



**HAL**  
open science

# Modélisation des jets relativistes et de l'accélération du rayonnement cosmique

Noemie Globus

► **To cite this version:**

Noemie Globus. Modélisation des jets relativistes et de l'accélération du rayonnement cosmique . Planète et Univers [physics]. Observatoire de Paris, 2011. Français. NNT : . tel-01116571

**HAL Id: tel-01116571**

**<https://theses.hal.science/tel-01116571v1>**

Submitted on 13 Feb 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

présentée  
pour obtenir

Le diplôme de Doctorat de l'Observatoire de Paris  
Spécialité : Astrophysique

par

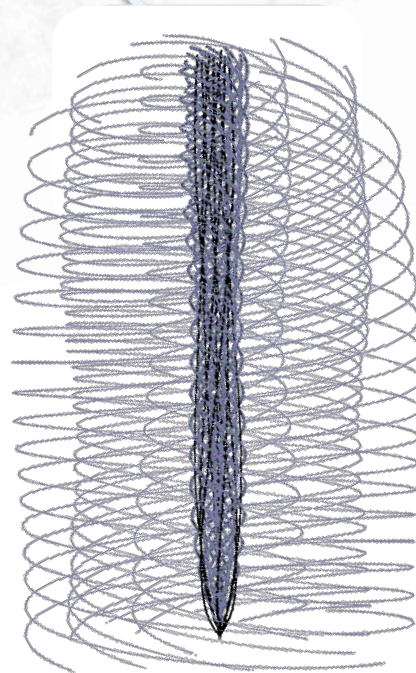
Noémie Globus

## Modélisation des jets relativistes et de l'accélération du rayonnement cosmique

Préparée au sein du Laboratoire Univers et Théories (CNRS-UMR 8102)  
Soutenue le 9 décembre 2011

Commission d'examen

Daniel Rouan	Président
Christian Fendt	Rapporteur
Jean Heyvaerts	Rapporteur
Denis Allard	Examineur
Alexandre Marcowith	Examineur
Kanaris Tsinganos	Examineur
Christophe Sauty	Directeur de thèse
Véronique Cayatte	Co-directeur de thèse





*A la mémoire de mon père.*





## Acronymes utilisés

AGN	:	Active Galactic Nuclei
AU	:	Astronomical Unit
BR	:	Barionic Resonance
CMB	:	Cosmic Microwave Background
CTTS	:	Classical T Tauri Star
DSA	:	Diffusive Shock Acceleration
EMR	:	Efficient Magnetic Rotator
FR I	:	Fanaroff Riley class I
FR II	:	Fanaroff Riley class II
GDR	:	Giant Dipolar Resonance
GRB	:	Gamma Ray Burst
GRMHD	:	General Relativistic Magneto Hydro Dynamics
IMR	:	Inefficient Magnetic Rotator
LINER	:	Low Ionization Nuclear Emission line Region galaxies
MHD	:	Magneto Hydro Dynamics
QD	:	Quasi Deuterium (resonance)
RIAF	:	Radiative Inefficient Accretion Flow
SED	:	Spectral Energy Distribution
SMBH	:	Super Massive Black Hole
WTTS	:	Weak T Tauri Star
XRB	:	X Ray Binaries
YSO	:	Young Stellar Object
ZAMO	:	Zero Angular Momentum Observer



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Magnétohydrodynamique en géométrie de Kerr</b>	<b>11</b>
2.1	Description de l'espace-temps près d'un trou noir en rotation . . . . .	11
2.2	Système de coordonnées et repères orthonormés . . . . .	13
2.3	Description de la magnétosphère . . . . .	15
2.4	Extraction de l'énergie d'un trou noir en rotation . . . . .	21
2.5	Equations de la magnétohydrodynamique . . . . .	23
2.6	Intégrales premières en régime axisymétrique stationnaire . . . . .	25
2.7	Des jets à l'horizon ? . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Modèle autosimilaire méridien en métrique de Kerr</b>	<b>29</b>
3.1	Modèles semi-analytiques et modèles numériques . . . . .	29
3.2	Construction du modèle . . . . .	35
3.3	Hypothèses sur la géométrie de l'écoulement . . . . .	36
3.4	Hypothèses sur les grandeurs physiques . . . . .	39
3.5	Equations du modèle . . . . .	43
3.6	La résolution des équations GRMHD . . . . .	43
3.7	Correspondances avec les modèles précédents . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Solutions de jets d'étoiles jeunes</b>	<b>47</b>
4.1	Contexte général . . . . .	47
4.2	Des observations à la modélisation . . . . .	52
4.3	Solution non oscillante . . . . .	54
4.4	Une solution présentant une recollimation . . . . .	59
4.5	Discussion . . . . .	62
4.6	Perspectives . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Solutions de jets relativistes</b>	<b>65</b>
5.1	Présentation des jets relativistes . . . . .	65
5.2	Etude de la collimation . . . . .	71
5.3	Modélisation du jet relativistes de M87 . . . . .	80
<b>6</b>	<b>Les jets relativistes, sources du rayonnement cosmique de ultra haute énergie ?</b>	<b>87</b>
6.1	Brève présentation du rayonnement cosmique . . . . .	87
6.2	Quelles sources pour le rayonnement cosmique de ultra haute énergie ? . . . . .	91
6.3	L'émission gamma comme signature du choc dans un jet relativiste . . . . .	94

<b>7 Le cycle infernal des rayons cosmiques</b> <sup>1</sup>	<b>105</b>
7.1 Les ondes magnétohydrodynamiques comme centres diffuseurs . . . . .	106
7.2 Principe de l'accélération de Fermi relativiste . . . . .	108
7.3 Les processus de perte d'énergie sur le fond de rayonnement gamma . . . . .	112
7.4 Résultats préliminaires obtenus . . . . .	118
7.5 Perspectives . . . . .	121
<b>8 Conclusion</b>	<b>123</b>
<b>A Passage des équations tensorielles aux équations vectorielles en formalisme 3+1</b>	<b>125</b>
A.1 Les équations tensorielles . . . . .	125
A.2 Champ de vitesse . . . . .	125
A.3 Champ électromagnétique . . . . .	127
A.4 Les opérateurs . . . . .	128
A.5 Ecriture vectorielle des équations GRMHD . . . . .	130
<b>B Equations différentielles ordinaires</b>	<b>133</b>
B.1 Conditions à la surface d'Alfvén . . . . .	134
B.2 Equations en Schwarzschild . . . . .	135
<b>C Les forces agissant sur le plasma</b>	<b>137</b>
C.1 Force d'advection . . . . .	137
C.2 Force de pression . . . . .	137
C.3 Force électrique . . . . .	137
C.4 Tension magnétique . . . . .	138
C.5 Pression magnétique . . . . .	138
C.6 Force de gravité . . . . .	138
C.7 Force de Coriolis . . . . .	139
<b>D Processus de rayonnement</b>	<b>141</b>
D.1 Radiation synchrotron et cyclotron . . . . .	141
D.2 Diffusion Compton, effet Compton inverse . . . . .	147
<b>E Liste de publications</b>	<b>149</b>
E.1 Publications avec comité de lecture . . . . .	149
E.2 Communications . . . . .	149
Références . . . . .	150

---

1. Etude des différents processus de gain et de pertes d'énergie subis par un rayon cosmique au cours de sa propagation dans une onde de choc d'un jet relativiste. Merci à Denis pour ce titre plus accrocheur.

# Introduction

*Something unknown is doing we don't know what.*

Sir A. Eddington

On observe dans l'Univers des écoulements de plasma qui se propagent sur de très grandes distances. Quand ils sont relativistes, ils sont associés à des objets astrophysiques extrêmement denses. Malheureusement, le phare n'éclaire pas son pied, et un problème crucial de l'astrophysique des hautes énergies est de comprendre le phénomène d'accrétion et d'éjection autour de ces objets compacts, processus complexe mêlant à la fois gravitation et magnétisme.

Les interactions entre un plasma et un champ magnétique peuvent être décrites de plusieurs façons : une description microscopique au moyen de la théorie cinétique (équation de Vlasov, Fokker-Planck) ou au moyen de simulations particulières, et une description macroscopique dite magnétohydrodynamique, qui consiste à coupler l'équation de Navier-Stokes avec les équations de Maxwell. Cette dualité dans la description fluide/particule permet d'explorer différents enjeux liés aux jets relativistes.

Une partie de ce travail de thèse concerne les jets relativistes issus des trous noirs en rotation. L'étude des propriétés globales de l'écoulement se fera par une description fluide à l'aide des solutions aux équations de la MHD idéale en métrique de Kerr. L'approche fluide permet de traiter les aspects liés au jet dans son ensemble ; le plasma est décrit comme un fluide magnétisé, l'écoulement est laminaire, les lignes de champ et les lignes d'écoulement ne se reconnectent pas et il n'y a donc pas de dissipation d'énergie aux petites échelles ; de plus, les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité permettent de trouver les constantes du mouvement qui caractérisent l'écoulement. Une hypothèse supplémentaire sur la géométrie de l'écoulement permet d'obtenir des solutions semi-analytiques aux équations. Ces solutions décrivent la topologie et la dynamique de l'écoulement.

Une autre partie de ce travail concerne l'accélération du rayonnement cosmique dans les jets relativistes. Etant donné les énergies mises en jeu, les jets relativistes seraient le siège d'émission de particules ou de photons très énergétiques, émissions qui se produiraient de façon plus intense au niveau des ondes de choc se propageant dans le jet. L'étude de ces processus locaux se fait à l'aide d'une description particulière. Cette description permet de suivre une particule dans l'onde de choc afin d'étudier ce qui lui arrive au cours de sa propagation. La description de l'onde de choc nécessite une modélisation fluide mais cette fois dynamique. Le fond de rayonnement émis au niveau du choc est calculé en sommant les photons émis par chaque particule. De plus, au cours de sa propagation

dans le champ magnétique turbulent généré par l'onde de choc, la particule peut être accélérée par changement de référentiel (accélération de Fermi) et peut également subir des pertes d'énergie par photointéraction (d'où la nécessité d'avoir calculé le fond de rayonnement).

Le plan est le suivant. Le chapitre 2 montre comment le trou noir, s'il est associé à un champ magnétique, peut être une source prodigieuse d'énergie et être à l'origine des jets relativistes, structures observées à la fois aux échelles galactiques et extragalactiques (dans le cas de jets d'AGN, quelquefois plusieurs fois la taille de la galaxie hôte). Près de l'horizon d'un trou noir en rotation, les effets gravitationnels sont intenses, il faut donc introduire une façon de traiter les équations tensorielles de la MHD en relativité générale. Nous utiliserons ici la métrique de Kerr, appropriée pour décrire l'espace-temps près d'un trou noir en rotation. Les équations sont ré-écrites du point de vue d'un observateur qui se trouve près de l'horizon et est en corotation avec l'espace-temps. Cet observateur est introduit afin que localement, la notion de mètre étalon et d'horloge étalon ait un sens ; il mesure des quantités physiques et les équations de la MHD sont ré-écrites sous forme vectorielle dans son référentiel local. Le chapitre 2 présente ces équations utilisées pour décrire la magnétosphère du trou noir. Les constantes du mouvement pour un écoulement axisymétrique et stationnaire sont déduites des équations. Le chapitre 3 est consacré à la construction d'un modèle autosimilaire méridien qui permet de trouver des solutions aux équations. La présentation de solutions de jets relativistes issus de trous noirs se fait au chapitre 5, précédée d'une étude de solutions dans l'approximation newtonienne appliquées aux jets d'étoiles jeunes (chapitre 4). Dans la suite, nous allons étudier la propagation de rayons cosmiques dans le champ magnétique turbulent d'une onde de choc dans un jet relativiste. Le chapitre 6 est consacré à la description de l'onde de choc et du fond de rayonnement émis. Dans le chapitre 7, l'analyse des processus d'accélération et des différents processus de perte d'énergie en compétition permet de voir si on peut accélérer aux énergies observées des rayons cosmiques ultra-énergétiques dans les jets relativistes.

## Magnétohydrodynamique en géométrie de Kerr

*Anybody who looks for a magic formula for "local gravitational energy-momentum" is looking for the right answer to the wrong question. Unhappily, enormous time and effort were devoted in the past to trying to "answer this question" before investigators realized the futility of the enterprise.*

C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler

Le but de ce chapitre est d'établir les équations générales qui gouvernent la physique d'un plasma près d'un trou noir en rotation avant de construire le modèle de jet. Etant donné que nous allons construire un modèle autosimilaire en latitude, et donc proche de l'axe de rotation, nous nous intéressons en particulier à un écoulement issu de la magnétosphère du trou noir plutôt qu'au vent issu du disque d'accrétion. De ce fait nous ne pouvons pas négliger le champ gravitationnel intense au voisinage du trou noir. Afin d'éviter de travailler avec les équations tensorielles qui forment un système non soluble numériquement, nous allons les écrire dans un référentiel local où l'on mesure les quantités physiques comme dans le cas newtonien. Pour cela il faut réaliser une séparation adéquate de l'espace et du temps : ceci est l'objet du formalisme 3+1 (Thorne et al. 1986). Il s'agit de décomposer l'espace-temps en hypersurfaces à 3 dimensions où  $t$  est constant. Ces hypersurfaces constitueront le référentiel dans lequel nous mesurerons les grandeurs physiques. Ce formalisme a été introduit afin d'étudier la physique de la magnétosphère autour d'un trou noir de Kerr, c'est-à-dire la physique d'un plasma fortement magnétisé dans un espace-temps courbe et en rotation différentielle. Cette approche s'est concrétisée par un processus capable d'extraire de l'énergie du trou noir (Blandford et Znajek 1977) et donc d'alimenter les jets relativistes. Nous utiliserons deux systèmes de coordonnées : le système de coordonnées globales de Boyer-Lindquist valable pour tous les observateurs et un système de coordonnées associé à un observateur local, qui présente les propriétés d'orthonormalité et est donc utile pour analyser la physique près de l'horizon des événements.

*Le développement détaillé des équations en formalisme 3 + 1 est présenté en annexe A.*

### 2.1 Description de l'espace-temps près d'un trou noir en rotation

Introduisons la métrique décrivant l'espace-temps autour du trou noir. Des solutions exactes aux équations d'Einstein ne sont connues que pour des cas symétriques : la métrique de Schwarzschild,



solution statique à symétrie sphérique, et la métrique de Kerr, solution stationnaire à symétrie axiale. La conservation du moment cinétique lors d'un effondrement gravitationnel aboutit généralement à un objet en rotation relativiste. Le trou noir de Kerr est donc plus proche d'une réalité physique que celui de Schwarzschild bien que des singularités apparaissent dans les deux modèles. La métrique de Schwarzschild peut cependant être utile pour décrire le champ gravitationnel d'un trou noir en rotation faible.

La métrique de Kerr dépend seulement de deux paramètres,  $m$  et  $a$ , correspondant respectivement à la masse et au moment cinétique du trou noir (dimensionnés à une longueur) :  $m = \frac{GM}{c^2}$ , où  $M$  est la masse du trou noir, et  $a = \frac{J}{Mc}$  son moment cinétique. Elle s'écrit en coordonnées de Boyer-Lindquist, pour un trou noir de paramètres de masse  $m$  et de moment cinétique  $a$ , avec  $-m \leq a \leq m$ ,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4acmr \sin^2 \theta}{\rho^2} d\varphi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (2.1)$$

$$\text{avec } \Delta = r^2 + a^2 - 2mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta. \quad (2.2)$$

Pour  $a = 0$  on retrouve la métrique de Schwarzschild, et pour  $a = m = 0$  l'espace plat de Minkowski.

Un trou noir de Kerr possède deux horizons, dont les rayons sont donnés par les deux racines de  $\Delta$ . L'horizon externe défini par  $r_{\text{H}}^+ = m + \sqrt{m^2 - a^2}$  est l'horizon des événements. Pour un trou noir en rotation, il existe également une autre surface critique appelée limite statique. Le rayon de cette surface est donné par  $r_{\text{stat}} = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}$ . L'ergosphère du trou noir est la région comprise entre l'horizon et la limite statique (cf. Fig. 2.1).

L'espace-temps autour d'un trou noir de Kerr est entraîné dans un mouvement de rotation car le champ de gravité n'est pas statique (comme c'est le cas en Schwarzschild). Cet effet peut être observé autour de tout corps massif en rotation sur lui-même; c'est l'effet Lense-Thirring, appelé *frame-dragging* en anglais, car il fait tourner le référentiel d'inertie local par rapport aux étoiles lointaines. L'entraînement est de plus en plus important à mesure que l'on se rapproche de l'horizon du trou noir. Tout observateur local possède donc une vitesse angulaire  $\omega$  et est donc en mouvement par rapport à un observateur lointain. A la limite statique, la vitesse d'entraînement  $\omega$  est celle de la lumière. En dehors de l'ergosphère, l'espace-temps est toujours entraîné mais à une vitesse inférieure. Un observateur se trouvant hors de l'ergosphère du trou noir peut donc contrer ce mouvement en se déplaçant lui-même, alors que dans l'ergosphère, il est entraîné par la rotation quelle que soit sa vitesse et ne peut donc pas être au repos dans le référentiel des étoiles lointaines. Le terme ergosphère vient du grec *ergon*, qui veut dire travail : puisqu'il est possible de s'échapper de l'ergosphère du trou noir, il est donc théoriquement possible d'extraire de l'énergie cinétique de ce dernier. Ce paradigme est utilisé dans les modèles de Penrose (1969) et de Blandford et Znajek (1977).

On peut linéariser les équations de la relativité générale pour les petites perturbations et des champs faibles, ce qui est le cas à une distance suffisamment grande du trou noir. Le mouvement d'une particule

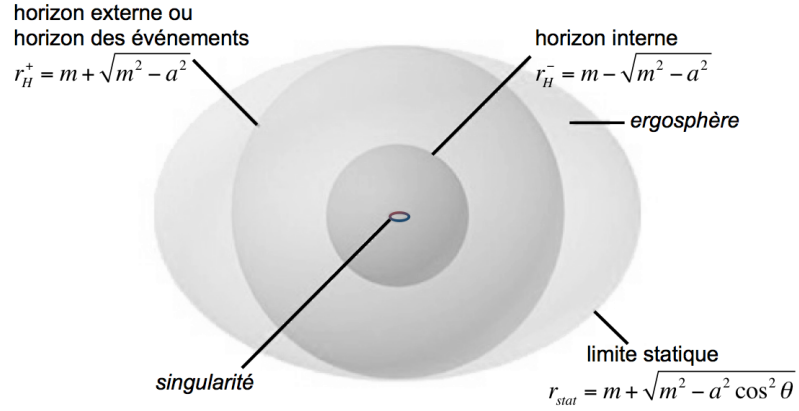


FIG. 2.1 – Trou noir de Kerr.

test de masse  $m$  dans le champ gravitationnel du trou noir en rotation s'écrit, pour des vitesses non relativistes et quand la gravité est suffisamment faible,

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \left( \vec{g} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{H} \right) \quad (2.3)$$

Cette force gravitationnelle s'apparente à la force de Lorentz ( $\vec{E}$  remplacé par  $\vec{g}$ ,  $\vec{B}$  par  $\vec{H}$  et la charge électrique par la masse de la particule) ce qui a conduit à l'appeler force "gravitomagnétique" (Thorne 1989). Loin de l'horizon, l'accélération gravitationnelle s'écrit,

$$\vec{g} = -\frac{M}{r^2} \vec{e}_r, \quad (2.4)$$

où  $M$  est la masse du trou noir, et le champ gravitomagnétique,

$$\vec{H} = 2 \frac{\vec{J} - 3(\vec{J} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r}{r^3}, \quad (2.5)$$

où  $\vec{J}$  est le moment cinétique du trou noir (Somov 2006). L'effet de ce champ est de produire une précession sur les gyroscopes, et, dans le contexte des jets relativistes, à forcer le disque d'accrétion dans sa partie interne à rester dans le plan de rotation du trou noir.

## 2.2 Système de coordonnées et repères orthonormés

Un système de coordonnées globales comme celui de Boyer-Lindquist ( $ct, r, \theta, \varphi$ ) est adapté lorsqu'il s'agit de définir les quantités conservées. Les coordonnées de Boyer-Lindquist sont particulièrement naturelles car loin du trou noir, elles se réduisent au système de coordonnées sphériques de l'espace-temps de Minkowski. Ainsi, elles représentent la façon dont serait vu un trou noir pour un observateur lointain. Elles ne sont pas très utiles pour la compréhension des processus physiques puisque elles ne sont pas orthonormales, ni même orthogonales (à cause de la courbure de l'espace-temps).

Le but est de trouver un repère orthonormal décrit par des covecteurs de base  $\{\hat{e}_0, \hat{e}_i\}$  orthogonaux deux à deux. Ceci est équivalent à trouver une coordonnée temporelle orthogonale à un espace à

trois dimensions défini par  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ . On décompose l'espace-temps en feuillet d'hypersurfaces à trois dimensions (cf. Fig. 2.2). Le temps est considéré comme la direction perpendiculaire aux hypersurfaces. On définit un observateur local lié au feuillet, c'est l'observateur qui va mesurer les quantités physiques. Nous choisissons un observateur en corotation avec l'espace-temps à une position  $r$  fixée; un tel observateur est appelé ZAMO pour l'acronyme anglais *Zero Angular Momentum Observer*. Localement, il ne tourne pas, mais pour un observateur à l'infini, il tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ . Il n'est pas en chute libre puisqu'il est défini sur une boucle où la vitesse angulaire  $\omega$  est constante. Sa ligne d'univers étant perpendiculaire à l'hypersurface, celle-ci constitue un référentiel de Lorentz local où  $t$  est constant. On définit un repère orthonormal  $\{\hat{e}_0, \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  attaché à un tel observateur par,

$$\begin{aligned}\hat{e}_0 &\equiv \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ \hat{e}_1 &\equiv \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \frac{\partial}{\partial r}, \\ \hat{e}_2 &\equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \hat{e}_3 &\equiv \frac{1}{\varpi} \frac{\partial}{\partial \varphi},\end{aligned}\tag{2.6}$$

$$\text{où } h \equiv \frac{\rho\sqrt{\Delta}}{\Sigma}, \quad \varpi \equiv \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta \quad \text{et} \quad \omega \equiv \frac{2camr}{\Sigma^2}.\tag{2.7}$$

$h$  mesure l'effet de dilatation du temps près du trou noir (c'est le "redshift gravitationnel"),  $\omega$  la vitesse d'entraînement des référentiels, et  $\varpi$  le rayon cylindrique. Les  $\partial/\partial x^i$  constituent une base de vecteurs tangents en un point de l'espace-temps de Kerr.

On peut donc écrire la métrique à l'aide des coordonnées locales,

$$ds^2 = -c^2 d\hat{t}^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} d\hat{r}^2 + \rho^2 d\hat{\theta}^2 + \frac{\Sigma^2}{\rho^2} \sin^2 \theta d\hat{\varphi}^2\tag{2.8}$$

où

$$\begin{aligned}d\hat{t} &= h dt, \\ d\hat{r} &= dr, \\ d\hat{\theta} &= d\theta, \\ d\hat{\varphi} &= d\varphi - \omega dt.\end{aligned}\tag{2.9}$$

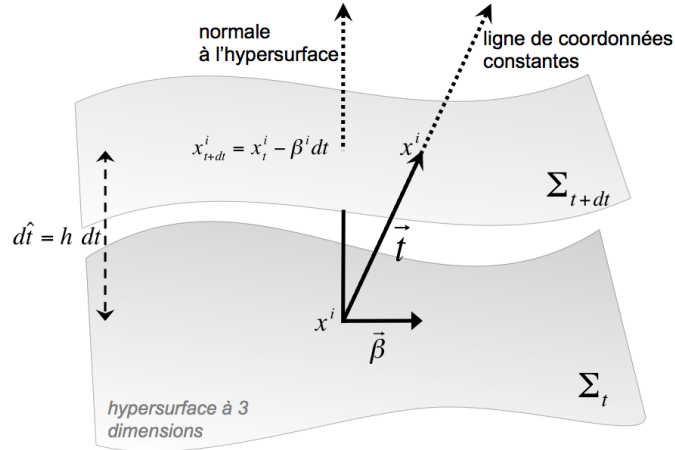
La matrice associée à la métrique spatiale a une forme diagonale et l'élément de ligne peut s'écrire,

$$ds^2 = -c^2 d\hat{t}^2 + h_i^2 (d\hat{x}^i)^2\tag{2.10}$$

$$\text{avec } h_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}, \quad h_2 = \rho \quad \text{et} \quad h_3 = \varpi.\tag{2.11}$$

À l'horizon,  $r \rightarrow r_H$ ,  $h \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \omega_H$ , vitesse angulaire du trou noir :

$$\omega_H = \frac{ac}{2mr_H}.\tag{2.12}$$



**FIG. 2.2** – Feuilletage de l’espace-temps.  $h$  donne la mesure le temps propre de l’observateur associé au 3-espace et  $\vec{\beta}^i$  mesure la vitesse de déplacement de cet espace par rapport au repère des étoiles fixes. Pour la métrique de Kerr, cette vitesse vaut  $\omega = \beta^3 c$ , et on a  $\beta^1 = \beta^2 = 0$ .

La 4-vitesse d’une particule peut être décomposée de la façon suivante :

$$u^\alpha = \gamma (\hat{e}_0 + v_{\hat{r}} \hat{e}_1 + v_{\hat{\theta}} \hat{e}_2 + v_{\hat{\varphi}} \hat{e}_3) , \quad (2.13)$$

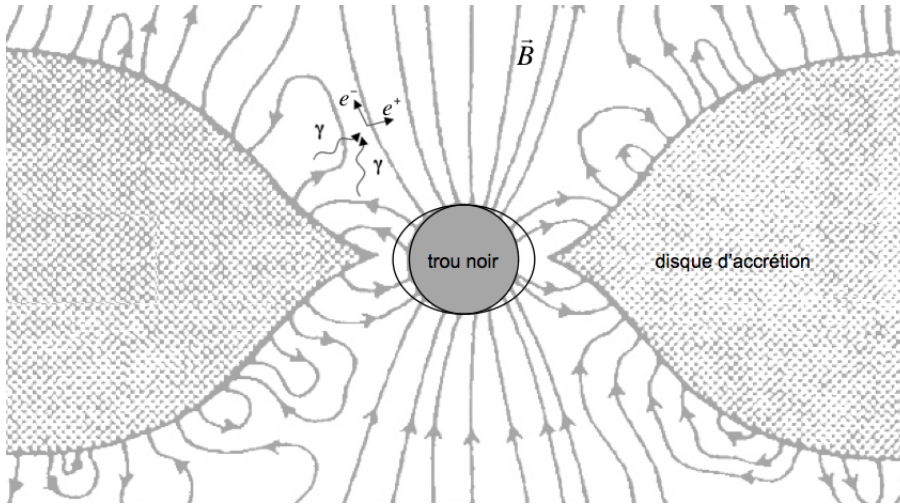
où  $(v_{\hat{r}}, v_{\hat{\theta}}, v_{\hat{\varphi}})$  sont les composantes de la 3-vitesse de la particule mesurée par le ZAMO et  $\gamma \equiv (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$  est le facteur de Lorentz avec  $v^2 = v_{\hat{r}}^2 + v_{\hat{\theta}}^2 + v_{\hat{\varphi}}^2$ . En insérant (2.6) dans (2.13) on obtient,

$$u^\alpha = \gamma \left[ \frac{c}{h} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) + v_{\hat{r}} \frac{\sqrt{\Delta}}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{v_{\hat{\theta}}}{\rho} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\Omega}{h} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (2.14)$$

où  $\Omega \equiv \omega + h v_{\hat{\varphi}} \frac{\rho}{\Sigma \sin \theta}$  est la vitesse angulaire de la particule pour un observateur lointain.

### 2.3 Description de la magnétosphère

Les champs électriques et magnétiques ne sont pas nuls près d’un trou noir. L’espace est toujours rempli de plasma raréfié et ces charges et courants constituent les termes sources des équations de Maxwell. On considère une magnétosphère axisymétrique et stationnaire de conductivité infinie. Les lignes de champ magnétique sont ancrées dans l’horizon et les particules constituant la magnétosphère du trou noir se déplacent le long des lignes de champ magnétique. Les charges pour ces courants traversant le trou noir doivent constamment être remplacées car elles tombent dans le trou noir et ne peuvent en ressortir. Des mécanismes de création de charges doivent donc exister au voisinage du trou noir. Ces mécanismes ont été analysés par Blandford et Znajek (1977), Beskin, Istomin et Pev (1992). Remarquons que ces mécanismes requièrent une petite composante du champ électrique parallèle au champ magnétique. Cette composante est si petite qu’on peut considérer  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  en première approximation. Les modèles de création de magnétosphère invoqués dans le cas des pulsars sont inutilisables pour les trous noirs car si on peut arracher des particules de la surface d’une étoile à neutrons, l’horizon des événements quant à lui ne peut qu’absorber des



**FIG. 2.3** – Représentation schématique du trou noir et du disque épais. Les lignes de champ magnétique sont ancrées dans le disque et dans l'ergosphère du trou noir. D'après Thorne (1989).

particules. Blandford et Znajek (1977) ont proposé le mécanisme suivant : une particule se trouvant au voisinage du trou noir est accélérée par le champ électrique et transfère une partie importante de son énergie à un photon par diffusion Compton inverse. Si l'énergie du photon atteint une valeur suffisante, celui-ci peut produire une paire d'électron-positron par interaction soit avec un photon réel, ou soit avec un photon "virtuel" si le champ magnétique ambiant est suffisamment intense. Un trou noir est entouré d'un disque d'accrétion dont la partie interne rayonne dans le domaine des X. Des photons de haute énergie sont donc présents dans l'environnement immédiat du trou noir et un tel processus est donc envisageable.

### Création de paires $e^+e^-$ par deux photons

Si leur énergie est suffisante, deux photons peuvent interagir pour produire des paires  $e^+e^-$  :

$$\gamma + \gamma \longrightarrow e^+ + e^- \quad (2.15)$$

Ce processus peut se produire si l'énergie totale des photons incidents est supérieure ou égale à l'énergie de masse au repos des deux leptons créés. En posant  $\epsilon = h\nu/m_e c^2$ , l'énergie du photon normalisée à l'énergie de masse de l'électron, cette condition s'écrit dans le repère du laboratoire :  $2\epsilon \geq 1$ . Ce processus peut avoir une incidence importante dans le cas de sources de photons ultra-énergétiques comme les sursauts gamma ou les disques d'accrétion. Si le processus se produit dans un petit volume avec une très grande luminosité, l'intense création de paires peut rendre la source opaque à son propre rayonnement. De telles sources sont appelées "compactes".

Il est également possible de produire des paires par interactions photon-proton et photon-électron :

$$\gamma + p \longrightarrow p + e^+ + e^- \quad \text{et} \quad \gamma + e^- \longrightarrow e^- + e^+ + e^- \quad (2.16)$$

Ces interactions ont des sections efficaces plus petites que celle de la production de paires par photon-photon (de l'ordre de la valeur de la constante de structure fine) et semblent donc être négligeables.

### Création de paires $e^+e^-$ dans un champ magnétique

La création de paires par un photon unique est possible en présence d'un fort champ magnétique. Ce processus requière des photons de haute énergie et un champ magnétique élevé. Ce champ doit être proche de la valeur du champ magnétique critique définie par Thompson (2008) :

$$\frac{\hbar e B_{\text{crit}}}{c} = m_e c^2 \quad \text{soit} \quad B_{\text{crit}} \approx 4.4 \times 10^{13} \text{ G} \quad (2.17)$$

Si  $\theta$  est l'angle entre la direction de propagation du photon et le champ magnétique, le bilan énergétique nécessite  $\epsilon \sin \theta \geq 2$  pour que la réaction ait lieu.

On pense que ce processus de création de paires par le champ magnétique est important pour les étoiles à neutrons fortement magnétisées comme les pulsars. Le champ électrique intense induit par la rotation rapide des lignes de champ magnétique arrache les charges de la surface de l'étoile pour les accélérer à de très hautes énergies. Ces charges émettent des rayons  $\gamma$  soit par émission synchrotron, soit par diffusion Compton sur les rayons X thermiques émis par l'étoile. Ce rayonnement peut à son tour créer des paires. Les paires elles-mêmes émettent du rayonnement synchrotron. Ce rayonnement gamma secondaire produit encore plus de paires, qui émettent encore plus de photons jusqu'au développement d'une cascades de paires. La magnétosphère résultante pourrait être la source du rayonnement du pulsar.

Un processus similaire pourrait se produire près d'un trou noir massif au centre d'une galaxie active car les ingrédients sont les mêmes. Le trou noir ou le disque d'accrétion sont certainement magnétisés. La rotation produit un champ électrique qui accélère les charges à de hautes énergies. De plus, l'écoulement dans le disque d'accrétion est probablement lui-même une source de rayonnement gamma intense. Par conséquent, les cascades de création de paires par un seul ou deux photons sont possibles. Ce plasma pourrait être la source de la partie centrale des jets relativistes issus des trous noirs. Le problème est cependant plus compliqué en ce qui concerne la formation d'un jet car il faut que celui-ci reste stable.

#### 2.3.1 Equations de Maxwell en régime axisymétrique stationnaire

On suppose que chaque ligne de champ magnétique tourne à la vitesse angulaire  $\Omega$ . La vitesse des lignes de champ magnétique mesurée par le ZAMO est donc

$$\vec{v}_B = \frac{(\Omega - \omega)}{h} \varpi \vec{e}_\varphi \quad (2.18)$$

On décompose les vecteurs en deux composantes poloïdale et toroïdale,  $\vec{B} = \vec{B}_p + B_\varphi \vec{e}_\varphi$  avec  $\vec{B}_p = B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta$  (et de même pour la vitesse). A l'aide du tenseur électromagnétique  $F^{ab} = u^a E^b - u^b E^a + \epsilon^{abcd} u_c B_d$  les équations de Maxwell s'écrivent,

$$\nabla_b F^{ab} = 4\pi j^a \quad (2.19)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (2.20)$$

On applique le formalisme 3+1 aux équations tensorielles (2.19) et (2.20) pour obtenir les équations

sous forme vectorielle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\hat{q} \quad (2.21)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.22)$$

$$\vec{\nabla} \times (h\vec{E}) = \left( \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \frac{\omega}{c} \right) \varpi \vec{e}_\varphi \quad (2.23)$$

$$\vec{\nabla} \times (h\vec{B}) = \frac{4\pi}{c} h\vec{j} - \left( \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \frac{\omega}{c} \right) \varpi \vec{e}_\varphi \quad (2.24)$$

où  $(\vec{E}, \vec{B})$  est le champ électromagnétique mesuré par le ZAMO et  $(\hat{q}, \vec{j})$  les termes sources.

### Champ magnétique

La relation (2.22) couplée à l'hypothèse d'axisymétrie nous permet de définir la fonction  $A(r, \theta)$  qui représente le flux magnétique (à un facteur  $2\pi$  près) :

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \times \left( \frac{A}{\varpi} \vec{e}_\varphi \right) = \frac{1}{\varpi} \vec{\nabla} A \times \vec{e}_\varphi \quad (2.25)$$

On intègre l'équation de Maxwell-Ampère (2.24) sur la surface d'un tube de flux,

$$\oint h\vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{4\pi}{c} \iint \vec{j} \cdot \vec{dS} \quad (2.26)$$

ce qui permet d'introduire la fonction  $I$ , somme algébrique des courants internes au tube de flux considéré,

$$B_\varphi = \frac{2I}{h\varpi c} \quad (2.27)$$

et d'écrire le champ magnétique total sous la forme,

$$\vec{B} = \frac{1}{\varpi} \vec{\nabla} A \times \vec{e}_\varphi + \frac{2I}{h\varpi c} \vec{e}_\varphi \quad (2.28)$$

### Champ électrique

La première conséquence déductible de la loi d'induction (2.23) est que le champ électrique poloidal dérive d'un gradient. En effet, en combinant les équations (2.25) et (2.23) on obtient ,

$$\vec{\nabla} \times \left( h\vec{E} - \frac{\omega}{c} \vec{\nabla} A \right) = 0 \quad (2.29)$$

d'où

$$h\vec{E} - \frac{\omega}{c} \vec{\nabla} A = \vec{\nabla} \Phi + \frac{\mathcal{C}}{\varpi} \vec{e}_\varphi \quad (2.30)$$

avec  $\Phi(r, \theta)$  le potentiel électrique et  $\mathcal{C}$  une constante. Pour ne pas avoir un champ électrique tendant vers l'infini sur l'axe, on supposera  $\mathcal{C} = 0$  soit  $E_\varphi = 0$ .

La condition de flux gelé s'écrit,

$$F_{ab}u^b = 0 \quad (2.31)$$

soit en formalisme 3 + 1 :

$$\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} = 0 \quad (2.32)$$

Les particules suivent une trajectoire parallèle aux lignes de champ magnétique, on a donc  $\vec{v}_\varphi = \vec{v}_B$  d'où :

$$\vec{E} = -\frac{(\Omega - \omega)}{hc} \vec{\nabla} A \quad (2.33)$$

On rappelle que  $\omega$  est la vitesse de rotation du ZAMO. Si  $\Omega$  est constante, le champ électrique devient de plus en plus faible lorsque que l'on se rapproche de la zone d'émission du jet, et s'annule pour  $\Omega = \omega$ . En combinant les équations (2.30) et (2.33) on obtient,

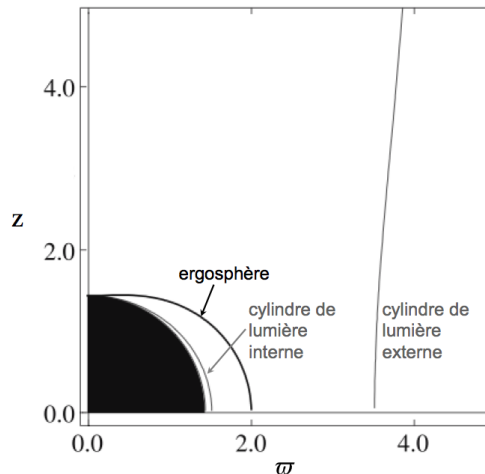
$$\frac{\Omega}{c} = \frac{d\Phi}{dA} \quad (2.34)$$

### Cylindres de lumière

Les cylindres de lumière sont les surfaces où  $\|\vec{E}_p\| = \|\vec{B}_p\|$ . D'après les équations (2.25) et (2.33), on déduit qu'il existe deux cylindres, dont les positions sont données par la relation

$$\frac{\varpi(\Omega - \omega)}{hc} = \pm 1 \quad (2.35)$$

Le cylindre de lumière est donc la surface pour laquelle la vitesse de rotation des lignes de champ magnétique atteint la vitesse de la lumière. Une magnétosphère corotative ne peut donc s'étendre au delà de cette surface. Sur le schéma de la Fig. 2.4, la forme du cylindre externe est modifiée par les effets gravitationnels au voisinage du trou noir ; le cylindre interne est quant à lui toujours situé dans l'ergosphère du trou noir. Dans le modèle que nous allons développer au chapitre suivant, nous allons supposer  $\varpi^2(\Omega - \omega)^2/h^2c^2 \rightarrow 0$ . Cette hypothèse revient à se placer loin du cylindre de lumière et à négliger les effets du champ électrique par rapport au champ magnétique. On suppose que le jet est bien confiné à l'intérieur du cylindre. Cette hypothèse est valable car nous allons développer un modèle dans la limite des petits angles d'ouverture.



**FIG. 2.4** – Représentation schématique des cylindres de lumière pour  $\Omega$  constante. Les coordonnées sont données en unité de rayon gravitationnel  $GM/c^2$ . D'après Camenzind (2007).



### Conditions sur l'horizon

Nous devons également introduire ici une manière de traiter les conditions aux limites sur l'horizon du trou noir. Le paradigme de la membrane, introduit par Thorne et al. (1986), consiste à traiter l'horizon comme une membrane fictive dotée d'une densité de charge  $\sigma^H$ , de résistivité  $R_H$  et d'une densité de courant surfacique  $j^H$ . L'hypothèse selon laquelle la magnétosphère se comporte comme un conducteur idéal n'est donc plus valable sur l'horizon.

MacDonald et Thorne (1982) formulèrent les conditions à l'horizon avec les définitions suivantes :

$$i^H = \frac{I^H}{2\pi\varpi_H} \text{ courant surfacique,}$$

$$E^H = \frac{2I^H}{c\varpi_H} \text{ champ électrique à l'horizon,}$$

$$B^H = \frac{-I^H}{2\pi\varpi_H} \text{ champ magnétique à l'horizon.}$$

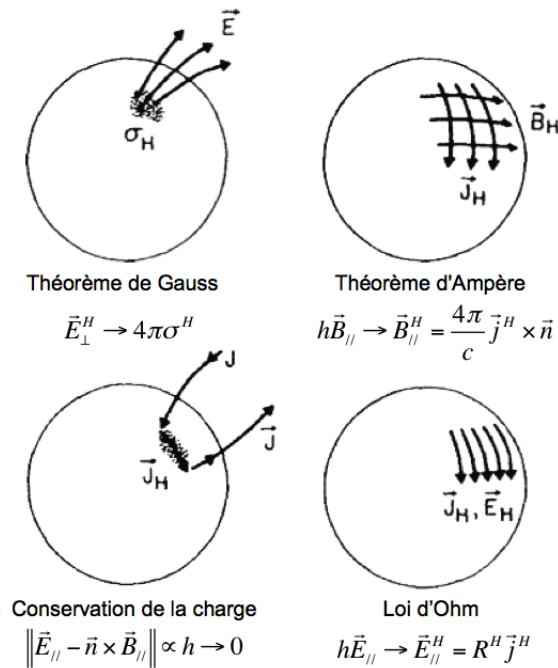


FIG. 2.5 – Conditions électromagnétiques sur l'horizon. D'après Thorne (1989)

Le théorème de Gauss implique pour le champ électrique  $\vec{E}_\perp^H$  à l'horizon,

$$\vec{E}_n \equiv \vec{E}_\perp^H \rightarrow 4\pi\sigma^H \quad (2.36)$$

et le théorème d'Ampère pour le champ magnétique  $\vec{B}_\parallel^H$  à l'horizon,

$$h\vec{B}_\parallel \rightarrow \vec{B}_\parallel^H \equiv \left(\frac{4\pi}{c}\right) j^H \times \vec{n} \quad (2.37)$$

La loi d'Ohm s'écrit

$$h\vec{E}_\parallel \rightarrow \vec{E}_\parallel^H \equiv R^H j^H \quad (2.38)$$

où  $R^H = 4\pi/c$  est la résistance surfacique effective (377 ohms). De cette façon,  $\vec{B}_\perp$  et  $\vec{E}_\perp$  sont finis sur l'horizon ;  $\|\vec{B}_\parallel\|$  et  $\|\vec{E}_\parallel\|$  divergent sur l'horizon (à cause du facteur  $1/h$ ).

La conservation de la charge implique :

$$\|\vec{E}_\parallel - \vec{n} \times \vec{B}_\parallel\| \propto h \rightarrow 0 \quad (2.39)$$

Cela signifie que pour un ZAMO, le champ électromagnétique apparaît comme une onde traversant l'horizon du trou noir en étant infiniment décalée vers le bleu. Ce formalisme est maintenant remplacé par l'utilisation des coordonnées de Kerr-Schild qui ne divergent pas sur l'horizon.

## 2.4 Extraction de l'énergie d'un trou noir en rotation

Le spin d'un trou noir pourrait être une source importante d'énergie, suffisante pour expliquer les énergies mises en jeu dans les jets relativistes. L'énergie que l'on peut extraire d'un trou noir de Kerr de masse  $M$  est (Misner et al. 1970) :

$$E_{rot} = \left[ 1 - \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - (a/m)^2} \right)} \right] Mc^2 \quad (2.40)$$

On peut donc extraire 29% de l'énergie de masse d'un trou noir en rotation maximale ( $a = m$ ).

La métrique de Kerr présente deux symétries par rapport à  $t$  et  $\varphi$  et possède donc deux vecteurs de Killing  $\xi^\nu = (-1, 0, 0, 0)$  et  $(0, 0, 0, 1)$ . La contraction d'un vecteur de Killing avec le tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  permet d'obtenir un vecteur de divergence nulle,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu) = 0 \quad (2.41)$$

où  $g = \det(g_{\mu\nu}) = -(hh_1h_2h_3)^2$  est le déterminant du tenseur métrique,  $T^{\mu\nu}$  est le tenseur du moment d'énergie et  $\xi^\nu$  est le vecteur de Killing.

On obtient ainsi les lois de conservation de l'énergie et du moment cinétique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e^\infty}{\partial t} &= -\frac{1}{h_1h_2h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1h_2h_3 S^i) \\ \frac{\partial l}{\partial t} &= -\frac{1}{h_1h_2h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1h_2h_3 M^i) \end{aligned} \quad (2.42)$$

où :

- $e^\infty = -hg_{\nu 0}T^{\nu 0}$  est la densité d'énergie à l'infini,
- $l = hg_{3\nu}T^{3\nu}/c$  la densité du moment cinétique,
- $S^i = -chg_{\nu 0}T^{i\nu}$  le flux de densité d'énergie,
- $M^i = hh_iT^{i\nu}g_{\nu 3}$  le flux de densité de moment cinétique.

On obtient (Thorne et al. 1986) :

$$e^\infty = h\hat{e} + \omega l \quad (2.43)$$

où  $e^\infty$  est la densité d'énergie mesurée par un observateur à l'infini et  $\hat{e}$  est la densité d'énergie mesurée par le ZAMO.

L'énergie  $e^\infty$  s'écrit comme la somme des densités d'énergies hydrodynamique et électromagnétique :

$$e^\infty = e_{mat}^\infty + e_{e.m.}^\infty. \quad (2.44)$$

Si  $e^\infty$  est négative, alors on peut extraire de l'énergie du trou noir. Dans le cas où  $e^\infty$  est dominée par  $e_{mat}^\infty$  alors le processus d'extraction est le processus de Penrose (1969). Dans le cas où  $e^\infty$  est dominée par  $e_{e.m.}^\infty$ , le processus d'extraction est le processus de Blandford et Znajek (1977).

### Le processus de Penrose

Si l'on considère une particule dont la masse au repos est  $m$  en l'absence d'un champ électromagnétique, l'énergie à l'infini et le moment cinétique de la particule sont donnés par les équations suivantes (Koide et Arai 2008) :

$$\begin{aligned} E^\infty &= \int_V e^\infty dV = h\gamma mc^2 + \omega L \\ L &= \int_V l dV = \varpi\gamma m v_{\hat{\phi}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

où  $V$  est le volume entier de l'espace. L'énergie à l'infini et le moment cinétique se conservent lorsque la particule voyage seule. Les deux équations (2.45) permettent la ré-écriture suivante :

$$E^\infty = h\gamma mc^2 \left( 1 + \frac{\varpi\omega v_{\hat{\phi}}}{hc} \right) \quad (2.46)$$

Si  $\left( \frac{\varpi\omega v_{\hat{\phi}}}{hc} \right) < -1$ , l'énergie de la particule à l'infini devient négative. Cette condition ne peut être satisfaite que dans l'ergosphère  $\left( \frac{\varpi\omega}{hc} > 1 \right)$ . En utilisant la relation  $h^2 \left[ 1 - \sum_i \left( \frac{h_i\omega_i}{hc} \right)^2 \right] = -g_{00}$ , on obtient la définition bien connue de l'ergosphère :  $g_{00} \geq 0$ .

### Le processus de Blandford et Znajek

Blandford et Znajek (1977) proposèrent un processus permettant d'extraire l'énergie électromagnétique. La densité d'énergie électromagnétique pour un observateur à l'infini s'écrit (Koide et Arai 2008) :

$$e_{e.m.}^\infty = \frac{1}{h} \left( \frac{\varpi}{c} \right)^2 \frac{B_P^2}{8\pi} \left[ \Omega^2 - \omega^2 \left( 1 - \frac{c^2 h^2}{\varpi^2 \omega^2} - \frac{(\Omega - \omega)^2}{\omega^2} \right) \right] \quad (2.47)$$

Pour  $\omega > \Omega$ , on voit que l'énergie à l'infini devient négative. Le rôle principal dans le mécanisme de Blandford et Znajek (1977) n'est donc pas joué par l'ergosphère mais par la zone où  $\omega > \Omega$ . A l'horizon, l'équation (2.47) devient,

$$h e_{e.m.}^\infty = \left( \frac{\varpi}{c} \right)^2 \Omega (\Omega - \omega_H) \frac{B_H^2}{4\pi} \quad (2.48)$$

L'équation (2.48) peut également être comprise à l'aide de l'analogie avec un circuit électrique (Beskin 2010). Le trou noir est considéré comme un conducteur parfait tournant à la vitesse de

rotation  $\omega_H$  immergé dans un champ magnétique constant (cf. Fig. 2.6). La rotation du trou noir dans le champ magnétique crée une différence de potentiel entre l'équateur et les pôles,  $\delta U \sim E\varpi$ . Près de l'horizon on a

$$\delta U_H = \frac{\varpi^2 (\Omega - \omega_H)}{c} B_H = I R_H \quad (2.49)$$

Loin de l'horizon, dans la région de charge (où l'énergie est dissipée) la vitesse angulaire d'entraînement de l'espace-temps est négligeable :

$$\delta U_{RC} = \frac{\varpi^2 \Omega}{c} B_H = I R_{RC} \quad (2.50)$$

On a donc  $R_{RC} = \frac{\Omega}{(\Omega - \omega)} R_H$  si l'intensité du courant reste constante. La puissance émise dans la région de charge est donnée par

$$P_{tot} = I \delta U_{RC} = \frac{\delta U_{RC}^2}{R_{RC}} \quad (2.51)$$

En combinant (2.50) et (2.51) on obtient pour la puissance émise,

$$\begin{aligned} P_{tot} &= \frac{\varpi^4 \Omega^2}{c^2} \frac{B_H^2}{R_{RC}} \\ &= \frac{\varpi^4 \Omega (\Omega - \omega_H)}{c^2} \frac{B_H^2}{R_H} \end{aligned} \quad (2.52)$$

En posant  $\varpi \sim 2r_H$  et en exprimant  $R_H$  en CGS on obtient une expression similaire à celle de Beskin et Kuznetsova (2000),

$$\begin{aligned} P_{tot} &= \frac{\Omega (\Omega - \omega_H)}{\omega_H^2} \left(\frac{a}{m}\right)^2 \frac{B_H^2 r_H^2 c}{4\pi} \\ &\approx 10^{45} \frac{\Omega (\Omega - \omega_H)}{\omega_H^2} \left(\frac{a}{m}\right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_\odot}\right)^2 \left(\frac{B}{10^4 G}\right)^2 \text{ erg.s}^{-1} \end{aligned} \quad (2.53)$$

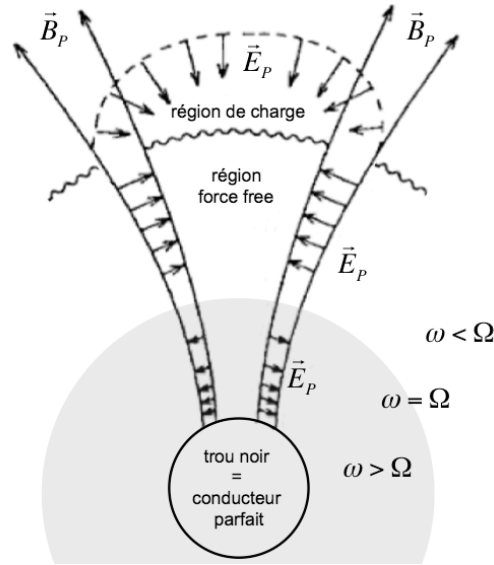
## 2.5 Equations de la magnétohydrodynamique

Le tenseur énergie-impulsion total (plasma + champ électromagnétique) s'écrit

$$T^{\mu\nu} = \underbrace{\frac{nw}{c^2} u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}}_{T_{mat}^{\mu\nu}} + \underbrace{\frac{1}{4\pi} \left( F^{\mu\sigma} F^\nu_\sigma - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} \right)}_{T_{e.m.}^{\mu\nu}} \quad (2.54)$$

où

- $n$  est la densité particulaire,
- $u^a$  la 4-vitesse du fluide,
- $w = (e + p)/n$  l'enthalpie par particule,
- $e$  la densité d'énergie interne (incluant la densité d'énergie de masse au repos),
- $p$  la pression.



**FIG. 2.6** – Induction unipolaire. Le courant électrique circule le long des lignes de champ magnétique et le circuit se referme dans la région de charge. Le circuit doit tourner à une vitesse différente de celle du trou noir car si on est en corotation avec celui-ci on ne mesure pas de champ électrique.

Ainsi, le plasma est décrit comme un fluide parfait magnétisé, les seules forces qui s'appliquent sont la gravité, la pression, et la force de Lorentz.

Pour établir le système complet des équations de la MHD idéale, nous devons ajouter aux équations de Maxwell et à la condition de flux gelé les équations tensorielles décrivant le fluide, soit :

$$\nabla_a(nu^a) = 0 \quad (2.55)$$

$$\nabla_b T^{ab} = 0 \quad (2.56)$$

L'équation de conservation du nombre de particules s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot (h\gamma n \vec{v}) = 0 \quad (2.57)$$

En projetant l'équation de conservation du tenseur-énergie impulsion (2.56) sur les coordonnées spatiales et en combinant le résultat avec les équations de Maxwell, nous obtenons l'équation d'Euler,

$$\gamma^2 \frac{nw}{c^2} \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} (c^2 \ln h) + \frac{\varpi \omega v_\varphi}{h} \vec{\nabla} \ln \omega + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\gamma w)) \vec{v} \right] + \vec{\nabla} p = \hat{q} \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{B} \quad (2.58)$$

$P$  et  $w$  sont respectivement la pression et l'enthalpie par particule. On remarque que cette équation a la même forme que celle en métrique de Schwarzschild dans Mobarry et Lovelace (1986). On voit apparaître un terme supplémentaire lié à la rotation du trou noir.

Le premier principe de la thermodynamique appliqué le long d'une ligne de courant est obtenu en projetant la conservation du tenseur énergie-impulsion le long de la 4-vitesse du fluide :

$$u_a \nabla_b T^{ab} = 0 \quad (2.59)$$

Comme on considère le milieu comme un conducteur parfait, la loi d'Ohm s'écrit  $F_{ab}u^b = 0$ , ce qui implique que la contribution du champ électromagnétique est nulle dans l'équation (2.59).

La variation d'enthalpie est donc seulement due à la variation de pression suivant la relation ci-dessous. Le terme de chauffage est contenu dans  $w$  qui devient ainsi une enthalpie effective, à l'instar des modèles polytropiques (Sauty et Tsinganos 1994, Meliani et al. 2006). On applique le même formalisme pour obtenir la forme vectorielle de l'équation (2.59) :

$$n\vec{v} \cdot \vec{\nabla} w = \vec{v} \cdot \vec{\nabla} P \quad (2.60)$$

## 2.6 Intégrales premières en régime axisymétrique stationnaire

Les propriétés d'axisymétrie et de stationnarité permet une réduction des équations en termes de quantités conservées le long des lignes de champ. Ces intégrales sont une conséquence des propriétés générales des systèmes ayant une coordonnée ignorable (Tsinganos 1982).

### Conservation du quotient flux de masse sur flux magnétique et loi d'isrotation

De même que l'équation de conservation du flux magnétique (2.22) nous a permis d'introduire la fonction  $A$ , l'équation de conservation du nombre de particules (2.57) nous permet d'introduire la fonction courant  $\Psi$  qui représente le taux de perte de particules :

$$4\pi h\gamma n\vec{v}_P = \vec{\nabla} \times \left( \frac{\Psi}{\varpi} \vec{e}_\varphi \right) = \frac{1}{\varpi} \vec{\nabla} \Psi \times \vec{e}_\varphi \quad (2.61)$$

On a donc

$$4\pi h\gamma n\vec{v}_P = \frac{d\Psi}{dA} \vec{B}_P \equiv \Psi_A \vec{B}_P \quad (2.62)$$

$A$  est le flux magnétique à un facteur  $2\pi$  près,  $\Psi$  le taux de perte de masse à un facteur 2 près, et  $\Psi_A$  représente le quotient de la perte de masse sur le flux magnétique.

En combinant les équations (2.32) et (2.23), on obtient,

$$\vec{\nabla} \times h \left( \vec{v} \times \vec{B} \right) = \vec{\nabla} \times \left[ h \left( \vec{v}_P \times \vec{B}_P \right) + h \left( \vec{v}_\varphi \times \vec{B}_\varphi \right) + h \left( \vec{v}_\varphi \times \vec{B}_P \right) \right] = -\varpi \vec{B}_P \cdot \vec{\nabla} \omega \vec{e}_\varphi \quad (2.63)$$

d'où

1)  $\vec{v}_P \times \vec{B}_P = 0 \iff \vec{v}_P // \vec{B}_P$  ce qui donne

$$\vec{v}_P = \frac{\Psi_A}{4\pi h\gamma n} \vec{B}_P \quad (2.64)$$

2)  $\vec{\nabla} \times \left[ h \left( \vec{v}_P \times \vec{B}_\varphi \right) + h \left( \vec{v}_\varphi \times \vec{B}_P \right) \right] = -\varpi \vec{B}_P \cdot \vec{\nabla} \omega \vec{e}_\varphi$  ce qui donne

$$-\varpi \vec{B}_P \cdot \vec{\nabla} \left( h \frac{v_\varphi}{\varpi} - \frac{\Psi_A}{4\pi h\gamma n} \frac{B_\varphi}{\varpi} \right) = -\varpi \vec{B}_P \cdot \vec{\nabla} \omega \quad (2.65)$$

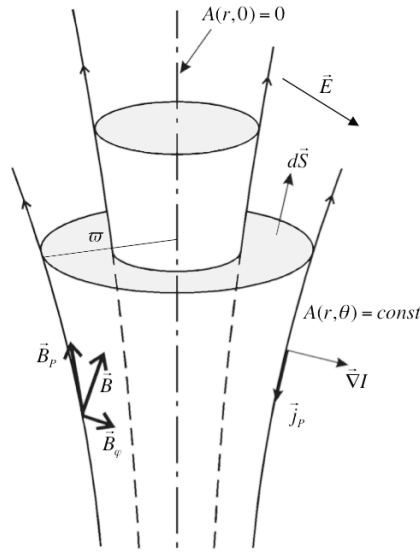
Nous avons donc obtenu deux quantités conservées le long des lignes de champ (respectivement d'écoulement),

- $\Psi_A$ , quotient du flux de particules sur le flux magnétique,

$$\Psi_A = \frac{4\pi h\gamma n v_p}{B_p} \quad (2.66)$$

- $\Omega = \frac{d\Phi}{dA}$ , vitesse d'isrotation,

$$\Omega = h \frac{v_\varphi}{\varpi} - \frac{\Psi_A}{4\pi\gamma n} \frac{B_\varphi}{\varpi} + \omega \quad (2.67)$$



**FIG. 2.7** – Structure d'un écoulement MHD axisymétrique stationnaire.

$\Omega$  représente la vitesse angulaire de rotation des lignes de champ dans le référentiel du fluide ;  $\Phi$  représente le potentiel dont dérive le champ électrique. Notons que la condition de flux gelé permet d'obtenir  $\vec{\nabla}A \times \vec{\nabla}\Psi = 0$  et  $\vec{\nabla}A \times \vec{\nabla}\Phi = 0$  ce qui signifie que les équipotentielles des fonctions  $\Phi$ ,  $\Psi$  et  $A$  se confondent ; les lignes de champ magnétiques et les lignes d'écoulement sont donc sur un même tube de flux, où elles sont décalées les unes par rapport aux autres à cause du gradient de potentiel électrique lui-même constant sur la surface du tube (cf. Fig. 2.7). Les champs  $\vec{v}$  et  $\vec{B}$  ne sont donc pas colinéaires à cause des composantes toroïdales.

De l'équation (2.67) on déduit la vitesse moyenne totale d'une particule fluide,

$$\vec{v} = \frac{\Psi_A}{4\pi h \gamma n} \vec{B} + \frac{\varpi(\Omega - \omega)}{h} \vec{e}_\varphi. \quad (2.68)$$

On note que pour  $\Omega = \omega$  on a  $\vec{v} // \vec{B}$  : la vitesse d'entraînement de l'espace temps compense exactement le décalage entre les lignes de champ et les lignes d'écoulement. On peut également le voir autrement : comme  $\vec{E}$  s'annule pour  $\Omega = \omega$  la force qui induisait ce décalage est nulle. Dans le cas d'une accélération magnétocentrifuge c'est la rotation des lignes de champ magnétique qui entraîne et ejecte le plasma environnant. Il semblerait donc qu'il faille que  $\Omega > \omega$  pour que ce mécanisme fonctionne. Cependant, pour le modèle de jet que nous allons développer, nous invoquerons l'accélération par la pression et non pas magnétocentrifuge.

### Conservation du moment cinétique

En projetant l'équation de la dynamique sur  $\vec{e}_\varphi$  on obtient,

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (\gamma \omega \varpi v_\varphi) = c^2 \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{h \varpi \vec{B}_\varphi}{\Psi} \right) \quad (2.69)$$

soit  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} L = 0$  avec

$$L = \varpi \left( \frac{\gamma w}{c^2} v_\varphi - \frac{h}{\Psi_A} B_\varphi \right) \quad (2.70)$$

$L$  est le moment cinétique spécifique total emporté par la masse et le champ magnétique. Le premier terme représente le moment cinétique ordinaire tandis que le deuxième est le couple magnétique. Nous remarquons que ce terme est négatif : le jet emporte donc du moment cinétique par l'intermédiaire de  $B_\varphi$ . On remarque que  $L = 0$  lorsque  $\Omega = \omega$ .

### Généralisation de l'équation de Bernoulli

La composante temporelle de la conservation du tenseur énergie-impulsion donne,

$$\vec{v} \cdot \vec{\nabla} (h\gamma w) + \frac{\gamma w \varpi v_\varphi}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \omega = (\Omega - \omega) \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \left( \frac{h \varpi \vec{B}_\varphi}{\Psi_A} \right) \quad (2.71)$$

soit  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{E} = 0$  avec

$$\mathcal{E} = h\gamma w - h \frac{\varpi \Omega}{\Psi_A} B_\varphi + \frac{\gamma w \varpi \omega}{c^2} v_\varphi \quad (2.72)$$

ce qui est la généralisation relativiste de l'équation de Bernoulli.  $\mathcal{E}$  est l'énergie conservée par particule. On a  $e^\infty = n\mathcal{E}$ . On note que dans le cadre de la MHD idéale on obtient une expression de  $e^\infty$  qui comprend à la fois des termes hydrodynamique et électromagnétique, ce qui généralise le processus de Blandford et Znajek (1977) qui est purement *force-free*.

## 2.7 Des jets à l'horizon ?

Nous venons d'établir les équations 3 + 1 de la MHD en métrique de Kerr avec l'obtention d'une formulation originale de l'équation d'Euler. Les écoulements issus de la magnétosphère d'un trou noir peuvent être en bonne approximation décrits comme des écoulements stationnaires d'un plasma magnétisé, compressible et de conductivité infinie. Dans le chapitre suivant nous allons construire un modèle qui va nous permettre d'intégrer les équations et de trouver des solutions afin d'étudier la topologie et la dynamique de ces écoulements. Nous avons introduit dans ce chapitre les mécanismes de création de paires au voisinage d'un trou noir car le modèle que nous allons développer décrira la partie interne du jet, donc celle vraisemblablement issue de la magnétosphère du trou noir et non pas la partie issue du disque (dont la nature serait hadronique). Des solutions de jets relativistes seront présentées au chapitre 5 et nous verrons que la base du jet se situe près de l'horizon ; nous avons donc présenté les conditions aux limites près de cette surface ainsi que les mécanismes capables d'extraire l'énergie rotationnelle du trou noir.





