

Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse.

Frédéric Mercier

► To cite this version:

Frédéric Mercier. Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Université de Technologie de Compiègne, 1998. Français. NNT : . tel-01123948

HAL Id: tel-01123948 https://theses.hal.science/tel-01123948

Submitted on 5 Mar 2015 $\,$

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Copyright



UNIVERSITE DE COMPIEGNE DE

Monsieur MERCIER Frédéric

Contribution à la modélisation de l'emboutissage de toles minces par l'approche inverse

Thèse présentée pour l'obtention du grade de Docteur de l'UTC.



Soutenue le : 19 Mars 1998 Spécialité : Sciences Mécaniques pour l'Ingénieur

CONTRIBUTION A LA MODELISATION DE L'EMBOUTISSAGE DE TOLES MINCES PAR L'APPROCHE INVERSE

Soutenue le 19 Mars 1998 devant le jury composé de :

MM. GUO Y.Q. (Directeur de thèse) BRUNET M. (Président) BATOZ J.L. BOISSE P. (Rapporteur) BUSSY P. (Rapporteur) MME MONTMAYEUR N.

Remerciements

Ce travail de recherche a été réalisé, à <u>l'Université de Technologie de</u> <u>Compiègne</u>, au sein de la Division Modèles Numériques en Mécanique du Département de Génie des Systèmes Mécaniques, et a été financé par le <u>Pôle</u> <u>Modélisation de la Région Picardie</u> que je remercie.

J'exprime ma sincère reconnaissance à mon Directeur de thèse, Monsieur *ying Qiao Guo*, pour m'avoir supporté et guidé tout au long de ce travail.

Je remercie également le Professeur Jean-Louis Batoz, qui m'a suivi et conseillé au cours de mes travaux.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury, pour l'intérêt qu'ils ont montré en analysant cette thèse.

Madame Nicole Montmayeur, ingénieur de recherche chez Dynamic Software,

le Professeur *Michel Brunet*, de <u>l'INSA de Lyon</u>, qui a accepté de présider la soutenance,

mes rapporteurs, les Professeurs *Philippe Boisse* de <u>l'ENSEM</u> <u>d'Orléans</u> et *Pascal Bussy* de <u>l'IUT de Saint Quentin</u>.

Et enfin, un grand grand merci à tous ceux et celles qui m'ont soutenu durant ces quelques années, enseignants, étudiants et secrétaires de la Division MNM ou encore du Département GSM, pour les bons moments et les galéres que nous avons partagés...

Sommaire

CHAPITRE 1. INTRODUCTION.		
1.1 Généralités sur l'emboutissage.	1	
1.2 Intérêt de la simulation numérique de l'emboutissage.	2	
1.3 Méthodes de simulation numérique pour l'emboutissage.		
1.4 Objectifs et plan de la thèse.		
CHAPITRE 2. FONDEMENTS DE L'APPROCHE INVERSE.	7	
2.1 Les origines.	7	
2.2 Description générale de l'Approche Inverse.	8	
2.3 Grandes transformations d'une structure mince.	11	
2.3.1 Mouvement et tenseurs Eulériens.	11	
2.4 Introduction de la plasticité.	16	
2.4.1 Loi de comportement élasto-plastique anisotrope transverse.	17	
2.5 Formulation d'éléments finis.	19	
2.5.1 Principe Des Travaux Virtuels.	19	
2.5.2 Elément fini triangulaire.	20	
2.5.3 Elément quadrangle gauchi.	23	
2.5.3.1 Formulation de l'élément de membrane Q4 gauchi.	23	
2.5.3.2 Evaluation de l'élément de membrane Q4 gauchi	31	

CHAPITRE 3. PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE FLEXION.			
3.1 Elément fini triangulaire de membrane-flexion.	35		
3.1.1 Vecteur des forces internes de l'élément de coque DKT12.	36		
3.1.2 Expression des déformations logarithmiques incluant les effets de flexion.	41		
3.2 Etude des effets de flexion.	45		
3.2.1 Embouti en déformations planes sans avalement.	46		
3.2.2 Mise en forme d'un godet cylindrique à partir d'un flan circulaire.	50		
3.2.3 Emboutissage d'une boîte carrée.	54		
3.2.4 Conclusion.	58		
CHAPITRE 4. CONSIDERATION DES OUTILS.	59		
4.1 Estimation des forces de frottement sous la partie utile.	59		
4.2 Estimation des forces de frottement sous serre-flan.	63		
4.3 Validation et étude des modèles de frottement retenus.	66		
4.4 Prise en compte des joncs.	69		
4.4.1 Calcul des forces de retenue équivalentes dues aux joncs.	69		
4.4.1.1 Formules de Stoughton pour des joncs circulaires.	70		
4.4.1.2 Enrichissement des formules de Stoughton.	73		
4.4.2 Evaluation des forces de retenues et de serrage des joncs.	76		
4.4.3 Implantation des forces de retenue dans l'approche inverse.	79		
4.4.3.1 Etude de l'emboutissage d'un dôme.			
4.5 Identification des parties de la pièce passées par le rayon d'entrée matrice.			

CHAPITRE 5. METHODE ET STRATEGIE DE RESOLUTION	V DU
PROBLEME NUMERIQUE.	86
	96
5.1 Methode de Newton-Raphson pour l'approche inverse.	80
5.2 Détermination d'une solution initiale pour Newton-Raphson.	90
5.3 Evaluation de l'apport de la solution initiale pour le processus de	
Newton-Raphson.	91
5.4 Prise en compte des conditions limites.	98
5.4.1 Relocalisation des parties sous serre-flan.	98
5.4.2 Introduction de conditions aux limites par rigidité additionnelle.	103
5.4.2.1 Introduction d'éléments fictifs de type ressort.	103
5.4.2.2 Conditionnement de la matrice de rigidité.	105
5.4.3 Comparaison entre différentes méthodes de prise en compte des conditions	
aux limites.	106
CHAPITRE 6. VALIDATIONS NUMERIQUES.	111
6.1 Etude du renfort pied milieu.	111
6.2 Etude du pavillon d'un poids lourd.	113
6.3 Etude d'un disque de roue automobile.	117
6.4 Etude d'un carter d'huile.	122
CHAPITRE 7. CONCLUSION ET PERSPECTIVES.	131
Bibliographie	134

1. INTRODUCTION

1.1 Généralités sur l'emboutissage

Emboutir : « Travailler une plaque de métal au marteau et sur une enclume, de manière à la rendre concave d'un côté et convexe de l'autre »[Littré]. Par cette définition, nous sommes à même d'imaginer qu'il y a fort longtemps que l'on emboutit des tôles. Les temps modernes, nés de la société de consommation, ont mené aux développements de l'automobile et à l'équipement des foyers entre autres. Par là même, le marteau est devenu poinçon, l'enclume, matrice et, les pinces et étriers servant à maintenir la tôle, serre-flan.

L'emboutissage consiste alors à fabriquer, à partir d'un flan plan de faible épaisseur, une pièce de forme complexe généralement non développable (Figure 1.1.1). Le flan étant plaqué, avec une certaine force contre la matrice, par le serre-flan et, mis en forme par avancée du poinçon à l'aide d'une presse [Fel]. Nous pouvons présenter le procédé d'emboutissage comme suit :



Figure 1.1.1 : Procédé d'emboutissage

Le processus de l'emboutissage se décompose de la manière suivante :

- Définition de la direction de l'emboutissage.
- Définition du contour et de la position du flan initial.
- Descente du serre-flan pour plaquer la tôle sur la matrice.
- Mise en forme de la tôle par avancée du poinçon.
- Découpage des habillages de l'embouti afin d'obtenir la pièce finale.

Les principaux paramétres du procédé sont :

- L'épaisseur initiale de la tôle.
- La loi de comportement du matériau et l'anisotropie de ce dernier.
- La vitesse du poinçon.
- La position du flan initial et le dimensionnement du contour initial.
- La force de serrage serre-flan et les coefficients de frottement, ainsi qu'éventuellement la forme et la position de joncs.

La réalisation d'un emboutissage s'avère donc complexe, et sa réussite est souvent liée à l'expérience. En effet, l'emboutissage se définit, rappelons-le, par une transformation **permanente** d'une **feuille** de métal en une forme **tridimensionnelle** par l'action d'**outils**.

Ce qui permet de mettre en exergue les aspects suivants :

- Les grandes transformations géométriques d'une structure mince.
- Le comportement élasto-plastique anisotrope du matériau.
- Les contacts et frottements entre les outils et la tôle.

Ainsi, nombreux sont ceux qui, désireux de connaître mieux le processus afin de l'améliorer, ont développés des aides à la conception des outils et autres outils d'analyses et de simulation. Nous pouvons répertorier des méthodes géométriques, expérimentales et analytiques sur des formes simples [Sal94, Mar92]. Plus proche de nous, l'ordinateur et l'avénement de la méthode des éléments finis, qui ont permis le développement du calcul numérique, ont mené à la création de logiciels permettant la simulation de crashs, via la recherche militaire, et le calcul des structures. A partir de ces codes, des progiciels de simulation numérique d'emboutissage des tôles sont apparus.

1.2 Intérêt de la simulation numérique de l'emboutissage

L'intérêt de simuler l'emboutissage par des essais numériques se traduit de la manière suivante :

- Ces essais peuvent se substituer en partie à l'expérimentation coûteuse pécuniairement et temporellement.
- Ils sont utilisés en amont dans le processus de conception, permettant de réduire encore les délais de mise au point.

- La simulation numérique permet également de comparer différentes configurations afin d'optimiser la solution, soit entre autres :
 - Améliorer la qualité de la pièce.
 - Gagner de la matière et par là même réduire les coûts.

Ainsi dès le stade du bureau d'études et tout au long de la phase de conception, la simulation numérique se comporte comme un outil d'analyse et d'aide à la conception. Elle permet d'évaluer de manière qualitative voire quantitative les difficultés de faisabilité des pièces, par rapport au cahier des charges, par l'identification des problèmes de striction-déchirures, de formation de plis et de biens d'autres effets indésirables [Ron,Rav94,Afz94].

1.3 Méthodes de simulation numérique pour l'emboutissage

Comme nous l'avons stipulé précedemment, ces méthodes doivent, dans la mesure du possible, prendre en compte différentes non linéarités (grandes transformations élasto-plastiques, contacts-frottements), qui combinées, forment un système fortement non linéaire.

Nous pouvons effectuer le distinguo suivant pour classifier les différentes méthodes :

- Les outils de simulation du processus, qui par la connaissance du flan dans son état initial (forme, matériau), permettent de déterminer les caractéristiques des configurations intermédiaires et finales de l'objet (trajectoires des points matériels, répartition des déformations et épaisseur, contraintes résiduelles) en tenant compte des sollicitations et conditions géométriques imposées par la présence d'outils (poinçon, matrice, serre-flan).
- Les outils d'analyse de l'emboutissabilité d'une pièce, qui à partir de la connaissance de la géométrie désirée, permettent d'étudier l'influence de différents paramètres pour définir :
 - la géométrie du flan initial (forme, contour)
 - le process (conditions aux limites, forces de serrage, frottements, positions et formes de joncs)
 - le matériau (limite élastique, écrouissage, anisotropie)

L'approche incrémentale est assez largement utilisée pour les codes dédiés à la simulation car, elle prend en compte de manière précise les non-linéarités (élasto-plasticité, contacts). L'expression des lois de comportements est fonction des taux de déformations et de contraintes. Deux types d'algorithmes sont couramment utilisés pour déterminer les incréments de déformations et de contraintes, à partir d'un incrément de déplacement. Le premier est de type statique implicite, il utilise la formulation Lagrangienne Actualisée couplée à une méthode de Newton-Raphson avec vérification, à chaque itération, de l'équilibre de la pièce. Certains codes tels que ABAQUS implicite, INDEED et MARC l'emploient. Cet algorithme permet l'obtention de résultats d'une grande précision pour des temps de calculs malheureusement conséquents. Il existe également sous une forme explicite qui est moins utilisée. Le second algorithme est lui du type dynamique explicite. L'adjonction d'un terme d'inertie fictif dans le système d'équations statiques permet d'établir un schéma dynamique via une méthode de différences finies. L'avantage de cet algorithme est d'annuler les problèmes de convergence et d'économiser de l'espace mémoire. Néanmoins, les résultats sont cette fois-ci moins précis et les temps de calculs restent notables bien que moins grands. De nombreux codes utilisent cette méthode de résolution (DYNA3D, OPTRIS, PAM-STAMP, RADIOSS...).

Les inconvénients majeurs des approches incrémentales restent de trop grands temps de calculs et la nécessité d'avoir un personnel qualifié pour l'ajustage de ces méthodes numériques. Mais, elles permettent d'effectuer la validation de l'outillage adéquat pour la réalisation de l'emboutissage d'une pièce.

Parallèlement, depuis une décennie, des outils d'analyse basés sur des approches simplifiées ont été développés. Ce sont essentiellement des outils d'aide à la conception. Ces approches simplifiées (inverses, directes) utilisent la connaissance a priori de la forme finale de l'embouti, ce qui permet de connaître le déplacement vertical de chaque point. Une comparaison avec le flan plan initial permet une estimation significative des déformations élasto-plastiques en retenant certaines hypothèses simplificatrices sur la loi de comportement du matériau et sur l'action des outils. La loi de comportement est du type Hencky, c'est à dire, basée sur la théorie de la déformation plastique totale. Le traitement du contact quant à lui se limite aux calculs des réactions des outils sur la tôle. L'avantage de ce type d'approches réside dans leurs facilités d'emploi et la rapidité d'exécution. Elles sont par contre moins précises, mais permettent de mettre en évidence qualitativement, et cela dès le stade de la conception, les problèmes d'emboutissabilité d'une pièce. Les codes suivants sont basés sur cette stratégie : ISOPUNCH, SIMEX, FAST3D, FLECHE.

Nous pouvons situer ces diverses approches dans le processus de conception des outils comme suit (Figure 1.3.1):

4



Figure 1.3.1: L'analyse numérique au sein de la chaîne de réalisation d'un outillage.

1.4 Objectifs et plan de la thèse

Depuis 1987, l'équipe de recherche dirigée par le Professeur Jean-Louis Batoz, au sein de l'Université de Technologie de Compiègne, a contribué au développement d'une méthode originale dite « Approche Inverse » pour l'analyse numérique simplifiée de l'emboutissage [Bat89, Bat90, Guo90, Elm91, Dur92, Nar93]. Cette approche, comme tout outil d'analyse de l'emboutissage rappelons-le, exploite la connaissance de la forme finale du produit et permet d'estimer la distribution de grandes déformations élasto-plastiques dans les tôles minces embouties. Elle peut donc être utilisée comme outil d'aide à la conception de pièces embouties de formes complexes.

Afin de rendre cette méthode plus performante et plus précise, les développements suivants ont été effectués dans le cadre de cette thèse:

- La formulation et l'implantation d'un élément de membrane quadrilatéral gauchi en grandes déformations élasto-plastiques dans FLECHE, dans le but d'avoir notamment d'autres possibilités de maillages. (Chapitre 2).
- La prise en compte des effets de flexion, avec un élément triangulaire de facette plane de type DKT12, sans augmentation du nombre de Degrés de Liberté par noeud (Chapitre 3).

- L'amélioration de la prise en compte des outils et des frottements sous serre-flan et sous la partie utile de la pièce (poinçon, matrice) (Chapitre 4).
- La formulation d'un modèle mathématique général, basé sur le modèle de Stoughton, permettant de calculer des forces de retenue pour des joncs de formes complexes, ainsi que son implantation dans l'approche inverse (Chapitre 4).
- La modification de la prise en compte des conditions aux limites, par le conditionnement de la matrice représentative du système, afin d'empêcher l'apparition de concentrations de contraintes aux noeuds bloqués qui devraient se déplacer lors du processus de relocalisation (Chapitre 5).
- La mise en place d'une solution géométrique initiale, où les problèmes de contredépouilles et de parois verticales sont traités, pour la méthode de Newton-Raphson (Chapitre 5).

Des tests de validations sur des pièces académiques et des exemples de pièces industrielles complexes seront présentés. Mais en premier lieu, les fondements de l'approche inverse seront rappelés dans le chapitre 2.

2. FONDEMENTS DE L'APPROCHE INVERSE.

Ce chapitre est en fait un descriptif des caractéristiques essentielles de notre approche simplifiée. Ainsi, il sera effectué en premier lieu une description générale de l'approche inverse incluant les différentes hypothèses qui sous-tendent son originalité et sa spécificité. Mais tout d'abord, nous allons effectuer un bref rappel historique sur les origines et les principales évolutions des approches simplifiées. Le point commun des ces approches étant l'utilisation de la connaissance a priori de la géométrie désirée de l'embouti final.

2.1 Les origines.

Historiquement, ce type de méthodes a été développé pour déterminer les trajets des particules, appartenant à des structures minces, lors de grandes transformations géométriques.

Ainsi la "Geometric mapping method" présentée par Gerdeen, Sowerby et al ([ger74],[ger84],[sow82],[sow85]) se caractérise de la manière suivante:

- Les particules d'une pièce axisymétrique sont rabattues géométriquement sur un plan horizontal afin de déterminer leurs positions initiales dans le flan.
- Une estimation des déformations dans l'épaisseur est effectuée de manière empirique, l'hypothèse de l'incompressibilité étant ensuite utilisée pour déterminer les deux autres déformations principales.
- Les conditions d'équilibre ainsi que la loi de comportement du matériau ne sont pas prises en compte, c'est une méthode géométrique.

Par la suite, une autre méthode d'éléments finis, elle aussi basée sur le rabattement géométrique précité, a été développée par Chung, Lee, Richmond, Sklad et al ([Lee83],[Chu84],[Chu92],[Skl92],[Skl93]). Elle a été baptisée "Ideal forming theory". Elle s'établit comme suit:

- A partir de la connaissance a priori de la forme finale de l'embouti désiré, le travail dû aux déformations plastiques totales est exprimé en fonction des coordonnées initiales des noeuds situés dans le flan plan.
- La minimisation de ce travail, nous permet alors de déterminer les positions des noeuds dans le flan initial.
- La loi de comportement considérée est du type rigide viscoplastique et isotrope plane.
- Il n'y a pas de prise en compte de chargements.

Néanmoins, cette méthode a donné naissance à un code, RAPIDFORM3D, qui fournit le contour du flan initial ainsi que la distribution des déformations dans l'embouti.

Par ailleurs, Batoz, Guo, Duroux et al ont développé, au sein de l'Université de Technologie de Compiègne, une approche simplifiée dénommée Approche Inverse et cela dès 1987 ([Bat89], [Bat90.1], [Guo90], [Elm91], [Dur92], [Nar93]). Cette approche, par éléments finis, utilise la forme connue de l'embouti final pour déterminer la position initiale des particules dans le flan plan de départ, permettant ainsi de calculer les distributions d'épaisseurs, les déformations et les contraintes dans la pièce finale. Nous présenterons plus précisément les hypothèses retenues dans cette méthode ultérieurement. Plusieurs codes de calculs sont issus de cette approche: FLECHE, REFORM (U.T.C), SIMEM2 (RENAULT), SIMEX (SIMTECH), ISOPUNCH (SOLLAC).

Parmi les derniers groupes ayant développés un type d'approche similaire, le groupe Forming.Technologies.Incorporated au Canada sous la houlette de Karima et Liu ([Liu92], [Liu95]), ont créé un code nommé FAST3D, en s'inspirant de l'Approche Inverse et de la "Ideal forming theory". Ce code connaît un certain succès.

Actuellement, d'autres groupes, notamment Coréen et Chinois, développent et travaillent sur ce type de méthodes.

2.2 Description générale de l'Approche Inverse.

On rappelle ici le principe de base ainsi que les hypothèses retenues en adéquation avec cette méthode.

Comme la plupart des autres approches simplifiées développées pour l'analyse numérique de l'emboutissage, l'approche inverse est basée sur la connaissance de la forme finale de l'embouti. En effet, l'idée essentielle de l'approche inverse est de réaliser une analyse non linéaire pour déterminer les positions des noeuds dans le flan initial et les déformations dans l'embouti final, sans considérer l'aspect incrémental de la plasticité et du contact. Si l'on suppose que le flan de départ est plan, alors on connaît explicitement, pour chaque point de l'embouti, son déplacement vertical. Il ne reste donc plus qu'à déterminer les deux déplacements dans le plan comme illustrés dans la figure 2.2.1



Figure 2.2.1) Configurations de l'approche inverse (Le serpent qui avale un éléphant, Le Petit Prince, Saint Exupéry)

Afin d'identifier clairement les diverses variables utilisées au sein de l'approche, le tableau 2.2.1 récapitule les quantités connues ainsi que celles à déterminer par le calcul.

Configurations	Entités connues	Entités à déterminer
considérées		
Flan plan initial C ⁰	• épaisseur initiale h ⁰ .	• Positions des points P ⁰
	• contraintes et déformations nulles.	(déplacements U, V).
	• forme du contour	
	• géométrie, positions des points P.	• variation d'épaisseur.
Embouti final	• déplacement vertical W.	• déformations et contraintes
connu C	• Informations sur les sollicitations, coefficients de frottements, pression de	• réactions verticales et compléments sur les sollicitations (intensités,)
	serrage, directions,	• forme du contour

Tableau 2.2.1) Identification des diverses entités au sein de l'approche inverse

Le principe de base étant posé, les diverses quantités se trouvant identifiées, nous pouvons présenter les hypothèses retenues.

Cette méthode se caractérise par les hypothèses simplificatrices suivantes qui permettent d'effectuer l'intégration des grandes déformations élasto-plastiques dans une tôle mince emboutie:

- La discrétisation s'effectue par éléments finis triangulaires, originellement de *membrane*, mais incluant, depuis nos travaux, *les effets de flexion* ([Bat95.1], [Bat95.2], [Bat96], [Bat97], [Bat98]) qu'il convient de prendre en compte lorsque les outils présentent de petits rayons pour une tôle relativement épaisse. Ces effets sont pris en compte en intégrant un modèle d'élément fini de type DKT6 [Bat92], avec trois points de *Lobatto* suivant l'épaisseur, sans adjonction de degrés de liberté supplémentaires par rapport au modèle de membrane.
- On admet que le processus de déformation est réversible, permettant ainsi l'utilisation de la théorie de la déformation plastique totale (loi de *Hencky*) qui, combinée avec le critère

d'anisotropie de *Hill* relie les contraintes de *Cauchy* au tenseur des déformations logarithmiques totales, rendant donc le calcul direct.

- Le matériau est considéré *élasto-plastique isotrope ou anisotrope transverse* avec écrouissage isotrope (représenté par une courbe uniaxiale de traction).
- Lors des déformations plastiques, on considère l'incompressibilité du matériau, les déformations élastiques étant petites par rapport aux déformations plastiques.
- Les tôles étant minces, l'hypothèse des contraintes planes est retenue.
- Pour représenter *l'action des outils sur la partie utile* de la pièce, on admet que la tôle est soumise à une force de pression normale du poinçon ou de la matrice et à des forces de *frottement* tangentielles déterminées par la loi de *Coulomb*.
- Les seules sollicitations fixées en intensité sont les forces de serrage exercées par le serreflan et les forces de retenues équivalentes induites par la *présence de joncs*. Ces forces de retenue sont calculées en utilisant une formulation simplifiée de *Stoughton* [Sto88], ceci représentant un des développements présenté dans ce rapport. Cette formulation est basée sur le Principe des Travaux Virtuels où le travail (force de retenue * distance parcourue) nécessaire pour faire passer la tôle sur le jonc équivaut aux travaux plastiques provenant des cambrages/décambrages successifs de la tôle et des forces de frottement. Elle prend en compte les propriétés du matériau, la géométrie du jonc ainsi que les paramètres du process.
- Le flan est initialement plan, on connaît son épaisseur. Le contour du flan peut être choisi d'avance (calcul avec *relocalisation* des noeuds sous serre-flan), le bord de l'embouti sous serre-flan étant alors inconnu. A l'inverse, le flan initial est à déterminer si le contour de l'embouti est fixé.

La résolution non linéaire de l'algorithme statique implicite est effectuée par une procédure itérative de *Newton-Raphson* précédée de la détermination d'une solution initiale efficace, développée notamment dans cette thèse, pour pallier aux non linéarités géométriques et aux contre-dépouilles, permettant ainsi une réduction importante des temps de calculs.

D'autres algorithmes de résolution ont été développés et étudiés par Hu [Hu97] dans le cadre de sa thèse de doctorat effectué à l'Université de Technologie de Compiègne.

Les résultats obtenus sont:

- Les trajectoires de toutes les particules de la tôle.
- Les variations d'épaisseur, ainsi que les distributions de contraintes et de déformations dans la configuration finale.
- Le contour du flan initial ou de l'embouti final suivant la condition géométrique fixée.
- L'intensité des efforts provenant de l'action des outils sur la tôle.
- L'identification des particules étant passées par le rayon d'entrée matrice en rapport avec l'aspect de l'embouti.

Cette présentation générale étant effectuée, il convient maintenant d'aborder l'aspect formulatoire de cette approche, et notamment à sa base, l'étude des grandes transformations d'une structure mince.

2.3 Grandes transformations d'une structure mince.

Nous allons présenter dans cette partie les outils conceptuels, de la mécanique des milieux continus, utilisés dans le cadre de l'approche inverse, pour traiter des grandes transformations géométriques de structures minces. Ces éléments ont déjà été présentés dans de nombreux rapports et documents, c'est pourquoi nous tenterons d'aller à l'essentiel.

2.3.1 Mouvement et tenseurs Eulériens.



Figure 2.3.1 Champ de déplacement d'une structure mince

La figure 2.3.1 présente la configuration initiale C^0 de la structure et sa configuration finale C, qui sont les deux seuls états pris en compte dans l'approche inverse.

Dans la configuration initiale recherchée, le vecteur position initiale d'une particule p appartenant à la surface moyenne s'écrit:

$$\vec{X}_{p}^{0} = \vec{X}_{p} - \vec{U}_{p}$$
 (2.3.1)

 \vec{U}_p : vecteur déplacement de la particule p.

avec

$$\vec{U}_{p} = U\vec{i} + V\vec{j} + W\vec{k}$$
(2.3.2)

 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant les vecteurs unitaires de base du repère global.

 \vec{U}_p peut également être défini dans un repère local orthonormé $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ en p, tangent à la surface moyenne de la pièce dans la configuration finale.

$$\vec{\mathbf{U}}_{\mathbf{p}} = \mathbf{u}\vec{\mathbf{t}}_1 + \mathbf{v}\vec{\mathbf{t}}_2 + \mathbf{w}\vec{\mathbf{n}} \tag{2.3.3}$$

En utilisant l'hypothèse de conservation des normales de *Kirchhoff*, le vecteur position d'un point q, se trouvant suivant la direction normale au plan tangent défini au point p appartenant à la surface moyenne, s'exprime alors sous la forme suivante:

$$\vec{X}_{q} = \vec{X}_{p} + z\vec{n} \tag{2.3.4}$$

z représente la position de q dans l'épaisseur par rapport à la fibre neutre de la structure dans la configuration finale.

Dans la configuration initiale nous aurons donc:

$$\vec{X}_{q}^{0} = \vec{X}_{p}^{0} + z^{0}\vec{n}^{0}$$
(2.3.5)

avec

$$\vec{\mathbf{n}}^{0} = \mathbf{k}_{x}\vec{\mathbf{t}}_{1} + \mathbf{k}_{y}\vec{\mathbf{t}}_{2} + \mathbf{k}_{z}\vec{\mathbf{n}}$$
(2.3.6)

Le vecteur unitaire normal à la surface moyenne de la configuration initiale C⁰

et k_x, k_y et k_z, les cosinus directeurs de \vec{n}^0 par rapport à $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$.

