



Identification de systèmes linéaires à paramètres variant : différentes approches et mises en oeuvre.

Raluca Oroz Liacu

► To cite this version:

Raluca Oroz Liacu. Identification de systèmes linéaires à paramètres variant : différentes approches et mises en oeuvre.. Autre. Supélec, 2014. Français. NNT : 2014SUPL0018 . tel-01123741

HAL Id: tel-01123741

<https://theses.hal.science/tel-01123741>

Submitted on 5 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre : 2014-18-TH

SUPELEC

ECOLE DOCTORALE STITS

« Sciences et Technologies de l'Information des Télécommunications et des Systèmes »

THÈSE DE DOCTORAT

DOMAINE : STIC

Spécialité : Automatique

Soutenue le 30 septembre 2014

Présentée par :

Raluca Liacu

Identification de Systèmes Linéaires à Paramètres Variants (LPV) Différentes approches et mises en œuvre

**Directeur de thèse :
Co-encadrant de thèse :**

**Emmanuel GODOY
Dominique BEAUVOIS**

**SUPELEC
SUPELEC**

Composition du jury :

Président du jury :

Hugues MOUNIER

CNRS/LLS/SUPELEC

Examineurs :

Mohammed M'SAAD

ENSICAEN

Rapporteurs :

Eric OSTERTAG

Univ. de Strasbourg

Thierry POINOT

LIAS Poitiers

Directeur de thèse :

Emmanuel GODOY

SUPELEC

Co-encadrant de thèse :

Dominique BEAUVOIS

SUPELEC

A mon mari et mes parents

To my husband and parents

Remerciements

Je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à mes directeurs de thèse M. Emmanuel Godoy et M. Dominique Beauvois, pour leur disponibilité, leurs conseils et surtout la qualité de leur encadrement. Les discussions et les travaux réalisés ensemble m'ont appris d'une façon professionnelle l'approche des diverses problématiques, ainsi que la patience et la persévérance.

Je souhaite remercier M. Eric Ostertag et M. Thierry Poinot, pour avoir accepté de juger mes travaux de thèse. Leurs conseils m'ont énormément aidé à augmenter la qualité de mes travaux.

Je remercie également à M. Hugues Mounier pour avoir accepté de présider mon jury de thèse.

Mes remerciements vont également vers M. Mohammed M'Saad pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse.

Je tiens à exprimer ma plus grande reconnaissance à M. Patrick Boucher, ancien chef du département d'Automatique, également à M. Didier Dumur, chef du département, pour m'avoir chaleureusement accueillie au sein de l'équipe et avoir mis à ma disposition tous les outils nécessaires au bon déroulement de mes travaux.

Je tiens à remercier toute l'équipe du département, personnel et doctorants pour leur accueil chaleureux, l'ambiance agréable et le bon temps passé ensemble durant ces années.

Je souhaite remercier tous mes amis, qui m'ont encouragée et m'ont accompagnée avec joie durant toute cette période.

J'adresse toute ma reconnaissance et mes plus sincères remerciements à mes parents et à ma famille qui m'ont énormément soutenue et encouragée dans les moments difficiles et avec lesquels j'ai partagé l'immense joie de la réussite.

J'exprime mes plus sincères sentiments et des énormes remerciements à mon mari, Bogdan, pour son soutien, ses conseils et son immense patience lors de la réalisation de cette thèse.

Raluca Liacu

Table des matières

1.	Introduction générale.....	1
1.1.	Le processus d'identification	3
1.2.	Structures des modèles LPV	6
1.3.	Méthodes d'identification	7
1.4.	Motivation et Contributions	8
1.5.	Structuration du manuscrit	10
2.	Représentation et discrétisation des systèmes LPV	13
2.1.	Représentation des modèles LPV.....	15
2.1.1.	Modèles LPV représentés sous une forme Entrée/Sortie	15
2.1.2.	Modèles LPV représentés dans l'espace d'état	15
2.1.2.1.	Modèles LPV à temps continu.....	16
2.1.2.2.	Modèle LPV à temps discret.....	16
2.1.2.3.	Forme polytopique	16
2.2.	Discrétisation de modèles LPV	17
2.2.1.	Cas I ($\mathbf{u}$ – bloqué, $\mathbf{p}$ - bloqué).....	18
2.2.1.1.	Méthode de discrétisation classique.....	20
2.2.1.2.	Méthodes de discrétisation approchées – Méthode d'Euler	21
2.2.1.3.	Méthodes de discrétisation approchées – Méthode de Tustin	22
2.2.2.	Cas II ($\mathbf{u}$ – bloqué, $\mathbf{p}$ - échantillonné).....	23
2.2.3.	Cas III ($\mathbf{u}$ – échantillonné, $\mathbf{p}$ - échantillonné).....	26
2.3.	Différentes approches d'identification	30
3.	Méthodes d'identification	35
3.1.	Brefs rappels sur les méthodes de moindres carrés et de la variable instrumentale 36	
3.1.1.	Formalisme de la méthode de moindres carrés pour le cas des systèmes LTI... 36	

II

3.1.2.	Mise en œuvre de la méthode de moindres carrés pour les systèmes invariants	40
3.1.3.	La méthode des variables instrumentales.....	42
3.1.4.	Méthode de moindres carrés adaptée pour les modèles LPV.....	43
3.1.5.	Méthode de variables instrumentales adaptée pour les modèles LPV	45
3.1.6.	Autre approche pour la méthode de moindres carrés, cas des représentations LPV	46
3.2.	Méthodes à erreur de prédiction.....	49
3.2.1.	Formalisme pour les systèmes LTI	49
3.2.1.1.	Prédicteur de Kalman.....	52
3.2.1.2.	Optimisation par la méthode de Levenberg-Marquardt.....	53
3.2.2.	Méthode à erreur de prédiction pour les modèles LPV.....	55
3.2.2.1.	Représentation du modèle LPV	56
3.2.2.2.	Prédicteur de Kalman adapté au cas LPV	58
3.2.2.3.	Optimisation.....	59
3.3.	Méthodes de sous-espaces.....	61
3.3.1.	Formalisme pour le cas de modèles linéaires en temps invariant (LTI)	61
3.3.1.1.	Operations géométriques	65
3.3.1.2.	Estimation de la séquence d'état, Xp	67
3.3.1.3.	Implantation	71
3.3.2.	Formalisme pour le cas de modèles LPV.....	75
3.3.2.1.	Aspects théoriques	75
3.3.2.2.	Méthode pour construire les matrices des données - méthode de deux blocs	82
3.3.2.3.	Algorithme d'identification pour la méthode de sous-espaces	84
3.3.2.4.	Réduction du nombre de lignes de matrices	85
4.	Identification des modèles LPV académiques	89
4.1.	Identification d'un modèle LPV académique par la méthode de moindres carrés...	89
4.2.	Identification d'un modèle académique par la méthode de la variable instrumentale	96
4.3.	Comparaison des résultats d'identification obtenus par les méthodes de moindres carrés et de la variable instrumentale	98
4.4.	Implantation de la méthode des moindres carrés – approche de Bamieh & Giarre	101
4.5.	Identification d'un modèle académique LPV par les méthodes des sous-espaces.	105
4.5.1.	Données d'identification	108

4.5.2.	Résultats d'identification.....	109
4.5.3.	Validation du modèle identifié.....	111
5.	Identification du comportement latéral d'un véhicule automobile	117
5.1.	Présentation de modèle bicyclette	117
5.2.	Analyse du comportement en fonction de la condition expérimentale	120
5.3.	Discrétisation du modèle bicyclette	124
5.3.1.	Etude du cas I : u bloqué, p bloqué	124
5.3.2.	Etude du cas II : u bloqué, p échantillonné	126
5.3.3.	Etude du cas III : u échantillonné, p échantillonné	129
5.3.4.	Comparaison entre les approximations de la discrétisation exacte	131
5.3.5.	Caractéristiques des modèles discrets	133
5.4.	Identification du modèle de comportement latéral de véhicule par la méthode des moindres carrés, étude en simulation	135
5.4.1.	Conditions de simulation.....	136
5.4.2.	Résultats d'identification.....	137
5.5.	Identification du modèle LPV du comportement latéral d'un véhicule par la méthode à erreur de prédiction. Etude à partir de données expérimentales	141
5.5.1.	Structures du modèle de comportement latéral du véhicule	142
5.5.1.1.	Modèle bicyclette analytique	142
5.5.1.2.	Structure fondée sur le modèle bicyclette	143
5.5.1.3.	Structure entièrement paramétrée	144
5.5.2.	Application de la méthode d'optimisation	146
5.5.3.	Données expérimentales pour l'estimation des paramètres	147
5.5.4.	Identification des structures polytopiques.....	148
5.5.4.1.	Identification d'une structure fondée sur le modèle bicyclette	149
5.5.4.2.	Identification d'une structure entièrement paramétrée	151
5.5.5.	Analyse de résultats d'identification	153
5.5.6.	Validation des modèles identifiés	157
5.6.	Identification du comportement latéral d'un véhicule par la méthode de sous-espaces. Etude à partir de données expérimentales.....	161
5.6.1.1.	Données d'identification.....	161
5.6.1.2.	Mise en œuvre de la méthode « deux blocs »	162
5.6.1.3.	Résultats d'identification	163

5.6.1.4.	Validation du modèle	165
6.	Identification et commande LPV d'un convertisseur de puissance Buck.....	171
6.1.	Caractérisation du convertisseur Buck.....	171
6.2.	Identification du modèle LPV du convertisseur.....	173
6.2.1.	Structure du modèle à identifier	173
6.2.2.	Prototype expérimental et données d'identification.....	175
6.2.3.	Analyse des résultats d'identification	177
6.2.4.	Validation du modèle	181
6.3.	Synthèse $\mathcal{H}^\infty$ LPV appliqué à la commande d'un convertisseur Buck	183
6.3.1.	Formalisme du correcteur $\mathcal{H}^\infty$ LPV.....	184
6.3.2.	Application à un convertisseur Buck	189
6.3.2.1.	Construction du correcteur.....	189
6.3.2.2.	Résultats d'application de correcteur en simulation et expérimentaux.....	191
	<i>Conclusions et perspectives</i>	199
	<i>Bibliographie</i>	207

Table de figures

Figure 1-1 : Procédure d'identification.....	5
Figure 1-2 : Flux d'entrée sortie pour un modèle LPV	6
Figure 1-3 : Systèmes non linéaires.....	9
Figure 2-1 : Système automobile.....	14
Figure 2-2: Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro (ZOH) pour les systèmes LPV	18
Figure 2-3 : Signal d'entrée bloqué	19
Figure 2-4 : Signal de paramètre variant bloqué	19
Figure 2-5 : Discrétisation pour les systèmes LPV	23
Figure 2-6: Signal paramètre variant discrétisé	24
Figure 2-7 : Discrétisation pour les systèmes LPV, échantillonnage des divers signaux..	27
Figure 2-8: Signal d'entrée discrétisé	27
Figure 2-9 : Calcul de l'intégrale par l'approche Tustin	27
Figure 2-10 : Approche d'identification globale	31
Figure 2-11 : Approche d'identification locale	32
Figure 2-12 : Approche d'identification mixte.....	32
Figure 3-1 : Principe de base des méthodes à erreur de prédiction	51
Figure 3-2 : Fonctions de pondération triangulaires.....	57
Figure 3-3 : Formalisme de la méthode des sous-espaces	62
Figure 3-4 : Interprétation d'une projection orthogonale	65
Figure 3-5 : Interprétation d'une projection oblique	66
Figure 3-6 : Projections obliques appliquées sur les matrices des données	68
Figure 3-7 : Projection orthogonale de l'espace image-lignes de N sur le plan formé par M, P	72
Figure 3-8 : Projection oblique de l'espace image-lignes de N , parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P	73
Figure 3-9 : Représentation graphique de l'algorithme de réduction de dimensions.....	87
Figure 4-1 : Caractéristiques fréquentielles du modèle pour les trois valeurs possibles du paramètre	91
Figure 4-2 : Séquence d'entrée aléatoire du modèle LPV	92
Figure 4-3 : Diagrammes de Bode représentant les système et modèles identifiés, pour une valeur de $p = 0$ et des différentes puissances de bruit	94
Figure 4-4 : Fonction d'autocorrélation d'un bruit coloré.....	95
Figure 4-5 : Caractéristiques en fréquence des système réel et modèle identifié MC pour une valeur de $p = 0$	96

Figure 4-6 : Caractéristiques en fréquence des système réel et modèle identifié par la méthode de la variable instrumentale MVI pour une valeur de $p = 0$	97
Figure 4-7 : Comparaison des fonctions d'autocorrélation de l'erreur de prédiction et du bruit de mesure coloré	98
Figure 4-8 : Caractéristiques fréquentielles du système réel <i>Mobs</i> , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = -32$	99
Figure 4-9 : Caractéristiques en fréquence du système réel <i>Mobs</i> , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = 0$	100
Figure 4-10 : Caractéristiques en fréquence du système réel <i>Mobs</i> , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = 32$	100
Figure 4-11 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme <i>LMS</i> , paramètre variant considéré comme une fonction périodique	103
Figure 4-12 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme <i>RLS</i> , paramètre variant considéré comme une fonction périodique	103
Figure 4-13 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme itératif <i>LMS</i> , paramètre variant considéré comme une fonction non périodique	104
Figure 4-14 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme <i>RLS</i> , paramètre variant considéré comme une fonction non périodique	105
Figure 4-15 : Caractéristique en fréquence de fonctions de transfert <i>H1</i> et <i>H2</i> en temps continu et discret.....	107
Figure 4-16 : Données pour l'identification de modèle académique d'ordre 2.....	108
Figure 4-17 : Sortie observée et identifiée de modèle	109
Figure 4-18 : Diagramme de Bode représentant le système et le modèle identifié pour une valeur de $p = \alpha$	110
Figure 4-19 : Diagramme de Bode représentant le système et le modèle identifié pour une valeur de $p = -\alpha$	111
Figure 4-20 : Données (jeu 1) pour validation de modèle académique d'ordre II	112
Figure 4-21 : Comparaison des sorties pour la validation (1) de modèle	112
Figure 4-22 : Données (jeu 2) pour utilisées pour la validation du modèle académique d'ordre 2.....	113
Figure 4-23 : Comparaison des sorties pour la validation (2) de modèle	114
Figure 5-1 : Modèle bicyclette analytique	118
Figure 5-2 : Evolution des pôles et zéros de modèle bicyclette	119
Figure 5-3 : Diagramme de Bode de modèle bicyclette	120
Figure 5-4 : Cas I : Signal d'entrée bloqué, paramètre variant bloqué (UbPb).....	121
Figure 5-5 : Cas II : Signal d'entrée bloqué, paramètre variant continu échantillonné... 121	121
Figure 5-6 : Cas III : Signal d'entrée continu, paramètre variant continu échantillonné (UcPc).....	122
Figure 5-7 : Signal d'entrée en temps continu, utilisé pour exciter le modèle	122
Figure 5-8 : Signal représentant le paramètre variant utilisé pour exciter le modèle	123
Figure 5-9 : Illustration des effets de blocage/non blocage des signaux sur la sortie de modèle LPV continu	123

Figure 5-10 : Comparaison de modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas I de simulation	124
Figure 5-11 : Comparaison entre les sorties des modèle continu et modèle discret, Cas I,	125
Figure 5-12 : Comparaison de modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas II de simulation	127
Figure 5-13 : Comparaison entre les sorties des modèle continu et discret, Cas II,	128
Figure 5-14 : Comparaison du modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas III de simulation.....	129
Figure 5-15 : Comparaison entre les sorties des modèles continu et discret, Cas III,	130
Figure 5-16 : Schéma de comparaison entre les méthodes de discrétisation.....	131
Figure 5-17 : Comparaison entre sortie de modèles discrétisées par différentes méthodes de discrétisation	132
Figure 5-18 : Diagramme de Bode de modèle bicyclette discret.....	134
Figure 5-19 : Données d'identification – modèle bicyclette	137
Figure 5-20 : Diagramme de Bode de modèle identifié	138
Figure 5-21 : Sortie du modèle bicyclette bruitée avec un bruit blanc de puissance $0,01(^{\circ}/s)^2$	139
Figure 5-22 : Diagramme de Bode des modèles analytique et identifié en présence d'un bruit blanc de puissance $0,01(^{\circ}/s)^2$	139
Figure 5-23 : Sortie de modèle bicyclette bruitée avec un bruit blanc de puissance $0,1(^{\circ}/s)^2$	140
Figure 5-24 : Diagramme de Bode de modèle identifié en présence d'un bruit blanc de puissance $0,1(^{\circ}/s)^2$	141
Figure 5-25 : Approche d'identification mixte.....	142
Figure 5-26 : Données expérimentales	148
Figure 5-27 : Constructions des données prédites	154
Figure 5-28 : Construction des données simulées	154
Figure 5-29 : Comparaison des sorties prédites.....	155
Figure 5-30 : Comparaison des sorties simulées	156
Figure 5-31 : Jeu de données utilisé pour la validation des deux structures.....	157
Figure 5-32 : Validation des sorties prédites	158
Figure 5-33 : Validation des sorties simulées.....	159
Figure 5-34 : Diagramme de Bode pour une vitesse de 40 km/h	160
Figure 5-35 : Diagramme de Bode pour une vitesse de 90 km/h	160
Figure 5-36 : Comparaison des sorties correspondant au comportement latéral du véhicule	164
Figure 5-37 : Erreur de simulation pour le modèle identifié	164
Figure 5-38 : Jeu de données (1) utilisé pour la validation du modèle.....	165
Figure 5-39 : Validation du modèle par comparaison de sorties.....	166
Figure 5-40 : Erreur de simulation validation (1).....	166
Figure 5-41 : Jeu de données (2) utilisé pour la validation du modèle.....	167
Figure 5-42 : Validation du modèle avec le jeu de données(2)	168

Figure 5-43 : Erreur de simulation validation (2).....	168
Figure 6-1 : Structure du convertisseur Buck.....	172
Figure 6-2 : Signal de commande de l'interrupteur commandé	172
Figure 6-3 : Prototypage expérimental d'un convertisseur Buck.....	175
Figure 6-4 : Données expérimentales correspondant au convertisseur Buck.....	176
Figure 6-5 : Evolution de la tension de sortie lors du changement de la résistance de charge R	176
Figure 6-6 : Evolution de la tension de sortie lors du changement de rapport cyclique d	177
Figure 6-7 : Sortie prédite correspondant au convertisseur Buck.....	178
Figure 6-8 : Sortie simulée correspondant au convertisseur Buck	179
Figure 6-9 : Réponses fréquentielles pour $R = 2,44\Omega$	180
Figure 6-10 : Réponses fréquentielles pour $R = 13,2\Omega$	180
Figure 6-11 : Evolution des données utilisées pour la validation du modèle	181
Figure 6-12 : Validation des sorties prédites	182
Figure 6-13 : Validation des sorties simulées.....	182
Figure 6-14 : Schéma de principe du modèle de synthèse H^∞	185
Figure 6-15 : Synthèse H^∞ , filtres de pondération	189
Figure 6-16 : Réponse de la tension de sortie à une variation de charge.....	191
Figure 6-17 : Réponse de la tension de sortie à une variation de consigne	192
Figure 6-18 : Réponses fréquentielles des correcteurs initiaux et des correcteurs réduits	193
Figure 6-19 : Réponse de la tension de sortie à une variation de consigne, comparaison de la loi de commande H^∞ et du régulateur PI.....	195
Figure 6-20 : Réponse de la tension de sortie à une variation de charge, comparaison entre H^∞ et PI.....	196
Figure 6-21 : Correcteurs H^∞ résultats de simulation et expérimentaux.....	197
Figure 6-22 : Comparaison des résultats des correcteurs LPV et PI	198

Liste de tableaux

Table 4-1 : Caractérisation de modèle pour différentes valeurs du paramètre variant.....	90
Table 4-2 : Matrices des paramètres estimés pour différentes puissances du bruit de mesure.....	93
Table 4-3 : Rapport signal à bruit.....	93
Table 4-4 : Comparaison des paramètres des différents modèles.....	99
Table 4-5 : Rapport signal à bruit.....	114
Table 4-6 : Valeurs VAF pour l'identification du modèle en présence de bruits de mesure	115
Table 5-1 : Valeurs théoriques des paramètres du modèle bicyclette	118
Table 5-2 : EQM pour les sorties des modèle continu, discret en contexte Cas I	126
Table 5-3 : EQM pour les sorties des modèles continu et discret en contexte Cas II	128
Table 5-4 : EQM pour les sorties des modèles à temps continu et discret dans le contexte du Cas III	130
Table 5-5 : EQM pour les sorties des modèles continu et discret dans le contexte du Cas I pour les différentes méthodes de discrétisation	133
Table 5-6 : Modèles discrets associés aux valeurs de vitesse de 110 km/h et 30 km/h .	134
Table 5-7 : Identification du comportement latéral du véhicule (Méthode à erreur de prédiction) – VAF	157
Table 5-8 : Validation du comportement latéral du véhicule (Méthode à erreur de prédiction) – VAF	159
Table 5-9 : Identification du comportement latéral du véhicule - VAF	169
Table 6-1 : Identification d'un convertisseur Buck (Méthode à erreur de prédiction) - Erreur quadratique moyenne – Résultats d'identification	179
Table 6-2 : Identification d'un convertisseur Buck (Méthode à erreur de prédiction) - Erreur quadratique moyenne – Résultats de validation	183
Table 6-3 : Fonctions de transfert des filtres de pondération	190

Chapitre 1

1. Introduction générale

Les progrès technologiques sont nés de l'étude de l'être humain sur les systèmes avec lesquels on vit. Intuitivement on peut comprendre que le premier élément important pour pouvoir contrôler un système consiste à bien le connaître. Pour l'étude et l'analyse des systèmes il est nécessaire de disposer de copies pertinentes qui permettent de représenter leurs comportements des points de vue statique et dynamique. Ces copies sont représentées par des modèles mathématiques qu'on essaie de réaliser le plus précisément possible, afin d'obtenir un comportement le plus fidèle de la réalité. Dans ce sens, un modèle représente une description des propriétés du procédé, adapté à un certain objectif.

Les lois de la physique, chimie, biologie, etc. peuvent être utilisées pour construire un modèle statique et (ou) dynamique. Habituellement les modèles créés de cette manière peuvent se révéler très complexes. L'approche de modélisation analytique peut se révéler longue et peut aussi nécessiter généralement, une phase d'identification permettant d'obtenir les valeurs de certains paramètres.

En revanche les systèmes peuvent être représentés par des modèles dont les valeurs des paramètres sont obtenues directement en utilisant des techniques d'identification fondées sur l'exploitation de résultats expérimentaux. Le modèle est alors déduit en utilisant un algorithme opérant à partir des signaux d'entrée et de sortie du système.

L'identification de modèles des systèmes n'est pas un sujet nouveau, il a été beaucoup étudié et utilisé tant dans le monde de la recherche que celui du développement industriel. Les démarches les plus courantes utilisent plutôt des structures de modèles à temps invariants(LTI). Ces modèles ont démontré leur utilité dans beaucoup d'applications d'ingénierie. Aujourd'hui l'identification des systèmes LTI est devenue un cadre fort, avec un vaste champ d'applications expérimentales.

Mais, le besoin d'exploitation des systèmes avec plus de précision et d'efficacité conduit naturellement au besoin de prendre en compte la nature non linéaire présente dans beaucoup des systèmes physiques. Malgré les nombreuses solutions théoriques existantes pour l'identification de modèles non linéaires, cette approche reste en pratique un

problème complexe. Pour cette raison, l'utilisation de modèles LTI est préférée lorsque cela est possible. Il a été observé que le comportement de beaucoup de systèmes non linéaires peut être approché par un ensemble de modèles LTI, qui décrivent localement leur comportement autour de certains points de fonctionnement. Suite à cette démarche, le besoin d'une nouvelle classe qui sert comme une extension des méthodes LTI connues, mais qui est encore capable d'incorporer les aspects non linéaires, est apparue. Cette nouvelle classe de modèles prend la forme de modèles linéaires à paramètres variants (LPV).

Par ailleurs, dans le cas de la commande LPV, les techniques de séquençement de gains sont utilisées. Le concept de base est de linéariser le modèle autour de différents points de fonctionnement, ce qui crée un ensemble de modèles LTI locaux et de régulateurs LTI déterminés pour chaque point de fonctionnement. Les régulateurs sont ensuite interpolés afin de fournir une solution globale pour l'ensemble du domaine de fonctionnement. Les fonctions d'interpolation utilisées sont dépendantes du point de fonctionnement courant par le biais de la connaissance des paramètres variants supposés mesurés ou connus. L'utilisation de modèles LPV fournit un cadre permettant d'analyser les propriétés des systèmes, comme la stabilité globale par exemple. Dans ce contexte les approches fondées autour de modèles LPV fournissent un cadre fort pour l'analyse et la commande des systèmes. Il existe un nombre important d'applications fondées sur l'utilisation de ces méthodes, par exemple : dans (Ganguli, Marcos, & Balas, 2002) un régulateur LPV pour le Boeing 747 est réalisé, commande LPV d'un scanner plaquette pour la fabrication de circuits intégrées présenté dans (Wassink, van de Wal, Scherer, & Bosgra, 2005), dans le domaine de conversion d'énergie éolienne, commande d'un système de suspension magnétique (Lu, Choi, Buckner, & Tammi, 2008), commande de fauteuil roulant présenté par (Vermeiren, Dequidt, Guerra, Rago - Tirmant, & Parent, 2011).

Au regard de cet intérêt pour les approches LPV dans le cadre de la commande il est nécessaire aussi de développer des outils spécifiques en vue d'identifier directement des modèles de comportement ayant cette structure. Comme dans le cas des correcteurs, la philosophie des modèles LPV consiste aussi à représenter la réalité physique comme un ensemble des modèles LTI, développés en différents points de fonctionnement, pour décrire la continuité du comportement du système. En dépit des avantages de l'utilisation de ce type de modèles, le champ d'identification LPV n'a pas encore atteint sa maturité et reste un champ de recherche important.

Un cadre de référence pour l'identification de modèles LPV est donné par (Bamieh & Giarré, 2002), où les modèles LPV sont utilisés pour représenter des classes de systèmes discrets non linéaires. Dans ces travaux les auteurs considèrent que les entrées, les sorties, et les paramètres variants sont mesurables, et que la forme de dépendance fonctionnelle des coefficients du modèle par rapport aux paramètres variants est connue. Les coefficients inconnus sont identifiés par la méthode des moindres carrés.

Dans les années 2000 (Verdult & Verhaegen, Identification of Multivariable Linear Parameter-Varying systems Based on Subspace Techniques, 2000) ont introduit les méthodes de sous-espaces pour les modèles LPV. Dans ses travaux de thèse, (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002) fournit un cadre général pour l'identification des modèles LPV.

L'identification LPV a été aussi appliquée à l'identification de modèles de pendules inverses (Boonto & Werner, 2008), à la modélisation de robots manipulateurs (Hashemi, Abbas, & Werner, 2011), des modèles qui décrivent le comportement d'un bras humain (Takahashi & Massaquoi, 2007).

Dans le contexte de la modélisation de systèmes non linéaires du point de vue applicatif nos travaux de thèse se focalisent sur l'identification d'un dispositif de conversion d'énergie et du comportement latéral d'un véhicule automobile, directement sous la forme de modèles LPV. Ainsi, nos objectifs sont d'étudier et d'appliquer des méthodes et d'outils d'identification prenant en compte le caractère LPV des modèles.

Dans ce chapitre la notion générale, le concept, la structure ainsi que l'état de l'art dans l'identification des systèmes LPV sont présentés. Différentes structures de modèles LPV et méthodes d'identification possibles sont présentées. Aussi, une vue globale sur le processus d'identification est donnée.

Dans le paragraphe suivant les éléments clefs pour le processus d'identification dans le cadre classique sont présentés.

1.1. Le processus d'identification

On suppose que l'identification est possible à partir des données expérimentales et que les expériences sont faites en boucle ouverte. Dans le processus d'identification il existe un ensemble d'étapes qui doit être respecté :

- Le contenu spectral du signal d'entrée doit être suffisamment riche et en particulier dans la bande de fréquences pertinente pour l'objectif de l'identification. Pour obtenir un modèle pertinent, il est important d'exciter le processus avec toutes les fréquences de sa plage de fonctionnement.
- Structure du modèle. Le choix de la structure du modèle est extrêmement important, il détermine la classe dans laquelle une description souhaitable du système est cherchée. Les éléments généraux qui doivent être pris en compte dans cette étape sont : la forme de représentation du modèle (espace d'état, entrée/sortie), le paramétrage et l'ordre du modèle.
- Critère d'identification défini par le choix d'une formulation mathématique pour la mesure des performances du modèle estimé. Dans la littérature, différentes formes de

critères d'identification sont proposées mais la plus utilisée est l'erreur quadratique moyenne de la sortie prédite du modèle estimé.

- Estimation du modèle : l'algorithme qui fournit le modèle estimé, à partir de la structure et du critère choisis.
- La validation du modèle est aussi un élément important. Il est nécessaire de réaliser plusieurs tests de vérification qui impliquent des procédures et des signaux d'excitation différents, pour évaluer la façon dont le modèle permet d'estimer les sorties observées. Pour cette étape il est nécessaire d'utiliser des mesures différentes de celles utilisées pour l'identification.

Dans un premier temps il s'agit de recueillir des données, puis de choisir une structure de modèle, un critère d'ajustement et à la fin retenir le meilleur modèle. Il est probable que le premier modèle obtenu ne permette pas d'obtenir le niveau de précision souhaité, il sera alors nécessaire de revenir en arrière et revoir les différentes étapes de la procédure.

Le processus d'identification est présenté par le schéma de la Figure 1-1 (Ljung, 1999).

Au départ le système est analysé pour appréhender son comportement et obtenir un ensemble d'informations qui puissent aider à la construction du modèle. En fonction des connaissances sur le système, un plan d'expériences est défini en prenant en compte les contraintes et les limitations. L'expérience doit être mise en pratique de telle façon que les données acquises soient obtenues en excitant toute la gamme de fréquences permettant de couvrir la plage la plus vaste possible des situations de son fonctionnement.

Après avoir recueilli les données, suite à l'analyse qui a été faite au préalable, une structure de modèle est choisie.

Le but du modèle est de représenter la réalité de façon la plus précise possible. Pour atteindre cet objectif un critère d'ajustement doit être choisi.

Pour conclure à la pertinence du modèle, des tests de validation sont effectués : un nouveau jeu de données est utilisé et le comportement du modèle est comparé avec la réalité.

Le modèle peut être déficient pour différentes raisons :

- l'ensemble de données n'est pas assez informatif pour obtenir une excitation pertinente du procédé à identifier,
- la structure du modèle n'est pas appropriée,
- le critère n'a pas été bien choisi,
- l'algorithme numérique n'a pas permis de trouver le meilleur modèle au regard du critère imposé.

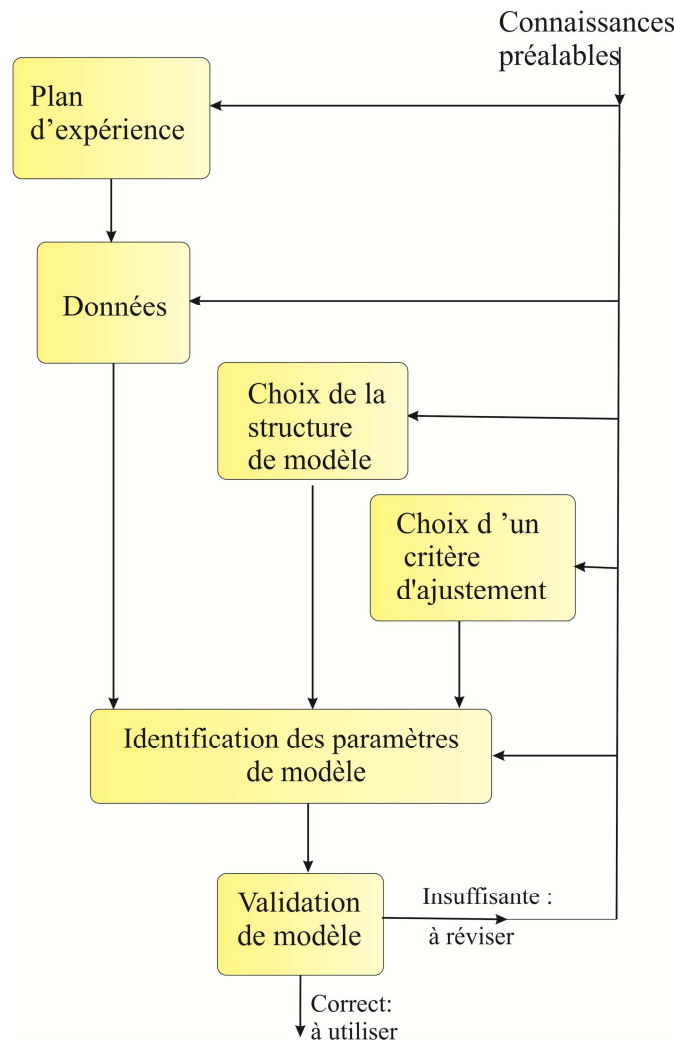


Figure 1-1 : Procédure d'identification

Si les résultats obtenus avec le modèle identifié ne sont pas satisfaisants, il sera nécessaire de revenir aux étapes précédentes et d'analyser en particulier si les données sont assez riches, si la structure de modèle et la méthode d'identification sont convenablement choisies. Le modèle sera reconstruit jusqu'à ce que la validation soit effectuée avec succès.

Dans le paragraphe suivant quelques représentations de modèles LPV sont brièvement présentées. Une analyse plus précise est effectuée dans le chapitre II de ce mémoire.

1.2. Structures des modèles LPV

Les systèmes LPV peuvent être interprétés comme une relation linéaire entre le signal d'entrée u et le signal de sortie y , où la relation dépend d'une variable externe p (Figure 1-2).

Dans cette thèse deux structures de modèles assez classiques sont plus particulièrement abordées dans le cadre LPV : structure entrée-sortie et structure dans l'espace d'état. La structure de modèle LPV entrée/sortie (E/S) est dérivée de la structure E/S LTI. En temps discret, elle est définie selon la forme suivante :

$$y = -\sum_{i=1}^{n_a} a_i(p)q^{-i}y + \sum_{j=0}^{n_b} b_j(p)q^{-j}u, \quad 1.1$$

avec $n_a \geq 0$ et $n_b \geq 0$ et les coefficients $\{a_i\}_{i=1}^{n_a}$ et $\{b_j\}_{j=0}^{n_b}$ sont des fonctions du paramètre variant p .

La structure dans l'espace d'état est aussi inspirée par la représentation classique des modèles LTI. En temps continu elle a la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B(p)u \\ y &= C(p)x + D(p)u \end{aligned} \quad 1.2$$

où $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente l'entrée, $y \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente la sortie, et $A(p), B(p), C(p), D(p)$ sont les matrices du système variant dans le temps. Un système LPV peut être aussi interprété comme un système non linéaire qui est linéarisé au long d'une trajectoire variante dans le temps, déterminée par le vecteur des paramètres p . Chaque point de linéarisation est représenté par un modèle LTI local. Le système LPV est ainsi construit par l'interpolation de modèles locaux.

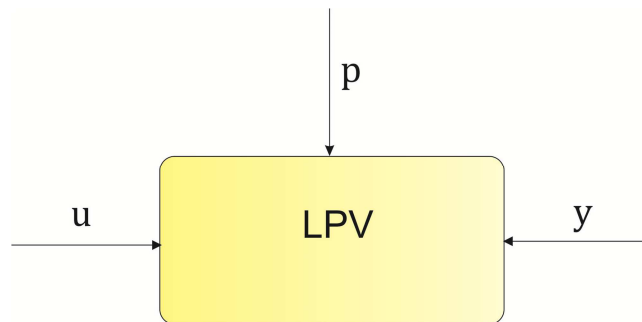


Figure 1-2 : Flux d'entrée sortie pour un modèle LPV

La section suivante présente quelques aspects sur les méthodes d'identification. Une analyse plus précise est effectuée dans le chapitre III de ce mémoire.

1.3. Méthodes d'identification

Les méthodes d'identification se classifient en deux grandes catégories : paramétriques et non paramétriques. Les méthodes non paramétriques ont comme but de déterminer des modèles par des techniques directes, sans établir une classe des modèles a priori. Elles s'appellent non paramétriques parce qu'elles n'impliquent pas un vecteur de paramètres à chercher pour représenter le modèle.

Les méthodes paramétriques sont fondées sur des structures de modèles choisies a priori et paramétrées. Dans ce cas, le but est de trouver un vecteur de paramètres θ , qui va permettre d'obtenir un modèle représentant le comportement le plus proche possible du système réel. La recherche pour le meilleur modèle devient un problème d'estimation de θ .

Dans ces travaux de thèse, l'accent est porté sur les méthodes paramétriques. Au cours de nos travaux, des méthodes fondées sur la minimisation d'erreur de prédiction, entre la sortie du modèle et la sortie mesurée du système, ou encore des méthodes classiques développées pour les systèmes LTI et adaptées pour prendre en compte les modèles LPV, sont abordées. Différents algorithmes sont implantés, correspondant aux méthodes des moindres carrés et méthodes à erreur de prédiction. En utilisant des notions géométriques comme projections des espaces des lignes de différentes matrices, des développements sur les méthodes de sous-espaces ont été également faits.

Le paramétrage des modèles peut être fait de deux façons :

- à partir d'un modèle analytique,
- au moyen d'un paramétrage complet du modèle, en supposant l'ensemble des coefficients inconnu.

La première façon implique de disposer de connaissances supplémentaires sur le système et de pouvoir approcher son comportement avec un modèle analytique, qui respecte une structure imposée, et sur lequel un certain nombre de coefficients sont connus. Dans ce cas, il reste à identifier juste la partie inconnue des coefficients.

La deuxième façon est plus générale, et peut être appliquée sur une gamme très large de systèmes. Ainsi, pour l'identification, seule la connaissance des données d'entrée – sortie est nécessaire ainsi que des mesures du paramètre variant, sans nécessité de disposer de connaissances supplémentaires sur le système. Aucune structure n'est a priori imposée pour modéliser la structure du procédé réel. A partir de cette hypothèse, on construit une structure entièrement paramétrée, dans laquelle tous les coefficients sont à identifier.

Dans le cadre de cette thèse les deux approches ont été utilisées, afin de modéliser le comportement latéral d'un véhicule automobile, étude présentée dans le chapitre V de ce manuscrit.

1.4. Motivation et Contributions

Comme déjà mentionné précédemment l'utilisation de correcteurs à séquençement de gains est implantée, parfois d'une manière intuitive, dans de nombreuses applications industrielles. Ces approches, de synthèse heuristique ou fondée sur une formalisation LPV, ont donné des résultats très satisfaisants dans la pratique, d'une part pour les performances obtenues, d'autre part pour la simplicité de conception et d'implantation de la loi de commande. Dans ce contexte, le champ d'identification des systèmes LPV est encore perfectible et n'a pas atteint la maturité.

La plupart des modèles et des lois de commande est développée en temps continu. Pour leur implantation la discrétisation est nécessaire. Ainsi, un aspect important est lié à la discrétisation des modèles et des lois de commande LPV. Des techniques de discrétisation pour les modèles LPV sont étudiées, et la qualité de la discrétisation est analysée en fonction de différentes hypothèses selon l'évolution du paramètre et de sa variation dans une période d'échantillonnage. Des études théoriques et pratiques sont développées et illustrées sur un modèle analytique LPV caractérisant le comportement latéral d'un véhicule automobile.

Le comportement d'un nombre important de systèmes non linéaires (Figure 1-3) peut être approché par des modèles LPV, interprétés comme une interpolation de modèles LTI. Ainsi une approche des travaux a été d'étudier les méthodes d'identification existantes dans la littérature, pour les modèles LTI. Avec des conditions supplémentaires ces méthodes peuvent être appliquées au cas de l'identification de modèles LPV. Dans cet objectif, les développements méthodologiques abordés dans ce manuscrit ont commencé par des approches fondées sur la méthode à erreur de prédiction :

- La méthode classique de moindres carrés, qui représente un cas particulier de méthodes à erreur de prédiction, a été abordée.
- Des études sur la méthode de la variable instrumentale, ont été réalisées.
- Enfin, la méthode à erreur de prédiction classique a été étudiée et implantée.

Ensuite des techniques fondées sur l'utilisation de la méthode de sous-espaces ont été étudiées, dans le cas des modèles LTI, et appliquées sur des modèles LPV, après certaines modifications au formalisme LTI.

Les développements méthodologiques ont été ensuite appliqués à différents cas. Dans un premier temps en simulation sur des modèles académiques, en vue de valider les procédures d'identification et sur des cas permettant de maîtriser les modèles et les conditions d'identification. Ensuite, ils ont été utilisés pour identifier le modèle de comportement latéral d'une automobile Renault Laguna II. Un modèle linéaire invariant en temps peut aussi décrire le comportement d'un véhicule, cependant la dynamique d'une voiture est non linéaire par rapport à la vitesse. En conséquence, un modèle LTI ne peut pas prendre en compte l'effet de ce paramètre. En revanche un modèle LPV est

capable de représenter le comportement dépendant de la trajectoire de la vitesse du véhicule. Ceci nous a amené à construire un modèle LPV pour représenter le comportement latéral du véhicule, en utilisant la vitesse comme paramètre variant.

Les méthodes d'identification étudiées ont été aussi appliquées en vue d'identifier un convertisseur de puissance DC-DC abaisseur de type Buck. Les dispositifs de conversion d'énergie sont très utilisés dans pratique : dans la téléphonie mobile, dans les ordinateurs, dans l'industrie automobile, dans le domaine aéronautique, le domaine ferroviaire, les énergies renouvelables, etc. Leur rôle est de maintenir la tension de sortie à une valeur fixe, indépendamment de variables externes en particulier de la source primaire. En pratique leur comportement est affecté par la fluctuation de la tension d'alimentation et de la résistance de la charge. Dans la littérature il existe de nombreux types de modélisation pour ces convertisseurs de puissance : modèles moyens (Middlebrook & Cuk, A general unified approach to modeling switching power converter stages., 1976), modèles bilinéaires (Rajasekaran, Sun, & Heck, 2003), modèles hybrides (Almér, et al., 2007).



Figure 1-3 : Systèmes non linéaires

Ces modèles donnent des résultats similaires, parfois insuffisamment précis. Pour prendre en compte l'effet des variables externes, on s'est proposé de créer un modèle linéaire à paramètres variants, dont les valeurs des paramètres ont été identifiées à partir d'expériences effectuées sur un prototype de convertisseur DC-DC abaisseur. Cette étude a été complétée par l'implantation d'une loi de commande H_∞ , de type LPV en vue de réguler la tension de sortie.

1.5. Structuration du manuscrit

Ce mémoire de thèse est organisé de la manière suivante :

Dans le **chapitre II** les représentations et les propriétés des systèmes LPV sont présentées. L'ensemble des représentations LPV possibles est assez vaste dans la littérature, dans ce chapitre on se focalise sur les structures des modèles qui seront exploitées au cours de nos travaux. Ceux-ci sont des représentations sous la forme de fonctions de transfert ou de représentations dans l'espace d'état, à temps continu et discret. La majorité des correcteurs est élaborée en temps continu et il est nécessaire une discrétisation pour leur mise en œuvre, ainsi la discrétisation des modèles LPV est un aspect important, abordé dans ce chapitre. Les contraintes qui doivent être respectées en cas de discrétisation d'un modèle LPV sont en conséquence présentées. Des détails sur le processus d'identification, qui peut être appliqué de deux façons différentes, selon l'utilisation d'approches locales ou globales, sont fournis dans ce chapitre. Un mélange entre les deux approches est aussi développé et présenté.

Dans le **chapitre III**, les méthodes d'identification étudiées sont présentées. L'approche abordée consiste dans l'étude de différentes méthodes paramétriques, pour les modèles LTI dans un premier temps. L'étude est ensuite étendue pour inclure les modifications nécessaires au regard de l'application de ces méthodes au cas des modèles LPV.

L'étude a commencé par la méthode des moindres carrés, le formalisme classique pour les modèles invariants a été abordé. L'étude est ensuite étendue à la méthode de moindres carrés modifiée pour prendre en compte les modèles à paramètres variants. Une analyse en fonction des bruits extérieurs est également effectuée.

Par la suite, la classe de méthodes de la variable instrumentale est mise en œuvre, d'abord pour les modèles LTI, modifiée ensuite pour les modèles LPV.

L'étude est ensuite poursuivie avec la méthode à erreur de prédiction. Dans le cas de modèles LTI, on présente les éléments importants à suivre dans la mise en œuvre de cette méthode, telles que :

- Le choix d'une structure de modèle
- Le choix du prédicteur
- La définition du critère à minimiser

Ensuite la structure du modèle, le prédicteur et le critère d'ajustement des paramètres sont modifiés pour traiter le cas des modèles LPV.

Enfin la méthode des sous-espaces est abordée. Le formalisme de la méthode est présenté premièrement pour le cas des modèles LTI. Les techniques appliquées pour les modèles invariants sont modifiées ensuite pour prendre en compte les modèles LPV.

Les **chapitres IV, V, VI** de la thèse portent sur les applications des développements méthodologiques à différents cas d'étude : identification de modèles académiques, des modèles de comportement latéral d'un véhicule automobile et d'un convertisseur de puissance DC-DC, respectivement. L'application des méthodes étudiées est faite en simulation d'une part et en exploitant des résultats expérimentaux d'autre part, des modèles LPV sont identifiés.

Dans le **chapitre IV**, afin de bien maîtriser les conditions d'identification, les méthodes d'identification présentées sont appliquées sur des modèles académiques.

Dans un premier temps, un modèle LPV académique d'un système d'ordre deux est identifié en utilisant la méthode de moindres carrés. Elle est mise en œuvre en utilisant des données obtenues en simulation, en absence des bruits, puis en ajoutant des erreurs d'équations sur le modèle simulé. Une analyse de performances de l'estimation au regard de ces perturbations est également développée. Suite à cette étude, il a été observé logiquement que les performances de la méthode de moindres carrés ne sont pas satisfaisantes en présence des bruits colorés. Pour contourner cette situation, des estimées pertinentes ont été obtenues en appliquant des méthodes de la variable instrumentale.

Par la suite, une autre approche pour la méthode des moindres carrés est utilisée, en suivant les travaux de (Bamieh & Giarré, 2002). L'étude sur les systèmes LPV traite les modèles en temps discret, représentés sous une forme E/S. Des données simulées sont utilisées pour identifier un modèle LPV, en utilisant la méthode de moindres carrés, sous la forme de deux algorithmes.

Enfin, les développements de la méthode des sous-espaces sont appliqués, afin d'identifier un modèle académique de deuxième ordre où les données d'identification sont obtenues en simulation. Les résultats sont analysés dans les domaines temporels et fréquentiels. Le modèle obtenu est simulé en utilisant un nouveau jeu de données pour tester sa validité.

Le **chapitre V** porte sur l'identification LPV de comportement latéral d'un véhicule automobile. Dans le domaine automobile, le modèle analytique appelé modèle bicyclette, est souvent utilisé pour représenter le comportement latéral d'un véhicule. Ce chapitre commence avec l'étude et l'analyse de ce modèle analytique. Le modèle bicyclette est aussi soumis aux différentes situations de discrétisation, en utilisant les divers cas théoriques, présentés dans le chapitre II.

Par la suite, en utilisant les techniques de moindres carrés, le modèle analytique bicyclette, est ensuite identifié en utilisant des données obtenues par simulation.

Ensuite, la méthode à erreur de prédiction est utilisée pour identifier un modèle LPV, du comportement latéral d'un véhicule automobile en utilisant des mesures issues d'essais expérimentaux. La vitesse de l'automobile est ici considérée comme le paramètre variant et le modèle est représenté dans l'espace d'état en temps continu. Les données

expérimentales utilisées pour l'identification ont été recueillies à partir d'expériences réalisées en utilisant un véhicule Renault Laguna II. Une structure LPV de modèle est paramétrée de deux façons différentes. La première utilise le modèle bicyclette, présenté précédemment, la deuxième correspondant à une structure entièrement paramétrée.

Dans ce chapitre, le comportement latéral d'un véhicule, est également identifié, en utilisant les méthodes de sous espaces. L'identification est réalisée à partir des données expérimentales déjà utilisées précédemment. La pertinence du modèle identifié est mise en valeur par sa validation en utilisant différents enregistrements de données.

Dans le **chapitre VI** de ce manuscrit un convertisseur de puissance est identifié, vu comme système LPV, en utilisant les techniques des méthodes à erreur de prédiction. Une structure entièrement paramétrée, qui prend en compte l'effet des résistances parasites est envisagée. Des données expérimentales sont recueillies sur un prototype de convertisseur DC-DC abaisseur Buck, un modèle polytopique de deuxième ordre est obtenu afin de reproduire le comportement de convertisseur, en prenant en compte le changement de la résistance de charge considérée comme un paramètre variant.

Cet étude expérimentale est complétée par la construction et l'application d'une loi de commande H_∞ . Cette commande est utilisée pour réguler la tension de sortie du convertisseur Buck, identifié précédemment. Le correcteur H_∞ , de type LPV, obtenu est implanté sur le prototype de convertisseur Buck. Le but de la régulation est de maintenir une tension de sortie égale à une valeur constante, indépendamment de la variation de charge, considérée comme un paramètre variant. Les performances de la loi de commande sont comparées à celles obtenues avec un correcteur de type Proportionnel – Intégral utilisé généralement dans l'industrie pour réguler ce type de procédés.

Chapitre 2

2. Représentation et discrétisation des systèmes LPV

Pour mieux illustrer la notion de système LPV, considérons le comportement latéral d'une automobile. Dans le domaine de l'automobile, il est connu que ce comportement doit être modélisé par une représentation non linéaire. Néanmoins aux vitesses constantes, il peut être approché par des modèles LTI. Ensuite, considérons la représentation de véhicule comme une collection de modèles LTI qui correspondent aux différentes valeurs de la vitesse, en utilisant cette variable (vitesse) comme signal variant. Chaque modèle LTI est ainsi associé à une valeur constante de la vitesse. L'ensemble de ces modèles LTI interpolés permet de construire un modèle, qui est une représentation du comportement global du système. Il implique des paramètres dont les valeurs sont fonctions du signal variant. Cette approche de modélisation, définit un système linéaire à paramètres variants, noté LPV. Dans le cadre général des représentations LPV, le paramètre variant, désigné par p dans ce mémoire, est un signal externe, qui modifie le comportement dynamique du système. Dans nos travaux le paramètre variant est considéré connu et mesurable.

Dans l'exemple (Figure 2-1), p se réfère à la vitesse du véhicule automobile. Le domaine de variation de la vitesse est borné par une valeur maximale, dépendant du véhicule. Les trajectoires admissibles de p sont aussi restreintes, car il est important que le véhicule ait une vitesse qui confère sécurité et tenue de route. Dans cet exemple l'entrée du modèle est donnée par l'angle de braquage des roues avant et la sortie est la mesure de vitesse de lacet du véhicule. Le but est de construire un modèle capable de représenter le comportement du véhicule, en fonction de différentes valeurs et trajectoires de la vitesse.

Pour représenter des systèmes présentant de telles caractéristiques, différentes réalisations de modèles LPV sont proposées : modèles représentés sous une forme entrée/sortie (E/S) (Bamieh & Giarré, 2002), (Butcher, Karimi, & Longchamp, 2008) et modèles représentés dans l'espace d'état (EE) (Lovera & Mercère, 2007), (Lopes dos Santos, Ramos, & Martins de Carvalho, 2007), (van Wingerden & Verhaegen, 2009). Dans cette thèse ces deux types de structure sont utilisés, et les approches temps discret – temps continu sont analysées dans la section 2.1.

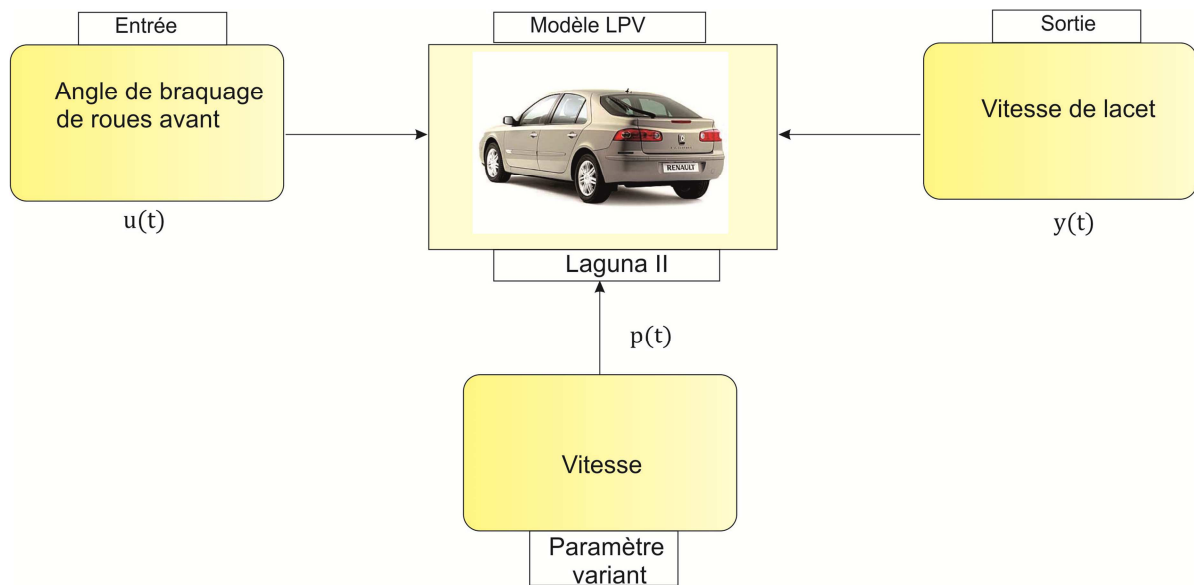


Figure 2-1 : Système automobile

La plupart des procédés physiques sont décrits en temps continu, sous la forme d'équations différentielles. Les correcteurs LPV, sont également d'habitude synthétisés en temps continu, car les exigences de stabilité et performances pour le comportement en boucle fermée sont usuellement plus facilement exprimables dans ce type de représentation et la synthèse des lois de commande se formalise aisément à partir de ce type de modèles. L'identification directe de tels modèles LPV s'avère donc attractive. Par ailleurs cette technique pose des questions liées à la nature des échantillons de données et à l'implantation physique. Ainsi, la problématique de discrétisation des modèles LPV est un sujet intéressant, il est abordé et analysé dans la section 2.2 de ce chapitre.

Différentes approches, permettant le développement d'un processus d'identification pour les modèles LPV, sont envisagées et présentées, dans la section 2.3.

Dans la section suivante, une étude des représentations LPV possibles est présentée.

2.1. Représentation des modèles LPV

2.1.1. Modèles LPV représentés sous une forme Entrée/Sortie

L'utilisation de la classe de modèles polynomiaux en temps discret fait souvent l'hypothèse d'une dépendance statique (le système dépend de valeurs instantanées du paramètre) par rapport au paramètre variant. Dans la suite une définition pour les modèles LPV polynomiaux représentés sous une forme entrée-sortie est proposée.

Un modèle scalaire LPV à temps discret est formulé en utilisant la forme polynomiale E/S suivante :

$$A(p_k, q^{-1})y(k) = B(p_k, q^{-1})u(k) \quad 2.1$$

avec $p_k \in \mathbb{R}^{n_p}$ la valeur du paramètre variant p à l'instant d'échantillonnage k , $y(k) \in \mathbb{R}$ la sortie, $u(k) \in \mathbb{R}$ l'entrée de commande, q désigne l'opérateur de décalage : $q^{-i}u(k) = u(k-i)$. $A(p_k, q^{-1})$ et $B(p_k, q^{-1})$ sont des polynômes en q^{-1} , respectivement de degré na et nb :

$$\begin{aligned} A(p_k, q^{-1}) &= 1 + \sum_{i=1}^{na} a_i(p_k)q^{-i} \\ B(p_k, q^{-1}) &= \sum_{j=0}^{nb} b_j(p_k)q^{-j} \end{aligned} \quad 2.2$$

Les coefficients a_i, b_j sont des fonctions réelles $f \in \mathbb{R}$ avec une dépendance statique en p_k . Il est supposé que les solutions du système 2.1 sont bien définies et la partie procédé est complètement caractérisée par les fonctions caractérisant les coefficients $\{a_i\}_{i=1}^{na}$ et $\{b_j\}_{j=0}^{nb}$.

Le procédé est caractérisé par la connaissance des fonctions $\{a_i\}_{i=1}^{na}$ et $\{b_j\}_{j=0}^{nb}$, mais dans le cas pratique ces fonctions sont a priori des fonctions non linéaires inconnues.

2.1.2. Modèles LPV représentés dans l'espace d'état

Dans cette section, des modèles LPV dans l'espace d'état en temps continu et discret sont présentés, ainsi que la forme de représentation polytopique.

2.1.2.1. Modèles LPV à temps continu

Définition 2-1 : Etant donné $p_c(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$ représentant le paramètre variant pour un système en temps continu, un modèle dans l'espace d'état, peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c(p_c(t))x_c(t) + B_c(p_c(t))u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c(p_c(t))x_c(t) + D_c(p_c(t))u_c(t) \end{aligned} \quad 2.3$$

dans laquelle $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état, $u_c(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente l'entrée, $y_c(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente la sortie, et $A_c(p_c), B_c(p_c), C_c(p_c), D_c(p_c)$ sont les matrices représentatives du système dépendant du paramètre variant en temps, $p_c(t) \in \mathbb{R}^{n_p}$, t étant le temps continu.

2.1.2.2. Modèle LPV à temps discret

Définition 2-2: Un modèle en temps discret, représenté dans l'espace d'état, dépendant d'un paramètre variant $p_d[k] \in \mathbb{R}^{n_p}$, est défini comme suit :

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A_d(p_d[k])x_d(k) + B_d(p_d[k])u_d(k) \\ y_d(k) &= C_d(p_d[k])x_d(k) + D_d(p_d[k])u_d(k) \end{aligned}, \quad 2.4$$

ou $x_d(k)$ représente le vecteur d'état qui caractérise le modèle discret, avec les matrices d'état $A_d(p_d), B_d(p_d), C_d(p_d), D_d(p_d)$, k étant le temps discret.

2.1.2.3. Forme polytopique

Dans ce paragraphe, les modèles LPV, représentés sous une forme polytopique sont présentés. A chaque valeur p_i de p , un modèle LTI local $A_i(p_i), B_i(p_i), C_i(p_i), D_i(p_i)$ est associé. La structure polytopique est donnée par :

$$\begin{aligned} A(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_i(p_i) \\ B(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_i(p_i) \\ C(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_i(p_i) \\ D(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_i(p_i) \end{aligned} \quad 2.5$$

où r représente le nombre de points de fonctionnement choisi pour caractériser le système, p_i est la valeur du paramètre variant qui caractérise le i^{ieme} point de fonctionnement. Les matrices $A(p), B(p), C(p), D(p)$ représentent les matrices de système en temps continu (2.3), ou en temps discret (2.4). $w_i(p)$ est une fonction de pondération qui satisfait aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} w_i(p) &\geq 0, \forall i \\ \sum_{i=1}^r w_i(p) &= 1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Par la suite une analyse de la discrétisation des modèles continus est réalisée. Dans le cas des modèles LPV, la discrétisation est faite en prenant en compte quelques aspects spécifiques.

2.2. Discrétisation de modèles LPV

La plupart des méthodes de synthèse des correcteurs LPV sont développées en temps continu, cependant leur implantation nécessite une discrétisation des modèles. La discrétisation des représentations LPV est une question cruciale, à la fois pour l'identification, et pour la mise en œuvre de la loi de commande.

Dans (Apkarian, On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers, 1997) des méthodes simples pour la discrétisation des modèles LPV en temps continu ont été développées, par l'extension des techniques existantes pour les modèles LTI. (Toth, Heuberger, & Van der Hof, 2010) ont étendu ces techniques, en abordant la problématique du choix de la période d'échantillonnage dans le cas LPV.

L'objectif : Au regard d'un modèle à temps continu, trouver des solutions pour approcher la sortie y_c en temps discret, pour toutes les trajectoires possibles de l'entrée u_c , et du paramètre variant dans le temps p_c .

L'approche la plus utilisée pour atteindre cet objectif est effectuée à partir des techniques de discrétisation utilisées pour les systèmes LTI. Trois situations différentes de discrétisation sont analysées, et les contraintes qui doivent être respectées quant au choix de la période d'échantillonnage T_d , sont présentées.

La difficulté du problème de la détermination d'une représentation caractérisant les entrées-sorties aux instants d'échantillonnage réside dans le caractère variant dans le temps du paramètre. Cependant, avec quelques hypothèses, les concepts de la discrétisation LTI peuvent être encore applicables sur les modèles LPV.

Selon les relations entre signaux continus $u_c(t)$, $p_c(t)$ et les signaux discrets $u_d[k]$, $p_d[k]$, les relations entre modèle LPV en temps continu et modèle LPV en temps discret diffèrent. On peut distinguer les situations suivantes :

- Cas I : $u_c(t) = u_d[k]$ bloqué entre kT_d et $(k+1)T_d$, $p_c(t) = p_d[k]$ bloqué
- Cas II : $u_c(t) = u_d[k]$ bloqué, $p_d[k]$: échantillonnage de $p_c(t)$ à kT_d
- Cas III : $u_d[k]$: échantillonnage de $u_c(t)$, $p_d[k]$: échantillonnage de $p_c(t)$ à kT_d

2.2.1. Cas I (u - bloqué, p - bloqué)

Le premier cas, le plus simple, est présenté dans la littérature de discrétisation LPV (Toth, Felici, Heuberger, & Van den Hof, 2007). Il peut être appliqué en tenant compte de l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1 : Soit un système LPV en temps continu, avec des signaux d'entrée et de sortie à temps continu $u_c(t)$ et $y_c(t)$, un paramètre variant $p_c(t)$, avec $u_c(t)$ et $p_c(t)$ générés par un blocage d'ordre 0 idéal et $y_c(t)$ échantillonné avec la période d'échantillonnage $T_d > 0$.

Sous l'*Hypothèse 1*, le signal d'entrée et le paramètre variant sont considérés bloqués dans une période d'échantillonnage, schéma représenté dans la Figure 2-2.

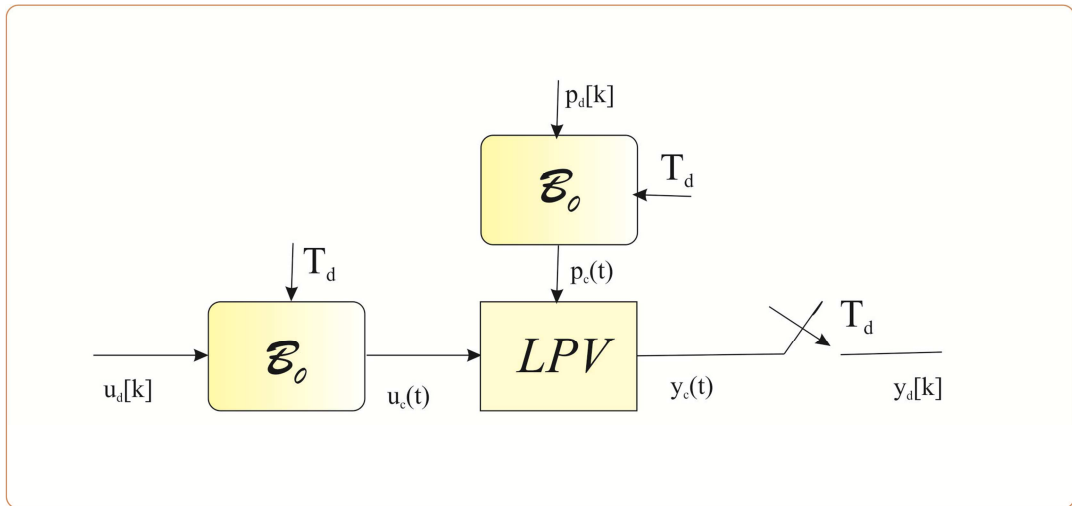


Figure 2-2: Discrétisation avec bloqueur d'ordre zéro (ZOH) pour les systèmes LPV

Le blocage d'ordre zéro idéal fournit un signal en temps continu, résultant du blocage de la valeur discrète à l'instant k entre kT_d et $(k+1)T_d$.

Les équations suivantes peuvent être écrites :

- $p_c(t) = p_d[k], \forall t \in [kT_d, (k+1)T_d]$
- $u_c(t) = u_d[k], \forall t \in [kT_d, (k+1)T_d]$
- $y_d[k] = y_c(kT_d)$

2.7

Les représentations des signaux d'entrée et du paramètre variant sont illustrées par les tracés des Figure 2-3 et Figure 2-4.

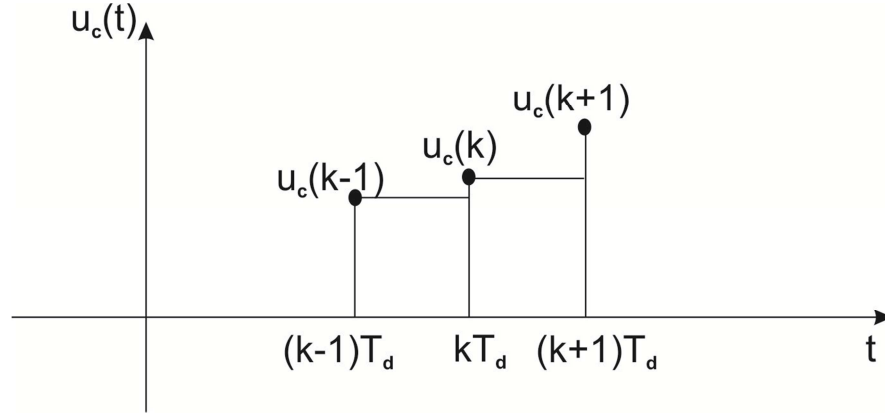


Figure 2-3 : Signal d'entrée bloqué

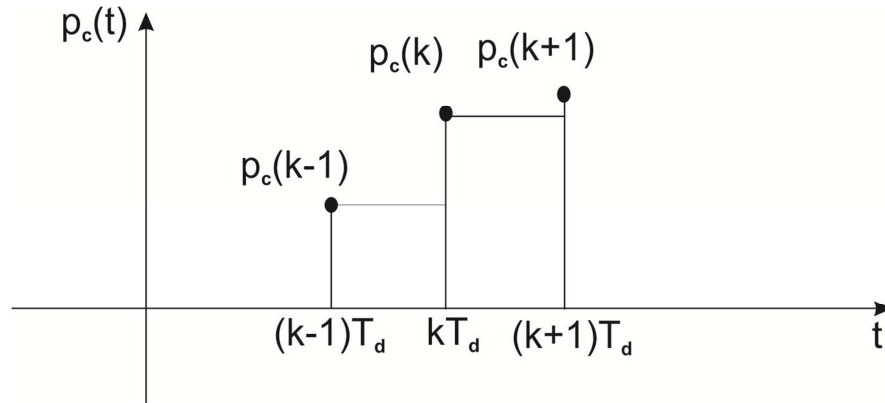


Figure 2-4 : Signal de paramètre variant bloqué

Pour les signaux u_c, p_c définis en 2.7, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
 u_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1(t - kT_d)[u_d[k] - u_d[k-1]] \\
 p_c(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 1(t - kT_d)[p_d[k] - p_d[k-1]]
 \end{aligned}$$

2.8

ou $1(t)$ représente la fonction échelon unité.

Le résultat de $1(t - kT_d)$ appliqué sur le modèle continu, à chaque période d'échantillonnage, est nommé l'effet de l'interrupteur de l'action de blocage d'ordre zéro. L'effet du blocage sur le paramètre variant introduit une dynamique supplémentaire dans le système. Pour éviter l'analyse de cet effet, l'hypothèse suivante est faite :

Hypothèse 2 : L'effet d'interrupteur introduit par l'actionnement du blocage d'ordre zéro n'influence pas le comportement du modèle en temps continu.

En prenant en compte ces contraintes, la méthode de discrétisation classique est présentée dans le paragraphe suivant.

2.2.1.1. Méthode de discrétisation classique

Etant considéré un modèle LPV à temps continu, en tenant compte de *Hypothèse 1*, $p_c(t)$ et $u_c(t)$ sont des signaux constants à l'intérieur de chaque intervalle d'échantillonnage, entre kT_d et $(k + 1)T_d$, l'évolution des grandeurs du système est régie par le modèle d'état suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_c(t) &= A_c(p_c(kT_d))x_c(t) + B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d) \\ y_c(t) &= C_c(p_c(kT_d))x_c(t) + D_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\end{aligned}\quad 2.9$$

pour $t \in [kT_d, (k + 1)T_d]$, avec la condition initiale $x_c(kT_d)$.

Pour obtenir la solution de la première ligne de l'équation 2.9, on introduit $f(x_c, u_c, p_c)$ dans la partie droite de l'équation 2.3. Sous les *Hypothèse 1* et *Hypothèse 2* on peut écrire :

$$\begin{aligned}\int_{kT_d}^{(k+1)T_d} f(x_c, u_c, p_c)(\tau) d\tau &= \\ &= \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} [A_c(p_d(k))x_c(\tau) + B_c(p_d(k))u_c(kT_d)] d\tau\end{aligned}\quad 2.10$$

qui définit la solution de 2.9 pour $t = (k + 1)T_d$:

$$x_c((k + 1)T_d) = x_c(kT_d) + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} f(x_c, u_c, p_c)(\tau) d\tau \quad 2.11$$

En supposant que $A_c(p)$ est inversible, en substituant $x_d[k] = x_c(kT_d)$ et $u_d[k] = u_c(kT_d)$, $p_d[k] = p_c(kT_d)$ on obtient :

$$\begin{aligned}x_d[k + 1] &= e^{A_c(p_d)T_d}x_d[k] + A_c^{-1}(p_d)[e^{A_c(p_d)T_d} - I]B_c(p_d)u_d[k] \\ y_d[k] &= C_c(p_d)x_d[k] + D_c(p_d)u_d[k]\end{aligned}\quad 2.12$$

avec $y_d[k] = y_c(kT_d)$. Cette méthode de discrétisation est appelée dans la littérature « la méthode complète » et donne les relations suivantes permettant d'obtenir le modèle LPV discret à partir de la représentation d'état à temps continu :

$$\begin{aligned} A_d(p_d[k]) &= e^{A_c(p_d[k])T_d} \\ B_d(p_d[k]) &= A_c^{-1}(p_d[k])[e^{A_c(p_d[k])T_d} - I]B_c(p_d[k]) \\ C_d(p_d[k]) &= C_c(p_d[k]) \\ D_d(p_d[k]) &= D_c(p_d[k]) \end{aligned} \quad 2.13$$

La méthode complète de discrétisation d'un système LPV conduit donc à une représentation non linéaire dans la dépendance vis-à-vis du paramètre p_d . Or la synthèse de régulateurs LPV est fondée sur l'hypothèse d'une dépendance linéaire, polynomiale ou rationnelle vis-à-vis du paramètre variant. Ainsi, il est souhaitable de développer une discrétisation approchée qui permette de décrire convenablement le comportement originel, en ayant une complexité fondée sur une dépendance linéaire des coefficients. Les méthodes approchées existantes pour les modèles LTI peuvent être appliquées en utilisant des approches pour l'intégrale qui décrit l'évolution d'état dans l'intervalle d'échantillonnage. En fonction de différentes techniques appliquées sur cette intégrale, il existe plusieurs façons d'approcher la méthode de discrétisation. Dans les deux paragraphes suivants les méthodes des rectangles (*Euler*) et trapézoïdale (*Tustin*) sont présentées.