## Modèle autosimilaire méridien en métrique de Kerr

*The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work.*

J. V. Neumann

Ce chapitre est consacré à la construction du modèle de jet relativiste en métrique de Kerr. Il permet de calculer des solutions MHD autosimilaires en latitude applicables aux jets issus de trous noirs en rotation, dans l'hypothèse de faible ouverture. Il généralise le modèle pour un trou noir statique de Meliani et al. (2006). Ce modèle permet de résoudre de façon semi-analytique les équations GRMHD et ainsi de décrire la partie interne du jet (encore appelée *spine jet*) en construisant des solutions qui présentent une structure autosimilaire en latitude. La forme de la métrique de Kerr permet un développement avec la colatitude  $\theta$ . Outre l'intérêt fondamental d'introduire les effets liés à la rotation du trou noir dans la modélisation des jets relativistes, le fait de développer un même modèle de jet, en géométrie newtonnienne, en métrique de Schwarzschild et en métrique de Kerr, montre les effets supplémentaires qui apparaissent à mesure que l'on considère des champs gravitationnels plus complexes.

### 3.1 Modèles semi-analytiques et modèles numériques

La théorie des vents magnétisés commença avec l'étude du vent solaire. Weber et Davis (1967) ont étudié des solutions de vents magnétisés polytropiques à une dimension et ont montré l'existence de trois points critiques, qui correspondent aux endroits où l'écoulement atteint les vitesses caractéristiques des différentes ondes se propageant dans un plasma magnétisé (vitesse d'Alfvén, vitesses magnéto-soniques lente et rapide).

Sakurai (1985) a réalisé des simulations numériques en généralisant le modèle de Weber et Davis à deux dimensions. Ces simulations montrent que l'écoulement converge asymptotiquement vers l'axe de rotation, et représente donc une solution de vent collimatée. L'étude de la collimation des vents en jets a été traitée par Heyvaerts et Norman (1989). Ils établirent un théorème général sur la collimation : tout écoulement axisymétrique stationnaire converge vers l'axe de rotation pour atteindre soit un régime parabolique soit un régime cylindrique. Des simulations numériques (donc

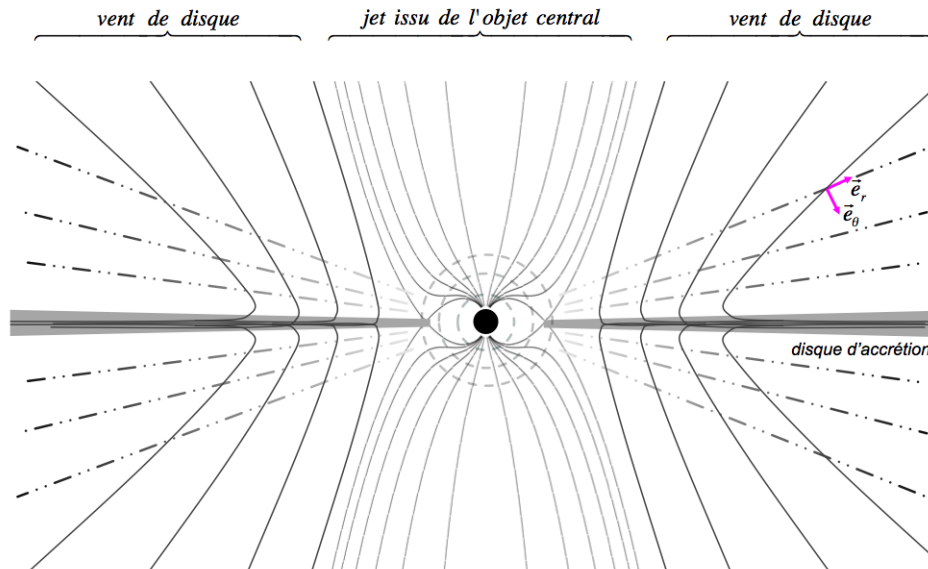
dépendantes du temps) en MHD idéale relativiste ont également montré que les vents de disque axisymétriques évoluent vers des jets collimatés (Porth et Fendt 2010).

La MHD stationnaire axisymétrique a été présentée pour la première fois par Chandrasekhar (1956) dans le contexte des vents astrophysiques. Elle constitue une mise en forme intéressante du problème car les propriétés de l'écoulement dérivent simplement des équations sous la forme d'intégrales premières. Les solutions stationnaires existent seulement dans le cas axisymétrique pour lequel le système d'équations MHD se réduit à deux équations couplées, l'équation de Bernoulli et l'équation de Grad-Shafranov. La première représente la conservation de l'énergie le long des lignes d'écoulement ; la seconde décrit la dynamique du vent perpendiculairement aux lignes d'écoulement, et de ce fait elle est également appelée équation *transfield*.

Les équations de la MHD forment un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires. Les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité ne sont pas suffisantes pour résoudre de façon semi-analytique le système et trouver des solutions. On simplifie alors le problème en faisant une hypothèse supplémentaire sur la géométrie de l'écoulement, l'hypothèse d'autosimilarité : on suppose l'existence d'une loi d'échelle selon une coordonnée afin de pouvoir séparer les variables. La Fig. 3.1 présente deux classes de modèles autosimilaires. La forme de la surface d'Alfvén est liée à la variable d'autosimilarité choisie (Vlahakis et Tsinganos 1998). Un autre problème réside dans la présence de points critiques où les équations deviennent singulières. Les solutions physiquement acceptables sont celles qui traversent les points critiques, ce qui rend difficile une étude systématique car tout changement de valeur des paramètres entraîne une déviation par rapport à ces points critiques.

Blandford et Payne (1982) trouvèrent des solutions autosimilaires radiales au système d'équations MHD stationnaires pour un vent magnétisé axisymétrique provenant d'un disque d'accrétion képlérien. Ils supposèrent le disque traversé par un champ magnétique poloidal en corotation avec celui-ci à la vitesse angulaire de rotation képlérienne. Pour une colatitude fixée  $\theta$ , toutes les grandeurs physiques s'écrivent sous la forme d'une loi d'échelle selon la variable d'autosimilarité  $r$  :  $f(r, \theta) \propto g(\theta)r^x$  et les équations se réduisent à un système d'équations différentielles du second ordre en  $\theta$  pour le nombre de Mach alfvénique, et du premier ordre pour les fonctions gouvernant la géométrie des champs  $\vec{B}$  et  $\vec{v}$ . Les solutions de Blandford et Payne (1982) ne franchissent pas le point magnéto-sonique rapide.

Blandford et Payne (1982) trouvèrent deux familles de vents de disque collimatés : des vents avec des lignes de courant asymptotiquement paraboloidales et des vents dont les lignes de courant convergent vers l'axe de rotation. Dans la première classe de solutions, deux tiers de l'énergie est émise sous forme de flux de Poynting et un tiers sous forme cinétique, alors que les solutions de la deuxième famille sont dominées par l'énergie cinétique du fluide. Dans les deux cas, les solutions divergent sur l'axe, ce qui est caractéristique des solutions autosimilaires en  $r$ . Le bras de levier important permet l'extraction de beaucoup de moment cinétique même pour un faible taux de perte de masse. D'autres solutions autosimilaires en  $r$  ont été étudiées par Contopoulos et Lovelace (1994), Pelletier et Pudritz (1992) et Rosso et Pelletier (1994). Vlahakis et al. (2000) ont montré qu'une solution autosimilaire complète de vent de disque pouvait être construite. Cette solution franchit l'ensemble des trois points critiques simultanément. Le modèle de Blandford et Payne (1982) a aussi été généralisé à la relativité restreinte par Li et al. (1992). Des solutions autosimilaires radiales en relativité restreinte ont également été étudiées (Vlahakis & Königl 2003; 2004) pour décrire les écoulements qui seraient à l'origine des sursauts gamma.

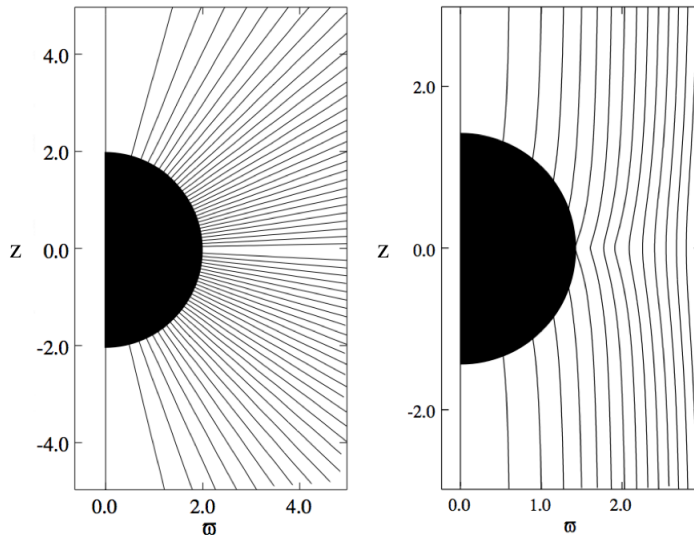


**FIG. 3.1** – Écoulements autosimilaires vus dans le plan poloïdal. En gris, écoulement autosimilaire méridional (jet issu de l’objet central ou de la couronne qui l’entoure). Les surfaces d’auto-similarité (surfaces de nombre de Mach alfvénique constant, représentées par des lignes discontinues) sont des sphères. En noir, écoulement autosimilaire radial (vent de disque). Les surfaces d’auto-similarité sont des cônes. Les lignes de champ magnétique et les lignes d’écoulement sont confondues, sauf dans le disque d’accrétion où l’approximation de la MHD idéale n’est plus valable.

Un modèle différent a été proposé par Sauty et Tsinganos (1994), dans lequel la variable d’auto-similarité est  $\theta$ . Le potentiel magnétique s’écrit alors  $A(r, \theta) \propto f(r)g(\theta)$  avec  $g(\theta) = \sin^2(\theta)$  et les équations de Bernoulli et Grad-Shafranov sont obtenues pour  $f(r)$ . L’adoption de cette loi d’échelle permet une meilleure représentation de la région proche de l’axe de rotation du système où les solutions autosimilaires en  $r$  divergent. Les solutions correspondent soit à des vents super-alfvéniques (Sauty et Tsinganos 1994, Sauty et al. 1999), soit à des jets collimatés : après une expansion quasi radiale, les lignes de champ poloïdales subissent une recollimation et des oscillations, et un régime cylindrique s’installe. Ces solutions ne nécessitent pas l’utilisation d’une équation d’état polytropique<sup>1</sup>. L’équation d’état locale peut être obtenue a posteriori à partir des solutions pour vérifier si elles sont physiquement acceptables. Le modèle a été généralisé à la relativité générale et des solutions ont pu être obtenues en métrique de Schwarzschild (Meliani et al. 2006) à partir des équations GRMHD écrites sous forme vectorielle à l’aide du formalisme 3+1 (Mobarry et Lovelace 1986). Ces solutions ont été récemment appliquées aux jets issus de noyaux actifs de galaxie (Meliani et al. 2010) pour expliquer la dichotomie FRI/FRII.

Le modèle autosimilaire méridional permet d’obtenir des solutions de jets accélérés par la pression du plasma. On dit souvent que l’accélération est thermique par abus de langage, mais le terme de pression peut contenir en plus de la pression cinétique, la pression radiative, la pression des ondes MHD ou tout type de pression turbulente possible. Dans le cas du modèle radial, le mécanisme invoqué pour accélérer le plasma est l’éjection magnétocentrifuge, introduite par Blandford et Payne (1982). Près de la source, le champ magnétique est essentiellement sous forme poloïdale. Jusqu’au rayon d’Alfvén, on peut assimiler les lignes de champ à des tiges rigides car l’énergie magnétique

1.  $P \propto \rho^\gamma$ , où  $\gamma$  est l’indice adiabatique.



**FIG. 3.2** – A gauche : configuration split monopole. A droite : Solution de Wald. Loin du trou noir, cette solution décrit un champ magnétique uniforme aligné avec l’axe de rotation du trou noir. Adapté de Komissarov (2004b).

prédomine. Dans l’hypothèse du flux gelé, les particules glissent le long des lignes de champ magnétique en rotation et sont éjectées si l’inclinaison entre les lignes et l’axe est supérieur à 30 degrés (dans l’hypothèse d’un plasma froid). La contrainte est moins forte pour un plasma chaud (car la pression thermique aide à l’accélération) ou bien si l’espace-temps est lui-même en rotation : Lyutikov (2009) a montré qu’en métrique de Kerr, l’éjection pouvait même se faire le long de l’axe polaire.

La stabilité des solutions autosimilaires cylindriques a également été vérifiée en les prenant comme conditions initiales pour les simulations numériques. Dans un premier temps, les solutions de vent de disque et les solutions de jets d’étoiles jeunes ont été testées séparément (Matsakos et al. 2008) : les solutions de vent de disque (radiales) atteignent systématiquement un état stationnaire alors que la stabilité des solutions de vents stellaires (méridionales) dépend des conditions de chauffage à la base de l’écoulement. La suite de cette étude combine les deux solutions ; un paramètre permet de déterminer la contribution de chacune des composantes (Matsakos et al. 2009). L’écoulement atteint également un état stationnaire.

De nombreuses études ont été réalisées en considérant des magnétosphères de trous noirs *force free* c’est-à-dire des magnétosphères si ténues que les forces électromagnétiques dominent toutes les autres forces (force de gravité, de pression, et force d’inertie). En cherchant des solutions aux équations de Maxwell en géométrie de Kerr, le champ magnétique s’écrit sous la forme d’harmoniques sphériques et différentes configurations peuvent être obtenues ; citons ici le *split monopole* de Michel (1973) et la solution de Wald (1974) (Fig. 3.2).

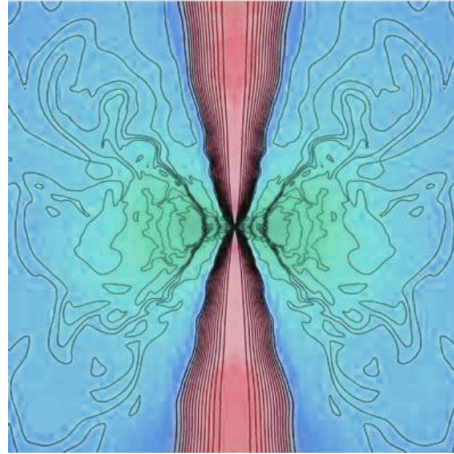
Blandford (1976) et Lovelace (1976) ont été les premiers à discuter de la génération d’un vent électromagnétique issu d’une magnétosphère *force free* provenant d’un disque d’accrétion. Ils montrèrent que la rotation du disque force les lignes de champ à tourner et entraîner le plasma environnant. Nous avons vu dans le chapitre 2 que Blandford et Znajek (1977) ont étudié la possibilité d’extraire de l’énergie directement du trou noir en rotation, en considérant le trou noir comme un conducteur électrique. La différence de potentiel induite par la rotation du trou noir dans le champ magnétique

crée un flux magnétique qui traverse l'horizon. Seul, un champ magnétique ne peut pas extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation. Le trou noir doit être entouré d'une magnétosphère pour permettre le processus d'extraction de l'énergie (cf. chapitre 2).

Les modèles de jets dominés par l'énergie électromagnétique considèrent des rotateurs rapides (trous noirs de Kerr, étoiles à neutrons) immergés dans un champ magnétique à grande échelle maintenu par des sources externes (courants de disque) dont le flux est supposé traverser en partie l'horizon du trou noir. Cette configuration est analogue à l'induction unipolaire proposée par Goldreich et Julian (1969) pour les vents de pulsar ou pour les jets de Poynting (Phinney 1983). Des vents de pulsars relativistes dans une géométrie *split monopole* ont été discutés dans Kennel et al. (1983) et cette étude a été généralisée par Camenzind (1986) qui a traité le problème des rotateurs rapides dans un champ gravitationnel fort. Les écoulements relativistes ont les mêmes points critiques que les écoulements non-relativistes (surfaces magnéto-soniques lente et rapide, surface d'Alfvén). Une équation pour le vent peut être obtenue le long d'un tube de flux. Appl et Camenzind (1993) ont obtenu des solutions à l'équation de Grad-Shafranov relativiste.

Les simulations numériques permettent une analyse tri-dimensionnelle à partir des équations dépendantes du temps. Elles permettent de traiter les termes dissipatifs qui gouvernent la formation des chocs. Les solutions numériques constituent une bonne approximation des solutions exactes, à condition d'utiliser un schéma numérique précis et stable. Les équations MHD sont transformées en un système linéaire par des algorithmes et le choix d'une grille adaptée. La première tentative d'étude numérique du processus d'accrétion-éjection a été réalisée par Uchida et Shibata (1985) qui ont traité le problème en régime axisymétrique en utilisant un schéma numérique de Lax-Wendroff (introduction d'une viscosité artificielle pour traiter les termes dissipatifs). Dans ce modèle, un champ magnétique uniforme traverse le disque verticalement de part en part ; le disque entraîne les lignes de champ dans son mouvement de rotation, ce qui crée un champ magnétique toroïdal. L'accélération du jet est essentiellement magnétocentrifuge. La vitesse d'éjection est égale à plusieurs fois la vitesse képlérienne. Romanova et al. (1997) ont étudié des solutions stationnaires, en prenant le vent de disque comme une condition limite fixe. Le champ magnétique a une géométrie *split monopole* pour le champ magnétique. La matière est accélérée dans la zone de fort champ magnétique et la vitesse de l'écoulement passe par les trois points critiques, pour atteindre un état où la vitesse est supérieure à la vitesse magnéto-sonique rapide.

Dans le cas relativiste, les codes doivent être adaptés pour traiter les équations MHD en relativité générale. Le problème se résout à deux dimensions. Koide et al. (1998) ont été les pionniers dans ce domaine, en étudiant l'évolution temporelle d'un écoulement MHD idéal dans un champ magnétique poloïdal de Wald en présence d'un trou noir de Kerr. L'accélération est à la fois magnétocentrifuge et due au gradient de pression ; la vitesse d'éjection atteint un facteur de Lorentz  $\gamma \sim 2$ . Ces solutions permettent l'extraction de l'énergie du trou noir en rotation (Koide 2003). Stone et Norman (1994) ont utilisé un code numérique où cette fois les termes dissipatifs ne sont pas traités de façon linéaire afin d'étudier le processus d'accrétion sans modéliser l'objet central. Komissarov (2001) a réalisé des simulations numériques dans l'approximation *force free* (où l'inertie du plasma ne joue aucun rôle) dans lesquelles il retrouve la solution de Blandford et Znajek. Cet effort fut critiqué (Punsly et Bini 2004) car ce résultat s'appuyait sur des ondes non physiques émanant très près de l'horizon au début de la simulation, ce qui causait une accélération forte mais non physique du plasma. Komissarov a continué cette étude pour différentes configurations de champ : l'évolution d'une magnétosphère *force*

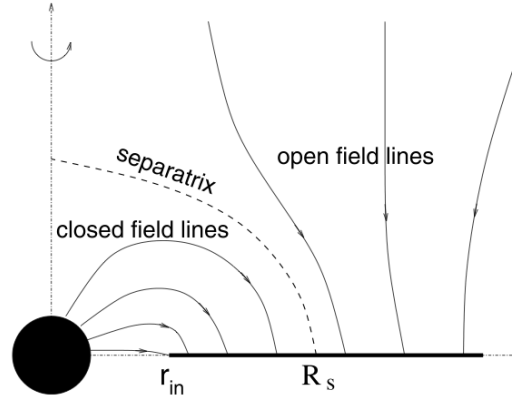


**FIG. 3.3** – Simulation numérique (McKinney 2006). Le champ magnétique est ordonné aux pôles mais turbulent à l'équateur.

*free* dans la configuration d'un champ magnétique de Wald (Komissarov 2004a), l'évolution d'une magnétosphère en MHD idéale dans l'hypothèse simplifiée d'un champ magnétique monopolaire (Komissarov 2004b), et enfin une simulation numérique d'un plasma à faible densité, en MHD idéale et en géométrie de Wald (Komissarov 2005). Cette dernière simulation atteint un état d'équilibre qui est une solution d'accrétion. Cependant, Komissarov a rencontré un problème similaire à Koide (2003) : le plasma subit une déplétion dans certaines régions localisées de l'écoulement, ce qui est une conséquence de l'accrétion. La densité tombe alors rapidement en ces points. Comme le code était adapté à partir d'un code hydrodynamique, il ne pouvait pas traiter le cas de densités trop faibles. Le code s'arrêtait alors avant de pouvoir créer un jet. Pour y remédier, Komissarov implémente une fonction de création de masse afin que la densité atteigne toujours une valeur minimale, sous l'hypothèse que cette injection de masse n'altère pas l'état final. La simulation atteint la solution de Blandford et Znajek de façon similaire au résultat *force free*.

McKinney (2006), puis McKinney et Narayan (2007), ont étudié le système disque et jet. Le disque d'accrétion est une condition limite obtenue à l'aide de simulations numériques de disques turbulents alors que l'écoulement central est décrit par un modèle *force free*. Ces simulations numériques montrent l'interaction entre les deux composantes, la composante centrale du jet avec un champ magnétique ordonné et la composante issue du disque avec un champ magnétique turbulent (Fig. 3.3). Ces simulations ont été utilisées pour étudier l'effet du spin du trou noir et expliquer ainsi la dichotomie des jets de noyaux actifs de galaxie (Tchekhovskoy et al. 2010).

D'autres modèles semi-analytiques ont permis d'étudier la structure de magnétosphères *force free* autour d'un trou noir, d'abord en métrique de Schwarzschild (Uzdensky 2004) puis en métrique de Kerr (Uzdensky 2005), où est traité le cas d'une configuration magnétique plus complexe, dans laquelle une partie de la magnétosphère est connectée au disque d'accrétion et une autre partie qui comprend des lignes de champ magnétique ouvertes (Fig. 3.4). La zone de magnétosphère fermée ne peut exister dans un état stationnaire que si l'objet central est un trou noir, car nous avons vu dans le chapitre 2 que l'horizon était considéré comme une membrane résistive. Dans le cas où l'objet central est une étoile dont la surface est très conductrice, les lignes de champ magnétique sont gelées à la surface de l'étoile. Si elles sont également ancrées dans le disque d'accrétion, la différence de rotation entre l'étoile et le disque va tordre les lignes de champ et aucune configuration stable ne



**FIG. 3.4** – Schéma d’une magnétosphère d’un trou noir avec une zone connectée magnétiquement au disque (Uzdensky 2005).

Schwarzschild $\left( h = \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad \varpi = r \sin \theta \right)$	Kerr $\left( h = \frac{\rho}{\Sigma} \sqrt{\Delta}, \quad \varpi = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta, \quad \omega = \frac{2caMr}{\Sigma^2} \right)$
$v_\varphi = \frac{hc^2}{\Omega\varpi} \frac{M^2 x_A^2 - (\frac{\varpi\Omega}{c})^2 (1 - x_A^2)}{M^2 - h^2 (1 - x_A^2)}$	$v_\varphi = \frac{hc^2}{(\Omega - \omega)\varpi} \frac{M^2 x_A^2 (1 - \frac{\omega}{\Omega}) - \frac{\varpi^2 (\Omega - \omega)^2}{c^2} (1 - x_A^2)}{M^2 (1 - \frac{\omega}{\Omega} x_A^2) - h^2 (1 - x_A^2)}$
$B_\varphi = \frac{\Psi_A \mathcal{E}}{h\Omega\varpi} \frac{h^2 x_A^2 - (\frac{\varpi\Omega}{c})^2}{M^2 - h^2 + (\frac{\varpi\Omega}{c})^2}$	$B_\varphi = \frac{\Psi_A \mathcal{E}}{h(\Omega - \omega)\varpi} \frac{h^2 x_A^2 \left[ 1 - \frac{\omega}{\Omega} \left( 1 - \frac{\varpi^2 (\Omega - \omega)^2}{c^2 h^2} \right) \right] - \frac{\varpi^2 (\Omega - \omega)^2}{c^2}}{M^2 - h^2 + \frac{\varpi^2 (\Omega - \omega)^2}{c^2}}$
$h\gamma w = \mathcal{E} \frac{M^2 - h^2 (1 - x_A^2)}{M^2 - h^2 + (\frac{\varpi\Omega}{c})^2}$	$h\gamma w = \mathcal{E} \frac{M^2 (1 - \frac{\omega}{\Omega} x_A^2) - h^2 (1 - x_A^2)}{M^2 - h^2 + (\frac{\varpi(\Omega - \omega)}{c})^2}$

**TAB. 3.1** – Composantes toroïdales de la vitesse et du champ magnétique et facteur de Lorentz.

pourra être atteinte. Les modélisations de Uzdensky (2005) montre que l’augmentation du spin du trou noir a pour effet de réduire la partie couplée magnétiquement au disque d’accrétion. On pouvait s’attendre à un tel résultat si les lignes de champ sont connectées au disque : en effet, le rayon de la dernière orbite stable diminue avec la rotation du trou noir et la zone de magnétosphère fermée sera par conséquent plus proche du trou noir et pourra être de ce fait de plus petite taille.

## 3.2 Construction du modèle

Après avoir introduit le cadre de la modélisation, venons-en à la construction du modèle autosimilaire méridien en métrique de Kerr. Pour cela nous allons présenter les hypothèses qui sont de deux types : des hypothèses sur la géométrie de l’écoulement et des hypothèses sur les grandeurs physiques. Puis nous introduirons les équations et la façon de les intégrer pour obtenir des solutions semi-analytiques.

### 3.2.1 Normalisation des grandeurs à la transition alfvénique

Nous avons déterminé au chapitre précédent les composantes poloïdales de la vitesse et du champ magnétique. En utilisant les intégrales premières (2.67), (2.70) et (2.72), nous sommes maintenant capables d’écrire sous forme algébrique le facteur de Lorentz ainsi que les composantes toroïdales



de la vitesse et du champ magnétique. Le nombre de Mach alfvénique poloïdal (Breitmoser et Camenzind 2000) est introduit au préalable et correspond au rapport de la vitesse poloïdale et de la vitesse d'Alfvén poloïdale :

$$M^2 = h^2 \frac{v_p^2}{B_p^2} = \frac{\Psi_A^2 w}{4\pi n c^2} \quad (3.1)$$

Ceci permet de simplifier l'écriture des composantes. Le tableau 3.1 présente une comparaison des expressions en métrique de Schwarzschild et en métrique de Kerr. Nous avons également introduit le paramètre  $x_A$  qui mesure le rapport entre l'énergie du rotateur magnétique et l'énergie totale conservée le long d'une ligne d'écoulement :  $x_A^2 = L\Omega/\mathcal{E}$ .

Les équations de la table 3.1 possèdent une singularité qui définit une surface critique, la surface d'Alfvén, pour laquelle les dénominateurs s'annulent :

$$M^2 = h^2 \left( 1 - \frac{\varpi^2(\Omega - \omega)^2}{h^2 c^2} \right) \quad (3.2)$$

A la surface d'Alfvén, il y a équipartition entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique du plasma :

$$\frac{B_\star^2}{8\pi} = \frac{1}{2} n_\star \gamma_\star^2 \frac{w_\star}{c^2} v_\star^2 \quad (3.3)$$

Il n'est alors possible d'assurer la transition entre un régime subalfvénique et superalfvénique qu'en imposant une condition de régularité à la surface d'Alfvén afin d'éviter la divergence des composantes toroïdales et du facteur de Lorentz. La surface d'Alfvén se trouve toujours à l'intérieur du cylindre de lumière externe. De plus, au delà de cette surface, la dynamique de l'écoulement est dominée par l'inertie du fluide. Nous allons supposer que les effets du cylindre de lumière sur la dynamique de l'écoulement sont négligeables,  $\varpi^2(\Omega - \omega)^2/h^2 c^2 \rightarrow 0$ , car c'est ce qui a été fait pour le modèle en métrique de Schwarzschild (Meliani et al. 2006). Cette hypothèse revient à se placer loin du cylindre de lumière et à négliger les effets du champ électrique par rapport au champ magnétique. La relation (3.2) s'écrit alors  $M_\star = h_\star$ .

Dans le modèle, toutes les grandeurs physiques vont être normalisées à leur valeur à la transition alfvénique le long de l'axe polaire, et sont dénotées par une étoile  $\star$ . On utilise les notations introduites par Sauty et Tsinganos (1994) pour définir un rayon sphérique  $R$  sans dimension et un flux magnétique  $\alpha$  sans dimension,

$$R = \frac{r}{r_\star} \quad (3.4)$$

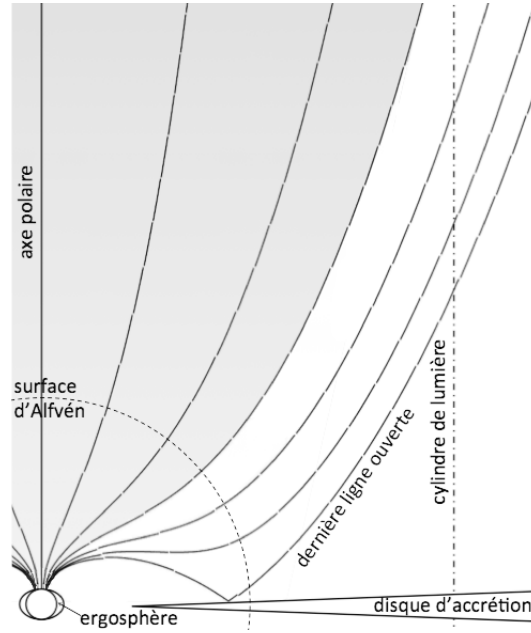
$$\alpha(R) = \frac{2A}{r_\star^2 B_\star} \quad (3.5)$$

### 3.3 Hypothèses sur la géométrie de l'écoulement

La géométrie de l'écoulement est représentée à la Fig. 3.5.

#### 3.3.1 Forme des surfaces alfvéniques

En l'absence de disque d'accrétion, les simulations numériques de la surface d'Alfvén donnent un ellipsoïde (Sakurai 1985). Sauty et Tsinganos (1994) ont montré qu'un développement au premier



**FIG. 3.5** – Représentation schématique de la géométrie d'un écoulement autosimilaire méridional. Les lignes de champ magnétiques et les lignes d'écoulement sont confondues dans le plan poloïdal. La surface d'Alfvén est sphérique par hypothèse. Comme nous négligeons les effets du cylindre de lumière dans notre modèle, nous ne pouvons garder que les lignes qui ne traversent pas le cylindre de lumière (partie de l'écoulement en grisé). Etant donné que nous faisons un développement limité avec la colatitude  $\theta$ , le modèle est d'autant plus juste que  $\theta$  est petit.

ordre en  $\alpha$  des forces centrifuge et de pincement magnétique, qui dominent loin du trou noir, est compatible avec l'hypothèse d'une surface alfvénique sphérique. On adopte donc cette hypothèse ; le nombre de Mach alfvénique est seulement fonction du rayon :

$$M^2(R, \alpha) = M^2(R), \quad (3.6)$$

ce qui est compatible avec le fait que  $M_\star = h_\star$  pour  $R = 1$ .

Nous allons maintenant développer les grandeurs physiques au premier ordre selon la coordonnée de la ligne d'écoulement  $\alpha$ , flux magnétique sans dimension. Pour cela la première hypothèse que nous devons faire concerne la fonction que nous allons choisir pour représenter  $\alpha$ .

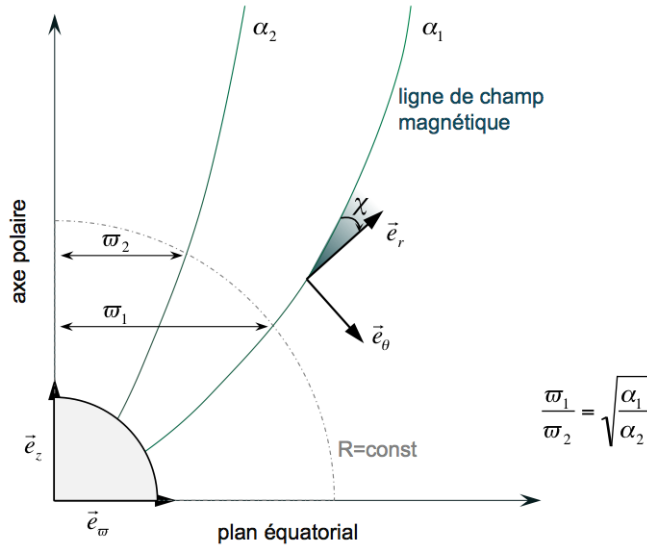
### 3.3.2 Forme du flux magnétique

Le flux magnétique total englobe la zone qui s'étend de l'axe, où  $\alpha = 0$  jusqu'à la dernière ligne de champ ouverte, où  $\alpha = \alpha_{\text{out}}$ . Ainsi le flux magnétique total est (théorème de Stokes) :

$$F_{\text{mag}} = \int_S \vec{B}_p \cdot d\vec{S} = \pi r_\star^2 B_\star \alpha_{\text{out}} \quad (3.7)$$

Afin de séparer les variables, le flux magnétique s'écrit comme le produit d'une fonction qui dépend de  $r$  et d'une fonction qui dépend de  $\theta$ . Le flux magnétique peut être développé en termes de multipôles,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{n=\infty} f_n(R) \sin^{2n} \theta \quad (3.8)$$



**FIG. 3.6** – Définition de l'angle  $\chi$  entre le vecteur  $\vec{B}_P$  et le vecteur radial  $\vec{e}_r$ .

Le développement à l'ordre 1 en  $\alpha$  consiste à ne conserver que l'ordre dipolaire,

$$\alpha = f(R) \sin^2 \theta \quad (3.9)$$

Cette hypothèse est proche du cas solaire par exemple, car en première approximation, la topologie du champ magnétique du Soleil est approximativement dipolaire (les déviations observées peuvent être décrites comme des composantes quadrupolaires du champ magnétique).

La fonction  $f(R)$  mesure le flux du champ magnétique et sa forme décrit le degré de collimation de l'écoulement. Pour illustrer cela nous allons calculer l'angle d'évasement des lignes magnétiques par rapport au cas purement radial. On obtient l'expression du champ magnétique poloïdal à partir de l'équation (2.25) :

$$\vec{B}_p = \begin{pmatrix} \frac{r_*^2 B_*}{\Sigma} f \cos \theta \\ -\frac{r_* B_* \sqrt{\Delta}}{2\Sigma} \frac{df}{dR} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

ce qui donne en ne gardant que le développement limité au premier ordre :

$$\vec{B}_p = \begin{pmatrix} \frac{B_*}{R^2 + \sigma^2} f \cos \theta \\ -\frac{h B_*}{2\sqrt{R^2 + \sigma^2}} \frac{df}{dR} \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

L'angle  $\chi$  mesuré par le ZAMO entre le champ magnétique poloïdal  $\vec{B}_p$  et  $\vec{e}_r$  est donné par (cf. Fig. 3.6)

$$\tan \chi = \frac{B_\theta}{B_r} = \frac{h}{2} F \tan \theta \quad (3.12)$$

où  $F(R)$  est le facteur d'expansion qui définit la forme des lignes d'écoulement poloïdales :

$$F = \frac{d \ln f}{d \ln R} = \left. \frac{\partial \ln \alpha}{\partial \ln R} \right|_\theta. \quad (3.13)$$

$F = 0$  correspond au régime radial ; pour  $F < 0$  le jet est décollimaté. Si  $0 < F < 2$ , on est dans un régime d'expansion moins rapide que l'expansion radiale. Le régime cylindrique est atteint lorsque  $F = 2$ . Enfin, pour  $F > 2$ , les lignes magnétiques se referment sur l'axe. Dans la suite, nous appellerons cette fonction facteur d'expansion puisqu'elle caractérise la géométrie des lignes de champ dans le plan poloïdal.

Nous allons ici introduire une fonction plus facile à utiliser et à comprendre que  $f(R) : G(R)$ . Cette fonction représente le rayon cylindrique adimensionné. Pour cela, on suppose que la section efficace d'un tube de flux est proportionnelle à  $\alpha$  :

$$S(R, \alpha) = \pi \varpi^2 = \pi r_\star^2 G^2(R) \alpha. \quad (3.14)$$

Afin de normaliser cette quantité à la surface d'Alfvén, on choisit  $G(R = 1) = 1$  d'où  $G(R)$  est le rayon cylindrique en unité de rayon cylindrique alfvénique. Donc  $G(R) = \varpi / \varpi_A$  avec  $\varpi_A = r_\star \sqrt{\alpha}$ .

La fonction  $\alpha$ , qui représente le flux magnétique adimensionné, est reliée au rayon cylindrique adimensionné  $G(R)$  par l'expression suivante :

$$\alpha = \frac{(R^2 + \sigma^2)}{G^2} \sin^2 \theta. \quad (3.15)$$

et le facteur d'expansion  $F$  s'écrit comme la la dérivée logarithmique (avec un signe moins) du rayon cylindrique déjà utilisé dans la théorie du vent solaire (Kopp et Holzer 1976) :

$$F = 2 \left( 1 - \frac{d \ln G}{d \ln R} \right). \quad (3.16)$$

### 3.4 Hypothèses sur les grandeurs physiques

#### 3.4.1 Densité et pression

Le choix de la fonction densité est imposé par la définition du nombre de Mach alfvénique et la condition de variables séparables sur  $(R, \theta)$ ,

$$n = \frac{n_\star w h_\star^2}{w_\star M^2} (1 + \delta \alpha), \quad (3.17)$$

$n_\star$  est la densité alfvénique et  $\delta$  un paramètre décrivant la déviation à la symétrie sphérique.

Nous devons aussi introduire une fonction qui donne la forme de la pression dans le jet. Notre modèle permet d'étudier les propriétés physiques de l'écoulement près de l'axe de rotation. Dans cette région, la contribution de la force magnétique à l'accélération est petite, les effets thermiques sont donc essentiels, et, donc également la structure de la pression. Nous adopterons, comme pour la densité, une pression dont la variation est linéaire d'une ligne d'écoulement à l'autre :

$$P = P_0 + \frac{1}{2} \gamma_\star^2 n_\star \frac{w_\star}{c^2} v_\star^2 \Pi (1 + \kappa \alpha), \quad (3.18)$$

Le paramètre  $\kappa$  mesure la déviation de la forme de la pression à la symétrie sphérique.

Dans le modèle, on considère le tenseur énergie-impulsion d'un gaz parfait (Eq. 2.54). La pression totale correspond à la somme des pressions qui entrent en jeu dans la dynamique de l'écoulement : la pression cinétique, la pression des ondes MHD... La température n'est plus une mesure de l'énergie cinétique du système mais une mesure de toutes les formes d'énergie due à toutes les formes de pression et c'est donc une température effective.

On a :

$$P = nk_B T \quad (3.19)$$

ce qui nous donne une expression pour la température :

$$T_{\text{eff}} = \frac{P}{nk_B} = \frac{\gamma_\star^2}{2k_B} \frac{v_\star^2}{c^2} \frac{w_\star^2}{w h_\star^2} \Pi M^2 \frac{1 + \kappa\alpha}{1 + \delta\alpha} + \frac{P_0}{nk_B} \quad (3.20)$$

### 3.4.2 Potentiel gravitationnel

L'approximation de faible ouverture permet un développement de la métrique au premier ordre en  $\sin^2 \theta$  :

$$\varpi \approx \sqrt{r^2 + a^2} \sin \theta \quad (3.21)$$

$$\omega \approx \frac{2camr}{(r^2 + a^2)^2} \left( 1 + \frac{a^2 \Delta}{(r^2 + a^2)^2} \sin^2 \theta \right) \quad (3.22)$$

$$h \approx \sqrt{1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2}} \left( 1 - \frac{a^2 mr}{(r^2 + a^2)^2} \sin^2 \theta \right) \quad (3.23)$$

Plusieurs paramètres sont introduits pour décrire le potentiel gravitationnel. Le premier paramètre,  $\nu$ , introduit par Sauty et Tsinganos (1994), représente le rapport de l'énergie gravitationnelle sur l'énergie cinétique à la surface d'Alfvén critique. C'est la vitesse d'échappement normalisée à la vitesse alfvénique,

$$\nu = \frac{v_{\text{esc},\star}}{v_\star} = \sqrt{\frac{2GM}{r_\star c^2}} = \sqrt{\frac{2m}{r_\star} \frac{c}{v_\star}} \quad (3.24)$$

Le deuxième paramètre,  $\mu$  introduit par Meliani et al. (2006) est le rayon de Schwarzschild normalisé au rayon alfvénique :

$$\mu = \frac{r_G}{r_\star} = \frac{2m}{r_\star} \quad (3.25)$$

Ce paramètre exprime la distance entre la surface d'Alfvén et l'objet central et décrit les effets de la courbure de l'espace sur l'écoulement. Le paramètre  $\mu$  est équivalent au paramètre  $m$  dans le modèle de vent magnétisé relativiste de Daigne et Drenkhahn (2002). Dans le cas où  $\mu \rightarrow 0$  on retrouve le modèle de Sauty et Tsinganos (1994). Il apparaît une condition pour que la vitesse de l'écoulement reste inférieure à celle de la lumière :

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\nu} = \frac{v_\star}{c} < 1 \quad (3.26)$$

En métrique de Kerr, le rayon gravitationnel diminue avec le spin du trou noir. Afin d'être en mesure de comparer le modèle classique (Sauty et Tsinganos 1994), relativiste en métrique de Schwarzschild (Meliani et al. 2006) et relativiste en métrique de Kerr (Globus et al. 2010), nous devons introduire

un paramètre supplémentaire pour décrire le spin du trou noir. Cette opération permet de garder le rayon de Schwarzschild comme unité de longueur et paramètre de courbure. Le paramètre contrôlant la rotation du trou noir est simplement le paramètre de spin  $a$  normalisé à la surface d'Alfvén :

$$\sigma = \frac{a}{r_\star} \quad (3.27)$$

On peut donc réécrire les équations (3.21-3.23) à l'aide des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  :

$$\varpi \equiv r_\star \sqrt{R^2 + \sigma^2} \sin \theta \quad (3.28)$$

$$\omega \equiv \frac{\mu \sigma R c}{r_\star (R^2 + \sigma^2)^2} \left[ 1 + \frac{\sigma^2}{R^2 + \sigma^2} \left( 1 - \frac{\mu R}{R^2 + \sigma^2} \right) \sin^2 \theta \right] \quad (3.29)$$

$$h \equiv \sqrt{1 - \frac{\mu R}{R^2 + \sigma^2} \left( 1 - \frac{\mu \sigma^2 R}{2(R^2 + \sigma^2)^2} \sin^2 \theta \right)} \quad (3.30)$$

### 3.4.3 Taux de perte de masse

Le flux de particules  $\Psi$  peut être défini comme une fonction du flux magnétique. Il ne nous importe de connaître que la forme de  $\Psi_A$ , flux de particules par unité de flux magnétique. En combinant les équations (3.1) et (3.6) on obtient :

$$\Psi_A^2 = 4\pi c^2 \frac{n_\star h_\star^2}{w_\star} (1 + \delta\alpha), \quad (3.31)$$

Le taux de perte de masse est alors donné par :

$$\dot{M} = \int \int_S m_{\text{part}} h \gamma n \vec{v}_P \cdot d\vec{S} = m_{\text{part}} \pi r_\star^2 h_\star \gamma_\star n_\star v_\star \psi(\alpha_{out}) \quad (3.32)$$

où (Sauty et Tsinganos 1994) :

$$\psi(\alpha_{out}) = \begin{cases} \alpha_{out} & (\delta = 0) \\ \frac{2}{3\delta} \left[ (1 + \delta\alpha_{out})^{\frac{3}{2}} - 1 \right] & (\delta \neq 0) \end{cases} \quad (3.33)$$

### 3.4.4 Moment cinétique et vitesse d'isrotation

La grandeur  $L \Psi_A$  est importante dans le modèle. Elle représente le moment cinétique par unité de flux magnétique ( $L$  étant le moment cinétique spécifique, i.e. par unité de masse). Cette fonction permet d'exprimer la perte de moment cinétique  $\dot{J}$  :

$$\dot{J} = \int \int_S m_{\text{part}} L h \gamma n v_p \cdot d\vec{S} = \frac{B_\star r_\star^2}{4} \int_0^\alpha L \Psi_A d\alpha \quad (3.34)$$

La perte de moment cinétique doit être nulle le long de l'axe,  $L \Psi_A \propto \alpha$  :

$$L \Psi_A = h_\star \lambda B_\star r_\star \alpha, \quad (3.35)$$

où  $\lambda$  est une constante mesurant la rotation. Le taux de perte de moment angulaire est donc développé au premier ordre en  $\alpha$  comme dans le modèle original de Sauty et Tsinganos (1994).

On peut donc maintenant remplacer  $\Psi_A$  par son expression (3.31) pour obtenir l'expression du moment cinétique spécifique :

$$L = \frac{\lambda B_* r_* \sqrt{\frac{w_*}{c^2}}}{\sqrt{4\pi n_*}} \frac{\alpha}{\sqrt{1 + \delta\alpha}} \approx \frac{\lambda B_* r_* \sqrt{\frac{w_*}{c^2}}}{\sqrt{4\pi n_*}} \alpha \quad (\alpha \text{ petit}) \quad (3.36)$$

Enfin, la dernière hypothèse à introduire est celle sur  $\Omega$ . En substituant  $L$  par sa fonction (3.36) dans l'expression du rayon cylindrique alfvénique on obtient une rotation différentielle qui varie dans la direction transverse comme l'inverse de la racine carrée de la densité. Le développement à l'ordre un en  $\alpha$  donne la forme suivante :

$$\Omega = \lambda h_* \frac{v_*}{r_*} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\alpha}} \approx \frac{\lambda h_* v_*}{r_*} \quad (\alpha \text{ petit}) \quad (3.37)$$

ce qui nous permet d'introduire une nouvelle manière d'adimensionner  $\omega$ , vitesse angulaire d'entraînement des référentiels,

$$\omega = h_* \frac{v_*}{r_*} \bar{\omega}. \quad (3.38)$$

La paramètre  $\lambda$  détermine la vitesse de rotation  $\Omega$ . La différence  $\Omega - \omega$  s'exprime en fonction d'un nouveau paramètre,  $\lambda\aleph$  :

$$\Omega - \omega = h_* \frac{v_*}{r_*} \lambda \left(1 - \frac{\bar{\omega}}{\lambda}\right) \equiv h_* \frac{v_*}{r_*} \lambda\aleph. \quad (3.39)$$

#### En résumé :

Nous avons supposé que les grandeurs physiques peuvent être développées au premier ordre en  $\alpha$ , et les hypothèses du modèle font intervenir quatre fonctions sans dimension, dont deux fonctions qui vont contrôler la géométrie de l'écoulement :

- La fonction  $G(R)$ , qui donne la variation du rayon cylindrique  $\varpi$  avec la distance à l'origine  $R$ ,
- La fonction  $F(R)$ , facteur d'expansion, qui mesure la déviation de l'angle  $\chi$  entre le vecteur champ magnétique poloïdal  $\vec{B}_P$  et le vecteur radial  $\vec{e}_R$ ,

et deux fonctions qui vont contrôler la dynamique de l'écoulement :

- La fonction  $M^2(R)$ , qui est le nombre de Mach alfvénique poloïdal,
- La fonction  $\Pi(R)$ , qui mesure la pression le long de l'axe polaire.

Le modèle comporte six paramètres libres dont on rappelle la signification :

- Le paramètre  $\delta$  représente l'écart à la symétrie sphérique de la densité. Pour  $\delta > 0$  ( $\delta < 0$ ) la densité augmente (diminue) lorsque on s'éloigne de l'axe.
- Le paramètre  $\kappa$  représente l'écart à la symétrie sphérique de la pression. Pour  $\kappa > 0$  ( $\kappa < 0$ ) la pression augmente (diminue) lorsque on s'éloigne de l'axe.
- Le paramètre  $\lambda$  est relié à la rotation des lignes d'écoulement à la surface d'Alfvén. C'est en quelque sorte une mesure du bras de levier qu'exercent les lignes de champ magnétique.
- Le paramètre  $\nu$  donne le rapport entre la vitesse d'échappement et la vitesse d'Alfvén.
- Le paramètre  $\mu$  représente le rayon de Schwarzschild adimensionné.
- Le paramètre  $\sigma$  mesure le spin du trou noir Pour  $0 < a/m < 1$  on a  $0 < \sigma < \mu/2$ .

### 3.5 Equations du modèle

La vitesse et le champ magnétique peuvent maintenant être exprimés exclusivement avec les fonctions et paramètres que nous venons de citer. Les quantités  $N_B$ ,  $N_V$  et  $D$  afin de simplifier l'écriture des composantes (Sauty et Tsinganos 1994, Meliani et al. 2006) :

$$N_B = \frac{h^2}{h_\star^2} - G^2, \quad (3.40)$$

$$N_V = \frac{M^2}{h_\star^2} - G^2, \quad (3.41)$$

$$D = \frac{h^2}{h_\star^2} - \frac{M^2}{h_\star^2}. \quad (3.42)$$

La champ magnétique et le champ de vitesse s'écrivent dans l'hémisphère nord ( $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ) :

$$B_r = \frac{B_\star}{G^2} \cos \theta, \quad (3.43)$$

$$B_\theta = -\frac{B_\star h F}{G^2} \frac{1}{2} \sin \theta, \quad (3.44)$$

$$B_\varphi = -\frac{h_\star \lambda \aleph}{h} \frac{B_\star N_B}{G^2} \frac{1}{D} \sqrt{R^2 + \sigma^2} \sin \theta, \quad (3.45)$$

$$v_r = \frac{v_\star M^2}{h_\star^2 G^2} \cos \theta, \quad (3.46)$$

$$v_\theta = -\frac{v_\star M^2 h F}{h_\star^2 G^2} \frac{1}{2} \sin \theta, \quad (3.47)$$

$$v_\varphi = -\frac{h}{h_\star} \lambda \aleph \frac{v_\star N_V}{G^2} \frac{1}{D} \sqrt{R^2 + \sigma^2} \sin \theta. \quad (3.48)$$

Dans l'hémisphère sud ( $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ), il suffit de renverser le sens de la composante poloïdale du champ de vitesse et la composante toroïdale du champ magnétique. Ces équations ont la même forme que celles en métrique de Schwarzschild avec  $\lambda$  remplacé par  $\lambda \aleph$ , ce qui est normal puisque les champs sont mesurés dans le référentiel du ZAMO. Il est également important de noter que les composantes toroïdales (Eq. 3.45 et 3.48) ont été développés pour  $L\omega$  petit devant les autres formes d'énergie. Le modèle étant valable dans la limite des petits angles, donc proche de l'axe, cette approximation est justifiée (sur l'axe, le moment cinétique s'annule). De la même façon, on obtient les expressions suivantes pour l'enthalpie et la densité particulaire :

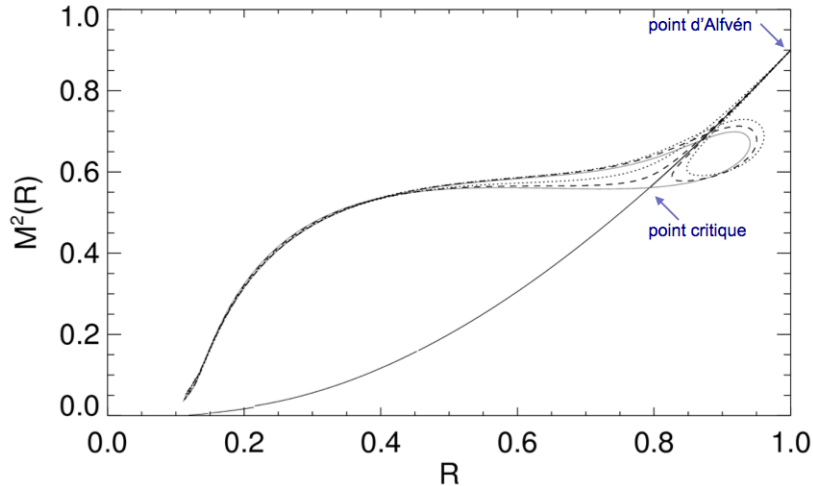
$$h\gamma w = h_\star \gamma_\star w_\star \left[ 1 - \frac{\mu \lambda^2}{\nu^2} \left( \aleph^2 \frac{N_B}{D} + \frac{\bar{\omega}}{\lambda} \right) \alpha \right], \quad (3.49)$$

$$h\gamma n = h_\star \gamma_\star n_\star \frac{h_\star^2}{M^2} \left[ 1 + \delta\alpha - \frac{\mu \lambda^2}{\nu^2} \left( \aleph^2 \frac{N_B}{D} + \frac{\bar{\omega}}{\lambda} \right) \alpha \right], \quad (3.50)$$

### 3.6 La résolution des équations GRMHD

A l'aide des expressions des forces (voir annexe C) j'ai déterminé les composantes radiale et méridionale de l'équation de la dynamique (2.58). Les équations sont séparables en  $R$  et  $\theta$ , elles sont présentées en annexe B. J'obtiens un système d'équations différentielles ordinaires pour les quatre





**FIG. 3.7** – Le calcul de la solution se fait en trois temps. On détermine à chaque  $R$  les valeurs des fonctions  $M^2(R)$ ,  $G(R)$ ,  $F(R)$  et  $\Pi(R)$  (seule la première fonction est représentée ici). On commence l'intégration au point d'Alfvén  $R = 1$  vers les  $R$  décroissants. La recherche du point critique se fait par itérations successives (lignes en tiretées et pointillées) puis on recommence l'intégration depuis le point critique (ici, à  $R \approx 0.8$ ) vers  $R = 0$ . Le point critique correspond au point magnéto-sonique lent. Dans un troisième temps, on cherche la solution dans la zone super-alfvéenique. Le point magnéto-sonique rapide est confondu avec le point d'Alfvén dans le modèle. L'exemple présenté ici correspond à la solution (a) de la Tab. 5.2.

fonctions  $M^2$ ,  $G$ ,  $F$  et  $\Pi$ . La solution est obtenue après une série d'itérations consistant à intégrer en amont et en aval du point d'Alfvén. Le point critique est traversé à chaque itération et les paramètres sont modifiés jusqu'à ce que les valeurs souhaitées soient atteintes (cf. Fig. 3.7).

### 3.7 Correspondances avec les modèles précédents

Les équations du modèle en Schwarzschild (Meliani et al. 2006) sont obtenues en posant simplement  $\sigma = 0$  dans les expressions (3.43-3.50). La construction du modèle en métrique de Kerr m'a permis de trouver des solutions de jets issus de trous noirs en rotation. Cependant, avant de traiter le cas relativiste, le schéma numérique a été vérifié dans l'approximation newtonnienne ( $\mu = 0$ ,  $\sigma = 0$ ) pour calculer des solutions de jets d'étoiles jeunes, qui seront présentées au chapitre 4. Nous rappelons ici les équations du modèle de Sauty et Tsinganos (1994) qui peuvent être obtenue en revenant à un espace de Minkowski ( $\mu = \sigma = 0$ ) et pour des vitesses non relativistes ( $v \ll c$ ).

Le système d'équations différentielles ordinaires obtenues pour  $M^2(R)$ ,  $F(R)$ ,  $\Pi(R)$  et  $G(R)$  est donné en annexe pour le modèle en Schwarzschild comme pour le cas newtonien. Rappelons que dans le modèle newtonien, le paramètre  $\nu$  est relié à l'accélération gravitationnelle par :

$$\vec{g} = -\frac{\mathcal{G}\mathcal{M}}{r^2} \hat{r} = -\frac{1}{2} \frac{v_*^2}{r_*} \frac{\nu^2}{R^2} \hat{r}, \quad (3.51)$$

où  $\mathcal{M}$  est la masse de l'étoile. Ce paramètre représente toujours la vitesse d'échappement poloïdale normalisée par la vitesse poloïdale à la surface d'Alfvén,

$$\nu^2 = \frac{2\mathcal{G}\mathcal{M}}{r_* v_*^2}, \quad (3.52)$$

Les équations s'écrivent,

$$B_r = B_\star \frac{1}{G^2(R)} \cos \theta, \quad (3.53)$$

$$B_\theta = -B_\star \frac{1}{G^2(R)} \frac{F(R)}{2} \sin \theta, \quad (3.54)$$

$$B_\varphi = -B_\star \frac{\lambda}{G^2(R)} \frac{1 - G^2(R)}{1 - M^2(R)} R \sin \theta, \quad (3.55)$$

$$v_r = v_\star \frac{M^2(R)}{G^2(R)} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 + \delta\alpha(R, \theta)}}, \quad (3.56)$$

$$v_\theta = -v_\star \frac{M^2(R)}{G^2(R)} \frac{F(R)}{2} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 + \delta\alpha(R, \theta)}}, \quad (3.57)$$

$$v_\varphi = v_\star \frac{\lambda}{G^2(R)} \frac{G^2(R) - M^2(R)}{1 - M^2(R)} \frac{R \sin \theta}{\sqrt{1 + \delta\alpha(R, \theta)}}. \quad (3.58)$$

$$P(R, \alpha) = \frac{1}{2} \rho_\star v_\star^2 \Pi(R) [1 + \kappa\alpha] + P_0. \quad (3.59)$$

$$\rho(R, \alpha) = \frac{\rho_\star}{M^2(R)} (1 + \delta\alpha). \quad (3.60)$$

avec

$$M^2 \equiv M^2(r) = 4\pi\rho \frac{v_p^2}{B_p^2}, \quad (3.61)$$

### Vers les applications du modèle

Les deux chapitres suivants concernent l'étude de solutions obtenues avec ce modèle. Nous présenterons d'abord dans le chapitre 4 les solutions obtenues dans l'approximation newtonienne et appliquées aux jets stellaires puis des solutions de jets de noyaux actifs de galaxie au chapitre 5.



## Solutions de jets d'étoiles jeunes

*Even a perfect model of a phenomenon, that gives all the observables correctly, is not good science until it is analysed to show which aspects are essential for the phenomenon.*

D. Lynden-Bell

Ce chapitre présente des solutions calculées avec le code développé pour le modèle relativiste décrit précédemment mais en se plaçant dans l'approximation newtonienne. Elles ont permis de valider le schéma numérique et ont fait l'objet d'une publication (Sauty et al. 2011).

★ ★

Les étoiles naissent dans les nuages denses de matière interstellaire essaimés à travers la Galaxie. Ces sites de formation stellaire sont signalés par le gaz et la poussière ionisés par les étoiles massives, sur le point de naître, qui sont alors âgées de 1 à 10 million d'années. Leur fonction principale est d'accréter la matière environnante et d'éjecter de la matière sous forme de jets. Les détections infrarouge indiquent la présence de disques. Beaucoup de ces objets sont encore dans des cocons. Le télescope spatial Hubble inspecta la nébuleuse d'Orion ce qui revela de nombreuses étoiles possédant un disque d'accrétion. On les appela *proplyds* pour disques proto-planétaires, mais ces disques peuvent disparaître avant de pouvoir former des planètes. D'autres disques ont aussi été observés autour d'étoiles extrêmement jeunes, cette fois dans la constellation du Taureau, qui est une des régions de formation stellaire les plus proches. Nous allons étudier les jets issus de ces étoiles qu'on appelle T Tauri.

### 4.1 Contexte général

Les observations de régions de formation stellaire montrent que de nombreuses étoiles T Tauri émettent des jets bien collimatés. Ces jets de plasma sont accélérés à des vitesses de l'ordre de quelques centaines de km/s (Bally et al. 2009) et sont collimatés sur de très grandes distances (Dougados et al. 2002). Les jets sont généralement associés aux étoiles T Tauri classiques (CTTS), étoiles de faible masse  $\leq 2M_{\odot}$  dans la dernière étape de leur évolution pré-séquence principale et qui sont de toute évidence associées à un disque d'accrétion. L'écoulement pourrait être issu du disque képlérien (Cabrit et André 1991) mais on peut également supposer qu'une partie importante

du jet (voir la totalité) pourrait être éjectée par l'étoile elle-même, du moins pour les étoiles T Tauri présentant un taux d'accrétion faible.

Les observations montrent qu'approximativement la moitié des étoiles T Tauri tournent à environ 10% ou moins de leur vitesse de rupture (Matt et al. 2010). Ceci indique qu'un mécanisme très efficace de perte de moment cinétique est à l'oeuvre dans ces étoiles. La nature de ce mécanisme est encore controversée. Afin de comprendre les rotateurs stellaires lents, Schatzman (1962) a suggéré que le freinage magnétique dû au vent stellaire serait suffisant et ce, même avec un taux de perte de masse réduit. Cette idée a été explorée par de nombreux auteurs (Weber et Davis 1967, Mestel 1968a;b). Suivant cette hypothèse, il apparaît essentiel de s'intéresser en détail aux modèles de vents stellaires, en présence ou non d'un disque d'accrétion, afin d'étudier l'efficacité du vent stellaire à extraire le moment cinétique de l'étoile. De plus, des observations récentes confirment la présence de vents stellaires dans au moins 60% des CTTS (Kwan et al. 2007), comme cela avait déjà été suggéré par plusieurs auteurs dont Edwards et al. (2003).

Kundurthy et al. (2006) et Edwards et al. (1993) pensent que les CTTS sont des rotateurs lents qui possèdent un disque d'accrétion tandis que les WTTS sont au contraire des rotateurs rapides sans disque, l'idée générale étant que c'est l'interaction magnétique entre l'étoile et son disque qui contrôle la période de rotation. Les tentatives pour confirmer cette conjecture par des moyens observationnels ont donné des résultats différents : Stassun et al. (1999; 2001) tout comme Rebull et al. (2004) n'ont pas trouvé de fortes corrélations entre rotateurs rapides et étoiles qui ont dispersé leurs disques; d'autres résultats plus récents (Rebull et al. 2006, Herbst et al. 2007, Cieza et Baliber 2007) montrent une distribution bimodale dans laquelle les étoiles avec un disque tournent plus lentement que les étoiles qui en sont dépourvues. Toutefois, les deux distributions empiètent clairement l'une sur l'autre. Du point de vue observationnel, la présence d'un disque d'accrétion n'est donc pas une hypothèse suffisante pour expliquer la perte du moment cinétique stellaire.

### Jets stellaires vs vents de disque

Decampli (1981) a montré que les jets thermiques ne peuvent supporter des taux de perte de masse importants, tout simplement parce que cela requière des températures trop élevées. Pour des taux de perte de masse inférieur à  $10^{-9} M_{\odot}/\text{an}$ , il montre qu'un vent thermique peut supporter la formation d'un jet. Pour des taux de perte de masse plus importants, cela reste encore possible s'il existe une pression supplémentaire produite par les ondes d'Alfvén. Si la température du vent est de l'ordre du million de degrés alors la pression peut conduire le jet jusqu'à des vitesses de 300 km/s. La pression peut dépasser de loin la pression thermique si elle inclut la pression dynamique ou la pression turbulente magnétique. Cette situation est semblable au cas du vent solaire pour lequel l'existence d'une pression supplémentaire permet d'obtenir des vents de plusieurs centaines de km/s avec une température de quelques millions de degrés. Ignorant la question importante de la nature de la pression, de nombreux auteurs ont étudié les modèles de vents de disque où le mécanisme principal à l'oeuvre est l'accélération magnétocentrifuge, au détriment des modèles purement stellaires. Ce type d'accélération a été proposé par Blandford et Payne (1982), qui ont présenté les premières solutions MHD radiales autosimilaires en développant les solutions hydrodynamiques de Bardeen

et Berger (1978) pour les vents galactiques. Le modèle original a été amélioré de maintes façons (Li et al. 1992, Contopoulos 1994, Vlahakis et Tsinganos 1998, Vlahakis et al. 2000). Ferreira (1997) a notamment traité de façon consistante la connection avec le disque. Les jets de vent de disque ont été analysés par des simulations numériques (Ouyed 1997, Ustyugova et al. 2000, Krasnopolsky et al. 2003, Casse et Keppens 2004). En étudiant les conditions initiales et les conditions aux limites, ils ont confirmé que les vents de disque peuvent être accélérés et collimatés par leur propre champ magnétique. Plus récemment, il a été montré que les solutions analytiques, comme les solutions autosimilaires radiales sont stables (Matsakos et al. 2008, Stute et al. 2008, Matsakos et al. 2009).