Ainsi nous avons, en utilisant 2.3.1 et 2.3.5, déterminé le vecteur position du point q dans sa configuration initiale.

$$\vec{X}_{q}^{0} = \vec{X}_{p} - \vec{U}_{p} + z^{0}\vec{n}^{0}$$
(2.3.7)

Si l'on introduit l'élongation suivant l'épaisseur de la structure:

$$\lambda_3 = \frac{z}{z^0} \tag{2.3.8}$$

on obtient alors:

$$\vec{\mathbf{X}}_{q}^{0} = \left(\mathbf{x}_{p} - \mathbf{u} + \frac{z}{\lambda_{3}}\mathbf{k}_{x}\right)\vec{\mathbf{t}}_{1} + \left(\mathbf{y}_{p} - \mathbf{v} + \frac{z}{\lambda_{3}}\mathbf{k}_{y}\right)\vec{\mathbf{t}}_{2} + \left(-\mathbf{w} + \frac{z}{\lambda_{3}}\mathbf{k}_{z}\right)\vec{\mathbf{n}}$$
(2.3.9)

Afin de définir les déformations, il convient de déterminer le tenseur gradient de transformation pour l'approche inverse. En fait, il s'agit ici de l'inverse du tenseur gradient de transformation soit [F]⁻¹, tel que:

$$[\mathbf{F}]^{-1} = \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{q}}^{0}}{\partial \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{q}}}$$
(2.3.10)

on se placera ici dans le cas d'un comportement membranaire (z=0, surface moyenne), soit alors:

$$[\mathbf{F}]^{-1} = \frac{\partial \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{q}}^{0}}{\partial \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{p}}}$$
(2.3.11)

et l'on admettra qu'il n'y a pas d'influence des termes de courbures, puisque nous considérons que la configuration finale est plane autour du point considéré, nous avons en effet choisi de discrétiser le problème par des facettes planes:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{t}}_1}{\partial \ddot{\mathbf{X}}_p} = \frac{\partial \dot{\mathbf{t}}_2}{\partial \ddot{\mathbf{X}}_p} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{n}}}{\partial \ddot{\mathbf{X}}_p} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$
(2.3.12)

A partir des équations 2.3.11 et 2.3.9 nous obtenons $[F]^{-1}$ associé au repère local $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$.

$$[\mathbf{F}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} & -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{x}}}{\lambda_{3}} \\ -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} & 1 - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{y}}}{\lambda_{3}} \\ -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{x}} & -\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\mathbf{k}_{\mathbf{z}}}{\lambda_{3}} \end{bmatrix}$$
(2.3.13)

Il convient d'introduire alors l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche [B]-1:

$$\left\langle \mathbf{dX}_{q}^{0}\right\rangle \left\{ \mathbf{dX}_{q}^{0}\right\} = \left\langle \mathbf{dX}_{q}\right\rangle [\mathbf{F}]^{-\mathrm{T}} [\mathbf{F}]^{-1} \left\{ \mathbf{dX}_{q}\right\} = \left\langle \mathbf{dX}_{q}\right\rangle [\mathbf{B}]^{-1} \left\{ \mathbf{dX}_{q}\right\}$$
(2.3.14)

Soit encore en utilisant 2.3.13:

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (1 - u_{,x})^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2 & -u_{,y}(1 - u_{,x}) - v_{,x}(1 - v_{,y}) + w_{,x}w_{,y} & 0 \\ u_{,y}^2 + (1 - v_{,y})^2 + w_{,y}^2 & 0 \\ sym & \lambda_3^{-2} \end{bmatrix} (2.3.15)$$

Nous cherchons maintenant à déterminer les élongations principales ainsi que leurs directions, ce sont respectivement des valeurs et vecteurs propres de [B]⁻¹:

$$[\mathbf{B}]^{-1} = [\mathbf{m}] [\lambda^{-2}] [\mathbf{m}]^{\mathrm{T}}$$
(2.3.16)

avec

$$[\mathbf{m}] = \begin{bmatrix} \vec{n}_1 \vdots & \vec{n}_2 \vdots & \vec{n}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{bmatrix}$$
(2.3.17)

où $\lambda_1 \lambda_2$ et λ_3 sont les trois élongations principales, et \vec{n}_1, \vec{n}_2 et \vec{n}_3 sont leurs directions.

L'élongation suivant l'épaisseur peut être déterminée, à partir des deux élongations situées dans le plan de la tôle, en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité. On obtient donc:

$$\lambda_3 = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} = \frac{h}{h^0} \tag{2.3.18}$$

La matrice de transformation, quant à elle, déterminée par les directions des élongations principales dans le repère local, s'exprime par:

$$[m] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 (2.3.19)

où θ (\vec{n}_1, \vec{t}_1) est l'angle entre le repère des déformations principales et le repère local tel que (figure 2.3.2):

$$tg2\theta = \frac{-2B_{12}}{\overline{B}_{11} - \overline{B}_{22}}$$
(2.3.20)



Figure 2.3.2 - Directions des déformations principales

A partir de 2.3.15 on a:

$$\begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} = \left[\frac{1}{2} \left(\overline{\mathbf{B}}_{11} + \overline{\mathbf{B}}_{22} \right) \pm \frac{1}{2} \left(\left(\overline{\mathbf{B}}_{11} - \overline{\mathbf{B}}_{22} \right)^2 + 4 \overline{\mathbf{B}}_{12}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{-1}{2}}$$
(2.3.21)

où \overline{B}_{11} , \overline{B}_{12} , \overline{B}_{22} sont les composantes de $[B]^{-1}$

Enfin et par conséquent, les déformations logarithmiques principales sont données par:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{cases} = \begin{cases} \ln \lambda_1 \\ \ln \lambda_2 \end{cases}$$
 (2.3.22)

avec l'hypothèse d'incompressibilité qui s'exprime sous la forme suivante:

$$\varepsilon_3 = -(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \ln \lambda_3 \tag{2.3.23}$$

On obtient alors le tenseur des déformations logarithmiques (ou naturelles) dans le repère local associé à la configuration finale C:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{x}} & \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{xy}} & \boldsymbol{0} \\ \frac{1}{2} \boldsymbol{\gamma}_{\mathrm{xy}} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{y}} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(2.3.24)

2.4 Introduction de la plasticité

Afin d'intégrer le comportement élasto-plastique des tôles minces embouties, les lois intégrées de *Hencky*, basées sur l'hypothèse du chargement radial (ou proportionnel), sont utilisées dans l'approche inverse. L'approche inverse est donc une méthode dite totale, indépendante du chemin de déformation. En effet, le cas du chargement radial permet d'intégrer analytiquement la plasticité de l'état initial à l'état final.

La loi de *Hencky-Mises* correspond au cas d'un matériau isotrope ([Dur92], [Nar93]), celle de *Hencky-Hill* au cas de l'anisotropie [Hu97], et enfin celle de *Hencky-Ilyushin* au cas particulier de l'anisotropie transverse. De nombreux documents présentent avec précisions les formulations de ces lois ([Lem85], [Hu97], [Bat89]; [Guo90], [Amé88]), c'est pourquoi dans ce document seule la loi de *Hencky-Ilyushin*, qui a été essentiellement utilisée dans nos travaux, va être explicitée.

2.4.1 Loi de comportement élasto-plastique anisotrope transverse.

Comme nous avons pu le stipuler précédemment, seules les configurations initiale C^0 et finale C sont utilisées dans l'approche inverse. C'est pourquoi les déformations élasto-plastiques sont considérées comme indépendantes du chemin de chargement. La théorie de la déformation plastique totale, appelée *Hencky-Ilyushin* est donc adoptée.

Dans cette théorie, les déformations plastiques totales sont définies comme proportionnelles au déviateur des contraintes. Si l'on considère une tôle mince isotrope dans son plan, alors la plasticité peut être décrite par le critère de *Hill* pour le cas spécifique des coques minces, c'est à dire, en utilisant l'hypothèse des contraintes planes [Hos83].

$$\phi = \langle \sigma \rangle [\mathbf{P}] \{ \sigma \} - \overline{\sigma}^2 = 0 \tag{2.4.1}$$

avec $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \rangle$ le tenseur des contraintes de Cauchy, et $\overline{\sigma}$ la contrainte seuil équivalente.

et
$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} & 0\\ -\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{2(1+2\bar{r})}{1+\bar{r}} \end{bmatrix}$$
(2.4.2)

où $\overline{\mathbf{r}}$ est le coefficient d'anisotropie transverse moyen dit coefficient de *Lankford* tel que:

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{1}{4} \left(\mathbf{r}_0 + 2\,\mathbf{r}_{45} + \mathbf{r}_{90} \right) \tag{2.4.3}$$

ici, \mathbf{r}_0 est le coefficient d'anisotropie dans la direction du laminage (0°), défini comme le rapport entre le taux de déformation plastique dans la direction perpendiculaire (90°), et le taux de déformation plastique suivant la direction normale définie par *z*.

$$\mathbf{r}_{\alpha} = \frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{P}}(\alpha + \frac{\pi}{2})}{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{PZ}}} \tag{2.4.6}$$

soit

En introduisant la loi de *Prandtl-Reuss* (écrouissage isotrope) et en se plaçant dans le cas du chargement proportionnel, on peut définir les déformations plastiques totales en fonction des contraintes totales.

$$\left\{\varepsilon_{p}\right\} = \frac{1}{H_{S}}[P]\{\sigma\}$$
(2.4.7)

où $H_s = \frac{\sigma}{\epsilon_P}$ comme défini dans la figure 2.4.1 et $\bar{\epsilon}_P$ est la déformation plastique équivalente telle

que:

$$\bar{\varepsilon}_{\mathbf{P}} = \left(\left\langle \varepsilon_{\mathbf{P}} \right\rangle \left[\mathbf{P} \right]^{-1} \left\{ \varepsilon_{\mathbf{P}} \right\} \right)^{1/2} \tag{2.4.8}$$

Les déformations élastiques des tôles minces, dans le cas de l'isotropie plane sont données par:

$$\left\{ \epsilon_{e} \right\} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\upsilon & 0 \\ -\upsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \ (1+\upsilon) \end{bmatrix} \left\{ \sigma \right\} = [C] \{\sigma\}$$
(2.4.9)

E étant le module d'Young et v le coefficient de Poisson.

Les déformations totales sont alors définies par:

$$\{\epsilon\} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{C} \end{bmatrix} + \frac{1}{\mathbf{H}_{\mathbf{S}}} \begin{bmatrix} \mathbf{P} \end{bmatrix} \right) \{\sigma\}$$
(2.4.10)

avec $\langle \epsilon \rangle = \left\langle \epsilon_{x} \quad \epsilon_{y} \quad \gamma_{xy} \right\rangle.$

En admettant que l'anisotropie (transverse) s'applique à l'élasticité comme à la plasticité et en considérant l'incompressibilité pour les déformations élastique, le coefficient de Poisson peut être défini en fonction de \overline{r} par:

$$\upsilon = \frac{\overline{r}}{1 + \overline{r}} \tag{2.4.11}$$

On obtient alors la loi de comportement totale suivante:

$$\{\sigma\} = \mathbf{E}_{\mathbf{S}}[\mathbf{P}]^{-1}\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$
(2.4.12)

où E_s est le module sécant de la courbe de traction uniaxiale du matériau considéré, soit:

$$E_{S} = \frac{\overline{\sigma}}{\overline{\epsilon}}$$
avec
$$\overline{\epsilon} = \left(\langle \epsilon \rangle [P]^{-1} \{\epsilon\}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(2.4.13)
$$\overline{\sigma}$$

$$\frac{\overline{\sigma}}{E_{e}} = E_{s} + E_{p} = \overline{\epsilon}$$

2.4.1 Courbe de traction uniaxiale

2.5 Formulation d'éléments finis.

Dans cette section, nous présenterons la formulation d'éléments finis de l'approche inverse à partir du Principe des Travaux Virtuels. Deux types d'éléments pour l'approche inverse seront explicités. L'élément triangulaire de facette plane, T3 (Constant Strain Triangle), qui est le premier élément de coque 3D employé dans notre approche, ainsi qu'un quadrangle gauchi développé au cours de mon Diplôme d'Etudes Approfondies [Mer94]. Ces éléments sont tous deux des éléments de membrane uniquement.

2.5.1 Principe des Travaux Virtuels.

Le principe des travaux virtuels ([Bat90.2], [Dha84]), permet de traduire, en utilisant la méthode des résidus pondérés, les équations d'équilibre d'un solide sous une forme variationnelle. Dans notre cas, le P.T.V est établi sur la configuration finale C et s'exprime comme suit:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\text{int}} - \mathbf{W}_{\text{ext}} = \int_{\mathbf{v}} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \right\rangle \{\boldsymbol{\sigma}\} d\mathbf{v} - \left(\int_{\mathbf{v}} \left\langle \boldsymbol{u}^* \right\rangle \{\mathbf{f}_{\mathbf{v}}\} d\mathbf{v} + \int_{\text{Sf}} \left\langle \boldsymbol{u}^* \right\rangle \{\mathbf{f}_{\mathbf{s}}\} d\mathbf{s} \right) = 0$$
(2.5.1)

avec $\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}}, \mathbf{u}^* = \mathbf{0}$ sur S_u (déplacements imposés)



Figure 2.5.1 Equilibre d'un solide

où $\langle u^* \rangle$ représente un champ de déplacements virtuels cinématiquement admissible.

- $\langle \epsilon^* \rangle$ le vecteur de déformations virtuelles.
- $\langle \sigma \rangle$ le vecteur de contraintes de Cauchy.
- ${f_v}$ et ${f_s}$ les vecteurs respectifs des forces volumiques et surfaciques.

La discrétisation du principe des travaux virtuels par éléments finis permet d'écrire la forme variationnelle discrétisée de la manière suivante:

$$\mathbf{W} = \sum_{\text{elt}} \mathbf{W}^{\text{e}} = \sum_{\text{elt}} \left(\mathbf{W}_{\text{int}}^{\text{e}} - \mathbf{W}_{\text{ext}}^{\text{e}} \right) = 0$$
(2.5.2)

2.5.2 Elément fini triangulaire.

La discrétisation du P.T.V s'effectue par éléments triangulaires à 3 noeuds de type facette plane ().

Les déplacements sont interpolés linéairement à partir des déplacements nodaux exprimés dans le repère local de l'élément.



2.5.2 Elément T3 CST

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}_n\} \ \{\mathbf{u}^*\} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{u}_n^*\}$$
(2.5.3)

avec

$$\langle \mathbf{u}_{\mathbf{n}} \rangle = \langle \mathbf{u}_{1} \quad \mathbf{v}_{1} \quad \mathbf{w}_{1} \quad \mathbf{u}_{2} \quad \mathbf{v}_{2} \quad \mathbf{w}_{2} \quad \mathbf{u}_{3} \quad \mathbf{v}_{3} \quad \mathbf{w}_{3} \rangle$$
 (2.5.4)

et où [N] est la matrice des fonctions d'interpolations linéaires, conduisant donc à des déformations (et des contraintes) constantes par élément, telle que:

$$\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$
(2.5.5)
$$N_1 = \frac{1}{2A} \Big((y_3 - y_2)(x_2 - x) - (x_3 - x_2)(y_2 - y) \Big)$$
$$N_2 = \frac{1}{2A} \Big((y_1 - y_3)(x_3 - x) - (x_1 - x_3)(y_3 - y) \Big)$$
(2.5.6)
$$N_3 = \frac{1}{2A} \Big((y_2 - y_1)(x_1 - x) - (x_2 - x_1)(y_1 - y) \Big)$$
$$A = \frac{1}{2} \Big((x_3 - x_2)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_2) \Big)$$
(2.5.7)

où N_i sont les fonctions de forme

A l'aire de l'élément

x_i et y_i les coordonnées locales des noeuds.

Le vecteur des forces internes élémentaires $\{F_{int}^{e}\}$. Celui-ci est défini à partit du P.T.V, exprimé dans le repère local et en prenant l'hypothèse des contraintes planes. Soit alors:

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{e} = \int_{\mathbf{V}^{e}} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{*} \right\rangle \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} d\mathbf{v} = \int_{A^{e}} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}_{x}^{*} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{y}^{*} \quad \boldsymbol{\gamma}_{xy}^{*} \right\rangle \left\{ \begin{matrix} \boldsymbol{\sigma}_{x} \\ \boldsymbol{\sigma}_{y} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} \end{matrix} \right\} \mathbf{h} \mathbf{d} \mathbf{A}$$
(2.5.8)

où $\{\epsilon^*\}$ est défini de la manière suivante pour les cas de déformations de membranes.

$$\left\{ \boldsymbol{\varepsilon}^{*} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} u_{,x}^{*} \\ v_{,y}^{*} \\ u_{,y}^{*} + v_{,x}^{*} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccc} N_{1,x} & 0 & 0 & N_{2,x} & 0 & 0 & N_{3,x} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & 0 & N_{2,y} & 0 & 0 & N_{3,y} & 0 \\ N_{1,y} & N_{1,x} & 0 & N_{2,y} & N_{2,x} & 0 & N_{3,y} & N_{3,x} & 0 \end{array} \right] \left\{ u_{n}^{*} \right\}$$

$$= \frac{1}{2A} \left[\begin{array}{c} y_{23} & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ x_{32} & y_{23} & 0 & x_{31} & y_{31} & 0 & x_{21} & y_{12} & 0 \end{array} \right] \left\{ u_{n}^{*} \right\}$$

$$= \left[B_{m} \right] \left\{ u_{n}^{*} \right\} = \left[B_{m} \right] \left[T \right] \left\{ U_{n}^{*} \right\}$$

$$(2.5.9)$$

où: $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ et $\mathbf{y}_{ij} = \mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j$

avec $\left\langle \mathbf{U}_{n}^{*}\right\rangle$ le vecteur des déplacements virtuels dans le repère global

 $\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{m} \end{bmatrix}$ l'opérateur constant des déformations de membrane

[T] la matrice de transformation du repère global au repère local, telle que:

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{Q}] \\ & [\mathbf{Q}] \end{bmatrix}$$
(2.5.10)

et $\begin{bmatrix} Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{t}_1 & \vec{t}_2 & \vec{n} \end{bmatrix}$

On obtient alors, après discrétisation, le travail virtuel interne sous la forme suivante:

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{e} = \left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle [\mathbf{T}]^{T} [\mathbf{B}_{m}]^{T} \{\sigma\} \lambda_{3} \mathbf{h}^{0} \mathbf{A}$$
(2.5.11)

or

$$W_{int}^{e} = \left\langle u_{n}^{*} \right\rangle \left\{ F_{int}^{e} \right\}$$
(2.5.12)

soit

$$\left\{ F_{\text{int}}^{e} \right\} = \left[T \right]^{T} \left[B_{m} \right]^{T} \left\{ \sigma \right\} \lambda_{3} h^{0} A$$
(2.5.13)

avec $\{\sigma\}$ le vecteur de contraintes de Cauchy.

- λ_3 l'élongation suivant l'épaisseur.
- h⁰ l'épaisseur initiale.
- A l'aire actuelle de l'élément.

Le travail et le vecteur des forces externes relatifs à la prise en compte des actions des outils seront explicités dans le chapitre 4. De même, l'aspect résolution du système d'équations non linéaires obtenu à partir du P.T.V sera présenté dans le chapitre 5.

2.5.3 Elément quadrangle gauchi.

Cette partie traite de la formulation de l'élément de membrane tridimensionnel Q4 gauchi avec schéma d'intégration à 2x2 points de Gauss.

C'est ce travail, effectué à l'U.T.C pendant mon année de D.E.A, qui m'a permis de connaître l'approche inverse.

2.5.3.1 Formulation de l'élément de membrane Q4 gauchi.

Comme dans l'approche inverse, nous recherchons $\{X_q^0\}$, la position du point q dans la configuration initiale est donnée d'après la figure 2.3.1 par:

$$\vec{X}_{q}^{0} = \vec{X}_{q} - \vec{U}_{q}$$
 (2.5.14)

Ici, le vecteur position du point q dans la configuration finale est obtenu par l'hypothèse de Kirchhoff, exprimée dans l'équation 2.3.4:

$$\vec{X}_q = \vec{X}_p + z\vec{n}$$

où \vec{n} est la direction normale à la surface moyenne de la tôle en p. On introduira un paramètre adimensionnel suivant z tel que:

$$\zeta = \frac{2z}{h} \qquad -1 \le \zeta \le 1 \qquad (2.5.15)$$

et on note $\,\vec{V}\,$ le vecteur tel que:

$$z\vec{n} = \frac{1}{2}\zeta\vec{V}$$
(2.5.16)

soit $\vec{V} = h\vec{n}$, où h est l'épaisseur de la coque au point p.

Pareillement dans la configuration initiale:

$$\zeta = \frac{2z^{0}}{h^{0}}, \ z^{0}\vec{n}^{0} = \frac{1}{2}\zeta\vec{V}^{0}, \vec{V}^{0} = h^{0}\vec{n}^{0}$$
(2.5.17)

Par conséquent l'équation 2.3.4 se met sous la forme:

$$\vec{X}_{q} = \vec{X}_{p} + \frac{\zeta}{2}\vec{V}$$
(2.5.18)

Le déplacement du point q s'écrit:

$$\vec{U}_{q} = \vec{U}_{p} + z\vec{n} - z^{0}\vec{n}^{0}$$
(2.5.19)

soit en introduisant ζ :

$$\vec{U}_{q} = \vec{U}_{p} + \frac{1}{2}\zeta\vec{V} - \frac{1}{2}\zeta\vec{V}^{0}$$
(2.5.20)

Nous pouvons maintenant reformuler la position finale du point q de la manière suivante en réutilisant les équations 2.5.14, 2.5.18 et 2.5.20:

$$\begin{split} \vec{\mathbf{X}}_{q} &= \vec{\mathbf{X}}_{q}^{0} + \vec{\mathbf{U}}_{q} \\ \vec{\mathbf{X}}_{p} &+ \frac{\zeta}{2} \vec{\mathbf{V}} = \vec{\mathbf{X}}_{q}^{0} + \vec{\mathbf{U}}_{p} + \frac{\zeta}{2} \left(\vec{\mathbf{V}} - \vec{\mathbf{V}}^{0} \right) \end{split}$$

ce qui entraîne

$$\vec{X}_{q}^{0} = \vec{X}_{p} - \vec{U}_{p} + \frac{\zeta}{2}\vec{V}^{0}$$
 (2.5.21)

Nous souhaitons, pour offrir une nouvelle possibilité de maillage à l'approche inverse, représenter une portion de coque géométrique d'épaisseur variable, telle que celle de la figure 2.5.3, par des éléments Q4 gauchis, i.e des éléments à bordures linéaires dont les 4 noeuds n'appartiennent pas à un même plan (figure 2.5.4).



Figure2.5.3 Géométrie réelle d'une portion de coque d'épaisseur variable

Le gauchissement d'un l'élément (e) est appréhendé par 4 directions non parallèles $\vec{n}_i^{(e)}$ suivant l'épaisseur de la coque en chaque noeud de l'élément.



figure 2.5.4 Géométrie d'un élément

Dans la mesure où un noeud appartient à plusieurs éléments, on construit, une direction moyenne $\vec{\hat{n}}_i$ (figure 2.5.5) à partir des directions aux noeuds $\vec{n}_i^{(e)}$ des fibres épaisseur de chacun des éléments auxquels le noeud appartient:

(1)



Figure 2.5.5 : Valeur moyenne $\vec{\hat{n}}_i$

1

Nous utilisons l'élément de référence de la figure 2.5.6

(2)



Figure 2.5.6 : Elément de référence.

Les fonctions de formes $\langle N_i \rangle$ sont les fonctions bilinéaires définies dans l'élément de référence:

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{4} \langle \cdots (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \cdots i = 1, 4 \rangle$$
 (2.5.23)

où $\xi_i,\eta_i,$ sont les coordonnées du noeud i dans l'élément de référence.

Le vecteur \vec{n} normal en p, peut également être défini à partir de 2 vecteurs tangents à la surface moyenne de l'élément en p.

Ces vecteurs tangents s'expriment en fonction des coordonnées ξ , η de p, des fonctions d'interpolation N_i et des coordonnées globales cartésiennes des noeuds de l'élément.

$$\vec{X}_{p,\xi} = \sum_{i=1}^{4} N_{i,\xi} \vec{X}_i$$
 $\vec{X}_{p,\eta} = \sum_{i=1}^{4} N_{i,\eta} \vec{X}_i$ (2.5.24)

où $\langle X_i \rangle = \langle X_i \quad Y_i \quad Z_i \rangle$ sont les coordonnées cartésiennes (dans le repère global $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) du noeud i situé sur la surface moyenne.

Et finalement

$$\vec{\mathbf{n}} = \frac{\vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{p},\xi} \wedge \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{p},\xi}}{\left\| \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{p},\xi} \wedge \vec{\mathbf{X}}_{\mathbf{p},\xi} \right\|}$$
(2.5.25)

Si nous revenons à la cinématique du problème, à partir des équations 2.5.18 et 2.5.21, nous pouvons définir $\{dX_q^0\}$ et $\{dX_q\}$ qui nous permettront de caractériser la transformation géométrique du point Q par le tenseur gradient de transformation [F].

$$d\vec{X}_{q}^{0} = d\vec{X}_{p} - d\vec{U}_{p} + \frac{1}{2}\vec{V}^{0}d\zeta$$
(2.5.26)

avec $d\vec{V}^0 = \vec{0}$ pour un flan initial plan

$$d\vec{X}_{q} = d\vec{X}_{p} + \frac{\zeta}{2}d\vec{V} + \frac{1}{2}d\zeta\vec{V}$$
(2.5.27)

et donc en utilisant l'élément de référence, on a:

$$\left\{ \mathbf{d} \mathbf{X}_{q}^{0} \right\} = \left[\frac{\partial \mathbf{X}_{q}^{0}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial \mathbf{X}_{q}} \right] \left\{ \mathbf{d} \mathbf{X}_{q} \right\}$$

$$= [\mathbf{F}]^{-1} \left\{ \mathbf{d} \mathbf{X}_{q} \right\}$$

$$= \left[\mathbf{F}_{\zeta}^{0} \right] \left[\mathbf{F}_{\zeta} \right]^{-1} \left\{ \mathbf{d} \mathbf{X}_{q} \right\}$$

$$(2.5.28)$$

Dans l'équation 2.5.28, $\langle dX_q^0 \rangle = \langle dX_q^0 \ dY_q^0 \ dZ_q^0 \rangle$ $\langle dX_q \rangle = \langle dX_q \ dY_q \ dZ_q \rangle$ $\langle d\xi \rangle = \langle d\xi \ d\eta \ d\zeta \rangle$

Les tenseurs $\left[F_{\zeta}^{0}\right]$ et $\left[F_{\zeta}\right]^{-1}$ sont donc à déterminer.

