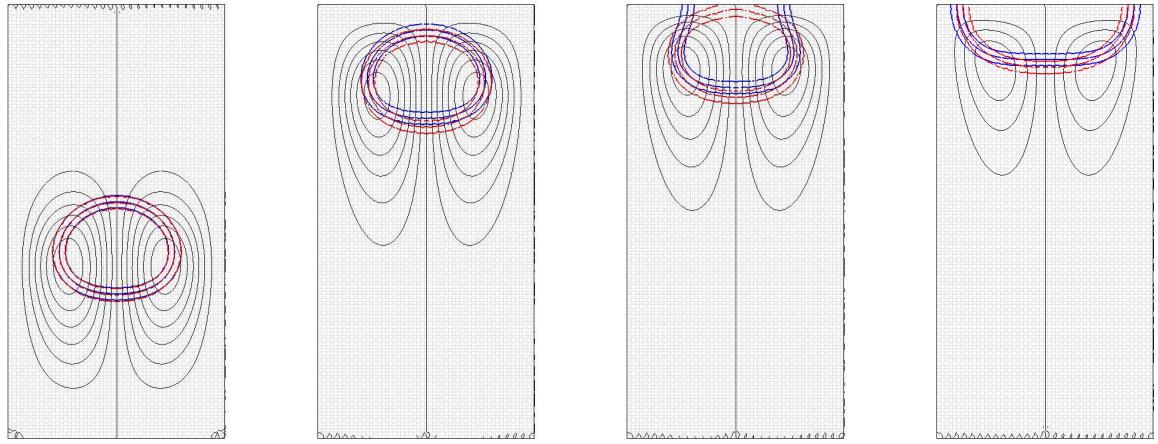
(a) Solution au temps $t = 2.4$ (b) Solution au temps $t = 6.4$ (c) Solution au temps $t = 7.2$ (d) Solution au temps $t = 8$

Figure VII.4: Bulle immergée dans une colonne de liquide - C.L. de Neumann - Maillage primal cartésien - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

La première observation que nous pouvons faire est que sur les trois maillages l'évolution générale de la solution est très semblable.

Regardons maintenant plus en détail les résultats obtenus :

- Au temps $t = 2.4$ (cf Figures VII.3a, VII.4a, VII.5a) la solution est identique pour les trois maillages et dans chaque cas les solutions sur le maillage primal et le maillage dual sont confondues.
- Au temps $t = 6.4$ (cf Figures VII.3b, VII.4b, VII.5b) la bulle se trouve au même endroit pour les trois maillages, cependant c'est le maillage cartésien qui se comporte le mieux vu que c'est le seul pour lequel nous observons une solution identique sur les maillages primal et dual. Notons cependant que la différence entre les deux maillages sur le maillages triangles (cf Figure VII.3b) est très légère (de l'ordre de la maille) et qu'elle est un peu plus importante (tout en restant raisonnable) sur le maillage en damier (cf Figure VII.5b).
- Au temps $t = 7.2$ (cf Figures VII.3c, VII.4c, VII.5c) la bulle atteint le bord du domaine avec le même angle de contact (mis à part pour la solution sur le maillage primal du maillage en damier). Notons que pour le maillage en damier (cf Figure VII.5c) la différence que nous avons observée précédemment entre la solution sur le maillage primal et sur le maillage dual entraîne que la bulle n'atteint pas le bord du domaine au même instant.



(a) Solution au temps $t = 2.4$ (b) Solution au temps $t = 6.4$ (c) Solution au temps $t = 7.2$ (d) Solution au temps $t = 8$

Figure VII.5: Bulle immergée dans une colonne de liquide - C.L. de Neumann - Maillage primal en "damier" - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

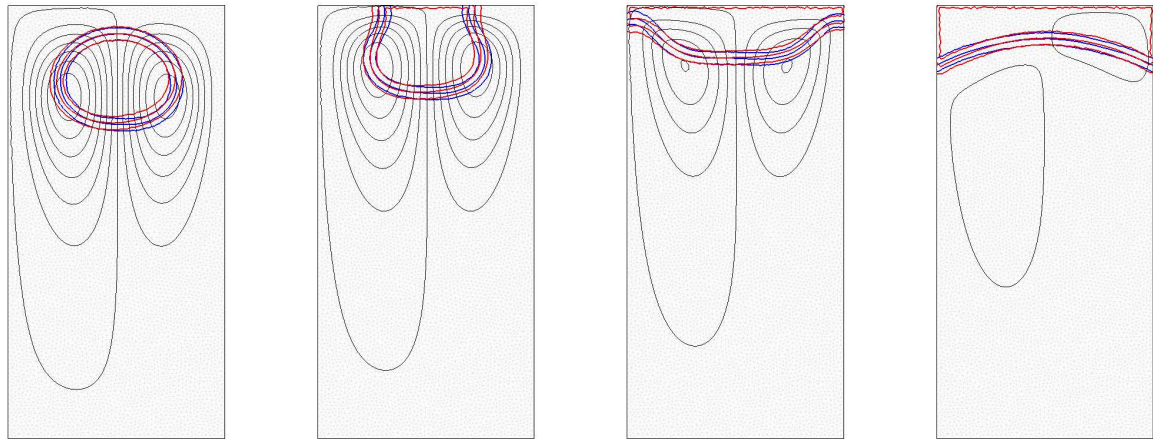
- Au temps $t = 8$ (cf Figures VII.3d, VII.4d, VII.5d) la solution stationnaire est presque atteinte nous observons bien l'angle de contact statique égal à $\frac{\pi}{2}$ attendu. Notons de plus que la différence observée entre les maillages primal et dual diminue pour devenir, à terme, quasi-nulle.

Ainsi, le comportement général de la solution est celui auquel nous nous attendions : la bulle est montée sous l'effet de la gravité et de la différence de densité entre les deux fluides. De plus, une fois le bord du domaine atteint il y a bien apparition d'un angle de contact égal à $\frac{\pi}{2}$ entre l'interface fluide et la paroi solide.

Nous voyons cependant apparaître, selon les maillages, de légères différences entre la solution obtenue sur le maillage primal et celle obtenue sur le maillage dual. Ceci est dû au fait que, mis à part pour le maillage cartésien (qui est d'ailleurs celui pour lequel cet effet de maillage n'apparaît pas), la géométrie des mailles (et parfois le pas du maillage) est différente et que le schéma DDFV résolu sur chacun des maillages est faiblement couplé.

Cependant ces effets de maillages restent raisonnables et n'affectent pas le comportement général de la solution.

Nous voulons maintenant étudier l'influence de la condition aux limites dynamique sur l'angle de contact entre la paroi solide et l'interface fluide. Pour cela, nous choisissons le potentiel surfacique f_s défini par (VII.25) en prenant $\Gamma_s = 5$. Tous les autres paramètres sont identiques au cas test précédent et nous nous plaçons sur le maillage composé de triangles non-conformes.



(a) Solution au temps $t = 6.4$ (b) Solution au temps $t = 7.2$ (c) Solution au temps $t = 8$ (d) Solution au temps $t = 9.2$

Figure VII.6: Bulle immergée dans une colonne de liquide - C.L. dynamique - $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ - Maillage primal triangles - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

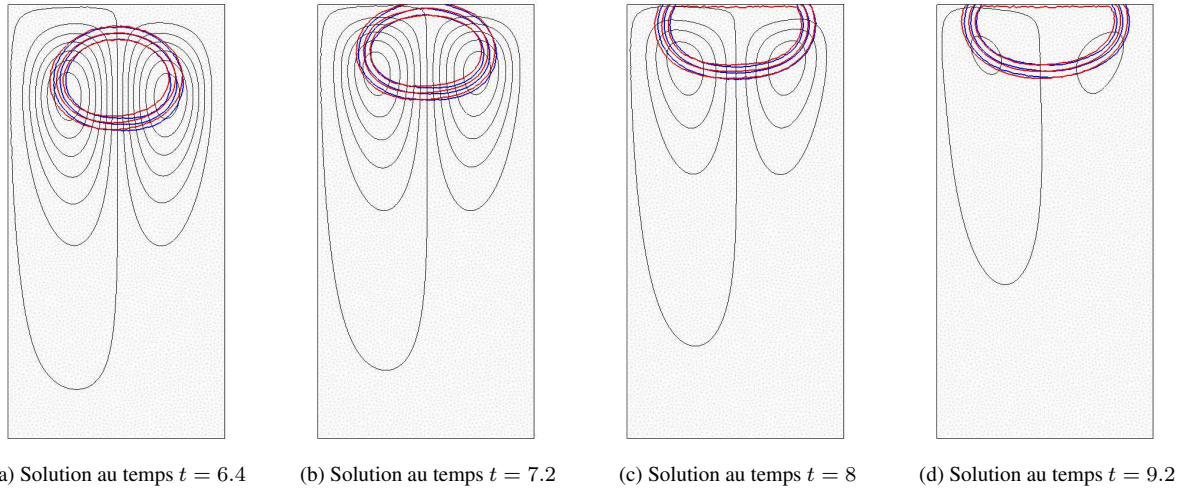


Figure VII.7: Bulle immergée dans une colonne de liquide - C.L. dynamique - $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$ - Maillage primal triangles - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

Nous étudions la dynamique d'angle de contact pour deux angles différents $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ (voir Figure VII.6) et $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$ (voir Figure VII.7).

Commençons par remarquer que, comme attendu, lorsque le bord du domaine n'a pas été atteint (voir Figures VII.6a et VII.7a) la solution est identique à celle observée lorsque nous imposons des conditions aux limites de Neumann (voir Figure VII.3a).

Par contre dès que la bulle est en contact avec la paroi (voir Figures VII.6b et VII.7b) le comportement de la solution change car l'angle de contact s'adapte à l'angle de contact statique que nous avons imposé.

Ensuite, la forme de la bulle va continuer à évoluer (voir Figures VII.6c et VII.7c) pour que l'angle de contact entre l'interface fluide et la paroi que nous avons imposé soit satisfait pour la solution stationnaire. Ainsi, nous observons bien que l'angle de contact entre l'interface fluide et la paroi solide (dans la phase $c = 1$, c'est à dire la bulle) est bien égal à $\frac{\pi}{3}$ sur la Figure VII.6d et à $\frac{2\pi}{3}$ sur la Figure VII.7d.

Pour pouvoir observer plus nettement la dynamique d'angle de contact nous considérons un autre cas test (inspiré de [Don12]). Pour cela, à l'instant initial nous plaçons une goutte sur un plan incliné pour deux inclinaisons α différentes : $\alpha = 20^\circ$ (voir Figure VII.8a) et $\alpha = 70^\circ$ (voir Figure VII.8b).

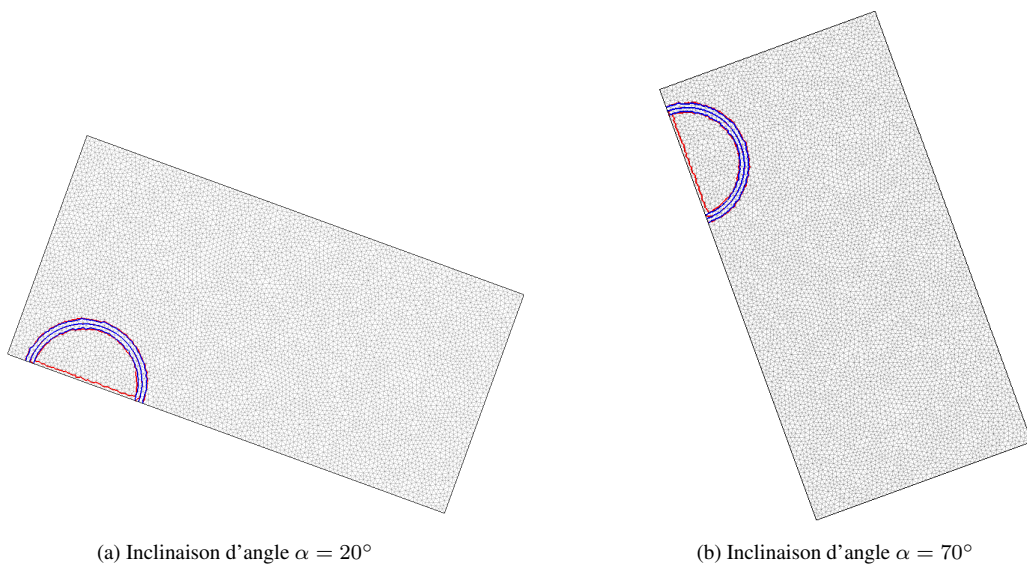


Figure VII.8: Configuration initiale

Nous nous plaçons donc sur le domaine $\Omega =]-0.5, 0.5[\times]0, 2[$ que nous inclinons d'un angle α et nous choisissons les paramètres suivants : une tension de surface $\sigma_b = 24.5$, une mobilité $\Gamma_b = 10^{-4}$ et une épaisseur d'interface $\varepsilon = 0.05$ pour le système de Cahn-Hilliard. Pour le problème de Stokes, nous choisissons la densité de la phase pure $c = 1$ égale à $\rho^* = 1000$, le nombre de Reynolds $\mathcal{R}_e = \frac{\eta_{c=1}}{\rho_{c=1}} = 100$ (où $\eta_{c=1} = 10$ est la viscosité de la phase pure $c = 1$) et la gravité $\mathbf{g} = -0.98\mathbf{e}_y$.