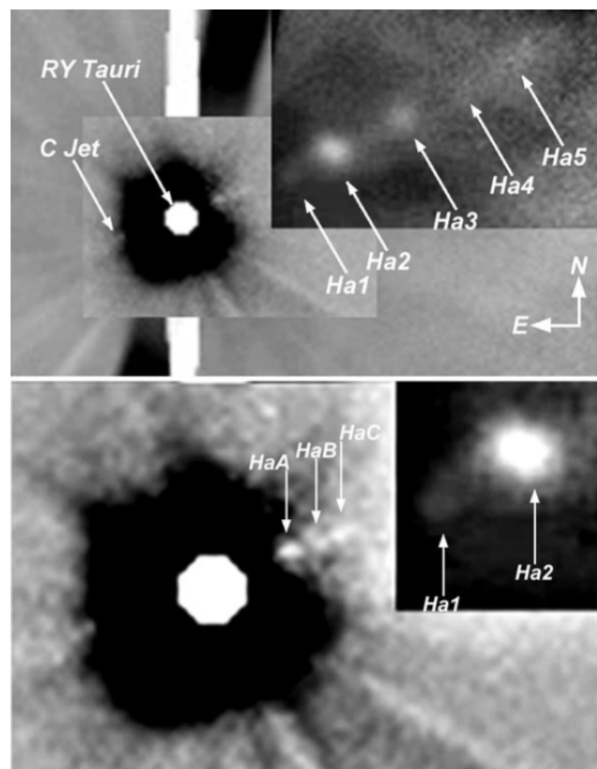
Les arguments théoriques (Pudritz et Norman 1986) comme les simulations numériques (Meliani et al. 2006) montrent que les vents de disque peuvent supprimer une grande partie du moment cinétique du plasma accrété. De plus, selon l'idée de Choi et Herbst (1996), les lignes de champ de la magnétosphère stellaire qui sont ancrées dans le disque peuvent ralentir efficacement la rotation de l'étoile : une ligne de champ enracinée à l'étoile ralentira (respectivement accélérera) la rotation de l'étoile, si cette ligne est connectée à une région du disque tournant à une vitesse angulaire plus lente (respectivement plus rapide). En utilisant un modèle analytique simple basé sur le mécanisme de Ghosh et Lamb (1979a;b), Matt et Pudritz (2005) ont cependant montré que l'efficacité de ce processus est réduit par le fait que les lignes de champ magnétique s'ouvrent et que la connection au disque est alors interrompue. Ils proposent d'expliquer la perte du moment cinétique par un vent stellaire alimenté par l'accrétion, en prenant des taux de 1 à 10 % de ceux observés (Calvet 1998). Leurs résultats ont été validés par des simulations numériques (Matt et Pudritz 2008a;b, Matt et al. 2010). Par des simulations analogues, (Küker et al. 2003, Romanova et al. 2009, Zanni et Ferreira 2009) étudient la possibilité de freiner l'étoile même lorsque la connection n'est pas interrompue.

Cependant, ces modèles ne décrivent pas la partie interne du jet proche de l'axe (Gracia et al. 2006) et la présence d'une composante stellaire est nécessaire à la description globale de l'écoulement et à la suppression de l'excès de moment cinétique.

Du point de vue observationnel, les solutions de vent de disque sont adaptées aux étoiles telles que DG Tau, probablement une des source les plus puissantes avec un taux d'accrétion de l'ordre  $10^{-6} M_{\odot}/\text{an}$  et correspondant à une perte de masse de l'ordre de 10% de sa masse (Hartigan et al. 1995). Les observations récentes suggèrent que ces étoiles sont variables de courte période avec un taux d'accrétion variable décroissant jusqu'à la valeur de  $10^{-7} M_{\odot}/\text{an}$  (Beck et al. 2010). Des étoiles T Tauri plus évoluées comme RY Tau semblent présenter des jets plus faibles avec des taux d'accrétion de l'ordre de quelques  $10^{-8} M_{\odot}/\text{an}$ . Cela peut être l'indication que les vents de disque ne sont pas toujours nécessaires pour décrire les jets les plus évolués et les plus faibles. De plus, Gomez de Castro et Verdugo (2001; 2007) suggèrent la présence d'un jet purement stellaire pour RY Tau de faible dimension à partir de l'émission UV de raies spectrales provenant d'une si petite région qu'elles ne peuvent être produites par le vent de disque. Des observations récentes (St-Onge et Bastien 2008, Agra-Amboage et al. 2009) montrent clairement l'existence d'un micro-jet (Fig. 4.1). Des taux de perte de masse compris entre  $10^{-11} M_{\odot}/\text{an}$  et  $10^{-10} M_{\odot}/\text{an}$  ont été observés par André et al. (1992) pour les WTTS. La période de rotation des WTTS est comprise entre 0.6 et 24 jours (Herbst et al. 2007). Les WTTS devraient donc produire des jets collimatés mais seulement

trop faibles pour être observés.

Il est intéressant d'étudier si ces micro-jets peuvent être modélisés par un vent stellaire ou la combinaison d'un vent stellaire et d'un vent de disque sub-képlérien. La combinaison de ces deux composantes a été étudiée dans des simulations numériques (Matt et al. 2003, Koide 2003, Küker et al. 2003, Matsakos et al. 2008). Des simulations récentes (Meliani et al. 2006, Romanova et al. 2009, Matsakos et al. 2009, Fendt 2009) étudient aussi la possibilité de mélanger les composantes. Dans ces modélisations numériques, la connection disque-magnétosphère produit des écoulements fortement variables, toutefois Matsakos et al. (2009) montrent que cette variabilité ne détruit pas le jet. La solution stationnaire pour la partie interne du jet dans leurs simulations est la première présentée ici en changeant l'équation d'état polytropic. D'autres solutions autosimilaires méridionales ont été obtenues (Vlahakis et Tsinganos 1998, Sauty et al. 2002, Sauty et Tsinganos 1994) pour décrire le vent stellaire mais aussi le vent X. Ces solutions sont stables (Matsakos et al. 2008; 2009) ce qui était loin d'être évident puisque la fonction de chauffage n'était pas polytropic. Dans une série de publications, Sauty et al. (1999; 2004) ont fait l'analyse paramétrique complète de ces solutions. Je présente ici des solutions où le jet stellaire est sous-pressurisé comparativement au vent de disque (Sauty et al. 2011). Ces solutions ont l'avantage de s'adapter non seulement aux CTTS (connectées aux disques d'accrétion) mais également au WTTS qui ne sont pas connectées au disques (Walter et al. 1988, Bertout 1989).



**FIG. 4.1** – Image composite courte pose et superpositions d'images  $H_\alpha$  longues poses pour mettre en évidence les noeuds de faible intensité. Image du bas : agrandissement de la région centrée sur RY Tau où les noeuds HaA, HaB et HaC proches de l'étoile ont été éjectés récemment. Image du haut : Les noeuds plus à l'extérieur sont clairement identifiés (Ha1-Ha5). Le contre jet (Cjet) est également visible dans cette observation de St-Onge et Bastien (2008)

### Rappel des équations MHD dans le cas classique

Le système d'équations de la MHD stationnaire s'écrit,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\frac{\vec{B}}{4\pi} = -\vec{\nabla} \left( P + \frac{B^2}{8\pi} \right) - \rho \vec{\nabla} \Phi_{grav} \quad (4.2)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \left( \vec{\nabla} w - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} \right) = \rho q \quad (4.3)$$

où  $\vec{B}$  est le champ magnétique,  $\vec{v}$  la vitesse de la particule,  $\rho$  la densité volumique,  $P$  la pression,  $w$  l'enthalpie spécifique et  $q$  le taux de chauffage. L'équation (4.1) traduit la conservation du flux magnétique, la conservation de la masse, et l'hypothèse de flux gelé. L'équation (4.2) gouverne la dynamique de l'écoulement et enfin l'équation (4.3) exprime la conservation de l'énergie.

Les lignes de champ magnétique sont enroulées autour de tubes de flux magnétique constant (cf. chapitre 3). Les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité permettent d'obtenir les quantités conservées le long de l'écoulement : le rapport flux de masse sur flux magnétique,  $\Psi_A = 4\pi\rho\vec{v}_P/\vec{B}_P$ , la vitesse angulaire d'isrotation  $\Omega$ , le moment cinétique spécifique  $L$  et la constante de Bernoulli  $\mathcal{E}$ . Dans l'hypothèse de flux gelé, la matière éjectée suit une trajectoire le long des lignes de champ magnétique à la vitesse  $\vec{v} = \Psi_A(A)\vec{B}_P/4\pi\rho + \varpi\Omega(A)\vec{e}_\varphi$ . Le second terme de l'expression implique la génération d'un champ magnétique toroïdal qui devient dominant loin de la source et responsable de la collimation du vent en jet.

On rappelle les expressions de la vitesse  $\vec{v}$ , du champ magnétique  $\vec{B}$ , de la pression  $P$  et de la masse volumique  $\rho$  sont données par les équations (3.53-3.60).

### Efficacité du rotateur magnétique

En intégrant les équations du mouvement le long d'une ligne de champ, on obtient la conservation du flux d'énergie total. Ce calcul est équivalent à la somme des énergies cinétiques et gravitationnelles, de l'enthalpie et de chauffage le long d'une ligne d'écoulement spécifique. Dans le contexte du modèle autosimilaire méridional, la variation d'énergie d'une ligne à une autre définit un paramètre supplémentaire (Sauty et al. 1999) :

$$\begin{aligned} \epsilon = & \frac{M^4}{(GR)^2} \left[ \frac{F^2}{4} - 1 \right] - \kappa \frac{M^4}{G^4} - \frac{(\delta - \kappa)\nu^2}{R} \\ & + \frac{\lambda^2}{G^2} \left( \frac{M^2 - G^2}{1 - M^2} \right)^2 + 2\lambda^2 \frac{1 - G^2}{1 - M^2} \end{aligned} \quad (4.4)$$

qui est une constante pour toutes les lignes d'écoulement (Sauty et Tsinganos 1994).

Le paramètre  $\epsilon$  représente la variation d'énergie à travers le jet qui est disponible pour collimater l'écoulement une fois soustraite la partie nécessaire pour l'accélération. On peut exprimer  $\epsilon/2\lambda^2$  à la base du jet en  $r_o$  (Sauty et al. 1999), où  $r_o$  est le rayon d'ancrage des lignes de champ magnétique :

$$\frac{\epsilon}{2\lambda^2} = \frac{E_{\text{Poynt.,}o} + E_{R,o} + \Delta E_G^*}{E_{\text{MR}}}, \quad (4.5)$$



où  $E_{\text{MR}}$  est l'énergie du rotateur magnétique (Sauty et al. 1999),  $E_{\text{Poynt.,o}}$  est le flux de Poynting,  $E_{\text{R,o}}$  est l'énergie de rotation et  $\Delta E_{\text{G}}^*$  mesure l'excès ou le déficit d'énergie gravitationnel (par unité de masse) entre une ligne d'écoulement et l'axe qui n'a pas pu être compensé de façon thermique et doit donc être prise sur l'énergie du rotateur magnétique pour que le jet puisse être accéléré.

$$\Delta E_{\text{G}}^* = -\frac{\mathcal{GM}}{r_o} \left[ 1 - \frac{T_o(\alpha)}{T_o(\text{pole})} \right] = -\frac{\mathcal{GM}}{r_o} \frac{(\delta - \kappa)\alpha}{1 + \delta\alpha}. \quad (4.6)$$

Pour  $\epsilon > 0$  la collimation est magnétique, pour  $\epsilon < 0$  le jet peut être confiné par le gradient de pression thermique, ce qui n'est pas possible pour les jets surpressurisés. Comme dans Sauty et al. (1999), nous allons classer les solutions en rotateurs magnétiques efficaces *Efficient Magnetic Rotators*, EMR ou inefficaces *Inefficient Magnetic Rotators*, IMR, selon que  $\epsilon$  soit positif ou négatif. Sauty et al. (1999) ont montré qu'une valeur de  $\epsilon$  proche de 0 correspond à un rayon asymptotique large pour un jet confiné magnétiquement. Dans le chapitre suivant, je présenterai la généralisation du paramètre  $\epsilon$  pour les jets relativistes dans le cadre du modèle en Kerr.

## 4.2 Des observations à la modélisation

### Paramètres stellaires

Bien que leurs jets soient plus faibles que ceux des objets de classe I et des T Tauri jeunes, les étoiles T Tauri classiques nanties de disques d'accrétion de faible masse présentent des jets comme beaucoup d'autres objets de classe II. Leurs masses, rayons et fréquences de rotation ont été mesurés (Hartigan et al. 1995, Bouvier et al. 1997, Herbst et Mundt 2005, Marilli et al. 2007). Parmi les jets ténus des T Tauri jeunes pourrait se trouver le jet de RY Tau (Gomez de Castro et Verdugo 2001). Récemment, ce micro-jet a été observé et étudié en détail (St-Onge et Bastien 2008, Agra-Amboage et al. 2009). Les CTTS sont des étoiles peu massives, de l'ordre de 0.5 à 2 masses solaires avec un rayon de l'ordre de 2 à 3 rayons solaires (Bertout 1989, Mora et al. 2001). Ce type d'objet donne naissance aux étoiles de type solaire. Leur vitesse de rotation est supposée s'établir à une valeur du dixième de la vitesse de rupture, de l'ordre de 15 km/s pour les CTTS et de 20 km/s pour les WTTS (Bouvier et al. 1993). Cependant, ces mesures présentent de grandes variations entre les mesures des vitesses de rotation et des périodes obtenues par des méthodes spectroscopiques à celles obtenues par des méthodes photométriques. Les mesures de vitesse de rotation sont très différentes suivant les méthodes d'observation. Les vitesses déduites à partir de la détermination de la période de la rotation photométrique ont des valeurs de 52–55 km/s déduites de  $v \sin i$  (Petrov 1999, Mora et al. 2001, Agra-Amboage et al. 2009) ou  $i$  est l'angle entre la ligne de visée et l'axe de rotation de l'étoile qui semble particulièrement élevé pour les CTTS. Cette détermination de la vitesse de rotation projetée semble toutefois correspondre à une occultation de l'étoile par le disque et non une mesure de la vitesse de rotation réelle. Bouvier et al. (1993; 1995) présente une période photométrique de 24 jours correspondant à  $v_{\varphi,o} = 5.1$  km/s, c'est à dire la valeur limite la plus basse. Les mesures de flux donnent une période de 5 à 66 jours, proche des valeurs caractéristiques pour les étoiles T Tauri (Petrov 1999). Les mesures de rotation sont très difficiles et le modèle opte pour une valeur de 15 km/s dans l'attente de mesures plus précises.

On prend comme valeurs pour les taux de perte de masse, masse, rayon et vitesse de rotation stellaires :

- $\dot{M}_{\text{wind}} = 3.1 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{an}$
- $\mathcal{M} = 1.5 M_{\odot}$
- $r_o = 2.4 r_{\odot}$
- $\Omega = 5.99 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$  ou  $V_{\varphi,o} = 10 \text{ km/s}$

Ces valeurs sont caractéristiques des CTTS et proches de celles de RY Tau exception faite de la vitesse de rotation qui est beaucoup plus lente que la valeur usuelle. Cependant, nous venons de voir que cette valeur est sujet à caution compte tenu de l'obscurcissement de l'étoile par le disque.

### Contraintes sur les jets

Des mesures des quantités physiques ont été réalisées sur les jets optiques eux-mêmes pour quelques CTTS (Hartigan et al. 1995, Lavalley-Fouquet et al. 2000, Cabrit 2007, St-Onge et Bastien 2008, Agra-Amboage et al. 2009). Ces observations montrent des taux de perte de masse de  $10^{-7}$  jusqu'à  $10^{-10} M_{\odot}/\text{an}$ . De plus, les étoiles peu accrétaentes sont associées à des taux de perte de masse faibles. Les vitesses asymptotiques moyennes sont de l'ordre de 100 km/s à 300 km/s (Bally et al. 2009). Il est difficile de résoudre spatialement les micro-jets et la vitesse mesurée pourrait être un mélange de composantes lentes et rapides comme cela a été déjà le cas pour l'observation de DG Tau (Anderson et al. 2003). Il est possible de prendre une valeur plus grande pour la composante rapide de l'ordre de 400 km/s le long de l'axe polaire en considérant que c'est la vitesse maximale, hypothèse compatible avec notre modèle. Des mesures plus précises du profil de vitesses sont nécessaires (Gunther et al. 2009).

Dans cette étude, nous avons supposé que le jet présente un taux de perte de masse de quelques  $10^{-9} M_{\odot}/\text{an}$ . En adoptant le modèle de Gomez de Castro et Verdugo (2001), le taux de perte de masse pour RY Tau est de  $3.1 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{an}$ . La densité électronique mesurée pendant les chocs est de l'ordre de  $10^4 \text{ cm}^{-3}$ . Cependant, cette densité électronique n'est pas déterminée sans ambiguïté, notamment du fait du rayon du jet qui peut être beaucoup plus petit que le rayon du choc comme cela a été déjà démontré lors de simulations (Matsakos et al. 2009) mais aussi parce qu'une partie seulement des électrons est accélérée. De même, des incertitudes apparaissent quant à la fraction de matière ionisée dans le jet.

Afin d'évaluer l'efficacité du freinage magnétique nous étudions des solutions qui présentent un grand bras de levier magnétique. On suppose que le bras de levier caractéristique s'étend jusqu'au rayon d'Alfvén, de l'ordre de 10 rayons stellaires  $\varpi_a = 10 \varpi_o$ , ce qui correspond dans le modèle à prendre  $r_{\star} = 10 r_o$  ou  $R_o = 0.1$ .

Comme cela a été démontré dans Spruit (1997), si le taux de masse accrétée est  $\dot{M}_{\text{acc}}$ , alors le taux de moment cinétique accrété est  $\dot{J}_{\text{acc}} = \dot{M}_{\text{acc}} \varpi_o^2 \Omega$ . De manière similaire, le taux de perte du moment cinétique dans le vent est  $\dot{J}_{\text{wind}} = \dot{M}_{\text{wind}} \varpi_a^2 \Omega$ , puisque le plasma est en corotation jusqu'au rayon Alfvénique  $\varpi_a$ . Dans le cas où le vent extrait entièrement le moment cinétique du disque, on peut

égaliser les deux quantités  $\dot{J}_{\text{wind}} = \dot{J}_{\text{acc}}$ . On obtient alors :

$$\varpi_a = \varpi_o \sqrt{\frac{\dot{M}_{\text{acc}}}{\dot{M}_{\text{wind}}}}. \quad (4.7)$$

Pour  $\varpi_a = 10 \varpi_o$ , le taux de perte de masse correspond à seulement 1% du taux d'accrétion. Le vent est probablement capable d'emporter plus de 1% de la matière accrétée. Le jet stellaire peut extraire le moment cinétique de l'étoile si les lignes de champ et les lignes d'écoulement sont ancrées dans la photosphère stellaire et non dans le disque. Dans ce cas, on peut en déduire le temps de freinage de la manière suivante :

$$\tau = \frac{J_{\text{star}}}{\dot{J}_{\text{wind}}}, \quad (4.8)$$

où

$$J_{\text{star}} = k \Omega M_{\text{star}} r_0^2 \quad (4.9)$$

et

$$\dot{J}_{\text{wind}} = \frac{\lambda r_* v_* \dot{M}_{\text{wind}} \alpha_{\text{out}}^2}{2 \psi_{\text{out}}}, \quad (4.10)$$

avec  $k$  la constante d'inertie sans dimension de l'étoile (Mestel 1968a). Nous avons utilisé  $k = 0.06$  comme dans le cas du Soleil (Cox 2000), pour laquelle 90% de la masse de l'étoile est contenue en deçà de la moitié de son rayon (Schwartz et Schubert 1969). Pour une étoile T Tauri présentant une zone convective plus importante (Bouvier et al. 1997), ce facteur peut varier jusqu'à  $k = 0.2$ .

En substituant  $\Omega$  de Sauty et Tsinganos (1994) dans l'équation (4.9), on obtient l'expression suivante pour le temps de freinage de l'étoile :

$$\tau = \frac{2k M_{\text{star}} r_0^2}{r_*^2 \dot{M}_{\text{wind}}} \frac{\psi_{\text{out}}}{\alpha_{\text{out}}^2 \sqrt{1 + \delta \alpha_{\text{out}}}}, \quad (4.11)$$

et

$$\psi_{\text{out}} = \frac{4}{3\delta} [(1 + \delta \alpha_{\text{out}})^{3/2} - 1], \quad (4.12)$$

Les T Tauri classiques ont une durée de vie de l'ordre du million d'années tandis que celle des T Tauri faibles est de 10 millions d'années. La freinage magnétique devrait donc être en mesure d'extraire la majorité du moment cinétique de l'étoile durant cette période.

Deux solutions différentes ont été examinées en utilisant une procédure identique à celle présentée dans (Sauty et al. 2002). Nous verrons qu'elles peuvent correspondre à deux étapes différentes de l'évolution de l'étoile.

### 4.3 Solution non oscillante

Des solutions MHD exactes de rotateurs magnétiques collimatés par le champ magnétique et la pression externe existent (Sauty et al. 1999; 2002). Cependant, lorsqu'on diminue la pression tout en gardant les autres paramètres fixes, on obtient une solution limite de morphologie cylindrique collimatée uniquement par la force magnétique. Le jet, sous-pressurisé près de l'étoile, devient sur-pressurisé aux grandes distances. Cette solution pour laquelle la vitesse du jet à l'infini le long de l'axe polaire vaut  $v_\infty = 200$  km/s, présente l'ouverture de jet la plus grande possible.

### Modèle de jet pour un faible taux d'accrétion

Les paramètres pour la solution sont indiqués Tab. 4.1.

$\nu$	$\kappa$	$\delta$	$\lambda$	$\epsilon$
1.5	0.021	0.0778	0.775	0.012

**TAB. 4.1** – Paramètres de la solution non oscillante.

avec une fréquence de rotation :

–  $\Omega = 5.15 \cdot 10^{-6}$  rad/s, ou,  $v_{\varphi,o} = 8.6$  km/s.

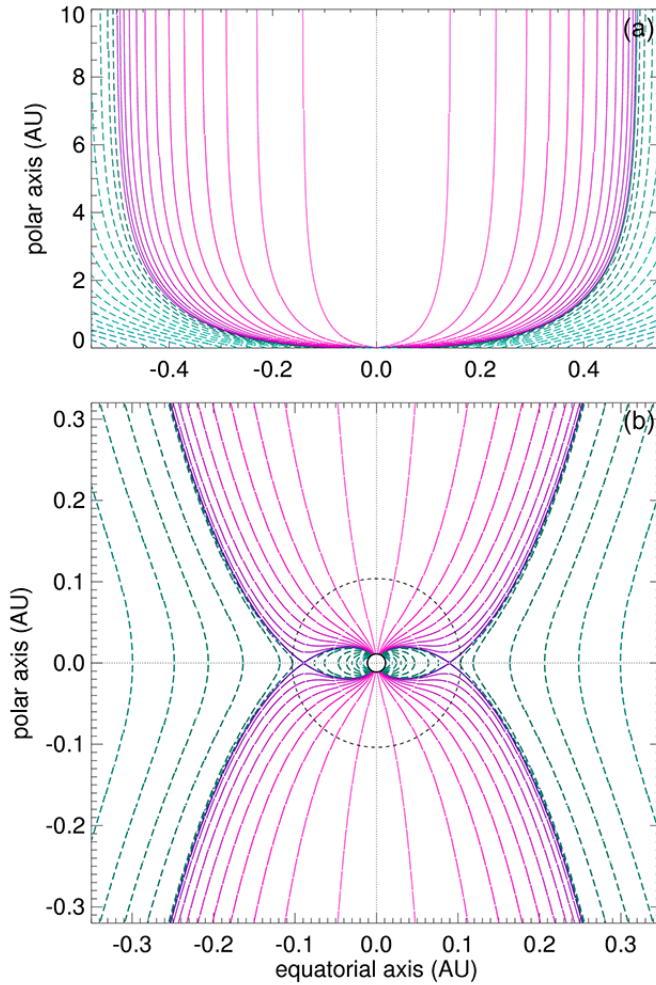
Cette dernière valeur correspond à la valeur la plus basse mesurée pour RY Tau.



**FIG. 4.2** – Représentation tridimensionnelle de la solution de jet de T Tauri non oscillante présentant une grande ouverture. Les lignes de champ magnétique sont indiquées en rouge. Les lignes d'écoulement sont représentées par des lignes noires.

Une représentation tridimensionnelle de la solution est indiquée Fig. 4.2. La topologie des lignes d'écoulement et des lignes de champ magnétique est représentée dans le plan poloïdal Fig. 4.3. Le jet stellaire autocolimaté par son propre champ magnétique est entouré d'un vent de disque. Il est issu d'un trou coronal de demi-angle d'ouverture de 15 degrés. Le trou est entouré par une large zone morte s'étendant sur 8 rayons stellaires. Cette structure est comparable au dipôle de 1.2 kG autour de BP Tau reconstruit à partir des observations ESPaDOs (Donati 2008).

La Fig. 4.4 indique les vitesses d'écoulement le long de l'axe polaire et de la dernière ligne d'écou-



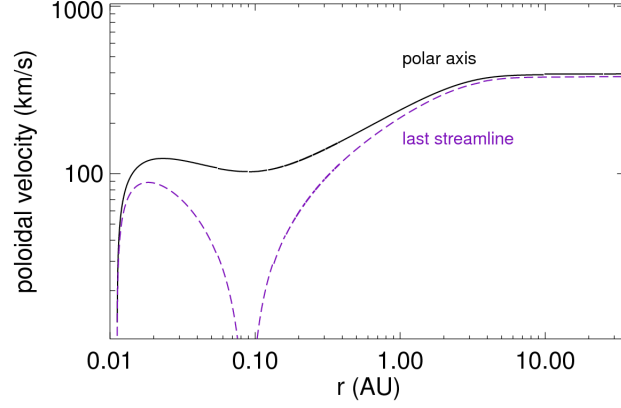
**FIG. 4.3** – Topologie de la solution non oscillante dans le plan poloidal. (a) Echelle globale. (b) Détail près de l'étoile. Les distances sont données en unité astronomique (AU). Les lignes continues roses figurent les lignes de champ ouvertes connectées à l'étoile. Les lignes en tiretés verts figurent les lignes de champ les plus proches de l'étoile connectées au disque d'accrétion. Toutes les lignes ouvertes proviennent de la région de la calotte polaire située à 15 degrés de latitude. Enfin, le cercle en pointillés représente la surface d'Alfvén.

lement connectée à l'étoile. La vitesse asymptotique le long de l'axe polaire est  $V_\infty = 393$  km/s, valeur deux fois plus grande que celle attendue mais acceptable compte tenu des incertitudes déjà énoncées précédemment.

La Fig. 4.5 représente la densité (a), la pression (b) et la température (c) le long de l'axe polaire. La courbe de température (c) présente un maximum à 1 million de degrés. Cependant, cette température effective est calculée à partir de l'équation d'état en utilisant la pression totale indiquée Fig. 4.5b. Cette pression totale peut inclure, en plus de la pression cinétique, la pression dynamique des ondes d'Alfvén. Gomez de Castro et Verdugo (2001) ont déterminé des températures électroniques élevées et une température de vent de  $10^5$  K à partir de l'observation de raies UV.

On détermine les valeurs du rayon et de la vitesse au point d'Alfvén,

- $r_\star = 9.29 r_o = 0.104$  AU ,
- $v_\star = 103$  km s<sup>-1</sup> .



**FIG. 4.4** – Vitesse poloïdale de la solution non oscillante le long de l’axe polaire (ligne continue noire). La vitesse le long de la dernière ligne d’écoulement ouverte est indiquée par la courbe en tirets violets. La vitesse poloïdale de la dernière ligne d’écoulement est nulle lorsqu’elle atteint le plan équatorial. Cela a pour effet de créer une cassure dans cette représentation logarithmique.

La dernière ligne d’écoulement ouverte correspond à une valeur du flux magnétique sans dimension de :

- $\alpha_{\text{out}} = 0.989$ .

On suppose que le taux de perte de masse observé provient entièrement de l’étoile, ce qui signifie qu’il doit être contenu à l’intérieur d’un tube de flux limité par la dernière ligne de champ ouverte. Cette hypothèse permet d’obtenir une densité de masse, une densité de particules et une intensité de champ magnétique au rayon d’Alfvén :

- $n_{\star} = 3.05 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ ,
- $\rho_{\star} = 2.48 \cdot 10^{-15} \text{ g cm}^{-3}$ ,
- $B_{\star} = 1.82 \text{ G}$ ,

où  $\rho_{\star}$  est donné par :

$$\rho_{\star} = \frac{\dot{M}_{\text{wind}}}{2\pi r_{\star}^2 V_{\star} \psi_{\text{out}}} = \frac{3\delta \dot{M}_{\text{wind}}}{4\pi r_{\star}^2 V_{\star}} \frac{1}{(1 + \delta \alpha_{\text{out}})^{3/2} - 1} \quad (4.13)$$

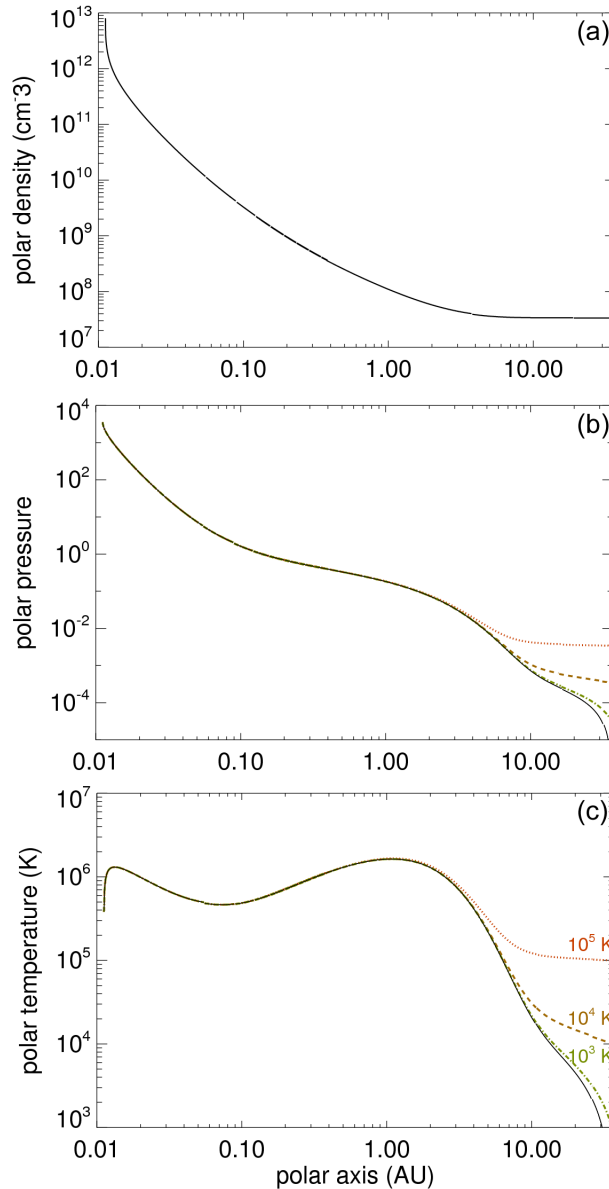
Les valeurs asymptotiques sont :

- $\rho_{\infty} = 2.72 \cdot 10^{-17} \text{ g cm}^{-3}$ , déduite de  $\rho_{\star}$  et du nombre de Mach Alfvénique à l’infini,
- $n_{\infty} \approx 10^7 \text{ cm}^{-3}$  (en supposant un plasma complètement ionisé),
- $B_o = 608 \text{ G}$ ,
- $B_{\infty} = 76 \text{ mG}$ ,
- $\varpi_{\text{out}}(\frac{\pi}{2}) = 7.97 r_o = 0.0891 \text{ AU}$ , correspondant au rayon cylindrique pour la dernière ligne connectée à l’étoile,
- $\varpi_{\infty; \text{out}} = 42.8 r_o = 0.478 \text{ AU}$ , correspondant au rayon du jet à l’infini.

Pour cette solution, le temps de freinage calculé à partir de l’équation (4.11) est :

$$\tau \approx 0.6 \times 10^6 \text{ ans} . \quad (4.14)$$

Ce temps de freinage correspond à la durée de vie caractéristique des CTTS (Bouvier et al. 1997). Avec  $k = 0.2$ , nous obtenons un temps de freinage de deux millions d’années (le calcul précédent ayant été réalisé avec  $k=0.06$ ). Le jet permet donc de réduire efficacement le moment cinétique de l’étoile et d’expliquer les périodes de rotation lente sans qu’il soit nécessaire d’invoquer un mécanisme



**FIG. 4.5** – Courbes le long de l’axe polaire (a) de la densité ; (b) de la pression totale sans dimension, incluant les termes non-cinétiques comme la turbulence magnétique et la pression dynamique ; (c) de la température effective. Les trois courbes asymptotiques supplémentaires (en couleur) de la Fig. (c) correspondent à trois valeurs possibles de la température à l’infini, obtenues en ajustant les valeurs de la pression indiquées Fig. (b).

de freinage par le disque. Küker et al. (2003) ont calculé des temps de freinage comparables à partir de simulations numériques.

### Modèle de jet pour un taux d’accrétion plus élevé

Dans les jets de T Tauri plus brillants, des taux de perte de masse plus élevés sont observés. La composante de vent de disque pourrait alors être incluse dans le modèle. Pour obtenir un taux de perte de masse dans le jet de  $\dot{M}_{\text{wind}} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{an}$ , la solution doit inclure des lignes de champ connectées au disque (en tiretés verts sur la Fig. 4.3) jusqu’à  $\varpi_{\text{disk,out}} = 3.07$  AU. On remarque

que cette valeur de  $\dot{M}_{\text{wind}}$  reste dans le domaine de taux de perte de masse déduits des observations optiques de RY Tau (Agra-Amboage et al. 2009), c'est à dire entre 0.16 et  $2.6 \times 10^{-8} M_{\odot}/\text{an}$ . Le rayon cylindrique à la base du jet vaut  $\varpi_{\text{disk,out}} = 0.478$  AU et le rayon cylindrique asymptotique  $\varpi_{\infty,\text{out}} = 0.890$  AU. Une alternative intéressante est de ne garder que la composante stellaire en supposant un taux de perte de masse de  $\dot{M}_{\text{wind}} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{an}$ . A cette fin, les quantités physiques ont été recalculées : la valeur de la densité a été augmentée d'un facteur 3 et l'intensité du champ magnétique d'un facteur  $\sqrt{3}$ . Les valeurs asymptotiques sont :

- $n_{\infty} \approx 3.2 \cdot 10^7 \text{cm}^{-3}$  (en supposant le plasma complètement ionisé),
- $B_o \approx 1.1$  kG,
- $B_{\infty} \approx 140$  mG.

Cela a pour effet d'augmenter aussi le champ magnétique dipolaire à la surface de l'étoile à la valeur de  $\approx 1.2$  kG compatible avec les observations (Donati 2008). On remarque que ce taux de perte de masse plus élevé réduit le temps de freinage d'un facteur 3 :

$$\tau \approx 2 \times 10^5 \text{ans} . \quad (4.15)$$

Cela ne change pas le profil de température indiquée à la Fig. 4.5c mais la densité étant plus élevée, des signatures observationnelles pourraient être détectées dans le domaine X.

#### 4.4 Une solution présentant une recollimation

En modifiant les paramètres précédents, on obtient une deuxième solution qui présente une recollimation du jet à 38 rayons stellaires. Les paramètres du modèle sont proches de ceux de RY Tau et la distance de recollimation correspond à la distance où ont été observés les chocs UV (Ferron-Fontan et Gomez de Castro 2003). Gomez de Castro et Verdugo (2001) ont mis en évidence la présence d'un choc UV à partir d'observations HST obtenues en 1993 et suggéré qu'il pourrait correspondre à la recollimation d'un jet. Ils n'ont cependant pas observé le micro-jet qui n'a été détecté qu'en 2005 alors que le choc UV ne l'était pas. St-Onge et Bastien (2008) ont observé des écoulements épisodiques à petite échelle le long du même axe d'éjection en 1998 et 2005 comme l'indique la Fig. 4.1. Selon notre hypothèse, il pourrait s'agir de deux phases différentes du même objet. La solution de recollimation correspondrait à la période où le choc UV est créé et la solution non oscillante, à la période où le jet est visible.

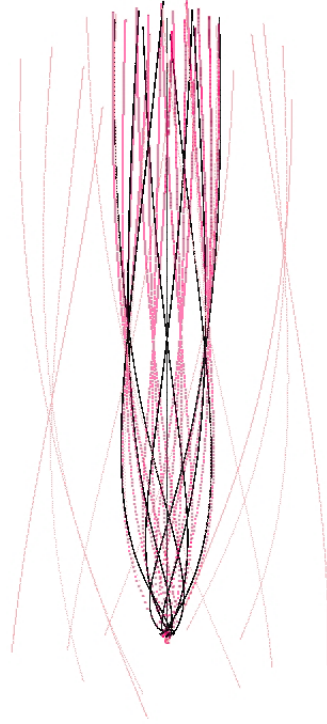
On remarque que la vitesse de l'écoulement est supérieure à la vitesse magnétosonique rapide et que des chocs peuvent se former sans détruire le jet. Cela a été démontré numériquement par Matsakos et al. (2009) qui a testé notre solution. Il est bien sûr évident que ce modèle analytique ne peut décrire le choc lui-même dont l'étude sera développée au chapitre 6 de cette thèse dans le cas de jets relativistes.

Une représentation tridimensionnelle de la morphologie du jet est présentée dans la Fig. 4.6. La topologie des lignes d'écoulement et des lignes de champ magnétique est indiquée dans le plan poloïdal Fig. 4.7.

##### 4.4.1 Discussion de la solution oscillante

Les paramètres de la solution sont donnés Tab. 4.2.





**FIG. 4.6** – Représentation tridimensionnelle de la solution de jet de T Tauri présentant une recollimation à 38 rayons stellaires. La figure de gauche possède la même échelle que la solution non oscillante Fig. 4.2. Les lignes de champ magnétique sont indiquées en rouge. Les lignes d'écoulement sont représentées par des lignes noires.

$\nu$	$\kappa$	$\delta$	$\lambda$	$\epsilon$
5.8	0.065	0.075	0.884	-0.034

**TAB. 4.2** – Paramètres de la solution oscillante.

La valeur de  $\epsilon$  est maintenant légèrement négative et traduit le fait que la collimation est moins efficace. La fréquence de rotation, la vitesse azimutale et la vitesse asymptotique le long de l'axe polaire sont :

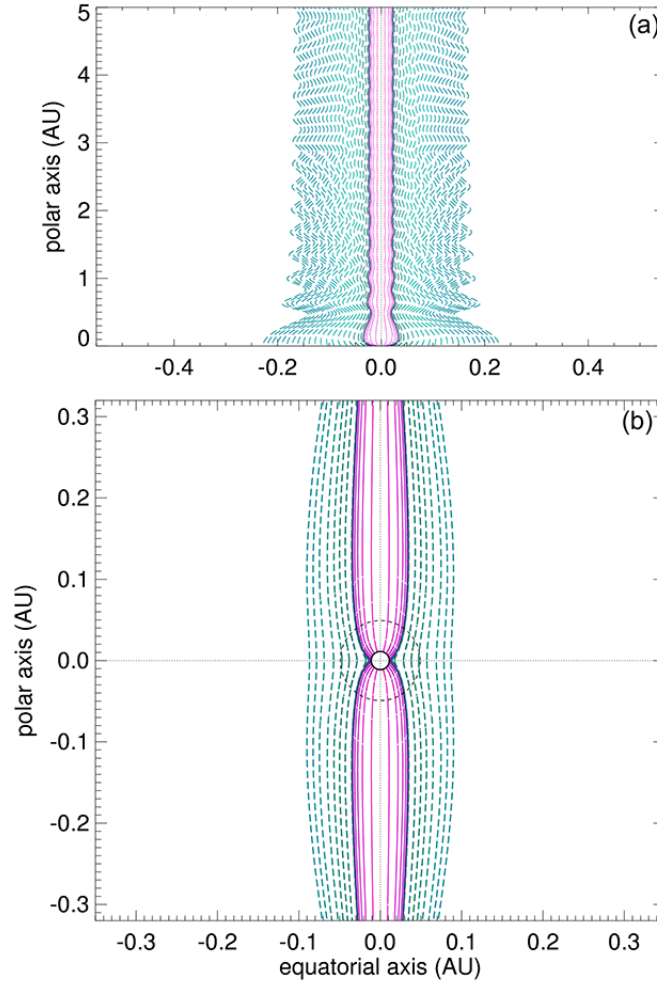
- $\Omega = 4.68 \cdot 10^{-6} \text{rad.s}^{-1}$ ,
- $v_{\varphi,o} = 7.82 \text{ km.s}^{-1}$ ,
- $v_{\infty} = 186 \text{ km.s}^{-1}$ .

Ces valeurs sont beaucoup plus proches des paramètres souhaités pour RY Tau. La vitesse le long de l'axe polaire est indiquée Fig. 4.8 et la Fig. 4.9 présente la densité (a), la pression (b) et la température (c).

Pour cette solution, le rayon et la vitesse Alfvéniques sont :

- $r_{\star} = 4.39 r_o = 0.049 \text{ AU}$
- $v_{\star} = 38.75 \text{ km.s}^{-1}$

La densité est calculée en supposant que le taux de perte de masse  $\dot{M}_{\text{wind}} = 3.1 \times 10^{-9} M_{\odot}/\text{an}$



**FIG. 4.7** – Topologie de la solution oscillante dans le plan poloidal. (a) Echelle globale. (b) Détail près de l'étoile. Les distances sont données en unité astronomique (AU). Les lignes continues roses figurent les lignes de champ ouvertes connectées à l'étoile. Les lignes en tiretés verts figurent les lignes de champ les plus proches de l'étoile connectées au disque d'accrétion. La zone morte est réduite et toutes les lignes d'écoulement provenant de l'étoile sont ouvertes et ne sont pas connectées au disque. La solution recollimate à 38 rayons stellaires où ont été observés des chocs UV de 1993 à 2001. Enfin, le cercle en pointillés représente la surface d'Alfvén.

provient entièrement de l'étoile. Le rayon du jet est défini comme le rayon du dernier tube de flux relié à l'étoile pour lequel le flux magnétique adimensionné vaut :

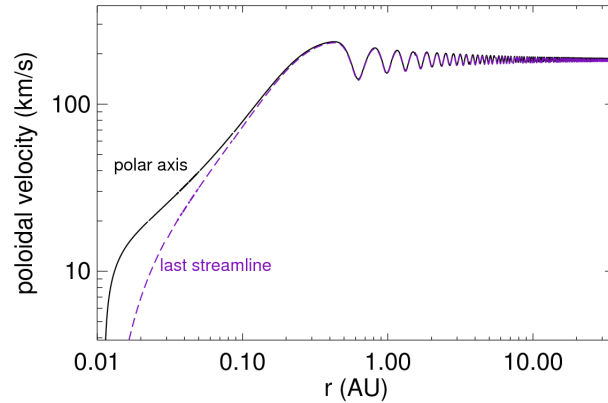
$$- \alpha(f_{min}) = \alpha_{out} = 0.361.$$

La densité de masse, la densité de particules et l'intensité du champ magnétique au rayon d'Alfvén sont respectivement :

- $n_{\star} = 1.01 \cdot 10^{11} \text{cm}^{-3}$  (en supposant le plasma complètement ionisé),
- $\rho_{\star} = 8.19 \cdot 10^{-14} \text{g.cm}^{-3}$ ,
- $B_{\star} = 3.94 \text{ G}$ .

On obtient alors :

- $B_o = 27.4 \text{ G}$ ,
- $B_{\infty} = 6.28 \text{ G}$ ,
- $\varpi_{\infty;out} = 2.09 r_o = 0.023 \text{ AU}$ .



**FIG. 4.8** – Vitesse poloïdale pour la solution oscillante le long de l’axe polaire (ligne continue noire) et la dernière ligne d’écoulement connectée à l’étoile est indiquée par la courbe en tiretés violets. Le jet ralentit après recollimation.

La densité asymptotique est plus élevée car on garde le même taux de perte de masse pour une vitesse et un rayon de jet plus petits. Enfin, le temps de freinage calculé à partir de l’Eq. (4.11) vaut pour cette solution,

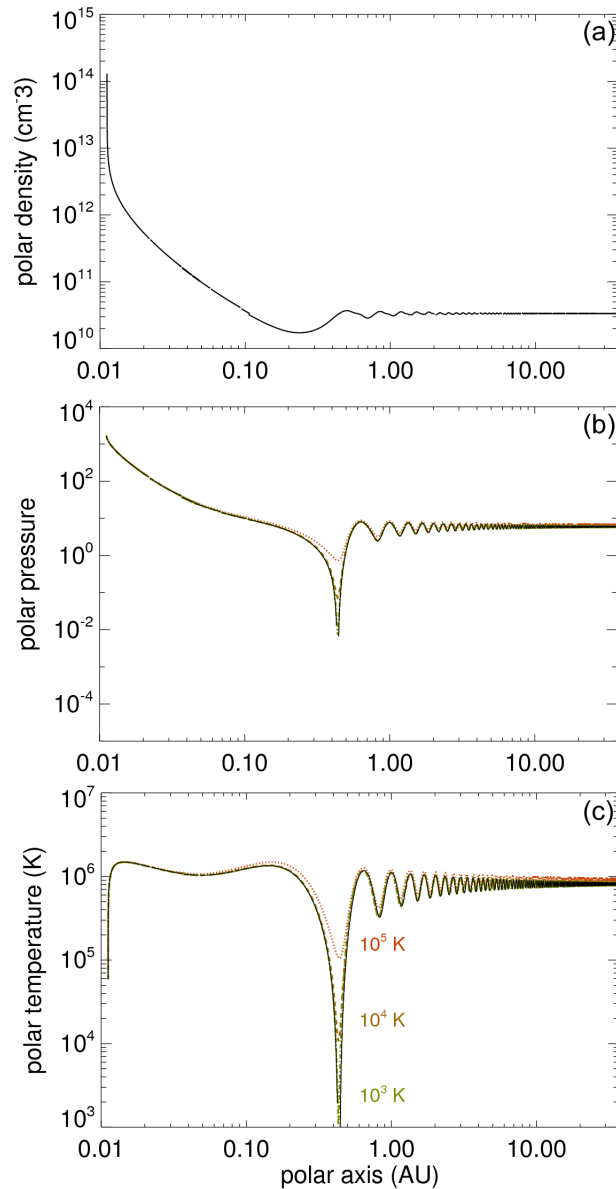
$$\tau \approx 7.7 \times 10^6 \text{ ans.} \quad (4.16)$$

## 4.5 Discussion

En analysant les images à haute résolution spatiale de la T Tauri classique RY Tau dans le nuage de Taurus-Auriga avec le télescope Gemini-nord (Fig. 4.1), St-Onge et Bastien (2008) détectent la présence d’un jet. Les observations montrent des nodules intermittents qui émergent à une certaine distance de l’étoile. Précédemment, Gomez de Castro et Verdugo (2001; 2007) observent des chocs UV qu’ils interprètent comme la manifestation d’un jet stellaire.

A la lumière de ces observations, il est tentant de suggérer que les deux solutions discutées précédemment pourraient décrire deux étapes différents de l’évolution de RY Tau, une où le jet est visible, l’autre où il ne l’est pas.

La première solution présente une large structure et est appropriée pour décrire le jet pendant la phase où il est visible. Cette solution stationnaire donne la structure globale de l’écoulement, la présence d’une succession de noeuds dans le jet serait dûe à des variations de l’activité de l’étoile. Nous avons montré que les jets peuvent freiner efficacement l’étoile centrale et extraire l’essentiel du moment cinétique sur une période de 1 million d’années. Cette période correspond au temps de vie caractéristique de la phase CTTS de l’étoile. Plus encore, ce mécanisme permet de ralentir l’étoile en moins de 0.6 millions d’années si le disque ne transporte pas de moment cinétique à l’étoile. Cette courte période pour ralentir l’étoile montre l’efficacité d’un écoulement magnétisé pour annuler le moment cinétique d’une étoile jeune en rotation rapide. Le jet stellaire pourrait donc expliquer la faible vitesse de rotation de ces objets sans recourt à un effet d’ancrage par le disque. Ce mécanisme serait alors complémentaire des autres mécanismes d’extraction du moment cinétique se produisant lors de l’émergence du *X*-wind dans la zone d’interaction entre le disque et la magnétosphère. Ce



**FIG. 4.9** – Courbes le long de l’axe polaire (a) de la densité ; (b) de la pression totale sans dimension, incluant les termes non-cinétiques comme la turbulence magnétique et la pression dynamique ; (c) de la température effective. Les trois courbes asymptotiques supplémentaires (en couleur) de la Fig. (c) correspondent à trois valeurs possibles de la température à l’infini, obtenues en ajustant les valeurs de la pression indiquées Fig. (b).

modèle montre que les jets visibles se produisent pendant la phase magnétique active et freine efficacement l’étoile.

La seconde solution correspond à un stade de l’évolution de l’étoile durant laquelle le jet n’est pas visible mais des chocs UV sont détectés. L’écoulement est alors décrit par une solution oscillante avec un jet trop fin pour être détecté, à l’exception de la région de recollimation où le choc UV est observé. De plus, la taille du jet stellaire au point de recollimation est de l’ordre de 2 rayons stellaires et correspond à la taille de la zone observée avant le choc UV. Cette étape de courte durée peut être mise en relation avec une perte d’activité de l’étoile, éventuellement un minimum stellaire. Les jets les plus étroits pourraient donc se produire soit durant une baisse de l’activité magnétique

(Vidotto et al. 2009; 2010), soit par une perte de la connection avec le disque. Dans ce cas, le temps de freinage serait de l'ordre de 10 millions d'années.

Il est important de souligner que ces deux solutions sont obtenues après une modification légère des paramètres. Ce résultat est connu pour être l'effet de la non-linéarité des équations. La morphologie du jet prendrait alternativement la forme des deux solutions en fonction de l'activité de l'étoile. Au cours d'une phase de l'écoulement, la morphologie du jet serait relativement ouverte et ne présenterait pas d'oscillations. Dans l'autre phase, elle serait étroite et recollimaterait loin de l'étoile pour produire des chocs radiatifs observés dans le domaine UV (Gomez de Castro et Verdugo 2001). Le choc UV serait alors produit pendant la baisse d'activité de l'étoile pour être détruit par le jet accéléré pendant la phase active. Ce comportement multiphase des jets de grande taille a été décrit par des simulations MHD à deux composantes lorsque la vitesse initiale d'injection du jet varie dans le temps produit par une variabilité du cycle magnétique, par exemple (Matsakos et al. 2009).

Les profils de densité de nos deux solutions sont compatibles avec les densités données par Gomez de Castro et Verdugo (2001), qui mesurent une densité électronique de  $10^{12} \text{ cm}^{-3}$  pour la raie UV Si III entre 0.006 et 0.3 AU, et  $10^{10} \text{ cm}^{-3}$  pour la raie UV interdite C III entre 0.05 et 1 AU. Ces deux valeurs sont compatibles avec les valeurs de la densité de la seconde solution présentée Fig. 4.9a. Ils mesurent aussi une densité de  $10^7 \text{ cm}^{-3}$  pour la raie UV interdite O II à une distance plus grande, entre 4 et 100 AU (dans la région du choc UV). La densité observée correspond alors à la densité asymptotique de la première solution Fig. 4.5a. Notre solution reproduit bien les taux de perte de masse, vitesse terminale et vitesse de rotation du jet. La température effective du plasma dans le jet est raisonnable et indique que des processus non thermiques, comme les ondes d'Alfvén, sont à l'œuvre.

## 4.6 Perspectives

Les observations polarimétriques visible et infrarouge permettent de déterminer certains paramètres physiques d'objet stellaires jeunes (YSOs) tels que la vitesse de rotation, la présence d'un disque d'accrétion et/ou d'un jet ainsi que la valeur du champ magnétique (Donati 2008). Les variabilités temporelles de la position angulaire (PA) de la polarisation indiquent la présence d'un disque d'accrétion (Bastien 1996) ou bien la présence d'un jet pour lequel la position angulaire de la polarisation linéaire est préférentiellement perpendiculaire (Mundt et Fried 1983). Une liste d'objets stellaires jeunes observées en spectropolarimétrie infrarouge proche a été proposée par Pereyra et al. (2009) parmi lesquels on observe des jets de plasma comme V536 Aql, RY Tau, DO Tau, HL Tau et LkH $\alpha$ 358. Il est important de mesurer ces grandeurs physiques avec précision pour pouvoir adapter nos paramètres et trouver des solutions qui représentent bien les objets astrophysiques.

## Solutions de jets relativistes

*Black holes are where God divided by zero.*

A. Einstein

Ce chapitre présente les solutions de jets relativistes obtenues avec le modèle en métrique de Kerr. J'introduirai d'abord brièvement les objets astrophysiques que ces solutions peuvent décrire. Le calcul des premières solutions en métrique de Kerr a montré un effet de la rotation du trou noir sur la topologie globale de l'écoulement ; la première partie de ce chapitre est donc consacrée à l'étude de la collimation et en particulier de la collimation magnétique avec la généralisation du critère de collimation  $\epsilon$  (présenté au chapitre 4 dans le contexte des étoiles jeunes). La deuxième partie concerne la comparaison aux observations avec l'étude d'une solution pouvant s'appliquer au jet de M87. Notre modèle est valable près de l'axe de rotation et ne peut décrire que la structure interne du jet. Cependant l'écoulement peut être formé de deux composantes, une issue du disque et une provenant de l'objet central, comme dans le cas des jets stellaires. Nos solutions pourraient donc être associées à des solutions autosimilaires en  $r$  pour la partie de vent de disque, calculées dans le cadre d'un modèle de type Blandford et Payne (1982) relativiste, qui ne peut décrire la partie centrale du jet. De telles solutions ont été calculées par exemple par Vlahakis & Königl (2003). Il est donc intéressant d'appliquer notre modèle à l'épave centrale du jet de M87 où deux composantes sont clairement identifiées (Matveyenko et Seleznev 2011).

### 5.1 Présentation des jets relativistes

Les jets provenant de noyaux actifs de galaxies sont de gigantesques écoulements de plasma qui peuvent s'étendre sur plusieurs centaines de kiloparsecs. Ils proviennent de régions proches du rayon gravitationnel du trou noir central de masse  $10^8 \sim 10^9 M_\odot$  selon l'étude de la dynamique des étoiles autour du noyau (Marconi et al. 2003). A l'échelle du parsec, ces jets sont relativistes et présentent un angle d'ouverture de quelques degrés. D'autres jets relativistes sont observés à l'échelle galactique, provenant d'étoiles à neutrons solitaires (pulsars) ou faisant partie d'un système binaire (microquasars). Les écoulements ultra-relativistes nés de l'effondrement gravitationnel d'une étoile massive sont supposés être à l'origine des sursauts gamma longs (Mazzali et al. 2003). Nous présentons ici les deux objets que notre modèle peut représenter, c'est-à-dire les jets de microquasars et les jets d'AGN. Les jets de pulsars sont actuellement décrits par des modèles *force-free* et les

sursauts gamma seraient associés à des écoulements de facteurs de Lorentz beaucoup plus importants (entre 100 et 1000). De plus pour ces derniers le jet n'est pas directement visible et la modélisation de l'émission nécessite des modèles dépendant du temps, comme nous le verrons plus en détail au chapitre 6.

### Les jets de galaxie à noyau actif

Les galaxies à noyau actif représentent environ 5% de la population totale de galaxies et ont été classées historiquement selon leurs caractéristiques spectrales. La Fig. 5.1 présente les différentes classes de galaxies actives. On distingue d'abord les AGN selon le fait qu'ils émettent fortement ou non dans le domaine radio. On parle alors d'AGN *radio-loud*, si le rapport flux radio (à 5 GHz) sur flux optique est supérieur à 10, ou *radio-quiet*, s'il est inférieur. On classe ensuite les AGN en fonction de la largeur des raies que présentent leurs spectres : de type I (raies larges) ou de type II (raies fines).

		raies étroites	raies larges	absence de raies
Type Radio	radio-quiet	Seyfert 2	Seyfert 1 Quasi Stellar Objects	
	radio-loud	Narrow Line Radio Galaxie	Broad Line Radio Galaxie	Blazars BL Lacs

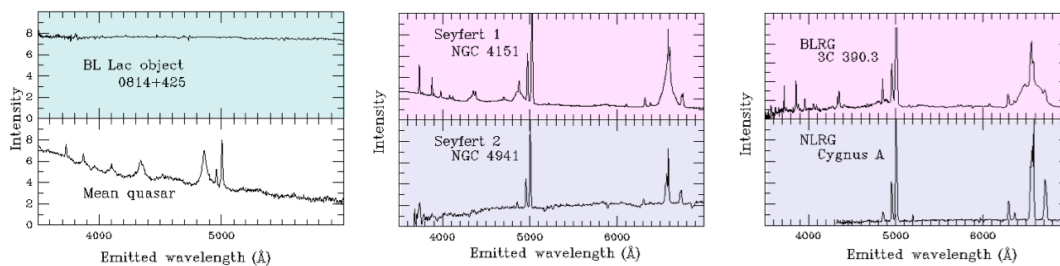


FIG. 5.1 – Les différents types d'AGN.

De nombreux modèles ont été proposés pour unifier les différentes classes de galaxies actives. Selon un scénario proposé par Urry et Padovani (1995), il s'agirait d'un même objet vu sous des angles différents. La largeur des raies est interprétée comme de l'élargissement Doppler qui nous renseignerait sur la région d'où la raie a été émise. Les zones d'où sont issues les raies larges ne seraient pas toujours observables à cause d'un tore de matière opaque, qui absorberait la lumière émise par la région proche du trou noir, la rendant inobservable dans le plan du tore (cf. Fig 5.2). De tels tores ont été observés par le télescope spatial Hubble, par exemple dans NGC 4261. Seuls les nuages plus excentrés (et donc plus froids) restent visibles et on observe un spectre présentant des raies fines. En regardant le même objet selon un angle de vue laissant apparaître la région centrale on peut alors détecter les raies larges émises par les nuages chauds proches du disque d'accrétion. Un observateur qui regarde selon l'axe des pôles voit le jet de face et observe ce qu'on appelle un blazar, pour lequel l'émission continue de la source est si intense qu'elle domine les autres signatures dans le spectre.

La matière accrétée par l'objet central est probablement magnétisée et doit posséder un moment angulaire suffisant pour former un disque, comme proposé pour la première fois par Lynden-Bell

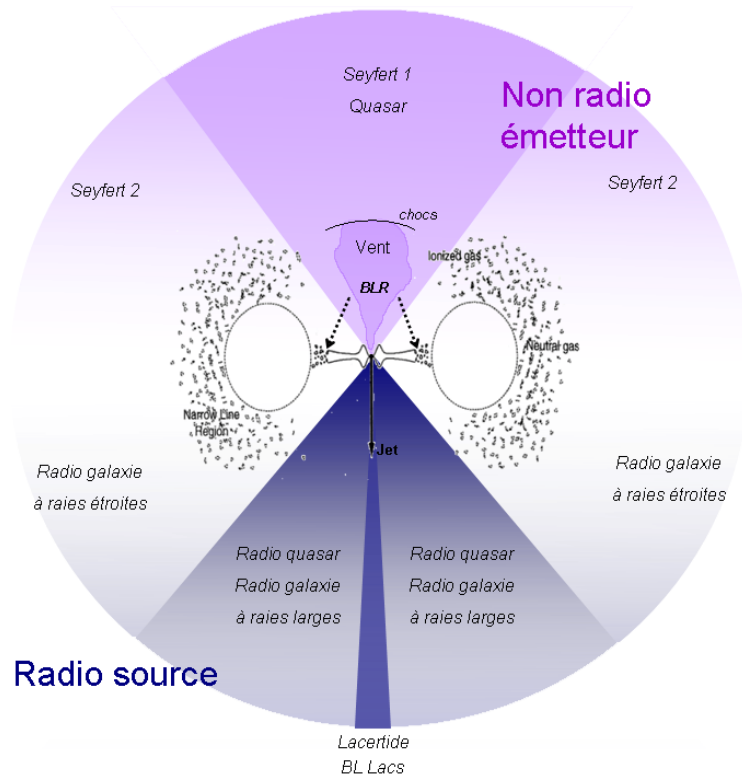


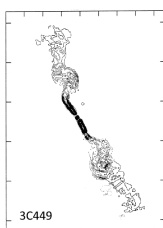
FIG. 5.2 – Unification des AGN, d’après Urry et Padovani (1995).

(1969). Une hypothèse serait que les vents et jets soient générés en présence d’un champ magnétique initialement poloïdal ancré dans le disque d’accrétion. La rotation du disque entraîne les lignes de champ magnétique et crée un champ toroïdal qui va collimater le vent. Les disques d’accrétion seraient donc naturellement source de jets collimatés. Une autre possibilité serait un écoulement directement issu de l’objet central. Un modèle à deux composantes a été proposé par Sol et al. (1989). Le jet aurait une double nature, sa partie interne serait constituée d’un faisceau relativiste de paires d’électrons-positrons et sa partie externe serait un écoulement plus lent constitué de paires d’électrons-ions, afin de rendre compte des observations.

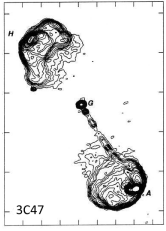
L’émission radio associée aux jets d’AGN est interprétée comme de l’émission synchrotron. Les jets peuvent s’étendre sur plusieurs milliers de parsecs et présentent des degrés de collimation divers. On les classe en deux familles selon leur morphologie (Fanaroff et Riley 1974) :

- *Fanaroff-Riley Class I (FR I)* : jets faibles ( $P_{178\text{MHz}} < 10^{25} \text{ W.Hz}^{-1}.\text{sr}^{-1}$ ), peu focalisés, dont la luminosité diminue du coeur vers les lobes. La structure turbulente du jet ne permet pas des mouvements relativistes à une échelle supérieure à celle du parsec. Des mesures de polarisation indiquent que la composante du champ magnétique projetée sur le plan du ciel, d’abord parallèle à l’axe du jet devient très vite transverse.

Exemples : 3C449, M87, Centaurus A



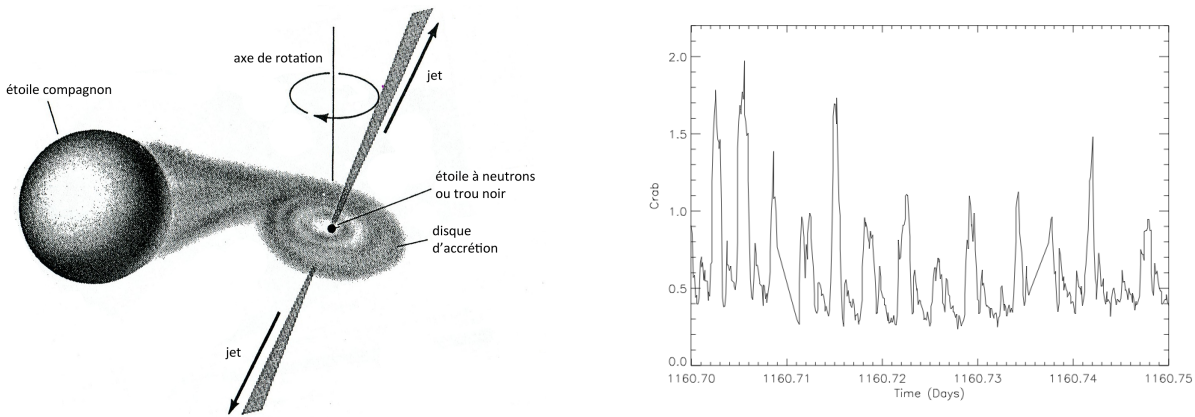




- *Fanaroff-Riley Class II (FR II)* : jets puissants ( $P_{178\text{MHz}} > 10^{25} \text{ W}\cdot\text{Hz}^{-1}\cdot\text{sr}^{-1}$ ), très collimatés (l'angle d'ouverture n'excède pas 4 degrés), luminosité maximale vers les chocs terminaux (*hot spots*). Le champ magnétique est parallèle à l'axe du jet sauf au niveau des chocs terminaux où la composante transverse domine. Des mouvements relativistes sont observés à l'échelle du kiloparsec. Exemples : 3C47, Cygnus A

### Les microquasars

Les microquasars sont des sources galactiques à éjections apparemment superluminiques (jets relativistes avec des facteurs de Lorentz  $\gamma \approx 3 - 10$ ). Ce sont des systèmes binaires serrés constitués d'un objet compact qui accrete la matière de son étoile compagnon via un disque d'accrétion. Il est intéressant d'étudier comment le processus d'accrétion peut être à l'origine des fortes émissions X rapidement variables observées dans de tels objets. On appelle ce type d'objet XRB (*X-ray binaries*). Comme on le voit ci-dessous, le microquasar GRS 1915+105 produit des éjections d'énergie supérieures à  $10^{44}$  erg, et ce plusieurs fois par an :



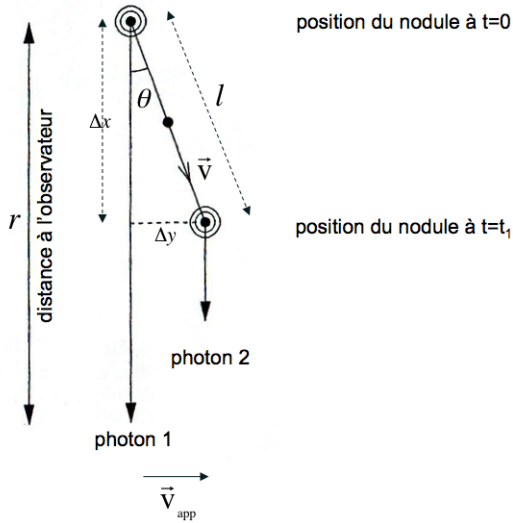
**FIG. 5.3** – A gauche : représentation schématique d'un microquasar. A droite : Courbe de lumière de GRS 1915+105 (Hannikainen 2003)

Le moteur central des jets de microquasars est probablement une version miniature des jets d'AGN. L'analogie quasar-microquasar ne se limite pas seulement au moteur central (trou noir, disque d'accrétion, jets) mais également à leur dynamique, ce qui laisse supposer la présence de lois d'échelle dans la physique de l'accrétion-éjection. En effet, si les valeurs des grandeurs caractéristiques (longueurs, durées, énergies) dépendent de la masse de l'objet compact, des variations de l'ordre de la minute dans un microquasar correspondraient à des durées de plusieurs milliers d'années dans le cas d'un quasar. Par conséquent, l'étude des microquasars permettraient de comprendre des phénomènes que nous ne pouvons pas étudier dans les quasars à l'échelle d'une vie humaine.

