HAL
open science

Approches robustes du comportement dynamique des systèmes non linéaires : Application aux systèmes frottants

Lyes Nechak

To cite this version:

Lyes Nechak. Approches robustes du comportement dynamique des systèmes non linéaires : Application aux systèmes frottants. Autre. Université de Haute Alsace - Mulhouse, 2011. Français. NNT : 2011MULH6253 . tel-01123975

HAL Id: tel-01123975

https://theses.hal.science/tel-01123975v1

Submitted on 5 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre : Année 2011

Thèse

Présentée pour obtenir le titre de

Docteur

de

L'Université de Haute Alsace de Mulhouse

Spécialité : Automatique et Mécanique

Par

Lyes NECHAK

Approches Robustes du comportement dynamique des systèmes Non Linéaires- Application aux Systèmes Frottants

---

Mme Zohra Cherfi Boulanger, Professeur, Université de Compiègne	Rapporteur
M. Jean-Jacques Sinou, Professeur, Ecole Centrale de Lyon	Rapporteur
M. Jean-Pierre Barbot, Professeur, ENSAE- Cergy Pontoise	Rapporteur
M. Tewfik Sari, Professeur, Université de Haute Alsace	Examinateur
M. Benjamin Hervé, Docteur-Ingénieur, Valeo transmissions	Invité
Mme Evelyne Aubry, Professeur, Université de Haute Alsace	Directeur de Thèse
M. Sébastien Berger, Docteur, MCF, Université de Haute Alsace	Co-directeur de Thèse

A mes parents

A ma sœur et mes frères

A tous mes amis

Remerciements

Le présent travail a été mené au laboratoire de Modélisation Intelligence Processus Systèmes (MIPS) de l'université de Haute Alsace (UHA).

J'exprime ma reconnaissance à Mme Evelyne Aubry, Professeur à l'Université de Haute Alsace et directeur de cette thèse, pour le privilège qu'elle m'a offert en m'accueillant dans son équipe.

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Sébastien Berger, Docteur, Maître de Conférences à l'Université de Haute Alsace, co-directeur de cette thèse, pour son soutien actif et les conseils prodigués qui ont permis l'achèvement de ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à Madame Zohra Cherfi Boulanger, Professeur de l'Université Technologique de Compiègne, pour le privilège qu'elle m'a offert en acceptant de rapporter sur cette thèse.

Que Monsieur Jean-Pierre Barbot, Professeur de l'ENSAE à Cergy Pantoise, trouve ici l'expression de ma parfaite reconnaissance pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

J'exprime aussi ma reconnaissance à Monsieur Jean-Jacques Sinou, Professeur de l'Ecole centrale de Lyon pour avoir accepté d'être rapporteur de ce mémoire.

J'exprime mes sincères remerciements à Monsieur Tewfik Sari, Professeur à l'Université de Haute Alsace pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur Benjamin Hervé, Docteur-Ingénieur à Valéo transmissions, pour avoir accepté d'examiner cette thèse.

Enfin, j'associe particulièrement à ces remerciements Monsieur Jmal Hamdi, Doctorant à l'Université de Haute Alsace, pour les longues, fructueuses et riches réflexions qu'on a eu à faire sur une panoplie de questions autour de la thématique de cette thèse et divers autres sujets.

Résumé

Cette thèse traite de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants. Ces derniers constituent une classe particulière des systèmes non linéaires et sont caractérisés par des comportements dynamiques très sensibles aux variations des paramètres de conception en particulier aux dispersions des lois de frottement. Cette sensibilité se traduit par des variations qualitatives importantes du comportement dynamique (stabilité, niveaux vibratoire) qui peuvent alors affecter négativement les performances des systèmes frottants. Il est ainsi important, voire indispensable, de pouvoir tenir compte de la dispersion des lois de frottement dans l'étude et l'analyse du comportement dynamique des systèmes frottants afin d'en garantir la robustesse et, dans une perspective plus générale, d'asseoir une démarche de conception robuste des systèmes frottants.

Des méthodes spectrales basées sur le concept du chaos polynomial sont proposées dans cette thèse pour traiter de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants. Pouvant modéliser les fonctions et processus stochastiques, ces méthodes sont adaptées au problème en particulier à l'analyse de la stabilité et à la prédiction des niveaux vibratoires en tenant compte de la dispersion des lois de frottement. Différentes procédures sont proposées et développées pour traiter de ces deux questions. Une efficacité importante a été illustrée à travers l'évaluation des différentes méthodes proposées (chaos polynomial généralisé, chaos polynomial multi-éléments, chaos de Wiener-Haar) en les appliquant sur un exemple de système frottant. En effet, il est montré que ces méthodes offrent une alternative très intéressante à la méthode prohibitive, mais référentielle, de Monte Carlo puisque, pour des niveaux de précision et de confiance similaires, le coût en nombre, en volume et nécessairement en temps de calcul occasionné par les méthodes spectrales sur les différentes analyses (de la stabilité et des niveaux vibratoire) est largement inférieur à celui requis par la technique de Monte Carlo.

Mots clés- Incertitudes- Propagation d'incertitudes- Chaos Polynomial généralisé- Chaos Polynomial Multi-éléments - Chaos de Wiener-Haar- Systèmes Dynamiques Non Linéaires- Variété Centrale- Systèmes Stochastiques- Modélisation et Prédiction- Robustesse- Stabilité-Programmation SOS- Cycles Limites- Flottement- Systèmes frottants- Systèmes de freinage- Sprag-Slip- Couplage de Modes

Abstract

This thesis deals with the robust analysis of the dynamic behaviour of dry friction systems. These are a special class of nonlinear systems and are characterized by dynamic behaviors very sensitive to changes in design parameters in particular to dispersions of friction laws. This sensitivity results in important qualitative changes (stability, vibration levels) that can adversely affect the performances of friction systems. It is thus important, even essential, to take account of the dispersion laws of friction in the study and analysis of the dynamic behavior of friction systems in order to ensure robustness and, in a more general perspective, to establish a robust design approach for friction systems.

Spectral methods based on the concept of polynomial chaos are proposed in this thesis to address these problems. The spectral methods can model random functions and stochastic processes so they have been adapted to deal with the robust analysis of the dynamic behavior of frictions systems subjected to random friction coefficient. Different procedures are proposed and developed to, analyze with robustness the stability of friction system in a first step and to predict and estimate the vibratory levels of the same systems. High efficiency is demonstrated by evaluating the various proposed methods (generalized polynomial chaos, multi-element polynomial chaos, Wiener-Haar chaos) on the two issues considered. Indeed, it is shown that these methods offer an attractive alternative to the prohibitive, but referential, Monte Carlo method since, for similar levels of accuracy and confidence, the cost in terms of number and volume of calculus and thus in time of computing occasioned by the spectral methods on the different problems (robust stability and vibration levels analysis) is well lower than the one occasioned by the Monte Carlo technique.

Key words- Uncertainties- Uncertainty Propagation- Generalized Polynomial Chaos- Multi- element Polynomial Chaos- Wiener-Haar Chaos- Nonlinear Dynamic Systems- Stochastic Systems- Centre Manifold- Modeling and Prediction- Robustness- Stability- SOS Programming- Limit Cycle-Flutter- Friction Systems- Brake Systems- Sprag-Slip-Mode Coupling

Table de matières

Introduction Générale 1
Chapitre 1 Etat de l'art 6
1.1. Introduction 6
1.2. Généralités sur les systèmes frottants 6
1.2.1. Frottement 6
1.2.2. Vibrations induites par le frottement 8
1.3. Mécanismes de frottement et stabilité 9
1.3.1. stick-slip et amortissement négatif induit par le coefficient de frottement 10
1.3.2. Sprag-Slip et couplage de modes 11
1.3.3. Conclusion 14
1.4. Approches robustes des systèmes dynamiques 15
1.4.1. Introduction 15
1.4.2. Approche probabiliste 16
1.4.2.1. Méthode de Monte Carlo (MC) 16
1.4.2.2. Méthode de perturbation 18
1.4.2.3. Chaos polynomial 19
1.4.3. Méthode des plans d'expériences 28
1.4.4. Approche possibiliste (ensembliste) 29
1.4.4.1. Méthode des intervalles 29
1.4.4.2. Méthode à base de la logique floue 31
1.4.5. Approche basée sur la programmation sum of Square (SOS) 32
1.4.6. Conclusion 33
1.5. Conclusion 33
Chapitre 2 Stabilité des systèmes dynamiques non linéaires-théories 34
2.1. Introduction 34
2.2. Stabilité des solutions d'équilibre 34
2.2.1. Stabilité des systèmes linéaires 36
2.2.2. Stabilité des systèmes non linéaires 38
2.2.2.1. Méthode indirecte de Lyapunov 38
2.2.2.2. Méthode directe de Lyapunov 42
2.3. Décomposition Sum of Square (SOS) 43
2.3.1. Programme Sum of Square 46

2.3.2. Application à l'analyse de la stabilité 47
2.3.2.1. Construction pratique de fonction de Lyapunov 48
2.4. Conclusion sur les méthodes d'analyse de la stabilité 50
2.5. Etude des cycles limites 50
2.5.1. Notion de bifurcation de Hopf et de cycle limite 50
2.5.2. Calcul des cycles limites 51
2.5.2.1. Calcul par intégration temporelle des équations différentielles 51
2.5.2.2. Calcul par intégration temporelle des équations différentielles de taille réduite 52
2.6. Stabilité des cycles limites 55
2.6.1. Matrice de monodromie 56
2.6.2. Calcul de la matrice de monodromie 58
2.7. Conclusion 58
3.1. Introduction 60
3.2. Généralités 60
3.2.1. Notions d'expérience et d'événement aléatoires 60
3.2.1.1. Tribu des événements 61
3.2.1.2. Espace probabilisé 61
3.2.1.3. Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes et des probabilités totales 61
3.2.2. Variable aléatoire 62
3.2.2.1. Variable aléatoire du second ordre 64
3.2.3. Espace d'Hilbert 64
3.2.4. Processus stochastique 65
3.2.4.1. Processus stochastique du second ordre: 65
3.3. Modélisation de l'incertitude 65
3.4. Méthode de Monte Carlo 67
3.5. Chaos polynomial 68
3.5.1. Formalisme mathématique du chaos polynomial 68
3.5.2. Chaos polynomial généralisé 72
3.5.2.1. Représentation des paramètres incertains 72
3.5.2.2. Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynomial généralisé/Approches intrusives et non intrusives 73
3.6. Chaos polynomial généralisé multi-éléments 78
3.6.1. Décomposition du domaine stochastique 78
3.6.2. Précision 80

3.6.3. Post traitement du chaos polynomial généralisé multi-éléments 81
3.7. Chaos de Wiener-Haar 83
3.7.1. Transformée en ondelettes continue 83
3.7.1.1. Notion d'ondelettes 83
3.7.2. Transformée en ondelettes discrète et analyse multi-résolution (AMR) 85
3.7.2.1. Analyse multi-résolution et base orthonormée d'ondelettes 85
3.7.2.2. Transformée en ondelettes rapide et algorithme de décomposition de Mallat 88
3.7.2.3. Développement en série d'ondelettes de Haar 89
3.7.3. Développement de Wiener-Haar 94
3.7.3.1. Evaluation des coefficients d'ondelettes 95
3.8. Développement de Wiener-Fourier 97
3.9. Conclusion 99
Chapitre 4 : Application des Développements Spectraux à l'Analyse Robuste du Comportement Dynamique d'un Système Frottant 100
4.1. Introduction 100
4.2. Système avec frottement 101
4.2.1. Description du modèle mécanique 101
4.2.1.1. Validation du choix du modèle mécanique 101
4.2.1.2. Les équations du mouvement 102
4.2.1.3. Conclusion 104
4.3. Analyse robuste de la stabilité 104
4.3.1. Introduction 104
4.3.2. Analyse de la stabilité par la méthode de Monte Carlo 105
4.3.3. Analyse de la stabilité en utilisant la théorie du chaos de Wiener 107
4.3.3.1. Combinaison des développements spectraux avec la théorie directe de Lyapunov 107
4.3.3.2. Analyse par le chaos polynomial généralisé et la théorie indirecte de Lyapunov 121
4.3.4. Utilisation dans le cadre de la conception robuste des systèmes 134
4.3.5. Conclusion 136
4.4. Analyse robuste des niveaux vibratoires (cycles limites) 138
4.4.1. Modélisation et analyse des cycles limites proches du point de bifurcation de Hopf 138
4.4.1.1. Application du chaos polynomial généralisé 139
4.4.1.2. Insuffisance du chaos polynomial généralisé 156
4.4.1.3. Application du chaos polynomial de Legendre multi-éléments 160
4.4.1.4. Application du développement de Wiener-Haar 175

4.4.2. Modélisation et analyse des cycles limites loin de la bifurcation de Hopf 187
4.4.2.1. Application du chaos polynomial généralisé avec la technique de régression 188
4.4.2.2. Application du chaos polynomial généralisé multi-éléments 190
4.4.2.2. Application du chaos de Wiener-Haar 194
4.4.2.3. Conclusion sur l'analyse des cycles limites loin du point de bifurcation de Hopf 197
4.4.3. Analyse des cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf 197
4.4.3.1. Calcul des cycles limites par intégration des équations complètes 198
4.4.3.2. Calcul par intégration des équations réduites par la variété centrale 200
4.4.3.3. Analyse du comportement dynamique par combinaison de la variété centrale et le chaos polynomial généralisé 201
4.4.3.4. Conclusion sur l'analyse au voisinage du point de bifurcation de Hopf 205
4.5. Conclusion de l'étude des cycles limites avec les méthodes spectrales 205
Conclusion générale 207
Références bibliographiques 210
Liste des publications et communications personnelles 222
Annexe A : Calcul de la variété centrale 224
A.1. Introduction 224
A.2. Variété centrale du second ordre 225
A.3. Variété centrale du troisième ordre 226
Annexe B : Programmation SOS via Sostools 229
B.1. Introduction 229
B.2. Présentation du Logiciel Sostools 229
B.2.1. Programme semi défini 230
B.3. Solution des programmes SOS 231
B.3.1. Construction de fonction de Lyapunov via Sostools 231
Annexes C : Intégration numérique 233
C.1. Introduction 233
C.2. Intégration numérique en utilisant les polynômes d'interpolation 233
C.2.1. Méthode des trapèzes 233
C.2.2. Méthode de Simpson 234
C.2.3. Intégration numérique en utilisant les polynômes orthogonaux (méthodes de Gauss) 235
C.2.3.1. Produits scalaires 235
C.2.3.2. Familles orthogonales 236
C.2.3.3. Intégration de Gauss-Hermite 239

C.2.3.4. Intégration de Gauss-Legendre 239
C.2.3.5. Intégration de Gauss-Laguerre 239
Annexe D : Estimation par Intervalle de Confiance 241
D.1. Introduction 241
D.2. Estimation par intervalle de confiance 241
D.2.1. Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance 242
D.2.2. Estimation d'une proportion par intervalle de confiance 242
Liste des figures 245
Liste des tableaux 251

Introduction Générale

L'ingénierie système constitue, de nos jours, le cadre méthodologique de référence qui permet de concevoir et de produire des processus et systèmes, mécaniques ou autres, respectant des cahiers de charges de plus en plus contraignants. Ces derniers incluent différentes exigences en termes de sécurité, de performances, de fiabilité et de coût que le système doit vérifier dans des environnements de plus en plus complexes. Le cycle en V, représenté dans la figure (0.1), offre des éléments de réponse à cette problématique.

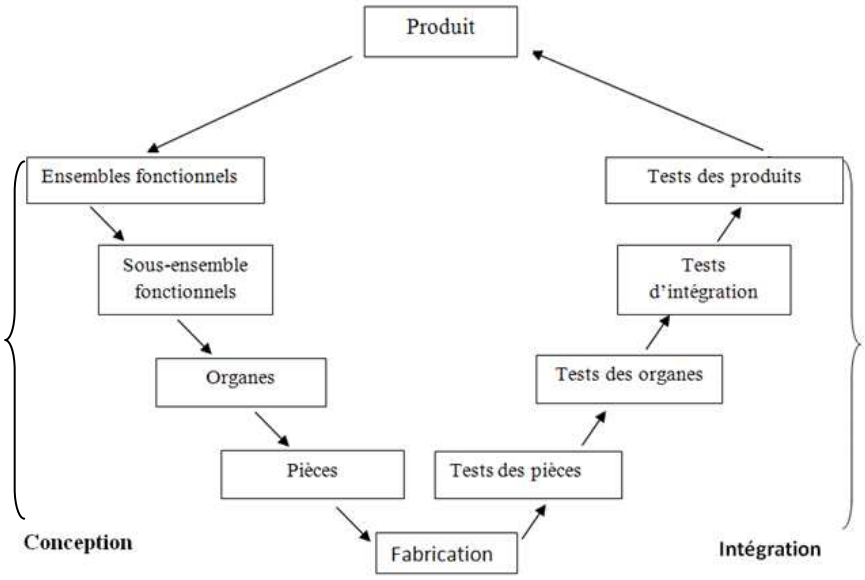


Fig.0. 1. Cycle en V de l'ingénierie système

Le cycle en V se divise en deux phases : une phase de descente et une autre de remontée. Elles sont relatives respectivement aux étapes de conception du système et à celles de son intégration en passant par la phase de fabrication. La phase de conception définit les architectures fonctionnelle et organique du système à produire en termes d'ensemble et sous-ensembles fonctionnels, d'organes et de pièces. A l'issue de cette phase, deux questions fondamentales sont tirées au clair à savoir « à quoi cela sert?» et « qui fait quoi ? ». Les deux réponses définiront l'analyse systémique. Toutes les spécifications techniques du système y sont dénommées. L'analyse systémique définit, en outre, les solutions technologiques et les paramètres fonctionnels de nature physique et géométrique capables de répondre aux exigences du cahier des charges. Une caractérisation organique y est aussi établie. Celle-ci fait correspondre à chaque sous-ensemble fonctionnel un organe (mécanique, mécatronique ou autre) et donc des paramètres matériels capables d'assurer les besoins techniques. Les liaisons géométriques entre les organes et les flux des grandeurs physiques associées sont l'objet d'une spécification technique détaillée. Cette étape donne lieu au dimensionnement de chaque organe et de chaque pièce, synonyme de la fin du cycle de conception. La phase d'intégration précédée par une étape de

fabrication, consiste alors à exécuter une série de tests sur les différents organes, pièces et enfin sur le produit pour mesurer le degré par lequel le système répond aux exigences du cahier des charges.

Les travaux de cette thèse se classent dans la phase de descente du cycle en V. De façon plus précise, ils se situent au niveau de la spécification technique détaillée dans laquelle le calcul formel prédomine. Celui-ci commence par une étape de modélisation qui consiste à décrire mathématiquement les lois physiques liant les flux de sortie (déplacements, vitesses, déformations etc.) du système (constitué de différents organes, pièces et liaisons) aux flux d'entrée (conditions initiales, excitations, forces etc.). Ce processus donne lieu à des équations différentielles dont la solution et l'analyse permettent de caractériser le comportement dynamique du système, des opérations qui permettent d'aider à dimensionner efficacement le système. Se pose ainsi la question de la représentativité du modèle établi. En fait, celui-ci n'est qu'une description approximative de la réalité physique compte tenu de différents types d'incertitudes inhérentes au processus de modélisation et d'identification. On peut les catégoriser en deux grandes familles : les incertitudes épistémiques et les incertitudes stochastiques.

- **Les incertitudes épistémiques** : Elles sont dues de façon générale à un manque de connaissance. Elles peuvent être liées à différentes hypothèses et approximations effectuées pour simplifier la modélisation au sens large que ça soit celle liée au système ou à ses paramètres. Des phénomènes physiques y sont négligés parce qu'ils sont mal compris ou inconnus.

- **Les incertitudes stochastiques** : Le caractère aléatoire de ces incertitudes est une propriété intrinsèque ; il est par conséquent irréductible. Les paramètres propres d'un système mécanique (raideur, coefficient de frottement par exemples) peuvent varier à la fois d'une pièce à l'autre. Ils peuvent aussi être soumis à des variations liées au temps et conditions de fonctionnement en termes de température et de pression.

Il devient alors nécessaire de prendre en compte ces incertitudes pour une meilleure représentativité du modèle et pour permettre une analyse robuste du comportement dynamique du système et garantir ainsi la robustesse de la conception c'est-à-dire vérifier les exigences du cahier des charges en présences des incertitudes.

Dans cette thèse, les modèles décrivant les systèmes sont supposés précis et les éventuelles approximations faites dans la modélisation sont supposées maitrisées (hypothèses simplificatrices, imprécisions numériques). Par conséquent, seules les incertitudes paramétriques sont considérées.

La prise en compte des incertitudes paramétriques dans l'analyse des systèmes dynamiques constitue un domaine à part entière englobant des théories aussi diverses que complexes. Ce domaine offre un cadre méthodologique formel pour trois problèmes complémentaires à savoir :

A) **L'identification et la modélisation des sources d'incertitudes** : Il s'agit d'identifier, dans tout le flux d'entrée du système, les paramètres qui sont considérés comme incertains puis de déterminer les formes mathématiques en mesure de décrire leurs natures.

B) **La propagation des incertitudes** : Consiste à introduire et à développer les modèles des incertitudes déterminés dans (A) dans le modèle global du système.

C) **L'Analyse post-propagation** : Permet de mesurer l'effet des incertitudes propagées sur la dynamique du système et d'agir en conséquence. Cette étape aboutit sur une forme de hiérarchisation des incertitudes en fonction de leurs influences sur la réponse du système.

La solution des problèmes décrits dans (A), (B) et (C) apportent des réponses qui rentrent dans la sphère des spécifications techniques détaillées décrites précédemment.

S'insérant dans cette sphère, les travaux de cette thèse se penchent, en particulier, sur les approches et outils mathématiques aidant à concevoir efficacement et de manière robuste les systèmes frottants (tels que les garnitures de freinage, les systèmes d'embrayage et d'essuyage) dont l'intérêt, dans les domaines industriels (tels que l'automobile, l'aéronautique et le ferroviaire), est majeur. Cette classe particulière de systèmes dynamiques non linéaires est caractérisée, selon la littérature, par un comportement dynamique très sensible aux variations des paramètres de conception particulièrement aux dispersions des lois de frottement. Cette forte sensibilité se caractérise par des changements qualitatifs du comportement dynamique en termes de stabilité et de niveaux vibratoires. Ces deux caractéristiques sont soumises à des exigences de plus en plus contraignantes dans les cahiers des charges comptes tenus de leurs impacts sur la sécurité et la performance des systèmes basés sur les frottements. Citons, par exemple, l'impact de la stabilité et les niveaux vibratoires sur la performance des systèmes de freinage et la sécurité humaine associée. Pour toutes ces considérations, il est à la fois important et nécessaire de prendre en compte l'incertitude des lois de frottement pour prédire et analyser de façon robuste le comportement dynamique des systèmes frottants, l'objectif global étant celui d'aider à les concevoir de façon robuste, c'est à dire de façon à ce qu'ils soient en conformité avec les exigences du cahier des charges même en présence des incertitudes. Dans cette thèse l'accent est donc mis sur l'incertitude des lois de frottement. Les autres paramètres tels que les raideurs, les coefficients d'amortissements sont supposés suffisamment maitrisables pour leur attribuer un caractère déterministe. En outre, l'étape (A) qui consiste, dans le cas de la problématique de cette thèse, à modéliser et identifier le modèle probabiliste de l'incertitude des lois de frottement, est posée comme un préalable. Par conséquent, seules les étapes (B) et (C) seront considérées.

De nombreux travaux de recherche ont étudié le comportement dynamique des systèmes frottants mais peu ont considéré le problème sous l'angle de la robustesse. L'originalité et l'objectif de cette thèse sont tirés de ce constat bibliographique. Ainsi, cette étude a pour but de dégager, en conformité avec les hypothèses considérées, une approche robuste qui permet d'analyser le comportement dynamique des systèmes frottants en tenant compte à la fois de leurs aspects non linéaires et du caractère aléatoire des lois régissant les frottements. L'analyse robuste de la stabilité et la prédiction des niveaux vibratoires sont les deux points essentiels et complémentaires nécessaires pour avoir une caractérisation complète du comportement dynamique des systèmes frottants.

Cette thèse est organisée en 4 chapitres :

Le premier chapitre présente un état de l'art articulé autour de deux questions principales relatives, respectivement, aux systèmes frottants et aux approches de prise en compte des incertitudes. Une première étude bibliographique revient alors sur l'essentiel des travaux de recherche ayant traité des systèmes frottants en rappelant les concepts et terminologies qui leur sont inhérents. Les mécanismes physiques expliquant la genèse des instabilités de contact y sont aussi présentés. Le phénomène du couplage de mode a fait l'objet d'une description plus détaillée, celui-ci étant le mécanisme considéré tout au long de la thèse. La justification de ce choix est la première conclusion du premier chapitre. Une deuxième étude bibliographique est par la suite menée autour des approches robustes ayant le potentiel de répondre à la problématique de la thèse. L'analyse des avantages et des inconvénients de chacune des méthodes relevées dans la littérature a permis d'orienter notre choix vers l'approche probabiliste en particulier vers les méthodes basées sur le concept du chaos polynomial. C'est la deuxième conclusion de ce premier chapitre.

Le deuxième chapitre décrit les outils théoriques qui permettent la prise en compte du caractère non linéaire des systèmes dans l'analyse du leurs comportements dynamiques. Le concept de la stabilité est le mot clé de ce chapitre. Deux axes principaux sont développés à savoir : la stabilité des équilibres et la stabilité des cycles limites. Les outils mathématiques permettant d'analyser les deux types de stabilité sont présentés. Il s'agit essentiellement du formalisme de Lyapunov pour la stabilité des points d'équilibre et le formalisme de Floquet pour la stabilité des cycles limites. Des notions et concepts mathématiques inhérents aux deux formalismes sont développés également. Il s'agit, entre autres, du concept de la programmation Sum of Square (SOS Programming) exploité pour construire des fonctions de Lyapunov, des notions d'intégration et de variété centrale utilisées pour déterminer les cycles limites, une étape antérieure à l'analyse de leur stabilité par la théorie de Floquet.

La description formelle de la théorie du chaos polynomial et les concepts en découlant (chaos polynomial généralisé, chaos polynomial multi-éléments, chaos de Wiener-Haar et chaos de Wiener-Fourier) constituent l'objet principal du troisième chapitre. Ayant, selon l'état de l'art effectué, un potentiel intéressant pour traiter de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires, ces concepts font l'objet d'une description détaillée incluant principes et formalismes mathématiques, schémas numériques d'implémentation et modes d'utilisation. Cette description est effectuée, le plus souvent, en se basant sur des formes de modèles générales.

Le quatrième chapitre a pour objectif d'évaluer concrètement les capacités des méthodes basées sur le chaos polynomial à traiter de la problématique de la thèse. Pour cela, un système à deux degrés de liberté, reconnu dans la littérature comme un modèle minimal suffisant pour modéliser les instabilités par couplage de modes dans les systèmes de freinage, est considéré. Ce chapitre est réparti sur trois parties suivant un ordre chronologique permettant une analyse complète du comportement dynamique du système considéré. La première partie du chapitre présente le système utilisé. Son choix est justifié et sa mise en équation est décrite formellement. La deuxième partie traite de l'analyse de la stabilité du système en tenant compte de la dispersion du frottement. L'objectif est d'estimer

l'évolution de la stabilité du système en fonction de l'évolution probabiliste du coefficient de frottement. Une adaptation des méthodes basées sur le chaos polynomial est alors proposée, développée et enfin appliquée. Des conclusions sur l'aptitude des différentes méthodes à traiter de l'analyse robuste de la stabilité sont tirées. La troisième partie de ce chapitre porte quant à elle sur la modélisation, la prédiction et l'analyse robustes des cycles limites. L'objectif est d'estimer la dispersion des niveaux vibratoires résultant de celle du coefficient de frottement. Les méthodes basées sur le chaos polynomial sont également adaptées et appliquées dans ces perspectives. Les performances de toutes les méthodes sont évaluées, sous différentes conditions, sur leurs capacités à modéliser et prédire le comportement dynamique du système et à estimer les niveaux vibratoires.

Une conclusion générale incluant le bilan des résultats des travaux de cette thèse ainsi que les différentes perspectives qui en découlent est énoncée à la fin de cette thèse.

Chapitre 1 Etat de l’art

1.1. Introduction

L’objectif de ce chapitre est de présenter un état de l’art des approches robustes des systèmes dynamiques non linéaires frottants. Cet état de l’art a été articulé autour de deux axes principaux. Le premier concerne les systèmes frottants sur lesquels un certain nombre de définition et de concept est tout d’abord rappelé suivi d’une synthèse bibliographique sur les travaux de recherche les ayant abordés. Le second axe porte essentiellement sur les approches robustes des systèmes dynamiques. A ce sujet, différentes méthodes sont décrites dans la perspective de choisir la plus appropriée à traiter de la problématique de cette thèse qui, rappelons-là, porte sur l’analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants.

1.2. Généralités sur les systèmes frottants

Bien que les frottements soient à l'origine de beaucoup de nuisances sur les systèmes (échauffement, perte d'énergie et de rendement, usure), ils sont, par ailleurs, exploités dans beaucoup d'applications telles que le freinage, l’embrayage, l’essuyage, le sciage etc. La plupart des phénomènes associés au frottement peuvent s'expliquer sur la base des lois phénoménologiques du frottement établies par Coulomb. Une quantité clef est définie par ces lois : le coefficient de frottement, paramètre sans dimension qui définit un coefficient de proportionnalité entre certaines forces s'exerçant mutuellement entre des solides en contact.

1.2.1. F**rottement**

La définition la plus courante du frottement est celle le caractérisant comme un phénomène s'opposant à la persistance du mouvement relatif entre deux corps en contact. On parle de frottement sec dans le cas où les surfaces en contact sont non lubrifiées et de frottement visqueux dans le cas inverse. Plusieurs modèles décrivant les mécanismes physiques du frottement sec existent en littérature tels que le modèle de Dahl (Dahl, 1976), le modèle de Tresca (Duvot et Lions, 1972) et le modèle de Coulomb (Bowden et Tabor, 1950). Ce dernier, très utilisé, désigne l'ensemble des lois définissant une relation de proportionnalité entre les deux composantes tangentielle et normale de l'action entre 2 corps en contact. L'expérience du plan incliné, représenté dans Fig.1.1, est utilisée pour justifier le modèle de Coulomb.

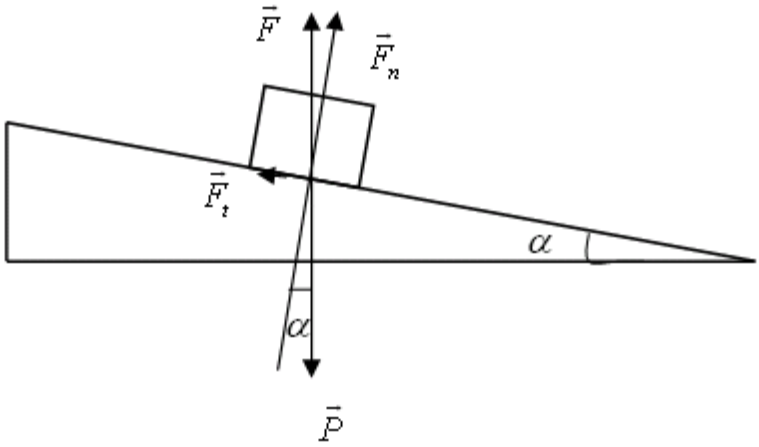


Fig.1. 1. Expérience du plan incliné

L'équation de la résultante du principe fondamental de la statique appliqué à la masse donne la relation suivante:

$$\vec{P}+\vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{P}+F_n\vec{n}+F_t\vec{t}=\vec{0} \qquad (1.1)$$

L'expression (1.1) projetée dans les directions tangentielle $\vec{t}$ et normale $\vec{n}$, définit la relation de proportionnalité caractéristique du modèle de frottement de Coulomb.

$$\left.\begin{array}{l} F_t = P.\sin(\alpha) \\ F_n = P.\cos(\alpha) \end{array}\right\} \Leftrightarrow F_t = F_n.\tan(\alpha) \qquad (1.2)$$

Lorsque l'inclinaison du plan, mesurée par l'angle α, augmente et atteint une valeur critique α_c au-delà de laquelle la masse glisse, on a

$$F_t = \mu_s F_n \qquad (1.3)$$

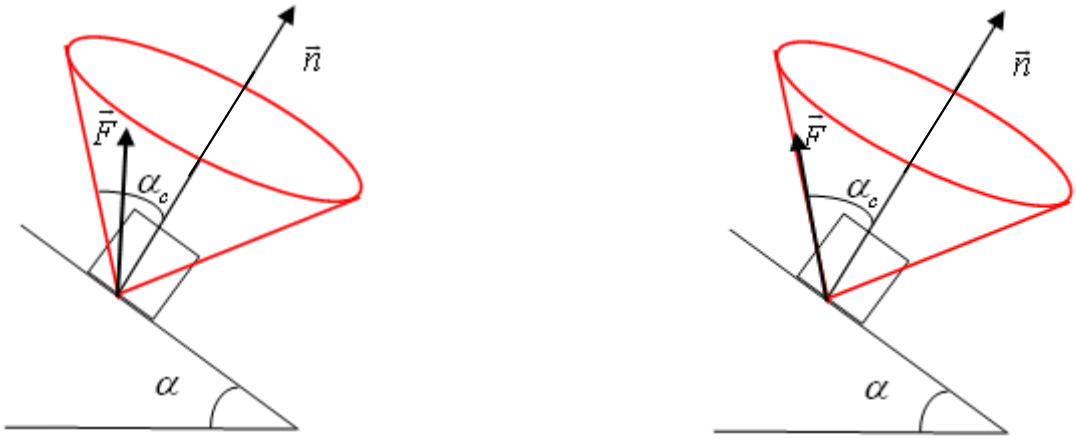
où $\mu_s = \tan(\alpha_c)$ désigne le coefficient de frottement statique.

Le domaine d'adhérence, illustré dans figure (1.2a), est alors défini par l'ensemble de tous les vecteurs $\vec{F}$ satisfaisant aux conditions suivantes:

- $F_t/F_n < \tan(\alpha_c)$ équivalent à dire que $\vec{F}$ appartient au cône d'angle au sommet égal à $2\alpha_c$.
- La vitesse de glissement entre les deux corps est nulle, $V=0$.

Lorsque l'angle α_c est atteint, la résultante des actions de contact se trouve sur le cône d'adhérence tel qu'illustré dans la figure (1.2b). La limite de l'adhérence donc de l'équilibre est atteinte, la masse

glisse sur le plan incliné si le seuil α_c est dépassé. Le modèle de Coulomb régit alors le glissement par une loi de proportionnalité liant la composante tangentielle de la résultante des actions de contact à la composante normale $F_t / F_n = \mu_d$. Le coefficient de proportionnalité définit le coefficient de frottement dynamique μ_d. En général, $\mu_d < \mu_s$. Ces coefficients sont indépendants de la dimension de la surface de contact et dépendent plutôt de la nature de la surface de contact. Ce volet est traité dans de nombreuses études (Codfert, 1997; Begout, 1979).



(a). Adhérence **(b). Adhérence limite**

Fig.1. 2. Illustration du cône de frottement de Coulomb

1.2.2. Vibrations induites par le frottement

Lorsque deux corps sont en contact frottant, des vibrations peuvent apparaître à l'interface. Ces vibrations induites par le frottement, appelées aussi instabilités de contact, sont responsables de divers bruits et contraintes. Elles ont motivé beaucoup de recherches depuis des décennies impliquant à la fois les scientifiques et les industriels. C'est ce que traduit la bibliographie abondante existant à leur sujet. Des recueils importants de références bibliographiques peuvent être trouvés dans les études liées aux vibrations dans les systèmes frottants (Coudeyras, 2009; Linck, 2005; Sinou, 2002).

L'importance des études portant sur les vibrations induites par le frottement est liée essentiellement à leurs impacts sur les systèmes qui les abritent et sur l'environnement. En effet, les conséquences des vibrations peuvent aller de simples nuisances sonores jusqu'à la dégradation des performances et l'usure des systèmes d'où l'importance de les analyser et de comprendre leurs origines afin de les éliminer, les atténuer ou les contrôler.

En général, la littérature fait référence à deux grandes familles de vibrations: les vibrations forcées et les vibrations auto-entretenues, (Hervé, 2009; Coudeyras, 2009; Linck, 2005; Sinou, 2002).

- **Vibrations forcées :** Les trépidations dans les systèmes de freinage à disque constituent un exemple très connu. Elles sont souvent le résultat d'oscillations forcées à des fréquences inférieures à 500Hz. Leur manifestation s'explique par la variation des efforts de frottement entraînés par la déformation de la surface du disque de freinage. Cette déformation peut être liée à deux effets. Le premier met en cause la présence de défauts géométriques tels qu'une variation d'épaisseur, une non-homogénéité de la surface du disque, un défaut de parallélisme ou d'excentricité etc. Le second implique des phénomènes thermomécaniques liés à des différences de température entraînant une dilation différente en certains points du disque de freinage. Le frein est ainsi excité par ces variations dimensionnelles à une fréquence multiple de la vitesse de rotation ce qui fait rentrer la structure en résonance. On parle dans ce cas de trépidation à chaud contrairement au premier cas où on parle plutôt de trépidation à froid. Dans les deux cas, ces vibrations peuvent nuire à l'efficacité du freinage. Cet effet peut également être une conséquence d'autres types de vibrations forcées telles que le bourdonnement et le broutement. Le bourdonnement est un bruit à basses fréquences (entre 100 à 500Hz) et à fortes amplitudes. Son apparition dans les systèmes de freinage à disque est due à la rotation rigide de l'étrier autour d'un axe orthogonal à la surface de frottement du disque et un déplacement dans l'axe normal du disque. Quant au broutement, celui-ci caractérise des vibrations dont la fréquence ne dépasse pas les 100Hz et dont l'origine est expliquée par la dépendance du coefficient de frottement de la vitesse de glissement au niveau du disque et de la plaquette de frein.

- **Vibrations auto-entretenues** : Dans cette famille, le crissement (squeal) lié au freinage a fait l'objet de beaucoup d'études. Ce phénomène, n'affectant pas la qualité du freinage et l'intégrité des structures mécaniques, se trouve à l'origine de sévères nuisances sonores. Le crissement est une vibration auto-entretenue qui s'identifie par des sons quasi-monochromatiques émis à hautes fréquences (>10KHz) par la vibration des différents composants du système de frein pendant une phase de freinage. Ces mêmes vibrations, lorsqu'elles sont de courtes durées, définissent le sifflement (squeak).

Enfin, notons l'existence d'études plus détaillées sur les différents types de vibrations entre autres (Ibrahim, 1994a, 1994b; Crolla et Lang, 1991; Kobayachi, 1990; Oden et Martins, 1985).

Les travaux de cette thèse se focalisent sur les vibrations auto-entretenues. Les mécanismes expliquant l'apparition de ces formes d'instabilités sont décrits dans la suite.

1.3. Mécanismes de frottement et stabilité

Nombreux sont les travaux de recherche qui se sont intéressés à la compréhension des mécanismes expliquant et modélisant les instabilités auto-entretenues induites par le frottement sec. Différents travaux de thèse (Hervé, 2009, Coudeyras, 2009; Meziane, 2007; Linck, 2005; Sinou, 2002) dressent tous des états de l'art sur le sujet. Nous en faisons un résumé sur les notions fondamentales inhérentes aux mécanismes frottants générant des instabilités. Ces derniers se classent en deux catégories essentielles, à savoir : les mécanismes d'origine tribologique incluant le stick-slip et la variation du coefficient de frottement ainsi que les mécanismes d'origine structurelle englobant le sprag-slip et le couplage de modes.

1.3.1. stick-slip et amortissement négatif induit par le coefficient de frottement

Les mécanismes tribologiques à l'origine d'instabilités peuvent être classées en deux catégories : ceux de type stick-slip et ceux dus à un amortissement négatif induit par la loi de frottement.

Le stick-slip est caractérisé par la succession de deux phénomènes: glissement (slip) et adhérence (stick). Proposé par Sinclair et Manville en 1955, il définit un mécanisme qui modélise des oscillations auto-entretenues. Il est basé sur une discontinuité entre le coefficient de frottement statique de la phase d'adhérence et le coefficient de frottement dynamique de la phase de glissement, (Sinclair et Manville, 1955). Ce modèle a été repris et approfondi dans beaucoup de travaux entre autres : (Antonio et al, 1976 ; Oden et al, 1985 ; Gaos et al, 1994; Ibrahim, 1994a, 1994b; Kinkaid et al, 2003; Ouyang et al, 2005).

Pour étudier le phénomène du stick-slip, deux modèles équivalents, masse (*M*)-ressort (raideur *k*)-amortisseur (coefficient *c*), à un degré de liberté et représentés respectivement dans les figures (1.3) et (1.4), sont très souvent utilisés (Coudeyras, 2009 ; Sinou, 2002 ; Moirot, 1998). Dans le premier modèle, la masse *M* est soumise à une force normale $\vec{F}_n$. Elle est en mouvement avec une vitesse *V* constante sur une surface sans mouvement alors que dans le deuxième c'est le système tout entier qui est en mouvement à une vitesse V constante. Les vibrations du stick-slip se traduisent, en terme de déplacement, par une courbe en escalier pour le premier et par une courbe en dents de scie pour le second.

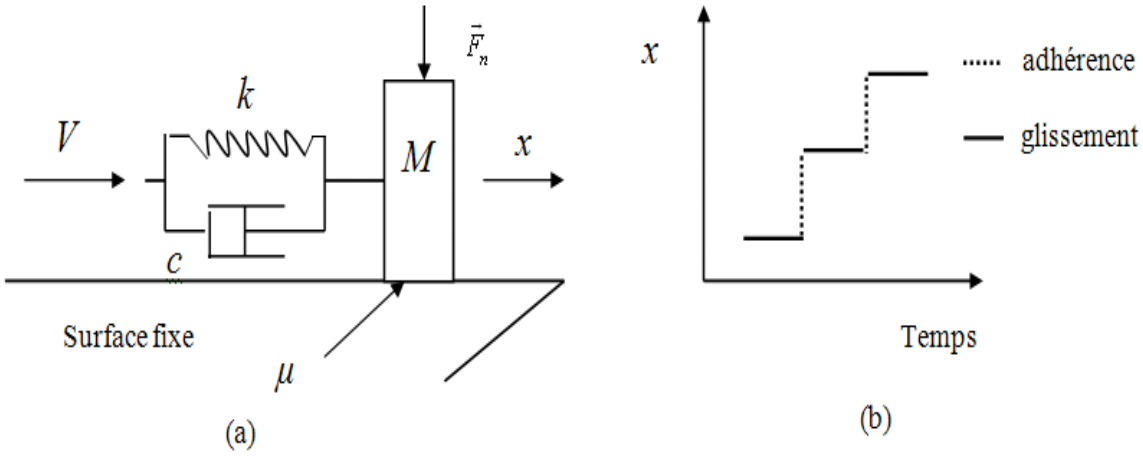


Fig.1. 3. (a) Premier modèle du Stick-Slip- (b) Déplacement en fonction du temps

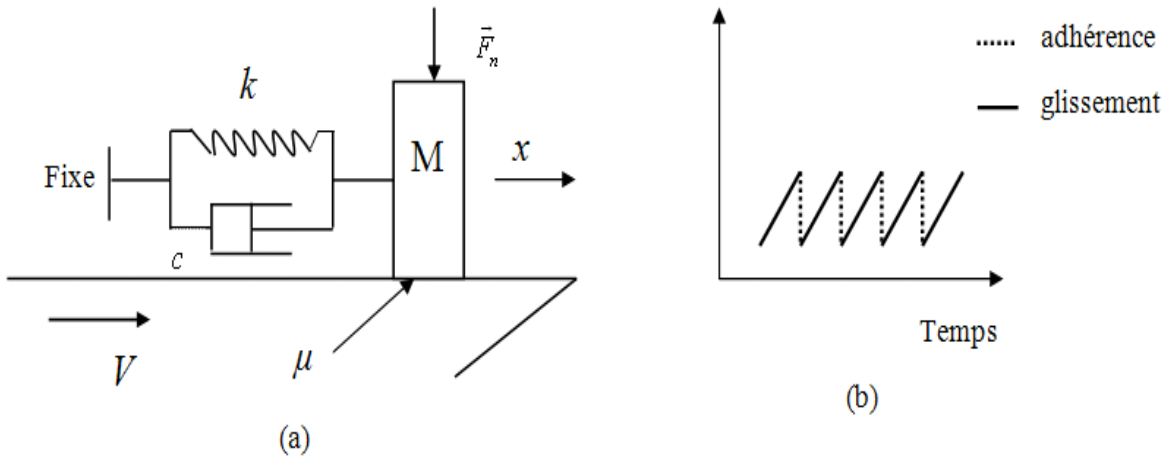


Fig.1. 4. (a) Deuxième modèle du Stick-Slip- (b) Déplacement en fonction du temps

Additionnellement au mécanisme de type stick-slip, l'apparition des instabilités peut être justifiée par un coefficient de frottement qui varie en fonction de la vitesse relative de glissement. Cette variation, en particulier lorsque le coefficient de frottement diminue avec la vitesse relative de glissement, fait apparaitre un terme d'amortissement négatif qui, lorsque l'amortissement dissipatif ne le surpasse pas, induit des trajectoires qui divergent exponentiellement de l'équilibre. Par conséquent, des vibrations auto-générées sont observées et un cycle d'adhérence-glissement ou un cycle sans adhérence peuvent alors s'établir. Plus de détails sur ce phénomène peuvent être trouvés dans l'étude d'Hervé (Hervé, 2009) et dans les références suivantes (Van De Velde et De Beats, 1998a, 1998b; Chambrette, 1991).

1.3.2. Sprag-Slip et couplage de modes

Bien que beaucoup de travaux attribuent l'apparition des instabilités à l'effet de la variation du coefficient de frottement en tant que propriété intrinsèque des surfaces de contact, d'autres travaux stipulent que cette variation résulte plutôt des caractéristiques dynamiques et des vibrations des systèmes frottants. En effet, corroborées par des expériences, elles montrent que le coefficient de frottement ne diminue pas explicitement en fonction de la vitesse de glissement. De plus, la différence entre les coefficients statique et dynamique est due aux micro-vibrations inhérentes au glissement avec le frottement. Par conséquent, la variation du coefficient de frottement n'est pas une cause mais une conséquence des instabilités (Tolstoi et al, 1967; Aronov et al, 1984). Spurr est le premier à avoir développé un modèle, appelé Sprag-Slip, par lequel il a montré l'importance de la cinématique du contact en obtenant une condition d'instabilité sur l'angle d'attaque du contact avec un coefficient de frottement constant (Spurr, 1961). Par le modèle qu'il a mis au point, Spurr a montré que les instabilités résultent du couplage entre les degrés de liberté de frottement avec les degrés de liberté normaux, le coefficient de frottement étant constant. D'autres études ont été menées sur le phénomène du Sprag-Slip (Jarvis et Mills, 1963 ; North, 1972 ; Earles, 1976 ; Millner, 1978; Chambrette, 1991 ; Martins, 1999 ; Eriksson et Jacobson, 2001 ; Flint et Hulten, 2002). Toutes ont appuyé les conclusions de l'étude de Spurr en affirmant que le phénomène du stick-slip ne peut pas expliquer, à lui seul, les instabilités induites par le frottement.

Le mécanisme schématisé dans la figure (1.5) est celui défini par Spurr pour caractériser le phénomène du sprag-slip. Il consiste en une tige flexible, en contact glissant le long d'une surface et chargée par une force extérieure $\vec{L}$. Le frottement est modélisé par la loi de Coulomb : $F_t = \mu F_n$.

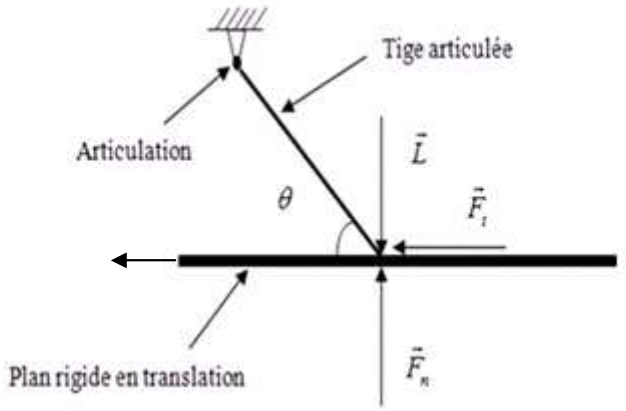


Fig.1. 5. Exemple de système développant le Sprag-Slip

L'équilibre glissant du système est démontré par Spurr pour des forces tangentielle et normale vérifiant :

$$F_n = \frac{L}{1-\mu\tan(\theta)} \quad \text{et} \quad F_t = \frac{\mu L}{1-\mu\tan(\theta)}$$

A partir de l'expression de la force tangentielle, il apparaît que pour des valeurs de θ proches de $\arctan(1/\mu)$, la force tangentielle de frottement F_t atteint des valeurs très élevées et peut ainsi bloquer le mouvement : la tige s'arc-boute et emmagasine de l'énergie élastique qui se libère une fois que l'effort de flexion devient plus important que l'effort de frottement. La tige revient alors à sa position d'équilibre et un autre cycle commence définissant ainsi des instabilités au niveau du contact. Ces dernières résultent du couplage des degrés de libertés (ddls) normaux et tangents et non pas de la variation du coefficient de frottement.

Hoffmann a proposé, dans son étude, un système à deux degrés de liberté par lequel il a mis en évidence le phénomène de couplage de modes qu'il a défini comme étant la coalescence des modes en un point appelé bifurcation de Hopf, (Hoffmann, 2002). L'équilibre statique y devient instable pour une perturbation, même infinitésimale. Le mécanisme de Hoffman, représenté dans la figure (1.6), est repris et développé ci-dessous pour mieux comprendre le phénomène du couplage de modes. Le mécanisme est constitué d'un tapis roulant à une vitesse constante et poussé, via une force normale F_n, contre un block modélisé par une masse m. Ce block est tenu en position par deux raideurs linéaires k_1 et k_2. Une autre raideur linéaire k_3 est considérée pour modéliser la raideur du contact normal entre le block et le tapis roulant. Pour tenir compte du frottement lié au glissement, la force de frottement F_t de coulomb est considérée telle que $F_t = \mu F_n$, μ étant le coefficient de frottement.

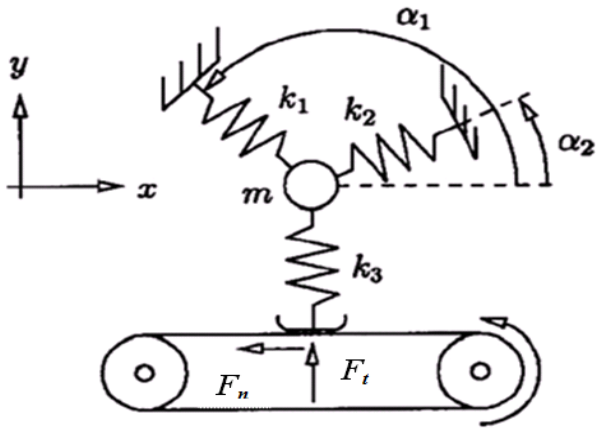


Fig.1. 6. Modèle de Hoffman à deux degrés de liberté

Les équations régissant l'équilibre du système sont données comme suit :

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} - \mu k_3 \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{1.4}$$

où μ désigne le coefficient de frottement constant et les k_{ij} représentent les raideurs de couplage dépendant des angles α_1 et α_2 tels que :

$$\begin{cases} k_{11} = k_1 \cos^2 \alpha_1 + k_2 \cos^2 \alpha_2 \\ k_{12} = k_{21} = k_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_1 + k_2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 \\ k_{22} = k_1 \sin^2 \alpha_1 + k_2 \sin^2 \alpha_2 + k_3 \end{cases} \tag{1.5}$$

Selon les paramètres du modèle et compte tenu de la dissymétrie de la matrice de raideur, le modèle (1.4) présente une instabilité géométrique où le frottement couple le degré de liberté normal avec le degré de liberté tangentiel. Ceci se traduit par l'évolution, tracée dans la figure (1.7), des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système.

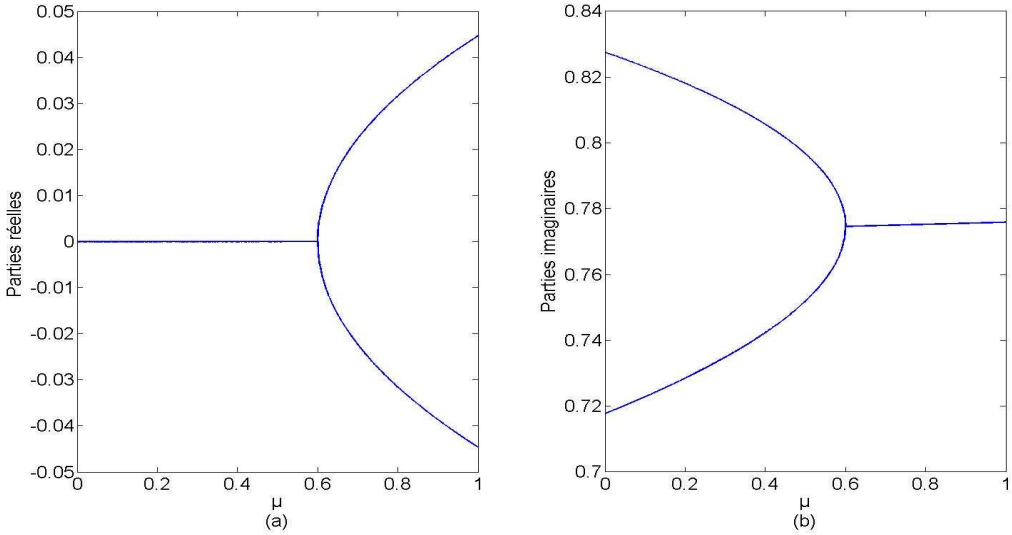


Fig.1. 7. Evolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système (1.4) en fonction de μ

Le système possède deux couples de valeurs propres conjuguées. L'évolution des parties réelle et imaginaire des valeurs propres du système montre un verrouillage de modes qui s'illustre de la façon suivante : avec l'augmentation du coefficient de frottement, les deux modes du système se rapprochent en fréquence jusqu'à coalescence en un point particulier, appelé point de bifurcation de Hopf, où ils deviennent égaux (Fig.1b). Au même point les parties réelles se séparent (Fig.1a). La position d'équilibre du système devient alors instable pour une perturbation aussi infinitésimale soit-elle. La réponse dynamique du système serait de la forme $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T = Ae^{(\lambda t)}$ où A est un facteur multiplicatif lié aux conditions initiales et $\lambda = a + iw$ les valeurs propres complexes conjuguées du système (1.4). Dés qu'il existe une partie réelle $a>0$, le système génère des oscillations d'amplitude croissante au court du temps. Hoffmann explique la présence d'oscillations malgré l'absence d'une excitation extérieure par le mécanisme de feed-back lié au déphasage de 90° existant entre les oscillations normales et tangentes ce qui traduit l'échange d'énergie mécanique entre les deux directions. Sinou et Jezequel étudient un modèle similaire et présentent le même phénomène de feed-back mais en employant des raideurs cubiques ce qui leur permet d'obtenir un modèle non linéaire développant des oscillations de type cycle limite (Sinou et Jezequel, 2004).