2.2.1.2. Méthodes de discrétisation approchées – Méthode d'Euler

L'approche d'Euler consiste dans le calcul de l'intégrale 2.10 par la méthode des rectangles.

$$x_c((k+1)T_d) = x_c(kT_d) + \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} \dot{x}_c(\tau) d\tau \quad 2.14$$

Pour le calcul de l'intégrale, l'approximation de la méthode d'Euler considère que la fonction à intégrer $\dot{x}_c(t)$ est constante pendant une période d'échantillonnage :

$$\dot{x}_c(t) = \dot{x}_c(kT) \quad 2.15$$

En utilisant 2.15, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} A_c(p_d(k))x_c(\tau) + B_c(p_d(k))u_c(kT_d) d\tau &= \\ &= T_d(A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)) \end{aligned} \quad 2.16$$

Une approximation de la solution 2.11 peut donc être considérée en utilisant la relation suivante :

$$\begin{aligned}
x_c((k+1)T_d) &\simeq \\
&\simeq x_c(kT_d) + T_d A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + \\
&\quad + T_d B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Notons que ceci coïncide avec la façon la plus simple de contourner les non linéarités dans la discrétisation exacte liées à l'apparition du terme $e^{T_d A_c}$, façon qui consiste à appliquer une approximation du premier ordre :

$$e^{T_d A_c(p_c(kT_d))} \simeq I + T_d A_c(p_c(kT_d)) \tag{2.18}$$

Fondée sur cette approche, l'approximation en temps discret est donnée par les lois de conversion suivantes :

$$\begin{aligned}
A_d(p_d[k]) &= I + T_d A_c(p_c(kT_d)) \\
B_d(p_d[k]) &= T_d B_c(p_c(kT_d)) \\
C_d(p_d[k]) &= C_c(p_c(kT_d)) \\
D_d(p_d[k]) &= D_c(p_c(kT_d))
\end{aligned} \tag{2.19}$$

2.2.1.3. Méthodes de discrétisation approchées – Méthode de Tustin

L'approche de Tustin consiste dans le calcul de l'intégrale 2.10 par la méthode des trapèzes.

$$\begin{aligned}
x_c((k+1)T_d) &= \\
&= x_c(kT_d) + \\
&\quad + A_c(p_d[k]) \int_{kT_d}^{(k+1)T_d} x_c(\tau) d\tau + \\
&\quad + T_d B_c(p_d[k])u_c(kT_d)
\end{aligned} \tag{2.20}$$

L'approximation de Tustin consiste à considérer que $x_c(t)$ varie linéairement entre $x_c(kT_d)$ et $x_c((k+1)T_d)$. On peut alors écrire :

$$x_c(t) = x_c(kT_d) + \frac{x_c((k+1)T_d) - x_c(kT_d)}{T_d}(t - kT_d) \tag{2.21}$$

et

$$\int_{kT_d}^{(k+1)T_d} x_c(\tau) d\tau = \frac{T_d}{2} (x_c((k+1)T_d) + x_c(kT_d)) \tag{2.22}$$

On arrive au résultat final :

$$\begin{aligned}
x_c(k+1)T_d = & \\
= & \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) x_c(kT_d) + \\
& + T_d \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d)) u_c(kT_d)
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Les matrices d'état ont la forme :

$$\begin{aligned}
A_d(p_d[k]) &= \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \\
B_d(p_d[k]) &= T_d \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d)) \\
C_d(p_d[k]) &= C_c(p_c(kT_d)) \\
D_d(p_d[k]) &= D_c(p_c(kT_d))
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.2.2. Cas II (u - bloqué, p - échantillonné)

Une autre cadre de discrétisation est encore possible. On considère le cas où l'entrée continue est générée à partir d'une entrée discrète par l'intermédiaire d'un bloqueur d'ordre zéro, et le paramètre variant est un échantillon de $p_c(t)$. Ce cas est représenté par la Figure 2-5, sans imposer des conditions supplémentaires sur la variation de paramètre dans une période d'échantillonnage.

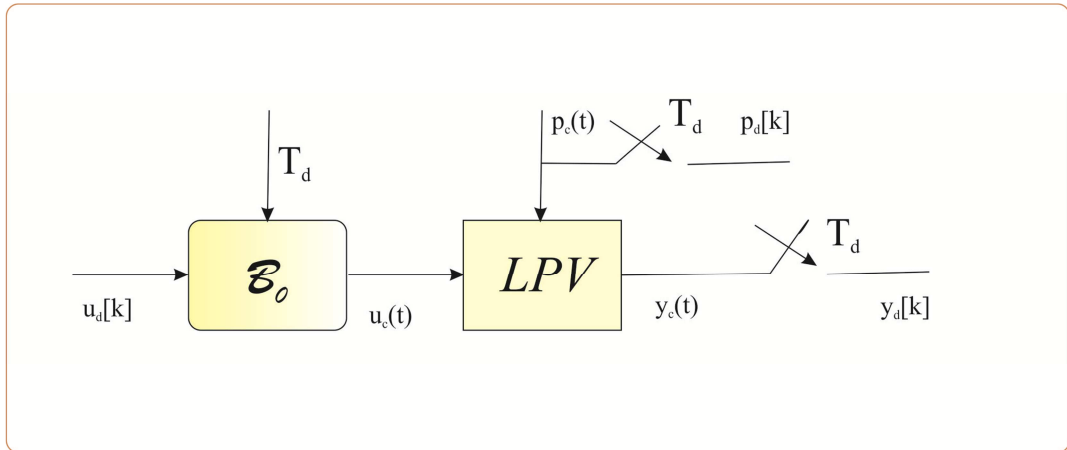


Figure 2-5 : Discrétisation pour les systèmes LPV

Ce cas est représenté par les relations suivantes :

- $u_c(t) = u_d[k]$ bloqué entre $kT_d + 0$ et $(k+1)T_d - 0$;
- $p_d[k]$: échantillonné de $p_c(t)$

La représentation du signal d'entrée est illustrée par le tracé de la Figure 2-3, et la forme discrétisée de paramètre variant p_c par celui de la Figure 2-6.

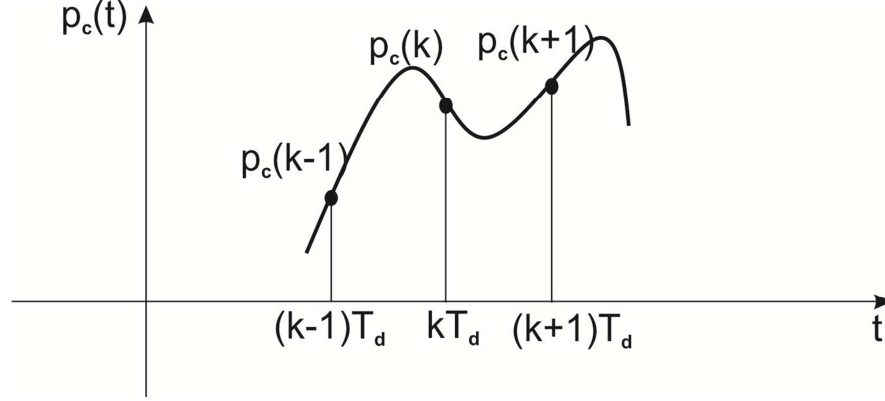


Figure 2-6: Signal paramètre variant discrétisé

Pour le calcul de l'intégrale 2.10, la méthode des trapèzes permet d'écrire :

$$\begin{aligned} x_c((k+1)T_d) &= \\ &= x_c(kT_d) + \frac{T_d}{2} [A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)] + \\ &+ \frac{T_d}{2} [A_c(p_c((k+1)T_d))x_c((k+1)T_d) + B_c(p_c(k+1)T_d)u_c(kT_d)]. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c((k+1)T_d)) \right) x_c((k+1)T_d) &= \\ &= \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) x_c(kT_d) + \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)] + \\ &+ \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(k+1)T_d)u_c(kT_d)] \end{aligned}$$

Pour écrire le résultat sous la forme d'une équation d'état, un changement de variable est effectué :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_d[k+1] &= \\ &= \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c((k+1)T_d)) \right) x_c((k+1)T_d) - \\ &- \frac{T_d}{2} [B_c(p_c((k+1)T_d))u_c(kT_d)] = \\ &= \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) x_c(kT_d) + \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)] \end{aligned}$$

En écrivant $x_c(kT_d)$ en fonction de l'équation ci-dessus, on obtient :

$$x_c(kT_d) = \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \left(\tilde{x}_d[k] + \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d))u_c((k-1)T_d)] \right) \quad 2.25$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_d[k+1] = & \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \tilde{x}_d[k] + \frac{T_d}{2} B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d) + \\ & + \frac{T_d}{2} \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d))u_c((k-1)T_d) \end{aligned}$$

En utilisant les substitutions : $u_d[k-1] = u_c((k-1)T_d)$ et

$$\begin{aligned} F(kT_d) &= \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \\ G_1(kT_d) &= \frac{T_d}{2} B_c(p_c(kT_d)) \\ G_2(kT_d) &= \frac{T_d}{2} \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d)) \end{aligned}$$

l'équation suivante peut alors être écrite :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_d[k+1] &= \\ &= F(kT_d)\tilde{x}_d[k] + G_1(kT_d)u_d[k] + \\ &+ G_2(kT_d)u_d[k-1] \end{aligned} \quad 2.26$$

Définissons le vecteur d'état augmenté :

$$X_d[k] = \begin{bmatrix} \tilde{x}_d[k] \\ u_d[k-1] \end{bmatrix} \quad 2.27$$

On obtient :

$$\begin{aligned} X_d[k+1] &= \\ &= \begin{bmatrix} F(kT_d) & G_2(kT_d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} X_d[k] + \\ &+ \begin{bmatrix} G_1(kT_d) \\ 1 \end{bmatrix} u_d[k] \end{aligned} \quad 2.28$$

L'équation de sortie est déterminée de la façon suivante :

$$y_d[k] = C_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + D_c(p_c(kT_d))u_d[k]$$

En remplaçant $x_c(kT_d)$ par l'équation 2.25 on obtient l'expression suivante :

$$y_d[k] = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \left(\tilde{x}_d[k] + \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d)) u_d[k-1]] \right) + D_c(p_c(kT_d)) u_d[k]$$

Ainsi :

$$y_d[k] = [C_{d1} \quad C_{d2}] X_d[k] + D_c(p_c(kT_d)) u_d[k]$$

$$\text{avec } C_{d1} = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \text{ et}$$

$$C_{d2} = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d))]$$

Finalement, les matrices d'état de la représentation discrète peuvent être obtenues par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A_d(p_d(k)) &= \begin{bmatrix} F(kT_d) & G_2(kT_d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_d(p_d(k)) &= \begin{bmatrix} G_1(kT_d) \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_d(p_d(k)) &= [C_{d1} \quad C_{d2}] \\ D_d(p_d(k)) &= D_c(p_c(kT_d)). \end{aligned} \tag{2.29}$$

2.2.3. Cas III (u - échantillonné, p - échantillonné)

Une troisième situation est également possible, dans le cas de modèles LPV, donnée par la Figure 2-7. Dans cette approche l'entrée et aussi le paramètre variant sont des échantillons de $u_c(t), p_c(t)$ (Figure 2-8, Figure 2-6).

$$u_d[k] = u_c(kT_d)$$

$$p_d[k] = p_c(kT_d)$$

$$y_d[k] = y_c(kT_d)$$

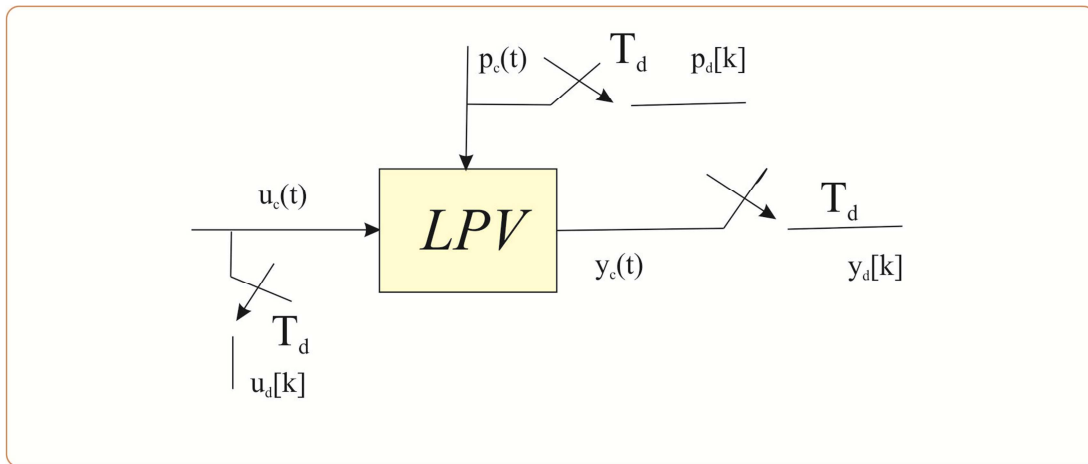


Figure 2-7 : Discrétisation pour les systèmes LPV, échantillonnage des divers signaux

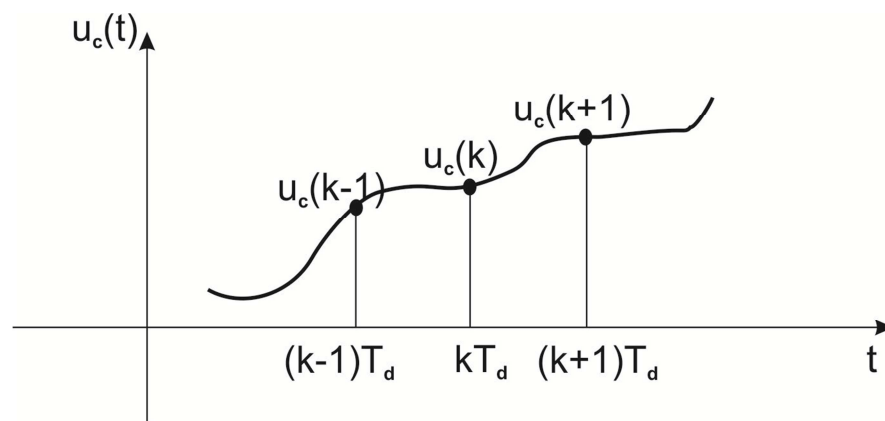


Figure 2-8: Signal d'entrée discrétisé

La solution pour calculer l'intégrale 2.10 est fournie par la méthode de Tustin (trapèzes), comme illustré par le tracé de la Figure 2-9.

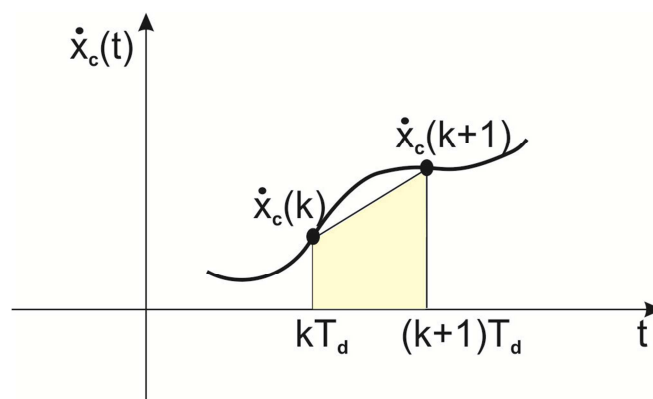


Figure 2-9 : Calcul de l'intégrale par l'approche Tustin

$$\begin{aligned}
x_c((k+1)T_d) &= x_c(kT_d) + \frac{T_d}{2}(\dot{x}_c(kT_d) + \dot{x}_c((k+1)T_d)) = \\
&= x_c(kT_d) + \\
&+ \frac{T_d}{2}[A_c(p_c(k+1)T_d)x_c((k+1)T_d) + B_c(p_c(k+1)T_d)u_c((k+1)T_d)] + \\
&+ \frac{T_d}{2}[A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)]
\end{aligned}$$

On peut écrire :

$$\begin{aligned}
\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(k+1)T_d)\right)x_c((k+1)T_d) - \frac{T_d}{2}B_c(p_c(k+1)T_d)u_c((k+1)T_d) = \\
= \left(I + \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)x_c(kT_d) + \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)
\end{aligned}$$

En faisant le changement de variable :

$$\tilde{x}_d[k+1] = \left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(k+1)T_d)\right)x_c((k+1)T_d) - \frac{T_d}{2}B_c(p_c(k+1)T_d)u_c((k+1)T_d)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_d[k+1] &= \\
&= \left[I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right]x_c(kT_d) - \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d) + \\
&+ T_d A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + T_d B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)
\end{aligned}$$

$$\tilde{x}_d[k+1] = \tilde{x}_d[k] + T_d A_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + T_d B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)$$

$$\tilde{x}_d[k] = \left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)x_c(kT_d) - \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)$$

On peut écrire $x_c(kT_d)$ en fonction de $\tilde{x}_d[k]$:

$$x_c(kT_d) = \left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1} \left(\tilde{x}_d[k] + \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\right) \quad 2.30$$

Pour obtenir l'équation d'état cherchée, on écrit :

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_d[k+1] &= \\
&= \left(I + \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right) \left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1} \left(\tilde{x}_d[k] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\right) + \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)
\end{aligned}$$

Ainsi on arrive à :

$$\begin{aligned}\tilde{x}_d[k+1] = & \left(I + \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}\tilde{x}_d[k] + \\ & + T_d\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\end{aligned}\quad 2.31$$

L'équation de sortie devient :

$$y_d[k] = C_c(p_c(kT_d))x_c(kT_d) + D_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)$$

En remplaçant $x_c(kT_d)$ avec l'expression 2.30, on obtient :

$$\begin{aligned}y_d[k] = & \\ & = C_c(p_c(kT_d))\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}\left(\tilde{x}_d[k] + \right. \\ & \left. + \frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\right) + D_c(p_c(kT_d))u_c(kT_d)\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}y_d[k] = & \\ & = C_c(p_c(kT_d))\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}\tilde{x}_d[k] + \\ & + \left[C_c(p_c(kT_d))\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}\frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d)) + \right. \\ & \left. + D_c(p_c(kT_d))\right]u_c(kT_d)\end{aligned}$$

Les matrices d'état peuvent être écrites par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}A_d(p_d[k]) &= \left(I + \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1} \\ B_d(p_d[k]) &= T_d\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}B_c(p_c(kT_d)) \\ C_d(p_d[k]) &= C_c(p_c(kT_d))\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1} \\ D_d(p_d[k]) &= C_c(p_c(kT_d))\left(I - \frac{T_d}{2}A_c(p_c(kT_d))\right)^{-1}\frac{T_d}{2}B_c(p_c(kT_d)) + D_c(p_c(kT_d))\end{aligned}\quad 2.32$$

Dans cette section différentes méthodes de discrétisation adaptées aux représentations LPV ont été présentées. Dans un premier temps la situation des signaux bloqués est envisagée, ensuite le signal d'entrée est considéré bloqué et le paramètre variant échantillonné, enfin les deux signaux sont considérés être obtenus par l'échantillonnage des signaux continus.

Il faut mentionner toutefois que si le modèle continu dépend linéairement du paramètre variant, ce n'est pas le cas pour les modèles discrets, hormis s'il s'agit de l'approximation d'Euler. Les états des modèles discrets ne sont pas forcément les valeurs des états continus aux instants d'échantillonnage.

Dans les travaux de cette thèse l'approche utilisée est celle présentée dans le Cas I. La méthode d'Euler est utilisée dans le cadre d'un algorithme d'identification de comportement latéral d'un véhicule, qui sera présenté dans le chapitre V de cette thèse.

La section suivante présente différentes approches d'identification qui peuvent être utilisées dans la pratique pour identifier des représentations LPV.

2.3. Différentes approches d'identification

Différentes approches peuvent être envisagées pour l'identification d'un modèle LPV, pour un système à paramètres variants : approche locale ou globale.

La démarche d'identification globale, illustrée par des travaux comme (Bamieh & Giarré, 2002) (Previdi & Lovera, 2003) (Lee & Poolla, 1996) (Lee & Poolla, 1999) (Sznaier & Mazzaro, 2003) (Felici, van Wingerden, & Verhaegen, 2007), consiste à recueillir des données expérimentales lors d'une expérience unique impliquant une excitation pertinente des entrées et du paramètre variant, voir Figure 2-10. Dans l'exemple du comportement latéral d'un véhicule, cette approche implique un seul enregistrement de données d'entrée (l'angle de braquage de roues avant), de sortie (vitesse de lacet) et du paramètre variant (vitesse). A partir de ce jeu de données un modèle LPV est identifié, en suivant le processus d'identification, expliqué au chapitre I.

Une autre démarche possible (Toth, Felici, Heuberger, & Van den Hof, 2007) (Lovera & Mercère, 2007), consiste dans la construction d'un modèle LPV par l'interpolation des modèles linéaires invariants (LTI), identifiés à partir de données recueillies lors d'expériences spécifiques en différents points de fonctionnement. Chaque point de fonctionnement correspond à une valeur fixée du paramètre variant. Le modèle LPV est formé par l'interpolation des modèles LTI locaux, obtenus comme montré par le schéma de principe de la Figure 2-11. Cette approche est connue dans la littérature comme « approche locale d'identification ». Pour mieux comprendre, sur l'exemple du véhicule, r points de fonctionnement sont choisis a priori. Pour chaque valeur de la vitesse, correspondant à chaque point de fonctionnement, un enregistrement des données est effectué, et le processus d'identification est appliqué en conduisant ainsi à r modèles LTI. Une interpolation entre les modèles LTI est ensuite effectuée pour obtenir le modèle LPV.

L'approche locale précédente, n'est pas toujours envisageable pour des raisons de faisabilité (coût, disponibilité réduite de moyens). Dans cette thèse, à part les approches

classiques, étudiées et implantées en utilisant différentes expériences, une nouvelle approche est élaborée, un mélange entre les approches locale et globale, qui consiste dans une identification unique de différents modèles linéaires invariants (LTI), fondés sur un seul enregistrement des données, en excitant le paramètre variant, Figure 2-12. Dans l'exemple du véhicule, l'expérience consiste à enregistrer une seule séquence de données y compris une trajectoire de paramètre ayant un comportement variant. A partir de ce jeu de données, on choisit des valeurs fixes du paramètre p , et dans un seul processus d'identification, pour chaque valeur fixée de p , on estime des modèles LTI. Le modèle LPV est construit par l'interpolation des modèles LTI identifiés. Cette approche est présentée dans les chapitres V et VI, en vue de l'identification du modèle de comportement latéral d'un véhicule automobile et d'un convertisseur de puissance.

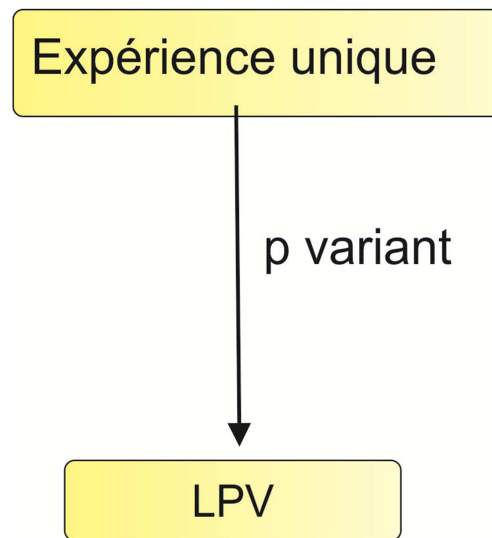


Figure 2-10 : Approche d'identification globale

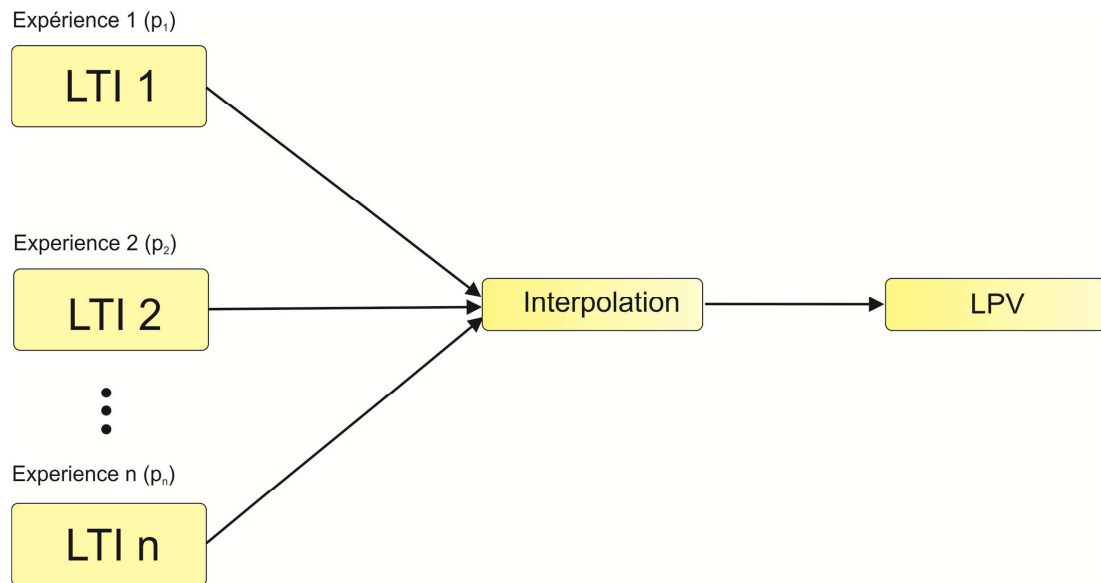


Figure 2-11 : Approche d'identification locale

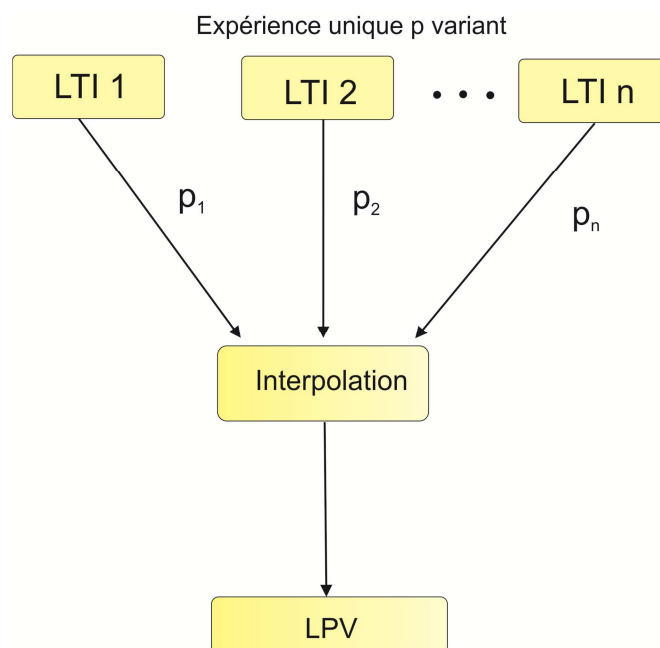


Figure 2-12 : Approche d'identification mixte

Dans ce chapitre une description générale des modèles LPV a été présentée. La problématique de discrétisation des modèles LPV a été abordée et analysée. Différentes approches d'identification ont été présentées.

Dans le chapitre suivant, des méthodes d'identification classiques, comme les méthodes à erreur de prédiction, les variantes comme les méthodes de moindres carrés, les méthodes de la variable instrumentale et méthodes de sous espace, sont étudiées et présentées.

Chapitre 3

Les méthodes d'identification se classifient selon deux grandes approches importantes : paramétriques et non paramétriques.

Les méthodes d'identification non paramétriques ont comme modèle résultant des courbes ou des fonctions, qui ne sont pas caractérisées par un vecteur de paramètres. Elles concernent l'obtention de modèles caractérisés par des fonctions ou des graphiques. Ainsi, les analyses temporelles et fréquentielles peuvent être considérées comme des méthodes d'identification non paramétriques. Les analyses temporelles sont constituées, par exemple, d'un échelon ou d'une impulsion choisis comme signaux d'entrée, le modèle étant représenté par la sortie obtenue. Les analyses fréquentielles sont représentées par le choix d'un signal d'entrée harmonique et, pour un système linéaire en régime permanent, la sortie est aussi représentée par un signal harmonique.

D'un autre côté, les méthodes paramétriques sont des méthodes d'identification qui sont développées autour d'un vecteur de paramètres qui décrivent le modèle recherché. Le but de ces méthodes d'identification est alors de fournir une estimée du vecteur de paramètres.

Dans nos travaux les méthodes d'identification paramétriques sont considérées.

3. Méthodes d'identification

Dans ce chapitre les méthodes paramétriques sont envisagées et parmi ces méthodes l'accent est mis plus précisément sur les méthodes de moindres carrés, méthodes de la variable instrumentale, méthodes à erreur de prédiction et méthodes de sous espaces.

La plus simple structure pour représenter les modèles paramétriques est donnée par les régressions linéaires (Stoica & Söderström, 1989). L'application des méthodes à erreur de prédiction sur ce type de structure conduit à un cas spécifique, la méthode des moindres carrés. Dans ce chapitre, le formalisme de cette méthode est présenté, dans un premier temps pour les modèles invariants. Ensuite, la méthode est modifiée pour prendre en

compte le cas des systèmes LPV. Une analyse en fonction des erreurs des équations est faite, et la pertinence de l'estimation est étudiée en simulation.

L'étude est poursuivie avec des outils issus de la méthode de la variable instrumentale, dans un premier temps pour les systèmes invariants, ensuite modifiée pour prendre en compte les modèles LPV.

Dans la suite de ce chapitre, le cas général des méthodes à erreur de prédiction, impliquant des structures de modèles complexes, est envisagé. Le formalisme des méthodes à erreur de prédiction est présenté pour les modèles LTI et leur adaptation pour les modèles LPV est proposée ensuite.

Enfin, la méthode de sous espaces est abordée. Des spécifications méthodologiques sont présentées pour le cas des modèles invariants, et des adaptations pour le cas des modèles à paramètres variants sont présentées.

3.1. Brefs rappels sur les méthodes de moindres carrés et de la variable instrumentale

3.1.1. Formalisme de la méthode de moindres carrés pour le cas des systèmes LTI

La méthode des moindres carrés est supposée un cas particulier des méthodes à erreur de prédiction au regard de la représentation du modèle à identifier, caractérisé sous la forme d'une régression linéaire. Les régressions linéaires sont considérées comme les structures les plus simples pour la représentation des modèles paramétriques.

Dans le cas des modèles linéaires invariants dans le temps, la régression linéaire (Stoica & Söderström, 1989) a une structure très simple de la forme suivante :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta \quad 3.1$$

où $y(t)$ est une grandeur mesurable, $\varphi(t)$ est un vecteur de taille n , composé par des grandeurs connues, nommé vecteur de régresseurs, θ représente un vecteur de taille n de paramètres inconnus, t représente le temps.

Pour illustrer cette définition, on suppose l'exemple suivant (cas polynomial) :

$$y(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{na} t^n \quad 3.2$$

avec des coefficients $\{a_i\}$ dont les valeurs sont inconnues. En utilisant la forme 3.1 on peut construire les vecteurs $\varphi(t)$ et θ comme suit :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= (1 \quad t \quad \dots \quad t^r)^T \\ \theta &= (a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{na})^T\end{aligned}\tag{3.3}$$

Pour le cas multivariable le modèle 3.1 devient :

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta\tag{3.4}$$

où $y(t)$ est un vecteur de taille p , $\varphi(t)$ est une matrice $n \times p$ et θ un vecteur de taille n .

Le problème est de trouver un vecteur estimé $\hat{\theta}$ du vecteur θ à partir des mesures $y(1, \dots, N)$ et $\varphi^T(1, \dots, N)$. A partir de cet ensemble de mesures, le système d'équations linéaires suivant peut être formé :

$$\begin{aligned}y(1) &= \varphi^T(1)\theta \\ y(2) &= \varphi^T(2)\theta \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi^T(N)\theta\end{aligned}\tag{3.5}$$

qui peut encore s'écrire selon la forme matricielle de :

$$Y = \Phi\theta\tag{3.6}$$

$$\text{où } Y = \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix} \text{ et } \Phi = \begin{pmatrix} \varphi^T(1) \\ \vdots \\ \varphi^T(N) \end{pmatrix}.$$

Une façon simple de trouver le vecteur de paramètres est représentée par le choix d'un nombre de mesures N égal au nombre de paramètres n . Dans cette situation Φ devient une matrice carrée. Si cette matrice, Φ , est non singulière, le système d'équations peut être facilement résolu pour obtenir θ . Dans la pratique, les bruits conduisent à utiliser un nombre de mesures plus important que la taille n , pour obtenir une estimée de θ pertinente. Ainsi, pour $N > n$, le système devient surdéterminé. A partir de l'erreur d'équation ε :

$$\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\theta\tag{3.7}$$

le vecteur $\hat{\theta}$, peut être obtenu en minimisant la fonction de coût :

$$J(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \frac{1}{N} \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{N} \|\varepsilon\|^2\tag{3.8}$$

où $\|\cdot\|$ représente la norme euclidienne. La solution pour ce problème d'optimisation est donnée par le lemme suivant :

Lemme 3-1 : En considérant la fonction de coût $J(\theta)$ donnée par 3.8, en supposant que la matrice $\Phi^T \Phi$ est définie positive, la minimisation de $J(\theta)$ conduit à une solution unique :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad 3.9$$

le minimum étant donné par :

$$\min_{\theta} J(\theta) = J(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} [Y^T Y - Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y] \quad 3.10$$

La forme 3.9 de la solution estimée de θ peut être écrite dans une forme équivalente comme suit :

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad 3.11$$

Considérons maintenant la classe de modèles dynamiques, où l'équation 3.1 est soumise à une erreur d'équation associée à la présence de perturbations comme suit :

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta_0 + \eta(t) \quad 3.12$$

avec θ_0 le vecteur des paramètres réels, η représente une variable stochastique de moyenne nulle ($E[\eta] = 0$) et de variance λ^2 .

Le modèle 3.12 est équivalent à la forme suivante :

$$A_0(q^{-1})y(t) = B_0(q^{-1})u(t) + \eta(t) \quad 3.13$$

où

$$\begin{aligned} A_0(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B_0(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \end{aligned} \quad 3.14$$

avec $\varphi^T(t) = (-y(t-1) \dots - y(t-na) \quad u(t-1) \dots u(t-nb))$

et $\theta = (a_1 \dots a_{na} \quad b_1 \dots b_{nb})$.

En utilisant une forme matricielle pour l'équation 3.12, on peut écrire la relation suivante:

$$Y = \Phi \theta_0 + \eta \quad 3.15$$

Il est souhaitable que $\hat{\theta}$ soit une estimée non biaisée du vecteur des paramètres réels θ_0 , cela conduit à examiner l'équation suivante :

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] - \theta_0$$

En posant le terme $[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t)]^{-1}$ en facteur commun, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}\hat{\theta} - \theta_0 &= \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) - \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \theta_0 \right] = \\ &= \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) [y(t) - \varphi^T(t) \theta_0] \right]\end{aligned}$$

En remplaçant $y(t)$ avec l'expression fournie par l'équation 3.12, on peut écrire :

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \left[\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi^T(t) \right]^{-1} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varphi(t) \eta(t) \quad 3.16$$

Pour $N \rightarrow \infty$, $\hat{\theta} \rightarrow \theta_0$ si :

$$\begin{aligned}\blacksquare E\{\varphi(t) \varphi^T(t)\} \text{ est non singulière} \quad 3.17\end{aligned}$$

$$\blacksquare E\{\varphi(t) \eta(t)\} = 0 \quad 3.18$$

La première condition 3.17 est satisfaite dans la majorité des situations, il y en a peu qui font exception :

- Le signal d'entrée n'est pas persistant en excitations (Stoica & Söderström, 1989)
- Les données sont non bruitées et l'ordre de modèle est choisi trop important, ce qui implique que $A_0(q^{-1})$ et $B_0(q^{-1})$ ont des facteurs communs.

La deuxième condition 3.18 n'est pas satisfaite dans la plupart des cas. Une exception importante est dans le contexte de $\eta(t)$ bruit blanc. Dans cette situation $\eta(t)$ est non corrélé avec les données, soit $\varphi(t)$.

Si η est un bruit blanc de moyenne nulle, l'estimation $\hat{\theta}$ est une estimée sans biais de θ_0 :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi \theta_0 + \eta) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi \theta_0 + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \eta$$

$$E\hat{\theta} = \theta_0 + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T E\eta \quad 3.19$$

$$E\{\eta\} = 0 \Rightarrow E\hat{\theta} = \theta_0 \quad 3.20$$

En revanche, quand $\eta(t)$ n'est pas blanc, le bruit est corrélé avec les données, la condition 3.18, n'est pas satisfaite.

Néanmoins la condition que η soit blanc de moyenne nulle est difficilement vérifiée en pratique. Souvent, ces bruits sont colorés, auquel cas $\hat{\theta}$ n'est qu'une estimée biaisée de θ_0 . En fonction de la corrélation des signaux de sortie avec ces bruits, l'efficacité de l'estimation fournie par la méthode des moindres carrés peut être affectée. La méthode de la variable instrumentale constitue une alternative satisfaisante pour éliminer les contraintes induites en raison de la nature de bruits. Le formalisme de la méthode de la

variable instrumentale, pour les modèles invariants en temps, est présenté dans la section 3.1.3 de ce chapitre.

Quelques aspects sur l'implantation numérique de la méthode de moindres carrés sont présentés par la suite.

3.1.2. Mise en œuvre de la méthode de moindres carrés pour les systèmes invariants

La méthode de moindres carrés peut être mise en pratique soit :

- par la résolution directe des équations
- par des décompositions orthogonales
- par un algorithme récursif

La première approche consiste dans le calcul de $\Phi^T \Phi$ et $\Phi^T Y$ et l'inversion du terme $(\Phi^T \Phi)$.

La deuxième approche est connue comme la méthode QR. La multiplication par la matrice Q orthonormale ($Q\Phi\theta = QY$), ne va pas affecter la fonction de coût 3.8 :

$$\begin{aligned} \|QY - Q\Phi\theta\|^2 &= \|Q(Y - \Phi\theta)\|^2 = \\ &= (Y - \Phi\theta)^T Q^T Q (Y - \Phi\theta) = \\ &= (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) = \\ &= \|Y - \Phi\theta\|^2 \end{aligned} \quad 3.21$$

La matrice orthonormale Q peut être choisie de telle façon que $Q\Phi$ devient triangulaire supérieure comme suit :

$$Q\Phi = \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} ; QY = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad 3.22$$

où R est une matrice carrée, triangulaire supérieure. En remplaçant les matrices $Q\Phi$ et QY dans 3.21 par les expressions fournies par 3.22, la fonction de coût devient :

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \|Q\Phi\theta - QY\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} R \\ 0 \end{pmatrix} \theta - \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} R\theta - z_1 \\ -z_2 \end{pmatrix} \right\|^2 \end{aligned} \quad 3.23$$

En utilisant la définition des normes euclidiennes l'équation 3.23 devient :

$$J(\theta) = \|R\theta - z_1\|^2 + \|z_2\|^2 \quad 3.24$$

En supposant que R est inversible, on observe que $J(\theta)$ est minimale par rapport au vecteur de paramètres θ en choisissant $R\theta = z_1$. La valeur minimale est donnée par :

$$\min_{\theta} J(\theta) = \|z_2\|^2 = z_2^T z_2 \quad 3.25$$

Une troisième approche est fournie par une formulation récursive de l'algorithme d'identification. L'idée est d'écrire l'estimé 3.9 en fonction du vecteur estimé à l'instant antérieur, selon la forme suivante :

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + K(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)] \quad 3.26$$

Le terme $y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$, représentant l'erreur de prédiction, décrit la précision avec laquelle les mesures $y(t)$ peuvent être représentées par le vecteur de paramètres $\hat{\theta}(t-1)$ obtenu par les données précédentes. $K(t)$ est un vecteur de gains obtenu à partir de l'expression :

$$K(t) = P(t)\varphi(t) \quad 3.27$$

où :

$$P(t) = \left[\sum_{s=1}^t \varphi(s)\varphi^T(s) \right]^{-1} \quad 3.28$$

et

$$P^{-1}(t) = P^{-1}(t-1) + \varphi(t)\varphi^T(t) \quad 3.29$$

L'erreur de prédiction $\varepsilon(t) = y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}(t-1)$ représente la différence entre les mesures observées $y(t)$ et la prédiction de $y(t)$ à l'étape précédente, effectuée à l'instant $(t-1)$, fondée sur le modèle correspondant à l'estimé $\hat{\theta}(t-1)$.

Si $\varepsilon(t)$ est faible, l'estimée $\hat{\theta}(t-1)$ est considérée satisfaisante et elle ne nécessite pas d'être ajustée. Sinon, le vecteur $K(t)$, considéré comme un facteur de pondération qui montre l'impact de modification des éléments de vecteur de paramètre par rapport à l'erreur de prédiction $\varepsilon(t)$, doit être ajusté, de telle manière que la valeur de $\varepsilon(t)$ devienne satisfaisante.

Enfin l'algorithme nécessite le calcul de $P(t)$ par la relation 3.29. Cependant l'inversion matricielle peut conduire à des volumes de calcul importants rendant l'implantation en temps réel difficile à réaliser. Pour contourner ce problème, $P(t)$ peut-être écrit également selon une forme récursive :

$$P(t) = P(t-1) - P(t-1) \frac{\varphi(t)\varphi^T(t)P(t-1)}{1 + \varphi^T(t)P(t-1)\varphi(t)} \quad 3.30$$

Dans cette section le formalisme de la méthode de moindres carrés pour les systèmes LTI a été présenté, ainsi que quelques aspects pratiques pour leur mise en œuvre. La section suivante présente des aspects théoriques sur les méthodes de variable instrumentale, appliquées sur les modèles invariants en temps.

3.1.3. La méthode des variables instrumentales

Cette méthode représente une alternative très intéressante à la méthode de moindres carrés, qui confère un spectre plus large d'identification, indépendamment des caractéristiques des erreurs d'équation.

Considérons la classe de modèles entrée sortie en temps discret :

$$A(q^{-1})y(k) = B(q^{-1})u(k)$$

La philosophie de la méthode (Stefanoiu, Culita, & Stoica, 2005), (Stoica & Söderström, 1989) suit le formalisme présenté par la méthode de moindres carrés, sauf que le vecteur de régresseurs $\varphi(t)$ est remplacé par un vecteur défini par l'utilisateur. Souvent le vecteur est noté par $Z(t)$ et est appelé vecteur d'instruments. Il faut mentionner que pour le calcul du vecteur de paramètres estimés $\hat{\theta}$, seul le vecteur colonne $\varphi(t)$ est remplacé dans les deux termes de l'équation 3.11. Ainsi, le vecteur de paramètres estimés, fourni par la méthode de la variable instrumentale est de la forme suivante :

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N Z(t)\varphi^T(t) \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N Z(t)y(t) \right] \quad 3.31$$

Dans le cas d'un choix $Z(t) = \varphi(t)$ la méthode de moindres carrés est retrouvée. Pour que l'estimation fournie par la méthode de variables instrumentales soit consistante il faut que le vecteur d'instruments ne soit pas corrélé avec l'erreur d'équation.

Une façon d'obtenir $Z(t)$ est de le choisir de la forme suivante :

$$Z(t) = [Y_f | U] \quad 3.32$$

avec

$$Y_f = [y_f(n-1) \ y_f(n-2) \ \cdots \ y_f(n-na)]$$

$$U = [u(n-1) \ u(n-2) \ \cdots \ u(n-nb)].$$

Le signal Y_f est obtenu de la façon suivante :

$$Y_f[n] = \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} u[n] \quad 3.33$$

où les polynômes $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des estimées obtenues en utilisant une identification préalable par la méthode de moindres carrés.

En utilisant la méthode de la variable instrumentale, les modèles peuvent être identifiés avec succès indépendamment de la nature statistique des bruits.

La section suivante traite de la méthode des moindres carrés adaptée en vue de prendre en compte le cas des modèles LPV.

3.1.4. Méthode de moindres carrés adaptée pour les modèles LPV

Pour appliquer la méthode des moindres carrés sur les modèles linéaires à paramètres variants, la formulation théorique du cas LTI doit être modifiée, plus précisément la variation des paramètres doit être prise en compte dans le formalisme de la méthode. En particulier la variation des paramètres introduit des modifications dans les vecteurs de régresseurs. On suppose dans la suite que le paramètre variant est connu et mesurable.

On suppose que les données d'identification sont fournies par un système non linéaire de la forme suivante :

$$y = f(u, p, \eta) \quad 3.34$$

où y représente la sortie, u l'entrée, p le paramètre scalaire variant, η les bruits.

Pour modéliser ce type de système, on considère la classe de modèles LPV à temps discret, présentée dans la section 2.1.1 du chapitre II :

$$A(q^{-1}, p)y(k) = B(q^{-1}, p)u(k), \quad 3.35$$

où $y(k)$ est la sortie et $u(k)$ représente l'entrée, q^{-1} est l'opérateur de retard,

$q^{-1}y(k) = y(k-1)$, et :

$$\begin{aligned} B(q^{-1}, p) &= b_0(p) + b_1(p)q^{-1} + \dots + b_{n_b}(p)q^{-n_b} \\ A(q^{-1}, p) &= 1 + a_1(p)q^{-1} + \dots + a_{n_a}(p)q^{-n_a} \end{aligned} \quad 3.36$$

où $n = n_a + n_b + 1$ représente le nombre de paramètres à identifier. Il faut noter que par rapport au cas décrit antérieurement, cas représenté par l'application de la méthode de moindres carrés aux modèles invariants en temps, cette fois les différents termes du modèle sont dépendants du paramètre variant.

On considère dans cette approche que les fonctions $\{a_i\}, \{b_i\}$ dans la relation 3.36 sont des combinaisons linéaires d'un ensemble de fonctions connues $f_1, \dots, f_N$ du paramètre.

$$\begin{aligned} a_i(p) &= a_i^1 f_1(p) + \dots + a_i^k f_k(p) + \dots + a_i^N f_N(p) \\ b_i(p) &= b_i^1 f_1(p) + \dots + b_i^l f_l(p) + \dots + b_i^N f_N(p) \end{aligned} \quad 3.37$$

où les constantes a_i^k, b_i^l sont des nombres réels. Ainsi, l'objectif de cette méthode d'identification est de trouver les coefficients $\{a_i^k\}, \{b_i^l\}$.

Par rapport au cas de systèmes invariants, dans le contexte LPV, le vecteur de régresseurs est dépendant de la variation des paramètres. À l'instant k il a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_k &= [f_1(p_k) \quad f_2(p_k) \quad \cdots \quad f_N(p_k)] \otimes \\ &\quad \otimes [y_{k-1} \quad \cdots \quad y_{k-na} \quad u_k \quad \cdots \quad u_{k-nb}] \end{aligned} \quad 3.38$$

où l'opérateur $\otimes$ représente le produit de Kronecker, explicité par :

$$M \otimes N = \begin{bmatrix} m_{1,1}N & m_{1,2}N & \cdots & m_{1,q}N \\ m_{2,1}N & m_{2,2}N & \cdots & m_{2,q}N \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ m_{p,1}N & m_{p,2}N & \cdots & m_{p,q}N \end{bmatrix}, \quad 3.39$$

où $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ et $N \in \mathbb{R}^{r \times t}$ sont deux matrices arbitraires.

Si on note :

$$\varphi_k = [-y_{k-1} \quad \cdots \quad -y_{k-na} \quad -u_k \quad \cdots \quad -u_{k-nb}] \quad 3.40$$

pour les modèles LPV la régression linéaire 3.35 devient :

$$y_k = [f_1(p_k)\varphi_k \quad f_2(p_k)\varphi_k \quad \cdots \quad f_N(p_k)\varphi_k] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} = \Phi_k(p_k)\theta \quad 3.41$$

$$\text{avec } \theta_i = \begin{bmatrix} a_i^1 \\ \vdots \\ a_i^{na} \\ b_i^1 \\ \vdots \\ b_i^{na} \end{bmatrix}.$$

Sous une forme matricielle, le vecteur des prédictions d'un nombre de mesures M à partir des mesures précédentes, s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(p_k)\varphi_{k+1} & \cdots & f_N(p_k)\varphi_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(p_k)\varphi_{k+M} & \cdots & f_N(p_k)\varphi_{k+M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix} \quad 3.42$$

$$\text{soit } \hat{Y} = \Phi \theta \quad 3.43$$

$$\text{avec } \hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}_{k+1} \\ \vdots \\ \hat{y}_{k+M} \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} f_1(p_k)\varphi_{k+1} & \cdots & f_N(p_k)\varphi_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(p_k)\varphi_{k+M} & \cdots & f_N(p_k)\varphi_{k+M} \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}.$$

Le vecteur des paramètres à estimer est obtenu par l'expression suivante :

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad 3.44$$

Considérons maintenant la forme de modèle suivante :

$$Y = \Phi \theta_o + \eta \quad 3.45$$

où η représente une variable stochastique et Θ_o est considéré le vecteur des paramètres réels. L'analyse développée dans la section 3.1.1, concernant le biais d'estimation, causé par l'effet de perturbation présent sur l'équation, est valide aussi pour les modèles à paramètres variants. Supposons que η est un bruit blanc, la sortie de modèle n'est pas corrélée avec l'erreur d'équation. En revanche il est intéressant d'analyser la corrélation du paramètre variant p avec le bruit η . Considérons le signal p déterministe. Dans ce contexte, l'espérance mathématique de $p[k]\eta[k]$ conduit à :

$$E(p[k]\eta[k]) = p[k]E(\eta[k]) = 0 \quad 3.46$$

La corrélation entre les deux signaux est de la forme :

$$\begin{aligned} \gamma_{p\eta}[k, l] &= E(p[k]\eta[k] p[k+l]\eta[k+l]) = \\ &= p[k]p[k+l]E(\eta[k]\eta[k+l]) \end{aligned} \quad 3.47$$

Notons $\gamma[l] = E(\eta[k]\eta[k+l])$,

$$\text{si } l = 0 \Rightarrow \gamma[l] = B^2,$$

$$\text{si } l \neq 0 \Rightarrow \gamma[l] = 0,$$

où B^2 représente la puissance du bruit.

Sous l'hypothèse que η est un bruit blanc, l'équation 3.46 et la fonction de covariance montre la non corrélation du paramètre variant avec les bruits de mesure. Cela conduit à la conclusion que le biais de l'estimée par rapport au bruit présent sur l'équation de mesure ne dépend pas de la variation du paramètre.

Dans un contexte général, en présence de bruits colorés, l'analyse 3.46, 3.47 n'est plus valide. Pour contourner l'inconsistance introduite par les bruits présents sur l'équation de mesures, la méthode de la variable instrumentale est modifiée pour prendre en compte le cas de modèle LPV.

3.1.5. Méthode de variables instrumentales adaptée pour les modèles LPV

En considérant le modèle 3.35 :

$$A(q^{-1}, p)y(k) = B(q^{-1}, p)u(k)$$

avec les matrices de coefficients à identifier fournis par l'équation 3.36 :

$$\begin{aligned} B(q^{-1}, p) &= b_0(p) + b_1(p)q^{-1} + \dots + b_{nb}(p)q^{-nb} \\ A(q^{-1}, p) &= 1 + a_1(p)q^{-1} + \dots + a_{na}(p)q^{-na} \end{aligned} \quad ,$$

la matrice des paramètres estimés est donnée par :

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{k=1}^N Z(k) \Phi_k^T(k) \right]^{-1} \left[\sum_{k=1}^N Z(k) y(k) \right] \quad 3.48$$

où $Z(k)$ est le vecteur d'instruments composé par la sortie $\hat{y}(k)$ (équation 3.43), obtenu par la simulation du modèle obtenu après identification préalable d'un modèle par la méthode de moindres carrés et le vecteurs des entrées $u(k)$, pondérés par le vecteur de paramètres variants:

$$Z(k) = [f_1(p_k) \quad f_2(p_k) \quad \cdots \quad f_N(p_k)] \otimes [\hat{y}_{k-1} \quad \cdots \quad \hat{y}_{k-na} \quad u_k \quad \cdots \quad u_{k-nb}].$$

Les fonctions $f_1 \cdots f_N$ sont des fonctions connues, introduites dans la section précédente (3.1.4) et Φ_k a la forme 3.40 :

$$\Phi_k = [f_1(p_k) \quad f_2(p_k) \quad \cdots \quad f_N(p_k)] \otimes [y_{k-1} \quad \cdots \quad y_{k-na} \quad u_k \quad \cdots \quad u_{k-nb}].$$

Une étude de cas sur un modèle académique, en utilisant la méthode des moindres carrés est présentée dans le chapitre IV de la thèse. Une analyse des résultats par rapport aux différentes perturbations ajoutées comme erreurs d'équation est réalisée. Pour éliminer l'effet du bruit sur le résultat d'identification, des estimées sont réalisées en utilisant la méthode de la variable instrumentale.

Dans la section suivante une autre approche fondée sur la méthode des moindres carrés est présentée.

3.1.6. Autre approche pour la méthode de moindres carrés, cas des représentations LPV

Le formalisme de la méthode de moindres carrés, adapté pour les modèles LPV, est présenté à partir de (Bamieh & Giarré, 2002). Dans cette approche le vecteur de paramètres à identifier est calculé par la méthode de moindres carrés, en utilisant deux algorithmes différents.

Il s'agit d'identifier un modèle LPV entrée/sortie, représenté sous la forme d'une régression linéaire.

Le modèle 3.35 peut être écrit sous la forme d'une régression linéaire comme suit:

$$y_k = \langle \Theta, \Psi_k \rangle, \quad 3.49$$

où l'ensemble des différents paramètres peut être regroupé dans la matrice :

$$\Theta = \begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^N \\ a_2^1 & \cdots & a_2^N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{na}^1 & \cdots & a_{na}^N \\ b_0^1 & \cdots & b_0^N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{nb}^1 & \cdots & b_{nb}^N \end{bmatrix} \quad 3.50$$

et le vecteur de régresseurs étendu peut être défini selon l'expression :

$$\Psi_k = \Phi_k \pi_k = \begin{bmatrix} -y_{k-1} \\ \vdots \\ -y_{k-na} \\ u_k \\ \vdots \\ u_{k-nb} \end{bmatrix} [f_1(p_k) \quad f_2(p_k) \quad \cdots \quad f_N(p_k)] \quad 3.51$$

Le produit $\langle \Theta, \Psi_k \rangle$ est défini comme suit :

$$\langle \Theta, \Psi_k \rangle = \text{trace}(\Theta^* \Psi_k) = \text{trace}(\Psi_k \Theta^*) \quad 3.52$$

avec Θ^* matrice transposée conjuguée de la matrice Θ .

La matrice Ψ_k est composée par les données précédentes des signaux d'entrée, de sortie et du paramètre variant. Il faut mentionner que $p_k = p(k)$, représente la valeur du paramètre variant à l'instant k .

On considère la fonction de coût suivante :

$$J(\theta) = \varepsilon(k, \theta)^2 \quad 3.53$$

L'erreur de prédiction ε est définie comme suit :

$$\varepsilon(k, \theta) = y_k - \langle \theta, \Psi_k \rangle. \quad 3.54$$

La mise à jour de paramètres est donnée par la récurrence suivante :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta} - \frac{1}{2} \alpha \left(\frac{d}{d\theta} (\varepsilon(k, \theta)^2) \right) \Big|_{\theta=\theta_k}. \quad 3.55$$

En remplaçant l'expression de $\varepsilon(k, \theta)$ par l'équation 3.54 et en utilisant la propriété de dérivée $\left(\frac{d}{dX} \right) \text{trace}(X^T Z) = Z$, une formulation d'estimation des paramètres, peut être donnée par :

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \alpha \varepsilon_k \Psi_k \quad 3.56$$

où α est le pas représentant la constante d'adaptation, paramètre choisi par l'utilisateur tel que $\alpha \in (0,1]$, $\hat{\theta}_k$ est la matrice des paramètres estimés à l'instant du temps discret k .

L'algorithme des moindres carrés d'estimation de vecteur de paramètres à l'instant discret k est le suivant :

Algorithme LMS

1. Formation de $\Psi_k = \phi_k \pi_k$, vecteur de régresseurs (3.51)
2. Calcul de l'erreur de prédiction $\varepsilon_k = y_k - \langle \hat{\theta}_k, \Psi_k \rangle$
3. Mise à jour de la matrice des paramètres : $\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \alpha \varepsilon_k \Psi_k$

On observe que pour l'implantation en temps réel de cet algorithme, il est nécessaire de réaliser la construction du vecteur de regresseurs et de calculer l'erreur de prédiction à chaque instant k .

L'approche classique de la méthode de moindres carrés réursive peut être aussi envisagée pour résoudre ce problème d'identification. Fondé sur le formalisme LTI, une adaptation pour les modèles LPV peut être déduite. L'erreur de prédiction est calculée en utilisant les valeurs des paramètres calculés à l'instant précédent, soit $\hat{\theta}_{k-1}$. L'algorithme de calcul récursif est construit de la manière suivante :

Algorithme RLS

1. Calcul de l'erreur de prédiction en fonction de la matrice de paramètres précédente :

$$\varepsilon_k = y_k - \langle \hat{\theta}_{k-1}, \Psi_k \rangle = y_k - \text{trace}(\hat{\theta}_{k-1}^* \Psi_k)$$

2. Mise à jour de la matrice de paramètres : $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} + K_k \varepsilon_k$

avec K_k et P_k définis comme suit :

$$\begin{aligned} K_k &= P_k \Psi_k \\ P_k &= P_{k-1} - P_{k-1} \frac{\Psi_k \otimes \Psi_k}{1 + \langle \Psi_k, P_{k-1} \Psi_k \rangle} P_{k-1} \end{aligned} \quad 3.57$$

où l'opérateur $U \otimes V$ est le produit tensoriel de deux matrices, soit le produit de Kronecker, explicité par l'équation 3.39.

Pour garantir la convergence de ces algorithmes une condition de persistance de l'excitation doit être satisfaite. Le vecteur de régresseurs doit respecter certaines conditions afin que la séquence de données utilisée pour l'identification soit consistante. Si θ_r est la valeur réelle de la matrice de paramètres, l'algorithme d'estimation converge si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_k = \theta_r \quad 3.58$$

Définition 3-1 : Le vecteur de régresseurs étendu Ψ_k est considéré PE (Persistently Exciting en anglais) si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N E\{\Psi_k \otimes \Psi_k\} > 0 \quad 3.59$$

La démonstration de la condition de persistance d'excitation est donnée dans (Bamieh & Giarré, 2002).

Dans le chapitre IV la méthode des moindres carrés implantée selon les deux algorithmes, itératif et récursif, est appliquée sur un système LPV académique pour identifier un modèle E/S de deuxième ordre, à temps discret.

La méthode des moindres carrés offre une estimation des paramètres en utilisant des structures des modèles simples, comme les régressions linéaires. Ces structures linéaires sont considérées comme des modèles statiques, où le vecteur $\varphi(t)$ est composé par des valeurs connues a priori. Notons que la méthode de moindres carrés est un cas simplifié des méthodes à erreurs de prédiction. Les méthodes à erreur de prédiction, qui sont plus générales, traitent de la problématique de minimisation de l'erreur de prédiction pour des structures de modèles stochastiques plus complexes.

Dans la section suivante, le formalisme des méthodes à erreur de prédiction est présenté.

3.2. Méthodes à erreur de prédiction

3.2.1. Formalisme pour les systèmes LTI

Dans le formalisme des méthodes à erreurs de prédiction, des structures de modèles dynamiques, données par l'expression suivante, sont considérées :

$$A(q^{-1}, p)y(k) = B(q^{-1}, p)u(k) + \varepsilon(k) \quad 3.60$$

où :

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na} \\ B(q^{-1}) &= b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb} \end{aligned} \quad 3.61$$

et $\varepsilon(k)$ représente l'erreur d'équation.

Le modèle 3.60 peut être écrit sous la forme suivante :

$$y(k) = \varphi^T(k)\theta + \varepsilon(k) \quad 3.62$$

où

$$\varphi^T(k) = (-y(k-1) \dots - y(k-na) \quad u(k-1) \dots u(k-nb)) \quad 3.63$$

$$\theta = (a_1 \cdots a_{na} \ b_1 \cdots b_{nb})^T.$$

La fonction de coût à minimiser est donnée par :

$$J_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varepsilon^2(k) \quad 3.64$$

Le vecteur de paramètres qui minimise la somme des erreurs d'équation est donné par l'expression suivante :

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) \varphi^T(k) \right]^{-1} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k) y(k) \right] \quad 3.65$$

Il faut noter que si l'erreur $\varepsilon(k)$ est considérée négligeable dans l'équation 3.60 à l'instant de temps k la sortie peut être prédite comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{y}(k) = & -a_1 y(k-1) - \cdots - a_{na} y(k-na) + \\ & + b_1 u(k-1) + \cdots + \\ & + b_{nb} u(k-nb) = \varphi^T(k) \theta(k) \end{aligned} \quad 3.66$$

Par conséquence $\varepsilon(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ peut-être considéré comme l'erreur de prédiction, et l'on se retrouve dans le cas de la méthode des moindres carrés, qui détermine le vecteur de paramètres pour lequel la somme des erreurs de prédiction est minimale. Pour cette raison la méthode des moindres carrés est considérée comme un cas particulier des méthodes à erreur de prédiction.

Pour implanter les méthodes à erreur de prédiction les choix suivants doivent être faits :

- Choix d'une structure de modèle, ce point est lié à la classe de modèles à utiliser et à leur paramétrage.
- Choix du prédicteur qui peut être construit en utilisant différentes techniques. Dans nos études le filtre de Kalman a été utilisé préférentiellement, il sera présenté dans la section 3.2.1.1.
- Choix d'un critère à minimiser ; il s'agit d'une fonction permettant d'évaluer les performances du prédicteur. Ce critère doit être minimisé par rapport au vecteur θ , afin de choisir le meilleur prédicteur dans la classe des possibles.

Le principe de base de la méthode à erreur de prédiction est représenté graphiquement par le schéma de la Figure 3-1 (Stoica & Söderström, 1989) .

Les entrées et sorties du système, $u(k), y(k)$, sont considérées mesurables. A partir de ces mesures, un prédicteur, $\hat{y}(k, \theta)$, est construit. La sortie du prédicteur est comparée avec la sortie mesurée $y(k)$. La différence entre les deux signaux représente l'erreur de prédiction. Un algorithme d'optimisation est mis en place, pour minimiser la valeur de

cette erreur. Ce procédé est fait en ajustant les paramètres du prédicteur, à chaque évaluation de l'erreur de prédiction.

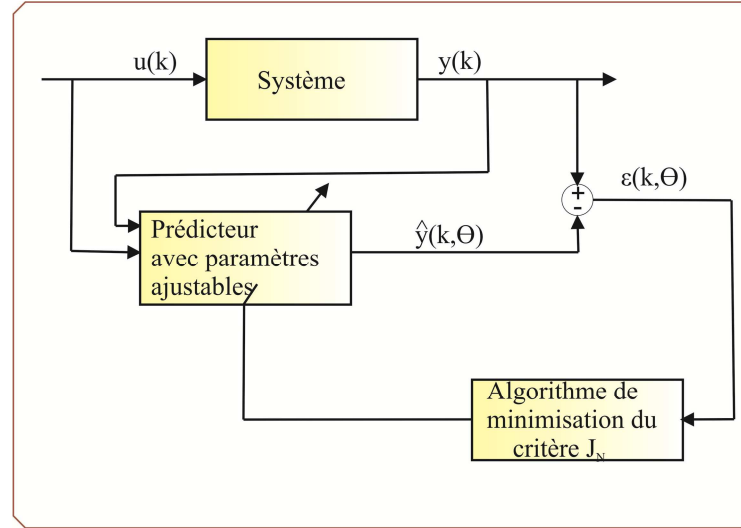


Figure 3-1 : Principe de base des méthodes à erreur de prédiction

La première étape à réaliser pour implanter les méthodes à erreur de prédiction est le choix d'une structure de modèle pour représenter le système. Une discussion sur ce sujet a été abordée dans le chapitre II de cette thèse, où les structures de modèles utilisées dans nos travaux ont été présentées pour les systèmes LPV. Sans donner de détails, on rappelle la représentation dans l'espace d'état des modèles à temps continu et discret pour les systèmes LTI :

$$\begin{aligned} \dot{x}_c(t) &= A_c x_c(t) + B_c u_c(t) \\ y_c(t) &= C_c x_c(t) + D_c u_c(t) \end{aligned} \quad 3.67$$

$$\begin{aligned} x_d(k+1) &= A_d x_d(k) + B_d u_d(k) \\ y_d(k) &= C_d x_d(k) + D_d u_d(k) \end{aligned} \quad 3.68$$

où $x_c(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente l'état, $u_c(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ représente l'entrée, $y_c(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ représente la sortie, et A_c, B_c, C_c, D_c sont les matrices de la représentation d'état pour le système à temps continu 2.3, t étant le temps. Les vecteurs $x_d(k), u_d(k), y_d(k)$ représentent respectivement les vecteurs d'état, d'entrée et de sortie qui caractérisent le modèle discret 2.4, avec les matrices de la représentation d'état A_d, B_d, C_d, D_d , k étant le temps discret.

La deuxième étape à suivre pour l'implantation des méthodes à erreur de prédiction est consacrée à la construction d'un prédictor. Dans la section suivante l'utilisation du prédictor de Kalman est présentée.

3.2.1.1. Prédicteur de Kalman

Le filtre de Kalman (Welch & Bishop, 2006) (Maybeck, 1979) fait appel aux mesures disponibles afin de fournir une estimée du vecteur d'état $x \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que le système est représenté par une équation récurrente stochastique du type suivant :

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1} \quad 3.69$$

avec une mesure $z \in \mathbb{R}^m$ définie comme suit :

$$z_k = H_k x_k + v_k \quad 3.70$$

où x_k est l'état à instant k , u_k l'entrée de commande $u \in \mathbb{R}^l$, w_k représente le bruit d'état avec une covariance Q_k et v_k représente le bruit de mesure avec une covariance R_k .

On définit $\hat{x}_k^- \in \mathbb{R}^n$ comme l'estimée d'état *a priori* calculée à l'instant k . Elle utilise des informations sur le processus avant l'instant k .

On définit $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ comme l'estimée d'état *a posteriori* calculée à l'instant k . Elle utilise les mesures z_k .

Soit $e_k^- = x_k - \hat{x}_k^-$ et $e_k = x_k - \hat{x}_k$ les erreurs d'estimation *a priori* et *a posteriori* respectivement. Les matrices de covariance des erreurs d'estimation e_k^- et e_k sont respectivement :

$$P_k^- = E[e_k^- e_k^{-T}] \quad 3.71$$

et :

$$P_k = E[e_k e_k^T] \quad 3.72$$

L'expression selon laquelle l'estimée d'état $\hat{x}_k$ est calculée est donnée par :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad 3.73$$

La matrice de gain K est donnée par l'expression suivante :

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1} \quad 3.74$$

La mise en place du filtre de Kalman est réalisée selon deux phases distinctes :

- Prédiction
- Mise à jour

La phase de prédiction utilise l'état estimé de l'instant précédent pour produire une estimation de l'état courant. Dans l'étape de mise à jour, les observations de l'instant courant sont utilisées pour corriger l'état prédit afin d'obtenir une estimation plus précise.

Les équations caractérisant la phase de prédiction sont les suivantes :

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad 3.75$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad 3.76$$

Les équations de mise à jour sont les suivantes :

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad 3.77$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K(z_k - H\hat{x}_k^-) \quad 3.78$$

$$P_k = (I - K_k H)P_k^- \quad 3.79$$

Pour l'implantation physique du filtre il est nécessaire de disposer d'informations sur les paramètres. La connaissance de la covariance de bruit de mesures, R , est généralement accessible hors ligne. Cependant la valeur de la covariance de bruit d'état, Q , est plus difficile à déterminer généralement, parce que l'on n'a pas la capacité d'observer directement le processus. Une façon de trouver ces valeurs est de régler les paramètres Q et R par une mise au point hors ligne.

Dans ce paragraphe les éléments de base pour la réalisation de filtre de Kalman ont été rappelés. Ainsi, ayant la structure du modèle et le prédicteur, on va s'orienter vers la troisième étape de la démarche des méthodes à erreur de prédiction, qui consiste dans la construction d'un critère de minimisation de ε . Dans nos études, la méthode de Levenberg-Marquardt est utilisée pour résoudre ce problème.

3.2.1.2. Optimisation par la méthode de Levenberg-Marquardt

L'algorithme d'optimisation de Levenberg-Marquardt (Madsen, Nielsen, & Tingleff, 2004) (Lourakis, 2005) (Ranganathan, 2004) est une technique itérative qui permet de déterminer un point correspondant au minimum d'une fonction exprimée par une somme de carrés de fonctions non linéaires :

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N f_i^2(x) \quad 3.80$$

où f_i sont des fonctions données, $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_N(x) \end{bmatrix}$. A partir d'un point de départ, x_0 , la

méthode fournit une série de vecteurs $x_1, x_2, \dots$ qui converge vers un point minimal x^* .

A la base des méthodes d'optimisation non linéaires, l'on peut citer le développement en série de Taylor. Considérons d représentant la direction de descente pour la fonction F et α étant la taille du pas d'avancement. Pour $\|d\|$ faible, la relation suivante peut être alors écrite :

$$F(x + \alpha d) = F(x) + \alpha d^T \frac{\partial F(x)}{\partial x}. \quad 3.81$$

La méthode de Levenberg-Marquardt peut être interprétée comme une combinaison entre la méthode de descente du gradient et celle de Gauss-Newton. Elle se comporte comme la méthode de descente du gradient quand le point courant est loin de la valeur optimale, et se comporte comme la méthode de Gauss-Newton quand le point courant est proche de l'optimum.

La fonction F peut-être écrite sous une forme contractée :

$$F(x) = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} f(x)^T f(x) \quad 3.82$$

Le gradient et le Hessien peuvent être construits selon les relations suivantes :

$$\nabla F(x) = \sum_{i=1}^N f_i(x) \nabla f_i(x) = J(x)^T f(x) \quad 3.83$$

$$\nabla^2 F(x) = J(x)^T J(x) + \sum_{i=1}^N f_i(x) \nabla^2 f_i(x) \quad 3.84$$

En connaissant la matrice Jacobienne ($J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$), la matrice Hessienne 3.84 peut être déduite facilement si on peut approcher les fonctions f_i par des fonctions linéaires. Dans ce cas, la matrice Hessienne devient :

$$\nabla^2 F(x) = J(x)^T J(x) \quad 3.85$$

En utilisant la méthode de descente du gradient (Meza, 2010) (Xu, 2008) la règle de mise à jour des paramètres est donnée selon l'expression suivante :

$$x_{i+1} = x_i - \alpha \nabla F(x_i) \quad 3.86$$

où α représente la taille du pas et $d = d_{dg} = -\nabla F(x_i)$, avec la notation « dg » représentant les initiales de « descente du gradient ».

La règle de mise à jour en utilisant la méthode de Gauss-Newton (Gratton, Lawless, & Nichols, 2004) est donnée par :

$$x_{i+1} = x_i - \alpha (\nabla^2 F(x_i))^{-1} \nabla F(x_i) \quad 3.87$$

La méthode de Gauss-Newton classique utilise $\alpha = 1$ dans toutes les itérations.