La fonction $\rho(c)$ est égale à $\rho_{c=1} = \rho^* = 1000$ dans la phase pure $c = 1$ et à $\rho_{c=0} = 100$ dans la phase pure $c = 0$.

Nous nous plaçons (lorsque nous ne le précisons pas) sur un maillage composé de triangles conformes de pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.03$ et nous choisissons un pas de temps $\Delta t = 10^{-3}$.

Dans ce cas test, nous étudions l'influence de plusieurs paramètres : l'angle α du plan incliné, l'angle de contact statique θ_s que nous imposons et le paramètre de relaxation Γ_s . Rappelons que la phase 1 est la bulle est donc l'angle de contact θ_s doit être observé dans la bulle. Plus précisément, nous avons :

- deux choix différents pour l'angle du plan incliné : $\alpha = 70^\circ$ ou $\alpha = 20^\circ$;
- trois angles de contacts de contact différents : $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$, $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ ou $\theta_s = \frac{\pi}{3}$;
- deux coefficients de relaxation différents : $\Gamma_s = 20$ et $\Gamma_s = 0.2$.

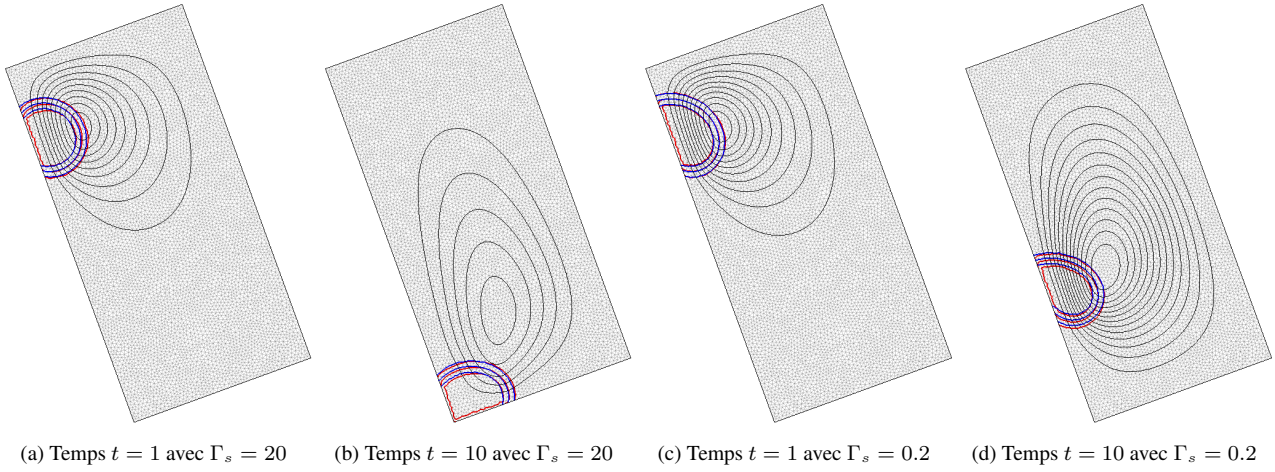


Figure VII.9: Inclinaison d'angle $\alpha = 70^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$ -
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

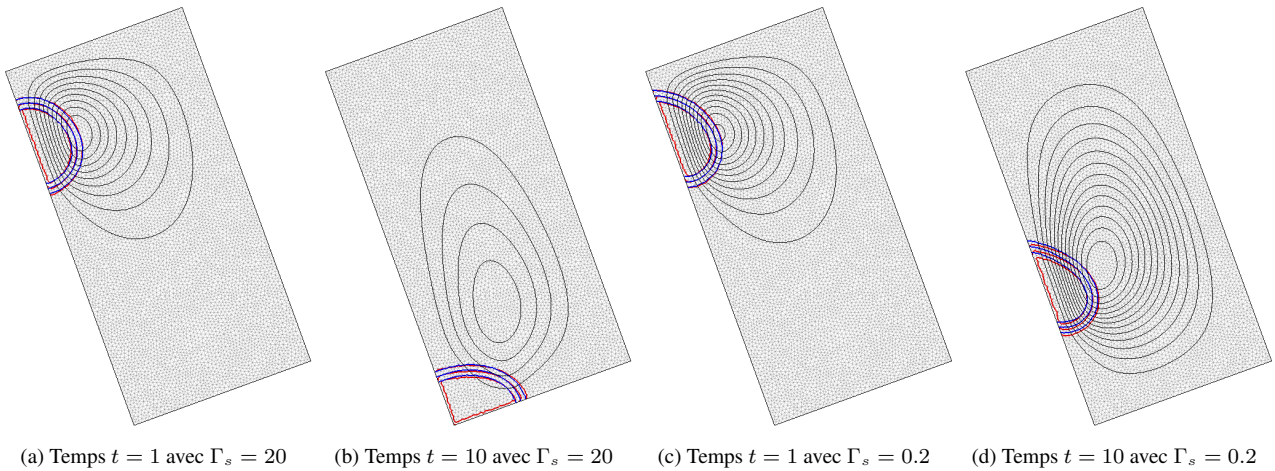


Figure VII.10: Inclinaison d'angle $\alpha = 70^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ -
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

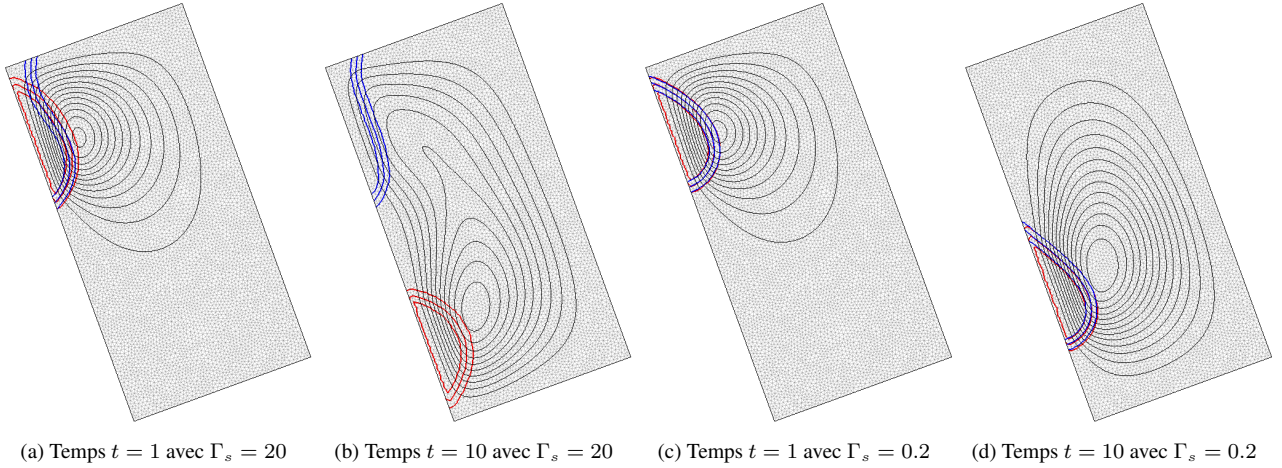


Figure VII.11: Inclinaison d'angle $\alpha = 70^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ -
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

Dans un premier temps, observons simplement les résultats obtenus en choisissant une inclinaison $\alpha = 70^\circ$ (voir Figures VII.9, VII.10 et VII.11). Nous pouvons déjà faire plusieurs commentaires :

- Nous observons sur les Figures VII.9b et VII.10b que lorsque $\Gamma_s = 20$ alors au temps $t = 10$ la goutte a atteint le bas du domaine contrairement à ce que nous observons pour $\Gamma_s = 0.2$ sur les Figures VII.9d et VII.10d. Ainsi, le coefficient de relaxation influe sur la vitesse de la goutte : plus celui-ci est grand plus la goutte tombe vite. Ce phénomène est bien en accord avec la condition aux limites dynamique car si Γ_s est (très) petit la condition aux limites dynamiques est proche de la condition $\partial_t c|_\Gamma = 0$ sur Γ et donc l'évolution est lente. Nous pouvons donc en fait voir Γ_s comme un temps caractéristique de la relaxation de l'angle de contact.
- Lorsque $\Gamma_s = 20$ l'interface fluide a tendance à former dès le début un angle de contact θ_s avec la paroi solide contrairement à ce qui est observé pour le cas $\Gamma_s = 0.2$. Là encore ce phénomène est accord avec la structure de la condition aux limites. En effet si Γ_s est (très) grand la condition aux limites dynamique se rapproche fortement de la condition aux limites $\partial_n c = -f'_s(c|_\Gamma)$, il est donc normal d'obtenir très rapidement l'angle de contact statique imposé.
- Le système tend à satisfaire l'angle de contact statique θ_s , ainsi comme nous pouvons l'observer ce coefficient influe fortement sur la forme de la goutte.
- Nous observons très nettement sur les Figures VII.11a et VII.11b que les solutions sur le maillage primal et sur le maillage dual ont très rapidement évolué différemment. Nous essaierons dans les tests suivants (voir Figures VII.12a, VII.12b et VII.12c) d'expliquer ce phénomène. Notons cependant que c'est le seul cas où nous observons ceci et que dans tous les autres cas les solutions sur le maillage primal et sur le maillage dual sont quasi-confondues.

Pour essayer de comprendre le phénomène qui se produit sur les Figures VII.11a et VII.11b, et ainsi trouver un moyen de le corriger, nous réalisons le même cas test que celui présenté sur ces figures mais en utilisant deux autres maillages :

- un maillage cartésien conforme uniforme de pas $\text{size}(\mathcal{T}) = 0.02$ (voir Figure VII.12c),
- un maillage composé de triangles conformes mais dont le pas $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.02$ est plus fin que celui du maillage précédent (voir Figure VII.12b).

Pour pouvoir comparer ces résultats nous traçons également la solution obtenue avec le maillage précédent au même instant (voir Figure VII.12a).

Nous remarquons alors que dans les deux cas (Figures VII.12b et VII.12c) nous retrouvons bien une solution identique sur le maillage primal et sur le maillage dual mais également sur les deux types de maillages utilisés.

Ainsi, le phénomène observé sur les Figures VII.11a, VII.11b et VII.12a est dû au maillage. De plus, la configuration particulière de la condition initiale (voir Figure VII.8b) peut également expliquer le fait que lorsque la géométrie des mailles primales est différente de celle des mailles duales, si le pas du maillage n'est pas assez fin le système va très

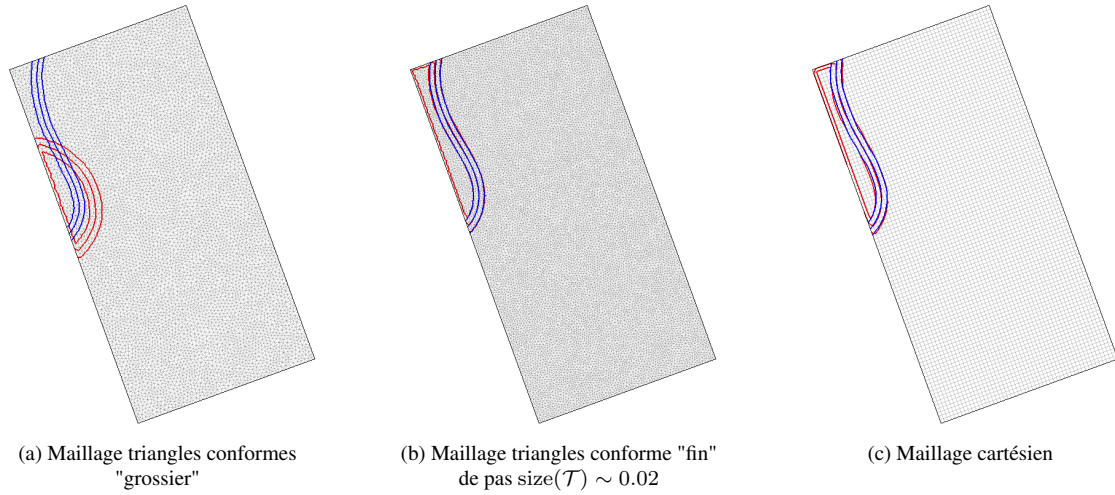


Figure VII.12: Comparaison entre différents maillages - Inclinaison d'angle $\alpha = 70^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ - $\Gamma_s = 20$ - Temps $t=3$ - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu

rapidement évoluer différemment sur chacun des maillages.

Cependant nous voyons qu'en choisissant un maillage cartésien pour lequel le maillage primal est identique (excepté pour les mailles du bord) ou raffinant un peu le maillage triangles utilisé nous pouvons éviter qu'un tel phénomène apparaisse.