1.3.3. Conclusion

Les différentes études présentées jusqu'ici ont défini deux mécanismes principaux modélisant et décrivant les instabilités induites par le frottement sec. Il s'agit, en l'occurrence, du stick-slip et l'amortissement négatif d'origine tribologique et du sprag-slip ainsi que du couplage de mode d'origine structurelle. Le premier est basé sur le principe d'un coefficient de frottement variable en fonction de la vitesse de glissement entre les corps en contact. Ce principe ne fait pas l'unanimité chez la communauté des chercheurs dans le domaine. En effet, bon nombre d'entre eux estime que la dépendance du coefficient de frottement à la vitesse de glissement ne reflète pas systématiquement la réalité physique du contact frottant. Une dépendance à la température serait la plus plausible dans ce

cas là. En outre, le phénomène d'adhérence reste difficilement compatible avec les vitesses de glissement importantes. Beaucoup de chercheurs estiment que le sprag-slip et de façon générale le couplage de modes sont les phénomènes les plus réalistes. Ces modèles offrent de bonnes corrélations avec les études expérimentales en dépit du fait qu'ils ne considèrent que des lois de frottement simples de type loi de Coulomb avec un coefficient de frottement constant. Ainsi, notre étude va porter sur des systèmes qui présentent des instabilités dues au couplage de modes, soit une loi de frottement de Coulomb munie d'un coefficient de frottement constant.

1.4. Approches robustes des systèmes dynamiques

1.4.1. Introduction

Une idée générale sur les travaux de recherche traitant des systèmes frottants a été présentée et développée dans les deux sections précédentes. Beaucoup d'autres études ont mis en évidence la sensibilité des propriétés dynamiques de ces systèmes envers leurs paramètres de conception et les paramètres physiques associés aux lois de frottement, (Ibrahim, 1994a, 1994b; Shin, 2002a, Shin, 2002b; Hoffman et Gaul, 2003; Sinou et al, 2004; Sinou et al, 2006a, 2006b; Sinou et al, 2007). Cette sensibilité s'illustre en des changements qualitatifs importants (bifurcation, perte de stabilité) et des variations conséquentes des niveaux vibratoires pour de faibles variations des valeurs paramétriques. Par exemple, Ragot a, dans le cadre de l'étude d'un double pendule frottant modélisant le comportement d'une lame d'un balais d'essuie-glasse, montré qu'une variation de *1.6%* sur le coefficient de frottement entraine une dispersion de plus ou moins *10%* sur les valeurs des positions d'équilibres ce qui entraine un changement radical des propriétés de la stabilité du système (Ragot, 2007). Par ailleurs, d'autres recherches sur les systèmes d'essuyage ont mis en exergue le fait que les paramètres, en particulier le coefficient de frottement, admet une dispersion plus ou moins importante, (Chevennement et al, 2005; 2007). La prise en compte de cette dispersion dans les étapes de modélisation puis d'analyse est, par conséquent, nécessaire pour prédire de façon robuste les instabilités et les niveaux vibratoires.

De façon générale, la robustesse est définie comme étant la capacité d'un système à garder ses propriétés et ses performances en présence des incertitudes. Elle se définit par rapport à une propriété vis-à-vis d'une incertitude donnée.

L'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires en particulier des systèmes frottants, constitue un intérêt majeur dans le domaine industriel (Sinou et Jezequel, 2004 ; 2007). Elle englobe deux axes complémentaires. Le premier concerne l'analyse de la stabilité alors que le second porte sur l'analyse des niveaux vibratoires. Traiter de ces deux problèmes est incontournable dans la théorie des systèmes dynamiques. En effet, les conséquences néfastes que pourrait engendrer une forme d'instabilité dans de tels systèmes imposent aux concepteurs d'établir, de la façon la plus rigoureuse et la plus prudente possible, une étude et analyse détaillées de leurs comportements dynamiques avant d'envisager leurs implémentations réelles. La robustesse de la démarche d'analyse se caractérise par le fait de tenir compte des incertitudes dans la définition des zones de stabilité et d'instabilité et des niveaux vibratoires.

Les méthodes de prise en compte des incertitudes sont nombreuses et sont d'un usage très général. Elles sont, naturellement, bien utilisées pour analyser le comportement dynamique des systèmes et structures sujets aux incertitudes. Elles sont répertoriées en littérature sous l'appellation

« méthodes de propagation ou quantification d'incertitudes ». Ces méthodes s'insèrent dans une démarche plus générale s'articulant autour de trois étapes fondamentales à savoir : définir le modèle mathématique du système physique étudié, identifier et caractériser les sources des incertitudes parmi tous les paramètres du modèle et enfin propager les incertitudes dans ce dernier. Une étape de post traitement s'en suit pour analyser et extraire les statistiques de la réponse (moment statistiques, distribution,…).

Les méthodes de propagation des incertitudes se différencient les unes des autres par rapport à la façon dont elles prennent en compte les incertitudes et donc par rapport aux outils mathématiques qu'elles utilisent. Les approches probabiliste, possibiliste et algébrique ainsi que les méthodes basées sur les plans d'expériences sont les plus développées en littérature et par conséquent sont celles qui seront présentées dans la suite de ce chapitre. D'autres approches moins répandues telle que l'approche fonctionnelle ne seront donc pas abordées.

1.4.2. Approche probabiliste

L'approche probabiliste est basée sur la caractérisation probabiliste des incertitudes. Ces dernières sont modélisées par des variables aléatoires, des champs stochastiques ou par des processus stochastiques en fonction de quoi on cherche à analyser, de manière statistique et probabiliste, la variabilité de la sortie d'un système. Les méthodes de Monte Carlo (Rubinstein, 1981 ; Fishman, 1996), la méthode des perturbations (Kaminski, 2001) et celle du chaos polynomial (Wiener, 1938; Ghanem et Spanos, 1991) sont très répandues. Ces méthodes qui sont les plus développées dans la littérature nécessitent toutes une caractérisation probabiliste de l'incertitude comme préalable à leur utilisation. Leurs principes ainsi que leurs principales applications sont présentés ci-dessous.

1.4.2.1. Méthode de Monte Carlo (MC)

a) **Origine** :

L'utilisation de la méthode de MC s'est répandue essentiellement suite aux développements escomptés dans le domaine de l'informatique durant les années quarante et suite aux travaux de Van Neumann, Ulam et Fermi dans le domaine de la physique atomique. Une première utilisation de cette technique remonte à 1930 grâce aux recherches de Fermi portant sur la caractérisation de nouvelles molécules. La méthode a été effectivement reconnue à partir de 1949 et a été attribuée à Nicholas Metropolis suite à son travail co-publié avec Ulam, (Metropolis et Ulam, 1949).

b) **Principe** :

La méthode de MC se dit de toute technique de calcul procédant par des résolutions successives d'un système déterministe incorporant des paramètres incertains modélisés par des variables aléatoires. Elle constitue un outil mathématique puissant et très général ce qui lui a valu un vaste champ d'applications. Une technique de MC est utilisée lorsque le

problème à traiter est trop complexe pour qu'une résolution par voix analytique soit envisagée. Elle se résume à générer, pour tous les paramètres incertains et suivant leurs lois de probabilité ainsi que leurs corrélations, des tirages aléatoires (la qualité en terme de précision des générateurs aléatoires est naturellement très importante). Pour chaque tirage, un jeu de paramètres est obtenu et un calcul déterministe, suivant des modèles analytiques ou numériques bien définis, est opéré. Un travail d'analyse du jeu de réponses résultant est enfin effectué suite à quoi, une caractérisation statistique et probabiliste (moments statistiques, lois de probabilité) de la réponse du problème traité est obtenue.

c) **Avantages et inconvénients :**

L'avantage principal de la méthode de MC est lié essentiellement à son applicabilité. En effet, théoriquement, une telle méthode peut s'appliquer à n'importe quel système, quelle que soient sa dimension et sa complexité. Ses résultats sont exacts au sens statistique, c'est-à-dire qu'ils présentent une certaine incertitude qui diminue avec l'augmentation du nombre de tirages. Celui-ci, nécessaire pour avoir une précision et un niveau de confiance donnés, est défini par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (Sudret, 2007). Une précision raisonnable nécessite un grand nombre de tirages ce qui rend la méthode de MC prohibitive en termes de coût de calcul. C'est l'inconvénient majeur de cette méthode. Plusieurs techniques sont proposées pour y remédier. On en présente les plus connues :

- **La méthode de parallélisation :** Cette technique est basée sur la répartition des calculs déterministes sur plusieurs processeurs ce qui entrainent systématiquement la réduction de temps de calcul, (Johnson, 1997 ; Papadrakakis et Papadopoulos, 1999) :

- **La méthode de réduction de la variance (Importance sampling)**: Cette méthode vise aussi l'accélération de la convergence de la méthode classique de MC. Son principe est basé sur l'augmentation de la densité des réalisations (tirages) dans les zones d'intérêt qui correspondent aux régions qui contribuent le plus à l'estimation statistique désirée. Son coût devient plus important dés lors que le nombre de variables aléatoires dépasse la dizaine (Thompson, 1992).

- **La méthode Latin hypercube Sampling** : La technique a été introduite par McKay pour améliorer la convergence de la méthode de MC, (McKay et al, 1979). Dans cette technique, chacun des supports probabilistes des variables aléatoires est divisé en N_l segments de probabilités égales. Puis de chaque segment et pour chaque variable aléatoire, une valeur est tirée aléatoirement donnant lieux à la fin de l'opération à N_l *d*-uplets, *d* étant le nombre de variables aléatoires. Ce processus permet en pratique de faire un balayage complet de toutes les valeurs incluant même les peu probables, (Helton et Davis, 2003)

- **Les méta-modèles**: Des procédures de réduction de modèle sont utilisées avant d'exécuter les techniques de Monte Carlo. La méthode de projection propre orthogonale est l'une de ces procédures de réduction utilisée dans cette perspective (Lindsley et Beran, 2005).

d) **Conclusion** :

Comme mentionné précédemment, la simplicité de la méthode de Monte Carlo a permis son exploitation dans différentes applications relevant du domaine des sciences de l'ingénieur. C'est une méthode puissante mais prohibitive. Ces résultats servent à valider ceux des nouvelles méthodes développées dans le cadre de la recherche fondamentale. Autrement dit, la méthode peut être retrouvée dans la majorité des études traitant des techniques de propagation d'incertitudes. Nous l'avons ainsi utilisé sous sa forme classique la plus simple dans le cadre de cette thèse comme méthode référentielle pour valider les résultats.

1.4.2.2. Méthode de perturbation

a) Principe

La méthode de perturbation définit une autre procédure permettant la propagation des incertitudes sur les systèmes (Benaroya et Rehak, 1988 ; Kleiber et Hien, 1992). Elle consiste à approximer les fonctions de variables aléatoires par leurs développements de Taylor autour de leurs valeurs moyennes. Selon l'ordre considéré du développement de Taylor, la méthode est dite du premier ordre, du second ou plus. La méthode est sujette aux conditions d'existence et de validité du développement de Taylor ce qui limite son champs d'application aux cas où les variables aléatoires ont de faibles dispersions autour de leurs valeurs moyennes, (Ghanem et Spanos, 1991). Le principe de la méthode de perturbation se résume à substituer, dans l'expression du modèle, les fonctions aléatoires par leurs développements de Taylor. Les termes du même ordre sont regroupés suite à quoi un système d'équations est généré. La résolution se fait alors successivement ordre par ordre à commencer par l'ordre zéro. Le formalisme mathématique ainsi que les équations générales de résolution peuvent être trouvés dans l'étude de Sudret dans le contexte de la fiabilité des structures mécaniques (Sudret, 2007).

b) La méthode de perturbation et l'analyse des systèmes dynamiques

Les applications de la méthode des perturbations sont nombreuses. La méthode a permis de résoudre différents types de problèmes relevant de la propagation des incertitudes en statique comme en dynamique, en linéaire comme en non linéaire. Elle a, cependant, offert de bons résultats uniquement dans le cas où les paramètres incertains ont des faibles dispersions, (Handa et Andersson, 1981 ; Liu *et al.* 1986 ; Shinozuka et Yamazaki 1988 ; Elishakoff *et al.* 1995)

Dans le contexte de la modélisation du comportement vibratoire et l'analyse du comportement dynamique des systèmes, Liaw et Yang ont exploité la méthode de perturbation pour l'étude des propriétés aérodynamiques de structures élastiques (plats empilés) sujettes à plusieurs paramètres incertains (paramètres structurels et géométriques). Ce travail apparait comme étant la première application publiée de la méthode des éléments finis stochastiques combinée avec celle des perturbations pour analyser la stabilité aérodynamique, (Liaw et Yang, 1993).
Dans une autre étude, Kaminski a présenté une combinaison originale de la méthode de différence finie avec celle des perturbations pour modéliser des problèmes de vibrations dans les structures mécaniques incertaines, (Kaminsky, 2002). La méthode développée est utilisée, à titre d'exemple, pour déterminer les moments probabilistes des fréquences et modes propres d'une poutre dont le module de

Young est aléatoire. Les solutions obtenues ainsi que les solutions analytiques exactes sont similaires. Le deuxième ordre a été suffisant pour obtenir les deux premiers moments avec une bonne précision. Dans une autre étude, Muscolino a développé une méthode d'analyse dynamique pour des systèmes linéaires à paramètres incertains et à excitations déterministes, (Muscolino, 2000). La méthode est une amélioration de la technique de perturbation du premier ordre qui présente des limites lorsque la dispersion des paramètres incertains est importante. L'apport de la méthode est évalué, en confrontant ses résultats à ceux des méthodes de Monte Carlo et de perturbation du second ordre, sur le problème de l'analyse des deux premiers moments statistiques des vibrations d'une poutre soumise à une force mobile. Les résultats de la méthode proposée corrèlent bien avec les résultats référentiels. Dans le même contexte, c'est-à-dire celui d'améliorer la performance de la méthode perturbation en augmentant le domaine de validité de l'approximation par le développement de Taylor, Roy et Spanos ont proposé, dans une étude antérieure, l'utilisation des approximations de Padé, ces derniers étant connus pour être des accélérateurs de convergence, (Roy et Spanos, 1991).

c) Conclusion

La méthode de perturbation offre un principe d'utilisation simple basé sur l'expression de toutes les grandeurs aléatoires par leurs développements de Taylor autour de leurs valeurs moyennes. Néanmoins, son utilisation reste délicate particulièrement dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. De plus, la méthode ne peut être utilisée que pour les cas où les paramètres incertains ont de faibles dispersions autour de leurs valeurs moyennes, conséquence des propriétés des approximations de Taylor. Cette contrainte, peu vérifiée en pratique, constitue l'inconvénient majeur de la méthode.

1.4.2.3. Chaos polynomial

Seul l'aspect bibliographique de l'approche du chaos polynomial est présenté dans cette section. L'aspect théorique (formalismes mathématiques) est présenté en détails dans le chapitre 3.

1.4.2.2.1. Principe et premières applications

a) Principe

Le chaos polynomial formalise une séparation entre les composantes stochastiques d'une fonction aléatoire et ses composantes déterministes. C'est un outil mathématique puissant qui a été développé par Wiener dans le cadre de sa théorie sur le chaos homogène (Wiener, 1938). Le chaos polynomial permet d'obtenir une expression fonctionnelle d'une réponse aléatoire en décomposant son aléa sur une base de polynômes orthogonaux. En effet, cette théorie montre que, de façon générale, un champ de variables stochastiques du second ordre (à variance finie) peut être exprimé par un développement en série de polynômes d'Hermite ; fonctions orthogonales de certaines variables aléatoires, gaussiennes et indépendantes modélisant l'incertitude. La partie déterministe est modélisée par des coefficients $\overline{x}_j$, appelés modes stochastiques, pondérant les fonctions polynômiales d'Hermite.

$$X(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \overline{x}_j \phi_j(\xi) \tag{1.4}$$

La famille des polynômes ϕ_j forme une base orthogonale optimale et permet une convergence au sens des moindres carrés du développement, objet du théorème de Cameron et Martin (Cameron et Martin, 1947). Il s'est avéré, par contre, que la rapidité de la convergence et par la même la précision du développement en polynômes d'Hermite ne sont plus vérifiées dés lors qu'on traite des processus non gaussiens. En réalité, l'optimalité de la base d'Hermite dans le cas des processus gaussiens est due au fait que la fonction densité de probabilité, gaussienne dans ce cas, est de forme mathématique similaire à celle de la fonction poids associée au produit scalaire défini dans la base. Cette idée est généralisée pour asseoir une correspondance, appelée schéma d'Askey, entre des familles de polynômes orthogonaux et des lois de probabilité (Askey, 1985). La notion de développement en polynôme de chaos généralisé est alors définie et une convergence exponentielle est ainsi démontrée et généralisée au cas de lois de probabilité arbitraires (pas nécessairement gaussienne), (Xiu et Karniadakis, 2002, 2003; Soize et Ghanem, 2004).

b) **Premières applications** :

Les premières applications du chaos polynomial remontent aux années soixante et ont porté essentiellement sur le domaine de la turbulence (Kraichnan, 1963 ; Orszagand et Bissonnette, 1967). Les limites constatées en termes de convergence du développement de Wiener-Hermite dans les problèmes non gaussiens ont fait perdre à ce dernier beaucoup de son intérêt. Le renouement avec les applications du chaos polynomial n'est dû qu'aux travaux de Ghanem et spanos de 1991. Ces deux derniers chercheurs ont combiné le développement de Wiener-Hermite avec la méthode des éléments finis pour modéliser et propager les incertitudes dans des structures mécaniques (Ghanem et Spanos, 1991). L'analyse moderne utilisant le chaos polynomial a ainsi commencé. En effet, depuis ces travaux et suite à la définition du chaos polynomial généralisé (Xiu et Karniadakis, 2002), différentes applications, dans des domaines aussi variés que complexes, ont été et continuent d'être entreprises. Elles concernent la propagation des incertitudes dans les milieux environnementaux et biologiques (Isukapoli et al, 1998, 2001), la fiabilité des structures mécaniques (Sudret, 2007 ; Crestaux et al, 2009), la commande des systèmes dynamiques (Nagy et Braatz, 2006), l'estimation et l'observation (Smith et all, 2007 ; Blanchard et al, 2009, 2010a, 2010b), quantification des incertitudes dans les circuits électroniques (Lovett, et all, 2008 ; Pulch, 2008), l'analyse des problèmes d'écoulement en mécanique des fluides (Le maitre et al, 2001 ; Lucor et al, 2003) etc. Le chaos polynomial a été aussi utilisé pour analyser et prédire de façon robuste le comportement dynamique des systèmes non linéaires en particulier la stabilité et les niveaux vibratoires. On reviendra sur ce point en détail dans la sous-section (1.4.2.2. 3).

1.4.2.2.2. Schémas intrusifs et non intrusifs

La propagation des incertitudes via les méthodes du chaos polynomial nécessite le calcul des modes stochastiques $\overline{x}_j$, appelés également coefficients modaux. Deux approches sont définies pour cet objectif : intrusive et non intrusive. La première utilise des techniques de projection de Galerkin pour exprimer le modèle incertain dans la base du chaos polynomial sous forme d'un système d'équations couplées et déterministes gardant les mêmes propriétés de linéarité du système original

(Ghanem et Spanos, 1991 ; Babuska et al, 2004). Le calcul des coefficients stochastiques passe alors par l'adaptation d'un algorithme de calcul correspondant à la nature du système d'équations résultant. La modification du modèle incertain via sa projection peut déjà être distinguée comme une difficulté considérable pouvant rendre l'utilisation de l'approche intrusive délicate. Les performances du chaos polynomial intrusif ont été évaluées, en les comparant à celles de la méthode de MC, à travers le problème de l'estimation des moments statistiques des solutions de quelques exemples d'équations différentielles stochastiques linéaires du premier et du second ordre (Xiu, et Lucor, 2003). L'étude a conclu que la méthode du chaos polynomial intrusive peut, effectivement, être une alternative à la technique de MC particulièrement lorsque le nombre d'incertitudes n'est pas important. Dans le cas contraire, la méthode perd considérablement son efficacité par rapport à la méthode de MC. Le calcul intrusif a été testé aussi sur un problème de diffusion décrit par des équations aux dérivées partielles stochastiques (Xiu et Karniadakis, 2002). La solution de l'équation de Poisson correspondant au problème de diffusion considéré y est caractérisée en tenant compte d'une diffusivité et de conditions aux limites incertaines. Les mêmes auteurs ont employé la même approche pour calculer les coefficients stochastiques dans l'objectif de modéliser et propager les incertitudes dans des modèles de fluides incompressibles, (Xiu et Karniadakis, 2003). L'efficacité et la convergence du développement calculé y sont étudiées. La méthode a offert un gain considérable en temps de calcul par rapport à la méthode de MC.

Comme mentionné dans le paragraphe précédent, l'approche intrusive présente certaines limites rendant son exploitation laborieuse et coûteuse particulièrement dans le cas où le nombre de paramètres incertains est important. La difficulté est accentuée dans le cas des problèmes non linéaires. Plus le nombre de paramètres incertains est grand plus le nombre de modes stochastiques à calculer est important. Cette dépendance, dont l'expression sera décrite dans le chapitre 3, engendre l'explosion de la dimension du système déterministe résultant de la projection de l'aléa dans la base du chaos et dont la solution correspond aux modes stochastiques recherchés. Le nombre de termes non linéaires résultant est aussi important. Toutes ces contraintes posent de considérables difficultés au niveau de l'implémentation et du calcul d'où l'intérêt de l'approche non-intrusive. Celle-ci, de type boite noire, est une alternative très intéressante dans la sens où, contrairement à l'approche intrusive, elle permet le calcul des coefficients modaux sans aucune modification ou manipulation du modèle incertain. En effet, l'approche non-intrusive englobe des techniques par lesquelles l'estimation des coefficients modaux ne nécessite que certaines mesures en des points particuliers dont l'obtention se fait selon des procédures bien établies. Deux types de méthodes peuvent être distingués à savoir les méthodes de régression et les méthodes de projection spectrale non intrusive. Dans la première famille, le calcul des modes stochastiques se fait en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre la fonction aléatoire et son approximation dans la base du chaos polynomial. Son efficacité a été testée sur un problème d'analyse de sensibilité, particulièrement sur l'évaluation des indices de Sobol, (Crestaux et al, 2009). Les méthodes de projection spectrale non intrusive désignées par NISP pour non-intrusif spectral projection, procède par la projection de la fonction aléatoire, solution du modèle incertain, dans la base du chaos, contrairement à l'approche intrusive dans laquelle tout le modèle est projeté. Le calcul des modes stochastiques est alors ramené à des calculs numériques d'intégrales (Crestaux et al, 2009). Des variantes de la méthode NISP sont définies par rapport aux techniques utilisées pour calculer les intégrales. Dans la technique de collocation probabiliste, les modes stochastiques sont calculés par la méthode de collocation de Gauss (Babuska et al, 2007; Loeven et al, 2007). Les points d'intégration sont ceux de Gauss définis comme étant les zéros des polynômes orthogonaux utilisés. Babuska et al ont montré, dans le cas d'équations aux dérivées partielles elliptiques, une équivalence entre la méthode NISP utilisant la collocation probabiliste et la technique de projection intrusive. Mathelin et Hussaini ont utilisée la même technique qu'ils ont appelé

collocation spectrale. Ils ont montré, sur un problème d'écoulement en tuyère, une réduction du temps de calcul par rapport à la technique de projection intrusive, (Mathelin et Hussaini, 2005). Pour des problèmes de propagation d'incertitude où les paramètres incertains sont nombreux, des grilles de points de collocation sont construites en utilisant le produit tensoriel de grilles monodimensionnelles. Le nombre de points de collocation et par conséquent, le nombre de résolutions déterministes du système stochastique sujet à la propagation des incertitudes, deviennent importants. Comme alternative, des approches de collocation à grilles creuses sont définies et utilisées, (Ganapathysubramanian et Zabaras, 2007 ; Xiu et Hestaven, 2005).

Dans le même contexte, Blatman et sudret ont proposé une approximation par le chaos polynomial creux, dans laquelle seuls les termes importants sont calculés de façon adaptative par un algorithme itératif, exploitant ainsi le fait qu'en pratique beaucoup des coefficients modaux s'avèrent négligeables (Blatman et Sudret, 2008). Le principe de l'algorithme consiste à rajouter au développement courant des termes d'ordre supérieur un par un et de ne retenir que ceux qui induisent une perte de précision. La méthode est appliquée à un calcul de fiabilité d'un treillis élastique à dix variables aléatoires. La probabilité de défaillance a été obtenue avec une grande précision, pour un nombre de termes dans le développement à peu prés sept fois plus petit que dans une représentation classique. Le nombre de calculs est aussi divisé par un facteur compris entre trois et cinq.

1.4.2.2.3. Le chaos polynomial et l'analyse du comportement dynamique des systèmes

Les travaux traitant de l'analyse du comportement dynamique des systèmes sont peu nombreux et datent dans leur quasi majorité de la dernière décennie ce qui montre la récence de la thématique.

L'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes inclut deux étapes complémentaires : l'étude de la stabilité et l'analyse des niveaux vibratoires, le tout en tenant compte des incertitudes.

a) Chaos polynomial et analyse de la stabilité

L'étude de la stabilité des systèmes dynamiques incertains est ramenée, dans une étude récente, à l'analyse, en utilisant les outils classiques (théorie de Lyapunov), de la stabilité du système déterministe résultant de l'application du chaos polynomial intrusif, (Fischer et Bhattacharya, 2008). La démarche est testée sur deux exemples numériques de systèmes dynamiques incertains : un système linéaire et un autre polynomial. Suite à l'application du chaos intrusif, des systèmes dynamiques déterministes sont obtenus. Ces derniers gardent le même degré de complexité que les systèmes originaux c'est-à-dire que la linéarité et le degré des non linéarités ne sont pas affectés une fois la projection dans la base du chaos polynomial est effectuée. La stabilité des systèmes déterministes résultant est alors analysée en utilisant la méthode directe de Lyapunov via les approches LMI (Linear Matrix inequation) et la programmation SOS (sum of square). L'inconvénient majeur de cette méthode réside dans le fait que la stabilité des projections n'implique pas formellement celle des systèmes dynamiques incertains. Néanmoins, elle semble offrir un outil intéressant permettant d'appréhender la stabilité des systèmes dynamiques incertains. Toutefois, la non-application de la méthodologie dans un cas physique est un facteur qui empêche d'avoir un jugement objectif sur la méthode proposée par Fisher.

L'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques incertains a également été traitée par Hover en 2006. La stabilité est liée, par définition, à la façon par laquelle une perturbation sur les conditions

initiales d'un système fait évoluer la dynamique de celui-ci. L'approche par chaos polynomial intrusive est utilisée par Hover pour déterminer cette évolution en considérant des conditions initiales incertaines pour un exemple de système académique. Les amplitudes des modes stochastiques, solutions du système d'équations différentielles résultant de la décomposition de l'aléa sur la base du chaos, sont analysées pour mieux prédire la stabilité du comportement dynamique. L'idée utilisée est basée sur le fait que la décroissance de l'amplitude des modes stochastiques à un niveau faible peut informer du caractère stable du système incertain puisque chacune des réalisations de la réponse du système est une somme de ces modes. Le chaos polynomial est utilisé pour construire les lois de probabilité, caractérisant la dynamique incertaine du système étudié. Les résultats ont montrée une bonne précision, la technique de MC étant la base référentielle utilisée. Les résultats ont montré également une réduction du coût par rapport à celui occasionné par la méthode de MC (Hover et al, 2006).

La stabilité des systèmes dynamiques incertains relevant de l'aérodynamique constitue l'un des axes de recherches très prisés de L'ONERA. L'influence des incertitudes paramétriques sur la vitesse critique de flottement (vitesse minimale en dessous de laquelle un avion devient instable) d'un avion est cruciale. Cette grandeur devenant aléatoire, conséquence des incertitudes, doit être caractérisée statistiquement (valeur moyenne, variance, loi de distribution etc). Poirion présente les méthodes développées au sein de l'ONERA pour traiter de ces problèmes (Poirion, 2005). Les méthodes de MC, de perturbation et de chaos polynomial sont décrites. L'applicabilité de la méthode du chaos polynomial dans des cas d'ingénierie complexe est montrée sur un modèle à 20000 degrés de liberté décrivant un avion. L'élasticité de 4 matières de l'aile est considérée incertaine et est modélisée par des variables aléatoires indépendantes. Les caractéristiques statistiques de la vitesse de flottement sont estimées avec le chaos polynomial et la méthode de perturbation et sont comparées aux résultats référentiels de MC obtenus via 9000 réalisations. La méthode de perturbation n'a pas pu approcher le comportement global de la solution de référence contrairement à l'approche par chaos polynomial. Les coefficients du chaos polynomial ont été calculés de manière non intrusive en utilisant 400 mesures tandis que les statistiques de la vitesse de flottement ont été estimées avec 1000 réalisations. La valeur moyenne est correctement estimée avec une bonne précision tandis que la dispersion est plus importante comparé à la solution référentielle. Dans un autre cadre, Ghanem a présenté des développements mathématiques permettant de compacter le schéma intrusif du chaos polynomial. Celui-ci est appliqué à la caractérisation statistique des vecteurs et valeurs propres. La méthodologie proposée permet de générer des systèmes d'équations algébriques compactes dont la résolution est effectuée par les méthodes non linéaires de Gauss et de Newton. La distribution des valeurs propres peut ainsi être obtenue (Ghanem, 2009).

b) Chaos polynomial et analyse des cycles limites

Une réponse stable d'un système dynamique non linéaire peut bifurquer et développer des instabilités oscillatoires, définissant la notion de cycles limites. Ces comportements sont responsables de l'apparition des phénomènes de fatigue entrainant la perte de performances, la détérioration et l'usure des systèmes les abritant d'où l'importance de les identifier, les analyser et si possible les éliminer dans le cas où ils ne peuvent pas être négligés. Ces comportements sont très sensibles aux variations des paramètres physiques de conception. Tel est le constat de plusieurs études citées tout au début de ce chapitre, (Shin et al, 2002a, 2002b; Hoffman et Gaul, 2003). Comme autre exemple, le travail de Thomas et co-auteurs a relevé qu'une variation inférieure à 5% sur la fréquence propre d'un F-16 engendre une variation supérieure à 30% pour l'amplitude et une autre inférieure à 5% pour la

fréquence des vibrations avec comme conséquence une détérioration de ses capacités opérationnelles, (Thomas et al, 2005). C'est le même type de conclusion tiré des études de Lindsley et al où il a été constaté que des niveaux faibles de variation des paramètres de conception et des conditions aux limites peuvent affecter considérablement le comportement dynamique des structures mécaniques en terme de stabilité et de niveaux vibratoires, (Lindsley et al, 2002a ; 2002b).

Envelopper les amplitudes des cycles limites et analyser leurs variations en fonction des incertitudes paramétriques s'inscrit dans une démarche plus holistique qui vise, pour rappel, à tenir compte des incertitudes dés la phase de conception pour garantir un fonctionnement robuste pour les systèmes physiques. Plusieurs études récentes traitant de l'analyse du comportement dynamique des systèmes en fonction de paramètres incertains sont introduites en littérature. L'étude de Lucor s'est focalisée sur l'analyse des oscillateurs linéaires en considérant des paramètres d'entrées incertains et en utilisant l'approche par chaos polynomial généralisé,(Lucor et al, 2004). L'apport de cette méthode par rapport à la méthode de MC en termes de temps de calcul est illustré. L'article de Sarkar et al traite de l'effet des incertitudes paramétriques sur le comportement de flottement de Stalle d'une aile en tangage et plus particulièrement sur son comportement de bifurcation. Les méthodes à base du chaos polynomial intrusif et non intrusif sont utilisées. Elles sont comparées dans le cas d'une fréquence de tangage incertaine, (Sarkar et al, 2008). L'effet de l'ordre du chaos sur la précision dans le cas d'une intégration à long terme y est aussi observé. De plus, une discrimination entre les deux méthodes (intrusive et non-intrusive) par rapport à leur coût en temps de calcul est effectuée. Elle montre que l'approche non-intrusive utilisant la technique de collocation est plus efficace que l'approche intrusive dans le cas d'un modèle fortement non linéaire. Les effets d'autres incertitudes tels que celles relatives à l'angle de l'équilibre structurel de l'aile sont également analysés. Beran et Petit ont développé une étude similaire, (Beran et pettit, 2006). En plus du problème de l'analyse des cycles limites dans le cas des systèmes aérodynamiques, l'étude se penche également sur un inconvénient soulevé dans des recherches préliminaires, (Millman et al, 2003), faisant état de l'incapacité du développement en chaos polynomial à maintenir la même précision pour des problèmes d'intégrations longues. Ces difficultés apparaissent particulièrement dans le cas des systèmes développant des comportements oscillatoires et des fonctions présentant des discontinuités lorsque des paramètres sont proches de leurs valeurs critiques. Dans le cas des systèmes développant des comportements oscillatoires de type cycle limite, la perte en précision provient au-delà d'un certain nombre de périodes d'oscillations. Elle est justifiée par les différents auteurs par une perte d'énergie, phénomène qui perdure même en augmentant l'ordre du chaos polynomial, une opération à laquelle l'erreur devient insensible. Ces limites sont illustrées sur un processus sinusoïdal dont la fréquence est aléatoire, (Pettit et Beran, 2006). Il a été constaté qu'effectivement les développements de Wiener-Hermite et de Wiener-Legendre reproduisent convenablement mais uniquement les caractéristiques statistiques à court terme du processus sinusoïdal. La précision se détériore au-delà de quelques périodes d'oscillation. La première justification de cette déficience est physique. Elle s'illustre en le fait que l'énergie du signal aléatoire se décale dans le temps vers les modes stochastiques d'ordres les plus élevés imposant ainsi l'utilisation d'un nombre de termes dans le développement de plus en plus grand, un fait qui rend l'utilisation de l'approche difficile voire impossible. La deuxième explication de la déficience du chaos polynomial est plutôt mathématique. En effet, elle pointe l'incapacité du développement en polynôme de chaos à modéliser les variations rapides et non linéaires des fonctions aléatoires dans la dimension stochastique (Pettit et Beran, 2006).

c) Solutions aux insuffisances du chaos polynomial

L'inadéquation du développement en polynômes de chaos à traiter et à modéliser les cycles limites a été suggérée par Pettit et Beran, Millman et al dans leurs études respectives, (Millman et al, 2003, 2005 ; Pettit et Beran, 2006). Quelques méthodes alternatives sont présentées ci-dessous.

1. Chaos polynomial multi-élément

Définie et développée par Wan et Karniadakis sous l'appellation du chaos polynomial généralisé multi-éléments (ME-gPC pour multi-element generalized polynomial chaos), cette méthode a permis de remédier à certaines des insuffisances du chaos polynomial (Wan et Karniadakis, 2005). L'idée dans cette méthode est basée sur la décomposition du domaine stochastique en plusieurs segments de probabilité appelés éléments. Dans chaque élément, une variable aléatoire locale est définie. Par rapport à chaque variable, une approximation via le chaos polynomial est construite localement pour le processus aléatoire. Une approximation globale du processus ainsi que ses moments statistiques peuvent alors être construits en recombinant les approximations locales. Le degré de la perturbation aléatoire est réduit proportionnellement à la taille et au nombre des éléments. Par conséquent, l'ordre du chaos polynomial nécessaire peut être moins élevé comparé à celui d'une procédure classique. Quelques applications du chaos polynomial multi-éléments sont introduites en littérature entre autres, celle portant sur la résolution des équations différentielles stochastiques (Wan et Karniadakis, 2006a, 2006b) ou celle traitant de l'analyse du comportement dynamique de robots mobiles sujets aux incertitudes paramétriques, (Kewlan et Iagnemma, 2009). L'amélioration qu'apporte la méthode multi-éléments par rapport à la méthode classique en termes de précision sur les prédictions du comportement dynamique est très bien illustrée.

2. Chaos de Wiener-Haar

Le chaos de Wiener-Haar est proposé par Le Maître en 2004 pour le même objectif à savoir : surpasser les limites du chaos polynomial dans les problèmes d'intégrations longues et ceux présentant des discontinuités (Le Maitre, 2004). Le Maître propose la substitution de la base du chaos polynomial par une autre base orthogonale générée par les ondelettes de Haar. Les ondelettes de façon générale et en particulier celles de Haar sont connues pour être bien adaptées aux problèmes relevant de l'approximation des signaux aux variations rapides et non linéaires et des fonctions présentant des singularités et des discontinuités (Strang et Nguyen, 1997 ; Burrus et al, 1998).

Des techniques intrusives et non intrusives sont aussi utilisées pour calculer les coefficients pondérant les ondelettes appelés coefficients de Fourier généralisés. La technique intrusive exploite l'orthonormalité des ondelettes pour décomposer l'aléa d'une fonction stochastique sur la base des ondelettes en opérant une projection de Galerkin.

Le développement de Wiener-Haar est considéré, dans son schéma intrusif, par Le Maitre dans l'optique d'analyser le comportement dynamique de quelques exemples de systèmes non linéaires incertains tel que le problème d'instabilité de Rayleigh-Benard (Le Maitre, 2004a). L'étude montre que pour les cas où les paramètres aléatoires sont proches de points critiques (valeurs de bifurcation), le développement de Wiener-Haar offre des prédictions plus robustes que celles générées par le développement de Wiener-Legendre. Inversement, dans le cas de solutions dépendant d'une manière continue (smooth) des paramètres incertains, le développement de Wiener-Legendre présente une

meilleure convergence. Le schéma intrusif du développement de Wiener-Haar est utilisé dans une autre étude de Le Maitre pour analyser le comportement dynamique du système de Lorenz sujet à un seul paramètre incertain (Le Maitre, 2004b). Les propriétés de convergence du développement sont analysées en fonction du niveau de résolution. Une comparaison avec la technique de MC a montré l'efficacité et l'apport de l'utilisation du développement de Wiener-Haar, une méthode appelée aussi analyse multi-résolution. L'étude montre par ailleurs que pour des problèmes plus complexes, le temps de calcul nécessaire devient très important. Deux schémas sont proposés pour pallier à cet inconvénient. Le premier est basé sur la répartition de l'espace aléatoire (un peu l'idée du chaos polynomial multi-éléments) tandis que l'autre est basé sur l'adaptation du niveau de la résolution de la base d'ondelette. La première technique est plus efficace selon l'évaluation de Le Maitre.

Comme dans le cas du développement en chaos polynomial, la dimension du système résultant de l'application de la projection de Galerkin dépend de l'ordre de troncation fixé pour le développement de Wiener-Haar. Cet ordre définit la résolution de l'approximation. La méthode devient rapidement lourde dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté en particulier lorsque le niveau de résolution requis est grand. La difficulté est accentuée dans le cas non linéaire. Les techniques non intrusives deviennent alors plus appropriées (Petit et Beran, 2006). Ces dernières expriment, grâces à la propriété d'ortho-normalité, les coefficients des ondelettes par des intégrales dont le calcul est effectué par les techniques d'intégration numériques telle la technique de MC, (Evan et Swartz, 2000). Cette méthode est très coûteuse puisqu'elle nécessite beaucoup de tirages pour une bonne précision. Par ailleurs la réduction du coût de calcul par d'autres techniques d'intégration telle que la méthode des trapèzes ou celle de Simpson par rapport à la méthode de MC n'est pas tellement significative, (Petit et Beran, 2006). Les auteurs de cet article ont proposé l'utilisation de la transformée discrète en ondelettes, plus particulièrement l'algorithme pyramidal de Mallat pour un calcul plus efficace et moins coûteux des coefficients de Fourier généralisés, (Mallat, 1989). Le calcul des coefficients des ondelettes s'y trouve réduit à des opérations successives de filtrage. En effet, l'algorithme de Mallat définit une reconstruction récursive des coefficients des ondelettes par des opérations successives de convolution du signal analysé par des filtres numériques, (Burrus, 1998 ; Strang et Nguyen, 1996). Cette reconstruction utilise un nombre de simulations très inférieur à celui nécessaire dans la méthode de Monte Carlo.

L'analyse multi-résolution via le schéma non-intrusif classique et via l'algorithme de Mallat est considérée par Pettit et Beran dans leur étude, (Pettit et Beran, 2006). Les différentes méthodologies sont évaluées sur un exemple numérique décrivant une dynamique non linéaire sujette à une incertitude paramétrique. L'objectif est de tester l'aptitude du développement de Wiener-Haar à modéliser les cycles limites. Comme résultat, l'étude a montré, qu'effectivement, le développement de Wiener-Haar peut bien modéliser les comportements dynamiques oscillatoires dont ceux caractérisant les instabilités de type flottement (cycle limite). Les inconvénients que présentent l'approche par le chaos polynomial au delà d'un nombre d'oscillations suffisamment grand ne sont pas observés. Les statistiques et les lois régissant le comportement dynamique sur un horizon temporel suffisamment long sont convenablement estimées. De bonnes approximations de l'évolution de la réponse du système dynamique dans le domaine stochastique sont également obtenues. L'algorithme de Mallat a montré un apport considérable en termes de nombre nécessaire de simulation et de précision par rapport à la méthode de MC. En effet, un rapport de réduction du nombre de simulations égal à 10 a été observé. De plus, les prédictions des oscillations obtenues avec les coefficients de Mallat sont plus précises que celles obtenues avec les coefficients calculés via la méthode de MC.

3. Chaos polynomial indépendant du temps

Witteveen et al ont proposé dans leur article une alternative un peu différente par rapport aux autres solutions présentées précédemment, (Witteven et al, 2008). Elle consiste à exprimer, dans une première étape, la réponse périodique d'un système stochastique $u(x,t,\omega)$ en fonction d'un vecteur de paramètres $z(x,\omega)$ indépendants du temps t. Ce vecteur comprend la fréquence, la phase relative, l'amplitude, une valeur de référence et une période. La précision de la méthode devient de cette façon indépendante du temps. La méthode non-intrusive est alors appliquée au vecteur $z(x,\omega)$ à la place de la réponse $u(x,t,\omega)$. Un oscillateur harmonique avec une raideur incertaine est utilisé comme un benchmark pour tester l'aptitude de la méthode proposée à modéliser le comportement stochastique oscillatoire sur un horizon temporel suffisamment long. Par contre, seul le comportement périodique du système est considéré c'est-à-dire que le régime transitoire n'est pas tenu en compte. La méthode a permis une bonne estimation du comportement périodique. Dans la même étude, un modèle à deux degrés de liberté décrivant une aile élastique est utilisé pour vérifier la capacité de la méthode à prédire le comportement à cours terme (régime transitoire). Dans ce dernier cas, les résultats ont montré une performance moins bonne que celle de la méthode classique du chaos polynomial non intrusif utilisant la technique de collocation. Witteveen propose la combinaison de sa méthode avec la méthode classique pour traiter à la fois les statistiques à cours et à long terme.

4. Chaos de Wiener-Fourier

Le développement de Wiener-Fourier proposé par Millman remplace la base du chaos polynomial par celle de Fourier. Ce principe est introduit pour mieux estimer la densité de probabilité de l'angle de tangage d'une aile d'avion soumise à des incertitudes au niveau de l'angle de tangage initial et au niveau des raideurs. La méthode a montré une meilleure efficacité par rapport à l'approche par chaos polynomial classique. Les cycles limites ont été prédits avec une meilleure précision (Millman et, 2005).

d) Conclusion

Le chaos polynomial est un concept qui s'apprête bien à la modélisation des fonctions et processus aléatoires. C'est un outil qui permet la prise en compte des incertitudes et des non linéarités dans la modélisation et l'analyse de systèmes ce qui constitue un avantage considérable. Les schémas numériques d'implémentation des approches par chaos polynomial diffèrent par rapport à leur façon de faire appel au modèle sujet à la propagation des incertitudes. Le schéma numérique intrusif présente l'avantage de ne nécessiter qu'un seul calcul pour déterminer les modes stochastiques. Ce calcul devient cependant fastidieux lorsque le modèle original possède beaucoup de paramètres incertains. La complexité du calcul est plus importante dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté et fortement non linéaires. Ceci est dû au fait que le modèle original est transformé via sa projection sur la base du chaos polynomial en un système d'équations déterministes dont la taille et la complexité dépendent sensiblement du nombre de paramètres incertains et du nombre de degrés de liberté du modèle original. A l'opposé, le schéma non intrusif présente un avantage important, celui de ne pas nécessiter des modifications ou des manipulations du modèle original. C'est une approche boite noire qui n'utilise qu'un certain nombre de mesures sur le modèle original. L'importance de cet avantage

apparait sur les systèmes à grand nombre de degrés de liberté et fortement non linéaire. L'approximation par le chaos polynomial généralisé calculé par les deux approches intrusive et non intrusives présente des insuffisances sur les problèmes d'intégration longues et sur ceux présentant des discontinuités. Le chaos polynomial multi-éléments et le chaos de Wiener-Haar offrent des alternatives dont la puissance et l'efficacité n'ont pas été beaucoup évaluées.

1.4.3. Méthode des plans d'expériences

Les plans d'expériences définissent un outil statistique qui permet de mettre en œuvre ou de simplifier, en complexité et en coût, un protocole expérimental dont l'objectif est de déterminer les paramètres susceptibles d'influer sur la performance d'un produit industriel. Le but de l'utilisation d'une méthode à base d'un plan d'expérience est d'aider, voire, d'obtenir des conceptions vérifiant des critères d'optimalité de robustesse. Une telle méthode caractérise un nombre d'expériences à réaliser pour déterminer l'influence de multiples paramètres sur une ou plusieurs sorties. Son applicabilité et son efficacité dépendent de la possibilité de maîtriser les valeurs à donner aux paramètres et de mesurer avec précision la ou les sorties correspondantes. Le nombre d'expériences dépend de la connaissance du système, du nombre de paramètres variables, des corrélations éventuelles entre ces paramètres ainsi que de la façon dont ces paramètres peuvent évoluer.

Plusieurs techniques basées sur la notion de plan d'expériences sont développées. L'étude de Chatillon revient avec plus de détails sur les différents schémas de construction des plans d'expériences (Chatillon, 2005). Les plans d'expérience de Taguchi se distinguent par une réduction importante du nombre d'essais, (Taguchi, 1986). La méthode de Taguchi procède par croisement de deux matrices de plans d'expériences : une matrice de contrôle représentant les facteurs de contrôle (paramètres de conception contrôlés) et une matrice de bruit représentant les facteurs de bruit (les paramètres incertains). Des essais sont exécutés pour chaque combinaison. Les grandeurs statistiques telles que la valeur moyenne et l'écart type sont mesurées. La méthode de Tagushi utilise le rapport signal-bruit et une fonction perte de qualité (loss function) comme critères de qualité permettant l'évaluation des résultats. Dans la version développée par Hung, la méthode utilise dans le plan d'expérience la notion de colonnes orthogonales comme technique permettant d'étudier simultanément plusieurs paramètres de conception ce qui réduit à un nombre minimum les essais (Hung, 1990). Pour une lecture détaillée, le lecteur peut consulter l'étude à Phadke et Madhav, résumée en annexe par Hung, (Phadke et Madhav, 1989 ; Hung, 1990).

Les applications de la méthode de Taguchi s'orientent naturellement au domaine de la conception robuste où des travaux y sont développés (Kackar, 1985 ; Phadke et Madhav, 1989 ; Singpurwalla, 1990 ; Chatillon, 2005). Par ailleurs et dans le contexte de l'analyse vibratoire, il y a lieu de noter l'étude de Rigaud ayant porté sur l'analyse robuste du comportement d'une boite à vitesse dont les raideurs de l'engrènement et des roulements sont incertains, (Rigaud et al, 2003).

1.4.4. Approche possibiliste (ensembliste)

Les méthodes probabilistes décrites précédemment partagent toutes une condition préalable à leur application. Les lois de probabilité régissant les paramètres incertains doivent être identifiées, une tâche qui reste très difficile. Les méthodes ensemblistes présentent l'avantage de ne pas nécessiter la modélisation des lois régissant les incertitudes. Deux méthodes importantes sont classées dans cette approche. L'une est basée sur l'arithmétique des intervalles, (Moore, 1966), alors que l'autre utilise le formalisme de la logique floue, (Zadeh, 1965).

1.4.4.1. Méthode des intervalles

a) Origine

Les premières bases du calcul par intervalles remontent aux travaux de Moore, publiés dans l'ouvrage intitulé ''Interval Analysis'', incontournable référence, (Moore, 1966). Nombreuses sont les recherches traitant de cette partie de l'analyse numérique. Une revue spéciale ''Reliable computing'' lui est dédiée et des conférences ont lieu tous les ans sur l'analyse par intervalles et ses applications.

b) Principe

L'idée principale de la méthode est fondée sur la modélisation des paramètres incertains par des intervalles dont les bornes représentent les limites minimales et maximales des paramètres. Les processus d'identification et les appareils de mesure devenant de plus en plus efficaces et plus précis permettent de délimiter les dispersions des paramètres physiques des systèmes ce qui induit leur modélisation par des intervalles (Dessombz, 2000). Aucune information n'est nécessaire sur la nature des dispersions ou la façon dont elles évoluent contrairement aux méthodes probabilistes. Par contre, la méthode affiche une certaine pauvreté dans le sens où l'information sur les variables n'est que partiellement représentée. Il n'est plus possible de dire dans quel ensemble une variable a le plus de chance de se trouver. En revanche, elle est plus simple à utiliser pour les traitements non linéaires des incertitudes grâce au formalisme mathématique convivial dont elle bénéficie. Profitant de cet avantage, plusieurs problèmes relevant des sciences de l'ingénieur sont traités avec l'arithmétique des intervalles, (Didrit, 1997; Dessombz, 2000 ; Shahriari, 2007 ; Meslem et al, 2008).

c) Arithmétique d'intervalle et analyse de la stabilité

L'arithmétique par intervalle a été appliquée au problème de l'analyse robuste de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires incertains. Petkovski a développé, en utilisant cet outil, une condition suffisante pour la stabilité de matrices incertaines. Cette condition est déterminée via un algorithme itératif basé sur la théorie de Lyapunov (Petkovski, 1991). C'est une amélioration des conditions définies dans des études antérieures (Yedavalli, 1986 ; 1987).
Walter et Jaulin ont proposé une méthode pour caractériser l'ensemble de toutes les valeurs des paramètres incertains associant un comportement dynamique stable, (Walter et Jaulin, 1994). La méthode utilise le critère de Rooth pour poser l'analyse de la stabilité sous forme d'un problème d'inversion d'ensemble dont la solution est déterminée par l'utilisation de l'analyse par intervalles. Dans une autre étude, Jaulin ramène l'analyse de la stabilité à un problème d'inclusion, (Jaulin, 1999).

En effet, l'auteur définit deux ensembles A et B Le premier est l'ensemble admissible des valeurs possibles des paramètres incertains tandis que l'autre est celui des valeurs pour lesquelles le système est stable. Jaulin a défini un algorithme basé sur la théorie des intervalles qui permet de tester l'inclusion de A dans B synonyme d'une condition nécessaire et suffisante prouvant la stabilité. La convergence de l'algorithme est testée sur des exemples numériques de systèmes dynamiques.

d) Arithmétique des intervalles et analyse du comportement dynamique

Rauh a utilisé la méthode des intervalles pour analyser le comportement dynamique des systèmes. Une approche multi-modèle y est utilisée pour décrire un système frottant pour lequel l'auteur définit trois états suivant la nature du frottement, (Rauh, 2006). Un état si le frottement est statique et deux états si le frottement est dynamique. Les coefficients correspondant aux différents cas sont incertains et sont modélisés par des intervalles. Des méthodes d'intégration sont adaptées par l'auteur et sont utilisées pour analyser la dynamique du système. Rauh parvient à situer le comportement dynamique du système dans des zones dont les tailles dépendent des intervalles d'incertitudes. L'auteur soulève par le biais de ses résultats la limite majeure de la méthode des intervalles à savoir le phénomène de pessimisme qui désigne la surestimation des résultats. Cet inconvénient apparait lorsqu'un paramètre incertain intervient plusieurs fois dans la même fonction. L'arithmétique des intervalles ne tient pas compte des dépendances relatives à plusieurs occurrences d'un seul paramètre dans une fonction. Le phénomène de surestimation a été aussi observé dans l'étude menée par Ragot portant sur l'analyse robuste d'un système d'essuyage, (Ragot, 2007). L'objectif de cette étude était d'envelopper les cycles limites d'un double pendule dont le coefficient de frottement est incertain et modélisé par un intervalle. Le phénomène d'accumulation des surestimations provoquant la divergence des amplitudes des intervalles, a été observé par Ragot. Pour pallier à ces inconvénients, Cherrier a proposé une nouvelle méthode pour l'évaluation des bornes de l'état d'un sysème incertain, en utilisant la représentation des intervalles par leur centre et leur rayon et non plus par leurs bornes inférieures et supérieures. La divergence de l'encadrement est éliminée dans le cas linéaire, (Cherrier et al, 2003).

Qui et al ont utilisé l'approche par intervalle pour analyser les effets d'incertitudes paramétriques sur les réponses non linéaires de quelques exemples numériques de systèmes dynamiques dont les paramètres incertains sont modélisés par des intervalles. Le modèle de Taylor par intervalles est utilisé pour encadrer les réponses dynamiques. Les résultats d'une comparaison avec la méthode probabiliste de perturbation ont montré que l'encadrement des réponses, obtenu par l'approche par intervalle a englobé celles obtenues par l'approche probabiliste (Qui et al, 2009). Dans un cadre similaire mais plus général, Meslem et al ont adapté l'arithmétique des intervalles au problème de l'encadrement du flot d'état. Leur méthode est une approche de caractérisation efficace et garantie de l'espace d'état atteignable dans le cas des systèmes dynamiques continus incertains. Elle s'appuie sur les modèles de Taylor intervalles, (Lohner, 1987 ; Rihm, 1994 ; Nedialkov, 1999), pour la résolution des systèmes d'équations différentielles ordinaires et les théorèmes de comparaison des inégalités différentielles, en particulier le théorème de Muller. Une discrimination entre des systèmes coopératifs et des systèmes non coopératifs est établie. Deux algorithmes permettant de construire les états encadrant dans les deux cas sont définis, (Meslem et al, 2009).

e) Conclusion

L'arithmétique des intervalles offre l'avantage de pouvoir modéliser les incertitudes uniquement par leurs bornes physiques qui sont pour la plus part identifiables et mesurables. Aucune information

sur l'évolution de l'incertitude dans son intervalle n'est nécessaire, un point qui peut poser des contraintes de lecture une fois la propagation des incertitudes est effectuée. En effet, souvent on désire quantifier l'incertitude sur la sortie d'un modèle du point de vue statistique ou probabiliste. L'arithmétique des intervalles est inappropriée de ce point de vue. Par ailleurs, le problème du pessimisme générant un encadrement trop large des résultats jusqu'à la divergence reste la contrainte majeure à son développement.