### Vitesses superluminiques

Les observations VLBI ont mis en évidence des vitesses apparentes superluminiques, qui sont en réalité dues à un effet de projection comme expliqué Fig. 5.4

Ces mesures de vitesses lorsqu'elles peuvent être associées à une mesure de l'angle  $\theta$  permettent de



Soit  $r$ , la distance entre l'observateur et le jet au temps  $t = 0$ ,  $\vec{v}$ , la vitesse du jet dans la direction  $\theta$ , par rapport à la ligne de visée.

A  $t = 0$ , un premier photon est émis. Cet événement est vu par l'observateur placé à la distance  $r$  au temps :

$$T_0 = \frac{r}{c}$$

A  $t = t_1$ , le jet a parcouru une distance  $l$ , un deuxième photon est émis.  $t_1 = \frac{l}{v}$ . Cet événement est vu par l'observateur à la distance  $r - \Delta x$  au temps :

$$T_1 = \frac{l}{v} + \frac{r - \Delta x}{c}$$

La vitesse apparente mesurée par l'observateur  $\vec{v}_{app}$  est donnée par  $\vec{v}_{app} = \frac{\Delta y}{T_1 - T_0}$ , d'où :

$$v_{app} = \frac{\Delta y}{\frac{l}{v} - \frac{\Delta x}{c}} = \frac{v \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (5.1)$$

Avec les notations  $\beta = \frac{v}{c}$ ,  $\beta_{app} = \frac{v_{app}}{c}$ , on obtient :

$$\beta_{app} = \frac{\beta \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (5.2)$$

FIG. 5.4 – Explication du phénomène de vitesses superluminiques.

déterminer le facteur de Lorentz des jets relativistes (Fig. 5.5).

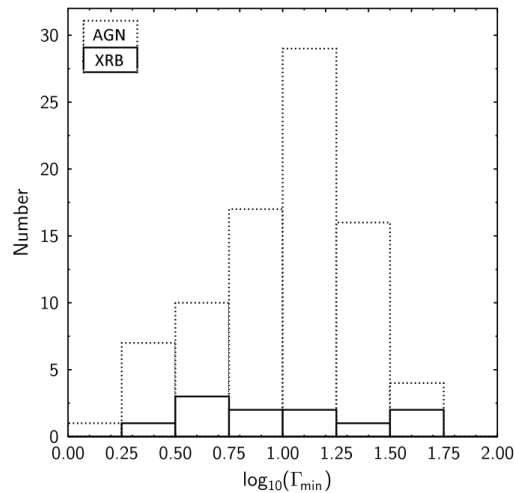
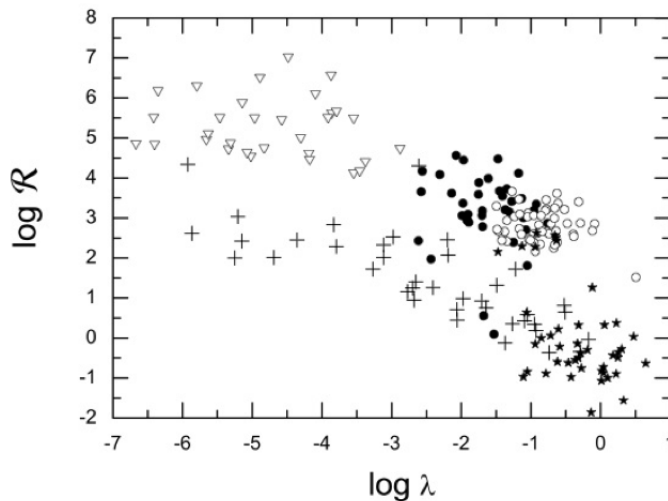


FIG. 5.5 – Distribution des facteurs de Lorentz déduite des mesures des vitesses superluminiques. (Miller-Jones et al. 2006)

### Mesure du spin des trous noirs

Les travaux de Penrose (1969) et de Blandford et Znajek (1977) ont contribué à prendre conscience de l'importance de la rotation des trous noirs dans l'étude des sources puissantes telles que les jets relativistes. La dichotomie radio émetteur/non-émetteur de la population des AGN est habituellement attribuée à la vitesse de rotation du trou noir (en notant la corrélation entre la valeur du spin du trou noir et la morphologie de la galaxie hôte pour expliquer l'existence des AGN radio-émetteurs dans les galaxies jeunes (Fig. 5.6). Cette idée est également explorée dans les simulations numériques MHD (Tchekhovskoy et al. 2010). Le maintien de la direction du jet sur de grandes distances serait un autre effet de la rotation du trou noir. En effet, le champ gravitomagnétique  $H$  force le disque d'accrétion à demeurer dans le plan de rotation du trou noir (Bardeen et Petterson 1975), ce qui a pour effet de donner une direction privilégiée aux jets issus du disque : celles des pôles. Le spin du trou noir pourrait également expliquer la précession de certains jets (Begelman, Blandford et Rees 1980).



**FIG. 5.6** – Rapport radio/optique (5 GHz/440 nm) en fonction du rapport d'Eddington  $\lambda$  pour un échantillonnage d'AGN (les galaxies à raies larges sont représentées par des disques pleins, les quasars radio-émetteurs par des cercles, les galaxies de Seyfert et LINER par des croix, les radio-galaxies par des triangles et les PG quasars par des étoiles pleines. La dichotomie radio-émetteur/non-émetteur est révélée via l'existence de deux branches de la figure. L'explication par la rotation consiste dans le fait que la branche supérieure (exclusivement des galaxies jeunes) corresponde aux trous noirs supermassifs en rotation rapide alors que la branche inférieure soit associée aux SMBH en rotation lente. (Sikora et al. 2007)

Une méthode pour estimer le spin du trou noir serait de pouvoir mesurer le rayon interne du disque d'accrétion, défini comme le rayon de la dernière orbite circulaire stable ( $R_{\text{ISCO}}$ ) prédite par la relativité générale (Bardeen et al. 1972) :  $R_{\text{ISCO}}$  décroît de  $6GM/c^2$  à  $GM/c^2$  lorsque le paramètre de spin  $a/m$  croît de 0 à 1 (Fig.5.7). Etant donné que la dernière orbite stable est plus petite, la vitesse angulaire  $\omega$  est par conséquent plus grande. L'effet Doppler mesuré sur des raies spectrales en provenance de la partie interne du disque serait donc plus important dans le cas d'un trou noir en rotation. La partie interne du disque est suffisamment chaude pour produire un spectre thermique dans le domaine X. Une des méthodes observationnelles pour mesurer  $R_{\text{in}}$  est d'ajuster ce spectre continu à l'aide du modèle développé par Novikov et Thorne (1973) pour un disque d'accrétion fin, e.g., Zhang et al. (1997). Dans ce modèle, le maximum de luminosité est atteint à un rayon différent

pour chaque valeur du paramètre de spin  $a/m$ . Le spectre observé dépend donc de  $a/m$ . Une autre méthode consiste à ajuster la raie du Fer fluorescente  $\text{Fe K}\alpha$ , détectée dans le spectre X de certaines galaxies de Seyfert (Reynolds et Nowak 2003). Ces deux méthodes ont permis de mesurer le spin de trous noirs stellaires de systèmes binaires (XRBs) et de noyaux actifs de galaxie. Les candidats de trous noirs présentant les spins les plus importants ( $a/m > 0.9$ ) sont Cygnus X-1 (premier candidat clairement identifié dans une binaire X à forte masse), dont le spin a été estimé par ajustement du spectre X (Gou et al. 2011); le microquasar GRS 1915+105 (premier objet galactique où des jets radio furent observés) dont le spin a été estimé par ajustement du spectre X (McClintock et al. 2006) et ajustement de la raie du Fer (Blum et al. 2009); le trou noir supermassif du noyau actif de galaxie MCG-6-3-15, dont le spin a été estimé par l'ajustement de la raie du Fer (Brenneman et Reynolds 2006). Enfin, une autre méthode qui consiste à calculer le profil de raies d'annihilation de paires d'électron-positron en fonction du spin afin de le comparer au spectre de binaires X, a permis d'estimer  $a/m > 0.7$  pour deux objets, GRS 11268 et 1E 1740-29 (Hameury et al. 1994).

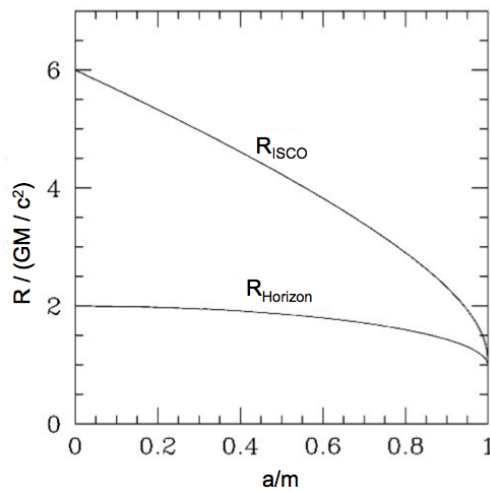


FIG. 5.7 – Variation du rayon de l'horizon et du rayon cylindrique en fonction du spin du trou noir.

## 5.2 Etude de la collimation

### 5.2.1 Les différents processus de collimation

Avant d'aborder l'étude des solutions et de leur changement de topologie, passons en revue les différents processus physiques susceptibles de collimater les jets.

#### Confinement par le milieu ambiant

L'écoulement peut être confiné par la pression du milieu extérieur si celui-ci est suffisamment dense. Cette hypothèse est envisageable dans le cas de jets stellaires, les jets d'étoiles jeunes se propageant dans un milieu relativement dense (nuage de gaz et de poussières), ou pour le cas des sursauts gamma où le jet est supposé se former après l'effondrement d'une étoile massive; un confinement est alors possible par l'enveloppe de l'étoile. Cependant, ce processus de collimation ne peut pas

fonctionner sur de grandes distances ; à supposer que le jet se propage par la suite dans un milieu très rarefié, il devrait s'étendre à la vitesse magnéto-sonique caractéristique du plasma qui le constitue. Cela est d'autant plus valable pour les jets extragalactiques qui se propagent sur des échelles immenses, quelquefois plusieurs centaines de kiloparsecs. De plus, il y a souvent recollimation du jet à l'échelle du parsec (cf. Fig. 5.13). La pression du jet est estimée à partir du rayonnement synchrotron observé et de l'hypothèse d'équipartition, et comparée à la pression du milieu externe. Cette action du milieu permettrait d'expliquer la différence de topologie entre les jets FRI et FR II. Les jets FRI seraient collimatés par la pression du milieu extérieur contrairement aux FR II.

### Confinement par le gradient de pression

Ce type de confinement nécessite un gradient de pression négatif dans le jet (une pression qui diminue vers l'axe) ou bien une double structure dans laquelle la partie centrale serait confinée par la partie externe, par exemple dans le cas d'un écoulement constitué d'un jet hadronique issu du disque qui entoure un faisceau de paires  $e^+ - e^-$  issu du trou noir (Sol et al. 1989).

### Confinement par le champ magnétique

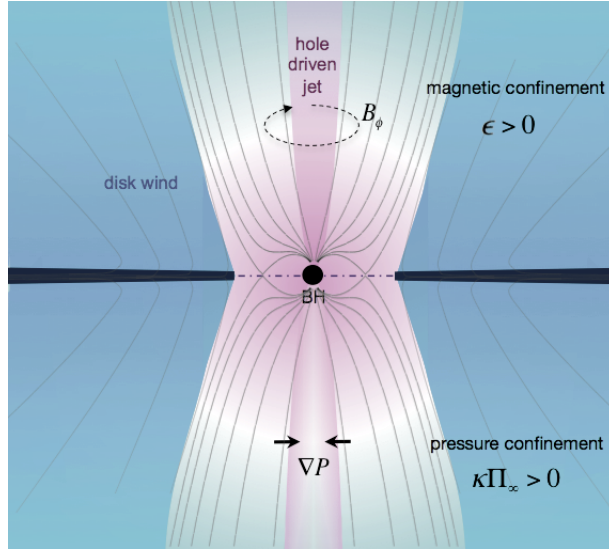
Nous avons vu que le mouvement de rotation des lignes de champ magnétique dans le plasma génère un champ magnétique toroïdal qui va confiner l'écoulement (sous l'effet de la force de Lorentz transverse). Si la vitesse d'expansion latérale du jet est supérieure à la vitesse de la lumière, les parties externes sont déconnectées causalement des parties internes. La condition pour que les bords restent connectés causalement avec l'épave centrale est  $\gamma\theta \leq 1$ , où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz et  $\theta$  l'angle d'ouverture du jet. Dans un jet magnétisé, les perturbations se propagent à la vitesse des ondes d'Alfvén et il faudrait en réalité que l'expansion latérale dans le référentiel comobile se fasse à une vitesse inférieure à la vitesse d'Alfvén. Cependant, dans un jet fortement magnétisé et relativiste, la vitesse d'Alfvén approche celle de la lumière.

## 5.2.2 Paramètre de collimation en métrique de Kerr

Le but est de faire un bilan énergétique afin d'isoler la source d'énergie qui collimate le jet. On va donc décomposer chaque type d'énergie (magnétique ou thermique) en deux parties, une partie qui accélère le jet et une partie qui le collimate. Comme cela a été fait dans le cas classique par Sauty et Tsinganos (1994), on détermine  $\Delta\mathcal{E}$ , variation de l'énergie *qui n'a pas servi à accélérer le jet* entre une ligne d'écoulement (caractérisée par un  $\alpha$  donné) et l'axe des pôles : si  $\Delta\mathcal{E} > 0$  alors la densité d'énergie augmente à mesure que l'on s'éloigne de l'axe. Cet excès d'énergie sert donc à collimater le jet. A l'inverse un  $\Delta\mathcal{E}$  négatif correspond à une décollimation. On a montré que l'on peut décomposer  $\Delta\mathcal{E}$  en une énergie thermique et une énergie magnétique.

La partie thermique de  $\Delta\mathcal{E}$  est liée à la structure de la pression dans le jet. Dans notre modèle ce terme va donc être proportionnel à  $\kappa$  : on montre que pour  $\kappa > 0$  il y a collimation thermique, pour  $\kappa < 0$  décollimation<sup>1</sup>. Le paramètre  $\epsilon$  représente la partie magnétique de l'excès énergétique et

1. en réalité on regarde si le produit  $\kappa\Pi_\infty$  est positif ou négatif (Sauty et al. 1999) mais les solutions présentées ici ont toutes  $\Pi_\infty > 0$ .



**FIG. 5.8** – Représentation schématique des deux processus d'autocollimation à l'œuvre dans nos solutions de jets.

permet donc de mesurer l'effet de la collimation magnétique : si  $\epsilon$  est positif, il y a un excès d'énergie magnétique qui peut servir à collimater le jet. Si  $\epsilon < 0$ , il n'y a pas de collimation magnétique.

Généralisons à la métrique de Kerr le paramètre  $\epsilon$  qui décrit la collimation magnétique pour toutes les lignes d'écoulement, qui va être utilisée pour classer les diverses solutions. On utilise la même méthode qu'en métrique de Schwarzschild (Meliani et al. 2006).

L'équation (2.59), après avoir substitué  $n$  par son expression dans l'équation (3.1) et en utilisant  $\vec{V} \cdot \nabla \propto \partial/\partial R|_\alpha$  (dérivation selon  $\alpha$  constant), peut être ré-écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} -8\pi M^2 \frac{\partial P}{\partial R} \Big|_\alpha &= -\frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{\Psi_A^2 w^2}{c^2} \right) \Big|_\alpha \\ &= \frac{\partial}{\partial R} \left[ \frac{\Psi_A^2 [\mathcal{E}^2 - w^2]}{c^2} \right] \Big|_\alpha, \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $\Psi_A^2 w^2$  est proportionnelle à l'énergie *par unité de volume* du fluide dans le repère comobile ; c'est-à-dire la partie thermique de l'énergie.  $\Psi_A^2 [\mathcal{E}^2 - w^2]$  mesure donc la variation entre l'énergie totale et l'énergie thermique du fluide.

En écrivant ce terme de la manière suivante,

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_A^2 w^2}{c^2} &= \frac{\Psi_A^2 w^2 \gamma^2 (1 - v_\phi^2/c^2 - v_p^2/c^2)}{c^2} \\ &= \frac{\Psi_A^2}{c^2 h^2} (h\gamma w)^2 \left( 1 - \frac{v_\phi^2}{c^2} \right) - \frac{M^4 B_p^2}{h^2}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

et en utilisant les expressions de Tab. 3.1, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\Psi_A^2 w^2}{c^2} &= \frac{\Psi_A^2 \mathcal{E}^2}{c^2 h^2} \left[ \frac{M^2 - h^2(1 - x_A^2)}{M^2 - h^2(1 - x^2)} \right]^2 \\ &- \frac{\Psi_A^2 \mathcal{E}^2}{c^2 h^2} \left[ \frac{M^2 x_A^2/x - x h^2(1 - x_A^2)}{M^2 - h^2(1 - x^2)} \right]^2 - \frac{M^4 B_p^2}{h^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

On a vu que la pression peut s'écrire  $P = P_0 + f_1(R)(1 + \kappa\alpha)/8\pi$ . On connaît également les dépendances en  $\theta$  de toutes les grandeurs physiques qui apparaissent dans l'expression de  $\Psi_A^2 w^2/c^2$ ,

et après un développement en  $\sin^2 \theta$  on trouve  $\Psi_A^2[\mathcal{E}^2 - w^2]/c^2 = f_2(R) + f_3(R)\alpha$ . L'équation (5.3) donne :

$$\begin{aligned} -M^2 \frac{df_1}{dR} (1 + \kappa\alpha) &= \frac{df_2}{dR} + \frac{df_3}{dR} \alpha \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -M^2 df_1 = df_2 \\ -M^2 \kappa df_1 = df_3 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.6)$$

En éliminant  $df_1$ , on obtient l'intégrale  $f_3(R) - \kappa f_2(R) = \epsilon$ .

En remplaçant  $f_2(R)$  et  $f_3(R)$  par leurs expressions, on obtient :

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{M^4}{h_*^4 (R^2 + \sigma^2) G^2} \left( \frac{F^2}{4} - \frac{1}{h^2} - \kappa \frac{R^2 + \sigma^2}{h^2 G^2} \right) - \frac{(\delta - \kappa) \nu^2}{h^2} \frac{R}{R^2 + \sigma^2} \\ &\quad + \frac{1}{G^2 h_*^2} \lambda^2 \aleph^2 \left( \frac{N_V}{D} \right)^2 + \frac{2\lambda^2}{h^2} \left( \aleph^2 \frac{N_B}{D} + \frac{\bar{\omega}}{\lambda} \right), \end{aligned} \quad (5.7)$$

### Comportement à la source

On regarde ce que vaut  $\epsilon$  à la base du jet (en  $R = R_o$ ) en faisant l'hypothèse que la vitesse poloïdale y est négligeable [ $M(R_o) \approx 0$ ]. On peut alors écrire :

$$\epsilon = -\frac{(\delta - \kappa) \nu^2}{h_o^2} \frac{R_o}{R_o^2 + \sigma^2} + \frac{1}{G_o^2 h_*^2} \lambda^2 \aleph_o^2 \left( \frac{N_{V_o}}{D_o} \right)^2 + \frac{2\lambda^2}{h_o^2} \left( \aleph_o^2 \frac{N_{B_o}}{D_o} + \frac{\bar{\omega}_o}{\lambda} \right) \quad (5.8)$$

On cherche à généraliser le critère de collimation en écrivant :

$$\frac{\epsilon}{2\lambda^2} = \frac{\mathcal{E}_{R,o} + \mathcal{E}_{\text{Poynt},o} + \Delta\mathcal{E}_G^* + \mathcal{E}_{\text{shift},o}}{\mathcal{E}_{\text{MR},o}}, \quad (5.9)$$

L'énergie du rotateur magnétique s'écrit, après un développement au premier ordre en  $\alpha$  :

$$\mathcal{E}_{\text{MR}} = h^2 L \Omega = h^2 \frac{\mathcal{E} \lambda^2 \mu}{\nu^2} \alpha = 2\lambda^2 \left( \frac{\mathcal{E} h^2 \mu \alpha}{2\nu^2} \right) \quad (5.10)$$

ce qui donne en  $R = R_o$  :

$$\mathcal{E}_{\text{MR},o} = h_o^2 L \Omega = h_o^2 \frac{\mathcal{E} \lambda^2 \mu}{\nu^2} \alpha = 2\lambda^2 \left( \frac{\mathcal{E} h_o^2 \mu \alpha}{2\nu^2} \right) \quad (5.11)$$

Dans  $\epsilon$ , on identifie aisément les termes suivants :

$$\mathcal{E}_{R,o} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{v_{\varphi,o}^2}{2} = \left( \frac{\mathcal{E} h_o^2 \mu \alpha}{2\nu^2} \right) \frac{1}{G_o^2 h_*^2} \lambda^2 \aleph_o^2 \left( \frac{N_{V_o}}{D_o} \right)^2, \quad (5.12)$$

qui est l'énergie rotationnelle par particule, proportionnelle à l'énergie rotationnelle spécifique  $v_{\varphi,o}^2/2$ , le facteur  $\mathcal{E}/c^2$  ayant la dimension d'une masse ;

$$\Delta\mathcal{E}_G^* = -\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{\mu c^2}{2} \frac{R_o}{R_o^2 + \sigma^2} (\delta - \kappa) \alpha = -\left( \frac{\mathcal{E} h_o^2 \mu \alpha}{2\nu^2} \right) \frac{(\delta - \kappa) \nu^2}{h_o^2} \frac{R_o}{R_o^2 + \sigma^2}, \quad (5.13)$$

qui est l'excès d'énergie gravitationnelle qui n'est pas compensée thermiquement ;

$$\mathcal{E}_{\text{Poynt},o} = -h_o \frac{\varpi(\Omega - \omega_o)}{\Psi_A} B_\varphi = \left( \frac{\mathcal{E} h_o^2 \mu \alpha}{2\nu^2} \right) \frac{2\lambda^2 \aleph_o^2 N_{B_o}}{h_o^2 D_o} \quad (5.14)$$

est le flux de Poynting. Enfin, il reste un terme nouveau,

$$\mathcal{E}_{\text{shift},o} = L\omega_o = \left( \frac{\mathcal{E}h_o^2\mu\alpha}{2\nu^2} \right) \frac{2\lambda^2 \bar{\omega}_o}{h_o^2 \lambda} > 0, \quad (5.15)$$

qui est une énergie de type rotateur magnétique. Cette énergie est positive. On va donc avoir une constante  $\epsilon$  plus grande dans le modèle en métrique de Kerr. On s'attend à ce que la rotation du trou noir ait un effet collimatant sur le jet. La comparaison avec la métrique de Schwarzschild est donnée Tab. 5.1.

### Comportement asymptotique

Loin de la source, on atteint le régime cylindrique où le jet n'est plus accéléré; l'équilibre des forces se fait dans le plan transverse entre le gradient de pression  $\vec{f}_P$ , la force totale de pincement magnétique (incluant la pression et la tension magnétique),  $\vec{f}_B$ , la force centrifuge,  $\vec{f}_C$ , et la force électrique,  $\vec{f}_E$ . On a donc :

$$\vec{f}_C + \vec{f}_B + \vec{f}_P + \vec{f}_E = 0, \quad (5.16)$$

Dans la limite asymptotique, le jet collimate cylindriquement ( $F = 2 \Leftrightarrow \theta \sim 0$ ) et on obtient les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} f_C &= \gamma^2 n \frac{w v_\varphi^2}{c^2 \varpi} \\ &= \frac{B_\star^2}{4\pi G_\infty^4} \frac{h_\star^2}{M_\infty^2} \lambda^2 \varpi_\infty \left( \frac{N_{V\infty}}{D_\infty} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} f_B &= -\frac{1}{4\pi\varpi} \left( B_\varphi^2 + \frac{1}{2} \frac{dB_\varphi^2}{d\varpi} \varpi \right) \\ &= -\frac{B_\star^2}{2\pi G_\infty^4} h_\star^2 \lambda^2 \varpi_\infty \left( \frac{N_{B\infty}}{D_\infty} \right)^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$f_P = -\frac{dP}{d\varpi} = -\frac{B_\star^2}{4\pi G_\infty^2} \Pi_\infty \kappa \varpi_\infty, \quad (5.19)$$

$$f_E = \hat{q}E_\varpi = \frac{B_\star^2}{2\pi G_\infty^4} h_\star^2 \frac{\lambda^2 \mu}{\nu^2} \varpi_\infty. \quad (5.20)$$

Les forces électrique et centrifuge ont un effet décollimatant contrairement à la force magnétique. L'effet de la force de pression va être donné, comme on l'a vu, par la direction du gradient de pression : si la pression diminue vers l'axe le jet est collimaté thermiquement.

En combinant l'équation (5.16) avec les équations (5.17) - (5.20) on obtient,

$$\frac{\kappa}{2\lambda^2} \Pi_\infty = \frac{h_\star^2}{G_\infty^2} \left[ \frac{1}{2M_\infty^2} \left( \frac{N_{V\infty}}{D_\infty} \right)^2 + \frac{\mu}{\nu^2} - \left( \frac{N_{B\infty}}{D_\infty} \right)^2 \right]. \quad (5.21)$$

On regarde maintenant le comportement asymptotique de notre constante  $\epsilon$ . Lorsqu'on atteint le régime cylindrique,  $F_\infty \rightarrow 2$  et  $\epsilon$  devient,

$$\frac{\epsilon}{2\lambda^2} = -\frac{\kappa}{2\lambda^2} \frac{M_\infty^4}{h_\star^4 G_\infty^4} + \frac{1}{2h_\star^2 G_\infty^2} \left( \frac{N_{V\infty}}{D_\infty} \right)^2 + \frac{N_{B\infty}}{D_\infty}. \quad (5.22)$$



Schwarzschild $\left( \frac{\epsilon}{2\lambda^2} = \frac{\mathcal{E}_{R,o} + \mathcal{E}_{\text{Poynt},o} + \Delta\mathcal{E}_G^*}{\mathcal{E}_{\text{MR},o}} \right)$	Kerr $\left( \frac{\epsilon}{2\lambda^2} = \frac{\mathcal{E}_{R,o} + \mathcal{E}_{\text{Poynt},o} + \Delta\mathcal{E}_G^* + \mathcal{E}_{\text{shift},o}}{\mathcal{E}_{\text{MR},o}} \right)$
$\frac{\mathcal{E}_{R,o}}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = \frac{1}{2G_o^2 h_\star^2} \left( \frac{N_{Vo}}{D_o} \right)^2$	$\frac{\mathcal{E}_{R,o}}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = \frac{\aleph_o^2}{2G_o^2 h_\star^2} \left( \frac{N_{Vo}}{D_o} \right)^2$
$\frac{\mathcal{E}_{\text{Poynt},o}}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = \frac{1}{h_o^2} \frac{N_{Bo}}{D_o}$	$\frac{\mathcal{E}_{\text{Poynt},o}}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = \frac{\aleph_o^2}{h_o^2} \frac{N_{Bo}}{D_o}$
$\frac{\Delta\mathcal{E}_G^*}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = -\frac{(\delta - \kappa) \nu^2}{2\lambda^2 h_o^2 R_o}$	$\frac{\Delta\mathcal{E}_G^*}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = -\frac{(\delta - \kappa) \nu^2}{2\lambda^2 h_o^2} \frac{R_o}{R_o^2 + \sigma^2}$
	$\frac{\mathcal{E}_{\text{shift},o}}{\mathcal{E}_{\text{MR}}} = \frac{1}{h_o^2} \frac{\bar{\omega}_o}{\lambda}$

**TAB. 5.1** – Comparaison des termes du critère de collimation  $\epsilon$  à la source entre les métriques de Schwarzschild et de Kerr.

Les expressions asymptotiques ne changent pas par rapport aux expressions obtenues en Schwarzschild puisque, loin du trou noir,  $\omega_\infty \rightarrow 0$ .

### 5.2.3 Solutions collimatées par la rotation du trou noir

Dans le cas relativiste, il faut donner une valeur à deux paramètres supplémentaires, le paramètre  $\mu$  qui contrôle les effets gravitationnels liés à la courbure de l'espace et le paramètre  $\sigma$  qui contrôle les effets gravitationnels relatifs à la rotation du trou noir (cf. chapitre 3). On suppose que la surface d'Alfvén se trouve à  $10 r_s$ , soit  $\mu = 0.1$ , et on fait varier  $\sigma$  afin d'étudier le rôle de la rotation du trou noir sur les solutions obtenues. La Fig. 5.9 présente quatres solutions correspondant aux quatres jeux de paramètres des solutions (a,b,c,d) donnés Tab. 5.2. Seul le paramètre  $\sigma$ , associé à la valeur de spin, varie pour les solutions (a,b,c). La solution (a) pour laquelle  $\sigma = 0$  est une solution en métrique de Schwarzschild. Cette solution est asymptotiquement cylindrique car nous avons choisi la valeur minimale de la pression qui permet de trouver cette solution particulière pour laquelle  $F_\infty = 2 : \Pi_\star = \Pi_{\star,1} = 1.24$ . Cette solution représente le cas limite entre une solution décollimatée (pour une valeur de la pression plus faible,  $\Pi_\star < \Pi_{\star,1}$ ) et une solution qui recollimate (pour  $\Pi_\star > \Pi_{\star,1}$ ). Si on augmente le spin du trou noir ( $\sigma \neq 0$  en métrique de Kerr), le jet recollimate et son rayon cylindrique oscille autour d'une valeur constante. Ces oscillations ainsi que leur facteur d'amortissement ont été étudiées par Sauty et Tsinganos (1994) dans le contexte des jets d'étoiles jeunes et résultent du jeu entre les forces magnétiques et centrifuge qui agissent dans des directions opposées.

Solutions	$\mu$	$\nu$	$\sigma$	$\kappa$	$\delta$	$\lambda$	$\Pi_*$
a	0.1	1.5	0	0.02	0.078	0.73	1.24
b	0.1	1.5	0.01	0.02	0.078	0.73	1.24
c	0.1	1.5	0.05	0.02	0.078	0.73	1.24
d	0.1	1.5	0.05	0.02	0.078	0.73	1.21

**TAB. 5.2** – Paramètres des solutions. Les paramètres en grisé sont identiques pour les 4 solutions.

La rotation du trou noir a donc pour effet de collimater le jet. Le même constat peut être fait en partant de la solution de Kerr en rotation maximale (solution c) et en abaissant la valeur de la pression initiale  $\Pi_*$  jusqu'à obtenir le cas pour lequel  $\Pi_* = \Pi_{*,2}$  (solution d).

Le paramètre  $\kappa$  décrit l'intensité du gradient de pression transverse dans le jet. Il est identique pour les solutions (a,b,c). On va donc calculer la valeur du paramètre  $\epsilon$  pour ces solutions. Ce paramètre décrit la collimation magnétique, et on constate qu'il augmente avec le spin du trou noir.

La rotation du trou noir a donc pour effet d'augmenter la partie d'énergie magnétique disponible pour la collimation. Une étude plus quantitative est actuellement en cours et nécessite le calcul de nombreuses solutions afin de déduire un comportement général pour la variation de pente de la Fig. 5.10.

Les solutions en métrique de Kerr commencent dans la zone où  $\omega > \Omega$  comme indiqué Fig. 5.9 par les miniatures qui présentent un agrandissement en échelle linéaire près de la zone du trou noir pour les solutions (a,b,c,d). Dans cette zone, l'énergie rotationnelle peut être extraite du trou noir sous forme magnétique comme cela a été expliqué au chapitre 2. La Fig. 5.12 montrent l'effet des différentes forces agissant dans le jet pour les quatre solutions. La force de pression et la force électrique ont un effet décollimatant contrairement à la force de Lorentz. La force magnétique pour les solutions en Kerr est plus importante dans la partie asymptotique et la force électrique (qui décollimate) est moins importante. Pour  $r < 0.01$  pc, cela s'inverse et l'angle d'ouverture du jet est plus petit en métrique de Schwarzschild, comme le montre la Fig. 5.11.

### Nos solutions peuvent-elles freiner le trou noir ?

Le moment cinétique d'un trou noir en rotation maximale ( $a/m = 1$ ) est donné par :

$$J = \frac{\mathcal{G}M_{\text{BH}}^2}{c} \quad (5.23)$$

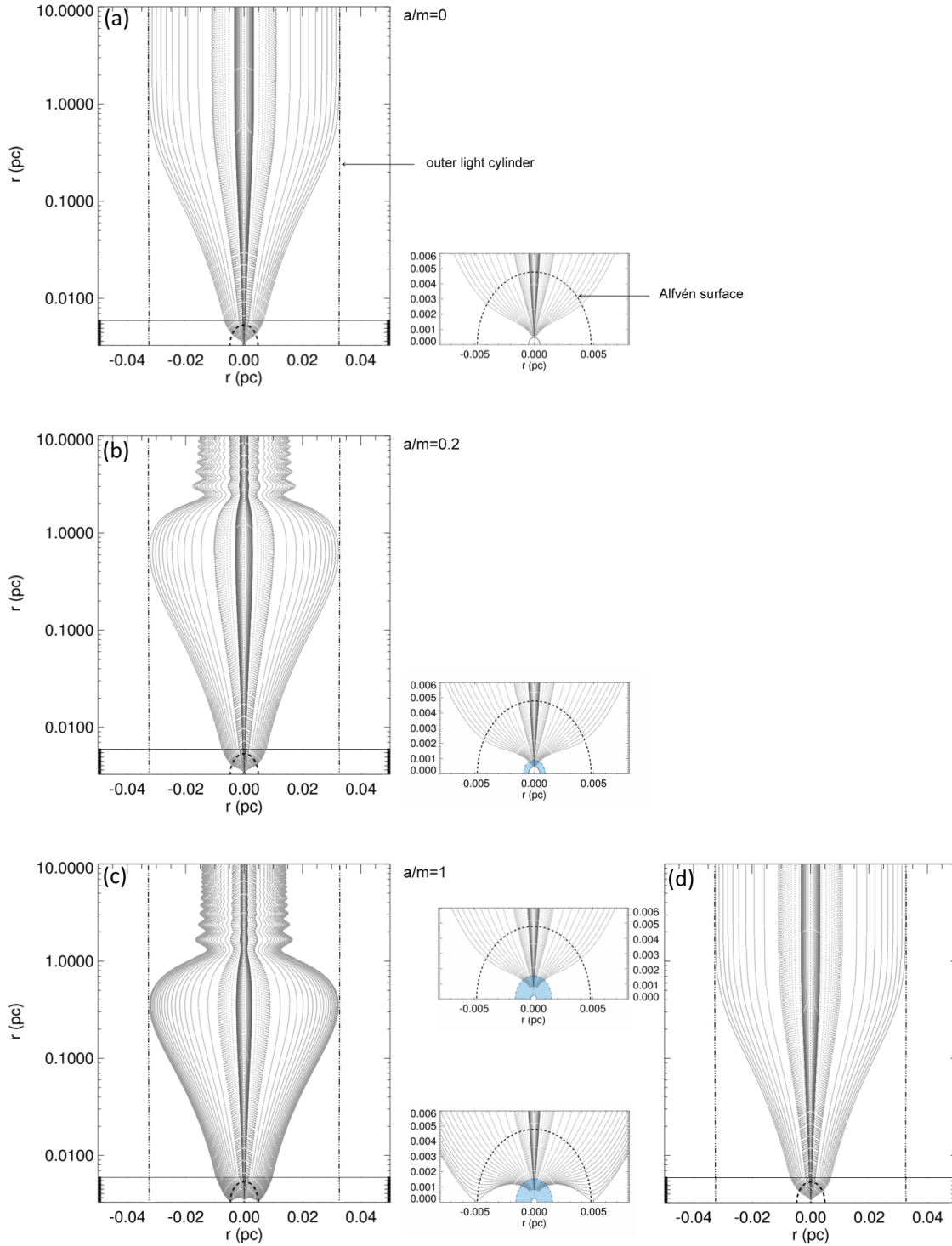
On va maintenant établir le taux de perte de moment cinétique. D'après l'Eq. 3.34, on a :

$$\dot{J} = \frac{\lambda r_*^3 B_*^2 h_* \alpha_{\text{out}}^2}{8} \quad (5.24)$$

En insérant l'Eq. 3.32, et à l'aide de Eq. 3.3 on obtient <sup>2</sup>,

$$\dot{J} = \frac{\lambda \gamma_* r_* v_* \dot{M} \alpha_{\text{out}}^2}{2 \psi_{\text{out}}} \quad (5.25)$$

2. en ne gardant que l'énergie de masse dans l'expression de l'enthalpie par particule



**FIG. 5.9** – Topologie des solutions correspondant aux paramètres Tab. 5.2 (a,b,c,d). Les trois solutions (a,b,c) représentées dans le plan poloidal sont obtenues en faisant varier le paramètre  $\sigma$  du spin du trou noir. La solution (a) est une solution en métrique de Schwarzschild ( $\sigma = 0$ ). Les solutions (b,c,d) sont obtenues en métrique de Kerr. La miniature de droite de chaque solution est un agrandissement en échelle linéaire de la zone près du tour noir. La zone où  $\omega > \Omega$  est représentée en bleu. La solution (d) est une solution en rotation maximale et correspond à la solution (c) pour laquelle la valeur de la pression a été abaissée (paramètre  $\Pi_* = 1.21$ ).

où  $\dot{M}$  est le taux de perte de masse dans le jet et  $\alpha_{\text{out}}$  définit la limite du dernier tube de flux magnétique (Eq. 4.12)

$$\psi_{\text{out}} = \frac{2}{3\delta} [(1 + \delta\alpha_{\text{out}})^{3/2} - 1]$$

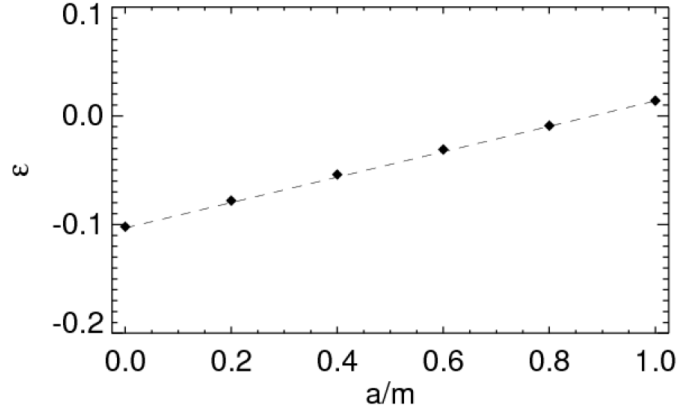


FIG. 5.10 – Variation du paramètre de collimation magnétique en fonction de la rotation du trou noir.

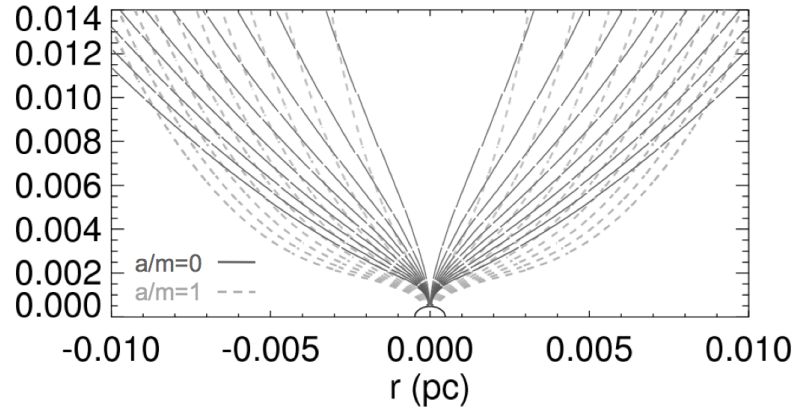


FIG. 5.11 – Comparaison des topologie des lignes d'écoulement dans la zone  $r < 0.01$  pc pour les solutions a et d (Schwarzschild et Kerr non-oscillante).

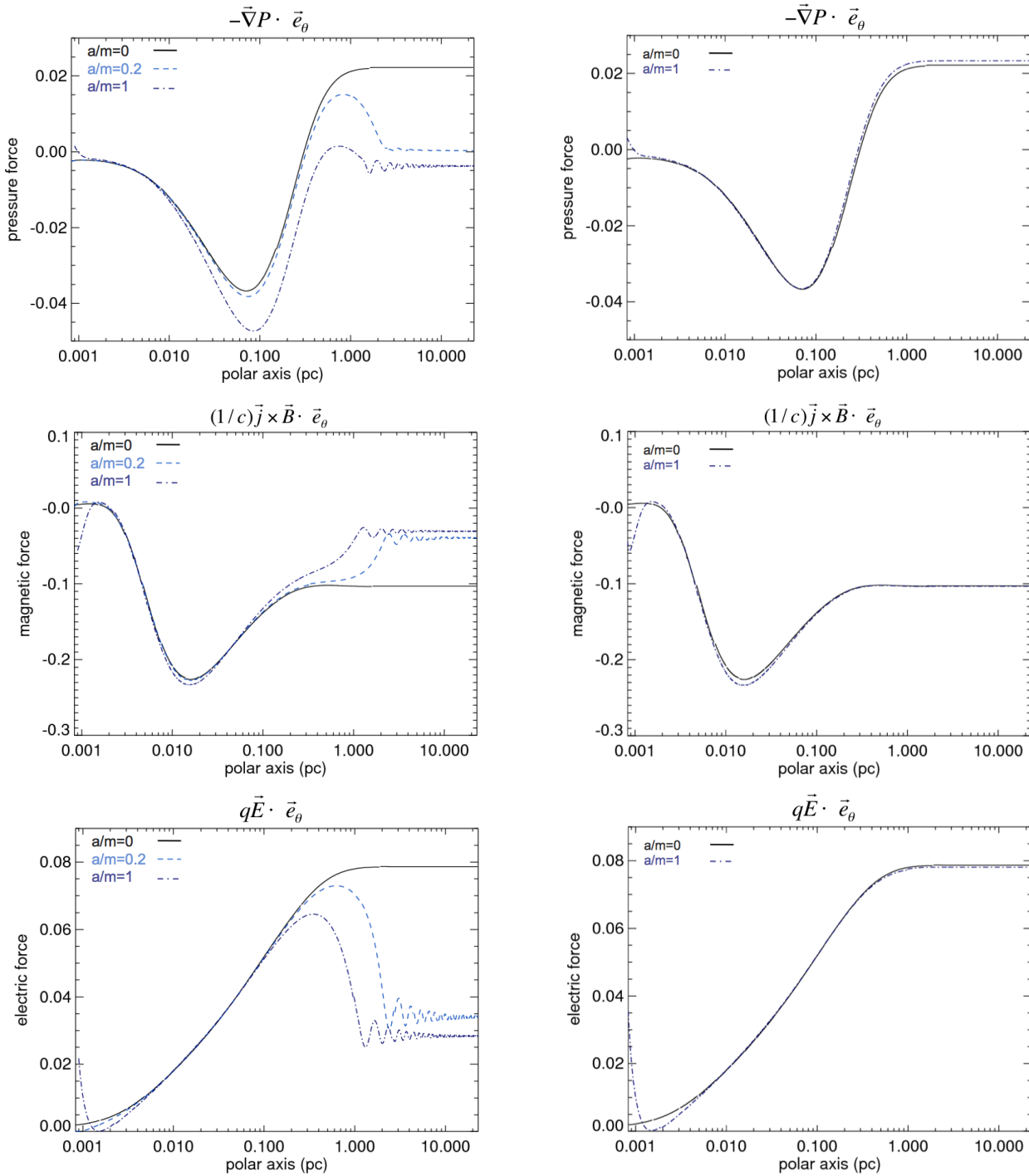
On considère la solution (c) pour laquelle  $a/m = 1$ , soit un trou noir en rotation maximale. Dans cette solution, on remarque que la première ligne de champ ancrée dans le disque correspond à la dernière ligne possible avant d'atteindre le cylindre de lumière. C'est donc la solution qui présente le bras de levier le plus grand, avec  $\alpha_{\text{out}} = 1.0022$ .

Le temps de freinage pour le trou noir est alors :  $\tau = J/\dot{J}$ . Pour cette solution, avec les paramètres exprimés précédemment, on obtient avec la notation  $M_9 = M_{\text{BH}}/10^9 M_\odot$  :

$$\tau \approx 0.13 \left( \frac{M_9^2}{\dot{M}} \right) \text{ milliards d'années} \quad (5.26)$$

Avec une masse du trou noir  $M_{\text{BH}} = 5 \cdot 10^9 M_\odot$  et une perte de masse dans le jet,  $\dot{M} = 1 M_\odot / \text{an}$ , on obtient un temps de freinage de  $\sim 3.3$  milliards d'années<sup>3</sup>. On remarque que  $\tau$  décroît avec le paramètre  $\lambda$  mesurant la rotation.

3. Si on considère que la totalité de la matière accrétée est éjectée. Si le taux de perte de masse ne correspond qu'à quelques % du taux d'accrétion, on obtient des temps de freinage beaucoup plus longs



**FIG. 5.12** – Comparaison des forces le long de l’axe polaire (pc) pour les quatre solutions (a,b,c,d) indiquées Tab. 5.2. Les trois courbes de gauche de haut en bas représente respectivement : la force de pression, la force magnétique et la force électrique pour les solutions (a,b,c) répertoriées par la valeur du spin du trou noir adimensionné ( $a/m$ ). Les trois courbes de droite comparent les solutions non-oscillantes de Schwarzschild (a) avec  $a/m = 0$  et de Kerr (d) avec  $a/m = 1$ .

### 5.3 Modélisation du jet relativistes de M87

#### 5.3.1 Contraintes observationnelles

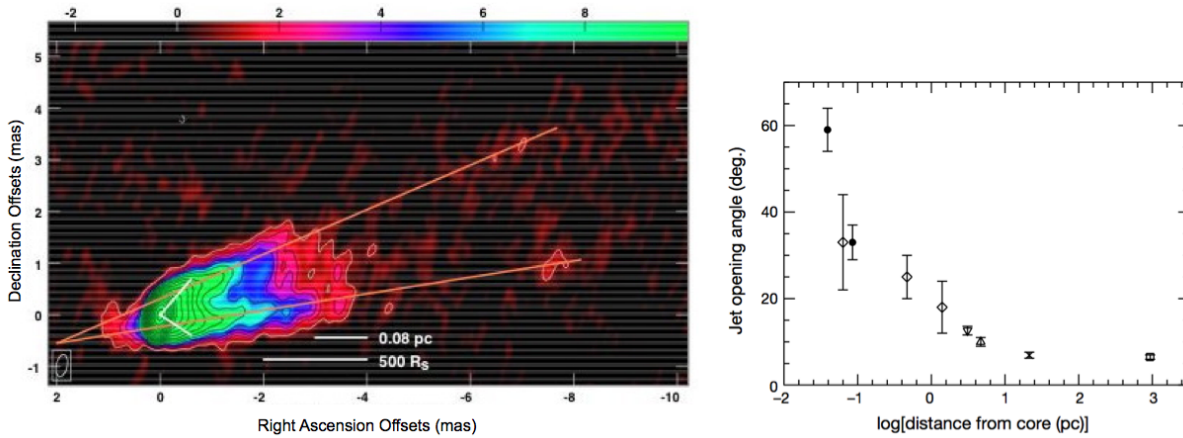
M87 est une galaxie de l’amas de la Vierge classée FR I, localisée à une distance de 17 Mpc,  $z=0.00436$ , (Smith et al. 2000). La masse du trou noir central de  $(6.0 \pm 0.5) \times 10^9 M_\odot$  a été récem-

ment déterminée à partir d'une modélisation de mesures spectrales après correction de la distance (Gebhardt et Thomas 2009). Le rayon de Schwarzschild est estimé à  $r_s \approx 1.8 \times 10^{15}$  cm (1 mas  $\approx 140 r_s$ ). Cette galaxie présente un jet qui est visible du domaine radio jusqu'aux rayons X, signature caractéristique d'un jet d'AGN, et un spectre d'émission synchrotron. Wilson et Yang (2002) ont détecté le jet jusqu'à une distance de 21 secondes d'arc du noyau avec le télescope Chandra dans le domaine X. Matveyenko et Seleznev (2011) ont construit des cartes radio à  $\lambda = 2$  cm à la limite de la résolution angulaire (0.15 à 0.30 mas) et à  $\lambda = 7$  mm, à partir des archives de la base de données NRAO. Les jets radio s'étendent plus loin que leur contre-partie dans le domaine optique (Owen et al. 2000). Les observations du HST ont montré des vitesses apparentes superlumines des nodules d'émission d'environ 4 à 6 fois la vitesse de la lumière et confirment la nature relativiste du mouvement d'ensemble du jet avec  $\beta_{\text{obs}} \approx 6$  (HST-1),  $\beta_{\text{obs}} \approx 5$  (nœud D) et  $\beta_{\text{obs}} \approx 4$  (nœud E) (Biretta et al. 1999). Le mouvement propre le plus rapide observé dans le domaine radio est de l'ordre de  $\beta_{\text{obs}} \approx 3 - 4$  pour HST-1 (Cheung et al. 2007) et  $\beta_{\text{obs}} \approx 2.5$  pour le nodule D (Biretta et al. 1995). Pour un jet de plasma qui se déplace à la vitesse de la lumière ( $\beta_{\text{int}} = 1$ ), on obtient un angle avec la ligne de visée maximum,  $\cos \theta_{\text{max}} = [\beta_{\text{obs}}^2 - 1]/[\beta_{\text{obs}}^2 + 1]$ . La plus grande vitesse superlumine déterminée en optique donne un angle  $\theta < 18.9$  degrés et  $\theta < 28.0 - 36.9$  degrés dans le domaine radio. Des angles de jet de  $\theta = 30 - 45$  degrés ont été déterminés pour des  $\beta_{\text{obs}} \approx 3 - 4$ , à partir d'observations radio à 43 GHz (Ly et al. 2007). Une identification d'une contrepartie optique de l'émission radio localisée à 24 arcsecs du noyau dans la direction opposée du jet a été la première indication d'un contre-jet dans M87 (Krichbaum et al. 2006). Cette structure a aussi été identifiée dans l'infrarouge moyen (Perlman et al. 2007). Durant la période d'observation du mouvement des structures le long du jet (21 images obtenues pendant 10 ans), le contre-jet s'est éloigné dans la direction opposée avec une vitesse apparente de  $(0.010 \pm 0.001) c$ . La taille du cœur a été déterminée à la fréquence radio de 86 GHz et est inférieure à  $25 \times 7 r_s$  (Krichbaum et al. 2006).

On remarque un élargissement rapide de l'angle d'ouverture du jet lorsque on regarde à des échelles en dessous du mas (0.1 pc). L'angle d'ouverture du jet, défini par sa structure plus lumineuse aux bords qu'au centre (Fig. 5.13a) vaut  $\approx 60$  deg à des échelles inférieures à 0.04 pc. L'angle d'ouverture du jet en fonction de la distance au coeur (Fig. 5.13b) montre que le jet est plus large près du coeur et qu'il n'adopte sa configuration finale qu'après quelques parsecs. Il y a une forte recollimation du jet à 0.04 pc du moteur central, ce qui correspond à une distance de  $100 r_s$ .

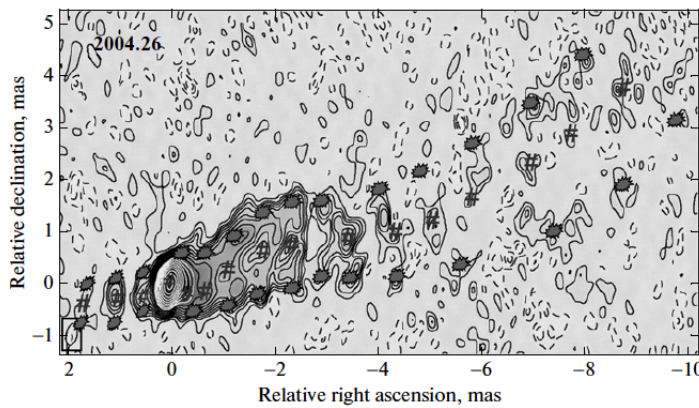
Le jet observé en radio est composé d'un écoulement central de plasma présentant une vitesse relativiste plus grande par rapport aux deux courants latéraux plus fins comme indiqué Fig. 5.14. La largeur de l'écoulement central observé à 2 cm est  $\leq 0.1$  mas ou  $\leq 7.8$  mpc et l'intensité du rayonnement du plasma correspond à une valeur de la température de brillance  $T_b = 2.1 \times 10^{11}$  K. Pour une observation à 7 mm de longueur d'onde, la largeur du jet est de 4 mpc et la température  $T_b \approx 10^{11}$  K. La température du plasma éjecté à la périphérie du jet, i.e. les composantes latérales, est de  $T_b = 5. \times 10^9$  K avec une structure en forme d'anneau de  $\approx 70$  mas, ou 15 mpc (Matveyenko et Seleznev 2011). Rappelons la définition de cette température : pour chaque processus d'émission, il existe un processus d'absorption correspondant, et dans le cas du rayonnement synchrotron, c'est celui de l'auto absorption des photons synchrotron. Si on considère une source de rayonnement synchrotron avec une loi de puissance,  $S_\nu \propto \nu^{-\alpha}$ , où  $\alpha$  est l'indice spectral alors la température de brillance est définie par (Longair 1981) :

$$T_b = \frac{\lambda^2 S_\nu}{2k \Omega} \propto \nu^{-(2+\alpha)} \quad (5.27)$$



**FIG. 5.13** – Collimation de M87. Les observations montrent que les jets d’AGN subissent une forte expansion à la sortie de la source. En quelques parsecs, leur rayon est multiplié par 1000 ou plus, après quoi le jet recollimate en une structure conique, voir cylindrique, avec un petit angle d’ouverture. Images VLBI à 43GHz du noyau dans la limite de 100  $r_S$  (Ly et al. 2007). Evolution de l’angle d’ouverture du jet (Junor et al. 1999)

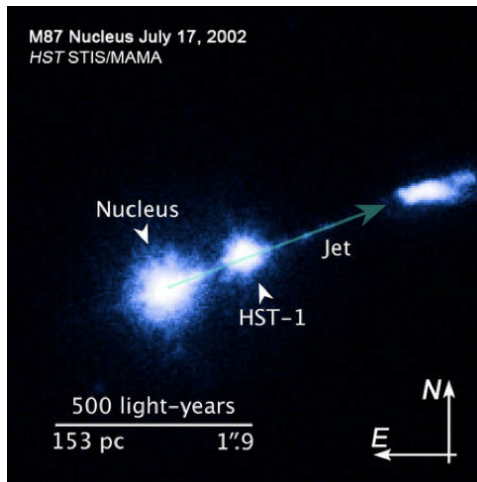
où  $S_\nu$  est la densité de flux,  $\Omega$  est l’angle solide. La température de brillance est la température du corps noir équivalent, qui produirait la brillance de surface observée à la fréquence  $\nu$  dans l’approximation de Rayleigh-Jeans,  $h\nu \ll kT_e$ .



**FIG. 5.14** – Intensité radio ( $\lambda = 7$  mm) du jet de M87 constitué d’un écoulement central de plasma de grande vitesse et de deux courants de vitesse plus petites. La résolution est de  $0.2 \times 0.4$  mas. Les niveaux d’isophote sont exprimés en % du pic d’intensité  $I_{\text{pic}} = 512$  m Jy (dans le jet). Les directions tangentielles des écoulements sont indiquées par des # pour le courant central et par des soleils pour les courants latéraux (Matveyenko et Seleznev 2011).

Les sursauts d’émission observés par HST dans le domaine UV/optique et Chandra-X ont montré que le nodule d’émission HST-1 du jet de M87 (Fig. 5.15) présente des variations importantes de brillance, de l’ordre d’un facteur 100 entre l’année 2000 et l’année 2005 (Waters et Zepf 2005, Madrid 2009). Perlman et al. (2011) interprètent ces observations comme la conséquence d’une accélération de particules après un choc suivi d’un refroidissement dû à la relaxation du choc et au rayonnement émis. Cette interprétation permet d’une part de contraindre la valeur du facteur de Lorentz,  $4.1 \leq \Gamma \leq 4.8$ , et la valeur de l’angle d’observation,  $10^\circ \leq \theta_{\text{obs}} \leq 18^\circ$ . Cependant, le télescope HST ne dispose pas d’une résolution spatiale suffisante pour valider cette hypothèse. Bien

que le rayonnement synchrotron soit détecté dans les deux bandes spectrales (X et UV), le processus de perte d'énergie dominant serait l'effet Compton-inverse avec une émission des électrons en X dans le régime Klein-Nishima et une émission UV/optique autour de la transition Thomson/Klein-Nishima. Le processus d'émission inverse-Compton serait dominant une fois intégré sur l'ensemble du spectre électromagnétique (Moderski et al. 2005). Le spectre optique plat observé de HST-1 est compatible avec cette idée. Ce scénario serait également compatible avec la corrélation du sursaut TeV observé dans HST-1 aux plus basses énergies en 2005. Les observations des vitesses superluminiques de Biretta et al. (1999) donnent une valeur jusqu'à 6 pour le facteur de Lorentz.



**FIG. 5.15** – De gauche à droite et dans l'ultraviolet, le noyau de M87, HST-1 et une extrémité du jet de particules émis par le trou noir. Le flash en ultraviolet de HST-1 est bien visible (Madrid 2009).

### 5.3.2 Discussion autour de la solution obtenue

La solution est calculée avec le jeu de paramètres suivant :

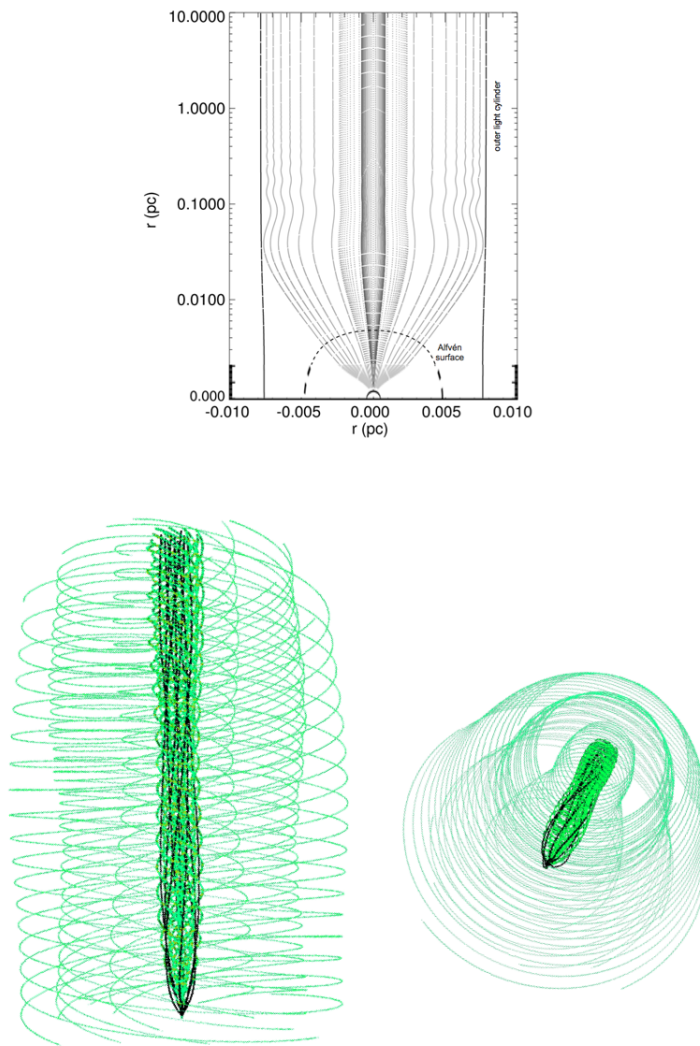
$\mu$	$\nu$	$\sigma$	$\kappa$	$\delta$	$\lambda$	$\epsilon$	$\Pi_*$
0.1	0.54	0	0.2	1.35	1.1	0.77	0.75

**TAB. 5.3** – Paramètres de la solution correspondant à l'épine centrale de M87

Dans le cadre du modèle autosimilaire méridien, les solutions présentent la même morphologie caractéristique, une recollimation suivie d'oscillations autour d'un profil cylindrique. Ici, le jet recollimate à 0.1 pc mais les paramètres peuvent être adaptés pour obtenir une recollimation à des distances différentes (par exemple, les solutions de la Fig. 5.9). Stawarz et al. (2006), comme Bromberg et Levinson (2009), ont proposé que le nodule HST-1 soit associé à une recollimation dans le jet. Notre solution étant semi-analytique stationnaire, il serait intéressant, comme cela a été fait pour les solutions stellaires, d'utiliser ces solutions de jets relativistes comme conditions initiales dans les modèles numériques afin d'étudier le choc qui résulterait de cette recollimation.