Pour pouvoir étudier l'influence de l'inclinaison du plan sur la solution, nous allons maintenant réaliser les mêmes tests mais en choisissant un angle d'inclinaison plus faible $\alpha = 20^\circ$ (voir Figures VII.13, VII.14 et VII.15).

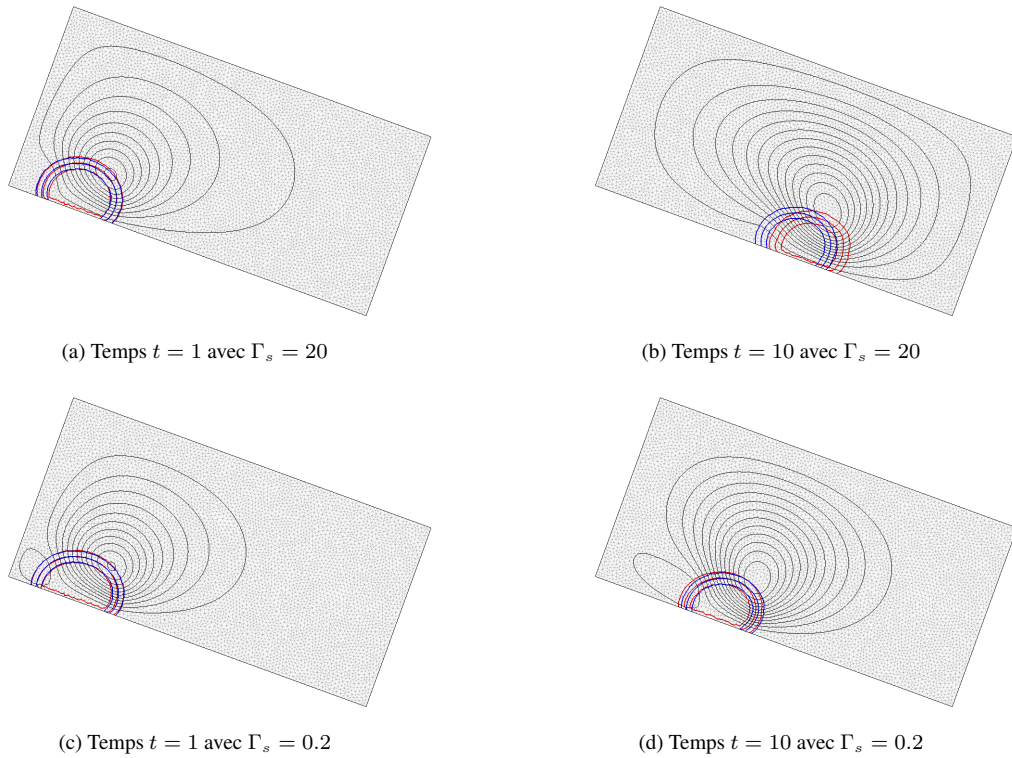


Figure VII.13: Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$ - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

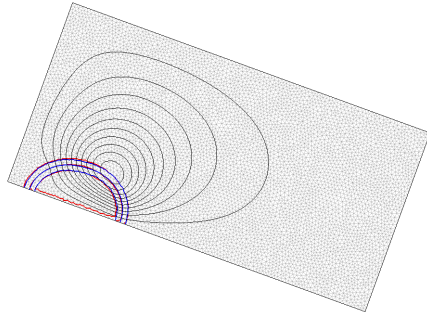
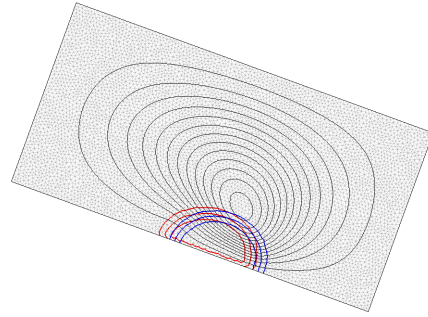
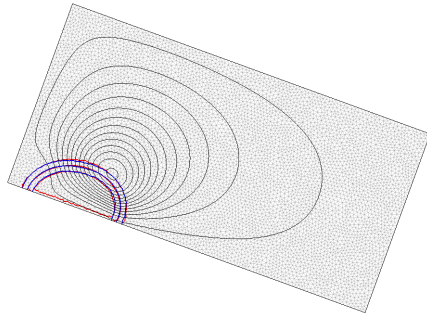
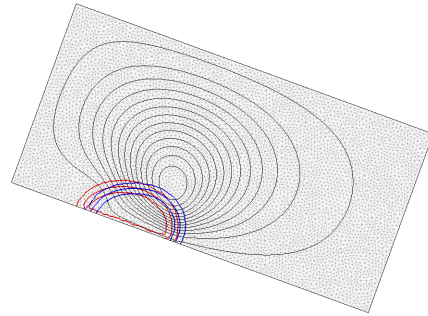
(a) Temps $t = 1$ avec $\Gamma_s = 20$ (b) Temps $t = 10$ avec $\Gamma_s = 20$ (c) Temps $t = 1$ avec $\Gamma_s = 0.2$ (d) Temps $t = 10$ avec $\Gamma_s = 0.2$

Figure VII.14: Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{2}$ -
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

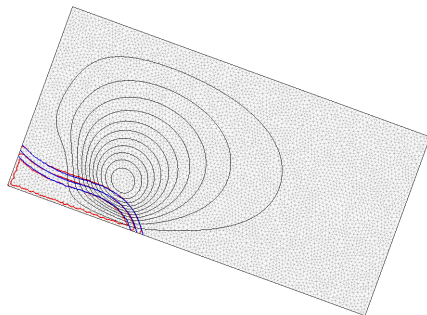
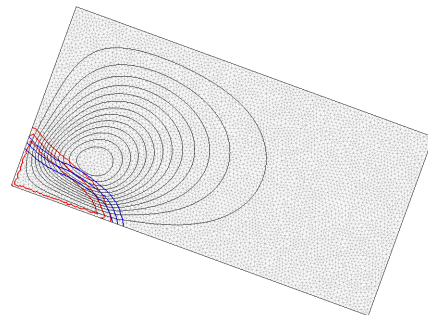
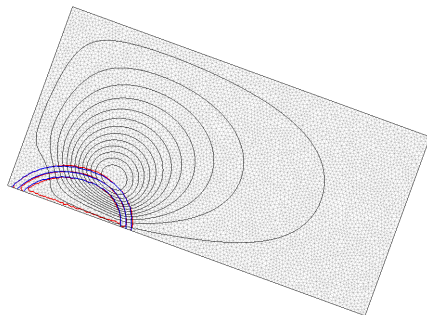
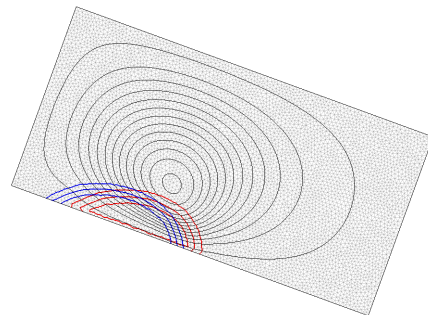
(a) Temps $t = 1$ avec $\Gamma_s = 20$ (b) Temps $t = 10$ avec $\Gamma_s = 20$ (c) Temps $t = 1$ avec $\Gamma_s = 0.2$ (d) Temps $t = 10$ avec $\Gamma_s = 0.2$

Figure VII.15: Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ -
Solution primale en rouge - Solution duale en bleu - Lignes de courant en noir

Notons tout d'abord que les mêmes comportements généraux que pour le cas d'un angle $\alpha = 70^\circ$ sont observés :

- le coefficient de relaxation influe sur la vitesse de la goutte ainsi que sur la rapidité à laquelle l'interface forme l'angle de contact θ_s avec la paroi;
- le coefficient θ_s influe sur la forme de la goutte.

Ensuite, nous pouvons remarquer que comme nous nous y attendions l'inclinaison du plan joue un rôle important sur la vitesse de la goutte et donc sur la forme de celle-ci. En effet, il est normal d'observer que plus le plan est incliné puis la goutte tombe rapidement.

La dernière remarque que nous pouvons faire est que dans certains cas (voir Figures VII.13b, VII.14b, VII.14d, VII.15b et VII.15d) la solution observée sur le maillage primal est légèrement différente de celle observée sur le maillage dual. Ce phénomène est sûrement dû au fait que la vitesse de la goutte est plus faible dans ce cas là et donc la géométrie du maillage intervient de façon plus importante dans les termes de diffusion. Notons cependant que la différence est de l'ordre d'une maille.

Pour confirmer que ce phénomène est dû à la géométrie des mailles primales et duales nous reprenons trois des tests précédents (ceux présentés sur les Figures VII.13b, VII.15b et VII.15d) en utilisant le maillage cartésien de pas $\text{size}(\mathcal{T}) = 0.02$ et le maillage triangles conformes de pas plus petit $\text{size}(\mathcal{T}) \sim 0.02$ (que nous avons utilisé précédemment).

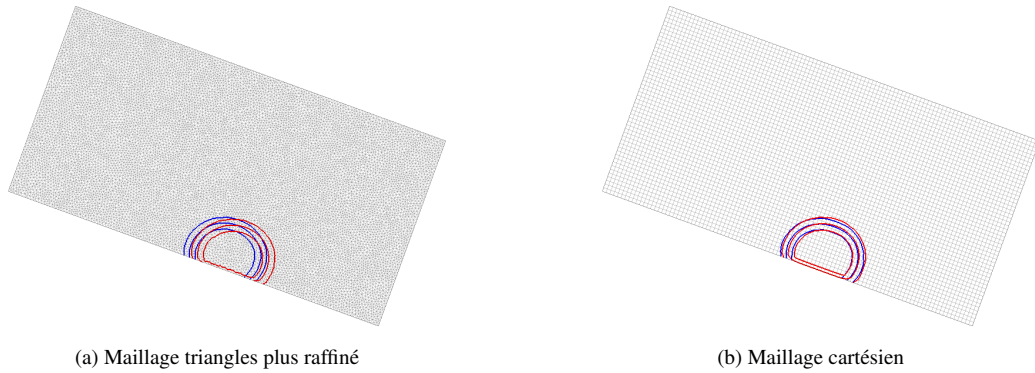


Figure VII.16: Comparaison avec la Figure VII.13b - Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{2\pi}{3}$ - $\Gamma_s = 20$ - Temps $t = 10$ - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu

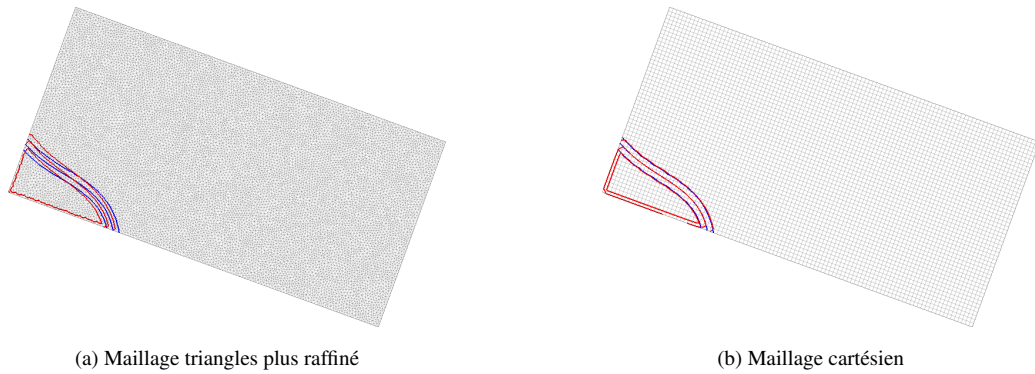


Figure VII.17: Comparaison avec la Figure VII.15b - Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ - $\Gamma_s = 20$ - Temps $t = 10$ - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu

Ces résultats montrent que :

- sur le maillage cartésien uniforme nous n'observons aucune différence entre la solution obtenue sur le maillage primal et celle obtenue sur le maillage dual;
- sur le maillage triangles de pas plus fin nous observons encore quelques différences entre les deux solutions mais nous voyons qu'il y a moins de différences que pour le premier maillage triangles étudié et que ces différences sont assez petites.