En ce qui concerne $\begin{bmatrix} F_{\zeta}^{0} \end{bmatrix}$, en utilisant l'équation 2.5.26 et le fait que $\begin{bmatrix} F_{\zeta}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_{q}^{0}}{\partial \xi} \end{bmatrix}$, on obtient

pour un élément de membrane ($\zeta = 0$):

$$\left[F_{\zeta}^{0}\right] = \left[\vec{X}_{p,\xi} - \vec{U}_{p,\xi}; \vec{X}_{p,\eta} - \vec{U}_{p,\eta}; \frac{1}{2}\vec{V}^{0}\right] = \left[\vec{a}_{1\zeta}^{0}; \vec{a}_{2\zeta}^{0}; \vec{a}_{3\zeta}^{0}\right]$$
(2.5.29)

c'est à dire, en utilisant les fonctions d'interpolation de l'élément Q4:

$$\begin{bmatrix} F_{\zeta}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_{i,\xi} \begin{vmatrix} X_{i} - U_{i} & & \\ Y_{i} - V_{i} & \vdots & \sum N_{i,\eta} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} X_{i} - U_{i} & & 0 \\ Y_{i} - V_{i} & \vdots & 0 \\ Z_{i} - W_{i} & & Z_{i} - W_{i} & \frac{1}{2}h^{0} \end{bmatrix}$$
(2.5.30)

avec Z_i - $W_i = 0$ dans le cas de l'approche inverse

et
$$\vec{U}_{p} = \sum_{i=1}^{nd} N_{i}(\xi, \eta) \vec{U}_{i}$$
, $\langle U_{i} \rangle = \langle U_{i} \quad V_{i} \quad W_{i} \rangle$

Pour établir $\begin{bmatrix} F_{\zeta} \end{bmatrix}$, on part de l'équation 2.5.28 et de la relation $\begin{bmatrix} F_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_q}{\partial \xi} \end{bmatrix}$, pour obtenir: $\begin{bmatrix} F_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{X}_{p,\xi} + \frac{\zeta}{2} \vec{V},_{\xi} \\ \vdots \\ \vec{X}_{p,\eta} + \frac{\zeta}{2} \vec{V},_{\eta} \\ \vdots \\ \frac{1}{2} \vec{V} \end{bmatrix}$ (2.5.31)

Comme l'on se place à la surface moyenne ($\zeta = 0$), alors:

$$\left[\mathbf{F}_{\zeta}\right] = \left[\vec{\mathbf{X}}_{p,\xi} : \vec{\mathbf{X}}_{p,\eta} : \frac{1}{2} \,\mathrm{h}\vec{\mathbf{n}}\right] = \left[\vec{a}_{1\zeta} : \vec{a}_{2\zeta} : \vec{a}_{3\zeta}\right]$$
(2.5.32)

c'est à dire après interpolation:

$$\left[F_{\zeta}\right] = \left[\sum_{i=1}^{nd} N_{i,\xi} \vec{X}_{i} : \sum_{i=1}^{nd} N_{i,\eta} \vec{X}_{i} : \frac{1}{2} \left(\vec{a}_{1\zeta} \wedge \vec{a}_{2\zeta}\right)\right]$$
(2.5.33)

Nous pouvons alors déterminer:

$$[\mathbf{F}]^{-1} = \left[\mathbf{F}_{(\zeta=0)}\right]^{-1} = \left[\mathbf{F}_{\zeta}^{0}\right] \left[\mathbf{F}_{\zeta}\right]^{-1}$$
(2.5.34)

$$\operatorname{avec}\left[F_{\zeta}\right]^{-1} = \frac{1}{\operatorname{det}\left[F_{\zeta}\right]}\left[\operatorname{cofac} F_{\zeta}^{\mathrm{T}}\right]$$
$$\left[\operatorname{cofac} F_{\zeta}^{\mathrm{T}}\right] = \left[\vec{a}_{2\zeta} \wedge \vec{a}_{3\zeta} \quad \vdots \quad \vec{a}_{3\zeta} \wedge \vec{a}_{1\zeta} \quad \vdots \quad \vec{a}_{1\zeta} \wedge \vec{a}_{2\zeta}\right]$$
$$\operatorname{det}\left[F_{\zeta}\right] = \left|\left(\vec{a}_{1\zeta} \wedge \vec{a}_{2\zeta}\right) \cdot \vec{a}_{3\zeta}\right|$$

Le tenseur gradient de transformation est donc ainsi établi. Nous pouvons dès lors définir l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche [B]⁻¹ dans le repère global en utilisant l'équation 2.314:

$$\left\langle d\mathbf{X}_{q}^{0}\right\rangle \left\{ d\mathbf{X}_{q}^{0}\right\} = \left\langle d\mathbf{X}_{q}\right\rangle [\mathbf{F}]^{-T} [\mathbf{F}]^{-1} \left\{ d\mathbf{X}_{q}\right\} = \left\langle d\mathbf{X}_{q}\right\rangle [\mathbf{B}]^{-1} \left\{ d\mathbf{X}_{q}\right\}$$

Afin de définir la déformation en un point, nous exprimons [B]⁻¹ dans le repère local, on a donc :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{local}} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\varsigma} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\text{global}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\varsigma} \end{bmatrix}$$
(2.5.35)

avec $\left[\mathbf{Q}_{\varsigma}\right] = \left[\vec{\mathbf{t}}_{1\varsigma} : \vec{\mathbf{t}}_{2\varsigma} : \vec{\mathbf{n}}_{\varsigma}\right].$

 $\vec{t}_{1\zeta}$, $\vec{t}_{2\zeta}$ et \vec{n}_{ζ} définissent le repère orthonormé tangent (figure 2.5.7) à chaque point de Gauss servant au calcul du travail interne élémentaire.

Notons que les points de Gauss appartiennent à la surface moyenne de l'élément


Figure 2.5.7 Représentation des repères

$$\vec{t}_{1\varsigma} = \vec{a}_{1\varsigma} / \left| \vec{a}_{1\varsigma} \right|, \qquad \qquad \vec{n}_{\varsigma} = \frac{\vec{a}_{1\varsigma} \wedge \vec{a}_{2\varsigma}}{\left| \vec{a}_{1\varsigma} \wedge \vec{a}_{2\varsigma} \right|}, \qquad \qquad \vec{t}_{2\varsigma} = \vec{n}_{\varsigma} \wedge \vec{t}_{1\varsigma}$$

L'inverse du tenseur de Cauchy-Green étant établi, nous pouvons revenir à la détermination du travail virtuel interne, par l'équation 2.5.8 qui devient ici:

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{e} = \left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle_{-1-1}^{1} \left[\mathbf{B}_{0} \right]^{\mathrm{T}} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} \lambda_{3} \mathbf{h}^{0} \left| \vec{\mathbf{a}}_{1\varsigma} \wedge \vec{\mathbf{a}}_{2\varsigma} \right| d\boldsymbol{\xi} d\boldsymbol{\eta}$$
(2.5.36.)

soit après une intégration par un schéma à 2×2 points de Gauss :

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{e} = \left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle^{e} \sum_{i}^{\text{NPIE}} \sum_{j}^{\text{NPI}\eta} \left[\mathbf{B}_{0} \right]^{\text{T}} \{\sigma\} \lambda_{3} \mathbf{h}^{0} \left| \vec{\mathbf{a}}_{1\varsigma} \wedge \vec{\mathbf{a}}_{2\varsigma} \right| \boldsymbol{\omega}_{i} \boldsymbol{\omega}_{j}$$
(2.5.37)

d'où
$$\left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{e}} \right\} = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \left[\mathbf{B}_{0} \right]^{\text{T}} \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} \lambda_{3} \mathbf{h}^{0} \left| \vec{\mathbf{a}}_{1\varsigma} \wedge \vec{\mathbf{a}}_{2\varsigma} \right| \boldsymbol{\omega}_{i} \boldsymbol{\omega}_{j}$$
(2.5.38)

avec la matrice des déformations de membrane qui s'exprime sous la forme suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathrm{mf}(\zeta=0)}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\xi\mathrm{m}} \end{bmatrix}$$
(2.5.39)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathbf{m}}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11}^{0} & \mathbf{C}_{21}^{0} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \mathbf{C}_{12}^{0} & \mathbf{C}_{22}^{0}\\ \mathbf{C}_{12}^{0} & \mathbf{C}_{22}^{0} & \mathbf{C}_{11}^{0} & \mathbf{C}_{21}^{0} \end{bmatrix}$$
(2.5.40)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\xi m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left| \begin{array}{c} \left\langle \mathbf{t}_{1\zeta} \right\rangle \mathbf{N}_{i,\xi} \\ \left\langle \mathbf{t}_{1\zeta} \right\rangle \mathbf{N}_{i,\eta} \\ \left\langle \mathbf{t}_{2\zeta} \right\rangle \mathbf{N}_{i,\xi} \\ \left\langle \mathbf{t}_{2\zeta} \right\rangle \mathbf{N}_{i,\eta} \\ \left\langle \mathbf{t}_{2\zeta} \right\rangle \mathbf{N}_{i,\eta} \end{bmatrix} \dots \mathbf{i} = 1, \mathbf{nd} \end{bmatrix}$$
(2.5.41)

$$\begin{bmatrix} C_{\varsigma}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{\varsigma} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{\varsigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{0} & C_{12}^{0} & C_{13}^{0} \\ C_{21}^{0} & C_{22}^{0} & C_{23}^{0} \\ 0 & 0 & C_{33}^{0} \end{bmatrix}$$
(2.5.42)

où $\langle U_n^* \rangle^e$ est le vecteur des déplacements virtuels élémentaire dans le repère global

- $\begin{bmatrix} B_0 \end{bmatrix}$: la matrice des déformations de membrane
- $\{\sigma\}$: les contraintes de Cauchy
- λ_3 : l'élongation de l'épaisseur

La formulation de ce nouvel élément étant réalisé, il convient de situer les performances offertes par cette nouvelle possibilité de maillage.

2.5.3.2 Evaluation de l'élément de membrane Q4 gauchi

Afin d'évaluer les performances de l'élément Q4 gauchi, nous avons créé un test académique qui permettra de comparer les résultats avec ceux de l'élément T3 (CST).

Ce test consiste à emboutir, à une profondeur de 54.2mm, une tôle circulaire de 200mm de diamètre et d'épaisseur 1mm avec un poinçon sphérique de 150mm de diamètre.

Un acier courant pour l'emboutissage a été considéré, ce qui permet de prendre en compte l'élasto-plasticité du matériau, exprimée par une loi de Hollomon sous la forme suivante: σ =567.29 $\epsilon^{0.2637}$. Par contre, les aspects relatifs aux frottements sous outils ainsi que le caractère anisotrope de la tôle ne sont pas considérés.

Le quart de la pièce a été discrétisé par des maillages qui ont respectivement 276 et 138 éléments pour le T3 et le Q4. Ce qui permet d'avoir dans les deux cas 157 noeuds, les systèmes à résoudre possèdent donc le même nombre d'équations.

Les résultats de l'analyse numérique effectuée par l'approche inverse sont présentés dans la figure 2.5.10, il s'agit ici des variations d'épaisseur.



Figure 2.5.9 Distributions d'épaisseur pour l'analyse de l'emboutissage d'une calotte sphérique

Les temps CPU nécessaires pour l'obtention de ces résultats sont de 17 secondes pour le T3 et de 2 minutes et 14 secondes pour le Q4 sur une station VAX 4000. La différence entre ces temps est plus que notable, il faut néanmoins stipuler que l'ensemble du programme est originellement conçu pour l'élément T3 et que par là même optimisé pour cet élément.

De plus, l'élément T3 de facette plane ne possède qu'un point d'intégration, son centre de gravité, alors que le Q4 gauchi exige un schéma d'intégration à 4 points de Gauss, ce qui nécessite la création de repères à ces points. A cela, s'ajoute le fait que la construction du gradient de transformation est plus coûteuse. La détermination de l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche dans les repères locaux est donc temporellement plus conséquente que celle de l'élément triangulaire.

Toutefois, si on ne regarde que les résultats numériques, on constate qu'ils sont quasi identiques. L'épaisseur minimum étant de 0.845 mm pour le T3 et de 0.84 mm pour le Q4. Quand à la différence entre les maximaux, elle est aussi très négligeable, 1.07 mm pour le T3 et 1.08 mm pour le Q4.

Dans le maillage T3, on observe classiquement que l'orientation des éléments dirige quelque peu la solution obtenue.

Hormis, qu'il faille admettre que la programmation doit être optimisée pour l'élément quadrangle, cet élément permet d'envisager de mailler avec peu d'éléments les parties sous serreflan. En effet, ces parties sont généralement planes voire gauche, on peut donc considérer que les effets de flexion sont négligeables dans ces zones, et que par là même, l'emploi d'un élément de membrane de type quadrangle gauchi semble approprié. Sachant de plus que les parties sous serre-flan sont remaillées par relocalisation, et que les éléments quadrangles supportent mieux d'éventuelles distorsions. Il serait intéressant de poursuivre dans cette voie afin de juger de l'apport de cet élément.

Partant du constat que le triangle offre de bonnes performances pour des temps assez courts, et qu'il pouvait être modifié plus judicieusement pour prendre en compte les effets de flexion, nous allons présenter dans le chapitre 3 la formulation et les caractéristiques de ce nouvel élément triangulaire.

3. PRISE EN COMPTE DES EFFETS DE FLEXION.

L'objet de ce chapitre concerne la considération des effets dus à la flexion lors d'un emboutissage. Il apparaît dans un grand nombre d'emboutissages industriels que les effets de membrane sont dominants, toutefois, pour certains cas, plusieurs auteurs ([sto85], [Wan88], [cho89], [Per91]) ont montré la nécessité de prendre en compte les effets de flexion. Quelque soit le type d'approche, incrémentale ou simplifiée, ces justifications sont les mêmes puisque lors d'opérations d'emboutissage, la matière est soumise à des flexions lorsqu'elle passe par les rayons des outils et plus particulièrement par le rayon d'entrée matrice.

Quand des outils à faibles rayons sont employés, le fait de négliger les déformations de flexion entraîne une sous-estimation importante des déformations maximales. De plus, désireux d'estimer à la suite de notre approche simplifiée le plissement et le retour élastique de la pièce utile après retrait des outils, nous avons besoin d'informations sur les variations de déformations et de contraintes dans l'épaisseur de la tôle. C'est également une nécessité pour prédire la striction comme ont pu le montrer Arrieux, Brunet, Boivin Hage Chehade et Sabourin ([Hag90], [Hag91], [Arr92], [Bru93], [bru94], [Bru95.1], [Bru95.2], [Bru96]).

Bien que de nombreuses analyses incrémentales, utilisant des éléments de coque, prennent en compte les effets de flexion ([Wan85], [Mat86], [Tho89], [Adv90], [FE-91], [Che92], [Adv92], [Teo93], [Mak93], [Wan93], [Met94], [Alt94], [CET94], [Owe95], [She95]), il existe assez peu d'études spécifiques sur les effets de flexion ([sto85], [Wan88], [cho89], [Per91]) et leur prise en compte.

Plusieurs techniques ont été proposées pour prendre en compte la flexion lorsque des éléments finis de membrane sont utilisés pour l'analyse. L'une d'entre elle, décrite par Onate [Ona89], permet d'introduire la flexion dans un élément triangulaire de membrane sans adjonction de degrés de liberté de rotation supplémentaires. Cette stratégie a été développée et utilisée avec succès par Rio et al [Rio93] ainsi que Brunet et Sabourin ([Bru93], [Bru94]).

Dans le paragraphe qui va suivre nous allons décrire la formulation de l'élément de coque en membrane-flexion (sans ddl supplémentaires par rapport au modèle de membrane)utilisé dans le cadre de l'approche inverse.

3.1 Elément fini triangulaire de membrane-flexion

Comme nous l'avons stipulé précédemment dans le chapitre 2, section 2.5.2, nous ne prenions originellement en compte que les effets de membrane en considérant des déformations uniformes dans l'épaisseur et avec une discrétisation par éléments triangulaires de type T3 à déformations constantes par élément. Afin d'introduire la flexion nous devons distinguer deux contributions.

D'une part la prise en compte d'un terme de flexion dans l'expression du travail virtuel interne. Cette contribution fait intervenir des moments de flexion constants par élément et un opérateur de courbures virtuelles qui s'exprime uniquement en fonction des déplacements virtuels horizontaux U* et V*. En effet les 3 rotations réelles et le déplacement vertical réel sont connus dans l'approche inverse, puisque les surfaces moyennes finale et initiale sont données. L'opérateur des courbures virtuelles est celui de l'élément de plaque mince en flexion DKT6 proposé par Batoz [Bat91]. Cet opérateur est constant par élément. Les effets de membrane et flexion sont ainsi "équilibrés", tous les efforts et opérateur sont constants par élément.

D'autre part les moments de flexion sont obtenus par intégration des contraintes de Cauchy pondérées par la coordonnée z suivant l'épaisseur. Cette dernière est inconnue, elle varie au cours des itérations de la résolution du problème non linéaire. Les contraintes de Cauchy sont reliées aux déformations logarithmiques en un point de coordonnée z non nulle. La loi de comportement totale découlant de l'hypothèse du chargement radial (section 2.4 du chapitre2). Les déformations logarithmiques en un point sont obtenues en établissant le tenseur gradient de déformation en un point quelconque de la coque. Celui-ci fait intervenir les courbures. Pour notre part, nous avons considéré des courbures constantes par élément. Elles sont déterminées en considérant une approximation semi C⁰ des normales à la surface moyenne, normales définies au milieu des côtés par "moyennes" des normales des deux éléments partageant le noeud milieu. Le tenseur de Cauchy-Green gauche est ensuite calculé ainsi que ses valeurs propres pour permettre de définir les déformations logarithmiques. L'épaisseur est alors actualisée en utilisant l'hypothèse d'incompressibilité totale au niveau de la surface moyenne. Cet élément a été présenté avec précision dans les publications suivantes ([Bat95.1], [Bat95.2], [Bat96.1], [Bat96.2], [Bat97.1], [Bat98]).

3.1.1 Vecteur des forces internes de l'élément de coque DKT12

La discrétisation de la forme tridimensionnelle de la pièce désirée est effectuée par éléments de coque triangulaires de facette plane et d'épaisseur constante, avec les 3 noeuds sommets P1, P2, P3 et 3 noeuds aux milieux des côtés P4, P5, P6.(figure3.1.1).



Figure 3.1.1: Elément triangulaire de facette plane de type DKT12

Le principe des travaux virtuels est utilisé pour établir l'équilibre de la pièce désirée (équation2.5.1). Les effets de cisaillement transverse dans les tôles minces sont négligés, ce qui permet d'écrire le travail virtuel interne élémentaire sous la forme générale suivante:

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{e} = \int_{\mathbf{V}^{e}} \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{*} \right\rangle \{\boldsymbol{\sigma}\} d\mathbf{V}$$
(3.1.1)

dV=dzdA=dzdxdy

 $\langle \epsilon^* \rangle = \langle \epsilon^*_x \ \epsilon^*_y \ \gamma^*_{xy} \rangle$ le vecteur des déformations virtuelles $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_{xy} \rangle$ le vecteur des contraintes de Cauchy, où x et y sont les coordonnées orthogonales dans le plan de chaque élément (figure 3.1.1). L'épaisseur h est considérée constante par élément et les déformations virtuelles suivant l'épaisseur sont exprimées par:

$$\langle \varepsilon^* \rangle = \langle e^* \rangle + z \langle \chi^* \rangle$$
 (3.1.2)

 $\langle e^* \rangle est$ le vecteur des déformations virtuelles de membrane

 $z\langle \chi^* \rangle$ est le vecteur des déformations virtuelles de flexion

Pour l'élément triangulaire de facette plane présenté ici, les déformations virtuelles de membrane sont exprimées par les déplacements virtuels u*, v* suivant les coordonnées locales x, y de l'élément (figure 3.1.2).

Des approximations linéaires sont considérées pour u* et v* (élément de membrane CST) (équation 2.5.9)

$$\langle \mathbf{e}^* \rangle = \langle \mathbf{u}_{,\mathbf{x}}^* \quad \mathbf{v}_{,\mathbf{y}}^* \quad \mathbf{u}_{,\mathbf{y}}^* + \mathbf{v}_{,\mathbf{x}}^* \rangle$$
 (3.1.3)

$$\left\{\mathbf{e}^*\right\} = \left[\mathbf{B}_{\mathrm{m}}\right] \left\{\mathbf{u}_{\mathrm{n}}^*\right\} \tag{3.1.4}$$

 $\left\langle u_{n}^{*}\right\rangle = \left\langle u_{i}^{*} \quad v_{i}^{*} \quad w_{i}^{*} \quad i = 1,2,3 \right\rangle$

avec rappelons le

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\mathrm{m}} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\mathrm{A}} \begin{bmatrix} y_{23} & 0 & 0 & y_{31} & 0 & 0 & y_{12} & 0 & 0 \\ 0 & x_{32} & 0 & 0 & x_{13} & 0 & 0 & x_{21} & 0 \\ x_{32} & y_{23} & 0 & x_{13} & y_{31} & 0 & x_{21} & y_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

où 2A=x₂₁y₃₁-x₃₁y₂₁ et A représente l'aire de l'élément.

Les déformations virtuelles de flexion sont définies sous une forme simple en utilisant un élément de plaque mince en flexion appelé DKT 6 (Discrete Kirchhoff Triangular) proposé par Batoz et Dhatt.[Bat91]. Cet élément de flexion permet d'avoir l'opérateur matriciel [B_f] constant. L'élément DKT6 est caractérisé par 6 degrés de liberté (3 déplacements transversaux w aux noeuds des sommets et 3 rotations θ_s aux milieux des côtés (figure 3.1.2)).



Figure 3.1.2 Coordonnées locales, déplacements et rotations virtuelles de l'élément DKT12 (CST+DKT6)

Afin de définir les courbures virtuelles de l'élément DKT6, les composantes de rotation β_x^* et β_y^* sont exprimées linéairement en utilisant une approximation semi C⁰ des rotations aux noeuds milieux.

$$\beta_{x}^{*} = \sum_{k=4,5,6} N_{k} \beta_{xk}^{*}$$

$$\beta_{y}^{*} = \sum_{k=4,5,6} N_{k} \beta_{yk}^{*}$$

$$(3.1.5)$$

$$-2\eta$$

où: $N_4 = 1 - 2\eta$

$$N_5 = -1 + 2\xi + 2\eta$$
$$N_6 = 1 - 2\xi$$

 N_4 , N_5 et N_6 sont les fonctions d'interpolation.

 ξ et η étant les coordonnées de l'élément de référence (Figure 3.1.3).



Figure 3.1.3 Elément de référence

La théorie des plaques minces en flexion de Kirchhoff permet d'exprimer la rotation β_{sk}^* de chaque coté d'élément par les déplacements w_i^* et w_j^* des noeuds sommets [Bat91].

$$\int_{0}^{L_{k}} \gamma_{sk}^{*} ds = \int_{0}^{L_{k}} \left(w_{,s}^{*} + \beta_{s}^{*} \right) ds = 0$$
(3.1.6)
où: $\beta_{sk}^{*} = \frac{\left(w_{i}^{*} - w_{j}^{*} \right)}{L_{k}}$

Les rotations virtuelles $\beta_{nk}^* = \theta_{sk}^*$ sont nulles puisque dans la configuration déformée C, ainsi que les rotations aux noeuds milieux sont connues. Le déplacement virtuel quand à lui s'exprime de la manière suivante (Figure 3.1.1): $\vec{U}_q^* = U^*\vec{i} + V^*\vec{j}$ et W*=0 et $\vec{\theta}^* = \vec{0}$

Nous obtenons la matrice [B_f] sous la forme suivante [Bat92]:

$$\langle \chi^* \rangle = \left\langle \beta^*_{x,x} \quad \beta^*_{y,y} \quad \beta^*_{x,y} + \beta^*_{y,x} \right\rangle$$

$$\{ \chi^* \} = \begin{bmatrix} B_f \end{bmatrix} \{ u^*_n \}$$

$$[B_f] = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & c_3 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = S_4 C_4 - S_6 C_6$$

$$b_1 = -C_4 S_4 + C_6 S_6$$

$$c_1 = -C_4 ^2 + S_4 ^2 + C_6 ^2 - S_6 ^2$$

$$C_k L_k = x_{ji}$$

$$S_k L_k = y_{ji}$$

$$L_k^2 = x_{ji}^2 + y_{ji}^2$$
où k = 4,5,6 pour ji = 21,32,13
$$(3.1.7)$$

Les matrices $[B_m]$ et $[B_f]$ sont constantes par élément et restent inchangées au cours de résolution itérative du problème.

A partir des équations 3.1.2, 3.1.4 et 3.1.7, nous obtenons:

$$\left\{\boldsymbol{\varepsilon}^{*}\right\} = \left(\left[\mathbf{B}_{m}\right] + \mathbf{z}\left[\mathbf{B}_{f}\right]\right)\left\{\mathbf{u}_{n}^{*}\right\}$$
(3.1.8)

Nous devons alors exprimer $\{u_n^*\}$ dans le repère global. Nous utiliserons pour cela les cosinus directeurs de \vec{t}_1 , \vec{t}_2 et \vec{n} (équation 2.5.10).

$$\left\{ u_{n}^{*} \right\} = [T] \left\{ U_{n}^{*} \right\}$$

$$\left\langle U \right\rangle = \left\langle U_{i}^{*} \quad V_{i}^{*} \quad i = 1, 2, 3 \right\rangle$$

$$W_{i}^{*} = 0$$

$$(3.1.9)$$

avec

 $\begin{bmatrix} T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{1X} & t_{1Y} \\ t_{2X} & t_{2Y} \\ n_X & n_Y \end{bmatrix}$

[T] étant la matrice de transformation du repère local au repère global.

Nous pouvons alors déterminer le vecteur des forces internes élémentaire à l'aide des équations 3.1.1, 3.1.7 et 3.1.8.

$$\mathbf{W}_{\text{int}}^{\text{e}} = \left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle \left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{e}} \right\}$$
(3.1.10)

avec

$$\left\{ F_{\text{int}}^{e} \right\} = \left[T \right]^{T} \int_{V^{e}} \left(\left[B_{m} \right]^{T} + z \left[B_{f} \right]^{T} \right) \left\{ \sigma \right\} dz dA$$

Pour une valeur donnée de z, les déformations et contraintes sont constantes par élément, soit alors:

$$\left\{ \mathbf{F}_{\text{int}}^{\text{e}} \right\} = \left[\mathbf{T} \right]^{\text{T}} \left\{ \mathbf{B}_{\text{m}} \right]^{\text{T}} \left\{ \mathbf{N} \right\} + \left[\mathbf{B}_{\text{f}} \right]^{\text{T}} \left\{ \mathbf{M} \right\} \right) \mathbf{A}$$
(3.1.11)

où les forces de membrane et les moments de flexion s'expriment comme suit:

$$\{\mathbf{N}\} = \frac{\mathbf{h}}{2} \int_{-1}^{1} \{\sigma\} d\zeta$$
$$-1 \le \zeta \le 1$$
(3.1.12)
$$\{\mathbf{M}\} = \frac{\mathbf{h}^2}{4} \int_{-1}^{1} \{\sigma\} \zeta d\zeta$$

Dans les équations 3.1.11 et 3.1.12 ci-dessus, seuls h et $\{\sigma(\zeta)\}$ changent au cours du processus itératif. Les forces résultantes sont obtenues par une intégration numérique suivant l'épaisseur au centre de l'élément en considérant 3 (ou 5) points d'intégration de Lobatto, afin d'avoir les déformations et contraintes aux peaux supérieures et inférieures.

3.1.2 Expression des déformations logarithmiques incluant les effets de flexion.

L'expression du vecteur position d'un point matériel est donnée par les équations 2.3.4 et 2.3.5 (figure 2.3.1). Nous pouvons donc écrire:

$$dX_{q} = dX_{p} + zd\vec{n} + \vec{n}dz$$

$$(3.1.13)$$

$$d\vec{X}_{q}^{0} = d\vec{X}_{p}^{0} + \vec{n}^{0}dz^{0}$$

avec $-\frac{h}{2} \le z \le \frac{h}{2}$

 $d\vec{n}^0 = \vec{0}$ pour un flan plan.

 \vec{n} représentant la normale à la surface moyenne de la coque déformée $d\vec{n} \neq \vec{0}$ décrivant la courbure.