La topologie de la solution est présentée Fig. 5.16. Nous avons vu que notre modèle décrit la structure interne du jet et que celle-ci pouvait être associée à un jet leptonique. Levinson et Rieger (2011) proposent un modèle dans lequel l'émission TeV de M87 serait la signature d'un jet de paires  $e^+e^-$  émis près du trou noir. Les observations impliquent l'existence d'un jet dans les conditions

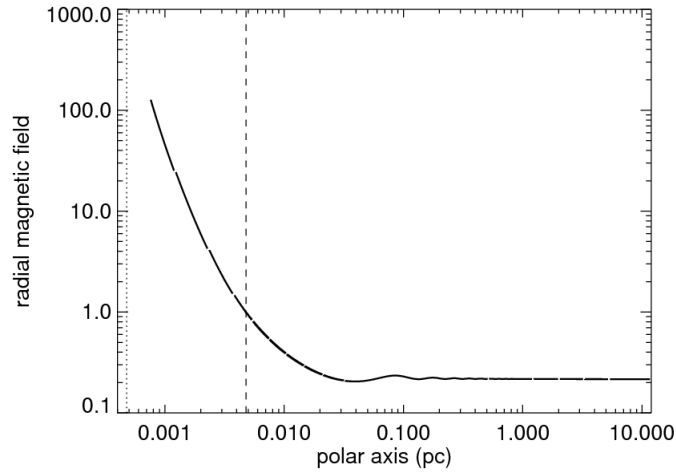




**FIG. 5.16** – En haut : morphologie des lignes d’écoulement dans le plan poloïdal. L’extension du jet est d’environ 0.02 pc, ce qui correspondrait à l’épine centrale du jet de M87 (Fig. 5.13 et Fig. 5.14). Il y a recollimation du jet à 0.03 pc. La masse du trou noir est de  $5 \cdot 10^9 M_{\odot}$ . En bas : deux représentation en trois dimensions montrant la recollimation dans le jet. Les lignes de champ magnétique sont représentées en vert, les lignes d’écoulement en noir.

de la MHD idéale ou de l’équilibre *force-free*, qui se forme dans une zone inférieure à  $100 r_s$ . Nous sommes dans un régime d’accrétion faiblement radiatif (RIAF) comme c’est le cas pour le trou noir central de notre Galaxie. L’accrétion est quasi-sphérique, la température des électrons dans le vent accrété peut être supérieure à  $m_e c^2$  et les électrons se refroidissent en émettant des photons gamma d’énergie  $\sim 1$  MeV. Ces photons s’annihilent dans la magnétosphère en paires  $e^+e^-$ , ce qui conduit à injecter des charges le long des lignes de champ magnétique ouvertes. Pour un taux d’annihilation suffisant, la densité de charge peut être supérieure à celle de Goldreich-Julian et on obtient un jet de paires dont la densité dépend du taux d’accrétion. Levinson et Rieger (2011) appliquent ce modèle à M87.

On rappelle la définition de la luminosité critique d’Eddington : une distribution sphérique symétrique d’un plasma complètement ionisé autour d’une masse centrale peut être liée gravitationnellement si la luminosité centrale de l’objet est inférieure à la luminosité critique d’Eddington,



**FIG. 5.17** – Intensité du champ magnétique dans le jet le long de l’axe polaire. L’intensité du champ décroît d’environ 4 ordres de grandeur entre  $r_s$  et  $r_\infty$ . La ligne en pointillés indique le rayon de l’horizon et la ligne en tiretés, la surface d’Alfvén.

$L < L_{\text{Edd}}$ , où :

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c \mathcal{G} M_{\text{objet}}}{k_T} = 1.26 \times 10^{45} \frac{M_{\text{objet}}}{10^7 M_\odot} \quad (5.28)$$

où  $k_T = 0.4 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$  est l’opacité Thomson due à la diffusion des électrons (Dorodnitsyn 2011).

En supposant que l’accrétion du gaz est à l’équipartition avec le champ magnétique, le taux d’accrétion est mesuré en unités de taux d’Eddington,  $\dot{m} = \dot{M}/\dot{M}_{\text{Edd}}$  où le taux d’accrétion d’Eddington est défini par ( $M_9 = M / 10^9 M_\odot$ ) :

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\eta_{\text{ff}} c^2} = 10^{27} M_9 \text{ g s}^{-1} \quad \text{avec } \eta_{\text{ff}} = 0.1 \quad (5.29)$$

Le champ magnétique est :

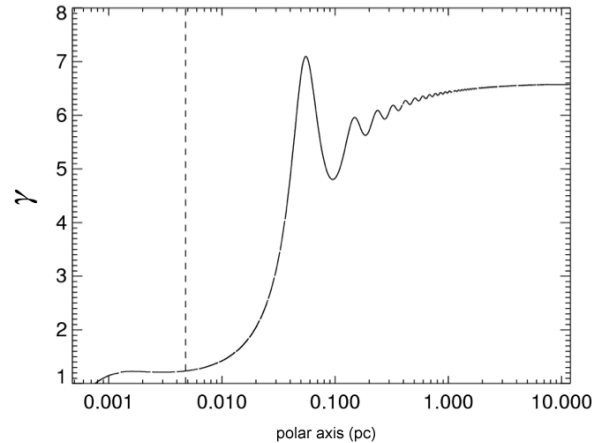
$$B \approx 4 \times 10^4 \sqrt{\dot{m}/M_9} \left( \frac{r}{r_s} \right)^{-5/4} \text{ G} \quad (5.30)$$

Levinson et Rieger (2011) prennent comme valeur une masse  $M_9 = 4$  pour le trou noir de M87. De plus, ils supposent que le jet de M87 est produit par le mécanisme de Blandford et Znajek (1977), ce qui impose une limite inférieure au champ magnétique au voisinage de l’horizon du trou noir et sur le taux d’accrétion. Pour un trou noir de Kerr ayant une masse  $M_9 = 4$  et un moment cinétique  $\tilde{a} = a/m$  :

$$L_{\text{BZ}} = \frac{\epsilon}{64} \tilde{a}^2 B^2 r_s^2 c \approx 3 \times 10^{47} \epsilon \tilde{a}^2 \dot{m} \text{ erg s}^{-1} \quad (5.31)$$

où  $\epsilon$  est un facteur qui dépend de la topologie du champ et est proche de l’unité. Li et al. (2009) établissent une liste des estimations de l’ordre de  $L_j \approx (10^{43} - 10^{44}) \text{ erg s}^{-1}$  pour la puissance du jet de M87. Pour un trou noir en rotation maximale,  $\tilde{a} = 1$ , le taux d’accrétion est  $\approx 10^{-4}$ . Par conséquent, l’intensité du champ magnétique proche de  $r_s$  doit être de  $B \approx 200 \text{ G}$ .

La Fig. 5.17 montre l’évolution du champ magnétique dans le jet. On constate que l’intensité du champ décroît sur environ 3 ordres de grandeur entre le début et la fin du jet et d’environ 4 ordres de



**FIG. 5.18** – Evolution du facteur de Lorentz le long de l'axe polaire. La valeur asymptotique est de 6.6.

grandeur entre  $r_s$  et  $r_\infty$  (en extrapolant près de l'horizon). Dans notre modèle, le champ magnétique est adimensionné par rapport à sa valeur à la surface d'Alfvén, il faudrait pouvoir connaître cette valeur pour donner des unités physiques. Cependant, il est possible d'utiliser la valeur donnée par le modèle de jet leptonique de Levinson et Rieger (2011) qui est de 200 G à l'horizon. Ceci implique, d'après notre modèle, que dans la région asymptotique, i.e., entre  $\sim 0.1$  et l'infini, le champ magnétique dans le jet serait d'environ 20 mG. Les mesures radio donnent un champ de  $\sim 1$  mG à 0.8 pc (Matveyenko et Seleznev 2011). Nakamura et al. (2010) et Stawarz et al. (2006) ont mesuré  $B \sim 0.3$  mG à environ 40 pc. La valeur obtenue par notre modèle est satisfaisante car nous ne prenons pas en compte la dissipation du champ magnétique.

Le facteur de Lorentz est présenté Fig. 5.18. La valeur asymptotique de  $\sim 6$  est en accord avec les observations (Biretta et al. 1999).

### 5.3.3 Conclusion et perspectives

Le modèle en métrique de Kerr donne des solutions dont la collimation augmente avec le spin du trou noir. Il faut maintenant comparer la puissance obtenue avec le modèle de Blandford et Znajek (1977) et notre modèle, ce que nous ferons dans un futur proche. Nous sommes également capables d'obtenir une solution qui décrit la partie centrale d'un jet d'AGN. Nous avons utilisé le modèle de Levinson et Rieger (2011) qui donne une valeur pour le champ magnétique à la base du jet, les observations n'étant pas encore suffisamment précises pour contraindre ce paramètre.

Dans le contexte des jets d'AGN, Henri et Pelletier (1991) ont proposé un modèle à deux composantes dans lequel le jet leptonique serait également généré par une cascade sur les photons UV émis par le disque. Le vent de disque permet la réaccélération des paires par un processus de "chauffage" (dû à la pression turbulente des ondes d'Alfvén). Il serait donc intéressant de coupler notre solution à une solution de vent de disque et d'utiliser cette combinaison comme condition initiale dans un code numérique afin d'étudier l'interaction entre les deux fluides et la stabilité du jet obtenu.

On pourrait également réaliser une carte de l'émission synchrotron à partir de la solution puisqu'elle nous donne les valeurs de la vitesse, du champ magnétique et de la densité en chaque point de l'espace, comme c'est le cas pour les simulations numériques pour lesquelles des cartes synchrotron ont récemment été synthétisées (Porth et al. 2011).

## Les jets relativistes, sources du rayonnement cosmique de ultra haute énergie ?

*You teach best what you most need to learn.*

R. Bach

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les jets relativistes à l'aide de solutions aux équations de la MHD. Cela nous a permis d'étudier la structure de l'écoulement dans son ensemble et d'aborder les questions liées à la formation des jets et à leur collimation. Cependant cela n'a été possible qu'à l'aide d'hypothèses simplificatrices, et l'hypothèse de stationnarité en particulier ne nous permet pas d'étudier les phénomènes d'accélération par onde de choc dans les jets. Or les sources les plus prometteuses pour accélérer les rayons cosmiques de ultra haute énergie sont les jets de noyau actif de galaxie (surtout de type FR II, les plus puissants) et les sursauts gamma. Dans les chapitres qui vont suivre, nous nous intéresserons à la physique d'une onde de choc dans le jet susceptible d'accélérer les particules. Dans un premier temps, nous allons modéliser le choc et le rayonnement émis par les électrons accélérés durant le choc car ce rayonnement va interagir avec les particules ce qui aura donc une incidence sur leur énergie. Une fois le choc modélisé, nous nous intéresserons au chapitre suivant à la propagation d'une particule dans le choc et nous étudierons les différents mécanismes de gain et de perte d'énergie afin d'estimer quels paramètres physiques permettent d'accélérer les particules aux énergies observées.

### 6.1 Brève présentation du rayonnement cosmique

Le spectre du rayonnement cosmique est d'une extraordinaire régularité : sur 12 ordres de grandeur en énergie et 32 en flux, il est caractérisé par une simple loi de puissance. Il existerait donc un mécanisme universel (et non thermique) pour la production de ce rayonnement.

On observe cependant de légers infléchissements, plus aisément identifiables sur la figure "redressée" (Fig. 6.1b) : une cassure vers  $10^{15.5}$  eV que l'on nomme genou, où la pente du spectre passe de  $-2.7$  à  $-3$  ; un deuxième genou, moins évident, vers  $10^{17.5}$  eV. Le spectre remonte légèrement vers  $10^{18.5}$  eV pour former la cheville. Au dessus de  $10^{20}$  eV les données manquent pour caractériser le spectre ; certaines expériences, comme HiRes ou, plus récemment, Auger, observent une chute brutale du flux qui pourrait être due à l'effet GZK que nous discuterons brièvement plus loin.

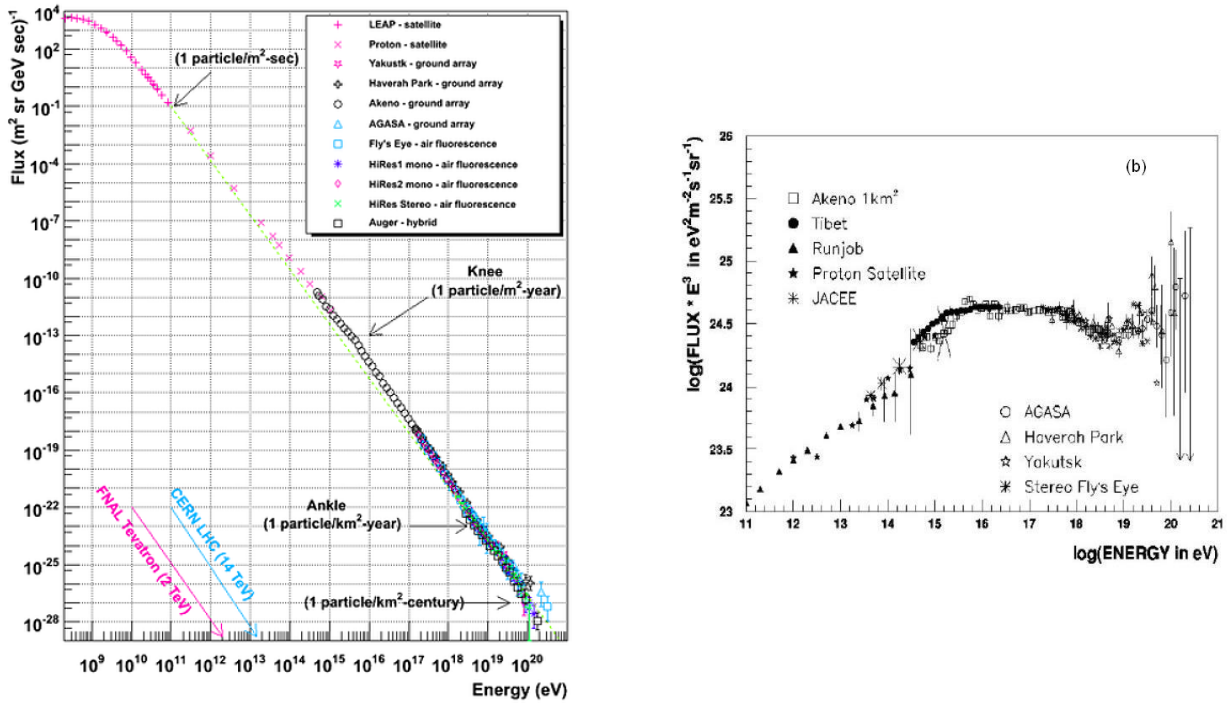


FIG. 6.1 – (a) Spectre du rayonnement cosmique. (b) : le flux est multiplié par  $E^3$  (Nagano et Watson 2000).

### Deux genous pour une cheville

Une hypothèse pour expliquer la structure du genou serait la perte de la composante galactique du rayonnement cosmique, parce qu'on aurait atteint l'énergie maximale d'accélération pour les sources galactiques. On peut aussi supposer qu'au-delà d'une certaine énergie, les particules ne seraient plus confinées de la même façon par le champ magnétique galactique. Un changement du régime de diffusion provoquerait une rupture dans le spectre, même sans avoir atteint l'énergie maximale d'accélération dans les sources. Si le genou marque le début de la disparition de la composante galactique légère, on s'attendrait en théorie à voir un second genou pour la composante lourde (qui est probablement riche en fer) à une énergie  $\sim 26$  fois plus élevée. Certaines expériences telle que Yakutsk ou Akeno prétendent avoir observé un second genou mais à une énergie proche de  $10^{18}$  eV (c'est-à-dire presque une décade plus haut que l'énergie attendue) et qui n'a pu être mesurée précisément. La situation jusqu'à présent était même assez confuse comme le montre la Fig. 6.2. L'expérience Cascade-Grande est néanmoins venue récemment apporter un éclairage nouveau sur cette partie du spectre (entre  $10^{16}$  et  $10^{18}$  eV) et revendique l'observation du genou de la composante galactique lourde vers  $10^{17}$  eV (Apel et al. [Cascade-Grande collaboration] 2011) c'est-à-dire à une énergie plus compatible avec les attentes théoriques. La cheville, quant à elle, se situerait entre 3 et 5 EeV<sup>1</sup>. Il existe plusieurs modèles pour l'expliquer, le plus crédible étant pour l'instant qu'elle marque la transition entre le rayonnement cosmique galactique (dont le début de l'atténuation serait signée par les 2 genous) et le rayonnement cosmique extragalactique. Bien que l'origine de la cheville soit toujours débattue, il y a un consensus dans la communauté sur l'origine extragalactique des rayons cosmiques au-delà de  $10^{19}$  eV. Dans l'hypothèse de cette origine extragalactique probable des

1. 1 EeV= $10^{18}$  eV

rayons cosmiques aux plus hautes énergies, des changements relativement brutaux dans la forme du spectre sont attendus au-delà de  $3 - 5 \cdot 10^{19}$  eV.

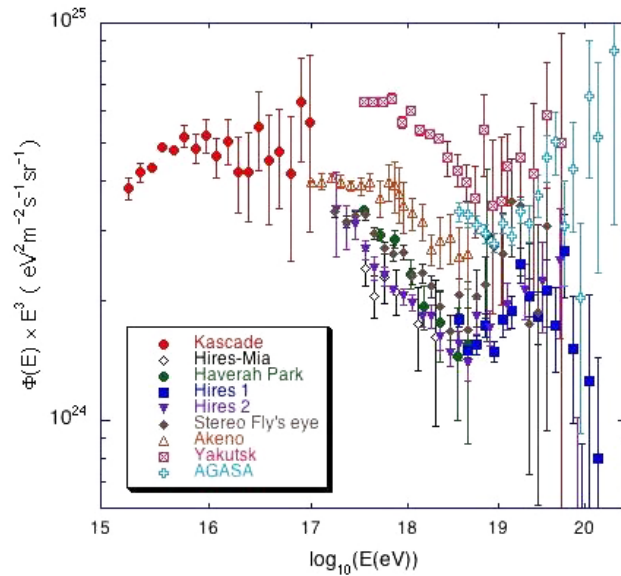
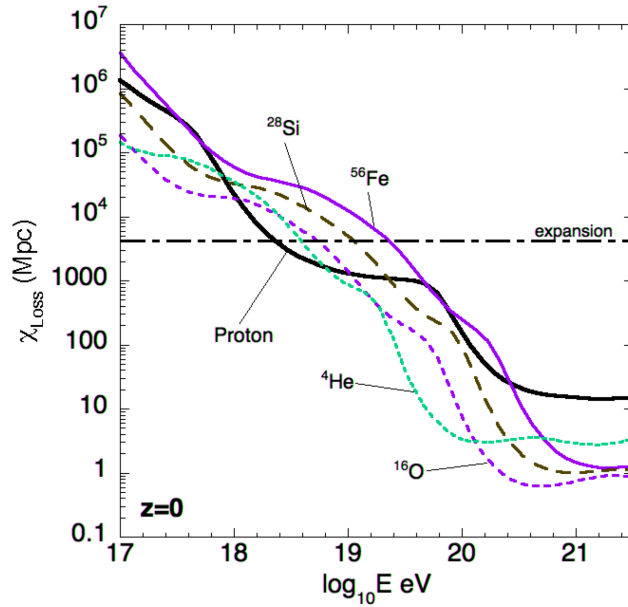


FIG. 6.2 – Spectre redressé pour toutes les expériences avant 2006, source : D. Allard.

### La coupure GZK

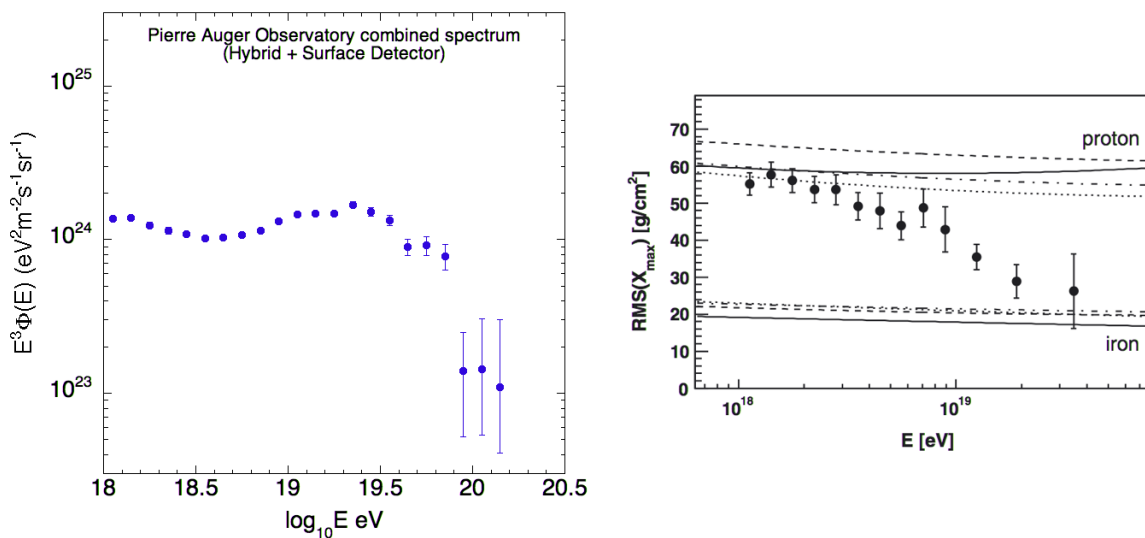
Si les sources des rayons cosmiques ultra-énergétiques sont extragalactiques, ceux-ci doivent effectuer un long périple dans le vide intergalactique avant de nous parvenir. Aux plus hautes énergies, les facteurs de Lorentz de ces particules sont si élevés que, dans leur référentiel propre, les photons des fonds diffus extragalactiques (Infra-rouge et surtout le fond diffus cosmologique) atteignent des énergies très hautes et susceptibles de dépasser le seuil de photo-production de pions dans le cas des protons ou de photodésintégration pour les noyaux. Lorsque ces seuils de réaction sont atteints par les photons du CMB, la longueur d'atténuation (ou longueur de perte d'énergie) des particules chute brutalement. En d'autres termes, l'Univers à grande échelle devient opaque aux rayons cosmiques (protons ou noyaux) au-delà d'une certaine énergie et on s'attend donc à une forte chute de leur flux. Ceci est illustré sur la Fig. 6.3 où l'on peut voir que la longueur de perte d'énergie des rayons cosmiques chute à quelques megaparsecs et ce quelle que soit l'espèce considérée, entre quelques  $10^{19}$  et  $10^{20}$  eV du fait de l'interaction avec les photons du CMB. La chute du flux associée a été prédite pour la première fois en 1966 par Greisen, Zatsepin et Kuzmin et est généralement appelée coupure GZK.

La statistique au-delà de  $10^{19}$  eV s'est récemment nettement accrue grâce aux prises de données de l'Observatoire Pierre Auger, qui est de loin le plus grand observatoire de rayons cosmiques ultra-énergétiques jamais construits. Bien que les données d'Auger n'aient pour l'instant pas permis de faire la lumière sur l'origine des rayons cosmiques aux plus hautes énergies, certains résultats majeurs ont été obtenus. Du point de vue du spectre en premier, une chute nette du flux est observée au delà de  $3 - 4 \cdot 10^{19}$  eV (Fig. 6.4). Il est bien sûr tentant d'associer cette chute du flux à l'effet GZK discuté plus haut. Par ailleurs, du point de vue de la composition, les données d'Auger semblent suggérer un net alourdissement de la composante au dessus de la cheville. La composante



**FIG. 6.3** – Evolution de la longueur de perte en fonction de l'énergie de la particule dans les fonds de rayonnement extragalactique. La contribution de l'expansion de l'Univers est également montrée.

légère (sûrement extragalactique) dominante à la cheville semble s'atténuer rapidement pour laisser place à une composante lourde, dominante aux plus hautes énergies (Fig. 6.4). Ce résultat, s'il est confirmé, pourrait avoir des implications astrophysiques importantes. Une interprétation plausible serait d'invoquer, pour la plupart des sources contribuant au flux, une coupure de la composante légère accélérée à des énergies relativement modestes (quelques  $10^{18}$  eV). Si ces mêmes sources parviennent à accélérer des noyaux lourds (comme le Fer) aux mêmes rigidités<sup>2</sup>, on s'attend alors à ce que ceux-ci puissent atteindre des énergies proches de  $10^{20}$  eV.



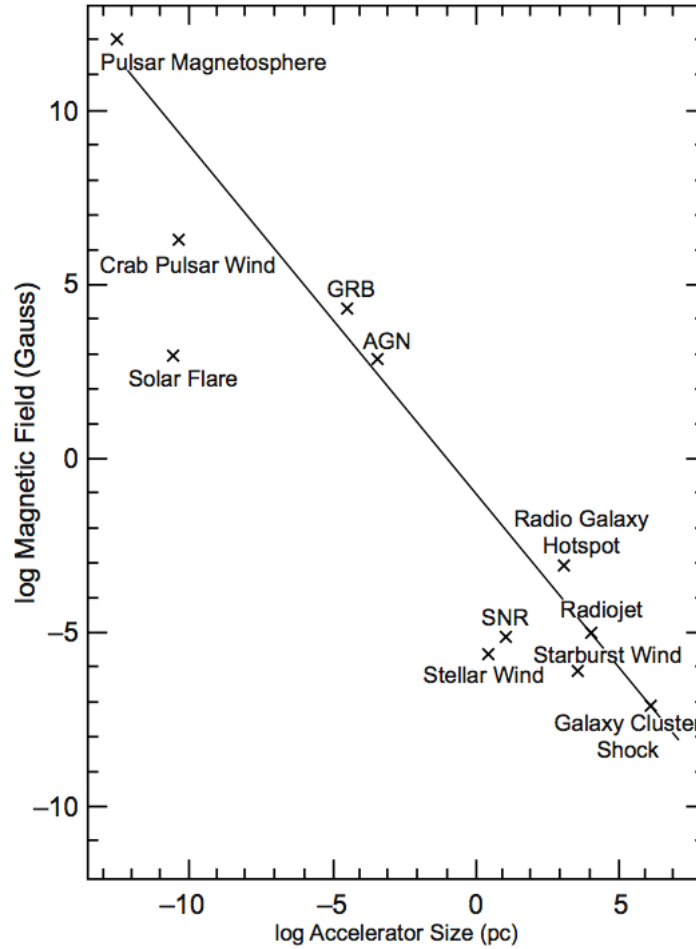
**FIG. 6.4** – A gauche : Spectre redressé pour l'expérience Auger, 2011. A droite : Evolution de la composition en fonction de l'énergie. (Abreu et al. [Pierre Auger Collaboration] 2011)

2. pour les particules ultra-relativistes la rigidité est en très bonne approximation l'énergie par unité de charge :  $\rho = E/Z$



Dans le cadre des progrès apportés par les données d'Auger sur la composition du rayonnement cosmique, il est important d'estimer la capacité des différentes sources candidates à accélérer non seulement des protons mais aussi des noyaux aux plus hautes énergies.

## 6.2 Quelles sources pour le rayonnement cosmique de ultra haute énergie ?



**FIG. 6.5** – Diagramme de Hillas (1984) indiquant la combinaison taille de la source/intensité du champ magnétique qui permet d'accélérer les rayons cosmiques à  $10^{20}$  eV/Z $\beta$ .

En utilisant la condition que le rayon de giration de la particule accélérée ne peut excéder la taille de la zone d'accélération, on obtient  $E_{\max} = Ze\beta_s\Gamma_s BcR_s$  où  $Ze$  est la charge de la particule,  $\Gamma_s$  et  $\beta_s$  sont respectivement le facteur de Lorentz et la vitesse du choc et  $R_s$  la taille de la zone d'accélération. En utilisant  $B^2/8\pi = L_B/4\pi R_s^2 c$  où  $L_B$  est la luminosité obtenue en supposant qu'on convertisse l'énergie magnétique en luminosité, on peut obtenir une relation simple entre l'énergie maximale atteignable et l'intensité du champ magnétique dans la zone d'accélération  $E_{\max} \sim 2.5 \times 10^{20} Z \beta_s \Gamma_s \times (L_B/10^{46} \text{ erg s}^{-1})^{1/2}$ . Sachant que la luminosité bolométrique de la source est forcément supérieure à cette luminosité "magnétique", on obtient une valeur minimale pour la luminosité requise pour accélérer les particules. En particulier, ce calcul montre que l'accélération des protons au-delà de  $10^{20}$  eV requiert des luminosités supérieures à  $10^{45} \text{ erg s}^{-1}$  alors que cette condition est beaucoup moins contraignante pour le Fer de charge  $Z=26$ .



De nombreux objets astrophysiques peuvent être considérés comme accélérateurs potentiels de particules. Les jets relativistes sont les plus prometteurs car ils sont associés aux phénomènes les plus énergétiques observés dans l'Univers. Hillas (1984) a donné un critère qui permet d'estimer l'énergie maximale à laquelle les objets astrophysiques peuvent accélérer les rayons cosmiques. Dans le cas d'AGN de type FRI tels que M87, la luminosité requise pour accélérer des particules à  $10^{20}$  eV est supérieure à la luminosité bolométrique de la source. On invoque plus naturellement les jets FRII, plus puissants, et les jets associés aux sursauts gamma. Nous allons commencer notre étude en nous intéressant à ces derniers (une étude similaire pour les AGN sera effectuée plus tard).

Les sursauts gamma sont de brèves et intenses bouffées d'énergie gamma qui proviennent de l'Univers lointain et qui atteignent la Terre environ une fois par jour en devenant souvent les sources les plus lumineuses du ciel gamma. La durée d'un sursaut est comprise entre quelques millisecondes et 1000 secondes environ. La distribution en durée des sursauts est bimodale, on les classe donc en deux types : sursauts courts (durée inférieure à 2s) et sursauts longs (durée supérieure à 2s). L'énergie libérée  $E_\gamma$  varie de  $10^{51}$  à  $10^{54} \times \frac{\Omega}{4\pi}$  erg où  $\Omega$  est l'angle solide dans lequel l'énergie est focalisée. Estimer cette énergie est difficile car il faut pouvoir mesurer cette focalisation, c'est à dire pouvoir connaître l'angle d'ouverture du jet.

Plusieurs modèles tentent d'expliquer l'émission prompte. Tous ces modèles invoquent un jet relativiste dont la formation serait liée, dans le cas des sursauts courts, à la coalescence de deux étoiles à neutrons ou la coalescence d'une étoile à neutron et d'un trou noir, et dans le cas des sursauts longs, à l'effondrement d'une étoile massive en rotation rapide. Le jet doit être relativiste pour s'affranchir des problèmes de compacité, car sinon l'intense création de paires électron-positron rendrait la source opaque à son propre rayonnement. Si l'émission est relativiste, les photons sont moins énergétiques que 511 KeV dans le repère propre du vent et l'effet de la création de paires devient très limité. Dans le modèle dit de la boule de feu, ce sont des chocs internes au sein de l'éjecta relativiste qui sont responsables de l'accélération de particules et de la production de rayonnement (Goodman 1986, Rees et Meszaros 1994, Daigne et Mochkovitch 1998). C'est ce modèle que nous allons utiliser. Un autre modèle invoque un rotateur rapide dont l'interaction avec un champ magnétique intense produirait un jet dominé par l'énergie électromagnétique. Nous avons vu que la formation de ce type de jet a été modélisée dans le cadre de la MHD idéale, voir *force free*. Or, les photons gamma pourraient également être créés lors de la reconnection des lignes de champ magnétique. Il existe également un modèle, dit du boulet de canon, dans lequel l'émission gamma prompte viendrait de la diffusion Compton inverse des électrons du plasma éjecté sur les photons de la supernovae.

Du fait de leur luminosité colossale dans le domaine gamma, les sursauts ont été considérés comme des candidats prometteurs pour l'accélération de particules chargées aux plus hautes énergies. Ils semblent en effet remplir le critère de Hillas pour l'accélération de protons au delà de  $10^{20}$  eV. Les premières études notoires sur l'accélération de rayons cosmiques dans les sursauts gamma ont été menées par Waxman (1995) et Vietri (1995) qui proposèrent le choc externe ultra-relativiste (responsable de l'afterglow) comme site d'accélération. Ce modèle d'accélération fut sérieusement remis en cause par Gallant et Achterberg (1999) qui montrèrent que, dans des conditions réalistes, l'accélération dans le choc externe ne pouvait produire de rayons cosmiques à des énergies au delà de quelques  $Z \times 10^{15}$  eV. Notons par ailleurs que des travaux récents (Niemić et al. 2006, Niemić et Ostrowski 2006, Lemoine et al. 2006) ont montré l'inefficacité des processus de Fermi dans les chocs ultra-relativistes. Les chocs internes ont alors été proposés par Waxman et Bahcall (2000) comme

sites de production possible de rayonnement cosmique ultra-énergétique. Les différentes études considérant cette possibilité se sont généralement restreintes au cas des protons. Parmi celles-ci, on peut citer Asano et Inoue (2007) qui se sont également intéressés à la possible contribution à l'émission au GeV-TeV des photons secondaires émis par les protons accélérés. Peu d'études s'attachent à la possibilité d'accélérer des noyaux composés, exception faite de Murase et al. (2008), Wang et al. (2008), Metzger et al. (2011). Cependant, ces travaux ont nécessité des hypothèses lourdes susceptibles d'influencer fortement les conclusions obtenues. En particulier, aucune de ces études n'a explicitement simulé le processus d'accélération (les cycles de Fermi que nous discuterons dans le prochain chapitre), c'est-à-dire qu'aucune référence n'est faite aux caractéristiques du choc responsable de l'accélération des particules. Le temps d'accélération des rayons cosmiques est simplement supposé être proportionnel au temps de Larmor<sup>3</sup>,  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$ , en fixant le plus souvent le coefficient de proportionnalité  $\kappa_0$  à 1 (ce qui représente l'hypothèse la plus optimiste possible). L'énergie maximale atteignable est ensuite obtenue en égalisant ce temps d'accélération avec les différents temps caractéristiques de perte d'énergie. L'importance cruciale de cette hypothèse a notamment été discutée par Gialis et Pelletier (2003) qui ont montré qu'une évolution du temps d'accélération avec l'énergie, différente de la traditionnelle hypothèse de la diffusion de Bohm, pouvait remettre en cause la possibilité d'accélérer des particules aux énergies observées par Auger.

Nous allons tenter d'appréhender de manière plus complète le problème de l'accélération de rayons cosmiques (et notamment de noyaux composés) dans les chocs internes des sursauts gamma. Nous utilisons un modèle simple de vent relativiste basé sur l'émission de couches discrètes de matière à des facteurs de Lorentz variables (Daigne et Mochkovitch 1998). Les chocs sont moyennement relativistes et générés à de grandes distances de l'objet central. Ce modèle permet d'avoir une bonne estimation des conditions physiques au niveau de chaque choc<sup>4</sup>, et permet de calculer l'émission de photons des électrons accélérés (en d'autres termes, l'émission prompte dans le référentiel du vent). Les rayons cosmiques vont interagir avec ce fond de rayonnement, ce qui aura pour conséquence de limiter leur gain en énergie. Afin d'étudier la compétition entre l'accélération et les différents processus de pertes d'énergie, nous avons mis au point un code permettant de simuler l'accélération de Fermi dans les chocs relativistes. Ce code nous permet d'étudier les spectres en énergie des particules accélérées par le choc ainsi que leur temps d'accélération. Nous présenterons au chapitre 7 une comparaison entre les temps d'accélération et les temps de perte d'énergie pour certains exemples de chocs. A terme, l'objectif de ce travail serait d'inclure pour la première fois l'ensemble des processus de perte d'énergie en même temps que le traitement de l'accélération, et d'obtenir un code Monte-Carlo complet incluant également l'émission de photons et neutrinos secondaires. Un autre aspect important qu'il nous faudra étudier est la possibilité pour les particules accélérées de s'échapper avant d'être refroidies par l'expansion du vent relativiste.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, il convient de faire une dernière remarque introductive. Un aspect important de la discussion concerne la survie des noyaux lors de leur accélération durant les chocs internes. Nous allons simplement faire l'hypothèse que des noyaux sont présents dans la composition du vent au moment des chocs internes. Cette hypothèse est néanmoins loin d'être une évidence et la survie des noyaux dépend des conditions physiques à la base de l'ejecta, et donc

---

3. et donc à la rigidité des particules (comme dans le cas de la diffusion de Bohm)

4. principalement le facteur de Lorentz du choc, la densité de matière, le champ magnétique et l'énergie typique des électrons et protons

de la nature initiale du réservoir d'énergie (qui sera converti en émission gamma et peut-être en rayons cosmiques). Dans le cadre du modèle initial de la boule de feu, l'énergie est à l'origine de nature thermique. On peut alors montrer que la température du vent au début de son accélération doit dépasser 1 MeV. Dans ce cas, tout noyau composé présent dans le milieu serait entièrement photodésintégré en un temps très court et n'aurait aucune chance d'atteindre les chocs internes. Une solution pour régler ce problème serait d'invoquer le fait qu'une partie de la charge baryonique est entraînée dans le vent pendant sa phase d'accélération. Les noyaux entraînés suffisamment tard (lorsque la température descend en dessous de quelques centaines de KeV) pourraient alors survivre, et être présents au moment des chocs internes. Une autre hypothèse serait que l'énergie initiale du vent ne soit pas en majorité d'origine thermique mais d'origine magnétique. Si la fraction d'énergie thermique ne dépasse pas quelques pourcents, Daigne et Mochkovitch (2002) ont montré qu'il était possible pour le vent d'être beaucoup plus froid au début de son accélération (de l'ordre de quelques centaines de keV), auquel cas, les noyaux initialement présents pourraient survivre. Par ailleurs dans cette même étude Daigne et Mochkovitch (2002) suggèrent que dans l'hypothèse d'un vent initialement très chaud (au delà de 1 MeV pour le cas d'un vent purement thermique) une émission photosphérique d'intensité supérieure à l'émission prompte serait attendue. Cette émission photosphérique très brillante n'a pour l'instant pas été observée et de récents résultats de Fermi (Guiriec et al. [Fermi Collaboration] 2011) suggèrent qu'une composante thermique sous dominante pourrait être présente dans le spectre de certains sursauts. Même si cette observation ne représente pas une évidence directe que le vent soit initialement froid et que les noyaux (présents initialement ou entraînés durant la phase d'accélération) puissent atteindre la phase des chocs internes sans être photodésintégrés, cette composante thermique est beaucoup plus faible que ce qui est attendu dans les modélisations les plus simples du modèle de la boule de feu où le vent est nécessairement très chaud. Pour terminer notons qu'il n'y a pas non plus de consensus à l'heure actuelle sur la possibilité de synthétiser des noyaux lors de la phase d'accélération du vent (Beloborodov 2003, Lemoine 2003, Metzger et al. 2011).

## 6.3 L'émission gamma comme signature du choc dans un jet relativiste

### 6.3.1 Contraintes observationnelles

#### Propriétés temporelles

La distribution du nombre de sursauts en fonction de leur durée présente deux pics (Fig. 6.6). On peut donc classer les sursauts gamma en deux types :

- des sursauts très brefs - moins de 2 secondes - émettant des rayonnements durs,
- des sursauts plus longs (20 secondes) émettant des rayonnement plus mous.

On ne connaît pas bien les sursauts courts par manque de données (ils sont peu structurés parce que la résolution temporelle est insuffisante). Les profils temporels des sursauts sont très variés, il s'agit généralement d'une succession de pics avec une variabilité pouvant descendre jusqu'à 1 milliseconde (Fig. 6.7).

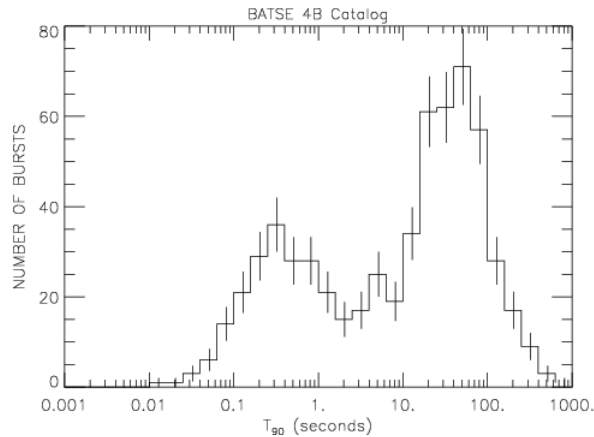


FIG. 6.6 – Distribution en durées des sursauts observés par BATSE (Paciesas et al. 1990).

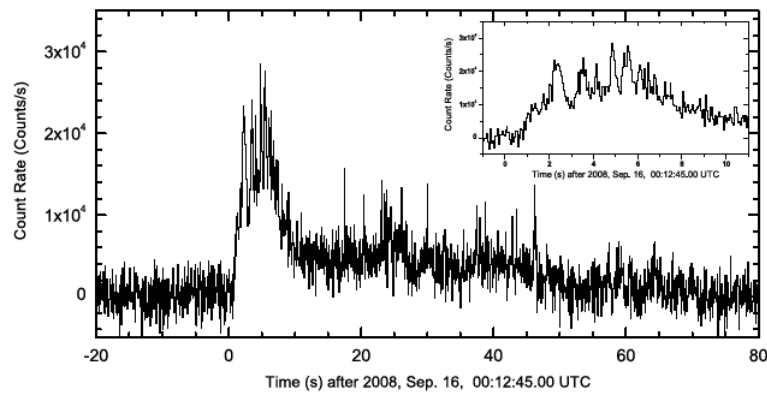


FIG. 6.7 – GRB 080916C : Courbe de lumière de l'émission prompte dans la bande 80 keV-30 MeV mesurée avec INTEGRAL SPI-ACS avec une résolution de 50 ms. L'encadré est un agrandissement du pic principal. Le plus petit temps de variabilité mesuré est de l'ordre de 100 ms.

### Propriétés spectrales

Le spectre de l'émission prompte se caractérise par une émission continue qui peut varier rapidement. La forme du spectre est caractéristique du rayonnement synchrotron d'une population d'électrons non thermiques accélérés lors d'un choc. On s'aperçoit que l'essentiel de l'énergie dans un sursaut est concentré dans le domaine gamma, ainsi leur spectre est relativement pauvre en rayonnement X<sup>5</sup>. L'énergie du maximum de puissance de leur spectre se situe le plus souvent autour de quelques centaines de keV. Le spectre des sursauts a été caractérisé par l'instrument BATSE entre 10 keV et 3 MeV (Fig. 6.8) comme une combinaison de deux lois de puissance,  $n(\epsilon) \propto \epsilon^{-\beta}$ , avec des valeurs de  $\beta$  différentes à basse et à haute énergie (Band et al. 1993). Les valeurs typiques de l'indice spectral  $\beta$  varient entre  $0,6 < \beta < 1,5$  à basse énergie et  $2 < \beta < 4$  à haute énergie. L'énergie de transition vaut, dans le référentiel de l'observateur,  $\epsilon_{b,obs} = \Gamma_w \epsilon_b \sim 1$  MeV, où  $\Gamma_w$  est le facteur de Lorentz de l'écoulement et  $\epsilon_b$  l'énergie de transition dans le référentiel comobile. A basse énergie, il pourrait exister une coupure dans le spectre pour  $\epsilon < \epsilon_{ssa}$ <sup>6</sup> due à la ré-absorption des photons synchrotrons par les électrons.

5. Il existe aussi des classes d'objets qui ont des propriétés similaires aux sursauts mais où l'essentiel de l'énergie est rayonnée dans le domaine X : les X-Rays flashes.

6. synchrotron self-absorption

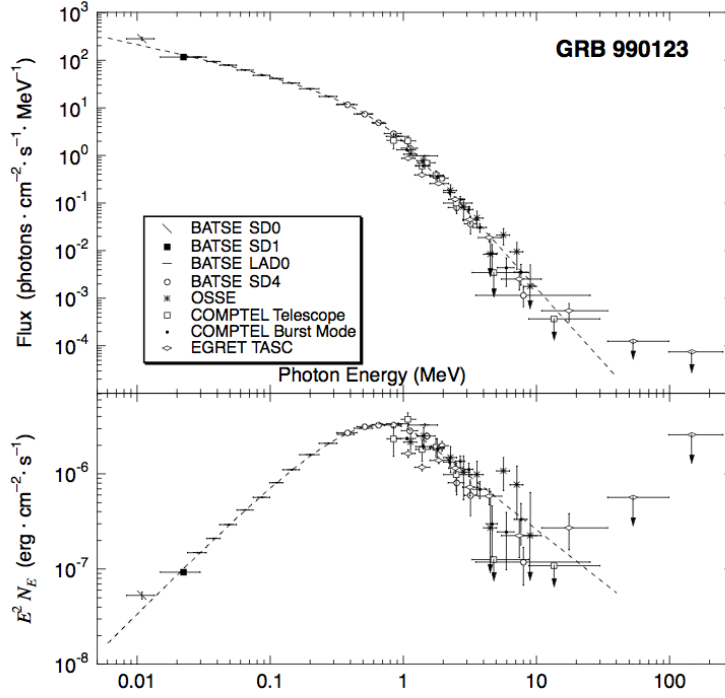


FIG. 6.8 – SED du sursaut 990123 par l'instrument BATSE entre 10 keV et 3 MeV (Band et al. 1993).

Le spectre des photons s'écrit alors dans le référentiel comobile :

$$n(\epsilon) = \begin{cases} n_b \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_b} \right)^{-2} & \text{pour } \epsilon > \epsilon_b \\ n_b \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_b} \right)^{-1} & \text{pour } \epsilon_{ssa} < \epsilon < \epsilon_b \\ n_b \left( \frac{\epsilon_{ssa}}{\epsilon_b} \right)^{-1} \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_{ssa}} \right) & \text{pour } \epsilon < \epsilon_{ssa} \end{cases} \quad (6.1)$$

où  $n_b \equiv n(\epsilon_b)$  est la densité de photons à l'énergie de transition dans le référentiel comobile. La densité d'énergie des photons dans le référentiel comobile estimée par BATSE vaut approximativement  $U_\gamma \approx 2n_b\epsilon_b^2$  (Wang et al. 2008), ce qui nous permet de trouver une estimation rapide de la normalisation du spectre :

$$n_b(\epsilon_b) = \frac{U_\gamma}{2\epsilon_b^2} = \frac{L_{\gamma,obs}}{4\pi r_{in}^2 \Gamma^2 w c} = \frac{L_{\gamma,obs}}{8\pi r_{in}^2 c \epsilon_{b,obs}^2} \quad (6.2)$$

avec  $L_{\gamma,obs}$  la luminosité observée et  $r_{in}$  le rayon auquel ont lieu les chocs internes.

### 6.3.2 Modélisation du rayonnement avec le modèle des couches solides

Nous allons utiliser le modèle simple des couches solides élaboré par Daigne et Mochkovitch (1998; 2000). On considère que le vent est formé d'une succession de couches solides émises à intervalles de temps réguliers. On prend comme intervalle le temps de variabilité typique observé dans les profils de sursauts gamma,  $\delta t_{var} \sim 0.1$  s. Ainsi, on fait le lien entre l'échelle principale de variation dans la courbe de lumière et le temps dynamique de la source. Soient deux couches de masses respectives

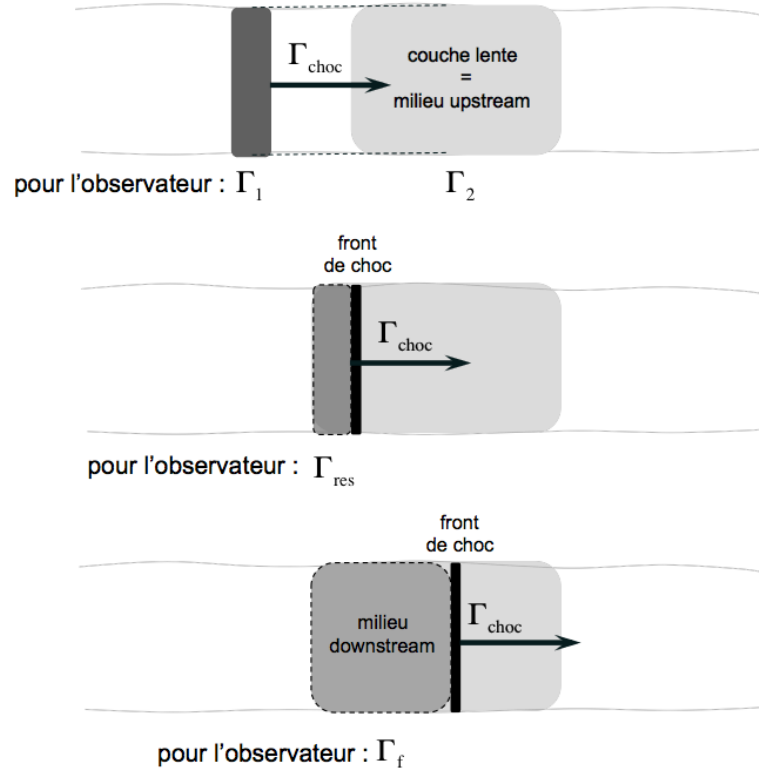


FIG. 6.9 – Représentation schématique de l'évolution d'un choc.

$m_1$  et  $m_2$  émises avec les facteurs de Lorentz  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  tels que  $\Gamma_2 > \Gamma_1$ . Les couches se rattrapent à la distance :

$$r_{\text{in}} \approx \frac{2\Gamma_1^2\Gamma_2^2}{\Gamma_2^2 - \Gamma_1^2} c \delta t_{\text{var}} \quad (6.3)$$

et une collision a lieu (Fig. 6.9). On fait l'approximation que ce sont deux couches solides qui fusionnent lors du choc. L'énergie dissipée est égale à la différence entre la somme des énergies cinétiques des deux couches prises séparément et l'énergie cinétique de la couche résultante de la fusion. La masse efficace à prendre en compte lors de la collision équivaut à la plus petite des deux masses, car lorsque deux couches de masses très différentes se choquent, la masse balayée durant le choc est de l'ordre de la plus petite des deux masses :

$$m_{\text{eff}} = \min(m_1, m_2) \quad (6.4)$$

et le facteur de Lorentz de la matière choquée :

$$\Gamma_{\text{res}} = \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2} \quad (6.5)$$

L'énergie dissipée lors de la fusion des deux couches est

$$E_{\text{diss}} = (\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_{\text{res}}) m_{\text{eff}} c^2 \quad (6.6)$$

$\Gamma_f$  est le facteur de Lorentz final après fusion des deux couches,

$$\Gamma_f = \sqrt{\Gamma_1\Gamma_2 \frac{m_1\Gamma_1 + m_2\Gamma_2}{m_1\Gamma_2 + m_2\Gamma_1}} \quad (6.7)$$

L'efficacité du processus est

$$f = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2}}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \quad (6.8)$$

Les études concernant la microphysique du transfert de l'énergie lors des chocs internes aux protons, électrons et champ magnétique ne se sont développées significativement que récemment. Comme dans de nombreuses études concernant le modèle des chocs internes (Rees et Meszaros 1994), nous adoptons une approche simplifiée en utilisant des facteurs d'équipartition de l'énergie entre les électrons, les protons (et/ou les noyaux) et le champ magnétique. Une fraction  $\alpha_e$  de l'énergie dissipée est transférée aux électrons lors de la collision, une fraction  $\alpha_p$  aux protons. La quantité  $\alpha_B$  est la fraction d'énergie dissipée et envoyée dans le champ magnétique. On prend les valeurs suivantes  $\alpha_e = \alpha_p = 45\%$  et  $\alpha_B \approx 10\%$ . La valeur de ces paramètres est peu contrainte mais compte tenu de l'énergie des sursauts, on prend des valeurs permettant une émission efficace.

La masse balayée étant  $2m_{\text{eff}}$ , le nombre de protons contenus dans cette masse est donc :

$$N_p = \frac{2m_{\text{eff}}}{m_p} \quad (6.9)$$

$m_p$  étant la masse d'un proton. L'énergie par proton vaut donc  $E_{\text{prot}} = E_{\text{diss}}/(\Gamma_{\text{res}}N_p)$  et c'est donc également l'énergie cinétique typique d'un proton dans le référentiel comobile :  $E_{\text{prot}} = (\Gamma_p - 1)m_p c^2$ . La valeur du champ magnétique est calculée en supposant l'équipartition entre la densité d'énergie magnétique et celle du fluide de densité  $n_p = n_e$  :

$$B = \sqrt{8\pi\alpha_B U_{\text{int}}} \quad (6.10)$$

où  $U_{\text{int}} = n_p E_{\text{prot}}$  est la densité d'énergie interne (en négligeant la masse des électrons). L'énergie cinétique d'un électron est donnée par :

$$E_e = (\Gamma_e - 1)m_e c^2 \approx \Gamma_e m_e c^2 \text{ pour } \Gamma_e \gg 1. \quad (6.11)$$

On définit la densité des électrons accélérés par  $n_e^{\text{acc}} = \zeta n_e$ , où  $\zeta$  représente la fraction d'électrons accélérés (Bykov et Meszaros 1996). Ce paramètre permet d'optimiser l'énergie typique communiquée aux électrons afin de mieux reproduire les observations et notamment l'énergie du pic du spectre de photons (Daigne et Mochkovitch 1998). Notons que la pertinence physique de ce paramètre est cependant controversée par les travaux numériques récents de Sironi et Spitkovsky (2011). Cette fraction d'électrons accélérés serait à l'origine de l'émission prompte non thermique synchrotron et inverse Compton. On a donc  $n_e^{\text{acc}} E_e = \alpha_e U_{\text{int}}$ , ou encore

$$E_e = \frac{\alpha_e}{\zeta} E_{\text{prot}} \quad (6.12)$$

Connaissant  $B$  et  $E_e$ , on peut donc maintenant déterminer l'énergie caractéristique dans le référentiel comobile de l'émission synchrotron :

$$E_{\text{syn}}^\gamma = 6.8 \cdot 10^{-2} \left(\frac{B}{G}\right) \left(\frac{E_e}{\text{GeV}}\right)^2 \text{ eV} \quad (6.13)$$

ainsi que le temps de perte synchrotron :

$$t_{\text{syn}} = 3.8 \cdot 10^{14} \left(\frac{B}{G}\right)^{-2} \left(\frac{E_e}{\text{eV}}\right)^{-1} \text{ s} \quad (6.14)$$

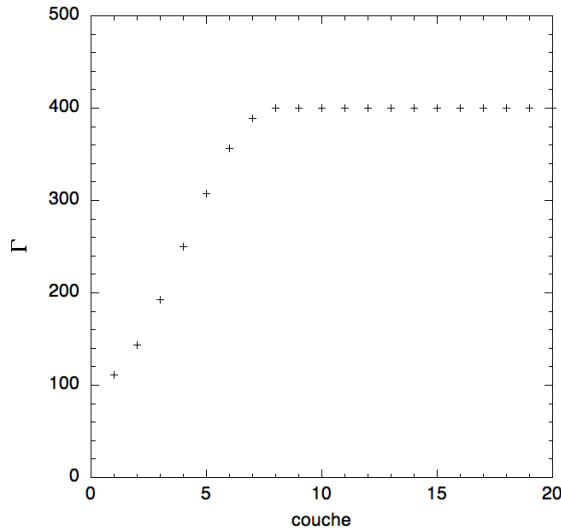


FIG. 6.10 – Distribution des facteurs de Lorentz des 20 couches.

### Mise en œuvre numérique

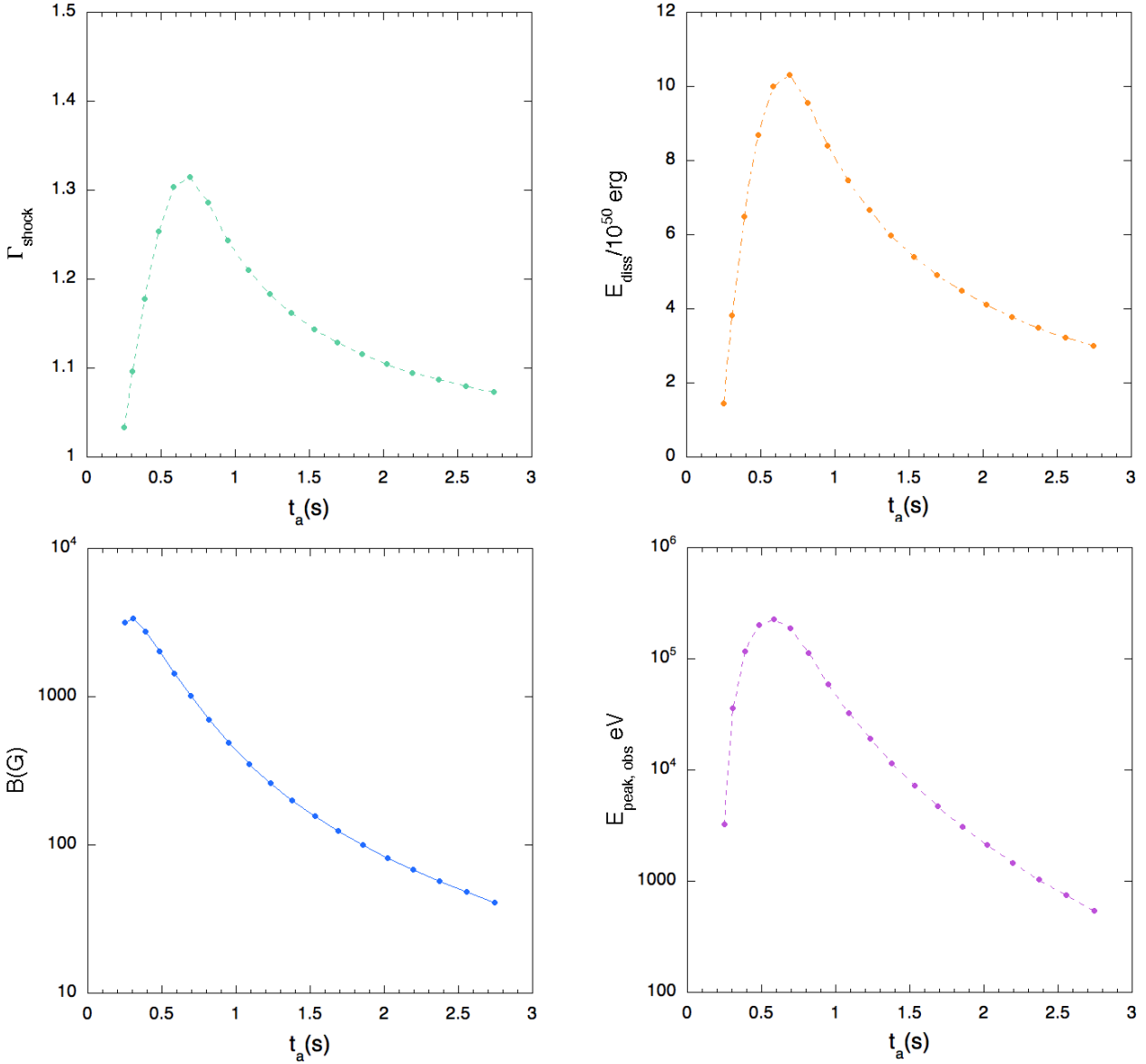
On simule un sursaut gamma synthétique en injectant 20 couches de matière<sup>7</sup> avec la distribution de facteurs de Lorentz présentée Fig. 6.10. On obtient 20 chocs différents lorsque les différentes couches se rattrapent. Pour chaque choc, on calcule l'ensemble des grandeurs physiques à partir du modèle simple présenté ci-dessus. Dans un premier exemple, on injecte une valeur de  $L_w = 10^{53}$  erg/s pour la luminosité totale du sursaut, les autres paramètres importants de la simulation étant  $\alpha_e = 0.45$ ,  $\alpha_B = 0.1$ ,  $\zeta = 0.01$  et  $\delta t_{\text{var}} = 0.1$  s (soit une durée totale du vent de 2s). Certaines des grandeurs caractéristiques des différents chocs sont représentées Fig. 6.11 en fonction du temps d'arrivée des photons pour l'observateur depuis l'émission au moment d'un choc particulier  $t_a$  (nous n'incluons pas néanmoins de redshift dans le calcul). Chaque point des courbes correspond donc à un choc entre 2 couches. Notons par ailleurs que la durée de réception d'un pulse gamma d'un choc particulier est en général beaucoup plus courte que l'écart de temps entre 2 chocs (Daigne et Mochkovitch 1998). Ces courbes permettent de voir l'évolution de ces grandeurs physiques durant le sursaut. Nous avons également simulé un autre sursaut synthétique en reprenant les mêmes paramètres mais une luminosité plus faible,  $L_w = 10^{52}$  erg/s. Pour ces deux exemples de sursauts synthétiques, les grandeurs physiques caractéristiques d'un des chocs les plus "lumineux" sont présentées Tab. 6.1 (le choc 1 représente le troisième choc du premier sursaut synthétique, et le choc 2 le deuxième choc du second sursaut synthétique).

	B (G)	$\rho$ ( $g.cm^{-3}$ )	$r_{\text{in}}$ (cm)	$\Gamma_{\text{choc}}$	$\Gamma_{\text{res}}$	$E_{\text{emin}}$ (eV)	$E_{\text{syn}}$ (eV)	$E_{\text{syn,obs}}$ (eV)
choc 1	2738.87	$7.63 \cdot 10^{-14}$	$3.34 \cdot 10^{14}$	1.178	186	$1.84 \cdot 10^9$	630.78	117527
choc 2	1071.27	$2.13 \cdot 10^{-14}$	$2.40 \cdot 10^{14}$	1.096	155	$1.01 \cdot 10^9$	73.76	11427

TAB. 6.1 – Grandeurs caractéristiques pour deux chocs sélectionnés. Le choc 1 correspond à une énergie totale injectée dans le vent  $L_w = 10^{53}$  erg/s. Pour le choc 2,  $L_w = 10^{52}$  erg/s.

7. ce nombre peut néanmoins être varié arbitrairement



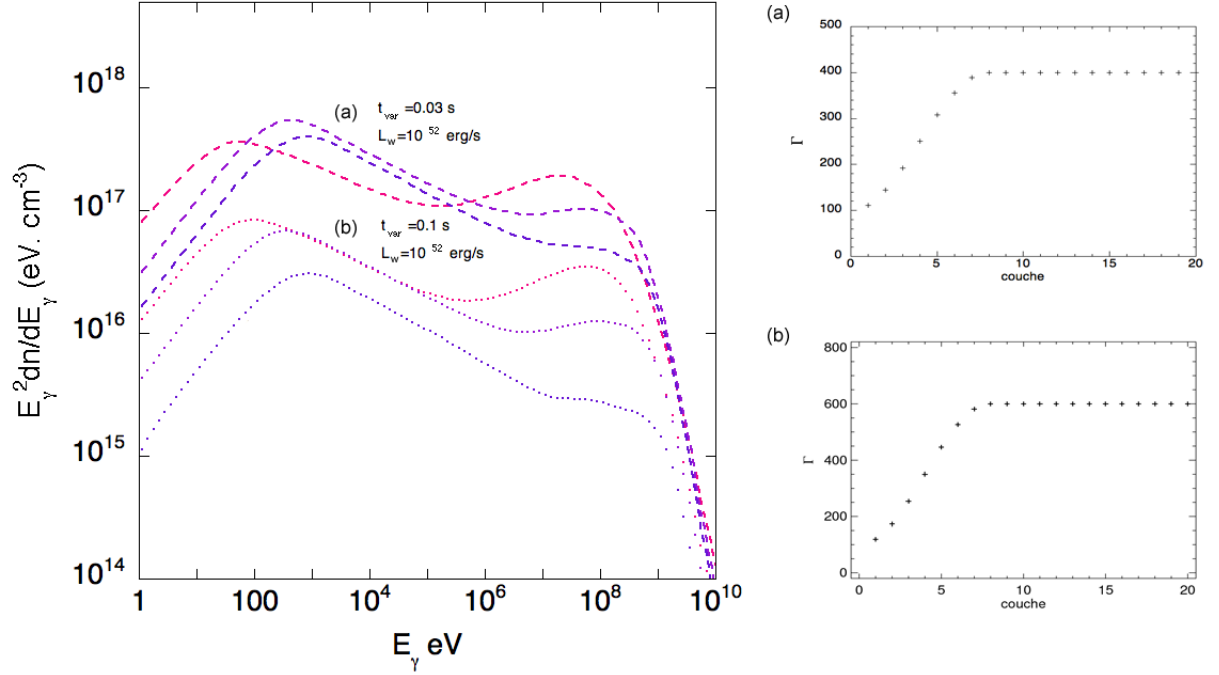


**FIG. 6.11** – Grandeurs physiques caractéristiques pour les 20 chocs d'un sursaut synthétique. Chaque choc induit une émission gamma qui est vue par l'observateur au temps  $t_a$ . L'évolution du facteur de Lorentz (différence de vitesse entre 2 couches entrant en collision), de l'énergie dissipée, du champ magnétique et de l'énergie caractéristique de l'émission gamma observée ( $E_{\text{syn,obs}} = \Gamma_{\text{res}} E_{\text{syn}}$ ) pour chaque choc est donnée en fonction de la durée d'arrivée des photons émis pendant le choc pour l'observateur.