1.4.4.2. Méthode à base de la logique floue

a) Principe

Les méthodes floues ont été introduites pour représenter et manipuler des données incertaines sans aucune information probabiliste ou statistique, (Zadeh, 1965). Elles sont basées sur la notion d'ensemble floue, (Jablonowsky, 1998). Un élément d'un ensemble flou, tel qu'une valeur d'entrée d'un modèle, possède un degré d'appartenance à cet ensemble. Cette notion, appelée formellement fonction d'appartenance, est différente dans le concept par rapport à celui connu en probabilité. Elle définit une mesure quantitative évasive sur des données imparfaites. Cette définition permet d'établir une logique floue associée à des degrés de vérités qui, assignés à des propositions, vont de zéro (faux) à un (vrai) avec toutes les graduations possibles ce qui donne lieu au vocabulaire, un peu, moyennement etc. L'application de la logique floue est ainsi très appropriée au raisonnement approximatif, (Isukapalli et Georgopoulos, 2001), particulièrement à l'analyse des systèmes où les incertitudes proviennent des imprécisions des données plutôt que du caractère aléatoire. A ce sujet, plusieurs études existent en littérature, (Wan et Ou, 1990 ; Murlidharan, 1991 ; Valliapan et Pham ; 1995 ; Cherki et al, 1997).

b) Logique floue et analyse des systèmes dynamiques

Lallemand étend la théorie des ensembles flous à l'analyse par éléments finis des structures mécaniques dont les propriétés matérielles sont incertaines, (Lallemand, et al, 1999). L'objectif de ce travail est de déterminer la sensibilité du comportement modale à plusieurs paramètres d'une structure plate. Le module de Young, le coefficient de Poisson et la densité sont modélisés par des nombres flous avec des fonctions d'appartenance. Un modèle élément fini flou est généré. Les équations sont résolues en utilisant la théorie des intervalles.

Fansen et Junyi ont appliqué le formalisme flou pour analyser le comportement dynamique d'une machine-outil sujette à des incertitudes paramétriques, (Fansen et Junyi, 1999). Les instabilités de type broutement (chatter) constituent un phénomène propre aux processus de découpage qu'une machine-outil est censée réaliser. Les deux auteurs relèvent le fait que les instabilités nommées résultent, en pratique, de l'interaction entre la dynamique du processus de découpage avec celle de la machine-outil. De ce fait, ils inscrivent leur étude dans la perspective de définir une démarche de conception robuste des machines- outils. Les conditions de stabilité de la dynamique du processus de découpage sont formulées littéralement en fonction des paramètres de conception de la machine-outil. En effet, il est stipulé que la stabilité du processus de découpage est bonne si la structure de la machine-outil est d'une grande rigidité et d'un coefficient d'amortissement suffisamment grand. Par ailleurs le processus de découpage doit être de faible rigidité. Cette forme de caractérisation de la stabilité a motivé l'utilisation du formalisme de la logique floue par Fansen et Junyi pour réaliser une analyse de

la dynamique de la structure de la machine dont les paramètres sont caractérisés par des variables floues. Dans le même registre, Noor a exploité le même formalisme pour déterminer la variabilité de la déformation non linéaire de panneaux composites, liée aux variations des paramètres géométriques et matériels des panneaux. Une analyse de sensibilité est réalisée pour déterminer les paramètres les plus influents. Ces derniers sont alors représentés par des variables floues par rapport auxquelles une analyse floue est effectuée pour estimer la variabilité de l'énergie de déformation des panneaux composite, (Noor et al, 2001). Qiu et Zhenyu ont proposé une nouvelle approche pour une analyse en éléments finis flous, (Qiu et Zhenyu, 2001). La méthode proposée est basée sur la notion d'entropie, fonction qui mesure le degré d'incertitude contenue dans une base de données. En utilisant cette fonction, les imprécisions de type flou sont transformées en incertitudes aléatoires. Le principe est de garder l'entropie invariable lors du passage à la représentation aléatoire. Suite à la transformation, les méthodes classiques telles que la technique de MC ou la perturbation peuvent être utilisées. La méthode proposée est testée sur une plaque carrée à coefficient d'élasticité incertain modélisé par une variable floue. L'objectif visé est de déterminer la limite du déplacement horizontal de la plaque lorsque celle-ci est soumise à une charge uniforme.

c) Conclusion

Le formalisme flou permet de manipuler des informations vagues, imprécises ou décrites de manière linguistique. Cette incertitude est décrite par des fonctions de forme appelée fonctions d'appartenance. L'avantage principal de cette modélisation et de ne pas nécessiter des informations statistiques ou probabilistes. La détermination de la fonction d'appartenance reste par contre une difficulté considérable. En effet, elle dépend des données expérimentales dont dispose l'utilisateur ce qui rapproche sa détermination d'une démarche statistique. La représentation des nombres flous se fait alors dans plusieurs cas en fonction de la perception qu'a l'utilisateur de l'incertitude chose qui entache la représentation par un caractère assez subjectif.

1.4.5. Approche basée sur la programmation sum of Square (SOS)

Les récents développements qu'a connus le domaine de la géométrie algébrique à travers notamment les travaux de Parrilo a ouvert le champs à plusieurs applications, particulièrement celle de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques, (Parrilo, 2000). La programmation sum of square (SOS) est, à la fois, un concept et un outil qui permet de résoudre des problèmes d'optimisation de fonctions polynomiales sujettes à des contraintes de types équations et/ou inéquations polynomiales. Cet outil s'est avéré très efficace sur le problème de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques polynomiaux. Elle permet en effet une construction plus systématique de fonctions de Lyapunov, une tâche qui n'est pas facile avec les méthodes classiques. Dans une étude récente, la progammation SOS a été utilisée pour analyser la contraction des systèmes dynamiques incertains (Aylward, 2008). La contraction est une autre forme de définition permettant d'appréhender la stabilité des systèmes dynamiques (Lohmiler et Slotine, 1998). Elle mesure l'indépendance de la dynamique des systèmes des conditions initiales. Cette mesure est définie par une matrice symétrique et définie positive dont les conditions d'existence et l'obtention sont données par des inéquations. La résolution des ces dernières est effectuée en utilisant la programmation SOS. Le calcul de la métrique de contraction est étendu au cas des systèmes dynamiques affines par rapport aux paramètres incertains. La méthode proposée permet de déterminer des intervalles pour les paramètres incertains où le système garde sa

propriété de contraction et donc sa stabilité (Aylward, 2008). L'utilisation de la méthode dans des cas physiques n'est pas encore répandue.

1.4.6. Conclusion

Les approches robustes présentées dans cette section sont basées sur des formalismes différents dans la façon d'incorporer les incertitudes. L'approche probabiliste est basée sur une caractérisation des incertitudes par des modèles probabilistes (de type lois de distributions). La méthode de MC est couramment utilisée puisqu'elle garanti de très bon résultats. Malgré cette garantie, la méthode de MC pose de sérieux problèmes en termes de coût puisqu' elle nécessite beaucoup de tirages pour assurer une précision raisonnable avec un niveau de confiance acceptable. La méthode de perturbation s'avère, quant à elle, inappropriée à traiter des problèmes dont les paramètres incertains possèdent des dispersions importantes. De tous ces points de vue, les méthodes basées sur le chaos polynomial offrent un intérêt indéniable puisque théoriquement, elles peuvent être associées, similairement aux méthodes de MC, aux problèmes de modélisation, de prédiction et d'analyse des comportement dynamiques des systèmes linéaires ou non linéaires avec des coûts très modestes pour des précisions et des niveaux de confiance du même ordre que ceux de la méthode de MC. Pour leur part, les méthodes possibilistes, en particulier la méthode des intervalles, offrent l'avantage de ne pas nécessiter des connaissances sur l'évolution de l'incertitude dans son intervalle de dispersion. Néanmoins, leurs applications aux problèmes de la modélisation et de prédiction des niveaux vibratoires restent sans succès notable. Les quelques travaux enregistrés se sont confrontés à de sévères difficultés numériques liées au phénomène du pessimisme concernant la méthode des intervalles et l'obtention des fonctions d'appartenance pour la méthode floue. Toutes ces considérations ont motivé notre choix d'opter pour l'utilisation de l'approche probabiliste basée sur le chaos polynomial pour modéliser, prédire et analyser le comportement des systèmes dynamiques frottants incertains.

1.5. Conclusion

Ce chapitre s'est vu attribué un double objectif. Le premier concerne l'établissement d'une synthèse bibliographique sur les systèmes frottants. Le choix du couplage de modes, en tant que mécanisme justifiant la genèse des instabilités dans les systèmes frottants est la première conclusion de ce chapitre. La grande sensibilité du comportement dynamique de ces systèmes envers les lois de frottements justifie et impose la prise en compte de la dispersion avérée des paramètres physiques associés à ces lois dans les procédés de modélisation et d'analyse. C'est autour de cette question qu'un état de l'art a été effectué dans une deuxième partie de ce chapitre. Une méthode probabiliste basée sur le concept du chaos polynomial y a été sélectionnée pour traiter de la modélisation et de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants. Ce choix a été effectué en prenant en compte les résultats, les avantages et les inconvénients des différentes méthodes relevées dans la littérature.

Chapitre 2 Stabilité des systèmes dynamiques non linéaires-théories

2.1. Introduction

Dans le chapitre précédent, il a été question, entre autres, de définir les modèles permettant d'expliquer les origines des instabilités de contact dans les systèmes frottants. Ce chapitre a pour objet de présenter et d'illustrer quelques outils permettant d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires, ces derniers incluant la classe particulière des systèmes frottants. Deux grands axes sont considérés à savoir : l'analyse de la stabilité des solutions d'équilibre et l'analyse de la stabilité des cycles limites. De part leurs efficacités, les théories de Lyapunov et de Floquet sont les formalismes sélectionnés pour traiter respectivement des deux types de stabilité. Tout d'abord, les approches directe et indirecte de Lyapunov sont rappelées. L'utilisation de la méthode directe de Lyapunov nécessitant la détermination de fonctions de Lyapunov, une nouvelle méthode de construction basée sur le concept de la programmation "Sum of Square (SOS)" est développée. Ensuite, un intérêt particulier est adressé à la stabilité des cycles limites. La méthode de la variété centrale, permettant un calcul plus simple des cycles limites, est initialement présentée. Les notions de matrice de monodromie et de multiplicateurs de Floquet, caractérisant la stabilité des cycles limites, sont alors définies. A noter que des notions et des concepts mathématiques, nécessaires à la compréhension, sont introduits tout au long du chapitre.

2.2. Stabilité des solutions d'équilibre

Avant de présenter les outils d'analyse de la stabilité des solutions non linéaires statiques, quelques définitions, concernant la classe des systèmes dynamiques non linéaires (2.1) décrits dans l'espace d'état, sont rappelées (Slotine, 1991 ; Nayfeh, 1995).

$$\dot{x} = f\left(x\right) \tag{2.1}$$

où $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un champ de vecteurs analytiques non linéaires.

La stabilité des systèmes dynamiques non linéaires (2.1) est liée aux notions de point d'équilibre et de flot dynamique.

Définition 2.2 : Le point d'équilibre x_e, appelé aussi point singulier, du système (2.1) est défini par la solution du problème non linéaire statique (2.2).

$$f\left(x_e\right) = 0 \tag{2.2}$$

Définition 2.3 : Soit $x(x_0,t)$, $x_0 \in D$, une solution du système (2.1) avec la condition initiale $x(0)=x_0$. Elle est définie sur l'intervalle de temps maximal $J(x) \subset \mathbb{R}$. Considérons l'ensemble W tel que : $W=\{(t,x_0)\in \mathbb{R}\times D, t\in J(x)\}$

On appelle flot dynamique du système (2.1) ou du champ de vecteur f, l'application φ,

$$\begin{aligned} \varphi :\ & W \to D \\ & (t,x_0) \mapsto \varphi_t(x_0) = x(x_0,t) \end{aligned} \quad ,$$

qui vérifie la propriété suivante :

$$\varphi_{s+t}(x_0) = \varphi_s \circ \varphi_t(x_0)\ ,\ \varphi_0(x_0) = x_0 \tag{2.3}$$

Deux définitions de la stabilité sont à noter, la stabilité au sens de Lyapunov (ISL pour In the Sens of Lyapunov) et la stabilité asymptotique.

Définition 2.4 : Le point d'équilibre x_e est stable au sens de Lyapunov, (voir figure (2.1. a)), si le système (2.1) maintient sa position tout prés de x_e lorsque celui-ci est perturbé, c'est-à-dire si pout toute condition initiale x_0 proche de l'équilibre x_e, le système (2.1) converge vers un état $x(x_0,t)=\varphi_t(x_0)$ dont la distance vis-à-vis du point d'équilibre reste bornée. Ceci se traduit mathématiquement par l'expression suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_t(x_0) - x_e\| < \varepsilon,\quad t \to \infty$$

Définition 2.5 : Le point d'équilibre x_e est asymptotiquement stable, (voir figure (2.1.b)), si pour toute condition initiale x_0 proche de l'équilibre x_e, le système converge, au bout d'un temps suffisamment long, vers la position d'équilibre. Cette définition se traduit aussi mathématiquement comme suit :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que : } \|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|\varphi_t(x_0) - x_e\| \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

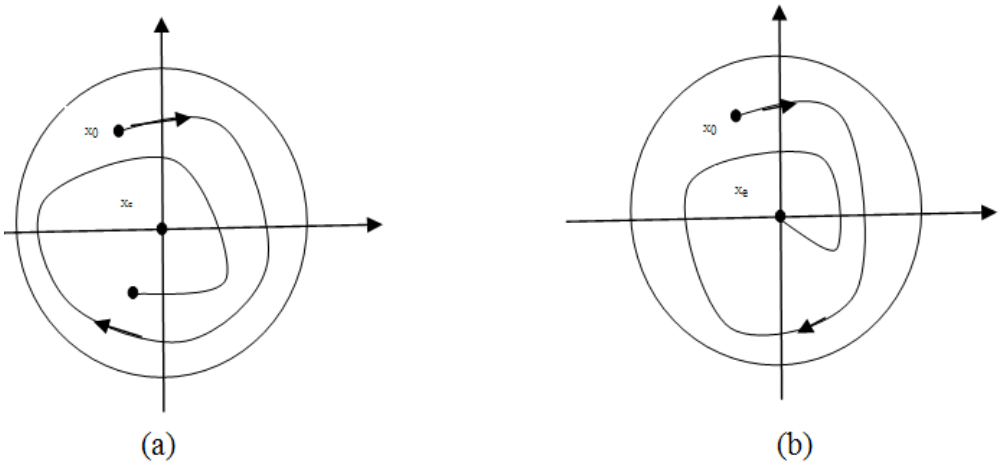


Fig.2. 1. Schématisation des types de stabilité : (a) stabilité ISL – (b) stabilité asymptotique

Des méthodes sont établies pour analyser la stabilité des systèmes (2.1). Avant de développer ces méthodes, quelques définitions sur la stabilité des systèmes linéaires sont rappelées.

2.2.1. Stabilité des systèmes linéaires

Le cas linéaire se définit par la situation particulière où f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ d'où

$$\dot{x} = f(x) = Ax \tag{2.4}$$

où A est une matrice à coefficients constants appartenant à $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Contrairement aux systèmes non linéaires pouvant posséder plusieurs points d'équilibre, les systèmes linéaires (2.4) possèdent l'origine $x=0$ comme seul point d'équilibre. Le flot dynamique de l'équation (2.4) est défini quant à lui par l'application $e^{At}:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. La solution de l'équation (2.4) est donnée par $x_0 e^{At}$, x_0 étant une condition initiale quelconque. Le comportement asymptotique de cette solution est complètement caractérisé par les valeurs propres de la matrice A comme l'énonce le théorème (2.1).

Théorème 2.1 : Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. Les valeurs propres de A sont à parties réelles strictement négatives.
b. Il existe des constantes *b* et *c* positives telles que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\left\| x_0 e^{At} \right\| \le b \left\| x_0 \right\| \mathrm{e}^{-ct}$$

c. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{t\to\infty} x_0 e^{At} = 0$

Définition 2.6 : Le point d'équilibre $x_e = 0$ est dit hyperbolique si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à parties réelles non nulles. Le flot correspondant est alors dit hyperbolique.

Le point d'équilibre $x_e = 0$ peut définir un puits si toutes les valeurs propres de la matrice A sont à partie réelle strictement négative, une source si toutes les valeurs propres sont à partie réelle strictement positive ou un col si les parties réelles ont des signes différents. Les puits sont des points de stabilité asymptotique tandis que les sources et les cols sont des points d'instabilité.

Soient P_j $(j = 1,...,n)$ les vecteurs propres correspondant aux valeurs propres $\lambda_j = a_j + ib_j$ de la matrice A et E^s, E^u, E^c les sous-espaces stable, instable et centré engendrés respectivement par les vecteurs propres P_j associés avec les parties réelles respectives $a_j < 0$, $a_j > 0$ et $a_j = 0$.

Théorème 2.2 : L'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose en somme directe des sous espaces E^s, E^u, E^c, invariants par le flot $e^{At} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ induit par A :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c$$

Dans le cas d'un flot hyperbolique, l'espace $\mathbb{R}^n$ se décompose en deux sous-espace invariants par le flot e^{At} :

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u$$

Le flot induit sur E^s est une contraction alors que le flot induit sur E^u définit une dilatation. Cette décomposition est unique.

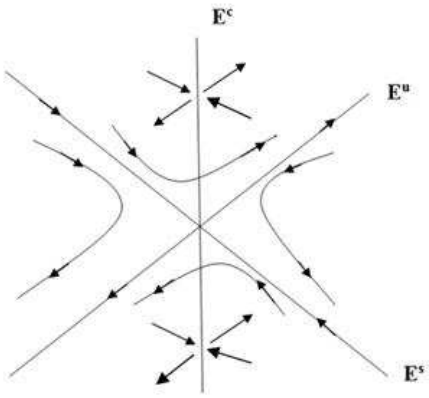


Fig.2. 2. Schématisation des espaces : centré, stable et instable

2.2.2. Stabilité des systèmes non linéaires

Comme souligné précédemment, la propriété de la stabilité des systèmes non linéaires (2.1) est liée à la notion de point d'équilibre, solution de l'équation statique (2.2). Plusieurs solutions peuvent exister donnant lieu à plusieurs points d'équilibre. L'analyse de la stabilité se fait pour chacun de ces points.

Deux approches principales sont définies pour traiter de la stabilité des solutions d'équilibre des systèmes dynamiques non linéaires (2.1). La première, appelée approche indirecte de Lyapunov, s'appuie sur l'analyse du système linéarisé autour du point d'équilibre x_e dont on veut analyser la stabilité. La deuxième s'appuie, quant à elle, sur l'analyse directe du système non linéaire en cherchant à lui construire une fonction de Lyapunov, une notion généralisant celle d'une fonction d'énergie. Cette procédure définie ce qu'on appelle l'approche directe de Lyapunov.

2.2.2.1. Méthode indirecte de Lyapunov

Deux techniques sont distinguées. La première est basée sur les valeurs propres, solutions du polynôme caractéristique, du système linéarisé (2.4). Le signe des parties réelles des valeurs propres caractérise la stabilité alors que la partie imaginaire offre une information sur les fréquences de d'instabilité. La deuxième technique utilise les coefficients du polynôme caractéristique pour définir le critère connu de Rooth-Hurwitz. Cette méthode offre l'avantage de ne pas nécessiter la résolution du polynôme caractéristique, une tâche connue pour sa complexité particulièrement dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Aucune information fréquentielle ne peut, par contre, être tirée via l'utilisation du critère de Rooth-Hurwitz. Le deuxième avantage de cette méthode est qu'elle permet de générer des expressions littérales des coefficients de Rooth-Hurwitz en fonction des paramètres du système non linéaire ce qui permet l'analyse paramétrique de la stabilité.

L'obtention du linéarisé du système (2.1) se fait en déterminant son approximation du premier ordre au voisinage d'un point d'équilibre x_e pour une perturbation δx. Cette approximation est donnée par le développement du premier ordre de Taylor suivant:

$$f\left(x_e+\delta x\right)=f\left(x_e\right)+\left.\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x}\right|_{x=x_e}\delta x+o\left(\delta x\right) \tag{2.5}$$

$$\delta\dot{x}\simeq Df_{x_e}\ \delta x \tag{2.6}$$

où $Df_{x_e}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_e}$ dénote la matrice Jacobienne du système (2.1) évaluée au point d'équilibre.

2.2.2.1.1. La stabilité par l'analyse des valeurs propres

La stabilité du point d'équilibre est analysée en utilisant les résultats du théorème (2.4) représentés aussi dans la figure (2.3).

Théorème 2.4: Etant donné x_e , un point d'équilibre du système (2.1) alors :

- **a.** Si toutes les valeurs propres de la matrice Df_{x_e} sont strictement dans le demi-plan complexe gauche alors x_e est asymptotiquement stable.
- **b.** S'il existe au moins une valeur propre de Df_{x_e} appartenant strictement au demi-plan complexe droit alors x_e est instable.
- **c.** Si toutes les valeurs propres de Df_{x_e} appartiennent strictement au demi-plan complexe gauche avec au moins une qui soit imaginaire pure ou nulle, alors on ne peut rien dire (le point d'équilibre x_e peut être stable, asymptotiquement stable ou instable).

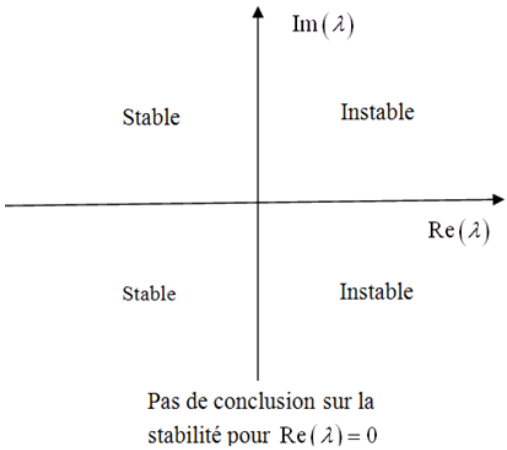


Fig.2. 3. La stabilité des systèmes non linéaires suivant la méthode indirecte de Lyapunov

Définition 2.7 : Si Df_{x_e} n'a pas de valeurs propres à partie réelles nulles alors le point d'équilibre x_e est dit hyperbolique.

Théorème 2.5 : Un point d'équilibre hyperbolique est soit asymptotiquement stable soit instable.

Les théorèmes (2.6) et (2.7) présentent des résultats justifiant l'usage du système linéarisé (2.4) pour analyser la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires (2.1).

Théorème 2.6 (Hartman-Grobman): Si x_e est un point d'équilibre hyperbolique de f alors il existe une application continue et inversible h (homéomorphisme) définie sur un voisinage U de x_e tel que, localement, $h \circ \varphi_t$ (φ_t flot non linéaire) suit les mêmes trajectoires que celles du flot linéaire $e^{\left(D_{x_e} f\right)t}$.

De façon analogue au cas des systèmes linéaires, des variétés locales stables et instables en x_e sont définies respectivement par E^s_{loc} et E^u_{loc} telles que :

$$E^s_{loc}\left(x_e\right) = \left\{x \in U \,/\, \varphi_t\left(x\right) \xrightarrow[t \to \infty]{} x_e \;,\; \varphi_t\left(x\right) \in U\right\}$$

$$E^u_{loc}\left(x_e\right) = \left\{x \in U \,/\, \varphi_t\left(x\right) \xrightarrow[t \to -\infty]{} x_e \;,\; \varphi_t\left(x\right) \in U\right\}$$

Théorème 2.7 (de la variété stable): Si x_e est un point d'équilibre hyperbolique de f, alors f est topologiquement équivalent à son linéarisé et l'homéomorphisme correspondant préserve le sens du parcours. En outre, il existe des variétés stables et instables locale de f, avec $\dim E^s_{loc}\left(x_e\right) = \dim\left(E^s\right)$ et $\dim E^u_{loc}\left(x_e\right) = \dim\left(E^u\right)$, tangentes en x_e à E^s et E^u.

Le théorème de la variété stable énoncé précédemment défini une décomposition valable uniquement dans le cas où l'équilibre est hyperbolique. Elle n'est pas complète dans le cas où la matrice Df_{x_e} possède des valeurs propres imaginaires pures. Ce cas fait l'objet du théorème de la variété centrale énoncé ci-dessous

Théorème 2.8 : (de la variété centrale) : Si le champ f est de classe C^r et admet x_e comme point d'équilibre, alors il admet des variétés stable, instable et centrale locales notées $E^s_{loc}\left(x_e\right), E^u_{loc}\left(x_e\right)$ et $E^c_{loc}\left(x_e\right)$ de classe C^r, C^r et C^{r-1} respectivement, tangentes en x_e à E^s, E^u et E^c.

Les variétés stable et instable $E^s_{loc}\left(x_e\right)$ et $E^u_{loc}\left(x_e\right)$ sont définies de manière unique alors que la variété centrale $E^c_{loc}\left(x_e\right)$ n'est pas nécessairement unique. Contrairement au fait que le comportement des trajectoires restant dans $E^s_{loc}\left(x_e\right)$ et $E^u_{loc}\left(x_e\right)$ est donné par le linéarisé tangent de f, le comportement des trajectoires restant localement dans la variété centrale $E^c_{loc}\left(x_e\right)$ est déterminé par les termes non linéaires de f.

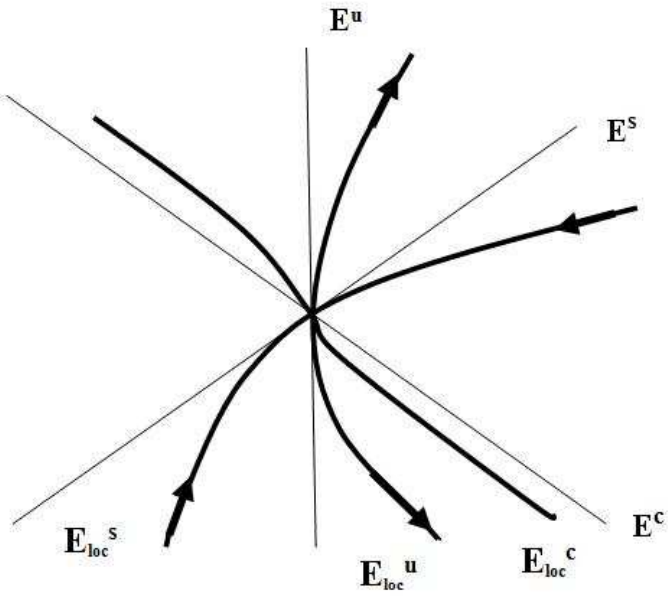


Fig.2. 4. Schématisation des espaces locaux : centré, stable et instable

2.2.2.1.2. La stabilité par le critère de Rooth-Hurwitz

Le critère de Rooth-Hurwitz pour l'analyse de la stabilité est une application du théorème 2.4, sans calcul des valeurs propres du linéarisé. La stabilité est analysée uniquement en examinant les coefficients du polynôme caractéristique correspondant au système linéarisé autour du point d'équilibre x_e .

L'équation caractéristique correspondant au linéarisé du système (2.1) est définie par :

$$\det\left(\lambda I_d - D_{x_e} f\right) = 0 \tag{2.7}$$

où I_d désigne la matrice identité et $\det$ le déterminant d'une matrice carrée.

De façon plus explicite, l'équation (2.7) est équivalente à l'équation (2.8).

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2.8}$$

L'application du critère de Rooth-Hurwitz nécessite la construction d'une matrice H définie à partir des coefficients du polynôme caractéristique de l'équation (2.8).

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

Les n mineurs de la matrice H sont désignés par les coefficients $H_{i(i=1,\ldots,n)}$ tel que :

$$H_1 = \det(a_1) = a_1$$

$$H_2 = \det\begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_3$$

$$\vdots$$

$$H_n = \det(H)$$

Critère de Rooth-Hurwitz :

Le critère de Routh-Hurwitz de la stabilité s'énonce alors comme suit :

1. Si tous les mineurs de la matrice H sont strictement positifs alors l'origine est asymptotiquement stable.
2. S'il existe un mineur négatif alors l'origine est instable.
3. S'il existe un mineur nul et que tous les autres sont positifs alors on ne peut conclure sur la stabilité de l'équilibre.

La limite principale de la méthode indirecte de Lyapunov est liée essentiellement au point (c) du théorème (2.4) et au point (3) du critère de Routh-Hurwitz, qui correspondent au cas des équilibres non hyperboliques dont la stabilité ne peut être conclue. Le recours à la méthode directe de Lyapunov dans cette situation devient nécessaire. Cette méthode peut être concluante là où la méthode indirecte est incertaine.

2.2.2.2. Méthode directe de Lyapunov

La méthode directe de Lyapunov offre une condition suffisante pour affirmer la stabilité d'une solution non linéaire statique (point d'équilibre). C'est, en effet, le cas s'il existe une fonction V, appelé fonction de Lyapunov définie positive sur un voisinage contenant le point l'équilibre tel que sa dérivée le long de la trajectoire du système soit définie négative.

Définition 2.8. : Une fonction scalaire $V : U \subset D \to \mathbb{R}$ est une fonction de Lyapunov candidate pour (2.1) si et seulement si :

d. $V(x)$ est continûment dérivable sur le domaine $U \subset D$ qui contient le point d'équilibre x_e

e. $V(x)$ est positive $\forall x \neq 0$

f. $V(0) = 0$

Théorème 2.9. Soit x_e l'équilibre du système (2.1) et $V(x)$ une fonction de Lyapunov candidate.

g. Si $-\dot{V}(x) = -\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) \geq 0, \forall x \in U$, alors x_e est un point d'équilibre localement stable.

h. Si $-\dot{V}(x) > 0 \ \forall x \in U$, alors x_e est un point d'équilibre localement asymptotiquement stable.

Dans les 2 cas (g, h), la fonction V est appelée fonction de Lyapunov du système (2.1).

Même si la méthode directe de Lyapunov formalisée par le théorème (2.9) constitue une véritable solution au problème de l'analyse de la stabilité cependant elle présente un inconvénient qui rend son utilisation difficile. En effet, en dehors de quelques méthodes à usage particulier telles que la méthode de Krasovski, la méthode d'Aizerman et la méthode du gradient, (Slotine, 1991), la méthode directe de Lyapunov n'offre pas de procédure systématique permettant la construction des fonctions de Lyapunov. Néanmoins, dans le cas particulier des systèmes dynamiques polynomiaux, de nouveaux outils mathématiques sont définis et utilisés pour construire des fonctions de Lyapunov polynomiales. Ces outils ont émergé de la théorie de la géométrie algébrique, plus particulièrement du concept de la programmation Sum Of Square (SOS), (Parrilo, 2000). Pour illustrer l'utilisation de cet outil d'optimisation dans le contexte de l'analyse de la stabilité et de la construction des fonctions de Lyapunov, des définitions ainsi que quelques généralités sont énoncées ci-après.

2.3. Décomposition Sum of Square (SOS)

L'approche programmation SOS offre un formalisme mathématique permettant d'analyser la positivité d'une fonction polynomiale à plusieurs variables.

Soit V une fonction polynomiale à plusieurs variables $x_1, ..., x_n$ de degré $2d$. Pratiquement, il n'existe pas de méthode systématique qui permet de se prononcer directement sur la positivité de la fonction V. Néanmoins, il existe une condition suffisante laquelle, une fois vérifiée, permet de l'affirmer. Cette condition consiste en l'existence d'une décomposition de V en une somme de carré d'autres fonctions polynomiales $V_1, V_2, ..., V_m$ d'où l'expression (2.10).

$$V(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{m} V_i^2(x_1, ..., x_n) \tag{2.10}$$

Une fonction V vérifiant la propriété (2.10) est dite SOS et positive définie d'où :

$$V\left(x_1,...,x_n\right) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{2.11}$$

La détermination de la décomposition (2.10) n'est pas une tache facile. Le résultat formalisé par le théorème suivant offre une un moyen très simple.

Théorème 2.10 : Une fonction polynomiale V est SOS s'il existe une matrice Q symétrique positive semi définie telle que :

$$V\left(x\right) = Z\left(x\right)^T Q \ Z\left(x\right) \tag{2.12}$$

où $Z\left(x\right)$ est le vecteur de tous les monômes de degrés inférieurs ou égale à $d = \deg\left(V\left(x\right)\right)/2$

La décomposition SOS de la fonction V s'obtient en utilisant le résultat du théorème (2.10) et en effectuant la décomposition de Cholesky de la matrice Q donnée par $Q = RR^T$, dont l'existence est garantie par la positivité de la matrice Q.

$$\begin{aligned} V\left(x\right) &= Z^T\left(x\right) Q\, Z\left(x\right) \\ &= Z^T\left(x\right) RR^T \ Z\left(x\right) \\ &= \sum_{i=1}^{q}\left(\sum_{i=1}^{q} r_{ij} z_j\right)^2 \end{aligned} \tag{2.13}$$

où q est le nombre de monômes dans le vecteur $Z\left(x\right)$ dont les éléments sont dénotés par z_j et r_{ij} sont les éléments de la matrice R.

En définitive, le calcul pratique de la décomposition SOS (2.10) se limite simplement à la détermination de la matrice Q. Pour mieux comprendre le principe, considérons le problème de tester la positivité de la fonction polynomiale (2.14).

$$V\left(x\right) = 2x_1^4 + 2x_1^3 x_2 - x_1^2 x_2^2 + 5x_2^4 \tag{2.14}$$

Le polynôme est quartique (*2d=4*). Donc d'après le Théorème (2.10), $V\left(x\right)$ est un polynôme SOS s'il existe une matrice Q symétrique et positive semi définie telle que :

$$V\left(x\right) = Z^T\left(x\right) Q \ Z\left(x\right) \tag{2.15}$$

avec $Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{12} & q_{22} & q_{23} \\ q_{13} & q_{23} & q_{33} \end{bmatrix}$ et $Z(x)=\begin{bmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_1x_2 \end{bmatrix}^T$. A noter que le fait que la fonction (2.14) ne comporte pas de constante et de termes linéaires, a permis de réduire la taille du vecteur $Z(x)$ en éliminant les monômes de degrés inférieurs à deux. Par conséquent la dimension de la matrice Q est réduite.

Le polynôme $V(x)$ peut être formulé en fonction des q_{ij}.

$$V(x)=q_{11}x_1^4+q_{22}x_2^4+(q_{33}+2q_{12})x_1^2x_2^2+2q_{13}x_1^3x_2+2q_{23}x_1x_2^3 \tag{2.16}$$

Les équations linéaires suivantes sont alors obtenues par identification.

$$q_{11}=2,\quad q_{22}=5,\quad q_{33}+2q_{12}=-1,\quad 2q_{13}=2,\quad 2q_{23}=0$$

$$(q_{33}+2q_{12}=-1)\Leftrightarrow(q_{33}=-1-2q_{12}) \tag{2.17}$$

L'équation (2.17) est due au fait que deux coefficients de la matrice Q correspondent au monôme $x_1^2x_2^2$. Un paramètre réel λ est alors introduit :

$$\begin{aligned} V(x)&=\begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & -\lambda & 1 \\ -\lambda & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1+2\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_1x_2 \end{bmatrix} \\ &=Z^T(x)Q(\lambda)Z(x) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Le problème consiste alors à déterminer λ de telle sorte à ce que la matrice $Q(\lambda)$ devienne positive semi définie, autrement dit à déterminer λ tel que

$$Q(\lambda)=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}+\lambda\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\geq 0$$

Une solution particulière est déterminée et correspond à la matrice :

$$Q=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}=R^TR,\ R=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi la décomposition SOS de la fonction (2.14) comme suit :

$$V(x) = Z^T(x) R^T R Z(x) = \frac{1}{2}\left(2x_1^2 - 3x_2^2 + x_1 x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2^2 + 3x_1 x_2\right)^2$$

En général, pour un cas plus complexe, (Parillo, 2000), le problème serait de chercher les paramètres réels λ_i tels que :

$$Q(\lambda) = Q_0 + \sum \lambda_i \, Q_i \geq 0 \tag{2.19}$$

2.3.1. Programme Sum of Square

Un programme SOS définit un problème d'optimisation d'une fonction sous des contraintes polynomiales. La forme générale de ce type de programme est donnée comme suit, (Parillo, 2000 ; Papachristodoulou et Prajna, 2002).

$$\begin{cases} \min_y \quad c_1 y_1 + \cdots + c_q y_q \\ tel\ que \quad P_i(x, y) \ \ SOS \ \ i = 1, \ldots, \widehat{N} \end{cases} \tag{2.20}$$

où les variables y_i sont réelles, les c_i sont des constantes données, $x = [x_1, \ldots x_n]^T$, $y = [y_1, \ldots y_q]^T$ et $P_i(x, y) = C_i(x) + y_{i1} A_{i1}(x) + \cdots + y_q A_{iq}(x)$ avec C_i et A_{ij} sont des polynômes en x_i.

- **Problème d'admissibilité (feasibility problem)**

Les problèmes d'admissibilité constituent des cas particuliers des programmes SOS où généralement il n'existe pas de fonctionnelles à optimiser. Un exemple de ce type de problème est formulé comme suit :

- Déterminer des polynômes $p_i(x)$ pour $i = 1, \ldots, \widehat{N}$ tels que les polynômes

$$A_{0,j}(x) + \sum_{i=1}^{\hat{N}} p_i(x) A_{i,j}(x) \quad (j = 1, \ldots, q)$$, soient des polynômes SOS.

L'avantage avec les programmes SOS est relatif à l'existence de supports logiciels de résolution. Les plus importants sont Yalmip, (Lofberg, 2004) et Sostools, (Papachristodoulou et Prajna, 2002 ; 2005). De ce fait, plusieurs applications utilisant la programmation SOS ont été développées particulièrement dans le contexte de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. Ce volet est présenté dans ce qui suit.

2.3.2. Application à l'analyse de la stabilité

L'analyse de la stabilité par la méthode directe de Lyapunov utilisant la programmation SOS consiste à remplacer les conditions de positivité (e) et (g) respectivement de la définition (2.8) et du Théorème (2.9) par des contraintes de type SOS sur la fonction de Lyapunov $V(x)$ et sa dérivée $\dot{V}(x)$. Cette méthode s'applique exclusivement aux systèmes dynamiques polynomiaux. Le champ de vecteurs définissant le système (2.1) est par conséquent supposé polynomial et la fonction de Lyapunov $V(x)$ est polynomiale. Ainsi pour les systèmes (2.1), les conditions {(e), (g)} sont reformulées comme suit :

i) $V(x)-\varphi_1(x)$ est SOS

j) $-\dfrac{\partial V}{\partial x} f(x)$ est SOS

où $\varphi_1(x)$ est une fonction polynômiale strictement définie positive introduite pour assurer la stricte positivité de la fonction $V(x)$ c'est-à-dire garantir les conditions (e) et (f). Un choix simple de $\varphi_1(x)$ est donné par l'expression (2.21), (Parrilo, 2000 ; Papachristodoulou et Prajna, 2002 ; 2005).

$$\varphi_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}x_i^{2j} \tag{2.21}$$

où, $2d$ est le degré de $V(x)$, $\sum_{j=1}^{d}\varepsilon_{ij}>\gamma$, γ étant un nombre positif et $\varepsilon_{ij}\geq 0$ sont des constantes pour tout i, j.

Les conditions (i) et (j), une fois vérifiées, vont permettre de statuer sur la stabilité du système (2.1). Son caractère asymptotique n'est, par contre, pas pris en compte. En remplaçant la condition (j), par (k) donnée ci-après, la stabilité asymptotique peut être analysée, (Zachary, 2001).

k) $-\left(\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)+\varphi_2(x)\right)$ SOS

où $\varphi_2(x)$ est une fonction définie positive.

Remarque 2.1. La construction d'une fonction de Lyapunov conformément aux différentes contraintes de type SOS correspond bien à un problème d'admissibilité.

2.3.2.1. Construction pratique de fonction de Lyapunov

Pour mieux comprendre la méthodologie de construction des fonctions de Lyapunov en utilisant les conditions SOS, l'exemple d'une construction d'une fonction de Lyapunov quadratique pour le système dynamique (2.22), est développée.

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_{11}x_1^2 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_2^2 + c_{11}x_1^3 + c_{12}x_1^2x_2 + c_{13}x_1x_2^2 + c_{14}x_2^3 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_{21}x_1^2 + b_{22}x_1x_2 + b_{23}x_2^2 + c_{21}x_1^3 + c_{22}x_1^2x_2 + c_{23}x_1x_2^2 + c_{24}x_2^3\end{aligned} \tag{2.22}$$

L'origine est un point d'équilibre du système (2 .22).

Considérons le cas où on cherche à construire une fonction $V(x)$ quadratique. Puisque $V(x)$ doit être strictement définie positive, alors elle ne doit contenir ni des constantes (pour vérifier la condition (f)), ni des termes linéaires (pour vérifier la condition (e)). La fonction $V(x)$ peut alors être écrite comme suit :

$$V(x) = d_{20}\, x_1^2 + d_{11}\, x_1x_2 + d_{02}\, x_2^2 \tag{2.23}$$

De façon équivalente, $V(x)$ peut être réexprimée par une représentation SOS comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} Z^T(x) Q Z(x) \tag{2.24}$$

où $Z(x)$ est le vecteur de monômes de degré inférieur ou égal à $\deg(V(x))/2$ et $Q = \begin{bmatrix} 2d_{20} & d_{11} \\ d_{11} & 2d_{02} \end{bmatrix}$.

La condition pour l'existence de la décomposition SOS de $V(x)$ est d'avoir $Q \geq 0$.

Le calcul de la dérivée de la fonction $V(x)$ permet d'obtenir la fonction polynomiale du quatrième degré suivante :

$$\dot{V}(x) = t_{20}x_1^2 + t_{11}x_1x_2 + t_{02}x_2^2 + t_{30}x_1^3 + t_{21}x_1^2x_2 + t_{03}x_2^3 + t_{40}x_1^4 + t_{31}x_1^3x_2 + t_{22}x_1^2x_2^2 + t_{13}x_1x_2^3 + t_{04}x_2^4 \tag{2.25}$$

Les t_{ij} dans l'expression (2.25) sont des fonctions linéaires des coefficients de $V(x)$, pondérés par les coefficients du système dynamique (2.22).

$$t_{02} = 2d_{02}a_{22} + d_{11}a_{12},\ \ t_{03} = 2d_{02}b_{23} + d_{11}b_{13},\ \ t_{04} = 2d_{02}c_{24} + d_{11}c_{14},\ \ t_{11} = d_{11}a_{11} + d_{11}a_{22} + 2d_{20}a_{12} + 2d_{02}a_{21},$$
$$t_{12} = 2d_{20}b_{13} + d_{11}b_{12} + d_{11}b_{23} + 2d_{02}b_{22},\ \ t_{13} = 2d_{20}c_{14} + d_{11}c_{13} + d_{11}c_{24} + 2d_{02}c_{23},\ \ t_{20} = 2d_{20}a_{11} + d_{11}a_{21},$$
$$t_{21} = 2d_{20}b_{12} + d_{11}b_{11} + d_{11}b_{22} + 2d_{02}b_{21},\ \ t_{22} = 2d_{20}c_{13} + d_{11}c_{12} + d_{11}c_{23} + 2d_{02}c_{22},\ \ t_{30} = 2d_{20}b_{11} + d_{11}b_{21},$$
$$t_{31} = 2d_{20}c_{12} + d_{11}c_{11} + d_{11}c_{22} + 2d_{02}c_{21},\ \ t_{40} = 2d_{20}c_{11} + d_{11}c_{21}$$

La représentation SOS de la fonction dérivée $\dot{V}(x)$ est alors donnée comme suit :

$$\dot{V}(x) = -\frac{1}{2}\bar{Z}^T(x)\bar{Z}W(x) \tag{2.26}$$

$\bar{Z}(x)$ est le vecteur de tous les monômes de degré inférieur ou égal à 2 tandis que G est donnée par la matrice (2.27).

$$G = \begin{bmatrix} 2t_{20} & t_{30} & t_{21}+\mu_1 & t_{12}+\mu_2 & t_{11} \\ t_{30} & 2t_{40} & t_{31} & -\mu_3 & -\mu_1 \\ t_{21}+\mu_1 & t_{31} & 2t_{22}+2\mu_3 & t_{13} & -\mu_2 \\ t_{12}+\mu_2 & -\mu_3 & t_{13} & 2t_{04} & t_{03} \\ t_{11} & -\mu_1 & -\mu_2 & t_{03} & 2t_{02} \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

où les μ_i sont des paramètres réels arbitraires.

En remplaçant, dans (2.27), les t_{ij} par leurs expressions obtenues précédemment, la matrice G sera dépendante uniquement des paramètres du système (2.22), des coefficients de la fonction de Lyapunov ainsi que des paramètres μ_i.

Conformément au Théorème 2.9, l'origine est stable si et seulement si $\dot{V}(x) \le 0$. De manière équivalente, l'origine est stable si la matrice donnée par (2.27) est positive semi définie : $G \ge 0$ d'où la condition SOS. Le problème se résume alors à déterminer les coefficients d_{20}, d_{11}, d_{02} et les paramètres μ_i tels que $Q > 0$ et $G \ge 0$ (même principe dans l'équation (2.19). C'est un problème d'admissibilité (feasibility) pouvant être implémenté et résolu en utilisant la boite à outils Sostools. A noter que pour des systèmes dynamiques polynomiaux plus complexes, le problème devient de taille plus importante, seule contrainte de la méthode.

2.4. Conclusion sur les méthodes d'analyse de la stabilité

Il a été question jusqu'ici de l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. L'approche de Lyapunov est présentée. La méthode indirecte permet d'analyser la stabilité des équilibres statiques en passant par les approximations linéaires. Cette méthode, bien qu'elle soit très utilisée en pratique, n'est concluante que dans le cas des équilibres hyperboliques caractérisés par l'absence de valeurs propres imaginaires pures. De ce point de vu, la méthode directe de Lyapunov est la plus indiquée. Cette méthode est plus générale puisqu'elle permet de conclure sur la stabilité des points d'équilibre hyperboliques et non hyperbolique en construisant des fonctions de Lyapunov. Son inconvénient est lié par contre au fait qu'elle n'est pas concluante dans le cas où aucune fonction de Lyapunov n'est déterminée. Ces méthodes sont exploitées plus tard dans le quatrième chapitre en combinaison avec des méthodes de prise en compte des incertitudes pour l'analyse robuste de la stabilité des systèmes frottants incertains.

2.5. Etude des cycles limites

2.5.1. Notion de bifurcation de Hopf et de cycle limite

En pratique, les systèmes dynamiques non linéaires auxquels on s'intéresse sont dépendants d'un ensemble de paramètres réels $\mu \in \mathbb{R}^l$. Cette classe de systèmes est décrite par la donnée du champ de vecteurs f supposé dérivable par rapport à μ. Le cas étudié porte, sans perte de généralité, sur le cas où $\mu \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ (x, \mu) &\mapsto f(x, \mu) \end{aligned} \tag{2.28}$$

et

$$\dot{x} = f(x, \mu) \tag{2.29}$$

Le comportement dynamique du système (2.29) peut subir, selon la variation du paramètre μ, des changements qualitatifs des caractéristiques de son portrait de phase. On parle alors de bifurcation introduite, au sens large, par Poincaré (Nayfeh, 1995) pour désigner des variations telles qu'un changement de la position et/ou le nombre de points d'équilibre. Ces modifications impliquent nécessairement des changements qualitatifs sur le comportement dynamique à savoir essentiellement, la stabilité. Lorsque ces changements ont lieu au voisinage d'un point stationnaire ou d'une orbite stationnaire, on parle de bifurcations locales désignant des situations où le comportement des solutions stationnaires où périodiques passent d'un état stable à un état instable ou inversement. Les valeurs du paramètre μ engendrant ces transformations sont dites valeurs critiques ou valeurs de bifurcation. Elles peuvent être détectées et analysées entièrement à travers l'analyse des changements des caractéristiques de la stabilité. La bifurcation de Hopf en est un exemple. En effet, au voisinage d'une bifurcation de Hopf, un point d'équilibre d'un système (2.29) perd sa stabilité asymptotique tel que démontré par le théorème suivant:

Théorème 2.12 (de Hopf): Le système (2.29) admet une bifurcation de Hopf au point (x_e, μ_0) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. $f(x_e, \mu_0) = 0$
2. La matrice Df_x admet une paire de valeurs propres imaginaires pures $\lambda = \pm i w_c$ parmi d'autres valeurs propres toutes à parties réelles non nulles négatives.
3. $\left.\frac{d}{d\mu}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda(\mu)\right)\right)\right|_{\mu=\mu_0} \neq 0$

Hopf a démontré que pour des systèmes (2.29) et pour $\mu > \mu_0$ (ou $\mu < \mu_0$), il existe un état stationnaire d'oscillations périodiques caractérisé dans le plan de phase par une courbe fermée et isolée qu'on appelle cycle limite si en $\mu = \mu_0$, le système (3.29) bifurque et passe de manière soudaine d'un caractère stable à un caractère instable.

2.5.2. Calcul des cycles limites

2.5.2.1. Calcul par intégration temporelle des équations différentielles

La méthode courante utilisée pour calculer les solutions périodiques est basée sur l'intégration temporelle. Celle-ci est, en effet, l'outil de base permettant la résolution des équations différentielles. L'obtention d'une solution s'effectue en intégrant, pas à pas, les équations différentielles régissant la solution à partir d'une condition initiale quelconque jusqu'à atteindre le régime permanent. En mécanique, les équations sont celles du mouvement : équations différentielles ordinaires temporelles du second ordre, de forme générale donnée par (2.30), très souvent obtenues via des procédures de discrétisation (comme la méthode des éléments finis ou la méthode de différence finie) des équations différentielles partielles spatio-temporelles générées par l'application des lois fondamentales de la mécanique des milieux continus.

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = F_{NL}\left(X(t), \dot{X}(t)\right) \tag{2.30}$$

où *M, C et K* désignent respectivement les matrices masse, raideur et amortissement tandis que F_{Nl} dénote le vecteur des forces non linéaires.

Les équations (2.30) sont fréquemment exprimées dans l'espace d'état et sont ainsi ramenées à des équations différentielles (2.31) du premier ordre. Cette opération permet d'exploiter les nombreux intégrateurs du premier ordre existants. La diminution de l'ordre des équations (2.30) a pour conséquence l'augmentation de la taille du système d'équations (2.31).

$$\begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \ddot{X}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_d \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X(t) \\ \dot{X}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_{NL}\left(X(t)\right) \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

La résolution du système (2.31) par intégration revient à déterminer le vecteur $\left[X(t)\ \ \dot{X}(t)\right]^T$ vérifiant les équations en plusieurs instants consécutifs t_k à partir d'un instant initial t_0 jusqu'à un instant final t_f. Plusieurs schémas d'intégration existent. Celui de Newmark, basé sur les différences finies, et celui de Runge-Kutta, basé sur le développement de Taylor, sont très répondus. Pour une lecture plus approfondis sur ces méthodes, on conseille la lecture de, Hairer et Wanner, (2002).

2.5.2.2. Calcul par intégration temporelle des équations différentielles de taille réduite

En dépit de leur simplicité, leur généralité (possibilité d'application à une gamme très générale de système dynamique) ainsi que leur implémentation facile, les méthodes d'intégration entrainent des coûts prohibitifs particulièrement lorsque les systèmes à intégrer sont à grand nombre de degrés de liberté, non linéaires et faiblement amortis. Le calcul des cycles limites des systèmes dynamiques non linéaire est un exemple très connu pour son coût exorbitant. Pour y remédier, des méthodes diverses sont proposées soit, pour diminuer le nombre de degrés de liberté du système différentiel soit, pour simplifier ses non-linéarités, le tout pour un calcul plus rapide et plus efficace. A ce sujet, un état de l'art très intéressant est présenté dans l'étude de Sinou dans laquelle un important recueil de références bibliographiques figure (Sinou, 2004). La méthode de la variété centrale qui fait partie des méthodes de réduction des systèmes dynamiques non linéaires va maintenant être présentée.

2.5.2.2.1. Méthode de la variété centrale

Comme mentionné précédemment, il a été montré que pour des systèmes (2.29) au voisinage du point de bifurcation de Hopf, il existe un cycle limite pour $\mu > \mu_0$ si en $\mu = \mu_0$, le système (3.34) bifurque et passe de manière soudaine d'un caractère stable à un caractère instable. Le calcul des cycles limites au voisinage des bifurcations de Hopf est d'un intérêt important pour les industriels (Sinou, 2006a, 2006b). En effet, il est nécessaire de pouvoir prédire les niveaux vibratoires aux frontières de la stabilité pour déterminer s'ils peuvent être négligés où, au contraire, sont nocifs aux performances du système qui les subit. La méthode de la variété centrale est présentée dans beaucoup d'études comme étant une technique puissante permettant un calcul moins coûteux des cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf, (Carr, 1981). Basée sur le théorème de la variété centrale (Marsden et McCraken, 1976), la méthode offre une méthodologie efficace permettant de réduire le nombre d'équations différentielles en exprimant les variétés stables en fonction des variétés centrées qui, elles seules, caractérisent le comportement dynamique au voisinage de la bifurcation de Hopf. Le calcul des solutions périodiques s'y trouve ainsi considérablement simplifié (Sinou, 2004). La méthode est par contre applicable uniquement dans le cas des dynamiques polynomiales, un fait qui n'est pas restrictif puisque tout système analytique non linéaire peut être approximé par un système polynomial en utilisant le développement de Taylor. La méthode de la variété centrale est présentée dans ce qui suit.

2.5.2.2.2. Principe de la méthode de la variété centrale

La méthode de la variété centrale exploite le fait qu'au voisinage du point de bifurcation de Hopf, les caractéristiques essentielles du système dynamique (2.29) sont gouvernées par sa variété centrale engendrée par la dynamique des pôles imaginaires purs. Elle considère uniquement les systèmes dynamiques polynomiaux ce qui force à supposer que le système (2.29) comporte uniquement des non linéarités polynomiales.

Le cas où l'origine est un point d'équilibre du système (2.29) est considéré. Dans un autre cas, l'équilibre peut toujours être ramené à l'origine par une translation.

L'écriture du système (2.29) peut être réorganisée sous la forme équivalente suivante :

$$\dot{x} = A(\mu)x + F(x,\mu) \tag{2.32}$$

où $A(\mu) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et F est un vecteur de fonctions non linéaires polynomiales.

Au point de bifurcation de Hopf, le système (2.32) peut être mis sous forme canonique (2.34) en appliquant la transformation linéaire de base (2.33).

$$x = T\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

où $T = \left[T_1,...,T_{n_c},T_{n_c+1},\ldots,T_n\right]$, $T_1,...,T_{n_c}$ et $T_{n_c+1},\ldots,T_n$ désignant respectivement les vecteurs propres correspondant aux n_c valeurs propres $\left(\lambda_{i(i=1,...,n_c)}\right)$ imaginaires pures de $A(\mu_0)$ et les vecteurs propres correspondant aux $n-n_c$ valeurs propres $\left(\lambda_{i(i=n_c+1,...,n)}\right)$ de $A(\mu_0)$ ayant des parties réelles négatives, μ_0 étant la valeur de bifurcation de Hopf.

La forme canonique est la suivante:

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c y + F_c(y,z) \\ \dot{z} = A_s z + F_s(y,z) \end{cases} \tag{2.34}$$

où $y \in \mathbb{R}^{n_c}$ et $z \in \mathbb{R}^{n_s}$, $n = n_c + n_s$, $A_c = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n_c} \end{bmatrix}$, $A_s = \begin{bmatrix} \lambda_{n_c+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} F_c(y,z) \\ F_s(y,z) \end{bmatrix} = T^{-1}F\left(T\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}\right)$ avec $F_c(y,z), F_s(y,z)$ sont des vecteurs de fonctions polynomiales d'ordre supérieur à un, vérifiant : $F_c(0,0)=0$, $F_s(0,0)=0$. De plus les matrices Jacobiennes $D_{(y,z)}F_c(0,0)$ et $D_{(y,z)}F_c(0,0)$ sont nulles.