En utilisant le repère local orthonormé $(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n})$ tangent en P à la surface moyenne dans la configuration finale (équation 2.3.3) avec x,y les coordonnées dans ce repère, tel que:

$$\vec{t}_1 = \vec{X}_{p,x}$$

 $\vec{t}_2 = \vec{X}_{p,y}$
(3.1.14)

nous avons :

et $[Q] = [\vec{t}_1 : \vec{t}_2 : \vec{n}]$

$$d\vec{X}_{q} = (\vec{t}_{1} + z\vec{n}_{,x})dx + (\vec{t}_{2} + z\vec{n}_{,y})dy + \vec{n}dz$$
(3.1.15)

Soit sous forme matricielle:

$$\left\{ dX_{q} \right\} = \left[F_{x} \right] \left\{ dx \right\}$$

$$avec \ \left\langle dx \right\rangle = \left\langle dx \quad dy \quad dz \right\rangle$$

$$et \left[F_{x} \right] = \left[\vec{t}_{1} + z\vec{n}_{,x} \quad \vdots \quad \vec{t}_{2} + z\vec{n}_{,y} \quad \vdots \quad \vec{n} \right]$$

$$(3.1.16)$$

ou encore:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} [\mathbf{I}] + \mathbf{z} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$
(3.1.17)

avec

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{t}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{,\mathbf{x}} & \vec{\mathbf{t}}_1 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{,\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ \vec{\mathbf{t}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{,\mathbf{x}} & \vec{\mathbf{t}}_2 \cdot \vec{\mathbf{n}}_{,\mathbf{y}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r} & -\mathbf{s} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{s} & -\mathbf{t} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

r, s, t sont les composantes du tenseur des courbures de la coque déformée, cette coque étant considérée mince pour avoir:

$$\left[\mathbf{F}_{\mathbf{x}}\right]^{-1} = \left(\left[\mathbf{I}\right] + \mathbf{z}\left[\mathbf{b}_{1}\right]^{-1}\right)\left[\mathbf{Q}\right]^{\mathrm{T}} \approx \left(\left[\mathbf{I}\right] - \mathbf{z}\left[\mathbf{b}_{1}\right]\right)\left[\mathbf{Q}\right]^{\mathrm{T}}$$
(3.1.18)

Soit maintenant ζ la coordonnée suivant l'épaisseur telle que:

$$z = \zeta \frac{h}{2} \text{ avec } -1 \le \zeta \le 1$$

$$dz = d\zeta \frac{h}{2} + \zeta \frac{1}{2} dh$$
(3.1.19)

En admettant que l'épaisseur est constante (par élément), nous obtenons:

$$dz = d\zeta \frac{h}{2}$$
 et $dz^0 = d\zeta \frac{h^0}{2}$ (3.1.20)

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}z^0} = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{h}^0} = \lambda_3 \tag{3.1.21}$$

Ici nous admettons que l'élongation suivant l'épaisseur est constante et que λ_3 est la valeur moyenne.

Cette relation permet d'écrire:

$$d\vec{X}_{q}^{0} = \left(\vec{t}_{1} - \vec{U}_{p,x}\right)dx + \left(\vec{t}_{2} - \vec{U}_{p,y}\right)dy + \frac{1}{\lambda_{3}}\vec{n}^{0}dz$$
(3.1.22)

Soit encore sous forme matricielle:

 $\left\{ dX_{q}^{0} \right\} = \left[F_{x}^{0} \right]^{-1} \left[dx \right]$ $avec: \left[F_{x}^{0} \right]^{-1} = \left[\vec{t}_{1} - \vec{U}_{p,x} \quad \vdots \quad \vec{t}_{2} - \vec{U}_{p,y} \quad \vdots \quad \frac{1}{\lambda_{3}} \vec{n}^{0} \right]$ (3.1.23)

En utilisant les formules 2.3.10, 3.1.18 et 3.1.23, nous pouvons définir $[F_x]^{-1}$, l'inverse du tenseur gradient de transformation.

$$\left\{ \mathbf{dX}_{q}^{0}\right\} = \left[\mathbf{F}\right]^{-1} \left\{ \mathbf{dX}_{q}\right\}$$
(3.1.24)

$$\operatorname{ou} \left[F \right]^{-1} = \left[F_x^0 \right]^{-1} \left[F_x \right]^{-1} \approx \left[F_x^0 \right]^{-1} \left(\left[I \right] - z \left[b_1 \right] \right) \left[Q \right]^T$$

L'équation 2.3.14 qui exprime l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche [B]⁻¹ devient donc:

$$[\mathbf{B}]^{-1} = [\mathbf{F}]^{-T} [\mathbf{F}]^{-1} \approx [\mathbf{Q}] [\mathbf{B}_{\mathbf{Z}}]^{-1} [\mathbf{Q}]^{\mathrm{T}}$$
(3.1.25)
avec
$$[\mathbf{B}_{\mathbf{Z}}]^{-1} = ([\mathbf{I}] - \mathbf{z}[\mathbf{b}_{1}]) [\mathbf{B}_{0}]^{-1} ([\mathbf{I}] - \mathbf{z}[\mathbf{b}_{1}])$$

Ici [B₀]⁻¹ est l'inverse du tenseur de Cauchy-Green gauche provenant du modèle de membrane. Il s'exprime, rappelons le, à l'aide du vecteur déplacement \vec{U}_p , de la manière suivante:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{x}^{0} \end{bmatrix}^{-T} \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{x}^{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{0} & \mathbf{b}_{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{b}_{0} & \mathbf{c}_{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \lambda_{3}^{-2} \end{bmatrix}$$
(3.1.26)

tel que:

$$a_{0} = 1 - 2\vec{t}_{1} \cdot \vec{U}_{p,x} - \vec{U}_{p,x}^{2}$$

$$b_{0} = -\vec{t}_{1} \cdot \vec{U}_{p,y} - \vec{t}_{2} \cdot \vec{U}_{p,x} + \vec{U}_{p,x} \cdot \vec{U}_{p,y}$$

$$c_{0} = 1 - 2\vec{t}_{2} \cdot \vec{U}_{p,y} - \vec{U}_{p,y}^{2}$$

Les termes a₀, b₀ et c₀ sont développés plus précisément dans l'équation 2.3.15.

Les expressions de $[F_x]^{-1}$ et de $[B_0]^{-1}$, nous permettent d'obtenir $[B_z]^{-1}$ sous une forme similaire à celle de $[B_0]^{-1}$, c'est à dire:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_{z} \end{bmatrix}^{-1} \approx \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & c & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3}^{-2} \end{bmatrix}$$
(3.1.27)

avec

$$a = a_0(1+2r)^2 + 2b_0sz(1+zr) + c_0(sz)^2$$

$$b = a_0(1+zr)sz + b_0(1+2r)(1+zt) + b_0(sz)^2 + c_0sz(1+zt)$$

$$c = a_0(sz)^2 + 2b_0sz(1+zt) + c_0(1+zt)^2$$

et $z = \lambda_3 \zeta \frac{h^0}{2}$

Les termes représentatifs du cisaillement sont considérés nuls. Cela provient notamment de l'hypothèse des contraintes planes et du fait de postuler que l'élongation suivant l'épaisseur est constante. Nous avons par ailleurs vérifié numériquement qu'ils sont proches de zéro.

Nous pouvons donc enfin exprimer les élongations principales λ_1 et λ_2 , en utilisant les équations 2.3.16 et 3.1.27, ce sont les racines carrées des valeurs propres de [B_z]. L'équation 2.3.21 s'écrit alors:

$$\begin{cases} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{cases} = \left(\frac{1}{2} (a+c) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$
(3.1.28)

Ces quantités variant suivant l'épaisseur, nous considérons l'hypothèse de l'incompressibilité à la surface moyenne de la pièce, l'élongation suivant l'épaisseur est, rappelons le, constante (équation 2.3.18).

$$\lambda_3 = (\lambda_1 \lambda_2)^{-1}$$
 à z=0 et $\mathbf{h} = \lambda_3 \mathbf{h}^0$

Les vecteurs propres de [B]⁻¹ définissent pour leur part les directions des déformations principales (équations 2.3.17, 2.3.19 et 2.3.20 (figure 2.3.2)).

Les déformations logarithmiques en un point suivant l'épaisseur, sont quant à elles, données par ε_x , ε_y et γ_{xy} de 2.3.23.

Dans nos travaux, nous discrétisons les surfaces par des éléments triangulaires de continuité C^0 à la surface moyenne et semi C^0 pour les normales \vec{n} situées aux milieux des côtés (Figure 3.1.4) telles que:

$$\vec{n} = \sum_{k=4,5,6} N_k \vec{n}_k \tag{3.1.29}$$

où $N_k(\xi, \eta)$ sont définies dans 3.1.5.

Ainsi \vec{n}_k sont uniquement définies aux noeuds situés aux milieux des côtés, comme étant la moyenne des normales des deux éléments de facette plane de même côté, elles ne sont pas constantes par élément et $\vec{n}_{,x}$ et $\vec{n}_{,y}$ représentent les courbures. Les courbures sont donc considérées constantes par élément.



Figure 3.1.4 Définition des normales aux noeuds milieux

Nous avons également calculé les élongations principales (3.1.28) et leurs directions (2.3.17, 2.3.19 et 2.3.20) au centre de l'élément triangulaire par 3.1.26 et 3.1.27 en utilisant une fois encore ce repère local.

Ces valeurs sont dans un premier temps évaluées à la surface moyenne, afin d'estimer l'élongation suivant l'épaisseur (2.3.18). Ensuite, les déformations logarithmiques et leurs directions sont calculées aux points d'intégration à l'aide des équations 3.1.27, 3.1.28, 2.3.19, 2.3.20 et 2.3.23.

3.2 Etude des effets de flexion.

Plusieurs exemples ont été traités pour évaluer la validité de ce modèle et pour estimer les effets dus à la flexion lors du processus d'emboutissage. Les exemples qui vont suivre, concernent

tout d'abord une tôle en déformations planes soumise à un poinçon à fond plat [Per91], puis un embouti axisymétrique avec un poinçon cylindrique ([Hag90], [Hag91], [Arr92], [Bru93], [bru94], [Bru95.1], [Bru95.2], [Bru96]) et enfin la boîte carrée issue du benchmark test de Numisheet 93.

3.2.1 Embouti en déformations planes sans avalement.

Ce problème décrit dans la figure 3.2.1 a notamment été étudié par Stoughton [sto85]. Il concerne l'emboutissage d'une tôle rectangulaire par un poinçon carré, les extrémités du flan étant bloqués de manière à empêcher son avalement.



Figure 3.2.1: Description et données de l'embouti en déformations planes sans avalement

Il a également été utilisé pour estimer les effets de flexion par Wang et Tang [Wan88], Peric et al [Per91], et Rachik [Rac93]. C'est avec ces deux derniers auteurs que nous allons comparer nos résultats. Pour l'approche inverse, la forme finale a été définie à l'aide de considérations géométriques simples pour un déplacement de 12mm du poinçon (figure 3.2.2).



Figure 3.2.2: Configuration déformée C pour un déplacement de 12mm du poinçon

Une demi-bande déformée de 2.8mm de largeur est discrétisée par 480 éléments (60 éléments suivant X et 4 suivant Y) et comporte 305 noeuds (Figure 3.2.3).



Figure 3.2.3: Maillage élément fini de l'embouti en déformations planes.

La répartition des épaisseurs sans considérer le frottement est présentée dans la figure 3.2.4. Si seuls les effets de membrane sont pris en compte, on observe une épaisseur uniforme de la tôle d'environ 0.83mm, ce qui est en accord avec une déformation isochore. Par contre, la prise en compte de la flexion permet de visualiser les influences locales des rayons du poinçon ($R/h^0=4.5$) et de la matrice ($R/h^0=9.75$). La résolution de ces problèmes nécessite respectivement 30s et 35s de temps CPU sur DEC-alpha 3000/900 de 320MB de mémoire virtuelle.



Position initiale (mm)

Figure 3.2.4 Répartition des épaisseurs d'un embouti en déformations planes sans prise en compte du frottement.

Si l'on ajoute les frottements (Figure 3.2.5), on remarque que les résultats concernant la distribution d'épaisseur concordent avec ceux obtenus par Rachik [Rac93] qui utilise une approche incrémentale avec un schéma dynamique explicite et un élément de coque. Nous pouvons observer que le modèle de membrane-flexion permet d'estimer les variations locales d'épaisseur aux rayons, mais il s'avère, en comparant les figures 3.2.4 et 3.2.5, que celles-ci sont moindres lorsqu'il y a du frottement. Les temps CPU sont ici de 16s dans le cas de la membrane et de 27s en membrane-flexion.



Position initiale (mm)

Figure 3.2.5: Répartition des épaisseurs d'un embouti en déformations planes avec prise en compte des frottements.

Les valeurs des déformations principales maximales dans la direction longitudinale (autrement nommées déformations longitudinales) sur les peaux externes sont reportées sur la figure 3.2.6. Les résultats de l'approche inverse en prenant le modèle de membrane-flexion et ceux de l'approche incrémentale [Rac93] sont comparés aux valeurs expérimentales données par Péric [Per91]. Nous constatons que notre approche surestime quelque peu la déformation longitudinale sur la peau inférieure, néanmoins nous pouvons dire que l'ensemble de nos résultats est satisfaisant en considérant que notre modèle est simplifié.



Figure 3.2.6 Distribution des déformations longitudinales de l'embouti en déformations planes avec frottements.

3.2.2 Mise en forme d'un godet cylindrique à partir d'un flan circulaire.

Ce problème, la mise en forme d'un godet cylindrique (figure 3.2.7), a été proposé et étudié par Arrieux, Boivin, Brunet, Hage Chehade et Sabourin ([Hag90], [Hag91], [Arr92], [Bru93], [bru94], [Bru95.1], [Bru95.2], [Bru96]). Ils ont pu déterminer qu'un phénomène de striction, très fort amincissement local précédant une déchirure, apparaît sur ce godet pour une profondeur d'emboutissage de 22 mm. La détection de cette striction a été effectuée par l'emploi d'un critère intrinsèque, c'est à dire indépendant du chemin de déformation. Cette non dépendance vis à vis du cheminement de la déformation correspondant aux besoins de l'approche inverse. Ce critère permet de définir un domaine admissible à l'aide de courbes limite de formage en contraintes pour un matériau donné, ici il s'agit de l'acier XD340.



rayon du flan= 75 mm $\overline{\sigma} = 729.09 \ (0.01345 + \overline{\epsilon})^{0.1657} \text{ MPa}$ $r_0 = 0.831 \text{ ; } r_{45} = 0.949 \text{ ; } r_{90} = 1.07$ pression exercée par le serre-flan: 6.5 MPa coefficient de frottement (matrice et serre-flan) : 0.13 (poinçon) : 0.03

Figure 3.2.7: Description et données de l'emboutissage du godet cylindrique.

La discrétisation du problème a été effectuée pour un déplacement du poinçon de 22mm, un quart de la pièce dans sa configuration finale est maillé par 1250 éléments et 672 noeuds (figure 3.2.8).



Figure 3.2.8: Maillage élément fini du godet cylindrique (quart de pièce).

Une première analyse numérique avec le modèle de membrane-flexion mais sans frottements a été effectuée avec notre approche simplifiée. Les avalements observés suivant les axes X et Y sont respectivement de 6.33mm et 7.04mm. Les valeurs positives des contraintes σ_1 et σ_2 des peaux supérieures et inférieures sont représentées dans le domaine admissible défini par le critère de striction retenu (Figure 3.2.9). Dans le cas présent, les effets de flexion sont notables puisqu'il existe un écart important entre les contraintes des faces externes. Le temps de calcul nécessaire pour cette analyse est de 8 min sur DEC-alpha 3000/900.



Figure 3.2.9 Contraintes principales positives aux faces externes pour le modèle de membrane-flexion sans prise en compte des frottements.

Nous présentons dans la figure 3.2.10 les résultats d'un calcul en membrane avec frottements où les valeurs positives des contraintes principales calculées sont reportées par rapport au critère de striction. Dans ce cas, les avalements sont de 4.59mm pour X et 5.68mm pour Y. Ce calcul a nécessité quant à lui 4min de temps CPU. Nous constatons que, déjà en membrane, les frottements ont un caractère dominant dans ce problème. Cette pièce a également été étudiée à l'aide de l'approche inverse avec cette fois-ci un élément axisymétrique, par Batoz et Naceur ([Bat97.2], [Nac97]) notamment. Les résultats fournis par ce dernier sont très proches des résultats présentés dans ce document.



figure 3.2.10 Représentation des contraintes principales positives du cas de membrane avec frottement par rapport au critère de striction.

Un même calcul a été effectué avec le modèle incluant la flexion, et nous avons observé que les différences sont minimes entre ces deux analyses, les valeurs des contraintes obtenues avec la flexion étant à peine supérieures à celles déterminées dans le cas de la membrane seule ([Bat98], [Bar96.2]). Nous avons comparé ces travaux à des résultats expérimentaux et à d'autres analyses numériques utilisant des approches incrémentales ([Bru93], [bru94], [Bru95.1], [Bru95.2]). Nous n'avons pas détecté la striction comme ont pu le montrer ces auteurs pour une profondeur de 22mm. Néanmoins, certains de nos points sont très proches de la courbe limite. En particulier, le point le plus proche qui appartient à la peau supérieure correspond à la localisation de l'amincissement maximal observé expérimentalement et numériquement sur la pièce, c'est à dire à la limite du nez du poinçon et du bord libre, suivant l'axe X. L'amincissement, pour ce point est de 31.3%, ce qui est élevé (figure 3.2.11). Les avalements sont ici de 4.41mm (axe X) et de 5.6mm (axe Y). Nous pouvons attribué la différence entre ces deux valeurs à l'anisotropie de la tôle. Il aura fallu 10 min pour effectuer ce calcul. L'ensemble de ces résultats est donc plus que satisfaisant.



Figure 3.2.11 Distribution des épaisseurs d'un embouti cylindrique (calcul approche inverse en membrane-flexion et avec frottements).

L'emboutissage de boîtes carrées a été largement étudié numériquement et expérimentalement. Pour notre part, nous avons effectué notre analyse sur la boîte carrée proposée de manière détaillée dans le benchmark de Numisheet93. Il s'agit de simuler l'emboutissage d'une boite de 70 mm x 70 mm à rayon constant de 8 mm pour une profondeur de 40 mm, à partir d'un flan carré de 150 mm x 150 mm. Nous avons maillé un quart de la boîte par 1036 éléments et 563 noeuds (Figure 3.2.12).

^{3.2.3} Emboutissage d'une boîte carrée.



Epaisseur initiale: h⁰=0.78 mm Module d'Young: E=206 Gpa, coefficient de Poisson: $\nu = 0.3$ Courbe d'écrouissage: $\sigma = 567.29 (0.007127 + \varepsilon_p)^{0.2637} Mpa$ Coefficients d'anisotropie: R₀=1.79, R₄₅=1.51, R₉₀=2.27 Coefficient de frottement: $\mu = 0.144$, effort serre-flan totale: 19.6 Kn

Figure 3.2.12 Maillage et données de l'emboutissage de la boite carrée.

Afin d'étudier les effets dus à la flexion sur ce problème, nous avons effectué plusieurs analyses avec et sans frottements sous serre-flan avec les modèles de membrane et de membrane-flexion de notre approche simplifiée. Les frottements sous la partie utile de la pièce (poinçon et matrice) ne sont pas pris en compte dans cette étude. Les valeurs des avalements, ainsi que les pourcentages d'erreurs par rapport aux valeurs expérimentales, suivant les axes X, Y et sur la diagonale sont reportés dans le tableau 3.2.1. Dans ce même tableau les valeurs minimales et maximales des épaisseurs ainsi que les déformations équivalentes maximales sont présentées. Les temps CPU indiqués pour ces différentes analyses correspondent à une station de travail DEC-alpha 3000/900. Nous constatons, lorsque la flexion est considérée, une légère diminution des avalements et des autres valeurs présentées, cela étant due au cambrage de la tôle dans le rayon d'entrée matrice notamment. Ce phénomène est encore amplifié lorsque le frottement sous serre-flan est introduit dans nos analyses puisque la matière est cette fois-ci retenue sous le serre-flan.

Description du modèle	Avalement suivant X	avalement suivant la diagonale	avalement suivant Y	h _{min}	h _{max}	ε _{max}
Moyenne des résultats expérimentaux provenant de Numisheet'93	27.96	15.36	27.95			
Moyenne des résultats numériques provenant de Numisheet'93	28.08 (0.4 %)	15.86 (3.2 %)	28.16 (0.7 %)			
Approche Inverse en membrane sans frottements CPU = 2'	28.51 (1.97 %)	15.96 (3.91 %)	29.68 (6.19 %)	0.718	1.24	0.885
A. I. en membrane- flexion sans frottements CPU = 4'	28.34 (1.36 %)	15.93 (3.71 %)	29.55 (5.72 %)	0.708	1.24	0.884
A. I. en membrane avec frottement sous serre-flan CPU = 2'	28.30 (1.22 %)	15.55 (1.24 %)	29.63 (6.01 %)	0.691	1.20	0.825
A. I. en membrane- flexion avec frottement sous serre- flan CPU = 5'	28.20 (0.86 %)	15.50 (0.91 %)	29.57 (5.80 %)	0.675	1.20	0.821

Tableau 3.2.1 Comparaisons de l'analyse numérique de l'emboutissage d'une boite carrée.

Dans la figure 3.2.13, nous avons représenté l'écart en pourcentage des variations d'épaisseur entre le modèle de membrane-flexion et celui de membrane, lorsque le frottement n'est pas

considéré. Cet écart est tel que:
$$\Delta h(\%) = \frac{h(membrane + flexion) - h(membrane)}{h(membrane)}$$

L'écart maximum reste de petite valeur, environ -2%, et est observable au coin du poinçon.



Figure 3.213 Ecart des variations d'épaisseur entre les modèles de membrane et membrane-flexion sans frottement (La représentation est effectuée sur la configuration déformée du calcul avec flexion).

Afin d'étudier les effets de la flexion suivant l'épaisseur de la tôle, nous présentons, dans la figure 3.2.14, la différence des distributions des déformations équivalentes entre la peau supérieure et la surface moyenne.



Figure 3.214 Différence entre les déformations équivalentes de la face supérieure et celles de appartenant à la surface moyenne (dans un cas sans frottement).

Ce résultat nous amène à constater une variation de 10% des déformations équivalentes entre ces deux surfaces au niveau des rayons des outils ($R_{poinçon}/h^0=10$ et $R_{matrice}/h^0=6.5$), ce qui justifie l'intégration de la flexion dans nos calculs.

La légère dissymétrie des résultats est due à la différence entre les coefficients d'anisotropie. L'ensemble de ces résultats et de ces constations est en accord avec les valeurs expérimentales et numériques provenant d'approches incrémentales, et cela pour de faibles temps de calculs même si nous traitons un problème de grandes déformations élastoplastiques.

3.2.4 Conclusion

Les études présentées dans ce chapitre, nous ont permis de juger de l'importance de la flexion lors de la mise en forme d'une tôle mince, en particulier dans les zones où le rapport entre le rayon de courbure de la tôle et son épaisseur est inférieur à 10. Elles ont aussi mis en avant la très forte influence des frottements qui sont issus des contacts entre la tôle et les outils (poinçon, matrice et serre-flan). Le chapitre 3, qui va maintenant vous être proposé, évoque la prise en compte de ces outils et leurs effets lors d'un emboutissage.

4. CONSIDERATION DES OUTILS.

Comme nous l'avons démontré dans le chapitre précédent, les outils ont une influence non négligeable sur le comportement la tôle, notamment au niveau de leurs rayons.

Les outils ont également un rôle primordial sur l'écoulement de la matière lors d'une opération d'emboutissage, en particulier par l'effet dissipatif du frottement ([Bru09], [Fel]). Il convient d'admettre sur ce point qu'il existe une interdépendance entre les actions exercées par les outils et le trajet de déformation, ce qui introduit dans notre problème la notion de contact-frottement.

Or, le principe même de l'approche inverse ne permet pas de modéliser le problème de contact-frottement car:

- d'une part, la résolution du problème d'emboutissage en un pas ne permet pas de prendre en compte l'historique de la déformation.
- d'autre part, connaissant le déplacement vertical W de tous les noeuds de la pièce discrétisée, aucun chargement ne peut être introduit; on ne peut en effet imposer en même temps un déplacement et sa réaction.

Toutefois, afin d'estimer les actions des outils au sein de l'approche inverse, nous avons adopté plusieurs hypothèses ([Guo90], [Bat90.1]), nous permettant de définir des forces extérieures se substituant à ces outils. Le vecteur des forces externes est donc défini par des outils fictifs.

Nous allons donc présenter maintenant les différents modèles et les hypothèses employées pour estimer les contributions du poinçon, de la matrice, du serre-flan ainsi que celles dues à la présence de joncs.

4.1 Estimation des forces de frottement sous la partie utile.

Nous proposons ici d'estimer les actions du poinçon et de la matrice. Pour cela, nous supposons que leurs actions sont remplacées par une force de pression normale et une force de frottement tangentielle. Les intensités de ces forces ne sont pas calculables directement, elles sont déterminées à la fin de chaque itération. Pour cela, la direction de la résultante, indispensable pour le calcul, est définie à partir de la direction normale, du coefficient de frottement et du glissement relatif entre l'outil considéré et la tôle. Dans la mesure où des coefficients de frottement différents peuvent exister en fonction de l'outil considéré, il convient de déterminer automatiquement celui des deux outils (matrice,poinçon) qui est en contact avec la tôle. Ce distinguo s'effectue à la fin de la première itération par l'étude des signes des composantes verticales des réactions des outils.

A partir de l'expression du P.T.V (2.5.2), nous pouvons définir les conditions d'équilibre, sur chaque noeud d'un élément, sous la forme itérative suivante:

$$\left\{F_{\text{ext}}^{i}\right\} - \left\{F_{\text{int}}^{i}\right\} = \left\{\begin{array}{c}P^{i}n_{fx}\\P^{i}n_{fy}\\P^{i}n_{fz}\end{array}\right\}_{\text{ext}} - \left\{\begin{array}{c}F_{x}^{i}\\F_{y}^{i}\\F_{z}^{i}\end{array}\right\}_{\text{int}} = 0$$
(4.1.1)

avec:

 \vec{n}_{t} la direction de la force résultante nodale due aux outils (équation 4.1.9).

Pi l'intensité inconnue de cette force.

De part la connaissance de la composante verticale du déplacement, $W = \overline{W}$ et $W^*=0$, nous pouvons éliminer dans 4.1.1 l'équation suivant Z., nous permettant, par la même, de définir l'intensité Pⁱ de la force résultante nodale, et le vecteur des forces externes associé, par:

$$P^{i} = \frac{F_{z}^{i}}{n_{fz}}$$

$$\left\{F_{ext}^{i}\right\} = \begin{cases} F_{z}^{i} \frac{n_{fx}}{n_{fz}} \\ F_{z}^{i} \frac{n_{fy}}{n_{fz}} \end{cases}$$

$$(4.1.2)$$

Jusqu'alors, au sein de notre méthode, seule l'action du poinçon était prise en compte. Dans le but de considérer l'action de la matrice, et donc de déterminer quel est l'outil en contact avec la tôle, nous effectuons à la fin de la première itération un test sur le signe de F_z^i . Si celui-ci est positif, le poinçon est alors considéré en contact. S'il est négatif, il s'agit alors de la matrice. Pour ce qui est de la définition de \vec{n}_f , dans le cas où la tôle n'est soumise qu'à une pression normale, sans frottement, \vec{n}_f est défini comme le vecteur normal à la surface moyenne de la tôle au noeud considéré.



Figure 4.1.1 Description du frottement sous la partie utile de la pièce.

Par contre, s'il y a présence de frottements \vec{n}_f se trouve alors sur la surface du cône de frottement d'angle 2α tel que:

$$\alpha = \arctan(\mu) \tag{4.1.4}$$

avec μ le coefficient de frottement de Coulomb.