Nous allons maintenant calculer l'émission gamma associée à chaque choc, dont un exemple est montré Fig. 6.12 pour les trois premiers chocs de deux sursauts synthétiques (qui ont des distributions de facteur de Lorentz différentes et des temps de variabilité différents). Pour calculer l'émission synchrotron due à l'ensemble des électrons accélérés, on suppose que les électrons ont une distribution d'énergie en loi de puissance de pente comprise entre  $-2$  et  $-2.5$  (car c'est la pente type pour l'accélération de Fermi) entre  $E_{e_{\min}}$  et  $E_{e_{\max}}$  :

$$n_e^{\text{acc}} = A \int_{E_{e_{\min}}}^{E_{e_{\max}}} E^{-p} dE \quad (6.15)$$

où  $E_{e_{\min}} = E_e$  calculée à l'Eq. (6.12) et  $E_{e_{\max}}$  est l'énergie maximale que peuvent atteindre les électrons accélérés durant le choc (i. e. l'énergie pour laquelle le temps de perte synchrotron est égal



**FIG. 6.12** – Spectre de photons dans le référentiel en comouvement pour les trois premiers chocs de deux sursauts synthétiques de luminosité  $L_w = 10^{52}$  erg/s comprenant 20 chocs. La distribution de facteurs de Lorentz pour les 20 chocs est donnée à droite de la figure. Le temps de variabilité est (a)  $\delta t_{\text{var}} = 0.03$  s et (b)  $\delta t_{\text{var}} = 0.1$  s.

au temps d'accélération).  $A$  est le facteur de normalisation du spectre. En introduisant la densité d'énergie dissipée  $U_{\text{int}}$  par le choc, on peut aussi exprimer la densité d'énergie des électrons accélérés sous la forme,

$$A \int_{E_{\text{e,min}}}^{E_{\text{e,max}}} E E^{-p} dE = \alpha_e U_{\text{int}} = \frac{A}{2-p} [E^{2-p}]_{E_{\text{e,min}}}^{E_{\text{e,max}}} \quad (6.16)$$

Le facteur de normalisation du spectre s'écrit donc :

$$A = \frac{\alpha_e U_{\text{int}} (2-p)}{E_{\text{e,max}}^{2-p} - E_{\text{e,min}}^{2-p}} \quad (6.17)$$

Le développement du calcul de la puissance reçue par rayonnement synchrotron et inverse Compton (Rybicki et Lightman 1979) est présenté en annexe D. Nous utilisons le formalisme établi par Jones (1968) ré-écrit par Bosnjak et al. (2009). En supposant une distribution isotropique pour l'angle d'attaque  $\alpha$  entre la direction du mouvement de l'électron et la direction du champ magnétique, la puissance synchrotron s'écrit (Equation D.27) :

$$P_{\nu'}(\gamma) = \frac{\sigma_T m_e c^2}{3e} B \Phi \left( \frac{\nu'}{\nu'_{\text{syn}}(\gamma)} \right) \quad (6.18)$$

où la fréquence synchrotron est  $\nu_{\text{syn}}(\gamma) = \frac{3e}{4\pi m_e c} B \gamma^2$ .

Le taux de perte d'énergie s'écrit :

$$\frac{d\gamma}{dt'} = -\frac{\sigma_T}{6\pi m_e c} B^2 \gamma^2 \quad (6.19)$$

En ce qui concerne la diffusion Compton inverse, en utilisant le noyau calculé par Jones (1968), on obtient (Bosnjak et al. 2009) :

$$\begin{aligned} P_{\nu'}(\gamma) &= \frac{3}{4} h \sigma_T c \frac{\nu'}{\gamma^2} \int \frac{d\tilde{\nu}'}{\tilde{\nu}'} n_{\tilde{\nu}'}(t') K(\gamma, \nu', \tilde{\nu}') \\ \frac{d\gamma}{dt'} &= -\frac{3}{4} \frac{h \sigma_T}{m_e c} \frac{1}{\gamma^2} \int d\nu' \nu' \int \frac{d\tilde{\nu}'}{\tilde{\nu}'} n_{\tilde{\nu}'}(t') K(\gamma, \nu', \tilde{\nu}') \end{aligned} \quad (6.20)$$

avec

$$\begin{aligned} K(\gamma, \nu', \tilde{\nu}') &= \frac{\epsilon}{\tilde{\epsilon}} - \frac{1}{4\gamma^2} \text{ si } \frac{\tilde{\epsilon}}{4\gamma^2} < \epsilon < \tilde{\epsilon} \\ &= 2q \ln q + (1+2q)(1-q) + \frac{1}{2}(1-q) \frac{(4\gamma\tilde{\epsilon}q)^2}{1+\gamma\tilde{\epsilon}q} \text{ si } \tilde{\epsilon} < \epsilon < \frac{4\gamma^2\tilde{\epsilon}}{1+4\gamma\tilde{\epsilon}} \end{aligned} \quad (6.21)$$

avec  $\epsilon = \frac{h\nu'}{m_e c^2}$ ,  $\tilde{\epsilon} = \frac{h\tilde{\nu}'}{m_e c^2}$  et  $q = \frac{\epsilon}{4\gamma\tilde{\epsilon}(\gamma - \epsilon)}$ .

$$\frac{d\gamma}{dt'} = -\frac{3}{4} \frac{\sigma_T}{m_e c} \frac{1}{\gamma^2} \int dE' E' \int \frac{d\tilde{E}'}{\tilde{E}'} n(\tilde{E}') K(\gamma, \epsilon', \tilde{\epsilon}') \quad (6.22)$$

L'expression de la puissance est :

$$P(E') = \frac{dE'_{I.C.}}{dt' dE'}(E') = \frac{3}{4} \sigma_T c \frac{E'}{\gamma_e^2} \int \frac{d\tilde{E}'}{\tilde{E}'} n(\tilde{E}') K(\gamma, \epsilon', \tilde{\epsilon}') \quad (6.23)$$

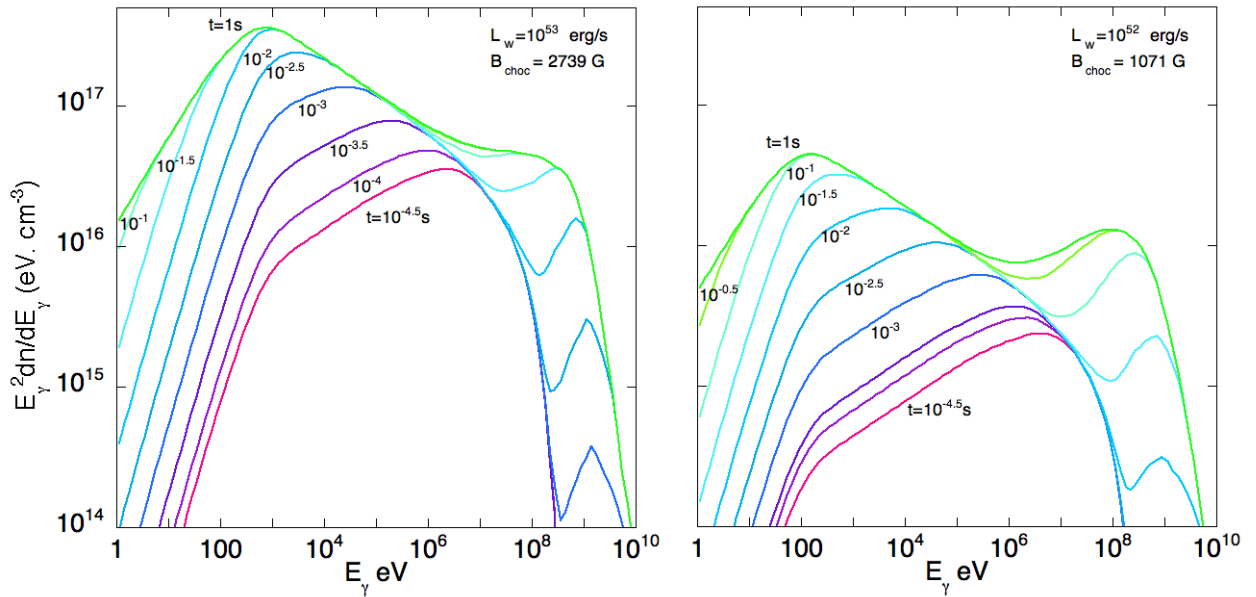
où  $\frac{dE'_{I.C.}}{dt' dE'}(E')$  est l'énergie émise par inverse Compton entre  $E'$  et  $E' + dE'$  et  $n(\tilde{E}')$  est le spectre des photons au pas précédent.

Le nombre de photons est donné par  $\frac{1}{E'} \times P(E')$ .

Après avoir estimé les grandeurs caractéristiques d'un choc donné, nous calculons le rayonnement émis lors de la propagation de ce choc. Le calcul commence à  $t = t_{\text{choc}}$ . Le modèle de Daigne et Mochkovitch (1998) nous a permis d'estimer la densité d'électrons accélérés, le champ magnétique et l'énergie interne communiquée aux électrons. L'énergie maximale que peuvent atteindre les électrons accélérés est l'énergie pour laquelle leur temps d'accélération est égal au temps de refroidissement synchrotron (nous supposons par simplicité que le temps d'accélération des électrons est proportionnel à leur temps de Larmor,  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$ ). On choisit pour le premier pas de temps le temps de perte synchrotron des électrons les plus énergétiques. En effet, nous avons vu que  $t_{\text{syn}} \propto E_e^{-1}$ . Lors de ce pas, les premiers photons synchrotron sont émis et l'émission synchrotron self Compton devient possible. Pour les pas suivants, on détermine la valeur du pas en choisissant le minimum entre le temps de perte synchrotron et le temps de perte inverse Compton. La simulation continue jusqu'à ce que les électrons soient complètement refroidis, ce qui arrive pour un temps bien plus court que le temps dynamique pour les exemples de choc mentionnés plus haut.

Les pertes par expansion, la décroissance de la densité et du champ magnétique sont prises en compte ( $\propto r^{-1}$  pour le champ magnétique et  $\propto r^{-2}$  pour la densité). Le temps de pertes par expansion est donné par :

$$t_{\text{exp}} = \frac{r_{\text{in}}}{c\Gamma_f} \quad (6.24)$$

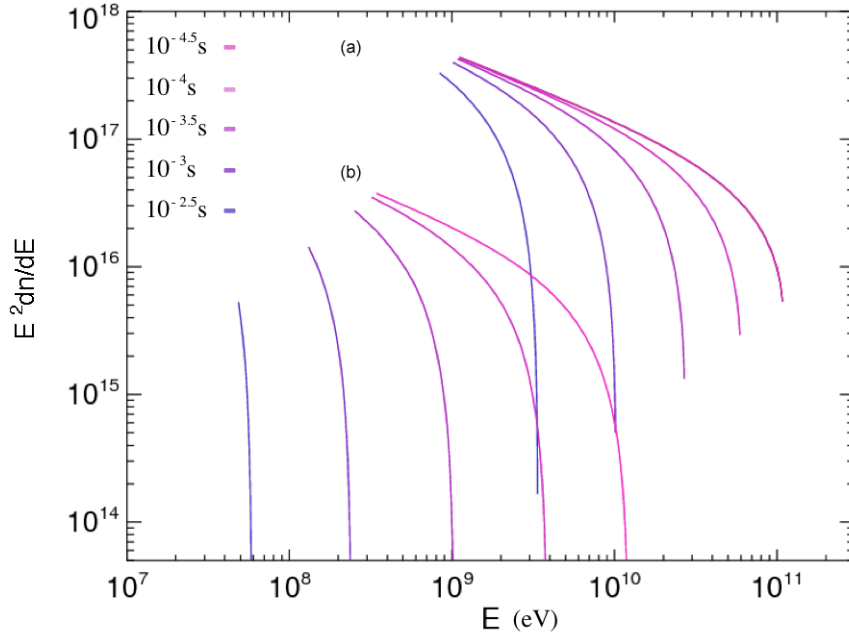


**FIG. 6.13** – SED calculée pour différents pas de temps pour les deux chocs de Tab. 6.1 à partir d'un spectre d'électrons (cf. Eq. 6.15), entre  $10^{-4.5}$  s (courbe rose) et 1 s (verte). La pente de la courbe rose est plus dure à basse énergie car les électrons ont un temps de perte synchrotron plus long. Le processus inverse Compton s'amplifie et on obtient les deux bosses caractéristiques.

Dans ces calculs, nous n'avons pas pris en compte le processus d'auto-absorption synchrotron (*synchrotron self absorption*) qui agit à basse énergie ni la production de paires à haute énergie. Le premier processus ne serait pas déterminant au-delà de 1 eV. De plus, nous traitons des chocs qui ont lieu à de grandes distances de l'objet central (grand  $r_{in}$ ) et donc de la photosphère. La création de paires ne jouerait donc pas un rôle prépondérant.

La Fig. 6.13 montre l'évolution de la SED dans le référentiel comobile en fonction du temps pour les deux chocs. On voit apparaître peu à peu la bosse due au processus inverse Compton. Après 1s, il n'y a plus d'évolution notable et on peut dire qu'on atteint un état stationnaire approché, c'est le fond de rayonnement que l'on va considérer pour calculer les pertes d'énergie lorsque nous propagerons une particule dans le choc. La Fig. 6.14 donne l'évolution des spectres d'électrons correspondants. Le temps de perte synchrotron étant beaucoup plus grand à basse énergie il faut attendre que les particules aient toutes émises pour considérer un état stationnaire.

Les spectres ci-dessus sont calculés dans le régime de refroidissement rapide (*fast cooling*) c'est-à-dire que le temps de perte synchrotron est inférieur au temps dynamique (de pertes par expansion) pour tous les électrons. Une étude récente de Daigne et al. (2011) a montré qu'un régime de refroidissement marginalement rapide (*marginally fast cooling*) des électrons permettait d'obtenir des SED plus en accord avec celles observées. Dans ce régime, les électrons de plus basse énergie ont un temps de perte synchrotron de l'ordre du temps de perte adiabatique. Cette hypothèse permet d'obtenir des spectres avec une pente à basse énergie plus dure. D'un point de vue pratique, en considérant des champs magnétiques plus faibles ( $\alpha_B$  plus petit ou choc plus lointain par rapport à la source), on augmente le temps de perte synchrotron. Celui des électrons de plus basse énergie devient alors de l'ordre de  $t_{exp}$ . Nous envisagerons probablement de tels cas dans la suite de notre étude.



**FIG. 6.14** – Evolution de la distribution d'énergie des électrons en fonction du temps pour deux chocs avec (a)  $E_{e_{\min}} \approx 2$  GeV et (b)  $E_{e_{\min}} \approx 0.4$  GeV. Seuls les 5 premiers pas de temps sont représentés. Les électrons plus énergétiques ont un temps de perte synchrotron plus court.

L'étude des sursauts gamma comme sources possibles du rayonnement cosmique doit se faire en deux temps : un premier temps où l'on détermine les grandeurs caractéristique associées à une onde de choc et un deuxième temps où l'on s'intéresse au milieu déjà choqué dans lequel nous allons pouvoir propager les rayons cosmiques. La première étape vient d'être réalisée dans ce chapitre : grâce au modèle des couches solides de Daigne et Mochkovitch (1998), nous avons pu déterminer les grandeurs caractéristiques pour un choc donné et calculer le spectre et la densité des photons émis dans le référentiel en comouvement. A partir de maintenant, nous allons considérer que la turbulence magnétique comme le fond de photons sont figés dans un état stationnaire au moment du choc, après quoi leur évolution est seulement modifiée par l'expansion du milieu. Nous allons étudier les différents processus de gain et de perte d'énergie que peut subir un rayon cosmique se propageant dans ce milieu. L'interaction avec la turbulence magnétique ou le fond de photons permet en effet de gagner (respectivement de perdre) de l'énergie et l'étude de la compétition entre gain et perte d'énergie est donc nécessaire pour déterminer s'il est possible d'atteindre les énergies observées et si des noyaux peuvent survivre dans l'environnement ambiant des chocs internes.

## Le cycle infernal des rayons cosmiques<sup>1</sup>

*The important thing in science is not so much to obtain new facts as to discover new ways of thinking about them.*

W. L. Bragg

Ce chapitre décrit l'étude des différents processus de gain et de perte d'énergie subis par une particule au cours de sa propagation autour d'une onde de choc dans un jet relativiste. Dans le chapitre précédent, nous avons modélisé le jet comme une succession d'ondes de choc se déplaçant à des facteurs de Lorentz différents. Le but est de déterminer si ces ondes de choc peuvent être une source possible du rayonnement cosmique de ultra haute énergie. Nous allons travailler dans le cadre de l'accélération diffusive par onde de choc (DSA), processus par lequel les particules chargées sont diffusées autour du front de choc à cause du champ magnétique turbulent. Chaque particule peut ainsi traverser le choc plusieurs fois de suite et gagner de l'énergie par changement de référentiel (nous avons vu au chapitre précédent que les milieux *upstream* et *downstream* de part et d'autre du front de choc ne vont pas à la même vitesse). Les chocs que nous allons considérer sont moyennement relativistes conformément à nos estimations du chapitre précédent. Les particules se propagent dans le fond de rayonnement gamma non thermique (calculé pour chaque onde de choc au chapitre 6), et subissent donc également des pertes d'énergie. La compétition entre ces différents processus de gain et de pertes sera donc étudiée et nous discuterons également de la possibilité de s'échapper du jet afin de pouvoir déterminer une distribution d'énergie pour les particules sortantes. Cette étude est actuellement en cours de réalisation et les résultats présentés ici sont donc préliminaires.

---

1. Etude des différents processus de gain et de pertes d'énergie subis par un rayon cosmique au cours de sa propagation dans une onde de choc d'un jet relativiste. Merci à Denis pour ce titre plus accrocheur.

## 7.1 Les ondes magnétohydrodynamiques comme centres diffuseurs

Dans la suite, nous écrirons  $B = B_0 + \delta B$  où  $B_0$  est le champ moyen et  $\delta B$  la fluctuation du champ, petite devant  $B_0$ . Le taux de turbulence est alors défini par  $\eta = \langle \delta B^2 \rangle / \langle B^2 \rangle$  (lorsqu'il n'y a pas de champ moyen,  $\eta = 1$ ).

### Relation de dispersion

De petites perturbations dans un milieu conducteur magnétisé apparaissent sous forme d'ondes. Leurs propriétés sont différentes de celles des ondes sonores dans un gaz ou des ondes électromagnétiques dans le vide. Le milieu conducteur avec un champ magnétique possède une anisotropie caractéristique : la vitesse de propagation de l'onde dépend de la direction de propagation par rapport à la direction du champ magnétique. Il existe 4 modes différents d'ondes MHD dans un plasma parfaitement conducteur plongé dans un champ magnétique. Ces ondes peuvent créer de la turbulence et accélérer des particules en agissant comme des centres diffuseurs. Dans un plasma magnétisé, plusieurs types d'ondes peuvent se propager. Seules les ondes de très basse fréquence sont susceptibles d'être décrites par les équations de la MHD. Pour trouver les différents modes de propagation, on linéarise le système d'équations de la MHD idéale et on cherche une solution de type onde plane monochromatique,  $f(\vec{r}, t) \sim \exp[i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)]$  de pulsation  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$ . La relation de dispersion est la suivante :

$$\omega_0^2 \left[ \omega_0^2 - (\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 \right] \left[ \omega_0^4 - k^2 (v_S^2 + v_A^2) \omega_0^2 + k^2 v_S^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 \right] = 0 \quad (7.1)$$

où  $\omega_0 = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$  est la fréquence de l'onde dans le référentiel comobile. La première solution de l'équation (7.1) correspond aux ondes d'entropie possédant une vitesse de phase nulle :  $\omega_0 = 0$  qui provoquent une perturbation locale de la densité et de l'entropie. La deuxième solution  $\omega_0 = \pm \vec{k} \cdot \vec{v}_A$ , correspond aux ondes de pulsation  $\omega = kv_A \cos \phi$  où  $\phi$  est l'angle entre le vecteur d'onde et le champ magnétique. Les ondes d'Alfvén sont des ondes transverses à la fois par rapport aux lignes de champ magnétique et aux vecteurs d'onde. Non compressives (la perturbation de densité associée à l'onde est nulle), elles n'ont pas d'équivalent en hydrodynamique. La vitesse de groupe est égale à la vitesse d'Alfvén dans le milieu et est toujours parallèle aux lignes de champ : l'énergie transportée se propage le long des lignes de champ magnétique. Dans les plasma de faible densité et fortement magnétisés, la vitesse d'Alfvén peut approcher la vitesse de la lumière. Enfin, pour la dernière solution,  $\omega_0^4 - k^2 (v_S^2 + v_A^2) \omega_0^2 + k^2 v_S^2 (\vec{k} \cdot \vec{v}_A)^2 = 0$  il existe deux modes correspondant aux vitesses de phase

$$v_{\pm} = \frac{1}{2} \left[ v_A^2 + v_S^2 \pm \sqrt{(v_S^2 + v_A^2)^2 - 4v_A^2 v_S^2 \cos^2 \phi} \right] \quad (7.2)$$

Ces ondes sont appelées ondes magnétozoniques rapides (+) et lentes (-). On peut les imaginer comme des ondes sonores qui ne sont pas produites seulement par la pression du gaz mais aussi par la pression et la tension magnétiques. Plus le milieu est magnétisé et plus leur vitesse de propagation diffère de celle de l'onde sonore.

Les plasmas astrophysiques sont des milieux fortement magnétisés et non collisionnels, de sorte qu'ils sont assimilables à des conducteurs parfaits. Le nombre de Reynolds magnétique est alors

élevé et les ondes MHD peuvent se propager sur de grandes distances sans être absorbées. Ces ondes sont d'ailleurs étudiées par de nombreux satellites qui surveillent le vent solaire et ses interactions avec les magnétosphères des planètes. Les modes des ondes MHD contrôlent le transport des rayons cosmiques.

### Condition de résonance et diffusion des particules

Les particules chargées interagissent de manière résonante avec les ondes d'Alfvén. Une particule se propageant le long de  $\vec{B}$  à la vitesse  $\vec{v}$  voit la pulsation de l'onde affectée de l'effet Doppler :  $\omega' = \omega - kv = \omega(1 - v/v_A)$ . La particule interagit avec le champ électrique fluctuant de l'onde ; si la particule est en phase avec cette onde fluctuante, elle subit une forte interaction. Cela arrive lorsque  $\omega'$  est proche de la gyrofréquence  $\omega_L$  de la particule :

$$\omega - kv = \pm\omega_L \quad (7.3)$$

Pour les particules relativistes, la vitesse de l'onde est petite devant la vitesse de la particule,  $v \gg v_A$ . L'onde peut essentiellement être traitée comme une perturbation magnétostatique et il y a résonance pour :

$$r_L(\gamma) = \frac{\gamma mc^2}{ZeBc} \approx \lambda_{\text{res}}(\gamma) \quad (7.4)$$

Les ondes d'Alfvén qui ont une longueur d'onde comparable au rayon de giration peuvent modifier l'angle d'attaque  $\theta$  (angle entre la vitesse de la particule et la direction moyenne du champ magnétique). Chaque interaction fait essentiellement tourner le vecteur vitesse de la particule d'un angle  $\delta\theta = \delta B/B$  lorsque la particule résonante reste en phase avec l'onde sur plus d'une période de l'onde. Si le spectre est à large bande, les ondes individuelles peuvent être traitées comme incohérentes si bien que l'angle d'attaque de la particule change de manière aléatoire. En d'autres mots, la particule diffuse en terme d'angle d'attaque. Après  $N$  rencontres le changement d'angle est donc  $\theta = \sqrt{N}\delta\theta$ . Les ondes agissent comme des centres diffuseurs et on peut définir un libre parcours moyen pour lequel l'angle d'attaque de la particule a changé d'une valeur de 1 radian :

$$\lambda_{\text{rad}} = N\lambda_{\delta\theta} \approx \left(\frac{B}{\delta B}\right)^2 r_L \quad (7.5)$$

Le coefficient de diffusion effective est :

$$D_\theta \approx \left(\frac{\delta B}{B}\right)^2 \omega_L \quad (7.6)$$

On peut également associer au libre parcours moyen un coefficient de diffusion spatial :

$$D_x \approx \frac{\lambda_{\text{rad}}}{3} \quad (7.7)$$

### Croissance des ondes d'Alfvén

Si les ondes d'Alfvén se propagent dans le milieu avec le bonne longueur d'onde  $\lambda_{\text{res}}$ , alors, les particules vérifiant (7.4) vont être fortement couplées au plasma. Il existe plusieurs façon de



généraliser les ondes d'Alfvén. Nous avons vu que toute perturbation du plasma génère des ondes d'Alfvén et des ondes magnétosoniques. Les sources de ces ondes peuvent inclure les vents stellaires, les mouvements de nuages, les supernovae, les vitesses des étoiles (tout ce qui peut perturber le milieu ambiant). En plus, les particules résonantes peuvent également générer des ondes. Les particules avec une distribution de vitesses anisotrope (un flux de particules) et une vitesse  $v \gg v_A$  vont générer des ondes d'Alfvén aux longueurs d'ondes  $\lambda_{res}$ . Ces ondes vont ensuite être des centres diffuseurs et réduire la vitesse des particules à la vitesse d'Alfvén.

### Limites pour l'interaction ondes - particules

La limite supérieure est donnée par la longueur d'onde maximale que l'on peut trouver dans le système, et qui ne peut pas être plus grande que la taille du système. Pour la limite inférieure, le fait que les ondes d'Alfvén ne peuvent exister que pour des fréquences  $\omega < \omega_p = eB/m_p c$ , la gyrofréquence des protons non relativistes. Le nombre d'onde maximal est donc  $k_{max} = \omega_p/v_A$  et donc la plus petite longueur d'onde résonante possible est  $\lambda_{min} = 2\pi/k_{max}$ . Il existe donc une valeur minimale pour la longueur d'onde au dessous de laquelle les interactions résonantes sont impossibles, et en particulier les électrons de trop faible énergie ne peuvent interagir de manière résonante. Dans les plasmas de faible densité il faut que ces électrons soient au moins faiblement relativistes pour résonner avec les ondes (Parizot, E., cours de Goutelas 2003).

## 7.2 Principe de l'accélération de Fermi relativiste

Dans les plasmas astrophysiques, les chocs sont non collisionnels. Un choc peut être considéré comme un nuage magnétique allant à une certaine vitesse. Les chocs sont accompagnés de turbulence MHD. A l'intérieur du nuage, le champ magnétique possède donc une structure turbulente que l'on peut décrire sous forme de spectre. Les particules vont donc tourner autour des lignes de champ et vont interagir avec les ondes d'Alfvén qui ont une longueur d'onde comparable au rayon de giration. Si la taille du nuage est assez grande devant la taille du rayon de giration les particules vont subir beaucoup d'interactions et la trajectoire devient diffuse. Les particules vont donc avoir la même vitesse d'ensemble que le milieu dans lequel elles diffusent. Il existe une différence de vitesse notable entre les milieux *upstream* et *downstream* de part et d'autre d'un front de choc. A chaque traversée du front de choc, le gain d'énergie sera proportionnel à la vitesse relative entre les deux référentiels. C'est l'accélération diffuse par onde de choc.

On note que  $R$  est le référentiel *upstream*,  $R'$  le référentiel *downstream* qui est animé d'une vitesse  $\beta_{rel}$  par rapport au référentiel *upstream*.

On note  $\beta_u = \beta_{choc}$  la vitesse du choc dans le référentiel *upstream*; la vitesse du choc dans le milieu *downstream* est donnée par l'équation de Synge (1957); pour un choc de facteur de Lorentz  $\Gamma_{choc} = 2$ , on a  $\beta_u = 0.86$  et

$$\beta_d \approx \frac{\beta_u}{3.3} = 0.26 \quad (7.8)$$

La loi de composition des vitesses nous donne

$$\beta_{rel} = \frac{\beta_u - \beta_d}{1 - \beta_u \beta_d} \approx 0.77 \quad (7.9)$$

La Fig. 6.9 montre l'évolution du front de choc qui sépare les deux milieux *upstream* (couche lente) et *downstream* (couche rapide, milieu déjà choqué).

### Passage upstream → downstream

Soit  $\theta$  l'angle entre la vitesse d'une particule ultra-relativiste, d'énergie  $E$ , et la normale au choc à un instant donné dans le référentiel *upstream*. On peut considérer en bonne approximation que la vitesse de la particule vaut  $c$ , sa composante dans la direction du choc est donc  $\beta_z = \cos \theta$ . La condition pour que le choc rattrape la particule dans le référentiel *upstream* se lit :  $\beta_{up} > \beta_z$ . Soit  $\theta_{\rightarrow d}$  l'angle de la particule par rapport à la normale au choc. Au moment où le choc rattrape la particule, l'angle initial que fait la particule avec la normale au choc dans le référentiel *downstream*,  $\cos \theta'_{in}$  s'obtient à partir de  $\theta_{\rightarrow d}$  par changement de référentiel :

$$\cos \theta'_{in} = \frac{\cos \theta_{\rightarrow d} - \beta_{rel}}{1 - \beta_{rel} \cos \theta_{\rightarrow d}} \quad (7.10)$$

Notons que  $\cos \theta'_{in}$  est nécessairement inférieur à la vitesse du choc dans le référentiel *downstream*  $\beta_d$

L'énergie initiale de la particule dans le référentiel *downstream* s'écrit alors :

$$E'_{in} = \Gamma_{rel} E (1 - \beta_{rel} \cos \theta_{\rightarrow d}) \quad (7.11)$$

### Passage downstream → upstream

La particule faisant un angle initialement  $\cos \theta'_{in} < \beta_d$  doit maintenant rattraper le choc dans le référentiel *downstream*. Si cela se produit, la particule rattrape le choc en faisant un angle  $\cos \theta'_{\rightarrow u} > \beta_d$  avec la normale au choc. Durant son "demi-cycle" *downstream* l'énergie de la particule est inchangée, on a :  $E'_{in} = E'_f = E'$ . L'angle initial que la particule fait initialement avec la normale au choc dans le référentiel *upstream*, s'obtient à nouveau par changement de référentiel :

$$\cos \theta_{in} = \frac{\cos \theta'_{\rightarrow u} + \beta_{rel}}{1 + \beta_{rel} \cos \theta'_{\rightarrow u}} \quad (7.12)$$

A nouveau cet angle est nécessairement supérieur à la vitesse du choc dans le référentiel *upstream*. L'énergie dans le référentiel *upstream* s'écrit :

$$E = \Gamma_{rel} E' (1 + \beta_{rel} \cos \theta'_{\rightarrow u}) \quad (7.13)$$

Après un cycle  $u \rightarrow d \rightarrow u$  on peut donc faire le bilan entre l'énergie initiale de la particule *upstream*  $E_i$  et son énergie finale  $E_f$  :

$$\frac{E_f}{E_i} = \Gamma_{rel}^2 (1 + \beta_{rel} \cos \theta'_{\rightarrow u}) (1 - \beta_{rel} \cos \theta_{\rightarrow d}) \quad (7.14)$$

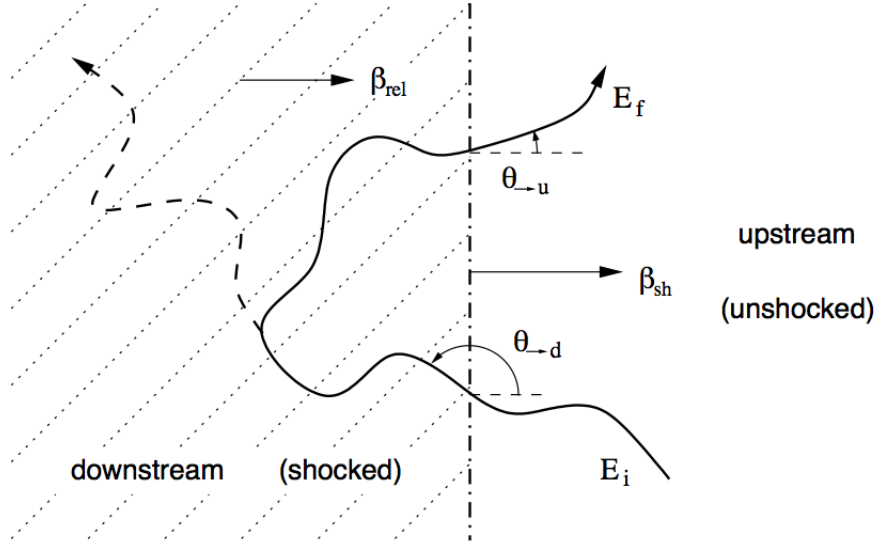


FIG. 7.1 – Représentation schématique d'un cycle d'accélération dans un choc magnétisé (Gallant 2002).

Dans le cas de chocs ultra-relativistes et dans une moindre mesure celui de chocs moyennement relativistes, le premier cycle d'accélération a un statut particulier de par le gain d'énergie beaucoup plus conséquent qu'il est susceptible d'apporter. Lors du cycle initial, les particules sont généralement supposées être distribuées isotropiquement dans le référentiel *upstream* et les termes entre parenthèse de l'Eq. (7.14) sont de l'ordre de l'unité. On obtient donc un gain d'énergie de l'ordre de  $\Gamma_{rel}^2$  lors de ce cycle. Pour les cycles suivants, les conditions sur les angles d'incidence au choc lors des passages vers les référentiels *upstream* ou *downstream* rendent la distribution angulaire anisotrope (et ce d'autant plus que le choc est relativiste). Le gain d'énergie moyen lors d'un cycle devient alors plus faible (de l'ordre de 2 pour des chocs ultra-relativistes (Achterberg, Les Houches 2004) et proche de  $\beta_{rel}$  pour des chocs moyennement relativistes). La signature du cycle initial lors du processus d'accélération est visible dans les spectres que nous présenterons plus tard dans ce chapitre.

### 7.2.1 Conditions au passage du choc

Le front de choc avance à une vitesse  $\Gamma_{choc}$  par rapport au milieu *upstream*.  $\beta_u$  et  $\beta_d$  sont les vitesses du front de choc dans les milieux *upstream* et *downstream*, respectivement. Les conditions de passage sont déduites des lois de conservation du nombre de particules, de l'énergie et de l'équation de la dynamique pour les fluides relativistes :

$$\Gamma_u \beta_u n_u = \Gamma_d \beta_d n_d \quad (7.15)$$

$$\Gamma_u^2 \beta_u (e_u + p_u) = \Gamma_d^2 \beta_d (e_d + p_d) \quad (7.16)$$

$$\Gamma_u^2 \beta_u^2 (e_u + p_u) + p_u = \Gamma_d^2 \beta_d^2 (e_d + p_d) + p_d \quad (7.17)$$

où les indices *u* et *d* font référence aux milieux *upstream* et *downstream* ; *n*, *e* et *p* sont respectivement la densité particulaire, le densité d'énergie et la pression mesurée dans le référentiel du fluide au repos.

Dans le cas d'un choc fort, l'énergie interne *upstream* est négligeable par rapport à l'énergie cinétique du front de choc. L'énergie interne équivaut à l'énergie de masse au repos  $e_p \approx n_p m c^2$  (on néglige

le terme de pression) que l'on remplace dans (7.16) et (7.17). On considère que l'équation d'état du milieu *downstream* est celle d'un gaz parfait de température  $T_d$  (Synge 1957) . On obtient (les formules citées sont extraites de Gallant (2002)) :

$$e_d + p_d = n_d m c^2 G\left(\frac{m c^2}{T_d}\right) \quad (7.18)$$

avec

$$G\left(\frac{m c^2}{T}\right) = 1 + \frac{5}{2} \frac{T}{m c^2} + \mathcal{O}\left(\frac{T}{m c^2}\right)^2, \quad T \ll m c^2, \quad (7.19)$$

$$G\left(\frac{m c^2}{T}\right) = \frac{4T}{m c^2} + \frac{m c^2}{2T} + \mathcal{O}\left(\frac{m c^2}{T}\right)^3, \quad T \gg m c^2. \quad (7.20)$$

Ces deux asymptotes correspondant aux équations d'état pour un gaz parfait non relativiste et ultra relativiste, respectivement. On peut ainsi ré-écrire les conditions de saut de la façon suivante,

$$\Gamma_u = (\bar{e}_d + \bar{p}_d) \Gamma_d, \quad (7.21)$$

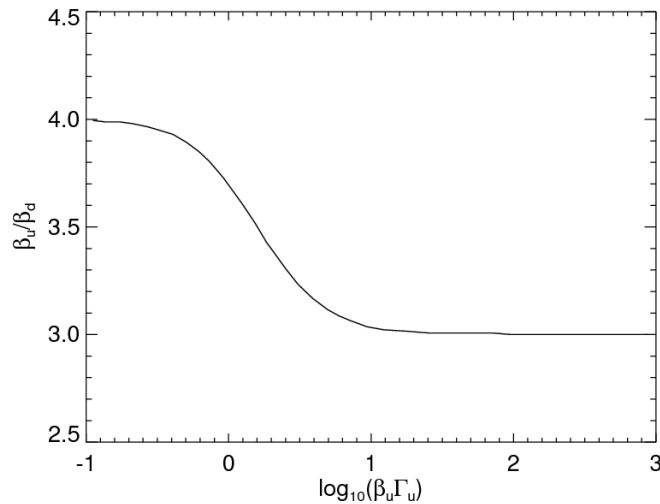
$$\Gamma_d^2 = \frac{\bar{e}_d^2 - 1}{\bar{e}_d^2 - \bar{p}_d^2 - 1} \quad (7.22)$$

où  $\bar{e}_d$  et  $\bar{p}_d$  sont la densité d'énergie et la pression normalisées,

$$\bar{e}_d \equiv \frac{e_d}{n_d m c^2} = G(\xi) - \frac{1}{\xi}, \quad (7.23)$$

$$\bar{p}_d \equiv \frac{p_d}{n_d m c^2} = \frac{1}{\xi}. \quad (7.24)$$

avec  $\xi$  le rapport entre énergie de masse et température *downstream*,  $\xi \equiv m c^2 / T_d$ . Le rapport entre les vitesses *upstream* et *downstream*  $\beta_u / \beta_d$  résultant des équations (7.23) et (7.24) est représenté à la Fig. 7.2 en fonction de  $\beta_u \Gamma_u$ . Comme  $\beta_u = \beta_{\text{choc}}$ , on obtient  $\beta_d$  à l'aide de la courbe Fig. 7.2 pour un choc de vitesse dans le référentiel *upstream*  $\Gamma_u = \Gamma_{\text{choc}}$ .



**FIG. 7.2** – Rapport des vitesses *upstream* et *downstream* en fonction de la vitesse du front de choc, dans l'hypothèse d'un plasma froid obéissant à l'équation de Synge (1957).

### 7.3 Les processus de perte d'énergie sur le fond de rayonnement gamma

Une description détaillée des interactions ferait appel à des concepts de physique nucléaire complexes que je n'ai pas eu à étudier dans le cadre de mon travail de thèse ; j'ai donc seulement décrit ici comment ces interactions modifient le spectre et la composition du rayonnement cosmique.

Les pertes d'énergie sont principalement dues aux interactions avec les fonds de rayonnement. Les nucléons ne vont pas interagir de la même façon que les noyaux car pour ces derniers des processus de photodésintégration entrent en jeu.

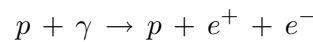
#### Interactions des nucléons

Les processus de perte d'énergie pour les nucléons sont :

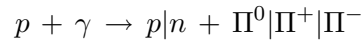
- les pertes dues à l'expansion du milieu :

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = t_{\text{exp}}^{-1} = \frac{\Gamma c}{r}$$

- lorsque les photons dépassent  $\sim 1$  MeV dans le référentiel du proton, le seuil de photoproduction de paires est atteint :



- la production de pions et mésons a lieu pour des photons d'énergie supérieure à 150 MeV :



La production de paires est un processus faiblement inélastique (de ce fait on le traite de façon continue comme les pertes par expansion) comme le montre la Fig. 7.3 à l'inverse de la production de pions dont l'inélasticité moyenne varie de 20 à 50% (selon l'énergie des photons). Ce dernier est donc traité de façon stochastique dans le Monte-Carlo. Notons que ces deux processus permettent de produire des paires, des photons ainsi que des neutrinos. Ils seront donc importants pour la production de "messagers secondaires" lors de l'accélération.

#### Interactions des noyaux

Pour un noyau d'énergie  $\gamma Mc^2$ , on peut considérer deux types de processus : ceux qui vont diminuer son facteur de Lorentz, et donc le ralentir, et ceux qui vont lui faire perdre de la masse. Les premiers sont, comme nous l'avons vu pour les nucléons, la production de paires ainsi que les pertes adiabatiques dues à l'expansion du milieu. Les seconds sont spécifiques aux noyaux, qui, contrairement aux nucléons, peuvent se photodésintégrer.

- la résonance dipolaire géante (GDR) est le processus possédant le seuil en énergie le plus bas et la section efficace la plus importante. On parle de résonance dipolaire car les protons et neutrons vibrent en opposition de phase, et géante car elle se fait à l'échelle du noyau entier. La désexcitation conduit à l'émission d'un ou plusieurs nucléons, le plus souvent un neutron, mais le noyau

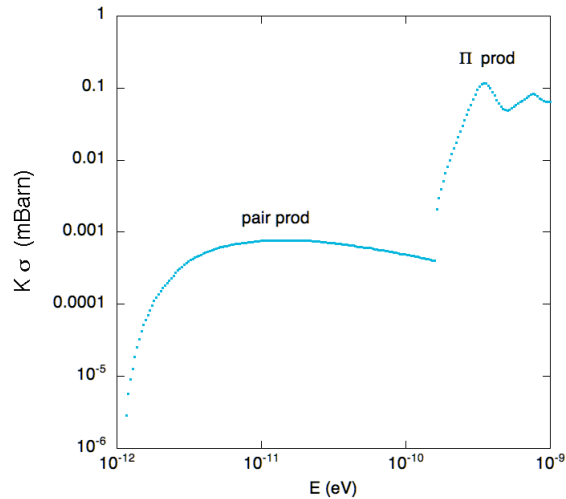


FIG. 7.3 – Produit de l'inélasticité par la section efficace d'interaction pour les protons (Rachen 1996).

peut également perdre 1 proton, 1 proton et 1 neutron, 2 neutrons, une particule alpha... Le seuil en énergie est d'environ 10 MeV pour la majorité des noyaux dans leurs référentiels propres.

- le processus quasi-deutéron (QD), où le photon incident interagit avec une paire de nucléons du noyau et crée un pion virtuel, ce qui conduit à l'éjection de la paire, et parfois même d'autres nucléons lorsque le noyau résiduel se désexcite. On a  $30 \text{ MeV} < E_\gamma < 145 \text{ MeV}$  dans le référentiel du noyau.
- la photoproduction de pions (BR, pour Baryonic Resonance, similaire au processus QD sauf que cette fois-ci, le pion créé est réel) pour un noyau d'énergie supérieure à  $\sim 145 \text{ MeV}$  dans le référentiel du noyau. Ce processus de haute énergie est plus inélastique que les précédents. Un noyau de fer perdra par exemple en moyenne 4 nucléons par interaction.
- Enfin, on prend également en compte la désintégration  $\beta$ .

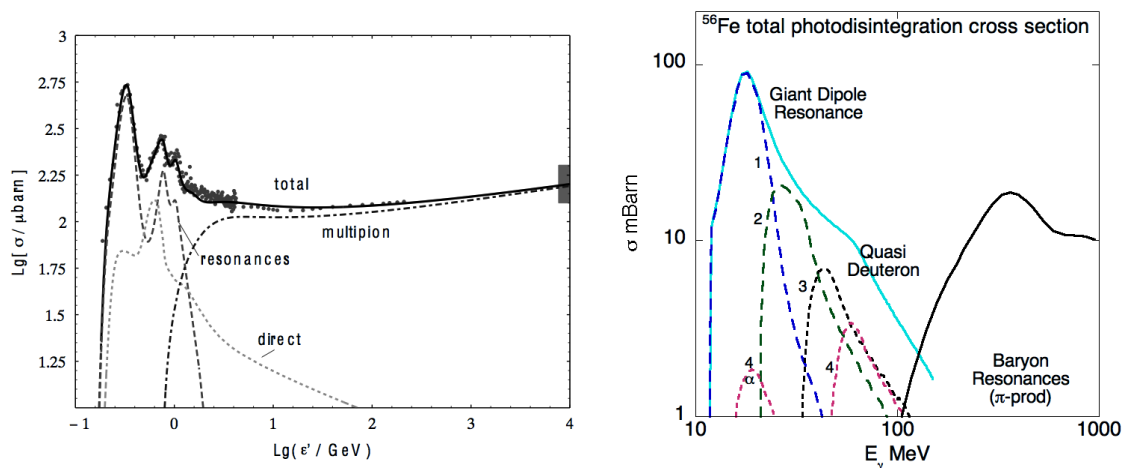


FIG. 7.4 – A gauche : section efficace de photoproduction de mésons pour les protons. La contribution des différents canaux est montrée (Rachen 1996). A droite : section efficace de photodissociation pour un noyau de Fer entre 10 MeV et 1 GeV. La contribution des processus GDR, BR et QD est montrée (Allard 2011)

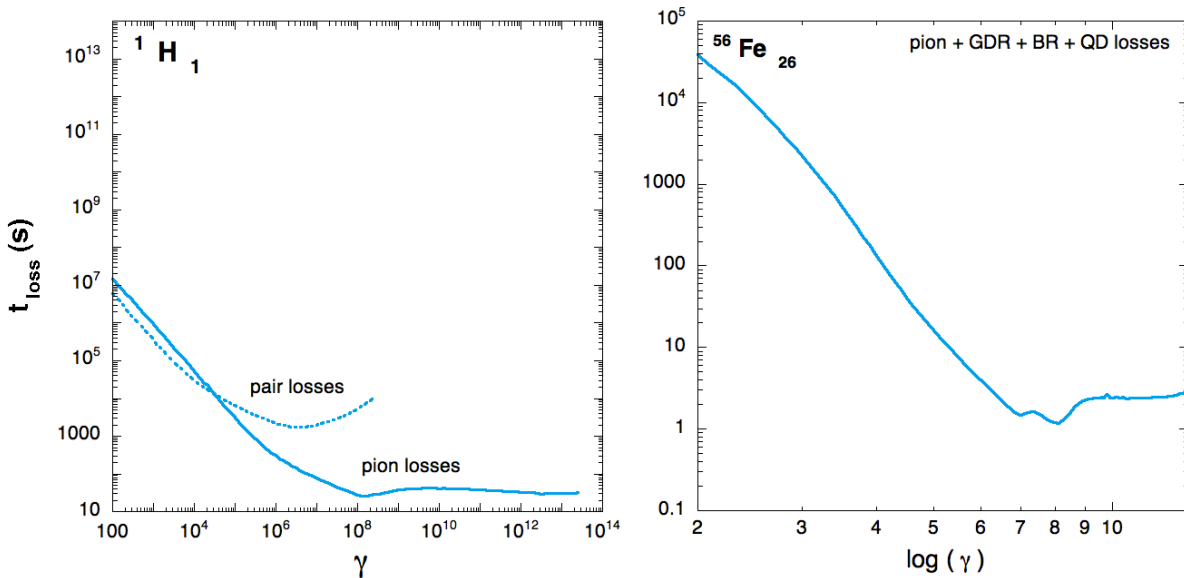
Ces processus changent la nature du noyau sans modifier notablement son facteur de Lorentz.

Ayant calculé au chapitre précédent le fond de rayonnement avec lequel les rayons cosmiques peuvent interagir, on peut déterminer le libre parcours moyen d'un rayon cosmique (Allard, D., mémoire de thèse 2004)

$$\lambda_{Band}^{-1} = \frac{1}{2\gamma^2} \int_{E'_{seuil}/2\gamma}^{E_{max}} \frac{n(E)}{E^2} \left( \int_{E'_{seuil}}^{2\gamma E} E' \sigma(E') dE' \right) dE \quad (7.25)$$

$n(E)$  est le fond de photons dans le référentiel de la couche;  $E_{max}$  est l'énergie maximale des photons du fond.  $E'_{seuil}$  est l'énergie que doivent atteindre les photons du fond pour interagir avec les particules;  $\sigma(E')$  est la section efficace d'interaction mesurée en laboratoire, un exemple est donné Fig. 7.4. Les quantités primées sont mesurées dans le référentiel de la particule; les quantités non primées dans le référentiel du fluide.

La longueur de perte s'obtient de la même façon en multipliant, dans l'Eq. (7.25), la section efficace d'interaction par l'inélasticité. On présente Fig. 7.5 le temps de perte d'énergie total par photointeraction des protons et des noyaux. La décroissance initiale du temps de perte est due au recouvrement croissant entre la SED transformée dans le référentiel du proton/noyau et la section efficace de photointeraction présentée Fig. 7.4. On peut voir que dans le cas des noyaux lourds, aux grands facteurs de Lorentz, et pour le choc que nous avons choisi (choc 1 de Tab. 6.1), le temps de perte est extrêmement court, de l'ordre de la seconde. Ce sont ces temps de perte comparés aux temps d'accélération qui vont déterminer l'énergie maximale à laquelle des particules peuvent être accélérées dans un choc particulier.



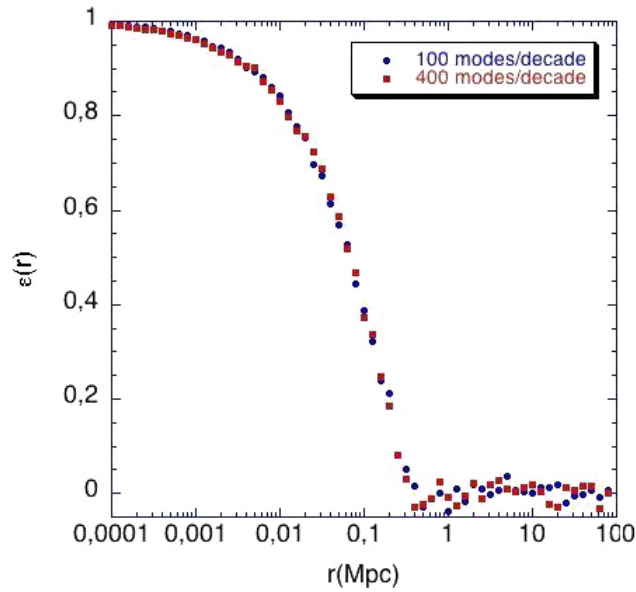
**FIG. 7.5** – Temps de perte d'énergie par photointeraction pour les protons (à gauche) et les noyaux (à droite).

Notons que nous prenons également en compte dans nos calculs les pertes d'énergie par interaction hadronique (proton-proton et proton-noyau) ainsi que les pertes d'énergie par effet synchrotron des protons et noyaux.

### 7.3.1 Mise en œuvre numérique

On peut assimiler le champ magnétique à un fluide puisque les lignes de champ sont continues, mobiles et déformables. On utilise l'algorithme de Giacalone et Jokipii (1999) pour modéliser le champ magnétique comme une somme discrète de modes de Fourier, chaque mode représentant une échelle de turbulence. La limite supérieure pour la longueur de cohérence du champ est fixée à l'épaisseur de la couche. Pour la variance du champ on prend la valeur d'équipartition calculée pour chaque choc qui équivaut à l'intensité pour un champ purement turbulent (sans champ moyen). La Fig. 7.6 montre l'évolution de l'auto-corrélation  $\epsilon$  du champ, *i.e.* la valeur moyenne du cosinus de l'angle entre deux vecteurs  $\vec{B}$  séparés par une distance  $\vec{r}$  :

$$\epsilon(\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|) = \left\langle \frac{\vec{B}(\vec{r}_1) \cdot \vec{B}(\vec{r}_2)}{\|\vec{B}(\vec{r}_1)\| \cdot \|\vec{B}(\vec{r}_2)\|} \right\rangle$$



**FIG. 7.6** – Evolution de l'auto-corrélation du champ magnétique en fonction de l'échelle considérée. Dans le cadre de cet exemple, on a utilisé un champ turbulent de variance 1 nG et de longueur d'onde maximale 1 Mpc. Les modes sont équirépartis en logarithme sur 5 ordres de grandeur en longueur d'onde.

On considère un champ magnétique de la forme,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  sont des vecteurs unitaires :

$$\vec{B}(x, y, z) = B_0 \vec{z} + \delta \vec{B}(x, y, z) \quad (7.26)$$

En suivant Giacalone et Jokipii (1999) on exprime la composante aléatoire sous la forme :

$$\delta \vec{B}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{N_m} A(k_n) \vec{\xi}_n \exp(ik_n z'_n + i\beta_n) \quad (7.27)$$

avec

$$\vec{\xi}_n = \cos \alpha_n \vec{x}'_n + i \sin \alpha_n \vec{y}'_n \quad (7.28)$$

et

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_n \cos \Phi_n & \cos \theta_n \sin \Phi_n & -\sin \theta_n \\ -\sin \Phi_n & \cos \Phi_n & 0 \\ \sin \theta_n \cos \Phi_n & \sin \theta_n \sin \Phi_n & \cos \theta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7.29)$$



$A(k_n)$  représente l'amplitude de l'onde du mode  $n$  associé au nombre d'onde  $k_n$ , la polarisation  $\alpha_n$  et la phase  $\beta_n$ . La direction de propagation de chacun des modes est définie par les angles  $\theta_n$  et  $\Phi_n$ . Le spectre de puissance est celui de Kolmogorov pour lequel on obtient :

$$A^2(k_n) = \sigma^2 G(k_n) \left[ \sum_{n=1}^{N_m} G(k_n) \right]^{-1} \quad (7.30)$$

où

$$G(k_n) = \frac{\Delta V_n}{1 + (k_n L_c)^\gamma} \quad (7.31)$$

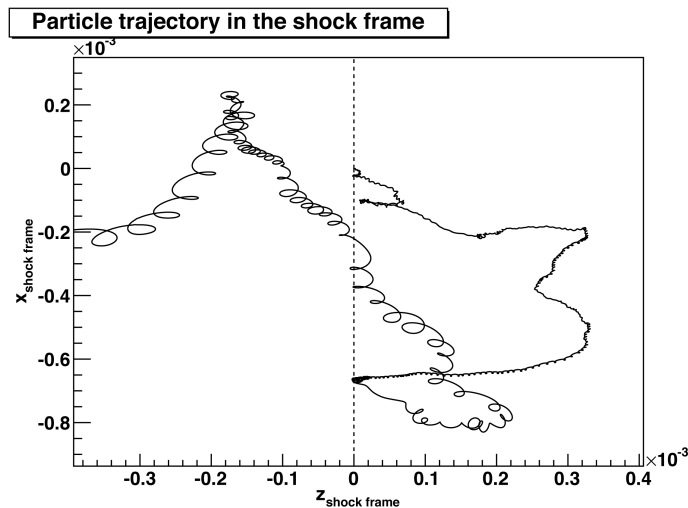
$\sigma^2$  est la variance de l'onde et  $L_c$  est la longueur de corrélation.  $\Delta V$  est le facteur de normalisation dépendant de la dimension de la turbulence. Par exemple,  $\Delta V = 4\pi k_n^2 \Delta k_n$  pour une turbulence 3D. De même pour l'index spectral  $\gamma = 11/3$ .  $\Delta k_n$  est l'espacement entre les  $k_n$ . Un espacement logarithmique en  $k_n$  est choisi si bien que le rapport  $\Delta k_n/k_n$  est constant.

La structure du champ magnétique *downstream* est obtenue à partir de celle du champ *upstream* compressé par le choc. D'après les conditions de compression du gaz, les points du plasma *downstream* de coordonnées  $(x_d, y, z)$  étaient aux coordonnées  $(x_u = r x_d, y, z)$  dans le référentiel de repos *upstream* avant le passage du choc.

Le facteur de compression est  $r = R\gamma_u/\gamma_d$  où  $R$  est le rapport de compression du choc dans le référentiel de repos du choc et  $\gamma_i = 1/(1 - u_i^2)^{1/2}$  ( $i = u, d$ ). Les composantes du champ *downstream* aux coordonnées  $(x_d, y, z)$  sont déduites à partir de la compression des composantes tangentielles du champ magnétique non-choqué aux coordonnées  $(x_u, y, z)$  par le facteur  $r$ . La composante du champ parallèle à la normale au choc demeure inchangée, mais les composantes perpendiculaires sont amplifiées du facteur  $r$ . La longueur de cohérence du champ dans la direction de la normale au choc est divisé d'un facteur  $r$ ; cf. Eq. (2) dans Lemoine et Revenu (2006).

Le code que nous avons mis au point pour modéliser l'accélération dans des chocs relativistes, inspiré des travaux de Niemiec et Ostrowski (2004), fonctionne de la façon suivante.  $N(=100$ , le plus souvent) particules d'énergie  $E_0$  sont distribuées isotropiquement en amont du choc dans le référentiel *upstream*. Nous leur affublons un poids proportionnel à leur angle d'incidence au choc dans le référentiel propre de ce dernier pour tenir compte du facteur de flux. La trajectoire de chaque particule est ensuite simulée numériquement en utilisant une méthode de Runge-Kutta à pas adaptatif (fifth order Runge-Kutta). La simulation commence lorsque la particule entre pour la première fois dans le référentiel *downstream*, sa trajectoire dans le champ magnétique compressé (déduit du champ magnétique *upstream* en utilisant les conditions de saut, voir ci-dessus) est intégrée jusqu'à ce que la particule revienne au choc ou jusqu'à ce que la condition numérique pour considérer l'accélération terminée soit remplie (c'est à dire un temps au-delà duquel on considère que la particule ne reviendra pas au choc). Un exemple de trajectoire est montré Fig. 7.7. Après avoir calculé les trajectoires pour ce premier 1/2 cycle pour chacune des  $N$  particules, nous comptons le nombre de particules qui sont effectivement revenues au choc. Les particules sorties sont enregistrées avec leur énergie, leur temps d'accélération et leur poids que nous divisons par  $\cos(\theta_{\text{choc}})$  (angle d'incidence lors du dernier passage au choc dans le référentiel du choc) pour prendre en compte le fait que nous sommes intéressés par la densité des particules accélérées et non par leur flux. Les particules qui sont revenues au choc continuent leur trajectoire mais maintenant dans le référentiel *upstream*. Toutes les quantités utiles (coordonnées spatiales et de vitesse, temps d'accélération et énergie) sont

transformées dans le référentiel *upstream*. Afin de garder le nombre de particules simulées constant lors de chaque cycle, les particules revenant au choc sont répliquées pour compenser les particules sorties lors du demi-cycle précédent. Nous perturbons seulement légèrement la position de la particule d'une fraction de la plus petite échelle de turbulence utilisée afin que la particule ne soit pas strictement identique à sa particule mère (sans quoi elle aurait exactement le même comportement sur les cycles suivants) tout en conservant une corrélation avec l'"histoire" de la particule mère. Le poids de la particule mère est divisé par le nombre de fois où celle-ci a été répliquée, et ce même poids est donné à ses particules filles. La procédure est répétée à chaque fin de demi-cycle (l'échappement *upstream* étant néanmoins négligeable). Cette méthode de séparation introduite notamment par Niemiec et Ostrowski (2004) permet d'obtenir une statistique raisonnable pour les particules quel que soit le nombre de cycles effectués sans pour autant en simuler des millions. La simulation s'arrête lorsqu'on a atteint un nombre de cycles qui peut être arbitrairement fixé, ou bien lorsque l'ensemble des particules sortent lors d'un cycle *downstream* (ce qui peut facilement arriver, notamment pour de très grands facteurs de Lorentz de la particule, pour lesquels nous avons vérifié que l'accélération de Fermi, en tout cas dans le cadre de nos hypothèses sur la turbulence au choc, était inefficace). Nous répétons cette procédure pour un grand nombre de lots de  $N$  particules.



**FIG. 7.7** – Trajectoire d'une particule dans le référentiel du choc. La particule a initialement une énergie  $10^{-6}$  EeV. La particule passe 18 fois au choc, c'est à dire qu'elle accomplit 9 cycles avant de s'échapper *downstream*. Son énergie finale est  $6.75 \cdot 10^{-5}$  EeV, soit un gain d'énergie d'un facteur  $\sim 70$ .

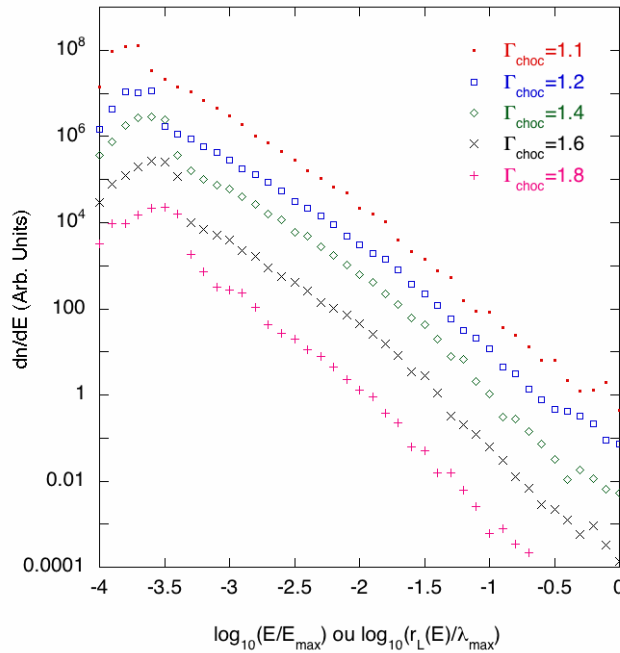
Pour les premiers résultats que nous montrons par la suite, nous considérons des champs magnétiques purement turbulents. Niemiec et Ostrowski (2004) ont montré qu'une composante régulière et son inclinaison par rapport au choc ont une influence notable sur les spectres des particules accélérées obtenues. L'ajout de tels champs ne pose pas de difficulté technique majeure. Nous testerons donc leur influence. De même, les premiers spectres que nous allons présenter n'incluent pas les différents mécanismes de perte d'énergie. Pour avoir une estimation de l'énergie maximale d'accélération, nous comparerons les temps d'accélération aux temps de perte d'énergie présentés dans les paragraphes précédents. Nous souhaitons néanmoins disposer d'un code numérique Monte-Carlo complet prenant en compte les processus de perte d'énergie (et la production associée de neutrinos et photons secondaires associés) durant le processus d'accélération. L'implémentation de ce Monte-Carlo sera faite dans un futur proche, là encore, elle ne présente pas de problèmes conceptuels majeurs.

## 7.4 Résultats préliminaires obtenus

Nous avons réalisé des simulations de la propagation de rayons cosmiques pour différents facteurs de Lorentz du choc en ne considérant que le processus d'accélération, et n'incluant pas pour l'instant les pertes d'énergie. Le spectre de turbulence est de type Kolmogorov (bien qu'il soit possible de choisir un indice spectral arbitraire pour la turbulence).