La direction de descente sera notée ici $d = d_{GN} = (\nabla^2 F(x_i))^{-1} \nabla F(x_i)$ (la notation « GN » vient de Gauss Newton), les avantages des méthodes de descente du gradient et de Gauss Newton sont complémentaires. La méthode de Levenberg propose une combinaison entre ces deux méthodes, elle est donnée par :

$$x_{i+1} = x_i - \alpha(H + \lambda I)^{-1} \nabla F(x_i) \quad 3.88$$

où H est la matrice Hessienne calculée au point x_i .

Le changement le plus significatif a été apporté par Marquardt, en remplaçant la matrice identité de l'équation 3.88 par $\text{diag}(H)$:

$$x_{i+1} = x_i - \alpha(H + \lambda \text{diag}(H))^{-1} \nabla F(x_i) \quad 3.89$$

où λ est considéré comme le terme d'amortissement. Pour les valeurs $\lambda > 0$ la direction de recherche, d , fait descendre le point courant vers la valeur optimale (Madsen, Nielsen, & Tingleff, 2004). Ainsi :

- Pour des valeurs importantes de λ , la direction $d_{LM} \approx d_{dg}$, représente un pas faible dans la direction de la méthode de descente du gradient.
- Pour des valeurs faibles de λ , la direction $d_{LM} \approx d_{GN}$, représente un pas important dans les itérations finales de l'algorithme, dans la direction de la méthode de Gauss-Newton.

La valeur initiale de λ est choisie par l'utilisateur. Pendant les itérations de l'algorithme, la taille de λ peut être mise à jour, afin que, si le point courant est loin de la valeur optimale, λ est augmenté (comportement de méthode de descente de gradient) et si le point est proche de la solution recherchée λ est diminué dans le sens de la méthode de Gauss-Newton. Des détails sur le choix du terme d'amortissement λ sont explicités dans (Madsen, Nielsen, & Tingleff, 2004).

Il faut mentionner que ce type de méthode ne garantit pas de performances de convergence globale. Le point de minimum optimal trouvé, x^* , dépend fortement du point de départ de l'algorithme, x_0 . Malgré cet inconvénient, la méthode de Levenberg-Marquardt est très utilisée dans la pratique et ses performances sont satisfaisantes.

Ayant à la disposition une brève présentation des outils nécessaires pour mettre en œuvre les méthodes à erreur de prédiction, illustrées pour le cas des modèles invariants, la section suivante présente les méthodes à erreur de prédiction modifiées pour prendre en compte le cas des modèles LPV.

3.2.2. Méthode à erreur de prédiction pour les modèles LPV

Pour mettre en place les méthodes à erreur de prédiction on rappelle les étapes qui doivent être respectées :

- Choix d'une structure de modèle
- Choix du prédicteur
- Choix d'un critère à minimiser

Dans le formalisme de cette méthode la classe de modèles polytopiques est choisie pour représenter les modèles LPV. La démarche dans le cas de cette structure consiste à déterminer des modèles invariants en différents points de fonctionnement du procédé et à les interpoler afin d'obtenir le modèle LPV (Fujimori & Ljung, 2006). Les points de fonctionnement sont choisis en conformité avec la plage de variation des paramètres, qui sont considérés connus et mesurés. La structure du modèle est présentée en détail dans la section 3.2.2.1.

Pour estimer la sortie du modèle, un prédictor de type Kalman est développé, modifié pour prendre en compte les paramètres variants et présenté dans la section 3.2.2.2.

Le critère d'optimisation utilisé (Levenberg-Marquardt), modifié pour les modèles LPV, est présenté dans la section 3.2.2.3.

Comparée au cas de la recherche de modèles linéaires invariants, la problématique abordée pour les modèles LPV a deux spécificités : la première concerne le nombre de paramètres à estimer qui est dépendant du nombre de points de fonctionnement choisis. La seconde concerne la discrétisation du prédictor et le calcul du gradient.

La section suivante présente la classe de modèles polytopiques, choisis pour représenter les systèmes LPV.

3.2.2.1. Représentation du modèle LPV

Les modèles LPV envisagés sont représentés selon une forme polytopique particulière :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(p(t), \xi(p))x(t) + B(p(t), \xi(p))u(t) + K(p(t), \xi(p))e(t) \\ y(t) = C(p(t), \xi(p))x(t) + D(p(t), \xi(p))u(t) + e(t) \end{cases} \quad 3.90$$

où $x(t)$, $y(t)$, $u(t)$, $e(t)$ sont respectivement les vecteurs d'état, de sortie, d'entrée et un bruit blanc. $p(t)$ est un paramètre mesurable, variant dans le temps et $\xi(p)$ est un vecteur de paramètres qui varie en fonction de p .

Les modèles LPV sont formés en utilisant des structures polytopiques construites par combinaisons linéaires des modèles linéaires invariants (LTI) identifiés en différents points de fonctionnement correspondant à des valeurs particulières du paramètre variant.

Pour chaque valeur p_i de p , le système est caractérisé par une structure LTI ($A_i(p_i, \xi_i), \dots, K_i(p_i, \xi_i), \xi_i = \xi(p_i)$), nommée le i^{ieme} modèle LTI local. La structure polytopique est formée en considérant une représentation d'état donnée par la formulation suivante :

$$\begin{aligned}
A_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_i(p_i, \xi_i) \\
B_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_i(p_i, \xi_i) \\
C_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_i(p_i, \xi_i) \\
D_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_i(p_i, \xi_i) \\
K_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) K_i(p_i, \xi_i)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

avec $\theta = [\xi_1 \ \xi_2 \ \dots \ \xi_r]$ et $w_i(p)$ des fonctions de pondération qui satisfont aux relations suivantes:

$$\begin{aligned}
w_i(p) &\geq 0, \forall i \\
\sum_{i=1}^r w_i(p) &= 1
\end{aligned} \tag{3.92}$$

où r est le nombre de points de fonctionnement choisis pour représenter le modèle et p_i est la valeur du paramètre correspondant au i^{ieme} point de fonctionnement du paramètre variant. La Figure 3-2 présente les fonctions de pondération qui montrent un choix particulier selon une forme triangulaire.

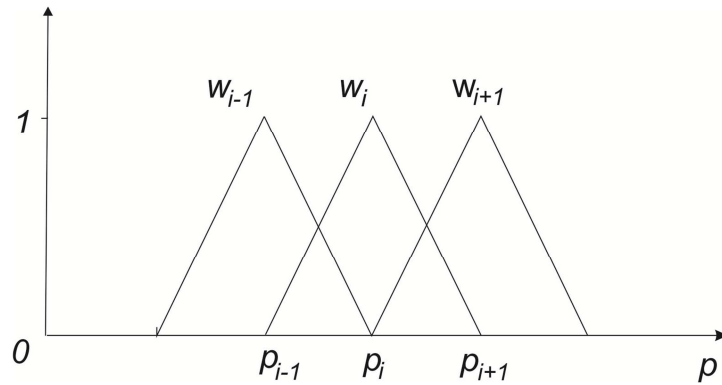


Figure 3-2 : Fonctions de pondération triangulaires

Dans la section suivante le prédicteur de Kalman, modifié pour prendre en compte les modèles polytopiques, est présenté.

3.2.2.2. Prédicteur de Kalman adapté au cas LPV

Pour prédire la sortie du modèle, le prédicteur de Kalman a la structure suivante:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}(t, \theta)}{dt} = A_c(p, \theta)\hat{x}(t, \theta) + B_c(p, \theta)u(t) + K_c(p, \theta)(y(t) - \hat{y}(t, \theta)) \\ \hat{y}(t, \theta) = C_c(p, \theta)\hat{x}(t, \theta) + D_c(p, \theta)u(t) \end{cases} \quad 3.93$$

Dans le cas des structures LPV et en utilisant les formes des relations 3.90 et 3.91 le prédicteur est décrit par l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}(t, \theta)}{dt} &= F_c(p, \theta)\hat{x}(t, \theta) + G_c(p, \theta)z(t) \\ \hat{y}(t, \theta) &= C_c(p, \theta)\hat{x}(t, \theta) + H_c(p, \theta)z(t) \end{aligned} \quad 3.94$$

avec le jeu de données z défini par :

$$z = [y^T(t) \quad u^T(t)]^T \quad 3.95$$

et les matrices :

$$\begin{aligned} F_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) \left\{ A_i(p_i, \xi_i) - K_i(p_i, \xi_i) \sum_{j=1}^r w_j(p) C_j(p_j, \xi_j) \right\} \\ G_c(p, \theta) &= [G_{c1} \quad G_{c2}] \\ H_c(p, \theta) &= \begin{bmatrix} 0 & \sum_{i=1}^r w_i(p) D_i(p_i, \xi_i) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 3.96$$

où G_{c1} et G_{c2} sont définies par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} G_{c1} &= \sum_{i=1}^r w_i(p) K_i(p_i, \xi_i) \\ G_{c2} &= \sum_{i=1}^r w_i(p) \left\{ B_i(p_i, \xi_i) - K_i(p_i, \xi_i) \sum_{j=1}^r w_j(p) D_j(p_j, \xi_j) \right\} \end{aligned} \quad 3.97$$

Le calcul de l'erreur de prédiction, nécessite d'effectuer une discrétisation du prédicteur. Pour une période d'échantillonnage des données $z(t)$ suffisamment faible, $p(t)$ peut être considéré constant durant un intervalle d'échantillonnage :

$$p(t) = p^{(k)} = \text{const}; kT \leq t < (k+1)T \quad 3.98$$

En utilisant l'approximation d'Euler présentée dans le chapitre II, section 2.2.1.2, on obtient la représentation discrète suivante :

$$\hat{x}((k+1)T, \theta) = F_d(k, \theta)\hat{x}(kT, \theta) + G_d(k, \theta)z(kT) \quad 3.99$$

$$\hat{y}(kT, \theta) = C_d(k, \theta)\hat{x}(kT, \theta) + H_d(k, \theta)z(kT)$$

où les matrices de cette représentation à temps discret se déduisent de celles à temps continu :

$$\begin{aligned} F_d(k, \theta) &= I + TF_c(p^{(k)}, \theta) \\ G_d(k, \theta) &= TG_c(p^{(k)}, \theta) \\ C_d(k, \theta) &= C_c(p^{(k)}, \theta), \\ H_d(k, \theta) &= H_c(p^{(k)}, \theta). \end{aligned} \tag{3.100}$$

Le dernier outil nécessaire pour mettre en place la méthode est la partie optimisation, présentée dans la section suivante.

3.2.2.3. Optimisation

La méthode de Levenberg-Marquardt, adaptée pour les modèles LPV est présentée dans la suite. Soit N la taille de l'échantillon de données Z , où $Z = [z^T(1) \dots z^T(N)]$.

Le paramètre θ , est déterminé de manière à minimiser la somme des carrés des normes des vecteurs d'erreurs de prédiction $J_N(\theta, Z)$:

$$J_N(\theta, Z) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} e^T(k, \theta) e(k, \theta) \tag{3.101}$$

avec $e(k, \theta)$ le vecteur d'erreur de prédiction défini comme :

$$e(k, \theta) = y(k) - \hat{y}(k, \theta) \tag{3.102}$$

Le paramètre estimé est obtenu comme :

$$\hat{\theta} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} J_N(\theta, Z) \tag{3.103}$$

$\hat{\theta}$ est calculé en utilisant la relation suivante :

$$\hat{\theta}^{(l+1)} = \hat{\theta}^{(l)} - \alpha [H_N^l + \lambda I]^{-1} Jac_N(\hat{\theta}^{(l)}, Z) \tag{3.104}$$

avec :

$$H_N = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi^T(k, \hat{\theta}^{(l)}) \psi(k, \hat{\theta}^{(l)}) \tag{3.105}$$

et le Jacobian est donné par :

$$Jac_N(\hat{\theta}^{(I)}, Z) = -\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \psi^T(t, \hat{\theta}^{(I)}) e(t, \hat{\theta}^{(I)}) \quad 3.106$$

où H_N représente la matrice Hessienne, α le pas d'avance, λ le coefficient d'amortissement et (I) représente l'itération courante.

La méthode de Levenberg Marquardt exploite une expression du gradient de la sortie prédite. Ce gradient :

$$\Psi(k, \hat{\theta}) = \frac{\partial \hat{y}(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} \quad 3.107$$

est obtenu en utilisant la représentation d'état discrète suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}(k+1, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= F_d(k, \hat{\theta}) \frac{\partial \hat{x}(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} + \begin{bmatrix} \frac{\partial F_d(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} & \frac{\partial G_d(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k, \hat{\theta}) \\ z(k) \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \hat{y}(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} &= C_d(k, \hat{\theta}) \frac{\partial \hat{x}(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} + \begin{bmatrix} \frac{\partial C_d(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} & \frac{\partial H_d(k, \hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k, \hat{\theta}) \\ z(k) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 3.108$$

où $\hat{\theta}_l$ représente la l^{ieme} composante du vecteur de paramètres.

Dans un premier temps les dérivées de $F_d(k, \theta)$, $G_d(k, \theta)$, $C_d(k, \theta)$, $H_d(k, \theta)$ peuvent être calculées par des approches numériques, avec l'expression suivante correspondant à une dérivée deux points :

$$\frac{\partial F_d(k, \theta)}{\partial \theta_l} \approx \frac{F_d(k, \theta_l + \delta_l) - F_d(k, \theta_l - \delta_l)}{2\delta_l} \quad 3.109$$

où δ_l est une valeur suffisamment faible. Cependant cette approche conduit, dans le cas de ces méthodes, à un temps de calcul important. Ce temps peut être fortement réduit en utilisant une détermination analytique pour ces dérivées. Ainsi, en exploitant la forme de différentes matrices des structures polytopiques considérées, des reformulations des différentes relations conduisent à des expressions simples pour :

$$\frac{\partial F_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial G_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial C_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial H_d(k, \theta)}{\partial \theta_l} \quad 3.110$$

Dans cette section le formalisme des méthodes à erreur de prédiction pour les modèles LPV a été présenté. Cette approche est exploitée dans le chapitre V pour identifier un modèle LPV caractérisant le comportement latéral d'un véhicule, et dans le chapitre VI pour identifier un modèle LPV d'un convertisseur de puissance DC-DC, afin d'élaborer ensuite une loi de commande.

La section suivante porte sur un autre type de méthodes paramétriques, les méthodes de sous-espaces.

3.3. Méthodes de sous-espaces

Les méthodes de sous-espaces sont apparues dans les années 90, en complément des méthodes classiques d'identification (méthodes à erreur de prédiction).

Ces méthodes sont construites de telle façon que l'ordre et les paramètres du modèle puissent être déterminés en utilisant uniquement les données d'entrée et de sortie qui caractérisent le système à identifier.

Dans ce chapitre les méthodes de sous-espaces sont présentées. Pour une meilleure compréhension le formalisme de ces méthodes est expliqué d'abord pour le cas des systèmes invariants en temps. Ensuite les méthodes sont présentées pour le cas de systèmes LPV.

3.3.1. Formalisme pour le cas de modèles linéaires en temps invariant (LTI)

L'idée principale, qui constitue la base des méthodes des sous-espaces, est de retrouver une séquence d'états directement à partir des données d'entrée et de sortie. Cela est possible en faisant appel aux notions géométriques (projections des espaces de vecteurs) et aux techniques de l'algèbre linéaire (décompositions QR et de valeurs singulières). Une fois que la séquence de vecteur d'état est connue, les matrices de la représentation d'état caractérisant le système peuvent être obtenues en appliquant la méthode des moindres carrés.

La classe de modèles utilisée est celle caractérisant les modèles linéaires invariants à temps discret, présentant la structure déterministe (les bruits de mesure et de processus sont considérés nuls) suivante:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}\tag{3.111}$$

avec $u_k \in \mathbb{R}^m$ et $y_k \in \mathbb{R}^l$ étant les mesures d'entrée et de sortie à l'instant k . Le vecteur x_k représente le vecteur d'état au même instant. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{l \times m}$ sont les matrices de modèle à déterminer.

Le formalisme de cette méthode est présenté à partir des travaux (De Moor & Van Overschee, 1995) (Van Overschee & De Moor, 1996).

Formulation du problème :

Ayant à disposition un nombre important de mesures d'entrée $u_k \in \mathbb{R}^m$ et de sortie $y_k \in \mathbb{R}^l$, déterminer, en utilisant uniquement ces données, l'ordre n du modèle et les matrices A, B, C, D .

Comme mentionné au début de la section, le principe des méthodes de sous-espaces consiste à retrouver une séquence d'états du système à partir de données E/S, comme expliqué dans la Figure 3-3.

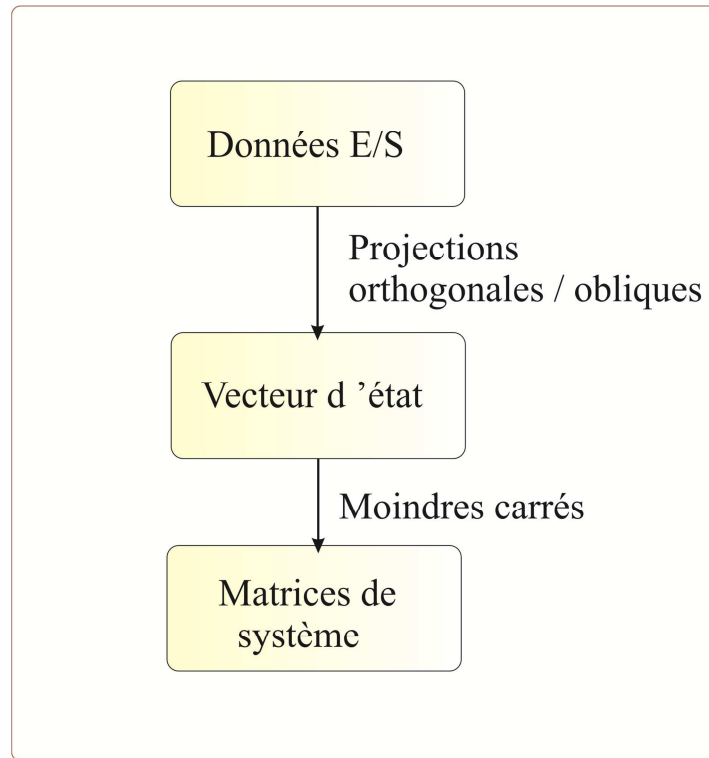


Figure 3-3 : Formalisme de la méthode des sous-espaces

En considérant :

$$\begin{aligned} u_{k|k+i-1} &= [u_k^T \quad u_{k+1}^T \quad \cdots \quad u_{k+i-1}^T]^T \\ y_{k|k+i-1} &= [y_k^T \quad y_{k+1}^T \quad \cdots \quad y_{k+i-1}^T]^T \end{aligned} \quad 3.112$$

par simples substitutions successives dans l'équation d'état et dans l'équation de mesure, on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
 x_{k+i} &= A^i x_k + \Delta_i \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+1} \\ \vdots \\ y_{k+i-1} \end{bmatrix} &= \Gamma_i x_k + H_i \begin{bmatrix} u_k \\ u_{k+1} \\ \vdots \\ u_{k+i-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

avec les matrices d'observabilité Γ_i et de commandabilité Δ_i étendues et la matrice bloc triangulaire inférieure de Toeplitz, H_i , de formes suivantes :

$$\Gamma_i = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^{i-1} \end{pmatrix} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_i &= (A^{i-1}B \quad A^{i-2}B \quad \dots \quad AB \quad B) \\
 H_i &= \begin{pmatrix} & D & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & CB & D & 0 & \dots & 0 \\ & CAB & CB & D & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ CA^{i-2}B & CA^{i-3}B & CA^{i-4}B & \dots & D \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

En concaténant en colonne les vecteurs de sortie et d'entrée aux instants différents, on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} y_k & y_{k+1} & \dots & y_{k+j-1} \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \dots & y_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{k+i-1} & y_{k+i} & \dots & y_{k+i+j-1} \end{bmatrix} &= \\
 &= \Gamma_i [x_k \quad x_{k+1} \quad \dots \quad x_{k+j-1}] + \\
 &+ H_i \begin{bmatrix} u_k & u_{k+1} & \dots & u_{k+j-1} \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \dots & u_{k+j} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{k+i-1} & u_{k+i} & \dots & u_{k+i+j-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

et le paramètre j désignant le nombre de blocs lignes des matrices impliquées.

La séquence d'états à estimer apparaît dans l'équation 3.116 et à l'instant $k = i$ elle est définie de la façon suivante :

$$X_i = (x_i \quad x_{i+1} \quad \dots \quad x_{i+j-2} \quad x_{i+j-1}) \tag{3.117}$$

Dans la relation 3.116, les matrices de données apparaissent sous la forme de matrices de Hankel. A partir du signal d'entrée, pour $k = 0$ et $k = i$ respectivement, les matrices de Hankel suivantes sont construites :

$$U_{0|i-1} = \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \dots & u_{j-1} \\ u_1 & u_2 & u_3 & \dots & u_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i-1} & u_i & u_{i+1} & \dots & u_{i+j-2} \end{pmatrix} = U_p \quad 3.118$$

$$U_{i|2i-1} = \begin{pmatrix} u_i & u_{i+1} & u_{i+2} & \dots & u_{i+j-1} \\ u_{i+1} & u_{i+2} & u_{i+3} & \dots & u_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{2i-1} & u_{2i} & u_{2i+1} & \dots & u_{2i+j-2} \end{pmatrix} = U_f \quad 3.119$$

Le nombre de lignes i est imposé par l'utilisateur. Il doit être choisi au minimum plus grand ou égal que l'ordre n du système. j doit être grand, $j \rightarrow \infty$, tel que $n < i \ll j \rightarrow \infty$.

Les notations « p » et « f » sont utilisées pour se référer aux matrices de données précédentes et futures par rapport à l'instant i , $U_p = U_{0|i-1}$; $U_f = U_{i|2i-1}$.

Sont également introduites les matrices $U_p^+ = U_{0|i}$; $U_f^- = U_{i+1|2i-1}$, où « $+$ » et « $-$ » impliquent l'addition ou la retrait d'un bloc ligne.

Les mêmes constructions sont valables pour les mesures des sorties Y_p, Y_f, Y_p^+, Y_f^- .

$$Y_{0|i-1} = \begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & \dots & y_{j-1} \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_j \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{i-1} & y_i & y_{i+1} & \dots & y_{i+j-2} \end{pmatrix} = Y_p \quad 3.120$$

$$Y_{i|2i-1} = \begin{pmatrix} y_i & y_{i+1} & y_{i+2} & \dots & y_{i+j-1} \\ y_{i+1} & y_{i+2} & y_{i+3} & \dots & y_{i+j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{2i-1} & y_{2i} & y_{2i+1} & \dots & y_{2i+j-2} \end{pmatrix} = Y_f \quad 3.121$$

Des matrices qui contiennent des entrées et des sorties ont la forme suivante :

$$W_{0|i-1} = \begin{pmatrix} U_p \\ Y_p \end{pmatrix} = W_p ; W_{0|i} = \begin{pmatrix} U_p^+ \\ Y_p^+ \end{pmatrix} = W_p^+ \quad 3.122$$

Par analogie avec les données d'entrée et de sortie précédentes et futures, les expressions des séquences d'état passé X_p et futur X_f ont la forme :

$$X_p = X_0 \text{ et } X_f = X_i \quad 3.123$$

A partir de l'équation 3.116, la forme des équations associant les diverses données du système, selon une représentation matricielle, est la suivante :

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i U_p \quad 3.124$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i U_f \quad 3.125$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i U_p \quad 3.126$$

On rappelle que le but des méthodes de sous espaces est d'estimer le modèle en utilisant seulement les données d'entrée et de sortie. Pour arriver à atteindre cet objectif

l'estimation de la séquence d'état X_i doit être réalisée. Ce problème est résolu par des combinaisons linéaires effectuées sur les lignes des matrices de Hankel définies antérieurement. Ces opérations sont effectuées par l'intermédiaire de projections obliques, utilisées pour prédire les sorties futures Y_f , en utilisant les informations fournies par W_p et celles données par les entrées qui vont affecter le système dans le futur, U_f .

3.3.1.1. Opérations géométriques

Pour expliciter la philosophie de projections, des matrices arbitraires $N \in \mathbb{R}^{p \times j}$, $M \in \mathbb{R}^{q \times j}$ et $P \in \mathbb{R}^{r \times j}$ seront utilisées. Les éléments d'une ligne des matrices impliquées peuvent être considérés comme des coordonnées d'un vecteur dans un espace de dimension j . Deux opérations géométriques effectuées avec ces espaces d'images-lignes sont présentées : les projections orthogonales et obliques.

La projection de l'espace image-ligne de la matrice N sur l'espace image-ligne de la matrice M est définie par :

$$N/M = N\Pi_M = NM^T(MM^T)^\dagger M \quad 3.127$$

où Π_M représente l'opérateur qui projette les lignes d'une matrice sur l'espace image-ligne de la matrice M et † représente la pseudo-inverse de Moore-Penrose.

L'opération de projection orthogonale peut être interprétée graphiquement comme illustré dans la Figure 3-4.

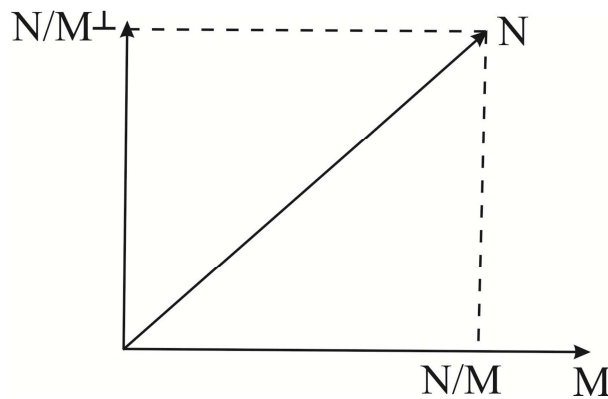


Figure 3-4 : Interprétation d'une projection orthogonale

L'expression $N/M^\perp$ est définie comme :

$$N/M^\perp = N\Pi_{M^\perp} \quad 3.128$$

où $\Pi_{M^\perp}$ représente l'opérateur qui projette un vecteur ligne sur le complément orthogonal de l'espace image-ligne de la matrice M . Il a l'expression suivante :

$$\Pi_{M^\perp} = I_j - \Pi_M \quad 3.129$$

La combinaison des projections Π_M et $\Pi_{M^\perp}$ décompose la matrice N dans deux matrices avec des espaces image-ligne orthogonaux :

$$N = N\Pi_M + N\Pi_{M^\perp} \quad 3.130$$

L'équation 3.130 peut être interprétée aussi comme la décomposition de la matrice N par une combinaison linéaire des lignes de la matrice M et des lignes de la matrice complément orthogonale de M , notée $M^\perp$:

$$L_M M = N/M \quad 3.131$$

$$L_{M^\perp} M^\perp = N/M^\perp \quad 3.132$$

Avec les notations 3.131, 3.132 on retrouve :

$$N = L_M M + L_{M^\perp} M^\perp \quad 3.133$$

qui représente une décomposition de N en une somme de combinaisons linéaires de lignes de M et $M^\perp$.

D'autre part, étant données les matrices arbitraires $M \in \mathbb{R}^{q \times j}$ et $P \in \mathbb{R}^{r \times j}$, la matrice $N \in \mathbb{R}^{p \times j}$ peut aussi être décomposée comme une combinaison linéaire des deux matrices M et P , et d'une matrice dont l'espace image-ligne représente le complément orthogonal des espaces image-lignes de M et P , comme montré dans la Figure 3-5.

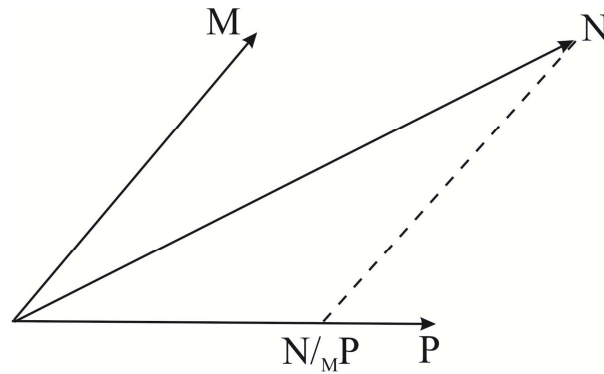


Figure 3-5 : Interprétation d'une projection oblique

Cela conduit à l'apparition des projections obliques. Les lignes de la matrice N sont décomposées comme combinaisons linéaires des lignes de M et P et des lignes d'une

troisième matrice qui est orthogonale sur M et P . Cela peut être écrit de la façon suivante :

$$N = L_M M + L_P P + L_{M^\perp P^\perp} \begin{pmatrix} M \\ P \end{pmatrix}^\perp \quad 3.134$$

La matrice $L_P P$ est considérée comme la projection oblique de l'espace image-ligne de N parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P :

$$N/_M P = L_P P \quad 3.135$$

L'obtention de la projection oblique peut être aussi interprétée de la façon suivante : Projeter l'espace image-ligne de la matrice N de façon orthogonale sur la somme des espaces images des matrices M et P et décomposer le résultat le long de l'espace image de la matrice P . Du point de vue mathématique, la projection orthogonale de N sur M et P a la forme suivante :

$$N/_M \begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} = N(P^T M^T) \begin{pmatrix} P P^T & P M^T \\ M P^T & M M^T \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} \quad 3.136$$

La projection oblique des lignes de N , parallèlement à l'espace image de M sur l'espace image de P est obtenue comme suit :

$$N/_M P = N(P^T M^T) \left[\begin{pmatrix} P P^T & P M^T \\ M P^T & M M^T \end{pmatrix}^\dagger \right]_{r \text{ premières colonnes}} \quad 3.137$$

où on rappelle que r est le nombre de lignes de P .

La formule suivante peut être aussi considérée :

$$N/_M P = [N/M^\perp][P/M^\perp]^\dagger P \quad 3.138$$

Les projections peuvent être calculées en utilisant des outils comme des décompositions LQ et des décompositions de valeurs singulières, qui conduisent à une implantation numérique efficace. L'implantation des projections sera présentée dans la section 3.3.1.3.

On rappelle que les opérations géométriques présentées précédemment sont nécessaires pour l'estimation de la séquence d'état.

3.3.1.2. Estimation de la séquence d'état, X_p

En exploitant les relations 3.124 à 3.126,

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i U_p$$

$$Y_f = \Gamma_i X_f + H_i U_f$$

$$X_f = A^i X_p + \Delta_i U_p$$

cette estimation de X_p peut être réalisée par l'intermédiaire de la projection oblique de l'espace image-ligne des sorties futures Y_f , parallèlement à l'espace image-ligne des entrées futures U_f , sur l'espace image-ligne des données d'entrée et sortie précédentes W_p , comme montré dans la Figure 3-6.

Le théorème suivant montre la façon dont on retrouve la séquence d'état à partir des projections, appliquées aux matrices de données.

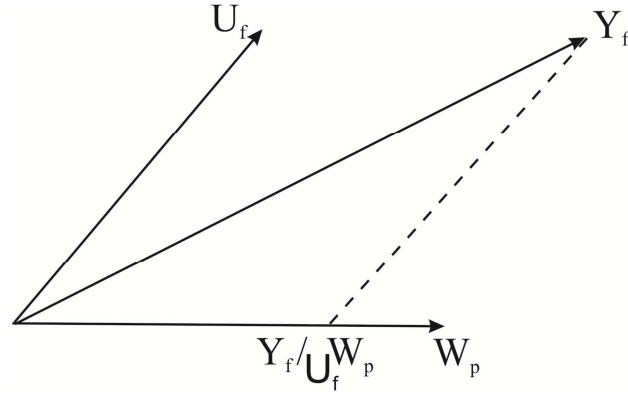


Figure 3-6 : Projections obliques appliquées sur les matrices des données

Théorème 1 :

Sous l'hypothèse de :

1. L'entrée u_k respecte la condition de persistance d'excitation d'ordre $2i$ si la matrice de covariance d'entrée :

$$R_{uu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N U_{0|2i} U_{0|2i}^T \quad 3.139$$

est de rang plein $2i$,

2. L'intersection de l'espace de lignes de U_f et l'espace de lignes de X_p est vide;

La projection oblique O_i est déterminée, et correspond à :

$$O_i = Y_f /_{U_f} W_p \quad 3.140$$

Cette matrice O_i s'interprète comme la multiplication d'une matrice d'observabilité augmentée et de la séquence d'état, ceci sera justifié un peu plus loin :

$$O_i = \Gamma_i \hat{X}_i \quad 3.141$$

Sa décomposition en valeurs singulières

$$O_i = (U_1 U_2) \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{pmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad 3.142$$

permet d'estimer :

1. L'ordre du système comme le nombre de valeurs singulières non nulles
2. La matrice étendue d'observabilité comme :

$$\Gamma_i = U_1 S_1^{1/2} T \quad 3.143$$

avec T une transformation arbitraire.

3. Le vecteur d'état $\hat{X}_i$, donné par :

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^\dagger O_i. \quad 3.144$$

L'estimation de la séquence d'état à partir des matrices d'observabilité et de projections obliques n'est pas intuitive. Pour rendre les notions plus claires on propose par la suite la démonstration de l'équation 3.141.

A partir des équations 3.124 et 3.126 on observe que la séquence d'état X_f peut être écrite sous la forme d'une combinaison linéaire des entrées et sorties précédentes U_p et Y_p .

On rappelle l'équation 3.124 :

$$Y_p = \Gamma_i X_p + H_i U_p$$

d'où $X_p = \Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i U_p$. En remplaçant X_p dans 3.126 on obtient :

$$\begin{aligned} X_f &= A^i [\Gamma_i^\dagger Y_p - \Gamma_i^\dagger H_i U_p] + \Delta_i U_p = A^i \Gamma_i^\dagger Y_p - A^i \Gamma_i^\dagger H_i U_p + \Delta_i U_p \\ X_f &= [\Delta_i - A^i \Gamma_i^\dagger H_i] U_p + A^i \Gamma_i^\dagger Y_p = L_p W_p \end{aligned} \quad 3.145$$

avec $L_p = [\Delta_i - A^i \Gamma_i^\dagger H_i | A^i \Gamma_i^\dagger]$ et $W_p = \begin{bmatrix} U_p \\ Y_p \end{bmatrix}$.

En utilisant l'expression précédente, la formule 3.125 peut être écrite comme suit :

$$Y_f = \Gamma_i L_p W_p + H_i U_f \quad 3.146$$

En multipliant l'équation 3.146 avec $\Pi_{U_f^\perp}$ on obtient :

$$Y_f \Pi_{U_f^\perp} = \Gamma_i L_p W_p \Pi_{U_f^\perp} + H_i U_f \Pi_{U_f^\perp}$$

Le produit $H_i U_f \Pi_{U_f^\perp}$ est nul, suite à la définition de projection orthogonale. L'application de la définition 3.127 conduit à :

$$Y_f / U_f^\perp = \Gamma_i L_p W_p / U_f^\perp \quad 3.147$$

En multipliant l'égalité avec $[W_p / U_f^\perp]^\dagger W_p$ on obtient :

$$[Y_f / U_f^\perp][W_p / U_f^\perp]^\dagger W_p = \Gamma_i L_p W_p \quad 3.148$$

où, la partie gauche de l'égalité représente la projection oblique $O_i = Y_f / U_f W_p$, utilisée pour prédire les sorties futures Y_f en utilisant les informations fournies par W_p et celles données par les entrées U_f .

Selon l'équation 3.145 le produit $L_p W_p$ représente la séquence d'état, d'où

$$O_i = \Gamma_i X_f. \quad 3.149$$

A partir de l'équation 3.149 la séquence d'état est estimée de la façon suivante :

$$\hat{X}_i = \Gamma_i^\dagger O_i.$$

Ayant à disposition le vecteur d'état, les matrices de système peuvent être retrouvées par un calcul direct. Par un raisonnement et un calcul similaire à celui du Théorème 1, on peut écrire :

$$O_{i-1} = Y_f^- / U_f^- W_p^+ = \Gamma_{i-1} \hat{X}_{i+1}$$

d'où :

$$\hat{X}_{i+1} = \Gamma_{i-1}^\dagger O_{i-1}. \quad 3.150$$

Avec l'estimation de $\hat{X}_i$ et $\hat{X}_{i+1}$ les matrices A, B, C, D peuvent être calculées directement en résolvant au sens des moindres carrés le système :

$$\begin{aligned} \hat{X}_{i+1} &= A\hat{X}_i + B U_{i|i} \\ Y_{i|i} &= C\hat{X}_i + D U_{i|i} \end{aligned} \quad 3.151$$

avec $U_{i|i}$ et $Y_{i|i}$ étant des matrices bloc de Hankel avec une seule ligne bloc contenant les données d'entrée et de sortie respectivement :

$$U_{i|i} = (u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+j-1})$$

$$Y_{i|i} = (y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+j-1})$$

La section suivante explique comment les projections orthogonales et obliques peuvent être implantées numériquement en utilisant les décompositions LQ de matrices de Hankel contenant les données d'entrée et de sortie.

3.3.1.3. Implantation

Les projections orthogonales et obliques peuvent être implantées par les décompositions LQ.

Considérons une matrice formée par N et M de type :

$$\begin{bmatrix} M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_M \\ L_N \end{bmatrix} Q^T. \quad 3.152$$

Par des calculs immédiats, la projection orthogonale de l'espace image-lignes de la matrice N sur l'espace image-lignes de M est décrite par l'équation suivante :

$$N/M = L_{21} Q_1^T \quad 3.153$$

En écrivant la matrice Q_1^T en fonction de M on obtient :

$$N/M = L_{21} L_{11}^{-1} M \quad 3.154$$

La projection orthogonale N/M peut être aussi calculée par l'utilisation de la formule 3.127 :

$$\begin{aligned} N/M &= [L_N Q^T Q L_M^T] [L_M Q^T Q L_M^T]^\dagger L_M Q^T = \\ &= L_N L_M^T [L_M L_M^T]^\dagger L_M Q^T \end{aligned} \quad 3.155$$

A partir de la décomposition LQ de la matrice formée avec N, M, P :

$$\begin{bmatrix} P \\ M \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_P \\ L_M \\ L_N \end{bmatrix} Q^T \quad 3.156$$

on peut écrire :

$$N = L_N Q^T, M = L_M Q^T, P = L_P Q^T \quad 3.157$$

Par un calcul direct on peut déterminer la projection orthogonale de l'espace image-lignes de N sur l'espace image-ligne formé par les matrices M et P .

$$N \left| \begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} \right. = L_{31} Q_1^T + L_{22} Q_2^T \quad 3.158$$

En écrivant Q_1^T et Q_2^T en fonction de M et P on obtient :

$$N \left| \begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} \right. = L_{31} L_{11}^{-1} P + L_{32} L_{22}^{-1} (M - L_{21} L_{11}^{-1} P) \quad 3.159$$

d'où

$$N \left| \begin{pmatrix} P \\ M \end{pmatrix} \right. = (L_{31} L_{11}^{-1} - L_{32} L_{22}^{-1} L_{21} L_{11}^{-1}) P + (L_{32} L_{22}^{-1}) M \quad 3.160$$

Si on est intéressé par exemple par la projection oblique de l'espace image-lignes de N , parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P , le résultat est fourni par la première partie de l'équation 3.160 :

$$N/_M P = (L_{31}L_{11}^{-1} - L_{32}L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1})P \quad 3.161$$

La représentation géométrique de ces projections est montrée dans les Figure 3-7 et Figure 3-8. Les trois vecteurs orthogonaux Q_1^T, Q_2^T, Q_3^T sont représentés en noir et forment les axes de système. La matrice P est colinéaire à Q_1 ; M appartient au plan formé par Q_1, Q_2 ; N est représentée dans le plan formé par Q_1, Q_2, Q_3 . La projection orthogonale de l'espace image-lignes de N sur le plan formé par M, P est représentée en couleur verte dans la Figure 3-7.

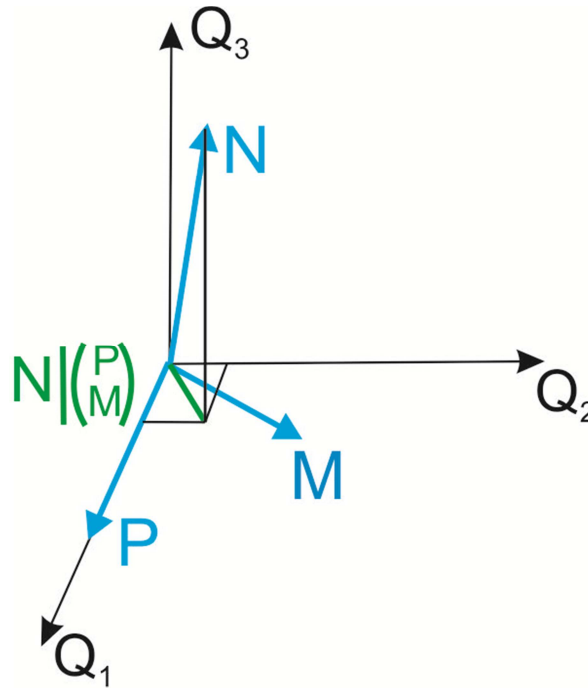


Figure 3-7 : Projection orthogonale de l'espace image-lignes de N sur le plan formé par M, P

La projection oblique de l'espace image-lignes de N , parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P est représentée en couleur rouge dans la Figure 3-8.

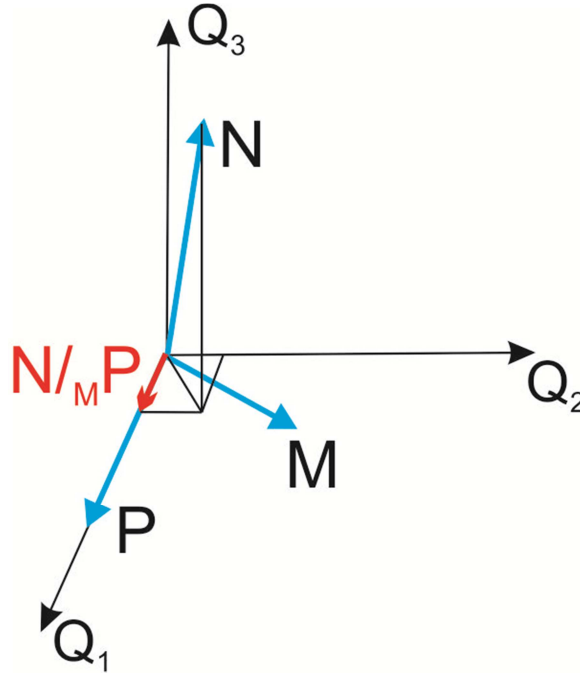


Figure 3-8 : Projection oblique de l'espace image-lignes de N , parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P

La projection oblique de l'espace lignes de la matrice N parallèlement à l'espace ligne de la matrice M sur l'espace ligne de la matrice P peut être également facilement calculée à partir de la décomposition LQ de la matrice formée avec M, P, N de type :

$$\begin{bmatrix} M \\ P \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_P \\ L_M \\ L_N \end{bmatrix} Q^T \quad 3.162$$

Son expression est donnée par l'équation suivante :

$$N/M P = L_{32} Q_2^T = L_{32} L_{22}^{-1} P \quad 3.163$$

D'un autre part, la projection oblique $N/M P$ peut-être aussi calculée en utilisant la formule fournie par l'équation 3.138, comme suit :

$$N/M P = N/M^\perp [P/M^\perp]^\dagger P$$

En utilisant :

$$N/M^\perp = L_N [I - L_M^T [L_M L_M^T]^\dagger L_M] Q^T$$

$$P/M^\perp = L_P [I - L_M^T [L_M L_M^T]^\dagger L_M] Q^T$$

la projection oblique de l'espace image-lignes de N , parallèlement à l'espace image-ligne de M , sur l'espace image-ligne de P est donnée par :

$$N/M P = L_N [I - L_M^T [L_M L_M^T]^\dagger L_M] L_P^T [L_P [I - L_M^T [L_M L_M^T]^\dagger L_M] L_P^T] L_P Q. \quad 3.164$$

Les équations 3.161 et 3.164 donnent des résultats similaires.

L'application des projections sur les matrices des données est présentée ci-après.

La matrice de Hankel, formée par les mesures d'entrée/sortie est soumise à une décomposition LQ de façon suivante :

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} U_{0|2i-1} \\ Y_{0|2i-1} \end{pmatrix} = LQ^T \quad 3.165$$

avec $Q \in \mathbb{R}^{j*2(m+l)i}$ orthonormale et $L \in \mathbb{R}^{2(m+l)i*2(m+l)i}$ inférieure triangulaire. La décomposition LQ est partitionnée comme suit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} U_{0|2i-1} \\ Y_{0|2i-1} \end{pmatrix} &= \begin{matrix} mi \\ li \\ li \end{matrix} \begin{pmatrix} U_p \\ U_f \\ Y_p \\ Y_f \end{pmatrix} = \begin{matrix} m(i+1) \\ m(i-1) \\ l(i+1) \\ l(i-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} U_p^+ \\ U_f^- \\ Y_p^+ \\ Y_f^- \end{pmatrix} = \begin{matrix} mi \\ m \\ m(i-1) \\ li \\ l \\ l(i-1) \end{matrix} \begin{pmatrix} U_{0|i-1} \\ U_{i|i} \\ U_{i+1|2i-1} \\ Y_{0|i-1} \\ Y_{i|i} \\ Y_{i+1|2i-1} \end{pmatrix} = LQ^T = \\ &= \begin{pmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & 0 & 0 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & 0 & 0 \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} & 0 \\ L_{61} & L_{62} & L_{63} & L_{64} & L_{65} & L_{66} \end{pmatrix} \begin{matrix} j \\ Q_1^T \\ Q_2^T \\ Q_3^T \\ Q_4^T \\ Q_5^T \\ Q_6^T \end{matrix} = \begin{pmatrix} L_M \\ L_N \end{pmatrix} Q^T = \begin{pmatrix} M \\ N \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Déterminons par exemple la projection orthogonale de Y_f sur $\begin{pmatrix} W_p \\ U_f \end{pmatrix}$. Soient N, M des matrices construites à partir des lignes de $\mathcal{H}$. Elles peuvent être exprimées par des combinaisons linéaires du type :

$$N = L_N Q^T, M = L_M Q^T. \quad 3.166$$

Le choix de L_N et L_P est fait de la façon suivante :

$$L_N = L_{[5:6],[1:6]}, L_M = L_{[1:4],[1:6]}$$

où la notation $L_{[5:6],[1:6]}$ représente la matrice résultant de la concaténation des blocs en position ligne de 5 à 6 et colonne de 1 à 6 de la matrice de Hankel $\begin{pmatrix} U_{0|2i-1} \\ Y_{0|2i-1} \end{pmatrix}$. Dans la structure de la matrice $\mathcal{H}$, L_N est la matrice correspondant aux sorties Y_f et L_M correspond à $\begin{pmatrix} U_p \\ U_f \\ Y_p \end{pmatrix}$.

Ainsi, en utilisant la notation Z_i pour la projection orthogonale, on obtient :

$$Z_i = L_{[5:6],[1:6]} L_{[1:4],[1:6]}^T [L_{[1:4],[1:6]} L_{[1:4],[1:6]}^T]^{-1} L_{[1:4],[1:6]} Q^T$$

Si la matrice M est de rang plein en lignes on obtient :

$$\begin{aligned} Z_i &= L_{[5:6],[1:4]} L_{[1:4],[1:4]}^T [L_{[1:4],[1:4]} L_{[1:4],[1:4]}^T]^{-1} L_{[1:4],[1:4]} Q_{1:4}^T = \\ &= L_{[5:6],[1:4]} L_{[1:4],[1:4]}^T L_{[1:4],[1:4]}^{-T} L_{[1:4],[1:4]}^{-1} L_{[1:4],[1:4]} Q_{1:4}^T = \end{aligned}$$

Les termes $L_{[1:4],[1:4]}^T L_{[1:4],[1:4]}^{-T}$ et $L_{[1:4],[1:4]}^{-1} L_{[1:4],[1:4]}$ forment la matrice identité I . Le résultat devient une expression simple :

$$Z_i = L_{[5:6],[1:4]} Q_{1:4}^T.$$

Les notions de l'algèbre linéaire, les décompositions LQ sont des outils très intéressants pour l'implantation des méthodes de sous-espaces.

Par la suite, les techniques des méthodes de sous-espaces sont appliquées à l'identification des modèles à paramètres variants. Il existe quelques modifications par rapport à l'application dans le cas LTI, précisées dans le paragraphe suivant :

- Apparition de paramètre variant dans les structures des matrices de Hankel
- Explosion de la taille des matrices de Hankel

3.3.2. Formalisme pour le cas de modèles LPV

3.3.2.1. Aspects théoriques

Le formalisme de la méthode de sous-espaces appliquée dans le cas des modèles LPV est expliqué à partir de (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002) et (Dos Santos, Azevedo Perdicoulis, Novara, Ramos, & Rivera, 2012). Le modèle LPV est représenté dans l'espace d'état, en temps discret, par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(p_k)x_k + B(p_k)u_k \\ y_k &= C(p_k)x_k + D(p_k)u_k \end{aligned} \tag{3.167}$$

où $x_k \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur d'état, $u_k \in \mathbb{R}^m$ représente le vecteur d'entrée, $y_k \in \mathbb{R}^l$ représente le vecteur de sortie et $A(p_k), B(p_k), C(p_k), D(p_k)$ sont les matrices représentatives du comportement du système, elles sont dépendantes, sous une forme affine, d'un vecteur de paramètres variant $p_k \in \mathbb{R}^s$ considéré connu et mesurable :

$$\begin{aligned}
A(p_k) &= A_0 + \sum_{i=1}^s [p_k]_i A_i \\
B(p_k) &= B_0 + \sum_{i=1}^s [p_k]_i B_i \\
C(p_k) &= C_0 + \sum_{i=1}^s [p_k]_i C_i \\
D(p_k) &= D_0 + \sum_{i=1}^s [p_k]_i D_i
\end{aligned} \tag{3.168}$$

avec $[p_k]_i$ étant le i^{ieme} élément du vecteur p_k et $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_i \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $D_i \in \mathbb{R}^{l \times m}$.

Une autre façon de décrire le modèle LPV peut être utilisée :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A \begin{bmatrix} x_k \\ p_k \otimes x_k \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_k \\ p_k \otimes u_k \end{bmatrix} + w_k \\
y_k &= C \begin{bmatrix} x_k \\ p_k \otimes x_k \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} u_k \\ p_k \otimes u_k \end{bmatrix} + v_k
\end{aligned} \tag{3.169}$$

en introduisant les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= [A_0 \quad A_1 \quad A_2 \quad \cdots \quad A_s] \\
B &= [B_0 \quad B_1 \quad B_2 \quad \cdots \quad B_s] \\
C &= [C_0 \quad C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_s] \\
D &= [D_0 \quad D_1 \quad D_2 \quad \cdots \quad D_s]
\end{aligned}$$

Le formalisme de la méthode va être présenté en considérant l'équation de sortie indépendante du paramètre variant :

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= A \begin{bmatrix} x_k \\ p_k \otimes x_k \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_k \\ p_k \otimes u_k \end{bmatrix} + w_k \\
y_k &= C x_k + D u_k + v_k
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Les matrices de Hankel construites à partir des données sont présentées. La différence par rapport au cas de modèles LTI est constituée par l'apparition du vecteur p_k dans les matrices des données. Ainsi, pour les modèles LPV, les matrices de Hankel sont formées à partir des mesures u_k, y_k et des valeurs du vecteur de paramètres p_k .

Soient le vecteur d'état et le vecteur des paramètres variants définis comme suit :

$$X_j = [x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+N-1}] \tag{3.171}$$

$$P_j = [p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+N-1}] \quad 3.172$$

où N représente l'horizon sur lequel on veut déterminer les vecteurs d'état.

Définissons un certain nombre de matrices concernant les grandeurs d'état, de commande, de bruit d'état.

$$X_{j|j} = \begin{bmatrix} X_j \\ P_j \odot X_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+1)n \times N} \quad 3.173$$

$$X_{k+j|j} = \begin{bmatrix} X_{k+j-1|j} \\ P_{k+j} \odot X_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+1)n \times N} \quad 3.174$$

$$U_j = [u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{m \times N} \quad 3.175$$

$$U_{j|j} = \begin{bmatrix} U_j \\ P_j \odot U_j \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(s+1)m \times N} \quad 3.176$$

$$U_{k+j|j} = \begin{bmatrix} U_{k+j} \\ P_{k+j} \odot U_{k+j} \\ U_{k+j-1|j} \\ P_{k+j} \odot U_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((s+1)^{k+1}-1)m(s+1)/s \times N} \quad 3.177$$

$$W_j = [w_j, w_{j+1}, \dots, w_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad 3.178$$

$$W_{j|j} = W_j \in \mathbb{R}^{n \times N} \quad 3.179$$

$$W_{k+j|j} = \begin{bmatrix} W_{k+j} \\ W_{k+j-1|j} \\ P_{k+j} \odot W_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((s+1)^{k+1}-1)n/s \times N} \quad 3.180$$

où k représente le nombre de pas dans le futur à partir de l'instant j . Il définit le nombre de blocs lignes apparaissant dans les matrices de données.

L'opérateur $\odot$ représente le produit de Khatri-Rao, le produit de Kronecker par colonnes :

$$M \odot N = (M_1 \otimes N_1, M_2 \otimes N_2, \dots, M_q \otimes N_t)$$

avec $M \in \mathbb{R}^{p \times q}$ et $N \in \mathbb{R}^{r \times t}$ deux matrices arbitraires, M_i, N_i les i^{ieme} colonnes de la matrice M , respectivement N et $\otimes$ représentant le produit de Kronecker, définit dans l'équation 3.39.

La matrice formée par les valeurs futures de paramètre variant, $P_{k+j|j}$, est obtenue à partir du lemme suivant :

Lemme 2 :

Etant données les matrices 3.172, 3.174 la relation entre X_j et $X_{k+j|j}$ est

$$X_{k+j|j} = \begin{bmatrix} X_j \\ P_{k+j|j} \odot X_j \end{bmatrix} \quad 3.181$$

où :

$$P_{j|j} = P_j \in \mathbb{R}^{s \times N} \quad 3.182$$

$$P_{k+j|j} = \begin{bmatrix} P_{k+j-1|j} \\ P_{k+j}(1, :) \\ P_{k+j}(1, :) \odot P_{k+j-1|j} \\ \vdots \\ P_{k+j}(s, :) \\ P_{k+j}(s, :) \odot P_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((s+1)^{k+1}-1) \times N} \quad 3.183$$

avec $P_k(i, :)$ représentant la i^{ieme} ligne de la matrice P_k .

Lemme 3 :

Etant données les matrices 3.171 - 3.180, pour le modèle LPV 3.170 on peut écrire :

$$X_{k+j} = \Delta_k^x X_{k+j-1|j} + \Delta_k^u U_{k+j-1|j} + \Delta_k^w W_{k+j-1|j} \quad 3.184$$

où

$$\Delta_1^x = [A_0, A_1, \dots, A_s]$$

$$\Delta_k^x = [A_0 \Delta_{k-1}^x, A_1 \Delta_{k-1}^x, \dots, A_s \Delta_{k-1}^x]$$

$$\Delta_1^u = [B_0, B_1, \dots, B_s]$$

$$\Delta_k^u = [\Delta_1^u, A_0 \Delta_{k-1}^u, A_1 \Delta_{k-1}^u, \dots, A_s \Delta_{k-1}^u]$$

$$\Delta_1^w = I_n$$

$$\Delta_k^w = [\Delta_1^w, A_0 \Delta_{k-1}^w, A_1 \Delta_{k-1}^w, \dots, A_s \Delta_{k-1}^w]$$

Les matrices de sortie, de bruits de mesures sont définies par :

$$Y_j = [y_j, y_{j+1}, \dots, y_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{l \times N} \quad 3.185$$

$$y_{j|j} = Y_j \in \mathbb{R}^{l \times N} \quad 3.186$$

$$y_{k+j|j} = \begin{bmatrix} Y_{k+j} \\ y_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)l \times N} \quad 3.187$$

$$V_j = [v_j, v_{j+1}, \dots, v_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{l^* \times N} \quad 3.188$$

$$v_{j|j} = V_j \in \mathbb{R}^{l^* \times N} \quad 3.189$$

$$v_{k+j|j} = \begin{bmatrix} V_{k+j} \\ v_{k+j-1|j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(k+1)l^* \times N} \quad 3.190$$

Lemme 4 :

Etant données les matrices 3.171 - 3.180 et 3.185 - 3.190. Pour le modèle LPV 3.170 l'équation suivante peut être établie :

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_{k+j|j} = & H_k^x X_{k+j-1|j} + H_k^u U_{k+j-1|j} + \\ & + H_k^w W_{k+j-1|j} + G_k^u U_{k+j} + \mathcal{V}_{k+j|j} \end{aligned} \quad 3.191$$

où

$$\begin{aligned} H_1^x &= \begin{bmatrix} CA_0 & CA_1 & \cdots & CA_s \\ C & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ H_k^x &= \begin{bmatrix} CA_0 \Delta_{k-1}^x & CA_1 \Delta_{k-1}^x & \cdots & CA_s \Delta_{k-1}^x \\ H_{k-1}^x & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ H_1^u &= \begin{bmatrix} CB_0 & CB_1 & \cdots & CB_s \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ H_k^u &= \begin{bmatrix} CB_0 & CB_1 & \cdots & CB_s & CA_0 \Delta_{k-1}^x & CA_1 \Delta_{k-1}^x & \cdots & CA_s \Delta_{k-1}^x \\ G_{k-1}^u & 0 & \cdots & 0 & H_{k-1}^x & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ H_1^w &= \begin{bmatrix} C \\ 0 \end{bmatrix} \\ H_k^w &= \begin{bmatrix} C & CA_0 \Delta_{k-1}^w & CA_1 \Delta_{k-1}^w & \cdots & CA_s \Delta_{k-1}^w \\ 0 & H_{k-1}^w & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \\ G_k^u &= \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi, ayant à disposition les matrices des données, les deux étapes qui sont à la base de la méthode sont présentées ci-après.

Dans un premier temps, comme présenté dans le cas LTI, une séquence d'état est déterminée à partir des matrices de données. La deuxième étape utilise cette séquence d'état pour déterminer les matrices du modèle recherché.

Plusieurs façons pour déterminer la séquence d'état sont envisageables, en fonction du choix des combinaisons des matrices de Hankel des données. Dans nos études, la méthode dite de « deux blocs » (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002), est utilisée et présentée dans la 3.3.2.2.

En combinant le Lemme 2 avec le Lemme 4, en partitionnant la matrice H_k^x de la façon suivante :

$$H_k^x = [\Gamma_k \quad \tilde{H}_k^x] \quad 3.192$$

l'équation 3.191 devient :

$$\begin{aligned}
y_{k+j|j} = & \Gamma_k X_j + \tilde{H}_k^x (P_{k+j-1|j} \odot X_j) + \\
& + H_k^u U_{k+j-1|j} + G_k^u U_{k+j} + \\
& + H_k^w W_{k+j-1|j} + \mathcal{V}_{k+j|j}
\end{aligned} \tag{3.193}$$

où

$$\Gamma_k = H_k^x(:, 1:n) = \begin{bmatrix} CA_0^k \\ \vdots \\ CA_0 \\ C \end{bmatrix} \tag{3.194}$$

En négligeant l'indice temporel, l'équation 3.193 peut s'écrire comme suit :

$$Y = \Gamma X + H(P \odot X) + \Phi_U U + V \tag{3.195}$$

Dans la suite elle sera nommée *l'équation de données généralisée*.

Elle fait apparaître seulement les données des sorties futures, qui sont composées de :

- Une combinaison linéaire des lignes de la séquence d'état X . Cette combinaison linéaire est engendrée par Γ .
- Une combinaison linéaire des lignes des matrices $\odot X$, engendrée par H .
- Une combinaison linéaire des lignes de la matrice d'entrée U , engendrée par Φ_U .
- L'effet de tous les bruits est caractérisé par V .

La séquence d'état peut être approchée à partir d'une estimée du produit ΓX . En s'assurant que Γ et X sont de rang n , une décomposition en valeurs singulières du produit ΓX peut être utilisée pour retrouver la séquence d'état X . Comme les représentations des modèles LPV ne sont pas uniques, une matrice de transformation intervient dans la description.

On suppose que la décomposition SVD de ΓX est donnée par :

$$\Gamma X = U_n \Sigma_n V_n^T, \tag{3.196}$$

avec $\Sigma_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ contenant les valeurs singulières non nulles, et on peut en déduire :

$$\begin{aligned}
\Gamma &= U_n \Sigma_n^{\frac{1}{2}} T \\
X &= T^{-1} \Sigma_n^{1/2} V_n^T
\end{aligned} \tag{3.197}$$

avec T une matrice choisie arbitrairement qui représente une transformation de base dans l'espace d'état. Pour s'assurer que Γ est de rang complet, la condition $k \geq n - 1$ doit être respectée, et le système construit par A_0 et C doit être observable.

Ainsi, pour retrouver la séquence d'état, le produit ΓX doit être estimé.

Une première étape consiste à construire une matrice Z_x à partir de mesures de données u_k, p_k, y_k , corrélée avec la matrice X . La relation suivante peut alors être écrite :

$$\Gamma X = \Phi_x Z_x + V_x + E_x, \quad 3.198$$

avec V_x représentant le bruit provoqué par la manipulation de données et E_x représentant une erreur introduite par le fait d'avoir négligé certains termes dans l'équation de données.

Le procédé de choix de la matrice Z_x , créée à partir des données, sera présenté dans la section 3.3.2.2.

Le vecteur d'état apparaissant aussi dans le terme $P \odot X$ de l'équation 3.195, le produit $H(P \odot X)$ est corrélé avec Z_x , plus précisément avec $Z_{P \odot X} = P \odot Z_x$, et peut être exprimé de la façon suivante :

$$H(P \odot X) = \Phi_{P \odot X} Z_{P \odot X} + V_{P \odot X} + E_{P \odot X} \quad 3.199$$

avec $V_{P \odot X}$ représentant les bruits, $E_{P \odot X}$ représentant l'erreur causée par la non prise en compte de certains termes.

En utilisant les équations 3.198, 3.199, l'équation généralisée de données 3.195, peut être reformulée :

$$Y = \Phi_x Z_x + \Phi_{P \odot X} Z_{P \odot X} + \Phi_U U + \Phi_V Z_V + E_x + E_{P \odot X} \quad 3.200$$

avec $\Phi_V Z_V = V + V_x + V_{P \odot X}$.

Les matrices Z_x , $Z_{P \odot X}$ et U sont connues, étant construites à partir des mesures. En introduisant les matrices suivantes :

$$\begin{aligned} \Phi &= [\Phi_x \quad \Phi_{P \odot X} \quad \Phi_U] \\ \Omega &= \begin{bmatrix} Z_x \\ Z_{P \odot X} \\ U \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 3.201$$

une estimée de Φ peut être obtenue en résolvant le problème de moindres carrés :

$$\min_{\Phi} \|Y - \Phi \Omega\|_F^2 \quad 3.202$$

avec $\|\cdot\|_F$ représentant la norme de Frobenius. L'estimé de Φ est alors donné par :

$$\hat{\Phi} = Y \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \quad 3.203$$

A partir du résultat, ΓX peut être approché par $\hat{\Phi}_x Z_x$.

L'estimation de la séquence d'état est réalisée en utilisant une décomposition en valeurs singulières de $\hat{\Phi}_x Z_x = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$ où Σ_1 rassemble les valeurs singulières les plus significatives.

L'ordre n du système est alors la dimension de Σ_1 et la séquence d'état approchée est donnée par :

$$\hat{X} = \Sigma_1^{1/2} V_1^T. \quad 3.204$$

La séquence d'état $\hat{X}$ est une estimation de X_j . Ayant à la disposition cette séquence d'état estimée, l'étape suivante est de trouver les matrices du modèle. Pour effectuer ce calcul il faut connaître l'estimée de la séquence d'état à l'instant $j + 1$. La séquence d'état $\hat{X}_{j+1}$ est obtenue par le même procédé d'estimation présenté ci-dessous, suite à un décalage des données.

En fin, les matrices A, B, C, D peuvent être calculées à partir de deux problèmes de moindres carrés :

$$\begin{aligned} \min_{A,B} \|\hat{X}_{j+1} - AX_{j|j} - BU_{j|j}\|_2^2 \\ \min_{C,D} \|Y_j - C\hat{X}_j - DU_j\|_2^2 \end{aligned} \quad 3.205$$

où $X_{j|j}$ est de la forme :

$$X_{j|j} = \begin{bmatrix} \hat{X}_j \\ P_j \odot \hat{X}_j \end{bmatrix} \quad 3.206$$

Les solutions sont les suivantes :

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{B}] &= \hat{X}_{j+1} [\hat{X}_{j|j}^T \quad U_{j|j}^T] \left(\begin{bmatrix} \hat{X}_{j|j} \\ U_{j|j} \end{bmatrix} [\hat{X}_{j|j}^T \quad U_{j|j}^T] \right)^{-1} \\ [\hat{C}, \hat{D}] &= Y_j [\hat{X}_j^T \quad U_j^T] \left(\begin{bmatrix} \hat{X}_j \\ U_j \end{bmatrix} [\hat{X}_j^T \quad U_j^T] \right)^{-1}. \end{aligned} \quad 3.207$$

3.3.2.2. Méthode pour construire les matrices des données - méthode de deux blocs

Dans ce paragraphe une méthode de choix de matrices Z_X et $Z_{P \odot X}$ est présentée. Il existe plusieurs façons de déterminer la séquence d'état $\hat{X}_k$ en fonction du choix de ces matrices. Dans nos travaux, la méthode dite « deux blocs » (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002), est utilisée. La méthode porte ce nom à cause du fait qu'elle utilise deux jeux de données différents. Le premier commence à l'instant $j = 0$, l'autre commence à $j = k$, k représentant le nombre des blocs lignes pour les matrices de Hankel de données. Le premier jeu de données est utilisé pour retrouver la séquence d'état, et le deuxième est utilisé pour estimer les matrices C et D du système.

Lemme 5 :

Etant donné le système 3.170, avec les mesures u_k, p_k, y_k , en utilisant les équations de données des Lemme 2, Lemme 3 et Lemme 4, respectivement :

$$X_{k+j|j} = \begin{bmatrix} X_j \\ P_{k+j|j} \odot X_j \end{bmatrix}$$

$$X_{k+j} = \Delta_k^x X_{k+j-1|j} + \Delta_k^u U_{k+j-1|j} + \Delta_k^w W_{k+j-1|j}$$

$$\mathcal{Y}_{k+j|j} = H_k^x X_{k+j-1|j} + H_k^u U_{k+j-1|j} + H_k^w W_{k+j-1|j} + G_k^u U_{k+j} + \mathcal{V}_{k+j|j}$$

et étant donnée l'équation des données généralisée 3.200 :

$$Y = \Phi_x Z_x + \Phi_{P \odot X} Z_{P \odot X} + \Phi_U U + \Phi_V Z_V + E_X + E_{P \odot X}$$

les substitutions suivantes sont faites :

$$Y \leftarrow \mathcal{Y}_{2k|k}$$

$$Z_X \leftarrow U_{k-1|0}$$

$$Z_{P \odot X} \leftarrow P_{2k-1|k} \odot U_{k-1|0}$$

$$U \leftarrow \begin{bmatrix} U_{2k-1|k} \\ U_{2k} \end{bmatrix}$$

$$Z_V \leftarrow \begin{bmatrix} W_{2k-1|k} \\ \mathcal{V}_{2k|k} \\ W_{k-1|0} \\ P_{2k-1|k} \odot W_{k-1|0} \end{bmatrix}$$

Si la matrice Ω est de rang complet, la matrice 3.201 : $\Phi = [\Phi_x \quad \Phi_{P \odot X} \quad \Phi_U]$, peut être estimée de la façon suivante :

$$\hat{\Phi} = Y \Omega^T (\Omega \Omega^T)^{-1} \quad 3.208$$

Comme présenté dans le cas de modèle LTI, une implantation efficace de cette méthode peut être faite avec l'aide de décompositions LQ. Ces factorisations représentent une façon élégante de calculer l'estimé de Φ , donné par l'équation 3.203. Etant donnée la factorisation LQ :

$$\begin{bmatrix} Z_X \\ Z_{P \odot X} \\ U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad 3.209$$

l'équation 3.203 peut être écrite comme suit :

$$\hat{\Phi} = [L_{31} \quad L_{32}] \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1}, \quad 3.210$$

d'où $\hat{\Phi}_X = L_{31}L_{11}^{-1} - L_{32}L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1}$.

3.3.2.3. Algorithme d'identification pour la méthode de sous-espaces

Ce paragraphe présente une synthèse de l'algorithme d'identification étudié (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002).

Hypothèse :

La matrice $\begin{bmatrix} Z_X \\ Z_{P \odot X} \\ U \end{bmatrix}$ est de rang complet.

Procédure :

1. Calculer la factorisation LQ 3.209:

$$\begin{bmatrix} Z_X \\ Z_{P \odot X} \\ U \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 \\ L_{21} & L_{22} & 0 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

2. Estimer Φ_X comme $\hat{\Phi}_X = L_{31}L_{11}^{-1} - L_{32}L_{22}^{-1}L_{21}L_{11}^{-1}$
3. Calculer la décomposition en valeurs singulières :

$$\hat{\Phi}_X Z_X = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix}$$

4. Approcher la séquence d'état : $\hat{X}_k = \Sigma_1^{1/2} V_1$
5. Déterminer $\hat{X}_{k+1}$
6. Estimer les matrices de système :

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{X}_{k+1} \begin{bmatrix} \hat{X}_{k|k}^T & U_{k|k}^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \hat{X}_{k|k} \\ U_{k|k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_{k|k}^T & U_{k|k}^T \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

$$[\hat{C}, \hat{D}] = Y_k \begin{bmatrix} \hat{X}_k^T & U_k^T \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \hat{X}_k \\ U_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X}_k^T & U_k^T \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

Fin.

Une analyse de la consistance de l'estimation de la matrice Φ selon la nature des perturbations intervenant dans le modèle peut être trouvée dans (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002).

3.3.2.4. Réduction du nombre de lignes de matrices

En sachant que, dans la structure des matrices de Hankel, les fluctuations de paramètre sont prises en compte, si l'identification implique des systèmes multivariables, la taille des matrices de Hankel s'élève de façon exponentielle avec k , nombre de blocs lignes, choisi supérieur à l'ordre présumé du système. De ce fait, l'implantation de l'algorithme avec les logiciels existants s'avère souvent impossible. Envisager une réduction de la dimension des matrices des données est donc nécessaire.

L'idée de l'algorithme de réduction (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002), est de garder les lignes qui contiennent l'information la plus informative sur le système. Ainsi, un sous ensemble des lignes des matrices $Z_X, Z_{P \odot X}$ et U va être utilisé, en écartant celles qui apportent le moins d'information quant à la matrice Y .

La sélection des lignes est faite par une décomposition LQ, afin de calculer la factorisation LQ réduite (composée par les lignes significatives), étape par étape. Il faut mentionner qu'en réduisant le nombre des lignes des matrices, une erreur va être introduite. Ainsi le modèle identifié obtenu n'est qu'un modèle approché. Si la qualité du modèle est trop détériorée, une optimisation non linéaire peut être appliquée.

La procédure de sélection des lignes les plus significatives est faite séparément pour les matrices $Z_X, Z_{P \odot X}$ et U , mais de la même manière. Cette procédure est présentée dans le cas de la matrice Z_X .

Les lignes qui vont être choisies, sont celles qui ont la plus grande contribution sur la matrice Hankel de sortie Y . Ces lignes sont déterminées par la résolution d'un problème de moindres carrés de type suivant :

$$\min_{\Psi_i} \|Y - \Psi_i Z_X(i, :)\|_F^2 ; i = 1, 2, \dots, n_z \quad 3.211$$

La ligne qui retourne le plus petit résidu est la ligne qui doit être conservée. Les lignes gardées seront stockées dans la matrice Z_X^r . Le nombre des lignes à garder est choisi par l'utilisateur, noté n_z^r .