Soient alors \vec{F}_n , la force de pression normale et \vec{F}_t la force de frottement tangentielle (figure 4.1.1) telles que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{F}_{\mathbf{n}} \, \mathbf{\vec{n}} - \mathbf{F}_{\mathbf{t}} \, \mathbf{t}$$
 (poinçon)
$$\mathbf{\vec{P}} = -\mathbf{F}_{\mathbf{n}} \, \mathbf{\vec{n}} - \mathbf{F}_{\mathbf{t}} \, \mathbf{\vec{t}}$$
 (matrice) (4.1.5)

 \vec{P} représente la force résultante exercée par le poinçon ou la matrice sur la tôle

or de plus

$$\mathbf{F}_{\mathrm{t}} = \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{F}_n \tag{4.1.6}$$

d'où

$$\vec{P} = F_n \vec{n} - \mu F_n \vec{t} = F_n (\vec{n} - \mu \vec{t})$$
 (poinçon)
$$\vec{P} = -F_n \vec{n} - \mu F_n \vec{t} = F_n (-\vec{n} - \mu \vec{t})$$
 (matrice) (4.1.7)

Par conséquent, l'intensité P de la force exercée par l'outil est:

$$\mathbf{P} = \sqrt{1 + \mu^2} F_n \tag{4.1.8}$$

soit alors

$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} (\vec{\mathbf{n}} - \mu \vec{\mathbf{t}}) = \mathbf{P} \vec{\mathbf{n}}_{\rm f} \qquad \text{(poinçon)}$$
$$\vec{\mathbf{P}} = \mathbf{P} \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}} (-\vec{\mathbf{n}} - \mu \vec{\mathbf{t}}) = -\mathbf{P} \vec{\mathbf{n}}_{\rm f} \qquad \text{(matrice)} \qquad (4.1.9)$$

donc

$$\vec{n}_{f} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \left(\vec{n} - \mu \vec{t} \right) \qquad (poinçon)$$

$$\vec{n}_{f} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^{2}}} \left(\vec{n} + \mu \vec{t} \right) \qquad (matrice) \qquad (4.1.10)$$

avec \vec{n} , la normale au noeud définie comme la moyenne des vecteurs surfaces des éléments connectés à ce noeud:

$$\vec{n} = \sum_{e}^{NEL} \frac{A^e \vec{n}^e}{3}$$
 (4.1.11)

et \vec{t} le vecteur unitaire de la direction de glissement \vec{u}_t , définit par:

$$\vec{\mathbf{t}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}}}{\left\|\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{t}}\right\|} \tag{4.1.12}$$

avec:

$$\vec{\mathbf{u}}_{t} = \vec{\mathbf{u}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}})\vec{\mathbf{n}} \tag{4.1.13}$$

Les actions des frottements sous la partie utile de la pièce sont souvent considérées comme des phénomènes perturbants. Ils sont de manières générales peu contrôlables, surtout dans le rayon entrée matrice. Par contre, les frottements exercés par le serre-flan sont davantage maîtrisés, et les emboutisseurs peuvent jouer par leur intermédiaire sur l'écoulement de la matière, bien souvent grâce à l'adjonction de joncs de retenue [Afz94]. L'étude qui va suivre traite donc de la prise en compte de l'estimation des frottements sous serre-flan dans notre approche simplifiée.

4.2 Estimation des forces de frottement sous serre-flan.

Le frottement sous serre-flan est l'un des paramètres sur lequel les emboutisseurs jouent pour mettre au point un outil d'emboutissage. Afin de rendre notre approche plus proche du processus en intégrant l'influence de ces frottements, nous avons retenu plusieurs hypothèses que nous pouvons énoncer de la manière suivante. Sous serre-flan, les pressions normales exercées sur les deux faces de la tôle s'annulent. Il ne reste alors que des forces de frottement tangentielles. Le calcul de ces forces est effectué à partir de la force de serrage totale et du coefficient de frottement.

Bien que la valeur de la force de frottement totale ne varie pas au cours du calcul, sa distribution sur différentes parties du serre-flan peut varier. Afin d'obvier ce phénomène qui jusqu'alors nous posait des problèmes, nous ne considérons pas cette redistribution ([Bru96], [Li95]). En effet, nous avons constaté que lorsqu'il y a avalement, l'aire d'une zone diminue, mais qu'en contre partie cette même zone s'épaissit, entraînant par là même une augmentation de la pression sur cette partie. Le postulat suivant est donc considéré: la force de serrage sur cette zone est inchangée.

Nous allons rappeler maintenant la formulation retenue pour intégrer ces frottements dans notre méthode ([Guo90], [hu97]).

Afin de déterminer la force résultante de frottement sous serre flan, nous établissons l'équilibre des forces sous serre-flan illustré sur la figure 4.2.1.



4.2.1 Description du frottement sous serre-flan.

Pour cela, nous déterminons l'équilibre d'une surface ΔS appartenant au serre flan supérieur:

$$\frac{-Q}{S_{XOY}} (\Delta S \cos \alpha) \vec{k} + q_n \Delta S \vec{n} + \mu q_n \Delta S \vec{t} = \vec{0}$$
(4.2.1)

avec

Q, la force de serrage totale.

 \vec{k} , la direction de cette force.

 μ , le coefficient de frottement.

S_{XOY}, la projection verticale de la surface de serrage totale dans le plan XOY.

 \vec{n} , le vecteur normal à la tôle.

Et \vec{t} , le vecteur unitaire de la direction de glissement tel que:

$$\vec{\mathbf{t}} = \frac{\vec{\mathbf{u}}_t}{\left\|\vec{\mathbf{u}}_t\right\|} \text{ avec } \vec{\mathbf{u}}_t = \vec{\mathbf{u}} - (\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}})\vec{\mathbf{n}}$$
(4.2.2)

où \vec{u}_t est la projection du vecteur déplacement \vec{u} sur le plan tangent à la tôle.

L'équation 4.2.1, nous permet d'obtenir l'expression de l'équation d'équilibre suivant \vec{k} , comme suit:

$$\frac{-Q}{S_{XOY}}(\Delta S\cos\alpha) + q_n \Delta S\cos\alpha + \mu q_n \Delta S\sin\beta = 0$$
(4.2.3)

avec
$$\cos \alpha = \vec{n} \cdot \vec{k}$$
 et $\sin \beta = \vec{t} \cdot \vec{k}$ (4.2.4)

Notons que, les vecteurs \vec{n} , \vec{t} et \vec{k} n'étant pas forcement coplanaires, la somme des angles α et β n'est alors pas égale à l'angle droit.

A partir de l'équation 4.2.3, nous pouvons exprimer la force de frottement f, exercée sur les deux faces de la tôle, par unité de surface.

$$f = 2\mu q_n = \frac{2\mu Q}{S_{XOY}} \frac{1}{1 + \mu \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}}$$
(4.2.5)

Afin d'établir le vecteur des forces nodales, on utilise l'équation 2.5.2 pour écrire le travail des forces de frottement dans le repère local sur la configuration finale.

$$\mathbf{W}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{e}} = \int_{\mathrm{A}^{\mathrm{e}}} \left\langle \mathbf{u}^{*} \quad \mathbf{v}^{*} \right\rangle \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_{\mathrm{X}} \\ \mathbf{f}_{\mathrm{Y}} \end{array} \right\} \mathrm{d}\mathbf{A} = \left\langle \mathbf{U}_{\mathrm{n}}^{*} \right\rangle \left\{ \mathbf{F}_{\mathrm{f}}^{\mathrm{e}} \right\}$$
(4.2.6)

Le vecteur des forces nodales élémentaire est donc défini par:

$$\left\{ \mathbf{F}_{\mathbf{f}}^{\mathbf{e}} \right\} = [\mathbf{T}]^{\mathrm{T}} \int_{\mathbf{A}^{\mathbf{e}}} [\mathbf{N}]^{\mathrm{T}} \{\mathbf{f}\} d\mathbf{A}$$
(4.2.7)

où [N] est la matrice des fonctions d'interpolation linéaire de l'élément triangulaire de membrane.

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 1 - \xi - \eta & 0 & \xi & 0 & \eta \end{bmatrix}$$
(4.2.8)
$$\{\mathbf{f}\} = \begin{cases} \mathbf{f}_{\mathbf{X}} \\ \mathbf{f}_{\mathbf{Y}} \end{cases} = \frac{-\mathbf{f}}{\sqrt{\mathbf{u}^{2} + \mathbf{v}^{2}}} \begin{cases} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{cases}$$
(4.2.9)

u et v sont les déplacements dans le repère local et [T]^T, la matrice de transformation du repère local au repère global.

Afin d'étudier la validité et les limites des différentes hypothèses considérées pour intégrer les frottements du poinçon, de la matrice et du serre-flan au sein de l'approche inverse, nous présentons dans la partie suivante divers exemples d'analyses numériques.
4.3 Validation et étude des modèles de frottement retenus.

Dans un premier temps, nous illustrons, sur deux exemples traités précédemment, le critère nous permettant de distinguer l'outil en contact avec la tôle sur la partie utile de la pièce.

Il s'agit tout d'abord de l'expérience de Péric et al étudiée dans la section 3.2.1. Nous présentons (Figure 4.3.1) sur cet embouti en déformations planes sans avalement, la distribution des réactions verticales F_Z issues de l'équation 4.1.1.



Figure 4.3.1 Distribution des réactions verticales de l'embouti en déformations planes.

Nous constatons que cette distribution permet d'identifier les zones de courbures concaves suivant Z, formées par la matrice, de celles convexes générées par le poinçon.

Le deuxième exemple est celui du godet cylindrique, dont l'analyse est présentée dans la section 3.2.2. La figure 4.3.2 montre donc la distribution des réactions verticales issue de notre analyse numérique.



Figure 4.3.2 Distribution des réactions verticales dans la cas du godet cylindrique.

A la lumière de ces résultats, nous pouvons nous satisfaire du choix retenu pour l'identification de l'outil supposé être en contact avec la pièce utile.

Afin de parfaire cette étude sur la prise en compte des frottements dans l'approche inverse, nous présentons maintenant une analyse effectuée sur la boîte carrée du Benchmark de Numisheet'93.

La boîte retenue est celle présentée dans la section 3.2.3, c'est à dire pour une profondeur d'emboutissage de 40mm dans le cas de l'acier doux. Le tableau 4.3.1 établi identiquement à celui de la section 3.2.3, récapitule les résultats issus de proceedings et de divers codes, concernant les variations d'épaisseur de la tôle et surtout la valeur des avalements suivant 3 directions sur l'embouti, qui nous permettent de valider notre modèle de frottement.

Description du modèle	Avalement suivant X	Avalement suivant la diagonale	Avalement suivant Y	h _{min}	h _{max}
Moyenne des résultats expérimentaux provenant de Numisheet'93	27.96	15.36	27.95		
Moyenne des résultats numériques provenant de Numisheet'93	28.08	15.86	28.16		
Approche incrémentale dynamique explicite (OPTRIS)	28.63	16.32	29.05	0.704	0.971
Approche incrémentale dynamique explicite (SIMEM3) [Bou94]	26.81	16.13	27.21	0.506	1.248
Approche Inverse membrane-flexion et frottements.	27.45	16.51	28.25	0.686	1.16

Tableau 4.3.1 Récapitulatif de résultats concernant l'emboutissage d'une boîte carrée.

Le temps CPU nécessaire pour réaliser le calcul approche inverse est de 6min45s sur HP9000/780, cela pour des résultats très satisfaisants.

La distribution de la variation d'épaisseur suite à ce calcul est présentée dans la figure 4.3.3.



Figure 4.3.3 Distribution d'épaisseur.

Nous avons bien évidemment effectué de nombreux autres calculs sur des pièces provenant de cas tests ou encore d'industriels. Ces analyses seront présentées ultérieurement au sein de ce rapport.

C'est d'ailleurs pour participer au cas test du dôme de Numisheet'96, que nous avons introduit la prise en compte de la présence de joncs lors d'un emboutissage. L'étude qui va suivre concerne donc la méthodologie et la formulation considérée pour déterminer les forces de retenue dues aux joncs ainsi que leur implantation dans notre méthode simplifiée.

4.4 Prise en compte des joncs.

Dans l'emboutissage des tôles minces, différents types de joncs sont largement utilisés pour ajuster l'écoulement de la matière, afin d'éviter la striction et le plissement. La simulation complète d'une pièce avec joncs est très coûteuse, c'est pourquoi de nombreux codes permettent de représenter l'action des joncs par des forces de retenue équivalentes. Nous avons nous même choisi cette méthodologie qui consiste à introduire des forces externes. Il reste alors à définir ces forces équivalentes, qui pendant longtemps semble-t-il, ont été estimées de manière empirique. La plupart des codes incrémentaux tels OPTRIS ou PAM-STAMP effectuent une simulation 2D, qui nécessite la création du maillage complet du jonc et demande un temps CPU important.

Nous nous sommes donc orientés vers des formulations analytiques ([Wei78], [Wan82], [Lev83], [yel84], [yel85], [sto88], [Klu92], [Mar92] [Fel],) qui ont été comparées aux travaux expérimentaux de Nine ([Nin78], [Nin82]).

4.4.1 Calcul des forces de retenue équivalentes dues aux joncs.

Nine semble être le premier a avoir étudié expérimentalement l'influence de la force de serrage sur la force de traction nécessaire pour faire défiler une tôle sur le jonc en distinguant les contributions respectives de la déformation plastique et du frottement. Nous avons étudié les formulations proposées par les auteurs précités. Après cette étude détaillée, nous avons choisi les formules proposées par Stoughton. Ces formules prennent en compte, pour une géométrie de jonc définie, les propriétés du matériau, le coefficient de frottement et le process, et fournissent les valeurs des forces de retenue équivalentes et les forces de serrage nécessaires pour respecter la géométrie du jonc [Sto88]. Nous avons pu vérifier que les résultats obtenus par cette méthode, pour des joncs circulaires avec des rayons de tringle et d'épaulements égaux, sont très satisfaisants par rapport à des résultats expérimentaux.

Les formules de Stoughton sont en effet établies pour des joncs circulaires à rayons constants (Figure 4.4.1). Nous avons donc effectué quelques modifications afin d'élargir la formulation à d'autres types de joncs.



4.4.1 Représentation d'un jonc semi-circulaire.

4.4.1.1 Formules de Stoughton pour des joncs circulaires.

Nous allons rappeler brièvement les formules de Stoughton, qui sont explicitées avec précisions dans les articles suivants ([Sto88], [Fel], [Tuf94]). Elles sont basées sur le principe des travaux virtuels, où le travail nécessaire pour faire passer la tôle sur le jonc doit être égal à la somme du travail plastique consommé par les cambrages et décambrages successifs de la tôle (zones 1 à 6) et du travail des forces de frottements dans ces zones.

Les paramètres d'entrée sont:

- d, la pénétration du jonc.
- R, le rayon du jonc.
- t, l'épaisseur initiale de la tôle.
- w, la longueur du jonc.

 $\sigma_{\rm y}$, la contrainte seuil de plasticité.

- \overline{r} , le coefficient moyen d'anisotropie.
- μ , le coefficient de frottement.

n, le coefficient d'écrouissage.

K, le coefficient de proportionnalité

 $\dot{\mathcal{E}}_0$, le taux de déformation.

m, le coefficient du taux de déformation.

v, la vitesse de défilement de la tôle (ou vitesse du poinçon).

La force de retenue F s'écrit:

$$F = \left(\left(F_1 e^{\mu \phi} + \mu F_e + F_2 + F_3 \right) e^{2\mu \phi} + \mu F_e + F_4 + F_5 \right) e^{\mu \phi} + F_6$$
(4.4.1)

La force de maintien du serrage H est obtenue par la somme des composantes verticales des forces présentes:

$$H = F_{e} \cos \varphi + \frac{1}{2(1+\mu^{2})} [(e^{\mu\varphi} (2\mu \cos \varphi + (1-\mu^{2})\sin \varphi) - 2\mu)F_{1} + (e^{2\mu\varphi} (\mu \cos \varphi + \sin \varphi) - \mu \cos \varphi + \sin \varphi)(F_{1}e^{\mu\varphi} + \mu F_{e} + F_{2} + F_{3}) - (e^{-\mu\varphi} (2\mu \cos \varphi - (1-\mu^{2})\sin \varphi) - 2\mu)(F_{1}e^{\mu\varphi} + \mu F_{e} + F_{2} + F_{3})e^{2\mu\varphi} + F_{4} + \mu F_{e} + F_{5})]$$

$$(4.4.2)$$

Où F_i sont les forces de cambrage/décambrage aux points i. Ces forces de flexion sont définies de la manière suivante:

$$\begin{split} F_{i} &= \frac{wKt_{i}}{1+n} \left(1 + \frac{2}{t_{i}}R_{eff}\right) \left(\frac{1+2\bar{r}}{(1+\bar{r})^{2}}\right) \left\{\frac{1}{2+n} \left[a_{i}\frac{1+\bar{r}}{\sqrt{1+2\bar{r}}} - b_{i}\epsilon_{ai}\right] \left[\left(\epsilon_{ai} + \epsilon_{mi}\right)^{2+n} - \epsilon_{ai}^{2+n}\right]\right] \\ &+ \frac{b_{i}}{3+n} \left[\left(\epsilon_{ai} + \epsilon_{mi}\right)^{3+n} - \epsilon_{ai}^{3+n}\right] \left[a_{i}\frac{1+\bar{r}}{\sqrt{1+2\bar{r}}} + \frac{1}{2}b_{i}\epsilon_{mi}\right] \epsilon_{mi}\epsilon_{ai}^{1+n}\right] * f\left(\epsilon_{mi}\frac{v}{t_{i}}\frac{1+t_{i}/R_{eff}}{t_{i}/2R_{eff}}, \dot{\epsilon}_{0}, m\right) \end{split}$$
(4.4.3)

où
$$a_i = 1 - \frac{t_i^2}{48R_{eff}^2}$$
 et $b_i = 1 + \frac{t_i}{4R_{eff}}$ (4.4.4)

avec la fonction f, additionnelle à la loi elasto-plastique de type Hollomon, qui permet de prendre en compte le taux de déformation (Lorsque la valeur de m est inconnue, f est alors égale à l'unité, ce qui a pour effet d'obtenir des résultats quelque peu sous estimés de 5 à 10%)

$$f(\dot{\varepsilon}, \dot{\varepsilon}_0, \mathbf{m}) = \left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{\mathbf{m}}$$
(4.4.5)

R_{eff}, le rayon effectif est tel que:

$$R_{eff} = \frac{R}{\sin\phi}$$
(4.4.6)

 $\boldsymbol{\epsilon}_m$ est la déformation effective sur la surface externe du flan:

$$\varepsilon_{m_{i}} = \frac{1+\bar{r}}{\sqrt{1+2\bar{r}}} \ln \left(\frac{1+\frac{t_{i}}{R_{eff}}}{1+\frac{t_{i}}{2}R_{eff}} \right)$$
(4.4.7)

t_i est l'épaisseur de la tôle au point i après flexion telle que:

$$\mathbf{t}_{i} = \mathbf{t}_{i-1} \, \mathrm{e}^{-\gamma \, \varepsilon_{m_{i-1}}} \tag{4.4.8}$$

avec $\gamma = 0.5$ par défaut (la sensibilité de la formule par rapport à cette valeur est assez faible)

 $\boldsymbol{\epsilon}_{a_i}$ est la déformation moyenne au point i après flexion.

$$\varepsilon_{a_i} = \varepsilon_{a_{i-1}} + \gamma \,\varepsilon_{m_{i-1}} \tag{4.4.9}$$

L'angle de flexion est défini analytiquement (ou géométriquement dans certains cas complexes) par:

$$\varphi = \tan^{-1} \left(q \frac{\sqrt{(1-p)^2 + p(2-p)(1-q^2)} - (1-p)}{(1-q^2)} \right)$$
(4.4.10)

où p est la pénétration du jonc définie par:

$$p = \frac{d}{2R + t} \tag{4.4.11}$$

et q est l'ajustement du jonc:

$$q = \frac{2R+t}{2R+g} \tag{4.4.12}$$

La force F_e qui est la force élastique provenant de la mise en forme du jonc lors du serrage est:

$$F_{e} = \frac{2Ew\delta t^{3}}{(2R+g)^{3}}$$
(4.4.13)

avec δ tel que:

$$\delta = \min(d, \ 2(2R+t)\left(\frac{R}{t}\right)\frac{\sigma_y}{E})$$
(4.4.14)

4.4.1.2 Enrichissement des formules de Stoughton.

Afin d'élargir la possibilité d'utilisation des formules de Stoughton, il nous est apparu nécessaire de pouvoir prendre en compte des rayons d'épaulement (entrée/sortie du jonc) et de tringle différents.

Soit R_1 le rayon de la tringle et R_2 le rayon d'entrée/sortie. Dès lors, seules quelques équations sont modifiées. R_{eff} est remplacé par R_{eff} tel que:

$$R_{eff_{i}} = R_{eff_{1}} = \frac{R_{1}}{\sin \phi} \text{ pour } i=3,4$$

$$R_{eff_{i}} = R_{eff_{2}} = \frac{R_{2}}{\sin \phi} \text{ pour } i=1, 2, 5, 6 \qquad (4.4.15)$$

L'équation 4.4.13 devient alors:

$$F_{e} = \frac{2Ew\delta t^{3}}{(R_{1} + R_{2} + g)^{3}}$$
(4.4.16)

avec

$$\delta = \min(d, \ (R_1 + R_2 + t) \left(\frac{R_1 + R_2}{t}\right) \frac{\sigma_y}{E})$$
(4.4.17)

$$p = \frac{d}{R_1 + R_2 + t} \text{ et } q = \frac{R_1 + R_2 + t}{R_1 + R + g}$$
(4.4.18)

Ces modifications nous permettent alors d'effectuer des calculs sur des joncs circulaires et triangulaires où les rayons d'épaulement et de tringle sont différents. En effet, les joncs triangulaires et trapézoïdaux nécessitent seulement d'ajuster le jeu du jonc.(figure 4.4.2) en fonction de l'angle Φ .



Figure 4.4.2 Géomètries des joncs à tringles triangulaires et trapézoïdales.

Dans la figure ci-après, nous présentons les joncs trapézoïdaux qui sont déterminés par la formulation adaptée aux joncs rectangulaires (figure 4.4.3).



Figure 4.4.3 Représentation d'un jonc rectangulaire.

Il y a ici 8 points d'inflexion où la courbure de tôle change.

La force de retenue devient alors:

$$F = (F_1 e^{\mu \phi} + F_2 + F_3 + \mu F_e)e^{3\mu \phi} + (F_4 + F_5)e^{2\mu \phi}$$

$$+ (\mu F_e + F_6 + F_7)e^{\mu \phi} + F_8$$
(4.4.19)

L'ensemble des expressions reste inchangé, il convient seulement de définir:

$$R_{eff_{i}\ i=3,4,5,6} = R_{eff_{1}}$$
(4.4.20)
$$R_{eff_{i}\ i=1,2,7,8} = R_{eff_{2}}$$

La contribution élastique peut être déterminée à partir de l'équation du déplacement maximum d'une poutre encastrée:

$$\delta = \frac{F_e L^3}{192 \text{EI}} \tag{4.4.21}$$

avec I le moment quadratique tel que:

$$I = \frac{wt^3}{12}$$
(4.4.22)

Ce qui nous permet d'obtenir finalement:

$$F_{e} = \frac{16E\delta wt^{3}}{\left(L_{g} + 2R_{2}\right)^{3}}$$
(4.4.23)

Enfin, nous avons adapté notre formulation aux redans (figure 4.4.4).



4.4.4 Représentation d'un redan.

Cette nouvelle formulation correspond en fait à la formulation d'un demi-jonc rectangulaire, par conséquent:

$$\mathbf{F} = \left(F_1 e^{\mu \phi} + F_2 + F_3 + \mu F_e\right) e^{\mu \phi} + F_4$$
(4.4.24)

$$R_{eff_{i}}_{i=1,2} = R_{eff_{1}}$$

$$(4.4.25)$$

$$R_{eff_{i}}_{i=3,4} = R_{eff_{2}}$$

avec

4.4.2 Evaluation des forces de retenues et de serrage des joncs.

Afin d'évaluer la pertinence de la formulation retenue pour la prise en compte des joncs, nous avons effectué quelques analyses comparatives avec les résultats issus du logiciel Optris, du code Nike2D et de l'expérience.

Le premier jonc circulaire étudié a été traité dans la littérature [Mat92]. Sa géométrie est celle d'un jonc circulaire (Figure 4.4.1). Les données sont les suivantes:

 $R_{tringle} = 6mm , R_{épaulement} = 2mm$ E = 210000MPa , v = 0.3 $\sigma_{y} = 154MPa , \overline{r} = 1.8$ K = 533MPa , n = 0.22 $t_{0} = 0.9mm$

Trois coefficient de frottement différents sont proposés: 0, 0.12, et 0.25.

Le tableau 4.4.1 fournit les forces de retenue F obtenues par les différentes résolutions et le tableau 4.4.2 donne les forces de serrage correspondantes.

	FORCE DE RETENUE (N/mm)		
μ	OPTRIS	Nike2D	Formule analytique
0	90	100	102
0.12	125	125	154
0.15	210	175	255

Tableau 4.4.1

Les résultats du tableau 4.4.1 laissent apparaître une dispersion assez importante pour le coefficient de frottement élevé.

	FORCE DE SERRAGE (kN)		
μ	OPTRIS	Formule analytique	
0	150	108	
0.12	175	142	
0.15	225	192	

Tableau 4.4.2

Le tableau 4.4.2 fait ressortir des différences variant de 17 à 39%

.Afin de situer ces tendances, nous avons comparé les résultats d'OPTRIS et de la formulation analytique aux valeurs expérimentales de Nine. Les joncs circulaires (Figure 4.4.1) de Nine présentent la particularité d'être à rayons constants.

Deux géométries sont proposées: d'une part $R_1=R_2=5.5$ mm et d'autre part $R_1=R_2=4.75$ mm, avec deux épaisseurs possibles 0.76mm et 0.86m.

Les données matérielles sont les suivantes:

E=210000 Mpa , $\bar{r} = 1.6$ $\sigma_y = 171.7 Mpa$ K=516 Mpa , n=0.23

Les différents modèles fournis par Nine sont regroupés dans le tableau 4.4.3.

			Coefficient de	Coefficient de
Modèles	Rayon	Epaisseur	frottement des	frottement des
			parties planes	parties courbes
1	4.75	0.86	0.002	0.16
2	4.75	0.86	0.002	0.07
3	5.5	0.76	0.002	0.18
4	5.5	0.86	0.002	0.16
5	5.5	0.86	0.002	0.05

4.4.3 Récapitulatif des joncs proposés par Nine.

Modèles	Expérin	nentaux	Analy	ytique	Of	otris
	F (N/mm)	H (kN)	F (N/mm)	H (kN)	F (N/mm)	H (kN)
1	138	98	149	124	118	150
2	106	82	107	101	85	130
3	112	84	108	86	102	130
4	128	96	130	108	104	140
5	92	82	88	84	67	115

L'ensemble des résultats obtenus se trouve dans le tableau 4.4.4.

4.4.4 Comparaison des résultats sur les joncs de Nine.

A la vue de ces résultats, il apparaît que la formulation analytique fournit des résultats assez cohérents vis à vis de l'expérience. L'approche incrémentale semble en contre partie surestimer d'environ 30% les forces de serrage et sous-estime F de 20% environ.

Le dernier jonc dont nous proposons l'étude est celui de Numisheet'96, il entre dans le cadre d'un benchmark test, celui de l'emboutissage d'un dôme. Ce jonc, à tringle triangulaire, est décrit avec précision dans le proceeding de Numisheet'96.

Les résultats, dans le cas de l'acier doux IF, sont reportés dans le tableau 4.4.5.

Résultats	OPTRIS	Analytique
F(N/mm)	250	243
H(kN)	315	234

4.4.5 Résultats du jonc du benchmark de Numisheet'96.

Ce sont ces valeurs analytiques que nous avons utilisées pour traiter ce cas test, qui sera présenté dans la suite de ce document.

Nous avons également évalué cette formulation, et les modifications que nous y avons intégrées, sur les joncs proposés dans le cadre de Numisheet'93. Les résultats obtenus ont été, une fois encore, satisfaisants. 4.4.3 Implantation des forces de retenue dans l'approche inverse.

Les forces de retenue calculées au préalable à l'aide de la formulation analytique sont introduites dans notre approche simplifiée de la manière suivante :

- Les noeuds se trouvant où étant très proches de la ligne de jonc sont identifiés.
- La ligne de jonc se trouve alors segmentée, on calcule la longueur de chaque segment.
- La force de retenue équivalente par unité de longueur, pondérée par la longueur du segment considéré, est appliquée perpendiculairement au segment.

Ces forces sont donc prises en compte dans le vecteur des forces externes.

Afin de vérifier le bien fondé de notre stratégie, nous avons participé au cas test international proposé par Numisheet'96, à savoir l'analyse numérique de la mise en forme d'un dôme avec présence d'un jonc.