### Spectre en énergie obtenu a la sortie downstream

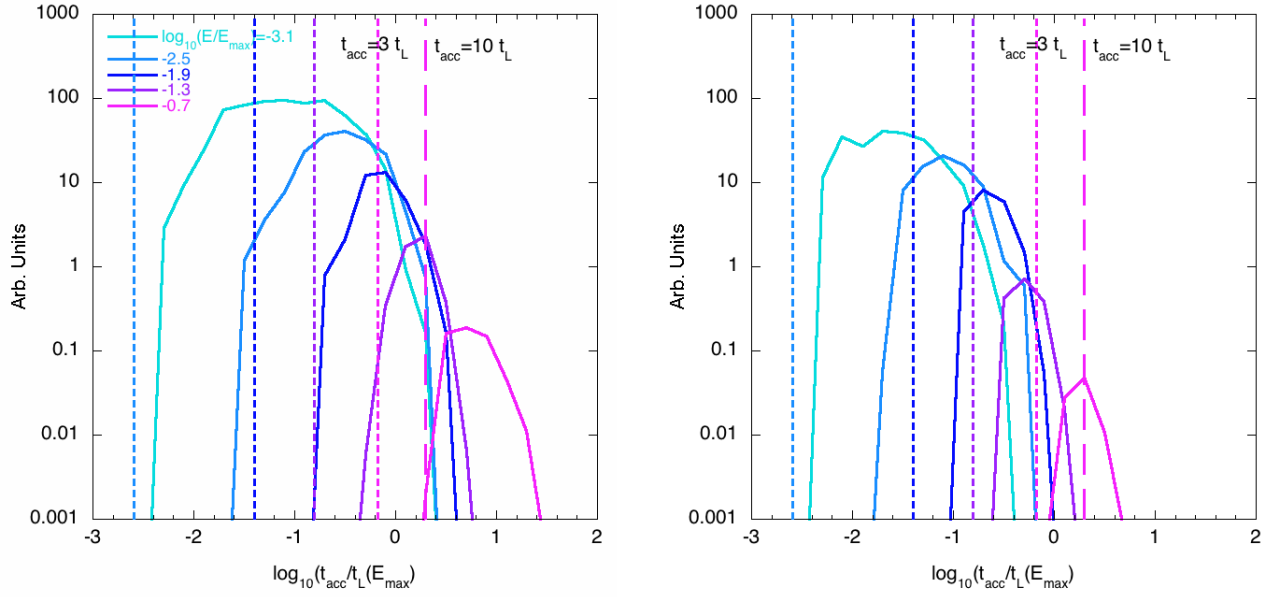
La Fig. 7.8 présente 5 spectres pour 5 chocs de facteur de Lorentz différents compris entre 1.1 et 1.8. Nous interprétons l'excroissance initiale observée pour tous les spectres (d'autant plus ample que le facteur de Lorentz est élevé) comme étant due au statut particulier du premier cycle par rapport au gain d'énergie. Les spectres ne sont pas dimensionnés en énergie, seul est utilisé le rapport entre l'énergie de la particule et l'énergie maximale. Cette dernière est définie comme étant l'énergie pour laquelle le rayon de Larmor est égal à l'échelle maximale de turbulence. On peut passer de cette grandeur adimensionnée à une énergie physique en spécifiant la valeur du champ magnétique et celle de l'échelle de turbulence la plus grande. Les pentes obtenues ont des valeurs comprises entre 2.20 et 2.35. On n'obtient pas une loi de puissance exacte (on observe une légère concavité, déjà remarquée par Niemiec et Ostrowski (2004))



**FIG. 7.8** – Spectres en énergie obtenus à la sortie pour 5 chocs de facteur de Lorentz compris entre 1.1 et 1.8.

### Distribution de temps d'accélération.

La Fig. ?? présente la distribution des temps d'accélération pour 2 des spectres obtenus précédemment (Fig. 7.8). On remarque que les temps d'accélération sont globalement plus courts dans le cas du choc le plus rapide. Comme dans la figure précédente, l'énergie est adimensionnée (de même



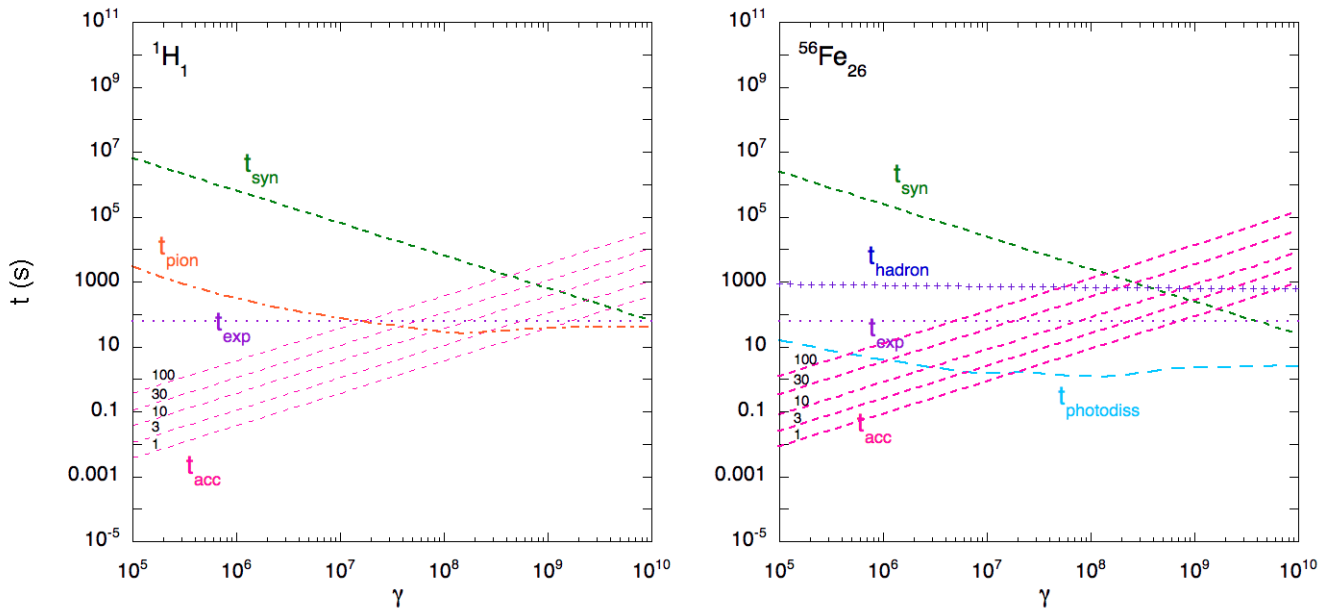
**FIG. 7.9** – Distribution de temps d’accélération pour différents bins d’énergie pour des chocs de deux facteurs de Lorentz  $\Gamma_{\text{choc}} = 1.1$  (à gauche) et  $\Gamma_{\text{choc}} = 1.6$  (à droite). Les lignes pointillées et tiretées figurent  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$ , pour  $\kappa_0 = 3$  et  $\kappa_0 = 10$ .

le temps d’accélération est rapporté au temps de Larmor à  $E = E_{\text{max}}$ ). Pour chaque bin d’énergie, le temps d’accélération attendu dans le cadre de l’hypothèse de la diffusion de Bohm,  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$  (avec  $\kappa_0 = 3$  ou  $10$ ) est également montrée. On remarque que l’hypothèse de  $\kappa_0$  inférieur à  $10$ , souvent faite dans les calculs antérieurs (Murase et al. (2008) et Wang et al. (2008) utilisent  $\kappa_0 = 1$  sur leur figures), est trop optimiste pour les chocs les plus faibles que nous avons simulés. Cette hypothèse devient plus acceptable pour des facteurs de Lorentz au delà de  $1.5$  (tout au moins pour  $\kappa_0 = 10$ ).

#### Comparaison du temps d’accélération et des temps de perte d’énergie

La Fig. 7.10 présente les temps de perte d’énergie pour les différents processus que nous avons évoqués, dans le cas du choc 1 (dont les paramètres physiques ont été établis au chapitre précédent, Tab. 6.1). Le temps d’expansion,  $t_{\text{exp}} = r_{\text{in}}/\Gamma c \sim 60$  s, ainsi que les pertes par rayonnement synchrotron y figurent également. On y figure aussi le temps d’accélération, calculé dans l’approximation de la diffusion de Bohm,  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$  (avec  $\kappa_0 = 1, 3, 10, 30$  et  $100$ ). Nous venons de constater dans nos calculs explicites de l’accélération au choc que cette hypothèse pour laquelle le temps d’accélération est proportionnel au temps de Larmor est optimiste pour des choix de  $\kappa_0 < 10$ . Cette approximation ne prend de plus pas en compte le fait que le temps d’accélération à une énergie donnée est représenté par une distribution qui peut s’étaler sur plus d’un ordre de grandeur. Ces constatations montrent l’intérêt de la mise au point d’un code Monte-Carlo incluant les processus de perte d’énergie directement lors du processus d’accélération que nous souhaitons faire. La Fig. 7.10 permet néanmoins de voir que pour l’exemple de choc que nous avons choisi l’énergie maximale atteignable pour les protons et les noyaux est limitée par les interactions induites par les photons du choc interne (création de pions dans le cas des protons, processus de photodissociation pour les noyaux). En prenant les temps d’accélération pour lesquels  $\kappa_0$  a une valeur comprise entre  $10$  et  $100$  (qui correspondent mieux au facteur de Lorentz du choc considéré), on peut néanmoins avoir une

estimation rapide de l'énergie maximale. Cette énergie maximale est très similaire pour les protons et les noyaux de Fer qui pour la valeur de  $\kappa_0 = 10$  (soit la limite basse du temps d'accélération pour les hautes énergies) atteint environ  $10^{17}$  eV (elle est en fait légèrement supérieure pour le Fer, de l'ordre de  $1.5 \cdot 10^{17}$  eV). Rappelons que ces énergies sont données dans le référentiel en comouvement avec le vent choqué et que dans le référentiel de l'observateur, ces énergies peuvent dépasser quelques  $10^{19}$  eV<sup>9</sup> ( $\Gamma_{\text{res}} \sim 186$ ). On constate néanmoins que l'énergie est loin d'être proportionnelle à la charge, comme l'on s'y attendrait si l'énergie maximale était limitée par le confinement des particules dans la source ou les pertes par expansion. Le cas particulier que nous avons simulé ici ne permet pas non plus d'envisager une explication aux données d'Auger discutée en début de chapitre et qui suggéreraient plutôt que l'énergie maximale des noyaux lourds est nettement supérieure à celle des protons. Notons par ailleurs que si l'énergie maximale des protons est légèrement inférieure à celle des noyaux, il n'en est pas de même de leur rigidité qui est, elle, supérieure. Cela signifie en principe que les protons aux plus hautes énergies seront favorisés lors de l'échappement de la source (Fig. 7.10) par rapport aux noyaux. Pour le moment, nous nous passerons de toute conclusion définitive sur la capacité des choc internes des sursauts gamma à accélérer des rayons cosmiques au delà de  $10^{20}$  eV. Par la suite, nous étudierons de façon plus systématique l'énergie maximale attendue, sa dépendance en composition pour différents profils de sursauts synthétiques et différentes caractéristiques physiques des chocs.



**FIG. 7.10** – Evolution du temps d'accélération  $t_{\text{acc}} = \kappa_0 t_L$  (avec  $\kappa_0$  évoluant entre 1 et 100) et des temps de perte d'énergie pour les différents processus en fonction du facteur de Lorentz pour un rayon cosmique (à gauche : proton, à droite : noyau de Fer) se propageant dans le choc 1 (Tab. 6.1).

9. Notons au passage que si nous avions fait l'hypothèse  $\kappa_0 = 1$ , qui apparaît totalement irréaliste d'après nos résultats du paragraphe précédent, nous pourrions très facilement prédire des valeurs de l'énergie maximale au-delà de  $10^{20}$  eV dans le référentiel de l'observateur.

## 7.5 Perspectives

Le spectre des particules sortantes donné Fig. 7.8 est le spectre des particules s'échappant *downstream*. Comme nous l'avons brièvement évoqué lors du paragraphe précédent, ces particules se trouvent encore dans le jet et il nous faut maintenant insérer dans le code un test nous permettant de savoir si la particule peut sortir du jet en comparant à chaque pas de temps la position de la particule et la position des bords du jet. L'échappement du jet des particules accélérée devrait dépendre de leur énergie et de leur charge, le processus d'échappement est donc susceptible de changer la composition et la forme du spectre par rapport à celui des particules accélérées (en principe en le durcissant, le particules s'échappant d'autant mieux que leur rigidité est élevée). Cette modélisation sera rajoutée prochainement, mais nous pouvons déjà présenter brièvement le problème de l'échappement.

Le jet relativiste est modélisé comme une succession d'ondes de choc, ces chocs peuvent être à l'origine des nodules observés dans les jets d'AGN mais aussi de l'émission de rayonnement de haute énergie, comme nous l'avons étudié au chapitre précédent dans le contexte des sursauts gamma. Ces ondes de choc sont des sites potentiels d'accélération de particules, mais pour que les particules nous parviennent une fois accélérées, il faut qu'elles puissent se découpler du milieu choqué et donc sortir du jet. Nous faisons l'hypothèse que la géométrie du jet est déterminée par son facteur de Lorentz, en supposant que l'angle d'ouverture  $\theta$  est égale à l'inverse du facteur de Lorentz (au-delà de cette valeur pour l'angle  $\theta$ , la stabilité du jet sur de grandes distances semble compromise comme nous l'avons vu à la section 5.2.1. Le temps d'expansion dans le référentiel comobile ( $t_{\text{exp}} = 1/\Gamma_{\text{res}}c$ ) est aussi le temps que met la couche rapide à balayer une masse équivalente à la sienne. Nous prenons donc  $\Gamma_{\text{res}}$  comme valeur du facteur de Lorentz et la couche aura donc une largeur et une épaisseur  $\Delta'$  dans le référentiel comobile de l'ordre de  $r/\Gamma_{\text{res}}$  (pour un observateur extérieur, la couche a donc une épaisseur  $r/\Gamma_{\text{res}}^2$  et une largeur  $r/\Gamma_{\text{res}}$ ).

Le choc a lieu pour  $r = r_{\text{in}}$  pour  $t_0 = 0$ . A  $t + \delta t$ , on a :

$$r = r_{\text{in}} + \beta_{\text{res}}c\delta t \quad (7.32)$$

d'où :

$$\Delta'_{t_0+\delta t} = \frac{r_{\text{in}} + \beta_{\text{res}}c\delta t}{\Gamma_{\text{res}}} \quad (7.33)$$

Nous pouvons donc définir le facteur d'expansion  $a(t)$  de la façon suivante :

$$a(t) \equiv \frac{\Delta'_{t_0+\delta t}}{\Delta'_{t_0}} = 1 + \frac{\beta_{\text{res}}c\delta t\Gamma_{\text{res}}}{r_{\text{in}}} \quad (7.34)$$

Notons qu'il est beaucoup plus facile de s'échapper d'un jet cylindrique que d'un jet conique. On considérera différentes vitesses d'expansion ainsi qu'une géométrie cylindrique.

Comme nous l'avons également discuté brièvement lors des paragraphes précédents, nous allons à terme inclure les processus de perte d'énergie à l'accélération dans un Monte-Carlo et mettre au point un code plus complet que ce que nous avons réalisé jusqu'à présent. Les pertes d'énergie affectant différemment les particules accélérées rapidement que celles ayant mis plus de temps à accomplir leurs cycles de Fermi, on s'attend à ce que les pertes d'énergie affectent également la forme du spectre par rapport à ce que nous avons montré sur la Fig. 7.8 (en les rendant certainement

plus raides ou plus mous), ce qui est important pour estimer la contribution des sursauts gamma au rayonnement cosmique ultra-énergétique. Par ailleurs, dans l'exemple que nous avons étudié, nous avons montré que l'on s'attend à ce que l'énergie maximale soit limitée pour les protons et les noyaux par les processus de photointeraction. De ce fait, on s'attend à ce que des neutrinos et des particules électromagnétiques de très haute énergie soient émises lorsque les protons et les noyaux atteignent leur énergie maximale. Nous considérerons également la production de ces particules secondaires dans nos calculs. Nous chercherons, en outre, à savoir si le rôle prépondérant des processus de photointeraction dans leur limitation à l'accélération des particules peut être généralisé à la majorité des sursauts gamma et pas seulement à l'exemple que nous avons montré lors du paragraphe précédent. Notons pour finir qu'un processus d'échappement long est susceptible d'augmenter la production de ces particules secondaires. Les particules accélérées sans avoir interagi (c'est-à-dire l'immense majorité des particules qui sont advectées downstream et ne reviennent pas au choc) devraient néanmoins continuer à baigner dans le fond de photons produits dans les chocs internes, jusqu'à leur échappement ou leur refroidissement adiabatique, et sont donc susceptibles de produire également des messagers secondaires durant cette phase.

## Conclusion

*My process is thinking... thinking... and thinking. If you have a better way, please let me know.*

H. Miyazaki

Cette thèse s'intéresse aux phénomènes de haute énergie associés aux trous noirs. Une petite digression est faite au chapitre 4 qui concerne les jets issus d'étoiles jeunes. Cependant, outre le fait qu'elle nous a permis de valider le modèle (on retrouve les solutions de l'approximation newtonienne) cette étude nous a permis d'aborder le concept de freinage magnétique dans les jets. Les autres chapitres sont consacrés à l'étude des jets relativistes. Nous sommes donc partis de la région proche de l'horizon du trou noir avec, au chapitre 2, la présentation de la métrique de Kerr décrivant le champ gravitationnel et les équations de la MHD idéale décrivant l'écoulement. La combinaison de ces deux outils permet la modélisation de jets relativistes sous la forme de solutions semi-analytiques, obtenues en résolvant les équations de la MHD idéale, en relativité générale et en géométrie de Kerr. Le chapitre 3 présente le modèle autosimilaire méridien qui généralise les modèles précédents (Sauty et Tsinganos 1994, Meliani et al. 2006) aux jets relativistes issus de trous noirs en rotation. Une fois le modèle développé, je me suis intéressée aux aspects suivants, développés au chapitre 5. D'une part, la possibilité d'extraire de l'énergie du trou noir en rotation, et donc d'obtenir des solutions qui commencent dans la zone où il est possible d'extraire de l'énergie sous forme de flux de Poynting. D'autre part, la généralisation du critère de collimation permet de comprendre de façon qualitative le rôle de la rotation du trou noir pour la collimation magnétique. Une étude systématique sera réalisée afin de déterminer la nature exacte de ce processus et la quantité d'énergie mise en jeu dans la collimation. Enfin, une solution a été calculée dans le but de décrire la partie centrale du jet de M87 (le modèle n'étant valable que pour des petits angles). Ces solutions semi-analytiques pourront être couplées à des solutions de vent de disque afin d'étudier la structure à deux composantes des jets relativistes. Nous avons donc étudiés dans ces chapitres la structure globale du jet. Les deux derniers chapitres explorent une problématique importante liée aux jets relativistes qui est l'accélération de rayons cosmiques aux très hautes énergies. Ce problème nécessite une description locale et nous nous sommes intéressés à la modélisation d'une onde de choc dans le jet (chapitre 6) puis à la propagation de rayons cosmiques dans cette onde de choc relativiste (chapitre 7), ainsi qu'aux différents processus de gain et de perte d'énergie subis par les particules au cours de leur propagation. Si les processus de gain d'énergie sont suffisamment compétitifs, les rayons cosmiques ultra-énergétiques pourraient être les messagers des jets relativistes issus des trous noirs. Dans le cas



des sursauts gamma, qui sont des sources brèves et vraisemblablement collimatées, la question du transport des rayons cosmiques de la source à la Terre est loin d'être triviale en présence d'un champ magnétique extragalactique. Nous étudierons également cet aspect du problème qui représente une extension relativement simple d'un travail déjà publié (Globus et al. 2008) sur la propagation des rayons cosmiques ultra-énergétiques dans les champs magnétiques extragalactiques.

## Passage des équations tensorielles aux équations vectorielles en formalisme 3+1

*Un traitement général des équations GRMHD pour une métrique axisymétrique et stationnaire a été récemment publié par Gourgoulhon et al. (2011).*

### A.1 Les équations tensorielles

Le système d'équations de la MHD en relativité générale s'écrit,

$$\text{conservation du nombre de particules} \quad \nabla_{\alpha}(nu^{\alpha}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$\text{équation de la dynamique} \quad \nabla_{\nu}(T_{mat}^{\mu\nu} + T_{e.m.}^{\mu\nu}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\text{équations de Maxwell} \quad \nabla_{\nu}F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\mu} \quad ; \quad \nabla_{[\mu}F_{\nu\sigma]} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\text{loi d'Ohm avec conductivité infinie} \quad F^{\alpha\beta}u_{\beta} = 0 \quad (\text{A.4})$$

avec  $T_{mat}^{\mu\nu} = \frac{nw}{c^2}u^{\mu}u^{\nu} + pg^{\mu\nu}$ ,  $T_{e.m.}^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi}(F^{\mu\sigma}F_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma})$ ,  $n$  densité particulaire,  $u^{\alpha}$  4-vitesse du fluide,  $w$  enthalpie par particule,  $p$  pression. L'équation de Maxwell libre peut également s'écrire  $\nabla_{\nu}{}^*F^{\mu\nu} = 0$  où  ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}F_{\mu\nu}$ .

### A.2 Champ de vitesse

Afin de bien comprendre la décomposition 3+1, on écrit la métrique sous la forme (Arnowitt et al. 1962) :

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu} = -h^2c^2dt^2 + g_{ij}(dx^i + \beta^i cdt)(dx^j + \beta^j cdt) \quad (\text{A.5})$$

Pour un tel système de coordonnées, la métrique est asymptotiquement plate, ce système est donc associé à des observateurs inertiels situés à l'infini.

Si on considère maintenant un observateur local qui n'observe aucun effet gravitationnel et mesure le temps à l'aide d'une horloge locale, son élément de ligne est donné par :

$$ds^2 = -c^2\hat{d}t^2 + g_{ij}\hat{d}x^i\hat{d}x^j \quad (\text{A.6})$$

On a donc les relations suivantes entre nos coordonnées et celles de l'observateur local :

$$\hat{d}t = h dt \quad (\text{A.7})$$

$$\hat{d}x^i = dx^i + \beta^i c dt \quad (\text{A.8})$$

Les composantes contravariantes d'un champ de tenseurs se transforment donc de la façon suivante :

$$\hat{U}^t = h U^t \quad (\text{A.9})$$

$$\hat{U}^i = U^i + \beta^i U^t \quad (\text{A.10})$$

Les composantes covariantes de la façon suivante :

$$\hat{U}_t = \frac{1}{h} (U_t - \beta^i U_i) \quad (\text{A.11})$$

$$\hat{U}_i = U_i \quad (\text{A.12})$$

On cherche maintenant à lier la quadrivitesse  $u^\alpha$  d'une particule de fluide et sa vitesse  $\vec{v}$  mesurée par le ZAMO, qui est l'observateur local défini pour la métrique de Kerr ( $\beta^1 = \beta^2 = 0$  et  $\beta^3 = -\frac{\omega}{c}$ ) :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -h^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varpi^2 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{c} \varpi^2 \\ 0 & h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2^2 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} \varpi^2 & 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \varpi^2 & 0 & 0 & -\frac{\omega}{c} \varpi^2 \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{\omega}{c} \varpi^2 & 0 & 0 & \varpi^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & -\frac{\omega}{ch^2} \\ 0 & \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ -\frac{\omega}{ch^2} & 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} - \frac{\omega^2}{c^2 h^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{h^2} & 0 & 0 & -\frac{\omega}{ch^2} \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{\omega}{ch^2} & 0 & 0 & \frac{1}{\varpi^2} - \frac{\omega^2}{c^2 h^2} \end{pmatrix}$$

et  $g_{ij}$  est la métrique du 3-espace associé au ZAMO :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3^2 \end{pmatrix}$$

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h_3^2} \end{pmatrix}$$

On rappelle que pour la métrique de Kerr,  $h_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}}$ ,  $h_2 = \rho$  et  $h_3 \equiv \varpi = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta$ .

Par définition,  $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$  est la 4-vitesse de la particule. On a donc :

$$c^2 d\tau^2 = c^2 \hat{d}t^2 - g_{ij} \hat{d}x^i \hat{d}x^j \quad (\text{A.13})$$

$$\Leftrightarrow c^2 d\tau^2 = c^2 \hat{d}t^2 \left( 1 - \frac{g_{ij} \hat{d}x^i \hat{d}x^j}{c^2 \hat{d}t^2} \right) \quad (\text{A.14})$$

$$\Leftrightarrow \frac{d\tau}{\hat{d}t} = \sqrt{1 - \frac{g_{ij} \hat{d}x^i \hat{d}x^j}{c^2 \hat{d}t^2}} \quad (\text{A.15})$$

Par définition  $v^i = \frac{\hat{d}x^i}{\hat{d}t}$  est la vitesse mesurée par le ZAMO, d'où :

$$\frac{d\tau}{\hat{d}t} = \sqrt{1 - \frac{v^i v_i}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}, \quad (\text{A.16})$$

où  $\gamma$  est le facteur de Lorentz entre le ZAMO et l'observateur comobile avec la particule.

Dans les coordonnées de Boyer-Lindquist,  $x^a = (ct, r, \theta, \varphi)$ , la relation entre la quadrivitesse mesurée par un observateur comobile et celle mesurée par le ZAMO est donc :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \gamma \frac{dx^\alpha}{\hat{d}t} = \gamma \left( \frac{cdt}{\hat{d}t}, \frac{\hat{d}x^1}{\hat{d}t}, \frac{\hat{d}x^2}{\hat{d}t}, \frac{\hat{d}x^3}{\hat{d}t} + \frac{\omega dt}{\hat{d}t} \right) = \gamma \left( \frac{c}{h}, \frac{v_r}{h_1}, \frac{v_\theta}{h_2}, \frac{v_\varphi}{h_3} + \frac{\omega}{h} \right) \quad (\text{A.17})$$

### A.3 Champ électromagnétique

$F^{\alpha\beta} = \frac{u^\alpha E^\beta - u^\beta E^\alpha}{c^2} + \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{u_\gamma B_\delta}{c}$  est le tenseur de Faraday, avec  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{-1}{\sqrt{-\det(g_{\mu\nu})}} [\alpha\beta\gamma\delta]$

On définit aussi :  $\hat{q} = \frac{-u^\alpha J_\alpha}{c^2}$  et  $j^\alpha = J^\alpha - \hat{q}u^\alpha$  : densités de charge et de courant (vecteur  $\vec{j}$ ).

Ainsi,  $J^\alpha = \left( \frac{c}{h} \hat{q}, \frac{j_r}{h_1}, \frac{j_\theta}{h_2}, \frac{j_\varphi}{\varpi} + \hat{q} \frac{\omega}{h} \right)$ ;  $J_\alpha = \left( -hc\hat{q} - \frac{\varpi\omega j_\varphi}{c}, h_1 j_r, h_2 j_\theta, \varpi j_\varphi \right)$

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_r}{hh_1c} & \frac{E_\theta}{hh_2c} & \frac{E_\varphi}{h\varpi c} \\ \frac{-E_r}{hh_1c} & 0 & \frac{B_\varphi}{h_1h_2} & \frac{-\omega E_r}{hh_1c^2} - \frac{B_\theta}{h_1\varpi} \\ \frac{-E_\theta}{hh_2c} & \frac{-B_\varphi}{h_1h_2} & 0 & \frac{-\omega E_\theta}{hh_2c^2} + \frac{B_r}{h_2\varpi} \\ \frac{-E_\varphi}{h\varpi c} & \frac{\omega E_r}{hh_1c^2} + \frac{B_\theta}{h_1\varpi} & \frac{\omega E_\theta}{hh_2c^2} - \frac{B_r}{h_2\varpi} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Par conséquent, la loi d'Ohm (A.4) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{hc} (E_r v_r + E_\theta v_\theta + E_\varphi v_\varphi) &= 0 \\ \frac{1}{h_1} (E_r + v_\theta B_\varphi - v_\varphi B_\theta) &= 0 \\ \frac{1}{h_2} (E_\theta - v_r B_\varphi + v_\varphi B_r) &= 0 \\ \frac{1}{\varpi} (E_\varphi + v_r B_\theta - v_\theta B_r) + \frac{\omega}{hc^2} (E_r v_r + E_\theta v_\theta + E_\varphi v_\varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

soit,  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = \vec{0}$ .

Les équations (A.1-A.3) nécessitent la définition des opérateurs  $\nabla$ .

#### A.4 Les opérateurs

Dans un espace à trois dimensions, les équations de deux vecteurs  $\vec{V}$  et  $\vec{W}$  et d'un champ scalaire  $X$  dans le référentiel du ZAMO sont :

$$\left(\vec{\nabla} X\right)_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial X}{\partial x^i} \quad (\text{A.20})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \sum_i \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i} V^i \right) \quad (\text{A.21})$$

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{V}\right)_i = \sum_{j,k} \frac{h_i}{h_1 h_2 h_3} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x^j} (h_k V^k) \quad (\text{A.22})$$

$$\left(\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{W}\right)^i = V^j \nabla_j W^i = V^j \left( \partial_j W^i + \Gamma_{jk}^i W^k \right) = V^j \partial_j W^i + \Gamma_{jk}^i V^j W^k \quad (\text{A.23})$$

$$\text{avec } \Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{il} (\partial_j g_{lk} + \partial_k g_{lj} - \partial_l g_{jk}) = \frac{1}{2 h_i^2} (\partial_j g_{ik} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk})$$

En coordonnées de Boyer-Lindquist et en régime axisymétrique, nous avons,

$$\vec{\nabla} X = \begin{pmatrix} \frac{\partial_r X}{h_1} \\ \frac{\partial_\varphi X}{h_2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 \varpi} [\partial_r (h_2 \varpi V_r) + \partial_\theta (h_1 \varpi V_\theta)] \quad (\text{A.25})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_2 \varpi} \partial_\theta (\varpi V_\varphi) \\ \frac{1}{h_1 \varpi} \partial_r (\varpi V_\varphi) \\ \frac{1}{h_1 h_2} [\partial_r (h_2 V_\theta) - \partial_\theta (h_1 V_r)] \end{pmatrix} \quad (\text{A.26})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} X = \frac{V_r}{h_1} \partial_r X + \frac{V_\theta}{h_2} \partial_\theta X \quad (\text{A.27})$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{V_r}{h_1} \partial_r (W_r) + \frac{V_\theta}{h_2} \partial_\theta (W_r) + \frac{V_r W_\theta}{h_2} \partial_\theta (\ln h_1) - \frac{V_\theta W_\theta}{h_1} \partial_r (\ln h_2) - \frac{V_\varphi W_\varphi}{h_1} \partial_r (\ln \varpi) \\ \frac{V_r}{h_1} \partial_r (W_\theta) + \frac{V_\theta}{h_2} \partial_\theta (W_\theta) + \frac{V_\theta W_r}{h_1} \partial_r (\ln h_2) - \frac{V_r W_r}{h_2} \partial_\theta (\ln h_1) - \frac{V_\varphi W_\varphi}{h_2} \partial_\theta (\ln \varpi) \\ \frac{V_r}{h_1} \partial_r (W_\varphi) + \frac{V_\theta}{h_2} \partial_\theta (W_\varphi) + \frac{V_\varphi W_r}{h_1} \partial_r (\ln \varpi) + \frac{V_\varphi W_\theta}{h_2} \partial_\theta (\ln \varpi) \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

Dans l'espace-temps à quatre dimensions :

Pour un scalaire  $X$ ,  $\nabla_\alpha X = \partial_\alpha X = \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_r X \\ \partial_\theta X \\ 0 \end{pmatrix}$ ; avec un vecteur  $U^\alpha$ ,  $U^\alpha \nabla_\alpha X = U^1 \partial_r X + U^2 \partial_\theta X$

$$\nabla_\alpha U^\alpha = \left( \partial_\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\beta \right) (U^\alpha) \text{ où } \Gamma_{\beta\alpha}^\beta = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (\partial_\beta g_{\gamma\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\gamma} - \partial_\gamma g_{\beta\alpha}) = \partial_\alpha \ln (hh_1 h_2 \varpi)$$

$$\nabla_\alpha U^\alpha = \frac{1}{hh_1 h_2 \varpi} (\partial_r (hh_1 h_2 \varpi U^1) + \partial_\theta (hh_1 h_2 \varpi U^2)) \quad (\text{A.29})$$

De même si  $T^{\alpha\beta}$  est un tenseur antisymétrique,  $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \partial_\beta T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha T^{\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma}^\beta T^{\alpha\gamma} = \left( \partial_\beta + \Gamma_{\gamma\beta}^\gamma \right) T^{\alpha\beta}$  donc :

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{1}{hh_1 h_2 \varpi} (\partial_r (hh_1 h_2 \varpi T^{\alpha 1}) + \partial_\theta (hh_1 h_2 \varpi T^{\alpha 2})) \quad (\text{A.30})$$

Pour deux vecteurs  $U^\alpha$  et  $V^\alpha$ , on a  $U^\beta \nabla_\beta V^\alpha = U^\beta \partial_\beta V^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha U^\beta V^\gamma$ ,

où  $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta} (\partial_\beta g_{\delta\gamma} + \partial_\gamma g_{\beta\delta} - \partial_\delta g_{\beta\gamma})$ , d'où les développements suivants :

$$\begin{aligned} (U^\beta \nabla_\beta V^\alpha)^{\alpha=0} &= U^1 \partial_r V^0 + U^2 \partial_\theta V^0 + \left( \partial_r \ln h - \frac{\varpi^2 \omega^2}{2h^2 c^2} \partial_r \ln \omega \right) (U^1 V^0 + U^0 V^1) \\ &+ \left( \partial_\theta \ln h - \frac{\varpi^2 \omega^2}{2h^2 c^2} \partial_\theta \ln \omega \right) (U^2 V^0 + U^0 V^2) + \frac{\varpi^2 \omega}{2h^2 c} (\partial_r \ln \omega) (U^1 V^3 + U^3 V^1) \\ &+ \frac{\varpi^2 \omega}{2h^2 c} (\partial_\theta \ln \omega) (U^2 V^3 + U^3 V^2) \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} (U^\beta \nabla_\beta V^\alpha)^{\alpha=1} &= U^1 \partial_r V^1 + U^2 \partial_\theta V^1 + \left[ \frac{h^2}{h_1^2} \partial_r \ln h - \frac{\varpi^2 \omega^2}{h_1^2 c^2} (\partial_r \ln \varpi + \partial_r \ln \omega) \right] U^0 V^0 \\ &+ \frac{\varpi^2 \omega}{h_1^2 c} \left( \partial_r \ln \varpi + \frac{\partial_r \ln \omega}{2} \right) (U^0 V^3 + U^3 V^0) + (\partial_r \ln h_1) U^1 V^1 \\ &+ (\partial_\theta \ln h_1) (U^1 V^2 + U^2 V^1) - \frac{h_2^2}{h_1^2} (\partial_r \ln h_2) U^2 V^2 - \frac{\varpi^2}{h_1^2} (\partial_r \ln \varpi) U^3 V^3 \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$\begin{aligned} (U^\beta \nabla_\beta V^\alpha)^{\alpha=2} &= U^1 \partial_r V^2 + U^2 \partial_\theta V^1 + \left[ \frac{h^2}{h_2^2} \partial_\theta \ln h - \frac{\varpi^2 \omega^2}{h_2^2 c^2} (\partial_\theta \ln \varpi + \partial_\theta \ln \omega) \right] U^0 V^0 \\ &+ \frac{\varpi^2 \omega}{h_2^2 c} \left( \partial_\theta \ln \varpi + \frac{\partial_\theta \ln \omega}{2} \right) (U^0 V^3 + U^3 V^0) - \frac{h_1^2}{h_2^2} (\partial_\theta \ln h_1) U^1 V^1 \\ &+ (\partial_r \ln h_2) (U^1 V^2 + U^2 V^1) + (\partial_\theta \ln h_2) U^2 V^2 - \frac{\varpi^2}{h_2^2} (\partial_\theta \ln \varpi) U^3 V^3 \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

$$\begin{aligned}
(U^\beta \nabla_\beta V^\alpha)^{\alpha=3} &= U^1 \partial_r V^3 + U^2 \partial_\theta V^3 + \frac{\omega}{c} \left[ \partial_r \ln h - \partial_r \ln \varpi - \left( 1 + \frac{\varpi^2 \omega^2}{h^2 c^2} \right) \frac{\partial_r \ln \omega}{2} \right] (U^1 V^0 + U^0 V^1) \\
&+ \frac{\omega}{c} \left[ \partial_\theta \ln h - \partial_\theta \ln \varpi - \left( 1 + \frac{\varpi^2 \omega^2}{h^2 c^2} \right) \frac{\partial_\theta \ln \omega}{2} \right] (U^2 V^0 + U^0 V^2) \\
&+ \left( \partial_r \ln \varpi + \frac{\varpi^2 \omega^2}{2 h^2 c^2} \partial_r \ln \omega \right) (U^1 V^3 + U^3 V^1) \\
&+ \left( \partial_\theta \ln \varpi + \frac{\varpi^2 \omega^2}{2 h^2 c^2} \partial_\theta \ln \omega \right) (U^2 V^3 + U^3 V^2)
\end{aligned} \tag{A.34}$$

## A.5 Ecriture vectorielle des équations GRMHD

On applique les formules précédentes aux équations tensorielles (A.1-A.3) :

Equation de continuité :

$$\nabla_\alpha (n u^\alpha) = \frac{1}{h h_1 h_2 \varpi} \left[ \partial_r (h h_2 \varpi n \gamma v_r) + \partial_\theta (h h_1 \varpi n \gamma v_\theta) \right] = 0 \iff \vec{\nabla} \cdot (h \gamma n \vec{v}) = 0 \tag{A.35}$$

Equations de Maxwell :

$$\nabla_\beta (F^{\alpha\beta}) = \mu_0 J^\alpha = \frac{1}{h h_1 h_2 \varpi} \left[ \partial_r (h h_1 h_2 \varpi F^{\alpha 1}) + \partial_\theta (h h_1 h_2 \varpi F^{\alpha 2}) \right] \tag{A.36}$$

(et de même que pour  $\nabla_\beta (*F^{\alpha\beta}) = 0$ )

$\alpha = 0$  donne :

$$\frac{1}{h h_1 h_2 \varpi} \left[ \partial_r \left( h_2 \varpi \frac{E_r}{c} \right) + \partial_\theta \left( h_1 \varpi \frac{E_\theta}{c} \right) \right] = \frac{\mu_0}{h c} \hat{q} \iff \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\hat{q}}{\epsilon_0} \text{ et } \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{A.37}$$

$\alpha \in \{1, 2, 3\}$  donne :

$$\mu_0 \begin{pmatrix} j_r \\ j_\theta \\ j_\varphi + \hat{q} \frac{\varpi \omega}{h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{h h_2 \varpi} \partial_\theta (\varpi h B_\varphi) \\ -\frac{1}{h h_1 \varpi} \partial_r (\varpi h B_\varphi) \\ \frac{1}{h h_1 h_2} [\partial_r (h_2 h B_\theta) - \partial_\theta (h_1 h B_r)] + \frac{\omega}{c^2} \frac{1}{h h_1 h_2} [\partial_r (h_2 \varpi E_r) + \partial_\theta (h_1 \varpi E_\theta)] + \frac{\varpi}{h c^2} \left( \frac{E_r}{h_1} \partial_r \omega + \frac{E_\theta}{h_2} \partial_\theta \omega \right) \end{pmatrix} \tag{A.38}$$

ce qui donne,

$$\mu_0 h \vec{j} = \vec{\nabla} \times (h \vec{B}) + \frac{\varpi}{c^2} (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \omega) \vec{e}_\varphi \text{ et symétriquement, } \vec{\nabla} \times (h \vec{E}) - \varpi (\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \omega) \vec{e}_\varphi = \vec{0} \tag{A.39}$$

Remarque :

$\mathcal{L}_{\vec{\beta}}(\vec{V}) = \vec{\beta} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} - \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{\beta} = \frac{\varpi}{c} (\vec{V} \cdot \vec{\nabla} \omega) \vec{e}_\varphi$  ; on peut donc réécrire les deux équations précédentes,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (h \vec{B}) &= \mu_0 h \vec{j} - \frac{1}{c} \mathcal{L}_{\vec{\beta}}(\vec{E}) \\
\vec{\nabla} \times (h \vec{E}) &= c \mathcal{L}_{\vec{\beta}}(\vec{B})
\end{aligned} \tag{A.40}$$

Le terme  $\alpha = 0$  de l'équation de la dynamique donne :

$$nw\gamma^2[\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(h\gamma w) + \frac{\varpi\omega v_\varphi}{hc^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\omega)] = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (\text{A.41})$$

Les termes  $\alpha = 1, 2$  et 3 sont donc :

$$\begin{aligned} & \frac{nw\gamma^2}{c^2} \left[ \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_r + \frac{v_r v_\theta}{h_2} \partial_\theta \ln h_1 - \frac{v_\theta^2}{h_1} \partial_r \ln h_2 - \frac{v_\varphi^2}{h_1} \partial_r \ln \varpi \right) + c^2 \frac{\partial_r \ln h}{h_1} + \frac{\varpi\omega v_\varphi}{h} \frac{\partial_r \ln \omega}{h_1} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\gamma w) v_r \right] \\ & + \frac{\partial_r P}{h_1} = \hat{q} E_r + j_\theta B_\varphi - j_\varphi B_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

$$\begin{aligned} & \frac{nw\gamma^2}{c^2} \left[ \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_\theta - \frac{v_r^2}{h_2} \partial_\theta \ln h_1 + \frac{v_r v_\theta}{h_1} \partial_r \ln h_2 - \frac{v_\theta^2}{h_2} \partial_\theta \ln \varpi \right) + c^2 \frac{\partial_\theta \ln h}{h_2} + \frac{\varpi\omega v_\varphi}{h} \frac{\partial_\theta \ln \omega}{h_2} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\gamma w) v_\theta \right] \\ & + \frac{\partial_\theta P}{h_2} = \hat{q} E_\theta + j_\varphi B_r - j_r B_\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{aligned} & \frac{nw\gamma^2}{c^2} \left[ \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v_\varphi + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln \varpi) v_\varphi \right) + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\gamma w) v_\varphi + \frac{\varpi\omega}{h} \left( \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(h\gamma w) + \frac{\varpi\omega v_\varphi}{hc^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln \omega \right) \right] \\ & = \hat{q} E_\varphi + j_r B_\theta - j_\theta B_r + \frac{\varpi\omega}{hc^2} \vec{j} \cdot \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

soit finalement,

$$\frac{nw\gamma^2}{c^2} \left[ (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\nabla} (c^2 \ln h) + \frac{\varpi\omega v_\varphi}{h} \vec{\nabla} \ln \omega + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln(\gamma w)) \vec{v} \right] + \vec{\nabla} p = \hat{q} \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}, \quad (\text{A.45})$$

équation que l'on peut aussi écrire à l'aide de la composante  $\alpha = 0$  :

$$\begin{aligned} & \frac{nw\gamma^2}{c^2} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + nw\gamma^2 \left( \vec{\nabla} \ln h - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln h}{c^2} \vec{v} \right) + \frac{nw\gamma^2 \varpi\omega v_\varphi}{hc^2} \left( \vec{\nabla} \ln \omega - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \ln \omega}{c^2} \vec{v} \right) + \vec{\nabla} p \\ & = \hat{q} \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} - \frac{\vec{j} \cdot \vec{E}}{c^2} \vec{v} \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$





## Equations différentielles ordinaires

$$\frac{d\Pi}{dR} = -\frac{2}{h^2 G^4} \left[ \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2(F-2)}{R} \right] - \frac{1}{h^4 M^2} \frac{X_-}{X_+^2} \left[ -\mu \frac{M^4}{G^4} + h_*^4 \nu^2 \right] \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[ \frac{F}{2} \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2 F}{2} \left( \frac{\mu}{2h^2} \frac{X_-}{X_+^2} + \frac{F-2}{R} + \frac{R}{X_+} - \frac{F}{2\sqrt{X_+}} \right) + \frac{M^2}{2} \frac{dF}{dR} - \frac{M^2}{h^2} \frac{\sigma^2}{X_+^{3/2}} + \frac{h_*^2}{M^2} \lambda^2 \aleph^2 \frac{N_V^2}{D^2} \sqrt{X_+} \right] \\ &- \frac{M^2 F}{4h^2} \mu \frac{X_-}{X_+^2} - \sqrt{X_+} \kappa \Pi G^2 + 2 \frac{h_*^2}{h^2} \lambda^2 \aleph^2 \frac{\mu}{\nu^2} \sqrt{X_+} - 2 \frac{N_B^2}{D^2} \lambda^2 \aleph^2 \frac{h_*^2}{h^2} \sqrt{X_+} - \frac{1}{2} \left[ h^2 \frac{dF}{dR} + \frac{h^2 F^2}{R} \right. \\ &+ \left. h^2 F \left( \frac{R}{X_+} - \frac{2}{R} \right) - \frac{2}{\sqrt{X_+}} + F \mu \frac{X_-}{X_+^2} \right] + G^4 \frac{h_*^4}{h^2} \frac{\nu^2}{M^2} \frac{R \sigma^2}{X_+^{5/2}} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{h} \left[ \left( \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2(F-2)}{R} \right) \left( \frac{\sigma^2}{2X_+} - 1 \right) + \frac{M^2 F}{2\sqrt{X_+}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{X_+} - \frac{h^2 F R}{2\sqrt{X_+}} \right) - h^2 h_*^2 \lambda^2 \aleph^2 \frac{R}{M^2} \frac{N_V^2}{D^2} \right] \\ &+ \frac{M^2}{h^2} \frac{dh}{dR} \left[ -1 + \frac{\sigma^2}{X_+} \left( \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right) \right] + \frac{M^2 F}{2h} \frac{\mu R \sigma^2}{X_+^{5/3}} - \frac{h}{2} \left[ \frac{d\Pi}{dR} \kappa X_+ G^2 + \kappa \Pi G^2 \left( 2R + \frac{X_+}{R} (F-2) \right) \right] \\ &+ \frac{h_*^2}{h^2} F \lambda^2 \aleph^2 \frac{\mu}{\nu^2} \sqrt{X_+} - \lambda^2 \aleph^2 \frac{h_*^2}{h} \frac{N_B^2}{D^2} X_+ \left[ \frac{2R}{X_+} + \frac{\frac{\mu}{h_*^2} \frac{X_-}{X_+^2} + \frac{G^2(F-2)}{R}}{N_B} - \frac{\frac{\mu}{h_*^2} \frac{X_-}{X_+^2} - \frac{1}{h_*^2} \frac{dM^2}{dR}}{D} + \frac{F-2}{R} \right] \\ &- \frac{h^2 F^2}{4} \left[ \frac{\mu}{h} \frac{X_-}{X_+^2} + h \left( \frac{R}{X_+} + \frac{1}{F} \frac{dF}{dR} + \frac{F-2}{R} \right) \right] + \frac{hF}{2\sqrt{X_+}} - \frac{G^4}{2} \frac{h_*^4}{h^3} \frac{\nu^2}{\Pi^2} \frac{X_-}{X_+^2} \left\{ \frac{\sigma^2}{X_+} \left[ \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right] \right. \\ &+ \left. \frac{X_+}{G^2} \left[ \delta - \frac{2\mu}{\nu^2} \lambda^2 \aleph^2 \left( \frac{N_B}{D} - \frac{\bar{\omega}}{\lambda} \right) \right] \right\} + G^2 \frac{N_V}{D} X_+ \frac{h_*^4}{h M^2} \frac{d\bar{\omega}}{dR} \quad (\text{B.3}) \end{aligned}$$

On note :  $X_+ = R^2 + \sigma^2$ ,  $X_- = R^2 - \sigma^2$ . Sous les hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité, les équations GRMHD se réduisent au système d'équations suivant pour les fonctions  $\Pi(R)$ ,  $M^2(R)$ ,  $G(R)$  et  $F(R)$  :

$$\frac{d\Pi}{dR} = -\frac{2}{h^2} \frac{1}{G^4} \left( \frac{dM^2}{dR} + \frac{F-2}{R} M^2 \right) - \frac{1}{h^4 M^2} \frac{X_-}{X_+^2} \left( \nu^2 h_*^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right), \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{dM^2}{dR} = \frac{\mathcal{N}_M}{\mathcal{D}}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{dF}{dR} = \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{D}}, \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{dG}{dR} = \frac{G}{R} \left( 1 - \frac{F}{2} \right). \quad (\text{B.7})$$

où nous avons défini :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_M = & \frac{M^4}{4h_*^2 R} \left[ (8-4F) \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2X_+} \right) + 4\kappa \frac{X_+}{G^2} (2-F) + \frac{2FR}{\sqrt{X_+}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{X_+} \right) - \frac{h^2 F^2 R^2}{X_+} - 2F\mu \frac{R^2 \sigma^2}{X_+^{\frac{5}{2}}} \right] \\
& + \frac{h^2 M^2}{h_*^2} \left[ \frac{F-2}{R} \left( 1 + \kappa \frac{X_+}{G^2} - \frac{\sigma^2}{2X_+} \right) - \frac{F}{\sqrt{X_+}} + \frac{h^2 F^2}{4} \left( \frac{R}{X_+} + \frac{\mu X_-}{h^2 X_+^2} \right) + \frac{h^2 F^3}{8\sqrt{X_+}} - \frac{h_*^2 \lambda^2 \aleph^2 \mu}{h^2 \nu^2} F \sqrt{X_+} \right] \\
& - \frac{DG^2}{2h^2 M^2} \frac{X_-}{X_+} \left( \nu^2 h_*^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right) \left[ \delta - \kappa + \frac{\sigma^2 G^2}{X_+^2} \left( \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right) - \frac{2\mu \lambda^2 \aleph^2}{\nu^2} \left( \frac{N_B}{D} + \frac{\bar{\omega}}{\lambda \aleph} \right) \right] \\
& - \frac{M^2 \mu X_-}{2h^2 X_+^2} D + \lambda^2 \aleph^2 \frac{X_-}{X_+} \frac{N_B N_V}{D^2} \mu + \frac{h^2 G^2 D}{2} \kappa \Pi \left[ \frac{h^2 F}{h_*^2 D} \sqrt{X_+} - 2R - \frac{X_+}{R} (F-2) \right] \\
& + \frac{\lambda \aleph \sqrt{\mu}}{\nu} \frac{\sigma G^2}{h_* M^2} \left( \nu^2 h_*^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right) \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_+^2} N_V + \frac{h^2 F M^2}{h_*^2} \frac{R \sigma^2}{2 X_+^{\frac{5}{2}}} \left( \mu - h_*^4 \nu^2 \frac{G^4}{M^4} \right) \\
& - \lambda^2 \aleph^2 h^2 \frac{N_B}{D} (F-2) \frac{X_+}{R} + \lambda^2 \aleph^2 R \left[ 2M^2 + h^2 \left( \frac{F \sqrt{X_+}}{R} - 2 \right) \right] \left( \frac{N_B^2}{D^2} - \frac{h^2}{2M^2} \frac{N_V^2}{D^2} \right), \tag{B.8}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_F = & - \frac{M^2 F}{h_*^2 \sqrt{X_+}} \left[ \Upsilon \left( \frac{R}{\sqrt{X_+}} - \frac{F}{2} \right) - \lambda^2 \aleph^2 \frac{N_B^2}{D^3} X_+ (F-2) \frac{\sqrt{X_+}}{R} + \frac{F}{2} \left( 1 - \frac{h^2 F R}{2\sqrt{X_+}} \right) \right] \\
& + \frac{h^2}{h_*^2} \left( \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right) \left[ \frac{F^2}{R} + F \left( \frac{R}{X_+} - \frac{2}{R} \right) - \frac{2}{h^2 \sqrt{X_+}} - 4 \frac{h_*^2 \lambda^2 \aleph^2 \mu}{h^4 \nu^2} \sqrt{X_+} \right] \\
& + \left( \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right) \frac{\mu F X_-}{h_*^2 X_+^2} + \frac{2\Pi G^2 \kappa \sqrt{X_+}}{h_*^2} \left[ \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \left( \frac{2}{F} \left[ \frac{R}{\sqrt{X_+}} - \frac{\sqrt{X_+}}{R} \right] + \frac{\sqrt{X_+}}{R} \right) \right] \\
& - \frac{G^2 F}{2M^2 h^2 h_*^2} \frac{X_-}{X_+} \left( \nu^2 h_*^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right) \left[ \delta - \kappa + \frac{\sigma^2 G^2}{X_+^2} \left( \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right) - \frac{2\mu \lambda^2 \aleph^2}{\nu^2} \left( \frac{N_B}{D} + \frac{\bar{\omega}}{\lambda \aleph} \right) \right] \\
& + \frac{4\lambda^2 \aleph^2}{h^2} \left( \frac{N_B^2}{D^2} - \frac{h^2}{2M^2} \frac{N_V^2}{D^2} \right) \left( \Upsilon \sqrt{X_+} - \frac{h^2 R F}{2} \right) - \lambda^2 \aleph^2 \frac{h^2 X_+}{h_*^2 R} F (F-2) \frac{N_B}{D^2} - \frac{\mu F M^2 X_-}{2h^2 h_*^2 X_+^2} \\
& + \frac{2M^2 \sigma^2}{h^2 h_*^2 X_+^{\frac{3}{2}}} \left[ \left( 1 - \frac{\nu^2 h_*^4 G^4 R}{M^4 X_+} \right) \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right] + \lambda^2 \aleph^2 \frac{\mu X_-}{h_*^2 X_+} \frac{N_B N_V}{D^3} F + \mu \frac{F^2 M^2 R \sigma^2}{2h_*^2 X_+^{\frac{5}{2}}} \\
& + \frac{\lambda \aleph \sqrt{\mu}}{\nu} \frac{G^2 F \sigma}{M^2 h_*^3} \left( \nu^2 h_*^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right) \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_+^2} \frac{N_V}{D}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

$$\mathcal{D} = - \left( 1 - \frac{\sigma^2}{2X_+} + \kappa \frac{X_+}{G^2} \right) D + \lambda^2 \aleph^2 X_+ \frac{N_B^2}{D^2} + \frac{h^4 F^2}{4h_*^2}, \tag{B.10}$$

$$\Upsilon = 1 - \frac{\sigma^2}{2X_+} + \kappa \frac{X_+}{G^2} - \lambda^2 \aleph^2 \frac{N_B^2}{D^3} X_+. \tag{B.11}$$

## B.1 Conditions à la surface d'Alfvén

$$\tau = \frac{dN_B}{dR} \Big|_{\star} = \frac{h_*^2 (2 - F_*) - \mu \frac{1 - \sigma^2}{(1 + \sigma^2)^2}}{p - \mu \frac{1 - \sigma^2}{(1 + \sigma^2)^2}}, \quad p = \frac{h_*^2 (2 - F_*) - \mu \Lambda_{\star}}{\tau} + \mu \Lambda_{\star} = \frac{dM^2}{dR} \Big|_{\star} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
& N_{F,D}|_{\star} = 0 \\
\iff & \frac{F_{\star}}{\sqrt{X_{+,\star}}} \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 X_{+,\star} \left( \frac{1}{\sqrt{X_{+,\star}}} - \frac{F_{\star}}{2} \right) + F_{\star} \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 X_{+,\star} (F_{\star} - 2) - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 X_{+,\star} \left[ F_{\star}^2 + F_{\star} \left( \frac{1}{X_{+,\star}} - 2 \right) - \right. \\
& \left. \frac{2}{h_{\star}^2 \sqrt{X_{+,\star}}} \right] + 4\lambda^4 \aleph_{\star}^4 X_{+,\star}^{3/2} \frac{\tau^2 \mu}{h_{\star}^2 \nu^2} - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 \mu \frac{F_{\star} X_{-,\star}}{h_{\star}^2 X_{+,\star}} - \frac{2\kappa \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 X_{+,\star}^{3/2} \Pi_{\star}}{h_{\star}^2} + \frac{\lambda^2 \aleph_{\star}^2 \mu X_{-,\star}}{h_{\star}^2 X_{+,\star}} \tau (\tau - 1) F_{\star} \\
& - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star} F_{\star} (F_{\star} - 2) \tau - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 \tau^2 \left( 1 - \frac{\nu^2}{X_{+,\star}} \right) \frac{2\sigma^2}{h_{\star}^2 \sqrt{X_{+,\star}}} - \frac{4\lambda^4 \aleph_{\star}^4}{h_{\star}^2} \left( \tau^2 - \frac{1}{2} (\tau - 1)^2 \right) \tau^2 X_{+,\star}^{3/2} = 0
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Au rayon d'Alfvén, le facteur d'expansion est la solution d'un polynôme du second degré  $C_2 F_{\star}^2 + C_1 F_{\star} + C_0 = 0$ , avec

$$C_0 = \frac{-h_{\star}^2 \sqrt{X_{+,\star}} p'^2}{8} - \frac{\lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star}^{3/2}}{2} h_{\star}^4, \tag{B.14}$$

$$C_1 = \frac{X_{+,\star} p'^3}{4} + \lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star}^{3/2} h_{\star}^2 (p' + 2h_{\star}^2 - \mu \Lambda_{\star}), \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & p'^2 \left[ \lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star}^{3/2} \left( \frac{\mu}{\nu^2} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\sqrt{X_{+,\star}}}{2} (1 - \kappa \Pi_{\star} X_{+,\star}) - \frac{\sigma^2}{2\sqrt{X_{+,\star}}} \left( 1 - \frac{\nu^2}{X_{+,\star}} \right) \right] - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star}^{3/2} p' [2h_{\star}^2 - \mu \Lambda_{\star}] \\
& - \lambda^2 \aleph_{\star}^2 X_{+,\star}^{3/2} \left[ 2h_{\star}^4 - 2\mu \Lambda_{\star} h_{\star}^2 + \frac{\mu^2 \Lambda_{\star}^2}{2} \right].
\end{aligned} \tag{B.16}$$

## B.2 Equations en Schwarzschild

Les équations GRMHD se réduisent au système d'équations suivant pour les fonctions  $\Pi(R)$ ,  $M^2(R)$ ,  $G(R)$  et  $F(R)$  :

$$\frac{d\Pi}{dR} = -\frac{2}{h^2} \frac{1}{G^4} \left( \frac{dM^2}{dR} + \frac{F-2}{R} M^2 \right) - \frac{1}{h^4 M^2 R^2} \left( \nu^2 h_{\star}^4 - \mu \frac{M^4}{G^4} \right), \tag{B.17}$$

$$\frac{dM^2}{dR} = \frac{\mathcal{N}_M}{\mathcal{D}}, \tag{B.18}$$

$$\frac{dF}{dR} = \frac{\mathcal{N}_F}{\mathcal{D}}, \tag{B.19}$$

$$\frac{dG}{dR} = \frac{G}{R} \left( 1 - \frac{F}{2} \right). \tag{B.20}$$

où nous avons défini :

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_M = & \frac{M^4}{4h_{\star}^2 R} \left[ 8 - 2F + 4\kappa \frac{R^2}{G^2} (2 - F) - h^2 F^2 \right] \\
& + \frac{h^2 M^2}{h_{\star}^2} \left[ \frac{F-2}{R} \left( 1 + \kappa \frac{R^2}{G^2} \right) - \frac{F}{R} + \frac{h^2 F^2}{4R} \left( 1 + \frac{\mu}{h^2 R} \right) + \frac{h^2 F^3}{8R} - \frac{h_{\star}^2 \lambda^2 \mu}{h^2 \nu^2} F R \right] \\
& - \frac{DG^2 \nu^2 h_{\star}^4}{2h^2 M^2} \left[ \delta - \kappa - \frac{2\mu \lambda^2 N_B}{\nu^2 D} \right] - \frac{M^2 \mu}{2h^2 R^2} D \left[ 1 + \kappa \frac{R^2}{G^2} \right] + \lambda^2 \frac{N_B N_V}{D^2} \mu + \frac{h^2 G^2 D}{2} \kappa \Pi \left[ \frac{h^2 F}{h_{\star}^2 D} - R F \right] \\
& - \lambda^2 h^2 \frac{N_B}{D} (F-2) R + \lambda^2 R [2M^2 + h^2 (F-2)] \left( \frac{N_B^2}{D^2} - \frac{h^2 N_V^2}{2M^2 D^2} \right)
\end{aligned} \tag{B.21}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_F = & -\frac{M^2 F}{h_*^2 R} \left[ \Upsilon \left( 1 - \frac{F}{2} \right) - \lambda^2 \frac{N_B^2}{D^3} (F-2) R^2 + \frac{F}{2} \left( 1 - \frac{h^2 F}{2} \right) \right] \\
& + \frac{h^2}{h_*^2} \left( \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right) \left[ \frac{F}{R} (F-1) - \frac{2}{h^2 R} - 4 \frac{h_*^2 \lambda^2 \mu}{h^4 \nu^2} R \right] \\
& + \left( \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right) \frac{\mu F}{h_*^2 R^2} + \frac{2 \Pi G^2 \kappa R}{h_*^2} \left[ \Upsilon - \frac{h^2 F^2}{4} \right] \\
& - \frac{G^2 F \nu^2 h_*^2}{2 M^2 h^2} \left[ \delta - \kappa - \frac{2 \mu \lambda^2 N_B}{\nu^2 D} \right] + \frac{4 \lambda^2 R}{h^2} \left( \frac{N_B^2}{D^2} - \frac{h^2 N_V^2}{2 M^2 D^2} \right) \left( \Upsilon - \frac{h^2 F}{2} \right) \\
& - \lambda^2 \frac{h^2}{h_*^2} R F (F-2) \frac{N_B}{D^2} - \frac{\mu F M^2}{2 h^2 h_*^2 R^2} \left( 1 + \kappa \frac{R^2}{G^2} \right) + \frac{\lambda^2 \mu N_B N_V}{h_*^2 D^3} F
\end{aligned} \tag{B.22}$$

$$\mathcal{D} = - \left( 1 + \kappa \frac{R^2}{G^2} \right) \mathcal{D} + \lambda^2 R^2 \frac{N_B^2}{D^2} + \frac{h^4 F^2}{4 h_*^2}, \tag{B.23}$$

$$\Upsilon = 1 + \kappa \frac{R^2}{G^2} - \lambda^2 \frac{N_B^2}{D^3} R^2. \tag{B.24}$$

## Les forces agissant sur le plasma

$$\frac{dh}{dR} = \frac{\mu X_-}{2h X_+^2} \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dR} = \frac{\sqrt{\mu\nu\sigma} \sigma^2 - 3R^2}{h_* X_+^3} \quad (\text{C.2})$$

## C.1 Force d'advection

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma^2 n w}{c^2} [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \cdot \vec{e}_R &= -\frac{1}{h} \frac{B_*^2}{4\pi r_* G^4} \left\{ \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2(F-2)}{R} + \sin^2 \theta \left[ \left( \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2(F-2)}{R} \right) \left( \frac{\sigma^2}{2X_+} - 1 \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \left[ \frac{M^2 F}{2\sqrt{X_+}} \left( 1 + \frac{\sigma^2}{X_+} - \frac{h^2 F R}{2\sqrt{X_+}} \right) - \lambda^2 \aleph^2 h^2 h_*^2 \frac{R N_V^2}{M^2 D^2} \right] \right\} \quad (\text{C.3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\gamma^2 n w}{c^2} [(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}] \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{B_*^2 \sin \theta \cos \theta}{4\pi r_* G^4} \left[ \frac{F}{2} \frac{dM^2}{dR} + \frac{M^2 F}{2} \left( \frac{\mu X_-}{2h^2 X_+^2} + \frac{F-2}{R} + \frac{R}{X_+} - \frac{F}{2\sqrt{X_+}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{M^2}{2} \frac{dF}{dR} - \frac{M^2 \sigma^2}{h^2 X_+^{\frac{3}{2}}} + \frac{\lambda^2 \aleph^2 h_*^2 N_V^2}{M^2 D^2} \sqrt{X_+} \right] \quad (\text{C.4}) \end{aligned}$$

## C.2 Force de pression

$$-\vec{\nabla} P \cdot \vec{e}_R = -\frac{h}{8} \frac{B_*^2}{\pi r_* G^4} \left[ \frac{d\Pi}{dR} G^4 \left( 1 + \kappa \frac{X_\pm}{G^2} \sin^2 \theta \right) + \kappa \Pi G^2 \sin^2 \theta \left( 2R + \frac{X_\pm}{R} (F-2) \right) \right] \quad (\text{C.5})$$

$$-\vec{\nabla} P \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{B_*^2}{4\pi r_* G^4} \sqrt{X_+} \kappa \Pi G^2 \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.6})$$

## C.3 Force électrique

$$\hat{q}\vec{E} \cdot \vec{e}_R = \frac{B_*^2}{4\pi r_* G^4} \frac{h_*^2}{h} F \lambda^2 \aleph^2 \frac{\mu}{\nu^2} \sqrt{X_+} \sin^2 \theta \quad (\text{C.7})$$

$$\hat{q}\vec{E} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{B_*^2}{2\pi r_* G^4} \frac{h_*^2}{h^2} \lambda^2 \aleph^2 \frac{\mu}{\nu^2} \sqrt{X_+} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.8})$$

### C.4 Tension magnétique

$$\vec{f}_{S,B\varphi}^R \cdot \vec{e}_R = -\frac{1}{4\pi r_\star} B_\varphi^2 \left( \frac{hR}{X_+} + \frac{dh}{dR} \right) = -\frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^4} \lambda^2 \mathbb{N}^2 \frac{h_\star^2}{h} \frac{N_B^2}{D^2} X_+ \sin^2 \theta \left( \frac{R}{X_+} + \frac{\mu}{2h^2} \frac{X_-}{X_+^2} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$\vec{f}_{S,B\varphi}^\theta \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{1}{4\pi r_\star \sqrt{X_+}} B_\varphi^2 \cot \theta = -\frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^4} \lambda^2 \mathbb{N}^2 \frac{h_\star^2}{h^2} \frac{N_B^2}{D^2} \sqrt{X_+} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.10})$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{S,Bp}^R \cdot \vec{e}_R &= -\frac{1}{4\pi r_\star} B_\theta^2 \left( \frac{hR}{X_+} + \frac{dh}{dR} \right) + \frac{B_\theta}{4\pi r_\star \sqrt{X_+}} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \\ &= -\frac{B_\star^2}{16\pi r_\star G^4} h^2 F^2 \left( \frac{hR}{X_+} + \frac{\mu}{2h} \frac{X_-}{X_+^2} \right) \sin^2 \theta + \frac{B_\star^2}{8\pi r_\star G^4} \frac{hF}{\sqrt{X_+}} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \vec{f}_{S,Bp}^\theta \cdot \vec{e}_\theta &= \frac{1}{4\pi r_\star} B_r B_\theta \left( \frac{dh}{dR} + \frac{hR}{X_+} \right) + \frac{h B_r}{4\pi r_\star} \frac{\partial B_\theta}{\partial R} \\ &= -\frac{B_\star^2}{8\pi r_\star G^4} \left[ h^2 \frac{dF}{dR} + \frac{h^2 F^2}{R} + h^2 F \left( \frac{R}{X_+} - \frac{2}{R} \right) + F \mu \frac{X_-}{X_+^2} \right] \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

### C.5 Pression magnétique

$$\begin{aligned} \vec{f}_{Pr,B\varphi}^R \cdot \vec{e}_R &= -\frac{h}{8\pi r_\star} \frac{\partial B_\varphi^2}{\partial R} \\ &= -\frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^4} \lambda^2 \mathbb{N}^2 \frac{h_\star^2}{h} \frac{N_B^2}{D^2} X_+ \sin^2 \theta \left[ \frac{R}{X_+} + \frac{F-2}{R} - \frac{\mu}{2h^2} \frac{X_-}{X_+^2} + \frac{\frac{\mu}{h_\star^2} \frac{X_-}{X_+^2} + \frac{G^2(F-2)}{R}}{\frac{h^2}{h_\star^2} - G^2} - \frac{\frac{\mu}{h_\star^2} \frac{X_-}{X_+^2} - \frac{1}{h_\star^2} \frac{dM^2}{dR}}{\frac{h^2}{h_\star^2} - \frac{M^2}{h_\star^2}} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\vec{f}_{Pr,B\varphi}^\theta \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{1}{8\pi r_\star \sqrt{X_+}} \frac{\partial B_\varphi^2}{\partial \theta} = -\frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^4} \lambda^2 \mathbb{N}^2 \frac{h_\star^2}{h^2} \frac{N_B^2}{D^2} \sqrt{X_+} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.14})$$

$$\vec{f}_{Pr,Bp}^R \cdot \vec{e}_R = -\frac{h}{8\pi r_\star} \frac{\partial B_\theta^2}{\partial R} = -\frac{B_\star^2}{16\pi r_\star G^4} h^2 F^2 \left[ \frac{\mu}{2h} \frac{X_-}{X_+^2} + h \left( \frac{1}{F} \frac{dF}{dR} + \frac{F-2}{R} \right) \right] \sin^2 \theta \quad (\text{C.15})$$

$$\vec{f}_{Pr,Bp}^\theta \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{1}{8\pi r_\star \sqrt{X_+}} \frac{\partial B_r^2}{\partial \theta} = \frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^4} \frac{1}{\sqrt{X_+}} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.16})$$

### C.6 Force de gravité

$$\begin{aligned} -\gamma^2 n w \vec{\nabla} \ln h \cdot \vec{e}_R &= -\frac{B_\star^2}{8\pi r_\star} \frac{h_\star^4}{h^3} \frac{\nu^2}{M^2} \frac{X_-}{X_+^2} \left[ 1 + \sin^2 \theta \left\{ \frac{\sigma^2}{X_+} \left( \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \theta \left\{ \frac{X_+}{G^2} \left( \delta - 2 \frac{\mu \lambda^2 \mathbb{N}^2}{\nu^2} \frac{N_B}{D} - 2 \frac{\mu \lambda \mathbb{N}}{\nu^2} \bar{\omega} \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

$$-\gamma^2 n w \vec{\nabla} \ln h \cdot \vec{e}_\theta = \frac{B_\star^2}{4\pi r_\star} \frac{h_\star^4}{h^2} \frac{\nu^2}{M^2} \frac{R \sigma^2}{X_+^{\frac{5}{2}}} \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} \gamma^2 n w \frac{\vec{v}}{c} \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla} \ln h \right) \cdot \vec{e}_R &= \frac{B_\star^2}{8\pi r_\star} \frac{\mu M^2}{h^3 G^4} \frac{X_-}{X_+^2} \left[ 1 + \sin^2 \theta \left\{ -1 + \frac{\sigma^2}{X_+} \left( \frac{1}{2} - h^2 \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_-} \right) \right\} \right] \\ &+ \frac{B_\star^2}{8\pi r_\star G^4} \frac{M^2 F}{h} \frac{\mu R \sigma^2}{X_+^{\frac{5}{2}}} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$\gamma^2 n w \frac{\vec{v}}{c} \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla} \ln h \right) \cdot \vec{e}_\theta = -\frac{B_\star^2}{16\pi r_\star G^4} \frac{M^2}{h^2} \frac{X_-}{X_+^2} \mu F \sin \theta \cos \theta \quad (\text{C.20})$$

## C.7 Force de Coriolis

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{\gamma^2 n w}{c^2} \frac{\varpi \omega v_\varphi}{h} \vec{\nabla} \ln \omega + \frac{\gamma^2 n w}{c^2} \frac{\varpi \omega v_\varphi}{h} \frac{\vec{v}}{c} \left( \frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{\nabla} \ln \omega \right) \right] \cdot \vec{e}_R &= \frac{B_\star^2}{4\pi r_\star G^2} \frac{N_V}{D} \frac{\lambda \aleph}{h h_\star} \left( \frac{h_\star^4}{M^2} - \frac{\mu M^2}{\nu^2 G^4} \right) \\ &\times \sqrt{\mu \nu} \sigma \frac{\sigma^2 - 3R^2}{X_+^2} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$





## Processus de rayonnement

### D.1 Radiation synchrotron et cyclotron

#### D.1.1 Lois de conservation et trajectoire des particules

Une particule chargée libre dans un champ magnétique uniforme suit un mouvement hélicoïdal. Les composantes de la vitesse perpendiculaires à  $\vec{B}$  dépendent du temps et de cette accélération naît un rayonnement. Deux cas limites peuvent être considérés. Une particule non-relativiste génère une radiation cyclotron de pulsation  $\omega \sim \omega_B$  tandis qu'une particule relativiste produit une radiation synchrotron aux fréquences  $\omega \gg \omega_B$ . On néglige les pertes radiatives pendant une gyration ainsi que l'effet sur la trajectoire du champ magnétique généré par la particule. On considère une charge  $q$  en mouvement dans un champ  $B$  homogène avec  $\vec{E} = 0$ .