Pour sélectionner les lignes les plus informatives un algorithme de type suivant (Verdult & Verhaegen, Identification of Multivariable Linear Parameter-Varying systems Based on Subspace Techniques, 2000) peut être utilisé :

Algorithme pour réduire la dimension d'une matrice

Prendre $Z^1 = Z_X \in \mathbb{R}^{n_z \times N}$, $T^1 = [\]$, $\bar{T}^1 = [\]$ et $Y^1 = Y$.

Pour $i = 1:n_z^r$ effectuer les étapes suivantes :

1. Sélectionner la ligne de Z^i avec le plus petit résidu en résolvant :

$$\min_{\Psi_q^i} \|Y^i - \Psi_q^i Z^i(q, :)\|_F^2; q = i, i+1, \dots, n_z \quad 3.212$$

2. Echanger la i^{ieme} ligne de Z^i , avec la ligne sélectionnée, en utilisant la matrice de permutation Π^i .
3. Calculer la matrice de Householder H^i associée à la ligne sélectionnée et transformer Z^i pour créer Z^{i+1} telle que :

$$\Pi^i \begin{bmatrix} T^i & 0 \\ \bar{T}^i & Z^i(i:n_z, i:N) \end{bmatrix} H^i = \begin{bmatrix} T^{i+1} & 0 \\ \bar{T}^{i+1} & Z^{i+1}(i+1:n_z, i+1:N) \end{bmatrix} = Z^{i+1}$$

avec $T^i \in \mathbb{R}^{(i-1) \times (i-1)}$ et $\bar{T}^i \in \mathbb{R}^{(n_z-i+1) \times (i-1)}$.

4. Appliquer H^i sur Y^i :

$$[\bar{Y}^i \ Y^i] H^i = [\bar{Y}^{i+1} \ Y^{i+1}],$$

avec $\bar{Y}^i \in \mathbb{R}^{(i-1) \times (i-1)}$

Fin.

Soit $\bar{Z}_X$ la matrice obtenue par l'application de toutes les matrices de permutation $\Pi^i, i = 1, 2, \dots, n_z^r$ sur la matrice Z_X . Les premières n_z^r lignes de $\bar{Z}_X$ sont celles avec la plus grande contribution sur la matrice de sortie. Celles-ci sont les lignes qui vont former la matrice Z_X^r :

$$Z_X^r = \bar{Z}_X(1:n_z^r, :).$$

Cette procédure est illustrée par un exemple :

On suppose la matrice Z_X qui est connue, formée par les données d'entrée précédentes à l'instant k . On choisit n_z^r , représentant le nombre de lignes à garder.

- Pas 1 : pour chaque ligne de Z_X on calcule les résidus en minimisant la norme 3.212. On sélectionne la ligne avec le plus petit résidu,
- Pas 2 : la ligne sélectionnée est concaténée sous la matrice Z^i
- Pas 3 : on calcule une projection par l'intermédiaire d'une matrice de Householder, telles que les éléments de la ligne devient nuls, sauf les i premières. La nouvelle matrice Z^{i+1} est obtenue en éliminant la ligne i et la colonne i de Z^i .
- Pas 4 : la transformation est appliquée à Y^i ce qui conduit à l'apparition de Y^{i+1} .

Une représentation graphique est donnée dans la Figure 3-9 (Verdult, Nonlinear System Identification: A State-Space Approach, 2002):

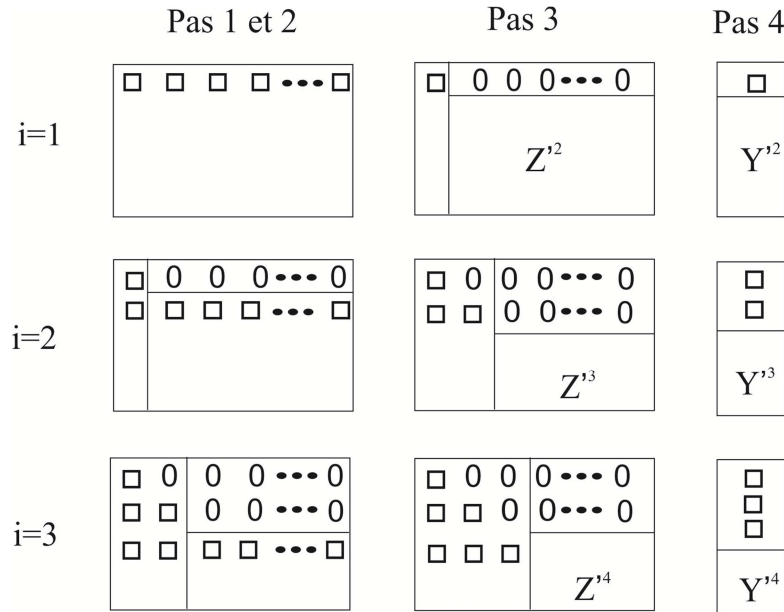


Figure 3-9 : Représentation graphique de l'algorithme de réduction de dimensions

La même procédure de réduction de dimension est ensuite appliquée sur les matrices $Z_{P \odot X}$ et U . Les lignes significatives sont gardées dans les matrices $Z_{P \odot X}^r, U^r$, de telle sorte que la matrice Ω devienne :

$$\Omega^r = \begin{bmatrix} Z_X^r \\ Z_{P \odot X}^r \\ U^r \end{bmatrix}$$

La matrice Ω^r sera la nouvelle matrice à utiliser dans l'algorithme d'identification présenté dans la section 3.3.2.3.

Dans cette section les principes des méthodes de sous espace ont été présentées. Elles utilisent des outils d'algèbre linéaire, factorisations LQ et décompositions en valeurs singulières, pour identifier directement un modèle à partir des données expérimentales. En particulier, elles permettent de s'affranchir des problèmes d'initialisation, de convergence vers des minima locaux qui peuvent être posés par les méthodes fondées sur une optimisation non linéaire, mis en œuvre dans la thèse par les méthodes à erreur de prédiction.

Au contraire des méthodes classiques d'identification, qui nécessitent le choix d'une structure et l'initialisation des paramètres associés, la mise en œuvre des méthodes de sous-espace ne s'appuie que sur un seul paramètre à fournir : l'ordre maximal supposé du système. L'ordre du système est facilement obtenu par l'analyse des certaines valeurs singulières. Ainsi les problèmes de mauvais conditionnement numérique sont évités.

Les méthodes de sous espaces sont rapides, faisant appel à des techniques non itératives. De plus la robustesse numérique est garantie grâce aux outils d'algèbre linéaires utilisés (décompositions QR et décompositions en valeurs singulières).

En dépit de tous les avantages précédents, la méthode des sous-espaces, appliquée au cas LPV, souffre d'un inconvénient lié à la construction de séquences de données sous la forme de matrices de Hankel. La taille de ces matrices dépend du choix du paramètre k , nécessairement supérieur à l'ordre cherché, paramètre qui caractérise les horizons temporels considérés dans le passé et le futur. Une solution à ce problème est proposée par l'introduction d'algorithmes de réduction des matrices de données.

Dans le chapitre courant, III, l'aspect théorique de différentes méthodes d'identification paramétriques a été présenté.

L'application de ces méthodes, afin d'identifier de modèles LPV fait l'objet des chapitres suivants. Les méthodes d'identification étudiées sont appliquées d'une part sur des cas académiques (en simulation) afin de maîtriser les conditions d'identification, d'autre part sur des systèmes physiques en utilisant des données expérimentales:

- Le chapitre IV porte sur l'identification des modèles LPV académiques
- Dans le chapitre V le comportement latéral d'un véhicule est identifié
- Enfin le chapitre VI traite de l'identification et la commande d'un convertisseur de puissance

Chapitre 4

Les méthodes d'identification présentées précédemment sont appliquées sur des modèles académiques (en simulation) afin de maîtriser les conditions d'identification.

Dans un premier temps l'utilisation des méthodes de moindres carrés classiques est mise en œuvre en vue d'identifier un modèle LPV, en utilisant des données issues d'une simulation numérique d'un système du deuxième ordre. Une analyse des performances d'identification est réalisée en fonction de la présence des bruits. Cette étude est poursuivie en utilisant la méthode de la variable instrumentale, afin de limiter les conséquences des erreurs des équations sur l'erreur d'identification. Les résultats d'identification des deux méthodes sont comparés.

Ensuite, un modèle LPV d'ordre deux est identifié, en utilisant deux algorithmes (voir chapitre III, section 3.1.6), représentant une autre approche de la méthode de moindres carrés pour les modèles LPV.

Pour conclure les études sur les modèles académiques, un modèle LPV dont les données sont générées en utilisation une simulation numérique, est identifié en utilisant les techniques des méthodes de sous espaces.

4. Identification des modèles LPV académiques

4.1. Identification d'un modèle LPV académique par la méthode de moindres carrés

Dans cette section la mise en œuvre des méthodes de moindres carrés adaptées au cas des systèmes LPV est effectuée pour la recherche d'un modèle pour un système du deuxième ordre, dépendant d'un paramètre variant. Ce système, mené en simulation, est construit à partir de travaux (Bamieh & Giarré, 2002) et correspond à une structure de la forme suivante :

$$y[k] = -a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2] \quad 4.1$$

Les termes $a_i(p)$ et $b_i(p)$ sont des coefficients dépendant du paramètre variant p . Ils sont de la forme :

$$a_1(p) = 0,8 - 0,6p + 0,4p^2$$

$$a_2(p) = 0,7 - 0,9p + 0,1p^2$$

$$b_1(p) = 0,4 - 0,6p + 0,03p^2$$

$$b_2(p) = 0,2 - 0,1p + 0,05p^2$$

Le vecteur des paramètres à identifier correspond aux valeurs réelles suivantes :

$$\theta_r = [0,8 \ 0,7 \ 0,4 \ 0,2 \ -0,6 \ -0,9 \ -0,6 \ -0,1 \ 0,4 \ 0,1 \ 0,03 \ 0,05]^T$$

Le paramètre variant, p , est considéré comme une fonction sinusoïdale de la forme :

$$p_k = \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right) \quad 4.2$$

Les valeurs possibles pour le paramètre variant sont $p \in \left[0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Le Table 4-1 présente les fonctions de transfert et les pôles du modèle pour les trois valeurs du paramètre variant.

Valeur de p	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Fonction de transfert	Ft_1	Ft_2	Ft_3
Pôles	$-0,8 + 0,9i$ $-0,8 - 0,99i$	$-0,4 + 0,7i$ $-0,4 - 0,7i$	$-0,58$ $0,0001$

Table 4-1 : Caractérisation de modèle pour différentes valeurs du paramètre variant

avec Ft_1, Ft_2, Ft_3 définis comme suit :

$$Ft_1 = \frac{0,94 z^{-1} + 0,32 z^{-2}}{1 + 1,61 z^{-1} + 1,54 z^{-2}}$$

$$Ft_2 = \frac{0,4 z^{-1} + 0,2 z^{-2}}{1 + 0,8 z^{-1} + 0,7 z^{-2}}$$

$$Ft_3 = \frac{-0,09 z^{-1} + 0,15 z^{-2}}{1 + 0,58 z^{-1} - 4 * 10^{-5} z^{-2}}$$

Pour les trois valeurs possibles du paramètre : $p \in [0, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}]$, l'objet présente les caractéristiques fréquentielles montrées par les tracés de la Figure 4-1.

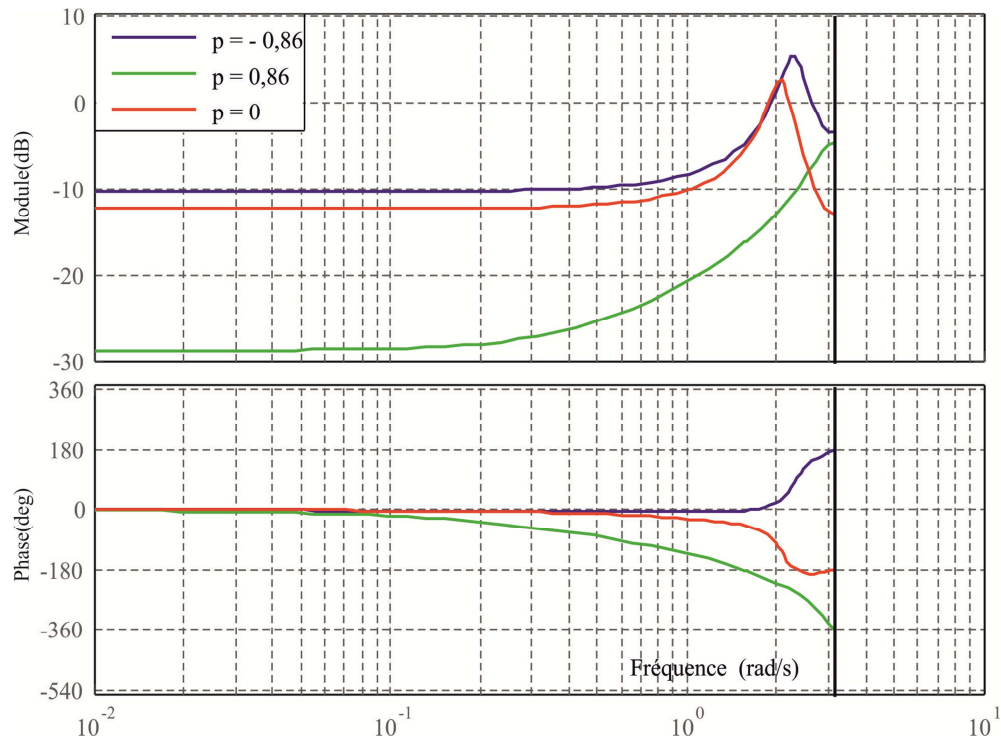


Figure 4-1 : Caractéristiques fréquentielles du modèle pour les trois valeurs possibles du paramètre

La séquence de données d'entrée, notée u , est un signal aléatoire, avec une distribution uniforme appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Il est présenté dans la Figure 4-2. La taille de la séquence de données est de 5000 échantillons.

La sortie de système, notée y^o , est obtenue par la simulation du modèle 4.1, en utilisant le signal d'entrée montré dans la Figure 4-2, et le paramètre variant donné par l'équation 4.2.

Dans ce contexte de simulation, l'algorithme d'identification de la méthode de moindres carrés (section 3.1.4) est appliqué, en utilisant le signal d'entrée u (Figure 4-2), la sortie y^o et le paramètre variant p (équation 4.2). Comme attendu, l'estimation de vecteur θ_r , notée $\hat{\theta}_{MC}$ est exacte :

$$\hat{\theta}_{MC} = \theta_r = [0,8 \ 0,7 \ 0,4 \ 0,2 \ -0,6 \ -0,9 \ -0,6 \ -0,1 \ 0,4 \ 0,1 \ 0,03 \ 0,05]^T$$

en raison de l'absence des bruits extérieurs.

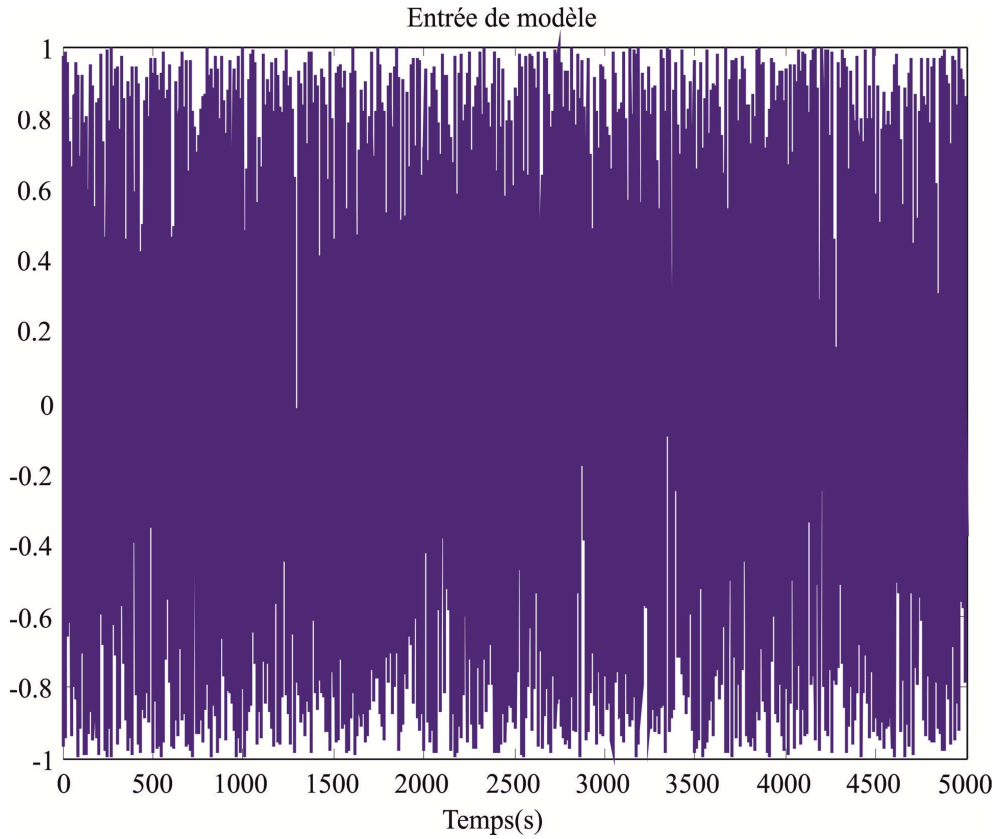


Figure 4-2 : Séquence d'entrée aléatoire du modèle LPV

Afin de rendre compte de la présence des perturbations, introduisons une erreur d'équation dans la relation entrée sortie caractérisant l'objet. Cette erreur d'équation est supposée être un bruit blanc η , dont nous ferons varier la puissance. Dans ce cas, le système est régi par l'équation récurrente suivante :

$$y[k] = -a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2] + \eta[k] \quad 4.3$$

La sortie observée, notée par y_{bb}^o , est obtenue par la simulation du modèle 4.3, en utilisant le signal d'entrée u (Figure 4-2), et le paramètre variant p (équation 4.2) et l'erreur d'équation η . L'algorithme d'identification de la méthode de moindres carrés est appliqué afin de déterminer le vecteur des paramètres estimés $\hat{\theta}_{MC}$ pour trois valeurs différentes de la puissances du bruit η , voir Table 4-2.

Puissance η	$\hat{\theta}_{MC}$
0,01	$\hat{\theta}_{MC}^1$
0,1	$\hat{\theta}_{MC}^2$
1	$\hat{\theta}_{MC}^3$

Table 4-2 : Matrices des paramètres estimés pour différentes puissances du bruit de mesure

Les vecteurs $\hat{\theta}_{MC}^1$, $\hat{\theta}_{MC}^2$, $\hat{\theta}_{MC}^3$ identifiés sont les suivants :

$$\hat{\theta}_{MC}^1 = [0,8 \ 0,7 \ 0,4 \ 0,19 \ -0,6 \ -0,89 \ -0,59 \ -0,1 \ 0,38 \ 0,08 \ 0,03 \ 0,05]^T$$

$$\hat{\theta}_{MC}^2 = [0,79 \ 0,7 \ 0,4 \ 0,18 \ -0,61 \ -0,9 \ -0,62 \ -0,1 \ 0,4 \ 0,09 \ 0,01 \ 0,08]^T$$

$$\hat{\theta}_{MC}^3 = [0,79 \ 0,69 \ 0,39 \ 0,24 \ -0,6 \ -0,88 \ -0,59 \ -0,04 \ 0,4 \ 0,09 \ 0,006 \ 0,005]^T$$

On notera que les vecteurs de paramètres estimés correspondent bien aux vecteurs de paramètres réels, ce qui est conforme aux résultats attendus lors de l'application de la méthode des moindres carrés à l'identification d'un modèle à erreur d'équation bruit blanc.

Mentionnons que la puissance de signal de sortie non bruité a une valeur égale à 0,3583 et est calculée selon la formule :

$$Puiss_y = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^2) \quad 4.4$$

Le rapport des puissances entre le signal de sortie et les bruits, SNR (« Signal to Noise Ratio » en anglais) est donné par :

$$SNR = \frac{Puiss_y}{Puiss_\eta} \quad 4.5$$

Il est présenté dans la Table 4-3 pour les trois puissances de bruit envisagées :

Puissance η	SNR
0,01	35,82
0,1	3,58
1	0,3582

Table 4-3 : Rapport signal à bruit

La réponse en fréquence du modèle 4.3, comparée avec celle des modèles identifiés $\hat{\theta}_{MC}$ pour différentes valeurs de puissance de bruit blanc η (0,01 ; 0,1 et 1), est présentée par les tracés de la Figure 4-3, dans le plan de Bode pour une valeur de paramètre variant égale à $p = 0$.

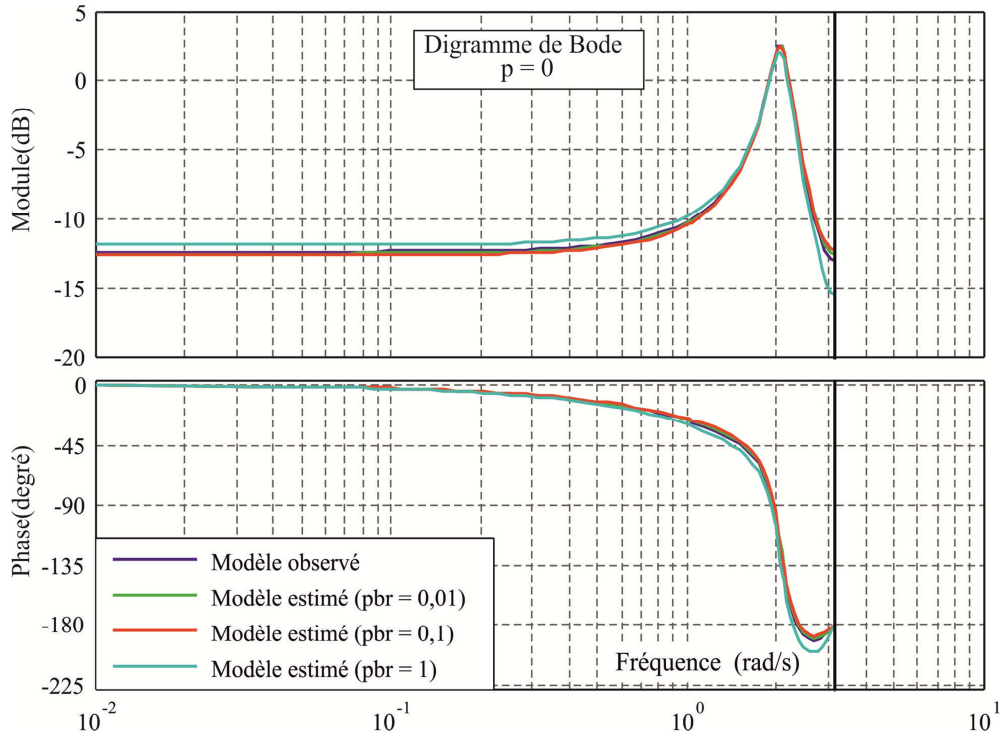


Figure 4-3 : Diagrammes de Bode représentant les système et modèles identifiés, pour une valeur de $p = 0$ et des différentes puissances de bruit

On observe, à partir des valeurs numériques des modèles identifiés et des réponses fréquentielles associées, une diminution faible de la qualité de l'estimée par rapport à l'augmentation de bruit. Toutefois les trois modèles identifiés restent pertinents.

Dans la suite l'analyse de la qualité de l'estimation est effectuée dans le cas de l'erreur d'équation correspondant à un bruit coloré η_c . Ce bruit a été généré par filtrage d'un bruit blanc unitaire par un filtre d'ordre un, de fonction de transfert suivante :

$$tf_{filtre} = \frac{\sqrt{(1 - \alpha^2)}}{1 + \alpha z^{-1}} \quad 4.6$$

où $\alpha = 0,9$. La fonction d'autocorrélation de bruit η_c est montrée par les tracés de la Figure 4-4.

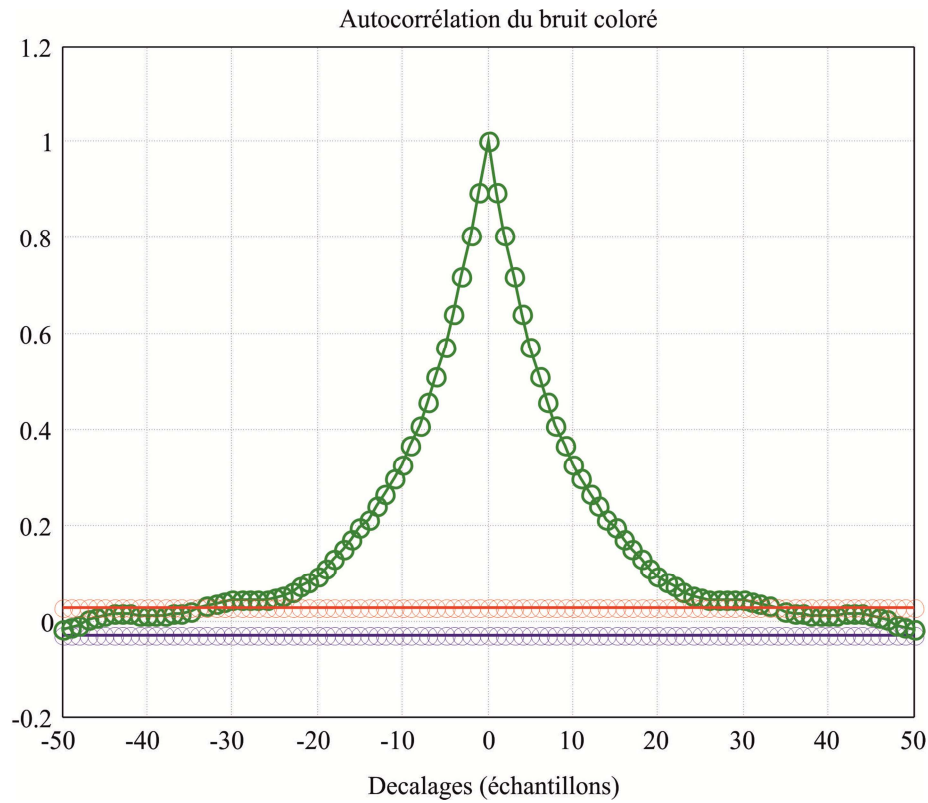


Figure 4-4 : Fonction d'autocorrélation d'un bruit coloré

Dans ce contexte (erreur d'équation perturbée par un bruit coloré η_c), le modèle est de type :

$$y[k] = -a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2] + \eta_c[k] \quad 4.7$$

La sortie observée, notée par y_{bc}^o , est obtenue par la simulation du modèle 4.7, en utilisant le signal d'entrée u (Figure 4-2), le paramètre variant p (équation 4.2) et la séquence $\eta_c[k]$.

L'application de l'identification de la méthode de moindres carrés a conduit au modèle caractérisé par le vecteur de paramètres estimés suivant :

$$\hat{\theta}_{MC} = [0,19 \ 0,01 \ 0,4 \ -0,06 \ -0,87 \ -0,58 \ -0,57 \ 0,03 \ 0,35 \ 0,1 \ 0,02 \ 0,08]^T,$$

et dont la représentation en fréquence est montrée par le tracé de la Figure 4-5.

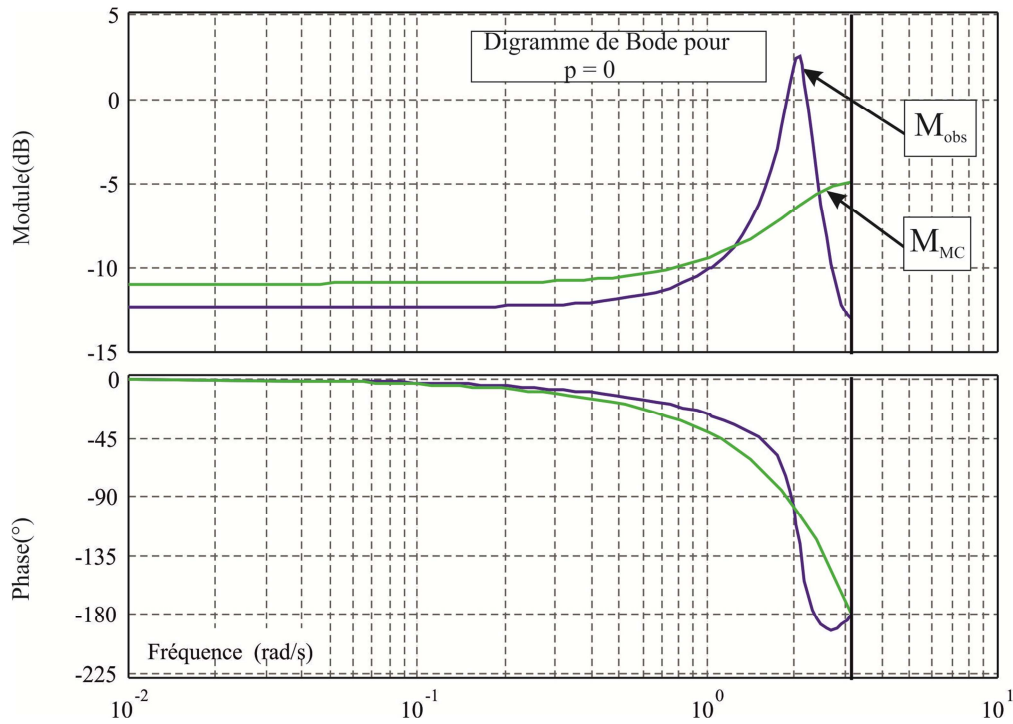


Figure 4-5 : Caractéristiques en fréquence des système réel et modèle identifié MC pour une valeur de $p = 0$.

La comparaison des matrices de paramètres réels, θ_r , et identifiés, $\hat{\theta}_{MC}$, ainsi que la caractéristique en fréquence, affichée dans la Figure 4-5, montre que la méthode de moindres carrés conduit à une erreur sur le modèle identifié en présence de bruits colorés, comme énoncé dans la section 3.1.4 de chapitre III. En revanche, dans ces conditions, des estimées pertinentes sont fournies par les méthodes de la variable instrumentale, présentées dans la section 3.1.5.

4.2. Identification d'un modèle académique par la méthode de la variable instrumentale

Pour mettre en œuvre la méthode de la variable instrumentale, un nouveau vecteur de régresseurs, nommé vecteur des instruments, doit être construit. Cela est réalisé en respectant la procédure présentée dans le paragraphe 3.1.5 de chapitre III. Ainsi, les échantillons qui forment le vecteur $Z(k)$ sont la sortie estimée ($\hat{y}_{MC}$) d'un modèle identifié au préalable et le signal d'entrée u , pondérés par le paramètre variant p . La sortie $\hat{y}_{MC}$ est obtenue par simulation en utilisant les paramètres $\hat{\theta}_{MC}$, estimés dans une première étape en utilisant la méthode des moindres carrés. Le signal d'entrée, u , est celui représenté dans la Figure 4-2, le vecteur des instruments est de la forme suivante :

$$Z(k) = f(p_k) \otimes [\hat{y}_{Mc}|u] \quad 4.8$$

Le modèle estimé, résultant de l'identification en utilisant la méthode de la variable instrumentale, a conduit à un modèle de vecteur des paramètres suivant :

$$\hat{\theta}_{MVI} = [0,8 \ 0,73 \ 0,38 \ 0,16 \ -0,6 \ -0,92 \ -0,57 \ -0,12 \ 0,56 \ 0,14 \ 0,01 \ 0,15]^T$$

et de caractéristique fréquentielle présentée dans la Figure 4-6, obtenue pour une valeur de $p = 0$.

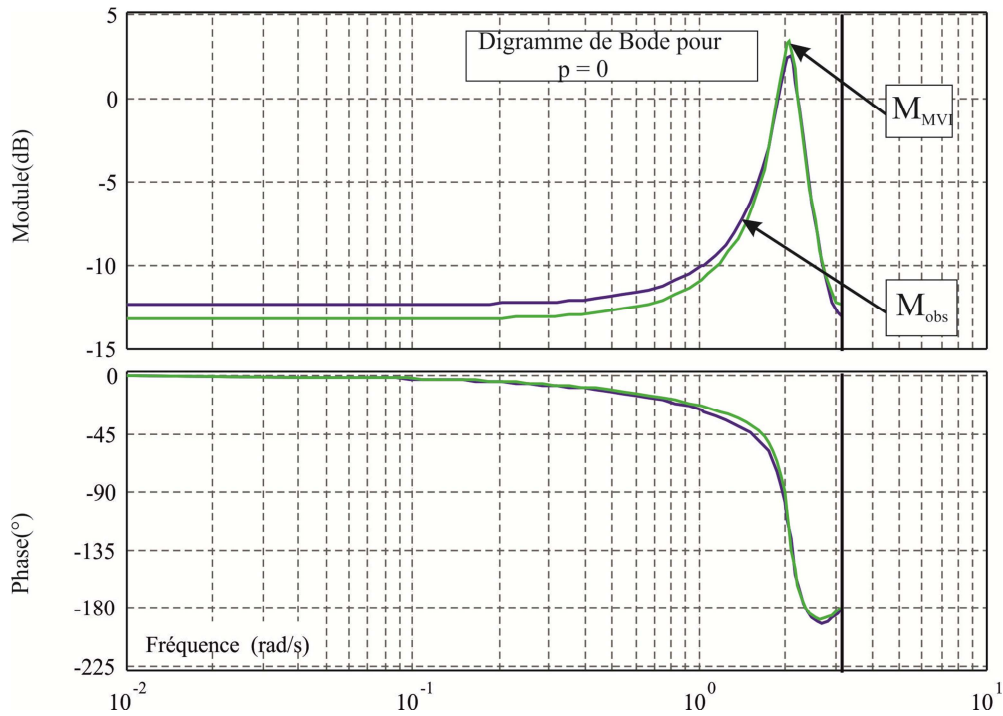


Figure 4-6 : Caractéristiques en fréquence des système réel et modèle identifié par la méthode de la variable instrumentale MVI pour une valeur de $p = 0$

On observe que la qualité de l'estimation augmente par rapport à celle obtenue par la méthode des moindres carrés. Le modèle fourni par l'approche de la variable instrumentale $\hat{\theta}_{MVI}$ est capable de mieux décrire le système caractérisé par le vecteur de paramètres θ_r .

Dans la Figure 4-7 la fonction d'autocorrélation de l'erreur de prédiction (couleur rouge) est comparée avec celle du bruit η_c (en vert). On peut observer que les propriétés de l'erreur de prédiction reproduisent assez précisément celles du bruit de mesure, ce qui atteste la pertinence du modèle obtenu.

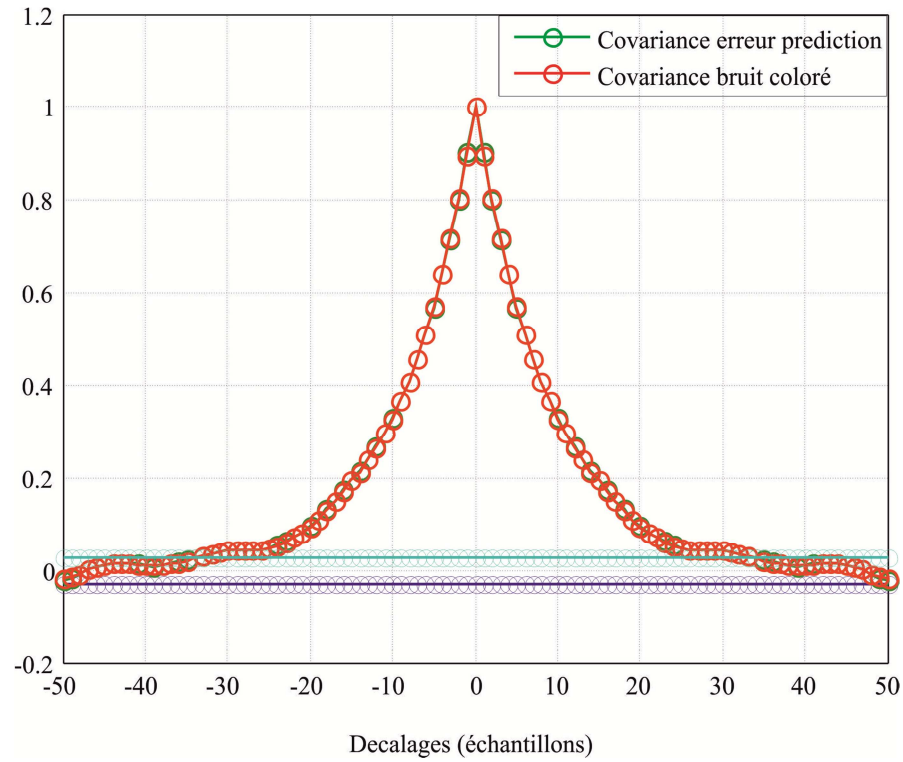


Figure 4-7 : Comparaison des fonctions d'autocorrélation de l'erreur de prédiction et du bruit de mesure coloré

Dans la section suivante une comparaison des performances d'identification, présentées par les deux méthodes appliquées, est réalisée.

4.3. Comparaison des résultats d'identification obtenus par les méthodes de moindres carrés et de la variable instrumentale

On rappelle le modèle 4.7 (perturbation sous la forme d'erreur d'équation bruit coloré) :

$$y[k] = -a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2] + \eta_c[k]$$

Une comparaison des deux modèles obtenus, $\hat{\theta}_{MC}$ et $\hat{\theta}_{MVI}$, avec la réalité (θ_r), est fournie dans la Table 4-4 qui résume les résultats obtenus, pour un bruit coloré η_c caractérisé par une puissance de 0,9.

θ_r	$[0,8 \ 0,7 \ 0,4 \ 0,2 \ -0,6 \ -0,9 \ -0,6 \ -0,1 \ 0,4 \ 0,1 \ 0,03 \ 0,05]^T$
$\hat{\theta}_{MC}$	$[0,19 \ 0,01 \ 0,4 \ -0,06 \ -0,87 \ -0,58 \ -0,57 \ 0,03 \ 0,35 \ 0,1 \ 0,02 \ 0,08]^T$
$\hat{\theta}_{MVI}$	$[0,8 \ 0,73 \ 0,38 \ 0,16 \ -0,6 \ -0,92 \ -0,57 \ -0,12 \ 0,56 \ 0,14 \ 0,01 \ 0,15]^T$

Table 4-4 : Comparaison des paramètres des différents modèles

On observe que, le biais du vecteur $\hat{\theta}_{MC}$ par rapport à θ_r est assez important, mais il est plus faible dans le cas de celui obtenu par la méthode de la variable instrumentale ($\hat{\theta}_{MVI}$). La même remarque peut être effectuée en observant les caractéristiques fréquentielles des trois modèles :

- La Figure 4-8 présente le diagramme de Bode pour le système (réel - θ_r .) et les deux modèles (estimé par la méthode de moindres carrés - $\hat{\theta}_{MC}$, estimé par la méthode de la variable instrumentale - $\hat{\theta}_{MVI}$), pour une valeur de paramètre variant de $p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Dans la Figure 4-9 les diagrammes de Bode sont présentés pour la valeur de $p = 0$.
- Dans la Figure 4-10 les diagrammes de Bode sont présentés pour la valeur de $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

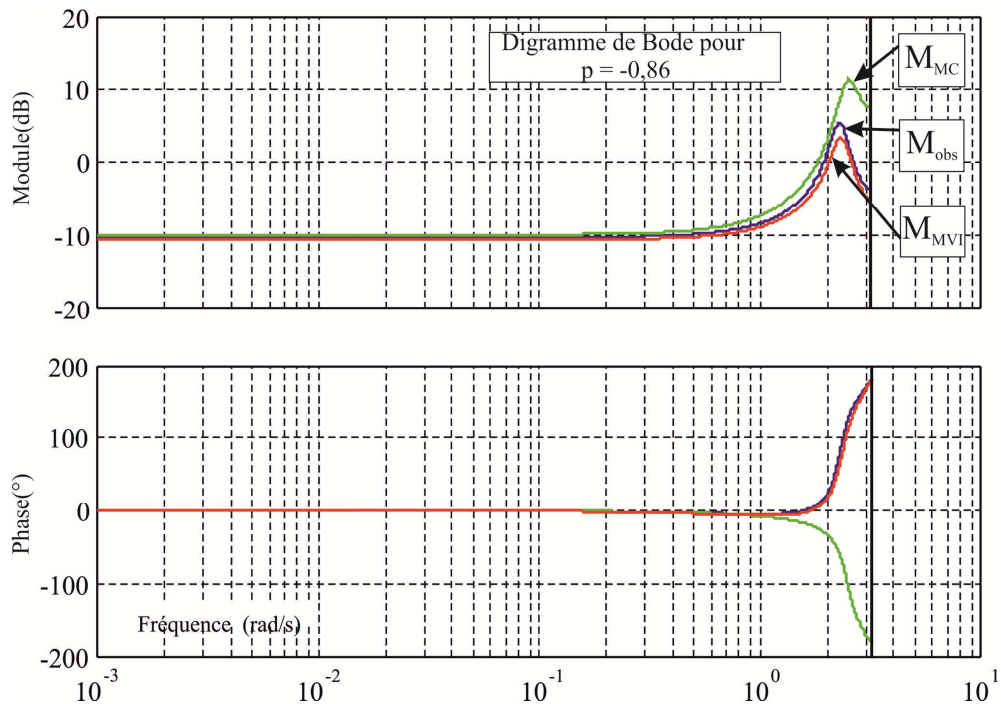


Figure 4-8 : Caractéristiques fréquentielles du système réel M_{obs} , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

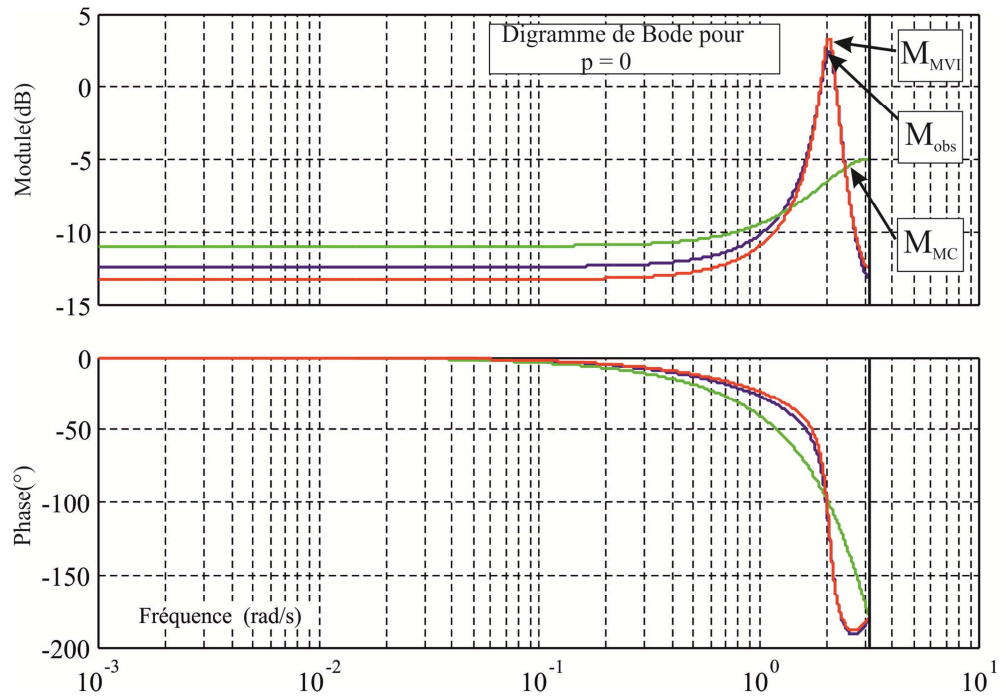


Figure 4-9 : Caractéristiques en fréquence du système réel M_{obs} , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = 0$

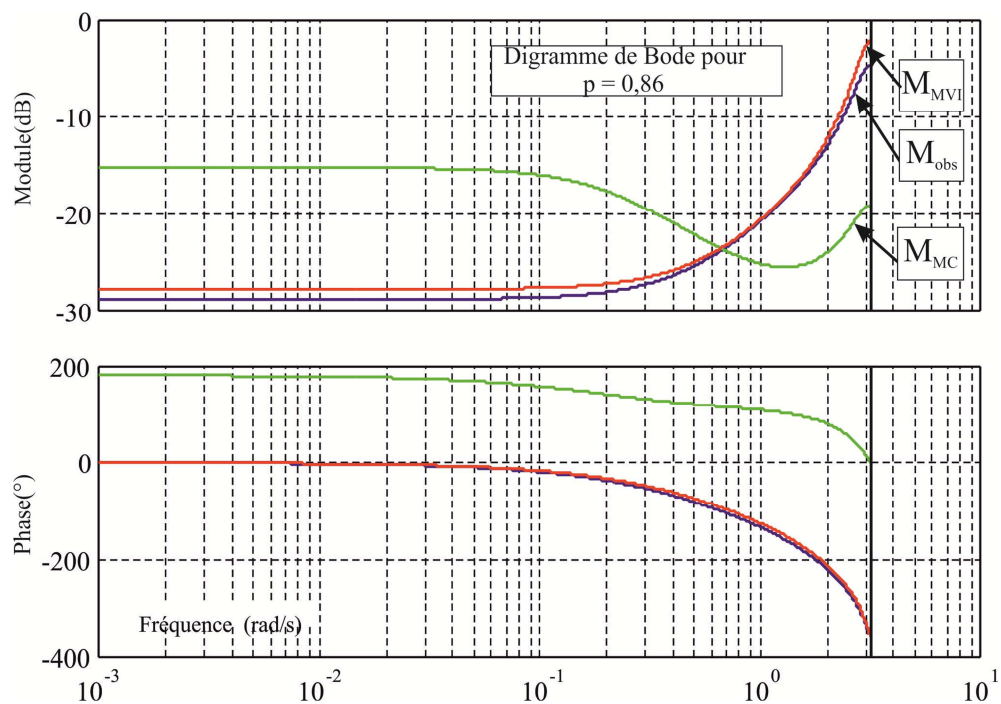


Figure 4-10 : Caractéristiques en fréquence du système réel M_{obs} , modèle MC et modèle MVI pour une valeur de $p = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les trois figures montrent des résultats d'identification plus performants dans le cas de l'utilisation des méthodes de la variable instrumentale.

Dans la section suivante un système académique de deuxième ordre est identifié avec deux algorithmes différents, représentant la variante de la méthode de moindres carrés proposée par Bamieh et Giarre. L'étude en simulation est fondée sur le formalisme présenté dans le chapitre III, dans la section 3.1.6.

4.4. Implantation de la méthode des moindres carrés – approche de Bamieh & Giarre

Pour illustrer une autre approche d'identification d'un modèle LPV en utilisant la méthode de moindres carrés, nous avons reproduit l'approche présentée dans (Bamieh & Giarre, 2002). Cette méthode de moindres carrés est appliquée sur un système LPV académique pour identifier un modèle E/S du deuxième ordre, à temps discret.

L'approche suppose que l'entrée, la sortie et le paramètre variant sont mesurables. Une dépendance fonctionnelle peut être établie entre les paramètres des modèles et le paramètre variant. La solution d'identification peut être fournie par deux formalismes présentés dans la section 3.1.6. , « *Algorithme LMS* » et « *Algorithme RLS* ». L'identification est mise en place à partir des données de simulation d'un exemple académique. Le processus d'identification est appliqué sur une expérience unique, ce qui conduit à une identification globale. Le modèle est représenté par la structure suivante :

$$y_k + a_1(p)y_{k-1} + a_2(p)y_{k-2} = b_1(p)u_{k-1} + b_2(p)u_{k-2} + \eta_k \quad 4.9$$

η_k est un bruit blanc centré de variance 10^{-3} . Les coefficients du modèle sont dépendants de p selon une forme polynomiale d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} a_1(p) &= 0,8 - 0,6p + 0,4p^2 \\ a_2(p) &= 0,7 - 0,9p + 0,1p^2 \\ b_1(p) &= 0,4 - 0,6p + 0,03p^2 \\ b_2(p) &= 0,2 - 0,1p + 0,05p^2 \end{aligned} \quad 4.10$$

La matrice des paramètres réels est donnée par :

$$\theta_r = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0,4 \\ 0,7 & -0,9 & 0,1 \\ 0,4 & -0,6 & 0,03 \\ 0,2 & -0,1 & 0,05 \end{bmatrix} \quad 4.11$$

Le vecteur des régresseurs étendu est formé comme suit :

$$\Psi_k = \Phi_k \pi_k = \begin{bmatrix} -y_{k-1} \\ -y_{k-2} \\ u_{k-1} \\ u_{k-2} \end{bmatrix} [1 \quad p_k \quad p_k^2] \quad 4.12$$

Les données d'entrée sont choisies comme un bruit aléatoire avec une distribution uniforme appartenant à l'intervalle $[-1, 1]$. Deux trajectoires sont considérées pour représenter le paramètre variant, $p_k = \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$, et $p(k) = \sin(k)$. La longueur des séquences est fixée à $N = 5000$.

A partir de la matrice réelle des paramètres, en utilisant les données d'entrée et de sortie et les deux allures différentes du paramètre variant, les deux algorithmes, *LMS* avec un pas d'adaptation $\alpha = 0,02$ et *RLS*, ont été appliqués afin de trouver des estimés pour θ_r .

Les résultats d'identification sont présentés selon deux façons :

- sous la forme numérique des coefficients identifiés comparée avec la matrice de paramètres réels.
- sous la forme de courbes d'évolution des paramètres au cours du temps afin d'évaluer la convergence des paramètres et sa vitesse.

On rappelle que les algorithmes ont été appliqués à partir des données issues d'une simulation en utilisant la matrice de paramètres réels :

$$\theta_r = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0,4 \\ 0,7 & -0,9 & 0,1 \\ 0,4 & -0,6 & 0,03 \\ 0,2 & -0,1 & 0,05 \end{bmatrix} \quad 4.13$$

Ainsi, pour le signal périodique, $p_k = \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$, en appliquant la méthode *LMS*, les valeurs finales ($k = 5000$), de coefficients estimés sont résumées par la matrice suivante :

$$\hat{\theta}_{k=5000} = \begin{bmatrix} 0,76 & -0,51 & 0,45 \\ 0,65 & -0,8 & 0,09 \\ 0,39 & -0,59 & 0,02 \\ 0,17 & -0,05 & 0,03 \end{bmatrix} \quad 4.14$$

Au regard de la matrice des paramètres réels 4.11 on peut vérifier la convergence des paramètres identifiés. L'évolution des paramètres estimés est montrée graphiquement dans la Figure 4-11.

Dans le même contexte d'identification, $p_k = \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$, en appliquant la méthode *RLS* la convergence des paramètres est montrée dans la Figure 4-12 et la matrice des paramètres estimés est la suivante :

$$\hat{\theta}_{k=5000} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,49 & 0,18 \\ 0,69 & -0,88 & 0,07 \\ 0,4 & -0,6 & 0,00 \\ 0,198 & -0,09 & 0,04 \end{bmatrix} \quad 4.15$$

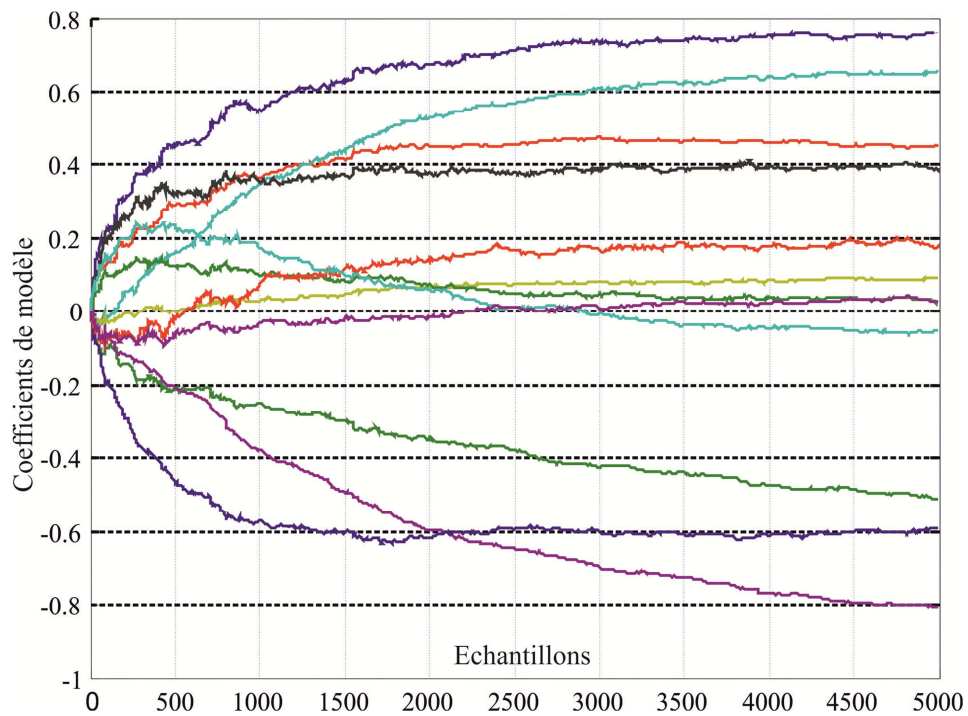


Figure 4-11 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme *LMS*, paramètre variant considéré comme une fonction périodique

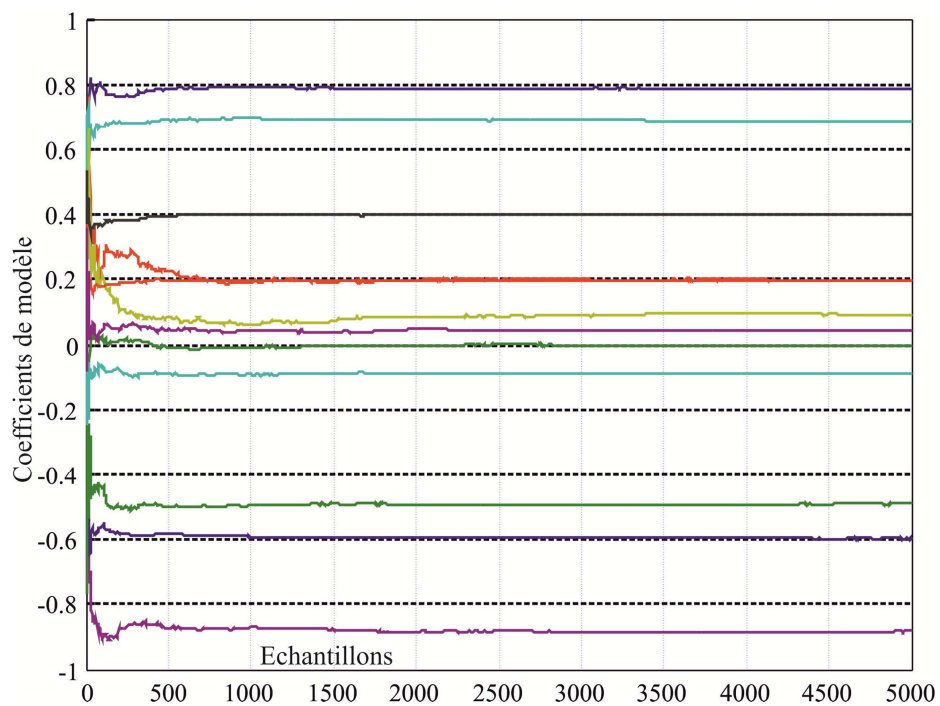


Figure 4-12 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme *RLS*, paramètre variant considéré comme une fonction périodique

Dans le contexte du signal non périodique pour le paramètre variant $p_k = \sin(k)$, en appliquant l'algorithme *LMS*, on obtient la matrice de paramètres estimés suivante :

$$\hat{\theta}_{k=5000} = \begin{bmatrix} 0,76 & -0,51 & 0,44 \\ 0,66 & -0,79 & 0,08 \\ 0,4 & -0,6 & 0,03 \\ 0,18 & -0,07 & 0,04 \end{bmatrix} \quad 4.16$$

La convergence des paramètres est montrée dans la Figure 4-13.

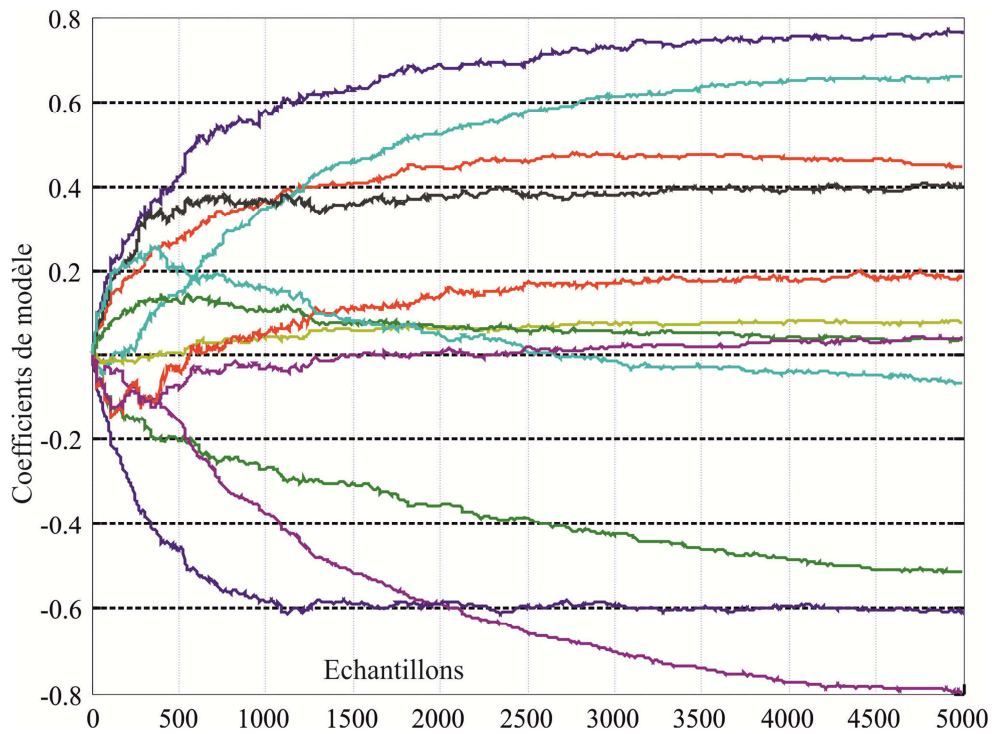


Figure 4-13 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme itératif *LMS*, paramètre variant considéré comme une fonction non périodique

De même pour $p_k = \sin(k)$, en appliquant l'algorithme *RLS*, la matrice identifiée est la suivante :

$$\hat{\theta}_{k=5000} = \begin{bmatrix} 0,79 & -0,49 & 0,18 \\ 0,69 & -0,87 & 0,08 \\ 0,39 & -0,59 & 0,0005 \\ 0,19 & -0,09 & 0,04 \end{bmatrix} \quad 4.17$$

L'évolution de la convergence des paramètres est présentée dans la Figure 4-14.

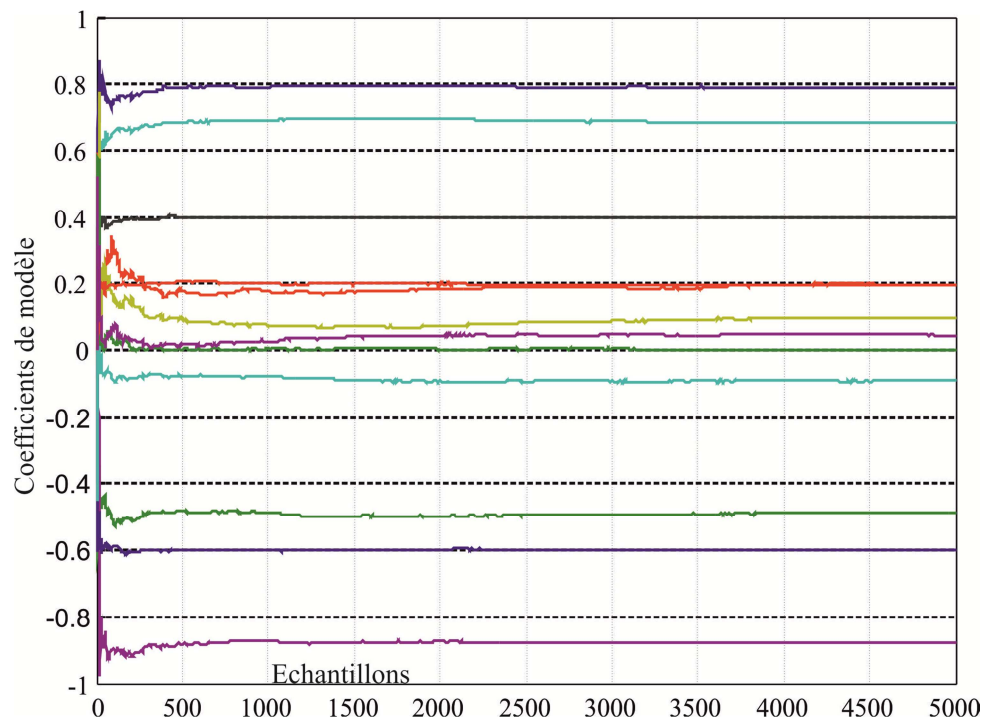


Figure 4-14 : Evolution des paramètres en utilisant l'algorithme *RLS*, paramètre variant considéré comme une fonction non périodique

En observant les valeurs des paramètres identifiés et leurs courbes d'évolution, il peut être remarqué que les paramètres estimés reproduisent d'une manière satisfaisante la matrice de valeurs réelles, pour les deux allures du paramètre variant : fonction périodique $p_k = \sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)$ et non périodique $p_k = \sin(k)$, et pour les deux algorithmes proposés, *LMS* et *RLS*. Ces études ont été entreprises afin d'évaluer la convergence des paramètres et la vitesse de la convergence. On peut conclure que, dans le cas des deux algorithmes, les valeurs des coefficients convergent vers les valeurs des paramètres réels. La vitesse de convergence est plus élevée dans le cas de l'algorithme d'identification *RLS*.

Dans la section suivante, les méthodes de sous-espaces sont appliquées, afin d'identifier un modèle académique.

4.5. Identification d'un modèle académique LPV par les méthodes des sous-espaces

La méthode des sous-espaces, présentée au chapitre III, section 3.3, est utilisée pour identifier un modèle académique d'ordre deux. Le système LPV académique qu'on se propose d'identifier est créé à partir de deux fonctions de transfert en temps continu, de type :

$$H_i = K_i \frac{\omega_{n_i}^2}{s^2 + 2\xi\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2} \quad i \in \{1,2\}$$

de représentation d'état temps discret à la cadence T_d de la forme :

$$x_{k+1} = a_i x_k + b_i u_k$$

$$y_k = C x_k + D u_k$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes :

$$K_1 = 1; K_2 = 5; \omega_{n_1} = \frac{\pi}{4}; \omega_{n_2} = \frac{\pi}{8}; \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

La méthode des sous espaces impose une structure de modèle dans l'espace d'état, en temps discret :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A(p_k)x_k + B(p_k)u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k \end{aligned} \tag{4.18}$$

Ce modèle appelé par la suite « système » est utilisé pour l'obtention des données nécessaires pour le processus d'identification. Les matrices A, B, C, D sont construites comme suit :

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha + p}{2\alpha}\right)a_1 + \left(\frac{\alpha - p}{2\alpha}\right)a_2 \\ B &= \left(\frac{\alpha + p}{2\alpha}\right)b_1 + \left(\frac{\alpha - p}{2\alpha}\right)b_2 \end{aligned} \tag{4.19}$$

C et D étant considérées des matrices indépendantes du paramètre variant.

Le modèle LPV 4.19 est formé de façon que :

- pour la valeur $p = \alpha$ du paramètre variant, on obtient $A = a_1$, $B = b_1$, C , D , ce qui implique que le modèle obtenu correspond à la fonction de transfert H_1 suite à une discrétisation (avec blocage d'ordre 0 de l'entrée) à $T_d = 2,5$ sec .
- pour la valeur $p = -\alpha$ du paramètre variant, on obtient $A = a_2$, $B = b_2$, C , D , ce qui implique que le modèle obtenu correspond à la fonction de transfert H_2 suite à une discrétisation (avec blocage d'ordre 0 de l'entrée) à $T_d = 2,5$ sec .

Les matrices des coefficients du système, sont formées par les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{bmatrix} 0,0509 & -0,4046 \\ 0,656 & -0,3134 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} 0,9317 \\ 0,9491 \end{bmatrix}; \\ a_2 &= \begin{bmatrix} 0,7034 & -0,1775 \\ 1,1508 & 0,0643 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 1,7108 \\ 1,4829 \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

$$C = [0 \ 1]; D = 0.$$

Les caractéristiques en fréquence de ces deux systèmes sont montrées dans la Figure 4-15 en temps continu et aussi discret.

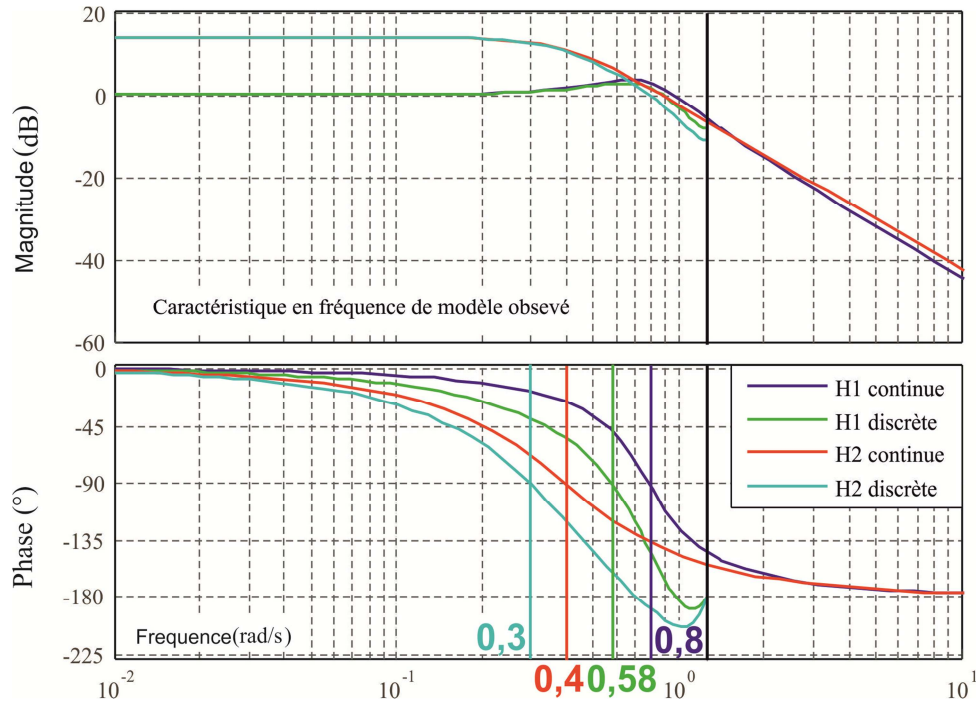


Figure 4-15 : Caractéristique en fréquence de fonctions de transfert H_1 et H_2 en temps continu et discret

Le modèle discret identifié est représenté selon l'équation d'état suivante :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= A_{ident}(p_k)x_k + B_{ident}(p_k)u_k \\ y_k &= C_{ident}x_k + D_{ident}u_k \end{aligned} \quad 4.20$$

où les matrices A_{ident} et B_{ident} sont dépendantes du paramètre variant et ont la forme selon les relations ci-dessous :

$$A_{ident} = a_1 + p_k a_2$$

$$B_{ident} = b_1 + p_k b_2$$

Dans la structure de modèle identifié, les matrices C_{ident} et D_{ident} , ne dépendent pas du paramètre variant. Les matrices $A_{ident}, B_{ident}, C_{ident}, D_{ident}$ cherchées sont entièrement paramétrées, structure imposé par le formalisme de la méthode de sous espaces.

4.5.1. Données d'identification

Le système est simulé en utilisant en entrée un signal ayant les propriétés d'un bruit blanc de distribution uniforme. Le paramètre variant est représenté par un bruit blanc uniforme distribué entre $-\alpha$ et α , avec $\alpha = 1,2$. Les données de simulation sont présentées dans la Figure 4-16. La taille de données est de 2000 échantillons, et la période d'échantillonnage est $T_d = 2,5$ secondes.

Pour la construction des matrices Hankel des données, la méthode de deux blocks (section 3.3.2.2) est utilisée.

Les demandes théoriques de la méthode de sous-espaces exigent que le nombre de blocs lignes des matrices de Hankel respecte la condition $k \geq n - 1$, ou n représente l'ordre du modèle. Dans notre cas, ce nombre est choisi égal à $k = 3$.

Après identification de la matrice $\Phi = [\Phi_X \quad \Phi_{P \odot X} \quad \Phi_U]$, comme présenté dans le paragraphe 3.3.2.1, équation 3.203, l'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières significatives de la décomposition de $\hat{\Phi}_X Z_X$.

Les valeurs singulières dans le cas de notre application sont les suivantes :

$$Sv_1 = 161,94 ; Sv_2 = 58,68 ; Sv_3 = 0,09 ; Sv_4 = 0,03.$$

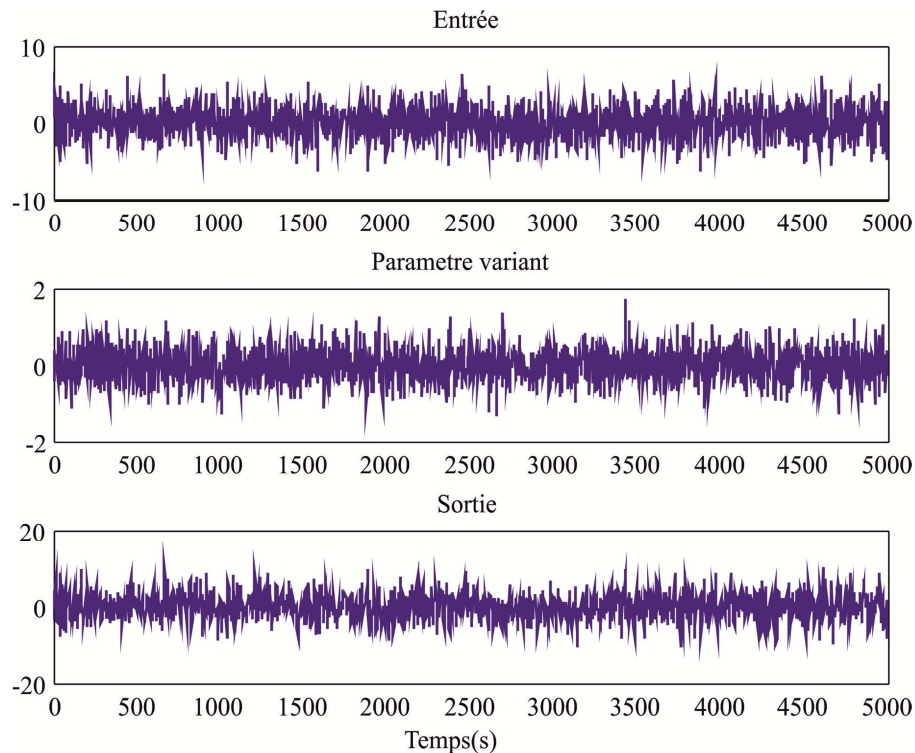


Figure 4-16 : Données pour l'identification de modèle académique d'ordre 2

4.5.2. Résultats d'identification

L'algorithme d'identification a conduit aux matrices de coefficients suivants :

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{bmatrix} 0,1989 & -0,3176 \\ 0,5776 & 0,054 \end{bmatrix}; b_1 = \begin{bmatrix} -0,1378 \\ 0,0166 \end{bmatrix}; \\ a_2 &= \begin{bmatrix} -0,3243 & -0,1211 \\ 0,0056 & -0,0732 \end{bmatrix}; b_2 = \begin{bmatrix} 0,0322 \\ -0,013 \end{bmatrix}; \\ C &= [-9,7397 \quad -8,5253]; D = 0,013. \end{aligned} \quad 4.21$$

Dans le cas des modèles LPV, la représentation dans l'espace d'état n'est pas unique. Des modèles équivalents peuvent être retrouvés, correspondant aux différentes bases de définition.