4.4.3.1 Etude de l'emboutissage d'un dôme.

Ce cas test d'emboutissage appelé "Limiting Dome Height" a été proposé pour le congrès Numisheet'96. Il s'agit de l'emboutissage d'une tôle mince rectangulaire de 180mm x 100mm par un poinçon hémisphérique de 50.8mm de rayon pour une profondeur d'emboutissage de 30mm, avec présence de joncs. Cet emboutissage est réalisé pour deux nuances d'acier, un acier doux (IF) et un acier à haute limite élastique (HS). Les données afférentes à ce problème sont les suivantes:

- La force de serrage est de 200 kN.
- Le coefficient de frottement de Coulomb est de 0.11.
- Le module d'Young E est de 206Gpa et le coefficient de Poisson vaut 0.3 pour les deux nuances d'acier.
- Dans le cas de l'acier doux IF, l'épaisseur initiale h⁰ est égale à 1mm, le coefficient d'anisotropie moyenne r=1.82, et la loi élastoplastique s'exprime de la manière suivante: $\sigma = 526\varepsilon^{0.233} MPa$.
- Pour l'acier à haute limite élastique HS, h⁰=0.92, r=1.04 et $\sigma = 734\varepsilon^{0.156} MPa$.

Comme nous travaillons à partir de l'embouti final et que sa géométrie n'était pas fournit dans le benchmark, nous avons créer la géométrie de la pièce finale, à partir de la géométrie des outils en admettant l'hypothèse que la surface libre située entre le poinçon et le rayon d'entrée matrice est conique.(Figure 4.4.5). Cette hypothèse nous a permis d'effectuer la relocalisation des noeuds appartenant à la partie utile de la pièce, c'est à dire aux alentours du point D. Nous verrons, qu'en réalité, la forme finale de l'embouti ne respecte pas rigoureusement la géométrie des outils, et qu'un décollement apparaît dans cet endroit entraînant certaines erreurs.

Un quart de la pièce est maillé par 1623 éléments DKT12 et 875 noeuds. Nous avons appliqué des forces de retenue dues aux joncs de 240 N/mm pour l'acier IF et 300N/mm pour l'acier HS. L'ensemble des résultats obtenus a été présenté dans le Numisheet'96 pour l'acier IF et dans d'autres publications avec l'acier HS notamment ([Bat97.1], [Bat97.3]).

Les temps CPU pour ces analyses sont de l'ordre de 3min pour l'acier doux et 5min pour l'acier HS.



Figure 4.4.5 Maillage d'un quart du dôme.

Nous avons reporté sur la figure 4.4.6 les représentations des déformations principales suivant les lignes AB, AD et DC, pour les deux nuances d'acier.

Les résultats obtenus sont comparés aux valeurs expérimentales et à ceux provenant de l'approche incrémentale avec un algorithme dynamique explicite développée par Brunet et Sabourin [Bru96].



Figure 4.4.6 Déformations principales pour les deux nuances d'acier.

L'ensemble de ces courbes nous fournit des résultats très satisfaisants. Nous notons toutefois que le fait d'avoir supposé la surface libre conique apporte quelques écarts aux abords du point D.

De plus dans le cas de l'acier HS, le faible écrouissage perturbe numériquement nos résultats sur le segment AB. L'ensemble des résultats numériques sont globalement très corrects par rapport à la moyenne des valeurs expérimentales. Nous présentons dans le tableau 4.4.6 les différentes valeurs des efforts sous poinçon. Dans le cas de l'approche inverse l'effort sous poinçon est déterminé en effectuant la somme des F_z (équations 4.1.2 et 4.1.3) positifs.

Force sous poinçon (kN)	Acier HS	Acier IF
Approche inverse	57.1	38.9
Dynamique explicite	48.7	32.6
Expérimentales	49	39

Tableau 4.4.6 Comparatif des efforts sous poinçon.

Les résultats de l'approche inverse sont acceptables aussi bien par rapport aux résultats de Brunet et aux résultats expérimentaux que par rapport aux autres valeurs non reportées ici mais présentées dans le proceeding de Numisheet'96. Pour les deux nuances d'acier, on observe une inversion des tendances entre les résultats des deux approches numériques. Nous pensons que ce résultat est dû à la sensibilité numérique de notre approche à une faible valeur d'écrouissage.

Nous reviendrons ultérieurement sur l'étude de l'emboutissage d'un cas industriel avec présence de joncs. La partie, qui va suivre, traite d'ailleurs d'une des nombreuses préoccupations des industriels, à savoir le contrôle de l'aspect des pièces de peaux, lorsque la tôle est passée par le rayon d'entrée matrice.

4.5 Identification des parties de la pièce passées par le rayon d'entrée matrice.

Dans le domaine de la carrosserie automobile notamment, il y a deux grandes classes de pièces. Les pièces de structure qui sont essentiellement jugées en terme de performances mécaniques et les pièces dites de peaux, qui représentent les parties visibles de la carrosserie; elles doivent donc avoir un aspect irréprochable.

Ainsi lors de la mise en forme d'une pièce d'aspect, on ajoute des formes additionnelles sous forme de mur, afin de garantir la qualité de la partie utile de la pièce. La hauteur du mur doit au moins correspondre à la partie de la tôle marquée par son passage sur le rayon d'entrée matrice.

Nous avons donc établi une méthodologie permettant l'identification des zones de la tôle passant sur ce rayon. Cette stratégie est utilisée à la fin d'une analyse numérique réalisée par l'approche inverse de la manière suivante:

- Les coordonnées X, Y des noeuds appartenant à la partie utiles de la pièce avec les formes additionnelles sont répertoriées.
- Le contour de cette partie, c'est à dire la frontière avec la zone sous serre-flan(Figure 4.5.1), est repéré.



4.5.1 Maillage du flan avant calcul et contour du rayon d'entrée matrice.

• A la fin du calcul effectué par l'approche inverse, les positions, dans le flan plan final (Figure 4.5.2) X, Y des noeuds répertoriés au préalable, sont enregistrées.



4.5.2 Maillage du flan après résolution numérique.

 Nous recherchons alors, à l'aide des segments formés par les positions initiales et finales de ces noeuds et des segments formés par les noeuds du contour, s'il y a intersection. Lorsqu'une intersection est détectée, nous avons donc identifié un noeud qui est passé par le rayon d'entrée matrice (Figure 4.5.3).



4.5.3 Identification des zones passant par le rayon d'entrée matrice.

L'exemple, qui vient de vous être présenté, est un pavillon de poids lourd dont le problème complet et l'analyse qui a suivi vous serons exposés dans le chapitre 6.

Le résultat de ce post traitement s'est avéré être très cohérent par rapport aux résultats expérimentaux et à ceux issus d'une analyse numérique effectuée à l'aide du logiciel OPTRIS (approche incrémentale, dynamique explicite).

Afin de réaliser l'analyse numérique de ce type de pièce, nous avons été amené à reconsidérer la prise en compte des conditions aux limites, qui sont les blocages des mouvements de corps rigide. Le chapitre 5 qui suit, traite des aspects relatifs à la résolution numérique, et notamment de ces problèmes de conditions aux limites.

5 METHODE ET STRATEGIE DE RESOLUTION DU PROBLEME NUMERIQUE.

L'objet de ce chapitre est de présenter l'outil algorithmique utilisé pour résoudre le système non linéaire. En effet, après la discrétisation par éléments finis et l'assemblage, nous avons à résoudre l'équation 2.5.2, que nous posons sous la forme suivante :

$$\mathbf{W} = \sum_{\text{elt}} \mathbf{W}^{\text{e}} = \left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle \left(\left\{ \mathbf{F}_{\text{int}} \right\} - \left\{ \mathbf{F}_{\text{ext}} \right\} \right) = -\left\langle \mathbf{U}_{n}^{*} \right\rangle \left\{ \mathbf{R} \right\} = 0$$
(5.1)

où $\{R\}$ est le vecteur résidu d'équilibre discret tel que:

$$\{\mathbf{R}\} = \{\mathbf{F}_{\text{ext}}\} - \{\mathbf{F}_{\text{int}}\}$$
(5.2)

La résolution de ce système est effectuée par un algorithme statique implicite basé sur la méthode itérative de Newton-Raphson ([Dha84], [Nai96]) avec une matrice tangente définie explicitement ou numériquement par différences finies.

5.1 Méthode de Newton-Raphson pour l'approche inverse.

Les méthodes de Newton-Raphson sont très largement employées pour résoudre des problèmes non linéaires ([dha84], [Faf93], [hu97]).

Ces méthodes se caractérisent par le fait que bien qu'elles ne garantissent pas une convergence globale, leurs vitesses de convergences sont d'ordre quadratique, si l'on peut procurer une bonne solution initiale.

L'une des variantes de ces méthodes est la méthode dite de Newton-Raphson avec coefficient de sur-relaxation, elle est très performante pour les systèmes fortement non linéaires, ce qui est notre cas.

Ainsi, nous devons résoudre une succession de problèmes linéarisés sous la forme itérative suivante:

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{i}}\right]\!\left\{\Delta\mathbf{U}^{\mathrm{i}}\right\} = \left\{\mathbf{R}^{\mathrm{i}}\right\} \tag{5.1.1}$$

$$\left\{\mathbf{U}^{i+1}\right\} = \left\{\mathbf{U}^{i}\right\} + \omega^{i}\left\{\Delta\mathbf{U}^{i}\right\}$$
(5.1.2)

avec $\{\Delta U^i\}$, le vecteur des accroissements de déplacements.

ωⁱ, le facteur d'amortissement défini par la suite.

 $\left[K_{T}^{i}\right]$, la matrice tangente représentative du comportement du système, telle que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{i}} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial \{ \mathbf{R}^{\mathrm{i}} \}}{\partial \{ \mathbf{U}^{\mathrm{i}} \}} \end{bmatrix}$$
(5.1.3)

Par l'utilisation d'un schéma de différences finies centrées, nous obtenons les dérivées des résidus par rapport aux déplacements. Pratiquement, c'est au niveau élémentaire qu'est effectuée la perturbation. La matrice tangente élémentaire obtenue prend la forme suivante:

$$\left(\mathbf{K}_{\mathrm{T}}\right)_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{e}} = \frac{\mathbf{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}}\left(\mathbf{U}_{\mathrm{j}} + \alpha\right) - \mathbf{R}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{e}}\left(\mathbf{U}_{\mathrm{j}} - \alpha\right)}{2\alpha} \qquad (\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2) \qquad (5.1.4)$$

où α , le coefficient de perturbation, est compris entre 10⁻⁴ et 10⁻⁸.

Cette matrice peut également être définie explicitement comme l'a exprimé Guo et rappelé Hu [Hu97].

Le facteur d'amortissement ω^i $(0 < \omega^i \le 1)$ est employé pour obvier le fait qu'en règle générale, la méthode de Newton-Raphson standard fournit un accroissement ΔU^i trop important, qui ne permet pas alors de diminuer la norme Euclidienne des résidus.

Ainsi ω^i est dons défini par:

$$\min_{\omega^{i}} \left\| \left\{ \mathbf{R} \left(\left\{ \mathbf{U}^{i} \right\} + \omega^{i} \left\{ \Delta \mathbf{U}^{i} \right\} \right) \right\} \right\|$$
(5.1.5)

Ce minimum est obtenu par une méthode de recherche unidimensionnelle.

Le critère d'arrêt de l'ensemble de ce processus est établi sur l'accroissement relatif de la norme des déplacements. Ce test de convergence s'exprime de la manière suivante:

$$\frac{\left\|\{\Delta \mathbf{U}\}\right\|}{\left\|\{\mathbf{U}\}\right\|} \le \varepsilon \text{ avec } \varepsilon \le 10^{-3}$$
(5.1.6)

Comme nous avons pu le dire précédemment, les méthodes de Newton-Raphson nécessitent une estimation correcte de la solution initiale. Dans le cas de l'approche inverse, qui rappelons-le, est une méthode directe qui ne considère que les configurations initiale C⁰ et finale C, il est théoriquement envisageable de résoudre notre problème en un pas. Hors nous avons malheureusement constaté qu'un seul pas ne permettait pas d'obtenir la convergence pour la plupart de nos problèmes. En effet, de part l'utilisation de la projection verticale des noeuds sur la plan horizontale, les valeurs initiales des déplacements sont nulles et bien évidemment trop éloignées de la solution, entraînant par là même des phénomènes de divergence de la méthode de Newton-Raphson.

En partant d'un postulat d'Archimède qui s'énonce de la manière suivante: "On peut obtenir d'excellents résultats en tenant pour séparé ce qui ne l'est pas", nous avons introduit des configurations intermédiaires via la forme de sous pas, sous la forme suivante:

$$\mathbf{W}^{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{N}} \overline{\mathbf{W}} \tag{5.1.7}$$

où N est le nombre de pas (4 à 10), P le numéro du pas et \overline{W} la profondeur totale.

Ces solutions intermédiaires, proportionnelles à la profondeur, permettent de diminuer les non linéarités des systèmes, en ne modifiant pas la formulation de l'approche inverse.

Ainsi l'algorithme de résolution employé dans notre approche peut être représenté par l'organigramme 5.1.1.



Organigramme 5.1.1 Méthode de Newton-Raphson pour l'approche inverse.

Exprimé de la sorte, cet algorithme nous permet de résoudre la majorité des cas étudiés. Néanmoins, deux variantes de cette méthode ont été établies, elles ont fait l'objet de divers travaux ([Mer94], [Hu97]). La première variante amène à une méthode statique explicite. Le test de convergence est tout bonnement supprimé, permettant de n'avoir alors qu'une itération par pas. Cette méthode exige un nombre de pas assez conséquent, délicat à déterminer, et ne garantie pas l'obtention d'un résultat acceptable. C'est pour cette raison, qu'une seconde variante a été introduite.

Cette seconde variante est en fait un panachage entre les résolutions explicite et implicite. Elle consiste à utiliser la méthode explicite jusqu'au pas N-1, suivi de la méthode implicite avec vérification d'équilibre au dernier pas. Cette dernière version est très performante au niveau des temps de calculs, mais n'a pas la robustesse et l'efficacité de l'algorithme statique implicite retenu pour notre approche.

Afin d'améliorer encore les performances de cet algorithme, et par là même de résoudre les problèmes de parois verticales et autres contre-dépouilles, nous avons développé une méthode nous fournissant de meilleures estimations des solutions initiales.

5.2 Détermination d'une solution initiale pour Newton-Raphson.

Comme nous l'avons déjà stipulé, les projections verticales des noeuds sur le plan horizontal, fournissent des valeurs initiales de déplacements nulles. Pour les cas extrêmes des contredépouilles et des parois verticales, cette méthode n'est pas envisageable sans un traitement préalable. En effet, on peut aisément concevoir que la projection verticale d'un élément triangulaire, appartenant à une paroi verticale, sur le plan horizontal entraîne une superposition des cotés de l'élément et par là même des niveaux de déformations et de contraintes disproportionnés. De même, la projection d'élément et à titre d'exemple, le calcul de racines carrées, problème quadratique par excellence, proposé par Héron de l'école Alexandrine, est effectué de manière itérative à partir d'une solution approchée indispensable. Cette méthode de calcul est d'ailleurs à l'origine de la méthode des tangentes proposée par Newton (encyclopaedia universalis).

Nous avons donc développé une méthode géométrique nous permettant d'obtenir de meilleures solutions initiales. La technique employée est basée sur le développement radial de longueurs. Les différentes étapes de cette méthode sont les suivantes:

• Détermination du centre de gravité ou du centre de symétrie de la pièce. On considère que ce noeud est fixe.

- Recherche du noeud, correspondant au point d'attaque (Zmaxi).
- Ouverture des parois verticales de manière angulaire à partir du noeud proche du point d'attaque. Le rapport entre la longueur initiale et la longueur après ouverture entre le noeud "fixe" et les autres noeuds est calculé. La plus petite valeur de ce ratio est retenue pour effectuer une correction en fin de processus.
- Une boucle sur l'ensemble des noeuds est réalisée pour déterminer la projection dans le plan horizontal de chacun des segments de droites à partir du noeud supposé stable.
- Pour chaque segment, on recherche les noeuds proches de celui-ci.
- On effectue alors une boucle sur les éléments afin de trouver les intersections entre les cotés des éléments et chacun des segments. Les coordonnées de ces points d'intersections sont déterminées et stockées.
- Ces points d'intersections sont alors réorganisés par ordre croissant.
- On effectue un lissage de ces points à l'aide d'une fonction B-Spline d'ordre cubique.
- Le calcul de la longueur développée radialement est réalisé pour chaque noeud. Cette valeur est ensuite corrigée à l'aide du ratio issu de l'ouverture des parois.

Nous avons donc obtenue une surface développée équivalente à la géométrie de la pièce qui nous permet une estimation des déplacements initiaux de chaque noeud. Ces valeurs sont employées comme valeurs initiales pour le processus de Newton-Raphson. Elles ont l'avantage d'être assez satisfaisantes, tout en traitant le problème des contres dépouilles et parois verticales.

5.3 Evaluation de l'apport de la solution initiale pour le processus de Newton-Raphson.

La pièce présentée pour cette validation, est une pièce industrielle, en l'occurrence, il s'agit de la traverse latérale de le Renault Safrane (figure 5.3.1). Cette traverse a fait l'objet de plusieurs études comparatives entre l'approche inverse et les résultats expérimentaux provenant de Renault ([Guo92], [Bat96.1], [Hu97]). Cette pièce regroupe quelques difficultés notables, à savoir un serre-flan non plan et la présence de joncs. L'épaisseur initiale de la tôle en acier doux XES est de 1.52mm. Les coefficients d'anisotropie sont $r_0=1.77$, $r_{45}=1.23$ et $r_{90}=2.08$. La contrainte de limite élastique est de 164 MPa et le module d'Young est égal à 162 GPa. Les coefficients de frottements sont de 0.25 sous le serre-flan et de 0.2 entre la tôle et le poinçon ou la matrice. La force de serrage totale exercée par le serre-flan est de 400 kN. Le maillage de cette pièce constitué de 3972 éléments triangulaires et 2075 noeuds.



5.3.1 Maillage de la traverse latérale de la Renault Safrane.

L'évaluation des performances de la solution initiale proposée va être réalisée par la présentation des différents flans plans obtenus au cours du processus de résolution.

Le premier flan présenté correspond à celui provenant de la projection verticale des noeuds dans le plan horizontal, c'était à partir de cette projection que nous démarrions notre processus itératif de résolution numérique. Nous avons ajouté sur ce flan la position des deux plans de coupes sur lesquels ont été établis les valeurs expérimentales (figure 5.3.2).



5.3.2 Flan plan issu de la projection verticale et positionnement des plans de coupes.

Le flan qui va suivre est celui provenant de l'algorithme de détermination d'une solution initiale (figure 5..3.3).



5.3.3 Flan plan obtenu par la méthodologie retenue l'estimation d'une solution initiale.

Comme nous pouvons le constater, il y a une meilleure répartition des éléments situés initialement dans les parois verticales et le rayon d'entée matrice. Nous présentons maintenant le flan plan final déterminé par un calcul par l'approche inverse sans emploi de la technique de relocalisation des noeuds sous serre-flan (figure 5.3.5).



5.3.5 Flan plan final obtenu par l'approche inverse sans imposition de la forme du contour initiale.

Il apparaît que le flan présenté dans la figure 5.3.3 est beaucoup plus proche de la figure 5.3.5 que ne l'était celui issu de la projection verticale visualisable dans la figure 5.3.2.

Le dernier flan présenté dans la figure 5.3.6, est celui provenant du calcul complet par approche inverse avec contour du flan initial imposé, ce contour est celui correspondant à la figure 5.3.2.



5.3.6 Flan plan final après calcul par approche inverse.

Ce dernier flan obtenu permet de voir de plus, que la technique de relocalisation des particules sous serre-flan fonctionne correctement.

L'aspect qualitatif de l'apport d'une solution initiale pour l'approche inverse est donc évident. Nous allons donc passer à l'aspect quantitatif découlant de cette technique d'estimation de valeurs initiales. La figure 5.3.7 représente la répartition des épaisseurs dans l'embouti après un calcul approche inverse nécessitant 3 pas avec la solution initiale au lieu de 10 pas auparavant. Le temps de calcul pour effectuer cette analyse est de 28m10s sur HP9000/780 soit un gain en terme de temps CPU de l'ordre de 60% par rapport à l'analyse réalisée sans mise en place de cette solution initiale géométrique. Nous avons pu vérifier le même gain sur d'autres pièces académiques et industrielles. Nous avons également pu passer outre certains problèmes de convergence pour les pièces les plus complexes, c'est à dire avec de fortes non-linéarités géométriques notamment.



5.3.7 Variations d'épaisseur de la traverse latérale de la Renault Safrane après simulation d'emboutissage.

Afin de terminer la validation relative à l'analyse numérique de la mise en forme de cette traverse latérale, nous avons comparé et reporté sur les figures 5.3.8 et 5.3.9, les déformations suivant l'épaisseur issues du calcul à celles provenant de l'expérimentation suivant les sections L1 et L2 respectivement. Nous observons d'ailleurs une relativement bonne cohérence entre les diverses valeurs.



5.3.8 Déformation transverse pour la section L1.



5.3.9 Déformation transverse dans la section L2.

Le chapitre 6, qui va suivre, est une validation à plus grande échelle de la formulation et des choix retenus, qui nous permettent de réaliser des analyses numériques pour évaluer l'emboutissabilité de pièces en tôles minces.

5.4 Prise en compte des conditions limites.

L'approche inverse fournit un système d'équations non linéaires. Pour la résolution, nous devons imposer certaines conditions limites pour éliminer les mouvements de corps rigides correspondant à des déformations nulles ([Bat90.2], [Dha84], [Faf93]).

De par l'essence même de notre approche (2 déplacements horizontaux par noeud comme degrés de Liberté), il reste seulement 3 mouvements de corps rigides à éliminer, 2 translations, suivant les directions des axes X et Y, et une rotation autour de l'axe Z.

De nombreux travaux de validation de l'approche inverse ont été effectués sur des pièces que nous qualifierons d'académiques. Ce sont des pièces présentant des formes géométriques simples, demi sphère, boite carrée, godet cylindrique et autres pièces généralement symétrique voire axisymétrique. Certaines pièces issues du monde industriel ou encore de benchmark test ont bien évidemment été traitées. Nous avons rencontré sur des pièces ayant des formes complexes des difficultés à définir les degrés de liberté devant être bloqués pour annuler les mouvements de corps rigide. Nous nous sommes aperçu qu'en règle générale le noeud ayant la coordonnée la plus élevée suivant l'axe Z et se trouvant pratiquement aligné avec le centre de gravité de la partie utile de la pièce était un bon choix pour bloquer 2 DDL. Cela paraît justifié car ce noeud correspond au point d'attaque du poinçon sur la tôle lors d'un emboutissage. Le choix du dernier DDL à bloquer est quant à lui déterminé par le noeud se trouvant le plus éloigné du premier noeud retenu suivant les axes X ou Y. A l'aide de cette stratégie, nous avons obtenus d'excellents résultats pour la plupart des cas. Néanmoins, certains problèmes sont restés délicats à traiter, essentiellement dans les cas à contour de flan imposé, qui nécessite une technique de relocalisation des noeuds sous serre-flan, ceci est par ailleurs valable pour des pièces avec crevés.

Dans l'optique d'universaliser notre approche et de la rendre plus robuste, nous avons recherché de nouvelles possibilités pour bloquer ces mouvements de corps rigide. Mais dans un premier, nous proposerons les fondements de la technique de relocalisation retenue.

5.4.1 Relocalisation des parties sous serre-flan.

Nous allons présenter ici des travaux développés par les chercheurs qui m'ont précédé sur l'approche inverse ([Guo90], [Dur92]). Ils mettent en avant, l'une des caractéristiques de notre méthode qui est de fournir la forme du flan nécessaire pour réaliser la géométrie d'un embouti de géométrie connue. Or dans la réalisation d'un embouti, c'est plutôt le contraire, le contour du flan initial est connu tout comme la géométrie des outils, et c'est seulement à la fin du procédé que l'on connaît la forme des parties sous serre-flan de l'embouti (Figure 5.4.1). L'approche inverse nécessite de connaître intégralement la forme de l'embouti, il convient donc de relocaliser les parties incriminées.



5.4.1 Comparaison des géométries initiales et finales obtenues par un processus d'emboutissage et par analyse par approche inverse sans relocalisation.

La méthode retenue pour pallier ce problème est basée sur une technique de relocalisation des noeuds de la partie sous serre-flan de l'embouti final, supposée au départ de notre analyse La figure 5.4.2 explicite le principe de la relocalisation, en définissant les divers contours nécessaires de la manière suivante:

- S₁ est le contour de la partie utile de l'embouti.
- S₂ est le contour de la partie sous serre-flan de l'embouti, supposé au départ de notre calcul.
- S₃ est le contour du flan initial calculé par l'approche inverse.
- S₄ est le contour initial du flan donné pour l'emboutissage.

La relocalisation s'effectue de la manière itérative suivante:

- 1 Un contour de la partie sous serre flan de l'embouti S_2 tel que $S_1 < S_2 \le S_4$ est choisi pour lancer le calcul
- 2 Le calcul par approche inverse fournit S₃ en fonction de S₂.
- 3 Le contour du flan initial calculé S₃ est comparé au contour S₄ du flan initial donné pour le processus d'emboutissage.
- 4 On déplace S3 alors pour qu'il soit superposé avec S4.
- 5 La même modification est faite sur l'embouti final suivant l'adage : "Ôter ce qui reste, ajouter ce qui manque".
- 6 Une résolution linéaire est effectuée pour déterminer la position des noeuds entre S₁ et S₂.

Les opérations 2, 3, 4, 5, 6 sont répétées au cours des itérations jusqu'à l'obtention de la superposition de S_3 et S_4 , ce qui nous permet d'obtenir S_2 , le contour réel de l'embouti final (figure 5.4.2).



Modification de S₂ par, relocalisationdes noeuds de la partie sous serre-flan de l'embouti

 $Comparaison \mbox{ entre la géométrie du flan initial} calculé S_3 et celle du flan initial réel pour l'emboutissage S_4$

5.4.2 Principe de la technique de relocalisation

Dans le cadre de l'approche inverse, qui est une méthode directe, nous pouvons modifier la géométrie de l'embouti S_2 au cours du calcul, le résultat issu de la convergence au dernier pas fournit la solution correspondante à S_2 modifié.

Nous précisons que:

- l'embouti est discrétisé par éléments finis et que S₄ est défini par un polygone.
- cette procédure de remaillage par relocalisation des noeuds nous permet de garder la numérotation des noeuds et des éléments.
- la résolution linéaire en déplacements imposés est employée pour repositionner les noeuds entre S₁ et S₂.
- l'ensemble des noeuds sur S₁ restent immobiles, les déplacements imposés à S₂ correspondent aux distances entre S₃ et S₄ tels que:

$$\vec{\overline{U}}_{n\in S_2} = \vec{X}_{n\in S_4} - \vec{X}_{n\in S_3}$$
(5.4.1)

• Le critère d'arrêt de cette stratégie permet d'obtenir S₃ et S₄ suffisamment proche tel que:

$$\max_{n} \left\| \vec{X}_{n \in S_4} - \vec{X}_{n \in S_3} \right\| \le \varepsilon_r \tag{5.4.2}$$

avec \mathcal{E}_r , la précision de remaillage exigée.

De manière générale, nous utilisons S4 comme contour de flan de départ S2.

L'ensemble de cette méthodologie est peu coûteuse et peu s'appliquer à des emboutis de contours quelconques et cela même pour les serre-flan non plans. Une méthode directe a été proposée par Guo, pour effectuer le remaillage dans les zones serre-flan non planes en considérant des flans plans. Elle utilise une méthode basée sur les angles d'Euler qui permet de définir une rotation d'angle $\phi(\vec{z},\vec{n})$ autour du vecteur unitaire $\vec{\phi} = \vec{z} \wedge \vec{n}$, entraînant le vecteur \vec{U}^0 en \vec{U} (figure 5.4.3) tel que:

$$\vec{U} = \vec{U}^{0} + \vec{\phi} \wedge (\vec{\phi} \wedge \vec{U}^{0})(1 - \cos\phi) + \vec{\phi} \wedge \vec{U}^{0} \sin\phi$$
(5.4.3)
ou encore:

$$\begin{cases} U \\ V \\ W \end{cases} = \begin{cases} U^{0} \\ V^{0} \\ W^{0} \end{cases} - (n_{y}V^{0} + n_{x}U^{0}) \begin{cases} (1 - n_{z})n_{x} \\ (1 - n_{z})n_{y} \\ \sqrt{1 - n_{z}^{2}} \end{cases}$$
(5.4.4)

$$W^{0} = 0$$

avec \vec{U}^0 le vecteur déplacement d'un noeud dans le flan plan initial.