La conservation de l'énergie s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \vec{u} \cdot \vec{F}_{\text{Lorentz}} \\ \frac{d\gamma mc^2}{dt} &= \vec{u} \cdot \left( q\vec{E} + \frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \right) = q\vec{u} \cdot \vec{E} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.1})$$

avec  $\gamma = \text{cte}$  et  $u = \text{cte}$ .

L'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{Lorentz}} = q\vec{E} + q\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} = q\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \quad (\text{D.2})$$

$$\frac{d\gamma m\vec{u}}{dt} = q\frac{\vec{u}}{c} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \vec{u} \times \vec{B} \quad (\text{D.3})$$

En prenant  $\vec{B} \parallel$  à l'axe  $z$  et en décomposant  $\vec{u}$  suivant  $\vec{u} = \vec{u}_{\parallel} + \vec{u}_{\perp}$  avec  $\vec{u}_{\parallel} = u_z \vec{e}_z$  et  $\vec{u}_{\perp} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y$ , on obtient :

$$\frac{d\vec{u}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{\gamma mc} \vec{u}_{\perp} \times \vec{B} \quad (\text{D.4})$$

Comme  $u_{\parallel} = \text{cte}$ . La force  $\frac{q}{\gamma mc} u_{\perp} B$  est aussi une constante, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{u}_{\perp}}{dt} = \vec{u}_{\perp} \times \left( \vec{e}_z \frac{qB}{\gamma mc} \right) = \vec{u}_{\perp} \times (\vec{e}_z \omega_B) \quad (\text{D.5})$$

où  $\omega_B \equiv \frac{qB}{\gamma mc}$  (rad s<sup>-1</sup>) est la pulsation relativiste. La fréquence est  $\nu = \omega / 2\pi$  (Hz).

L'électron suit une trajectoire hélicoïdale et une trajectoire circulaire dans le plan  $(xy)$  :

$$\vec{r}(t) = \vec{e}_z u_{\parallel} t + \frac{u_{\perp}}{\omega_B} (\vec{e}_x \cos \omega_B t + \vec{e}_y \sin \omega_B t) \quad (\text{D.6})$$

Le rayon de Larmor est :

$$r_L = \frac{u_{\perp}}{\omega_B} = \frac{u_{\perp} \gamma mc}{qB} = \frac{u \gamma mc \sin \alpha}{qB} \quad (\text{D.7})$$

où  $\alpha$  est l'angle d'attaque avec  $\cos \alpha = \vec{u} \cdot \vec{B} / (uB)$ .

### D.1.2 Puissance totale rayonnée par une particule relativiste

On utilise la formule des potentiels retardés. Pour calculer le champ électromagnétique au point  $\vec{x}$  et au temps  $t$ , il faut déterminer la position et le temps retardés de la particule  $\vec{x}_{ret}$  et  $t_{ret}$  (Jackson 1999). Dans l'approximation dipolaire électrique, on détermine la puissance émise à une distance grande devant la distance parcourue par la particule. De ce fait on peut négliger le terme coulombien proportionnel à  $1/R^2$  devant celui en  $1/R$  dans l'expression du champ électrique. On peut donc considérer en bonne approximation qu'une charge accélérée est source d'un champ transverse qui décroît en  $1/R$ , alors que pour une charge au repos la décroissance est en  $1/R^2$ . Le champ électrique et le champ magnétique constituent le champ de radiation (dans l'approximation d'une grande distance  $x$  entre la source et l'observateur). En notant  $\vec{R} \approx x \vec{k}$ , le champ électromagnétique s'écrit,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &\approx \frac{q}{(R - \vec{R} \cdot \vec{\beta})^3} \left\{ \frac{\vec{R}}{c} \times [(\vec{R} - R\vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}] \right\} \\ \vec{E}(\vec{x}, t) &\approx \frac{q}{c^2 x \kappa^3} \left\{ \vec{k} \times [(\vec{k} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{u}}] \right\} \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} = \vec{k} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

avec  $\kappa = 1 - \vec{k} \cdot \vec{\beta}$  et  $\vec{\beta} \equiv \vec{u}/c$ .

La puissance émise a la forme d'un dipôle.

Dans la cas non relativiste, la puissance totale rayonnée par une particule ( $\beta \ll 1$ ,  $\kappa \approx 1$ ) s'obtient avec :

$$\vec{B} = \vec{k} \times \vec{E} = \frac{q}{c^2 x} \left\{ \vec{k} \times [\vec{k} \times (\vec{k} \times \dot{\vec{u}})] \right\} = \frac{q}{c^2 x} \left\{ \vec{k} \times [\vec{k}(\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}}) - \dot{\vec{u}}(\vec{k} \cdot \vec{k})] \right\} = -\frac{q}{c^2 x} (\vec{k} \times \dot{\vec{u}}) = \frac{\ddot{\vec{d}} \times \vec{k}}{c^2 x} \quad (\text{D.9})$$

où  $\vec{d}$  est le moment dipolaire.

La puissance émise à travers une surface  $x^2 d\Omega$  dans la direction  $\vec{k}$  est obtenue à partir de la formule de Larmor classique :

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} (Bx^2) = \frac{|\ddot{\vec{d}}|^2}{4\pi c^3} \sin^2 \theta \quad (\text{D.10})$$

On remarque que dans le cas relativiste (avec  $\beta \rightarrow 1$ ,  $\gamma \gg 1$ ), le facteur  $\kappa = 1 - \beta \cos \theta$  peut être très petit pour  $\beta \sim 1$  et de petits angles  $\theta \sim 0$ . Par conséquent,  $1/\kappa$  est très grand.

Dans le cas où  $\gamma \gg 1$ ,  $\beta = 1 - \frac{1}{2\gamma^2}$ , d'où  $\kappa = 1 - \beta \cos \theta \approx 1 - \left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{1 + \gamma^2 \theta^2}{2\gamma^2}$  et  $\frac{1}{\kappa} = \frac{2\gamma^2}{1 + \gamma^2 \theta^2}$  (valable pour  $\theta \ll 1/\gamma \ll 1$ ). Le champ émis est alors focalisé dans un cône d'ouverture  $1/\gamma$  et concentré dans la direction  $\theta = 0$ .

Dans le cas général, l'expression de la distribution angulaire de la puissance émise s'écrit :

$$dP = \frac{c}{4\pi} |\vec{E} \times \vec{B}| x^2 d\Omega = \frac{cB^2}{4\pi} (x^2 d\Omega) \quad (D.11)$$

La puissance reçue par unité d'angle solide est alors :

$$\frac{dP}{d\Omega_{\text{rec}}} = \frac{c(xE)^2}{4\pi} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{\vec{k} \times [(\vec{k} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{u}}]}{\kappa^3} \right\}^2 \equiv \frac{q^2}{4\pi c^3} |\vec{g}|^2 \quad (D.12)$$

En développant  $\vec{g} = \frac{1}{\kappa^3} [(\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})(\vec{k} - \vec{\beta}) - \vec{k} \cdot (\vec{k} - \vec{\beta}) \dot{\vec{u}}]$ , on obtient :

$$\begin{aligned} g^2 &= \frac{1}{\kappa^6} [(\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})^2 (\vec{k} - \vec{\beta})^2 + \kappa^2 |\dot{\vec{u}}|^2 - 2\kappa (\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}}) (\vec{k} - \vec{\beta}) \cdot \dot{\vec{u}}] \\ &= \frac{1}{\kappa^6} \left\{ (\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})^2 (1 + \beta^2 - 2\vec{k} \cdot \vec{\beta}) + \kappa^2 |\dot{\vec{u}}|^2 - 2\kappa [(\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})^2 - (\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{u}})] \right\} \\ &\approx \frac{1}{\kappa^4} |\dot{\vec{u}}|^2 + \frac{2}{\kappa^5} (\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})(\vec{\beta} \cdot \dot{\vec{u}}) - \frac{1}{\kappa^6} (\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}})^2 (1 - \beta^2) \end{aligned} \quad (D.13)$$

En définissant le système de coordonnées  $\vec{u} = (0, 0, u)$ ,  $\dot{\vec{u}} = |\dot{\vec{u}}|(\sin i, 0, \cos i)$

et  $\vec{k} = (\sin \theta \cos \Phi, \sin \theta \sin \Phi, \cos \theta)$ , on obtient alors :

$\vec{k} \cdot \dot{\vec{u}} = |\dot{\vec{u}}|(\sin \theta \cos \Phi \sin i + \cos \theta \cos i)$ , et  $\dot{\vec{u}} \cdot \vec{\beta} = |\dot{\vec{u}}| \beta \cos i$ .

**Cas où la vitesse et l'accélération sont parallèles  $\dot{\vec{u}} \parallel \vec{u}$**

$$g^2 = |\dot{\vec{u}}|^2 \frac{\sin^2 \theta}{(1 - \beta \cos \theta)^6} \quad (D.14)$$

La puissance reçue est donc :

$$\frac{dP_{\parallel}}{d\Omega_{\text{rec}}} \approx \frac{16 q^2 |\dot{\vec{u}}|^2}{\pi c^3} \gamma^{10} \frac{\gamma^2 \theta^2}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^6} \quad (D.15)$$

**Cas où la vitesse et l'accélération sont perpendiculaires  $\dot{\vec{u}} \perp \vec{u}$**

On trouve (Rybicki et Lightman 1979) :

$$\frac{dP_{\perp}}{d\Omega_{\text{rec}}} \approx \frac{4 q^2 |\dot{\vec{u}}|^2}{\pi c^3} \gamma^8 \frac{1 - 2\gamma^2 \theta^2 \cos 2\Phi + \gamma^4 \theta^4}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^6} \quad (D.16)$$

L'intervalle de temps pour l'observateur  $dt$  n'est pas équivalent à l'intervalle de temps propre à la particule  $dt_{\text{ret}}$ .  $\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} = 1 - \beta \cos \theta = \kappa$ . La puissance émise par unité d'angle solide n'est donc pas

égale à la puissance reçue puisque le même quantité d'énergie  $dW$  est émise et reçue pendant deux intervalles de temps différents :

$$\frac{dP}{d\Omega_{\text{emis}}} = \frac{dW}{dt_{\text{ret}}d\Omega} = \left( \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} \right) \frac{dW}{dt d\Omega} = \left( \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} \right) \frac{dP}{d\Omega_{\text{rec}}} = \kappa \frac{dP}{d\Omega_{\text{rec}}} = \frac{q^2 \kappa g^2}{4\pi c^3} \quad (\text{D.17})$$

$$P_{\text{emise}} = \frac{q^2}{4\pi c^3} \int_0^{4\pi} \kappa g^2 d\Omega = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 \left[ |\dot{\vec{u}}|^2 - (\dot{\vec{u}} \times \vec{\beta})^2 \right] = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 |\dot{\vec{u}}|^2 (1 - \beta^2 \sin^2 i) \quad (\text{D.18})$$

Pour une accélération parallèle :  $a_{\parallel} \equiv \dot{u}_{\parallel}$ ,  $i = 0$  :

$$P_{\text{emise},\parallel} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 a_{\parallel}^2 \quad (\text{D.19})$$

Pour une accélération perpendiculaire :  $a_{\perp} \equiv \dot{u}_{\perp}$ ,  $i = \pi/2$  :

$$P_{\text{emise},\perp} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^6 (1 - \beta^2) a_{\perp}^2 = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 a_{\perp}^2 \quad (\text{D.20})$$

Dans le cas général,  $\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp}$ , on obtient la formule relativiste de Larmor :

$$P_{\text{emise}} = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 (a_{\perp}^2 + \gamma^2 a_{\parallel}^2) \quad (\text{D.21})$$

L'expression de la puissance émise peut être déduite élégamment à l'aide d'une transformation de Lorentz entre le référentiel au repos de la particule (la radiation émise peut alors être déduite de la formule du dipôle de Larmor) et le référentiel où elle est accélérée. L'expression de la puissance émise dépend de  $\theta$  seulement à travers la combinaison  $\gamma\theta$ . La distribution angulaire de la forme du rayonnement présente une élongation maximum pour un angle  $\theta \sim 1/\gamma$  et aucune émission à  $\theta = 0$ . Regardons maintenant ce que vaut l'accélération :  $a_{\perp}$  est l'accélération  $\perp$  à  $\vec{u}$  et  $a_{\parallel}$  est l'accélération  $\parallel$  à  $\vec{u}$ . Pour un électron dans un champ  $B$ , l'accélération est  $\perp$  à  $\vec{u}$  :

$$a_{\perp} = \left| \frac{d\vec{u}}{dt} \right| = |\vec{u} \times \vec{e}_z \omega_B| = u \omega_B \sin \alpha \quad \text{avec } a_{\parallel} = 0 \quad (\text{D.22})$$

Donc

$$\begin{aligned} P_{\text{emise}} &= \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 u^2 \omega_B^2 \sin^2 \alpha = \frac{2e^2}{3c^3} \gamma^4 u^2 \frac{e^2 B^2}{\gamma^2 m^2 c^2} \sin^2 \alpha \\ &= \frac{2}{3} r_e^2 c \gamma^2 \beta^2 B^2 \sin^2 \alpha = 2\sigma_T c (\gamma^2 \beta^2) U_B \sin^2 \alpha \end{aligned} \quad (\text{D.23})$$

où  $r_e = \frac{e^2}{mc^2}$  est le rayon classique de l'électron,  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = \frac{2}{3} \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2$  est la section efficace Thomson et  $U_B = \frac{B^2}{8\pi}$  est la densité d'énergie magnétique.

Si tous les angles  $\alpha$  sont équiprobables, la valeur moyenne sur l'angle d'attaque permet d'écrire  $\left( \int \sin^2 \alpha \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{2}{3} \right)$  :

$$P_{\text{emise}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B \quad (\text{D.24})$$

Cette équation est valide quel que soit la valeur de la vitesse  $\beta$ .

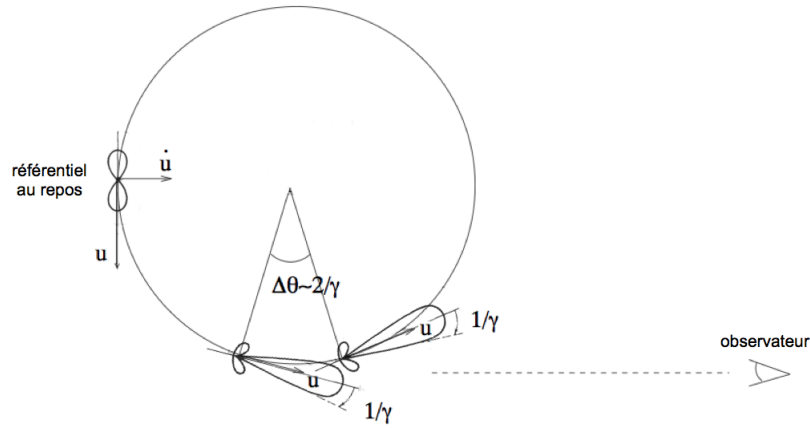
### D.1.3 Spectre d'une particule relativiste

Il a été remarqué qu'une distinction devait être faite entre la puissance reçue et la puissance émise (Pacholczyk 1970, Ginzburg et Syrovatskii 1969). Le spectre du rayonnement synchrotron est lié aux variations du champ électrique vues par l'observateur. L'effet de focalisation du rayonnement émis a pour effet de réduire l'angle d'émission comme cela est indiqué Fig. D.1 (la vitesse et l'accélération sont ici perpendiculaires). Une des caractéristiques essentielles du rayonnement synchrotron est que l'observateur voit une impulsion lumineuse pendant une durée de temps beaucoup plus courte que la période de rotation de la particule. La largeur du spectre ainsi mesurée par l'observateur dépend de la largeur de l'impulsion. Plus l'impulsion est courte, plus large est le spectre en fréquence. Par conséquent, le spectre sera élargi, bien plus que  $\omega_B/2\pi$ . L'observateur observe une impulsion du rayonnement pendant une fraction  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} \propto \frac{1}{2\pi\gamma}$  de la période orbitale  $\frac{2\pi}{\omega_B}$ . L'intervalle de temps  $\Delta t$  pour la longueur de l'impulsion rayonnée est plus courte que l'intervalle de temps  $\Delta t_{\text{ret}}$  mesurée par l'observateur.

$$\frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{ret}}} = 1 - \beta \cos \theta \approx \frac{1 + \gamma^2(\Delta\theta)^2}{2\gamma^2} \sim \frac{1}{\gamma^2} \quad (\text{D.25})$$

Pour l'observateur, la longueur de l'impulsion rayonnée devient :

$$\Delta t \approx \frac{1}{\gamma^2} \Delta t_{\text{ret}} \approx \frac{1}{\gamma^2} \frac{\Delta\theta}{\omega_B} = \frac{1}{\gamma^3 \omega_B} \quad (\text{D.26})$$



**FIG. D.1** – La distribution angulaire de la forme du rayonnement présente une élongation maximum pour un angle  $\theta \sim 1/\gamma$  et aucune émission à  $\theta = 0$  dans le cas d'une enveloppe dipolaire de l'émission (Rybicki et Lightman 1979).

Le spectre en fréquence s'élargit vers les hautes harmoniques :  $\omega \sim \gamma^3 \omega_B = \gamma^2 \gamma \frac{eB}{\gamma mc} = \gamma^2 \omega_L$  où

$\omega_L \equiv \frac{eB}{mc}$  est la fréquence de Larmor pour une particule au repos.

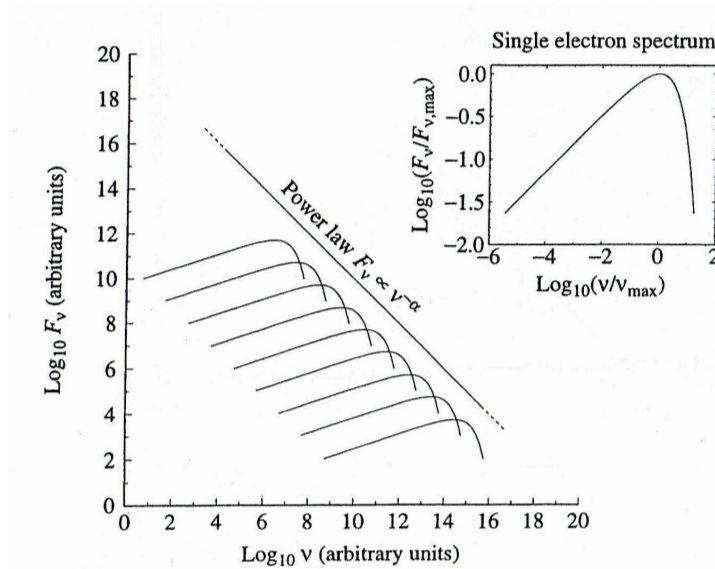
En résumé, un terme  $\gamma^2$  provient du facteur Doppler, un autre terme  $\gamma$  provient de la focalisation du rayonnement et le dernier terme  $\gamma$  au dénominateur provient du grandissement du rayon de rotation (masse relativiste). Deux effets s'annihilent : le rayon de rotation augmente en  $\gamma$  ( $\omega_B \propto 1/\omega$ ) mais le faisceau se rétrécit avec  $\gamma$ . Seul l'effet de compression du temps demeure provenant du facteur Doppler  $\propto 1/\gamma^2$ .

On peut décrire le spectre émis par l'expression :

$$P_\nu(\omega) = P_{\text{emise}} \Phi_\nu(\omega) \quad [\text{erg/s/Hz}] \quad (\text{D.27})$$

où  $\Phi_\nu$  est la distribution de fréquence normalisée :  $\Phi_\nu(\omega) = \frac{9\sqrt{3}}{8\pi} F\left(\frac{\nu}{\frac{3}{2}\omega^2\nu_L \sin\alpha}\right) \frac{1}{\frac{3}{2}\omega^2\nu_L \sin\alpha}$  [Hz<sup>-1</sup>] et  $F(x) = x \int_x^\infty K_{5/3}(y) dy \approx 1.8 x^{1/3} e^{-x}$ ,  $K_{5/3}$  étant la fonction de Bessel modifiée (Rybicki et Lightman 1979).

Lorsque la vitesse devient relativiste ( $v \propto c$ ), on obtient une série d'impulsions très courtes répétées à un intervalle de temps  $2\pi/\omega_B$ . Le spectre comporte alors un grand nombre d'harmoniques pour lesquels l'enveloppe est décrite par  $F(x)$ . Dès que la résolution spectrale devient grande par rapport à  $\omega_B$ , apparaît d'autres mécanismes d'élargissement pour remplir l'espace entre les raies. Par exemple, un mécanisme d'élargissement intervient lorsqu'est considérée une distribution d'énergie des particules (fréquence de rotation  $\omega_B$  proportionnelle à  $1/\gamma$ ) pour lesquelles on ne tombe pas à la même place dans le spectre. Il en est de même lorsque différentes régions d'émission présentent des valeurs et des directions différentes du champ magnétique si bien que le spectre devient continu.



**FIG. D.2** – Détermination de la pente  $p$  de la distribution d'électron en loi de puissance à partir de l'indice spectral.

#### D.1.4 Spectre pour une distribution électronique en loi de puissance

Les rayons cosmiques qui atteignent la Terre ont une distribution d'énergie décrite par une loi de puissance. Cette loi de puissance s'exprime sous la forme :

$$n(\gamma)d\gamma = n_0\gamma^{-P}d\gamma \quad \text{avec} \quad \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max} \quad \text{avec typiquement} \quad p = 2.5 \quad (\text{D.28})$$

Le spectre d'une distribution d'électron avec  $n(\gamma)d\gamma \text{ cm}^{-3}$  électrons entre compris entre  $\gamma m_e c^2$  et  $(\gamma + d\gamma)m_e c^2$  est donnée par :

$$4\pi j_\nu = \int_l^\infty P_\nu(\gamma)n(\gamma)d\gamma \quad \text{erg/s/Hz/cm}^3 \quad (\text{D.29})$$

L'intégrale analytique peut être simplifiée en supposant que toute l'émission se produit à  $\nu \approx \gamma^2 \nu_L$ , c'est à dire,  $\Phi_\nu(\omega) = \delta(\nu - \gamma^2 \nu_L)$  :

$$\begin{aligned} 4\pi j_\nu &= \frac{4}{3} c\sigma_T U_B n_0 \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} d\gamma \gamma^{-p} \beta^2 \gamma^2 \delta(\nu - \gamma^2 \nu_L) = \frac{4}{3} c\sigma_T U_B n_0 \left. \frac{(\gamma^{2-p})}{\left| \frac{d}{d\gamma} (\nu - \gamma^2 \nu_L) \right|} \right|_{\gamma=\sqrt{\nu/\nu_L}} \\ &= \frac{2}{3} c\sigma_T U_B n_0 \frac{1}{\nu_L} (\gamma^{1-p})_{\gamma=\sqrt{\nu/\nu_L}} = \frac{2}{3} c\sigma_T U_B \frac{n_0}{\nu_L} \left( \frac{\nu}{\nu_L} \right)^{-\frac{p-1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{D.30})$$

avec  $\gamma_{\min}^2 \nu_L < \nu < \gamma_{\max}^2 \nu_L$ . L'exposant  $\frac{p-1}{2}$  est dénommé l'indice spectral. Il est possible de déterminer la pente  $p$  de la distribution d'électron en loi de puissance à partir de l'indice spectral comme indiqué Fig. D.2.

## D.2 Diffusion Compton, effet Compton inverse

Lorsqu'un électron initialement au repos diffuse un photon, il y a recul de l'électron, et l'énergie du photon est moindre que celle du photon incident. Cette perte d'énergie, due au recul, disparaît dans la limite  $\hbar\omega \ll m_e c^2$ . La diffusion devient alors élastique dans le référentiel de l'électron diffuseur. Il y a deux cas limites intéressants (Heyvaerts, cours DEA) :

a) Les diffuseurs sont sous-relativistes :

Soit  $\vec{v}$  la vitesse de l'électron par rapport à l'observateur,  $(\omega_1, \vec{k}_1)$  les attributs de l'onde incidente et  $(\omega_2, \vec{k}_2)$  ceux de l'onde diffusée dans ce référentiel. Dans le référentiel de repos de l'électron, on obtient pour les deux ondes diffusées  $(\omega'_1, \vec{k}'_1)$ ,  $(\omega'_2, \vec{k}'_2)$  données par la transformation de Lorentz :

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ k'_y \\ k'_z \\ \frac{\omega'}{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega & 0 & 0 & -\beta\omega \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \cos \theta \\ k \sin \theta \cos \phi \\ k \sin \theta \sin \phi \\ \frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \quad (\text{D.31})$$

Si la diffusion dans le référentiel de repos de l'électron a lieu en régime Thomson,  $\omega'_2 = \omega'_1$ .

Pour l'observateur, ceci se traduit par

$$\omega_2 = \omega_1 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{v} \quad (\text{D.32})$$

Il y un léger changement de fréquence qui peut être négatif ou positif selon la déflexion subie par le photon. Si un photon subit des diffusions multiples, il marche au hasard sur l'axe des fréquences. Cet effet, appelé "Comptonisation" étale une raie fine, et remodèle un spectre continu.

b) Les diffuseurs sont ultrarelativistes :

Si l'on observe une onde  $(\omega_1, \vec{k}_1)$ , elle est vue par l'électron dans son référentiel instantané de repos comme une onde  $(\omega'_1, \vec{k}'_1)$ , avec  $\omega'_1 = \gamma(\omega_1 - \vec{k}'_1 \cdot \vec{v})$ . En supposant que dans ce référentiel la diffusion ait lieu en régime Thomson, l'onde diffusée y aura les attributs  $(\omega'_2, \vec{k}'_2)$ , avec  $\omega'_2 = \omega'_1$ .

En revenant dans le référentiel de l'observateur par une transformation de Lorentz de paramètre  $(-\vec{v})$ , l'onde diffusée sera vue avec une fréquence :  $\omega_2 = \gamma(\omega'_2 + \vec{k}'_2 \cdot \vec{v})$ .

En posant  $\theta'_2$  le paramètre d'angle de diffusion, on obtient ainsi :

$$\omega_2 = \gamma\omega'_2(1 + \beta \cos \theta'_2) \quad (\text{D.33})$$



Puisque  $\omega'_2 = \omega'_1$ , si la diffusion est élastique dans le référentiel du diffuseur, c'est à dire si  $\hbar\omega'_1 \ll m_e c^2$ , on en déduit :

$$\omega_2 = \gamma\omega'_1(1 + \beta \cos \theta'_2) = \gamma [\gamma\omega_1(1 - \beta \cos \theta_1)] (1 + \beta \cos \theta'_2) \quad (D.34)$$

soit, puisque dans cette limite  $\beta \approx 1$  :

$$\omega_2 = \gamma^2\omega_1(1 - \cos \theta_1)(1 + \cos \theta'_2) \quad (D.35)$$

Ce processus, qui peut transformer directement, par exemple, des photons optiques en  $X$  ou  $\gamma$ , par "collision" particules relativistes / photons mous, est appelé effet Compton inverse. Il s'observe dans des milieux où la densité de particules de haute énergie est grande. Dans le processus Compton inverse, les électrons ultra-relativistes diffusent les photons de basse énergie vers les hautes énergies si bien que les photons gagnent de l'énergie aux dépens de l'énergie cinétique des électrons. On peut considérer que l'énergie du photon dans le référentiel du centre de masse est beaucoup plus petit que  $m_e c^2$  si bien que la section efficace de diffusion Thomson peut être utilisée pour décrire le phénomène. Le taux d'énergie perdue dans le référentiel de repos de l'électron  $R'$  est la partie de l'énergie réémise par l'électron :

$$-\left(\frac{dE}{dt}\right)' = \sigma_T c U'_{\text{emis}} \quad (D.36)$$

où  $U'_{\text{emis}}$  est la densité d'énergie du rayonnement dans le référentiel de l'électron.

Si l'on considère la densité d'énergie des photons dans le laboratoire  $N\hbar\omega$ , alors la densité de flux de photons obtenu sur un électron au repos dans le référentiel du laboratoire  $R$  est :  $U_{\text{emis}}c = N\hbar\omega c$ . Le calcul de la densité d'énergie observée dans le référentiel de repos de l'électron suppose que le champ de radiation est isotropique dans  $R$ . Par conséquent :

$$U'_{\text{emis}} = U_{\text{emis}} \int_0^\pi \gamma^2 \left[1 + \left(\frac{v}{c}\right) \cos \theta\right]^2 \frac{1}{2} \sin \theta d\theta = \frac{4}{3} U_{\text{emis}} \left(\gamma^2 - \frac{1}{4}\right) \quad (D.37)$$

où la vitesse du centre de masse est définie par :  $\frac{v}{c} = \frac{\hbar\omega}{m_e c^2 + \hbar\omega}$ . En soustrayant l'énergie initiale des photons de basse énergie, on obtient le taux d'énergie perdue :

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\text{CI}} = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_{\text{emis}} \quad (D.38)$$

qui présente une similarité remarquable avec la puissance synchrotron émise par l'électron (Equation D.1).

## Liste de publications

### E.1 Publications avec comité de lecture

Sauty C., Meliani Z., Lima J.J.G., Tsinganos K., Cayatte V., Globus N., (2011), Nonradial and nonpolytropic astrophysical outflows IX. Modelling of T Tauri jets with low mass accretion rate, *Astronomy & Astrophysics*, 533, pp. 46-57

Globus N., Cayatte V., Sauty C., (2010), On magnetic collimation of relativistic jets, *International Journal of Modern Physics D*, Volume 19, Issue 06, pp. 689-694

Globus N., Allard D., Parizot E., (2008) Propagation of high-energy cosmic rays in extragalactic turbulent magnetic fields : resulting energy spectrum and composition, *Astronomy & Astrophysics*, 479, pp. 97-110

### E.2 Communications

Globus N., Modeling astrophysical jets from Young Stars to Black Holes, *Magnetic Fields in the Universe III*, August 21-27, 2011, Zakopane, Poland.

Globus N., Analytical model for relativistic jets around Kerr black holes, CAUP seminar, November 2nd , 2010, Porto, Portugal.

Globus N., Sauty C., Cayatte V., Meliani Z., Lima J.J.G., Tsinganos K., Michaut C., Modelling of T Tauri jets with low mass accretion rate, *IAU Symposium 275 : Jets at all Scales*, September 13-17, 2010, Buenos Aires, Argentina.

Globus N., Sauty C., Cayatte V., Magnetic collimation of relativistic jets : the role of the black hole spin, *IAU Symposium 274 : Advances in Plasma Astrophysics*, September 6-10, 2010, Giardini-Naxos, Italy.

Globus N., Sauty C., Cayatte V., On magnetic collimation of relativistic jets, *High Energy Phenomena in Relativistic Outflows II*, October 26-30, 2009, Buenos Aires, Argentina.

Sauty, C., Globus, N., Meliani, Z., Tsinganos, K., Vlahakis, N., Trussoni, E., On the Effect of Stellar Wind Braking onto the Central Object, *Protostellar Jets in Context*, July 7-12, 2008, Rhodes, Greece.



## Bibliographie

- Abraham, J. et al. [Pierre Auger Collaboration], 2008, Phys. Rev. Lett., 101, 61101
- Abreu, P. et al. [Pierre Auger Collaboration], 2011, proc. of the 32<sup>nd</sup> international cosmic-ray conference, Beijing (China), arXiv :1107.4804
- Agra-Amboage, V., Dougados, C., Cabrit, S., Garcia, P. J. V., Ferruit, P., 2009, A&A, 493, 1029
- Alfvén, H., 1942, Nature, 150, 405
- Alfvén, H. 1943, ArA, 29, 1
- Allard, D., 2004, Observation des rayons cosmiques ultra énergétiques avec l'Observatoire Pierre Auger et étude théorique de leur propagation dans le milieu extragalactique, mémoire de thèse.
- Allard, D., 2011, Review à paraître dans Astroparticles Physics
- Anderson, J. M., Li, Z.Y., Krasnopolsky, R., Blandford, R. D., 2003, ApJ, 590, L107
- André, P., Deeney, B. D., Phillips, R. B., Lestrade, J.F., 1992, ApJ, 401, 667
- Apel, W. D. et al. [Kascade-Grande collaboration], 2011, Physical Review Letters vol. 107, 171104
- Appl, S., Camenzind, M., 1993, A&A, 270, 71
- Arnowitz, R., Deser, S. & Misner, C.W. 1962, Gravitation : An Introduction to Current Research, ed. L. Witten (New York :Wiley)
- Asano, K., Inoue, S., 2007, ApJ, 671, 645
- Bally, J., Walawender, J., Reipurth, B., Megeath, S. T., 2009, AJ, 137,4, 3843
- Band, D., Matteson, J., Ford, L., et al. 1993, ApJ, 413, 281
- Bardeen J. M., Berger B. K., 1978, ApJ, 221, 105
- Bardeen, J. M., Press, W. H., & Teukolsky, S. A., 1972, ApJ, 178, 347
- Bardeen, J. M., & Petterson, J. A., 1975, ApJ, 195, 65
- Bastien, P., 1996, In : Roberge, W.G., Whittet, D.C.B. (eds.) Polarimetry of the Interstellar Medium. ASP Conference Series, 97, 297
- Beck, T. L., Bary, J. S., McGregor, P. J., 2010, ApJ, 722, 1360
- Begelman, M. C., Blandford, R. D., & Rees, M. J., 1980, Nature, 287, 307
- Beloborodov, A. M., 2003, ApJ, 588, 931

Bertout, C., 1989, ARA&A, 27, 351

Beskin, V. S., 2010, Physics-Uspekhi, V. 53, pp. 1199-1233

Beskin, V. S., Istomin, Y. N., Pared, V. I., 1992, SvA, 36, 642

Beskin, V. S., Kuznetsova, I. V., 2000, NCimB, 115, 795

Biretta, J. A., Zhou, F. et Owen, F.N., 1995, ApJ, 447, 582

Biretta, J. A., Sparks, W. B., et Macchetto, F., 1999, Ap.J., 520, 621

Blandford, R. D., 1976, MNRAS, 176, 465

Blandford, R. D., & Payne, D. G., 1982, MNRAS, 199, 883

Blandford, R. D., & Znajek, R. L., 1977, MNRAS, 179, 433

Blum, J.L. et al., 2009, ApJ, 706, 60

Bosnjak, Z., Daigne, F. et Dubus, G., 2009, A & A, 498, 677

Bouvier, J., Cabrit, S., Fernandez, M., Martin, E. L., Matthews, J. M., 1993, A&AS, 101, 485

Bouvier, J., Covino, E., Kovo, O., Martin, E. L., Matthews, J. M., Terranegra, L., Beck, S. C., 1995, A&A, 299, 89

Bouvier J., Forestini M., Allain S., 1997, A&A, 326, 1023

Breitmoser, E., & Camenzind, M., 2000, A&A, 361, 207

Brenneman, L. W., & Reynolds, C. S., 2006, ApJ, 652, 1028

Bromberg, O. et Levinson, A., 2009, ApJ, 699, 1274

Bykov, A. M., Meszaros, P., ApJ Letters, 1996, 461, 37

Cabrit, S., André, P., 1991, ApJ, 379, 25

Cabrit S., 2007, IAUS, 243, 203

Calvet N., 1998, AIPC, 431, 495

Camenzind M., 1986, A&A, 162, 32

Camenzind, M., 2007, Compact Objects in Astrophysics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Casse, F., Keppens, R., 2004, ApJ, 601, 90

Chandrasekhar, S., 1956, ApJ, 124, 232

Cheung, D.E., Harris, D.E. et Stawarz, L., 2007, 663, 65

Choi, P. I., Herbst, W., 1996, AJ, 111, 283

Cieza, L., Baliber, N., 2007, ApJ, 671, 605

Contopoulos, J., 1994, ApJ, 432, 508

Contopoulos, J., Lovelace, R. V. E., 1994, ApJ, 429, 139

- Cox, A. N. (ed.), 2000, *Allen astrophysical quantities*, 4th ed., Springer
- Daigne, F., & Drenkhahn, G., 2002, *A&A*, 381, 1066
- Daigne, F., Mochkovitch, R., 1998, *MNRAS*, 296, 275
- Daigne, F., Mochkovitch, R., 2000, *MNRAS*, 358, 1157
- Daigne, F., Mochkovitch, R., 2002, *MNRAS*, 336, 1271
- Daigne, F., Bosnjak, Z., Dubus, G., 2011, *A&A*, 526, 110
- Decampli W. M., 1981, *ApJ*, 244, 124
- Donati, J.F., et al., 2008, *MNRAS*, 386, 1234
- Dorodnitsyn, A., Bisnovatyi-Kogan, G.S. et Kallman, T., 2011, *ApJ*, 741, 29
- Dougados, C., Cabrit, S., Lavalley, C., Ménard, F., 2000, *A&A*, 357, 61
- Ecole de Goutelas, 2003, *Physique et Astrophysique du Rayonnement Cosmique* (Parizot, E., Marcowith, A., Tatischeff, V., Pelletier, G. and Salati, P.)
- Ecole des Houches, 2004, *Disque d'accrétion, jets et phénomènes de haute énergie en astrophysique* (V. Beskin, G. Henri, F. Ménard, G. Pelletier et J. Dalibard)
- Edwards, S., et al., 1993, *AJ*, 106, 372
- Edwards, S., Fischer, W., Kwan, J., Hillenbrand, L., Dupree, A. K., 2003, *ApJ*, 599, 41
- Fanaroff, B. L., Riley, J. M., 1974, *MNRAS*, 167, 31
- Fendt, C., 2009, *ApJ*, 692, 346
- Ferreira, J., 1997, *A&A*, 317, 340
- Ferro-Fontan, C., Gomez de Castro, A.I., 2003, *MNRAS*, 342, 427
- Gallant, Y., Achterberg, A., 1999, *MNRAS*, 305, 6
- Gallant, Y. A., 2002, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 589, *Relativistic Flows in Astrophysics*, ed. A. W. Guthmann, M. Georganopoulos, A. Marcowith, & K. Manolakou
- Gebhardt, K. et Thomas, J., 2009, *ApJ*, 700, 1690
- Ghosh, P., Lamb, F. K., 1979a, *ApJ*, 232, 259
- Ghosh, P., Lamb, F. K., 1979b, *ApJ*, 234, 296
- Giacalone, J., Jorjipii, J. R., 1999, *ApJ*, 520, 204
- Gialis, D., Pelletier, G., 2003, *Astroparticle Physics*, 20 pp. 323
- Ginzburg, V.L. et Syrovatskii, S.I., 1969, *ARA&A*, 7, 375
- Globus, N., Allard, D., Parizot, E., 2008, *A&A*, 479, 97
- Globus, N., Sauty, C., Cayatte, V., 2010, *IAUS*, 274, 246

Goldreich, P., Julian, W. H., 1969, ApJ, 157, 869

Gomez de Castro, A.I., Verdugo, E., 2001, ApJ, 548, 976

Gomez de Castro, A.I., Verdugo, E., 2007, ApJ, 654, 91

Goodman, J., 1986, ApJ, 308, 47

Gou, L. et al., 2011, ApJ (in press) arXiv :1106.3690

Gourgoulhon, E., Markakis, C., Uryu, K., Eriguchi, Y., 2011, PhysRev D 83, 104007

Gracia, J.; Vlahakis, N.; Tsinganos, K. 2006, MNRAS, 367, 201

Greisen, K., 1966, PRL 16 748

Guiriec, S. et al. [Fermi Collaboration], 2011, ApJ Letters, 727, 33

Gunther, H. M., Matt, S. P., Li, Z.Y., 2009, A&A, 493, 579

Hameury, J.M., Marck, J.A., Pelat, D., 1994, A&A, 287, 795

Hannikainen, D. C. et al., 2003, A&A, 411, 415

Hartigan, P., Edwards, S., Ghandour, L., 1995, ApJ, 452, 736

Henri, G., Pelletier, G., 1991, ApJ, 383, 7

Herbst, W., Mundt, R., 2005, ApJ, 633, 967

Herbst, W., Eisloffel, J., Mundt, R., Scholz, A., 2007, in Protostars and Planets, V, B. Reipurth, D. Jewitt, and K. Keil (eds.), University of Arizona Press, Tucson, 951, 297

Heyvaerts, J., et Norman, C., 1989, ApJ, 347, 1055

Hillas, A. M., 1984, ARA&A, 22, 425

Horiuchi, S., Meier, D. L., Preston, R. A., Tingay S. J., 2006, PASJ, 58, 211

Jackson, J. D., 1999, Classical Electrodynamics, 3rd ed.

Jones, F. C., 1968, PhRv, 167, 1159

Junor, W., Biretta, J. A., Livio, M., 1999, Nature, 401, 891

Kennel, C. F., Fujimura, F. S., Okamoto, I., 1983, GApFD, 26, 147

Kerr, R. P., 1963, Phys. Rev. Lett. 11, 237, 238

Koide, S., Shibata, K., Kudoh, T., 1998, ApJ,

Koide, S., Shibata, K., Kudoh, T., 1999, ApJ, 522, 727

Koide, S., 2003, PhRvD, 67, 4010

Koide, S., Arai, K., 2008, ApJ, 682, 1124

Komissarov, S., 2001, MNRAS, 326, L41

Komissarov, S., 2004, MNRAS, 350, 1431

Komissarov, S., 2004, MNRAS, 350, 427

Komissarov, S., 2005, MNRAS, 359, 801

Kopp R.A., Holzer T.E., 1976, Sol. Phys., 49, 43

Krasnopolsky, R., Li, Z.Y., Blandford, R. D., 2003, ApJ, 595, 631

Krichbaum, T.P. et al., 2006, Journal of Physics, 54, 328

Küker, M., Henning, T., Rüdiger, G., 2003, ApJ, 589, 397

Kundurthy, P., Meyer, M.R., Robberto, M. Beckwith, S. V. W., Herbst, T., 2006, AJ, 132, 2469

Kwan J., Edwards S., Fisher W., 2007, ApJ, 657, 897

Lavalley-Fouquet, C., Cabrit, S., Dougados, C., 2000, A&A, 356, L41

Lemoine, M., 2003, A&A, 390, L31

Lemoine, M., Pelletier, G., Revenu, B., 2006, ApJ 645, L129

Lemoine, M. & Revenu, B. 2006, MNRAS, 366, 635

Levinson, A. et Rieger, F., 2011, ApJ, 730, 123

Li, Z.Y., Chiueh, T., & Begelman, M. C., 1992, ApJ, 394, 459

Li, Y.R. et al., 2009, ApJ, 699, 513

Longair, M. S., 1981, High energy astrophysics, ed. M. S. Longair

Lovelace, R. V. E., 1976, Nature, 262, 649

Ly, C., Walker, R. C., Junor, W., 2007, ApJ, 660, 200

Lynden-Bell, D., 1969, Nature, 223, 690

Lyutikov, M., 2009, MNRAS, 396, 1545

Madrid, J. M., 2009, A.J., 137, 3864

Marconi, A. et al., 2003, ApJ, 586, 868

Marilli, E. et al., 2007, A&A, 463, 1081

Matt, S., Winglee, R., Böhm, K.-H., 2003, MNRAS, 345, 660

Matt, S., Pudritz, R. E., 2005, ApJ, 632, 135

Matt, S., Pudritz, R. E., 2008a, ApJ, 678, 1109

Matt, S., Pudritz, R. E., 2008b, ApJ, 681, 391

Matt, S.P., Pinzón, G., De la Reza, R. Greene, T.P., 2010, ApJ, 714, 989

Matsakos, T., Tsinganos, K., Vlahakis, N., Massaglia, S., Mignone, A., Trussoni, E., 2008, A&A, 477, 521



- Matsakos, T., Massaglia, S., Trussoni, E., Tsinganos, K., Vlahakis, N., Sauty, C., Mignone, A., 2009, *A&A*, 502, 217
- Matveyenko, L.I. et Seleznev, S.V., 2011, *Astron.Let.*, 37, 8
- Mazzali, P. A. et al., 2003, *ApJ*, 599, 95
- McClintock, J. E., et al., 2006, *ApJ*, 652, 518
- MacDonald, D., Thorne, K. S., 1982, *MNRAS*, 198, 345
- McKinney, J. C., 2006, *MNRAS*, 368, 1561
- McKinney, J. C., & Narayan, R., 2007, *MNRAS*, 375, 513
- Meliani, Z., 2004, *Modélisation de vents et de jets relativistes*, mémoire de thèse.
- Meliani, Z., Sauty, C., Vlahakis, N., Tsinganos, K. & Trussoni, E., 2006, *A&A*, 447, 797
- Meliani, Z., Sauty, C., Tsinganos, K., Trussoni, E. & Cayatte, V., 2010, *A&A*, 521, 67
- Mestel, L., 1968 a, *MNRAS*, 138, 359
- Mestel, L., 1968 b, *MNRAS*, 140, 177
- Metzger, B. D., Giannios, D., Horiuchi, S., 2011, *MNRAS*, 415, 2495
- Michel, F. C., 1973, *ApJ*, 180, 207
- Miller-Jones, J. C. A., Fender, R. P., Nakar, E., 2006, *MNRAS*, 367, 1432
- Misner, C. W., Thorne, K. S. & Wheeler, J. A., 1970, *Gravitation* (San Fransisco : Freeman)
- Mobarry, C. M., & Lovelace, R. V. E., 1986, *ApJ*, 309, 455
- Moderski, R., Sikora, M., Coppi, P. S., Aharonian, F., 2005, *M.N.R.A.S.*, 363, 954
- Mora A., et al., 2001, *A&A*, 378, 116
- Mucke A., Engel R., Rachen J. P., Protheroe R. J., and Stanev T. 2000, *Comp. Phys. Com.*, 124, 290
- Mundt, R. et Fried, J. W. 1983, *Ap.J.*, 274, 83
- Murase K., Ioka K., Nagataki S., Nakamura T., 2008, *Phys. Rev. D*, 78, 23005
- Nagano, M., Watson, A.,A., 2000, *RvMP*, 72, 689
- Nakamura, M., Meier, D.L. et Garofalo, D., 2010, *Ap&SS*, 392
- Niemiec, J., Ostrowski, M., 2004, *ApJ*, 610, 851
- Niemiec, J., Ostrowski, M., 2006, *ApJ*, 641, 984
- Niemiec, J., Ostrowski, M., Pohl, M., 2006, *ApJ*, 650, 1020
- Novikov, I. D., & Thorne, K. S. 1973, in *Black Holes (Les Astres Occlus)*, ed. DeWitt, C. and DeWitt, B. S. (New York : Gordon and Breach), 343

Ouyed, R., Pudritz, R.E., 1997, ApJ, 482, 712

Owen, F.N., Eilek, J.A. et Kassim, N.E., 2000, ApJ 543, 611

Pacholczyk, A.G., 1970, San Francisco : Freeman

Paciesas, W. S. et al. The Fourth BATSE Gamma-Ray Burst Catalog (Revised). The Astrophysical Journal Supplement Series (1999) vol. 122 pp. 465

Pelletier, G., Pudritz, R. E., 1992, ApJ, 394, 117

Penrose, R., 1969, Nuovo Cimento, 1, 252

Pereyra, A. et al., 2009, A&A, 501, 595

Perlman, E.S. et al., 2007, ApJ, 663, 808

Perlman, E.S. et al., 2011, arXiv :1109.6252v1

Petrov P. P., Zajtseva G. V., Efimov Y. S., Duemmler R., Ilyin I. V., Tuominen I., Shcherbakov V. A., 1999, A&A, 341, 553

Phinney, E. S., Ph. D. dissertation, University of Cambridge (1983)

Porth, O., Fendt, C., 2010, ApJ, 709, 1100

Porth, O., Fendt, C., Meliani, Z., Vaidya, B., 2011, ApJ, 737, 42

Pudritz, R. E., Norman, C. A., 1986, ApJ, 301 571

Punsly, B., & Bini, D., 2004, ApJ, 601, 135

Punsly, B., 2008, Black Hole Gravitohydrodynamics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Rachen, J. P., 1996, Interaction processes and statistical properties of the propagation of cosmic-rays in photon backgrounds, PhD thesis of the Bohn University

Rebull, L. M., Wolff, S. C., Strom, S. E., 2004, AJ, 127, 1029

Rebull, L. M., Stauffer, J. R., Megeath, S. T., Hora, J. L., Hartmann, L., 2006, ApJ, 646, 297

Rees, M. J., Meszaros, P., ApJ, 1994, 430, 93

Reynolds, C. S., Nowak, M. A., 2003, PhR, 377, 389

Romanova, M. M., Ustyugova, G. V., Koldoba, A. V., Lovelace, R. V. E., 2009, MNRAS, 399, 1802

Romanova, M. M., Ustyugova, G. V., Koldoba, A. V., Chechetkin, V. M., Lovelace, R. V. E., 1997, ApJ, 482, 708

Rosso, F., Pelletier, G., 1994, A&A, 287, 325

Rybicki, G., B. et Lightman, A.P., 1979, New York, Wiley-Interscience

St-Onge, G., Bastien, P., 2008, ApJ, 674, 1032

Sakurai, T., 1985, A&A, 152, 121

- Sauty, C., 1993, Des vents aux jets : étude des effets d'anisotropie dans les écoulements MHD, mémoire de thèse.
- Sauty, C., Tsinganos, K., 1994, A&A, 287, 893
- Sauty, C., Tsinganos, K., Trussoni E., 1999, A&A, 348, 327
- Sauty, C., Trussoni, E., Tsinganos, K., 2002, A&A, 389, 1068
- Sauty, C., Tsinganos, K., Trussoni, E., Meliani, Z., 2003, Ap&SS, 287,25
- Sauty, C., Trussoni, E., Tsinganos, K., 2004, A&A, 421, 797
- Sauty, C., Meliani, Z., Lima, J. J. G., Tsinganos, K., Cayatte, V., Globus, N., 2011, A&A, 533, 46
- Schatzman, E., 1962, AnAp, 25, 18
- Schwartz, K. ; Schubert, G., ApS&S, 5, 444, 1969
- Schwarzschild, K., 1916, Sitzber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. Tech. , 189
- Sikora, M., Stawarz, L., Lasota, J.P., 2007, ApJ, 658, 815
- Sironi, L., Spitkovsky, A., 2011, ApJ, 726, 75
- Smith, R. J., Lucey, J. R., Hudson, M. J., Schlegel, D. J., et Davies, R. L., 2000, MNRAS, 313, 469
- Sol, H., Pelletier, G. & Asseo, E., 1989, MNRAS, 237, 411
- Somov, B. V., Plasma astrophysics, 2006, Springer
- Spruit H. C., 1997, LNP, 487, 67
- Stassun K. G., Mathieu R. D., Mazeh T., Vrba F. J., 1999, AJ,117, 2941
- Stassun K. G., Mathieu R. D., Vrba F. J., Mazeh T., Henden A., 2001, AJ, 121, 1003
- Stawarz, L. et al., 2006, MNRAS, 370, 981
- Stone, J. M., Norman, M. L., 1994, ApJ, 433, 746
- Stute, M., Tsinganos, K., Vlahakis, N., Matsakos, T., Gracia, J., 2008, A&A, 491, 339
- Synge, J. L., 1957, The Relativistic Gas (North-Holland, Amsterdam, 1957)
- Tchekhovskoy, A., Narayan, R. & McKinney, J. C., 2010, ApJ, 711, 50
- Thompson, C., 2008, ApJ, 688, 1258
- Thorne, K. S., Price, R. H. & McDonald, D. A., eds, Black Holes : The Membrane Paradigm. Yale University Press
- Thorne, K. S., 1988, Gravitomagnetism, Jets in quasars, and the Stanford Gyroscope Experiment, from the book Near Zero : New Frontiers of Physics, 1988, Freeman and Company, New York.
- Tsinganos, K. C., 1982, ApJ, 252, 775
- Uchida, Y., Shibata, K., 1985, PASJ, 37, 515

Urry, C. M., Padovani, P., 1995, *PASP*, 107, 803

Ustyugova, G.V., Lovelace, R.V.E., Romanova, M.M., Li, H., Colgate, S.A., 2000, *ApJ*, 541, 21

Uzdensky, D. A., 2004, *ApJ*, 603, 652

Uzdensky, D. A., 2005, *ApJ*, 620, 889

Vidotto, A. A., Opher, M., Jatenco-Pereira, V., Gombosi, T. I. 2009, *ApJ*, 699, 441

Vidotto, A. A., Opher, M., Jatenco-Pereira V., Gombosi, T. I. 2010, *ApJ*, 720, 1262

Vietri, M., 1995, *ApJ*, 453, 883

Vlahakis, N., & Königl, A., 2003a, *ApJ*, 596, 1104

Vlahakis, N., & Königl, A., 2003b, *ApJ*, 596, 1080

Vlahakis, N., & Königl, A., 2004, *ApJ*, 605, 656

Vlahakis, N., Tsinganos, K., 1998, *MNRAS*, 298, 777

Vlahakis, N., Tsinganos, K., Sauty, C., Trussoni, E., 2000, *MNRAS*, 318, 417

Wald R. M., 1974, *PhRvD*, 10, 1680

Walter, F. M., Brown, A., Mathieu, R. D., Myers, P. C., Vrba, F. J., 1988, *AJ*, 96, 297

Wang, X.-Y., Razzaque, S., Mészáros, P., 2008, *ApJ*, 677, 432

Waters, C., Zepf, S., 2005, *ApJ*, 624, 656

Waxman, E., 1995, *Phys. Rev. Lett.* 75, 386

Waxman, E., Bahcall, J. N., 2000, *ApJ* 541, 707

Weber, E., & Davis, L., 1967, *ApJ*, 148, 217W

Wilson, A. S. et Yang, Y., 2002, *ApJ*, 568, 133

Zanni, C., Ferreira, J., 2009, *A&A*, 508, 1117

Zatsepin, G. T., et Kuzmin, V. A., 1966, *Sov. Phys. JETP Lett.* 4 78

Zhang, S. N., Cui, W., & Chen, W. 1997, *ApJ*, 482, L155



Les figures 4.2, 4.6 et 5.16 ont été réalisées avec VAPOR ([www.vapor.ucar.edu](http://www.vapor.ucar.edu))



## Modélisation des jets relativistes et de l'accélération du rayonnement cosmique

Cette thèse explore divers enjeux liés aux jets relativistes issus des trous noirs. Leur formation ainsi que les processus d'accélération et de collimation sont étudiés par une description fluide dans une approche globale de l'écoulement. Les équations magnétohydrodynamiques en relativité générale peuvent être intégrées en utilisant le formalisme 3+1 afin de passer de l'écriture covariante des équations à une écriture vectorielle, où les grandeurs physiques sont mesurées par un observateur eulérien localement non tournant. Ce formalisme permet d'étudier la physique de la magnétosphère autour d'un trou noir de Kerr, c'est-à-dire la physique d'un plasma fortement magnétisé dans un espace-temps courbe et en rotation différentielle. L'écriture des équations dans ce formalisme et la construction d'un modèle auto-similaire méridien en métrique de Kerr ont permis d'obtenir des solutions de jets relativistes et de décrire la dynamique et la géométrie de l'écoulement proche de l'axe de rotation. En particulier, j'ai étudié le rôle de la rotation du trou noir dans le processus de collimation. J'ai également calculé des solutions dans la limite newtonienne applicables aux jets issus d'étoiles T Tauri afin d'étudier le freinage magnétique et de les comparer à leur généralisation en métrique de Kerr. Les jets relativistes seraient également le siège d'émission de particules ou de photons très énergétiques. En particulier, les sursauts gamma sont considérés comme une source possible du rayonnement cosmique de ultra haute énergie. L'étude de ce problème nécessite une description locale de l'écoulement. Une autre partie de ce travail s'attache à la modélisation de chocs relativistes en fonction des différentes configurations magnétiques ainsi que du rayonnement émis. L'analyse des processus d'accélération et des différents processus de perte d'énergie en compétition permet de voir si l'on peut effectivement accélérer des particules aux énergies observées.

**Mots clés :** jets relativistes – magnétohydrodynamique en relativité générale – rayons cosmiques de ultra haute énergie

## Modeling relativistic jets and cosmic-ray acceleration processes

This thesis explores various issues related to relativistic jets associated with black holes. Their formation as well as the acceleration and collimation processes, are studied using a fluid approximation within a global description of the flow. The general relativistic magnetohydrodynamic equations can be integrated using the 3+1 formalism, and the covariant equations can be transposed to a vectorial form, where the physical vectorial quantities are measured by an Eulerian observer comoving with the rotation, the so-called zero angular momentum observer. This formalism allows us to study the physics of the magnetosphere surrounding a Kerr black hole, i.e., the physics of a strongly magnetized plasma in differential rotation in curved space-time. This formalism enabled me to develop a self-similar meridional model in the Kerr metric that allows us to obtain relativistic jet solutions, and to describe the dynamics, and the geometry of the flow close to the rotational axis. In particular, I have investigated how the rotation of the black hole affects the collimation process. I have found solutions for T Tauri stars in the newtonian approximation in order to study magnetic braking, and to compare them with their generalization in the Kerr metric. Relativistic jets could also be the seat of high-energy corpuscular and photon emission. In particular, gamma-ray bursts could be possible sources of ultra-high-energy cosmic rays. This problem requires the use of a local description of the flow. Finally, we have investigated the propagation of ultra high energy cosmic rays in these shocks, taking into account the competition between relativistic Fermi acceleration and energy loss due to interaction with the gamma ray background, in order to ascertain whether the observed energies can be obtained in this way.

**Keywords :** relativistic jets – general relativistic magnetohydrodynamics – ultra high energy cosmic rays