La Figure 4-17 montre la sortie observée et la sortie identifiée de modèle, avec une focalisation sur l'intervalle [2900,3000] secondes.

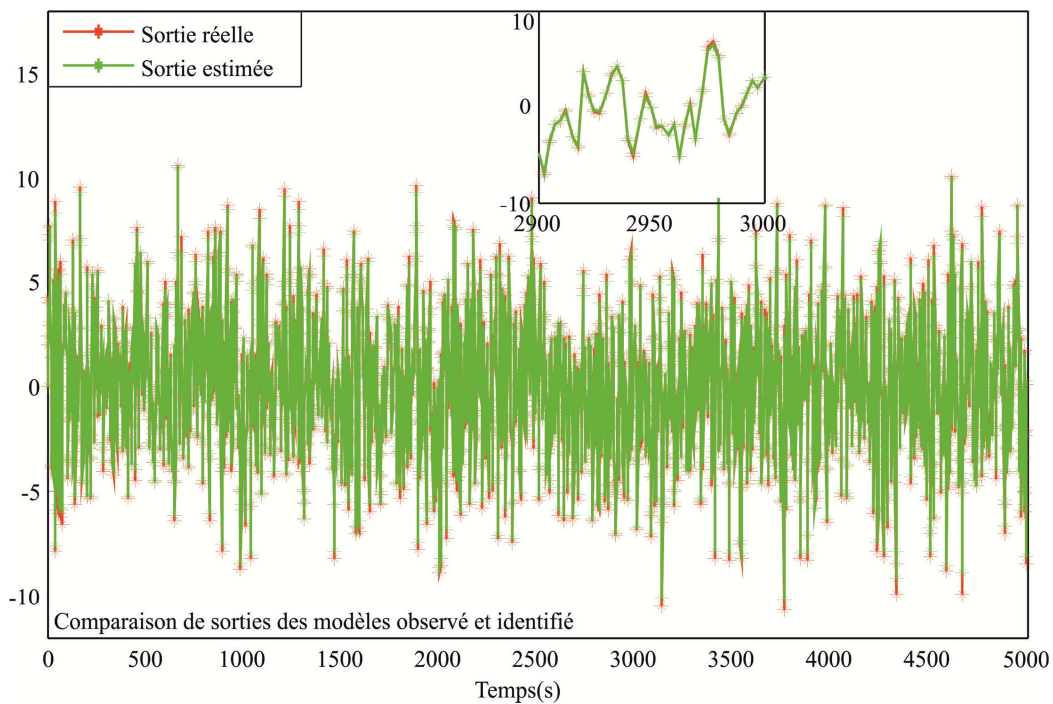


Figure 4-17 : Sortie observée et identifiée de modèle

Pour avoir plus de précisions sur la pertinence de modèle identifié, sa qualité est quantifiée en calculant un taux d'adéquation (VAF en anglais : « variance accounted for »), (Verdult & Verhaegen, Identification of Multivariable Linear Parameter-Varying systems Based on Subspace Techniques, 2000), défini de la façon suivante :

$$VAF = \max \left\{ 1 - \frac{\text{var}(y_k - \hat{y}_k)}{\text{var}(y_k)}, 0 \right\} * 100\% \quad 4.22$$

$$\text{var}(x) = \frac{1}{M} \sum_{k=N_0+1}^{k=N_0+M} (x[k])^2. \quad 4.23$$

Les résultats les plus performants sont obtenus pour $VAF = 1$, dans le cas de cet exemple la valeur de VAF obtenue pour le modèle LPV identifié est :

$$VAF_{ident} = 0,997.$$

Les caractéristiques en fréquence de systèmes (H_1 et H_2) et modèles identifiés sont présentés par la suite :

- La Figure 4-18 présente le diagramme de Bode pour la valeur de $p = \alpha$
- La Figure 4-19 présente le diagramme de Bode pour la valeur de $p = -\alpha$

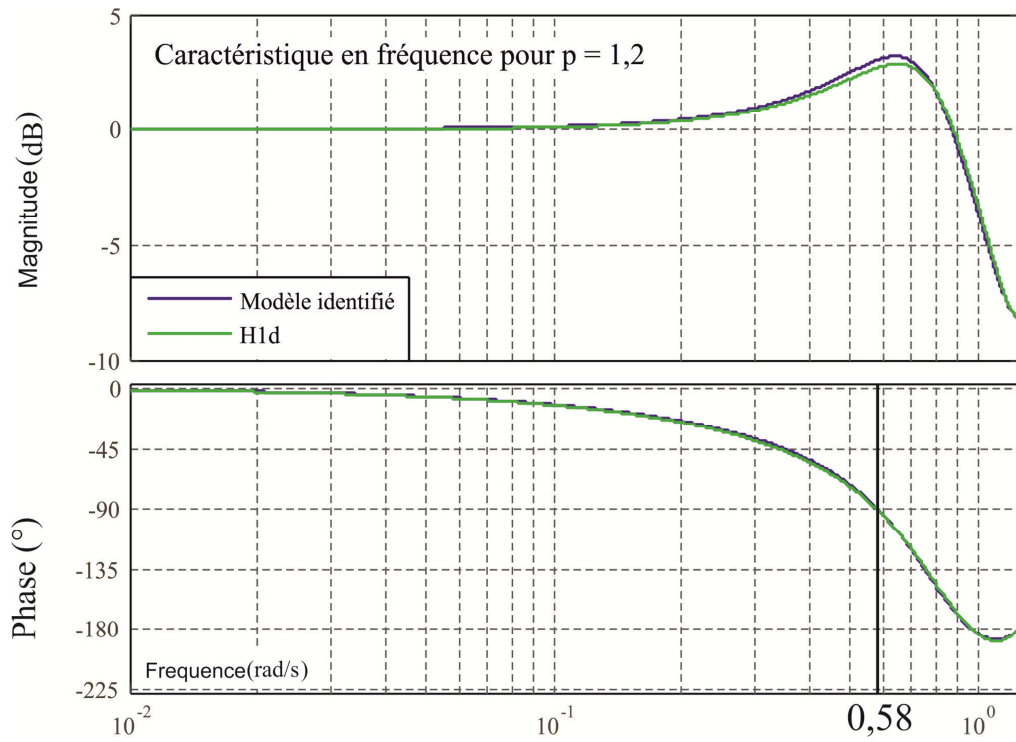


Figure 4-18 : Diagramme de Bode représentant le système et le modèle identifié pour une valeur de $p = \alpha$

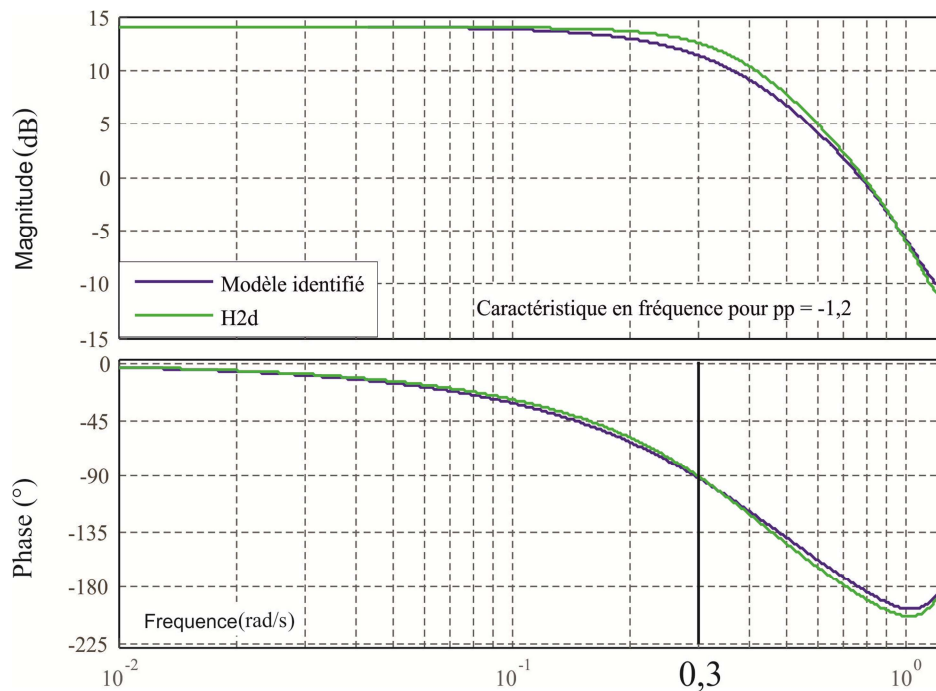


Figure 4-19 : Diagramme de Bode représentant le système et le modèle identifié pour une valeur de $p = -\alpha$

Les caractéristiques fréquentielles obtenues pour le modèle identifié de paramètre fixé montrent la bonne adéquation à la réalité du comportement du système. Dans la section suivante, le modèle obtenu est validé en utilisant des enregistrements de données différents de ceux utilisés dans le processus d'identification.

4.5.3. Validation du modèle identifié

Les enregistrements appartenant au premier jeu de données utilisées pour la validation du modèle sont présentés dans la Figure 4-20 :

- Le bandeau supérieur représente l'entrée, un signal aléatoire de distribution uniforme, avec des valeurs centrées autour de la valeur 0.
- Le bandeau du milieu représente le paramètre variant, d'évolution sinusoïdale avec des valeurs dans l'intervalle $[-0,3; 0,3]$
- La sortie, représentée dans le troisième bandeau est obtenue par la simulation du système en utilisant l'entrée et le paramètre variant présentés ci-dessus.

Le nombre des échantillons enregistrés est $N = 2000$, et une période d'échantillonnage $T_d = 2,5$ secondes est utilisée.

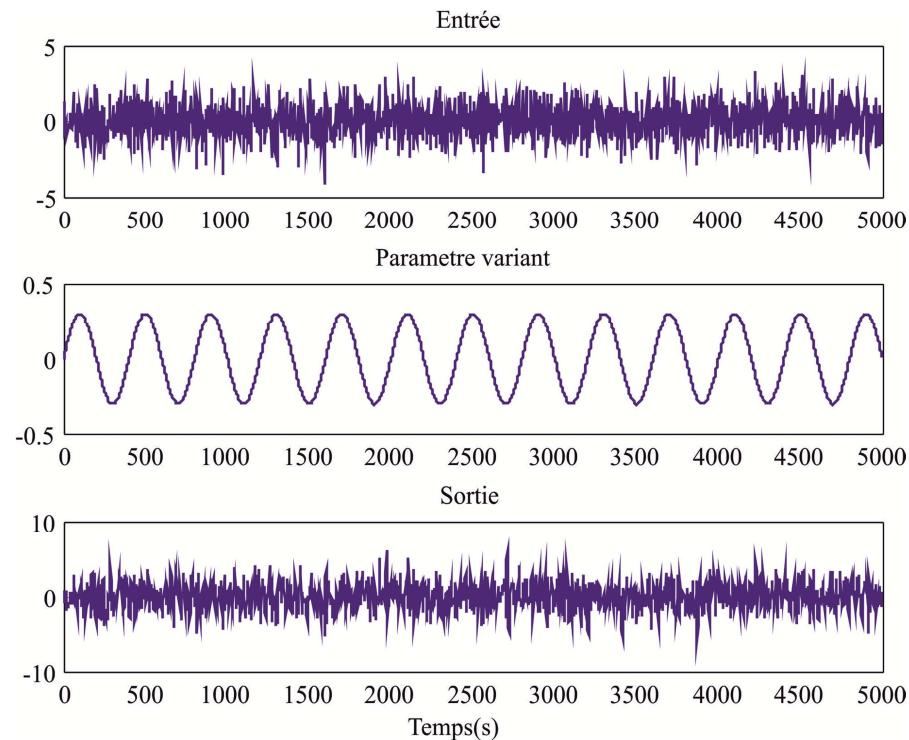


Figure 4-20 : Données (jeu 1) pour validation de modèle académique d'ordre II

Le modèle identifié caractérisé par les valeurs numériques de l'équation 4.21 est simulé en utilisant l'entrée et le paramètre variant présentés dans la Figure 4-20. La sortie obtenue est comparée avec la sortie du système (montrée dans le dernier bandeau de la Figure 4-20). Cette comparaison est présentée dans la Figure 4-21, présentant une focalisation sur l'intervalle [1500, 1550] secondes.

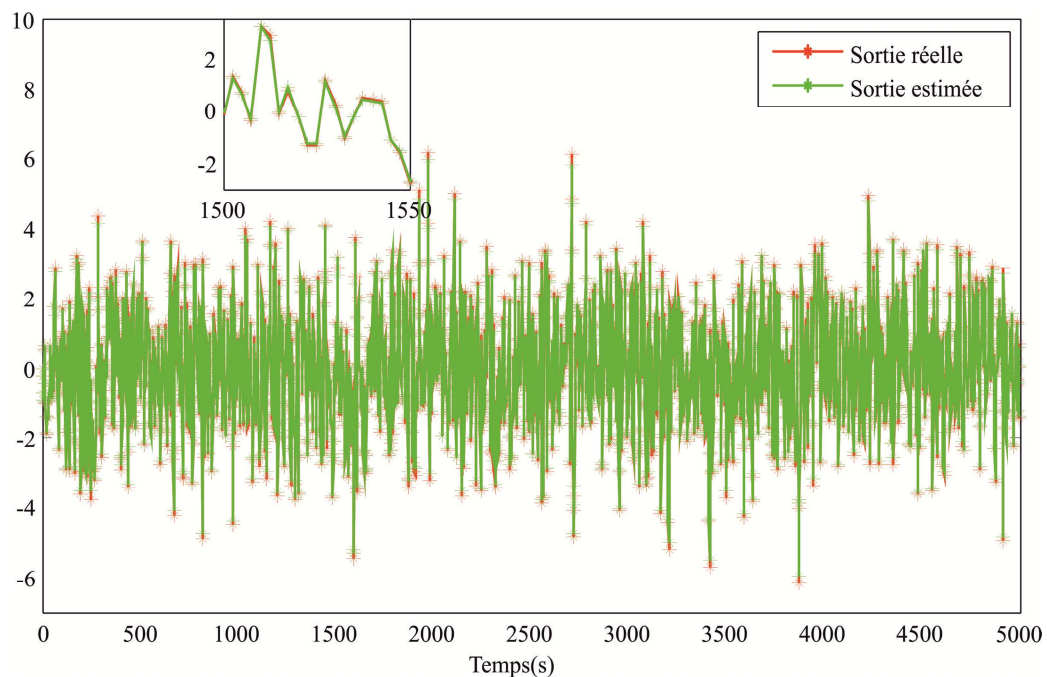


Figure 4-21 : Comparaison des sorties pour la validation (1) de modèle

Le taux d'adéquation entre les deux sorties comparées est :

$$VAF_{vld} = 0,998.$$

Un deuxième jeu de données, utilisé pour la simulation du modèle identifié, est présenté dans la Figure 4-22. La simulation du modèle identifié avec l'entrée (signal carré) et paramètre variant (signal sinusoïdal) présentés dans le premier et deuxième bandeaux de la Figure 4-22 conduit à l'obtention de la sortie présentée dans le troisième bandeau. Cette sortie est comparée avec la sortie du modèle réel, voir Figure 4-23. Un agrandissement de signaux est montré pour l'intervalle temporel de [1500;1550] secondes. Il peut être observé le suivi (en vert) du régime transitoire de la sortie observée (en rouge) correspondant à un changement en échelon de l'entrée.

Le taux d'adéquation entre les deux sorties comparées est :

$$VAF_{vld} = 0,999.$$

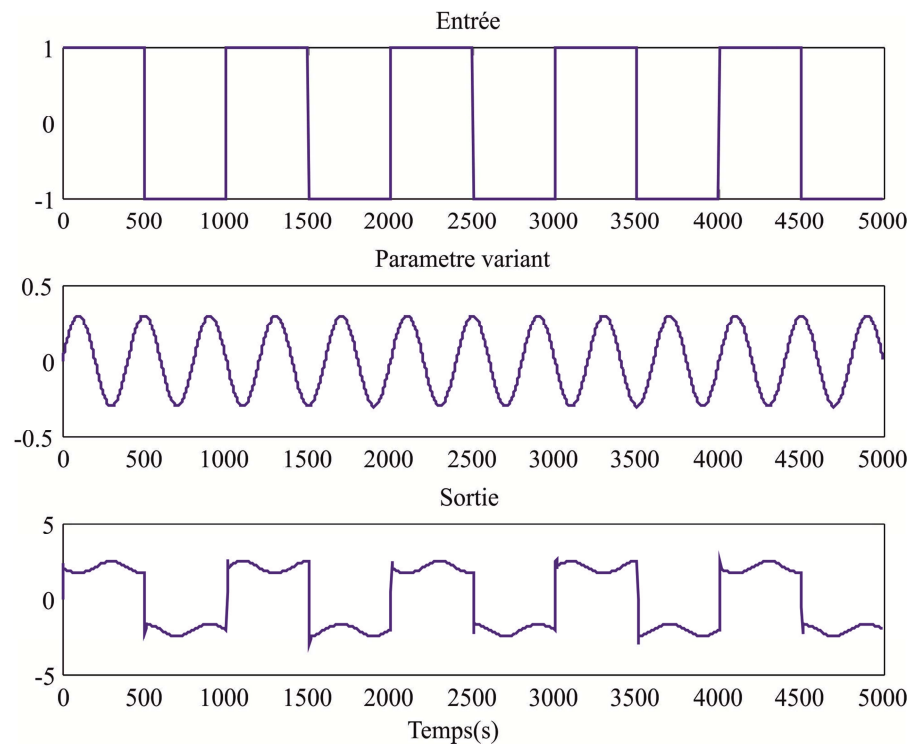


Figure 4-22 : Données (jeu 2) pour utilisées pour la validation du modèle académique d'ordre 2

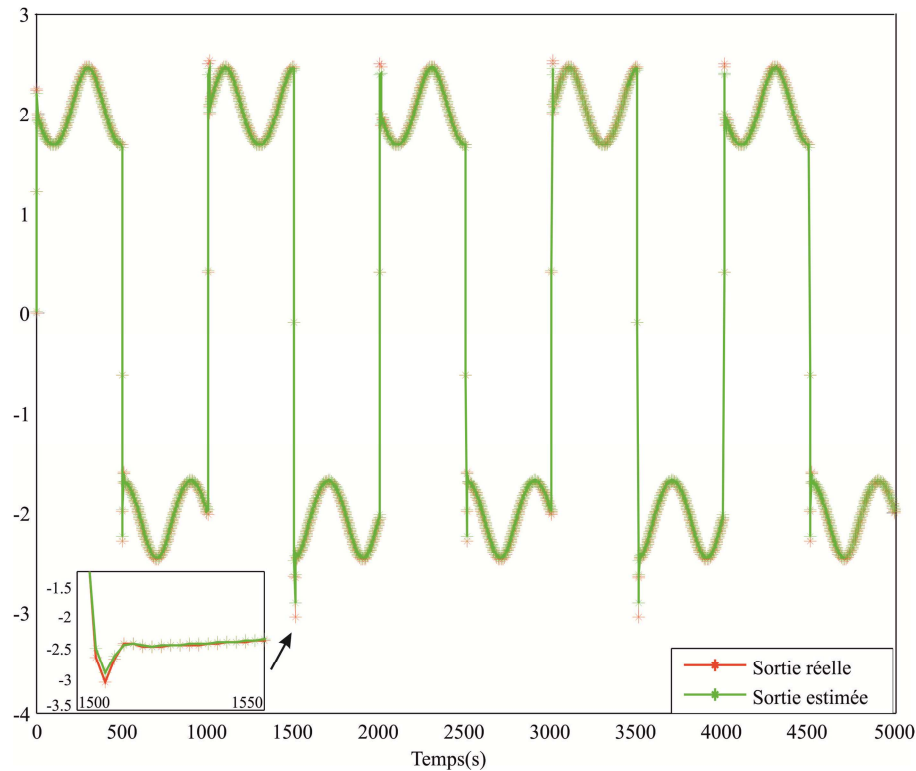


Figure 4-23 : Comparaison des sorties pour la validation (2) de modèle

Les résultats obtenus montrent la validité de modèle identifié.

La présence des bruits sur les mesures de sortie est envisagée. Les sorties présentées dans les Figure 4-16 (données représentant le cadre de l'identification) et Figure 4-20 (jeu des données représentant le cadre pour la validation 1) sont soumises à des bruits de mesures de différentes puissances.

Les rapports signal à bruit sont présentés dans la Table 4-5 pour différentes puissances de bruits.

<i>Puissance Q</i>	<i>SNR identification</i>	<i>SNR validation(1)</i>
0,01	$1,0079 * 10^3$	423,2958
0,1	100,7922	42,3296
1	10,0792	4,2330

Table 4-5 : Rapport signal à bruit

La Table 4-6 présente les valeurs des taux d'adéquation (VAF), calculées en utilisant la formule 4.22, pour différents puissances de bruit de mesure.

<i>Puissance Q</i>	<i>VAF identification</i>	<i>VAF validation(1)</i>
0,01	0,9967	0,9976
0,1	0,9898	0,9767
1	0,9075	0,8141

Table 4-6 : Valeurs *VAF* pour l'identification du modèle en présence de bruits de mesure

Cela atteste que l'algorithme d'identification fournit par les méthodes de sous espaces conduit à des résultats satisfaisants aussi dans le cas de présence des bruits de mesure.

Dans cette section, un modèle académique de deuxième ordre a été identifié en utilisant les techniques de la méthode de sous espaces.

Ainsi, dans le chapitre courant, IV, les méthodes étudiées et présentées dans le chapitre III, sont utilisées pour identifier des modèles LPV correspondant aux systèmes académiques, dont les données sont obtenues au moyen de simulations numériques.

Le chapitre suivant traite l'identification de comportement latéral d'un véhicule, modélisé par différentes structures des modèles LPV, en utilisant les méthodes d'identification étudiées précédemment.

Chapitre 5

Dans le domaine de l'automobile, le comportement latéral d'un véhicule est couramment modélisé à partir d'un modèle de comportement dit de la bicyclette.

Dans ce chapitre ce modèle est présenté et une analyse fréquentielle est réalisée. Afin d'illustrer les différences apportées, les divers cas de discrétisation, présentés au chapitre II sont envisagés. La discrétisation du modèle bicyclette est effectuée, en simulation, en exploitant les diverses situations présentées dans le chapitre II de la thèse.

Par la suite, le modèle de comportement latéral du véhicule est identifié en utilisant les méthodes présentées dans le chapitre III : la méthode de moindres carrés (section 5.3), les techniques des méthodes à erreurs de prédiction (section 5.4) et enfin la méthode de sous espaces (section 5.5).

5. Identification du comportement latéral d'un véhicule automobile

5.1. Présentation de modèle bicyclette

Il s'agit d'un modèle de deuxième ordre (modèle approché de (Duysinx)), décrit dans la Figure 5-1, représenté dans l'espace d'état sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{m\mathbf{v}} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{m\mathbf{v}^2} - 1 \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J_z} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J_z\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{m\mathbf{v}} \\ \frac{c_f l_f}{J_z} \end{bmatrix} \delta \quad 5.1$$

$$\dot{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

où β est l'angle de glissement, ψ est l'angle de lacet, m est la masse du véhicule, v est la vitesse du véhicule, c_f et c_r sont les rigidités de dérives des pneumatiques avant et arrière, l_f et l_r sont les distances entre les essieux avant, arrière et le centre de gravité, l est

l'empattement du véhicule, J_z est le moment d'inertie et enfin δ est l'angle de braquage des roues avant.

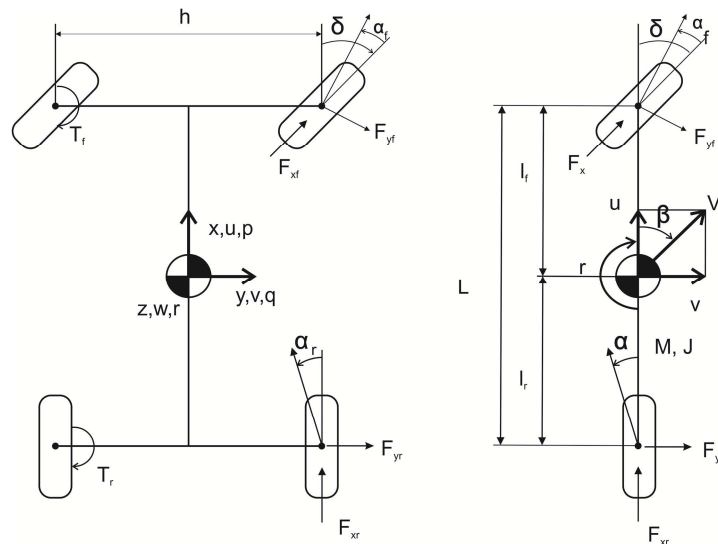


Figure 5-1 : Modèle bicyclette analytique

L'entrée considérée du modèle est l'angle de braquage des roues avant, δ . Le vecteur d'états est formé par l'angle de glissement β , et la vitesse de lacet de véhicule $\dot{\psi}$. La sortie est la vitesse de lacet de véhicule.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, y(t) = \dot{\psi}, u(t) = \delta \quad 5.2$$

Les coefficients des matrices d'états peuvent être déterminés par les valeurs recommandées par le constructeur du véhicule, présentés dans la Table 5-1.

Coefficient	Valeur
c_f	122185 [N/rad]
c_r	83130 [N/rad]
m	1750 [kg]
l_r	1,115 [m]
l_f	1,645 [m]
J_z	3000 [kg · m ²]

Table 5-1 : Valeurs théoriques des paramètres du modèle bicyclette

Une analyse fréquentielle du modèle bicyclette analytique utilisant les valeurs des paramètres physiques données par le constructeur du véhicule est faite.

Etant donnée la structure du modèle bicyclette présentée dans l'équation 5.1, considérons l'inverse de la vitesse de véhicule $p = 1/v$ comme paramètre variant. Prenons une vitesse décroissante comprise entre 110 km/h et 30 km/h.

Dans la Figure 5-2 l'évolution des pôles et zéros du modèle est présentée, pour différentes valeurs de p , incluses dans la plage de variation de vitesse choisie. Le modèle est du second ordre et présente un zéro voisin d'un des deux pôles. Sa réponse fréquentielle est donc similaire à celle d'un modèle du 1^{er} ordre. Les diagrammes de Bode donnés dans la Figure 5-3 illustrent les réponses fréquentielles des deux modèles correspondant aux vitesses $v_1 = 30$ km/h et $v_2 = 110$ km/h.

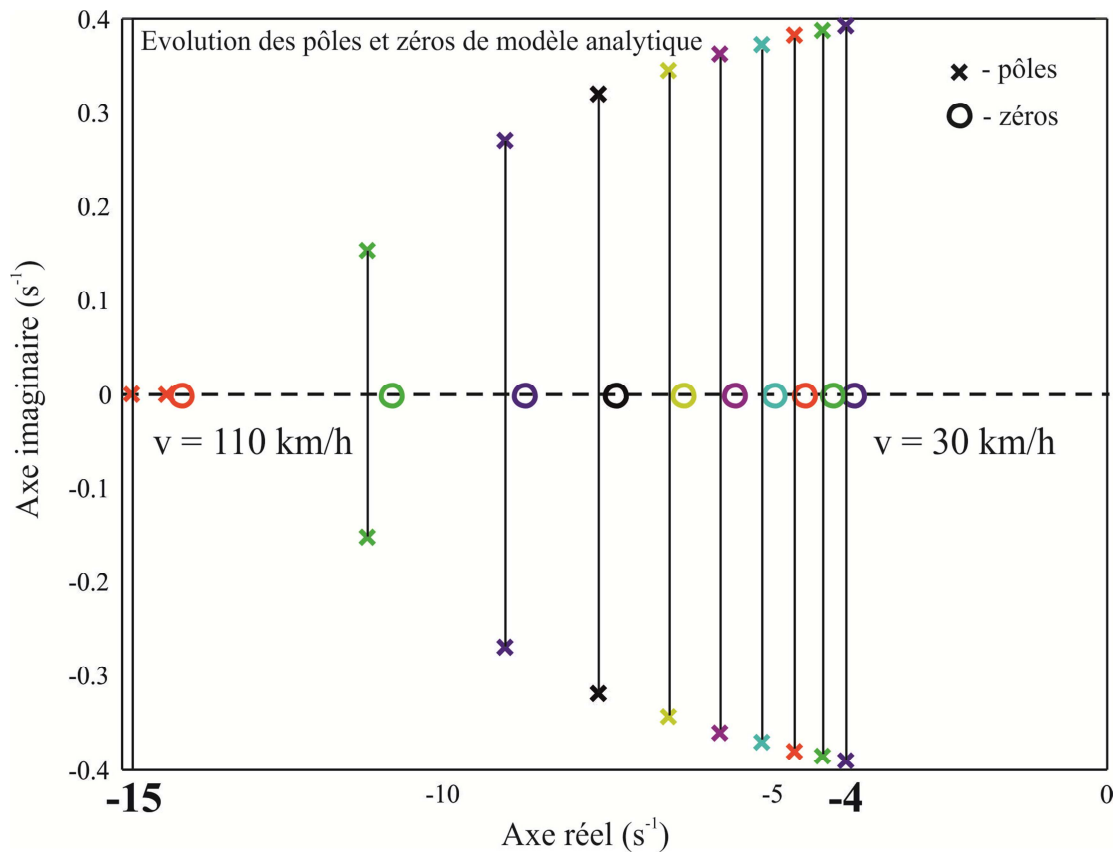


Figure 5-2 : Evolution des pôles et zéros de modèle bicyclette

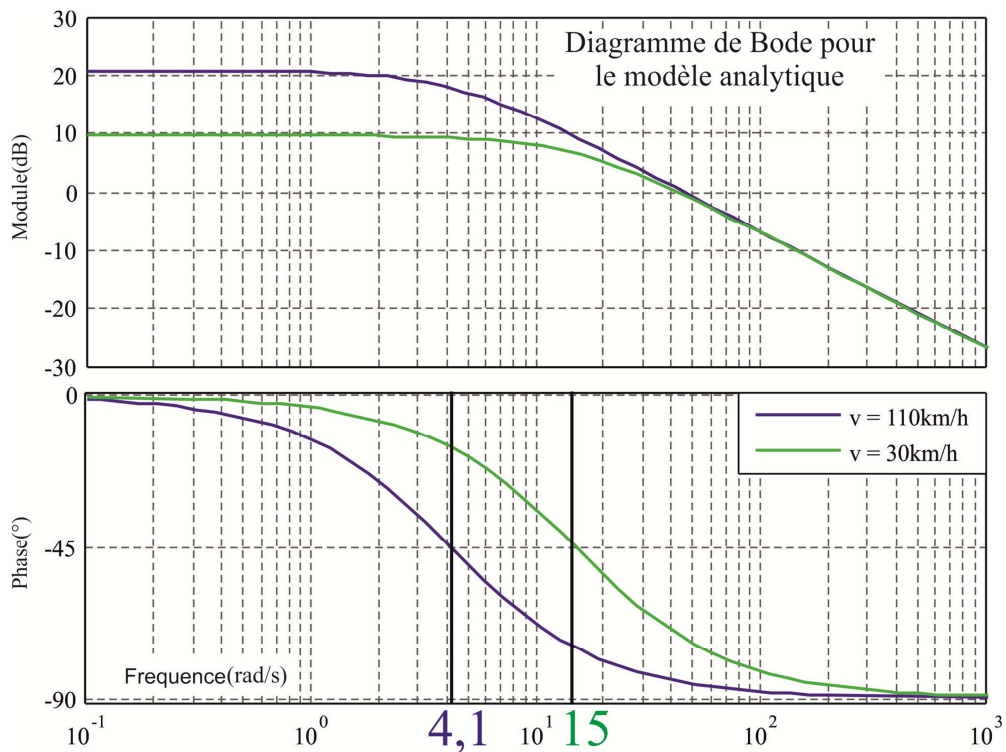


Figure 5-3 : Diagramme de Bode de modèle bicyclette

Ces tracés illustrent l'influence du paramètre variant sur les caractéristiques du modèle : le comportement à haute fréquence est le même quelle que soit la vitesse (comme prévu par le fait que le produit CB des matrices d'observation et de commande est indépendant de la vitesse), les variations de la vitesse modifient le gain statique et la pulsation de brisure équivalente.

Au vu de ces caractéristiques fréquentielles, le choix d'une acquisition de données à la cadence $Te = 0,01 \text{ s}$ est justifié de façon à rendre compte du comportement dynamique des grandeurs pour toute valeur de la vitesse.

5.2. Analyse du comportement en fonction de la condition expérimentale

Le modèle analytique bicyclette est implanté en utilisant l'environnement Matlab/Simulink, sous différents contextes de blocage des signaux d'entrée considérés. On présente par la suite les trois cas envisagés :

- La Figure 5-4 présente la situation dans laquelle le modèle en temps continu est excité par un signal d'entrée et un paramètre variant maintenus constants pendant

une période d'échantillonnage, par l'intermédiaire d'un blocage d'ordre zéro. Ce cas va être nommé par la suite Cas I.

- La Figure 5-5 présente la situation où le signal d'entrée est actionné par un bloqueur d'ordre zéro et le paramètre variant est considéré continu et échantillonné. Ce cas va être nommé par la suite Cas II.
- Dans la Figure 5-6 est représenté la situation dans laquelle les deux signaux, entrée et paramètre variant, envoyés au modèle LPV sont en temps continu et échantillonnés. Ce cas va être nommé par la suite Cas III.

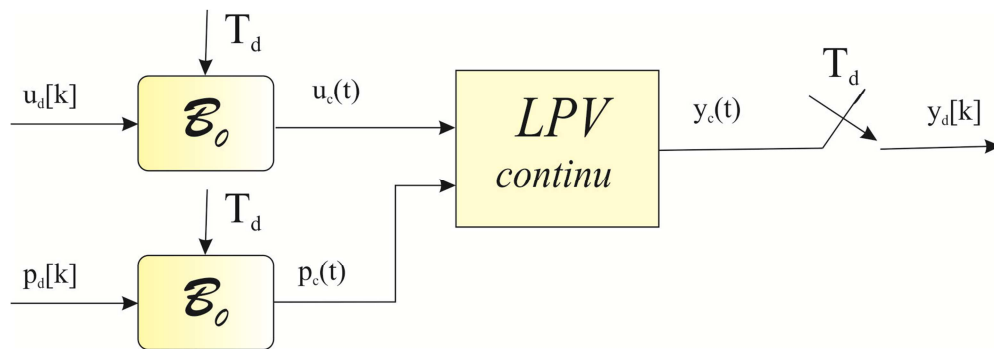


Figure 5-4 : Cas I : Signal d'entrée bloqué, paramètre variant bloqué (UbPb)

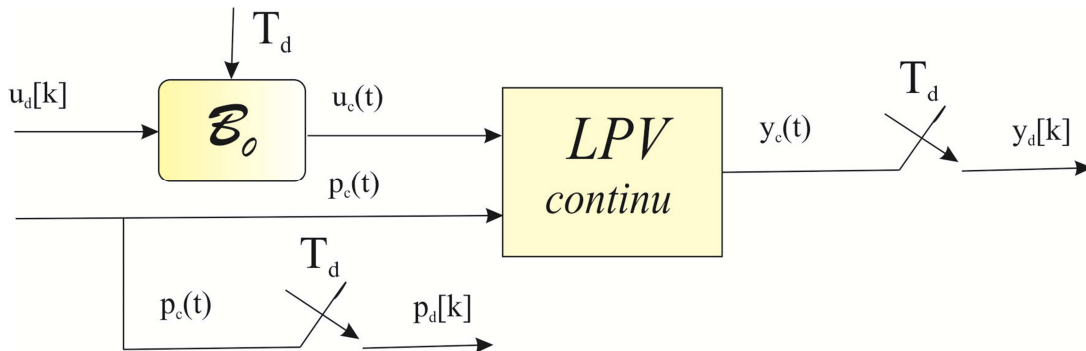


Figure 5-5 : Cas II : Signal d'entrée bloqué, paramètre variant continu échantillonné (UbPc)

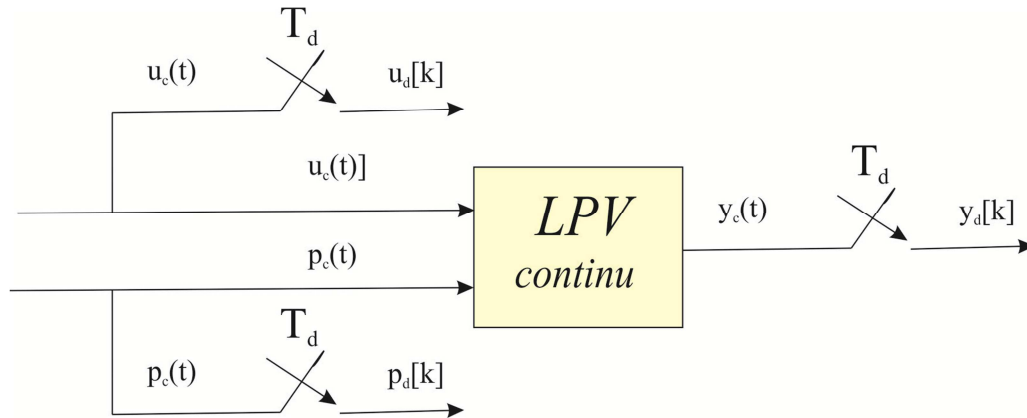


Figure 5-6 : Cas III : Signal d'entrée continu, paramètre variant continu échantillonné (UcPc)

Afin de visualiser l'influence du blocage des signaux, le modèle bicyclette analytique a été simulé dans les trois contextes présentés en utilisant un algorithme à pas variable, de valeur 10^{-4} . Pour un temps de simulation de 5 secondes, le signal d'entrée est représenté par un sinus avec une fréquence de 1 Hz (Figure 5-7). Le paramètre variant est représenté par l'inverse de la vitesse de véhicule, $p = 1/v$. La vitesse est caractérisée par une rampe décroissante de 110 km/h à 30 km/h. La trajectoire de paramètre variant, p est présentée dans la Figure 5-8.

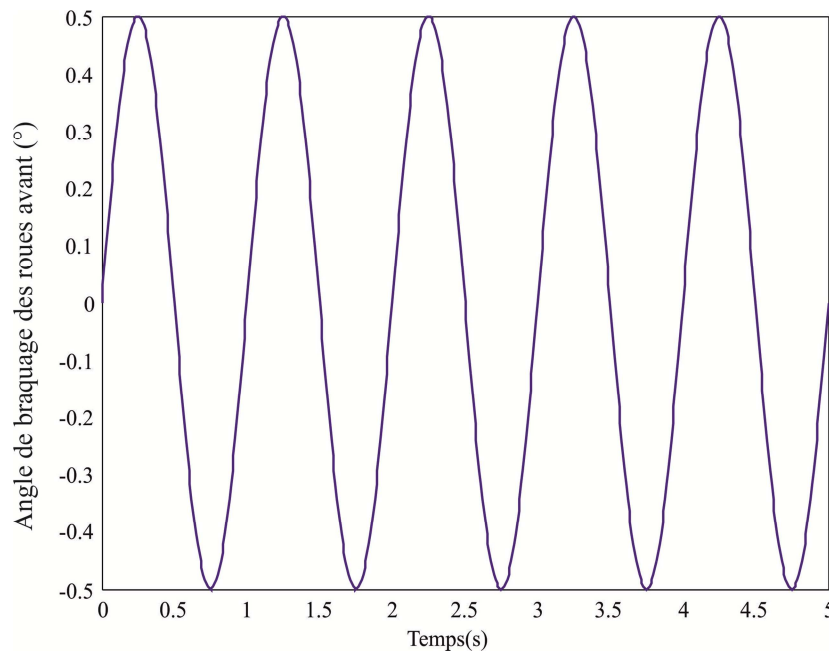


Figure 5-7 : Signal d'entrée en temps continu, utilisé pour exciter le modèle

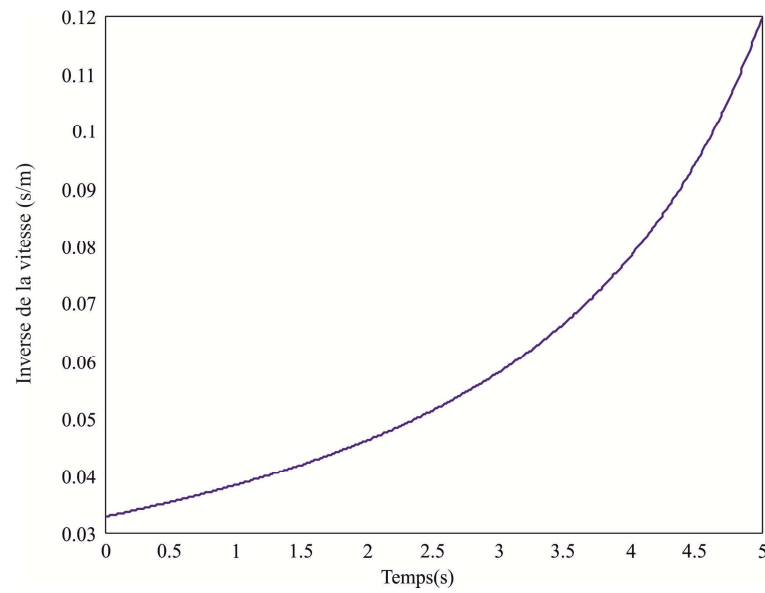


Figure 5-8 : Signal représentant le paramètre variant utilisé pour exciter le modèle

Les simulations sont faites pour une période d'échantillonnage des signaux $T_d = 0,2$ seconde. La sortie du modèle en temps continu simulée selon chaque expérience (Cas I, Cas II, Cas III) est représentée dans la Figure 5-9.

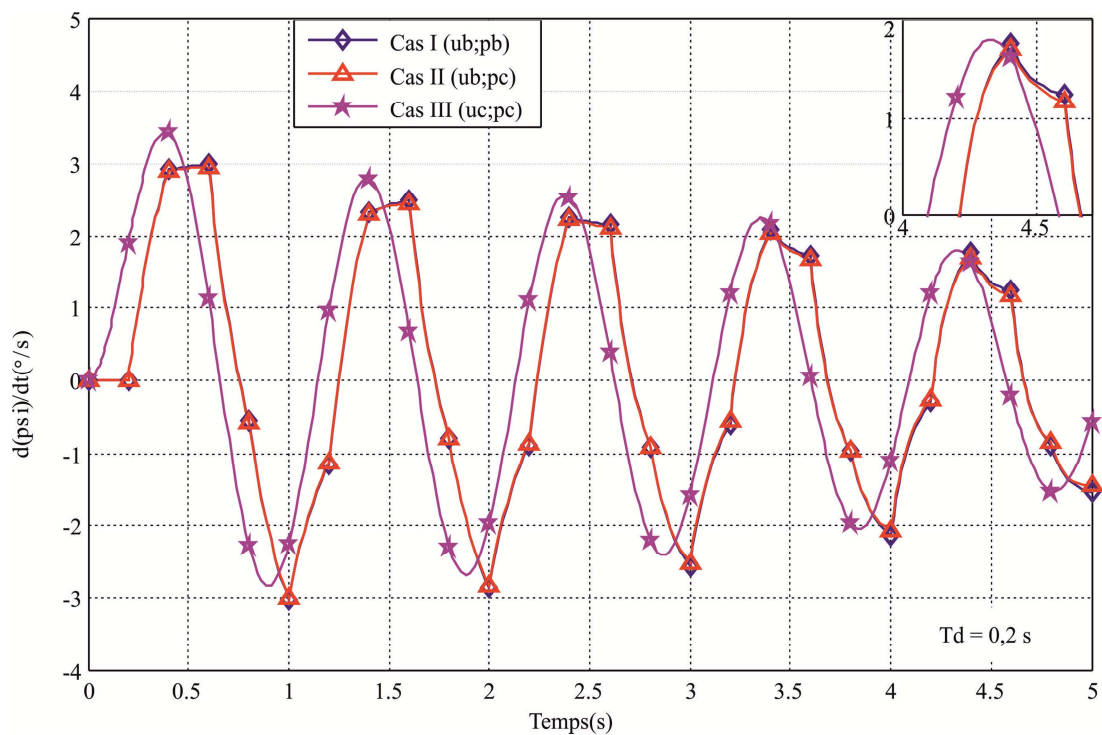


Figure 5-9 : Illustration des effets de blocage/non blocage des signaux sur la sortie de modèle LPV continu

Il peut être observé que le comportement de modèle est sensible à la présence de blocage d'ordre zéro sur les signaux. L'allure de la sortie dans chaque cas de fonctionnement (rouge – Cas I ; vert – Cas II, magenta – Cas III) est différente.

5.3. Discrétisation du modèle bicyclette

Il sera intéressant de regarder l'effet de la discrétisation sur le comportement du modèle, selon les trois situations des simulations différentes : Cas I, Cas II, Cas III. Pour chaque cas la sortie du modèle LPV continu, simulée par un algorithme à pas variable, est comparée avec la sortie des modèles discrétisés et la valeur de l'erreur quadratique moyenne entre ces sorties est calculée. La méthode de discrétisation choisie pour discrétiser le modèle, dans les trois cas de fonctionnement, est représentée par l'approche de Tustin. Les équations d'état en temps discret, sont calculées dans le chapitre II de la thèse.

5.3.1. Etude du cas I : u bloqué, p bloqué

Dans le contexte de simulation du Cas I, avec les signaux d'entrée et paramètre variant soumis à un blocage d'ordre zéro, la sortie du modèle continu (aux instants d'échantillonnage) est comparée à la sortie de la représentation discrète associée, comme présenté dans la Figure 5-10.

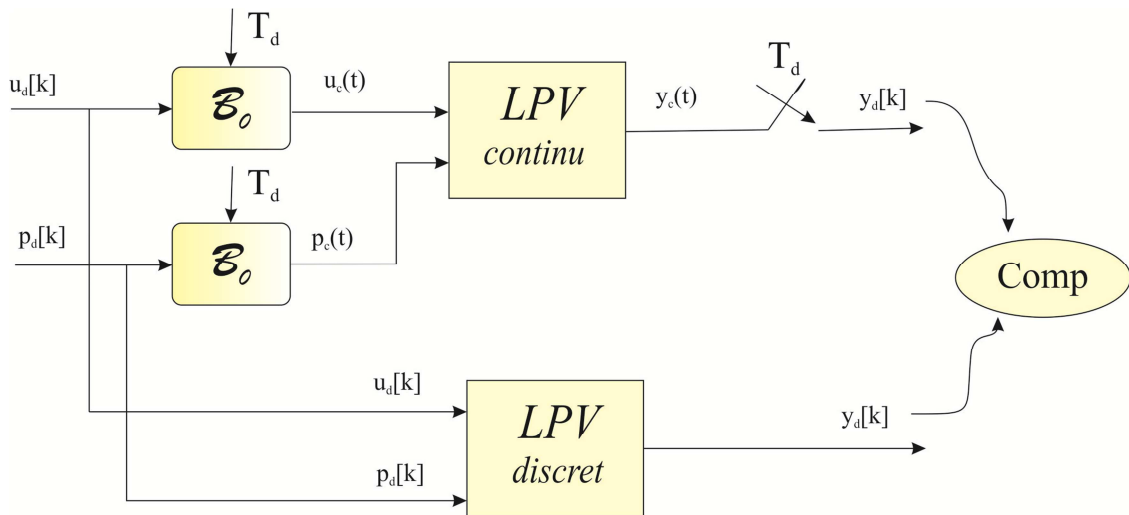


Figure 5-10 : Comparaison de modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas I de simulation

Le modèle discret, obtenu par l'approche de Tustin, est fourni par les équations 2.24 :

$$A_d(p_d[k]) = \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)$$

$$B_d(p_d[k]) = T_d \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d))$$

$$C_d(p_d[k]) = [0 \quad 1]$$

$$D_d(p_d[k]) = 0.$$

La comparaison des sorties est analysée en observant les courbes dans le domaine temporel. Dans la Figure 5-11 la sortie du modèle continu est comparée avec la sortie du modèle discret, dans le contexte de simulation présenté dans le Cas I, pour période d'échantillonnage $T_d = 0,2$ seconde. Cette cadence est choisie pour bien visualiser les différences entre les sorties des modèle continu échantillonné et modèle discret.

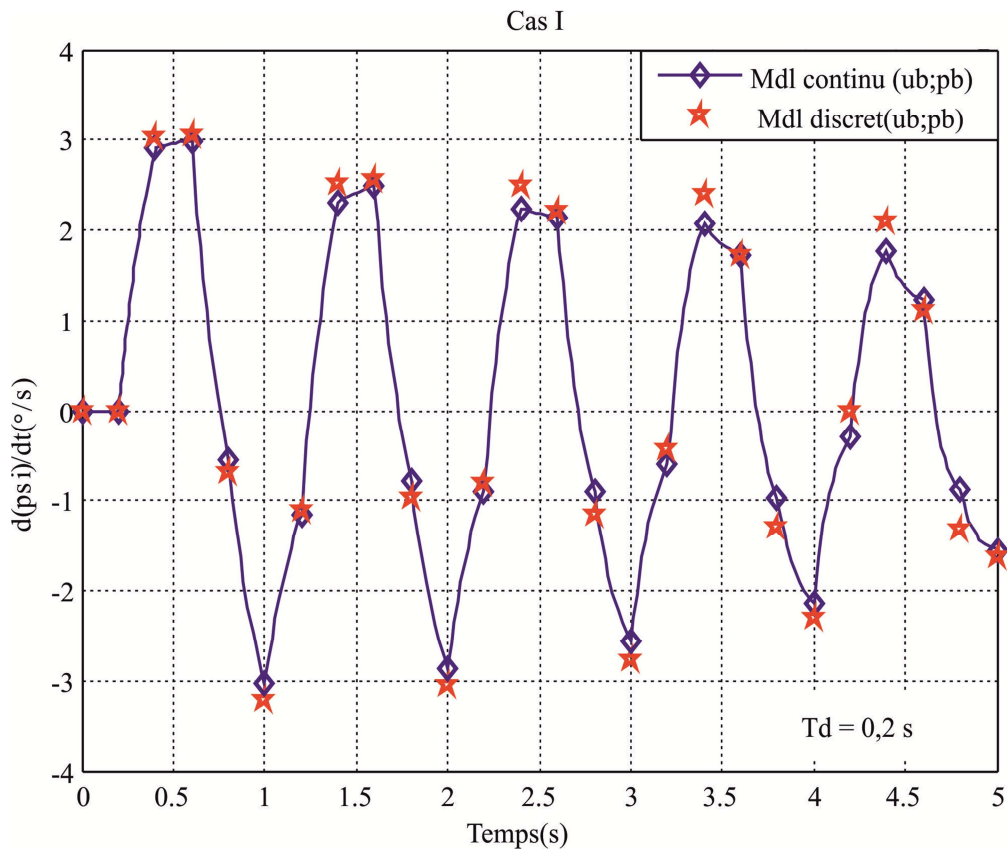


Figure 5-11 : Comparaison entre les sorties des modèle continu et modèle discret, Cas I,

Td = 0,2 s

Pour des périodes d'échantillonnage plus faibles il n'est pas pertinent de présenter les courbes des sorties, car la différence est insaisissable.

En revanche, l'erreur quadratique moyenne est calculée, pour différentes valeurs de la période d'échantillonnage, $T_d=0,25$ s ; $T_d=0,2$ s ; $T_d=0,1$ s ; $T_d=0,01$ s ; $T_d=0,001$ s.

L'erreur quadratique moyenne est calculée en utilisant la formule :

$$EQM = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y_{ck} - y_{dk})^2 \quad 5.3$$

où y_{ck} représente la sortie de modèle en temps continu à l'instant k , y_{dk} représente la sortie du modèle en temps discret à l'instant k ; N représente le nombre des échantillons.

Les valeurs obtenues sont résumées dans la Table 5-2.

Td (s)	EQM ($^{\circ}/s$)²
0,25	0,107
0,2	0,0395
0,1	0,0022
0,01	$2,116 \cdot 10^{-7}$
0,001	$2,1189 \cdot 10^{-11}$

Table 5-2 : EQM pour les sorties des modèle continu, discret en contexte Cas I

On rappelle que le modèle continu est discrétisé en utilisant l'approche de Tustin. Logiquement on observe que le modèle à temps continu est discrétisé avec plus de précision pour des périodes d'échantillonnage de plus en plus faibles. Pour une fréquence d'acquisition des données de 100 Hz, les erreurs de discrétisation sont négligeables et pour une fréquence de 1 kHz sont presque inexistantes. En revanche pour des fréquences plus grandes que 5 Hz les erreurs de discrétisation introduites par l'approche de Tustin deviennent importantes.

5.3.2. Etude du cas II : u bloqué, p échantillonné

Dans le contexte de simulation du Cas II, le signal d'entrée est soumis à un blocage d'ordre zéro et le paramètre variant est maintenu en temps continu. La sortie du modèle en temps continu (aux instants d'échantillonnage) est comparée à la sortie de la représentation discrète correspondante, comme présenté dans la Figure 5-12.

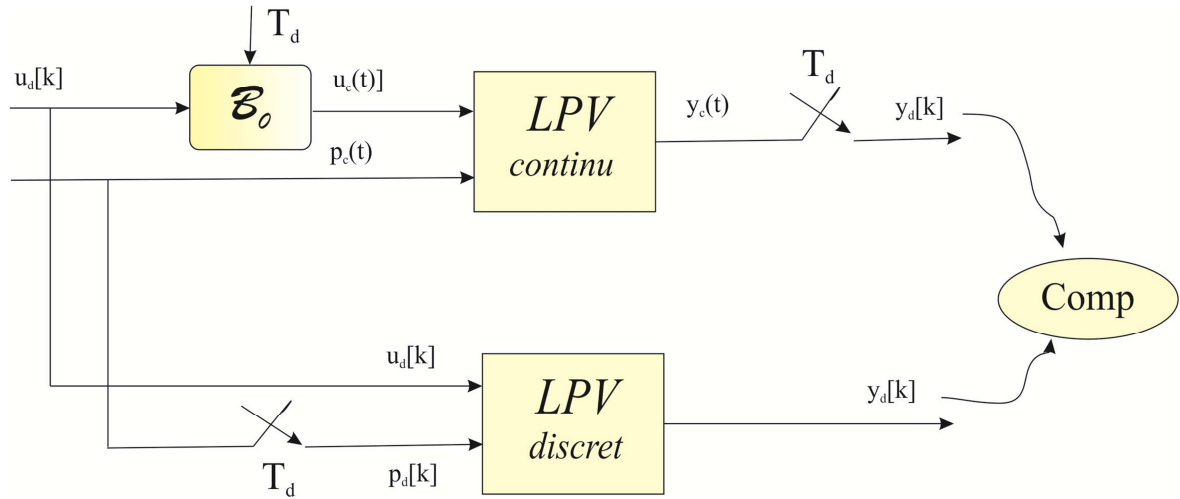


Figure 5-12 : Comparaison de modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas II de simulation

La discrétisation du modèle, calculée par l'approche de Tustin, est donnée par les équations 2.29 :

$$A_d(p_d(k)) = \begin{bmatrix} F(kT_d) & G_2(kT_d) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_d(p_d(k)) = \begin{bmatrix} G_1(kT_d) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_d(p_d(k)) = [C_{d1} \quad C_{d2}]$$

$$D_d(p_d(k)) = D_c(p_c(kT_d)),$$

où les matrices sont définies comme suit :

$$F(kT_d) = \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1}$$

$$G_1(kT_d) = \frac{T_d}{2} B_c(p_c(kT_d))$$

$$G_2(kT_d) = \frac{T_d}{2} \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d))$$

$$C_{d1} = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \text{ et}$$

$$C_{d2} = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \frac{T_d}{2} [B_c(p_c(kT_d))].$$

La comparaison des sorties des modèles continu et discret est présentée dans la Figure 5-13, pour une période d'échantillonnage $T_d = 0,2$ s. Les erreurs quadratiques moyennes sont présentées dans la Table 5-3 pour les périodes d'échantillonnage $T_d=0,25$ s, $T_d=0,2$ s, $T_d=0,1$ s ; $T_d= 0,01$ s ; $T_d = 0,001$ s.

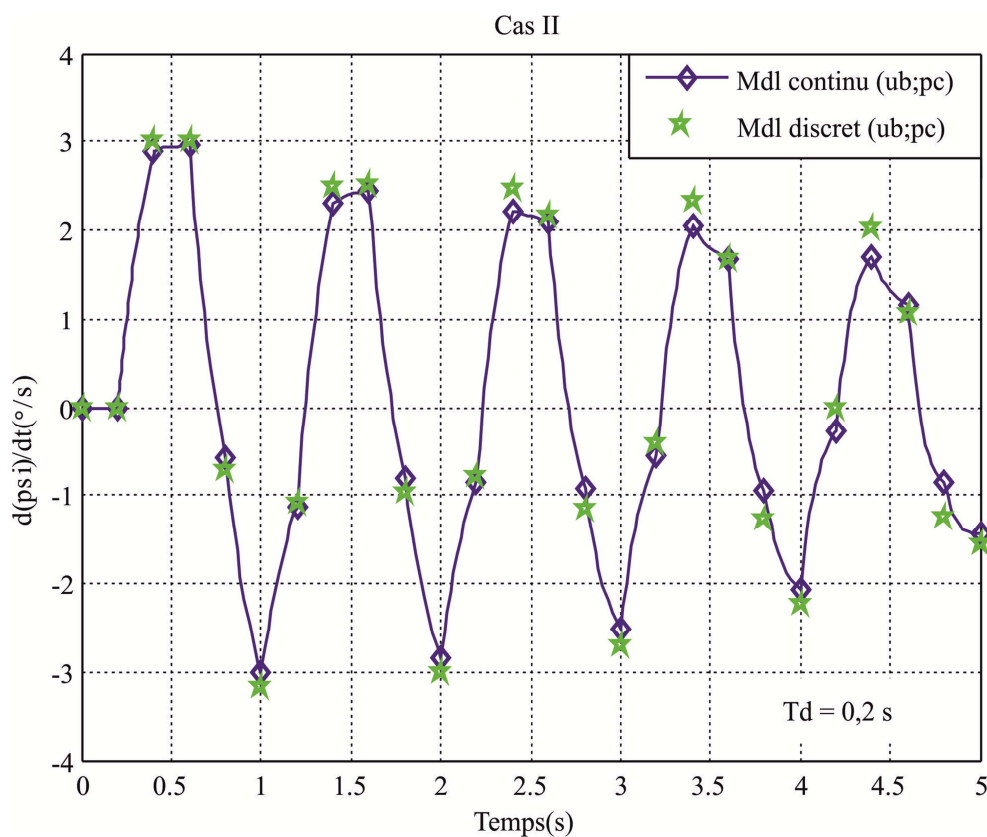


Figure 5-13 : Comparaison entre les sorties des modèle continu et discret, Cas II,
 $T_d = 0,2$ s

T_d (s)	EQM ($^{\circ}/s$) ²
0,25	0,092
0,2	0,0344
0,1	0,0019
0,01	$1,8328 \cdot 10^{-7}$
0,001	$1,8318 \cdot 10^{-11}$

Table 5-3 : EQM pour les sorties des modèles continu et discret en contexte Cas II

Egalement, pour des périodes d'échantillonnage faibles ($T_d \leq 0,01$ s) les erreurs de discrétisation sont négligeables. Pour des périodes d'échantillonnage supérieures à 0,25 s les erreurs deviennent importantes, et la qualité de la discrétisation diminue.

5.3.3. Etude du cas III : u échantillonné, p échantillonné

Le dernier cas de simulation, Cas III, est représenté par les signaux d'entrée et paramètre variant continus, voir Figure 5-14.

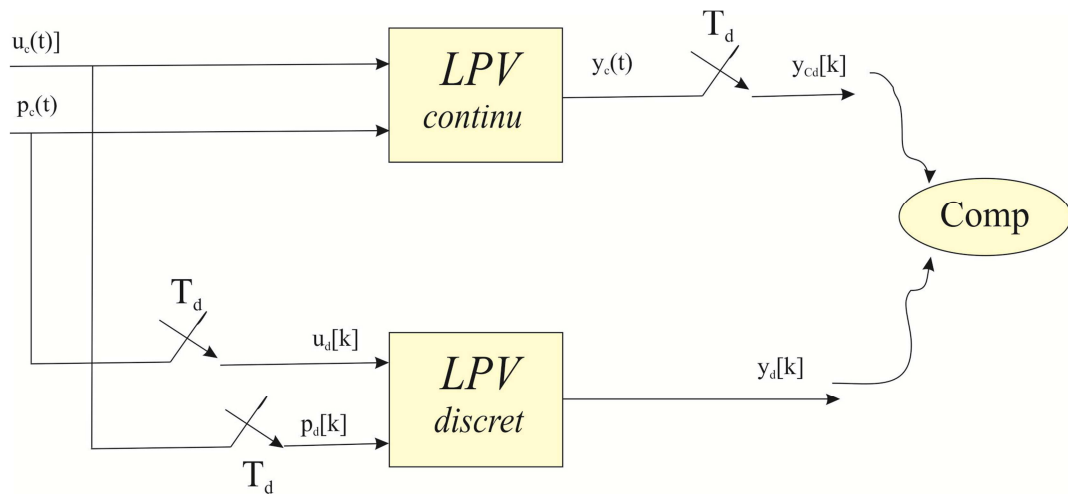


Figure 5-14 : Comparaison du modèle continu avec sa représentation discrète, dans le Cas III de simulation

La discrétisation du modèle, obtenue par l'utilisation de l'approche de Tustin, est donnée par les équations 2.32 :

$$A_d(p_d[k]) = \left(I + \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1}$$

$$B_d(p_d[k]) = T_d \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} B_c(p_c(kT_d))$$

$$C_d(p_d[k]) = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1}$$

$$D_d(p_d(k)) = C_c(p_c(kT_d)) \left(I - \frac{T_d}{2} A_c(p_c(kT_d)) \right)^{-1} \frac{T_d}{2} B_c(p_c(kT_d)) + D_c(p_c(kT_d))$$

La comparaison des sorties des modèles continu et discret est présentée dans la Figure 5-15, pour une période d'échantillonnage $T_d = 0,2$ s. Les erreurs quadratiques moyennes sont présentées dans la Table 5-4 pour les périodes d'échantillonnage $T_d=0,25$ s, $T_d=0,2$ s, $T_d=0,1$ s ; $T_d= 0,01$ s ; $T_d = 0,001$ s.

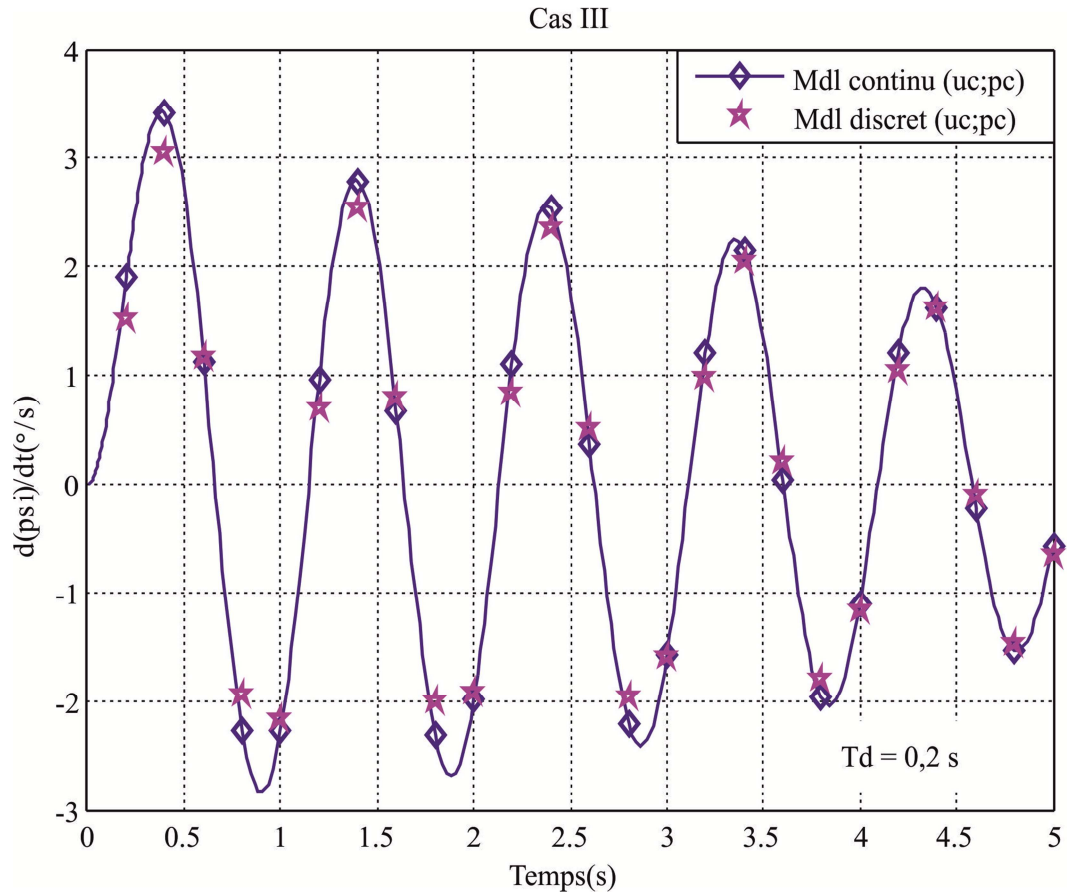


Figure 5-15 : Comparaison entre les sorties des modèles continu et discret, Cas III,
 $T_d = 0,2$ s

T_d (s)	EQM ($^{\circ}/s$) ²
0,25	0,102
0,2	0,0379
0,1	0,0021
0,01	$2,0569 \cdot 10^{-7}$
0,001	$2,0595 \cdot 10^{-11}$

Table 5-4 : EQM pour les sorties des modèles à temps continu et discret dans le contexte du Cas III

On peut constater que, pour les trois situations envisagées, les simulations des modèles discrets offrent des résultats cohérents avec le comportement du système non linéaire, simulé par une méthode à pas variable. Elles montrent l'influence de la période d'échantillonnage sur le modèle discret, obtenu par la méthode de discrétisation fondée sur l'approche de Tustin : plus la période d'échantillonnage est petite, plus la discrétisation est précise.

5.3.4. Comparaison entre les approximations de la discrétisation exacte

Afin de regarder l'effet du choix de méthode de discrétisation sur le comportement de modèle, on propose d'étudier la situation présentée par le schéma de la Figure 5-16. Dans le Cas I de simulation (signal d'entrée bloqué, paramètre variant bloqué) le modèle discret est obtenu par trois approches différentes : méthode exponentielle, approche d'Euler, approche de Tustin.

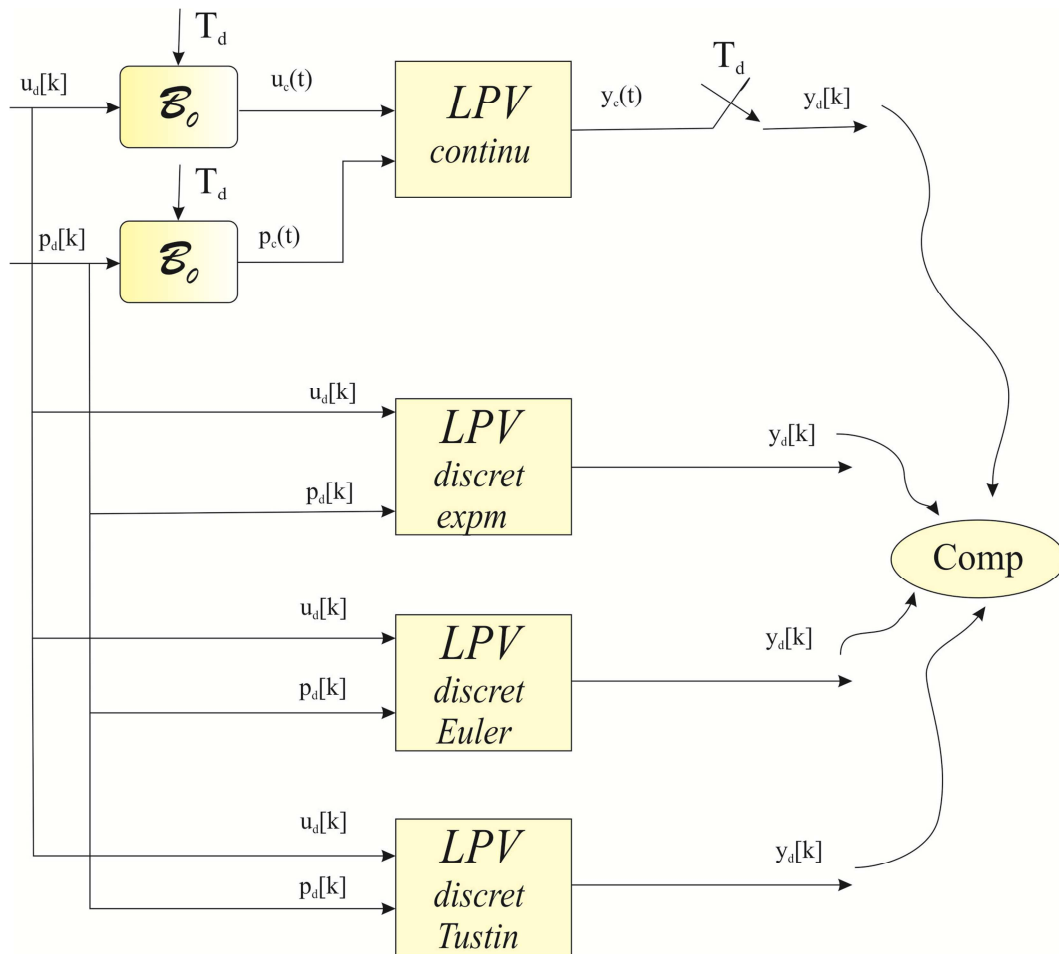


Figure 5-16 : Schéma de comparaison entre les méthodes de discrétisation

La sortie du modèle continu aux instants d'échantillonnage est comparée avec la sortie du modèle discret, obtenu par chacune des méthodes, voir Figure 5-17. Les courbes sont présentées en utilisant une période d'échantillonnage $T_d = 0,2$ s.

La sortie du modèle en temps continu aux instants d'échantillonnage est superposée à la sortie du modèle discrétisé par la méthode exponentielle, représentée en rouge. La sortie donnée par le modèle obtenu par l'approche Tustin (en cyan) suit bien le comportement obtenu avec la méthode exponentielle. Une erreur de suivi plus importante est observée dans le cas où le modèle est discrétisé par l'approche d'Euler (en vert).