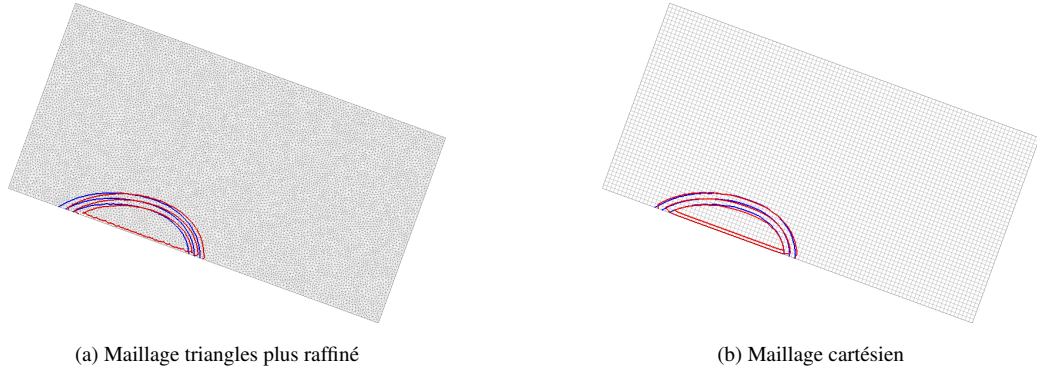


Figure VII.18: Comparaison avec la Figure VII.15d - Inclinaison d'angle $\alpha = 20^\circ$ - Angle de contact $\theta_s = \frac{\pi}{3}$ - $\Gamma_s = 0.2$ - Temps $t = 10$ - Solution primale en rouge - Solution duale en bleu

Nous pouvons faire une remarque générale concernant la totalité de ces résultats. Lorsque nous comparons (avec les mêmes paramètres) la figure à l'instant $t = 1$ et celle à l'instant $t = 10$ nous voyons (de façon plus ou moins nette selon les cas) qu'il y a une perte de volume de la goutte au cours du temps bien que la conservation du volume total soit satisfaite. Ceci est dû au fait que nous avons utilisé une mobilité Γ_b constante dans ces simulations, un phénomène de diffusion (qui n'est pas physique) se produit alors en dehors de l'interface et donc dans les phases pures la concentration n'est pas exactement égale à 0 et 1. Ce phénomène est bien connu et c'est la raison pour laquelle il faudrait prendre en compte une mobilité dégénérée (c'est à dire sous la forme $\Gamma_b(c)$ et telle que la mobilité s'annule dans les phases pures), ce que nous ferons dans des travaux futurs.

En conclusion nous avons présenté dans cette section un schéma DDFV adapté au problème couplé Cahn-Hilliard/Stokes permettant de prendre en compte d'une part la condition aux limites dynamique non-linéaire mais également les possibles non-conformités du maillage.

Bien que dans certains cas une différence puisse survenir entre la solution sur les maillages primal et dual, nous avons montré que ceci pouvait facilement être évité en raffinant le maillage ou en choisissant un autre type de maillage (par exemple cartésien).

VII.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit de nouveaux opérateurs discrets permettant d'obtenir un schéma de type volumes finis DDFV original pour le couplage de l'équation de Cahn-Hilliard avec les équations de Stokes. Nous montrons l'existence de solutions à ce système vérifiant une inégalité d'énergie semblable à celle du problème continu. C'est le premier pas (important) d'une analyse de convergence qui reste à faire.

D'un point de vue numérique nous avons présenté de nombreux cas tests permettant de montrer les bonnes propriétés de ce schéma et ceci même lorsque nous utilisons un maillage hautement non-conforme (voir le maillage en damier utilisé) ou une condition aux limites dynamique non-linéaire. Nous avons également illustré l'influence des conditions aux limites dynamiques sur la dynamique d'angle de contact.

L'une des perspectives de ce travail serait de réaliser l'étude mathématique de ce modèle en couplant les résultats obtenus dans le Chapitre III et dans la Partie 2 et ainsi obtenir, par exemple, un résultat de convergence pour le schéma que nous avons décrit dans ce chapitre. Nous pourrions ensuite nous concentrer sur le couplage des équations de Cahn-Hilliard avec les équations de Navier-Stokes.

D'un point de vue numérique, une première perspective serait d'obtenir un schéma complètement découplé et inconditionnellement stable comme décrit dans [Min13].

De plus, pour éviter les effets de maillage qui interviennent parfois il faudrait trouver un moyen de coupler plus fortement le schéma résolu sur le maillage primal avec celui résolu sur le maillage dual lors de la résolution de l'équation de Cahn-Hilliard.

Conclusions et perspectives

Dans ce manuscrit nous avons analysé des méthodes de types volumes finis adaptées à plusieurs types d'équations : une méthode VF4 pour le modèle de Cahn-Hilliard associé à une condition aux limites dynamique non-linéaire dans la Partie 1; une méthode DDFV pour l'approximation du problème de Stokes et plus précisément l'étude de la propriété de stabilité Inf-Sup pour ce schéma dans la Partie 2; et dans la Partie 3 une méthode DDFV pour un modèle couplé de type Cahn-Hilliard/Stokes.

Dans la Partie 1, nous avons proposé un schéma volumes finis deux points pour l'équation de Cahn-Hilliard associée à une condition aux limites dynamique non-linéaire dans un domaine Ω ayant, potentiellement, une géométrie courbe. Nous avons montré que ce schéma était bien adapté d'une part au couplage s'effectuant entre le domaine Ω et sa frontière Γ et d'autre part à la géométrie courbe du domaine. Nous avons obtenu un résultat de convergence des solutions approchées vers une solution faible du modèle en introduisant un prolongement en espace original qui utilise la trace discrète des solutions approchées. D'un point de vue numérique, nous avons présenté des estimations d'erreurs montrant une super-convergence en norme L^2 -discrète à la fois dans le domaine et sur sa frontière ainsi qu'une convergence d'ordre 1 en norme H^1 -discrète. Très peu de simulations numériques illustrant l'influence des conditions aux limites dynamiques sur un domaine présentant une géométrie courbe existent à ce jour dans la littérature, nous avons donc également présenté plusieurs résultats numériques permettant d'observer les différents comportements de la solution en fonction des propriétés physiques du modèle.

Plusieurs perspectives sont à envisager :

- ◇ L'analyse réalisée dans ces travaux suppose la présence d'un terme de diffusion de surface dans la condition aux limites dynamique. Nous pourrions également réaliser l'étude de ce modèle lorsqu'il n'y a pas de diffusion sur la paroi, c'est-à-dire en l'absence de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans la condition aux limites dynamique. Ce travail permettrait de traiter des cas plus généraux et pourrait notamment être utilisé pour l'étude d'un modèle couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes dans lequel ce terme de diffusion de surface n'intervient pas. Cependant, l'absence du terme de diffusion de surface complique l'étude de ce modèle. En effet, la condition aux limites étant là encore non-linéaire, nous avons toujours besoin de compacité forte dans $L^2([0, T] \times \Gamma)$ pour passer à la limite dans le schéma. Mais, si $\sigma_s = 0$ le schéma ne permet plus d'obtenir de borne $L^2(0, T, H^1(\Gamma))$ -discrète pour les solutions approchées (mais seulement une borne $L^2(0, T, L^2(\Gamma))$). Il n'est donc plus possible d'utiliser le théorème d'estimations de translations en espace que nous avons démontré. Il faut alors trouver un moyen d'utiliser la solution obtenue dans le domaine ainsi que les bornes dans Ω pour obtenir une borne $L^2(0, T, H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$ -discrète de la trace (sachant que le sens qu'il faut donner à cet espace reste à définir) et une estimation de translation en espace sur Γ .
- ◇ Le potentiel volumique initialement introduit par Cahn et Hilliard dans leurs travaux sur la décomposition spinodale est un potentiel logarithmique. Le potentiel polynomial que nous avons utilisé est une approximation de ce potentiel logarithmique. D'un point de vue numérique peu de résultats existent pour l'équation de Cahn-Hilliard avec des conditions aux limites dynamiques et un potentiel logarithmique. Ainsi, analyser un modèle mettant en jeu à la fois un potentiel volumique logarithmique et des conditions aux limites dynamique serait intéressant. Numériquement, nous pourrions alors observer les différences entre la solution obtenue avec un potentiel polynomial et celle obtenue avec un potentiel logarithmique en fonction des différents paramètres intervenant dans la condition aux limites dynamique. La difficulté de cette étude vient du fait que, dans ce cas là, la dérivée du potentiel f_b est donnée par la

formule,

$$f'_b(c) = \frac{\theta_c}{2} c(1-2c) + \frac{\theta}{4} \ln\left(\frac{c}{1-c}\right), \quad 0 < \theta < \theta_c;$$

et donc f'_b est singulier dans les phases pures.

- ◇ Enfin, notons que l'analyse que nous avons présentée a été réalisée avec une mobilité constante $\Gamma_b > 0$. Étudier ce schéma avec une mobilité dégénérée constitue également une extension intéressante. Lorsque la mobilité dépend du paramètre d'ordre c mais est non-dégénérée (c 'est à dire que sa borne inférieure est strictement positive) nous devrions pouvoir adapter les résultats décrits dans ce chapitre. Pour une mobilité dégénérée (c 'est à dire qui s'annule dans les phases pures), d'un point de vue numérique, l'adaptation de schémas éléments finis (voir par exemple [BB99]) au cadre volumes finis ne devrait pas présenter de difficulté majeure. Cependant, l'analyse du modèle de Cahn-Hilliard dans le cas d'une mobilité dégénérée devient plus complexe.

Dans la Partie 2 nous avons étudié, autant d'un point de vue théorique que numérique, la propriété de stabilité Inf-Sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes. Dans un premier temps nous avons démontré une propriété de stabilité Inf-Sup inconditionnelle pour certaines familles de maillages. Dans un second temps, nous avons étudié le cas des maillages cartésiens pour lesquels la propriété de stabilité Inf-Sup n'est pas satisfaite. Cependant, dans ce cas, nous avons démontré qu'il existait un unique mode instable et que, lorsque nous imposons à la pression d'être orthogonale à ce mode, la propriété de stabilité Inf-Sup était vérifiée. Nous avons ensuite présenté de nombreux résultats numériques permettant d'illustrer si la propriété de stabilité Inf-Sup était vérifiée ou non pour plusieurs familles de maillages très généraux. Ces résultats mettent alors en évidence plusieurs perspectives :

- ◇ Les résultats numériques présentés à la fin du Chapitre V montrent que le schéma DDFV semble être Inf-Sup stable pour des familles très générales de maillages. Plus précisément, ces résultats semblent montrer que seuls les maillages cartésiens (conformes et non-conformes) ne satisfont pas la propriété de stabilité Inf-Sup uniforme. Nous voudrions donc démontrer, d'un point de vue théorique, que la propriété de stabilité Inf-Sup est satisfaite pour des familles très variées de maillages.
En particulier, prenons l'exemple d'un maillage décomposé en deux sous-domaines dont l'un est composé de triangles conformes et l'autre est un maillage cartésien conforme uniforme. Nous observons numériquement qu'un tel maillage semble être Inf-Sup stable. Nous avons démontré qu'un maillage composé de triangles conformes était Inf-Sup stable alors qu'un maillage cartésien ne l'était pas mais qu'il vérifiait une propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1. L'idée serait donc de coupler ces deux démonstrations pour démontrer qu'un tel maillage est Inf-Sup stable. Cependant pour le moment, pour le sous-domaine cartésien nous ne sommes pas en mesure d'exprimer la différence entre deux mailles de pressions voisines en terme de gradient de pression DDFV indépendamment du nombre de mailles dans le sous-domaine (et donc du pas du maillage).
- ◇ Nous avons vu que les maillages cartésiens vérifiaient une propriété de stabilité Inf-Sup de codimension 1. De plus, nous avons donné une description précise du mode instable. Ainsi, pour pouvoir obtenir des résultats de convergence et d'estimation d'erreur pour ces schémas il suffirait d'ajouter un terme de stabilisation de rang 1 particulier construit à partir du mode instable.

Dans la Partie 3 nous nous sommes intéressés au problème couplé Cahn-Hilliard/Stokes. Pour cela, nous avons commencé par mettre en place dans le Chapitre VI une méthode DDFV pour le problème de Cahn-Hilliard avec une condition aux limites dynamique non-linéaire. Enfin dans le Chapitre VII nous avons proposé un schéma DDFV original pour le problème couplé Cahn-Hilliard/Stokes avec une condition aux limites dynamique non-linéaire. Ce schéma a notamment pour avantage de pouvoir traiter des maillages non-conformes. Nous avons également démontré l'existence de solutions à ce système vérifiant une inégalité d'énergie semblable à celle obtenue dans le cas continu. Par ailleurs, nous présentons plusieurs résultats numériques permettant d'observer le comportement du schéma DDFV pour ce modèle.

Cette partie constitue un travail en cours et plusieurs résultats restent à obtenir :

- ◇ Bien que nous ayons obtenu des inégalités d'énergie discrètes et l'existence de solutions pour le schéma DDFV pour l'équation de Cahn-Hilliard ainsi que pour le problème couplé Cahn-Hilliard/Stokes, dans chacun des cas l'étude de convergence reste à faire.
Dans le cas de l'équation de Cahn-Hilliard il faut l'adapter la preuve de convergence donnée dans le Chapitre III pour le schéma VF4 au schéma DDFV, ce qui ne devrait pas poser de difficulté supplémentaire.
Par contre, la convergence du modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes, du fait des termes de couplage, semble moins immédiate.