Théorème 2.13 : Il existe une variété centrale locale continûment différentiable W_{loc}^{c} définie par :

$$W_{loc}^{c}(0)=\left\{(y,z)/z=h(y),\|y\|<\delta,h(0)=0,D_{y}h(0)=0\right\} \tag{2.35}$$

tel que la dynamique du système (2.34) se ramène à celle du système d'ordre réduit suivant :

$$\dot{y}=A_{c}y+F_{c}\left(y,h(y)\right) \tag{2.36}$$

Le théorème (2.13) pose le problème de déterminer la fonction h. Dans cette perspective, il suffit d'exploiter la dérivée donnée par $\dot{z}=D_{y}h(y)\dot{y}$ et d'y substituer $\dot{y}$ par son expression définie dans le système (2.34). Ceci conduit systématiquement au système d'équations algébriques (2.37).

$$\left(D_{y}h\right).\left(A_{c}y+F_{c}\left(y,h(y)\right)\right)=A_{s}h(y)+F_{s}\left(y,h(y)\right) \tag{2.37}$$

La solution du système (2.37) et par même l'obtention de l'expression exacte de h est difficile. Elle est, par conséquent, approximée. L'idée est de la poser sous forme polynomiale d'un degré fixé a priori, sans termes constants et sans termes linéaires pour vérifier les propriétés de la variété centrale données dans (2.35). Le regroupement des termes de même puissance par rapport à y dans (2.37) permet de générer un système d'équations algébriques dont les inconnues sont les coefficients du polynôme approximant la variété centrale h.

Un des intérêts du système (2.36) est qu'il peut être utilisé pour une analyse plus simple de la stabilité du système (2.34) et ainsi du système (2.32) grâce au théorème d'Henry et Carr énoncé ci-dessous.

Théorème 2. 14 : Si l'origine du système (2.36) est localement asymptotiquement stable (respectivement instable) alors l'origine du système (2.34) est localement asymptotiquement stable (respectivement instable). L'origine du système (2.32) est aussi asymptotiquement stable (respectivement instable).

Un deuxième intérêt du système (2.37) est lié à la possibilité de l'utiliser pour déterminer les cycles limites du système (2.29) au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Dans cette optique, une extension du théorème de la variété centrale est définie pour le système (2.34) en considérant au voisinage du point de bifurcation de Hopf défini par $\tilde{\mu}=\mu_{0}(1+\varepsilon)$, $\varepsilon<<1$ et dans lequel les cycles limites seront recherchés, la dynamique augmentée décrite par le système (2.38).

$$\begin{cases}\dot{y}=A_{c}(\tilde{\mu})y+F_{c}(y,z,\tilde{\mu})\\ \dot{z}=A_{s}(\mu)z+F_{s}(y,z,\tilde{\mu})\\ \dot{\tilde{\mu}}=0\end{cases} \tag{2.38}$$

L'extension de du théorème (2.14) est alors formalisée comme suit :

Théorème 2.15 : Il existe une variété centrale locale W_{loc}^{c} telle que :

$$W_{loc}^{c}(0,0)=\left\{(y,\tilde{\mu},z)/\,z=h(y,\tilde{\mu}),\|y\|<\delta,\|\tilde{\mu}\|<\delta',h(0,0)=0,D_{y,\tilde{\mu}}h(0,0)=0\right\} \quad (2.39)$$

dans laquelle la dynamique du système (2.39) se réduit à celle du système (2.40) suivant :

$$\begin{cases}\dot{y}=A_c(\tilde{\mu})\,y+F_c\left(y,h(y,\tilde{\mu}),\tilde{\mu}\right)\\ \dot{\tilde{\mu}}=0\end{cases} \quad (2.40)$$

Le Théorème (2.15) permet de prendre en compte la participation du paramètre $\tilde{\mu}$ pour la détermination de la variété centrale définie par la fonction h. Le calcul de cette fonction obéit aux mêmes considérations décrites précédemment et se fait donc en utilisant la même procédure. Les détails techniques sur cette procédure sont développés dans l'annexe A.

La méthode de la variété centrale permet donc de générer un système de dimension réduite de la forme (2.40) dont l'intégration permet de déterminer efficacement, au voisinage des valeurs de bifurcation de Hopf, les cycles limites des systèmes dynamiques du type (2.29). C'est donc le deuxième intérêt de la méthode de la variété centrale.

2.6. Stabilité des cycles limites

La manière par laquelle une perturbation agit sur l'évolution d'un cycle limite lui définit, de façon similaire aux points d'équilibre, deux états possibles à savoir : un état stable et un autre instable. Ces deux cas sont schématisés dans la figure (2.4).

Définition 2.9 : Une orbite C fermée du système (2.1) est stable si et seulement si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0 \text{ tel que, } dist(x,C)<\delta\Rightarrow dist\left(\varphi_t(x),C\right)<\varepsilon\ ,\forall t\geq 0$$

Définition 2. 10 : Une orbite C fermée du système (2.1) est asymptotiquement stable si et seulement si :

$$\exists\delta>0 \text{ tel que, } dist(x,C)<\delta\Rightarrow\lim_{t\to\infty}dist\left(\varphi_t(x),C\right)=0$$

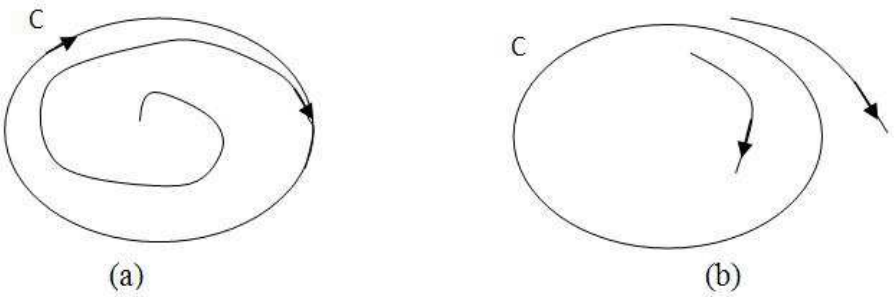


Fig.2. 5. (a) Cycle limite stable – (b) cycle limite instable

Remarque 2.2. Dans le cas particulier des bifurcations de Hopf, le théorème de Hopf démontre l'existence d'un cycle limite au voisinage de μ_0 si en $\mu = \mu_0$ le système (2.29) passe de manière soudaine d'un caractère stable à un caractère instable. La stabilité du cycle limite définit deux types de bifurcation de Hopf, sous-critique et sub-critique. La première se dit du cas où le cycle limite généré est stable et sub-critique dans le cas inverse.

2.6.1. Matrice de monodromie

L'analyse de la stabilité d'une solution périodique revient à prédire son évolution lorsqu'elle est sujette à une perturbation. Deux méthodes principales sont définies dans cette perspective. La première est basée sur la notion de section de Poincaré. La seconde est basée sur la théorie de Floquet et plus particulièrement sur la notion de matrice de monodromie (définie ci-après) dont les valeurs propres déterminent la stabilité (Nayfeh, 1995). Nous présentons, dans ce qui suit, uniquement la méthode d'analyse de Floquet.

Soit $\varphi\left(t, x_0^*\right)$ la trajectoire correspondant à la solution périodique $x^*\left(t\right)$ de période T du système (2.1). Sa stabilité est analysée en évaluant, après une période T, sa distance par rapport à la trajectoire correspondant à la condition initiale perturbée $x_0^* + \delta x_0$. L'écart entre les deux trajectoires est donné par l'expression :

$$\delta x\left(t\right) = \varphi\left(t, x_0^* + \delta x_0\right) - \varphi\left(t, x_0^*\right) \tag{2.41}$$

De façon équivalente, après une période :

$$\delta x\left(T\right) = \varphi\left(T, x_0^* + \delta x_0\right) - \varphi\left(T, x_0^*\right) \tag{2.42}$$

Du développement de Taylor du premier ordre de (2.42) autour de x_0^* résulte l'expression (2.43) définissant l'écart à $t = T$ entre les deux trajectoires en fonction de l'écart initial.

$$\delta x(T) = B\,\delta x_0 \tag{2.43}$$

où
$$\mathrm{B} = \frac{\partial \varphi\left(T, x_0^*\right)}{\partial x_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_0^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^1} & \cdots & \frac{\partial \varphi^n}{\partial x_0^n} \end{bmatrix}$$

x_0^i, φ^i $(i = 1, ..., n)$ représentent respectivement la ième composante de x_0 et de φ.

Les propriétés de la matrice B, appelée matrice de monodromie, décideront de la stabilité de la solution périodique $\varphi\left(t, x_0^*\right)$ puisque l'amortissement ou la croissance de la perturbation initiale va en dépendre.

Etant donné que $\varphi(t, x_0)$ est une trajectoire du système (2.1) (x_0 est la condition initiale), $\varphi(t, x_0)$ vérifie aussi (2.1). Nous avons donc :

$$\frac{d\varphi(t, x_0)}{dt} = f\left(\varphi(t, x_0), \mu\right) \tag{2.44}$$

De la différentiation de l'équation (2.44) par rapport à la condition initiale x_0 résulte l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0} = \frac{\partial f\left(\varphi(t, x_0), \mu\right)}{\partial \varphi(t, x_0)}\frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0} \tag{2.45}$$

En remarquant que $\frac{\partial \varphi(0, x_0)}{\partial x_0} = I_d$, il advient que la matrice de monodromie B est identique à la matrice $\Upsilon(T)$ où $\Upsilon(t) = \frac{\partial \varphi(t, x_0)}{\partial x_0}$ vérifie l'équation différentielle (2.46) et les propriétés (i) et (ii).

$$\frac{d\Upsilon(t)}{dt} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}\Upsilon(t)\ ,\ \Upsilon(0) = I_d \tag{2.46}$$

i. $\forall k \in \mathbb{N},\ B^k = \Upsilon(kT)$

ii. La matrice de monodromie $B = \Upsilon(T)$ possède toujours une valeur propre $\lambda = 1$.

Les valeurs propres de la matrice de monodromie, appelés multiplicateurs de Floquet, offrent une mesure de la divergence ou de la convergence locale d'une solution périodique du système (2.1) le

long d'une direction (perturbation) et sur une période. Ils déterminent ainsi sa stabilité locale comme le démontre le théorème suivant :

Théorème 2.16 : Soit $\lambda_{i(i=1,...,n)}$ les valeurs propres de la matrice de monodromie $B = \Upsilon(T)$ du système (2.1) correspondant à la solution périodique x^*, avec $\lambda_n = 1$. Alors :

- La solution périodique x^* est stable si $|\lambda_i| < 1 \ \forall i \in \{1,...,n-1\}$
- La solution périodique x^* est instable si : $\exists\, j \in \{1,...,n-1\}$ tel que $|\lambda_j| > 1$

2.6.2. Calcul de la matrice de monodromie

Grâce au Théorème (2.16), l'analyse de la stabilité des solutions périodiques se ramène à l'étude d'un signe, celui des parties réelles des valeurs propres de la matrice de monodromie. La méthode est similaire à la procédure indirecte de Lyapunov définie pour l'analyse de la stabilité des solutions statiques qui consiste, pour rappel, à analyser le signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice Jacobienne du système linéarisé.
Il est évident que la construction de la matrice de monodromie devient nécessaire. Cette matrice est fournie numériquement et non analytiquement. Elle peut être construite suivant une méthode de calcul direct. En effet, il suffit d'intégrer plusieurs fois l'équation différentielle linéarisée (2.6) sur l'intervalle de temps $[0, T]$, avec à chaque fois une condition initiale différente $\delta x(0) = e_i$, $i = 1,...,n$. Les solutions $\delta x(T)$ obtenues sont stockées colonne par colonne pour former ainsi le matrice de monodromie.

La méthode de calcul directe est, en dehors de sa simplicité, lourde puisque qu'elle requiert n intégrations numériques. Son coût devient prohibitif dés lors qu'il s'agit de systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Des méthodes sont proposées pour pallier à cet inconvénient. Les travaux de Frulla et ceux de Meng et Gash peuvent être consultés pour utiliser des procédures de calcul moins coûteuses, (Frulla, 2000 ; Meng et Gasch, 2000).

2.7. Conclusion

Ce chapitre comprend un ensemble d'outils mathématiques définis dans la perspective principale d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires. Deux approches incontournables ont été présentées. La première est celle de Lyapunov dédiée à l'analyse de la stabilité des points d'équilibre. La deuxième est celle de Floquet définie pour analyser la stabilité de solutions périodiques en particulier les cycles limites. Un intérêt particulier est accordé à la notion de bifurcation de Hopf définissant la frontière de la stabilité des solutions statiques et dont le voisinage abrite des solutions de type cycles limites. Ces derniers sont déterminés via des procédures d'intégrations numériques prohibitives en temps de calcul d'où les développements présentés sur la méthode de la variété centrale. L'usage de cette dernière permet l'obtention de modèles plus simples favorisant un calcul moins coûteux des cycles limites.

Tous les outils présentés permettent de prendre en compte les non linéarités dans les différentes analyses. Cependant, elles ne prennent pas en considération les différentes incertitudes pouvant être à différents niveaux (paramètres, conditions initiales, modèle etc.). Le chapitre suivant traite de cet aspect et présente par conséquent, des approches robustes d'analyse pour les systèmes dynamiques non linéaires sujets à des incertitudes paramétriques.

Chapitre 3 : Approches Robustes des Systèmes Dynamiques Non Linéaires- Chaos Polynomial

3.1. Introduction

Les méthodes décrites dans ce chapitre utilisent des fonctions orthogonales pour représenter des processus aléatoires du second ordre, solutions de systèmes stochastiques. L'approche considérée est spectrale par rapport aux éléments stochastiques intervenant dans la dynamique des systèmes traités. Les fonctions orthogonales utilisées permettent d'approximer les fonctions de variables aléatoires apparaissant dans les équations dynamiques stochastiques mais aussi les solutions de ces équations. Cette approche est basée sur le concept fondamental appelé chaos polynomial. L'objectif de ce chapitre est alors de présenter le formalisme mathématique définissant ce concept. Toutes les notions y dérivant telles que le chaos polynomial généralisé, le chaos polynomial généralisé multi-éléments, le chaos de Wiener-Haar et de Wiener-Fourier, sont également décrites en tant qu'outils aidant à surpasser certaines insuffisances du chaos polynomial dans la modélisation des processus stochastiques. Par ailleurs, ce chapitre revient au début sur certaines notions fondamentales relevant de la théorie des probabilités. Il revient aussi brièvement sur la méthode référentielle de Monte Carlo dont l'algorithme est utilisé avec toutes les méthodes du chaos polynomial.

3.2. Généralités

L'ensemble des définitions énoncées dans cette section sont issues de l'ouvrage de Baillargeon, (1990).

3.2.1. Notions d'expérience et d'événement aléatoires

Définition 3.1. Une expérience aléatoire ε_x est un processus qu'on peut, théoriquement, répéter aussi souvent que l'on veut sous des conditions fixées. L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est caractérisé formellement par la notion de l'univers Ω. Son résultat ne peut, par contre, être prédit avec certitude.

Définition 3.2. A toute expérience aléatoire est liée la notion d'événement aléatoire ω qu'on définit comme un sous-ensemble de l'univers Ω correspondant à un énoncé d'une expérience aléatoire.

Définition 3.4. Deux événements ω_1 et ω_2 sont mutuellement exclusifs si dans le cas où ω_1 se produit ω_2 ne se produit pas et vise versa.

Définition 3.5. Des événements sont collectivement exhaustifs si leur union donne Ω.

Définition 3.6. Une partition est un ensemble d'événements mutuellement exclusifs et collectivement exhaustifs.

3.2.1.1. Tribu des événements

L'ensemble de tous les événements possibles définit une tribu β (ou une $\sigma-$algèbre) sur Ω. Une tribu β se dit de toute partition de Ω vérifiant les propriétés

1. $\beta \neq \varnothing$
2. Si $\omega \in \beta$ alors son complémentaire $\bar{\omega} \in \beta$
3. Si $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de β alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \omega_n \in \beta$

3.2.1.2. Espace probabilisé

Définition 3.7. L'espace probabilisable lié à l'expérience ε_x est défini par le couple (Ω, β) où Ω est l'univers des résultats de ε_x et β la tribu des événements liés à ε_x.

Définition 3.8. Soit (Ω, β) un espace probabilisable. Toute application $\Pr : \beta \to [0,1]$ qui vérifie les propriétés (4) et (5) ci-dessous, définit la probabilité sur (Ω, β).

4. $\Pr(\Omega) = 1$
5. Pour toute suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, $\Pr\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \omega_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(\omega_n)$,

L'espace probabilisé est alors défini par le triplet $(\Omega, \beta, \Pr)$.

3.2.1.3. Probabilité conditionnelle, théorème de Bayes et des probabilités totales

Définition 3.9. Soit $(\Omega, \beta, \Pr)$ un espace probabilisé et soit $\omega_2 \in \beta$ un événement de probabilité non nulle. La probabilité conditionnelle sachant ω_2 est l'application $\Pr(./\omega_2) : \beta \to [0,1]$ telle que,

$$\Pr(\omega_1 / \omega_2) = \frac{\Pr(\omega_1 \cap \omega_2)}{\Pr(\omega_2)}, \ \forall \omega_1 \in \beta \qquad (3.1)$$

Lorsque la connaissance de la réalisation de l'événement ω_2 n'influe pas sur la probabilité que l'événement ω_1 se produise, les deux événements ω_1 et ω_2 sont indépendants c'est-à-dire $\Pr(\omega_1/\omega_2)=\Pr(\omega_1)$. Par conséquent, en utilisant la formule de la probabilité conditionnelle, il advient :

$$\Pr(\omega_1 \cap \omega_2)=\Pr(\omega_1)\Pr(\omega_2), \forall \omega_1,\omega_2 \in \beta \tag{3.2}$$

La première formule du théorème de Bayes est une application de la probabilité conditionnelle. Elle est donnée comme suit :

$$\Pr(\omega_1/\omega_2)=\frac{\Pr(\omega_2/\omega_1)\Pr(\omega_1)}{\Pr(\omega_2)}\ ,\ \forall \omega_1,\omega_2 \in \beta \tag{3.3}$$

Théorème 3.1. (de la probabilité totale) : Soit $\{\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\}$ une partition de Ω alors, quel que soit l'événement $\varpi \in \beta$, sa probabilité est donnée par :

$$\Pr(\varpi)=\sum_{k=1}^{n}\Pr(\varpi/\omega_k)\Pr(\omega_k) \tag{3.4}$$

La deuxième formule du théorème de Bayes est une conséquence du théorème de la probabilité totale. Ainsi,

$$\Pr(\omega_i/\varpi)=\frac{\Pr(\varpi/\omega_i)\Pr(\omega_i)}{\sum_{k=1}^{n}\Pr(\varpi/\omega_k)\Pr(\omega_k)}\ ,\ \forall i=1,\ldots,n \tag{3.5}$$

3.2.2. Variable aléatoire

Définition 3.10. Soient (Ω,β) et $(\mho,\Upsilon)$ deux espaces mesurables. Une application $f:\Omega\to\mho$ est mesurable si l'image réciproque de la tribu Υ est une sous-tribu de β c'est-à-dire : $\forall \omega \in \Upsilon$, $f^{-1}(\omega)\in\beta$.

Définition 3.11. Soit $(\Omega,\beta,\Pr)$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle est définie par toute application mesurable $\omega \to X(\omega)$ de $(\Omega,\beta,\Pr)$ dans $\mathbb{R}$.

Définition 3.12. La fonction de répartition d'une variable aléatoire X de support I_X est une application $F_X : I_X \subset \mathbb{R} \to [0, 1]$ telle que :

$$F_X(x) = \Pr(X \leq x) \tag{3.6}$$

La fonction densité de probabilité notée f_X associée à la variable aléatoire X est une fonction positive, d'intégrale égale à un sur I_X et définie par :

$$\Pr(a \leq x \leq b) = \int_a^b f_X(x)\,dx = F_X(b) - F_X(a) \tag{3.7}$$

Définition 3.13. Les notions suivantes sont définies pour une variable aléatoire X dont la densité de probabilité est donnée par f_X :

- L'espérance mathématique (ou moyenne ou moment d'ordre un) notée $E[.]$

$$\mu_X = E[X] = \int_{I_X} x\, f_X(x)\,dx \tag{3.8}$$

- La variance (ou moment d'ordre 2), écart type et coefficient de variation

$$Var[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right] \tag{3.9}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var[X]} \tag{3.10}$$

$$C_v = \frac{\sigma_X}{\mu_X} \tag{3.11}$$

- Les moments d'ordre α

$$E\left[(X - E(X))^\alpha\right] = \int_{I_X} (X - E(X))^\alpha\, f_X(x)\,dx \tag{3.12}$$

Pour une variable aléatoire réelle, la loi de probabilité est complètement déterminée par sa fonction de répartition dont la valeur en chaque réel x est la probabilité que la variable aléatoire soit inférieure ou égale à x. Les lois gaussiennes et uniformes seront très utilisées dans la suite de ce chapitre.

- **Loi gaussienne**

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \mu_X)^2}{2\sigma_X^2}\right) \tag{3.13}$$

avec $\mu_X = E[X]$, $Var(X) = \sigma_X^2$

- **Loi uniforme bornée sur un intervalle** $[a\ b]$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si\ x \in [a\ b] \\ 0 & ailleurs \end{cases} \tag{3.14}$$

$$\mu_X = \frac{b+a}{2},\ Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{3.15}$$

3.2.2.1. Variable aléatoire du second ordre

Définition 3.14. Un vecteur aléatoire (ou variable vectorielle) réel X est une application $X : \Omega \to I^n \subset \mathbb{R}^n$ où n est la dimension de X ($n \geq 2$). Les composantes de X sont des variables aléatoires, X_i avec $i = 1,...,n$

$$X = (X_1, X_2, ..., X_n)$$

Définition 3.15. Un vecteur aléatoire X défini sur l'espace probabilisé $(\Omega, \beta, \Pr)$ et à valeur dans $\mathbb{R}^n$ est dit du second ordre si :

$$E\left[\|X(\omega)\|^2\right] = \int \|X(\omega)\|^2 \Pr(d\omega) < +\infty \tag{3.16}$$

où , $$\|X\|^2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

3.2.3. Espace d'Hilbert

Soit $(\Omega, \beta, \Pr)$ un espace probabilisé. L'espace Θ des fonctions mesurables de Ω dans $\mathbb{R}$ est défini par :

$$\Theta = \{g / g : \Omega \to \mathbb{R}\} \tag{3.17}$$

Le produit interne (appelé aussi produit scalaire) $\langle . \rangle$ sur Θ est défini comme suit

$$\langle g, h \rangle = \int_{\Omega} g(\omega) h(\omega) d\Pr(\omega) \tag{3.18}$$

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est notée f_X. L'espace Θ des fonctions mesurables qui associe à tout élément $\omega \in \Omega$ une valeur dans $\mathbb{R}$ et muni du produit interne $\langle X, Y \rangle = E[XY]$ définit un espace d'Hilbert noté $L^2(\Omega, \beta, \Pr)$.

Une variable aléatoire $X(\omega) \in L^2(\Omega, \beta, \Pr)$ est une variable du second ordre qui vérifie (3.16).

3.2.4. Processus stochastique

Un processus stochastique ou processus aléatoire représente une évolution, généralement dans le temps, d'une variable aléatoire.

Soit $(\Omega, \beta, \Pr)$ un espace probabilisé et T un intervalle de $\mathbb{R}$. Un processus stochastique X défini sur $(\Omega, \beta, \Pr)$ et indexé sur T à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est une application telle que :

$$T \to L^0(\Omega, \mathbb{R}^n),\ t \mapsto X(t,\omega) = \left(X_1(t,\omega), ..., X_n(t,\omega)\right)$$

où $L^0(\Omega, \mathbb{R}^n)$ est l'espace des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \beta, \Pr)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Le processus $X(t,\omega)$ sera noté indifféramment X ou encore $X_t(\omega)$, cette dernière notation indiquant qu'un processus est en fait une famille de variables aléatoires: pour t fixé, $X_t(\omega)$ est une variable aléatoire.

Remarque 3.1. Dans la définition du processus, le paramètre d'indexation est choisi réel. Lorsque ce paramètre est vectoriel, $t \in \mathbb{R}^q$, la notion de processus aléatoire est substituée par celle du champ stochastique.

3.2.4.1. Processus stochastique du second ordre:

Soit X un processus indexé sur $T = \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Le processus $X(t,\omega)$ est dit du second ordre si pour tout t fixé, la variable aléatoire $X(t,\omega)$ est du second ordre c'est-à-dire :

$$\forall t \in T \quad E\left[\left\|X(t,\omega)\right\|^2\right] = \int \left\|X(t,\omega)\right\|^2 \Pr(d\omega) < +\infty \tag{3.19}$$

3.3. Modélisation de l'incertitude

La propagation d'incertitude suppose la connaissance d'un modèle de représentation de l'incertitude à propager. Il existe en littérature plusieurs méthodes probabilistes pour modéliser et représenter l'incertitude. Sudret en a dressé un état de l'art intéressant, (Sudret, 2008). La méthode basée sur le principe du maximum d'entropie (PME) est une technique connue et très utilisée, (Venditi, 1998). Introduite par Shannon en 1948 dans le contexte de la théorie de l'information, le principe du

maximum d'entropie (c'est-à-dire de la maximisation du niveau d'incertitude) est utilisé pour construire un modèle probabiliste d'une grandeur aléatoire en ne considérant que les informations disponibles sur la grandeur sans faire d'hypothèses supplémentaires. Le principe du maximum d'entropie stipule que pour une variable aléatoire continue $X : \Omega \to I_X \subset \mathbb{R}$, la densité de probabilité qui représente au mieux l'information connue de la variable est celle qui maximise l'entropie H_c au sens de Shannon.

$$H_c = -\int_{I_X} f_X(x) \log\left(f_X(x)\right) dx \tag{3.20}$$

L'idée dans le PME est de maximiser H_c en tenant compte d'un certain nombre d'informations disponibles sur la variable aléatoire X telles que la positivité, les bornes, les moments statistiques. Ces informations définissent un ensemble de contraintes formalisées par (3.21)

$$E\left[c_j(X)\right] = \gamma_j,\ j \in \{1,\ldots,n_c\} \tag{3.21}$$

et auxquelles s'ajoute la propriété :

$$\int_{I_X} f_X(x)\, dx = 1 \tag{3.22}$$

La densité de probabilité f_X qui maximise l'entropie s'obtient alors en maximisant la fonction (3. 20) en respectant les contraintes (3. 21) et (3. 22). En résumé, le PME consiste dans une première étape à identifier les contraintes auxquelles la distribution recherchée doit répondre puis à déterminer parmi toutes les distributions admissibles celle ayant la plus grande entropie au sens de Shannon. Cette méthode conduit, à titre d'exemple, aux choix de lois suivants :

- Gaussienne si la moyenne et l'écart type du paramètre sont connus et sa plage de variation est non bornée.
- Exponentielle si la moyenne du paramètre est connue et si sa plage de variation est bornée.
- Uniforme si la plage de variation du paramètre est bornée.

Pour un paramètre aléatoire, la densité de probabilité f_X qui maximise, sous la contrainte (3.22), la fonction d'entropie H_c sur un intervalle borné $[a\ b], a \neq b$ est la loi uniforme définie par $f_X(x) = 1/(b-a)$. Ce dernier résultat est logique puisque une loi uniforme consacre le fait qu'aucun point de l'intervalle $[a\ b]$ ne peut être plus probable qu'un autre d'où une incertitude maximale et donc une fonction d'entropie maximale.

3.4. Méthode de Monte Carlo

L'algorithme de la méthode de Monte Carlo peut être résumé en 5 étapes :

- Etape1 : Identification et caractérisation probabiliste des paramètres incertains dans le modèle.
- Etape 2 : Echantillonnage et génération aléatoire de réalisations suivant les lois probabilistes identifiées.
- Etape 3 : Propagation de l'incertitude c'est-à-dire du jeu de données résultant de l'étape 2 dans le modèle et détermination du jeu de sortie correspondant.
- Etape 4 : Analyse statistique du jeu de sortie correspondant au jeu de données.
- Etape 5 : Analyse de la convergence de la distribution de la sortie du modèle.

Soit $M:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction mathématique analytique (ou algorithmique) modélisant un système quelconque et x un vecteur de paramètres incertains modélisés par un vecteur aléatoire $X=\left[X_1 \quad X_2 \ldots \quad X_d\right]$. La réponse Y du modèle est aléatoire, solution de l'équation du modèle (3.23).

$$Y = M\left(X\right) \tag{3.23}$$

La méthode de Monte Carlo est utilisée pour estimer la loi de distribution de la sortie dont les caractéristiques statistiques sont données par la valeur moyenne μ_Y et l'écart type σ_Y. Ces dernières sont estimées via un ensemble de N tirages comme suit :

$$\begin{cases} \hat{\mu}_Y = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N} M\left(X^{(i)}\right) \\ \hat{\sigma}_Y{}^2 = \dfrac{1}{N-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}\left(M\left(X^{(i)}\right)-\hat{\mu}_Y\right)^2 \end{cases} \tag{3.24}$$

La convergence de la méthode de Monte Carlo est certifiée par le théorème de la limite centrale selon lequel l'écart entre l'espérance μ_Y de Y et son estimé $\hat{\mu}_Y$ converge vers une loi normale de moyenne nulle et d'écart type égal à $\sigma_Y \big/ \sqrt{N}$.

Les moments statistiques déterminés à base d'un ensemble de tirages sont des grandeurs aléatoires. Une utilisation rigoureuse d'un procédé de Monte Carlo nécessite la donnée des intervalles de confiance des résultats. A titre d'exemple, pour un niveau de confiance $1-\alpha$ fixé et un nombre N donné de tirages, l'intervalle de confiance correspondant à la valeur moyenne dont l'estimateur est supposé gaussien selon le théorème de la limite centrale, est donné par :

$$\hat{\mu}_Y - \frac{u_{\alpha/2}\hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N-1}} \le \mu \le \hat{\mu}_Y + \frac{u_{\alpha/2}\hat{\sigma}_Y}{\sqrt{N-1}} \tag{3.25}$$

où, $u_{\alpha/2} = -F_x^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$, F_x étant la fonction de répartition définie par $F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2}dz$.

Alternativement, l'inéquation (3.25) peut être utilisée avec une largeur de l'intervalle de confiance donnée. En voulant estimer la valeur moyenne avec une erreur relative $\pm\varepsilon_{\mu_Y}$ avec un niveau de confiance donné égal à $1-\alpha$, alors le nombre de tirages minimal nécessaire est donné par :

$$N_{\min} = 1 + ceil\left[\left(\frac{u_{\alpha/2}\hat{C}_Y}{\varepsilon_{\mu_Y}}\right)^2\right] \tag{3.26}$$

où $ceil[x]$ arrondi x à la valeur entière la plus proche et $\hat{C}_Y = \hat{\sigma}_Y / \hat{\mu}_Y$ désigne le coefficient de variation de la réponse Y.

L'annexe D revient avec plus de détails sur la notion d'intervalle de confiance ainsi que sur sa construction.

3.5. Chaos polynomial

La méthode du chaos polynomial (PC) est une représentation spectrale basée sur la projection de grandeurs aléatoires dans un espace probabilisé. Elle est basée sur la théorie du chaos homogène de Wiener et le théorème de Cammeron-Martin selon lesquels un processus stochastique du second ordre peut être exprimé par un développement convergent, au sens des moindres carrés, en série de polynômes, fonctions orthogonales de variables aléatoires indépendantes gaussiennes, (Wiener,1938 ; Cammeron et Martin, 1947 ; Ghanem et Spanos, 1991).

3.5.1. Formalisme mathématique du chaos polynomial

Soit $X(\omega)$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est notée f_X. L'espace Θ des fonctions qui associent à tout élément $\omega \in \Omega$ une valeur dans $\mathbb{R}$ est un espace d'Hilbert $L^2(\Omega, \beta, \Pr)$ muni du produit scalaire $\langle X, Y\rangle = E[XY]$. Ω est l'univers des résultats d'une expérience, ω est un événement aléatoire, β est la $\sigma-$algèbre liée aux événements ω et enfin $\Pr$ est une mesure de probabilité.

Définition 3.16 : (Chaos polynomial, chaos homogène), Soit $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ un ensemble infini dénombrable de variables aléatoires gaussiennes indépendantes et normalisées. Les espaces suivants sont définis :

- $\hat{\Gamma}_p$ l'espace de toutes les fonctions polynomiales des variables $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$ de degré inférieur ou égal *p*.
- Γ_p est l'ensemble des polynômes de $\hat{\Gamma}_p$ qui sont orthogonaux à ceux de l'espace $\hat{\Gamma}_{p-1}$.

- $\tilde{\Gamma}_p$ l'espace généré par Γ_p

$$\hat{\Gamma}_p = \hat{\Gamma}_{p-1} \oplus \tilde{\Gamma}_p \quad , \Theta = \bigoplus_{i=0}^{\infty} \tilde{\Gamma}_i \tag{3.27}$$

Le chaos homogène d'ordre *p* est défini par le sous espace $\tilde{\Gamma}_p$ de Θ et Γ_p est appelé chaos polynomial (PC) d'ordre *p*.

Le chaos polynomial d'ordre *p* est constitué de tous les polynômes orthogonaux d'ordre *p* formés par toutes les combinaisons possibles des variables aléatoires de l'ensemble $\{\xi_i(\omega)\}_{i=1}^{\infty}$.

La théorie du chaos polynomial pose la possibilité d'exprimer toute variable aléatoire du second ordre $X(\omega) \in L^2(\Omega, \beta, \Pr)$ par une représentation en polynômes de chaos sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} X(\omega) = {} & \bar{x}_0 \Gamma_0 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \bar{x}_{i_1} \Gamma_1\left(\xi_{i_1}(\omega)\right) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \bar{x}_{i_1 i_2} \Gamma_2\left(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega)\right) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3} \Gamma_3\left(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)\right) \\ & + \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \sum_{i_3=1}^{i_2} \sum_{i_4=1}^{i_3} \bar{x}_{i_1 i_2 i_3 i_4} \Gamma_4\left(\xi_{i_1}(\omega), \xi_{i_2}(\omega), \xi_{i_3}(\omega)\right) + \cdots \end{aligned} \tag{3.28}$$

où les $\Gamma_p(\cdot)$ désignent les polynômes du chaos polynomial Γ_p d'ordre *p*, fonctions des variables distinctes de l'ensemble $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$, (Wiener, 1938 ; Ghanem et Spanos, 1991).

Théorème 3.1 (convergence du développement en chaos polynomial, Cameron et Martin, 1947) : Soient $X \in L^2(\Omega, \beta, \Pr)$ une variable aléatoire réelle de carré intégrable, $\{\xi_i\}_{i=1,\ldots,\infty}$ un ensemble infini de variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes et Γ_p le chaos polynomial. Alors, la représentation de X dans la base du chaos polynomial est convergente en moyenne quadratique telle que :

$$\lim_{P \to \infty} E\left[\left(\bar{x}_0 \Gamma_0 + \cdots + \sum_{i_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{i_P=1}^{i_P-1} \bar{x}_{i_1 \ldots i_p} \Gamma_p\left(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_P}\right) - X\right)^2\right] = 0 \tag{3.29}$$

Pour des considérations pratiques, les termes dans l'expression (3.28) sont réordonnés sous la forme d'une simple somme telle que :

$$X(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty} x_j \phi_j\left(\xi(\omega)\right) \quad , \ \xi=\left(\xi_1,\xi_2,...\right) \tag{3.30}$$

où il existe une correspondance, une à une, entre les fonctions $\phi_j(\cdot)$ et les fonctions $\Gamma_p(\cdot)$, (Ghanem et Spanos, 1991).

- **Utilisation pratique du chaos polynomial**

Théoriquement, chaque chaos polynomial est un ensemble de fonctions polynomiales de l'ensemble infini $\{\xi_i\}$ de variables aléatoires. On parle alors de chaos polynomial de dimension infinie. En pratique, on utilise plutôt le chaos polynomial de dimension finie, le nombre de paramètres incertains dans les problèmes physiques étant fini. Ceci se traduit naturellement par un nombre *r* fini de variables gaussiennes ξ_i. On parle alors de chaos polynomial de dimension *r*. Les chaos polynomiaux définis précédemment sont retrouvés lorsque *r* tend vers l'infini. Pour l'exemple de deux variables aléatoires ξ_1 et ξ_2, le développement (3.28) s'écrit :

$$\begin{aligned} X \simeq\ & \bar{x}_0+\bar{x}_1\Gamma_1(\xi_1)+\bar{x}_2\Gamma_1(\xi_2)+ \\ & +\bar{x}_{11}\Gamma_2(\xi_1,\xi_1)+\bar{x}_{12}\Gamma_2(\xi_2,\xi_1)+\bar{x}_{22}\Gamma_2(\xi_2,\xi_2) \\ & +\bar{x}_{111}\Gamma_3(\xi_1,\xi_1,\xi_1)+\bar{x}_{211}\Gamma_3(\xi_2,\xi_1,\xi_1)+\bar{x}_{221}\Gamma_3(\xi_2,\xi_2,\xi_1)+\bar{x}_{222}\Gamma_3(\xi_2,\xi_2,\xi_2)+\cdots \end{aligned} \tag{3.31}$$

Comme un développement en série à l'infini ne peut pas être utilisé en pratique, la somme (3.30) est tronquée à un ordre *p* pour limiter le nombre de termes dans la somme à un nombre fini. Celui-ci dépend de l'ordre du chaos polynomial *p* et de sa dimension *r*. La relation qui donne le nombre de termes *P+1* en fonction de *p* et de *r* est donnée par (3.32).

$$P+1=\frac{(p+r)!}{p!r!} \tag{3.32}$$

En considérant l'exemple précédent $r=2$ avec une troncation à l'ordre *p = 2*, l'approximation (3.31) devient :

$$\begin{aligned} X \simeq\ & \bar{x}_0+\bar{x}_1\Gamma_1(\xi_1)+\bar{x}_2\Gamma_1(\xi_2) \\ & +\bar{x}_{11}\Gamma_2(\xi_1,\xi_1)+\bar{x}_{12}\Gamma_2(\xi_2,\xi_1)+\bar{x}_{22}\Gamma_2(\xi_2,\xi_2) \end{aligned}$$

Pour résumer, un développement dans la base des chaos polynomiaux utilise deux types d'approximations. La première consiste à ne considérer que les chaos polynomiaux jusqu'à un certain ordre *p*. La deuxième est une approximation de la dimension stochastique, conséquence du nombre fini de sources d'incertitude dans les problèmes physiques. La dimension est tronquée au nombre *r* de

variables aléatoires dont dépend chaque chaos polynomial. Par conséquent, le développement de dimension r et d'ordre p d'une fonction aléatoire $X(\xi)$ s'écrit en double tronquant (3.30) comme suit :

$$X(\xi) \approx \sum_{j=0}^{P} \overline{x}_j \phi_j(\xi) \tag{3.33}$$

Avec $\xi = (\xi_1, ..., \xi_r)$, $P+1$ le nombre de termes dans (3.33)

L'ensemble $\{\phi_i\}$ regroupe des fonctions polynomiales orthogonales par rapport à la mesure gaussienne de probabilité. Ils forment une base dans l'espace $L^2(\Omega, \beta, \Pr)$ muni du produit interne $\langle . \rangle$ tel que :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = \langle \phi_i, \phi_i \rangle \delta_{ij} , \tag{3.34}$$

δ_{ij} étant le symbole de Kronecker avec $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

et,

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \int \phi_i \phi_i W(\xi) d\xi \tag{3.35}$$

où $W(\xi)$ est la fonction densité de probabilité de ξ

$$W(\xi) = \prod_{l=1}^{r} \frac{\exp\left[-\xi_l^2 / 2\right]}{\sqrt{2\pi}} \tag{3.36}$$

Ghanem et Spanos ont proposé une méthode permettant la génération de polynômes orthogonaux dans un développement en chaos polynomial et montré que les polynômes de chaos pour des variables gaussiennes sont les polynômes d'Hermite. Nous revenons dans l'annexe C sur ces polynômes et de façon générale sur les propriétés des polynômes orthogonaux.

Remarque 3. 2. L'intégration que définit l'expression (3.35) est effectuée sur un domaine déterminé par le support probabiliste du vecteur aléatoire ξ : $\mathbb{R}$.

Le développement (3.33) formalise une séparation du caractère stochastique de la variable aléatoire $X(\xi)$ de son caractère déterministe. Ce dernier est modélisé par les coefficients $\overline{x}_i$ appelés modes stochastique (ou coefficient modaux ou encore projections) lesquels, peuvent être statiques ou dynamiques (en fonction de la nature de la fonction aléatoire approximée) et représentent les coordonnées de la variable aléatoire $X(\xi)$ dans la base que forme les fonctions polynomiales $\phi_j(\xi)$. Le caractère aléatoire de la variable $X(\xi)$ est concentré dans la base orthogonale. Le mode $\overline{x}_0$ du développement en chaos polynômial représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X tandis

que les modes d'ordres plus élevés offrent une mesure de la variabilité stochastique de $X(\xi)$ autour de sa valeur moyenne. En effet, sa variance σ_X^2 est directement déterminée par :

$$\sigma_X^2 = \sum_{j=1}^{P} \overline{x}_j^2 \left\langle \phi_j, \phi_j \right\rangle \tag{3.37}$$

3.5.2. Chaos polynomial généralisé

La représentation dans la base du chaos polynomial, appelée aussi développement de Wiener-Hermite, permet une description précise des fonctions aléatoires. Sa convergence, démontrée par le théorème de Cameron-Martin, est vérifiée dans de nombreux exemples pratiques référencés dans le premier chapitre. Par contre, il s'est avéré que les propriétés en termes de rapidité et de précision de la convergence présentent bien des insuffisances particulièrement dans le cas des fonctions aléatoires de variables non-gaussiennes. Dans ce contexte, Xiu et Karniadakis ont montré que la convergence rapide du développement dans la base du chaos polynomial tout comme l'efficacité des méthodes numériques de calcul associées, dépendent du choix des caractéristiques probabilistes des variables aléatoires ξ_i standards définissant l'espace des probabilités, (Xiu et Karniadakis, 2002). En effet, les mêmes chercheurs ont établi une correspondance optimale entre des familles de lois de probabilité et des familles de polynômes orthogonaux. Cette correspondance généralise la notion du chaos polynomial de Wiener traitant des fonctions de variables gaussiennes au cas non gaussien d'où la définition du concept du « chaos polynomial généralisé, (CPG) ». Dans une représentation par chaos polynomial généralisé, nommé également développement de Wiener-Askey, la base orthogonale est choisie de telle sorte à ce que la fonction poids qui lui est associée soit identique à la fonction densité de probabilité des variables de l'espace probabilisé. Le Tableau (3.1) suivant présente quelques exemples de correspondances définies globalement par le schéma d'Askey, (Askey, 1985).

	Variable aléatoire ξ	Wiener-Askey PC $\{\phi(\xi)\}$	Support
Distribution continue	Gaussienne	Hermite	$(-\infty,\infty)$
	Uniforme	Legendre	$[a,b]$
	Gamma	Laguerre	$[0,\infty)$
	Beta	Jacobi	$[a,b]$

Tab.3. 1. Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynomial

3.5.2.1. Représentation des paramètres incertains

Pour rappel, ξ est un vecteur de variables aléatoires indépendantes définies pour normaliser la représentation des incertitudes. La dimension de ce vecteur est liée au nombre de paramètres incertains identifiés a priori dans une étape antérieure à celle de la propagation d'incertitudes. En fait, il est nécessaire de faire une discrimination entre les variables aléatoires standards que sont les $\xi_{i(i=1,\ldots,r)}$ et les paramètres incertains du modèle. Ces derniers sont, en pratique, modélisés par les variables

aléatoires ξ_i dans le but de normaliser la représentation des incertitudes. Reprenons le modèle (3.23) : $Y = M(X)$. L'idée est de représenter les paramètres incertains (regroupés dans le vecteur *X*) au moyen des variables aléatoires ξ_i de lois standards (gaussienne, uniforme, gamma, etc.) $X = T(\xi_1,...,\xi_r)$ et donc de générer le modèle standard : $Y = \bar{M}(\xi_1,...,\xi_r)$. Cette opération n'est pas toujours facile particulièrement dans le cas où les paramètres incertains et les variables aléatoires standards choisies ont des lois de probabilité différentes et dans le cas aussi où les paramètres incertains sont corrélés. Les travaux de Devroye et Brieman ont traité de ces questions (Devroye, 1986 ; Brieman et Friedman, 1985). Quelques exemples donnant des représentations d'incertitudes de quelques lois de probabilité en fonction d'une variable gaussienne ξ à moyenne nulle et variance unitaire sont regroupés dans le tableau (3.2).

Type de distribution	Transformation
Uniforme (a,b)	$a+(b-a)\left(0.5+0.5erf\left(\xi/\sqrt{2}\right)\right)$
Normale (μ,σ)	$\mu+\sigma\xi$
Log Normale (μ,σ)	$\exp(\mu+\sigma\xi)$
Gamma (a,b)	$ab\left(\xi\sqrt{\frac{1}{9a}}+1-\frac{1}{9a}\right)^3$
Exponentiel (λ)	$-\frac{1}{\lambda}\log\left(0.5+0.5erf\left(\xi/\sqrt{2}\right)\right)$

Tab.3. 2. Représentation d'une variable aléatoire en fonction d'une variable gaussienne à moyenne nulle et à variance unitaire avec $erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$.

3.5.2.2. Calcul pratique du développement en polynômes du chaos polynomial généralisé/Approches intrusives et non intrusives

La propagation des incertitudes en utilisant le chaos polynomial généralisé repose sur 3 étapes fondamentales à savoir :

- Le choix de la base polynômiale appropriée au problème
- La fixation de l'ordre de troncation *P*
- Le calcul des coefficients (modes stochastiques)

1. La théorie du chaos polynomial généralisé répond en partie à la première étape. En effet, elle permet d'exprimer de façon optimale une fonction aléatoire par un développement en série de polynômes orthogonaux en relation directe avec la loi de probabilité la régissant. Cependant, en pratique il est rare qu'on ait au préalable une connaissance sur la nature de la loi qui gouverne la sortie Y du modèle (3.23). En général, l'objectif est de la déterminer. De là découle toute la difficulté liée au choix de la base polynômiale en mesure de garantir les meilleurs résultats. A ce sujet et d'après l'étude bibliographique réalisée, il n'existe pas de méthode qui permet de choisir la meilleure base. Une façon de faire peut consister, au préalable, à estimer de façon grossière la loi de Y en exécutant un procédé de Monte Carlo avec un nombre modéré de tirages.

2. Le choix de l'ordre du chaos p est naturellement crucial pour la précision de l'approximation par chaos polynomial généralisé. En pratique et de part l'inexistence de résultats théoriques concernant le control de l'erreur de troncature de l'ordre p du chaos, celui-ci est fixé en général par une étude de convergence qui consiste à l'augmenter et à évaluer la qualité de la représentation à mesure que l'ordre augmente.

3. Le calcul d'une représentation par le chaos polynomial généralisé nécessite la détermination de $P+1$ modes stochastiques. Deux approches sont utilisées: une intrusive et une autre non intrusive. La première consiste à substituer, dans le modèle stochastique, les fonctions aléatoires par leurs représentations spectrales puis à faire une projection, dite de Galerkin, du système résultant sur la base du chaos polynomial généralisé. Un système d'équations déterministes et couplées est alors généré. La résolution de ce système en utilisant un schéma numérique adéquat permet ainsi de générer les modes stochastiques constituant le développement spectral posé. Cette approche, d'apparence facile puisqu'elle ne nécessite qu'un seul calcul pour déterminer les modes stochastiques, devient d'utilisation très pénible particulièrement dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté, des systèmes non linéaires et celui où le nombre de paramètres incertains est important. En effet, la nature de la dépendance (3.32) liant l'ordre de troncation P à la dimension r et à l'ordre du chaos polynomial p fait que la dimension du système déterministe résultant de l'application de la projection de Galerkin devient très vite importante. De plus, le nombre d'équations déterministes est proportionnel à la dimension du modèle stochastique (nombre de degrés de liberté) ce qui rajoute une complexité supplémentaire. Le nombre de termes non linéaires dans le système déterministe est plus important et devient par conséquent, dans le cas particulier des non linéarités polynomiales à grand degré, difficilement gérable même si le degré des non linéarités reste identique à celui du modèle incertain initial. Tous ces inconvénients rendent la deuxième approche non-intrusive plus attractive dans le sens où elle ne nécessite aucune modification et aucune manipulation du modèle incertain initial. L'approche non intrusive se résume à projeter directement mais aussi uniquement la solution stochastique sur la base du chaos polynomial généralisé. Les modes stochastiques sont calculés en utilisant un nombre fini de simulations du modèle incertain initial. L'approche non intrusive se prête bien aux problèmes non linéaires à grand nombre de degrés de liberté mais devient aussi d'utilisation délicate dés lors que le nombre de paramètres incertains devient important. La difficulté est liée essentiellement à l'obtention des points de simulation nécessaires au calcul des coefficients stochastiques par les méthodes d'intégration numériques.

Pour illustrer les deux approches, considérons le problème qui consiste à caractériser la solution $y(x,t,\xi(\omega))$ de l'équation différentielle stochastique donnée sous sa forme générale (3.38). Une telle équation peut être le résultat d'un processus de modélisation d'un système dynamique incertain. L'incertitude peut intervenir au niveau des conditions initiales et ou au niveau des paramètres.

$$\Im\left(y\left(x,t,\xi(\omega)\right)\right)=f\left(y\left(x,t,\xi(\omega)\right),x,\xi(\omega)\right) \tag{3.38}$$

où $\Im$ désigne un opérateur différentiel. La solution $y\left(x,t,\xi(\omega)\right)$ dépend de l'espace x, du temps t et de l'incertitude modélisée par ξ elle-même liée à l'événement aléatoire ω. f est une fonction non linéaire.

L'étape commune aux deux approches (intrusive et non intrusive) est, bien entendu, celle qui consiste à exprimer la solution sous forme d'un développement en série de polynômes orthogonaux (3.39).

$$y(x,t,\xi)=\sum_{j=0}^{P}\overline{y}_j(x,t)\phi_j(\xi) \tag{3.39}$$

3.5.2.2.1. Approche Intrusive

L'approche intrusive peut se résumer en trois étapes essentielles définies comme suit :

1. Substituer le développement (3.39) dans l'équation différentielle (3.38).

$$\Im\left(\sum_{j=0}^{P}\overline{y}_j(x,t)\phi_j(\xi)\right)=f\left(\sum_{j=0}^{P}\overline{y}_j(x,t)\phi_j(\xi),x,\xi\right) \tag{3.40}$$

2. Opérer une projection de Galerkin. Celle-ci consiste à multiplier les deux membres de l'équation (3.40) par les différents polynômes de la base choisie et faire la moyenne statistique.

$$\left\langle \Im\left(\sum_{j=0}^{P}\overline{y}_j(x,t)\phi_j(\xi)\right),\phi_l(\xi)\right\rangle=\left\langle f\left(\sum_{j=0}^{P}\overline{y}_j(x,t)\phi_j(\xi),x,\xi\right),\phi_l(\xi)\right\rangle \;,\; l=0,1,\ldots,P \tag{3.41}$$

Conséquence de ces opérations et grâce à la propriété d'orthogonalité, un système de $P+1$ équations déterministes couplées est obtenu. Par exemple, dans le cas où (3.38) est une équation différentielle ordinaire (l'opérateur $\Im$ est celui de la dérivée par rapport au temps et que la solution y dépend de l'espace x, du temps t et de l'aléa ξ), on obtient un système déterministe définissant la dynamique des modes stochastiques $\overline{y}_l(x,t)$ comme suit :

$$\dot{\bar{y}}_l(x,t) = \left(1/\left\langle \phi_l(\xi), \phi_l(\xi) \right\rangle\right) \left\langle f\left(\sum_{j=0}^{P} \bar{y}_j(x,t)\phi_j(\xi), \xi\right), \phi_l \right\rangle, \; l = 0,...,P \tag{3.42}$$

3. Résoudre, par un algorithme approprié, le système de *P+1* équations résultant de l'étape 2. Pour le cas de l'équation (3.42), un schéma d'intégration est utilisé pour déterminer le vecteur des modes stochastiques $\bar{y}_l(x,t)$, $l = 0,...,P$.

3.5.2.2.2. Approche non intrusive

Contrairement au cas intrusif, dans une approche non intrusive aucune modification n'est opérée sur le modèle (3.38). De ce fait, le qualificatif « boite noire » lui est attribué en littérature. L'approche non intrusive est avantageuse en particulier du fait qu'elle ne nécessite que quelques calculs de solutions déterministes en un certain nombre fini de points du domaine de variation probabiliste. La détermination de ces points dépend de la méthode utilisée pour le calcul des modes stochastiques. Dans cette perspective, deux techniques différentes à savoir, la méthode de projection spectrale non intrusive et la méthode de la régression sont présentée ci-dessous.

3.5.2.2.1. Technique de projection spectrale non intrusive (NISP)

Dans la technique NISP, une fois la solution exprimée dans la base du chaos polynomial généralisé suivant l'expression (3.39), elle y est projetée ce qui permet de déterminer directement les coefficients stochastiques par (3.43).

$$\bar{y}_l(x,t) = \frac{\left\langle y(x,t,\xi), \phi_l(\xi) \right\rangle}{\left\langle \phi_l(\xi), \phi_l(\xi) \right\rangle}, l = 0,1,2,...,P \tag{3.43}$$

ou de façon équivalente,

$$\bar{y}_l(x,t) = \frac{1}{\left\langle \phi_l^2(\xi) \right\rangle} \int y(x,t,\xi)\phi_l(\xi)\, W(\xi)\, d\xi \;, \; l = 0,1,...,P \tag{3.44}$$

Le coefficient $\bar{y}_l(x,t)$ mesure, à un facteur de normalisation près, la corrélation entre la fonction $y(x,t,\xi)$ et le polynôme $\phi_l(\xi)$. Le dénominateur dans (3.44) est défini par des produits internes entre des polynômes identiques. Les produits internes peuvent être calculés de façon indépendante. Leurs valeurs qui sont des constantes réelles peuvent être tabulées et sauvegardées.
Le calcul du numérateur dans (3.44) passe par le calcul d'intégrales multidimensionnelles le long du support probabiliste du vecteur aléatoire ξ. Différentes méthodes sont utilisées pour approximer ces intégrales telles que les techniques numériques de Monte Carlo, la méthode de Simpson ou les méthodes de collocation de Gauss.

- Quadrature de Gauss (collocation)

A titre d'exemple, dans le cas d'une intégration de Gauss monodimensionnelle, l'approximation de l'intégrale (3.44) est donnée par :

$$\bar{y}_l(x,t) \approx \frac{1}{\left\langle \phi_l^2(\xi) \right\rangle} \sum_{k=1}^{Q} y\left(x,t,\xi^{(k)}\right) \phi_l\left(\xi^{(k)}\right) W^{(k)} \ , l = 0,1,...,P \tag{3.45}$$

Les points $\xi^{(k)}$ sont les points d'intégration de Gauss appelés points de collocations donnés par les racines du polynôme ϕ_l de degré p tandis que les $W^{(k)}$ représentent les poids d'intégration de Gauss. L'annexe C revient avec plus de détails sur les techniques d'intégration numérique.