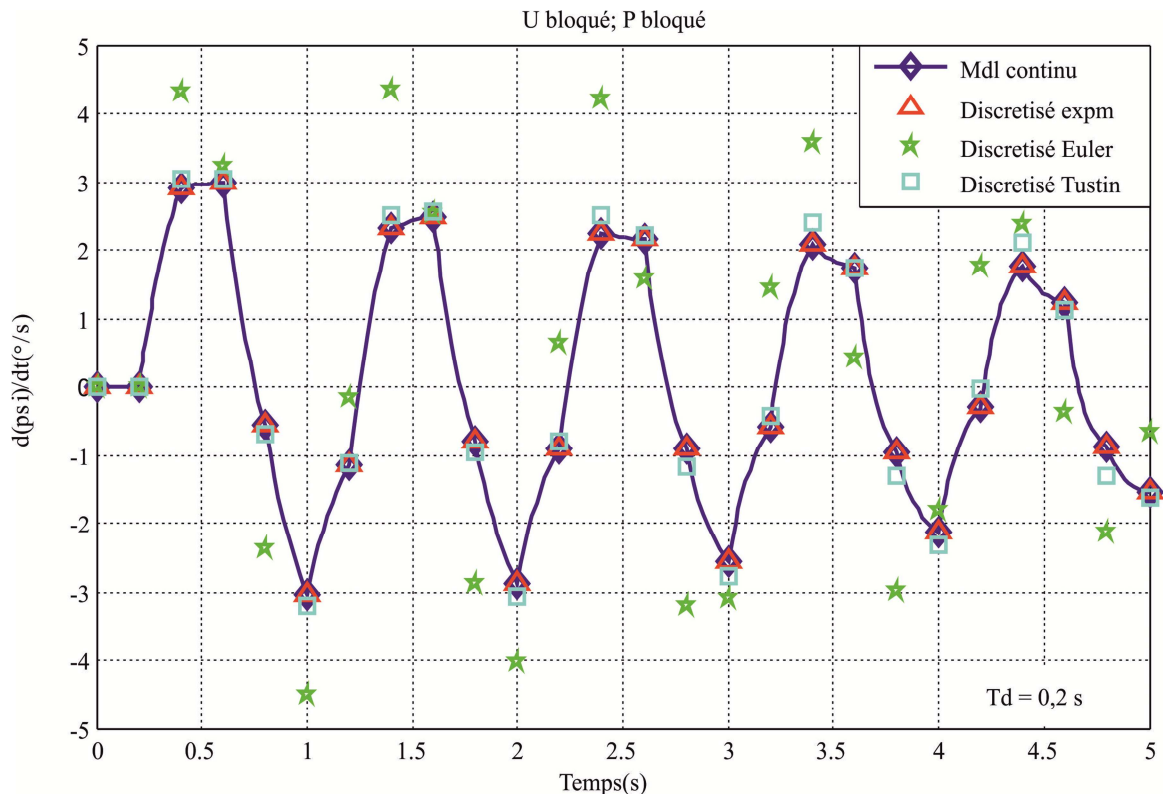


Figure 5-17 : Comparaison entre sortie de modèles discrétisés par différentes méthodes de discrétisation

Pour différentes périodes d'échantillonnage, la Table 5-5 montre les valeurs de l'erreur quadratique moyenne pour les différents cas de discrétisation par la méthode exponentielle (deuxième colonne), méthode approchée d'Euler (troisième colonne), méthode approchée de Tustin (dernière colonne).

T_d	$EQM(Y_d_{expm})$	$EQM(Y_d_{Euler})$	$EQM(Y_d_{Tustin})$
0,25 s	$2,3493 * 10^{-8}$	4,7575	0,107
0,2 s	$2,0438 * 10^{-8}$	2,004	0,0394
0,1 s	$1,1233 * 10^{-8}$	0,2484	0,0022
0,01 s	$4,3752 * 10^{-18}$	0,0015	$2,116 * 10^{-7}$
0,001 s	$3,1395 * 10^{-28}$	$1,4092 * 10^{-5}$	$2,1189 * 10^{-11}$

Table 5-5 : EQM pour les sorties des modèles continu et discret dans le contexte du Cas I pour les différentes méthodes de discrétisation

On peut observer que la méthode exponentielle fournit la discrétisation exacte de modèle continu, les erreurs introduites sont d'ordre de grandeur très faible. La méthode de Tustin est aussi une approche satisfaisante de la méthode complète. En revanche, les erreurs introduites par l'approche d'Euler sont plus importantes, à cause de la précision plus faible dans le formalisme de la méthode. Néanmoins, pour une période d'échantillonnage suffisamment faible ($T_d = 1 * 10^{-3}$ s dans ce cas) cette approche offre aussi des résultats satisfaisants. Au contraire pour des périodes d'échantillonnage supérieures à 0,2 s les erreurs de discrétisation deviennent importantes.

Évidemment, dans le cas des deux méthodes approchées de discrétisation, la précision augmente avec la décroissance de la période d'échantillonnage.

5.3.5. Caractéristiques des modèles discrets

Le modèle bicyclette donné par l'expression 5.1, construit en utilisant les valeurs numériques présentées dans la Table 5-1, est discrétisé en utilisant la méthode de discrétisation complète (exponentielle). Les relations suivantes permettent d'obtenir le modèle LPV discret à partir de la représentation d'état à temps continu :

$$A_d(p_d[k]) = e^{A_c(p_d[k])T_d}$$

$$B_d(p_d[k]) = A_c^{-1}(p_d[k])[e^{A_c(p_d[k])T_d} - I]B_c(p_d[k])$$

$$C_d(p_d[k]) = [0 \quad 1]$$

$$D_d(p_d[k]) = 0.$$

La période d'échantillonnage utilisée est $Td = 0,01$ s. Deux valeurs de vitesse, 110 km/h et 30 km/h, sont choisies pour représenter le modèle en temps discret. Les matrices représentatives des modèles discrets associés aux deux valeurs de vitesse sont présentées dans la Table 5-6 :

$v_1 = 110$ km/h	$v_2 = 30$ km/h
$A = \begin{bmatrix} 0,9623 & -0,009607 \\ 0,001642 & 0,9597 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 0,8687 & -0,008607 \\ 0,001477 & 0,8601 \end{bmatrix}$
$B = \begin{bmatrix} 0,02021 \\ 0,4449 \end{bmatrix}$	$B = \begin{bmatrix} 0,0761 \\ 0,4216 \end{bmatrix}$
$C = [0 \quad 1]$	$C = [0 \quad 1]$
$D = 0$	$D = 0$

Table 5-6 : Modèles discrets associés aux valeurs de vitesse de 110 km/h et 30 km/h

Dans la Figure 5-18 la caractéristique en fréquence du modèle bicyclette discrétisé est présentée pour les deux valeurs de vitesse choisies.

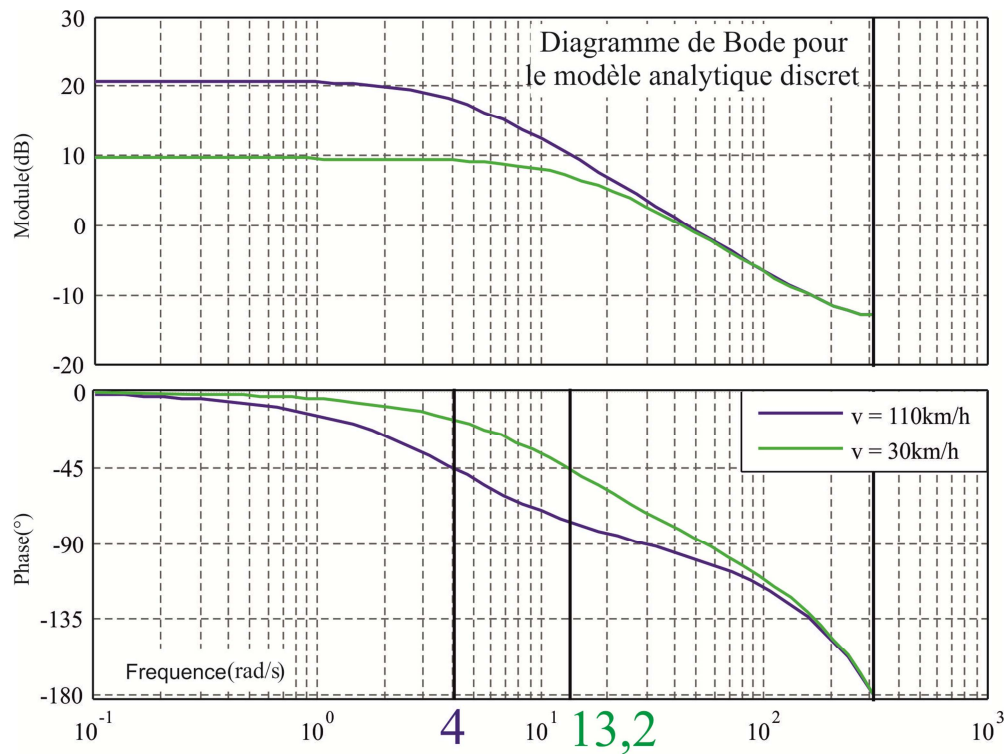


Figure 5-18 : Diagramme de Bode de modèle bicyclette discret

La discrétisation introduit des modifications au niveau de la phase de modèle.

Dans la section suivante le comportement latéral du véhicule est identifié par un modèle de type LPV, en utilisant la méthode des moindres carrés.

5.4. Identification du modèle de comportement latéral de véhicule par la méthode des moindres carrés, étude en simulation

Dans cette section un modèle LPV caractérisant le comportement du véhicule est identifié, en utilisant la méthode de moindres carrés, présentée dans le chapitre III, section 3.1.4.

Classiquement, le modèle analytique bicyclette est exprimé en temps continu dans l'espace d'état. En considérant $p = \frac{1}{v}$ le paramètre variant, la structure de modèle bicyclette peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} a_{11}p & a_{12}p^2 - 1 \\ a_{21} & a_{22}p \end{bmatrix}, & B &= [b_{11}p \quad b_{12}]^T \\ C &= [0 \quad 1], & D &= 0 \end{aligned} \quad 5.4$$

avec :

$$a_{11} = -\frac{c_f + c_r}{m}, \quad a_{12} = \frac{c_r l_r - c_f l_f}{m}, \quad a_{21} = \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J_z}, \quad a_{22} = -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J_z}, \quad b_{11} = \frac{c_f}{m}, \quad b_{12} = \frac{c_f l_f}{J_z}.$$

Sous la forme d'équation aux différences, en temps discret le modèle bicyclette a la structure suivante :

$$\begin{aligned} y[k] &= \frac{1}{a_0(p)} [-a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_0(p)u[k] + \\ &\quad + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2]] \end{aligned} \quad 5.5$$

où les coefficients sont de la forme suivante :

$$\begin{aligned} a_0(p) &= 4 - T_d a_{21} - (2a_{11} + 2a_{22})p + (a_{11}a_{22}T_d - a_{21}a_{12}T_d)p^2 \\ a_1(p) &= -8 - T_d a_{21} + (2a_{11} + 2a_{22})p + (a_{11}a_{22}T_d - a_{21}a_{12}T_d)p^2 \\ a_2(p) &= 4 \\ b_0(p) &= 2T_d b_{12} + (T_d a_{11}b_{12} + T_d^2 a_{21}b_{11})p \\ b_1(p) &= (2T_d^2 a_{21}b_{11} + 2T_d^2 a_{11}b_{12})p \end{aligned}$$

$$b_2(p) = -2T_d b_{12} + (T_d^2 a_{11} b_{12} + T_d^2 a_{21} b_{11})p$$

Le modèle discret fourni par l'équation 5.5 est calculé en utilisant la méthode de discrétisation approchée de Tustin, en utilisant l'hypothèse de signaux d'excitation (signal d'entrée et paramètre variant) échantillonnés.

On observe que ce modèle (5.5) présente une dépendance non linéaire des coefficients par rapport au paramètre variant et le caractère polynomial de la dépendance se perd. La recherche d'un tel modèle, à coefficients non linéaires par rapport à p , n'est donc pas possible par la méthode des moindres carrés. Pour pouvoir utiliser cette méthode, le modèle bicyclette sera approché par une équation récurrente à coefficients ayant une dépendance polynomiale.

En conséquence, la structure du modèle qu'on cherche à identifier est la suivante :

$$y[k] = -a_1(p)y[k-1] - a_2(p)y[k-2] + b_1(p)u[k-1] + b_2(p)u[k-2] \quad 5.6$$

où les coefficients a_1 , a_2 , b_1 , b_2 sont dépendants du paramètre variant sous une forme polynomiale de type :

$$\begin{aligned} a_1(p) &= a_1^1 + a_1^2 p + a_1^3 p^2 \\ a_2(p) &= a_2^1 + a_2^2 p + a_2^3 p^2 \\ b_1(p) &= b_1^1 + b_1^2 p + b_1^3 p^2 \\ b_2(p) &= b_2^1 + b_2^2 p + b_2^3 p^2. \end{aligned} \quad 5.7$$

Le vecteur de paramètres à estimer est formé par les coefficients a_1 , a_2 , b_1 et b_2 de la manière suivante :

$$\hat{\theta} = [a_1^1 \ a_2^1 \ b_1^1 \ b_2^1 \ a_1^2 \ a_2^2 \ b_1^2 \ b_2^2 \ a_1^3 \ a_2^3 \ b_1^3 \ b_2^3]^T \quad 5.8$$

5.4.1. Conditions de simulation

Le modèle bicyclette est simulé sous la forme d'état en temps continu (équation 5.1) en utilisant les valeurs de coefficients donnés dans la Table 5-1. Le signal d'entrée, l'angle de braquage de roues avant, choisi pour exciter le modèle est un signal carré d'amplitude 1 degré. Le paramètre variant, p , est donné par l'inverse de la vitesse de véhicule, $p = \frac{1}{v}$. La vitesse de véhicule est choisie de sorte qu'elle présente une allure croissante de 30 km/h à 110 km/h.

En utilisant ces signaux, le modèle bicyclette est simulé sur un horizon de 5 s, des observations des signaux d'entrée et de sortie sont réalisées avec $T_d = 0,01$ s. Le jeu de données obtenu est présenté dans la Figure 5-19.

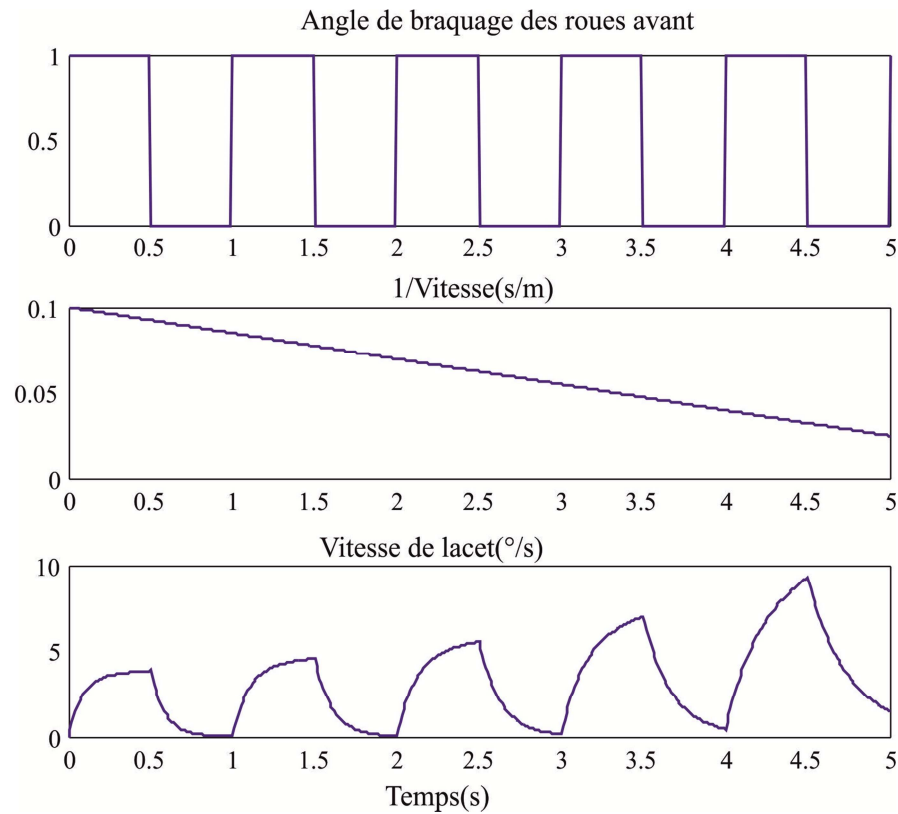


Figure 5-19 : Données d'identification – modèle bicyclette

5.4.2. Résultats d'identification

L'algorithme d'identification conduit au vecteur de coefficients estimés suivant :

$$\hat{\theta} = [-1,99 \quad 0,99 \quad 0,45 \quad -0,45 \quad 2,32 \quad -2,32 \quad -0,28 \quad 0,7716 \quad -0,02 \quad 1,37 \quad 0,11 \quad -0,11]^T$$

et une caractéristique en fréquence présentée dans la Figure 5-20, pour deux valeurs de vitesse 30 km/h et 110 km/h. La comparaison des caractéristiques en fréquence du modèle bicyclette discrétisé et du modèle identifié, présentée aussi dans cette figure montre la pertinence de l'identification.

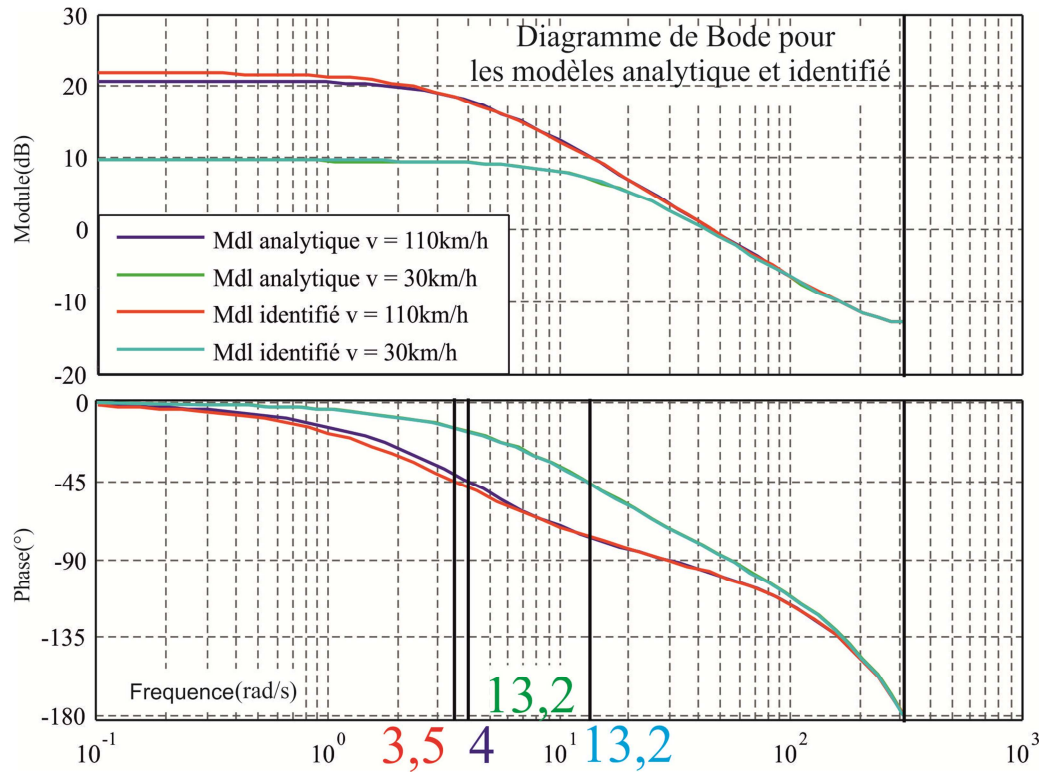


Figure 5-20 : Diagramme de Bode de modèle identifié

L'erreur quadratique moyenne (équation 5.3) entre les vitesses de lacet réelle et prédite est caractérisée par la valeur :

$$EQM = 2,07 * 10^{-6} (^\circ/s)^2$$

Considérons la sortie mesurée perturbée par un bruit blanc, η de puissance $0,01 (^\circ/s)^2$. La puissance de vecteur de sortie a une valeur égale à 15,2 et est calculée en utilisant l'équation 4.4. Le rapport des puissances, SNR , entre le signal de sortie et le bruit η est égal à $1,52 * 10^3$. Il est calculé en utilisant l'expression 4.5.

La sortie bruitée présente la forme montrée dans la Figure 5-21. Le vecteur de paramètres estimés obtenu est le suivant :

$$\hat{\theta}_{br} = [-0,70 \quad -0,31 \quad 1,03 \quad -0,43 \quad 8,29 \quad -5,92 \quad -18,73 \quad 21,35 \quad -60,34 \quad 54,99 \quad 140,90 \quad -165,76]^T$$

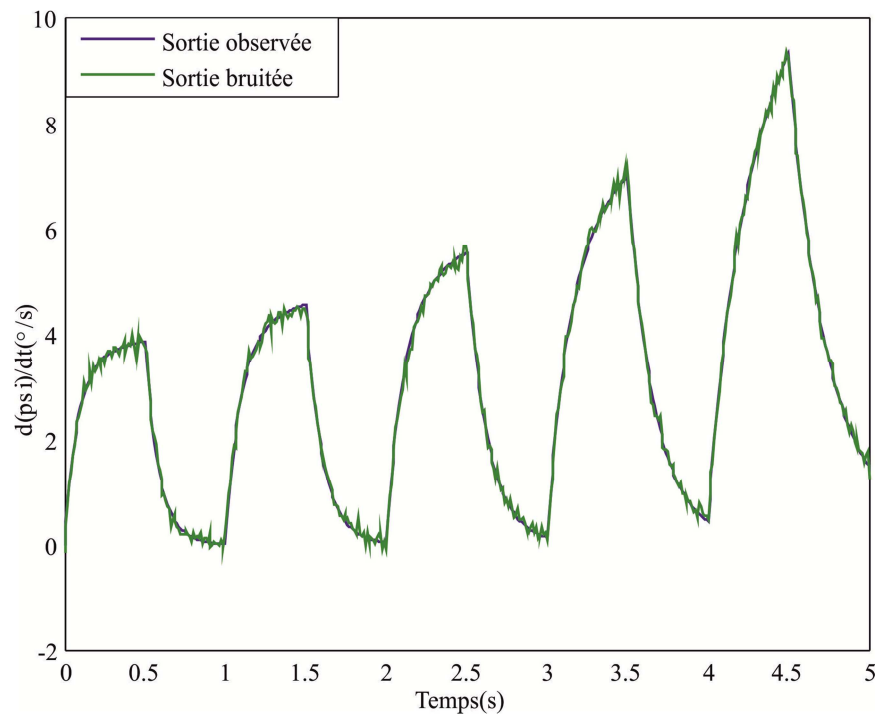


Figure 5-21 : Sortie du modèle bicyclette bruitée avec un bruit blanc de puissance $0,01(^{\circ}/s)^2$

La caractéristique en fréquence du modèle identifié en présence d'un bruit blanc de puissance $0,01 (^{\circ}/s)^2$, est comparée avec les tracés fréquentiels du modèle analytique, voir Figure 5-22.

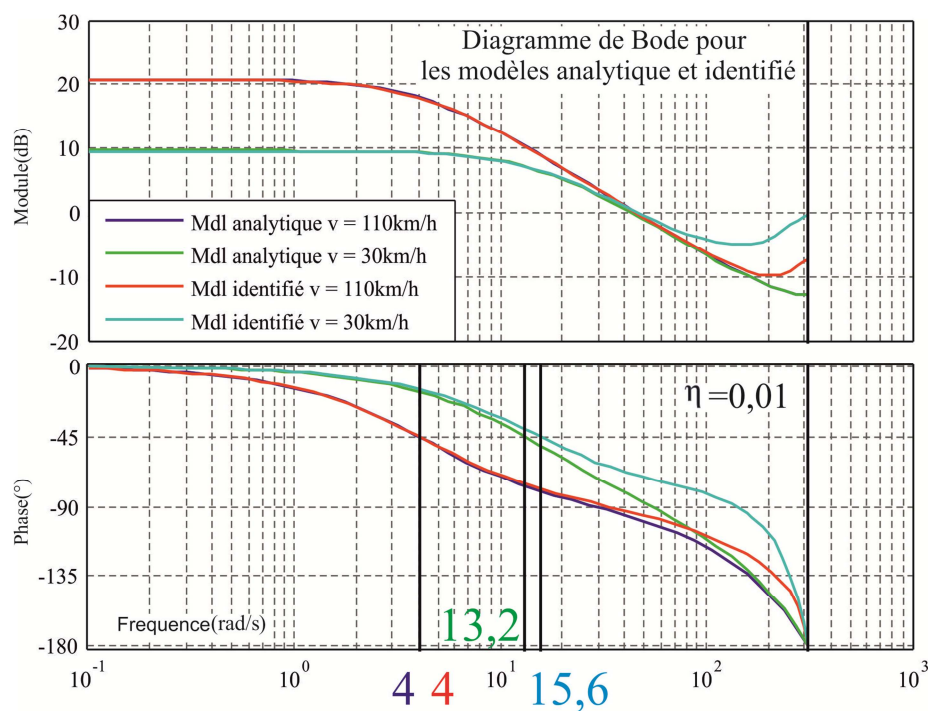


Figure 5-22 : Diagramme de Bode des modèles analytique et identifié en présence d'un bruit blanc de puissance $0,01(^{\circ}/s)^2$

Pour les deux vitesses de 30 km/h et 110 Km/h, les courbes du diagramme de Bode gardent le même gain au niveau du module et environ les mêmes fréquences de brisure (on observe un léger décalage de fréquence de brisure par rapport au cas non bruité, pour $v = 30$ km/h).

Pour un bruit η de plus forte puissance, par exemple $0,1 \text{ (degré/s)}^2$, la sortie du modèle a la forme présentée dans la Figure 5-23.

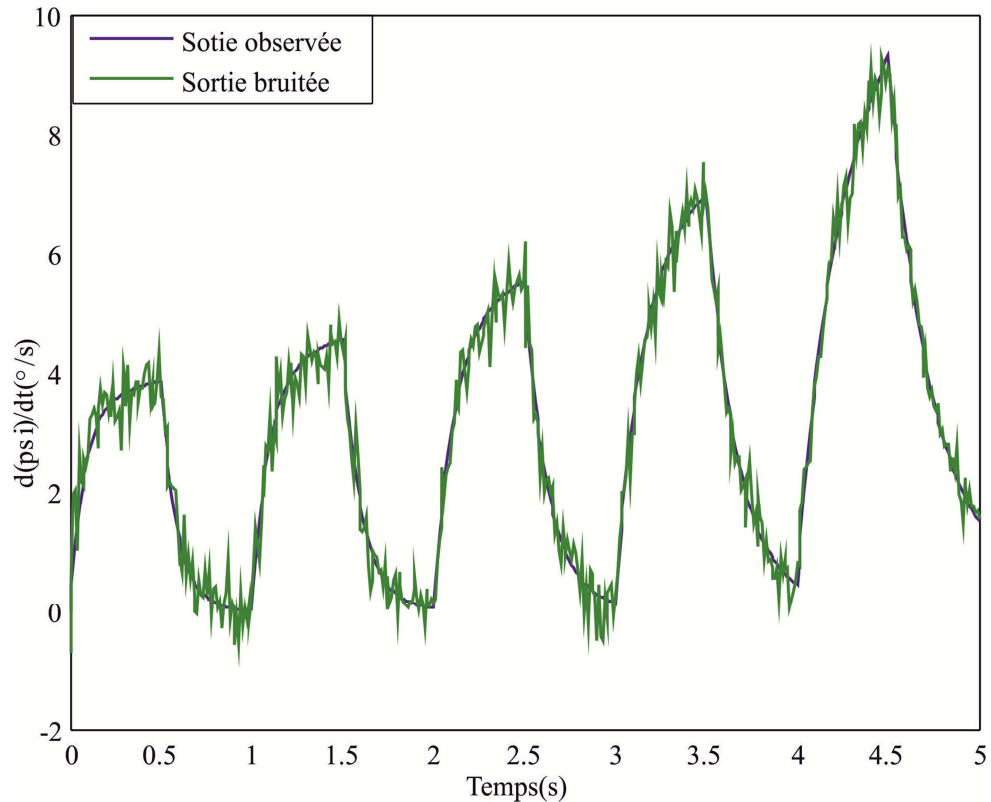


Figure 5-23 : Sortie de modèle bicyclette bruitée avec un bruit blanc de puissance $0,1(\text{°/s})^2$

Le rapport SNR entre le signal de sortie et le bruit η est égal avec $1,52 * 10^2$. La caractéristique en fréquence est présentée dans la Figure 5-24 et le vecteur des paramètres estimés est donné par les valeurs suivantes :

$$\hat{\theta}_{br} = [-0,38 \quad -0,67 \quad 2,12 \quad -1,57 \quad -2,64 \quad 5,43 \quad -57,39 \quad 62,85 \quad 17,84 \quad - \\ -21,61 \quad 438,31 \quad -472,03]^T$$

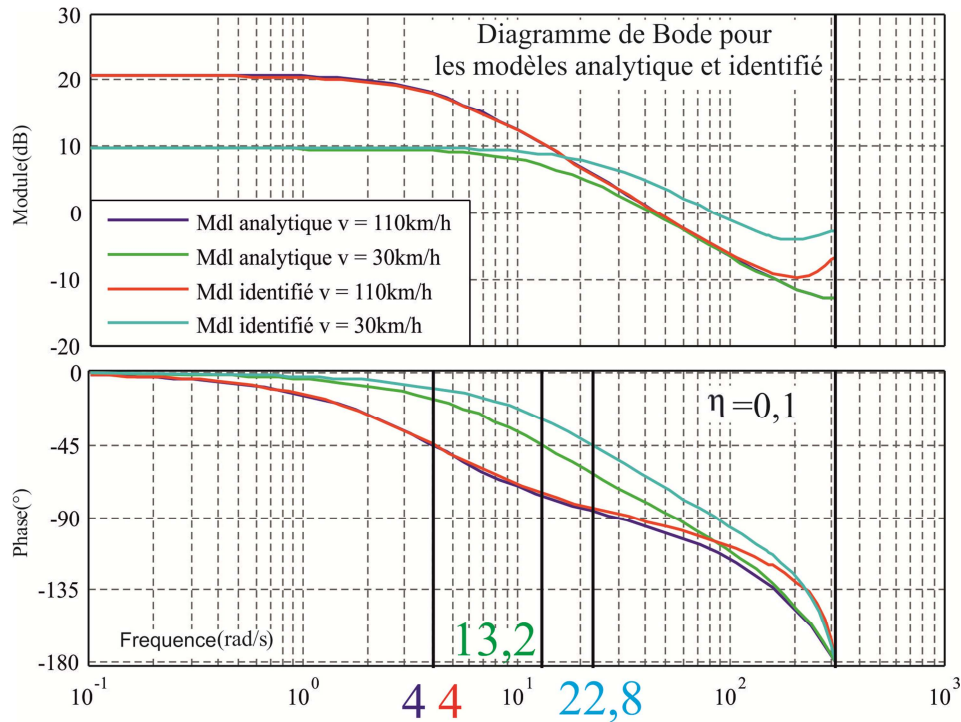


Figure 5-24 : Diagramme de Bode de modèle identifié en présence d'un bruit blanc de puissance $0,1(^{\circ}/s)^2$

Dans le cas des bruits des mesures plus importants, il peut être observé que les performances de l'identification diminuent. La méthode de la variable instrumentale peut être envisagée pour contourner les effets des bruits des mesures sur le modèle identifié.

La section suivante traite de l'identification des structures des modèles LPV, caractérisant le comportement de véhicule par l'application de la méthode à erreur de prédiction.

5.5. Identification du modèle LPV du comportement latéral d'un véhicule par la méthode à erreur de prédiction. Etude à partir de données expérimentales

La méthode à erreur de prédiction est utilisée pour identifier un modèle du comportement latéral d'un véhicule en utilisant des données obtenues expérimentalement sur un véhicule Renault Laguna II. La procédure d'identification est appliquée en utilisant une approche mixte (Figure 5-25), présentée dans le chapitre II. Pour rappel, l'approche mixte consiste en une identification faite en utilisant un seul jeu de données, différents modèles invariants sont calculés pour différents points de fonctionnement choisis, le modèle LPV étant obtenu par l'interpolation des modèles locaux.

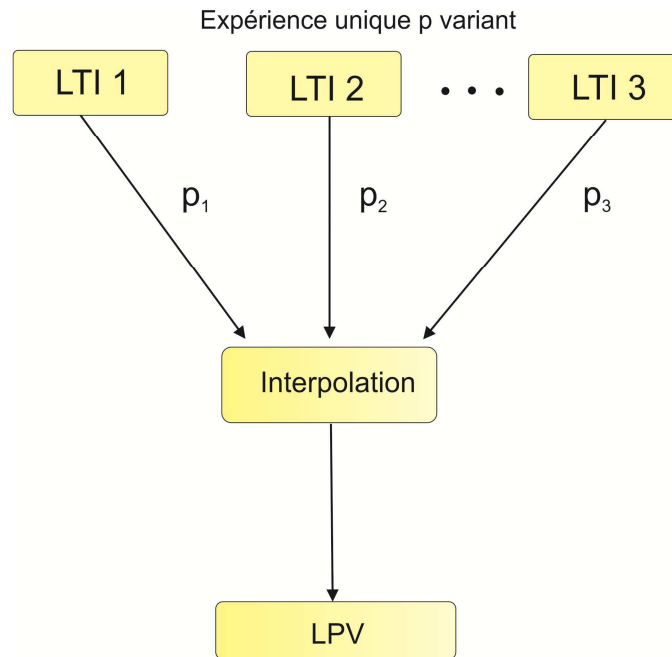


Figure 5-25 : Approche d'identification mixte

Pour représenter le modèle du véhicule, deux types de structures de modèles LPV polytopiques sont envisagés, développés, et présentés dans la section suivante.

5.5.1. Structures du modèle de comportement latéral du véhicule

L'approche est présentée dans le contexte de caractérisation d'un modèle de comportement latéral d'un véhicule (modèle du second ordre dans ce cas). Si des modèles analytiques sont disponibles, les structures choisies pour identifier le système peuvent être directement issues de ces modèles. Dans le cas où des modèles analytiques ne sont pas disponibles, ni leur structure, il y a la possibilité de construire des structures de modèles entièrement paramétrées.

La section suivante rappelle le modèle bicyclette « classique ».

5.5.1.1. Modèle bicyclette analytique

On rappelle que pour des angles de déviation et de dérive faibles, en négligeant le mouvement de roulis, le mouvement de lacet d'un véhicule peut être décrit par le modèle bicyclette. Comme déjà mentionné, le modèle bicyclette, présenté dans le schéma de principe de la Figure 5-1, est donné par les équations d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{m\mathbf{v}} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{m\mathbf{v}^2} - 1 \\ \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J_z} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J_z\mathbf{v}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{c_f}{m\mathbf{v}} \\ \frac{c_f l_f}{J_z} \end{bmatrix} \delta$$

$$\psi = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$
5.9

En posant

$$x(t) = \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, y(t) = \psi, u(t) = \delta$$
5.10

un modèle LPV à temps continu peut être décrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_a(p, \theta^{(a)})x(t) + B_a(p, \theta^{(a)})u(t) \\ y(t) &= C_a x(t) + D_a u(t) \end{aligned}$$
5.11

avec $p = \frac{1}{v}$ le paramètre variant. La sortie du modèle est la vitesse de lacet de véhicule, l'entrée est l'angle de braquage de roues avant et le vecteur de paramètres $\theta^{(a)}$ est défini comme :

$$\begin{aligned} \theta^{(a)} &= \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{m} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{J_z} & \frac{c_r l_r - c_f l_f}{m} & -\frac{c_r l_r^2 + c_f l_f^2}{J_z} & \frac{c_f}{m} & \frac{c_f l_f}{J_z} \end{bmatrix} = \\ &= [\theta_1^{(a)} \quad \theta_2^{(a)} \quad \theta_3^{(a)} \quad \theta_4^{(a)} \quad \theta_5^{(a)} \quad \theta_6^{(a)}] \end{aligned}$$
5.12

Les matrices représentatives du modèle ont ainsi la forme suivante :

$$\begin{aligned} A_a(p, \theta^{(a)}) &= \begin{bmatrix} \theta_1^{(a)} p & \theta_3^{(a)} p^2 - 1 \\ \theta_2^{(a)} & \theta_4^{(a)} p \end{bmatrix}, \\ B_a(p, \theta^{(a)}) &= \begin{bmatrix} \theta_5^{(a)} p \\ \theta_6^{(a)} \end{bmatrix}, C_a = [0 \quad 1], D_a = 0. \end{aligned}$$
5.13

A partir de ce modèle analytique une structure de modèle LPV est réalisée.

5.5.1.2. Structure fondée sur le modèle bicyclette

Rappelons que ce modèle a la structure générale suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A_c(p, \theta)x(t) + B_c(p, \theta)u(t) + K_c(p, \theta)e(t) \\ y(t) = C_c(p, \theta)x(t) + D_c(p, \theta)u(t) + e(t) \end{cases}$$

L'approche consiste à utiliser des informations issues d'une modélisation analytique du système pour imposer à la partie déterministe de chaque modèle local LTI de correspondre à une certaine dépendance vis à vis du paramètre variant. En utilisant l'interpolation linéaire, les matrices du modèle LPV sont construites comme suit :

$$\begin{aligned} A_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_a(p_i, \theta^{(a)}) \\ B_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_a(p_i, \theta^{(a)}) \\ C_c(p, \theta) &= C_a \\ D_c(p, \theta) &= D_a \end{aligned} \tag{5.14}$$

D'autre part chaque modèle local LTI est supposé entaché d'une partie perturbation modélisée sous une forme entièrement paramétrée :

$$K_c(p, \theta) = \sum_{i=1}^r w_i(p) K_i \tag{5.15}$$

Ainsi, chaque modèle local est fonction du paramètre :

$$\xi_i = [\theta^{(a)} \quad \text{vec}(K_i)^T]^T, \tag{5.16}$$

la notation $\text{vec}()$ étant l'opérateur qui transforme une matrice en une seule colonne, suite à la concaténation des colonnes de la matrice. La structure choisie du système LPV est caractérisée par le paramètre θ :

$$\theta = [\theta^{(a)} \quad \text{vec}(K_1)^T \quad \cdots \quad \text{vec}(K_r)^T] \tag{5.17}$$

Le nombre de paramètres à identifier est alors égal à $6 + 2r$.

5.5.1.3. Structure entièrement paramétrée

Dans ce cas, aucune connaissance sur la dépendance des matrices du modèle par rapport au paramètre variant n'est supposée; chaque modèle local LTI est choisi sous une forme entièrement paramétrée. Les fonctions de pondération sont celles données auparavant (Figure 3-2). Les matrices représentatives du modèle LPV sont construites comme suit:

$$\begin{aligned}
A_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_i(\xi_i) \\
B_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_i(\xi_i) \\
C_c(p, \theta) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_i(\xi_i) \\
D &= 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

où

$$\begin{aligned}
A_i &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(i)} & a_{12}^{(i)} \\ a_{21}^{(i)} & a_{22}^{(i)} \end{bmatrix}, B_i = [b_1^{(i)} \quad b_2^{(i)}]^T, \\
C_i &= [c_1^{(i)} \quad c_2^{(i)}], D_i = 0, K_i = [k_1^{(i)} \quad k_2^{(i)}]^T
\end{aligned} \tag{5.19}$$

sont des matrices entièrement paramétrées.

Le vecteur de paramètres locaux est formé comme suit :

$$\xi_i = [\text{vec}(A_i)^T \quad \text{vec}(B_i)^T \quad \text{vec}(C_i)^T \quad \text{vec}(K_i)^T] \tag{5.20}$$

et le vecteur caractérisant le modèle LPV est donné par :

$$\theta = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \cdots \quad \xi_r]. \tag{5.21}$$

Le nombre de paramètres à identifier est alors égal à $10r$.

Une remarque valide dans les cas des deux structures, quant au fait qu'entre les valeurs p_i et p_{i+1} du paramètre variant, la dépendance en p sera linéaire et donc l'évolution quadratique de l'élément $a_{12}^{(i)}$ ne sera qu'approchée. Par conséquent il existe la nécessité d'avoir des valeurs de p_i pas trop distantes.

Comme suggéré dans (McKelvey, 1995) pour les modèles LTI entièrement paramétrés, il pourrait être intéressant de déterminer des réalisations équilibrées présentant une faible sensibilité aux perturbations des paramètres. Une réalisation équilibrée est déterminée par l'équilibre des grammiens d'observabilité et de commandabilité de la représentation d'état obtenue.

Ainsi, pour la recherche de la structure polytopique entièrement paramétrée, la méthode à erreur de prédiction a été légèrement modifiée par l'introduction d'un terme de régularisation dans la fonction critère et l'algorithme suivant a été utilisé :

1. Choix d'un vecteur paramètre initial θ_0 .
2. Conversion du modèle en une réalisation équilibrée, soit θ_b^0 le paramètre correspondant

3. Soit $i = 1$
4. Résolution du problème de minimisation en utilisant la méthode de Levenberg-Marquardt

$$\hat{\theta}_{N,\beta}^{(i)} = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} J_{N,\beta}(\theta) \quad 5.22$$

$$J_{N,\beta}(\theta) = J_N(\theta, Z^N) + \frac{\beta}{2} \left\| \theta - \theta_b^{(i-1)} \right\|^2 \quad 5.23$$

5. Conversion du modèle associé à l'estimation obtenue en une réalisation équilibrée $\hat{\theta}_b^i$.

Si

$$J_{N,\beta}(\hat{\theta}_b^{(i-1)}) - J_{N,\beta}(\hat{\theta}_b^{(i)}) < \epsilon \rightarrow \text{fin} \quad 5.24$$

où ϵ est une constante donnée a priori.

Sinon $i = i + 1$ et aller à 4.

Dans la suite les deux types de structures présentées sont utilisés pour identifier des modèles correspondant au comportement latéral du véhicule.

5.5.2. Application de la méthode d'optimisation

La méthode de Levenberg-Marquardt a été implantée en utilisant les fonctionnalités de la fonction « lsqnonlin » de la boîte à outils d'optimisation de Matlab. La valeur initiale du paramètre d'amortissement est la valeur donnée par défaut, $\lambda = 0,01$.

Dans le formalisme de la méthode à erreur de prédiction le calcul de gradient est nécessaire. Dans le cas de cette application l'expression du gradient est calculée analytiquement pour diminuer le temps de calcul.

Dans un premier temps, comme expliqué dans la Section 3.2.2.3 le gradient a été calculé par des méthodes numériques données par les expressions 3.109. En raison du nombre d'opérations à réaliser en ligne, le temps de simulation peut en conséquence devenir très important. Pour diminuer ce temps de simulation le calcul analytique des gradients peut être préférable. Ainsi, pour les deux structures de modèle envisagées, les matrices F_d , G_d , C_d et H_d , représentant la structure de l'estimateur (voir section 3.2.2.2 de chapitre III) sont construites. Pour chaque dérivée

$$\frac{\partial F_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial G_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial C_d(k, \theta)}{\partial \theta_l}, \frac{\partial H_d(k, \theta)}{\partial \theta_l} \quad 5.25$$

un calcul analytique a été effectué. Ce calcul conduit à des expressions laissant apparaître des matrices avec peu d'éléments non nuls, fonctions de la période d'échantillonnage T_d et des fonctions d'interpolation $w_i(p^{(k)})$, $w_{i+1}(p^{(k)})$ dans le cas de la structure entièrement paramétrée. Ces expressions sont détaillées dans la section 5.5.4.2. Dans le cas de la structure à « modèle bicyclette », le calcul analytique a conduit à des matrices avec des éléments fonctions de T_d , $w_i(p^{(k)})$, $w_{i+1}(p^{(k)})$, $p^{(k)}$, expressions détaillées dans la section 5.5.4.1 pour les choix spécifiques réalisés dans l'étude.

5.5.3. Données expérimentales pour l'estimation des paramètres

Le choix des expériences a été fait de manière à ce que la réalisation pratique puisse être mise en place. Par souci de sécurité, le pilote d'essais a accepté, en laissant la vitesse du véhicule décroître de 110 km/h à 30 km/h, de décrire des mouvements périodiques au volant conduisant à des angles de braquage, dont les évolutions sont données sur la Figure 5-26. Cette figure montre également les évolutions des différentes grandeurs :

- La première courbe montre l'évolution de l'angle de braquage des roues avant correspondant à l'entrée de commande du modèle.
- La deuxième montre le paramètre variant, soit la vitesse du véhicule, qui diminue de 110 km/h à 30 km/h. L'évolution de la vitesse a été choisie de telle sorte que la manœuvre puisse être effectuée.
- La troisième courbe représentée est la vitesse de lacet correspondant à la sortie mesurée du système.

Sur cette expérience la période d'échantillonnage est $T_d = 1$ ms pour un horizon temporel de 50 s. La composante continue de données est enlevée.

Au regard des valeurs faibles du paramètre variant, une normalisation est faite en multipliant le vecteur $p = \frac{1}{v}$ avec la valeur moyenne de la variation de la vitesse utilisée lors de l'expérience d'enregistrement des données, soit 20 m/sec.

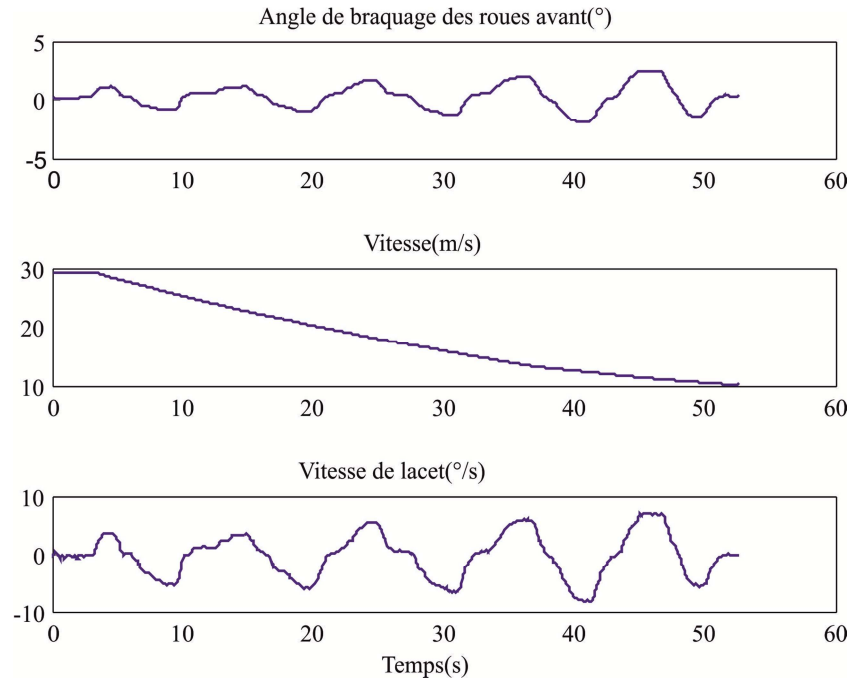


Figure 5-26 : Données expérimentales

Au regard de la dynamique du véhicule on peut supposer que la vitesse reste constante pendant une période d'échantillonnage, ce qui valide l'hypothèse effectuée pour la phase de discrétisation du modèle. Dans le formalisme de la méthode à erreur de prédiction une discrétisation de prédictor est nécessaire. La méthode de discrétisation d'Euler est utilisée, la période d'échantillonnage a été fixée à $T_d = 1$ ms. Ces choix permettent d'assurer une performance de discrétisation satisfaisante (section 5.3.4).

5.5.4. Identification des structures polytopiques

Les deux structures proposées sont considérées en utilisant les points de fonctionnement correspondant à 30 km/h, 50 km/h, 110 km/h. L'optimisation à l'aide de la méthode de Levenberg-Marquardt nécessite une initialisation du vecteur de paramètres à identifier pour les deux structures. Ce vecteur initial a été créé à partir des valeurs nominales des coefficients données par le constructeur du véhicule :

$$c_r = 83130 \text{ N/rad}$$

$$c_f = 122185 \text{ N/rad}$$

$$l_r = 1,645 \text{ m}$$

$$l_f = 1,115 \text{ m}$$

$$m = 1750 \text{ kg}$$

$$J_z = 3000 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

La vitesse de normalisation est 20 m/s, soit 72 km/h. Les trois points de fonctionnement sont caractérisés par les valeurs du paramètre variant :

$$p_1 = 72/30 \quad p_2 = 72/50 \quad p_3 = 72/110$$

5.5.4.1. Identification d'une structure fondée sur le modèle bicyclette

Pour les trois points de fonctionnement choisis, la structure du modèle bicyclette est représentée par un modèle polytopique ayant la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(p) &= w_1(p)A_1 + w_2(p)A_2 + w_3(p)A_3 \\ B(p) &= w_1(p)B_1 + w_2(p)B_2 + w_3(p)B_3 \\ K(p) &= w_1(p)K_1 + w_2(p)K_2 + w_3(p)K_3 \\ C &= [0 \quad 1] \\ D &= 0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

où les matrices se définissent comme suit :

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} \theta_1 p_1 & \theta_3 p_1^2 - 1 \\ \theta_2 & \theta_4 p_1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \theta_1 p_2 & \theta_3 p_2^2 - 1 \\ \theta_2 & \theta_4 p_2 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} \theta_1 p_3 & \theta_3 p_3^2 - 1 \\ \theta_2 & \theta_4 p_3 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \theta_5 p_1 \\ \theta_6 \end{bmatrix}, \\ B_2 &= \begin{bmatrix} \theta_5 p_2 \\ \theta_6 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} \theta_5 p_3 \\ \theta_7 \end{bmatrix}, \\ K_1 &= \begin{bmatrix} \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} \theta_{11} \\ \theta_{12} \end{bmatrix}, \\ C &= [0 \quad 1], D = 0, \end{aligned} \tag{5.27}$$

et les fonctions d'interpolation décrites sur la Figure 3-2, sont construites en utilisant les relations :

$$\begin{aligned} w_1(p) &= \frac{p_2 - p}{p_2 - p_1} \\ w_2(p) &= \frac{p - p_1}{p_2 - p_1} \text{ si } (p \geq p_1) \text{ et } (p < p_2) \\ w_2(p) &= \frac{p_3 - p}{p_3 - p_2} \text{ si } (p \geq p_2) \text{ et } (p < p_3) \\ w_3(p) &= \frac{p - p_2}{p_3 - p_2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Le nombre des paramètres à identifier est 12.

En utilisant la notation $w_i = w_i(p)$, les expressions analytiques du gradient peuvent être explicitées par les relations suivantes :

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_1} = T_d \begin{bmatrix} w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_2} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_3} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_1 p_1^2 + w_2 p_2^2 + w_3 p_3^2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_4} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_5} = \frac{\partial F_d}{\partial \theta_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_7} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_8} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -w_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_9} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{10}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -w_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{11}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{12}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -w_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_1} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_2} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_3} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_5} = T_d \begin{bmatrix} w_1 p_1 + w_2 p_2 + w_3 p_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_6} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 + w_2 + w_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_7} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_8} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_9} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{10}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_{11}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{12}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix}$$

Les dérivées de C_d et H_d sont nulles, les matrices C et D étant constantes.

5.5.4.2. Identification d'une structure entièrement paramétrée

En traitant la structure polytopique entièrement paramétrée, le problème consiste à déterminer trois vecteurs de paramètres ξ_i pour les modèles LTI locaux entièrement paramétrés, correspondant aux points de fonctionnement choisis.

Il est supposé que la dépendance de la structure du modèle selon le paramètre variant est inconnue. Cette structure est plus générale en comparaison avec la structure obtenue à partir du modèle bicyclette. La matrice C est considérée aussi entièrement paramétrée. Les fonctions d'interpolation sont celles présentées dans la Figure 3-2. Pour les trois points de fonctionnement choisis (30 km/h, 50 km/h, 110 km/h) les matrices LPV sont de type 5.18 avec les matrices paramétrées comme suit :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} \theta_1 & \theta_3 \\ \theta_2 & \theta_4 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{13} \\ \theta_{12} & \theta_{14} \end{bmatrix}, \\
 A_3 &= \begin{bmatrix} \theta_{21} & \theta_{23} \\ \theta_{22} & \theta_{24} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} \theta_5 \\ \theta_6 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} \theta_{15} \\ \theta_{16} \end{bmatrix}, \\
 B_3 &= \begin{bmatrix} \theta_{25} \\ \theta_{26} \end{bmatrix}, K_1 = \begin{bmatrix} \theta_7 \\ \theta_8 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} \theta_{17} \\ \theta_{18} \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} \theta_{27} \\ \theta_{28} \end{bmatrix} \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} \theta_9 \\ \theta_{10} \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} \theta_{19} \\ \theta_{20} \end{bmatrix}, C_3 = \begin{bmatrix} \theta_{29} \\ \theta_{30} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Le nombre de paramètres à identifier est de 30.

Sous l'hypothèse $w_i = w_i(p)$, les expressions analytiques du gradient peuvent être explicitées selon les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F_d}{\partial \theta_1} &= T_d \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_2} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_3} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_4} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix} \\
 \frac{\partial F_d}{\partial \theta_5} &= \frac{\partial F_d}{\partial \theta_6} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_7} = T_d \begin{bmatrix} -w_1^2 \theta_9 - w_1 w_2 \theta_{19} - w_1 w_3 \theta_{29} & -w_1^2 \theta_{10} - w_1 w_2 \theta_{20} - w_1 w_3 \theta_{30} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_8} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_1^2 \theta_9 - w_1 w_2 \theta_{19} - w_1 w_3 \theta_{29} & -w_1^2 \theta_{10} - w_1 w_2 \theta_{20} - w_1 w_3 \theta_{30} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_9} = T_d \begin{bmatrix} -w_1^2 \theta_7 - w_1 w_2 \theta_{17} - w_1 w_3 \theta_{27} & 0 \\ -w_1^2 \theta_8 - w_1 w_2 \theta_{18} - w_1 w_3 \theta_{28} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{10}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_1^2 \theta_7 - w_1 w_2 \theta_{17} - w_1 w_3 \theta_{27} \\ 0 & -w_1^2 \theta_8 - w_1 w_2 \theta_{18} - w_1 w_3 \theta_{28} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{11}} = T_d \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{12}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{13}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{14}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{15}} = \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{16}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{17}} = T_d \begin{bmatrix} -w_1 w_2 \theta_9 - w_2^2 \theta_{19} - w_2 w_3 \theta_{29} & -w_1 w_2 \theta_{10} - w_2^2 \theta_{20} - w_2 w_3 \theta_{30} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{18}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_1 w_2 \theta_9 - w_2^2 \theta_{19} - w_2 w_3 \theta_{29} & -w_1 w_2 \theta_{10} - w_2^2 \theta_{20} - w_2 w_3 \theta_{30} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{19}} = T_d \begin{bmatrix} -w_1 w_2 \theta_7 - w_2^2 \theta_{17} - w_2 w_3 \theta_{27} & 0 \\ -w_1 w_2 \theta_8 - w_2^2 \theta_{18} - w_2 w_3 \theta_{28} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{20}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_1 w_2 \theta_7 - w_2^2 \theta_{17} - w_2 w_3 \theta_{27} \\ 0 & -w_1 w_2 \theta_8 - w_2^2 \theta_{18} - w_2 w_3 \theta_{28} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{21}} = T_d \begin{bmatrix} w_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{22}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{23}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{24}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{25}} = \frac{\partial F_d}{\partial \theta_{26}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{27}} = T_d \begin{bmatrix} -w_1 w_3 \theta_9 - w_2 w_3 \theta_{19} - w_3^2 \theta_{29} & -w_1 w_3 \theta_{10} - w_2 w_3 \theta_{20} - w_3^2 \theta_{30} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{28}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -w_1 w_3 \theta_9 - w_2 w_3 \theta_{19} - w_3^2 \theta_{29} & -w_1 w_3 \theta_{10} - w_2 w_3 \theta_{20} - w_3^2 \theta_{30} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{29}} = T_d \begin{bmatrix} -w_1 w_3 \theta_7 - w_2 w_3 \theta_{17} - w_3^2 \theta_{27} & 0 \\ -w_1 w_3 \theta_8 - w_2 w_3 \theta_{18} - w_3^2 \theta_{28} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial F_d}{\partial \theta_{30}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & -w_1 w_3 \theta_7 - w_2 w_3 \theta_{17} - w_3^2 \theta_{27} \\ 0 & -w_1 w_3 \theta_8 - w_2 w_3 \theta_{18} - w_3^2 \theta_{28} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_1} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_2} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_3} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_5} = T_d \begin{bmatrix} w_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_6} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_7} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_8} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_9} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{10}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{11}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{12}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{13}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{14}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G_d}{\partial \theta_{15}} = T_d \begin{bmatrix} w_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{16}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{17}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{18}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_d}{\partial \theta_{19}} &= \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{20}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{21}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{22}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{23}} = \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{24}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial G_d}{\partial \theta_{25}} &= T_d \begin{bmatrix} w_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{26}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ w_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{27}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & w_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{28}} = T_d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & w_3 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial G_d}{\partial \theta_{29}} &= \frac{\partial G_d}{\partial \theta_{30}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_1} &= \frac{\partial C_d}{\partial \theta_2} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_3} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_4} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_5} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_6} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_7} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_9} &= \begin{bmatrix} w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{10}} = \begin{bmatrix} 0 & w_1 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_{11}} &= \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{12}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{13}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{14}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{15}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{16}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{17}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{18}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_{19}} &= \begin{bmatrix} w_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{20}} = \begin{bmatrix} 0 & w_2 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_{21}} &= \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{22}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{23}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{24}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{25}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{26}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{27}} = \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{28}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\frac{\partial C_d}{\partial \theta_{29}} &= \begin{bmatrix} w_3 & 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial C_d}{\partial \theta_{30}} = \begin{bmatrix} 0 & w_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Les dérivées associées à la matrice H_d sont nulles, cette matrice ne dépendant pas du paramètre variant.

5.5.5. Analyse de résultats d'identification

L'analyse est faite en considérant les résultats directs d'identification, la comparaison porte sur les résultats temporels exploitant les sorties prédites et aussi en considérant les résultats de simulation de modèles obtenus.

La sortie prédite (Figure 5-27) est obtenue à partir des mesures d'entrée, de sortie et des connaissances du paramètre variant, observés sur le système. La notation P se réfère au prédictor. La sortie prédite est notée $\hat{y}$ et représente la sortie du prédictor.

La sortie simulée (Figure 5-28) du modèle est obtenue, en utilisant seulement les données d'entrée et le paramètre variant, observés sur le système. La notation $\hat{G}$ représente le modèle identifié. La sortie y_{sim} représente la sortie simulée du modèle identifié.

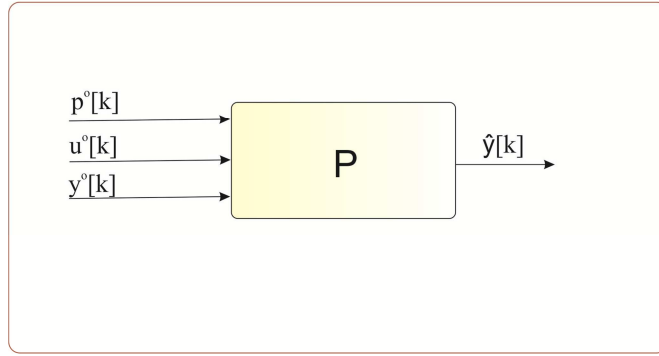


Figure 5-27 : Constructions des données prédites

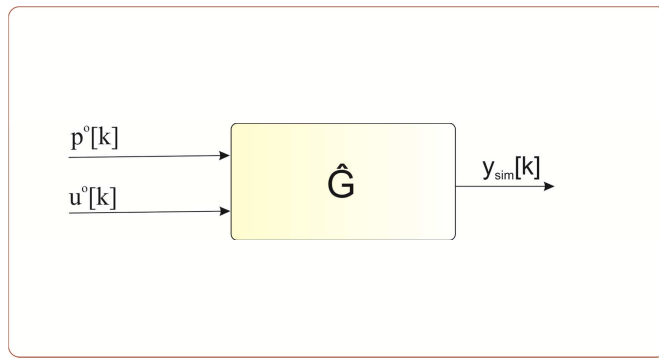


Figure 5-28 : Construction des données simulées

Les valeurs obtenues pour les matrices LTI identifiées, en utilisant une valeur normalisée pour le paramètre variant, pour la structure entièrement paramétrée sont les suivantes :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10,25 & -18,50 \\ -10,72 & -132,17 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -9,49 & -3,97 \\ -3,84 & -273,77 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -13,58 & -6,25 \\ -2,01 & -184,5 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 6,036 \\ -0,169 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 5,669 \\ -2,356 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 5,674 \\ -2,264 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = [7,672 \quad 17,095] \quad C_2 = [7,204 \quad 17,374] \quad C_3 = [7,661 \quad 14,877]$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 2,852 \\ 10,706 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2,363 \\ 19,278 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 2,243 \\ 17,598 \end{bmatrix}$$

Les valeurs obtenues pour les matrices LTI identifiées, en utilisant une valeur normalisée pour le paramètre variant, pour la structure modèle bicyclette sont présentées ci-dessous :

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1,078 & -1,247 \\ 8,969 & -7,102 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2,157 & -1,986 \\ 8,969 & -14,205 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3,235 & -3,219 \\ 8,969 & -21,307 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 6,169 \\ 39,959 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 12,338 \\ 39,959 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 18,507 \\ 39,959 \end{bmatrix}$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 409,035 \\ 982,37 \end{bmatrix} \quad K_2 = \begin{bmatrix} 804,563 \\ 975,834 \end{bmatrix} \quad K_3 = \begin{bmatrix} 386,531 \\ 975,617 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = [0 \ 1]; \quad D_1 = D_2 = D_3 = 0$$

Ensuite les résultats de prédiction et de simulation sont présentés. Les sorties prédites ($\hat{y}$) et simulées (y_{sim}) des deux structures de modèles identifiés sont comparées avec la sortie observée du système.

Dans la Figure 5-29 les résultats d'identification, représentant les sorties prédites, sont montrées. Les sorties des deux structures des modèles identifiés se confondent avec la sortie observée du système. Les notations sfp (structure « fully parameter »), smb (structure « modèle bicyclette ») correspondent respectivement à la structure entièrement paramétrée et à la structure « modèle bicyclette ».

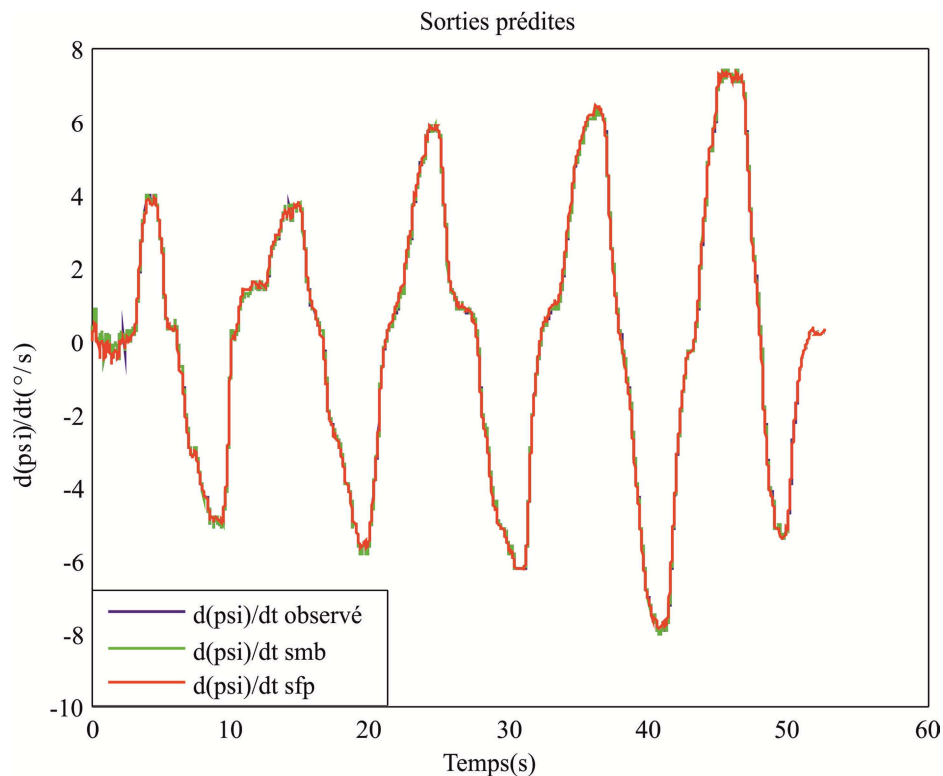


Figure 5-29 : Comparaison des sorties prédites

Dans la Figure 5-30 les sorties simulées sont aussi analysées et comparées avec la sortie observée du système. En bleu est représentée la sortie observée du système, et en rouge et vert les sorties simulées des structures entièrement paramétrées, respectivement structure bicyclette. Les deux structures reproduisent les évolutions des signaux observés, avec un décalage léger dans le cas de la structure modèle bicyclette, notamment pour des valeurs élevées de vitesse [110,70 km/h].

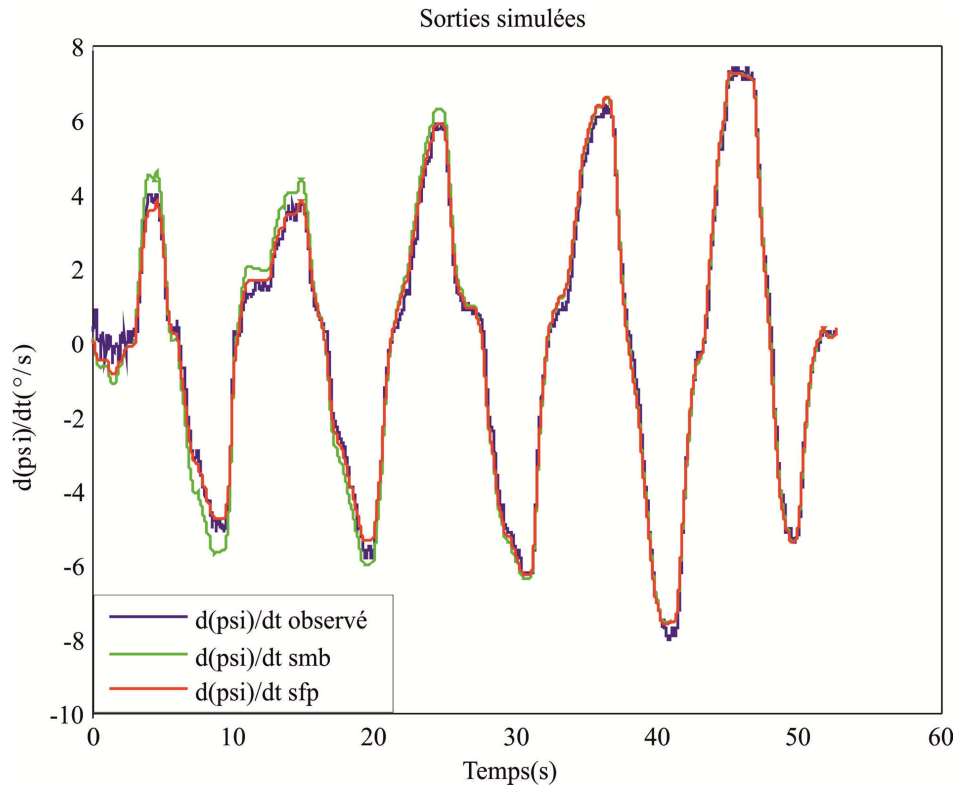


Figure 5-30 : Comparaison des sorties simulées

Pour chaque structure l'algorithme d'identification a convergé de telle sorte que les paramètres estimés conduisent à:

- une erreur de prédiction négligeable, pour la sortie correspondant à la vitesse de lacet $\dot{\psi}$ pendant l'expérience considérée (avec variation lente de la vitesse de 110 km / h à 30 km / h)
- des erreurs raisonnables lors de la simulation de l'expérience avec les modèles obtenus en utilisant uniquement les données d'entrée $\{u_k, p_k\}$.

La Table 5-7 montre le taux de validation VAF donné par l'expression 4.22 :

<i>Modèle</i>	<i>Structure bicyclette (smb)</i>	<i>Structure entièrement paramétrée (sfp)</i>
VAF sorties prédites	0,993	0,998
VAF sorties simulées	0,979	0,968

Table 5-7 : Identification du comportement latéral du véhicule (Méthode à erreur de prédiction) – VAF

Selon les résultats d'identification, les deux structures LPV envisagées présentent des modèles pertinents pour caractériser le comportement latéral du véhicule. Pour conclure sur leur pertinence une étude de validation des deux structures est présentée dans la section suivante.

5.5.6. Validation des modèles identifiés

Un nouvel ensemble de données expérimentales a été utilisé (Figure 5-31) pour cette analyse. La même expérience est répétée, en imposant des mouvements « bang - bang » au volant, avec une vitesse qui décroît de 110 km/h à 30 km/h.

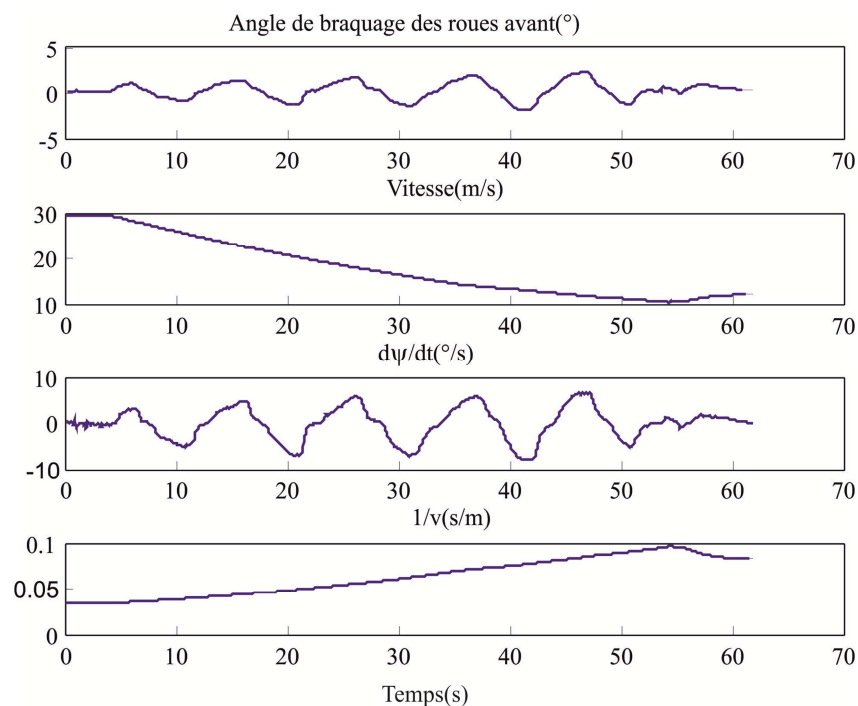


Figure 5-31 : Jeu de données utilisé pour la validation des deux structures

Les résultats sont observés dans le domaine temporel et une analyse dans le domaine fréquentiel est également menée.

Pour ce nouvel ensemble de données, comme il peut être observé sur les évolutions de la Figure 5-32, les deux structures déterminées permettent de prédire correctement la sortie du système.