- ◇ Dans [Min13] l’auteur propose (par une méthode de type éléments finis) un schéma complètement découplé et inconditionnellement stable pour le modèle couplé Cahn-Hilliard/Navier-Stokes. Nous aimerions adapter ce schéma au cas qui nous intéresse et ainsi obtenir une inégalité d’énergie sans condition sur le pas de temps.
- ◇ Ces résultats constituent un travail préliminaire à l’étude du modèle Cahn-Hilliard/Navier-Stokes qui sera, bien sûr, la suite logique de ces travaux. Pour cela nous pouvons, par exemple, coupler le schéma DDFV présenté dans le Chapitre VI avec le schéma DDFV pour les équations de Navier-Stokes proposé dans [GK14].
- ◇ Le schéma DDFV pour l’équation de Cahn-Hilliard étant résolu sur deux maillages faiblement couplés nous avons observé, dans certains cas, des différences entre la solution obtenue sur le maillage primal et celle obtenue sur le maillage dual. Pour éviter ce phénomène, il faudrait construire une méthode permettant de coupler plus fortement le schéma résolu sur le maillage primal et celui résolu sur le maillage dual.
- ◇ Comme nous l’avons vu le schéma DDFV autorise la prise en compte de maillages non-conformes. Il serait donc intéressant de construire un algorithme de raffinement/déraffinement de maillage adaptatif qui permettrait de suivre l’interface.
 Une idée serait de partir d’un maillage très fin de Ω pour lequel nous connaîtrions toutes les informations utiles sur les mailles diamants. A partir de ce maillage nous pourrions alors construire des maillages plus grossiers en regroupant entre elles plusieurs mailles voisines. Il faudrait ensuite récupérer les informations sur les mailles diamants de ce nouveau maillage en fonction du maillage fin initial.

Pour conclure, notons que même si l’ensemble de l’analyse effectuée dans ce mémoire se situe en deux dimensions, l’adaptation de ces résultats au cas tridimensionnel serait une suite logique à ces travaux.

Annexe

Définitions et propriétés relatives à la courbe Γ

Nous supposons que Γ est une courbe lisse fermée donc il existe une paramétrisation globale $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, que l'on suppose normale, au moins $\mathcal{C}^2$ -périodique et un intervalle I de $\mathbb{R}$ tels que $\varphi(I) = \Gamma$.

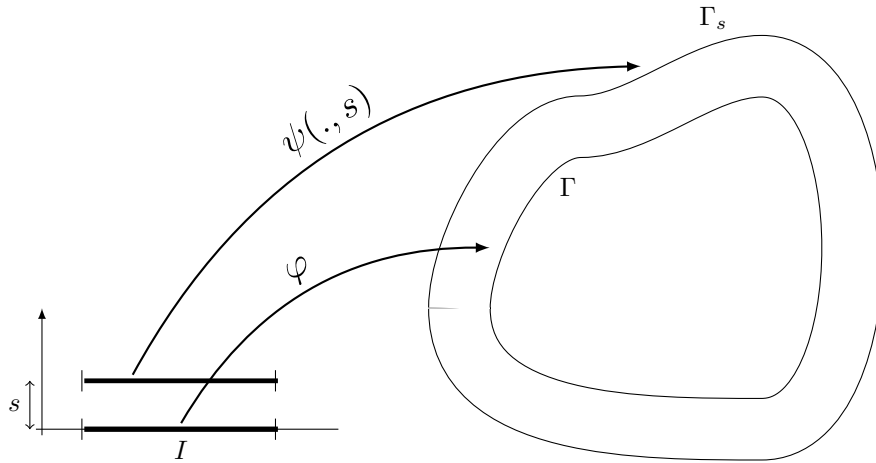


Figure 1: Paramétrage de la courbe Γ

Nous choisissons une orientation de la courbe Γ telle que $\vec{n}$ soit la normale sortante à Ω , c'est à dire que nous parcourons Γ dans le sens anti-trigonométrique. Ainsi, pour tout $t \in I$,

- $\vec{\tau}_\varphi(t) = \vec{\tau}(\varphi(t)) = (\varphi'_1(t), \varphi'_2(t))$ désigne le vecteur tangent unitaire au point $\varphi(t) \in \Gamma$;
- $\vec{n}_\varphi(t) = \vec{n}(\varphi(t)) = (-\varphi'_2(t), \varphi'_1(t))$ désigne la normale unitaire sortante au point $\varphi(t) \in \Gamma$;
- $\kappa(\varphi(t)) \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{\tau}'_\varphi(\varphi(t)) = \kappa(\varphi(t))\vec{n}_\varphi(t)$ désigne la courbure au point $\varphi(t) \in \Gamma$.

Notons qu'avec cette définition, le cercle est à courbure négative.

Rappelons la définition de la projection orthogonale sur Γ .

Définition A.1 (Projection sur la frontière)

Considérons l'application

$$\psi : (x_\Gamma, s) \in \Gamma \times \mathbb{R}_+^* \mapsto x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma) \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{A.1})$$

où $\vec{n}(x_\Gamma)$ est la normale unitaire sortante à Ω au point $x_\Gamma \in \Gamma$.

Alors, il existe $\alpha > 0$ tel que ψ soit un difféomorphisme de $\Gamma \times]0, \alpha[$ sur $\Omega_\alpha = \{x \in \Omega^c, d(x, \Gamma) < \alpha\} = \psi(\Gamma \times]0, \alpha[)$ avec $\alpha < \frac{2}{\|\kappa\|_{L^\infty}}$.

De cette façon, pour tout $x \in \Omega_\alpha$, la projection sur la frontière $\mathbb{P}_\Gamma x \in \Gamma$ est bien définie : $\mathbb{P}_\Gamma x$ est l'unique point sur Γ tel que $|\mathbb{P}_\Gamma x - x| = d(x, \Gamma)$ et pour tout $x \in \Omega_\alpha$, $\psi(\mathbb{P}_\Gamma x, d(x, \Gamma)) = x$.

Proposition A.2 (Formule de changement de variable)

Soit $u : \Omega_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$, alors

$$\int_{\Omega_\alpha} u(x) dx = \int_\Gamma \int_0^\alpha |1 - s\kappa(x_\Gamma)| u(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma)) ds dx_\Gamma.$$

Démonstration : Considérons la fonction $\tilde{\psi} : (t, s) \in I \times]0, \alpha[\mapsto \varphi(t) + s\vec{n}(\varphi(t)) = \varphi(t) + s\vec{n}_\varphi(t) \in \Omega_\alpha$, alors en effectuant le changement de variable $x = \tilde{\psi}(t, s)$ nous obtenons :

$$\int_{\Omega_\alpha} u(x) dx = \int_0^\alpha \int_I u(\tilde{\psi}(t, s)) \text{Jac } \tilde{\psi}(t, s) dt ds.$$

En remarquant que $\vec{n}_\varphi'(t) = -\kappa(\varphi(t))\vec{\tau}_\varphi(t)$, le Jacobien de $\tilde{\psi}$ vérifie,

$$\text{Jac } \tilde{\psi}(t, s) = (\vec{\tau}_\varphi(t) + s\vec{n}_\varphi'(t)) \wedge \vec{n}_\varphi(t) = |\vec{\tau}_\varphi(t)|^2 - s\kappa(\varphi(t))|\vec{\tau}_\varphi(t)|^2.$$

Puisque $\vec{\tau}_\varphi$ est un vecteur unitaire nous obtenons,

$$\int_{\Omega_\alpha} u(x) dx = \int_0^\alpha \int_I u(\tilde{\psi}(t, s)) |1 - s\kappa(\varphi(t))| dt ds.$$

En effectuant maintenant le changement de variable $x_\Gamma = \varphi(t)$ et en notant que $|\varphi'(t)| = 1$ car φ est un paramétrage normal de Γ nous obtenons bien le résultat annoncé. ■

Proposition A.3 (Vérification de l'hypothèse (III.144) du Théorème III.40)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage de Ω tel que le maillage polygonal associé soit régulier au sens usuel, c'est à dire qu'il existe une constante positive C_1 ne dépendant que de la régularité du maillage telle que :

$$\text{diam}(\mathcal{K}) \leq C_1 m_{\mathbf{e}_\mathcal{L}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M} \text{ tel que } \sigma = \mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M} \cap \mathcal{E}_\mathcal{K},$$

où nous rappelons que $\mathbf{e}_\mathcal{L}$ est la corde associée à la maille $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}$.

Alors, pour $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit, il existe $\mu, \nu > 0$, tels que pour tout sous-arc $\tilde{\sigma} \subset \sigma$, le sous-triangle $\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}$ (voir Figure 2) correspondant vérifie

$$\mu \leq \frac{m_{\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}}}{m_{\tilde{\sigma}}} \leq \nu.$$

Démonstration : La courbe Γ étant régulière, pour $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit nous pouvons supposer que Γ est localement le graphe d'une fonction régulière f .

Ainsi, pour toute maille $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ telle que $\sigma \subset \partial\mathcal{K} \cap \mathcal{E}_{ext}$ (c'est à dire que σ est l'arête courbe du pseudo-triangle $\mathcal{K}$), nous pouvons utiliser la paramétrisation φ de σ suivante $\sigma = \varphi([0, h])$ où pour tout $t \in [0, h]$, $\varphi(t) = (t, f(t))$ qui n'est donc plus normale, telle que $f(0) = f(h) = 0$ (comme décrit sur la Figure 2).

Alors, nous savons que pour tout sous-arc $\tilde{\sigma} = \varphi([a, b])$ de σ (avec $0 \leq a \leq b \leq h$) nous avons ;

$$m_{\tilde{\sigma}} = \int_a^b |\varphi'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{1 + |f'(t)|^2} dt.$$

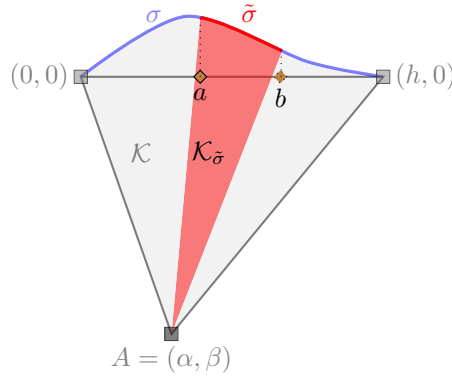


Figure 2: Maille primale $\mathcal{K} \in \mathfrak{M}$ possédant une arête courbe $\sigma \in \Gamma$

Or avec la paramétrisation φ choisie de σ nous savons que pour tout $t \in [0, h]$, la courbure κ est définie par :

$$\kappa(t) = \frac{f''(t)}{(1 + |f'(t)|^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.2})$$

Ainsi, en choisissant $\text{size}(\mathcal{T})$ suffisamment petit et en utilisant que f' s'annule sur l'intervalle $[0, h]$, il existe $C > 0$ telle que :

$$\|f''\|_{L^\infty} \leq C \|\kappa\|_{L^\infty}$$

donc pour tout $t \in [0, h]$, $|f'(t)| \leq Ch \|\kappa\|_{L^\infty}$ et nous avons :

$$|b - a| \leq m_{\tilde{\sigma}} \leq |b - a| \sqrt{1 + C^2 h^2 \|\kappa\|_{L^\infty}^2} \leq C_\Gamma |b - a| \quad (\text{A.3})$$

où nous avons utilisé la relation $h - m_\sigma = \mathcal{O}(m_\sigma)$ (cf Proposition II.4).

De plus en notant $\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}$ le pseudo-triangle associé à $\tilde{\sigma}$ et (α, β) les coordonnées du sommet opposé à σ nous obtenons :

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}} &= \int_a^b |(\varphi(t) - A) \wedge \varphi'(t)| dt \\ &= \int_a^b |(t - \alpha, f(t) - \beta) \wedge (1, f'(t))| dt \\ &= \int_a^b |((t - \alpha)f'(t) - f(t) + \beta)| dt \\ &= \left| \int_a^b (tf'(t) - f(t)) dt - \alpha(f(b) - f(a)) + \beta(b - a) \right|, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que pour tout $t \in [a, b]$, $(\varphi(t) - A) \wedge \varphi'(t)$ ne change pas de signe.

Ainsi,

$$\frac{m_{\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}}}{|b - a|} = \left| \beta - \alpha \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + \frac{1}{b - a} \int_a^b (tf'(t) - f(t)) dt \right|.$$

De plus, en utilisant les formules de Taylor et le fait que $f(0) = 0$, il existe $\xi_1, \xi_2 \in [0, h]$ tels que :

$$tf'(t) - f(t) = \frac{t^2}{2} f''(\xi_1) \quad \text{et} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi_2).$$

Donc,

$$\frac{m_{\mathcal{K}_{\tilde{\sigma}}}}{|b - a|} = |\beta| + \mathcal{O}(|\alpha| h \|\kappa\|_{L^\infty}) + \mathcal{O}(h^2 \|\kappa\|_{L^\infty}).$$

Or, $|\alpha| \leq \text{diam}(\mathcal{K}) \leq C_1 h$ et $|\beta| \leq \text{diam}(\mathcal{K}) \leq C_1 h$ et donc l'inégalité (A.3) permet de conclure. ■

Opérateurs différentiels définis sur Γ

Rappelons les définitions des différents opérateurs différentiels définis sur la courbe Γ et utilisés dans ces travaux (le lecteur pourra se référer à [BF06, BF13] pour plus de détails).