3.5.2.2.2. La technique de régression

La méthode de régression consiste à calculer les modes stochastiques de telle sorte à minimiser, au sens des moindres carrés, l'écart ε entre la solution du modèle stochastique et son approximation dans la base du chaos polynomial généralisé.

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{Q} \left[y\left(x,t,\xi^{(k)}\right) - \sum_{l=0}^{P} \bar{y}_l(x,t) \phi_l\left(\xi^{(k)}\right) \right]^2 \tag{3.46}$$

La méthode de régression n'utilise pas la propriété de l'orthogonalité de la base polynomiale contrairement à la technique de la projection spectrale non intrusive ou encore la méthode intrusive. Elle requiert, par contre, un nombre Q de simulations supérieur au nombre de coefficients modaux à calculer d'où $P+1<Q$. Cette condition est nécessaire pour que la solution du problème des moindres carrés correspondant soit admissible. Q définit un nombre de simulations correspondant à un jeu de valeurs $\left\{\xi^{(k)}\right\}$. Deux approches différentes sont possibles pour générer ce jeu de valeurs.

- L'approche aléatoire où les points $\xi^{(k)}$ sont générés suivant la loi de ξ.
- L'approche déterministe qui consiste à choisir à l'avance les points $\xi^{(k)}$ où l'on va évaluer le modèle (3.38). Les $\xi^{(k)}$ peuvent être choisis comme étant les *Q* racines d'un polynôme $\phi_l(\xi)$ avec comme condition *Q>P+1*.

En désignant par $\bar{Y} = \left(\bar{y}_0, \bar{y}_1, ..., \bar{y}_P\right)^T$ le vecteur des coefficients modaux, par Z la matrice d'éléments $z_{k,l} = \phi_l\left(\xi^{(k)}\right)$ et par $Y = \left(y\left(x,t,\xi^{(1)}\right), ..., y\left(x,t,\xi^{(Q)}\right)\right)$ le vecteur des simulations correspondant au jeu $\left\{\xi^{(k)}\right\}$ et si la matrice $\left(Z^T Z\right)$ est non singulière alors la solution optimale du problème classique des moindres carrés est donnée par :

$$\overline{y} = \left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T Y \tag{3.47}$$

La qualité de la solution dépend du conditionnement de la matrice $\left(Z^T Z\right)$ appelée matrice de Fischer. Des méthodes telles que la décomposition en valeurs singulières peuvent être utilisée pour mieux conditionner cette matrice.

Tel que présenté dans l'étude bibliographique, le chaos polynomial généralisé s'avère incapable d'approximer les statistiques dans les problèmes d'intégration sur un temps suffisamment long, particulièrement dans le cas des fonctions oscillatoires. Cet handicap est justifié par le fait que le chaos polynomial ne peut modéliser les fonctions aléatoires dont les variations sont rapides et non linéaire dans la dimension stochastique. Le chaos polynomial généralisé multi-éléments, (Wang et Karniadakis, 2005) et le chaos de Wiener-Haar (Le Maitre, 2004 ; Petit et al, 2006) sont des méthodes proposées pour pallier aux insuffisances du chaos polynomial généralisé. Ces deux méthodes sont maintenant décrites.

3.6. Chaos polynomial généralisé multi-éléments

Dans cette section, le schéma du chaos polynomial généralisé multi-éléments (CPG-ME) est développé. Fondamentalement, cette approche est basée sur la décomposition de l'aléa en plusieurs segments de probabilité appelés éléments. Dans chaque élément, une nouvelle variable aléatoire est définie pour modéliser l'aléa. Le chaos polynomial généralisé est, par la suite, utilisé, tel que présenté dans la section précédente, pour approximer localement (sur chaque élément) la fonction ou le processus aléatoire. Les statistiques globales sont reconstruites suivant les théorèmes de probabilité totale et de Bayes. Le degré de la perturbation aléatoire dans chaque élément est réduit proportionnellement à la taille de ce dernier. Par conséquent, l'ordre du chaos polynomial nécessaire peut être moins élevé. L'étude développée par Wan est utilisée dans ce qui suit comme base pour décrire mathématiquement la méthode du chaos polynomial multi-éléments, (Wan et Karniadakis, 2005)

3.6.1. Décomposition du domaine stochastique

Soit $\xi = \left(\xi_1, ..., \xi_r\right) : \Omega \to \mathbb{R}^r$ un vecteur aléatoire de dimension r défini dans l'espace probabilisé $\left(\Omega, \beta, \Pr\right)$ où $\xi_{i(i=1,...,r)}$ désigne des variables aléatoires indépendantes de lois de probabilité données. Pour plus de simplicité, on considère que les $\xi_{i(i=1,...,r)}$ sont régies par des lois uniformes ; $\xi_i : \Omega \to \left[-1\ 1\right]$ avec des densités de probabilité constantes $f_{\xi_i} = 1/2$.

Soit D une décomposition de $B = \left[-1\ 1\right]^r$ en m éléments sans intersection :

$$D=\begin{cases} B_k=\left[a_{k,1},b_{k,1}\right)\times\left[a_{k,2},b_{k,2}\right)\times\cdots\times\left[a_{k,d},b_{k,r}\right] \\ B=\bigcup_{k=1}^{m}B_k \\ B_{k_1}\cap B_{k_2}=\varnothing,\ si\ k_1\neq k_2 \end{cases} \tag{3.48}$$

où $k,k_1,k_2,...,k_r=1,2,...,m$

A base de la décomposition de D, on définit une variable indicatrice Z_k aléatoire pour chaque élément telle que :

$$Z_k\left(\xi\right)=\begin{cases} 1\ si\ \xi\in B_k \\ 0\ si\ \xi\notin B_k \end{cases} \tag{3.49}$$

Pour simplifier les écritures, ξ sera omis dans l'expression de la fonction indicatrice $Z_k\left(\xi\right)$.

A partir de (3.48) et (3.49), il peut être remarqué que :

$$\begin{cases} \Omega=\bigcup_{k=1}^{m}Z_k^{-1}\left(1\right) \\ Z_{k_1}^{-1}\left(1\right)\cap Z_{k_2}^{-1}\left(1\right)=\varnothing\quad,\quad k_1\neq k_2 \end{cases} \tag{3.50}$$

Par conséquent, $\bigcup_{k=1}^{m}Z_k^{-1}\left(1\right)$ définit une décomposition de l'espace Ω. Dans chaque élément, on définit sur l'espace $\left(Z_k^{-1}\left(1\right),\beta\cap Z_k^{-1}\left(1\right),\Pr\left(.\middle|Z_k^{-1}\left(1\right)\right)\right)$ un vecteur, $\zeta^k=\left(\zeta_1^k,...,\zeta_r^k\right):Z_k^{-1}\left(1\right)\mapsto B_k$ de variables aléatoires locales muni de la fonction densité de probabilité conditionnelle suivante :

$$f_{\zeta^k}=\frac{f_\xi}{\Pr\left(Z_k=1\right)}=\frac{1}{2^r\Pr\left(Z_k=1\right)}\ ,\ k=1,...,m \tag{3.51}$$

où,

$$\Pr\left(Z_k=1\right)=\prod_{i=1}^{r}\frac{b_{k,i}-a_{k,i}}{2} \tag{3.52}$$

En pratique, le développement en chaos polynomial généralisé est implémenté en utilisant un vecteur de variables uniformes $\overline{\xi}^k$ pour exploiter les avantages de la base du chaos de Legendre $L_j\left(\overline{\xi}^k\right)$ $\left(j=0,...,P\right)$, $\left(k=1,...,m\right)$. Les variables ζ^k sont ainsi exprimés par (3.53).

$$\zeta_i^k = \frac{b_{k,i} + a_{k,i}}{2} + \frac{b_{k,i} - a_{k,i}}{2} \bar{\xi}_i^k \quad , \; i = 1, \ldots, r \tag{3.53}$$

Pour revenir au système différentiel (3.38) et en s'appuyant sur le principe du chaos polynomial multi-éléments, la solution $y(x,t,\xi)$ est approximée localement dans l'espace probabilisé local $\left(Z_k^{-1}(1), \beta \cap Z_k^{-1}(1), \Pr\left(.\middle| Z_k^{-1}(1)\right)\right)$ en utilisant les coordonnées ζ^k sujettes aux fonctions densité de probabilité conditionnelle (3.51). La solution sur l'espace global est ensuite reconstruite en combinant les approximations locales. Ces dernières sont obtenues en implémentant, élément par élément, le chaos polynomial généralisé et en considérant ζ^k au lieu du vecteur ξ. Conformément au théorème de Cameron-Martin généralisé, chaque développement local converge vers $y\left(x,t,\zeta^k\right)$.

Le moment statistique $\mu_\alpha\left(y(x,t,\xi)\right)$ d'ordre α de la réponse $y(x,t,\xi)$ sur le domaine stochastique global est déterminé en utilisant les théorèmes de Bayes et de probabilité totale tel que :

$$\begin{aligned} \mu_\alpha\left(y(x,t,\xi)\right) &= \int_B \left(y(x,t,\xi)\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^r d\xi \\ &\approx \sum_{k=1}^{m} J_k \int_{[-1\ 1]^r} \left(y_k\left(x,t,\bar{\xi}^k\right)\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^r d\bar{\xi}^k \end{aligned} \tag{3.54}$$

où,

$$J_k = \Pr\left(Z_k = 1\right) \tag{3.55}$$

et

$$\sum_{k=1}^{m} J_k = 1 \tag{3.56}$$

3.6.2. Précision

L'erreur d'approximation des moments statistiques sur l'espace aléatoire global dépend des erreurs d'approximation sur chaque élément comme le montre le théorème (3.2) suivant, (Wang et Karniadakis, 2005).

Théorème 3.2 : Soit ξ un vecteur aléatoire de variables indépendantes et uniformes sur $[-1\ 1]^r$. Si l'espace aléatoire de ξ est décomposé en m éléments disjoints où chaque élément est décrit par un nouveau vecteur $\bar{\xi}^k$ de variables aléatoires uniformes, le moment d'ordre α $(\alpha = 1, 2)$ du processus $y(x,t,\xi)$ peut être approximé par $y_k\left(x,t,\bar{\xi}^k\right), k = 1, \ldots, m$ avec une erreur au sens des moindres carrés donnée par (3.57).

$$\varepsilon = \left(\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k^2 J_k \right)^{1/2} \tag{3.57}$$

où ε_k désigne l'erreur local au sens des moindres carrés de l'estimation dans le $k^{ième}$ élément aléatoire et $J_k = \Pr\left(Z_k = 1\right)$ sachant que $y_k\left(x,t,\overline{\xi}^k\right)$ est déterminé en appliquant le chaos polynomial généralisé.

A la base, la méthode du chaos polynomial multi-éléments est proposée pour pallier aux insuffisances de la méthode du chaos polynomial constatées dans les problèmes d'intégrations longues ainsi que les problèmes incluant des discontinuités. Dans le cas de l'existence d'une discontinuité dans le $k^{ième}$ élément, la contribution de celui-ci dans l'erreur globale est mesurée par $\varepsilon_k^2 J_k$. J_k est un facteur de pondération par lequel l'importance de la contribution de l'erreur ε_k^2 dans l'erreur globale peut être contrôlée. En d'autres termes, l'erreur peut être diminuée par le facteur J_k qui dépend en réalité de la longueur de l'élément k. En pratique, pour réduire l'effet de la discontinuité, il faut considérer une petite longueur pour l'élément comportant la discontinuité.

3.6.3. Post traitement du chaos polynomial généralisé multi-éléments

La reconstruction du processus aléatoire à base des approximations locales se fait suivant la formule suivante :

$$y\left(x,t,\xi\right) = \sum_{k=1}^{m} y^k\left(x,t,\overline{\xi}^k\right) J_k \tag{3.58}$$

avec

$$y^k\left(x,t,\overline{\xi}^k\right) = \sum_{j=0}^{P} \overline{y}_{k,j}\left(x,t\right) L_j\left(\overline{\xi}^k\right) \tag{3.59}$$

où $\overline{y}_{k,j}\left(x,t\right)$ désignent les modes stochastiques sur chaque élément.

Les approximations globales de la valeur moyenne et de la variance découlant de l'expression (3.54) sont données respectivement par (3.60) et (3.61).

$$\mu_1 = \sum_{k=1}^{m} \overline{y}_{k,0}\left(x,t\right) J_k \tag{3.60}$$

où $\overline{y}_{k,0}\left(x,t\right)$ désigne le premier mode stochastique représentant la valeur moyenne de l'approximation au $k^{ième}$ élément $y_k\left(x,t,\overline{\xi}_k\right)$

$$\mu_2 = \sum_{k=1}^{m} \left[\sigma_{k,p}^2 + \left(\bar{y}_{k,0}(x,t) - \mu_1 \right)^2 \right] J_k \tag{3.61}$$

avec ,

$$\sigma_{k,p}^2 = \sum_{j=1}^{P} \bar{y}_{k,j}^2(x,t) \left\langle L_j^2 \right\rangle \tag{3.62}$$

Remarque 3. 3. Le nombre d'éléments peut être fixé a priori ou de façon adaptative. Le critère d'adaptation est défini en utilisant l'erreur sur la variance globale, l'erreur sur la moyenne étant en général plus faible. La variance globale exacte est approximée par (3.63).

$$\sigma^2 = \bar{\sigma}^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \Pr(z_k = 1) \tag{3.63}$$

où γ_k représente l'erreur sur le terme $\sigma_{k,p}^2 + \left(\bar{y}_{k,0}(x,t) - \mu_1 \right)^2$ et $\bar{\sigma}^2$ est la variance globale approximée par (3.61).

Le critère considère le taux de décroissance de l'erreur relative dans chaque élément. Ce taux est défini par :

$$\eta_k = \frac{\sum_{j=P_{p-1}+1}^{P_p} \bar{y}_{k,j}^2 \left\langle L_j^2 \right\rangle}{\sigma_{k,p}^2} \tag{3.64}$$

où P_p désigne le nombre de fonctions de base correspondant à un ordre du chaos polynomial généralisé égal à *p*.

Pour une implémentation adaptative, un élément est divisé en deux sous-éléments si le critère (3.65) suivant est vérifié.

$$\eta_k^{\rho} \Pr(z_k = 1) \geq \theta_1, \ 0 < \rho < 1 \tag{3.65}$$

où ρ et θ_1 sont des constantes fixées a priori.

Un autre critère basé sur l'évaluation de la sensibilité des éléments stochastiques est aussi défini. Son utilisation est proposée particulièrement dans le cas où le nombre de paramètres incertain est important, (Wan et Karniadakis, 2005).

3.7. Chaos de Wiener-Haar

Le comportement localisé d'un processus aléatoire dans sa dimension stochastique peut être représenté en généralisant l'utilisation des ondelettes connues pour être très appropriées aux problèmes d'analyse de fonctions aux variations rapides et non linéaires. L'approche du chaos de Wiener-Haar dérive de la combinaison des ondelettes, appliquées fréquemment à l'analyse des fonctions du temps et/ou de l'espace, avec le concept du chaos polynomial. La section suivante revient, avant de présenter le chaos de Wiener-Haar, sur quelques notions et définitions fondamentales liées aux ondelettes de façon générale et aux ondelettes de Haar en particulier.

3.7.1. Transformée en ondelettes continue

La transformée en ondelettes est apparue comme une alternative à l'analyse de Fourier qui s'est avérée inefficace dans l'analyse locale des signaux non-stationnaires et les signaux présentant des discontinuités. Les premiers travaux sur la transformée en ondelettes remontent au début des années 80. Ils ont été menés par Morlet dans le domaine de l'analyse des signaux sismiques (Morlet, 1981). Avec Grossmann, Morlet développât le formalisme géométrique de la transformée en ondelettes (Grossmann et al, 1985, 1987) permettant la décomposition d'un signal en une somme pondérée de petites ondes (appelées ondelettes) translatées et/ou dilatées. Plusieurs travaux ont mis en exergue l'aptitude de ces ondelettes à analyser la différentiabilité locale des fonctions tout comme leur capacité à détecter et à caractériser les singularités (Holschneider, 1988 ; Jaffard, 1989 ; Mallat et Hwang, 1990). En 1989, Mallat introduisit le concept d'analyse multi-résolution par lequel une méthode générale de construction de bases orthogonales d'ondelettes et des algorithmes rapides d'implémentation, ont été mis en œuvre (Mallat, 1989). Une analyse multi-résolution désigne une décomposition de l'espace de fonctions continues d'énergie finie en des familles de sous-espaces vectoriels emboités les uns dans les autres, tels que le passage de l'un à l'autre soit le résultat d'un changement d'échelle. Ces sous-espaces sont appelés les espaces d'approximation aux échelles différentes.

3.7.1.1. Notion d'ondelettes

La définition mathématique la plus générale d'une ondelette $\psi(t)$ est celle la caractérisant comme étant une fonction oscillante et de moyenne nulle : $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t)\,dt = 0$.

La transformée en ondelettes d'un signal à carré intégrable $X(t) \in L^2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{+\infty} \|X(t)\|^2\,dt < \infty$, consiste à le décomposer en une série d'ondelettes dilatées et translatées $\psi_b^a(t)$ respectivement par un facteur d'échelle (fréquence) *a* et un facteur de translation (temps) *b*. Ces ondelettes sont définies par les fonctions (3.66).

$$\psi_b^a(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{|a|}\right), a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \tag{3.66}$$

- Le paramètre *a* représente le facteur de dilatation ou le paramètre d'échelle définissant la largeur de l'ondelette analysante. Il joue le rôle de l'inverse de la fréquence : plus *a* est faible, moins l'ondelette analysante est étendue temporellement, donc plus la fréquence centrale de son spectre est élevée.
- Le paramètre *b* représente la translation localisant l'ondelette analysante dans le domaine temporel.

Le réglage des deux paramètres *a* et *b* permet donc d'obtenir des ondelettes à la fréquence voulue et à l'instant souhaité.

La transformée en ondelettes continues de la fonction X à l'échelle *a* et à la position *b* est définie par la fonction W_X telle que :

$$W_X\left(a,b\right)=\left\langle X\left(t\right),\psi_b^a\left(t\right)\right\rangle=\int_{-\infty}^{+\infty}X\left(t\right)\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{|a|}\right)dt \tag{3.67}$$

Le calcul via le produit scalaire (3.67), de la fonction W_X définit l'analyse de la fonction X par l'ondelette ψ. La transformée en ondelettes permet de mesurer les variations temporelles des composantes spectrales de la fonction X . En d'autres termes, le paramètre $W_X\left(a,b\right)$, qui désigne le coefficient de l'ondelette ψ_b^a , permet de quantifier l'irrégularité locale de la fonction X autour de la position b à l'échelle a et de déterminer ainsi ses fluctuations. Les variations brutales du signal X produisent de grands coefficients d'ondelettes, (Mallat, 2011).
Inversement, la fonction X peut être reconstruite à partir des coefficients $W_X\left(a,b\right)$ en utilisant la transformée en ondelettes inverse définie par :

$$X\left(t\right)=\frac{1}{C_\psi}\int_{a=-\infty}^{+\infty}\int_{b=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{a^2}W_X\left(a,b\right)\psi_b^a\left(t\right)da\ db \tag{3.68}$$

où C_ψ est une constante liée à l'ondelette $\psi\left(t\right)$ utilisée.

En pratique, on se restreint à une famille dénombrable d'ondelettes $\psi_b^a\left(t\right)$ en considérant des valeurs discrètes de a et b dans l'expression (3.66) et en fixant un pas de dilatation $\alpha>1$ et un pas de translation $\beta\neq 0$ et en prenant a de la forme $\alpha^{-j}, j\in\mathbb{Z}$ et b de la forme $k\beta\alpha^{-j}, j,k\in\mathbb{Z}$. Le choix qui consiste à prendre $\alpha=2$ et $\beta=1$ conduit à l'analyse dyadique de la fonction X par les fonctions suivantes :

$$\psi_k^j\left(t\right)=2^{j/2}\psi\left(2^j t-k\right)\quad j,k\in Z \tag{3.69}$$

Les ondelettes dilatées de 2^j permettent d'analyser les variations du signal à la résolution 2^{-j}.

Il existe plusieurs familles d'ondelettes. Le choix de la famille dépend nécessairement de la nature de la fonction à analyser. Cependant, il n'existe pas de règles précises justifiant le choix de privilégier telle ou telle famille. Les ondelettes de Haar, de Morlet, de Daubchies sont les plus connues, (Mallat, 2011).

3.7.2. Transformée en ondelettes discrète et analyse multi-résolution (AMR)

La transformée en ondelettes continue est coûteuse en temps et en ressources lors du traitement numérique selon le niveau de résolution nécessaire. Pour pallier à ce problème, on échantillonne la transformée en ondelettes continues. La transformée discrète en ondelettes (DWT) est ainsi définie. L'établissement de cette technique est une conséquence des travaux datant de la fin des années 70 traitant des techniques du codage des signaux de type parole plus particulièrement la technique du codage pyramidal. La forme discrète de la transformée en ondelettes est donnée par :

$$X(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^j \psi_k^j(t) \tag{3.70}$$

où $d_k^j = \left\langle X(t), \psi_k^j(t) \right\rangle$ sont appelés les coefficients de Fourier généralisés.

3.7.2.1. Analyse multi-résolution et base orthonormée d'ondelettes

L'obtention d'une base discrète d'ondelettes ψ_k^j et plus particulièrement d'une base orthonormée, repose sur la théorie de l'analyse multi-résolution (AMR) implémentée en utilisant l'algorithme pyramidal de Mallat, (Mallat, 1989). Par cette théorie, Stéphane Mallat a relié les ondelettes orthogonales aux filtres utilisés dans le traitement du signal par l'intermédiaire d'une fonction, appelée fonction d'échelle. Cette fonction donne une suite d'approximations du signal, chacune à une résolution qui diffère de la précédente par un facteur de deux ; quand on augmente la résolution, le signal est de mieux en mieux approximé et inversement lorsqu'on diminue la résolution, la quantité d'information contenue dans le signal diminue. Une AMR considère une base orthonormée d'ondelettes $\left\{\psi_k^j, j,k \in \mathbb{Z}\right\}$ de $L^2(\mathbb{R})$ où les ψ_k^j sont définies par l'expression (3.69). Le rôle de ces dernières est essentiel puisqu'elles permettent d'encoder la différence d'information entre deux approximations successives. De façon plus concrète, l'idée fondamentale d'une AMR, qui va être présenté dans la suite de cette section, est basée sur la possibilité de décomposer un signal $X(t)$, de carré intégrable, sur une base orthonormée d'ondelettes de gamme très étendue d'échelles. A chaque échelle, la fonction sera remplacée par la somme d'une approximation avec un détail, les deux étant définis sur deux espaces complémentaires (espace d'approximation et espace de détail). De façon plus formelle, l'analyse multi-résolution du signal $X(t)$ consiste à le décomposer sur une suite croissante de sous-espaces vectoriels $\left(V_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ emboités les uns dans les autres comme l'indique la définition suivante, (Misiti et al, 1993).

Définition 3.17 : Une suite de sous-espaces $\left(V_j\right)_{j\in\mathbb{Z}}$ de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ est une analyse multi-résolution si elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1. $V_j \subset V_{j+1}$
2. $\lim\limits_{j\to-\infty} V_j = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
3. $\lim\limits_{j\to+\infty} V_j = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{Z}} V_j = L^2\left(\mathbb{R}\right)$

La propriété (1) indique que les sous ensembles V_j sont emboités les uns dans les autres. Le passage de l'un à l'autre désigne un changement d'échelle. Ce passage, lorsqu'il est effectué avec un facteur 2, définit une analyse multi-résolution dyadique. La différence entre deux espaces d'approximation successifs est constituée des ondelettes à la résolution 2^{-j}. La propriété (2) illustre le fait que lorsque Le processus de dilatation prend fin, le signal devient infiniment flou : le signal ne contient plus aucune information. Inversement, la propriété (3) indique qu'on peut approximer avec une précision arbitraire n'importe quel signal $X\left(t\right)$.

Les espaces $\left\{V_j\right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ constituent ainsi une suite croissante de sous espaces vectoriels de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ vérifiant en outre (par les propriétés (1), (2) et (3)) :

4. $\forall\left(j,k\right)\in\mathbb{Z}^2,\ X\left(t\right)\in V_j \Leftrightarrow X\left(t-2^j k\right)\in V_j$
5. $\forall j\in\mathbb{Z}, X\left(t\right)\in V_j \Leftrightarrow X\left(\frac{t}{2}\right)\in V_{j+1}$

La propriété (4) signifie que V_j est invariant par toute translation de longueur proportionnelle à l'échelle 2^j tandis que la propriété (5) indique que V_j est un espace d'approximation plus grossier que V_{j+1}. Plus grand est *j*, plus précise est l'approximation de $X\left(t\right)$.

Lemarié a démontré que si les ψ_k^j forment une base orthonormée d'ondelettes où ψ est suffisamment régulière et bien localisée, alors V_0 admet une base orthonormée de la forme $\left\{\phi\left(t-k\right), k\in\mathbb{Z}\right\}$, où ϕ est régulière et bien localisée, (Lemarié, 1992). La suite $\left(V_j, j\in\mathbb{Z}\right)$ est alors une analyse multi-résolution de $L^2\left(\mathbb{R}\right)$ et la fonction d'échelle ϕ est appelée le père des ondelettes. Ses versions dilatées et translatées ϕ_k^j, données par $\phi_k^j\left(t\right)=2^{j/2}\phi\left(2^j t-k\right), k\in\mathbb{Z}$,
constituent une base orthonormée de l'espace V_j.

L'approximation du signal $X\left(t\right)$ sur V_j est alors définie par sa projection orthogonale $P_{V_j}X\left(t\right)$ telle que :

$$P_{V_j}X\left(t\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k^j\phi_k^j\left(t\right) \tag{3.71}$$

Dans l'expression (3.71) $c_k^j = \left\langle X(t), \phi_k^j(t) \right\rangle$ représentent les coefficients de l'approximation à l'échelle 2^j c'est-à-dire à la résolution 2^{-j}

Une approximation multi-résolution est entièrement déterminée par sa fonction d'échelle ϕ qui engendre une base orthonormée pour chaque espace V_j . Il est démontré, (Mallat, 2011), que toute fonction d'échelle ϕ est déterminée par un filtre discret h appelé, filtre miroir conjugué, suivant l'équation d'échelle (3.72). suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\phi(t-k) \tag{3.72}$$

avec

$$h[k] = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\phi\left(\frac{t}{2}\right), \phi(t-k) \right\rangle \tag{3.73}$$

La détermination d'une approximation d'un niveau d'échelle supérieur nécessite de compléter l'approximation (3.71) d'où la définition de l'espace complémentaire W_j de V_j dans V_{j+1} tel que :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$
$$L^2(R) = \bigoplus_{j \in Z} W_j$$
$$\forall j \in Z \text{, si } k \neq j \text{ alors } W_k \perp W_j$$

La projection de $X(t)$ sur V_{j+1} se décompose, tel qu'indiqué par l'expression (3.74), en la somme des projections orthogonales sur V_j et sur W_j .

$$P_{V_{j+1}} X(t) = P_{V_j} X(t) + P_{W_j} X(t) \tag{3.74}$$

Le complément $P_{W_j} X(t)$ fournit les détails de $X(t)$ qui existent à la résolution $2^{-(j+1)}$ et qui sont absents à la résolution moins fine 2^{-j}. La fonction de détails est construite via la projection de $X(t)$ sur l'espace W_j dont les ondelettes translatées et dilatées (3.69) y forment une base orthonormée. Cette projection est donnée par :

$$P_{W_j} X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^j \psi_k^j(t) \tag{3.75}$$

Les d_k^j désignent les coefficients de détails, appelés aussi coefficients de Fourier généralisé, et sont déterminés par les produits scalaires :

$$d_k^j = \left\langle X(t), \psi_k^j(t) \right\rangle \tag{3.76}$$

3.7.2.2. Transformée en ondelettes rapide et algorithme de décomposition de Mallat

Une analyse multi-résolution permet, telle que définie précédemment, de décomposer successivement chaque approximation $P_{V_{j+1}} X(t)$ en la somme d'une approximation plus grossière $P_{V_j} X(t)$ avec une fonction de détails $P_{W_j} X(t)$. Une conséquence essentielle de la multi-résolution est la possibilité de transformer un signal en ondelettes, sans utiliser ni les ondelettes ni la fonction d'échelle. Pour calculer la transformée en ondelettes, on n'a besoin que de filtres. Au lieu d'effectuer le produit scalaire de la fonction d'échelle, ou de l'ondelette, avec le signal pour calculer les coefficients d'approximation c_k^j et les coefficients de détails d_k^j, on réalise des convolutions du signal avec ces filtres. Ce mode de calcul définit ce qu'on appelle la transformée en ondelettes rapide. Celle-ci a été mise en œuvre par Mallat, (Mallat, 1989). L'idée dans cet algorithme est de vider progressivement le signal analysé de son information : à chaque étape, la résolution est diminuée d'un facteur deux et les détails sont codés sous la forme de coefficients d'ondelettes. De manière plus précise, on réalise une série de convolutions discrètes avec les filtres numériques passe bas h et passe haut g correspondant respectivement à la fonction d'échelle ϕ et à la fonction d'ondelette ψ. Ces filtres diffèrent d'une famille d'ondelette à une autre. Le filtre h est défini par l'équation d'échelle (3.72) tandis que le filtre g est défini par :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} g[k]\phi(t-k) \tag{3.77}$$

et de façon équivalente

$$g[k]=\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}\psi\left(\frac{t}{2}\right),\phi(t-k)\right\rangle \tag{3.78}$$

La décomposition de la fonction $X(t)$ se calcule donc par une cascade d'opérations de filtrage formulées par les produits de convolution suivants :

$$c_k^{j-1}=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} h[l-2k]c_l^j \tag{3.79}$$

$$d_k^{j-1}=\sum_{l=-\infty}^{+\infty} g[l-2k]c_l^j \tag{3.80}$$

La première étape de l'algorithme de Mallat consiste à séparer le signal analysé en deux composantes : une composante définissant l'allure générale du signal et une autre comprenant les détails. L'allure générale définit la tendance globale du signal ; c'est le signal tel qu'on le voit à la moitié de la résolution la plus fine: avec deux fois moins d'échantillons. Elle est obtenue en attaquant le filtre passe bas h correspondant à la fonction d'échelle ϕ par le signal à analyser. Les détails constituent l'information nécessaire à la reconstruction du signal. Ils sont obtenus en utilisant le filtre passe haut g correspondant à l'ondelette ψ.

De façon plus concrète, pour un signal donné $X(t)$ échantillonné de longueur $N = 2^J$ avec $J \in \mathbb{N}$ (condition sur la longueur de la séquence nécessaire pour la précision de la décomposition dyadique) tel que $X_l = X(t_l), l = 0,...,N-1$, la première étape de la décomposition du signal produit deux ensembles de coefficients, le premier étant celui des approximations $c^{J-1} = \left(c_k^{J-1}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ et le second étant celui des détails $d^{J-1} = \left(d_k^{J-1}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Ces ensembles sont respectivement obtenus en convoluant le signal avec les filtres passe bas h et passe haut g suivi, tel qu'illustré dans la figure (3.1), d'un sous-échantillonnage par 2. La deuxième étape divise, via les mêmes opérations, l'ensemble des coefficients d'approximations en deux autres ensembles de coefficients d'approximations c^{J-2} et de détails d^{J-2} et ainsi de suite jusqu'à atteindre la résolution la plus grossière $J = 0$. Un exemple plus concret est donné dans la sous-section suivante.

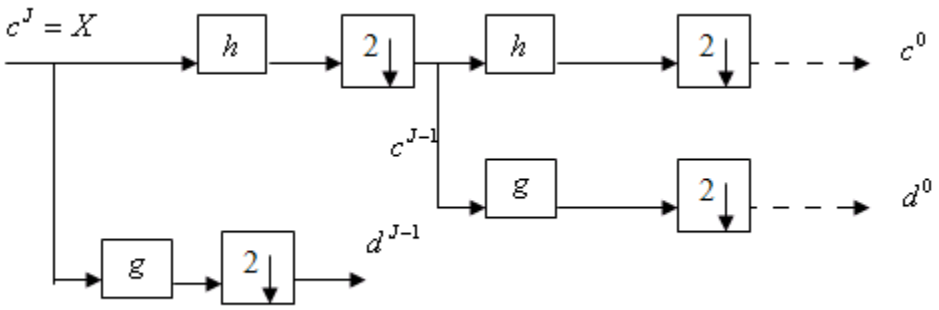


Fig.3. 1. Schéma récursif de Mallat

3.7.2.3. Développement en série d'ondelettes de Haar

Les ondelettes de Haar sont utilisées dans le contexte applicatif de la thèse. Elles sont caractérisées par la fonction d'échelle ϕ et l'ondelette mère ψ définies respectivement par les expressions (3.81) et (3.81) et représentées dans la figure (3.2).

$$\phi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.81}$$

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1/2 \\ -1, & 1/2 \le t < 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.82}$$

Des versions dilatées et translatées de l'ondelette mère et de la fonction d'échelle de Haar sont définies, pour rappel, comme suit :

$$\psi_k^j(t) = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right) \tag{3.83}$$

$$\phi_k^j(t) = 2^{j/2}\phi\left(2^j t - k\right) \tag{3.84}$$

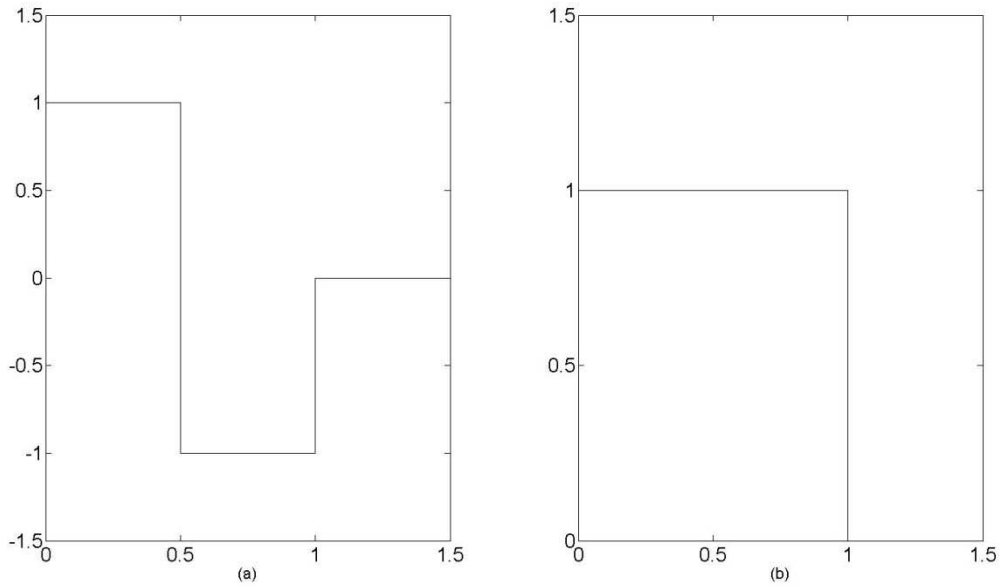


Fig.3. 2. (a)- Ondelette de Haar, (b)- fonction d'échelle de Haar

De la définition d'une AMR, nous avons :

V_0 : l'espace des fonctions constantes sur l'intervalle $[0, 1[$.

V_1 : l'espace des fonctions constantes sur les intervalles $[0, 1/2[$ et $[1/2, 1[$.

V_j : l'espace des fonctions constantes sur $\left\{\left[k/2^j, (k+1)/2^j\right[\right\}_{k\in\{0,..,2^j-1\}}$

Pour un signal $X(t)$ de carré intégrable sur l'intervalle unitaire, son approximation à l'échelle j est définie par sa projection sur l'espace V_j

$$P_{V_j}X(t) = \sum_{k=0}^{2^j-1} c_k^j \phi_k^j(t) \tag{3.85}$$

La différence entre deux approximations à des niveaux d'échelle successifs $j-1$ et j définit la fonction de détails $P_{W_{j-1}}X(t)$ telle que

$$P_{W_{j-1}}X(t) = P_{V_j}X(t) - P_{V_{j-1}}X(t) \tag{3.86}$$

La différence (3.86) peut alors être exprimée par une série d'ondelettes décalées et translatées de l'ondelette mère de Haar (3.83) à l'échelle correspondant à $j-1$, soit :

$$P_{W_{j-1}} X(t) = \sum_{k=0}^{2^{(j-1)}-1} d_k^{j-1} \psi_k^{j-1}(t) \tag{3.87}$$

Ainsi, la projection $P_{V_j} X(t)$ définie par (3.84) peut être réexprimée :

$$\begin{aligned} P_{V_j} X(t) &= P_{V_j-1} X(t) + \sum_{k=0}^{2^{(j-1)}-1} d_k^{j-1} \psi_k^{(j-1)}(t) = P_{V_0} X(t) + \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k^m \psi_k^m(t) \\ &= c^0 \phi(t) + \sum_{m=0}^{j-1} \sum_{k=0}^{2^m-1} d_k^m \psi_k^m(t) \end{aligned} \tag{3.88}$$

où $c^0 = c_0^0$ est le coefficient de l'approximation à l'échelle la plus grossière à savoir, $j = 0$ et qui pondère le fonction d'échelle de Haar $\phi(t)$ à la même échelle, d_k^m sont les coefficients de détails (coefficients de Fourier généralisés) pondérant les ondelettes de Haar $\psi_k^m(t)$ aux différents niveaux d'échelles.

Exemple d'illustration

Pour mieux comprendre le principe de la décomposition (3.88), considérons un signal X défini et continu par morceaux sur l'intervalle $[0,1]$, représenté dans la figure (3.3).

$$X_{l(l=0,...7)} = [2 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 0 \quad 2 \quad 1], \tag{3.89}$$

de longueur $N = 2^3$, $J = 3$.

L'objectif est de décomposer le signal et de l'exprimer par une somme d'une fonction d'approximation avec une fonction de détails telle que définie par (3.88).

Conformément à l'algorithme de décomposition de Mallat, les coefficients d'approximation c_k^j et de détails d_k^j successifs $\left(j = \{0,1,2,3\}, k = \{0,...,2^j - 1\} \right)$ sont obtenus en utilisant le schéma récursif défini par les convolutions (3.79), (3.80).

Pour des considération de simplicité, on considère dans cet exemple les fonctions d'échelle de Haar vérifiant, en normalisant par le facteur $2^{j/2}, \phi_k^j(t) = \phi\left(2^j t - k\right)$. Ceci donne lieu à une expression (3.90) plus simple du filtre passe bas h, (Hubbard, 1995).

$$h[n] = \begin{cases} 1/2 & n = 0,1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3.90}$$

Le filtre passe haut g correspondant au filtre h donné par (3.91).

$$g[n]=\begin{cases}1/2 & n=0\\ -1/2 & n=1\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases} \tag{3.91}$$

Remarque 3.3. D'autres auteurs utilisent d'autres coefficients pour le filtre passe pas de Haar. Mallat utilise les coefficients $h[0]=h[1]=1/\sqrt{2}$. Les procédures de normalisation doivent conduire naturellement aux mêmes analyses.

La première itération permet d'obtenir les vecteurs de coefficients d'approximation c^2 et de détails d^2 à partir des coefficients $c^3=\left[c_0^3\ldots c_7^3\right]$ avec $c^3=X$.

$$c^2=\begin{bmatrix}c_0^2 & c_1^2 & c_2^2 & c_3^2\end{bmatrix} \text{ et } d^2=\begin{bmatrix}d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_3^2\end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases}c_0^2=X(0)h(0)+X(1)h(1)=3\\ c_1^2=X(2)h(0)+X(3)h(1)=10\\ c_2^2=X(4)h(0)+X(5)h(1)=7\\ c_3^2=X(6)h(0)+X(7)h(1)=1.5\end{cases}$$

$$\begin{cases}d_0^2=X(0)g(0)+X(1)g(1)=-1\\ d_1^2=X(2)g(0)+X(3)g(1)=-2\\ d_2^2=X(4)g(0)+X(5)g(1)=7\\ d_3^2=X(6)g(0)+X(7)g(1)=0.5\end{cases}$$

Conséquence de la première itération, le signal est représenté par une approximation et un détail qui dénote l'information nécessaire à la recomposition du signal original soit :

$$X=\left[3\quad 10\quad 7\quad 1.5\middle|-1\quad -2\quad 7\quad 0.5\right]$$

La répétition du procédé jusqu'à $j=0$ conduit aux résultats relevés dans le tableau (3.3). Les coefficients d'approximation et de détails sont aussi représentés dans la figure (3.3).

Résolution	Approximation c_k^j	Détails à la résolution j : d_k^j
$j=3$	$[2 \quad 4 \quad 8 \quad 12 \quad 14 \quad 0 \quad 2 \quad 1]$	
$j=2$	$[3 \quad 10 \quad 7 \quad 1.5]$	$[-1 \quad -2 \quad 7 \quad 0.5]$
$j=1$	$[6.5 \quad 4.25]$	$[-1 \quad -2 \quad 7 \quad 0.5 \quad -3.5 \quad 2.75]$
$j=0$	$[5.375]$	$[-1 \quad -2 \quad 7 \quad 0.5 \quad -3.5 \quad 2.75 \quad 1.125]$

Tab.3. 3. Coefficients d'approximation et de détails du signal X

Les coefficients d'approximation et de détails permettent, une fois calculés, de représenter le signal à partir de sa moyenne (approximation grossière correspondant au niveau de résolution 0) en ajoutant les détails de résolution de plus en plus fine (1, 2, 3,…).

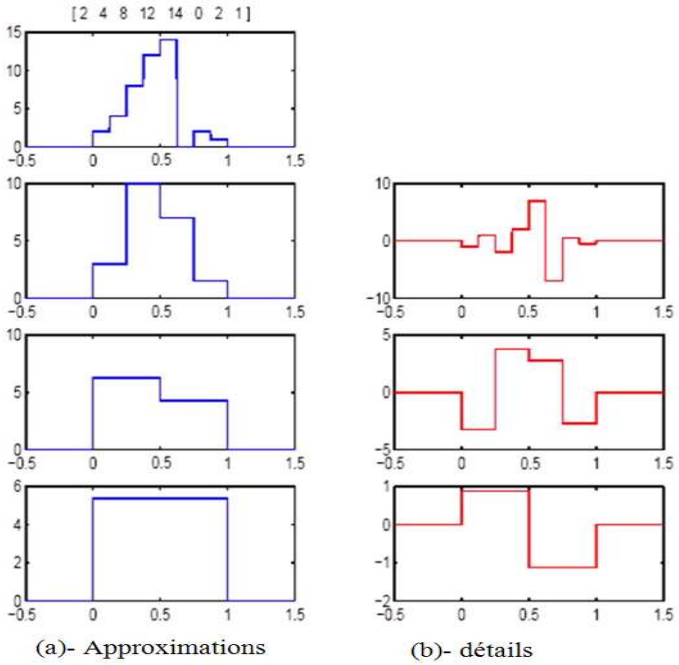


Fig.3. 3. Décomposition du signal X par les ondelettes de Haar

$$X(t) = 5.375\phi(t) - 1\psi_0^2(t) - 2\psi_1^2(t) + 7\psi_2^2(t) + 0.5\psi_1^3(t) - 3.5\psi_0^1(t) + 2.75\psi_1^1(t) + 1.125\psi_0^0(t)$$

Cette forme de représentation sera exploitée et généralisée pour représenter et modéliser des processus stochastiques. C'est l'objet de la section suivante.

3.7.3. Développement de Wiener-Haar

La transformée en ondelettes discrète a été introduite dans la section précédente. Appliquée à un signal de carré intégrable sur l'intervalle unitaire, elle permet de l'approximer par une série d'ondelettes de Haar pondérées par des coefficients statiques mesurant la régularité du signal. Le développement de Wiener-Haar est une combinaison de ce principe avec celui du chaos polynomial généralisé. L'idée est d'exploiter les avantages des ondelettes de Haar pour mieux approximer les évolutions rapides fortement non linéaires dans la dimension stochastique, une opération pour laquelle le chaos polynomial généralisé présente bien des insuffisances. Le chaos de Wiener-Haar formalise donc la possibilité d'approximer un processus stochastique $X\left(t,\xi\right)$ à variance finie par un développement en série d'ondelettes de Haar pondérées par des coefficients de détails. Ces derniers sont des fonctions du temps alors que les ondelettes de Haar décomposent la dimension stochastique du processus. Dans ce qui suit, seul le cas monodimensionnel (une seule valeur aléatoire) est traité. Le cas multi-dimensionnel est abordé dans d'autres études, (Le Maitre et al, 2004b).

Dans ce qui suit, on considère l'événement aléatoire ω dans l'espace probabilisé $\left(\Omega,\beta,\Pr\right)$. ξ est la variable aléatoire modélisant l'événement ω, y est une réalisation possible de ξ supposée régie par une fonction de distribution $M_{\xi}\left(y\right)=\Pr\left[\omega,\xi\left(\omega\right)\leq y\right]$. De plus, $M_{\xi}\left(y\right)$ est supposée continue et strictement croissante. Sous ces conditions, $dM_{\xi}\left(y\right)=m_{\xi}\left(y\right)dy$ définit la densité de probabilité de la variable ξ et il existe pour tout $z\in\left[0,1\right]$ une seule et unique valeur pour y telle que $z=M_{\xi}\left(y\right)$ et $y=M_{\xi}^{-1}\left(z\right)$.

Soit le cas où ξ est défini sur l'intervalle $\left[a,b\right]\subset\mathbb{R}$. L'extension de l'usage des ondelettes de Haar, ψ_k^j, localisée dans l'intervalle unitaire, à l'intervalle $\left[a\ \ b\right]$ est définie, (Beran et Petit, 2006), par la relation (3.92).

$$\overline{\psi}_k^j\left(\xi\right)=\psi_k^j\left[P_r\left(\xi\left(\omega\right)\right)\right] \tag{3.92}$$

Les réalisations individuelles satisfont

$$\overline{\psi}_k^j\left(y\right)=\psi_k^j\left(z\right) \tag{3.93}$$

De la propriété d'ortho-normalité des ondelettes de Haar il advient que :

$$\int_0^1\psi_k^j\left(z\right)\psi_n^l\left(z\right)dz=\int_a^b\overline{\psi}_k^j\left(y\right)\overline{\psi}_n^l\left(y\right)dM_{\xi}\left(y\right)=\delta_{j,l}\,\delta_{k,n} \tag{3.94}$$

Ici les ondelettes $\left\{\overline{\psi}_k^j(\xi)\right\}$ sont orthonormée par rapport à la distribution de ξ et forment une analyse multi-résolution de l'espace stochastique des processus du second ordre sur l'intervalle $[a \;\; b]$. Avec toutes ces considérations, le développement à l'infini de Wiener-Haar d'un processus stochastique $X(t,\xi)$ du second ordre est défini par l'expression (3.95), (Beran et Petit, 2006).

$$X(t,\xi) = X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) = x_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m-1} d_k^m(t)\overline{\psi}_k^m(\xi) = x_0(t) + \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2m-1} d_k^m(t)\psi_k^m(z) \qquad (3.95)$$

où :

$$x_0(t) = P_{V_0} X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) = \int_0^1 X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)\phi_0^0(z)\,dz = \left\langle X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right), \phi_0^0(z)\right\rangle \qquad (3.96)$$

$x_0(t)$ désigne le coefficient $c_0^0(t)$ de l'approximation à l'échelle $j = 0$ du processus $X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)$. Par ailleurs, les coefficients $d_k^m(t)$ sont, conséquence de la relation (3.76), définis comme suit :

$$d_k^m(t) = \left\langle X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right), \psi_k^m(z)\right\rangle = \int_0^1 X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)\psi_k^m(z)\,dz \qquad (3.97)$$

En utilisant la formule de la variance et grâce à la propriété de l'ortho-normalité, la variance du processus stochastique $X(t,\xi)$ est déterminée directement par les coefficients $d_k^m(t)$.

$$\sigma_X^2(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{2^m-1}\left(d_k^m(t)\right)^2 \qquad (3.98)$$

3.7.3.1. Evaluation des coefficients d'ondelettes

Considérons le développement (3.95) à un niveau de résolution tronqué J, soit :

$$X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) \approx x_0(t) + \sum_{m=0}^{J}\sum_{k=0}^{2^m-1} d_k^m(t)\psi_k^m(z) \qquad (3.99)$$

Comme présenté ultérieurement pour le chaos polynomial, le calcul des coefficients d'ondelettes peut se faire de manière intrusive ou non-intrusive.

3.7.3.1.1. Calcul intrusif

Le calcul intrusif consiste, similairement à ce qui a été présenté dans le cadre du chaos polynomial, à substituer toutes les grandeurs aléatoires par leurs développements en série d'ondelettes de Haar puis à effectuer une projection de type Galerkin de telle sorte à générer un système d'équations déterministes dont la résolution permet de générer les coefficients de Fourier généralisés. Pour cela, le développement (3.92) est réécrit en définissant ∇ l'ensemble des indices entiers q concaténant les indices d'échelles j et les indices de translation k :

$$\nabla = \left\{ q / q = 2^j + k \,,\, j = 0,...,J \,;\, k = 0,...,2^j - 1 \right\} \tag{3.100}$$

De ce fait, le développement monodimensionnel du processus (3.99) s'écrit comme suit :

$$X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) \approx x_0(t) + \sum_q \bar{X}_q \psi_q(z) \tag{3.101}$$

où

$$\psi_q = \left\{ \psi_{j,k} \,,\, j = 0,...,J \,;\, k = 0,...,2^j - 1 \right\} \tag{3.102}$$

et,

$$\bar{X}_q = \left\{ d_k^j \,,\, j = 0,...,J \,;\, k = 0,...,2^j - 1 \right\} \tag{3.103}$$

En posant $\psi_0 = 1$, $\bar{X}_0(t) = x_0(t)$ et en dénotant ∇_0 l'extension de l'ensemble ∇ pour inclure l'indice 0, le développement (3.101) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) \approx \sum_{q \in \nabla_0} \bar{X}_q(t) \psi_q(z) \tag{3.104}$$

3.7.3.1.2. Calcul non intrusif

Le calcul non intrusif des coefficients $d_k^j(t)$ se ramène uniquement au calcul des produits internes définis par les intégrales (3.105). En utilisant la technique de Monte Carlo, les coefficients $d_k^j(t)$ définis par (3.105) peuvent être approximés par (3.106), en utilisant la technique de Monte Carlo, z étant une variable uniforme.

$$d_k^j(t) = \int_0^1 X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) \psi_k^j(z)\, dz \tag{3.105}$$

$$d_k^j(t) = \left\langle X\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right), \psi_k^j(z)\right\rangle \approx \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X\left(t, M_\xi^{-1}(z_i)\right)\psi_k^j(z_i) \tag{3.106}$$

où $\{z_i\}_{i=1,\ldots N}$ est un ensemble de N réalisations de la variable uniforme z .

D'autres méthodes d'intégration numériques peuvent être également être utilisées telles que la méthode des trapèzes ou celle de Simpson. Dans l'étude de Petit et Beran, les auteurs indiquent que l'apport des ces méthodes par rapport à la technique de Monte Carlo n'est pas significatif en terme de précision et de coût, (Petit et Beran, 2006). Pour pallier à ces inconvénients, la transformée discrète en ondelettes (DWT) via l'algorithme de Mallat, présentés précédemment, est utilisé pour calculer les coefficients.

3.8. Développement de Wiener-Fourier

Le développement de Wiener-Fourier, (Millman et al, 2005), est analogue à celui défini dans le cadre de la théorie du chaos polynomial généralisé introduit par Xiu et Karniadakis, (Xiu et Karniadakis, 2002). La différence se situe au niveau de la base orthogonale utilisée. Contrairement à l'approche du chaos polynomial généralisé où les bases polynomiales orthogonales sont formées à partir des monômes $1, \xi, \xi^2, \ldots, \xi^q$, le développement de Wiener-Fourier utilise les fonctions trigonométriques constituant la base de Fourier à savoir les fonctions $1, \sin(\xi), \cos(\xi), \sin(2\xi), \cdots, \sin(q\xi), \cos(q\xi)$ avec $q = 0,1,\ldots,\infty$. Pour enrichir ces fonctions en amplitude et en fréquence, elles sont multipliées par une gaussienne $W(\xi)$ de moyenne nulle et de variance unitaire.

$$W(\xi) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left(-0.5\xi^2\right) \tag{3.107}$$

Cette opération donne lieu à des fonctions qui convergent vers zéro rapidement dans l'intervalle $[-2\pi\ 2\pi]$. Quelques unes de ces fonctions sont représentées dans la figure suivante.

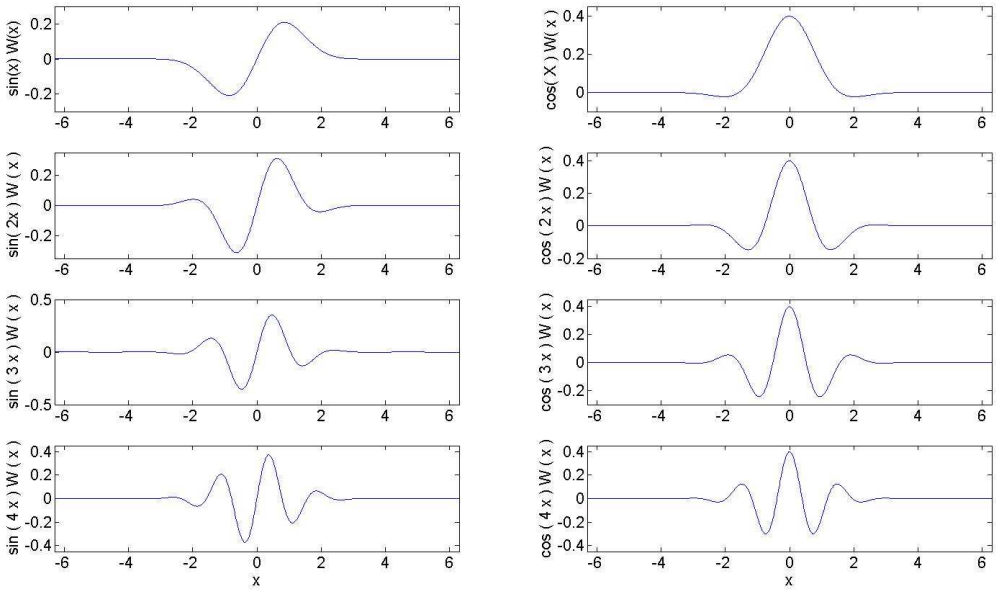


Fig.3. 4. Fonctions de Fourier multipliées par une gaussienne

Les premières fonctions de la base orthonormée de Wiener-Fourier sont relevées dans le tableau suivant :

Ordre ($i = p$)	$\phi_i(\xi)$
0	1
1	$1.52087\sin(\xi)$
2	$2.23725\cos(\xi)-1.35696$
3	$1.8417\sin(2\xi)-1.2682\sin(\xi)$
4	$2.1103\cos(2\xi)-2.395\cos(\xi)+1.16703$
5	$1.9396\sin(3\xi)-1.6893\sin(2\xi)+0.8604\sin(\xi)$
6	$2.0387\sin(3\xi)-2.1103\cos(2\xi)+1.7715\cos(\xi)-$

Tab.3. 4. Fonctions orthonormées de la base du chaos de Fourier

Identiquement à la théorie du chaos polynomial, un processus stochastique $X(t,\xi)$ du second ordre peut être approximé par un développement en série de fonctions trigonométriques orthonormée de Wiener-Fourier

$$X(t,\xi)=\sum_{i=0}^{P}\overline{x}_i(t)\phi_i(\xi)$$

Le calcul des modes stochastiques $\overline{x}_i(t)$ se fait suivant les mêmes techniques intrusives et non intrusives définies précédemment dans le cadre de l'approche par le chaos polynomial ou par les ondelettes.