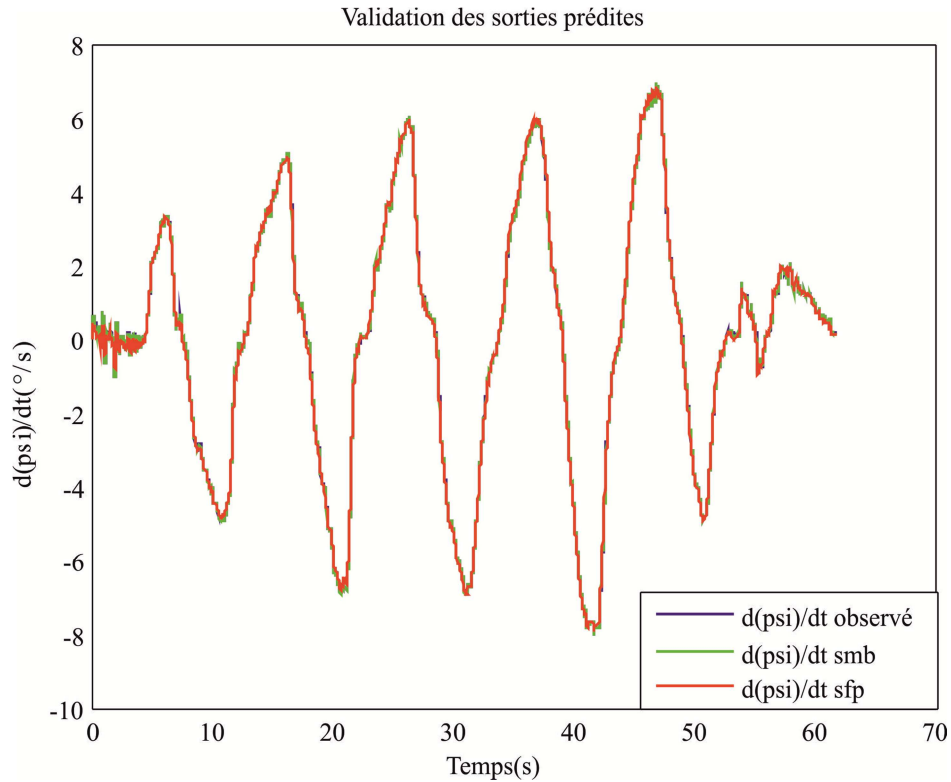


Figure 5-32 : Validation des sorties prédites

La Figure 5-33 représente la simulation de l'expérience à partir des deux modèles identifiés, excités par les grandeurs d'entrée; les erreurs de simulation sont légèrement plus importantes, ce qui semble logique puisque les modèles ont été déterminés pour optimiser les erreurs de prédiction.

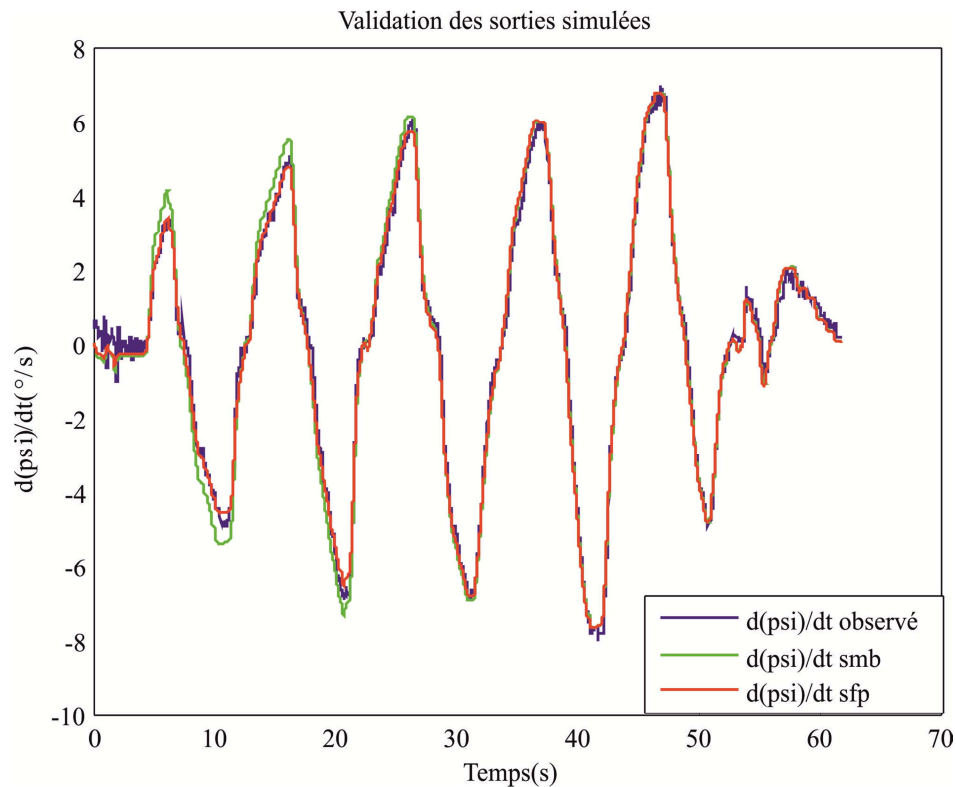


Figure 5-33 : Validation des sorties simulées

La Table 5-8 montre le taux de validation VAF donné par l'expression 4.22 :

Modèle	Structure bicyclette (smb)	Structure entièrement paramétrée (sfp)
VAF sorties prédites	0,993	0,998
VAF sorties simulées	0,979	0,971

Table 5-8 : Validation du comportement latéral du véhicule (Méthode à erreur de prédiction) – VAF

Les Figure 5-34 et Figure 5-35, montrent les réponses fréquentielles des deux modèles identifiés pour deux vitesses choisies arbitrairement, 40 km/h et 90 km/h. Ces réponses sont comparées à celle du modèle analytique. Une meilleure adéquation du comportement pour les hautes fréquences est obtenue pour la structure polytopique « modèle bicyclette », en raison de la cohérence de la forme des produits CB des deux structures.

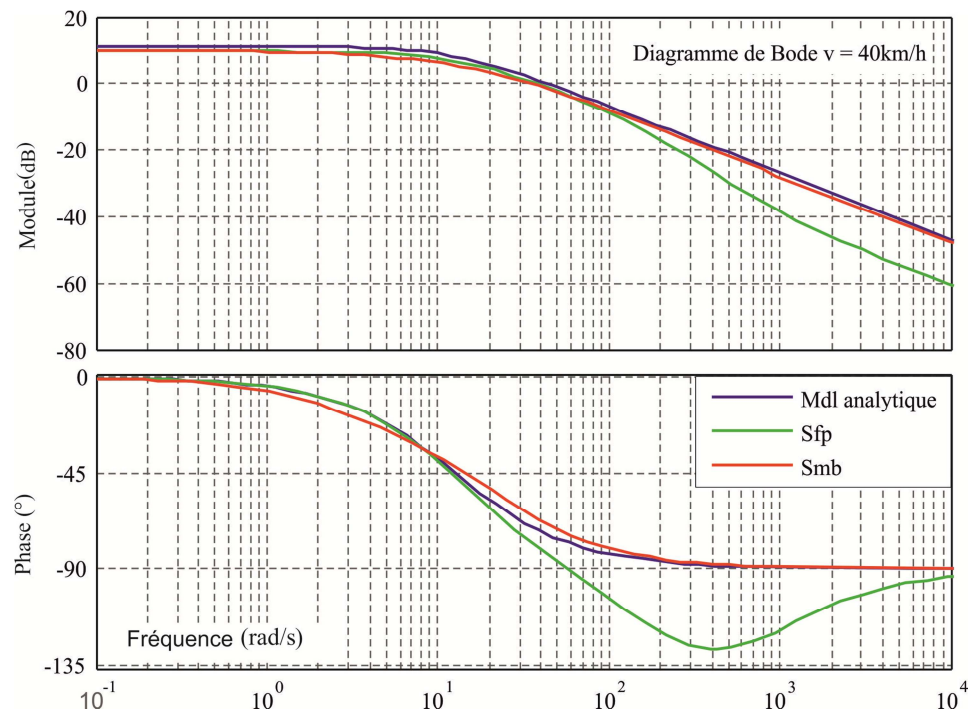


Figure 5-34 : Diagramme de Bode pour une vitesse de 40 km/h

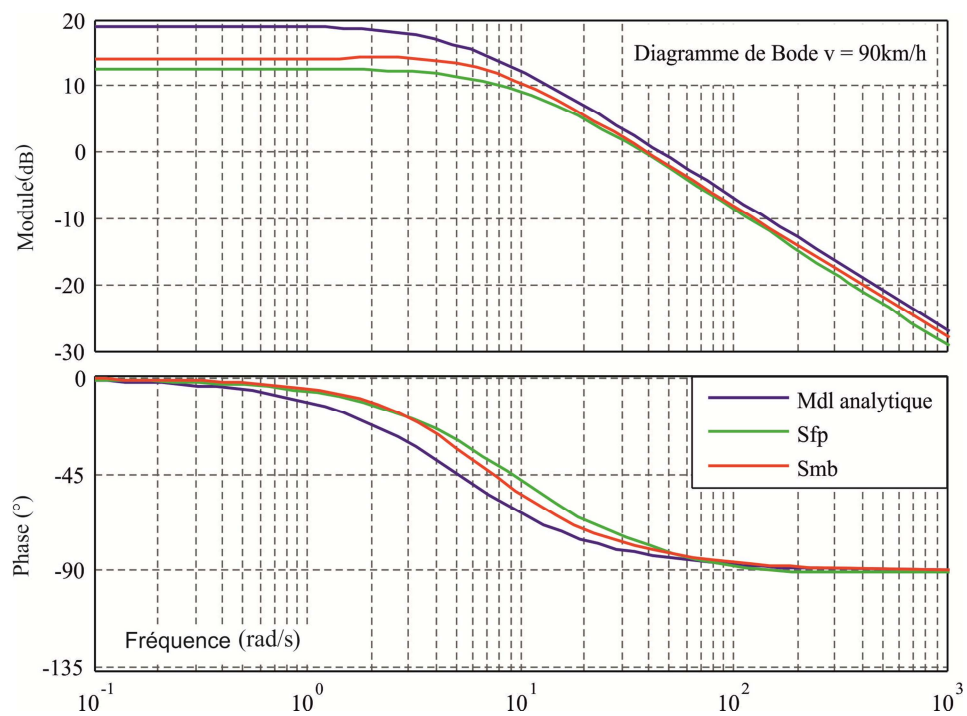


Figure 5-35 : Diagramme de Bode pour une vitesse de 90 km/h

Prenant en compte les résultats de validation obtenus à partir de deux structures de modèles proposées en vue de représenter le comportement latéral du véhicule, on peut conclure que les deux modèles identifiés sont pertinents.

Par la suite les méthodes de sous-espaces sont utilisées pour identifier un modèle LPV caractérisant le comportement latéral d'un véhicule.

5.6. Identification du comportement latéral d'un véhicule par la méthode de sous-espaces. Etude à partir de données expérimentales

Dans ce paragraphe, l'identification du comportement latéral d'un véhicule, en utilisant la méthode de sous-espaces, est présentée. Le système, modélisé comme LPV, est mono variable et l'ordre n'est pas élevé, ainsi la méthode classique a été appliquée, sans avoir besoin de réduction supplémentaire des matrices de données.

Le modèle à identifier est représenté dans l'espace d'état, en temps discret. Les méthodes de sous espaces n'imposent pas de structures particulières pour le choix de paramétrage de matrices, ainsi elles sont paramétrées entièrement en fonction de choix d'ordre de système, aspect discuté dans le paragraphe 5.6.1.2.

La structure de modèle cherché est la suivante :

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= A(p_k)x_k + B(p_k)u_k \\ y_k &= Cx_k + Du_k\end{aligned}\tag{5.30}$$

5.6.1.1. Données d'identification

Les données utilisées pour l'identification sont celles utilisées précédemment, présentées dans la section 5.5.3, Figure 5-26. Pour rappel :

- la première partie présente l'évolution de l'entrée du modèle: l'angle de braquage des roues avant.
- la deuxième partie affiche le paramètre variant, la vitesse du véhicule qui diminue de 110 km/h à 30 km/h (30 m/s à 10 m/s).
- la troisième partie représente la sortie mesurée du système: sa vitesse de lacet.

Par rapport au cas d'identification présenté au paragraphe 5.5 les données utilisées dans cette section sont rééchantillonnées et le paramètre variant n'est pas normalisé. La période d'échantillonnage est $T_d = 0,01$ seconde, pour un horizon temporel de 50 secondes.

Les signaux d'entrée et de sortie ont été centrés autour de zéro par la non prise en compte de la composante continue des signaux.

5.6.1.2. Mise en œuvre de la méthode « deux blocs »

Classiquement le comportement latéral d'un véhicule est représenté par un modèle du deuxième ordre (modèle bicyclette). Le nombre de blocs lignes des matrices de Hankel doit être supérieur à l'ordre du modèle, ainsi ce nombre est choisi égal à $k = 3$.

Conformément aux choix des matrices des données de la méthode « deux blocs », l'équation généralisée de données

$$Y = \Phi_x Z_x + \Phi_{P \odot X} Z_{P \odot X} + \Phi_U U + \Phi_V Z_V + E_X + E_{P \odot X} \quad 5.31$$

a été utilisée avec les matrices de données suivantes :

- Matrice des données de sorties futures : $Y = \mathcal{Y}_{6|3} = \begin{pmatrix} y_6 & \cdots & y_{6+N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_3 & \cdots & y_{3+N-1} \end{pmatrix};$

où $N = 5000$

- Matrices des données d'entrées :

$$Z_X = U_{2|0} = \begin{bmatrix} U_2 \\ P_2 \odot U_2 \\ U_{1|0} \\ P_2 \odot U_{1|0} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2((2)^3-1)*N}$$

et

$$U \leftarrow \begin{bmatrix} U_{5|3} \\ U_6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2((2)^3-1)+1*N}$$

avec $U_j = [u_j, u_{j+1}, \dots, u_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{1*N}$ et $P_j = [p_j, p_{j+1}, \dots, p_{j+N-1}] \in \mathbb{R}^{1*N}$

- Matrices des données d'entrée combinées avec des matrices formées en utilisant le vecteur de paramètres variant :

$$Z_{P \odot X} = P_{5|3} \odot U_{2|0} \quad \text{avec} \quad P_{5|3} = \begin{bmatrix} P_{4|3} \\ P_5 \\ P_5 \odot P_{4|3} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{((2)^3-1)*N}$$

L'ordre du système est donné par le nombre de valeurs singulières significatives de la décomposition de $\hat{\Phi}_X Z_X$ (voir paragraphe 3.3.2.1, équation 3.203).

Ces valeurs singulières sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
Sv_1 &= 5,3 \times 10^8 & Sv_2 &= 3,5 \times 10^{10} \\
Sv_3 &= 3,6 \times 10^{11} & Sv_4 &= 0,1 \times 10^{12}
\end{aligned}$$

Comme on peut l'observer, la première valeur singulière est bien plus élevée que les autres, ainsi le système peut très bien être approché par un modèle du premier ordre. Afin de maintenir la cohérence avec les modèles identifiés dans les sections 5.4 et 5.5, avec les méthodes des moindres carrés et les méthodes à erreur de prédiction respectivement, l'ordre de système est pourtant choisi égal à $n = 2$.

Les matrices A et B du système 5.30 ont la forme :

$$\begin{aligned}
A &= a_0 + p_k a_1 \\
B &= b_0 + p_k b_1
\end{aligned} \tag{5.32}$$

où p_k représente la valeur de paramètre à l'instant k . Les matrices C et D sont considérées indépendantes du paramètre variant.

5.6.1.3. Résultats d'identification

L'identification a conduit aux valeurs suivantes des coefficients de matrices :

$$\begin{aligned}
a_0 &= \begin{bmatrix} -2,77 & -2,3 \\ 2,9 & 2,7 \end{bmatrix} & a_1 &= \begin{bmatrix} 0,07 & 0,05 \\ -0,05 & -0,04 \end{bmatrix} \\
b_0 &= \begin{bmatrix} 468,8 \\ -378,2 \end{bmatrix} & b_1 &= \begin{bmatrix} -66,7 \\ 53,7 \end{bmatrix} \\
C &= [-0,0012 \quad -0,0014] & D &= 3,38
\end{aligned}$$

Le modèle identifié est simulé par l'excitation avec les signaux u et p , présentées dans la Figure 5-26. La sortie du modèle identifié est comparée à la sortie mesurée du système, les résultats sont présentés dans la Figure 5-36. La vitesse de lacet mesurée est représentée en couleur rouge, la sortie du modèle identifié est représentée en couleur verte. Le modèle identifié suit bien la réalité, en mentionnant que les bruits ne sont pas pris en compte dans la structure de modèle.

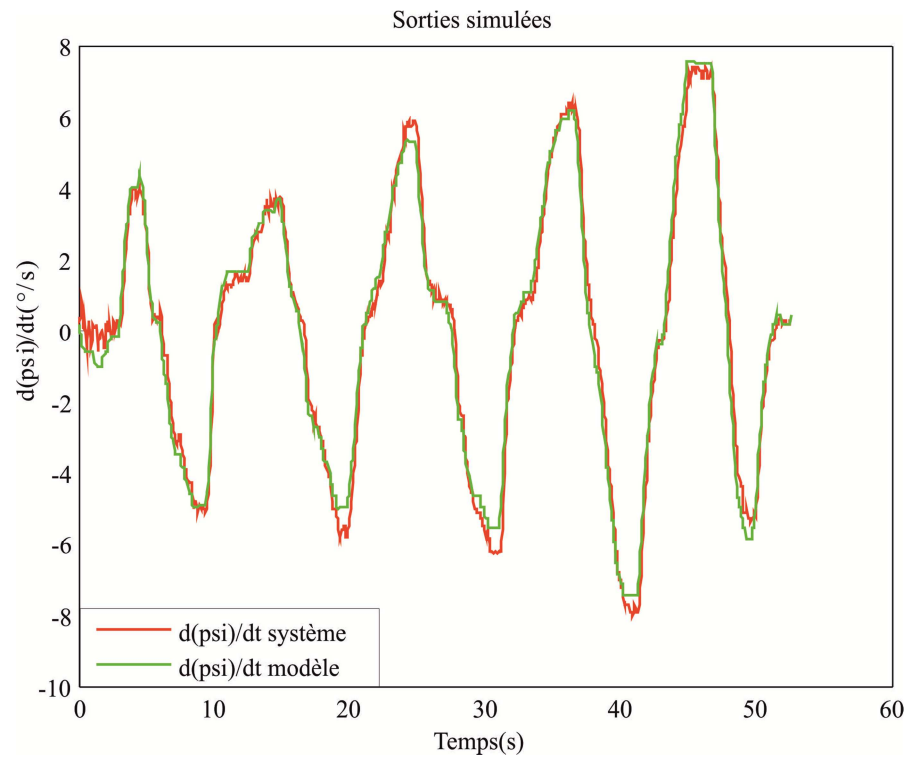


Figure 5-36 : Comparaison des sorties correspondant au comportement latéral du véhicule
L'erreur de simulation est représentée dans la Figure 5-37.

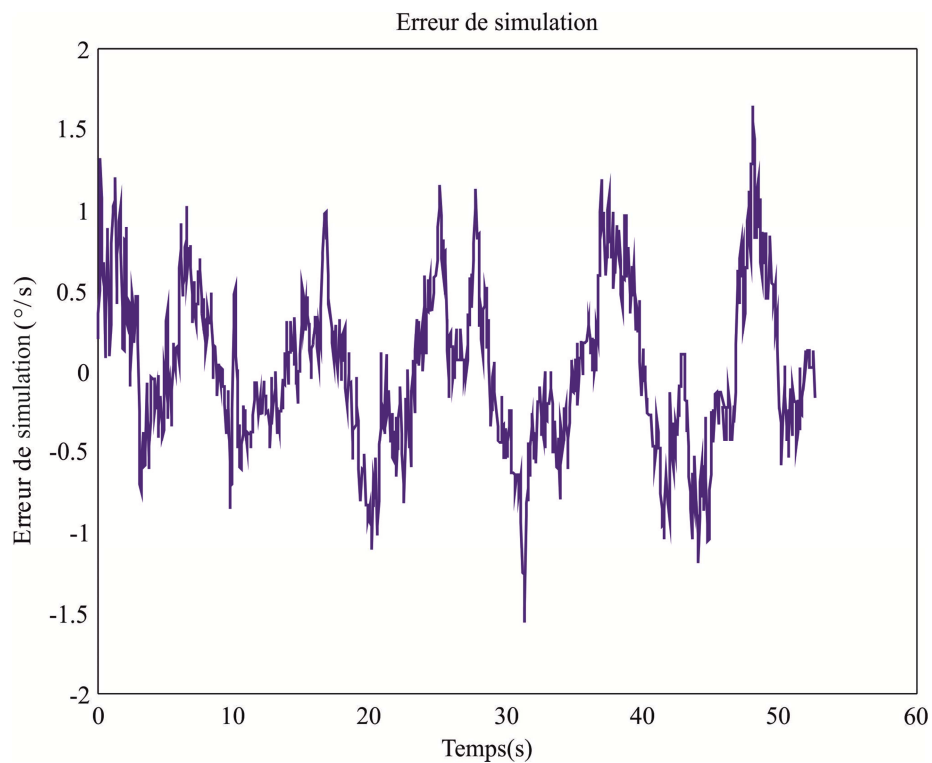


Figure 5-37 : Erreur de simulation pour le modèle identifié

Pour avoir plus de précisions sur la pertinence du modèle identifié, sa qualité est quantifiée en calculant un taux d'adéquation :

$$VAF = 0,981.$$

5.6.1.4. Validation du modèle

La validation du modèle est faite en utilisant des jeux de données différents de celui utilisé pour l'identification.

La même expérience est répétée. Des mouvements de type «bang-bang» sont utilisés pour l'angle du volant et le paramètre variant est mesuré en laissant la vitesse décroître de 110 Km/h à 30 Km/h. Les nouvelles séquences de données sont montrées dans la Figure 5-38.

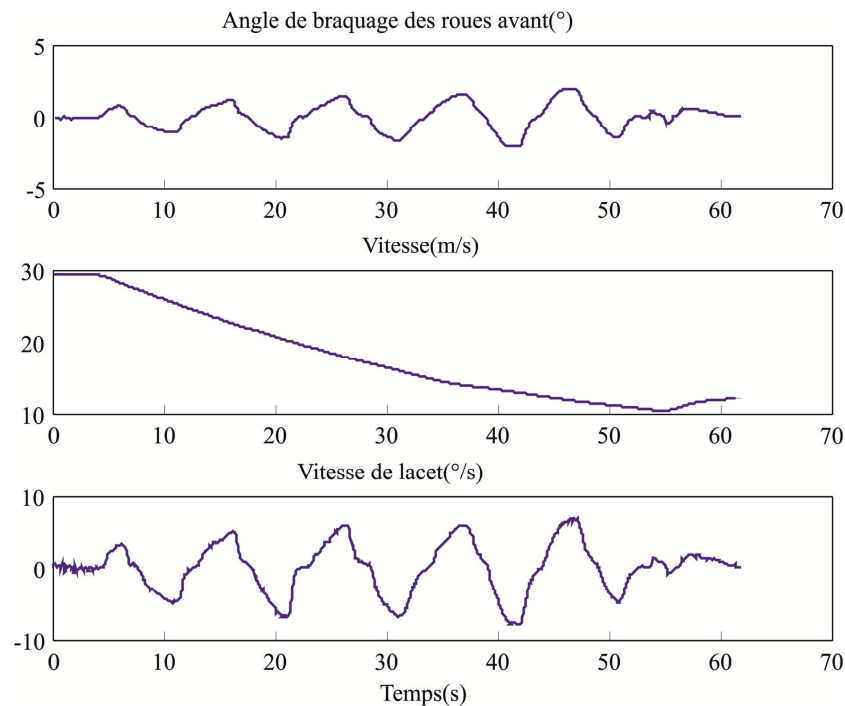


Figure 5-38 : Jeu de données (1) utilisé pour la validation du modèle

Le modèle obtenu est simulé en utilisant le nouveau jeu de données, et sa sortie (en vert) est comparée avec la sortie mesurée (en rouge), voir Figure 5-39.

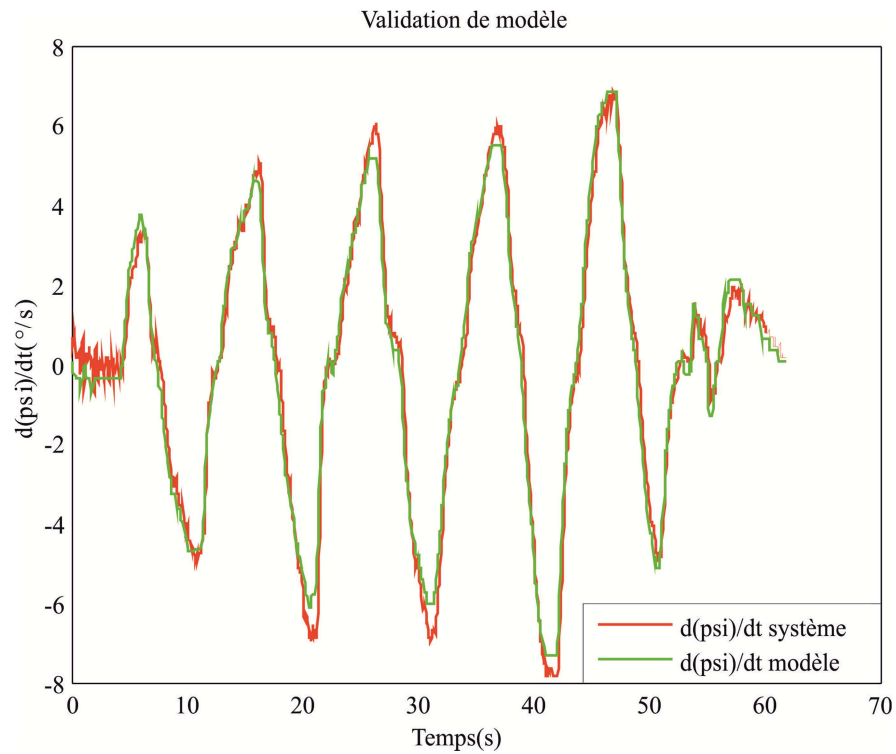


Figure 5-39 : Validation du modèle par comparaison de sorties

L'erreur de simulation pour la partie validation, représente la différence entre la sortie mesurée, montrée dans la Figure 5-38 (troisième cadran), et la sortie de modèle identifié, simulée avec ce nouveau jeu de données, voir Figure 5-40.

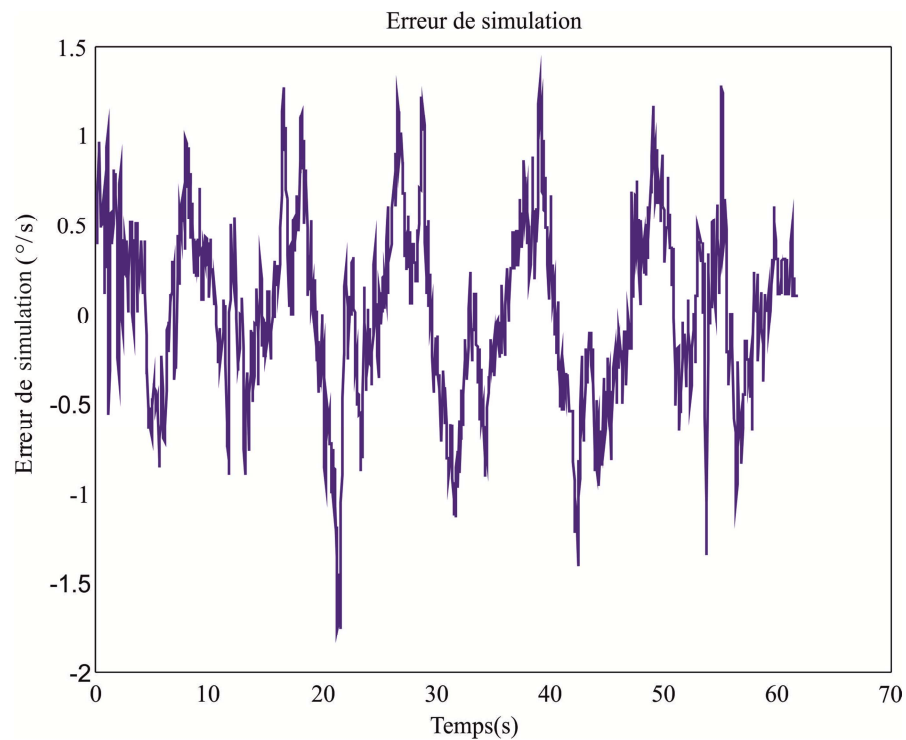


Figure 5-40 : Erreur de simulation validation (1)

Le taux d'adéquation entre les deux signaux est :

$$VAF = 0,9778.$$

Une autre expérience est effectuée pour obtenir des données d'entrée, en utilisant des valeurs plus élevées pour le paramètre variant : la vitesse de véhicule décroît ici de 130 km/h jusqu'à 50 km/h, Figure 5-41.

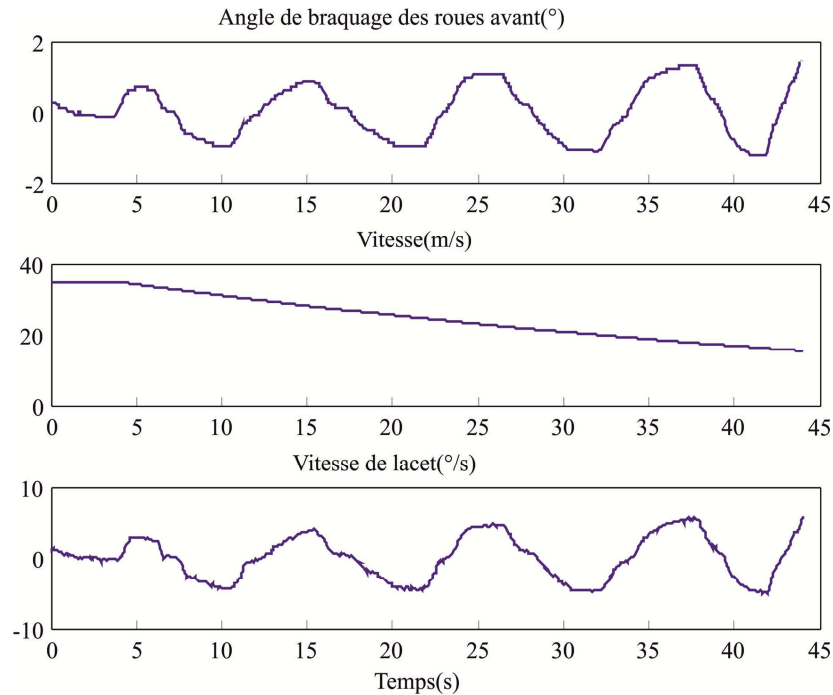


Figure 5-41 : Jeu de données (2) utilisé pour la validation du modèle

A partir de cette expérience, le modèle est simulé et sa sortie est comparée avec la sortie mesurée, Figure 5-42.

L'erreur de simulation est présentée dans la Figure 5-43. Elle présente des valeurs plus importantes dans l'intervalle temporel $t \in [0 ; 10 \text{ s}]$, intervalle qui correspond aux valeurs de vitesse $v \in [130 ; 110 \text{ km/h}]$. L'identification de modèle a été faite pour des valeurs de vitesse $v \in [110 ; 30 \text{ km/h}]$, l'intervalle $v \in [130 ; 110 \text{ km/h}]$ n'étant pas pris en compte dans le processus d'identification.

Le taux d'adéquation des deux signaux est ici :

$$VAF = 0,9499.$$

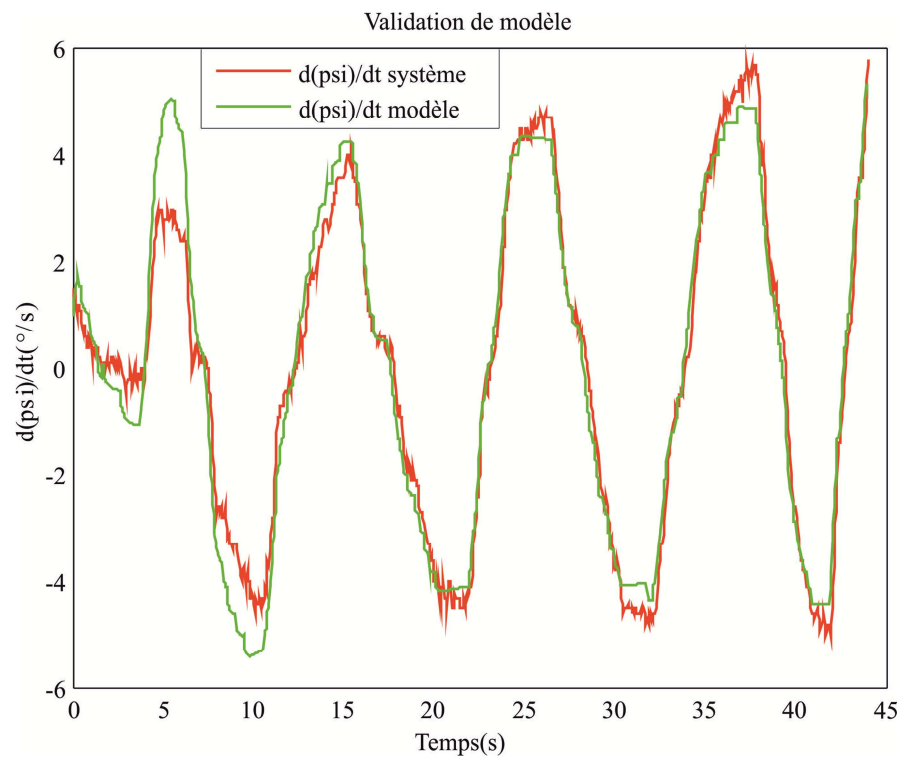


Figure 5-42 : Validation du modèle avec le jeu de données(2)

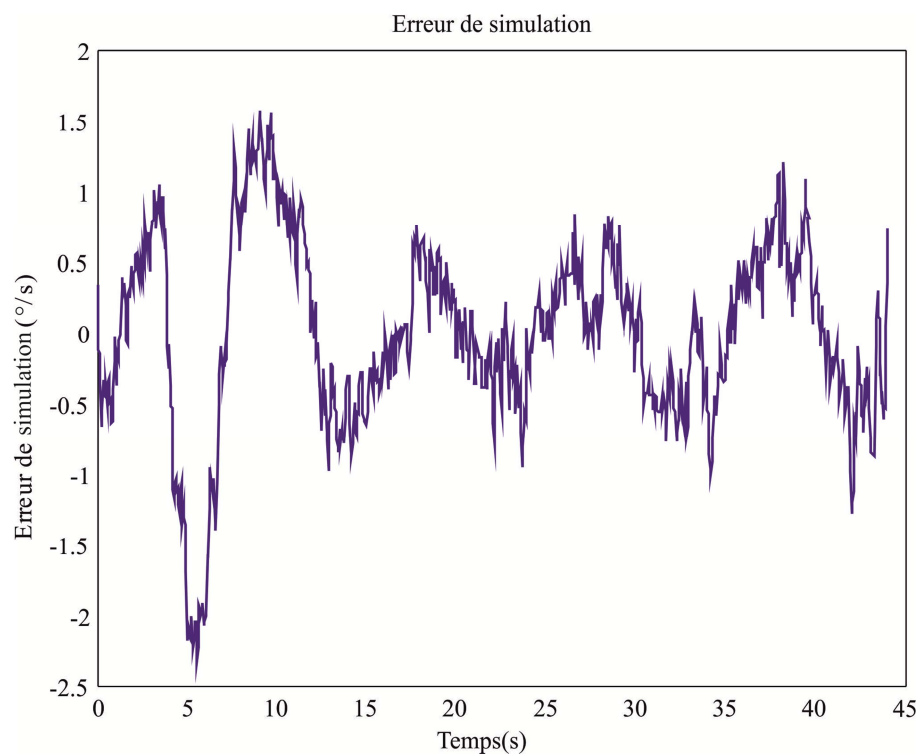


Figure 5-43 : Erreur de simulation validation (2)

La Table 5-9 montre les valeurs des taux d'adéquation des signaux d'identification et de validation, calculées selon la relation 4.22.

<i>Processus</i>	<i>VAF</i>
Identification	0,981
Validation (1)	0,9778
Validation (2)	0,9499

Table 5-9 : Identification du comportement latéral du véhicule - *VAF*

La partie validation effectuée avec succès, montre la pertinence du modèle obtenu.

Dans cette section, les méthodes de sous-espaces ont été abordées. Le comportement latéral d'un véhicule a été identifié, modélisé comme système LPV, en utilisant ces techniques. Des données expérimentales supplémentaires ont permis de valider le modèle obtenu.

Dans le chapitre courant, une étude de modèle bicyclette analytique, le modèle « classique » de représentation de comportement latéral de véhicule a été présenté, telle qu'une analyse fréquentielle est réalisée et différents cas de discrétisations sont envisagés.

Dans un premier temps, un modèle LPV représentant le comportement latéral de véhicule a été identifié en utilisant la méthode de moindres carrés.

Ensuite, un modèle LPV est identifié par les techniques de la méthode à erreur de prédiction.

Enfin, les méthodes de sous espaces ont été utilisées afin d'identifier un modèle LPV correspondant au comportement latéral de véhicule.

Le chapitre suivant de la thèse, VI, porte sur l'identification LPV d'un convertisseur de puissance Buck. Cette application est suivie de la construction et l'implémentation d'une loi de commande. Ayant à disposition le modèle LPV de convertisseur Buck, un régulateur est déterminé, en utilisant une optimisation $\mathcal{H}_\infty$.

Chapitre 6

L'utilisation des dispositifs de conversion de puissance est en progression constante et les exigences de performances sont également en croissance. Dans le cas des convertisseurs DC-DC un des objectifs est de maintenir la tension de sortie à une valeur de consigne souhaitée, indépendamment de la tension d'alimentation et de la résistance de charge. Le domaine de modélisation des convertisseurs de puissance a déjà été largement abordé dans la littérature, cependant l'exigence de performances nécessite également une amélioration du niveau de modélisation et de la commande.

Ce chapitre traite de l'identification et de la régulation d'un convertisseur de puissance abaisseur Buck. La méthode à erreur de prédiction est appliquée en vue d'identifier le modèle du convertisseur, selon une représentation LPV. Un régulateur à gains séquencés qui garantit des performances, en termes de norme $\mathcal{H}_\infty$, est ensuite conçu à partir du modèle identifié et implanté sur une maquette de convertisseur Buck.

6. Identification et commande LPV d'un convertisseur de puissance Buck

6.1. Caractérisation du convertisseur Buck

Dans la Figure 6-1 la structure d'un convertisseur Buck est représentée. Ce dispositif fonctionne en commutation, l'interrupteur (un MOSFET dans le cas de cette application) est soit dans l'état passant, soit dans l'état bloqué. Le filtre de sortie est caractérisé par une inductance L , une capacité C auxquelles des résistances parasites r_L , r_C peuvent éventuellement associées et la charge est supposée purement résistive. Le pilotage de l'interrupteur commandé est réalisé à la période de commutation T_s , chaque période est caractérisée par un temps de conduction T_c définissant le rapport cyclique :

$$d = T_c/T_s, \quad 6.1$$

correspondant, dans le cadre de cette application, au signal de commande.

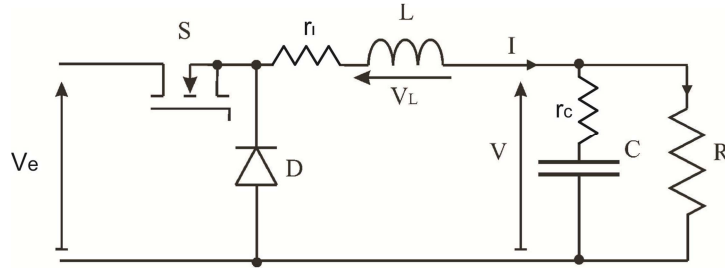


Figure 6-1 : Structure du convertisseur Buck

En utilisant les valeurs moyennes des signaux (Middlebrook & Cuk, A general unified approach to modeling switching-converter power stages, 1976), déterminées à partir des valeurs prises par les différentes grandeurs au cours d'un cycle de commande et pondérées par la valeur du rapport cyclique (Figure 6-2), l'on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} \frac{R}{R+r_c} \left(1 - C r_c \frac{r_l}{L}\right) & -\frac{1}{C} \frac{1}{R+r_c} \left(1 + C r_c \frac{R}{L}\right) \end{bmatrix} x(t) + \\ y(t) = [0 \quad 1] x(t) \end{cases} \quad 6.2$$

$$+ \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{R}{R+r_c} \frac{r_c}{L} \end{bmatrix} dV_e$$

avec

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V(t) \end{bmatrix}, \quad 6.3$$

où V_e est la tension d'alimentation supposée constante, i_L est le courant dans l'inductance et V la tension de sortie. Ce modèle, d'entrée de commande $d(t)$, de sortie $V(t)$ fait clairement apparaître une dépendance vis-à-vis de la résistance de charge R , considérée ici comme le paramètre variant.

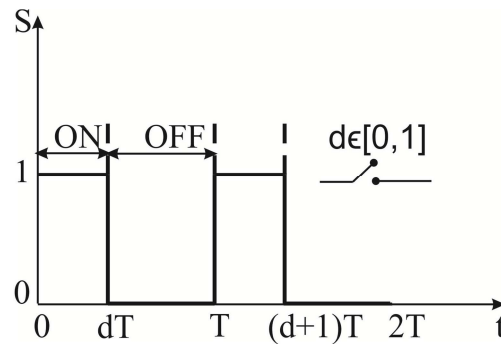


Figure 6-2 : Signal de commande de l'interrupteur commandé

6.2. Identification du modèle LPV du convertisseur

Le modèle LPV caractérisant le comportement du convertisseur, est obtenu en utilisant une estimation « one shot » de différents modèles linéaires, obtenus à chaque point de fonctionnement, voir Figure 5-25, chapitre V. Pour cette identification un seul enregistrement de données, avec des fluctuations du paramètre variant, est utilisé. Un modèle polytopique est ensuite déterminé en utilisant la méthode à erreur de prédiction fondée sur un critère quadratique dans le domaine temporel, comme présenté dans la section 3.2.2 de chapitre III.

6.2.1. Structure du modèle à identifier

La structure du modèle LPV à identifier, issue de l'équation 6.2, est choisie de telle sorte que le bruit de mesure soit pris en compte :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A\left(\frac{1}{R}\right)x(t) + B\left(\frac{1}{R}\right)d(t) + K\left(\frac{1}{R}\right)e \\ y(t) &= Cx(t) + e(t)\end{aligned}\tag{6.4}$$

où e est modélisé comme un bruit blanc.

L'analyse du modèle analytique moyen montre une dépendance en $\frac{1}{R}$ des paramètres du modèle. Dans le cas de résistances parasites r_L , r_c négligeables, le modèle peut être écrit comme suit :

$$\begin{aligned}A\left(\frac{1}{R}\right) &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 + \left(\frac{1}{R}\right)\lambda_4 & \lambda_5 + \left(\frac{1}{R}\right)\lambda_6 \end{bmatrix} \\ B\left(\frac{1}{R}\right) &= \begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_8 + \left(\frac{1}{R}\right)\lambda_9 \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 1]\end{aligned}\tag{6.5}$$

Ainsi, le paramètre variant considéré est $p = \frac{1}{R}$. La forme générale du modèle cherché est la suivante :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(p)x(t) + B(p)d(t) + K(p)e(t) \\ y(t) &= Cx(t) + e(t)\end{aligned}\tag{6.6}$$

Bien qu'un modèle analytique soit disponible, la structure choisie pour représenter le modèle identifié du convertisseur Buck est une structure entièrement paramétrée. Ce choix est fait pour inclure l'effet introduit dans le comportement du système par les

résistances parasites. En pratique les résistances r_L et r_c , introduisent par exemple une modification du gain statique entre la tension de sortie et la grandeur de commande. En choisissant une structure entièrement paramétrée cet effet est pris en compte dans le modèle identifié.

Aucune connaissance sur la dépendance des matrices du modèle par rapport au paramètre variant n'est supposée; chaque modèle LTI est choisi selon une forme entièrement paramétrée (McKelvey, 1995).

Deux points de fonctionnement, correspondant aux puissances minimale et maximale de convertisseur, sont choisis pour déterminer les modèles locaux. Les matrices caractéristiques du modèle LPV sont formées comme suit :

$$\begin{aligned}
 A(p, \theta) &= w_1(p)A_1(\xi_1) + w_2(p)A_2(\xi_2) \\
 B(p, \theta) &= w_1(p)B_1(\xi_1) + w_2(p)B_2(\xi_2) \\
 K(p, \theta) &= w_1(p)K_1(\xi_1) + w_2(p)K_2(\xi_2) \\
 C &= [0 \quad 1] \\
 D &= 0
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

avec les matrices locales définies par :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \end{bmatrix}, \\
 A_2 &= \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} b_1^{(2)} \\ b_2^{(2)} \end{bmatrix}, \\
 C_1 &= C_2 = [0 \quad 1], D_1 = D_2 = 0 \\
 K_1 &= [k_1^{(1)} \quad k_2^{(1)}]^T, K_2 = [k_1^{(2)} \quad k_2^{(2)}]^T
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

Les fonctions triangulaires $w_i(p)$, permettant de construire ces modèles (voir section 3.2.2), sont représentées par les tracés de la Figure 3-2, pour rappel :

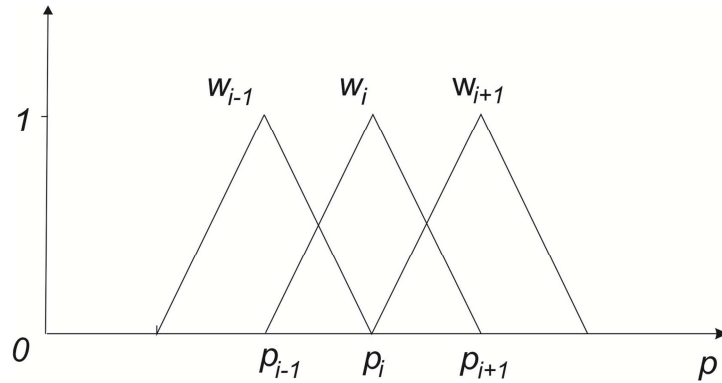


Figure 3-2 : Fonctions de pondération triangulaires

Enfin les termes ξ_i sont formés à partir des matrices A_i , B_i et K_i :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= [a_{11}^{(1)} \quad a_{21}^{(1)} \quad a_{12}^{(1)} \quad a_{22}^{(1)} \quad b_1^{(1)} \quad b_2^{(2)} \quad k_1^{(1)} \quad k_2^{(1)}] \\ \xi_2 &= [a_{11}^{(2)} \quad a_{21}^{(2)} \quad a_{12}^{(2)} \quad a_{22}^{(2)} \quad b_1^{(2)} \quad b_2^{(2)} \quad k_1^{(2)} \quad k_2^{(2)}]\end{aligned}\quad 6.9$$

et le vecteur de paramètres à identifier pour représenter le modèle LPV est :

$$\theta = [\xi_1 \quad \xi_2]. \quad 6.10$$

Le nombre de paramètres à identifier est égal dans cette application à 8×2 (8 coefficients et 2 points de fonctionnement).

Dans la section suivante le prototype expérimental utilisé et les données d'identification obtenues sont présentés.

6.2.2. Prototype expérimental et données d'identification

Le prototype expérimental est présenté dans la Figure 6-3, un banc de variation de charge est associé au convertisseur. Typiquement ce type de convertisseur fonctionne à des fréquences de commutation de 20 à 400 kHz, pour des raisons pratiques de réalisation le prototype utilisé ici fonctionne à une fréquence de commutation de 20 kHz. Au convertisseur est associée une carte d'E/S et un système d'acquisition « *XPC Target* » utilisés pour la commande en temps réel et pour l'acquisition des données : rapport cyclique et tension de sortie mesurée.

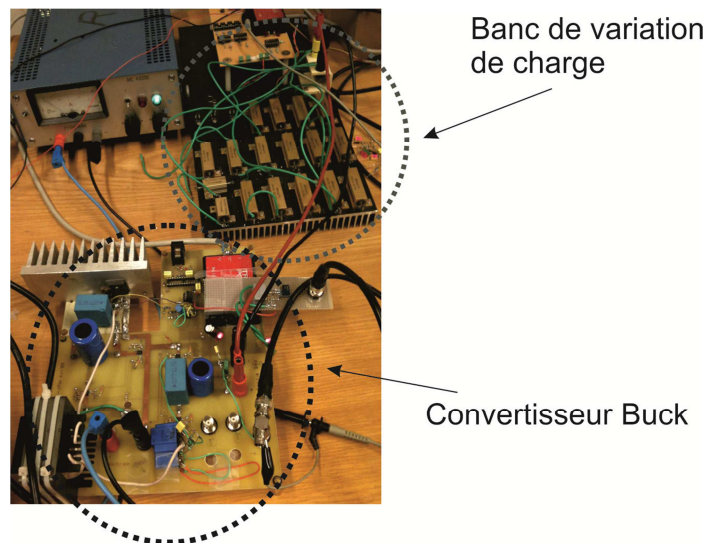


Figure 6-3 : Prototype expérimental d'un convertisseur Buck

La séquence temporelle correspondant aux données enregistrées (en boucle ouverte), utilisées pour l'identification, est présentée dans la Figure 6-4, avec des agrandissements présentés dans les Figure 6-5 et Figure 6-6. Ces tracés représentent respectivement les évolutions en régime transitoire de la tension de sortie lors d'un changement de la résistance de charge et du rapport cyclique.

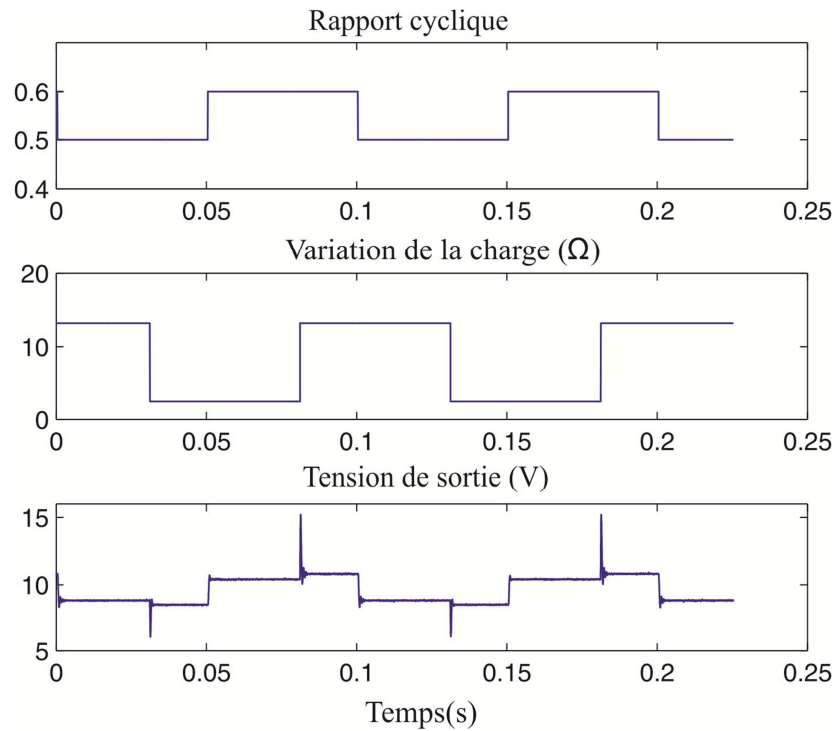


Figure 6-4 : Données expérimentales correspondant au convertisseur Buck

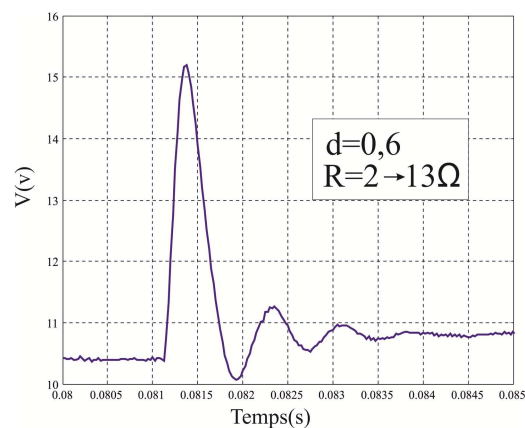


Figure 6-5 : Evolution de la tension de sortie lors du changement de la résistance de charge R

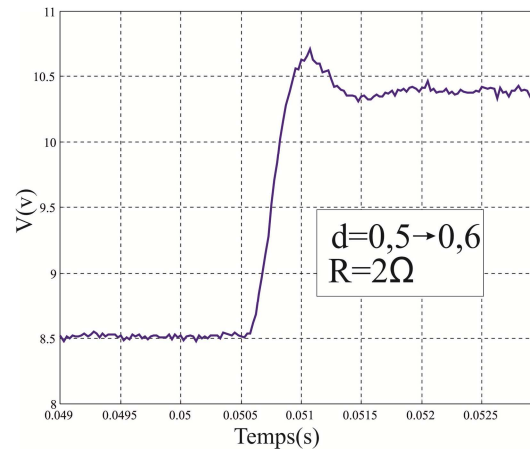


Figure 6-6 : Evolution de la tension de sortie lors du changement de rapport cyclique d

Un signal de type tout ou rien a été utilisé pour commander la variation de la résistance de charge, cette sollicitation est la seule forme physiquement reproductible sur le banc disponible.

- la première partie de la Figure 6-4 présente la variation de l'entrée de commande (rapport cyclique), pour une fréquence de commutation $f = 20$ kHz, correspondant à un signal carré prenant deux valeurs 0,5 et 0,6.
- la deuxième partie présente le paramètre variant, la résistance de charge commutant entre deux valeurs $2,44\Omega$ et $13,2\Omega$. L'évolution de la résistance a été choisie de telle sorte que le circuit reste dans le mode de conduction continue (CCM) (Pressman, Billings, & Morey, 2009).
- la troisième partie représente la sortie mesurée du système, soit la tension de sortie dans le cas de cette application.

La tension d'entrée V_e a été fixée à 20V. La période d'échantillonnage est $T = 25 \cdot 10^{-6}$ secondes, ainsi, l'hypothèse pour le paramètre variant, d'une valeur constante pendant une période d'échantillonnage, est clairement validée pour cette expérience.

L'initialisation du vecteur de paramètres pour l'algorithme d'identification est effectuée en utilisant les valeurs L et C supposées connues lors du dimensionnement des éléments du convertisseur.

$$\begin{aligned} L &= 220 \mu\text{H} \\ C &= 47 \mu\text{F} \end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2.3. Analyse des résultats d'identification

Les valeurs numériques des deux modèles locaux identifiés, pour les points de fonctionnement correspondant à $2,44\Omega$ et $13,2\Omega$ conduisent aux matrices suivantes :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} -0,0098 & -0,4914 \\ 1,2379 & -0,5165 \end{bmatrix} & A_2 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} -0,0168 & -0,5062 \\ 1,2419 & -1,0484 \end{bmatrix} \\
 B_1 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 8,8223 \\ 0,1540 \end{bmatrix} & B_2 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 8,9744 \\ -0,1028 \end{bmatrix} \\
 K_1 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,2648 \\ 4,2041 \end{bmatrix} & K_2 &= 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,0827 \\ 0,8711 \end{bmatrix} \\
 C &= [0 \quad 1] & D &= 0
 \end{aligned}$$

L'analyse des résultats d'identification est effectuée dans les espaces temporel et fréquentiel. De la même manière, que dans la section 5.5.5 (chapitre V), page 153, les sorties prédites $\hat{y}$ et simulées y_{sim} sont analysées.

Les résultats obtenus pour la sortie prédite sont présentés par les évolutions temporelles des enregistrements de la Figure 6-7. Les essais sont effectués en boucle ouverte, pour des valeurs fixes du rapport cyclique 0,6 (partie gauche) et 0,5 (partie droite). La tension de sortie V prédite (rouge) est comparée avec la tension observée du convertisseur (bleue), pour des changements de la valeur de la résistance de charge : de faible valeur ($2,44\Omega$) à grande valeur ($13,2\Omega$) (partie gauche), et de grande valeur ($13,2\Omega$) à faible valeur ($2,44\Omega$) (partie droite).

Les enregistrements de la Figure 6-8 montrent les résultats obtenus en simulation, en utilisant seulement les données d'entrée $\{u_k, p_k\}$. La sortie simulée (rouge) est comparée avec la sortie observée (bleue), pour une variation de charge: $2,44\Omega - 13,2\Omega$ (gauche); $13,2\Omega - 2,44\Omega$ (droite).

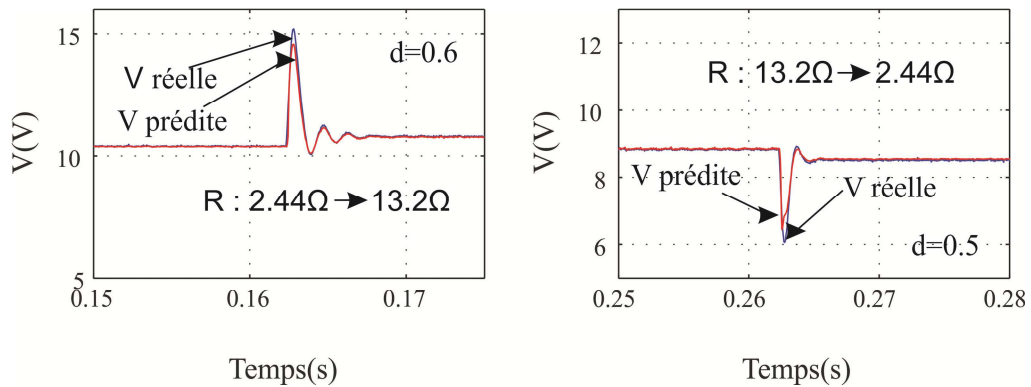


Figure 6-7 : Sortie prédite correspondant au convertisseur Buck

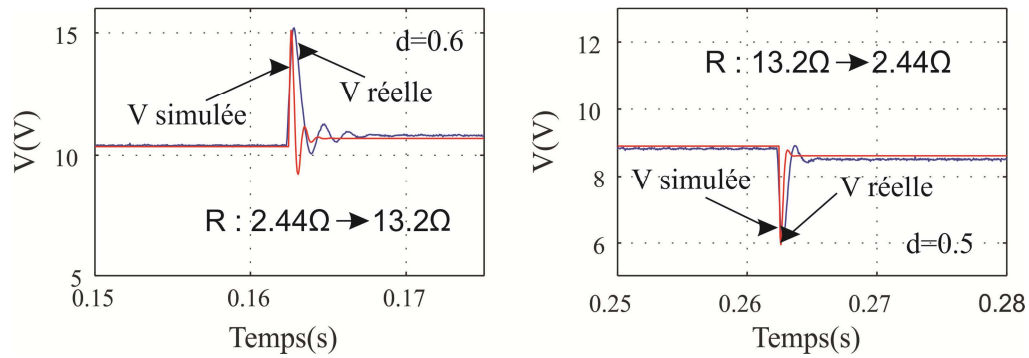


Figure 6-8 : Sortie simulée correspondant au convertisseur Buck

La Table 6-1 montre l'erreur quadratique moyenne des erreurs de prédiction et de simulation du modèle identifié. Elle est calculée selon la relation :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad 6.12$$

avec y représentant les mesures observées et $\hat{y}$ représentant les sorties prédites/simulées.

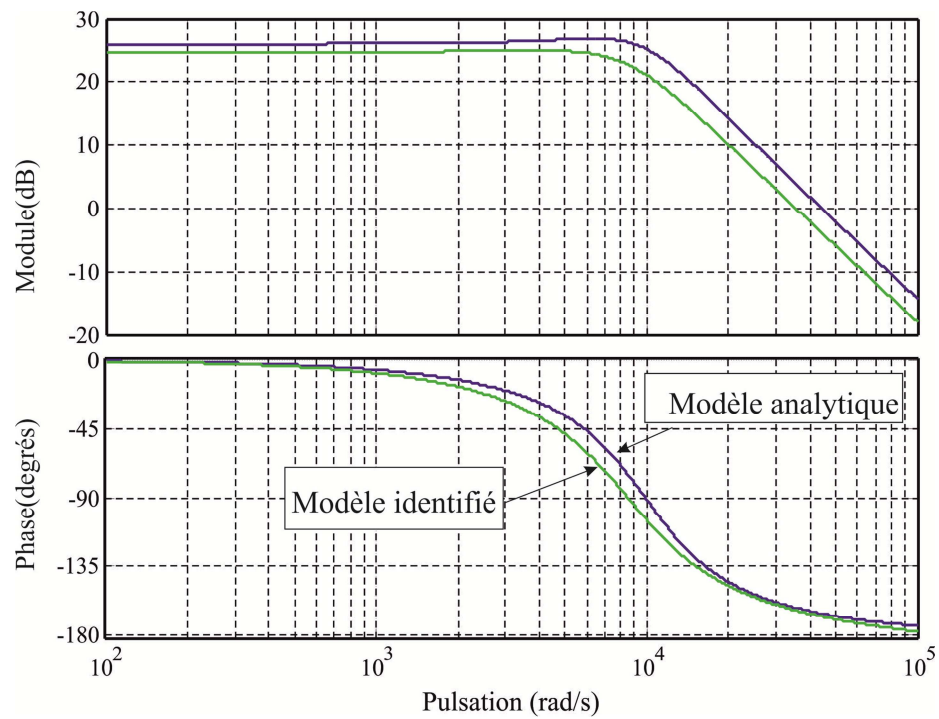
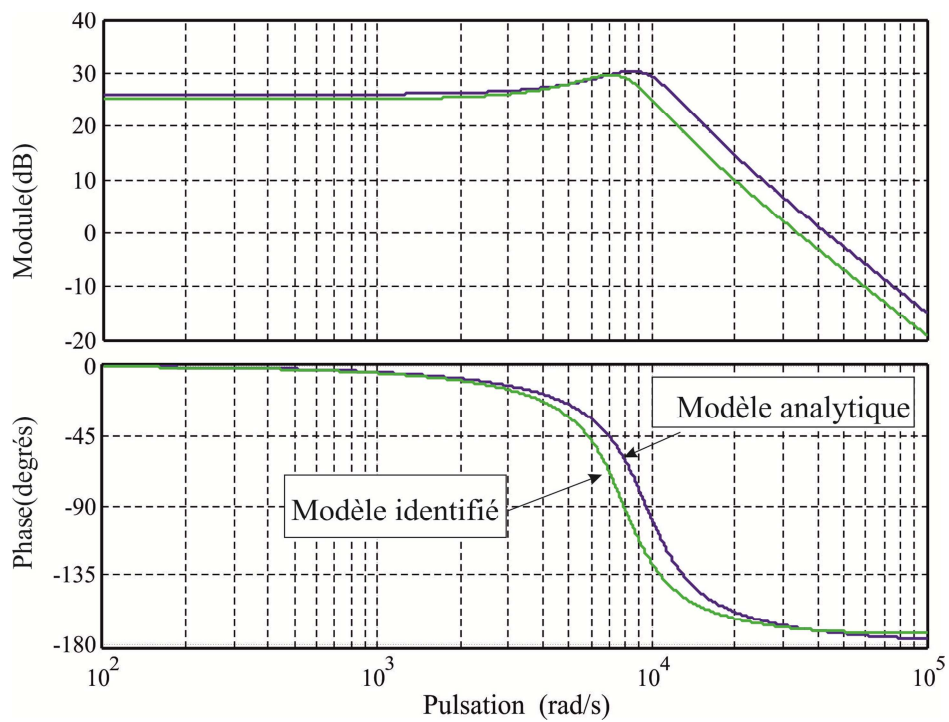
De meilleures performances sont obtenues en utilisant la sortie prédite du système, ce qui peut sembler cohérent.

Pour la structure choisie, l'algorithme d'identification converge de telle sorte que les paramètres estimés conduisent à une erreur de prédiction négligeable et une erreur de simulation raisonnable.

<i>RMS</i>	<i>Identification</i>
RMS – erreurs prédites	0,0865 V
RMS – erreurs simulées	0,1998 V

Table 6-1 : Identification d'un convertisseur Buck (Méthode à erreur de prédiction) - Erreur quadratique moyenne – Résultats d'identification

Les réponses fréquentielles des deux modèles locaux identifiés sont comparées avec celles du modèle analytique en utilisant les valeurs nominales pour les différents éléments (L et C), et les valeurs de $2,44\Omega$ (Figure 6-9) et $13,2\Omega$ (Figure 6-10) pour la résistance de charge.

Figure 6-9 : Réponses fréquentielles pour $R = 2,44\Omega$ Figure 6-10 : Réponses fréquentielles pour $R = 13,2\Omega$

Ainsi, les résultats d'identification présentent un modèle LPV capable de représenter l'évolution de système selon les valeurs prises par la résistance de charge. La validation de ce modèle est présentée dans la section suivante.

6.2.4. Validation du modèle

Un nouveau jeu de données a été enregistré sur le convertisseur, voir Figure 6-11. Le rapport cyclique est fourni sous la forme d'un signal carré prenant les valeurs 0,5 et 0,6 (partie haute), la résistance de charge varie entre les valeurs 5,6 Ω et 9 Ω (partie moyenne), et la tension de sortie est obtenue pour une tension d'alimentation de 20 V. Ce jeu de données est utilisé pour simuler le modèle en vue de conclure sur sa pertinence. L'analyse effectuée porte sur les sorties prédites et simulées.

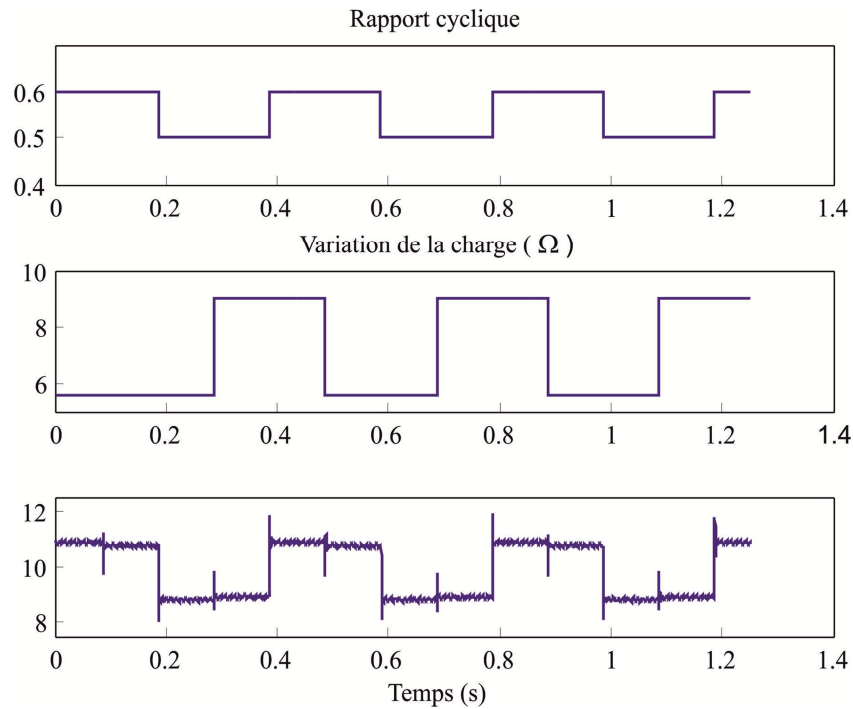


Figure 6-11 : Evolution des données utilisées pour la validation du modèle

La sortie prédite $\hat{y}$ est déterminée à partir des entrées u^o , des sorties mesurées y^o , des paramètres p^o et est évaluée selon le modèle d'identification comportant en particulier le prédictor (schéma de la Figure 5-27). L'évolution de la sortie prédite est comparée avec l'évolution de la sortie mesurée pour la nouvelle expérience enregistrée. Les deux courbes peuvent être observées par les tracés de la Figure 6-12, la sortie prédite (rouge) suit bien la sortie réelle du système (bleu). Le résultat est présenté pour une valeur de 9 Ω de la

résistance de charge et une variation du rapport cyclique de 0,5 à 0,6 (partie gauche). Aussi la sortie observée est bien représentée par la sortie prédite dans le cas d'un changement de résistance ($5,6 \Omega - 9 \Omega$), avec un rapport cyclique d fixe (partie droite).

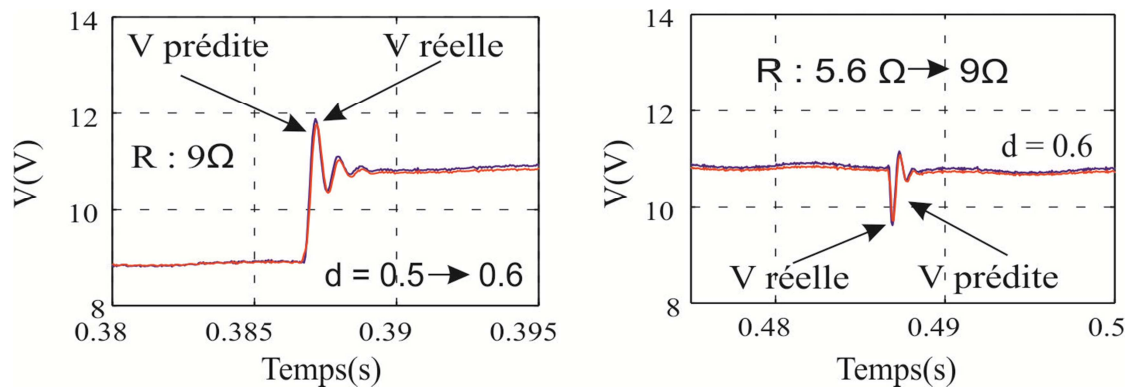


Figure 6-12 : Validation des sorties prédites

Enfin, la sortie simulée, obtenue avec le modèle identifié (schéma de la Figure 5-28) est analysée et comparée avec la sortie mesurée, en utilisant ce nouveau jeu de données. Pour la sortie simulée, les résultats de validation, sont présentés sur la Figure 6-13. En rouge est représentée la sortie simulée du modèle identifié, en bleu est représentée la sortie mesurée issue de la nouvelle expérience. Les deux résultats sont comparés vis-à-vis d'un changement de rapport cyclique (partie gauche) et d'un changement de la résistance de charge (partie droite).

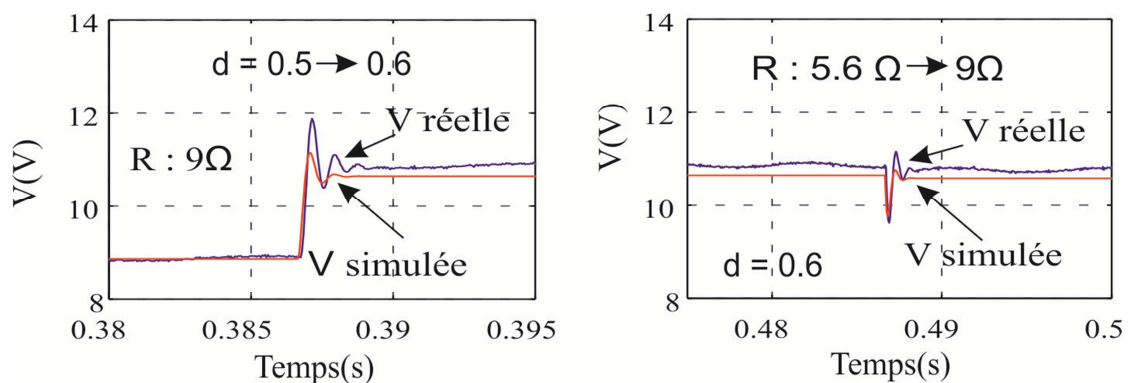


Figure 6-13 : Validation des sorties simulées

La Table 6-2 montre l'erreur quadratique moyenne des erreurs de prédiction et de simulation pour le processus de validation. De nouveau, de meilleures performances sont obtenues en utilisant la sortie prédite du système.