 \vec{U} le vecteur déplacement d'un noeud dans l'embouti final.

 \vec{n} le vecteur normal unitaire de la tôle emboutie en ce noeud.

Pour que la méthode soit applicable, \vec{U} doit se trouver dans le plan tangent au noeud B, son orientation étant proche de celle de \vec{U}^0 et $\|\vec{U}\| = \|\vec{U}^0\|$.



5.4.3 Repositionnement des noeuds sous surfaces serre-flan non planes.

De manière générale, l'ensemble de ces conditions sont satisfaites car les surfaces serre-flan non planes ont une géométrie développable, peu complexe au regard de celle d'un embouti et peu différente de celle d'un flan plan.

L'ensemble de la méthodologie retenue pour la relocalisation des zones serre-flan a jusqu'alors pu être appliquée avec succès à tous les exemples que nous avons été amené à traiter. Toutefois, dans certains de ces problèmes, la possibilité de déplacer les noeuds du maillage pour effectuer la relocalisation rentre en contradiction avec l'imposition de conditions aux limites pour bloquer les mouvements de corps rigides de la pièce. Le choix des noeuds où ces conditions aux limites seront imposées est très délicat et difficile à systématiser. Nous avons pu observer qu'un noeud bloqué mal choisi entraînait soit des problèmes de convergence soit des concentrations de contraintes anormalement élevées aux alentours de ce noeud. Pour contourner ce problème, nous avons décidé d'introduire la notion de support élastique pour prendre en compte les conditions aux limites de notre problème d'emboutissage.

5.4.2 Introduction de conditions aux limites par rigidité additionnelle.

Nous avons considéré qu'au lieu de bloquer les DDL de certains noeuds, il était plus judicieux de leur donner la possibilité de bouger de manière élastique.

Comme nous avons pu le présenter en début de chapitre, cette méthode est établie de la manière la plus courante qui soit, c'est-à-dire, comme pour la méthode des éléments finis, sous la forme itérative suivante (équation 5.1.1):

$$\left[\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{i}}\right]\!\left\{\Delta \mathbf{U}^{\mathrm{i}}\right\} = \left\{\mathbf{R}^{\mathrm{i}}\right\}$$

Ce système correspond à la résolution par le schéma de Newton-Raphson, présenté avec précision précédemment.

Nous présentons donc ci-après les différentes techniques que nous employons pour introduire des conditions aux limites par supports élastiques.

5.4.2.1 Introduction d'éléments fictifs de type ressort.

Notre première réaction a été de remplacer stricto sensu les 3 DDL bloqués par 3 rigidités additionnelles sur les 2 noeuds choisis suivant la stratégie présentée en début de cette partie. L'analogie avec la prise en compte de conditions limites par pénalité est notable [Dha84]. Afin de réaliser cette opération nous avons considéré des éléments de barre fictifs, à deux noeuds, dont la matrice de rigidité s'exprime comme suit:

$$\begin{bmatrix} k \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$
(5.4.5)

avec: E, le module d'Young

L, A, la longueur et la section de l'élément de barre

La mise en place de ces noeuds fictifs s'effectue par l'addition du terme $\frac{EA}{L}$ aux termes diagonaux de la matrice [K] pour les DDL considérés. Nous n'avons pas reporté le terme correspondant dans le second membre de l'équation 5.1.1, puisque nous résolvons le système à l'aide d'un schéma de Newton-Raphson. Nous avons admis puis vérifié que la modification sur 3 DDL perturbait peu l'ensemble du problème.

Reste alors à définir avec précision les dimensions considérées dans la constante $\frac{EA}{I}$:

E représente le module d'Young soit environ 210 GPa dans le cas d'un acier courant.

A, la section de l'élément est définie en considérant une barre de diamètre égale à l'épaisseur initiale de la tôle, soit alors:

$$A = \frac{\pi (h^0)^2}{4}$$
(5.4.6)

L, la longueur de l'élément fictif, correspond à la distance qui sépare le noeud choisi au noeud voisin se trouvant dans la direction qui devait être initialement bloquée.

Les résultats obtenus par l'emploi de ces éléments, ont été très satisfaisants, au détriment toutefois des temps de calcul, la vitesse de convergence s'affaiblissant considérablement.

Afin d'obtenir à nouveau des temps de calcul acceptables, nous avons modifié la valeur de la constante $\frac{EA}{L}$. Tout d'abord, nous avons augmenté crescendo sa valeur, les temps de calcul ont quelque peu diminué mais les phénomènes de concentrations de contraintes sont bien évidemment réapparus. Paradoxalement, nous avons ensuite diminué la constante de rigidité en la divisant par le nombre de noeuds connectés aux noeuds choisis. Cela n'a pratiquement eu aucune influence, nous ramenant ainsi au premier constat. Nous avons donc ensuite choisi d'augmenter le nombre de noeud, jusqu'à 10, pour obvier cet inconvénient. Cette technique n'a pas apporté les résultats escomptés et pose l'éternel problème du choix des noeuds. C'est pour cette raison que nous avons décidé d'étendre cette méthodologie à l'ensemble des termes diagonaux de la matrice [K], la partie qui va suivre traite de cette nouvelle stratégie.

5.4.2.2 Conditionnement de la matrice de rigidité.

Le fait de conditionner la matrice de rigidité correspond à la mise en place d'un processus de Newton-Raphson avec facteur d'amortissement. Ce processus permet de diminuer les singularités associées au mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, par l'adjonction d'un facteur d'amortissement aux termes diagonaux de celle-ci. Ce processus de Newton-Raphson amorti permet de remplacer l'équation 5.1.1 et s'établit de la manière suivante:

$$\left(\left[\mathbf{K}_{\mathrm{T}}^{\mathrm{i}}\right] + \lambda^{\mathrm{i}}[\mathbf{I}]\right) \left\{ \Delta \mathbf{U}^{\mathrm{i}} \right\} = \left\{ \mathbf{R}^{\mathrm{i}} \right\}$$
(5.4.7)

avec $\{\Delta U^i\}$ définit par l'équation 5.1.2

et où λ^i le facteur d'amortissement, est tel que $\lambda^i \ge 0$ et doit satisfaire $\|\{\mathbf{R}^{i+1}\}\| \le \|\{\mathbf{R}^i\}\|$, cela afin de respecter les théorèmes du point fixe [Rob76].

La valeur de ce facteur peut être assez grande (dans la mesure du raisonnable au regard des autres dimensions en présences), voire constante. Nous avons d'ailleurs effectué de nombreux essais numériques pour déterminer les influences de ces valeurs sur les résultats obtenus. Ceux-ci sont très proches et cela même pour des valeurs jusqu'à dix fois plus grandes les unes des autres. Par contre, plus λ est grand, plus la convergence devient bien évidemment lente. Néanmoins le risque de modifier le problème physique, nous est apparu trop grand pour retenir systématiquement des valeurs que nous imposons.

Dans le but de systématiser le problème, nous avons donc reconsidéré le problème en partant du principe suivant: *"ne pas perturber trop fortement les plus petites valeurs notables appartenant à la matrice de rigidité ".* Ainsi, il est apparu qu'un faible pourcentage d'une de ces valeurs permet de répondre de manière satisfaisante à nos besoins, aussi bien en termes de résultats obtenus à la fin de la résolution, qu'en terme de temps de calcul, en améliorant de plus la convergence.

Afin de qualifier et de valider ces différentes approches, nous allons présenter une étude effectuée avec les différentes stratégies présentées. Il s'agit de l'emboutissage de la préforme d'une coupelle d'amortisseur de Renault Twingo. 5.4.3 Comparaison entre différentes méthodes de prise en compte des conditions aux limites.

La coupelle d'amortisseur de la Renault Twingo (figure 5.4.4) a été utilisée dans le cadre d'une étude visant à la validation de plusieurs outils de simulation d'emboutissage, elle a ainsi été présentée dans plusieurs documents (Bou94], [Elm95], [Tat95]).

Dans ce cadre des essais expérimentaux ont été réalisés pour servir de référence. Il convient de préciser que la coupelle-avant du véhicule Twingo a été choisie pour la simplicité de sa définition CAO et la difficulté de son emboutissage. Par ailleurs, les variations des épaisseurs sur l'embouti sont suffisamment importantes (de l'ordre de 20%) pour que les comparaisons avec les résultats de calculs soient significatives.



5.4.4 Vue réaliste de la préforme de la coupelle d'amortisseur de la Renault Twingo.

Le flan acier utilisé, de dimension 420 x 380 mm et de 1.98mm d'épaisseur, présente les caractéristiques suivantes:

- Le module d'Young E est de 207 GPa.
- Le coefficient de Poisson v est égal à 0.3.
- Le coefficient de frottement est de 0.15.

- La loi d'écrouissage de Swift est exprimée sous la forme suivante: $\sigma = 624 (0.0099 + \varepsilon_p)^{0.176}$ Mpa.
- les coefficients d'anisotropie sont: $R_0=0.85$, $R_{45}=1.07$ et $R_{90}=0.99$.
- L'effort de serrage total du serre-flan est de 400 kN.

Nous avons discrétisé la pièce par 1634 éléments triangulaires et 2525 noeuds. Les résultats présentés sont les variations d'épaisseur pour les trois possibilités de prise en compte des conditions aux limites, c'est à dire le blocage de 3 DDL (figure 5.4.5), la mise en place de 3 éléments de barre fictifs à raideurs prédéterminées (figure 5.4.6) et enfin l'adjonction d'un terme déterminé au cours du processus de résolution à l'ensemble des termes diagonaux de la matrice de rigidité (figure 5.4.7).



5.4.5 Distribution des épaisseurs dans le cas du blocage de DDL.



Chapitre 5. Méthode et stratégie de résolution du problème numérique.

5.4.6 Distribution des épaisseurs avec présence d'éléments fictifs de type ressort.



5.4.7 Distribution des épaisseurs lorsqu'il y a modification des termes diagonaux de la matrice tangente.

Nous observons que les répartitions des épaisseurs sont très proches les unes des autres. Dans la figure 5.4.5, il ne semble pas qu'il y ait eu de problème pour le choix des noeuds pour lesquels des DDL sont bloqués. Pourtant, nous devons stipuler que plusieurs calculs ont été nécessaires pour obtenir ce résultat. Les deux autres cas (figure 5.4.6 et figure 5.4.7) n'ont posés aucun problème.

Ces résultats sont de plus très proches de ceux répertoriés dans la littérature (Bou94], [Elm95], [Tat95]). Un des autres aspects qui nous a préoccupé est celui des temps de calculs. Ils sont respectivement de 7min20s, 14min30s et 7min40s sur HP9000/780 pour les cas représentés dans les figures 5.4.5, 5.4.6 et 5.4.7.

Les mesures expérimentales des épaisseurs ont été effectuées suivant les deux coupes P1 et P2 (figure 5.4.8).



5.4.8 Position des coupes P1 et P2 pour la mesure des épaisseurs.

Les figures 5.4.9 et 5.4.10 représentent les répartitions des épaisseurs, obtenues par le calcul par approche inverse correspondant à la figure 5.4.7, comparées aux relevés expérimentaux.



5.4.9 Distribution des épaisseurs suivant P1.



5.4.10 Répartition des épaisseurs suivant P2.

Les résultats obtenus sont assez satisfaisants au regard de la difficulté du problème. Pour valider nos choix, nous avons bien évidemment effectué d'autres analyses numériques avec des pièces complexes issues du monde industriel. Certaines d'entre elles vous seront présentées dans le chapitre 6.

6. VALIDATIONS NUMERIQUES.

Nous allons présenter dans ce chapitre différents résultats provenant de l'analyse de pièces complexes (Elasto-plasticité avec faible écrouissage, parois quasi-verticales et contres dépouilles, zones serre-flan non planes, présences de joncs, frottements importants....) par l'approche inverse, afin d'évaluer les capacités du logiciel et par là même les limitations de notre méthode simplifiée.

Ces pièces proviennent de cas tests internationaux et du monde industriel.

6.1 Etude du renfort pied milieu.

Il s'agit d'une pièce symétrique de structure (figure 6.1.1) réalisée à partir d'une tôle d'acier à haute limite élastique, avec une zone serre-flan courbe et présence de parois verticales.



Figure 6.1.1 Vue réaliste du demi renfort pied milieu.

L'épaisseur initiale de la tôle est de 1.17mm, la loi de comportement du matériau est exprimé, par une loi de type Hollomon, sous la forme suivante: $\sigma = 624\epsilon^{0.18}$ MPa. L'isotropie a été considérée. La contrainte seuil est égale à 276 MPa et le module d'Young est de 206800 MPa. La Pression du serre-flan est de 100 tonnes pour un coefficient de frottement de 0.15.

La moitié de la pièce a été maillée en 6173 éléments triangulaires et 3192 noeuds (figure 6.1.2).



Figure 6.1.2 Vue de dessus du maillage du renfort pied milieu.

La calcul sans relocalisation a été effectué en 22min13sec sur HP9000/780, et a nécessité l'emploi de 10 pas avec environ 6 itérations par pas. Nous avons pu retrouver les problèmes identifiés par l'industriel, à savoir un très fort amincissement (figure 6.1.3), de l'ordre de 68%, localisé au bas d'une paroi quasi-verticale, qui se traduisait par une casse sous presse.

RESULTAT DE FLECHE

 RESULTS: 1-EPRISSUR
 L.GUCHY DE FELCIC

 EPRISSUE/DDILE_ION
 MAG MIN: 3.72E-01 MAX: 1.72E+01

 VALUE OPTION: 5-DEFLACEMENT_PIECE
 VALUE OPTION: ACTUAL

 JSPLACEMENT - MAG MIN: 0.00E+00 MAX: 1.72E+01
 VALUE OPTION: ACTUAL

 I.00E+00
 1.00E+00

 J.00E+00
 9.94E-01

 J.00E-01
 9.94E-01

Figure 6.1.3 Répartition des épaisseurs du renfort pied milieu.

Nous constatons donc sur l'étude de cette pièce l'aspect prédictif émanant de l'analyse effectuée par l'approche inverse. Nous poursuivons donc l'évaluation de notre approche sur une autre pièce issue elle aussi de l'industrie.

6.2 Etude du pavillon d'un poids lourd.

Cette pièce est caractéristique elle aussi de problèmes de l'industrie de l'emboutissage. En effet, sa forme complexe (grande profondeur d'emboutissage de 160mm et parois quasi-verticales notamment) provoque l'apparition de zones d'amincissement important ainsi que la formation de plis. L'étude de cette pièce a d'ailleurs fait l'objet d'une publication [Bru97] et a été présentée partiellement dans la section 4.5 concernant l'identification des particules passant par le rayon entrée matrice.

Nous proposons ici d'effectuer plusieurs analyses pour montrer l'influence de paramètres matériels tels que l'anisotropie, des modes de déformations de la pièce (prise en compte de la flexion) ou encore des effets dus au procédé de fabrication (le frottement sous serre-flan, la présence de jonc, le frottement dû au poinçon et à la matrice). Ces différentes études présentent un intérêt essentiel pour l'emboutisseur car elles permettent de l'orienter dans ces choix. La dernière analyse effectuée est à la fois la plus complexe et la plus proche des résultats expérimentaux.

Les caractéristiques du matériau utilisé pour la fabrication ainsi que les principaux paramètres de procédé d'emboutissage sont donnés dans le tableau 6.2.1.

Module d'Young: E = 208 Gpa	Coefficient de Coulomb: $\mu = 0.15$
Limite élastique: $\sigma_y = 160 \text{ Mpa}$	Force serre-flan: $F_{sf} = 156.96 \ 10^3 \ daN$
Loi de Hollomon: $\sigma = 543.93 \epsilon^{0.2314}$	Redans normalisés: $h = 7 mm et r = 2 mm$
Anisotropie transverse: $r = 1.305$	Dimensions du flan: 2200 x 1220 mm
Coefficient de Poisson: $v = 0.3$	Epaisseur initiale: $h_{INIT} = 0.77 \text{ mm}$

Tableau 6.2.1 Caractéristiques du matériau et du process.

La discrétisation par facettes triangulaires planes et la position des joncs sont présentées dans la figure 6.2.2.



Figure 6.2.2 Maillage (vue de dessus)

Les valeurs présentées dans le tableau 6.2.3, pour différentes configurations, traduisent les amincissements et épaississements maxima de la tôle emboutie après analyse numérique par l'approche inverse. Les temps CPU nécessaires pour effectuer les calculs avec relocalisations par la méthode inverse varient en fonction de la complexité du problème de 1h30 à 3h sur DEC-alpha 3000/300 (256 MB de RAM). Ces diverses analyses ont été réalisées en 3 à 5 pas avec 8 à 15 itérations par pas suivant les problèmes.

Configuration	(h _{min} -h _{init})/h _{init}	(h _{max} -h _{init})/h _{init}
Isotrope	-60.3%	10.5%
Pas de frottement		- • ,• / -
Membrane		
Anisotrope	-54,2%	10,3%
Pas de frottement		
Membrane		
Anisotrope	-69,8%	7,4%
Frottements sous serre-flan		
Membrane		
Anisotrope	-48,9%	8,9%
Frottements sous serre-flan et partie utile		
Membrane		
Anisotrope	-48,5%	7,7%
Frottements sous serre-flan et partie utile		
Membrane flexion		
Anisotrope	-48%	7,5%
Frottements sous serre-flan et partie utile		
Membrane flexion		
Jonc (redan)		

Tableau 6.2.3 Influence des paramètres d'emboutissage sur les variations d'épaisseur.

Les résultats obtenus en terme d'épaississement sont globalement tolérables. Par contre, quelques soient les paramètres pris en compte dans l'analyse numérique de cette pièce, les amincissements calculés ne permettent pas de la réaliser puisqu'ils sont supérieures à 20%, que l'on considère en pratique industrielle comme une limite de faisabilité. Ces calculs s'avèrent donc en bonne corrélation avec les problèmes de striction et de casse rencontrés lors de la mise au point des outils nécessaires à la réalisation de cette pièce.

La zone de casse la plus importante est détectée juste au dessus de la région où les risques de plissement sont également les plus importants, soit ici dans le coin A. L'anisotropie du matériau participe à la diminution des amincissements de la pièce, mais de manière relativement modérée (-54.2% au lieu de -60.3%). Le coefficient d'anisotropie r du matériau choisi ici étant encore assez proche de 1 (1.305 exactement), on peut supposer que l'utilisation d'un matériau plus anisotrope aurait encore davantage d'influence sur les risques de striction.

Par ailleurs, la prise en compte des frottements sous serre-flan est prépondérante dans l'analyse de l'emboutissage car ils retiennent la matière et par conséquent entraînent une diminution des épaississements (de 10.3% à 7.4%) et surtout une augmentation non négligeable des amincissements (de -54.2% à -69.8%) sur la pièce emboutie. On remarquera que les frottements sous la partie utile de l'embouti permettent de réduire ces amincissements: la matière ne glissant plus sous le poinçon est amenée plus facilement sous la partie utile. La flexion n'a pas d'influence notable sur l'amincissement de cette pièce, car le rapport des différents rayons de courbure sur l'épaisseur reste trop important. Enfin, la présence du jonc n'apporte sur cette pièce que peu d'améliorations en terme de variations d'épaisseur. Son rôle est surtout de contrôler l'avalement du flan en permettant un meilleur écoulement de la matière dans les zones critiques.

Nous présentons, dans la figure 6.2.4, la distribution des épaisseurs, après analyse de la mise en forme du pavillon de poids lourd, pour le dernier cas étudié dans le tableau 6.2.3, c'est à dire, celui correspondant à la prise en compte de l'ensemble des paramètres du process.



figure 6.2.4 Répartition des épaisseurs du pavillon (coin A).

Le résultat obtenu est en très bonne corrélation avec les observations faites par le partenaire industriel qui réalisait la pièce. De même, la comparaison, avec les résultats issus d'une analyse effectuée avec le code incrémental Optris, est probante. Afin de résoudre les problèmes identifiés sur cette pièce, le constructeur a été amené à modifier la géométrie du coin A.

Dans le but de valider notre méthode de manière plus large, nous présentons dans ce qui va suivre les études relatives à des cas tests internationaux.

6.3 Etude d'un disque de roue automobile.

Cette pièce, proposée comme cas test d'un congrès s'étant déroulé à Zurich en 1991 (Finite Element simulation of 3D Sheet Metal forming in the Automotive Industry), est la partie centrale de la roue. Il s'agit d'une pièce de structure, dont la mise en forme s'effectue par paire. Notre problème sera basée sur la réalisation d'un disque avec prise en considération de la symétrie suivant l'axe Y (figure 6.3.2).

Les dimensions du flan rectangulaire correspondant à ce problème sont 430x375 (mm) et l'épaisseur initiale de la tôle est de 1.2mm.

La profondeur de l'embouti quand à elle est de 64mm. La figure 6.3.1 correspond à la représentation de ce problème.



Figure 6.3.1Représentation de la géométrie du disque avec le flan initiale.

Cette pièce est discrétisée par 3600 éléments triangulaires de facettes planes et 1851 noeuds (figure 6.3.2). Sur cette même figure 6.3.2, les positions des lignes de coupes sont indiquées, ce sont pour ces lignes que nous observerons les résultats. Les valeurs étudiées ici seront les déformations principales minimales et maximales, ainsi que les épaisseurs.

Le matériau utilisé possède les caractéristiques suivantes:

- Module d'Young E: 73 GPa
- Coefficient de Poisson: 0.33

- Coefficients d'anisotropie: r₀=0.78, r₄₅=0.45, r₉₀=0.49
- Courbe d'écrouissage: $\sigma = 360 220e^{-7.5\epsilon^{0.97}}$ MPa
- Coefficient de frottement: 0.07
- Force de serrage du flan: 500 kN

Les courbes présentées permettent de comparer les résultats obtenus par l'approche inverse et ceux provenant d'une analyse incrémentale dynamique explicite du code Optris. La résolution de ce problème par l'approche inverse a nécessité 11min33sec seulement sur HP9000/780, via 3 pas et environ 6 itérations par pas.



figure 6.3.2 Maillage et positionnement des plans de coupes.

Les courbes suivantes 6.3.3a, b et c représentent les épaisseurs suivant les section A, B et C, de même les courbes 6.3.4a, b, c et 6.3.5a, b et c décrivent respectivement les déformations principales maximales et minimales.



Epaisseur section A

Courbe 6.3.3a Répartition des épaisseurs pour la section A.



Epaisseur section B

Courbe 6.3.3b Répartition des épaisseurs pour la section B.



Courbe 6.3.3c Répartition des épaisseurs pour la section C.



Déformation maximale section A

Courbe 6.3.4a Déformation principale maximale pour la section A.



Déformation maximale section B

Courbe 6.3.4b Déformation principale maximale pour la section B.



Courbe 6.3.4c Déformation principale maximale pour la section C.



Déformation minimale section A

Courbe 6.3.5a Déformation principale minimale pour la section A.



Déformation minimale section B

Courbe 6.3.5b Déformation principale minimale pour la section B.



Déformation minimale section C

Courbe 6.3.5c Déformation principale minimale pour la section C.

Au regard de ces différentes comparaisons et des échelles employées par ailleurs, il apparaît que ces résultats sont assez proches. Néanmoins, quelques pics apparaissent de l'analyse incrémentale, ces phénomènes sont dus à des éléments très distordus, et cela malgré le niveau retenu (3) pour le maillage adaptatif employé dans cette méthode.

Afin de clore l'étude de cette pièce, nous présentons dans la figure 6.3.6, la distribution des épaisseurs.



Figure 6.3.6 Représentation des variations d'épaisseurs du disque de roue après analyse simplifiée.

6.4 Etude d'un carter d'huile.

Ce cas test international a été proposé en 1994 dans le cadre de la conférence de Baden-Baden (figure 6.4.1), il a également fait l'objet d'une publication en 1993 dans les proceedings de Numisheet'93 [Von93]. La forme du contour du flan est décrite par un polygone comprenant 59 points dans le plan XY (figures 6.4.1, 6.4.2 et 6.4.4). Elle se caractérise par une grande profondeur d'emboutissage, 85mm, au regard des autres dimensions et de deux parties séparées. De plus, l'écrouissage du matériau est assez faible (courbe 6.4.3). Les différentes études comparatives, entre les déformations principales maximales et minimales, ainsi que les épaisseurs, sont

effectuées sur 3 plans de coupes présentés dans la figure 6.4.5, et sur les mesures des dimensions du flan après emboutissage suivant les axes X et Y (figure 6.4.4). Nous pourrons comparer nos résultats à ceux issus d'autres analyses numériques et expérimentales.



Figure 6.4.1 Description des outils pour la mise en forme du carter d'huile.



Figure 6.4.2 Vue réaliste du carter avec la forme du flan initial.



Courbe 6.4.3 Courbe représentant la loi élasto-plastique.

Les autres caractéristiques du matériau sont:

- Le module d'Young E: 210 GPa
- Coefficient de Poisson: 0.33
- Coefficients d'anisotropie: r₀=2.12, r₄₅=1.73, r₉₀=2.53
- Contrainte seuil: $\sigma_y = 143$ MPa
- Coefficient de frottement: 0.165
- Force de serrage du flan: 400 kN

L'épaisseur de la tôle initiale est de 0.63mm.

Cette pièce a été maillée par 10650 éléments triangulaires de facette plane et 5385 noeuds (figures 6.4.4 et 6.4.5). Ce problème est le plus important, en terme de nombres d'éléments et de noeuds, présenté dans ce document. Ce qui d'ailleurs, ne nous a pas posé de problèmes particuliers.

L'analyse numérique a demandé 1h45min de temps CPU sur HP 9000/780 par 10 pas et 6 itérations par pas. Les courbes comparatives 6.4.6a,b,c , 6.4.7a,b,c et 6.4.8a,b,c entre les résultats de diverses analyse numériques et expérimentales, concernent la distribution des épaisseurs et les déformations principales maximales et minimales sur les ligne A-B, D-E et R-S (figure 6.4.5).



Figure 6.4.4 Vue de dessus du maillage et des cotes radiale et longitudinale du flan.



Figure 6.4.5 Positionnement des lignes, A-B, R-S et D-E, pour l'analyse des résultats.



Courbe 6.4.6a Répartition des épaisseurs suivant la ligne A-B;



Courbe 6.4.6b Répartition des épaisseurs suivant la ligne D-E.



Courbe 6.4.6c Répartition des épaisseurs suivant la ligne R-S.



Courbe 6.4.7a Déformation principale maximale suivant A-B.



Courbe 6.4.7b Déformation principale maximale suivant D-E.



Courbe 6.4.7c Déformation principale maximale suivant R-S;



Courbe 6.4.8a Déformation principale minimale suivant A-B.



Courbe 6.4.8b Déformation principale minimale suivant D-E;



Courbe 6.4.8c Déformation principale minimale suivant R-S.

En observant l'ensemble de ces courbes comparatives, il ressort que l'aspect qualitatif de notre approche simplifiée est une fois encore notable. En ce qui concerne le caractère quantitatif de cette méthode, il apparaît que ce dernier est plutôt correct vu la difficulté de ce problème, identifiable par une assez grande disparité entre les divers résultats; et cela même pour des approches considérées plus précises et robustes. Sachant que de plus, nous n'avons reproduit, sur ce document, les résultats les plus proches des valeurs expérimentales. Afin de poursuivre cette étude comparative, nous avons reporté dans le tableau 6.4.9 les valeurs des cotes a et b (figure 6.4.4) après mise en forme du carter, pour les codes présentés précédemment.

	a (a _{initiale} =492mm)	b (b _{initiale} =380mm)
Valeurs expérimentales	≅445	≅305
Autoform	≅ 450	≅305
Icem Stamp	≅445	≅305
LS Dyna3D	≅475	≅350
Abaqus	≅4 50	≅325
Approche inverse	424	300

Tableau 6.4.9 Comparaison des cotes radiales et longitudinales à l'état final.