3.9. Conclusion

Ce chapitre a passé en revue les méthodes de propagation d'incertitude basées sur le concept du chaos polynomial. Les différents formalismes mathématiques décrivant ces méthodes ont été décrits dans l'optique de les utiliser pour traiter de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants incertains. Cet aspect applicatif est présenté dans le chapitre suivant.

Chapitre 4 : Application des Développements Spectraux à l'Analyse Robuste du Comportement Dynamique d'un Système Frottant

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, les méthodes probabilistes basées sur le concept du chaos polynomial sont développées pour traiter de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottants. L'objectif principal est d'évaluer les capacités des différentes méthodes présentées dans le troisième chapitre à traiter de deux problèmes complémentaires, celui de l'analyse de la stabilité et celui de l'estimation des niveaux vibratoires (amplitudes des cycles limites), le tout en tenant compte de la dispersion probabiliste de la loi de frottement. Un modèle à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage à tambour est considéré dans cette optique. Ce modèle est initialement décrit puis son utilisation, pour évaluer les méthodes proposées, est justifiée. Les équations mathématiques régissant sa dynamique sont en suite développées. Les deux problèmes de l'analyse de la stabilité et du comportement vibratoire du système sont alors traités dans deux parties distinctes.

Dans la première partie et après avoir posé le problème de la stabilité, une analyse par la méthode de MC est effectuée. Ses résultats sont utilisés comme référence à laquelle ceux des méthodes proposées sont confrontés. Ces méthodes sont basées sur les théories du chaos polynomial et de Lyapunov. Différentes techniques issues de combinaisons entre les deux théories sont développées. Les avantages des unes par rapport aux autres sont discutés.

La deuxième partie est consacrée à l'analyse du comportement vibratoire du système en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement. Traiter de ce problème requiert la détermination des cycles limites. Les méthodes spectrales (chaos polynomial généralisé, chaos multi-éléments, chaos de Wiener-Haar) sont alors adaptées au problème de la modélisation et de la prédiction des cycles limites développés dans trois zones d'instabilité de flottement situées à des distances différentes du point de bifurcation de Hopf. L'objectif est de tester la capacité des différentes méthodes à prédire les niveaux vibratoires sur différentes zones ayant chacune leur spécificité. Une première zone proche du point de bifurcation de Hopf est tout d'abord considérée. Deux cas de figures sont étudiés : Le premier cas est lié au problème de l'analyse du comportement dynamique sur un intervalle temporel court mais suffisant pour atteindre le régime stationnaire tandis que le second cas porte sur le comportement dynamique sur un intervalle temporel plus long. Des conclusions et des recommandations sont tirées à base de ces différentes études. Une deuxième zone, loin du point de bifurcation de Hopf, est ensuite considérée. Pour cette zone, seul le cas d'étude sur un intervalle temporel coût est considéré. Les performances des méthodes basées sur le chaos polynomial sont aussi évaluées. Enfin, un intérêt particulier est attribué à l'analyse du système au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Dans cette zone, la méthode de la variété centrale peut être utilisée. Cette méthode est, dans un premier temps, proposée comme outil permettant de simplifier le calcul des cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Dans un deuxième temps, une méthodologie originale permettant une analyse

robuste du comportement dynamique au voisinage du point de bifurcation de Hopf en tenant compte des incertitudes sur les conditions initiales est proposée et appliquée. Tous les résultats sont validés via leur comparaison à ceux de la méthode référentielle de Monte Carlo.

4.2. Système avec frottement

4.2.1. Description du modèle mécanique

Le modèle représenté dans la figure (4.1) est constitué d'une masse tenue contre une bande en déplacement. Le contact entre la masse et la bande est modélisé par deux plaques soutenues par deux raideurs différentes comportant chacune une composante linéaire et une composante cubique. La masse et la surface de la bande sont supposées être toujours en contact. Le coefficient de frottement au contact est supposé constant tout comme la vitesse de déplacement de la bande. La vitesse relative entre la bande et les vitesses $\dot{X}_1$ et $\dot{X}_2$ est supposée positive car la direction de la force de frottement est considérée constante. Toutes ces hypothèses sont prises en considération pour obtenir un modèle non linéaire à deux degrés de liberté simplifié mais ayant un comportement représentatif de celui des systèmes de freinage à tambour, (Hultèn, 1993).

La force tangentielle F_T due au frottement dans le contact est supposée proportionnelle à la force normale F_N tel que c'est indiqué par la loi de Coulomb : $F_T = \mu F_N$.

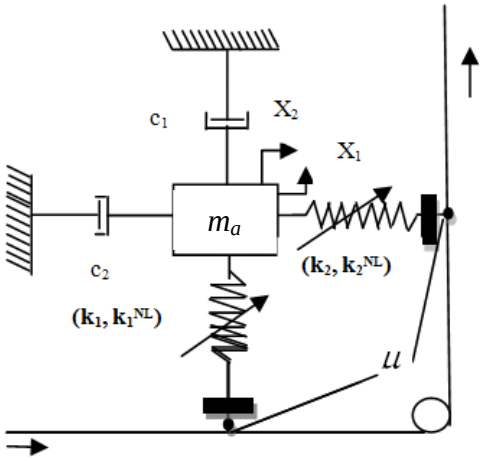


Fig.4. 1. Système à deux degrés de liberté d'Hultén

4.2.1.1. Validation du choix du modèle mécanique

Les systèmes frottants peuvent être soumis à des oscillations auto-entretenues induites par le frottement. Comme décrit dans le premier chapitre, deux familles de mécanismes sont définies pour expliquer la genèse des instabilités par le frottement : le stick slip et la variation du coefficient du frottement liés aux propriétés tribologiques des surfaces en contact frottant et le Sprag-slip ainsi que le

couplage de modes liés aux propriétés structurelles. Le couplage de mode est le mécanisme adopté, dans le cadre de cette thèse, pour justifier l'apparition des instabilités dans les systèmes frottants. Pour rappel, le couplage de modes attribue la genèse des oscillations au couplage des degrés de liberté normaux et tangentiels. Ce phénomène se traduit par une coalescence des modes au point de bifurcation de Hopf au voisinage duquel le système devient, pour une perturbation infinitésimale, instable. Ce mécanisme vient corroborer l'idée de l'insuffisance de la variation du coefficient de frottement en fonction de la vitesse de glissement pour générer des instabilités.

L'étude du phénomène du couplage de modes a été initiée par Spurr (Spurr, 1963). Dans cette étude, il a été montré que deux degrés de liberté sont suffisants pour modéliser le phénomène de couplage de modes et donc pour analyser les instabilités y découlant. Cette conclusion est aussi le résultat de l'étude de North dans laquelle le phénomène du couplage de modes développé par un modèle à 8 degrés de liberté est reproduit par un modèle à deux degrés de liberté (North, 1972). Les modèles minimaux sont ainsi introduits pour représenter les instabilités en utilisant seulement deux ou trois degrés de liberté (Bengisu et Akay, 1994). La même stratégie est adoptée par Hultén pour étudier le crissement dans les systèmes de freinage, (Hultén, 1993) et par Sinou pour définir le facteur d'amortissement robuste ou encore pour analyser le comportement vibratoire, (Sinou, 2007a, 2007b). Toutes ces études ont affirmé l'idée de la suffisance de deux degrés de liberté pour modéliser et par conséquent analyser le couplage de modes. L'utilisation du modèle d'Hultèn à deux degrés de liberté, décrit précédemment, obéit à ces considérations.

4.2.1.2. Les équations du mouvement

Le système représenté dans la figure (4.1) a deux degrés de liberté qui sont les déplacements X_1 et X_2. Les actions s'exerçant sur le système sont : les forces de rappel liées aux raideurs $\left(k_1, k_1^{NL}\right)$, $\left(k_2, k_2^{NL}\right)$, les forces d'amortissement liées aux amortisseurs c_1, c_2 et les forces tangentielles de frottement au niveau des deux points de contact. L'application du principe fondamental de la dynamique permet ainsi de générer les équations différentielles régissant les déplacements instantanés $X_1(t)$ et $X_2(t)$.

$$\begin{cases} m_a\ddot{X}_1(t)+c_1\dot{X}_1(t)+k_1X_1(t)+k_1^{NL}X_1^3(t)=\mu\left(k_2X_2(t)+k_2^{NL}X_2^3(t)\right) \\ m_a\ddot{X}_2(t)+c_1\dot{X}_2(t)+k_2X_2(t)+k_2^{NL}X_2^3(t)=-\mu\left(k_1X_1(t)+k_1^{NL}X_1^3(t)\right) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} m_a\ddot{X}_1(t)+c_1\dot{X}_1(t)+k_1X_1(t)-\mu k_2X_2(t)=-k_1^{NL}X_1^3(t)+\mu k_2^{NL}X_2^3(t) \\ m_a\ddot{X}_2(t)+c_1\dot{X}_2(t)+\mu k_1X_1(t)+k_2X_2(t)=-\mu k_1^{NL}X_1^3(t)-k_2^{NL}X_2^3(t) \end{cases} \tag{4.2}$$

De manière équivalente, le système d'équations précédent peut être exprimé comme suit :

$$M\ddot{X}(t)+C\dot{X}(t)+KX(t)=FNL\left(X(t)\right) \tag{4.3}$$

où $X(t)=\left(X_1(t)\ \ X_2(t)\right)^T$, $\ddot{X}(t),\dot{X}(t)$ et $X(t)$ sont, respectivement, les vecteurs bidimensionnels de l'accélération, de la vitesse et du déplacement, M est la matrice masse, C désigne la matrice amortissement, K est la matrice raideur et $FNL\left(X(t)\right)$ représente un vecteur de fonctions non linéaires. Ces paramètres sont définis comme suit :

$$M=\begin{bmatrix} m_a & 0 \\ 0 & m_a \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix},\ K=\begin{bmatrix} k_1 & -\mu k_2 \\ \mu k_1 & k_2 \end{bmatrix},\ FNL\left(X(t)\right)=\begin{pmatrix} -k_1^{NL}X_1^3(t)+\mu k_2^{NL}X_2^3(t) \\ -\mu k_1^{NL}X_1^3(t)-k_2^{NL}X_2^3(t) \end{pmatrix}$$

La représentation (4.3) est standardisée en considérant le coefficient d'amortissement relatif $\eta_i=c_i\big/\sqrt{m_a k_i}\ (i=1,2)$ et les pulsations propres $\omega_{0,i}=\sqrt{k_i/m_a}$ d'où le système (4.4) suivant :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{X}_1(t) \\ \ddot{X}_2(t) \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} \eta_1\omega_{0,1} & 0 \\ 0 & \eta_2\omega_{0,2} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{X}_1(t) \\ \dot{X}_2(t) \end{pmatrix}+ \begin{bmatrix} \omega_{0,1}^2 & -\mu\omega_{0,2}^2 \\ \mu\omega_{0,1}^2 & \omega_{0,2}^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\varphi_1^{NL}X_1^3(t)+\mu\varphi_2^{NL}X_2^3(t) \\ -\mu\varphi_1^{NL}X_1^3(t)-\varphi_2^{NL}X_2^3(t) \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

avec $\varphi_i^{NL}=k_i^{NL}\big/m\ \ ,(i=1,2)$

L'analyse robuste du système (4.4) sera considérée à base de sa représentation dans l'espace de phase définit par les déplacements $x_1(t)=X_1(t)$, $x_3(t)=X_2(t)$ et les vitesses $x_2(t)=\dot{X}_1(t)$ $x_4(t)=\dot{X}_2(t)$. Le système (4.4) est ainsi représenté dans l'espace d'état par (4.5).

$$\dot{x}(t)=A(\mu)x(t)+f_{NL}\left(x(t),\mu\right) \tag{4.5}$$

où $x(t)=\left(x_1(t)\quad x_2(t)\quad x_3(t)\quad x_4(t)\right)^T$, $A(\mu)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_{0,1}^2 & -\eta_1\omega_{0,1} & \mu\omega_{0,2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\mu\omega_{0,1}^2 & 0 & -\omega_{0,2}^2 & -\eta_2\omega_{0,2} \end{bmatrix}$ et

$$f_{NL}\left(x(t),\mu\right)=\begin{bmatrix} 0 \\ -\varphi_1^{NL}x_1^3(t)+\mu\varphi_2^{NL}x_3^3(t) \\ 0 \\ -\mu\varphi_1^{NL}x_1^3(t)-\varphi_2^{NL}x_3^3(t) \end{bmatrix}$$

4.2.1.3. Conclusion

Le phénomène de couplage de modes a été introduit précédemment comme pouvant être un mécanisme à la base de l'apparition des instabilités dans les systèmes frottants. Ces instabilités sont générées avec un coefficient de frottement constant. Les valeurs de celui-ci sont en pratique incertaines. En effet, les processus de fabrication, aussi précis soient-ils, induisent diverses imprécisions et incertitudes qui font que les mêmes systèmes issus du même processus de fabrication, n'auront pas forcément le même coefficient frottement. Celui-ci admet, dans le cas général, une dispersion plus ou moins importante. Une description probabiliste de cette dispersion est considérée en adéquation avec l'approche probabiliste sélectionnée pour traiter de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants. Dans cette étude, une loi de probabilité uniforme est supposée pour décrire la dispersion du coefficient de frottement. Les bornes de l'incertitude étant généralement connues, la loi uniforme est celle qui maximise l'incertitude. Toutes les valeurs entre les bornes ont la même probabilité d'occurrence. L'évaluation des méthodes basées sur le chaos polynomial se fera, en définitive, sur un système frottant minimal (à 2 degrés de liberté) dont le coefficient de frottement est constant mais aléatoire régi par une loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ donné.

4.3. Analyse robuste de la stabilité

4.3.1. Introduction

Plusieurs approches existent pour l'analyse de la stabilité des systèmes stochastiques. Pour les systèmes linéaires, si les paramètres sont des fonctions linéaires bornées des variables aléatoires modélisant les incertitudes alors il suffit de tester uniquement la stabilité correspondant aux valeurs extrêmes des paramètres incertains, (Polyak et Tempo, 2001). Dans le cas contraire, c'est-à-dire que si les incertitudes n'apparaissent pas de façon linéaire alors la méthode n'est pas valide. En effet, il faut non seulement que la stabilité soit vérifiée aux valeurs extrêmes mais elle doit être garantie pour la totalité de la distribution des paramètres.

Pour les systèmes non linéaires stochastiques, l'analyse de la stabilité est plus délicate. Les méthodes basées sur l'échantillonnage des distributions probabilistes sont les plus connues et les plus utilisées. Ce sont des méthodes qui s'inscrivent dans le cadre des procédés de Monte Carlo. Elles tentent d'approximer les densités de probabilité en utilisant un grand nombre de points. Ceci est effectué en créant une grille de valeurs suivant les supports probabilistes des incertitudes puis en opérant des simulations et des analyses pour chaque point de la grille. Dans l'analyse de la stabilité, les conditions pour la stabilité peuvent être testées pour chaque point pour déterminer si le système est stable pour la distribution entière. Stengel a introduit l'idée de la probabilité de stabilité et a utilisé les méthodes d'échantillonnage pour analyser la stabilité dans un sens probabiliste, (Stengel, 1991). Dans un cadre similaire, Barmish et al ont utilisé les méthodes de Monte Carlo pour analyser la stabilité en utilisant les techniques LMI (pour Linear Matrix Inequation), (Barmish et al, 1996).

Les méthodes basées sur l'échantillonnage des distributions sont efficaces mais requièrent un grand nombre de calculs et engagent, par conséquent, un coût prohibitif en temps. Comme déjà indiqué dans l'étude bibliographique, dans un travail récent, Fischer a proposé une méthodologie qui permet

d'analyser la stabilité des systèmes dynamiques stochastiques linéaires ou non linéaires sans avoir recours à l'échantillonnage des distributions probabilistes. Partant de l'idée que le chaos polynomial généralisé est capable d'approximer, avec une précision arbitraire, l'évolution des incertitudes dans les trajectoires d'état induites par les incertitudes paramétriques, Fisher l'utilise pour transformer la dynamique stochastique en un système déterministe dont la stabilité peut être analysée en utilisant les outils classiques dont certains ont été présentés dans le deuxième chapitre, (Fischer, 2008a, 2008b). Les résultats peuvent être ainsi utilisés pour mieux appréhender la stabilité du système stochastique. Avant d'appliquer cette méthode et d'autres méthodes originales toutes basées sur les développements spectraux, la méthode classique basée sur le principe de Monte Carlo est développée.

4.3.2. Analyse de la stabilité par la méthode de Monte Carlo

L'utilisation de la méthode de Monte Carlo pour analyser la stabilité du système (4.5) consiste à créer une grille de valeurs numériques à partir du support probabiliste du coefficient μ de frottement puis à calculer les valeurs propres du système linéarisé pour chacune des valeurs de la grille. La stabilité est analysée en chaque point de la grille conformément à la méthode indirecte de Lyapunov présentée dans le deuxième chapitre.

La première étape consiste à déterminer le point d'équilibre du système (4.5). Celui-ci, noté x_e, est solution de l'équation non linéaire statique suivante :

$$\dot{x}_e = A(\mu)\, x_e + f_{NL}(x_e, \mu) = 0 \tag{4.6}$$

Il peut être vérifié que l'origine est solution de l'équation (4.6). L'origine est donc le point d'équilibre du système (4.5).

Considérons le cas où le coefficient de frottement μ est régi par une loi de distribution uniforme sur l'intervalle $[0 \;\; 0.5]$. La position de ce point d'équilibre n'est pas affectée par l'incertitude du coefficient de frottement. La stabilité de l'origine est analysée pour chacun des 10,000 points généré suivant le support probabiliste considéré pour le coefficient de frottement. Ce nombre a été fixé pour garantir un niveau de confiance de 99% avec une marge de précision de 1% ; ceci sera explicité à la fin de la section (4.3.3). L'objectif est de définir, par rapport à la dispersion du coefficient de frottement, des zones sûres de stabilité et d'instabilité. Pour cela les valeurs propres $\lambda_i, (i = 1, ..., 4)$ du système linéarisé à l'origine de (4.5) sont calculées en résolvant l'équation caractéristique (4.7) pour chaque tirage du coefficient de frottement. L'analyse du signe des parties réelles permet alors de séparer les régions de stabilité des régions d'instabilité. Les frontières entre les différentes régions sont des zones incertaines.

$$\det\left(A(\mu)-\lambda I\right)=0 \tag{4.7}$$

Conformément à la méthode indirecte de Lyapunov, si toutes les parties réelles des valeurs propres restent négatives alors l'origine est asymptotiquement stable. Si au moins une partie réelle des valeurs propres est positive, l'origine est instable. La partie imaginaire de cette valeur propre représente la fréquence du mode instable. Enfin, s'il existe une partie réelle nulle et que toutes les autres sont négatives, il ne peut y avoir de conclusion possible sur la stabilité. Un phénomène particulier peut être défini, celui caractérisant la bifurcation de Hopf . Celle-ci est définie dans le cas où en un point $(x,\mu)=(0,\mu_0)$ toutes les conditions de (4.8) sont vérifiées.

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\lambda_{centrale}(\mu)\right)\Big|_{x=0,\mu=\mu_0}=0 \\ \mathrm{Re}\left(\lambda_{non-centrale}(\mu)\right)\Big|_{x=0,\mu=\mu_0}<0 \\ \dfrac{d}{d\mu}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda(\mu)\right)\right)\Big|_{x=0,\mu=\mu_0}\neq 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

Pour rappel, les deux premières conditions impliquent que le système possède au moins une paire de valeurs propres $\lambda_{centrale}$ imaginaires pures et toutes les autres sont strictement négatives. Quant à la dernière condition, elle implique une condition sur la traversalité de l'axe des imaginaires pour la partie réelle des valeurs propres.

L'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres est tracée, dans la figure (4.2), en fonction du coefficient de frottement. Elle correspond aux valeurs paramétriques suivantes :

$$\omega_1=2\pi\times 100 \text{ rad/s}\,,\ \omega_2=2\pi\times 75 \text{ rad/s}\,,\eta_1=\eta_2=0.02\,,\ \varphi_1^{NL}=\omega_1^2 \text{ and } \varphi_2^{NL}=0\,.$$

Ayant deux degrés de liberté, le système (4.5) possède 4 valeurs propres. Ces dernières, selon l'évolution illustrée dans la figure (4.2), sont deux à deux conjuguées.

$$\begin{cases}\lambda_1=r_1+j\,im_1\\ \lambda_2=r_2+j\,im_2\end{cases} \text{ et } \begin{cases}\lambda_3=r_3+j\,im_3\\ \lambda_4=r_4+j\,im_4\end{cases}$$

Avec les parties réelles $r_2=r_1$, $r_3=r_4$ et les parties imaginaires (pulsations) $im_2=-im_1\,,im_4=-im_3$

Le système (4.5) présente deux modes conjugués stables de différentes pulsations lorsque $\mu<\mu_0$ $(\mu_0\approx 0.2894)$. L'origine est asymptotiquement stable dans cette zone. Avec l'augmentation du coefficient de frottement, les deux modes se rapprochent en fréquence est coalescent en devenant égaux au point μ_0 appelé, point de bifurcation de Hopf. En effet, au point $\mu=\mu_0$, le système (4.5) possède une seule paire de valeurs propres imaginaires pures tandis que l'autre paire reste à parties réelles négatives. Après le point de bifurcation de Hopf $(\mu>\mu_0)$, le phénomène de couplage de

modes est obtenu. L'origine est dans ce cas instable. Ces résultats seront utilisés comme référence à laquelle tous les résultats sur la stabilité présentés ci-dessous seront comparés pour être validés.

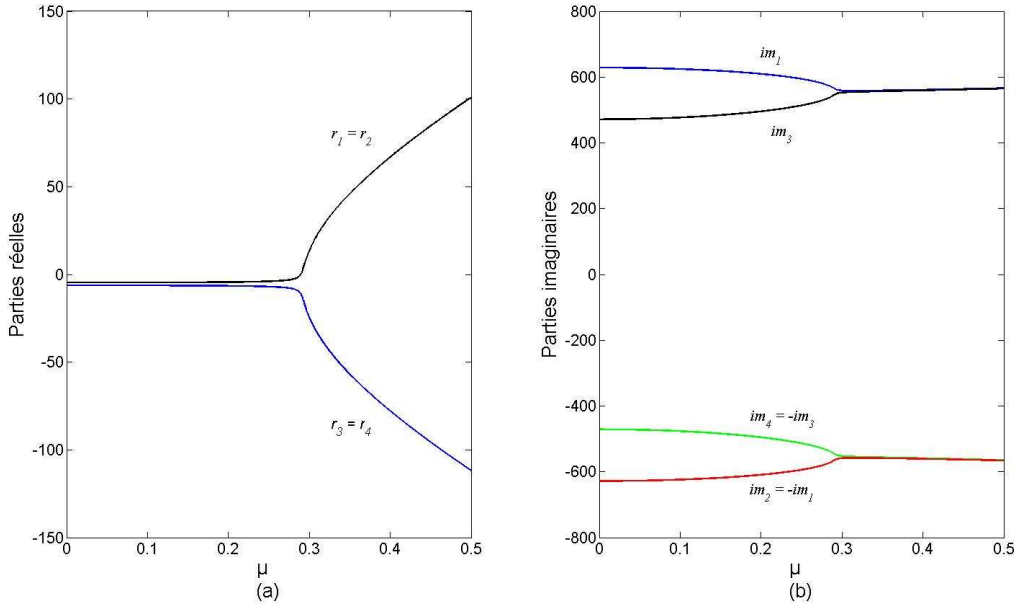


Fig.4. 2. Evolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système (4.5) en fonction du coefficient de frottement. (a) parties réelles, (b) partie imaginaire

4.3.3. Analyse de la stabilité en utilisant la théorie du chaos de Wiener

Dans la section précédente, l'analyse de la stabilité en tenant compte de la dispersion du coefficient de frottement a été effectuée en échantillonnant la distribution probabiliste du coefficient de frottement puis en calculant les valeurs propres du système linéarisé, solutions des équations caractéristiques correspondant aux valeurs de la distribution échantillonnée. En pratique, cette méthodologie se trouve confrontée à plusieurs difficultés liées à la fois à la convergence de la méthode de Monte Carlo mais aussi au calcul des valeurs propres qui devient laborieux particulièrement dans le cas des systèmes à grand nombre de degrés de liberté. Pour pallier à ces inconvénients, on propose l'utilisation des développements spectraux basés sur le concept du chaos de Wiener combiné avec l'approche de Lyapunov. La combinaison des développements spectraux à savoir, le chaos polynomial de Legendre et le chaos de Wiener-Haar, avec l'approche directe de Lyapunov d'une part et celle du développement de Legendre avec l'approche indirecte de Lyapunov d'autre part, font l'objet de deux parties distinctes.

4.3.3.1. Combinaison des développements spectraux avec la théorie directe de Lyapunov

Cette méthode permet de modéliser l'évolution de l'aléa dans les trajectoires d'état en le décomposant sur une base orthogonale au moyen d'une projection de Galerkin exécutée de façon intrusive. Un

système d'équations différentielles déterministes en résulte. Sa stabilité est analysée en utilisant la méthode directe de Lyapunov. Dans le cas du système (4.5), le système déterministe résultant est polynomial d'où la possibilité d'utiliser le programmation Sum of Square (SOS) pour construire des fonctions polynomiales de Lyapunov.

Du point de vue implémentation, pour des considérations de calculs, l'analyse par petit intervalle est favorisée car plus l'intervalle d'incertitude est large, plus grand est le nombre de fonctions orthogonales nécessaires pour une bonne précision. Par conséquent, la dimension du système résultant de l'application de la projection du système incertain dans la base choisie, devient si grande que la construction d'une fonction de Lyapunov devient laborieuse à cause de la grande taille du problème SOS engendrée par l'important nombre de monômes constituant la fonction polynomiale de Lyapunov à construire. Donc, pour pallier à ces difficultés, l'analyse de la stabilité sur la totalité de l'intervalle de dispersion du coefficient de frottement $[0, 0.5]$ est effectuée en divisant celui-ci en plusieurs sous-intervalles. Par ailleurs, deux familles de fonctions orthogonales sont utilisées pour construire une représentation de la dynamique aléatoire du système (4.5). Il s'agit en l'occurrence des polynômes de Legendre et des ondelettes de Haar.

4.3.3.1.1. Combinaison du chaos polynomial généralisé (Wiener-Legendre) intrusif avec la théorie directe de Lyapunov

Cette méthode comprend deux étapes essentielles à savoir : la construction d'un système déterministe caractérisant la dynamique des modes stochastiques constituant les différents processus stochastiques du système (4.5) et l'analyse de sa stabilité.

Rappelons que le coefficient de frottement μ dans (4.5) est supposé régi par une loi de distribution uniforme sur un intervalle de dispersion $[a, b]$. Il peut ainsi être exprimé en fonction d'une variable aléatoire ξ uniformément distribuée sur $[-1, 1]$, intervalle d'orthogonalité des polynômes de Legendre :

$$\mu = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\xi \tag{4.9}$$

L'expression (4.9) peut être vue comme étant un développement en polynômes de Legendre à l'ordre 1.

Les variables d'état du système (4.5) sont des processus aléatoires qui peuvent être exprimés dans la base du chaos polynomial de Legendre,

$$x_i(t,\xi) = \sum_{j=0}^{P} \overline{x}_{i,j}(t) L_j(\xi) \ , i = 1,...,4 \tag{4.10}$$

- **Application du schéma intrusif**

L'application du schéma intrusif requiert, dans sa première étape, la substitution de tous les processus et grandeurs aléatoires dans le modèle (4.5) par leurs développements en séries de polynômes de

Legendre (4.9) et (4.10). La seconde étape consiste à décomposer l'aléa dans la base polynomiale de Legendre via l'utilisation de la projection de Galerkin qui permet ainsi de générer un système d'équations différentielles non linéaires déterministes (4.11). A remarquer que l'application du chaos de Legendre intrusif n'affecte pas la position du point d'équilibre. Le degré des non linéarités polynomiales reste aussi identique à celui du système (4.5). Le nombre de non linéarités polynomiales ainsi que la dimension du système résultant s'y trouvent par contre considérablement augmentés.

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}}_{1,l}(t) = \bar{x}_{2,l}(t) \\
\dot{\bar{x}}_{3,l}(t) = \bar{x}_{4,l}(t) \\
\dot{\bar{x}}_{2,l}(t) = -\eta_1\omega_1\bar{x}_{2,l}(t) - \omega_1^2\bar{x}_{1,l}(t) + \dfrac{\omega_2^2}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{i=0}^{P}\bar{x}_{3,j}(t)\left\langle \mu(\xi)L_j(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_1^{NL}}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{j=0}^{P}\sum_{k=0}^{P}\sum_{q=0}^{P}\bar{x}_{1,j}(t)\bar{x}_{1,k}(t)\bar{x}_{1,q}(t)\left\langle L_j(\xi)L_k(\xi)L_q(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_2^{NL}}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{j=0}^{P}\sum_{k=0}^{P}\sum_{q=0}^{P}\bar{x}_{3,j}(t)\bar{x}_{3,k}(t)\bar{x}_{3,q}(t)\left\langle \mu(\xi)L_j(\xi)L_k(\xi)L_q(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
\dot{\bar{x}}_{4,l}(t) = -\eta_2\omega_2\bar{x}_{4,l}(t) - \omega_2^2\bar{x}_{3,l}(t) + \dfrac{\omega_1^2}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{i=0}^{P}\bar{x}_{1,j}(t)\left\langle \mu(\xi)L_j(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_1^{NL}}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{j=0}^{P}\sum_{k=0}^{P}\sum_{q=0}^{P}\bar{x}_{1,j}(t)\bar{x}_{1,k}(t)\bar{x}_{1,q}(t)\left\langle \mu(\xi)L_j(\xi)L_k(\xi)L_q(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_2^{NL}}{\left\langle L_l^2(\xi)\right\rangle}\sum_{j=0}^{P}\sum_{k=0}^{P}\sum_{q=0}^{P}\bar{x}_{3,j}(t)\bar{x}_{3,k}(t)\bar{x}_{3,q}(t)\left\langle L_j(\xi)L_k(\xi)L_q(\xi)L_l(\xi)\right\rangle \\
l = 0,1,\ldots,P
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

Le système (4.11) est de dimension $n(P+1)$ où $n=4$ est la dimension du système original (4.5) et $P+1$ est le nombre de termes dans le développement (4.10). Il définit une dynamique déterministe des modes stochastiques $\bar{x}_{i,j}(t)$, $(i=1,\ldots,4;\ j=0,\ldots,P)$. Le caractère aléatoire du système (4.5) a été éliminé par la projection de Galerkin. En effet, les produits scalaires $\langle . \rangle$, étant monodimensionnel, peuvent être calculés analytiquement et donnent des constantes. Ainsi, pour déterminer les modes stochastiques $\bar{x}_{i,j}(t)$ et donc les développements (4.10) des processus stochastiques $x_i(t,\xi)$, $(i=1,\ldots,4)$, il ne reste plus qu'à résoudre le système (4.11).

Une étape intermédiaire consiste naturellement à fixer l'ordre de troncation *P* nécessaire et aussi suffisant pour une modélisation précise de la dynamique incertaine du système (4.5) ainsi que ses caractéristiques statistiques. Une étude de convergence permet d'aider à fixer *P* qui, comme déjà souligné par l'équation (3.32), représente, dans le cas d'un seul paramètre incertain, l'ordre du chaos polynomial généralisé, c'est-à-dire *P*=*p*. L'étude de convergence consiste à augmenter *P* jusqu'à ce que l'erreur relative des moments statistiques temporels (3.37) estimés entre deux ordres successifs soit négligeable. Cette démarche est utilisée à défaut de disposer d'un critère de contrôle de l'erreur

liée à la troncation de l'ordre du chaos. Les moments statistiques temporels (moyenne, variance) correspondant à l'intervalle temporel [0, 3sec] et l'intervalle $[a,b]=[0,0.1]$ sont calculés à base des modes stochastiques $\overline{x}_{i,j}(t)\ (i=1,...,4;\ j=0,...,P)$, solutions du système (4.11) obtenues en utilisant l'algorithme ODE45 de Matlab. Les valeurs moyennes et les variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à différents ordres *P =2*, *P = 3* et *P = 4* sont représentées respectivement dans les figures (4.3), (4.4).

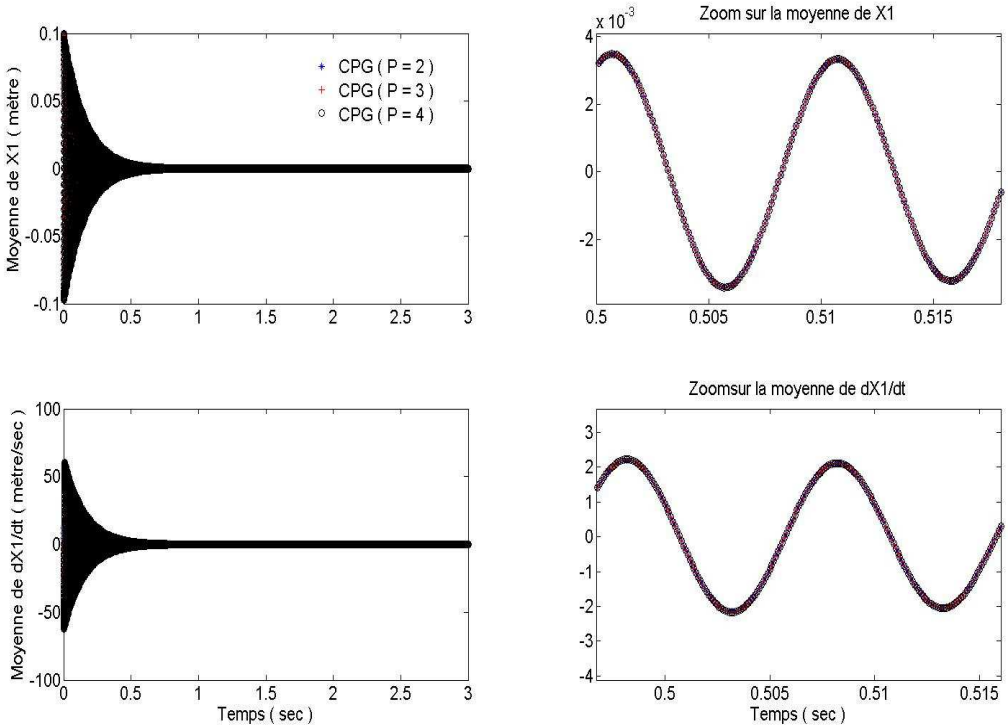


Fig.4. 3. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

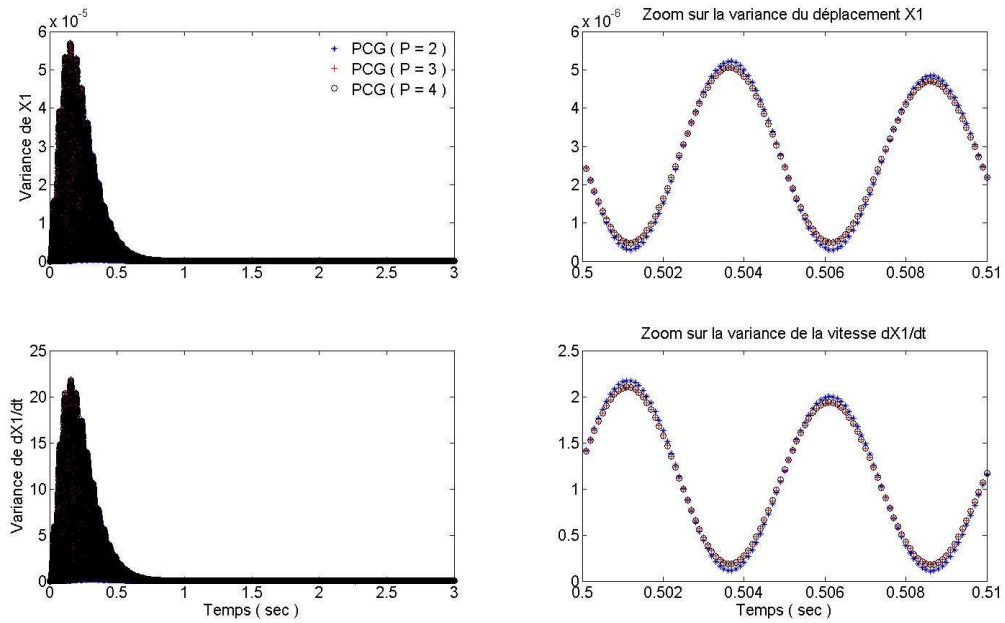


Fig. 4.4. Variance instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

Des figures (4.3) et (4.4), il apparait que la convergence du développement en polynômes de Legendre est rapide. La précision des estimations des statistiques obtenues en augmentant *P* est pratiquement négligeable particulièrement entre $P=3$ et $P=4$. La même observation peut être effectuée sur les réalisations des solutions du système (4.5). Celle correspondant à $\mu = 0.05$ est relevée dans la figure (4.5).

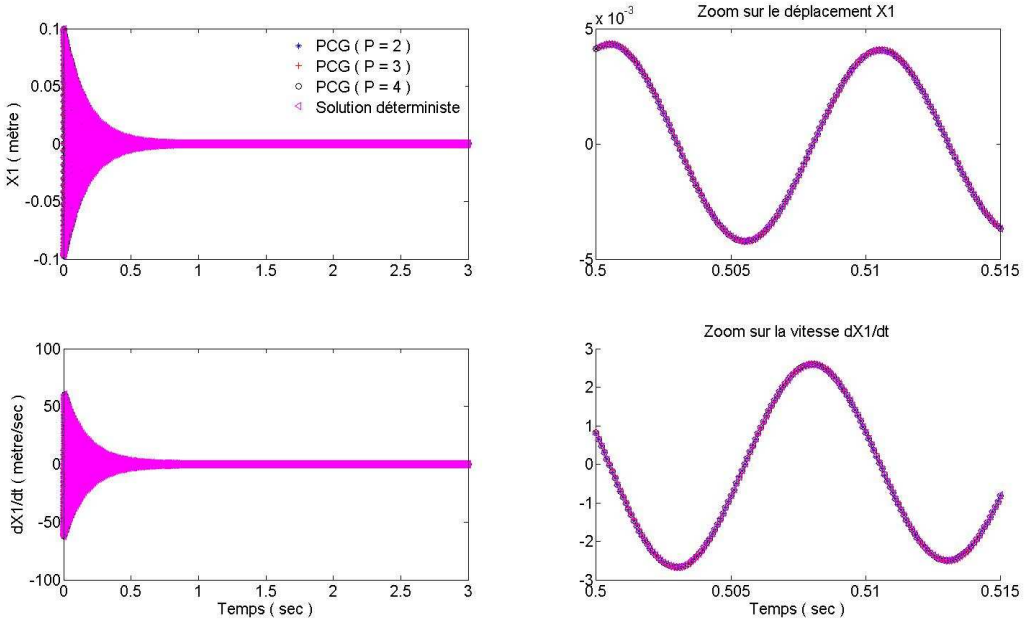


Fig.4. 5. Réalisation du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à μ = 0.05

Les différents résultats montrent que $P = 3$ est suffisant pour une modélisation précise de la dynamique incertaine du système (4.5). Pour appuyer davantage ce choix, les estimations obtenues avec $P=3$ sont confrontées à celles obtenues avec la technique référentielle de Monte Carlo en utilisant 10,000 réalisations du coefficient de frottement uniformément distribué sur l'intervalle défini précédemment. Les résultats correspondant sont relevés dans les figures (4.6) et (4.7).

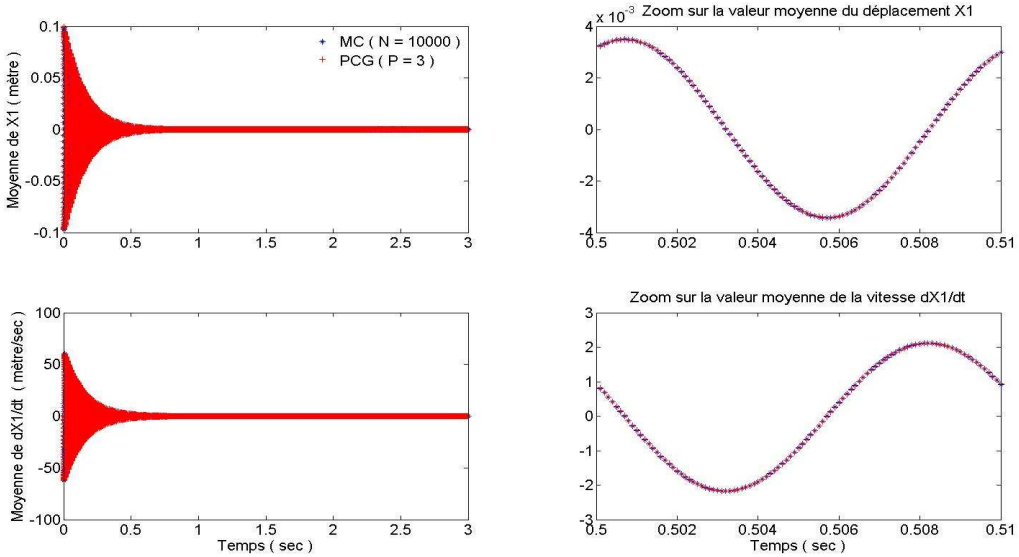


Fig.4. 6. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ en utilisant la chaos polynomial généralisé et la méthode de Monte Carlo

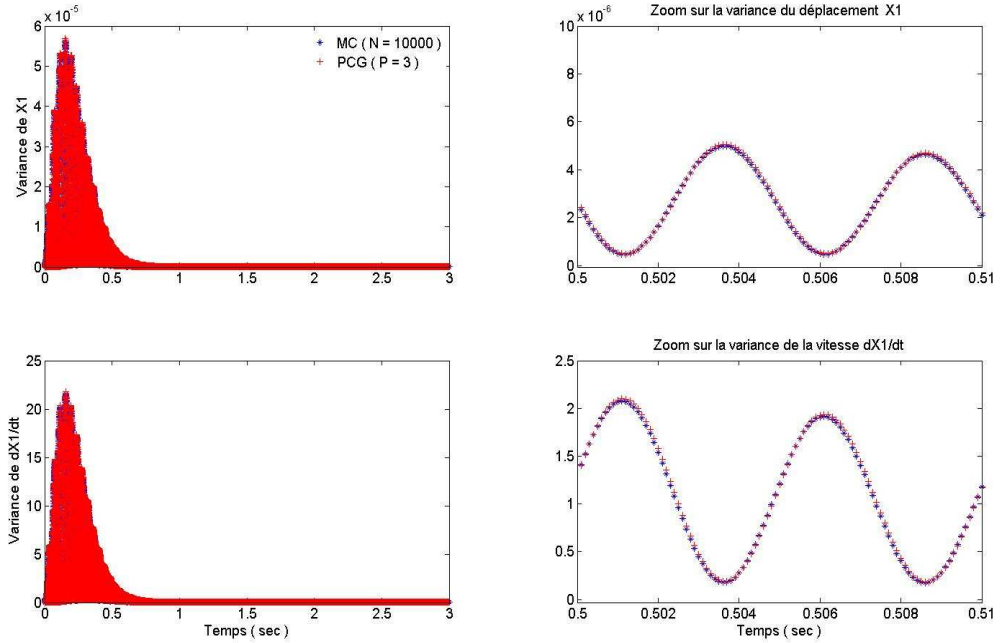


Fig.4. 7. Variance instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ en utilisant la chaos polynomial généralisé et la méthode de Monte Carlo

Tel qu'illustré dans les figures (4.6) et (4.7), les valeurs moyennes et variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$, estimés par le développement en polynômes de Legendre avec P = 3 sont confondues avec les solutions référentielles de Monte Carlo. Les moments statistiques calculés présentent des régimes transitoires qui convergent de façon asymptotique vers l'équilibre. Cette convergence asymptotique est bien modélisée par l'approximation utilisée. En conclusion, la dynamique aléatoire du système (4.5) ainsi que ses caractéristiques statistiques sont bien modélisées par le système déterministe (4.11).

- **Etude de la stabilité du système (4.11)**

La stabilité de système (4.11) est analysée par la méthode directe de Lyapunov. En utilisant la programmation SOS via la boite à outils Sostools (décrite dans l'annexe C), une fonction de Lyapunov quadratique (4.12) est déterminée. Ainsi, conformément à la théorie directe de Lyapunov, l'origine du système (4.11) est stable pour un coefficient de frottement $\mu \in [0 \;\; 0.1]$

$$\begin{aligned} V(\bar{x}) = {} & 0.38\bar{x}_{10}^2 + 1.39\bar{x}_{30}^2 + 1.37\bar{x}_{31}^2 + 1.38\bar{x}_{32}^2 + 1.34\bar{x}_{33}^2 - 0.78e^{-1}\bar{x}_{10}\bar{x}_{12} - 0.68e^{-1}\bar{x}_{11}\bar{x}_{13} \\ & - 0.10e^{-1}\bar{x}_{13}\bar{x}_{32} - 0.18e^{-1}\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} - 0.44e^{-1}\bar{x}_{12}\bar{x}_{33} - 0.29e^{-1}\bar{x}_{13}\bar{x}_{33} - 0.38e^{-1}\bar{x}_{10}\bar{x}_{31} \\ & - 0.34e^{-1}\bar{x}_{11}\bar{x}_{31} - 0.22e^{-1}\bar{x}_{30}\bar{x}_{31} - 0.20e^{-1}\bar{x}_{11}\bar{x}_{32} - 0.29e^{-1}\bar{x}_{12}\bar{x}_{32} - 0.43e^{-1}\bar{x}_{10}\bar{x}_{30} \\ & - 0.11e^{-1}\bar{x}_{11}\bar{x}_{30} - 0.16e^{-1}\bar{x}_{32}\bar{x}_{33} + 0.23\bar{x}_{13}^2 + 0.28\bar{x}_{11}^2 + 0.22\bar{x}_{12}^2 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Rappelons que l'objectif est celui d'analyser la stabilité du système (4.5) pour un coefficient de frottement appartenant à l'intervalle $[0 \;\; 0.5]$. Les difficultés liées aux calculs nous ont imposé de répartir l'analyse sur des segments d'intervalle. La stabilité du système (4.11) correspondant à $\mu \in [0.1 \;\; 0.2]$ et à $\mu \in [0.2 \;\; 0.28]$ a été vérifiée en construisant deux fonctions de Lyapunov. Ces dernières sont données dans l'annexe B. Pour le reste de l'intervalle, aucune fonction de Lyapunov n'a pu être construite ce qui ne permet pas de conclure sur l'état de stabilité.

4.3.3.1.2. Remarque sur l'application du chaos polynomial de Wiener-Hermite

Dans l'étude précédente, la base polynomiale de Legendre a été utilisée. Le choix de cette base a été orienté par le type de loi de probabilité gouvernant l'incertitude du coefficient de frottement. Selon le schéma du chaos polynomial généralisé, la base de Legendre est la plus appropriée à traiter des incertitudes uniformes puisqu'elle offre des propriétés d'optimalité en termes de convergence et de précision (Xiu et Karniadakis, 2002). Toutefois, la distribution des variables d'état étant inconnues, il n'y a aucune garantie que la base de Legendre soit celle qui assure les meilleures propriétés de convergence. Pour analyser la pertinence de ce choix, la base des polynômes d'Hermite est utilisée pour modéliser la dynamique incertaine du système (4.5). Elle montre des performances acceptables mais inférieures à celles offerte par la base polynomiale de Legendre. Telle est la conclusion tirée à partir de la comparaison des estimations des deux premiers moments statistiques du déplacement X_1 obtenues dans la base d'Hermite et la base de Legendre. En effet, les résultats relevés dans les figures

(4.8) et (4.9) montrent la suprématie de la précision des estimations obtenues dans la base de Legendre. Cette observation est plus nette sur l'estimation de la variance illustrée dans figure (4.9). Le constat reste identique sur la reconstruction des réponses du système (4.5). Un exemple de réalisation est illustré dans la figure (4.10). Ces résultats justifient le choix de la base polynomiale de Legendre pour modéliser la dynamique vibratoire aléatoire du système (4.5) qu'on aura à traiter dans la 2ième partie de ce chapitre.

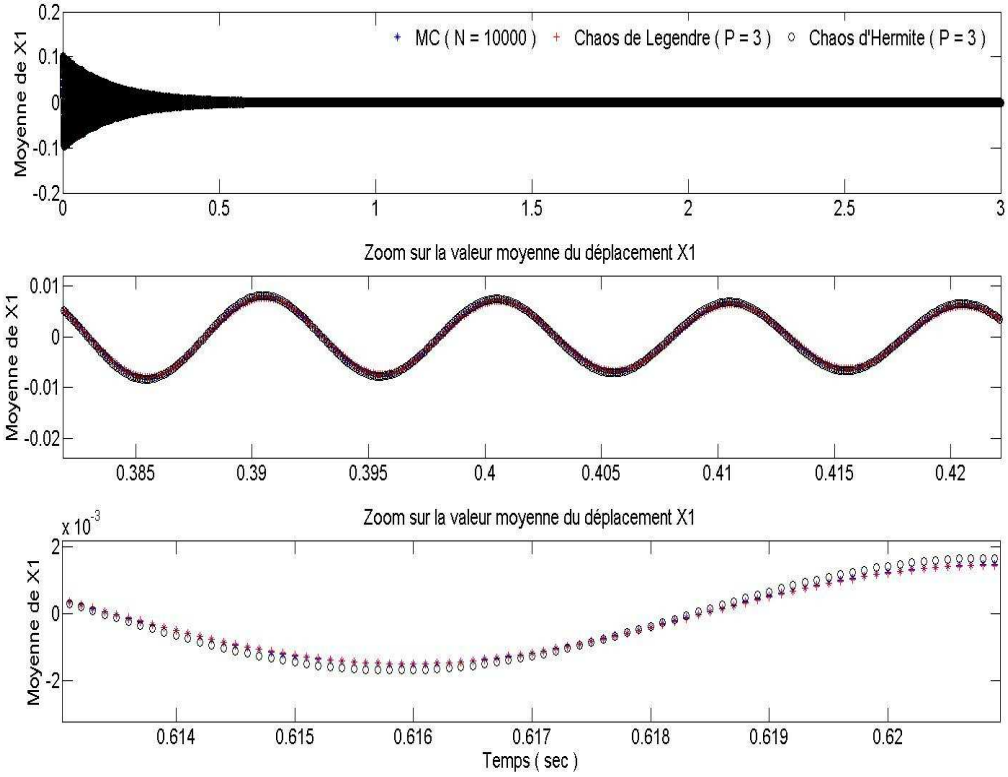


Fig.4. 8. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée dans les bases de Legendre et de Hermite

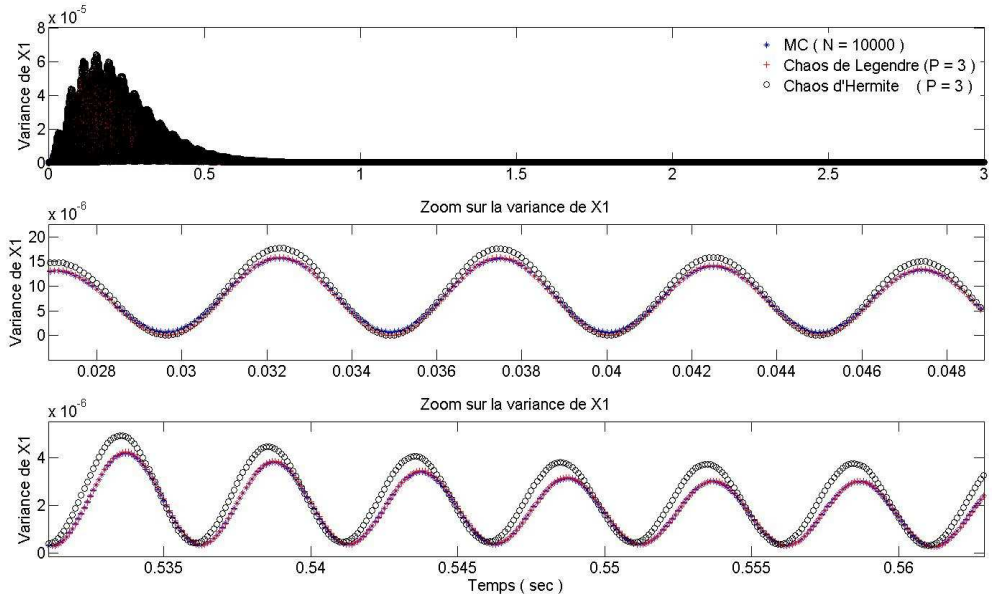


Fig.4. 9. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée dans les bases de Legendre et de Hermite

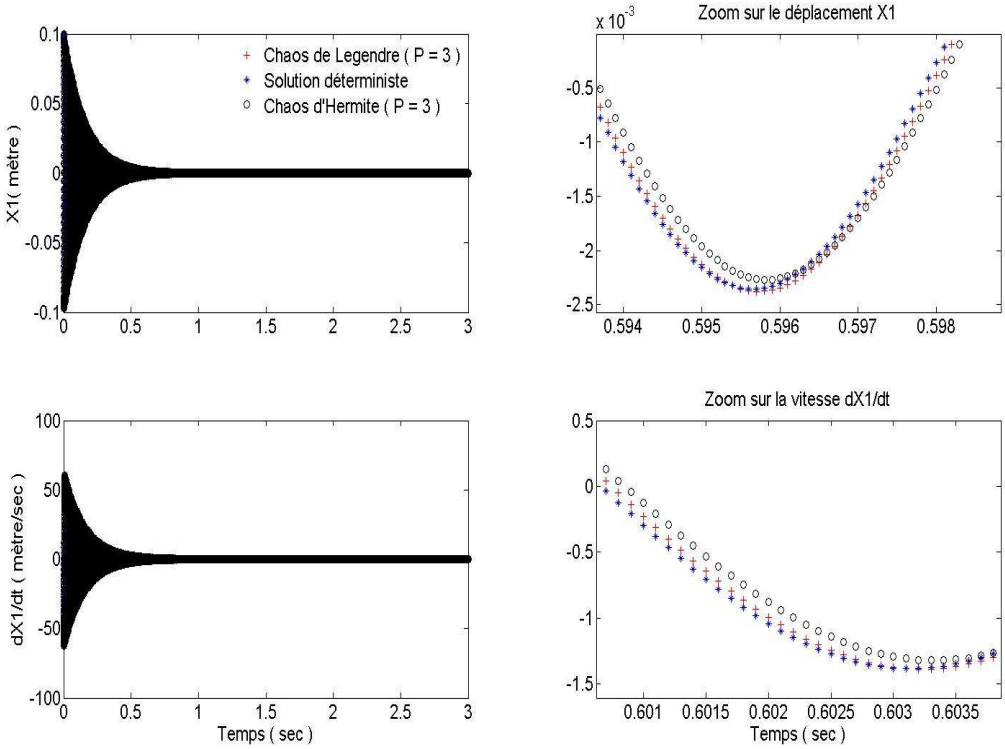


Fig.4. 10. Réalisation dans les base d'Hermite et de Legendre du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à $\mu = 0.05$

4.3.3.1.3. Combinaison du développement de Wiener-Haar avec la théorie directe de Lyapunov

Comme précédemment, l'idée est de substituer, dans le système (4.5), les processus aléatoires $x_i(t,\xi)$ par leurs approximations de Wiener-Haar telles que définies par (4.13) puis de projeter le système résultant dans la base orthonormée que forment les ondelettes de Haar. La projection permet la génération d'un système d'équations différentielles déterministes (4.15) semblable à (4.11) obtenu dans la base polynomiale de Legendre. Sa dimension est par contre plus sensible au niveau de résolution *J*. En effet, la dimension du système résultant de la projection est égale à 2^{J+1}.

$$x_i\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right) = \sum_{q\in\nabla_0} \overline{x}_{i,q}(t)\psi_q(z),\ i=1,..,4 \tag{4.13}$$

où ∇_0 est défini par : $\nabla_0 = \left\{0, q/q = 2^j + k,\ j=0,...,J;k=0,...,2^j-1\right\}, \psi_0(z)=1$ et

$$z = M_\xi\left(\mu(\xi)\right) = \frac{1}{b-a}\left(\mu(\xi)-a\right) \tag{4.14}$$

$$\begin{cases}
\dot{\overline{x}}_{1,l}(t) = \overline{x}_{2,l}(t) \\
\dot{\overline{x}}_{2,l}(t) = -\eta_1\omega_{0,1}\overline{x}_{2,l}(t) - \omega_{0,1}^2\overline{x}_{1,l}(t) + \dfrac{\omega_{0,2}^2}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{i=0}^{J}\overline{x}_{3,j}(t)\left\langle M_\xi^{-1}(z)\psi_j(z)\psi_l(z)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_1^{NL}}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{J}\sum_{q=0}^{J}\overline{x}_{1,j}(t)\overline{x}_{1,k}(t)\overline{x}_{1,q}(t)\left\langle\psi_j(z)\psi_k(z)\psi_q(z)\psi_l(z)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_2^{NL}}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{J}\sum_{q=0}^{J}\overline{x}_{3,j}(t)\overline{x}_{3,k}(t)\overline{x}_{3,q}(t)\left\langle M_\xi^{-1}(z)\psi_j(z)\psi_k(z)\psi_q(z)\psi_l(z)\right\rangle \\
\dot{\overline{x}}_{3,l}(t) = x_{4,l}(t) \\
\dot{\overline{x}}_{4,l}(t) = -\eta_2\omega_{0,2}\overline{x}_{4,l}(t) - \omega_{0,2}^2\overline{x}_{3,l}(t) + \dfrac{\omega_{0,1}^2}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{i=0}^{J}\overline{x}_{1,j}(t)\left\langle M_\xi^{-1}(z)\psi_j(z)\psi_l(z)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_1^{NL}}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{J}\sum_{q=0}^{J}\overline{x}_{1,j}(t)\overline{x}_{1,k}(t)\overline{x}_{1,q}(t)\left\langle M_\xi^{-1}(z)\psi_j(z)\psi_k(z)\psi_q(z)\psi_l(z)\right\rangle \\
\qquad -\dfrac{\varphi_2^{NL}}{\left\langle\psi_l^2(z)\right\rangle}\displaystyle\sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{J}\sum_{q=0}^{J}\overline{x}_{3,j}(t)\overline{x}_{3,k}(t)\overline{x}_{3,q}(t)\left\langle\psi_j(z)\psi_k(z)\psi_q(z)\psi_l(z)\right\rangle
\end{cases}$$

(4.15)

Le système (4.15) régit la dynamique déterministe des coefficients généralisés de Fourier $\overline{x}_{i,l}(t)$, $\left(i=1,...,4; l=0,...,2^{J+1}-1\right)$. Le caractère aléatoire du système (4.5) dû à l'incertitude du coefficient de frottement modélisé par la variable uniforme $z\in[0,1]$, est éliminé par la projection de Galerkin.