<i>RMS</i>	<i>Validation</i>
RMS – erreurs prédites	0,1315 V
RMS – erreurs simulées	0,3306 V

Table 6-2 : Identification d'un convertisseur Buck (Méthode à erreur de prédiction) - Erreur quadratique moyenne – Résultats de validation

Les résultats de cet essai comparatif montrent des réponses très proches confirmant, sur ces résultats, la validité du modèle LPV identifié.

Dans cette sous-section l'identification, en utilisant les techniques de la méthode à erreur de prédiction, d'un modèle LPV représentant un convertisseur DC-DC Buck a été réalisée.

La section suivante porte sur la présentation, la construction et l'implantation d'une loi de commande LPV qui garantit des performances, en termes de la norme $\mathcal{H}_\infty$, en utilisant le modèle LPV identifié précédemment.

6.3. Synthèse $\mathcal{H}_\infty$ LPV appliqué à la commande d'un convertisseur Buck

L'objectif de la régulation est de maintenir la tension de sortie à une valeur de référence, indépendamment des variations de la charge et de la tension d'alimentation.

Dans un premier temps le formalisme de correcteur H_∞ LPV est présenté. Ensuite, ce correcteur est construit en utilisant le modèle LPV du convertisseur Buck. Le correcteur est implanté de manière à commander le convertisseur, d'une part en simulation en utilisant le modèle non linéaire du convertisseur, d'autre part en temps réel sur le prototype ayant servi à l'identification expérimentale.

6.3.1. Formalisme du correcteur $\mathcal{H}_\infty$ LPV

Le calcul du correcteur est fondé sur des techniques de gains séquencés. Il est directement dépendant du paramètre variant et conçu de manière à garantir la robustesse et les performances dynamiques indépendamment de la charge.

L'approche consiste à déterminer des correcteurs locaux, en différents points de fonctionnement choisis sur la plage de variation du paramètre. Le correcteur LPV est construit par interpolation des correcteurs locaux.

L'approche présentée implique la connaissance du vecteur de paramètres variants et sa disponibilité en temps réel.

Au regard d'un modèle LPV de type 6.6 du procédé, le correcteur est cherché selon une forme similaire :

$$\begin{aligned}\dot{x}_k &= A_k(p(t))x_k + B_k(p(t))y \\ u &= C_k(p(t))x_k + D_k(p(t))y\end{aligned}\tag{6.13}$$

Outre la garantie de stabilité des critères quadratiques peuvent être ajoutés. La synthèse (Apkarian, Gahinet, & Becker, Self-scheduled H_∞ Control of Linear Parameter-varying Systems: a design Example, 1995) est fondée sur la recherche d'une seule fonction de Lyapunov qui assure des performances H_∞ , qui permet d'assurer la stabilité pour tous les comportements possibles du modèle. Le problème de synthèse est réduit à la résolution d'un système d'inégalités matricielles linéaires (LMI).

Pour une fonction de transfert classique $P(s)$, la définition de la norme H_∞ est rappelée :

Définition 6-1 :

$$\|P(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} P(j\omega)\tag{6.14}$$

avec $\sigma_{\max}(M)$ étant la plus grande valeur singulière de la matrice M .

Définition 6-2 : Un système LPV de type 6.6 a des performances H_∞ quadratiques γ s'il existe une seule matrice $X > 0$ telle que :

$$\mathfrak{B}_{[A,B,C,D]}(X, \gamma) = \begin{pmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{pmatrix} < 0\tag{6.15}$$

pour toutes les valeurs admissibles de θ , et la fonction Lyapunov $V(x) = x^T X x$ assure la stabilité globale asymptotique. Le gain $\mathcal{L}_2$ de l'entrée/sortie est bornée par γ :

$$\|y\|_2 < \gamma \|u\|_2,\tag{6.16}$$

pour toutes les trajectoires possibles de p .

Le formalisme LPV exige une fonction Lyapunov pour tout le domaine de variation du paramètre, ce qui implique un nombre infini de contraintes. Cette condition peut être réduite à un ensemble fini d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). La définition 6.15 reste valide pour $A(p), B(p), C(p), D(p)$ si et seulement si elle reste valide pour chaque correcteur local $A_i, B_i, C_i, D_i, i = 1, \dots, r$; r représentant le nombre de points de fonctionnement. (Apkarian, Gahinet, & Becker, Self-scheduled H infinit Control of Linear Parameter-varying Systems: a design Example, 1995).

Alors, le modèle LPV est stable avec la performance quadratique $H_\infty \gamma$ si chaque modèle local LTI respecte la condition :

$$\mathfrak{B}_{[A_i, B_i, C_i, D_i]}(X, \gamma) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad 6.17$$

Le correcteur LPV intègre les mesures du paramètre variant, de la même manière que le modèle et exploite les mesures de p en temps réel, permettant ainsi d'ajuster la dynamique du modèle (Figure 6-14).

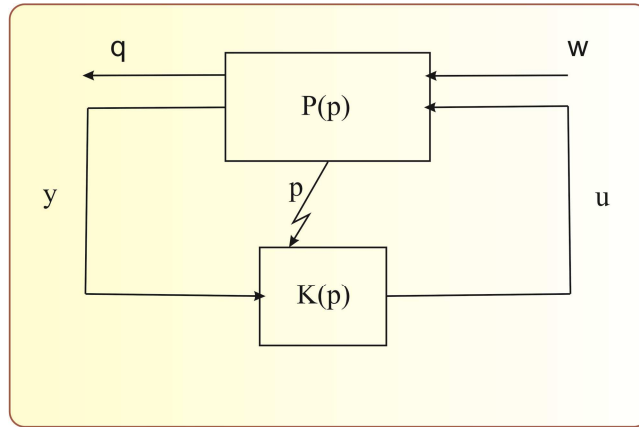


Figure 6-14 : Schéma de principe du modèle de synthèse H_∞

Dans le schéma de la Figure 6-14 w représente les entrées exogènes (référence, perturbations, bruits) ; u représente les commandes. Le signal q (les sorties régulées) est choisi pour caractériser le bon fonctionnement de l'asservissement ; enfin y représente les mesures disponibles pour élaborer la commande.

Le modèle polytopique associé au modèle de synthèse $P(p)$ de la figure 6-14 peut être écrit sous cette forme :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(p)x + B_1(p)w + B_2(p)u \\ q &= C_1(p)x + D_{11}(p)w + D_{12}(p)u \\ y &= C_2(p)x + D_{21}(p)w + D_{22}(p)u \end{aligned} \quad 6.18$$

Les matrices représentatives du modèle ont une forme polytopique correspondant à l'expression 6.19 :

$$\begin{aligned}
 A(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_i(p_i) \\
 B_1(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_{1i}(p_i) \\
 B_2(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_{2i}(p_i) \\
 C_1(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_{1i}(p_i) \\
 C_2(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_{2i}(p_i) \\
 D_{11}(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_{11i}(p_i) \\
 D_{12}(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_{12i}(p_i) \\
 D_{21}(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_{21i}(p_i) \\
 D_{22}(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_{22i}(p_i)
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

On cherche un correcteur dont la représentation est rappelée ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_k &= A_k(p(t))x_k + B_k(p(t))y \\
 u(t) &= C_k(p(t))x_k + D_k(p(t))y
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

qui garantit des performances quadratiques H_∞ pour le système en boucle fermée représenté dans le schéma de la Figure 6-14 . Cela permettra d'assurer que :

- le système en boucle fermée est stable sur tout le domaine de variation du paramètre
- la norme $\mathcal{L}_2$, introduite dans 6.16 est bornée avec γ , pour toutes les trajectoires possibles de p .

Les différentes matrices représentatives du correcteur suivent la même dépendance que le modèle de synthèse par rapport au paramètre variant :

$$\begin{aligned}
A_k(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) A_{ki}(p_i) \\
B_k(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) B_{ki}(p_i) \\
C_k(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) C_{ki}(p_i) \\
D_k(p) &= \sum_{i=1}^r w_i(p) D_{ki}(p_i)
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Un correcteur local Ω_i , formé avec les matrices $A_{ki}, B_{ki}, C_{ki}, D_{ki}$ est calculé pour des valeurs p_i de p . Les pondérations $w_i(p)$ représentent les fonctions d'interpolation, rappelées dans la section précédente (page 173) dépendantes du paramètre variant. Le correcteur LPV est représenté selon la forme suivante :

$$\Omega(p) = \begin{pmatrix} A_k(p) & B_k(p) \\ C_k(p) & D_k(p) \end{pmatrix} \tag{6.22}$$

Pour chaque point de fonctionnement correspondant à p_i , le système en boucle fermée est décrit par les équations :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{cl} &= A_{cl}(p_i)x_{cl} + B_{cl}(p_i)w \\
y &= C_{cl}(p_i)x_{cl} + D_{cl}(p_i)w
\end{aligned} \tag{6.23}$$

où

$$\begin{aligned}
A_{cl}(p_i) &= A_0(p_i) + \mathcal{B}(p_i)\Omega_i(p_i)\mathcal{C}(p_i) \\
B_{cl}(p_i) &= B_0(p_i) + \mathcal{B}(p_i)\Omega_i(p_i)\mathcal{D}_{21}(p_i) \\
C_{cl}(p_i) &= C_0(p_i) + \mathcal{D}_{12}(p_i)\Omega_i(p_i)\mathcal{C}(p_i) \\
D_{cl}(p_i) &= D_{11}(p_i) + \mathcal{D}_{12}(p_i)\Omega_i(p_i)\mathcal{D}_{21}(p_i)
\end{aligned} \tag{6.24}$$

avec

$$\begin{aligned}
A_0(p_i) &= \begin{pmatrix} A(p_i) & 0 \\ 0 & 0_{nk \times nk} \end{pmatrix}, B_0(p_i) = \begin{pmatrix} B_1(p_i) \\ 0 \end{pmatrix}, \\
C_0(p_i) &= (C_1(p_i) \quad 0), \mathcal{B}(p_i) = \begin{pmatrix} 0 & B_2(p_i) \\ I_{nk} & 0 \end{pmatrix}, \\
\mathcal{C}(p_i) &= \begin{pmatrix} 0 & I_{nk} \\ C_2(p_i) & 0 \end{pmatrix}, \mathcal{D}_{12}(p_i) = (0 \quad D_{12}(p_i)) \\
\mathcal{D}_{21}(p_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ D_{21}(p_i) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.25}$$

où

$$\Omega_i(p_i) = \begin{pmatrix} A_{ki}(p_i) & B_{ki}(p_i) \\ C_{ki}(p_i) & D_{ki}(p_i) \end{pmatrix}$$

et n_k représente l'ordre du correcteur donné par la taille de la matrice $A_{ki}(p)$.

Le correcteur $\Omega(p)$ assure la stabilité sur l'ensemble du domaine de variation du paramètre, grâce au fait qu'une unique fonction de Lyapunov :

$$V(x_{cl}) = x_{cl}^T X_{cl} x_{cl} \quad 6.26$$

est utilisée pour l'ensemble du domaine de variation de p . Les différents correcteurs locaux Ω_i peuvent être calculés hors ligne, cependant les matrices $A_k(p)$, $B_k(p)$, $C_k(p)$, $D_k(p)$ du correcteur LPV doivent être mises à jour en temps réel en fonction des mesures du paramètre p .

L'essentiel du problème de synthèse LPV est de déterminer la matrice de Lyapunov $X_{cl} > 0$ et les Ω_i qui satisfont :

$$\mathfrak{B}_{[A_{cl}(p_i), B_{cl}(p_i), C_{cl}(p_i), D_{cl}(p_i)]}(X_{cl}, \gamma) < 0 \quad 6.27$$

Le problème est réduit à la résolution d'un système d'inégalités matricielles linéaires (LMIs). Il existe un correcteur LPV qui garantit des performances H_∞ de niveau γ sur toutes les trajectoires du paramètre p s'il existe deux matrices (R, S) qui satisfont les LMIs :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i R + R A_i^T & R C_{1i}^T & B_{1i} \\ C_{1i}^T R & -I\gamma & D_{11i} \\ B_{1i}^T & D_{11i}^T & -I\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_R & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \quad 6.28$$

$$i = 1, \dots, r$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A_i^T S + S A_i & S B_{1i} & C_{1i}^T \\ B_{1i}^T S & -I\gamma & D_{11i}^T \\ C_{1i} & D_{11i} & -I\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} < 0, \quad 6.29$$

$$i = 1, \dots, r$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{N}_S & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \geq 0 \quad 6.30$$

avec $\mathcal{N}_R, \mathcal{N}_S$ représentant des bases des noyaux de (B_2^T, D_{12}^T) et (C_2, D_{21}) . La construction de X_{cl} à partir de R, S consiste en deux étapes :

- Calculer les matrices M, N telles que $MN^T = I - RS$
- Calculer X_{cl} comme solution unique de $\Pi_2 X_{cl} \Pi_1 = 0$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \begin{pmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{pmatrix} \\ \Pi_1 &= \begin{pmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{pmatrix} \end{aligned} \quad 6.31$$

Ayant X_{cl} , les correcteurs Ω_i sont calculés comme solution de 6.27 :

$$\mathfrak{B}_{[A_{cl}(p_i), B_{cl}(p_i), C_{cl}(p_i), D_{cl}(p_i)]}(X_{cl}, \gamma) < 0$$

Le correcteur synthétisé est appliqué sur le prototype de convertisseur Buck afin de réguler sa tension de sortie.

6.3.2. Application à un convertisseur Buck

6.3.2.1. Construction du correcteur

A partir du modèle LPV identifié, deux correcteurs LTI sont calculés. Ils correspondent aux deux modèles locaux, pour les points de fonctionnement de 2,44Ω et 13,2Ω .

L'interpolation de ces correcteurs est faite en utilisant des fonctions de pondération triangulaires (Figure 3-2). En appliquant le formalisme de la synthèse H_∞ deux correcteurs d'ordre 5 ont été obtenus. Les performances du correcteur obtenu sont analysées dans un premier temps en simulation, sur le modèle LPV.

Afin d'ajuster les performances, en particulier la dynamique du système en boucle fermée, des filtres de pondération sont ajoutés pour la synthèse du correcteur (Figure 6-15). Trois filtres du premier ordre sont utilisés : un filtre sur l'erreur ; un filtre sur la commande ; un filtre sur les perturbations.

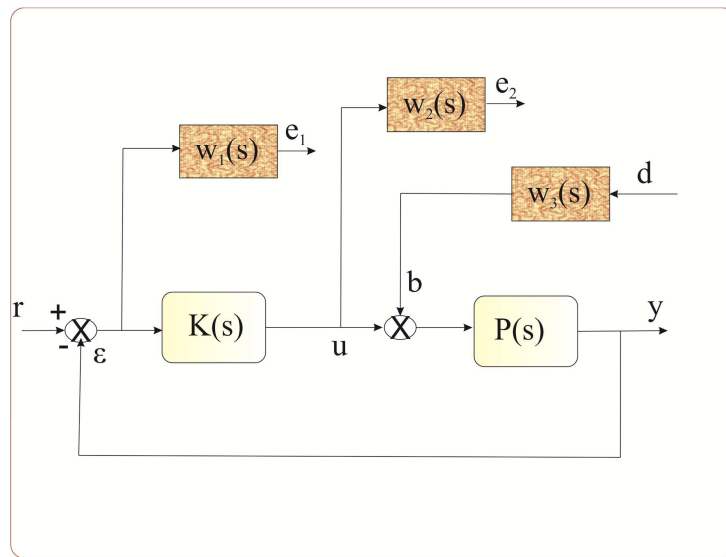


Figure 6-15 : Synthèse H_∞ , filtres de pondération

Les valeurs des paramètres de ces filtres sont ajustées de telle façon que les performances quadratiques H_∞ au niveau γ du modèle LPV soient inférieures à 1. Les fonctions de transfert des filtres sont données par :

$$w_1(s) = 100 \frac{1 + \frac{s}{1400}}{1 + \frac{s}{8}}$$

$$w_2(s) = 10^{-2} \frac{1 + \frac{s}{400}}{1 + \frac{s}{4 \cdot 10^6}}$$

$$w_3(s) = 0,08$$

Dans la Table 6-3 les modules en fréquence des fonctions de transfert des filtres de pondération, sont présentés.

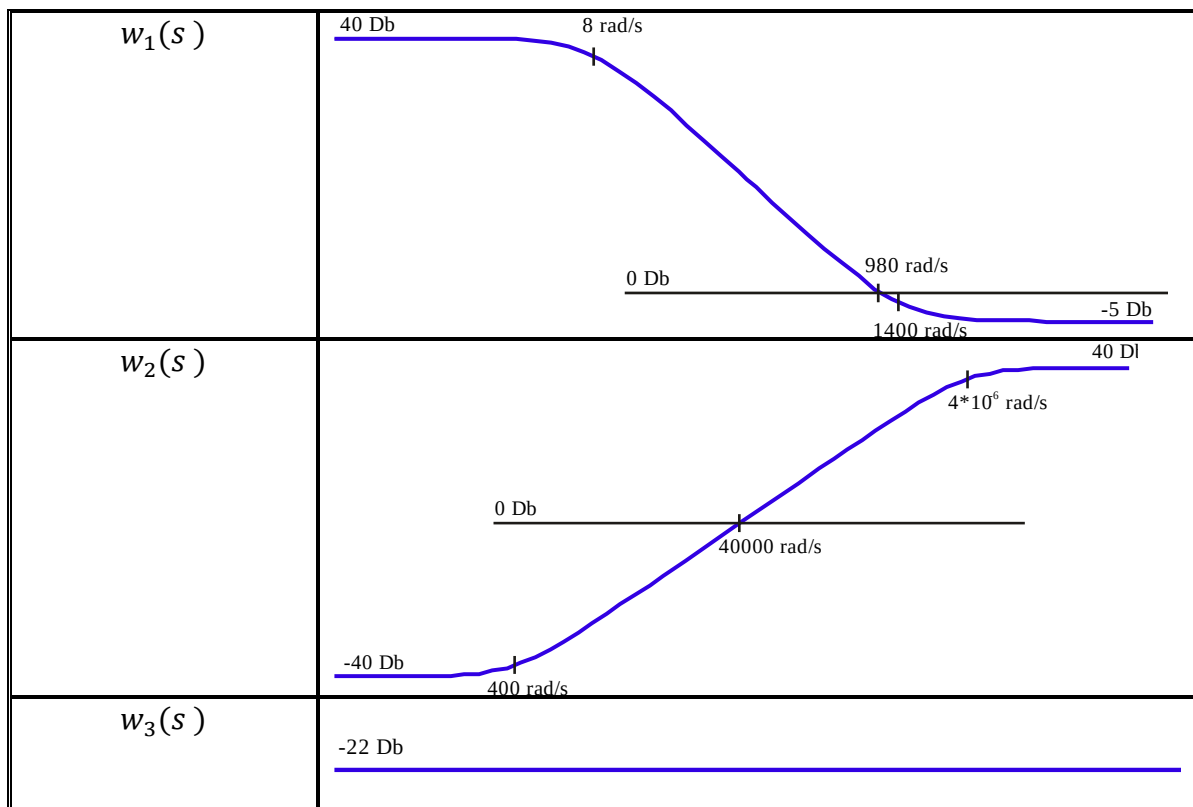


Table 6-3 : Fonctions de transfert des filtres de pondération

La valeur de γ après synthèse du correcteur est :

$$\gamma = 0,7420.$$

6.3.2.2. Résultats d'application de correcteur en simulation et expérimentaux

Dans un premier temps le comportement en boucle fermée en utilisant le correcteur déterminé précédemment est évalué en simulation en utilisant le modèle de synthèse, LPV. Deux situations différentes sont présentées. La tension de sortie du convertisseur, V , doit rester constante, asservie à la consigne, indépendamment de la variation de charge.

Dans la Figure 6-16 la tension de sortie du convertisseur (en vert) est régulée à une consigne (en bleu) fixée à 12 V. Deux changements de la valeur de la résistance de charge sont appliqués (voir agrandissement local). La figure à gauche représente un changement de résistance de $5,6 \Omega$ à 9Ω , la figure à droite représente un changement de résistance de 9Ω à $5,6 \Omega$. Dans les deux situations la régulation rejette rapidement ces perturbations et ramène la tension de sortie à sa valeur de consigne.

La Figure 6-17 représente l'évolution de la tension de sortie (en vert) en réponse à un changement de consigne (en bleu) de 12V à 14V.

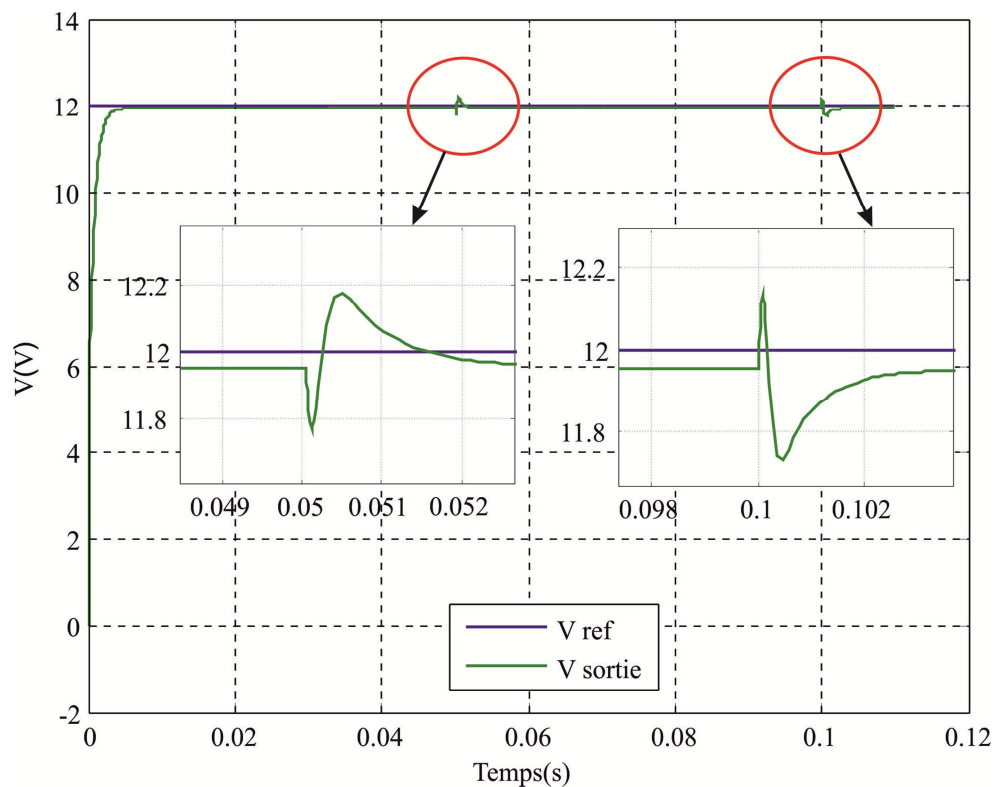


Figure 6-16 : Réponse de la tension de sortie à une variation de charge

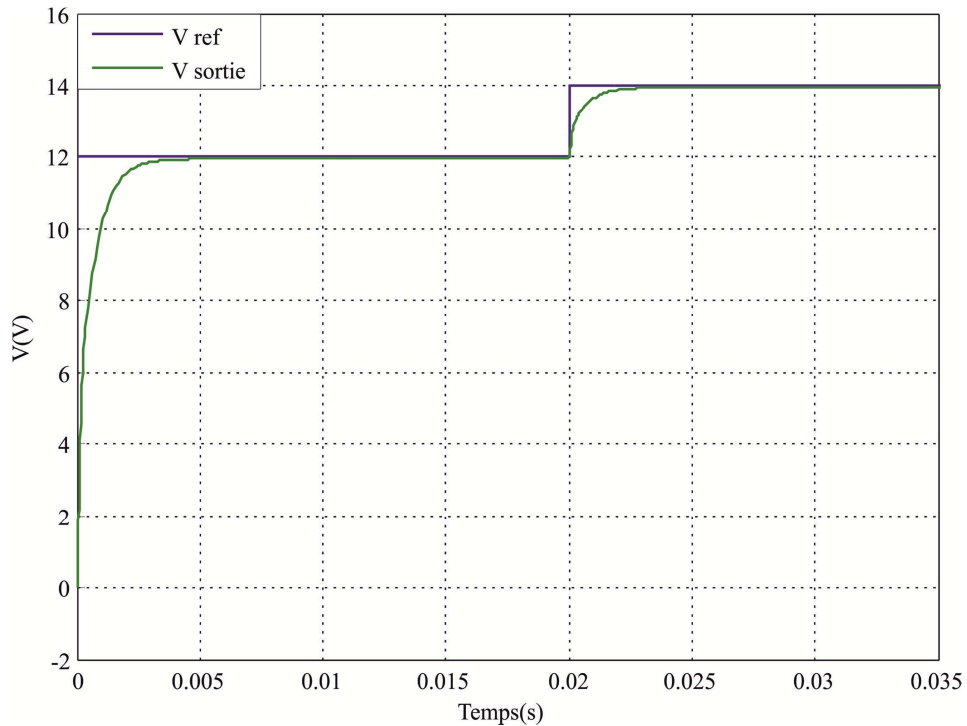


Figure 6-17 : Réponse de la tension de sortie à une variation de consigne

Après avoir observé les résultats en simulation, en utilisant le modèle LPV de synthèse pour représenter le convertisseur, les performances obtenues avec le correcteur déterminé sont évaluées expérimentalement sur le prototype de convertisseur Buck (voir Figure 6-3) ayant servi à l'identification.

La mise en œuvre directe de ce correcteur est sensible à la réalisation numérique. Aussi, une retouche de correcteur est nécessaire afin de faciliter l'implantation en temps réel. En utilisant des troncatures de valeurs singulières de Hankel, le correcteur, initialement d'ordre 5, a été réduit à l'ordre 4. L'état correspondant à la valeur singulière la plus faible a été éliminé.

La différence entre les deux correcteurs est présentée dans les représentations fréquentielles de la Figure 6-18, pour les deux points de fonctionnement choisis ($5,6\ \Omega$ et $9\ \Omega$).

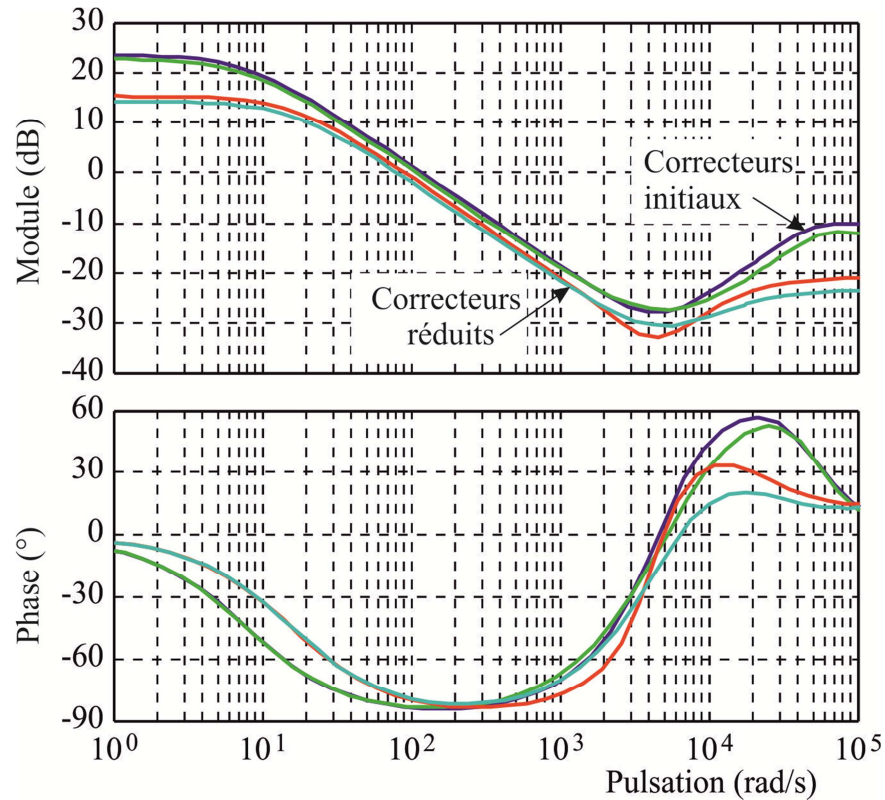


Figure 6-18 : Réponses fréquentielles des correcteurs initiaux et des correcteurs réduits

La réduction d'ordre du correcteur a introduit une légère dégradation au niveau des performances, qui se traduit dans les réponses temporelles par l'apparition d'oscillations et l'augmentation du temps de réponse.

Pour le convertisseur considéré, les matrices associées aux correcteurs LTI sont :

$$A_{k1} = 10^9 \times \begin{bmatrix} -0 & -0,0002 & -0 & 0 \\ -0,0002 & -1,5131 & -0,2159 & 0,0015 \\ 0 & 0,2159 & -0,0000 & 0 \\ -0 & -0,0015 & 0 & -0 \end{bmatrix}$$

$$A_{k2} = 10^9 \times \begin{bmatrix} -0 & 0,0002 & 0 & 0 \\ 0,0002 & -1,5401 & -0 & -0 \\ -0 & 0,2498 & -0 & -0 \\ -0 & 0,0011 & -0 & -0 \end{bmatrix}$$

$$B_{k1} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0010 \\ 7,3359 \\ -0,0076 \\ 0,0036 \end{bmatrix}$$

$$B_{k2} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0009 \\ -7,3990 \\ 0,0066 \\ 0,0027 \end{bmatrix}$$

$$C_{k1} = 10^4 \times [0,0010 \quad 7,3359 \quad 0,0076 \quad -0,0036]$$

$$C_{k2} = 10^4 \times [0,0009 \quad -7,3990 \quad -0,0066 \quad -0,0027]$$

$$D_{k1} = 0,0369 \quad D_{k2} = 0,0267$$

Une étude en simulation est faite, en utilisant un modèle non linéaire pour reproduire le comportement de convertisseur. Le correcteur réduit est appliqué sur ce modèle, en vue de maintenir la tension de sortie du convertisseur, V , asservie à la consigne, indépendamment de la variation de charge.

Les performances de correcteur LPV H_∞ sont comparées avec celles d'un correcteur proportionnel intégral, de paramètres $K = 0,0015$ et $T_i = 3,15 \cdot 10^{-5}$ s.

Notons également que dans le schéma de simulation, afin de reproduire plus précisément la chaîne de mesure expérimentale, un filtre du premier ordre de fréquence de coupure 10 kHz a été introduit sur la mesure de tension afin de limiter l'impact de bruit et comme filtre anti-repliement pour la réalisation numérique. On rappelle que le correcteur H_∞ a une bande passante élevée, ce qui impose une certaine dynamique dans la boucle de réglage. Des réglages du filtre de mesure à des fréquences plus faibles introduisent une dynamique lente dans la boucle de réglage, ce qui dégrade considérablement les performances du correcteur H_∞ .

Dans la Figure 6-19 les deux correcteurs, H_∞ (couleur bleue) et PI (couleur verte) sont appliqués sur le modèle non linéaire en commutation soumis à un changement de consigne (tracé en rouge). On observe un temps de réponse plus faible dans le cas de régulation avec le correcteur LPV H_∞ . La sortie régulée en utilisant le correcteur PI présente des oscillations un peu plus importantes (voir agrandissement) traduisant un moins bon amortissement du système bouclé.

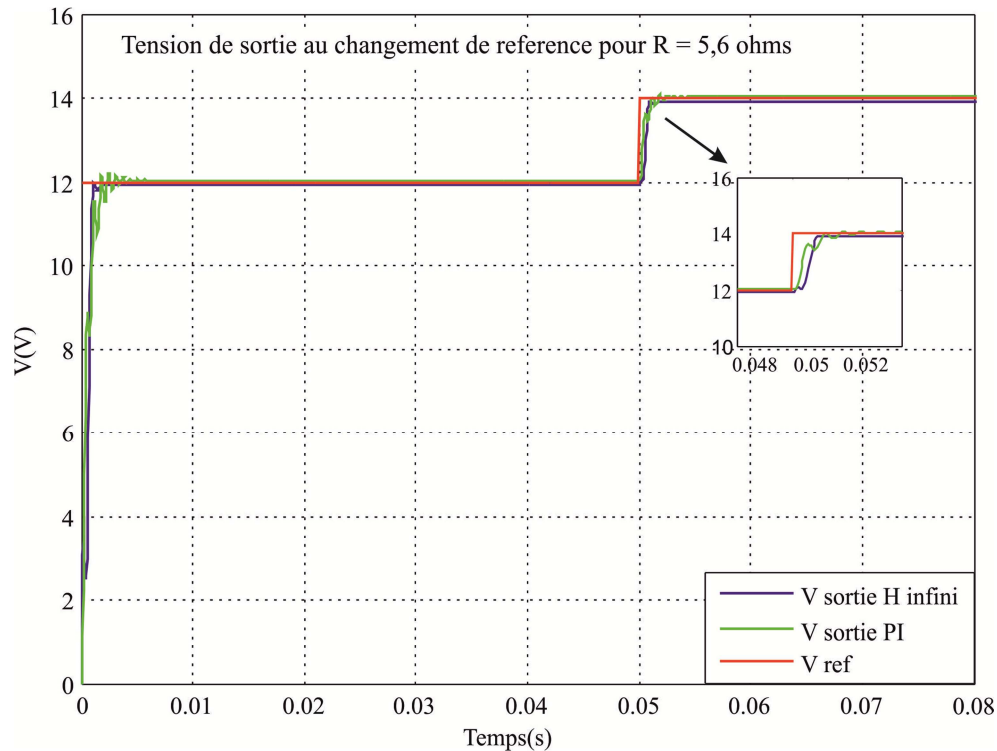


Figure 6-19 : Réponse de la tension de sortie à une variation de consigne, comparaison de la loi de commande H_∞ et du régulateur PI

Dans la Figure 6-20 les deux correcteurs, H_∞ et PI sont appliqués sur le modèle en commutation, soumis à un changement de résistance de charge de $5,6\ \Omega$ à $9\ \Omega$ (voir agrandissement gauche), et de $9\ \Omega$ à $5,6\ \Omega$ (voir agrandissement droite) pour une valeur de consigne de 12V (couleur rouge). En termes de résultats on obtient :

- La sortie régulée en utilisant le correcteur LPV H_∞ (tracé en bleu) présente des meilleures performances que celles obtenues avec le correcteur PI (tracé en vert) en temps de réponse et dépassement.
- La tension de sortie du procédé, corrigé avec le correcteur PI, présente des oscillations plus importantes en raison du mode haute fréquence ($10^4\ \text{rad/s}$) dans la fonction de transfert du procédé :
 - ce mode a un amortissement d'autant plus faible que la résistance de charge est importante,
 - une bande passante trop large peut compromettre la stabilité si le gain vient à proximité de l'axe 0 dB,
 - le mode résonnant apparaît également dans la fonction de transfert en boucle fermée et conduit à des oscillations, en particulier en réponse à des variations de charge
- Le mode haute fréquence est mieux amorti dans le cas du correcteur H_∞ grâce à l'effet d'avance de phase présenté par ce correcteur. Il s'ensuit un comportement temporel plus amorti.

Il faut mentionner que dans le modèle de simulation les résistances parasites ne sont pas prises en compte.

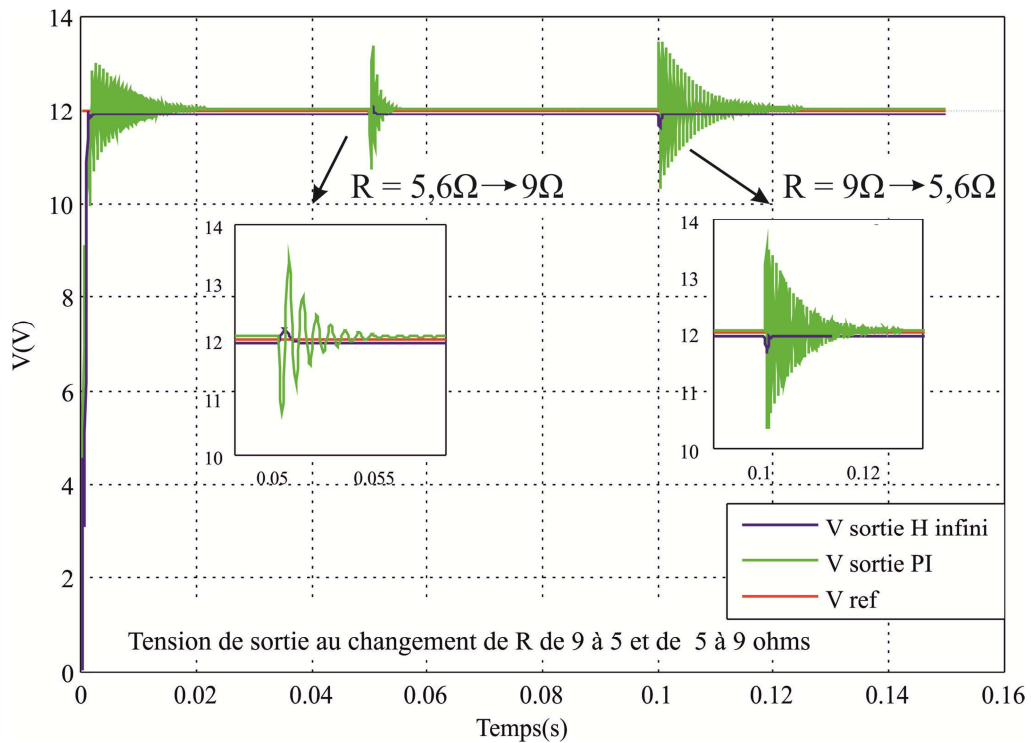
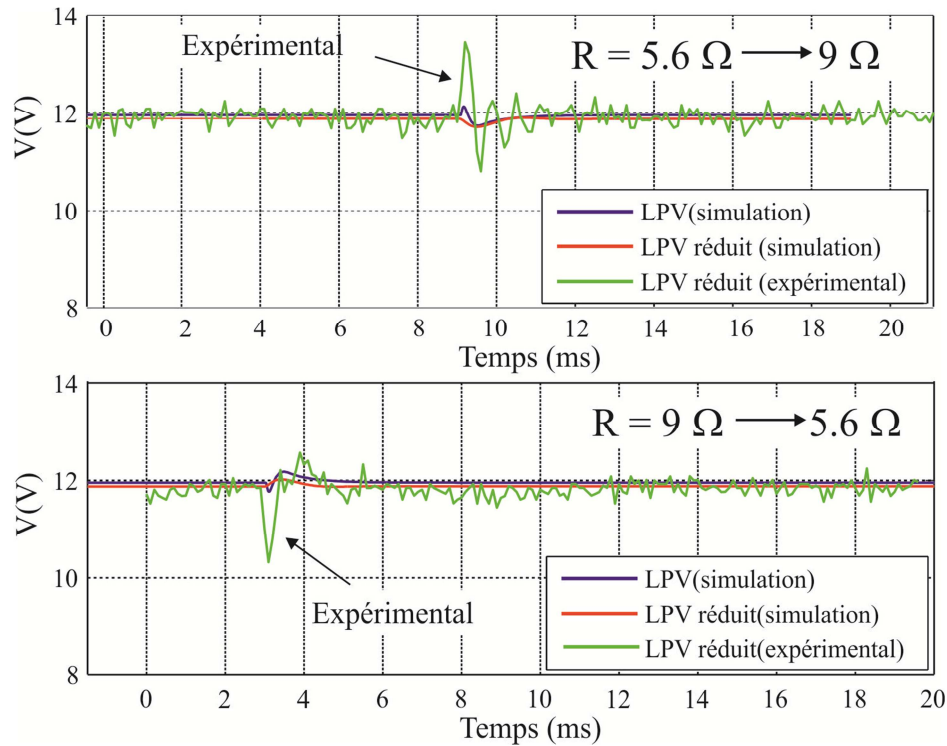


Figure 6-20 : Réponse de la tension de sortie à une variation de charge, comparaison entre régulateurs H_∞ et PI

Le correcteur est conçu en temps continu. Pour l'implantation expérimentale il faut donc effectuer une discrétisation de sa représentation. Le correcteur H_∞ a une bande passante importante, ce qui oblige à utiliser une période d'échantillonnage suffisamment faible, condition nécessaire aussi pour respecter les conditions de discrétisation des modèles LPV, présentées dans le chapitre II. La période d'échantillonnage a été fixée à $25 \mu s$, choix qui respecte la contrainte d'une valeur constante du paramètre variant dans l'intervalle d'échantillonnage.

Le correcteur retouché est implanté sur la maquette expérimentale, et les performances comparées avec celles obtenues en simulation, voir Figure 6-21. L'expérience consiste à réguler la tension de sortie à sa valeur de consigne constante, la tension d'alimentation est fixée à 20 V, la charge est commutée de $5,6\Omega$ à 9Ω (figure supérieure) et de 9Ω à $5,6\Omega$ (figure inférieure).

Figure 6-21 : Correcteurs H_∞ résultats de simulation et expérimentaux

Des différences en termes de temps de réponse peuvent être observées entre la réponse obtenue avec le correcteur initial (en bleu) et celle obtenue avec le correcteur retouché (en rouge). Des oscillations supplémentaires peuvent être observées dans le cas expérimental (en vert).

Les performances obtenues avec le correcteur LPV sont comparées avec celles obtenues avec le régulateur PI (Figure 6-22), de paramètres $K = 0,0015$ et $T_i = 3,15 \cdot 10^{-5} s$. La même expérience est envisagée, avec une tension d'alimentation de 20 V, une tension de consigne de 12 volts, la charge est commutée de $5,6 \Omega$ à 9Ω (figure supérieure) et de 9Ω à $5,6 \Omega$ (figure inférieure). En dépit de la retouche, les performances (en termes de temps de réponse) du correcteur LPV (réponse en bleu) sont légèrement meilleures que celles obtenues avec le régulateur PI (en vert) mettant en évidence un meilleur amortissement des réponses comme il avait déjà été observé en simulation.

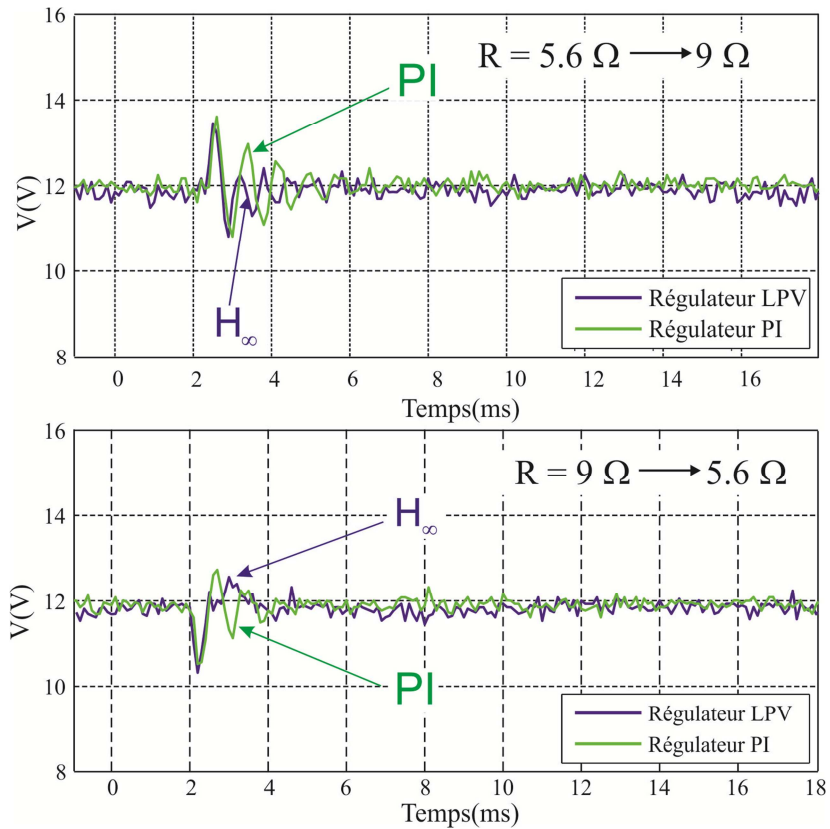


Figure 6-22 : Comparaison des résultats des correcteurs LPV et PI

Ainsi un correcteur H_∞ pour un convertisseur modélisé sous la forme d'une représentation LPV est conçu et implanté. L'adaptation aux perturbations dues aux variations de la charge, résistive dans le contexte de cette étude, est réalisée au moyen d'un correcteur également sous forme LPV. Il faut cependant noter qu'une évolution ultérieure de la loi de commande est la mise en place d'un observateur permettant d'estimer la charge, supposée connue dans le cadre de ce travail.

Dans ce chapitre l'identification d'un convertisseur de puissance Buck, représenté sous une forme LPV, a été faite. La méthode à erreur de prédiction est mise en place en utilisant des données expérimentales recueillies en utilisant une maquette reproduisant le convertisseur. Un correcteur de type LPV obtenu par optimisation H_∞ a été conçu à partir d'un modèle identifié également selon une structure LPV. Il est ensuite utilisé pour la commande, dans un premier temps en simulation avec un modèle non linéaire du convertisseur et finalement validé expérimentalement sur un prototype de convertisseur.

Les études présentées dans ce chapitre représentent la partie finale de cette thèse. Les conclusions sur les travaux réalisés ainsi que différentes pistes qui peuvent être envisagées pour étendre ces travaux sont proposées dans le dernier chapitre de manuscrit.

Conclusions et perspectives

Le domaine d'identification de systèmes LPV n'a pas atteint la maturité et différents travaux ont montré la pertinence de ce type de modèles. Dans la pratique les modèles LTI sont utilisés et ils ont démontré leur utilité dans de nombreuses applications de l'ingénierie. Si on souhaite aller plus loin et exploiter les systèmes avec plus de précision et prendre en compte leur nature non linéaire, la classe des modèles LPV peut être envisagée, tant pour l'analyse, que pour la commande de ce type de systèmes. En plus de leur intérêt afin de représenter avec plus de précisions certaines classes des systèmes non linéaires, ils offrent un cadre formel et théorique permettant de conclure sur les performances des systèmes traités.

Toutefois la formulation directe de modèles peut s'avérer parfois difficile. Cette difficulté, en plus de la nécessité de caractériser numériquement les modèles, conduit naturellement au développement des méthodes permettant l'identification directe de modèles LPV.

Les travaux de cette thèse ont abordé la problématique de l'identification et de la commande des systèmes LPV. Dans le cadre de ces travaux, différentes méthodes d'identification ont été étudiées, et adaptées dans certains cas, pour prendre en compte la nature variante des modèles recherchés. Du point de vue applicatif, l'objectif de nos travaux a été de contribuer à l'utilisation du domaine de l'identification linéaire à paramètres variants, en appliquant les techniques LPV à l'identification d'un modèle de comportement latéral d'un véhicule automobile et d'un convertisseur de puissance. Le véhicule a été considéré comme un système LPV dépendant de sa vitesse. Dans le cas de dispositifs d'électronique de puissance le comportement des convertisseurs est dépendant de la résistance de charge, ainsi dans le cadre de cette application un modèle LPV qui prend en compte la variation de la charge a été élaboré.

Au cours de nos travaux, les représentations et les propriétés des systèmes LPV sont présentées : des représentations sous la forme de fonctions de transfert et des représentations dans l'espace d'état, à temps continu et discret. La forme polytopique de modèles LPV est également présentée.

Ensuite, la discrétisation des modèles LPV et les contraintes qui doivent être respectées, en particulier par rapport au choix de la période d'échantillonnage, sont présentées. Afin de rendre plus claire les notions théoriques présentées et d'analyser l'impact de discrétisation sur les modèles LPV, différentes études portant sur différentes méthodes de discrétisation ont été évaluées et appliquées sur le modèle bicyclette utilisé couramment pour décrire le comportement latéral d'un véhicule automobile.

Par la suite, la démarche du processus d'identification s'est poursuivie selon l'utilisation d'approches locales, ou globales. Une méthode associant les deux approches est aussi développée et présentée.

Plusieurs familles de méthodes d'identification paramétriques ont été étudiées. Parmi ces méthodes, celles à erreur de prédiction et celles des sous-espaces ont été particulièrement abordées.

Dans un premier temps la méthode des moindres carrés a été étudiée. Cette classe de méthode d'identification représente un cas particulier, simplifié, des méthodes à erreur de prédiction. La particularité est donnée par le fait qu'elles utilisent une structure simplifiée de modèle. Le formalisme de la méthode des moindres carrés a été brièvement présenté pour l'identification des modèles invariants, ensuite l'étude a été étendue afin de considérer le cas des modèles LPV. Une analyse des performances de l'identification en cas de présence des bruits a été faite, conduisant naturellement en présence de bruits colorés à l'extension vers les méthodes de la variable instrumentale.

L'étude a été poursuivie dans le cas plus général de méthodes à erreur de prédiction. Le formalisme de ces méthodes a été étudié dans un premier temps pour le cas des systèmes invariants, et ensuite formulé pour prendre en compte les modèles LPV. La classe de modèles à temps continu, représentés dans l'espace d'état, a été utilisée. La partie prédiction a été réalisée par l'intermédiaire d'un prédicteur de Kalman et l'optimisation de la solution a été faite par la méthode de Levenberg-Marquardt. Les méthodes à erreur de prédiction offrent des résultats sensibles à l'initialisation de l'algorithme, qui est choisie par l'utilisateur. Ainsi l'initialisation des paramètres à identifier a un rôle très important pour le bon fonctionnement de la méthode, la convergence des paramètres pouvant conduire naturellement sur un minimum local, la convergence globale n'est pas garantie par ce type de méthodes.

La dernière étude théorique est dédiée aux méthodes de sous-espaces. Pour une meilleure compréhension, le principe de ces méthodes a été expliqué dans un premier temps sur les modèles invariants. Ce type de méthodes concerne des modèles à temps discret représentés dans l'espace d'état. Pour des raisons de simplicité un modèle déterministe (les bruits de modèle et de mesure ont été négligés) a été envisagé. Les deux étapes importantes qui constituent le formalisme de ces méthodes, estimation de la séquence d'état et calcul des matrices représentatives du modèle, ont été présentées telles que :

- L'estimation de la séquence d'état est réalisée en utilisant seulement les données d'entrée et de sortie. Les données sont organisées sous la forme de matrices de Hankel et l'estimation d'état est obtenue par des projections géométriques appliquées en utilisant les images des lignes de ces matrices.
- Ayant à la disposition la séquence d'état, les matrices de système sont facilement obtenues par un calcul direct.

Grâce aux outils géométriques (projections des vecteurs) et algébriques (décompositions LQ et décompositions en valeurs singulières) utilisés par les techniques des méthodes de sous-espaces, le problème de minimum local est contourné, ce type d'algorithme assurant la convergence globale.

Ensuite, les méthodes de sous-espaces ont été modifiées pour prendre en compte la classe des modèles LPV, cela impliquant l'apparition du paramètre variant dans la structure des matrices des données. Suite à cette modification, la taille des matrices des données augmente de façon exponentielle en fonction de l'ordre du modèle et de la taille de la fenêtre de données choisie par l'utilisateur. En raison de cet inconvénient, les outils de calcul disponibles actuellement ne permettent pas l'implantation facile de ces méthodes. Ainsi, des algorithmes de réduction de dimension des matrices mises en jeu sont nécessaires pour la mise en œuvre pratique de la méthode.

La mise en œuvre des méthodes d'identification étudiées a débuté par leur application à partir de données obtenues en simulation numérique de modèles académiques. Cela afin de maîtriser les conditions d'identification.

Une évaluation des approches classiques des méthodes de moindres carrés a été effectuée dans le cas d'un modèle LPV académique, en utilisant les outils de la simulation numérique. Des erreurs d'équations ont été ensuite introduites dans la simulation numérique de modèle à identifier. Des résultats satisfaisants ont été obtenus dans le contexte des perturbations par bruits blancs, ce qui n'a pas été le cas pour des erreurs d'équations lors de bruits colorés.

Pour contourner les lacunes des algorithmes des méthodes des moindres carrés en présence de bruits colorés, les méthodes de la variable instrumentale ont été appliquées sur le modèle académique. Une comparaison entre les deux méthodes a été faite, avec de meilleures performances dans le cas de l'application des méthodes de la variable instrumentale.

Ensuite deux algorithmes, représentant une autre approche des méthodes des moindres carrés, ont été implantés sur un modèle académique de deuxième ordre.

Un modèle académique d'ordre deux a été aussi identifié en utilisant les techniques des méthodes de sous espaces. Les données sont obtenues par la simulation d'un modèle, les techniques de la méthode de deux blocs sont appliquées afin d'obtenir un modèle identifié, capable de représenter la réalité le plus fidèlement possible. Le modèle obtenu a été validé, classiquement, par la simulation en utilisant un autre enregistrement de données.

Les travaux de thèse se sont poursuivis par l'identification du comportement latéral d'un véhicule automobile, sous la forme des modèles LPV, en utilisant les méthodes d'identification étudiées. Souvent le comportement latéral de véhicule est représenté par

un modèle analytique, dit « modèle bicyclette », par conséquence une analyse de ce modèle est réalisée.

En utilisant des données obtenues en simulation numérique, dans un premier temps, le comportement latéral de véhicule a été identifié par l'application des méthodes des moindres carrés, en l'absence et en présence de bruits de mesure.

Ensuite, les études théoriques des méthodes à erreur de prédiction ont été appliquées, en vue d'identifier le comportement latéral du véhicule. Des données expérimentales d'un véhicule Renault Laguna II, ont été exploitées afin d'évaluer et de valider l'approche proposée. Deux structures LPV polytopiques ont été proposées :

- une structure fondée sur l'utilisation d'un modèle analytique, le « modèle bicyclette »
- une structure entièrement paramétrée.

La structure dite « modèle bicyclette » a été construite à partir de la mise en équation du véhicule dont le comportement est ramené sur deux roues. Dans le cadre de cette structure la dépendance de coefficients par rapport au paramètre variant est supposée connue.

Dans le cas de la structure entièrement paramétrée, la dépendance des coefficients par rapport au paramètre variant n'est pas connue. Pour cette raison le nombre de paramètres à identifier augmente considérablement. Une régularisation des termes, en vue de diminuer la sensibilité du modèle par rapport au nombre élevé de paramètres, a été fournie.

La deuxième variante de paramétrage, structure entièrement paramétrée, est plus précise, et donne des résultats plus proches de la réalité, aucune restriction n'étant imposée sur l'évolution des paramètres du modèle. En revanche, le nombre de paramètres à identifier est plus élevé, le niveau des ressources et le temps de calcul peuvent ainsi s'avérer plus importants. Dans le cas de la première formulation du paramétrage, le modèle à identifier implique une représentation plus simple, mais des erreurs peuvent apparaître en raison des contraintes imposées liées au modèle analytique choisi, qui n'est encore qu'une représentation approchée de la réalité.

Pour les deux structures la manipulation des modèles a été effectuée en vue de permettre le calcul analytique des gradients nécessaire dans la phase d'optimisation. Cette approche conduit à une réduction importante du temps de calcul. Une analyse temporelle et fréquentielle des résultats d'identification est présentée, la pertinence des deux modèles obtenus a ainsi été montrée dans la partie validation des résultats temporels et fréquentiels.

Egalement, la méthode de sous espaces est appliquée afin d'identifier le modèle LPV d'un véhicule automobile. Le modèle à identifier est représenté dans l'espace d'état, en temps discret. Les méthodes de sous espaces n'imposent pas de structures particulières

pour le choix de paramétrage de matrices, ainsi elles sont paramétrées entièrement en fonction du choix d'ordre de système. Des valeurs singulières de certaines matrices ont été observées afin de déterminer l'ordre de modèle. Les résultats d'identification sont analysés en utilisant différentes métriques, et le modèle est validé en utilisant deux nouvelles expériences de données, correspondant aux différentes valeurs de vitesse du véhicule.

La dernière partie de la thèse, s'est focalisée sur l'identification d'un convertisseur de puissance DC-DC abaisseur, en utilisant les techniques des méthodes à erreur de prédiction. Le convertisseur de puissance a été vu comme un système LPV, en supposant la résistance de charge comme paramètre variant. Une structure de modèle entièrement paramétrée, en temps continu, représentée dans l'espace d'état, a été choisie. Les données d'identification ont été obtenues à partir d'une expérience effectuée sur une maquette d'un convertisseur de puissance de type Buck. Les résultats d'identification ont été analysés dans les domaines temporel et fréquentiel. Le modèle identifié a été validé par la simulation en utilisant, d'une façon classique, un jeu de données différent de celui utilisé pour la partie identification.

Les travaux d'identification effectués sur le convertisseur de puissance ont été complétés avec l'étude et l'implantation expérimentale d'une loi de commande de type H_∞ . Le formalisme de cette loi de commande est présenté dans le cas de son application au cas des modèles LPV. La loi de commande a été implantée en temps réel sur la maquette de convertisseur de puissance Buck. Cependant, la réalisation de cette loi de commande a été précédée d'une réduction de l'ordre du correcteur obtenu, en raison des problèmes de sensibilité numérique rencontrés. En dépit de pertes de performances, en particulier en raison de la réduction d'ordre du correcteur et de la présence de filtres de mesure non pris en compte dans la synthèse, les performances de la loi de commande, suivant la même structure LPV du modèle de synthèse, se sont montrés légèrement meilleurs que celles des « classiques » correcteurs PI, utilisés couramment pour ce type d'applications. Pour la comparaison des performances, ce type de correcteur a été choisi en raison de son utilisation très largement majoritaire dans le cadre des applications industrielles.

Ainsi, en termes de conclusion générale, cette thèse traite la problématique d'identification des systèmes LPV :

- ◆ Les propriétés importantes de ces systèmes ont été présentées.
- ◆ La discrétisation de modèles LPV a été abordée.
- ◆ L'identification de la classe de modèles LPV a été développée en utilisant les méthodes des moindres carrés, les méthodes de la variable instrumentale, les méthodes à erreur de prédiction et les méthodes de sous-espaces « classiques » dans le cas des systèmes LTI et adaptées au cas des systèmes LPV.
- ◆ Des modèles LPV académiques, obtenues à partir des données créées en simulation ont été identifiées, en utilisant les méthodes d'identification étudiées.

- ◆ D'un point de vue applicatif, des modèles LPV ont été identifiés pour représenter le comportement latéral d'un véhicule automobile (dépendant de sa vitesse) et d'un convertisseur de puissance (dépendent de la résistance de charge), en utilisant les méthodes d'identification étudiés.
- ◆ Un correcteur LPV de type H_∞ a été développé à partir d'un modèle LPV identifié dans le cas de l'application à l'identification d'un convertisseur de puissance. Ses performances ont été analysées par la comparaison des résultats obtenus en boucle fermée avec ceux d'un régulateur PI utilisé couramment dans ce type d'applications.

De point de vue des méthodes d'identification, les méthodes à erreur de prédiction ont certains inconvénients, comme par exemple la nécessité de conditions initiales pour les paramètres à identifier, de plus les procédures d'optimisation peuvent conduire au danger de converger vers des minimums locaux. En revanche les approches fondées sur les méthodes de sous-espaces conduisent à des outils très puissants qui permettent par le biais des techniques des projections qu'elles utilisent de contourner ces inconvénients. Si elles sont bien implantées, les méthodes de sous-espaces peuvent conduire à des procédures d'identification très efficaces et rapides. Toutefois, dans le cas de modèles LPV, la présence de paramètres variants dans les structures des matrices de données conduit à l'explosion de la taille de ces matrices, ce qui rend très difficile leur implantation, nécessitant alors l'utilisation d'algorithmes de réduction.

De point de vue du processus d'identification, d'autres approches peuvent être envisagées. Dans le cadre de cette thèse les travaux ont été focalisés sur l'approche mixte, qui représente un mélange entre les deux approches classiques connues, locale et globale, présentées dans le deuxième chapitre de la thèse. Une seule séquence de données a été utilisée, et différents points de fonctionnement ont été choisis, pour différentes valeurs du paramètre variant dans son espace d'évolution. Différents modèles LTI ont été identifiés, en utilisant cet unique enregistrement, et les modèles interpolés en fonction des valeurs prises par le paramètre variant.

De point de vue des domaines d'application, ces travaux sont, à notre connaissance, une première étude sur l'approche LPV des convertisseurs de puissances et véhicules automobiles. Ainsi, cette thèse a ouvert des perspectives intéressantes en ce qui concerne l'identification de véhicules :

- ◆ Des approches locales d'identification peuvent être développées et appliquées afin d'obtenir des modèles LPV représentant le comportement latéral d'un véhicule automobile
- ◆ Des comparaisons au cas d'identification des modèles LTI peuvent s'avérer intéressantes afin de comparer les performances entre les deux structures

Des perspectives importantes en ce qui concerne l'identification directe des modèles LPV de dispositifs de conversion d'énergie, associée à la synthèse des lois de commande

peuvent être aussi envisagées. Parmi les perspectives permettant d'enrichir ces travaux, on peut mentionner :

- ◆ La construction et la mise en place d'un estimateur de charge. Dans le cadre de la commande, ce besoin est dû à la nécessité pour la loi de commande de la connaissance en temps réel du paramètre variant. Concernant la résistance de charge la mesure directe est difficile, mais un estimateur de ce paramètre peut être envisagé.
- ◆ Le comportement du convertisseur est dépendant aussi des fluctuations éventuelles de la tension d'alimentation, ainsi la variation de cette tension peut être aussi prise en compte comme paramètre variant du système.
- ◆ Les méthodes de prédiction étudiées peuvent être étendues à d'autres convertisseurs d'ordre plus élevés, comme par exemple le SEPIC, afin de le modéliser par un modèle LPV.
- ◆ Enfin, l'implantation des méthodes de sous-espaces peut être étendue aux dispositifs de conversion d'énergie.

D'une manière générale, nous avons essayé de contribuer au renforcement de l'utilisation d'outils méthodologiques d'identification et de la commande des systèmes LPV au cas de dispositifs de conversion d'énergie et véhicules automobiles. Notre idée a été aussi d'ajouter une contribution dans le domaine de l'électronique de puissance en exploitant directement le modèle obtenu pour la synthèse d'une loi de commande. Les travaux présentés ici peuvent être considérés comme un point de départ pour des futurs développements ou études approfondies en vue du développement d'une méthodologie permettant de prendre en compte les besoins de modèles pour la synthèse des lois de commande.

Bibliographie

- Almér, S., Fujioka, H., Jonsson, U., Kao, K.-Y., Patino, D., Riedinger, P., et al. (2007, June 11-13). Hybrid Control Techniques for Switched-Mode DC-DC Converters Part I: The Step-Down Topology. *American Control Conference*.
- Apkarian, P. (1997). On the discretization of LMI-synthesized linear parameter-varying controllers. *Automatica*, vol. 33(4), 655–661.
- Apkarian, P., Gahinet, P., & Becker, G. (1995). Self-scheduled H infinity Control of Linear Parameter-varying Systems: a design Example. *Automatica*, 1251-1261.
- Bamieh, B., & Giarré, L. (2002). Identification of linear parameter varying models. *International journal of robust and nonlinear control*, 842-853.
- Boonto, S., & Werner, H. (2008, Dec 9-11). Closed-Loop System Identification of LPV Input-Output Models - Application to an Arm-Driven Inverted Pendulum. *47th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Butcher, M., Karimi, A., & Longchamp, R. (2008). On the Consistency of Certain. *The International Federation of Automatic Control*.
- De Moor, B., & Van Overschee, P. (1995). Numerical Algorithms for Subspace State Space System Identification. Dans A. Isidori, *Trends in Control - A European Perspective* (pp. 385-422).
- Dos Santos, P., Azevedo Perdicoulis, T., Novara, C., Ramos, J., & Rivera, D. (2012). *Linear Parameter-Varying System identification*. Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Duysinx, P. (s.d.). *Introduction au systeme de controle de la dynamique du vehicule ESP*.
- Felici, F., van Wingerden, J.-W., & Verhaegen, M. (2007). Subspace identification of MIMO LPV systems using a periodic scheduling sequence. *Automatica* 43, 1684 – 1697.
- Fujimori, A., & Ljung, L. (2006). Parameter estimation of polytopic models for a linear parameter varying aircraft system. *Transactions of Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*.
- Ganguli, S., Marcos, A., & Balas, G. (2002, Mai 8-10). Reconfigurable LPV Control Design for Boeing 747-100/200 Longitudinal Axis. *Proceedings of the American Control conference*.

- Gratton, S., Lawless, A., & Nichols, N. (2004). Approximate Gauss-Newton methods for nonlinear.
- Hashemi, S. M., Abbas, H. S., & Werner, H. (2011). Low-complexity linearparameter-varying modeling and control of a robotic manipulator. *Control Engineering Practice*, 248-257.
- Lee, L., & Poolla, K. (1996). Identification of Linear Parameter-Varying Systems via LFTs. *Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, p. 1545–1550.
- Lee, L., & Poolla, K. (1999). Identification of linear parameter-varying systems using nonlinear programming. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, 71-78.
- Ljung, L. (1999). *System Identification : Theory for the User*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Lopes dos Santos, P., Ramos, J., & Martins de Carvalho, J. (2007). Identification of Linear Parameter Varying Systems Using an. *Proceedings of the European Control Conference*.
- Lourakis, M. (2005). A brief description of the Levenberg-Marquardt Algorithm Implemented.
- Lovera, M., & Mercère, G. (2007). Identification for gain-scheduling: a balanced subspace approach. *Proceedings of the American Control Conference*.
- Lu, B., Choi, H., Buckner, G., & Tammi, K. (2008). Linear parameter-varying techniques for control of a magnetic bearing system. *Control Engineering Practice* 16, 1161-1172.
- Madsen, K., Nielsen, H., & Tingleff, O. (2004). *Methods for non-linear squares problems*.
- Maybeck, P. (1979). *Stochastic models, estimation, and control*. Academic Press.
- McKelvey, T. (1995). *Identification of State Space Models from Time and Frequency Data*. Departement of Electrical Engineering Linköping University, Sweden.
- Meyer, C. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra book and solutions manual* (Vol. 2). Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Meza, J. (2010). Steepest Descent. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 719–722.
- Middlebrook, R., & Cuk, S. (1976, June). A general unified approach to modeling switching power converter stages. *IEEE PESC Reg.*, pp. 73-79.
- Middlebrook, R., & Cuk, S. (1976). A general unified approach to modeling switching-converter power stages. *International Journal of Electronics*, 42, 521-550.

- Pressman, A., Billings, K., & Morey, T. (2009). *Switching Power Supply Design*. McGraw-Hill Professional.
- Previdi, F., & Lovera, M. (2003). Identification of a class of non-linear parametrically. 17-33.
- Rajasekaran, V., Sun, J., & Heck, B. (2003). Bilinear Discrete-Time Modeling for Enhanced Stability Prediction. *IEEE Transactions on Power Electronics*, pp. 381-389.
- Ranganathan, A. (2004, June 8). The Levenberg-Marquardt Algorithm.
- Stefanoiu, D., Culita, J., & Stoica, P. (2005). *Fundamentele modelarii si identificarii sistemelor*. Bucurest: Printech.
- Stoica, P., & Söderström, T. (1989). *System Identification*. Cambridge, U.K.: Prentice-Hall International.
- Sznaier, M., & Mazzaro, M. (2003). An LMI Approach to Control-Oriented Identification and Model (In)Validation of LPV Systems. *IEEE TRANSACTIONS ON AUTOMATIC CONTROL*, 1619-1624.
- Takahashi, K., & Massaquoi, S. (2007, Dec 12-14). Neuroengineering model of human limb control - Gainscheduled feedback control approach. *46th IEEE Conference on Decision and Control*.
- Toth, R., Felici, F., Heuberger, P., & Van den Hof, P. (2007). Discrete time LPV I/O and State Space Representations, Differences of Behavior and Pitfalls of Interpolation. *Proceedings of the European Control Conference*, 5418-5425.
- Toth, R., Heuberger, P., & Van der Hof, P. (2010). Discretisation of linear parameter-varying state-space representations. *IET control theory & applications*, vol. 4(10), 2082-2096.
- Van Overschee, P., & De Moor, B. (1996). *Subspace Identification For Linear Systems*. KLUWER ACADEMIC.
- van Wingerden, J.-W., & Verhaegen, M. (2009). Subspace identification of Bilinear and LPV systems for open- and. *Automatica*.
- Verdult, V. (2002). *Nonlinear System Identification: A State-Space Approach*. Ph.D. thesis.
- Verdult, V., & Verhaegen, M. (2000, Décembre). Identification of Multivariable Linear Parameter-Varying systems Based on Subspace Techniques. *IEEE Conference on Decision and Control*.
- Vermeiren, L., Dequidt, a., Guerra, T. M., Rago - Tirmant, H., & Parent, M. (2011). Modeling, control and experimental verification on a two-wheeled vehicle with free inclination: An urban transportation system. *Control Engineering Practice* 19, 744-756.

- Wassink, M. G., van de Wal, M., Scherer, C., & Bosgra, O. (2005). LPV Control for a wafer stage: beyond the theoretical solution. *Control Engineering Practice*, 231-245.
- Welch, G., & Bishop, G. (2006). An introduction to the Kalman filter. *UNC-Chapel Hill, TR 95-041*.
- Xu, W. (2008). Method of Steepest Descent and its Applications.

Résumé

L'identification de systèmes est un sujet très utilisé à la fois dans le monde académique et industriel. Des nombreuses méthodes d'identification de systèmes invariants dans le temps existent dans la littérature et beaucoup d'algorithmes sont utilisés dans la modélisation pratique des systèmes. Ces outils offrent des résultats satisfaisants, mais ils ne sont pas capables de reproduire le caractère non linéaire présent dans les comportements des systèmes physiques. Ce besoin a conduit à l'apparition de la classe des systèmes linéaires à paramètres variants (LPV), capable de modéliser les aspects non linéaires des systèmes. Dans le cadre de cette thèse, différentes méthodes d'identification « classiques » ont été étudiées et modifiées pour prendre en compte le cas des modèles LPV.

Dans un premier temps une étude sur les représentations et discrétisations des systèmes LPV a été réalisée.

Ensuite, les méthodes à erreur de prédiction ont été étudiées et appliquées en vue d'identifier le comportement latéral d'un véhicule, en considérant la vitesse du véhicule comme paramètre variant. Les méthodes à erreur de prédiction ont été également appliquées afin de modéliser un convertisseur de puissance Buck, dont le comportement est sensible au changement de la résistance de charge, considérée comme paramètre variant. L'étude a été poursuivie avec la conception d'une loi de commande H_∞ de type LPV, appliquée au cas du convertisseur.

Finalement, les méthodes des sous-espaces classiques ont été abordées et modifiées pour identifier les modèles LPV et appliquées au cas du comportement latéral d'un véhicule.

Abstract

The identification system is a topic widely used both in the academic world and industry. Several methods of identification of time invariant systems exist in literature and many algorithms are used in practice for modeling real systems. These tools offer satisfactory results, but they are not able to reproduce the non-linearity occurring in the behavior of physical systems. The necessity of more has led to the occurrence of the class of linear systems parameter varying (LPV), able to model the nonlinear system aspects. In this thesis, different classical identification methods have been studied and their structures were modified, in order to take into account the LPV models.

First, a study of representations and discretization of LPV models was performed.

In the sequel, the prediction error methods have been studied and modified in order to take into account LPV models. This method was used to identify the lateral behavior of a vehicle, considering the speed of the vehicle as varying parameter. The prediction error method has also been applied to model a Buck converter, the behavior of which is sensitive to the changes of load resistance, the considered varying parameter.

The study was continued with the design of a H_∞ LPV control law, applied to the converter. Finally, subspace methods were studied, modified for LPV models and applied to identify the lateral behavior of a vehicle.