Définition A.4

Pour toute fonction $v : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ régulière et tout paramétrage φ de Γ , nous pouvons définir :

- L'opérateur de Laplace-Beltrami :

$$\Delta_{\Gamma} v(x) = \frac{1}{|\varphi'(t)|} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{|\varphi'(t)|} (v \circ \varphi)'(t) \right) \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Gamma, t = \varphi^{-1}(x).$$

- Le gradient tangentiel :

$$\nabla_{\Gamma} v(x) = \frac{1}{|\varphi'(t)|^2} (v \circ \varphi)'(t) \varphi'(t) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in \Gamma, t = \varphi^{-1}(x). \quad (\text{A.4})$$

Rappelons que nous avons alors la formule d'intégration par parties sur Γ suivante :

$$- \int_{\Gamma} \Delta_{\Gamma} u_{\Gamma} v_{\Gamma} d\sigma(x) = \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} u_{\Gamma} \cdot \nabla_{\Gamma} v_{\Gamma} d\sigma(x), \quad \forall u_{\Gamma} \in H^2(\Gamma), v_{\Gamma} \in H^1(\Gamma). \quad (\text{A.5})$$

Remarque A.5

Si φ est un paramétrage normal de Γ , alors le vecteur unitaire tangent à Γ en x vérifie $\vec{\tau}(x) = \varphi'(t)$ et nous obtenons :

$$\nabla_{\Gamma} v(x) \cdot \vec{\tau}(x) = (v \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(x)).$$

Proposition A.6

Considérons une application $w_s : \Gamma_s = \psi(\Gamma \times \{s\}) \rightarrow \mathbb{R}$ et notons $\widetilde{w}_s : x_{\Gamma} \in \Gamma \mapsto w_s(x_{\Gamma} + s\vec{n}(x_{\Gamma}))$. Alors si $w_s \in H^1(\Gamma_s)$ nous avons :

$$\nabla_{\Gamma_s} w_s(x_s) = \frac{1}{(1 - s\kappa(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s)))} \nabla_{\Gamma} \widetilde{w}_s(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s)), \quad \forall x_s \in \Gamma_s.$$

Démonstration : Notons $\psi_s : t \in U \mapsto x_s = \varphi(t) + s\vec{n}(\varphi(t)) = \varphi(t) + s\vec{n}_{\varphi}(t) \in \Gamma_s$ (où nous rappelons que φ est un paramétrage normal de Γ) et appliquons la définition (A.4) du gradient tangentiel à Γ_s , w_s et ψ_s , nous obtenons :

$$\nabla_{\Gamma_s} w_s(x_s) = \frac{1}{g_s(\psi_s^{-1}(x_s))} (w_s \circ \psi_s)'(\psi_s^{-1}(x_s)) \psi_s'(\psi_s^{-1}(x_s)), \quad \forall x_s \in \Gamma_s;$$

avec $g_s(t) = |\psi_s'(t)|^2 = |\vec{\tau}_{\varphi}(t) + s\vec{n}_{\varphi}'(t)|^2$.

Or, si nous notons $\kappa(x)$ la courbure de la courbe Γ au point x , nous avons $\vec{n}'(x) = -\kappa(x)\vec{\tau}(x)$ ce qui implique $g_s(t) = (1 - s\kappa(\varphi(t)))^2$. Ainsi, en remarquant que si $x_s = \psi_s(t)$ alors $\varphi(t) = \mathbb{P}_{\Gamma}(x_s)$ nous avons :

$$\nabla_{\Gamma_s} w_s(x_s) = \frac{1}{(1 - s\kappa(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s)))^2} (w_s \circ \psi_s)'(\psi_s^{-1}(x_s)) \psi_s'(\psi_s^{-1}(x_s)), \quad \forall x_s \in \Gamma_s.$$

Notons également que $\psi_s'(t) = (1 - s\kappa(\varphi(t)))\vec{\tau}_{\varphi}(t) = (1 - s\kappa(\varphi(t)))\varphi'(t)$, alors en utilisant que $t = \psi_s^{-1}(x_s) = \varphi^{-1}(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s))$ nous obtenons :

$$\nabla_{\Gamma_s} w_s(x_s) = \frac{1}{(1 - s\kappa(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s)))} (\widetilde{w}_s \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s))) \varphi'(\varphi^{-1}(\mathbb{P}_{\Gamma}(x_s))).$$

Finalement, le fait que pour tout $x \in \Gamma$ nous ayons :

$$\nabla_{\Gamma} \widetilde{w}_s(x) = (\widetilde{w}_s \circ \varphi)'(\varphi^{-1}(x)) \varphi'(\varphi^{-1}(x)),$$

nous permet de conclure la preuve. ■

Considérons maintenant la fonction $w : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et notons $\tilde{w} : (x_\Gamma, s) \in \Gamma \times \mathbb{R} \mapsto w(x_\Gamma + s\vec{n}(x_\Gamma))$. Alors, pour tout $x \in \Omega^c$ tel que la projection $\mathbb{P}_\Gamma x$ est bien définie nous avons : (cf [BF06, BF13] pour plus détails):

$$\nabla w(x) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial s}(\mathbb{P}_\Gamma x, d(x, \Gamma))\vec{n}(\mathbb{P}_\Gamma x) + \nabla_{\Gamma d(x, \Gamma)} w(x). \quad (\text{A.6})$$

Différents résultats connus utilisés dans ce mémoire

Lemme A.7 (Gronwall discret)

Soit $(z^n)_n$ une suite de nombres positifs et $\alpha, \beta > 0$. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$z^{n+1} \leq \alpha + \beta \Delta t \sum_{k=0}^n z^k,$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous avons,

$$z^{n+1} \leq (\alpha + \beta \Delta t z^0) e^{n\beta \Delta t}.$$

Rappelons le lemme suivant issu de la théorie du degré topologique en dimension finie [Dei85].

Lemme A.8 (Degré topologique)

Soit W un espace vectoriel de dimension finie et g une fonction continue de W dans W . Supposons qu'il existe une fonction continue $h : W \times [0, 1] \rightarrow W$ satisfaisant :

- (i) $h(\cdot, 1) = g$ et $h(\cdot, 0)$ est affine;
- (ii) il existe $R > 0$ tel que pour tout $(\omega, \delta) \in W \times [0, 1]$, si $h(\omega, \delta) = 0$ et $|\omega|_W \leq R$ alors $|\omega|_W \neq R$;
- (iii) l'équation $h(\omega, 0) = 0$ possède une solution $\omega \in W$ telle que $|\omega|_W < R$.

Alors, il existe au moins une solution $\omega \in W$ telle que $g(\omega) = 0$ et $|\omega|_W < R$.

Définition A.9 (Famille de maillages quasi-uniforme de Ω)

Soit $\mathfrak{M}$ une famille de maillages de Ω (comme décrit dans la Section 1.2), nous notons $\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M})$ le nombre défini de la manière suivante :

$$\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left(\text{reg}(\mathfrak{M}), \sup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \frac{\text{size}(\mathfrak{M})^2}{m_{\mathcal{K}}} \right).$$

Nous dirons qu'une famille de maillages $(\mathfrak{M}^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ est quasi-uniforme si $\text{reg}_{\text{unif}}(\mathfrak{M}^{(i)})$ est borné.

Pour une famille de maillages quasi-uniforme $(\mathfrak{M}^{(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ et pour tout $q \geq 1$, il existe donc une constante uniforme $C_2 > 0$ (qui dépend de q) telle que :

$$\|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_2}{\text{size}(\mathfrak{M}^{(i)})^{2/q}} \|u_{\mathfrak{M}}\|_{L^q(\Omega)}, \quad \forall u_{\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}}.$$

Définition A.10 (Famille de maillages DDFV quasi-uniforme de Ω)

Soit $\mathcal{T}$ un maillage DDFV de Ω , alors le nombre $\text{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T})$ est défini par :

$$\text{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \left(\text{reg}(\mathcal{T}), \sup_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \frac{\text{size}(\mathcal{T})^2}{m_{\mathcal{K}}}, \sup_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \frac{\text{size}(\mathcal{T})^2}{m_{\mathcal{K}^*}} \right).$$

Nous dirons qu'une famille de maillages $(\mathcal{T}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ est quasi-uniforme si $\text{reg}_{\text{unif}}(\mathcal{T}^{(m)})$ est borné.

Pour une famille de maillages (DDFV) quasi-uniforme $(\mathcal{T}^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ et pour tout $q \geq 1$, il existe donc une constante uniforme $C_3 > 0$ (qui dépend de q) telle que :

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{C_3}{\text{size}(\mathcal{T}^{(m)})^{2/q}} \|u_{\mathcal{T}}\|_{0,q,\mathcal{T}}, \quad \forall u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}.$$

Théorème A.11 (Kolmogorov [EGH00, Théorème 3.9])

Soit ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^s$, $s \geq 1$, $1 \leq q < +\infty$ et $A \subset L^q(\omega)$. Alors, A est relativement compact dans $L^q(\omega)$ si et seulement s'il existe $\{p(u), u \in A\} \subset L^q(\mathbb{R}^s)$ tel que :

1. $p(u) = u$ p.p. sur ω , pour tout $u \in A$;
2. $\{p(u), u \in A\}$ est borné dans $L^q(\mathbb{R}^s)$;
3. $\lim_{\eta \rightarrow 0} \|p(u)(\cdot + \eta) - p(u)\|_{L^q(\mathbb{R}^s)} = 0$ uniformément en $u \in A$.

Théorème A.12 (Estimation de translations en espace [EGH00, Lemme 3.3])

Considérons un ouvert borné et polygonal Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ou 3) et un maillage admissible $\mathcal{T}$ de Ω . Soit $u_{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, notons $\widetilde{u}_{\mathcal{T}}$ le prolongement par 0 de $u_{\mathcal{T}}$ hors de Ω , alors il existe $C_4 > 0$, dépendant seulement de Ω , tel que :

$$\|\widetilde{u}_{\mathcal{T}}(\cdot + \eta) - \widetilde{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2)}^2 \leq \|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}_D} |\eta| (|\eta| + C_4 \text{size}(\mathcal{T})), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^d,$$

où nous avons noté,

$$\|u_{\mathcal{T}}\|_{1,\mathcal{T}_D}^2 = \sum_{\sigma=\kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}} \frac{m_\sigma}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} |u_\kappa - u_{\mathcal{L}}|^2 + \sum_{\sigma=\mathcal{L} \in \mathcal{E}_{ext}} \frac{m_\sigma}{d_{\kappa,\mathcal{L}}} |u_\kappa|^2.$$

Calcul des second membres pour les estimations d'erreur réalisées pour le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel

Rappelons que dans la Section II.4 nous réalisons des estimations d'erreur pour le problème de Laplace avec des conditions aux limites de Ventcel suivant : Trouver $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega; \\ -\Delta_\Gamma u_{|\Gamma} + u_{|\Gamma} + \partial_n u = g & \text{sur } \Gamma; \end{cases}$$

Nous considérons alors deux domaines différents et deux solutions exactes différentes.

Cas où Ω est le disque unité

Tout d'abord, nous considérons le solution exacte suivante :

$$u(x, y) = 1 + \frac{1}{2} (\tanh(px) + \tanh(qy)), \quad \text{avec } a, b > 0$$

sur le disque unité.