Les produits scalaires $\langle . \rangle$, constants, entre les ondelettes sont calculés numériquement. Les coefficients $\overline{x}_{i,l}(t)$ sont calculés en résolvant le système d'équations différentielles (4.15) en utilisant la fonction ODE45. Les processus stochastiques $x_i\left(t, M_{\xi}^{-1}(z)\right)$ peuvent être ensuite déterminés en utilisant le développement (4.13). Les deux premiers moments statistiques temporels (3.98) sont estimés à partir de $\overline{x}_{i,l}(t)$. Les résultats correspondant aux niveaux de résolutions J = 2 et J = 3 sont représentés dans les figures (4.11) et (4.12), l'intervalle de dispersion du coefficient de frottement étant $[a,b]=[0,0.1]$. Par ailleurs, la réalisation du déplacement et de la vitesse correspondant à μ = 0.02 est représentée dans la figure (4.13).

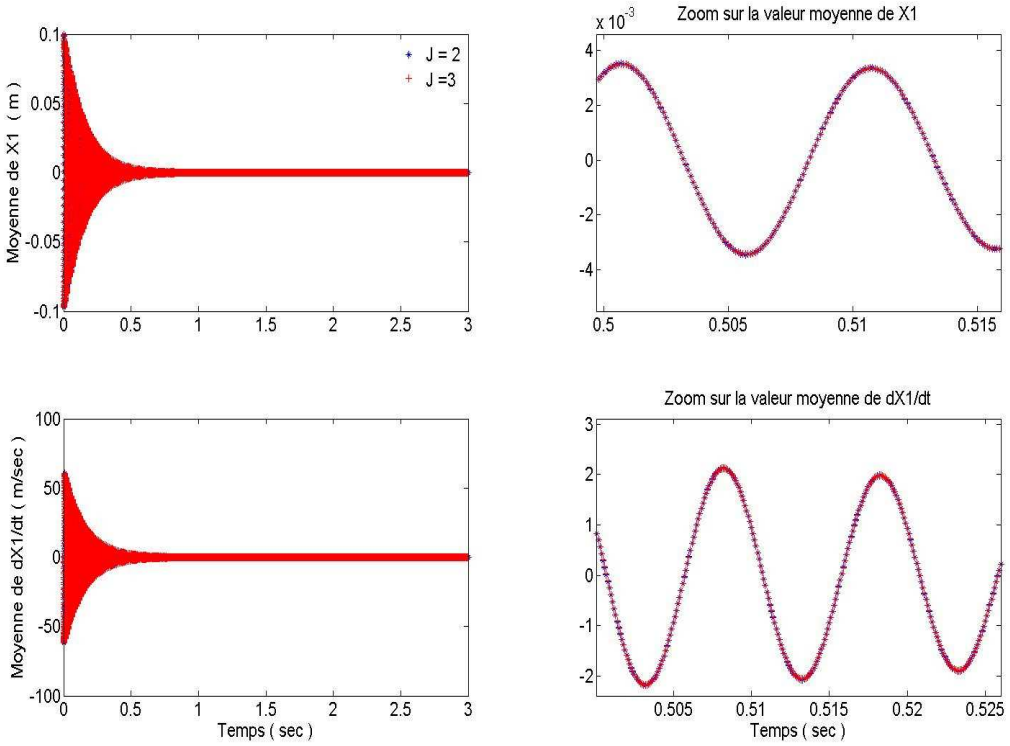


Fig.4. 11. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar

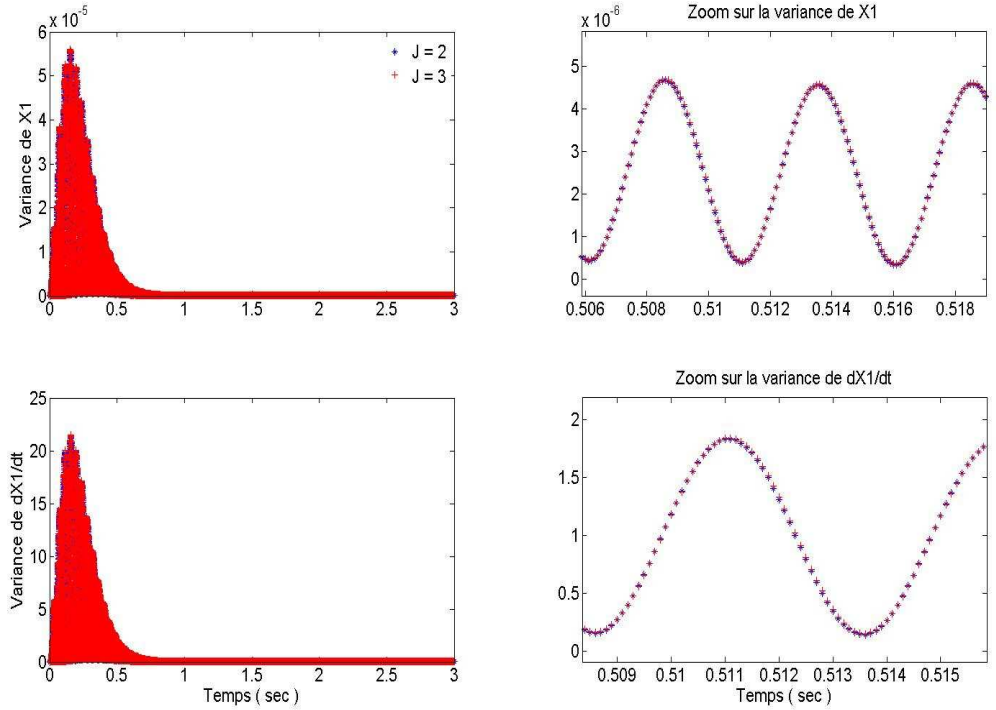


Fig.4. 12. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar

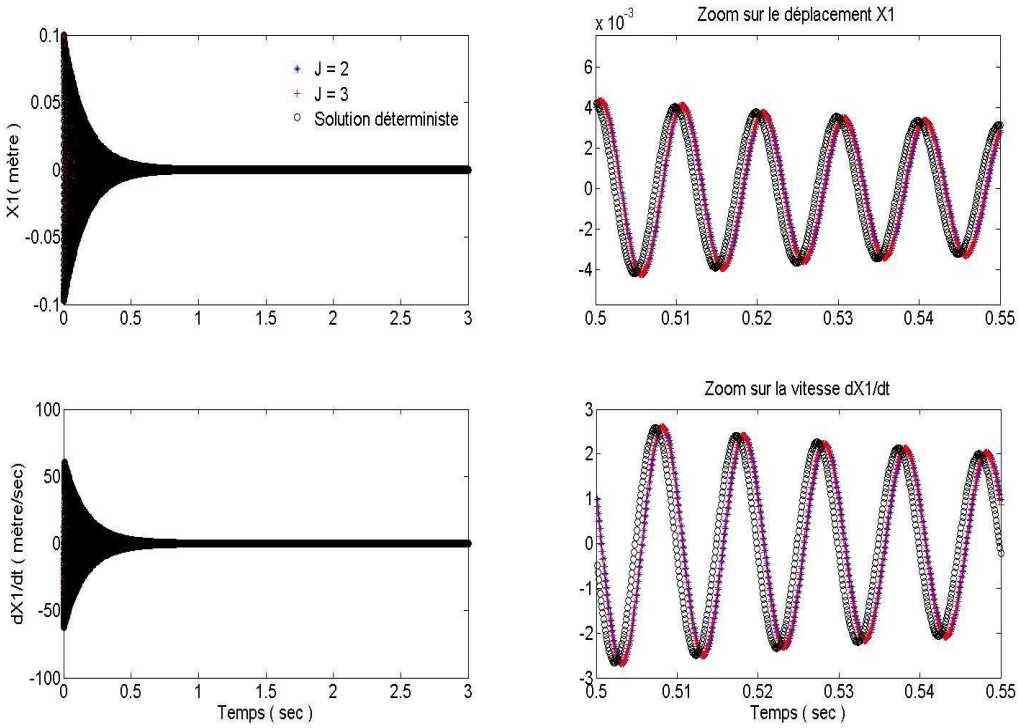


Fig.4. 13. Réalisation du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à μ = 0.02

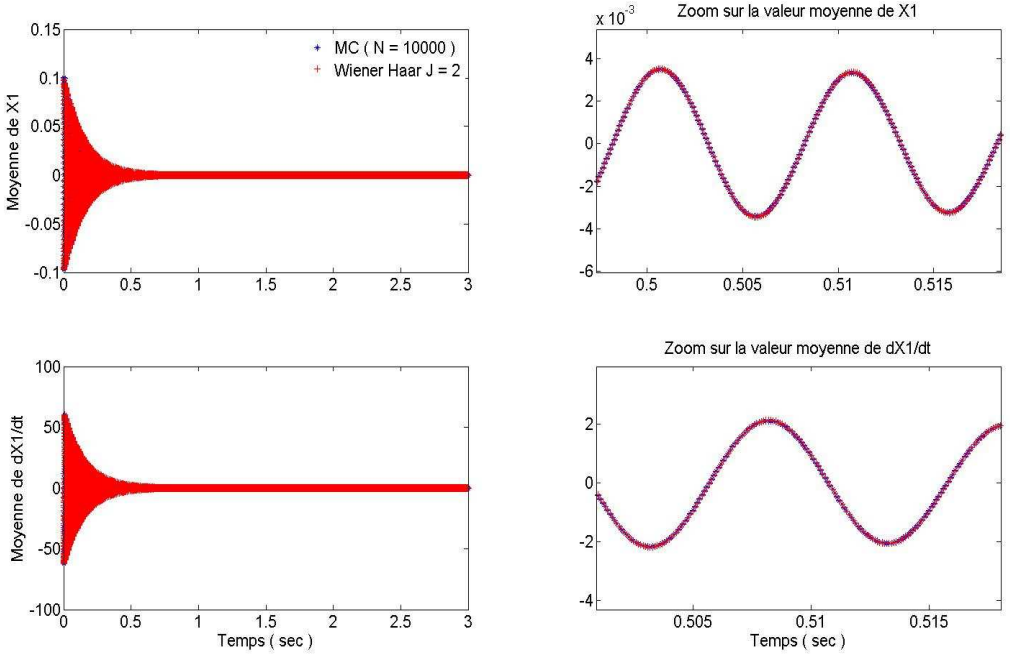


Fig.4. 14. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar et par la méthode de MC

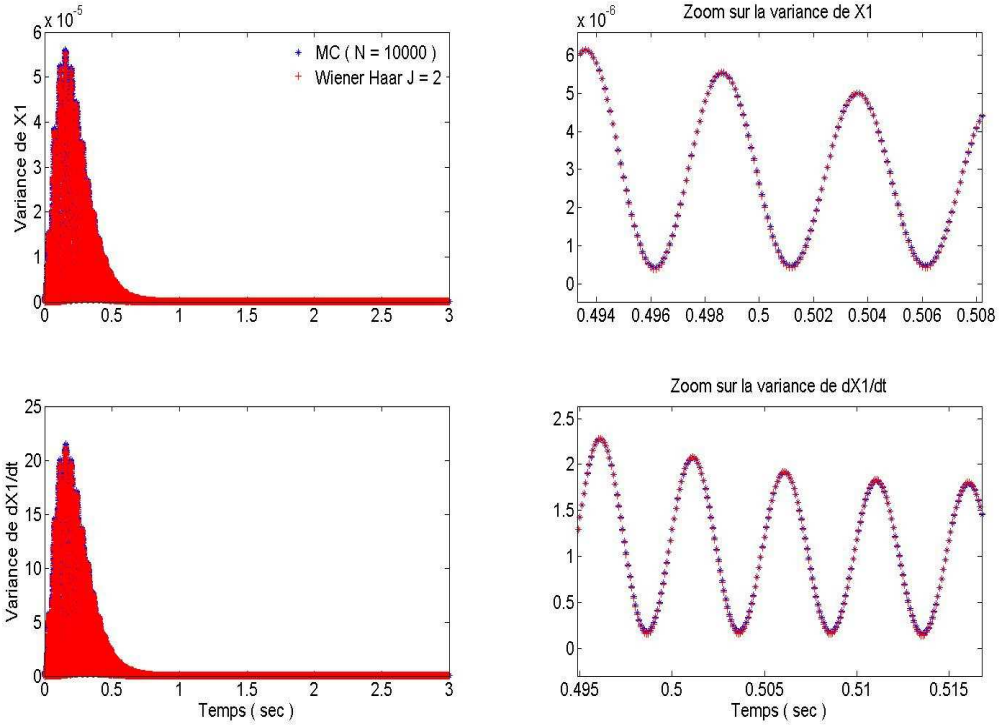


Fig.4. 15. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar et par la méthode de MC

Par tous les résultats représentés dans les figures (4.11), (4.12) et (4.13), il peut être affirmé que $J=2$ suffit pour modéliser le système incertain (4.5) sur l'intervalle $[0,0.1]$. La comparaison avec les résultats référentiels de la méthode de Monte Carlo, dont les résultats sont représentés dans les figures (4.14) et (4.15), permet aussi de conforter cette conclusion.

En utilisant Sostools et pour $J=2$, une fonction de Lyapunov quadratique (4.16) est obtenue pour le système (4.15) Ceci prouve sa stabilité.

$$V(\bar{x}) = 0.0109\bar{x}_{10}^2 - 0.29e^{-4}\bar{x}_{10}\bar{x}_{11} + 0.1116\bar{x}_{11}^2 - 0.71e^{-4}\bar{x}_{10}\bar{x}_{12} - 0.69e^{-4}\bar{x}_{11}\bar{x}_{12} + 0.0145\bar{x}_{12}^2 \qquad (4.16)$$

A noter que dans cette étude, l'analyse a été effectuée sur de petits segments de l'intervalle $[0,0.5]$ pour les mêmes considérations expliquée dans l'étude avec le chaos de Legendre.

Conclusion 4.1. Les développements de Wiener-Legendre et Wiener-Haar ont montré une puissance intéressante en termes de capacités à modéliser le comportement dynamique du système (4.5) en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement ainsi que ses caractéristiques statistiques. Les résultats ont montré le caractère stable du système (4.5) déjà analysé par la méthode de MC dans la section (4.2.1). Deux étapes sont appliquées : l'implémentation du schéma intrusif du développement spectral puis l'analyse du système déterministe obtenu par la projection du système (4.5) dans la base spectrale considérée après avoir, bien sûr, valider l'ordre du développement utilisé. La stabilité du système projeté est analysée efficacement en utilisant la méthode directe de Lyapunov via la technique de la programmation SOS. Les développements utilisés ont bien prédit le comportement dynamique stable du système (4.5). Un premier inconvénient de ces méthodes est lié à la grande sensibilité de la dimension du système projeté envers l'ordre du chaos pour le développement en polynômes de Legendre et le niveau de résolution pour le développement de Wiener-Haar. Une bonne précision peut nécessiter un ordre important ou une résolution élevée ce qui entraine l'explosion de la dimension du système stochastique ainsi que le nombre de termes non linéaires après projection. Ceci rend laborieux l'implémentation, la résolution et aussi la construction de fonctions de Lyapunov puisque la taille des programmes SOS résultant devient très importante. Par ailleurs, la sensibilité de la dimension du système obtenu via la projection de Galerkin étant plus sensible au niveau de la résolution du développement de Wiener-Haar (la dimension du système (4.15) est égale à $n\times\left(2^{J+1}\right)$) qu' à l'ordre du chaos polynomial généralisé (la dimension du système (4.11) est égale à $n\times(P+1)$) fait que l'utilisation de ce dernier soit la mieux indiquée. Le deuxième inconvénient est lié au coté formel de la conclusion sur la stabilité du système avec incertitudes. En effet, il n'y a pas de démonstration formelle impliquant la stabilité d'un système dynamique stochastique non linéaire à partir de celle de la projection même si intuitivement, avec un développement spectral convenablement construit, le cas d'une décroissance de l'amplitude des modes stochastiques ou des coefficients généralisés de Fourier à un niveau faible peut bien informer du caractère stable du système incertain puisque chacune des réalisations de la réponse du système est une somme pondérée de ses modes stochastiques. Dans le cas étudié, la correspondance entre les deux stabilités est bien réelle. Le troisième inconvénient est lié au fait que la méthode ne peut pas être utilisée pour analyser l'instabilité. La méthode directe de Lyapunov est non concluante lorsqu'aucune fonction de Lyapunov ne peut être déterminée. Tous ces inconvénients motivent le recours à d'autres

méthodes pour une analyse plus complète et plus sûr de la stabilité. Nous proposons dans cette perspective la combinaison du chaos polynomial généralisé avec la théorie indirecte de Lyapunov.

4.3.3.2. Analyse par le chaos polynomial généralisé et la théorie indirecte de Lyapunov

Deux méthodes combinant le chaos polynomial de Legendre et l'approche indirecte de Lyapunov sont proposées pour pallier aux insuffisances de la méthode utilisant la méthode directe de Lyapunov, listées précédemment. Les deux méthodes partagent toutes les deux l'idée d'exprimer les valeurs propres du système linéarisé (fonctions aléatoires dépendant de la variable de Legendre modélisant l'incertitude du coefficient de frottement) par des développements en chaos de Legendre.

La première méthode se résume alors à réaliser une procédure de MC qui consiste à échantillonner la distribution de la variable de Legendre et évaluer les polynômes sur les valeurs de la distribution. La distribution des valeurs propres est ainsi reconstruite et l'analyse de la stabilité est effectuée en utilisant la méthode indirecte de Lyapunov. De cette façon, la résolution du polynôme caractéristique n'est plus nécessaire ce qui rend la méthode moins coûteuse que la méthode classique de MC.

La deuxième méthode que nous proposons est équivalente à la première dans le sens où elle considère une modélisation des valeurs propres en utilisant le chaos polynomial généralisé. La différence est liée, par contre, au fait que l'analyse de la stabilité se fait via la solution de problèmes d'optimisation non linéaires.

Reprenons l'étape commune aux deux méthodes, celle d'exprimer les valeurs propres aléatoires $\lambda_i\ (i=1,...,4)$ du système (4.5) linéarisé autour de l'équilibre par leurs développements en chaos de Legendre (4.17).

$$\lambda_i(\xi)=\sum_{j=0}^{P}\overline{\lambda}_{i,j}L_j(\xi)\ ,i=1,...,n \tag{4.17}$$

La première étape consiste à calculer les modes stochastiques $\overline{\lambda}_{i,j}$. Les techniques de projection spectrale non intrusive et de régression sont utilisées dans cette optique.

4.3.3.2.1. Analyse de la stabilité par reconstruction des parties réelles des valeurs propres

Une fois les modes stochastiques $\overline{\lambda}_{i,j}$ calculés, la reconstruction de la distribution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres est effectuée en faisant des tirages sur la variable aléatoire ξ et en évaluant les polynômes $L_j(\xi)$ au jeu de valeurs obtenues. Il n'y a que ce calcul qui est requis d'où un coût très inférieur à celui de la méthode de MC classique. La carte de la stabilité peut donc être tracée en considérant l'évolution de la partie réelle des valeurs propres reconstruites.

4.3.3.2.1.1. Utilisation de la technique NISP

En utilisant la technique NISP, les modes stochastiques $\overline{\lambda}_{i,j}$ avec $(i=1,...,n)$ et $(j=0,...,P)$ sont déterminés par (4.18).

$$\overline{\lambda}_{i,j} = \frac{1}{\langle L_j, L_j \rangle} \int_{-1}^{1} \lambda_i(\xi) L_j(\xi) W(\xi) d\xi \tag{4.18}$$

En utilisant la technique de collocation de Gauss-Legendre, les $\overline{\lambda}_{i,j}$ sont approximés par

$$\overline{\lambda}_{i,j} = \frac{1}{\langle L_j, L_j \rangle} \sum_{q=1}^{Q} \lambda_i\left(\xi^{(q)}\right) L_j\left(\xi^{(q)}\right) W^{(q)} \tag{4.19}$$

où les $W^{(q)}$ sont les poids d'intégration de Gauss.

Le nombre de points de collocation Q est défini par le degré maximal $P=p$ des polynômes de Legendre (ordre validé du chaos). Les Q points de collocation de Gauss sont définis par les zéros du polynôme de degré P. Pour choisir P, on le fait varier progressivement jusqu'à ce que l'erreur entre deux développements d'ordre successifs soit stable. Dans la figure (4.16), l'évolution de l'erreur moyenne au sens des moindres carrés entre deux développements en chaos de Legendre d'ordre successifs P_l, P_{l+1}, $(l=1,2,...)$, définie par

$$e = (1/N) \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{j=0}^{P_l} \overline{\lambda}_{i,j} L_j\left(\xi^{(k)}\right) - \sum_{j=0}^{P_{l+1}} \overline{\lambda}_{i,j} L_j\left(\xi^{(k)}\right) \right)^2 \text{, (}N\text{ nombre de tirages)}$$

est tracée en fonction de l'ordre du chaos de Legendre. A travers cette évolution, on peut distinguer une zone à partir de $P=20$ dans laquelle l'erreur commence à se stabiliser.

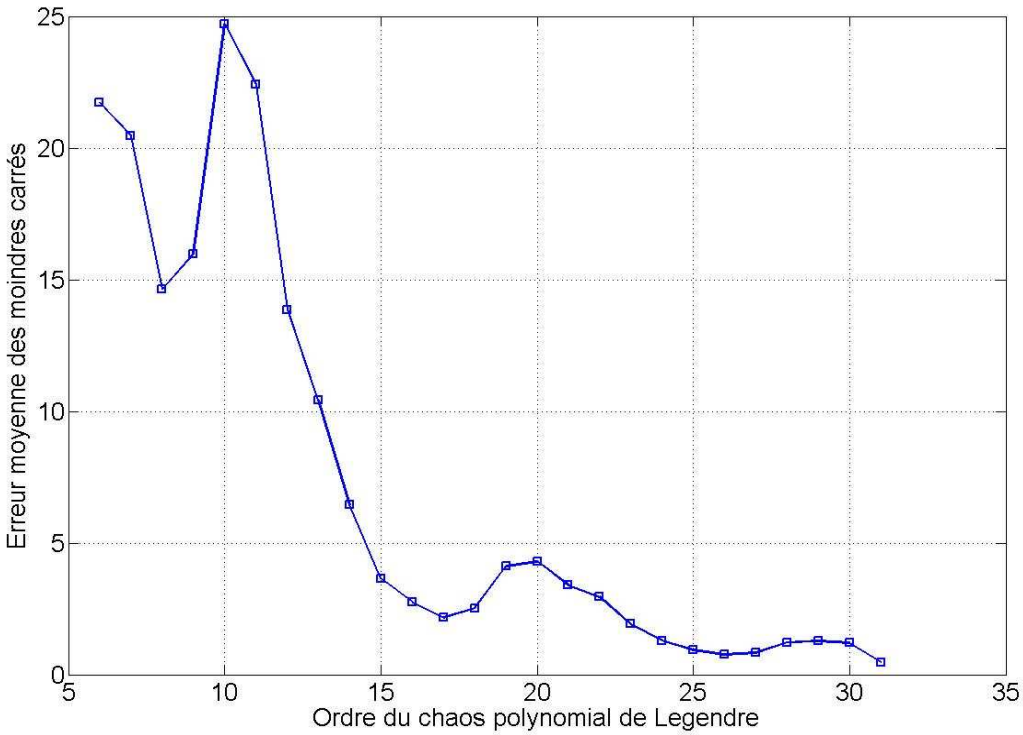


Fig.4. 16. Evolution de l'erreur moyenne des moindres carrés en fonction de l'ordre du chaos polynomial chaos avec *N = 10,000*

Compte tenu des résultats de l'étude précédente (analyse de l'erreur en fonction de *P*), l'évolution de la partie réelle et imaginaire des valeurs propres λ_i en fonction du coefficient de frottement μ est représentée pour *P=20, P=25 et P=30* dans les figures (4.17) et (4.19).

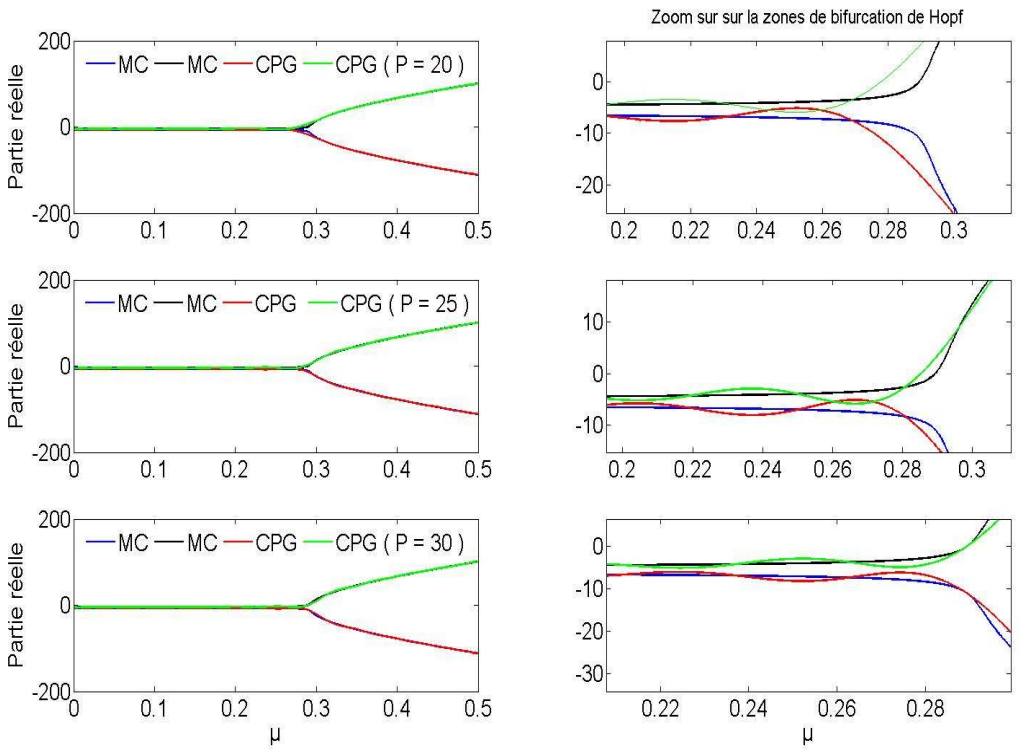


Fig.4. 17. Reconstruction des parties réelles des valeurs propres avec la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC

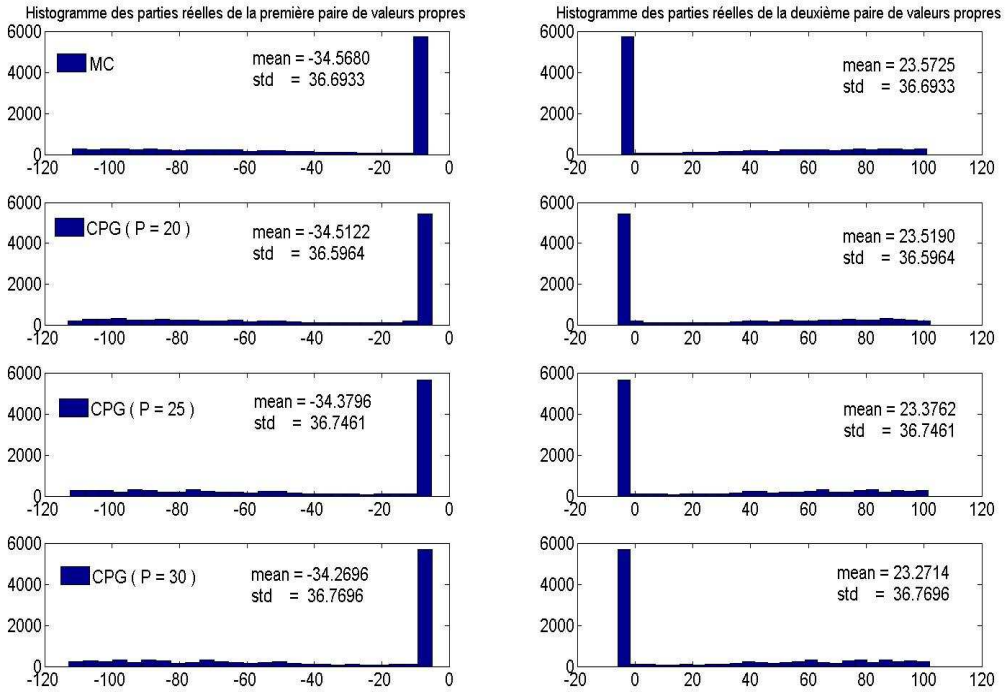


Fig.4. 18. Distributions des parties réelles des valeurs propres estimées par la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC

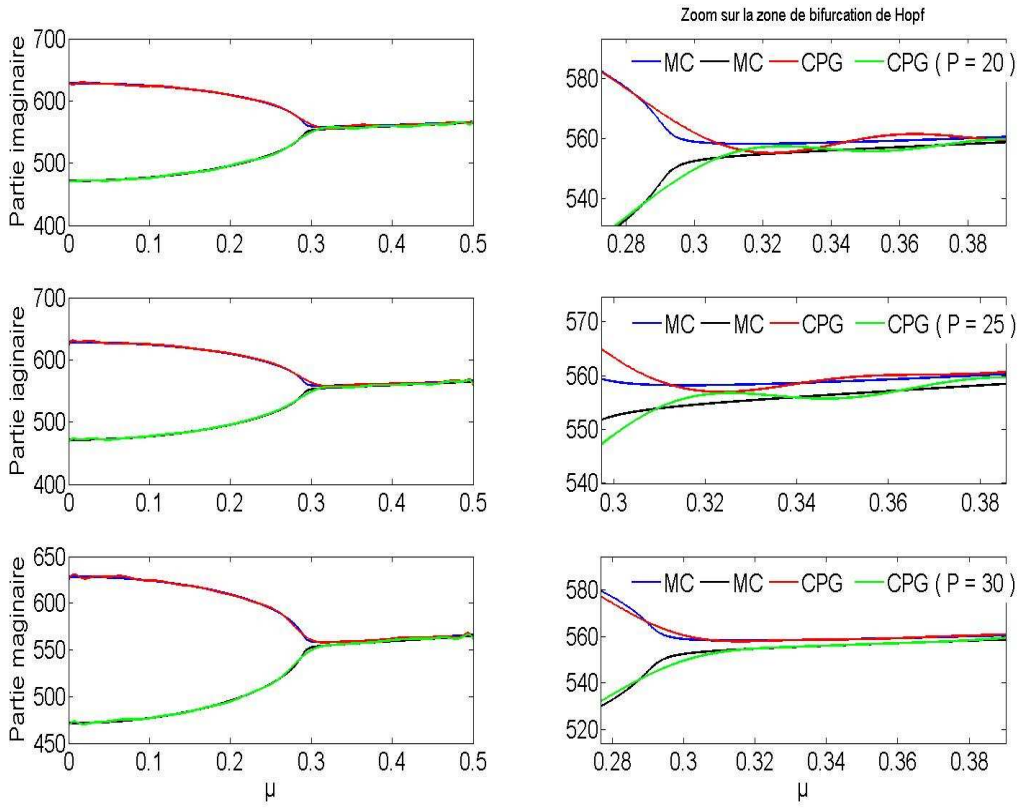


Fig.4. 19. Reconstruction des parties imaginaires des valeurs propres par la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC.

L'approximation par le chaos polynomial de Legendre (4.17) doit modéliser correctement l'évolution des pôles du système (4.5) puisque c'est de celle-ci que dépend la stabilité. L'évolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système (4.5) en fonction du coefficient de frottement tracées respectivement dans les figures (4.17) et (4.19) montre que $P = 30$ est l'ordre qui approxime le mieux le phénomène du couplage de modes. Par ailleurs, du point de vue statistique, les trois ordres considérés offrent des approximations correctes de la loi de distribution des parties réelles des valeurs propres représentées par les histogrammes dans figure (4.18). Le point crucial du problème est celui de l'estimation du point de bifurcation de Hopf. Au voisinage de ce point, il y a perte de la stabilité asymptotique puisque la partie réelle d'un couple de valeurs propres devient nulle. La position du point de bifurcation de Hopf est estimée en utilisant le modèle (4.17) avec les mêmes valeurs de P utilisées jusqu'ici. Les estimations ainsi que les erreurs relatives par rapport à la valeur référence (obtenue par la méthode de MC) sont relevées dans le tableau (4.1) dans lequel il apparait clairement que la meilleure estimation est obtenue avec $P = 30$ où une très faible erreur correspondant à 0.03%, est enregistrée. Il faut remarquer aussi que le modèle utilisé n'a pas surestimé le point de bifurcation de Hopf. La stabilité n'a donc pas été surestimée.

	P = 20	*P =25*	*P = 30*
Valeur de la bifurcation de Hopf (MC) ($\mu = 0.2894$)	0.2778	0.2853	0.2893
Pourcentage d'erreur (%)	4.01	1.42	0.03

Tab.4. 1. Estimation de la valeur de la bifurcation de Hopf avec la technique NISP

4.3.3.2.1.2. Reconstruction par la technique de régression

Suivant la méthode de la régression, les vecteurs $\overline{\lambda}_i$ des modes stochastiques $\overline{\lambda}_{i,j}$, $\left(i=1,...,4;\ j=0,...,P\right)$, sont calculés de telle façon à minimiser, au sens des moindre carrés, l'écart entre $\lambda_i\left(\xi\right)$ et son approximation par le développement (4.17). La solution du problème résultant est donnée comme suit :

$$\overline{\lambda}_i = \left(Z^T Z\right)^{-1} Z^T Y_i \tag{4.20}$$

où Z est la matrice dont les éléments sont définis par $z_{qj} = L_j\left(\xi^{(q)}\right)$ et Y_i est le vecteur des valeurs propres $\lambda_i^{(q)}$ correspondant aux réalisations $\xi^{(q)}$, $q=1,...,Q$.

Les points de calcul $\xi^{(q)}$, $q=1,...,Q$ sont générés de façon déterministe. Ils sont déterminés par les zéros d'un polynôme de Legendre de degré supérieur à l'ordre du chaos de Legendre fixé. Pour déterminer le nombre Q, une étude de convergence est effectuée. L'idée est de varier Q et calculer le modèle (4.17) correspondant via (4.20) puis d'analyser l'évolution de l'erreur entre les représentations successives obtenues. Bien sûr, ces étapes sont effectuées pour un ordre *P* fixé. L'erreur moyenne au sens des moindres carrés correspondant à *P = 30* et évaluée pour différentes valeurs de Q est représentée dans la figure (4.20). A base des résultats, le nombre $Q=44$ est choisi puisque l'erreur moyenne évolue de manière non significative au-delà.

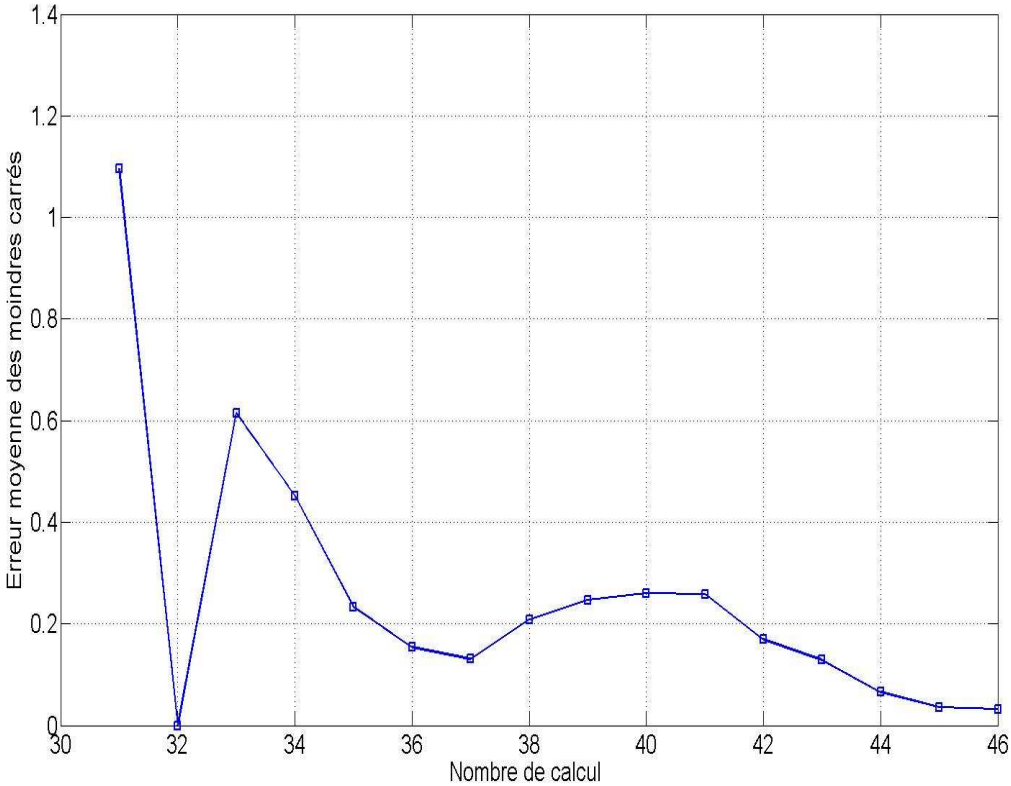


Fig.4. 20. Etude de convergence par rapport au nombre de calculs dans la méthode de régression

Le nombre de calculs Q étant fixé, la deuxième étape est de déterminer le nombre de termes *P*. Ce dernier, comme effectué dans l'étude avec la technique de projection non-intrusive, précédemment, peut être déterminé par une étude de convergence. Les résultats de cette étude sont relevés dans la figure (4.21). Ils montrent une seule tendance pour l'évolution de l'erreur moyenne des moindres carrés, celle de décroitre avec l'augmentation de l'ordre du chaos polynomial de Legendre jusqu'à $P = 30$ où l'erreur diminue encore mais elle devient négligeable.

Les évolutions de la partie réelle et de la partie imaginaire des valeurs propres sont tracées en fonction du coefficient de frottement respectivement dans les figures (4.22) et (4.24) pour les différentes valeurs $P = 30$, $P = 35$ et $P = 40$, le nombre de calculs utilisés étant fixé à $Q = 44$. Par ailleurs, la distribution de la partie réelle des valeurs propres est représentée par des histogrammes relevés dans la figure (4.23). Enfin, le point de bifurcation de Hopf est estimé. Les résultats sont illustrés dans le tableau (4.2).

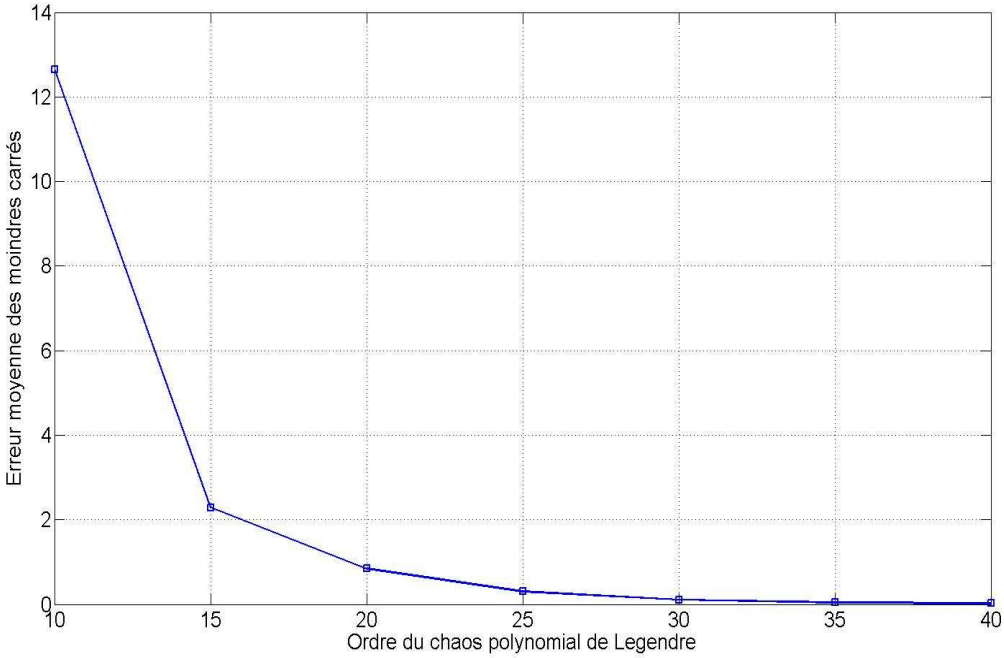


Fig.4. 21. Etude de convergence par rapport à l'ordre du chaos polynomial de Legendre calculé par la technique de régression

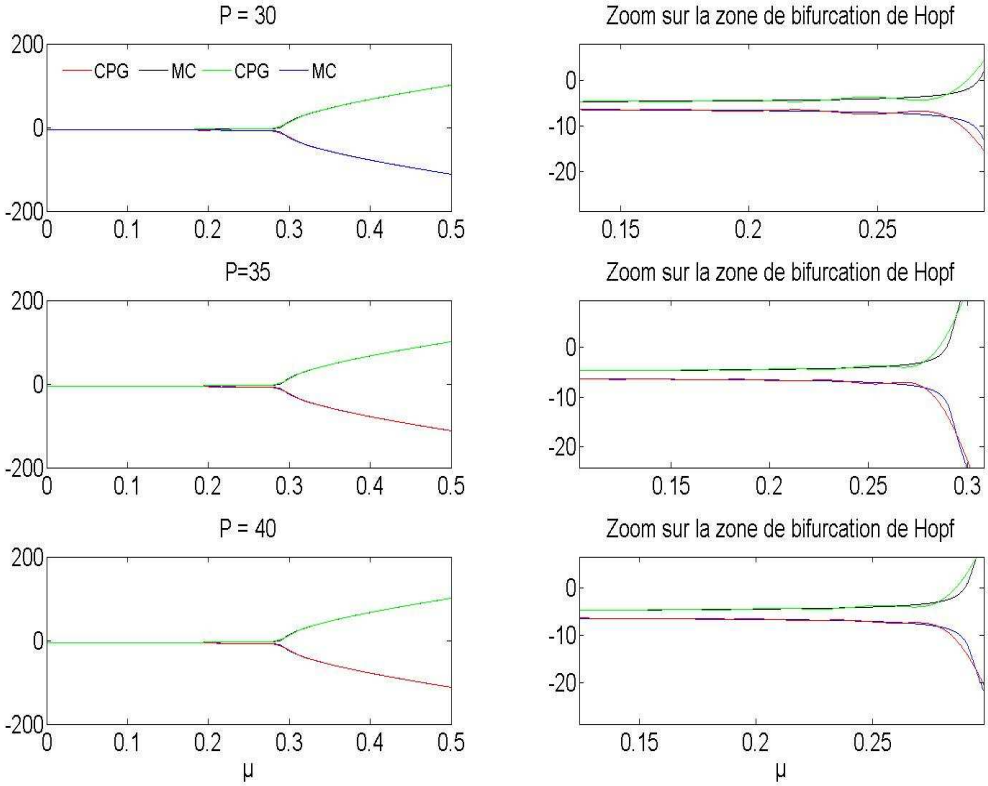


Fig.4.22. Reconstruction des parties réelles des valeurs propres par la technique de régression avec différents ordres de troncation

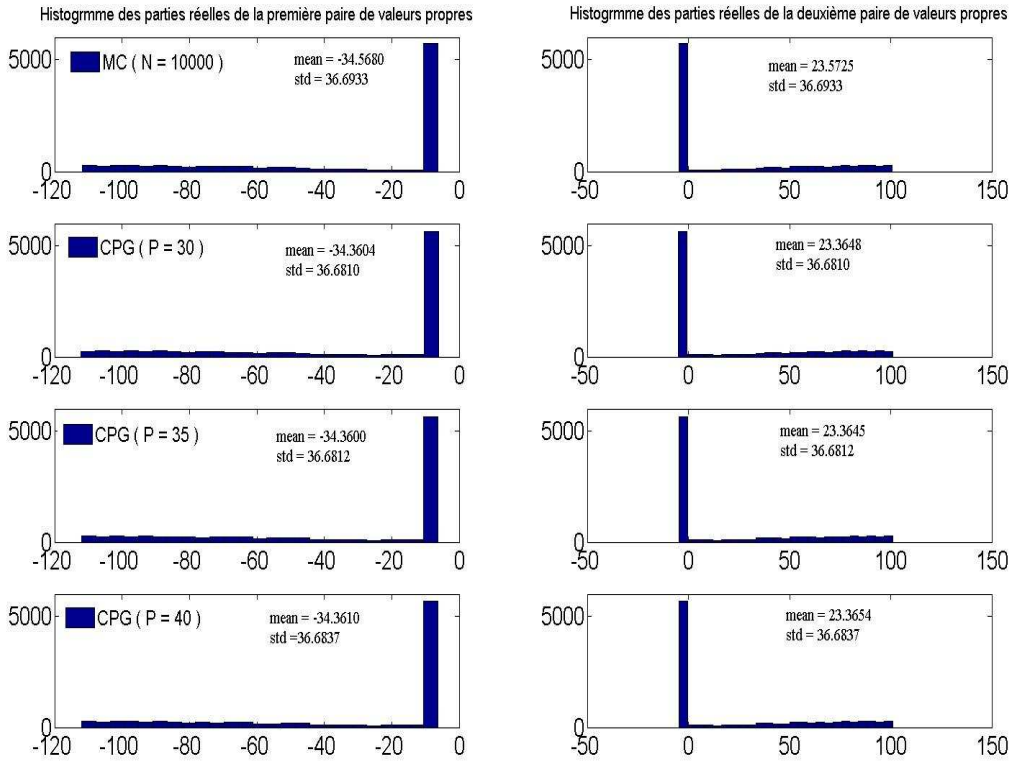


Fig.4.23. Distributions des parties réelles des valeurs propres du système (4.3) estimées par la technique de régression avec différents ordres de troncation

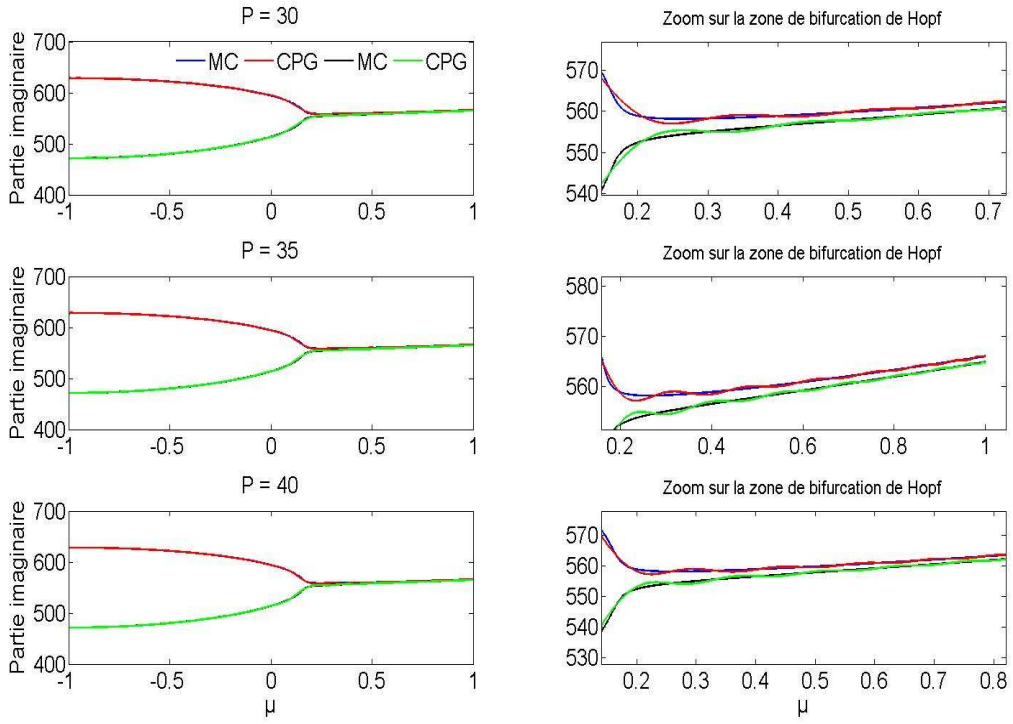


Fig. 4.24. Reconstruction des parties imaginaires des valeurs propres par la technique de régression avec différents ordres de troncation

	P = 30	*P =35*	*P = 40*
Valeur de la bifurcation de Hopf (MC) ($\mu_0 = 0.2894$)	0.2848	0.2855	0.2859
Pourcentage d'erreur (%)	1.59	1.35	1.21

Tab.4. 2. Estimation de la valeur de la bifurcation de Hopf avec la technique de régression

Les résultats montrent que la représentation par le chaos polynomial de Legendre, calculée en utilisant la régression avec $Q = 44$ et les différents ordres *P = 30, P = 35 et P = 40*, représente correctement le phénomène de couplage de modes. Les statistiques sont aussi correctement estimées. Le point de bifurcation de Hopf est déterminé avec une plus faible erreur relative avec *P = 40*. La différence par rapport à l'erreur relative obtenue avec *P = 30* et *P = 35* n'est pas très importante ce qui nous laisse la possibilité de conclure sur la suffisance de l'ordre *P = 30*.

Proportion de stabilité

La méthode développée ci-dessus est proposée pour estimer les intervalles de stabilité et d'instabilité en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement, modélisée de façon probabiliste. La méthode de MC a été utilisée comme référence. Elle a été réalisée en générant *10,000* tirages suivant la loi uniforme régissant la distribution du coefficient de frottement. Ce nombre a été fixé en imposant au préalable un niveau de confiance et une précision définissant la marge d'erreur sur les résultats et les conclusions. La stabilité est une propriété cruciale pour les systèmes dynamiques. Il est, par conséquent, important d'avoir des niveaux de confiance et des précisions très élevés sur les résultats. Ainsi, la proportion des valeurs de μ pour lesquelles l'origine du système (4.5) est asymptotiquement stable est obtenue avec un niveau de confiance de *99%* avec une marge d'erreur qui avoisine 1%. Elle correspond à $57.46\% \pm 1.28\%$. Cette proportion correspond à l'intervalle $\left[a \;\; \mu_0 - \varepsilon\right]$, avec $a = 0$, $\mu_0 = 0.2894$ et $\varepsilon << 1$. Connaissant la distribution probabiliste du coefficient de frottement, on peut définir les probabilités de stabilité P^s et d'instabilité P^{in} suivante :

$$\mathrm{P}^s = \Pr\left(\mu \in \left[a \;\; \mu_0 - \varepsilon\right]\right) = \frac{\left(\mu_0 - \varepsilon\right) - a}{b - a}$$

$$\mathrm{P}^{in} = \Pr\left(\mu \in \left[\mu_0 + \varepsilon \;\; b\right]\right) = \frac{b - \left(\mu_0 + \varepsilon\right)}{b - a}$$

où $a = 0$, $b = 0.5$, μ_0 est le point de bifurcation de Hopf et $\varepsilon << 1$.

Les mêmes contraintes de confiance et de précision sont considérées pour estimer les proportions de stabilité en utilisant le modèle (4.17) ainsi que les différentes probabilités P^s et P^{in}. Les résultats sont relevés dans le tableau (4.3). Ils montrent la bonne précision des proportions estimées par le modèle (4.17). La technique NISP donne une meilleure estimation que la régression.