Le tableau comparatif ci-dessus permet de constater qu'il y ici une bonne concordance entre les différents résultats provenant des diverses méthodes et stratégies employées pour analyse ce problème. Afin de clore cette étude, nous présentons dans la figure 6.4.10, la répartition des épaisseurs obtenue après analyse par l'approche inverse dont l'ensemble des hypothèses et autres aspects formulatoirs et stratégiques vous ont été exposés tout au long de ce document.



Figure 6.4.10 Répartition des épaisseurs du carter après analyse par approche inverse.

Comme nous venons de l'indiquer précédemment, nous avons présenté dans ce rapport les diverses caractéristiques de notre méthode simplifiée, appelée approche inverse, ainsi que les évolutions et autres améliorations de cette méthode, ces différents aspects ayant été soumis aux exemples numériques qui viennent de vous être montrés. Il convient de passer à la conclusion l'ensemble de cette étude.

7. CONCLUSION ET PERSPECTIVES.

L'analyse numérique de l'emboutissage des tôles minces est un travail qui demande de bonnes connaissances numériques et mécaniques. Le problème mécanique lié à l'emboutissage fait partie des nombreux procédés de mise en forme où "La matière demeure, la forme se perd." comme l'a poétiquement exprimé Ronsard. Ainsi, différentes contributions ont été développées dans cette thèse afin que la simulation nous amène à fleurter avec la réalité, but propre de celle-ci.

Les développements suivants ont donc été effectués:

- De nouvelles possibilités de maillages par des éléments quadrangles gauchis en comportement de membrane, dont les performances sont satisfaisantes en terme de résultats pour un coût encore trop important à ce jour en temps de calcul.
- La prise en compte des effets de flexion, identifiables dans les zones où les rapports entre les rayons de courbures et les épaisseurs sont faibles, à l'aide d'éléments de type DKT12 sans augmentation du nombre de Degrés de Liberté par noeuds. Nous avons obtenu d'excellents résultats avec cet élément sans grever les temps de calcul nécessaires pour résoudre le problème numérique. Néanmoins, cette formulation ne nous permet pas de prendre en compte les effets de décambrage de la tôle après un passage par un rayon de courbure.
- Des améliorations notables pour considérer l'action des outils tels que le serre-flan, le poinçon, la matrice ainsi que l'adjonction de joncs, par l'intermédiaire de forces de retenues équivalentes issues d'un modèle mathématique analytique, ont été effectués pour nous rapprocher du processus de fabrication et par là même qualifier voire quantifier leurs influences respectives sur le comportement et les performances de la pièce étudié. Bien évidemment, les nombreuses hypothèses utilisées pour estimer les déplacements et autres actions des outils sous la partie utile de la pièce notamment sont discutables tout comme l'est par ailleurs la prise en compte de l'élasto-plasticite par une loi totale de type Hencky. Toutefois, nous constatons avec ravissement que de nombreux problèmes sont très proches de ces hypothèses.

• Des modifications d'ordre algorithmiques ont été mises en place afin de rendre notre approche plus robuste tout en lui permettant de répondre à la complexité émanante des préoccupations industrielles. Ainsi l'utilisation d'une solution initiale géométrique en amont de la résolution statique implicite de type Newton-Raphson, nous a permis d'améliorer la convergence en permettant de plus de diminuer les temps de calcul. La méthode retenue pour déterminer cette solution initiale doit être améliorée afin de fournir une estimation de la solution finale plus proche, cela pour tous types de pièces et pour des temps de calcul moindres si possible. La mise en place d'un processus de Newton-Raphson amorti, avec coefficient de sur-relaxation, par le conditionnement de la matrice hessienne représentative du problème, a très nettement permis d'universaliser notre approche simplifiée. Néanmoins, nous devons envisager d'enrichir l'algorithme de résolution pour qu'il soit encore plus robuste et rapide, par des travaux sur des méthodes de Newton-Raphson modifiées (méthode de Wall par exemple) ayant des vitesses de convergence cubique.

Nous nous sommes évertués à valider dans un premier temps chacune de ces contributions sur divers problèmes académiques et industriels, pour ensuite valider l'ensemble de la méthode sur des cas complexes avec d'ailleurs un certain succès. Nous avons alors pu situer et identifier les limitations ainsi que les bonnes prestations offertes par cette méthode et les hypothèses qui l'entourent. Nous devons en effet garder un esprit critique lorsque nous traitons des pièces où les lois élasto-plastiques ont de faibles coefficients d'écrouissage, où les coefficients de frottements sont élevés et où la convergence s'avère souvent dure à atteindre. La porte reste donc ouverte à de nouveaux développements et améliorations.

La taille des problèmes traités (10000ddl maximum) doit être extrapolée à celles des cas industriels, c'est à dire de 5 à 10 fois plus de degrés de liberté. Ce qui implique, par exemple, que l'emploi d'un stockage de type creux doit être envisagé en lieu et place de la technique de ligne de ciel actuellement utilisée. De même, des développements algorithmiques, voie déjà explorée par Hu au cours de sa thèse [Hu97], doivent être entrepris pour déterminer des méthodes de résolution encore plus rapides et robustes. Il conviendrait d'envisager la combinaison judicieuse de plusieurs types d'algorithmes de résolution (gradient conjuguée, relaxation dynamique,...). La parallèlisation du code peut aussi être envisagée pour aborder les problèmes conséquents. D'autre part, il faut rappeler que l'approche inverse est une méthode éléments finis basée sur la connaissance a priori de la géométrie désirée, il conviendrait, au regard de ce rappel, de développer un estimateur d'erreurs dues à la discrétisation. Cela implique, bien entendu d'envisager la mise en place d'un processus de remaillage pour obvier ces erreurs. Actuellement, nous diminuons ce risque éventuel, en faisant systématiquement des maillages assez fins et réguliers, il m'apparaît judicieux d'optimiser la discrétisation, qui est le point de départ de la méthode.

A cela s'ajoute des aspects liés quand à eux à l'emboutissage proprement dit. En effet, certaines pièces de structure relèvent plus du domaine des coques épaisses. Ce même type de pièces nous fait penser qu'il faut étudier les cambrages et décambrages successifs de la tôle aux rayons. Ce type de contributions est envisageable par la prise en compte de forces équivalentes calculables a priori par des modèles mathématiques identiques à ceux employés pour les joncs. Une étude de crevée a été effectuée sur un cas académique afin d'observer le comportement de la méthode, les résultats sont satisfaisants, il reste donc à confirmer ce constat sur des cas industriels complexes. Deux autres types d'études apparaissent également nécessaires, elles sont relatives aux tôles sandwichs (lois de comportement...) et aux flans raboutés. Des études sur des tôles d'aluminium doivent également être reprises pour les problèmes relatifs aux frottements par exemples. Des travaux sur la détermination du retour élastique après analyse simplifiée font aussi partie des points à développer.

L'optimisation doit pouvoir s'articuler autour de cette méthode et de ces développements de manière encore plus performante, comme ont pu le mettre en avant les travaux prospectifs de Barlet ([Bar96.1], [Bar96.2])et Naceur [Nac97] dans ce domaine.

Une autre voie, testée par Benchaabane [Ben93], est encore possible, il s'agit de l'analyse numérique des procédés de soufflage et thermosoufflage des plastiques (lois de comportement hyperélastique, visco-élasto-plastique, contact collant, paraison de formes axisymétriques...).

Les nombreux avantages et inconvénients liés à ce type d'approches simplifiées nous invitent donc à les développer afin de les pousser aux limites de la réalité.

Bibliographie

- [Adv90] Advanced technology of plasticity 1990, Proc. of the 4th Int. Conf. on Tech. of Plasticity, Int. Acad. Publishers, Kyoto, Japan, 1990.
- [Adv92] Advanced technology and machinery in metal forming, Proc. of the Int. Conf. ATMMF'92, Huazhong, University of Science and Technology Press, Wuhan, China, 1992.
- [Afz94] Afzali M., Bouhelier C., "Emboutissage: Intérêt de la simulation et produits existants", La journée du calcul en emboutissage, Applications industrielles pour la conception des pièces, CETIM, France, Oct. 94.
- [Alt94] Altan T., Ed., Sheet metal forming technology, Journal of Materials Processing Technology, 46, Nos 3-4, Elsevier, Nov. 1994.
- [Am88] Ameziane Hassani H., "Contribution à la prévision de l'ondulation dans les coques minces élastoplastiques à double courbure", Thèse de Doctorat de l'Université de Sherbrooke, Canada, 1988.
- [Arr92] Arrieux R., Boivin M., "Détermination théorique du diagramme des contraintes limites de formage: Application aux matériaux anisotropes", European Journal Mech. Eng., Vol. 37, p89-96, 1992.
- [Bar96.1] Barlet O., Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., Naceur H., Knopf-Lenoir C., "The inverse approach and mathematical programming techniques for optimum design of sheet forming parts", 3rd Biennial Joint Conference on Engineering Systems Design and Analysis, Montpellier, France, 1-4 July 1996.
- [Bar96.2] Barlet O., Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., Naceur H., Knopf-Lenoir C., "Optimum design of blank contours using the inverse approach and a mathematical programming technique", Numisheet'96, 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Dearborn, Michigan, U.S.A., 29 September-3 October 1996.
- [Bat89] Batoz J.L., Guo Y.Q., Duroux P., Detraux J.M., "An efficient algorithm to estimate the large strain in deep drawing", Numiform'89, Fort Collins, Colorado, 26-30 June 1989.

- [Bat90.1] Batoz J.L., Guo Y.Q., Detraux J.M., "An inverse finite element procedure to estimate the large plastic strain in sheet metal forming", 3rd International Conference on Technology of Plasticity, Kyoto, Japan, July 1990.
- [Bat90.2] Batoz J.L., Dhatt G., Modélisation des Structures par Eléments Finis Solides Elastiques, vol.1, Hermès, Paris, 1990.
- [Bat91] Batoz J.L., Dhatt G., Modélisation des Structures par Eléments Finis Poutres et plaques, vol.2, Hermès, Paris, 1991.
- [Bat92] Batoz J.L., Dhatt G., Modélisation des structures par Eléments Finis Coques, vol.3, Hermès Editeur, Paris, 1992
- [Bat95.1] Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., "Accounting for bending effects in sheet metal forming using the inverse approach", 4th International Conference on Computational Plasticity, Barcelone, Espagne, 3-6 April 1995.
- [Bat95.2] Batoz J.L., Guo Y.Q., Mercier F., "The inverse approach including bending effects for the analysis and design of sheet metal forming", Numiform'95, Ithaca, New-York, U.S.A., 18-21 June 1995.
- [Bat96.1] Batoz J.L., Guo Y.Q., "The inverse approach for sheet forming analysis: theorical aspects and results", MATEC'96, 5th International Conference on the Improvement of Materials, Marne la Vallée, 25-27 Mars 1997.
- [Bat96.2] Batoz J. L., Guo Y. Q., Mercier F., "Simple triangular shell elements for large strain estimations of sheet metal forming parts". Séminaire d'été de la Société Canadienne de Mathématique: Plaques et Coques.
- [Bat97.1] Batoz J.L., Guo Y.Q., "Analysis and design of sheet forming parts using a simplified inverse approach", 5th International Conference on Computational Plasticity, Barcelone, Espagne, 17-20 March 1997.
- [Bat97.2] Batoz J.L., Naceur H., Barlet O., Guo Y.Q., Knopf-Lenoir C., "Optimum design of blank contours in axisymmetrical deep drawing process", The Advances in Computational mechanics, ed. Z. Wanxie, C. Gengdong, L. Xikui, International Academic Publishers, 1997.
- [Bat98] Batoz J. L., Guo Y. Q., Mercier F., "The inverse approach with simple triangular shell elements for large strain predictions of sheet metal forming parts"., acceptÈ à Engineering Computations.

- [Ben93] Ben chaabane S., "Contribution à la modélisation numérique de la mise en forme des corps creux plastiques", Thèse de doctorat, UTC, 1993.
- [Bou94] Boulmane L., "Application des techniques implicites-explicites de la dynamique transitoire à la simulation numérique en mise en forme des métaux." Thèse de Doctorat de l'Université de Franche-Comté, 1994.
- [Bru09] Brunhes B., La dégradation de l'énergie, ISBN: 2-08-081251-3, Flammarion, 1909.
- [Bru93] Brunet M., Sabourin F., "A simplified triangular shell element with necking criterion for 3D sheet forming analysis", in NUMISHEET 93, p229-238, 1993.
- [Bru94] Brunet M., Sabourin F., "Prediction of necking and wrinkles with a simplified triangular shell element in sheet forming", Proceedings on the Int. Conf. on Metal Forming Process Simulation in Industry, p75-93, Baden-Baden, Germany, Sept.28-30, 1994.
- [Bru95.1] Brunet M., Arrieux R., Nguyen Nhatt T., "Necking prediction using forming limit stress surfaces in 3D sheet metal forming simulation", Numiform'95, Ithaca, New-York, U.S.A., 18-21 June 1995.
- [Bru95.2] Brunet M., "Prediction of necking in 3-D sheet metal forming processes with finite element simulation", Materials Processing Defects, Ghosh S.K. and Predeleanu M. (Eds), p235-249, 1995.
- [Bru96] Brunet M., Sabourin F., "Simulation of neckink using damage mechanics in 3-D sheet metal forming analysis, Numisheet'96, 3rd International Conference on Numerical Simulation of 3-D Sheet Forming Processes, Dearborn, Michigan, U.S.A., 29 September-3 October 1996.
- [Bru97] Brunet S., Mercier F., Batoz J.L., Guo Y.Q., "Méthodes simplifiées pour l'évaluation des risques de rupture et de plissement en emboutissage de tôles minces", 5^{ème}
 Colloque National sur la Conception Mécanique Intégrée, PRIMECA'97, La Plagne, France, 2-4 Avril 1997.
- [Cet94] Calculs en emboutissage. Applications industrielles pour la conception des pièces.Publications CETIM, Senlis, France (Eds.), ISBN 2-85400-323-3, 1994.
- [Che92] Chenot J.L. et al. (Eds) Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 92, Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1992.
- [Cho89] Choudhry S., Lee J.K., "Numerical simulation of thin sheet metal forming processes including bending effects", in D.R. Duraham and A. Saigal (Eds.). Microstructural Development and Control in Material Processing, MD-Vol. 14, ASME, p. 11, 1989.

- [Chu84] Chung K., Lee D., "Computer-aided analysis of sheet material forming processes", Vol. 1, 1st Int. Conf. on Technology of Plasticity, Tokyo, Japan, p660-665, 1984.
- [Chu92] Chung K., Richmond O., "Sheet forming process design on ideal forming theory", NUMIFORM'92, Balkema Editor, p455-460, 1992.
- [Dha84] Dhatt G., Touzot G., Une Présentation de la Méthode des Elements Finis, ed. Maloine, Paris, 1984.
- [Dur92] Duroux P., "Evaluation numérique des déformations dans les tôles embouties", Thèse de Doctorat, Division Modèles Numériques en Mécanique, Université de Technologie de Compiègne, 1992.
- [Elm91] El Mouatassim M., Guo Y.Q., Batoz J.L., "Application of an inverse FE-procedure to sheet forming", International Conference with Workshop, FE Simulation of 3-D sheet metal forming process in automobile industry, Zürich, Switzerland, May 1991.
- [Elm95] El Mouatassim M., Thomas B., Jameux J.P., Di Pasquale E., "An industrial finite element code for one-step simulation of sheet metal forming", Numiform'95, Ithaca, New-York, U.S.A., 18-21 June 1995.
- [Faf93] Fafard M., cours d'éléments finis en mécanique des solides du département de Génie Civil de l'Université Laval à Québec, Canada, Sept. 1993.
- [FE-91] FE-Simulation of 3-D sheet metal forming processes in automotive industry, Proc. of the Int. Conf. with Workshop, Zürich, Editor VDI Verlag, 1991.
- [Fel] Felder E., "Tribologie de l'emboutissage", Techniques de l'ingénieur, Traité Mécanique et Chaleur, B7535.
- [Ger74] Gerdeen J.C., "An analysis of axisymmetric sheet metal forming", 2nd North American Manufacturing Research Conference, p350-365, 1974.
- [Ger84] Gerdeen J.C., "Development of computer program AXIFORM for the analysis of forming of axisymmetric sheet metal parts", Proc. NAMRC-XII, SME Trans., p209-213, 1984.
- [Guo90] Guo Y.Q., Batoz J.L., Detraux J.M, Duroux P., "Finite element procedures for strain estimations of sheet metal forming parts", I.J.N.M.E., Vol 30, p1385-1401, 1990
- [Hag90] Hage Chehade I., Boivin M., "Tôles pour emboutissage, caractérisation par les courbes limites en contraintes", Matériaux et techniques, Juin 1990.
- [Hag91] Hage Chehade I., Brunet M., Boivin M., Arrieux R., "Striction en emboutissage, prédiction par utilisation des courbes limites en contraintes", Matériaux et techniques, Septembre-Octobre 1991.
- [Hos83] Hosford W.F., Cadell R.M., Metal forming, Mechanics and metallurgy, Prentice Hall, 1983.
- [Klu92] Kluge S., "Spannungsuberlagerung durch Einsatz von Ziehstaben beim Umformen unregelmabiger Blechteile, Blech Rohre Profile 39, p17-123, 1992.
- [Lee 83] Lee D., Forth C.M., "Development of a computer-aided analysis method for sheet material forming processes", Report N° 83CRD223, Metallurgy Laboratory, General Electric Co., 1983.
- [Lem85] Lemaitre J., Chaboche J.L., Mécanique des Matériaux Solides, Dunod, 1985.
- [Li95] Li K.P., Cescotto S., Habraken A.M., Bruneel H., "Numerical simulations and benchmarks of 3-D sheet metal forming using LAGAMINE program". Numiform'95, Ithaca, New-York, U.S.A., 18-21 June 1995.
- [Liu 92] Liu S.D., Karima M., "A one step finite element approach for product design of sheet metal stampings", NUMIFORM 92, Balkema, p497-502, 1992.
- [Liu S.D., Assempoor A., "Development of FAST 3D. A design-oriented one step FEM in sheet metal forming", COMPLAS IV, Part II, p1515-1526, 1995.
- [Mak93] Makinouchi A. et al., (Eds.) Numerical simulation of 3D sheet metal forming processes. Verification of simulation with experiments, NUMISHEET 93, SFSRG, Japan, 1993.
- [Mar92] Marciniak Z., Duncan J.L., Mechanics of Sheet Metal Forming, Ed. Edward Arnold, 1992.
- [Mat86] Mattiasson K. et al. (Eds.) Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 86, Balkema, Rotterdam, Boston, 1986.
- [Mat92] Mattiasson K., Bernspang L., Samuelson A., Hamman T., Schedin E., Melander A., "Evaluation of a dynamic approach using explicit integration in 3D sheet forming simulation", 4th International Conference in Industrial Forming Processes, NUMIFORM'92, Sophia Antipolis, France, 14-18 September 1992.
- [Mer94] Mercier F., "Formulation et implantation de l'élément de membrane Q4 gauchi pour l'analyse des tôles minces embouties", mémoire de DEA, DIVISION MNM/GM, Université de Technologie de Compiègne, sept 94.
- [Met94] Metal Forming Process Simulation in Industry, International Conference and Workshop, Baden-Baden, Germany, 28-30 September 1994.

- [Nac97] Naceur H., Batoz J.L., Barlet O., Knopf-Lenoir C., "Optimisation de forme du contour du flan dans l'emboutissage de tôles axisymétriques", 13^{ème} Congrès Français de Mécanique, vol.4, p19-22, Poitiers, Futuroscope, 1-5 Septembre 1997.
- [Nai96] Naiman A., cours d'analyse numérique, Jerusalem College of Technology, naiman@math.jct.ac.il, Http://hobes.jct.ac.il/~naiman, based on: Numerical Mathematics and Computing by Cheney and Kincaid, 1994, Brooks/Cole Publishing Company, ISBN: 0-534-20112-1, 1996.
- [Nar93] Narainen R., "Comparaison de trois méthodes de calcul pour la simulation de l'emboutissage de tôles axisymétriques", Thèse de Doctorat, UTC, 1993.
- [Nin78] Nine H.D., "Drawbead forces in sheet metal forming", Mechanics of Sheet Metal Forming, Koisinen D.P. and Wang N.M. (Eds), Plenum Press, p179-211, New York, 1978.
- [Nin82] Nine H.D, "New drawbead concepts for sheet metal forming", J. Appl. Metal., Vol.2, p185-192, 1982.
- [Ona89] Onate E., Agelet de Saracibar C., Dalin J.B, "Finite element analysis of sheet metal forming problems using a selective voided viscous shell membrane formulation", NUMIFORM 89, p23-29, 1989.
- [Owe95] Owen D.R.J et al., Computational plasticity Fundamentals and Applications, COMPLAS IV, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1995.
- [Per91] Peric D., Owen D.R.J, Honnor M.E, "Simulation of thin sheet metal forming processes employing a thin shell element", F.E. Simulation of 3-D Sheet Metal Forming Processes in Automotive Industry, Zürich, p569-600, May 1991.
- [Rac93] Rachik M., "Simulation de la mise en forme des structures minces, soufflage des plastiques et emboutissage des tôles", Thèse de Doctorat, Université de Technologie de Compiègne, France, 1993.
- [Rav94] Ravier P., "Aide à la conception des pièces par des méthodes de calcul simplifié", CETIM (Calculs en emboutissage) p67-79, 1994.
- [Rio93] Rio G., Tathi B., Horkay F., "Introducing bending rigidity in a finite element membrane sheet metal forming model", Large plastic deformations, fundamental aspects and applications to metal forming, Balkema, Rotterdam, Brookfield, p449-456, 1993.
- [Rob76] Robert F., Cours d'analyse numérique itérative de l'Institut National Polytechnique de Grenoble, 1976.

- [Ron] Ronde-Oustau F., "Conception et mise au point d'une gamme d'emboutissage", Techniques de l'ingénieur, Traité Génie Mécanique, B7540.
- [Sal94] Salanon M, Mallard M., Fiches techniques Découpage Emboutissage Pliage, EMS 740-A19/N 3625, 1994.
- [She95] Shen S.F, Dawson P. (Eds.), Simulation of material processing : theory, methods and applications, NUMIFORM 95, Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1995.
- [Skl92] Sklad M.P., Yungblud B.A., "Analysis of multi-operation sheet forming processes", NUMIFORM 92, p543-547, 1992.
- [Skl93] Sklad M.P., "Modelling of part shape and deformation evolution in conventional forming of large sheet metal components", p293-302, NUMISHEET 93, SFSRG, Japan 1993.
- [Sow82] Sowerby R.," Determination of large strains in metal forming", J. Strain. Anal., vol. 7, p95, 1982.
- [Sto85] Stoughton T.B., "Finite element modeling of 1008 AK sheet steel stretched over a rectangular punch with bending effects", in Computer Modeling of Sheet Metal Forming Process, Edited by Wang and Tang, The Metallurgical Society, p143-159,1985.
- [Sto88] Stoughton T.B., "Model of drawbead forces in sheet metal forming", Proc. of 15th Biennal IDDRG Cong., p205-215, Dearborn, MI, May 1988.
- [Tat95] Tathi B., "A joint project for numerical simulation of 3D sheet metal forming processes with quasi-static or dynamic approaches", Numiform'95, Ithaca, New-York, U.S.A., 18-21 June 1995.
- [Teo93] Teodosiu C. et al., (Eds.) Large plastic deformations, fundamental aspects and applications to metal forming, Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1993.
- [Tho89] Thompson E.G. et al. (Eds.) Numerical Methods in Industrial Forming Processes, NUMIFORM 89, Balkema, Rotterdam, Brookfield, 1989.
- [Tuf94] Tufekci S.S, Wang C.T, Kinzel G.L., Altan T., "Estimation and contraol of drawbead forces in sheet metal forming", International Congress and Exposition of Detroit, Michigan, SAE paper N°940941, p153-162, 1994.
- [von93] Von Schöning K.V., Sünkel R., Hillmann M., Blümel K.W., Wülfing A.,
 "Mathematical modelling bridges the gaps between material and tooling", NUMISHEET 93, SFSRG, Japan, 1993.

- [Wan82] Wang N.M., "A mathematical model of drawbead forces in sheet metal forming", Journal of Applied Metalworking., Vol.2, p193-199, 1982.
- [Wan85] Wang N.M. and Tang S.C., (Eds.) Computer modelling of sheet metal forming process; Theory, verification and applications, The Metallurgical Society, 1985.
- [Wan88] Wang N.M., Tang S.C., "Analysis of bending effects in sheet forming operations", Int. J. Num. Meth. Eng. 25, 1, p253-267, 1988.
- [Wan93] Wang Z.R. and He Y. (Eds.) Advanced technology of plasticity, Proceedings of the 4th Int. Conf. on Technology of Plasticity, Int. Academic Publishers, Beijing, China, 1993.
- [Wei78] Weidemann C., "The blankholder action of drawbeads", Proc. of 10th Biennal IDDRG Cong., p79-85, 1978.
- [Yel84] Yellup J.M., "Modelling of sheet metal flow throug a drawbead", 13th IDDRG,Biennial congress, efficiency in sheet metal forming, p166-177, Melbourne, 1984.
- [Yel85] Yellup J.M., "The prediction of strip shape and restraining forec for shallow drawbead systems", J. Appl. Metal., Vol.4, p30-38, 1985.

Résumé

L'emboutissage est un procédé de fabrication qui consiste à transformer de façon permanente une feuille de métal en une forme tridimensionnelle par l'action d'outils. La simulation numérique de ce procédé complexe peut être effectuée par l'approche inverse ; méthode simplifiée qui exploite la connaissance a priori de la géométrie désirée de la pièce pour estimer les grandes déformations élastoplastiques dans l'embouti. Après une présentation des fondements de cette méthode, les divers développements sont explicités. Il s'agit : de la formulation d'un élément de type quadrangle gauchi qui offre notamment de nouvelles possibilités de maillages ; de la prise en compte des effets de flexion sans augmenter le nombre de ddl à l'aide d'un élément triangulaire (DKT12) ; d'améliorer les actions équivalentes aux outils (poinçon, matrice et serre-flan) ainsi que les forces équivalentes, déterminées analytiquement, dues à la présence de joncs ; de rendre l'algorithme de résolution plus rapide et robuste grâce à l'estimation d'une solution géométrique initiale et au conditionnement de la matrice représentative du système dans le schéma de Newton. L'ensemble de ces contributions est validé par des exemples académiques et industriels plus ou moins complexes, qui permettent de mettre en évidence l'apport et les limitations de ces travaux.

Mots clés

Approche inverse, éléments finis, élastoplasticité, emboutissage, frottements, joncs, résolution non linéaire.

Titre

« Contribution à la modélisation de l'emboutissage de tôles minces par l'approche inverse ».

Abstract

Stamping is a manufacture process which enables you to transform in a permanent way a metal sheet into three-dimensional shape thanks to tools. Numerical simulation of this complex process can be done by the inverse approach. A simplified method exploiting a priori knowledge of the expected geometry of the piece in order to estimate large elasto-plastic deformation in the workpiece. After introducing the method foundation, different developments are exploited. There are: formulation of a wrap quadrangle type element which offers new meshing possibilities; bending effects should taken into account with no increase in numbering of dof with a triangular element (DKT12); to improve equivalent actions to tools (punch, die, blank holder) as well as equivalent analytically well-defined forces due to drawbead presence; to keep resolution algorithm faster and more robust thank to the estimate of an initial geometrical solution and to the precondition of matrix, representing the system, in the Newton scheme. The whole of these contributions are validated with academic and industrial examples more or less complex with enable to underscore the contribution and the limitations in these different works.

Keywords

Inverse approach, finite element, elastoplasticity, stamping, friction, drawbeads, non linear resolution.

Title

"Development of the inverse approach to simulate thin sheet metal stamping"