Le second membre dans Ω se calcule facilement, nous avons :

$$f(x, y) = -\Delta u(x, y) = p^2 \tanh(px)(1 - \tanh^2(px)) + q^2 \tanh(qy)(1 - \tanh^2(qy)), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

En ce qui concerne le second membre sur le bord Γ , il faut calculer le terme de dérivée normale ainsi que le terme de Laplace-Beltrami. En notant R le rayon du cercle Γ (bien qu'ici nous ayons $R = 1$), pour tout $(x, y) \in \Gamma$ nous avons :

$$\nabla u(x, y) \cdot \vec{n}(x, y) = \frac{p}{2R} x(1 - \tanh^2(px)) + \frac{q}{2R} y(1 - \tanh^2(qy))$$

et si nous utilisons la paramétrisation en coordonnées polaire du cercle Γ , nous avons :

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma} u_{|\Gamma}(x, y) &= \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{|\Gamma}}{\partial \theta^2}(x, y) \\ &= \frac{1}{R^2} \left(y^2 \frac{\partial^2 u_{|\Gamma}}{\partial x^2}(x, y) + x^2 \frac{\partial^2 u_{|\Gamma}}{\partial y^2}(x, y) - 2xy \frac{\partial^2 u_{|\Gamma}}{\partial x \partial y}(x, y) - x \frac{\partial u_{|\Gamma}}{\partial x}(x, y) - y \frac{\partial u_{|\Gamma}}{\partial y}(x, y) \right) \\ &= \frac{1}{R^2} \left(p^2 y^2 \tanh(px) (\tanh^2(px) - 1) + q^2 x^2 \tanh(qy) (\tanh^2(qy) - 1) \right. \\ &\quad \left. - \frac{p}{2} x (1 - \tanh^2(px)) - \frac{q}{2} y (1 - \tanh^2(qy)) \right).\end{aligned}$$

Cas où Ω est une ellipse

Dans un second temps, nous choisissons comme domaine Ω l'ellipse de demi-grand axe $a = 0.5$ et de demi-petit axe $b = 0.3$ et nous considérons la solution exacte polynomiale suivante :

$$u(x, y) = \frac{4}{ab} xy \left(\frac{2}{a^2} x^2 - 1 \right).$$

Nous obtenons alors facilement le second membre associé à l'équation dans Ω :

$$f(x, y) = -\Delta u(x, y) = \frac{48}{a^3 b} xy.$$

Il reste maintenant à calculer le second membre correspondant à l'équation sur Γ . Remarquons que si nous utilisons la paramétrisation polaire $x = a \cos \theta$, $y = b \sin \theta$ de l'ellipse, pour tout $(x, y) \in \Gamma$ nous avons :

$$u_{|\Gamma}(\theta) = 4 \cos \theta \sin \theta (2 \cos^2 \theta - 1) = \sin(4\theta).$$

Notons que c'est d'ailleurs comme ceci que cette solution a été construite : nous avons choisi $u_{|\Gamma}(\theta) = \sin(4\theta)$ puis à partir de là nous avons construit u dans Ω . Ainsi, en notant $s(\theta)$ l'abscisse curviligne le terme de Laplace-Beltrami se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\Delta_{\Gamma} u_{|\Gamma}(x, y) &= \frac{1}{|s'(\theta)|^2} u''_{|\Gamma}(\theta) + \left(\frac{1}{|s'(\theta)|} \right)' \frac{1}{|s'(\theta)|} u'_{|\Gamma}(\theta) \\ &= -\frac{16 \sin(4\theta)}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} - \frac{4(a^2 - b^2) \cos \theta \sin \theta}{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)^2} \cos(4\theta).\end{aligned}$$

Références

- [Abe09] H. Abels, On a diffuse interface model for two-phase flows of viscous, incompressible fluids with matched densities, Arch. Ration. Mech. Anal. **194** (2009), no. 2, 463–506. MR 2563636 (2010k:35361)
- [ABF84] D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin, A stable finite element for the Stokes equations, Calcolo **21** (1984), no. 4, 337–344 (1985). MR 799997 (86m:65136)
- [ABH07] B. Andreianov, F. Boyer, and F. Hubert, Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions-type elliptic problems on general 2D meshes, Numer. Methods Partial Differential Equations **23** (2007), no. 1, 145–195. MR 2275464 (2008c:65283)
- [ABHK12] B. Andreianov, M. Bendahmane, F. Hubert, and S. Krell, On 3D DDFV discretization of gradient and divergence operators. I. Meshing, operators and discrete duality., IMA J. N. A. **32** (2012), no. 4, 1574–1603.
- [AF08] H. Abels and E. Feireisl, On a diffuse interface model for a two-phase flow of compressible viscous fluids, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), no. 2, 659–698. MR 2414331 (2009g:76125)
- [AGG12] H. Abels, H. Garcke, and G. Grün, Thermodynamically consistent, frame indifferent diffuse interface models for incompressible two-phase flows with different densities, Math. Models Methods Appl. Sci. **22** (2012), no. 3, 1150013, 40. MR 2890451
- [BB99] J.-W. Barrett and J.-F. Blowey, Finite element approximation of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility, Math. Comp. **68** (1999), no. 226, 487–517. MR 1609678 (99i:65103)
- [BBF08] D. Boffi, F. Brezzi, and M. Fortin, Finite elements for the stokes problem, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1939, Springer-Verlag, Berlin, 2008, Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, June 26–July 1, 2006, Edited by Boffi and Lucia Gastaldi.
- [BBN14] P. Bousquet, F. Boyer, and F. Nabet, On a functional inequality arising in the analysis of finite volume methods, en préparation, 2014.
- [BCCHF] M. Bessemoulin-Chatard, C. Chainais-Hillairet, and F. Filbet, On discrete functional inequalities for some finite volume schemes, à paraître, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00672591>.
- [BdVGLM09] L. Beirão da Veiga, V. Gyrya, K. Lipnikov, and G. Manzini, Mimetic finite difference method for the Stokes problem on polygonal meshes, J. Comput. Phys. **228** (2009), no. 19, 7215–7232. MR MR2568590
- [BdVL10] L. Beirão da Veiga and K. Lipnikov, A mimetic discretization of the Stokes problem with selected edge bubbles, SIAM J Sci. Comp. **32** (2010), no. 2, 875–893.
- [BdVLM10] L. Beirão da Veiga, K. Lipnikov, and G. Manzini, Error analysis for a mimetic discretization of the steady Stokes problem on polyhedral meshes, SIAM J. Numer. Anal. **48** (2010), no. 4, 1419–1443.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin, Mixed and hybrid finite element methods, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1991. MR 1115205 (92d:65187)

- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie, Éléments d'analyse pour l'étude de quelques modèles d'écoulements de fluides visqueux incompressibles, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR 2248409 (2009f:76040)
- [BF13] ———, Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models, Applied Mathematical Sciences, vol. 183, Springer, New York, 2013. MR 2986590
- [BKN14a] F. Boyer, S. Krell, and F. Nabet, Inf-sup stability of the discrete duality finite volume method for the 2D stokes problem, à paraître, 2014.
- [BKN14b] ———, Stabilité inf-sup du schéma DDFV pour le problème de Stokes 2D, Actes du colloque EDP-Normandie, Caen 2013, 2014, pp. 274–279.
- [BLM⁺10] F. Boyer, C. Lapuerta, S. Minjeaud, B. Piar, and M. Quintard, Cahn-Hilliard/Navier-Stokes model for the simulation of three-phase flows, Transp. Porous Media **82** (2010), no. 3, 463–483. MR 2646853
- [BN14] F. Boyer and F. Nabet, A DDFV method for a Cahn-Hilliard-Stokes phase field model, en préparation, 2014.
- [Boy02] F. Boyer, A theoretical and numerical model for the study of incompressible mixture flows., Comput. Fluids **31** (2002), no. 1, 41–68 (English).
- [CCK00] S.-M. Choo, S.-K. Chung, and K.-I. Kim, Conservative nonlinear difference scheme for the Cahn-Hilliard equation—ii, Computers and Mathematics with Applications **39** (2000), no. 1–2, 229 – 243.
- [CFP06] R. Chill, E. Fařangová, and J. Prüss, Convergence to steady state of solutions of the Cahn-Hilliard and Caginalp equations with dynamic boundary conditions, Math. Nachr. **279** (2006), no. 13-14, 1448–1462. MR 2269249 (2007j:35185)
- [CH58] J.-W. Cahn and J.-E. Hilliard, Free energy of a nonuniform system. I. interfacial free energy, The Journal of Chemical Physics **28** (1958), no. 2, 258–267.
- [CH11] Y. Coudière and F. Hubert, A 3D discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations, SIAM Journal on Scientific Computing **33** (2011), no. 4, 1739–1764.
- [CKSS02] B. Cockburn, G. Kanschat, D. Schötzau, and C. Schwab, Local discontinuous Galerkin methods for the Stokes system, SIAM J. Numer. Anal. **40** (2002), no. 1, 319–343. MR 1921922 (2003g:65141)
- [CM95] L.-A. Caffarelli and N.-E. Muler, An L^∞ bound for solutions of the Cahn-Hilliard equation, Arch. Rational Mech. Anal. **133** (1995), no. 2, 129–144. MR 1367359 (96k:35076)
- [CMZ11] L. Cherfils, A. Miranville, and S. Zelik, The Cahn-Hilliard equation with logarithmic potentials, Milan J. Math. **79** (2011), no. 2, 561–596. MR 2862028 (2012k:35242)
- [CPP10] L. Cherfils, M. Petcu, and M. Pierre, A numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Discrete Contin. Dyn. Syst. **27** (2010), no. 4, 1511–1533. MR 2629535 (2011f:65194)
- [CPRT09] Y. Coudière, C. Pierre, O. Rousseau, and R. Turpault, A 2D/3D discrete duality finite volume scheme. Application to ECG simulation, Int. J. Finite Vol. **6** (2009), no. 1, 24.
- [CQA11] A. Carlson, M. Do Quang, and G. Amberg, Dissipation in rapid dynamic wetting, J. Fluid Mech. **682** (2011), 213–240.
- [CR73] M. Crouzeix and P.-A. Raviart, Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I, Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge **7** (1973), no. R-3, 33–75. MR 0343661 (49 #8401)
- [DE09] J. Droniou and R. Eymard, Study of the mixed finite volume method for Stokes and Navier-Stokes equations, Numerical Methods for Partial Differential Equations **25** (2009), no. 1, 137–171.
- [Dei85] K. Deimling, Nonlinear functional analysis, Springer-Verlag, Berlin, 1985. MR 787404 (86j:47001)
- [Del07] S. Delcourte, Développement de méthodes de volumes finis pour la mécanique des fluides, Ph.D. thesis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00200833/fr/>, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 2007.

- [Dlo94] T. Dlotko, Global attractor for the Cahn-Hilliard equation in {H2} and {H3}, Journal of Differential Equations **113** (1994), no. 2, 381 – 393.
- [DM90] B. Dacorogna and J. Moser, On a partial differential equation involving the Jacobian determinant, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7** (1990), no. 1, 1–26. MR 1046081 (91i:58148)
- [DN91] Q. Du and R.-A. Nicolaides, Numerical analysis of a continuum model of phase transition, SIAM J. Numer. Anal. **28** (1991), no. 5, 1310–1322. MR 1119272 (92h:65166)
- [DO05] K. Domelevo and P. Omnes, A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39** (2005), no. 6, 1203–1249.
- [Don12] S. Dong, On imposing dynamic contact-angle boundary conditions for wall-bounded liquid-gas flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **247/248** (2012), 179–200. MR 2975562
- [DPE12] D. Di Pietro and A. Ern, Mathematical aspects of discontinuous Galerkin methods, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 69, Springer, Heidelberg, 2012. MR 2882148
- [Dro02] J. Droniou, A density result in Sobolev spaces, J. Math. Pures Appl. (9) **81** (2002), no. 7, 697–714. MR 1968338 (2005a:46065)
- [EF87] C.-M. Elliott and D.-A. French, Numerical studies of the Cahn-Hilliard equation for phase separation, IMA J. Appl. Math. **38** (1987), no. 2, 97–128. MR 983721 (90f:80004)
- [EF89] ———, A nonconforming finite-element method for the two-dimensional Cahn-Hilliard equation, SIAM J. Numer. Anal. **26** (1989), no. 4, 884–903. MR 1005515 (90k:65163)
- [EFM89] C.-M. Elliott, D.-A. French, and F.-A. Milner, A second order splitting method for the Cahn-Hilliard equation, Numer. Math. **54** (1989), no. 5, 575–590. MR 978609 (90k:65173)
- [EG02] R. Eymard and T. Gallouët, H-convergence and numerical schemes for elliptic problems, SIAM J. OF NUM. ANAL. (2002), 539–562.
- [EG04] A. Ern and J.-L. Guermond, Theory and practice of finite elements, Applied Mathematical Sciences, vol. 159, Springer-Verlag, New York, 2004. MR 2050138 (2005d:65002)
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, Finite volume methods, Handbook of numerical analysis, Vol. VII (Ph Ciarlet and J.L. Lions, eds.), Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 715–1022. MR MR1804748 (2002e:65138)
- [EHL06] R. Eymard, R. Herbin, and J.-C. Latché, On a stabilized colocated finite volume scheme for the Stokes problem, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **40** (2006), no. 3, 501–527. MR MR2245319 (2007d:65100)
- [EL92] C.-M. Elliott and S. Larsson, Error estimates with smooth and nonsmooth data for a finite element method for the Cahn-Hilliard equation, Math. Comp. **58** (1992), no. 198, 603–630, S33–S36. MR 1122067 (92f:65116)
- [Ell89] C.-M. Elliott, The Cahn-Hilliard model for the kinetics of phase separation, Mathematical models for phase change problems (Óbidos, 1988), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 88, Birkhäuser, Basel, 1989, pp. 35–73. MR 1038064 (91c:80014)
- [Eyr98] D.-J. Eyre, Unconditionally gradient stable time marching the Cahn-Hilliard equation, Symposia BB – Computational and Mathematical Models of Microstructural Evolution, MRS Proceedings, vol. 529, 1 1998.
- [EZ86] C.-M. Elliott and S. Zheng, On the Cahn-Hilliard equation, Arch. Rational Mech. Anal. **96** (1986), no. 4, 339–357. MR 855754 (87k:80007)
- [FMD97] H.P. Fischer, P. Maass, and W. Dieterich, Novel surface modes in spinodal decomposition, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 893–896.
- [FMD98] ———, Diverging time and length scales of spinodal decomposition modes in thin films, EPL (Europhysics Letters) **42** (1998), no. 1, 49–54.

- [For77] M. Fortin, An analysis of the convergence of mixed finite element methods, RAIRO Anal. Numér. **11** (1977), no. 4, 341–354, iii. MR 0464543 (57 #4473)
- [FP04] X. Feng and A. Prohl, Error analysis of a mixed finite element method for the Cahn-Hilliard equation, Numer. Math. **99** (2004), no. 1, 47–84. MR 2101784 (2005m:65191)
- [FP05] ———, Numerical analysis of the Cahn-Hilliard equation and approximation of the Hele-Shaw problem, Interfaces Free Bound. **7** (2005), no. 1, 1–28. MR 2126141 (2005j:35098)
- [FS88] P. A. Forsyth, Jr. and P. H. Sammon, Quadratic convergence for cell-centered grids, Appl. Numer. Math. **4** (1988), no. 5, 377–394. MR 948505 (89e:65106)
- [Fur01a] D. Furihata, A stable and conservative finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation, Numer. Math. **87** (2001), no. 4, 675–699. MR 1815731 (2001m:65106)
- [Fur01b] ———, A stable and conservative finite difference scheme for the Cahn-Hilliard equation, Numerische Mathematik **87** (2001), no. 4, 675–699 (English).
- [GHLL] T. Gallouët, R. Herbin, A. Larcher, and J.-C. Latché, Analysis of a fractional-step scheme for the p1 radiative diffusion model, à paraître, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00477086>.
- [GK14] T. Goudon and S. Krell, A DDFV Scheme for Incompressible Navier-Stokes equations with variable density, Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications VII (Berlin, Allemagne) (J. Fuhrmann, M. Ohlberger, and C. Rohde, eds.), Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, Vol. 77 and 78, Springer, 2014.
- [GMS09] G. Gilardi, A. Miranville, and G. Schimperna, On the Cahn-Hilliard equation with irregular potentials and dynamic boundary conditions, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), no. 3, 881–912. MR 2476663 (2010b:35201)
- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart, Finite element methods for Navier-Stokes equations, Springer Series in Computational Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Theory and algorithms. MR MR851383 (88b:65129)
- [GRW05] V. Girault, B. Rivière, and M. Wheeler, A discontinuous Galerkin method with nonoverlapping domain decomposition for the Stokes and Navier-Stokes problems, Math. Comp. **74** (2005), no. 249, 53–84 (electronic). MR 2085402 (2005f:65149)
- [Her07] F. Hermeline, Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** (2007), no. 21-24, 2497–2526. MR MR2319051 (2008d:65123)
- [HH14] L. Halpern and F. Hubert, A finite volume Ventcell-Schwarz algorithm for advection-diffusion equations, SIAM J. Numer. Anal. **52** (2014), no. 3, 1269–1291. MR 3213798
- [HW65] F. Harlow and J. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, The physics of fluids **8** (1965), no. 12, 2182–2189.
- [Jac99] D. Jacqmin, Calculation of two-phase Navier-Stokes flows using phase-field modeling, J. Comput. Phys. **155** (1999), no. 1, 96–127. MR 1716497 (2000g:76088)
- [Jac00] ———, Contact-line dynamics of a diffuse fluid interface, J. Fluid Mech. **402** (2000), 57–88. MR 1737419
- [Jap98] C. Japhet, Méthode de décomposition de domaine et conditions aux limites artificielles en mécanique des fluides : méthode optimisée d'ordre 2 (oo2), Ph.D. thesis, Université Paris 13, France, 1998, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00558701/fr/>.
- [KEM⁺01] R. Kenzler, F. Eurich, P. Maass, B. Rinn, J. Schropp, E. Bohl, and W. Dieterich, Phase separation in confined geometries: Solving the Cahn-Hilliard equation with generic boundary conditions, j-COMP-PHYS-COMM **133** (2001), 139–157.
- [KM12] S. Krell and G. Manzini, The Discrete Duality Finite Volume method for the Stokes equation on 3D polyhedral meshes, SIAM Journal on Numerical Analysis **50** (2012), no. 2, 808–837.

- [Kre11] S. Krell, Stabilized DDFV schemes for Stokes problem with variable viscosity on general 2D meshes, Numer. Methods Partial Differential Equations **27** (2011), no. 6, 1666–1706. MR 2838314
- [KSW08] D. Kay, V. Styles, and R. Welford, Finite element approximation of a Cahn-Hilliard-Navier-Stokes system, Interfaces Free Bound. **10** (2008), no. 1, 15–43. MR 2383535 (2008m:35279)
- [Lap06] C. Lapuerta, Echanges de masse et de chaleur entre deux phases liquides stratifiées dans un écoulement à bulles, Ph.D. thesis, Université de Provence, Marseille, France, 2006, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00132564>.
- [LS03] C. Liu and J. Shen, A phase field model for the mixture of two incompressible fluids and its approximation by a Fourier-spectral method, Phys. D **179** (2003), no. 3-4, 211–228. MR 1984386 (2004j:35233)
- [Mal81] D. S. Malkus, Eigenproblems associated with the discrete LBB condition for incompressible finite elements, Internat. J. Engrg. Sci. **19** (1981), no. 10, 1299–1310. MR 660563 (83k:73053)
- [Min10] S. Minjeaud, Raffinement local adaptatif et méthodes multiniveaux pour la simulation d'écoulements multiphasiques, Ph.D. thesis, Université de Provence, Marseille, France, 2010, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00535892/fr/>.
- [Min13] ———, An unconditionally stable uncoupled scheme for a triphasic Cahn-Hilliard/Navier-Stokes model, Numer. Methods Partial Differential Equations **29** (2013), no. 2, 584–618. MR 3022900
- [MW09] T. Ma and S. Wang, Cahn-Hilliard equations and phase transition dynamics for binary systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **11** (2009), no. 3, 741–784. MR 2529323 (2010f:82028)
- [MZ05] A. Miranville and S. Zelik, Exponential attractors for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Math. Methods Appl. Sci. **28** (2005), no. 6, 709–735. MR 2125817 (2005k:37183)
- [Nab14a] F. Nabet, Convergence of a finite-volume scheme for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, en préparation, 2014.
- [Nab14b] ———, Finite-Volume analysis for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Finite volumes for complex applications. VII. Methods and Theoretical aspects, Springer Proc. Math., vol. 77, 2014, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00974585>, pp. 401–409.
- [Nab14c] ———, Finite-Volume method for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, ESAIM: PROCEEDINGS, vol. 45, 2014, à paraître, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00872690>, pp. 503–512.
- [NC08] A. Novick-Cohen, The Cahn-Hilliard equation, Handbook of differential equations: evolutionary equations. Vol. IV, Handb. Differ. Equ., Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2008, pp. 201–228. MR 2508166 (2010b:35408)
- [Nic92] R. A. Nicolaides, Analysis and convergence of the MAC scheme. I. The linear problem, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), no. 6, 1579–1591. MR MR1191137 (93j:65143)
- [PRZ06] J. Prüss, R. Racke, and S. Zheng, Maximal regularity and asymptotic behavior of solutions for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **185** (2006), no. 4, 627–648. MR 2230586 (2008f:35195)
- [QWS06] T. Qian, X-P Wang, and P. Sheng, A variational approach to moving contact line hydrodynamics, J. Fluid Mech. **564** (2006), 333–360. MR 2261865 (2008a:76041)
- [RH99] P. Rybka and K.-H. Hoffmann, Convergence of solutions to Cahn-Hilliard equation, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 5-6, 1055–1077. MR 1680877 (2001a:35028)
- [RZ03] R. Racke and S. Zheng, The Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, Adv. Differential Equations **8** (2003), no. 1, 83–110. MR 1946559 (2003i:35138)
- [Saa03] Y. Saad, Iterative methods for sparse linear systems, second ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003. MR MR1990645 (2004h:65002)

- [SCM08] R.-H. Stogner, G.-F. Carey, and B.-T. Murray, Approximation of Cahn-Hilliard diffuse interface models using parallel adaptive mesh refinement and coarsening with C^1 elements, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.* **76** (2008), no. 5, 636–661. MR 2464502 (2009m:74095)
- [SY10] J. Shen and X. Yang, Numerical approximations of Allen-Cahn and Cahn-Hilliard equations, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **28** (2010), no. 4, 1669–1691. MR 2679727 (2011i:65166)
- [Tem97] R. Temam, Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics, second ed., *Applied Mathematical Sciences*, vol. 68, Springer-Verlag, New York, 1997. MR 1441312 (98b:58056)
- [Ver84] R. Verfürth, Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations, *RAIRO Anal. Numér.* **18** (1984), no. 2, 175–182. MR 743884 (85i:65156)
- [WKG06] G.-N. Wells, E. Kuhl, and K. Garikipati, A discontinuous Galerkin method for the Cahn-Hilliard equation, *J. Comput. Phys.* **218** (2006), no. 2, 860–877. MR 2269388 (2007g:80018)
- [WQS08] X-P Wang, T. Qian, and P. Sheng, Moving contact line on chemically patterned surfaces, *J. Fluid Mech.* **605** (2008), 59–78. MR 2423323 (2009e:76212)
- [WZ04] H. Wu and S. Zheng, Convergence to equilibrium for the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions, *J. Differential Equations* **204** (2004), no. 2, 511–531. MR 2085545 (2005i:35158)
- [YF11] P. Yue and J.-J. Feng, Wall energy relaxation in the Cahn-Hilliard model for moving contact lines, *Physics of Fluids (1994-present)* **23** (2011), no. 1, –.
- [YZF10] P. Yue, C. Zhou, and J.-J. Feng, Sharp-interface limit of the Cahn-Hilliard model for moving contact lines, *J. Fluid Mech.* **645** (2010), 279–294. MR 2596227 (2010m:76161)
- [Zhe86] S. Zheng, Asymptotic behavior of solution to the Cahn-Hilliard equation, *Appl. Anal.* **23** (1986), no. 3, 165–184. MR 870486 (88b:35036)

Schémas volumes finis pour des problèmes multiphasiques

Résumé : Ce manuscrit de thèse porte sur l'analyse numérique de schémas volumes finis pour la discrétisation de deux systèmes particuliers d'équations. Dans un premier temps nous étudions l'équation de Cahn-Hilliard associée à des conditions aux limites dynamiques dont l'une des principales difficultés est que cette condition aux limites est une équation parabolique, non linéaire, posée sur le bord et couplée avec l'intérieur du domaine. Nous proposons une discrétisation de type volumes finis en espace qui permet de coupler naturellement l'équation dans le domaine et celle sur sa frontière par un terme de flux et qui s'adapte facilement à la géométrie courbe du domaine. Nous montrons l'existence et la convergence des solutions discrètes vers une solution faible du système. Dans un second temps nous étudions la stabilité Inf-Sup du problème de Stokes pour un schéma volumes finis de type dualité discrète (DDFV). Nous donnons une analyse complète de la stabilité Inf-Sup inconditionnelle dans certains cas et de la stabilité de codimension 1 dans le cas de maillages cartésiens. Nous mettons également en place une méthode numérique permettant de calculer la constante Inf-Sup associée à ce schéma pour un maillage donné. On peut ainsi observer le comportement stable ou instable selon les cas en fonction de la géométrie des maillages. Dans une dernière partie nous proposons un schéma DDFV pour un modèle couplé Cahn-Hilliard/Stokes ce qui nécessite l'introduction de nouveaux opérateurs discrets. Nous démontrons la décroissance de l'énergie au niveau discret ainsi que l'existence d'une solution au problème discret. L'ensemble de ces travaux est validé par de nombreux résultats numériques.

Mots-clés : Volumes finis, schéma DDFV, modèle de Cahn-Hilliard/Stokes, conditions aux limites dynamiques, stabilité Inf-Sup, analyse de convergence, schémas numériques.

Abstract : This manuscript is devoted to the numerical analysis of finite-volume schemes for the discretization of two particular equations. First, we study the Cahn-Hilliard equation with dynamic boundary conditions whose one of the main difficulties is that this boundary condition is a non-linear parabolic equation on the boundary coupled with the interior of the domain. We propose a spatial finite-volume discretization which is well adapted to the coupling of the dynamics in the domain and those on the boundary by the flux term. Moreover this kind of scheme accounts naturally for the non-flat geometry of the boundary. We prove the existence and the convergence of the discrete solutions towards a weak solution of the system. Second, we study the Inf-Sup stability of the discrete duality finite volume (DDFV) scheme for the Stokes problem. We give a complete analysis of the unconditional Inf-Sup stability in some cases and of codimension 1 Inf-Sup stability for Cartesian meshes. We also implement a numerical method which allows us to compute the Inf-Sup constant associated with this scheme for a given mesh. Thus, we can observe the stable or unstable behaviour that can occur depending on the geometry of the meshes. In a last part we propose a DDFV scheme for a Cahn-Hilliard/Stokes phase field model that required the introduction of new discrete operators. We prove the dissipation of the energy in the discrete case and the existence of a solution to the discrete problem. All these research results are validated by extensive numerical results.

Keywords : Finite-volume, DDFV scheme, Cahn-Hilliard/Stokes model, dynamic boundary conditions, Inf-Sup stability, convergence analysis, numerical schemes.

AMS Classification : 35K55, 65M12, 65M08, 76D07, 76M12