	Proportion (%)	μ_0
MC	57.46 ± 1.28	0.2894
NISP ($P = 30$)	57.56 ± 1.28	0.2893
Régression ($P = 30$)	56.58 ± 1.28	0.2848

Tab.4. 3. Intervalle de confiance des proportions de stabilité du système (4.5) estimées par le chaos polynomial de Legendre

Les résultats montrent que $\forall\ \mu \in [a\ \ \mu_0 - \varepsilon]$, l'origine du système (4.5) est asymptotiquement stable avec $\Pr(\mu \in [a\ \ \mu_0 - \varepsilon]) = \mathrm{P}^s$. De même, $\forall\ \mu \in [\mu_0 + \varepsilon\ \ b]$, l'origine est instable avec $\Pr(\mu \in [\mu_0 + \varepsilon\ \ b]) = \mathrm{P}^{in}$, le niveau de confiance étant fixé à 99% avec une précision de 1%.

Conclusion 4.2. La méthode développée dans cette section combine trois méthodes pour au final analyser la stabilité en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement. Il s'agit de l'approche par chaos polynomial généralisé, de la méthode de Monte Carlo et la méthode indirecte de Lyapunov. La première étape consiste à représenter les valeurs propres du système linéarisé par des développements en polynômes de Legendre à base desquels la méthode de MC est ensuite appliquée pour reconstruire la distribution des valeurs propres. L'analyse de la stabilité se fait enfin conformément aux critères indirects de Lyapunov. L'efficacité de cette démarche a été illustrée. Elle a, en effet, permis la reconstruction de la carte de la stabilité du système avec un niveau de confiance et une précision similaires à ceux obtenus avec la méthode classique de MC mais avec un coût très inférieur puisque la reconstruction de la distribution des valeurs propres se fait uniquement en évaluant les polynômes de Legendre aux points de la distribution du coefficient de frottement contrairement à la méthode classique de MC où la reconstruction se fait en passant par la résolution de l'équation caractéristique pour chaque point de la distribution.

Deux techniques ont été utilisées pour calculer les modes stochastiques à savoir : la technique de projection non intrusive et la technique de régression. Les deux techniques utilisent des nombres différents de calculs déterministes de valeurs propres. La première utilise P calculs alors que la deuxième utilise Q calculs avec $Q > P + 1$. Les points de calcul sont définis par les zéros des polynômes de Legendre de degrés P pour la technique NISP et de degré Q pour la régression. Concernant cette dernière technique, les points peuvent aussi être générés aléatoirement. Sur l'exemple traité, la représentation par le chaos polynomial de Legendre calculée en utilisant la technique de projection non intrusive a offert une meilleure précision. Le point de bifurcation de Hopf est estimé avec une plus faible erreur relative.

La méthode d'analyse de la stabilité développée procède par l'échantillonnage de la distribution de l'incertitude. On présente ci-dessous une autre alternative basée sur les techniques d'optimisation non linéaires pour bénéficier des avantages de ces dernières.

4.3.3.2.2. Analyse de la stabilité par optimisation

L'idée dans la méthode proposée et développée ci-après consiste à déterminer, sur l'intervalle de l'incertitude modélisé par l'intervalle d'orthogonalité de la base polynomiale, les extremums des parties réelles des valeurs propres à partir du modèle (4.17) pour analyser, en adaptant la méthode indirecte de Lyapunov, la stabilité sur la totalité de l'intervalle considéré.

La méthode proposée consiste donc à déterminer le modèle (4.17) par les méthodes déjà présentées puis, de résoudre les problèmes d'optimisation suivants :

$$\begin{cases} \max/\min\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_i(\xi)=\sum_{i=0}^{P}\bar{\lambda}_{i,j}L_j(\xi)\right)\right) \quad i=1,\ldots,4 \\ \qquad \xi\in[-1\ 1],\ f_\xi=0.5 \end{cases} \tag{4.21}$$

Les problèmes du type (4.21) peuvent être résolus en utilisant les méthodes classiques d'optimisation telles que les méthodes du gradient implémentées dans la boite à outils Optimtool de Matlab.

Avec les solutions des problèmes d'optimisation (4.21), le critère d'analyse de la stabilité à base de la théorie indirecte de Lyapunov (présentée dans le 2ième chapitre) est généralisé comme suit :

- **Critère indirect de Lyapunov généralisé**

1. L'origine est stable sur l'intervalle $[-1,\ 1]$ si :

$$\forall i\in\{1,\ldots,n\},\ \max_{\xi\in[-1,\ 1]}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_i(\xi)\right)\right)<0$$

2. L'origine est instable sur l'intervalle $[-1,\ 1]$ si :

$$\exists j\in\{1,\ldots,n\},\ \min_{\xi\in[-1,1]}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_j(\xi)\right)\right)>0$$

3. On ne peut rien conclure si :

$$\exists i\in\{1,\ldots,n\},\ \forall j\in\{1,\ldots,n\}/\ \max_{\xi\in[-1\ 1]}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_i(\xi)\right)\right)\geq 0\ \wedge \min_{\xi\in[-1\ 1]}\left(\mathrm{Re}\left(\lambda_j(\xi)\right)\right)\leq 0$$

Le 3ième cas dans le critère traduit le caractère incertain de la stabilité de l'origine. Pour lever cette incertitude, l'intervalle d'analyse peut être raffiné en utilisant le principe de la dichotomie. L'idée est de diviser l'intervalle de l'incertitude en deux à chaque fois que la 3ième condition provient.

Le modèle (4.17) obtenu précédemment avec la technique NISP est utilisé puisque cette dernière a offert une meilleure précision. Les solutions des problèmes d'optimisation (4.21) correspondant aux valeurs propres du système (4.5) sont relevées dans le tableau (4.4).

	Max	Min
$\mathrm{Re}(\lambda_1)$	-4.8924	-113.0897
$\mathrm{Re}(\lambda_2)$	-4.8924	-113.0897
$\mathrm{Re}(\lambda_3)$	+102.1608	-6.0407
$\mathrm{Re}(\lambda_4)$	+102.1608	-6.0407

Tab.4. 4. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0 0.5].

Sachant que le système (4.5) possèdent deux paires de pôles conjugués (λ_1, λ_2) et (λ_3, λ_4), le tableau (4.4) montre que la première est stable sur tout l'intervalle [0, 0.5] puisque leurs parties réelles vérifient bien la première condition du critère. Les parties réelles de la deuxième paire vérifient plutôt la 3ième condition du critère ce qui attribue à la stabilité de l'équilibre du système (4.5) le caractère incertain sur la totalité de l'intervalle [0, 0.5]. En effet, la présence d'un maximum positif et d'un minimum négatif indique un passage de la partie réelle par zéro d'où la possibilité de séparer deux zones de stabilité et d'instabilité. Ceci peut être réalisé en divisant l'intervalle initial en deux. Cette opération est appliquée chaque fois que la 3ième condition du critère est vérifiée. La première dichotomie donne lieu aux deux intervalles [0, 0.25] et [0.25, 0.5]. Les résultats correspondants sont relevés dans les tableaux (4.5) et (4.6).

	Max	Min
$\mathrm{Re}(\lambda_1)$	-4.8924	-8.1140
$\mathrm{Re}(\lambda_2)$	-4.8924	-8.1140
$\mathrm{Re}(\lambda_3)$	-2.8848	-6.0407
$\mathrm{Re}(\lambda_4)$	-2.8848	-6.0407

Tab.4. 5. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0 0.25].

	Max	Min
$\mathrm{Re}(\lambda_1)$	-8.1140	-113.0897
$\mathrm{Re}(\lambda_2)$	-8.1140	-113.0897
$\mathrm{Re}(\lambda_3)$	+102.1608	-2.8848
$\mathrm{Re}(\lambda_4)$	+102.1608	-2.8848

Tab.4. 6. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0.25 0.5].

Sur l'intervalle [0, 0.25] toutes les valeurs propres ont des parties réelles dont les minima et les maxima sont négatifs ce qui prouve la stabilité de l'équilibre. Alors que sur l'intervalle [0.25, 0.5], le caractère incertain de la stabilité n'est pas levé d'où la nécessité d'itérer la bissection. Au bout de 15 dichotomies, les zones totales de stabilité et d'instabilité sont obtenues séparées par le point de bifurcation de Hopf $\mu_0 = 0.2893$. Le nombre de calculs effectués est égal à 6000 (=15$\times$400), 400 étant le nombre d'itérations utilisées pour déterminer les minima et maxima. Le point de bifurcation de Hopf est estimé avec un pourcentage d'erreur (0.03%) identique à celui obtenu avec la première méthode.

4.3.4. Utilisation dans le cadre de la conception robuste des systèmes

En pratique, le problème auquel les concepteurs sont confrontés est de déterminer un jeu de paramètres pour lequel le système conçu présente de bonnes propriétés de stabilité. Comme indiqué au début de cette thèse, deux familles de paramètres existent. Une famille de paramètres contrôlables grâces aux procédés de fabrication et de mesure de plus en plus précis et une autre famille de paramètres non contrôlables à cause de leurs caractères aléatoires. Tel est le cas notamment du coefficient de frottement. Pour un ensemble de paramètres incertains, l'idée est de pouvoir utiliser la méthode du chaos polynomial pour déterminer le jeu de paramètres contrôlables auquel correspond une proportion optimale de stabilité avec un niveau de confiance et précision donnés. Ce principe est illustré en l'appliquant au système (4.5). Les amortissements relatifs η_1, η_2 sont considérés comme étant les paramètres contrôlables, le coefficient de frottement étant le paramètre aléatoire du système. Les proportions de stabilité correspondant à l'intervalle de dispersion probabiliste du coefficient de frottement [0, 0.5] sont estimées par le modèle (4.17) et par la méthode de MC. Les résultats des deux méthodes concordent bien (figures (4. 25) et (4.26)).

A base de ces résultats, le concepteur peut choisir les paramètres avec lesquels, la proportion de la stabilité est la plus élevée.

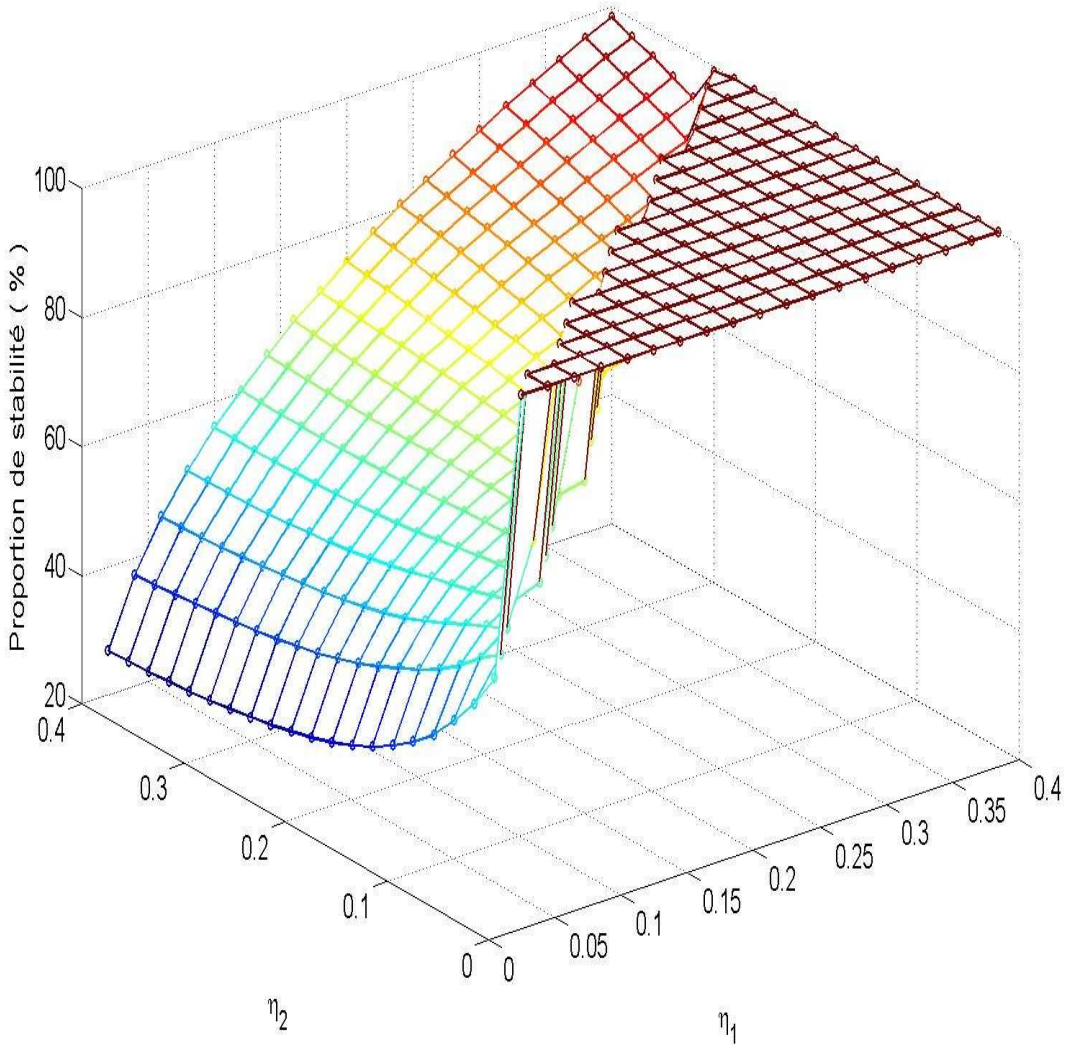


Fig.4. 25. Proportion de stabilité correspondant aux paramètres d'amortissement et au coefficient de frottement uniforme sur [0, 0.5] estimée par le modèle chaos polynomial de Legendre (4.17)

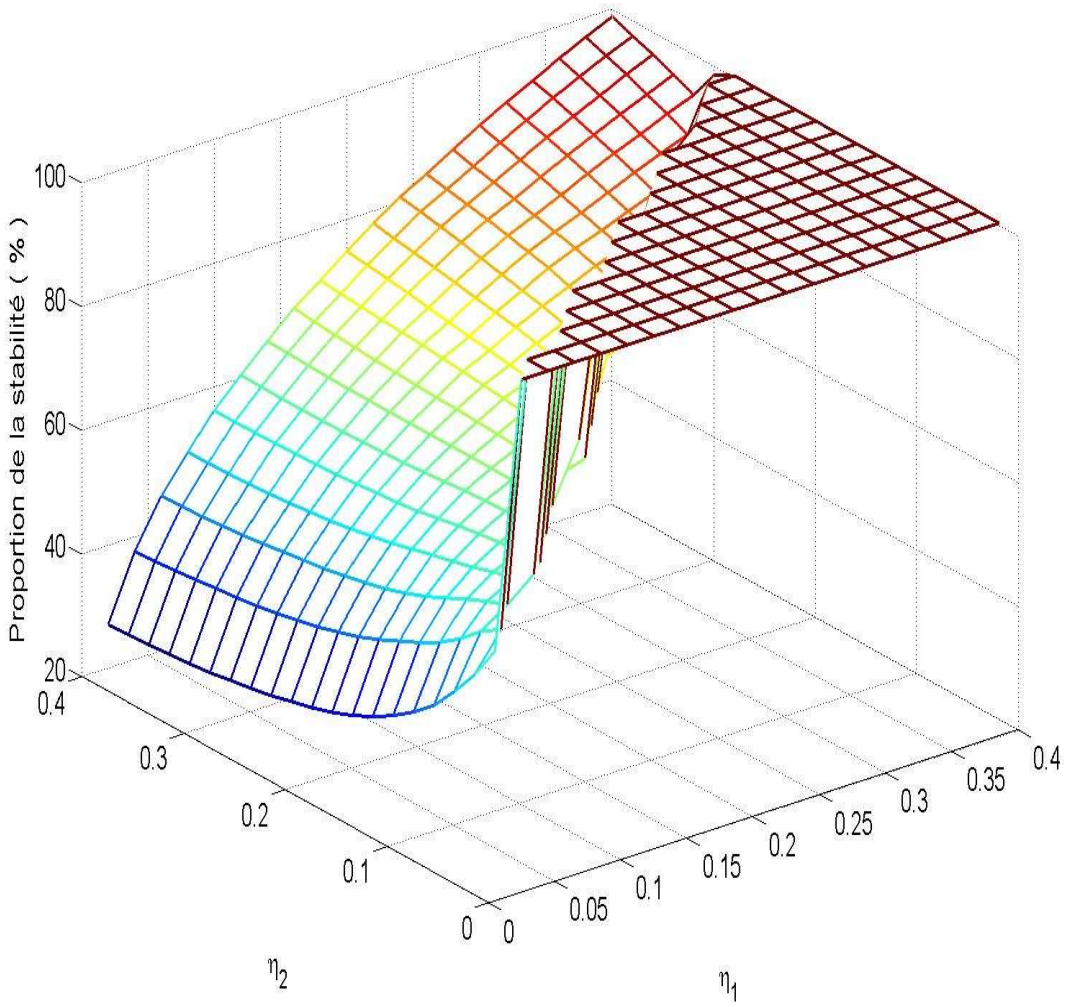


Fig.4. 26. Proportion de stabilité correspondant aux paramètres d'amortissement et au coefficient de frottement uniforme sur [0, 0.5] estimée par la méthode de MC

4.3.5. Conclusion

La stabilité des systèmes dynamiques frottants a fait l'objet de cette première partie du quatrième chapitre. L'objectif est d'adapter les méthodes basées sur le concept du chaos polynomial en particulier le chaos polynomial généralisé et le chaos de Wiener-Haar au problème de l'analyse de la stabilité en tenant compte du caractère incertain de la loi de frottement. Le but est de proposer une alternative à la méthode classique de Monte Carlo connue pour son coût prohibitif. L'adaptation des différentes méthodes s'est faite sur le modèle à deux degrés de liberté d'Hultèn d'un système de freinage.

Dans un premier temps, l'approche par le chaos polynomial généralisé, combinée avec la méthode directe de Lyapunov, a été étudiée. Le schéma intrusif est appliqué pour modéliser la dynamique incertaine du système d'Hultén. La stabilité du système déterministe résultant de la projection du modèle incertain dans la base spectrale (du chaos polynomial généralisé et des ondelettes de Haar) a

été analysée en utilisant la méthode directe de Lyapunov via la programmation SOS. Dans le problème traité, les résultats ont montré une parfaite correspondance entre la stabilité des systèmes déterministes ((4,11) et (4.15)) et celle du système incertain (4.5). Le développement en polynômes de Legendre utilisé a bien modélisé la dynamique stable du système d'Hultèn sur les intervalles d'incertitudes considérés. Toutefois, la méthode présente 3 inconvénients principaux. Le premier est celui de la forte sensibilité de la dimension et la complexité du système déterministe (obtenu après projection intrusive de Galerkin) à l'ordre du développement spectral utilisé. Cette forte sensibilité se traduit par une croissance considérable de la dimension et du nombre de termes non linéaires dans le système déterministe ce qui rend l'implémentation, la résolution et la construction de fonction de Lyapunov des tâches laborieuses. Le deuxième inconvénient est lié au fait que la méthode est non concluante dans le cas où aucune fonction de Lyapunov n'est construite. Enfin, le troisième inconvénient est relatif à la non-existence de lois formelles impliquant la stabilité des systèmes stochastiques à partir de celle de leurs projections dans une base spectrale. Tous ces inconvénients font diminuer l'efficacité, la confiance et la garantie des conclusions de la méthode.

Dans un deuxième temps, le chaos polynomial de Legendre dans son schéma non-intrusif a été combiné avec la méthode indirecte de Lyapunov. Cette méthode a offert dans cette optique plus de confiance et de garantie. L'idée de la méthode est basée sur la représentation des valeurs propres aléatoires du système par leurs développements dans la base du chaos polynomial généralisé, les modes stochastiques étant déterminés par les techniques de projection spectrale non intrusive (NISP) et de régression. L'utilisation de la méthode de MC permet en suite de tracer la carte de la stabilité en échantillonnant la distribution régissant la variable de Legendre modélisant l'incertitude du coefficient de frottement. Pour une précision équivalente, cette méthode s'avère moins coûteuse que la procédure classique de MC, celle-ci nécessitant la résolution de l'équation caractéristique sur une large grille de valeurs de la distribution du coefficient de frottement contrairement à la première qui procède uniquement par l'évaluation des polynômes en les points de la grille. Néanmoins la précision de la carte de la stabilité tracée dépend, comme pour la méthode de MC, de la finesse de l'échantillonnage (nombre de tirages aléatoires). Dans l'optique de pallier à cette dépendance, l'analyse de la stabilité sous forme de problèmes d'optimisation non linéaires, dont les fonctions objectifs sont les parties réelles des valeurs propres modélisées dans la base de Legendre, est considérée. Les critères indirects de Lyapunov sont généralisés pour analyser la stabilité à partir des solutions des problèmes d'optimisation. La méthode telle que définie fait appel à la technique de dichotomie pour lever l'incertitude sur la stabilité. Elle a permis, similairement à la première technique combinant le chaos polynomial généralisé et la technique de MC, une estimation des zones de stabilité et d'instabilité avec une faible erreur. Par contre, elle ne permet pas une mesure du niveau de confiance. Par ailleurs, il y a lieu de noter qu'une comparaison en termes de coût entre les différentes méthodes n'est pas possible à cause de la simplicité relative du système d'Hultén.

4.4. Analyse robuste des niveaux vibratoires (cycles limites)

L'analyse de la stabilité du système (4.5), développée dans la première partie de ce chapitre, a permis de délimiter deux zones principales, une de stabilité et une autre d'instabilité séparées par un point d'incertitude défini par le point de bifurcation de Hopf. Pour les systèmes frottants, l'obtention des zones stables et instables n'est pas suffisante (Sinou, 2006). En effet, pour une bonne conception, il doit être possible de déterminer les niveaux vibratoires définis par les amplitudes des cycles limites. Ces oscillations peuvent être nocives aux performances des systèmes frottants et/ou provoquer des nuisances sonores génantes d'où l'importance de les prédire pour statuer sur la possibilité de les négliger.

Clairement, la détermination des cycles limites passe, à défaut de pouvoir déterminer la solution analytique, dans le cas général par l'intégration temporelle des équations différentielles non linéaires décrivant le comportement dynamique. Cette tâche est connue pour son coût exorbitant particulièrement dans le cas des systèmes non linéaires complexes. La prise en compte des incertitudes rajoute un autre degré de complexité important rendant le calcul des cycles limites encore plus difficile et plus laborieux. Dans cette perspective, les techniques basées sur le concept du chaos polynomial offrent des outils très intéressants. Elles permettent de modéliser le comportement dynamique et de le prédire en tenant compte des incertitudes et des non linéarités sans avoir recours à l'intégration temporelle des équations différentielles non linéaires stochastiques.

L'objectif de cette partie consiste en l'évaluation de la capacité des méthodes basées sur le chaos polynomial à traiter de la modélisation des cycles limites et de la prédiction de leurs amplitudes en tenant compte des incertitudes liées à la loi de frottement. Cette étude est effectuée sur le modèle à deux degrés de liberté d'Hultèn décrit par (4.5). Comme indiqué dans l'introduction de ce chapitre, trois zones d'instabilité distinctes ayant chacune leur spécificité, sont considérées. Ces dernières sont situées à des distances différentes du point de bifurcation de Hopf. Comme les amplitudes et les fréquences des cycles limites sont différentes selon que l'on soit au voisinage, proche ou loin de la zone de bifurcation de Hopf, le but est alors de tester la capacité des méthodes proposées dans les différents cas de figure. A noter que les trois zones sont identifiées comme étant des régions où le système (4.5) développe des instabilités de type flottement (cycle limite) dues à une coalescence de modes.

Pour chaque étude, les deux premiers moments statistiques temporels sont estimés, des réalisations de cycles limites sont reconstruites. La loi de probabilité de l'amplitude des cycles limites est aussi construite afin d'en estimer la dispersion.

4.4.1. Modélisation et analyse des cycles limites proches du point de bifurcation de Hopf

L'intervalle de dispersion [a, b] = [0.3, 0.33] est considéré pour le coefficient de frottement μ, soit une valeur moyenne μ_m égale à 0.315 et un coefficient de variation C_v d'environ 3%. La valeur moyenne μ_m se situe à une distance avoisinant les 9% du point de bifurcation de Hopf μ_0 qui, rappelons-le, a été estimé dans la partie précédente, ($\mu_0 \approx 0.2894$) : $\mu_m = \mu_0 (1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \approx 0.09$.

Pour illustrer la sensibilité de l'amplitude des cycles limites aux petites variations du coefficient de frottement dans l'intervalle considéré, les cycles limites correspondant aux valeurs $\mu = 0.3$ et $\mu = 0.31$ sont calculés en utilisant le solveur ODE45 de Matlab. Ils sont représentés dans le plan de phase $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ dans la figure (4.27). Il peut y être remarqué que la variation de la valeur du coefficient de frottement estimée à 3.3% engendre une variation de prés de 40% sur l'amplitude du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$. Ceci démontre bien la grande sensibilité des niveaux vibratoires du système (4.5) envers les petites dispersions du coefficient de frottement, un fait qui justifie le recours aux approches robustes d'analyse pour permettre la prédiction de la dispersion des niveaux vibratoires.

Par ailleurs, il y a lieu de noter que les régimes transitoires des cycles limites calculés sont relativement rapides. Par conséquent, le calcul, dans cette section, s'est fait uniquement sur les trois premières secondes, le pas de calcul étant fixé à 0.0001 seconde.

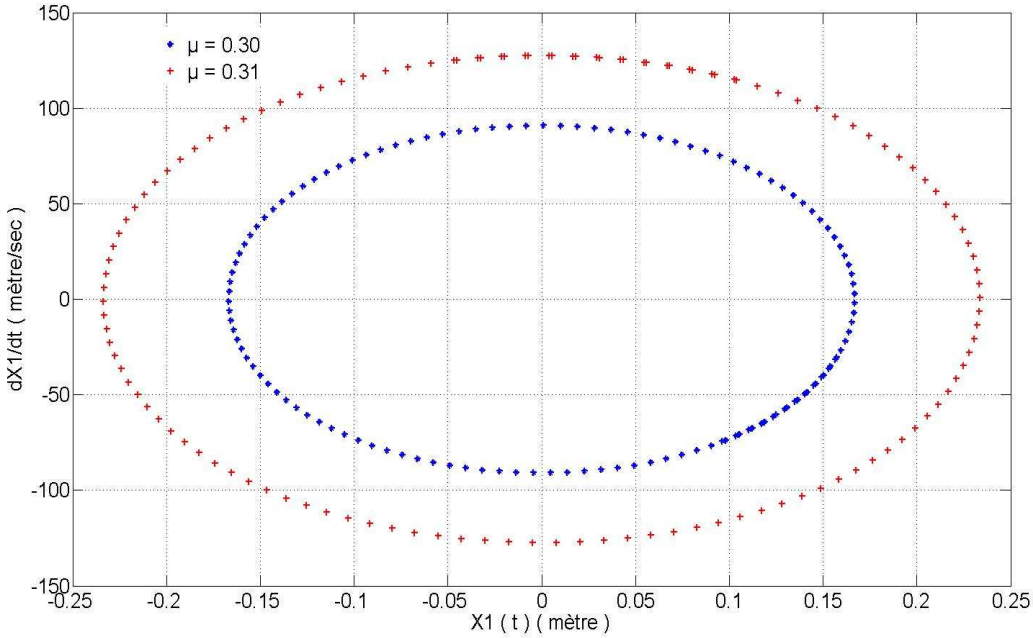


Fig.4. 27. Deux réalisations du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$

4.4.1.1. Application du chaos polynomial généralisé

Dans le problème de l'analyse de la stabilité, il a été bien vérifié que le chaos polynomial (base polynomiale d'Hermite) offrait des performances acceptables mais inférieures à celles de la méthode du chaos polynomial généralisé utilisant la base polynomiale de Legendre d'où l'utilisation exclusive de cette dernière pour estimer la dispersion des amplitudes des cycles limites.

4.4.1.1.1. Approche intrusive

La substitution des processus aléatoires $x_i(t,\xi)$ par leurs représentations dans la base du chaos polynomial de Legendre (4.10) à savoir,

$$x_i(t,\xi) \approx \sum_{j=0}^{P} \overline{x}_{i,j}(t) L_j(\xi),$$

dans le système (4.5) qui, rappelons-le, est décrit dans l'espace d'état par :

$$\dot{x}(t,\xi) = A(\mu(\xi))x(t,\xi) + f_{NL}(x(t,\xi),\mu(\xi))$$

ainsi que la projection du modèle résultant dans la base de Legendre conduisent au système (4.11) dont la résolution pour différents ordres *P* permet d'obtenir les modes stochastiques $\overline{x}_{i,j}(t)$ des différentes approximations (4.10). Les cas *P = 10, P = 15 et P = 20* sont présentés. Les valeurs moyennes et les variances du déplacement $X_1 = x_1(t,\xi)$ et de la vitesse $\dot{X}_1 = x_2(t,\xi)$ sont relevées dans les figures (4.28) et (4.29). Il peut y être observé que l'ordre *P* nécessaire pour une estimation précise des moments statistiques croit avec le temps. Les valeurs moyennes obtenues sont des fonctions oscillantes décroissantes. Ceci se justifie par l'effet de l'incertitude du coefficient de frottement. Cette incertitude affecte l'amplitude et la fréquence des cycles limites du système (4.5). L'effet sur la fréquence se distingue par la variation de la différence de phase entre les réponses du système correspondant à des réalisations différentes du coefficient de frottement. Ces réponses sont des fonctions du temps et de signes opposés. Par conséquent, elles se compensent les unes avec les autres d'où la décroissance des valeurs moyennes. Les ordres de troncation *P=10 et P=15* deviennent rapidement insuffisants pour maintenir une bonne précision des estimations des valeurs moyennes et des variances. Ces dernières sont mieux approximées avec *P = 20*. La même observation peut être énoncée à partir de la figure (4.30) où les densités de probabilité instantanées du processus aléatoire que représente X_1 sont représentées par des histogrammes. Pour appuyer cette conclusion, les déplacements X_1 correspondant respectivement aux valeurs $\mu = 0.3$, $\mu = 0.315$ et $\mu = 0.33$ sont illustrés dans la figure (4.31). En outre, les cycles limites $(X_1, \dot{X}_1)$ correspondant aux mêmes valeurs du coefficient de frottement sont représentés respectivement dans les figures (4.32), (4.33) et (4.34). Ils sont tracés en utilisant les 300 derniers points du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$. L'approximation via le chaos de Legendre avec *P=20* estime correctement les amplitudes des cycles limites contrairement aux approximations utilisant *P=10* et *P=15*. Ces dernières présentent des erreurs d'estimation importantes. Les approximations avec ces deux derniers ordres surestiment d'une manière inacceptable l'amplitude du cycle limite. Une nette amélioration est obtenue avec *P=20* comme l'indique aussi les résultats relevés dans la figure (4.35) dans laquelle la densité de probabilité de l'amplitude du cycle limite $(X_1, \dot{X}_1)$ correspondant à la distribution uniforme du coefficient de frottement dans l'intervalle $[0.3\ 0.33]$ est représentée en comparaison avec l'estimation référentielle de MC.

L'apport de l'utilisation de la méthode du chaos polynomial généralisé dans la construction de la distribution probabiliste de l'amplitude des cycles limites par rapport à la méthode de Monte Carlo est considérable en termes de coût. La méthode de MC appliquée ici utilise 10000 tirages de la

distribution uniforme du coefficient de frottement. Ce nombre est fixé pour assurer un niveau de confiance de 99% pour la valeur moyenne de l'amplitude maximale des du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$. 10000 intégrations temporelles du système (4.5) sont alors effectuées conformément à l'algorithme de la méthode classique de MC. Par contre, en utilisant le chaos polynomial de Legendre, une fois les modes stochastiques calculés, aucune intégration temporelle du système (4.5) n'est nécessaire. La construction des densités de probabilité se fait uniquement par l'évaluation des polynômes de Legendre aux points correspondant aux 10000 tirages réalisés.

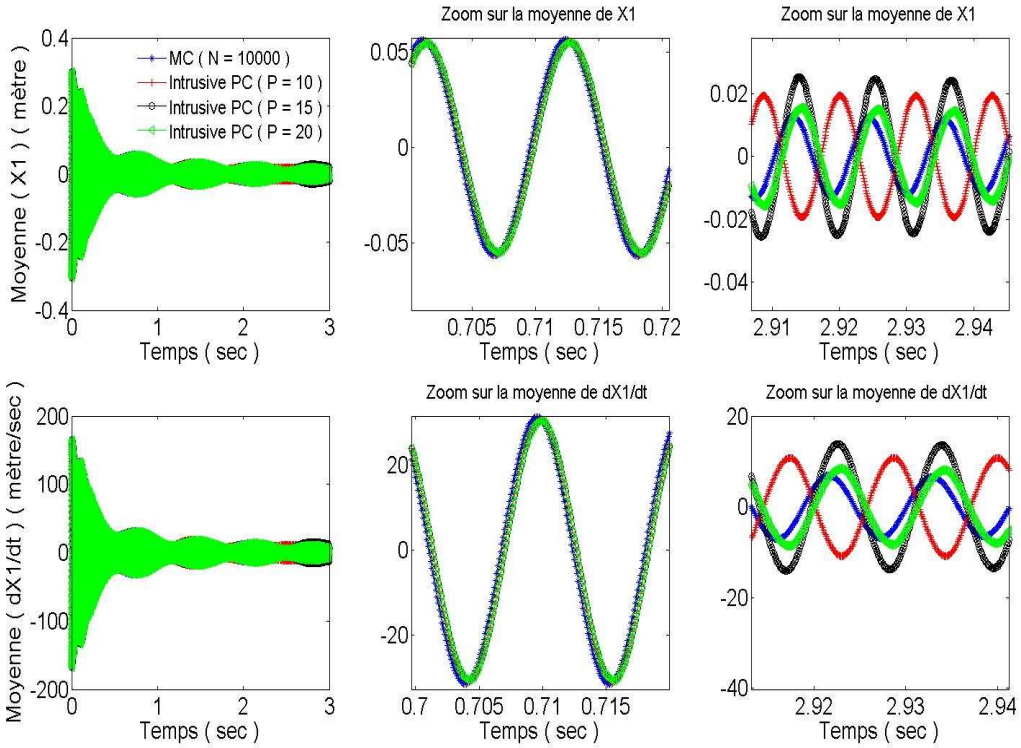


Fig.4. 28. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

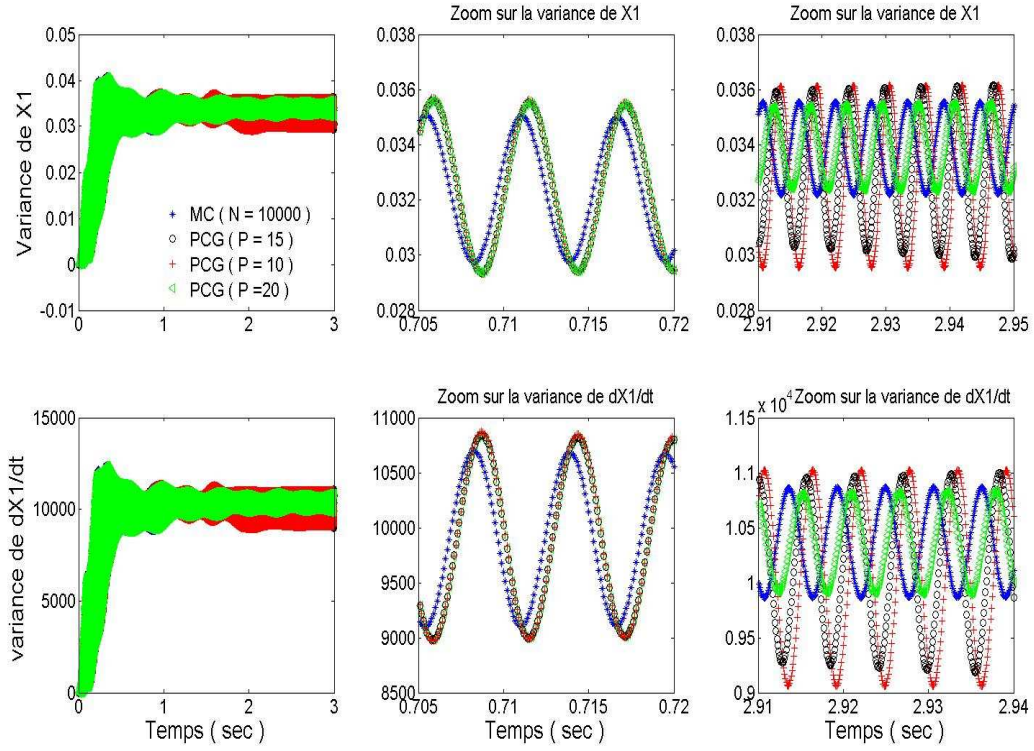


Fig.4. 29. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

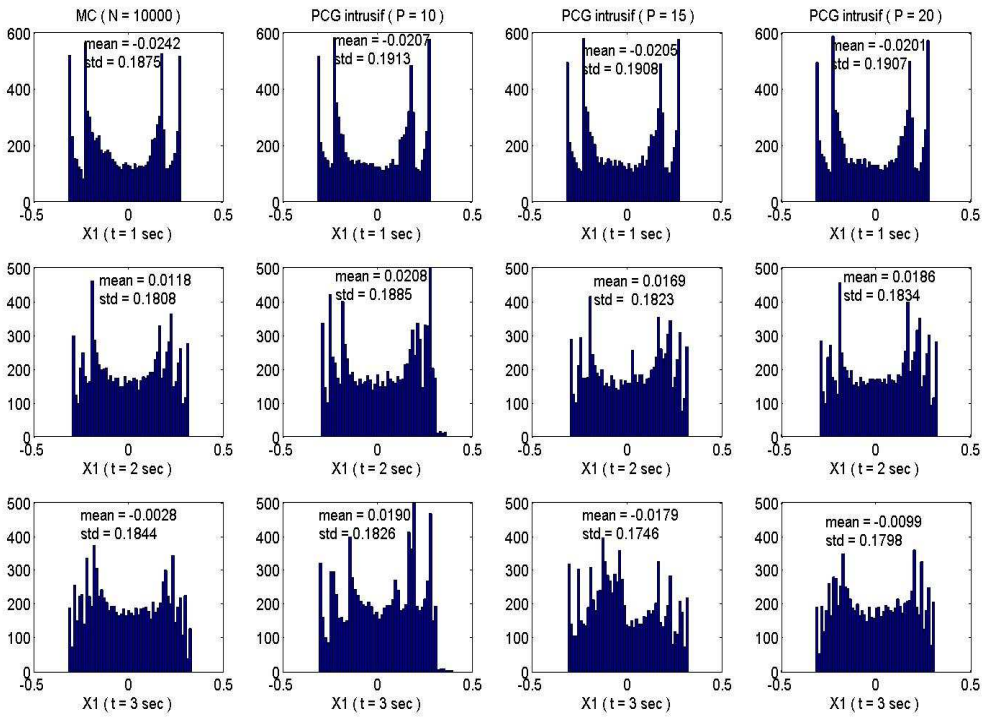


Fig.4.30. Histogramme instantané du déplacement X_1

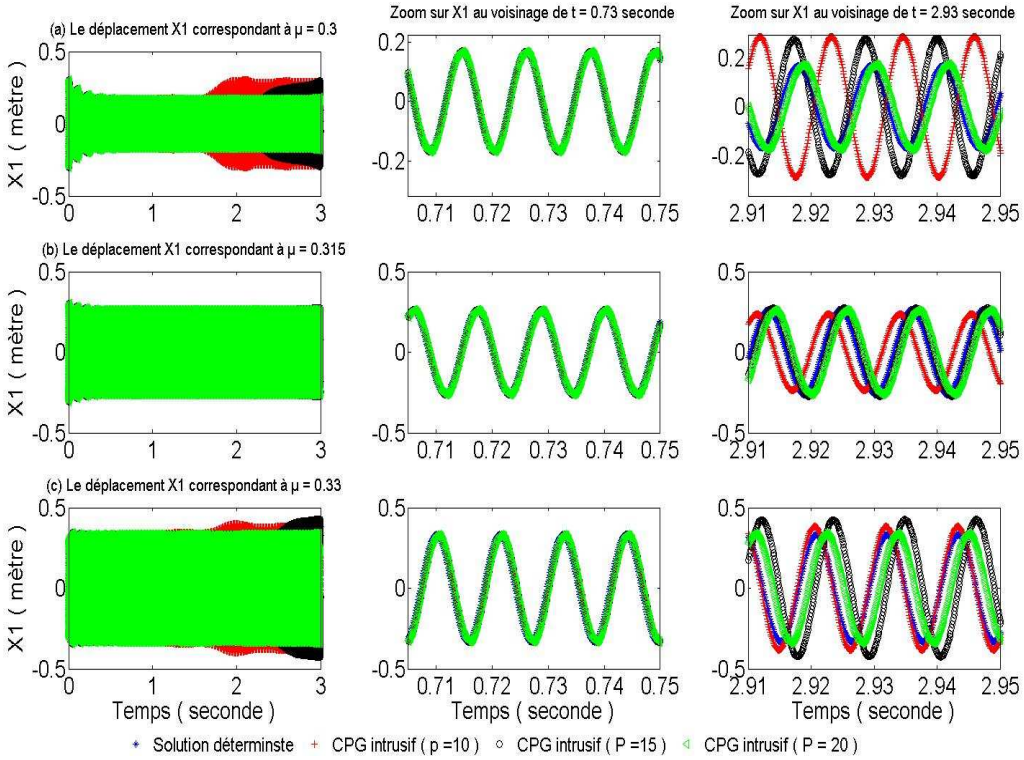


Fig.4. 31. Réalisations du déplacement X_1 pour différentes valeurs du coefficient de frottement

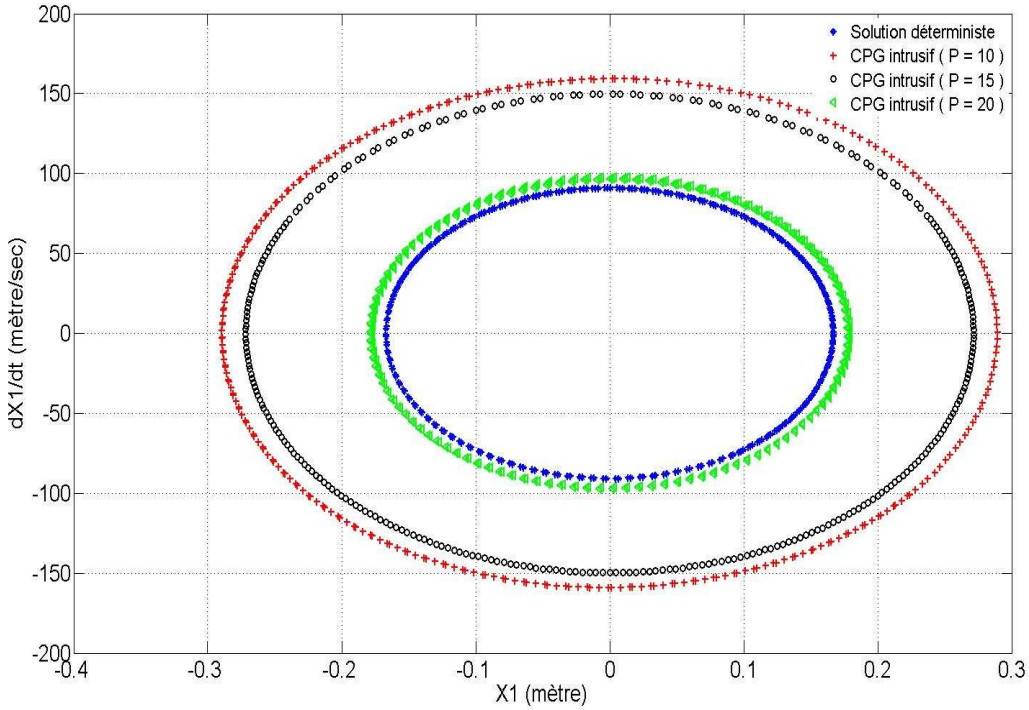


Fig.4. 32. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3

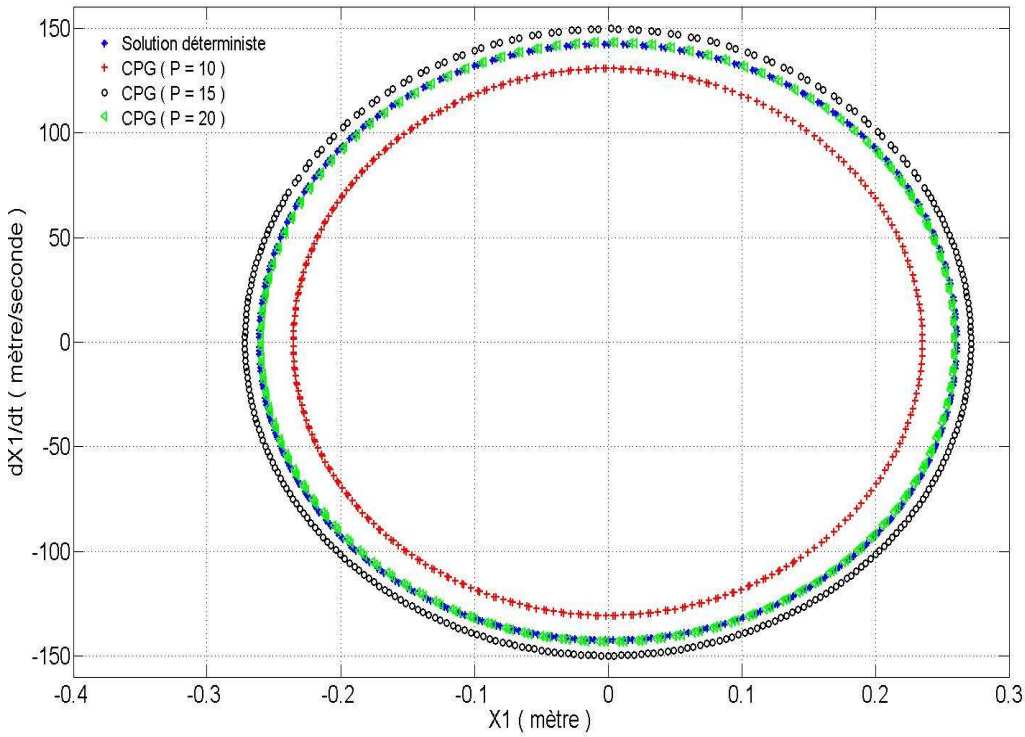


Fig.4. 33. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315

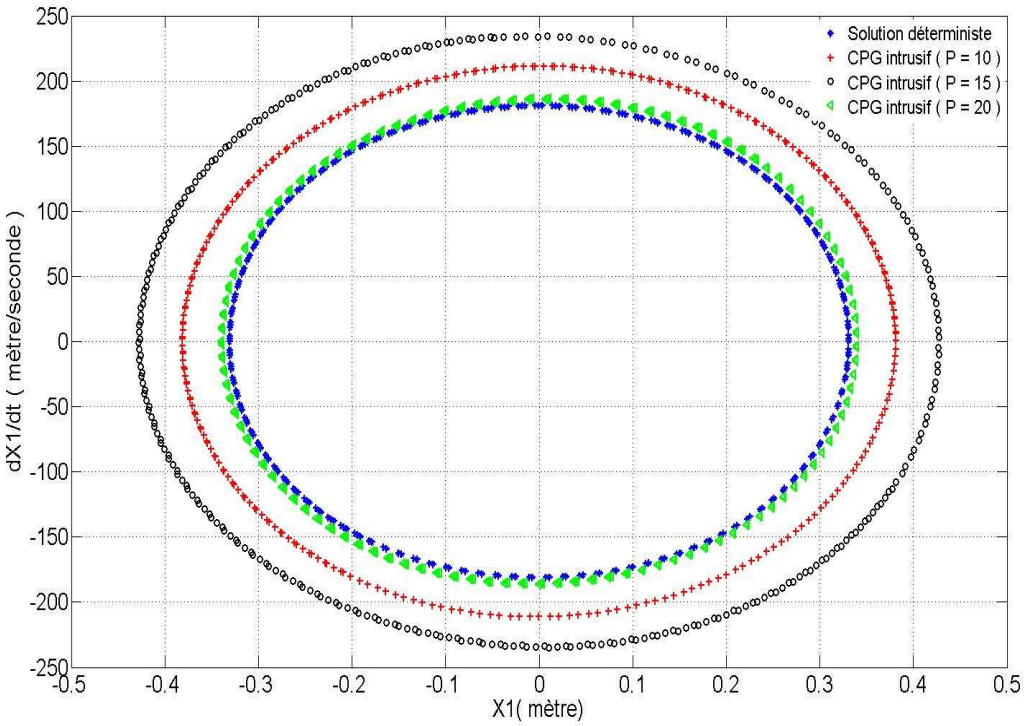


Fig.4. 34. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33

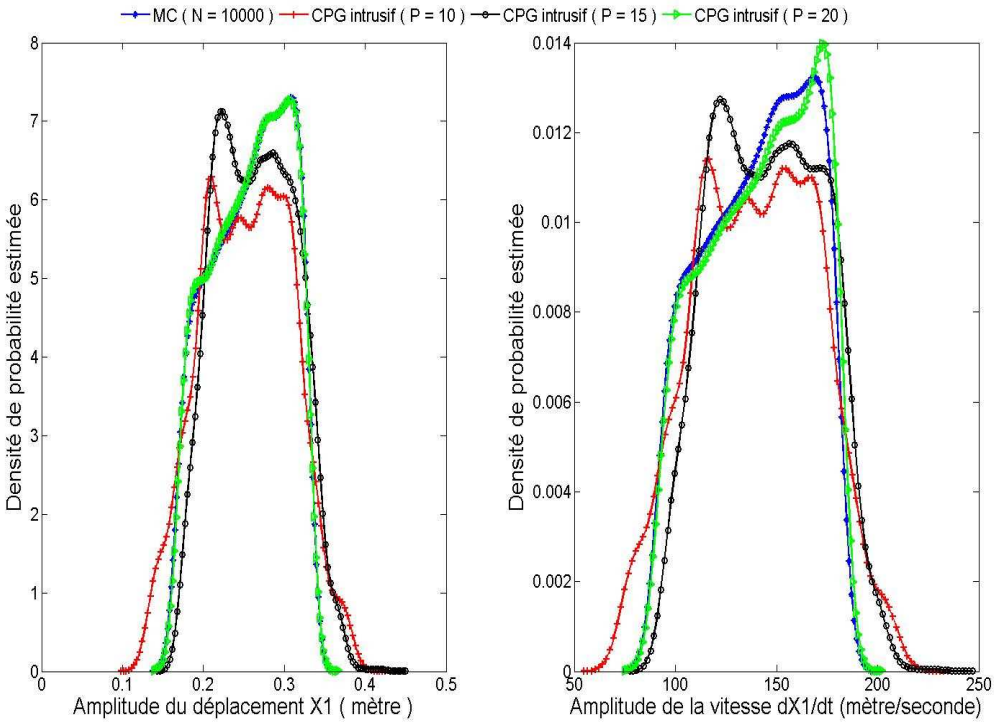


Fig.4. 35. Densité de probabilité des amplitudes du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

L'intervalle de confiance à 95% de la valeur moyenne du déplacement X_1 et construit et relevé dans la figure (4.36). La valeur moyenne estimée par le chaos de Legendre avec $P = 20$ n'appartient pas tout le temps à l'intervalle construit. L'augmentation de P peut, en général, améliorer la confiance ainsi que la précision des estimations. Cependant, dans le cas intrusif, elle entraine des difficultés considérables par rapport à l'implémentation. En effet, la dimension du système déterministe ainsi que le nombre de termes non linéaires résultant de la projection du système (4.5) dans la base de Legendre deviennent si grands que l'utilisation de la méthode intrusive devient laborieuse. De ce point de vue, l'approche non-intrusive peut être vue comme une alternative très intéressante.

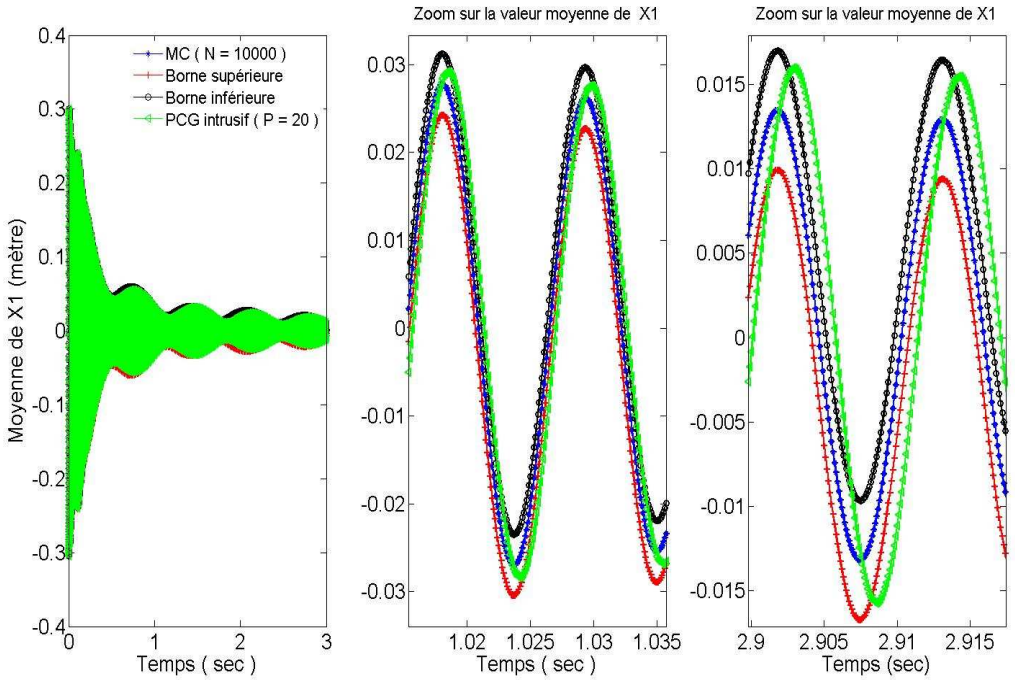


Fig.4. 36. Intervalle de confiance à 95% de la valeur moyenne instantanée du déplacement X_1

4.4.1.1.2. Approche non intrusive

- **Etude avec les techniques de NISP et de régression pour *P* = 20**

Les méthodes non intrusives à savoir la technique de projection spectrale (NISP) ainsi que celle de la régression sont utilisées avec $P = 20$. La première méthode exploite la technique de collocation de Gauss-Legendre. Elle utilise 20 simulations pour le calcul des modes stochastiques. Pour la technique de régression, le nombre de simulations est fixé arbitrairement à 25. Ces simulations sont effectuées en des points définis par les zéros du polynôme de Legendre de degré 25. Bien sûr, ce nombre est fixé supérieur à *P+1* de telle sorte à avoir une solution admissible pour le problème des moindres carrés. La valeur moyenne et la variance instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ sont estimées par les différentes méthodes et sont comparés, respectivement dans les figure (4.37) et (4.38) suivantes, aux résultats obtenus avec la méthode intrusive et la méthode de MC.

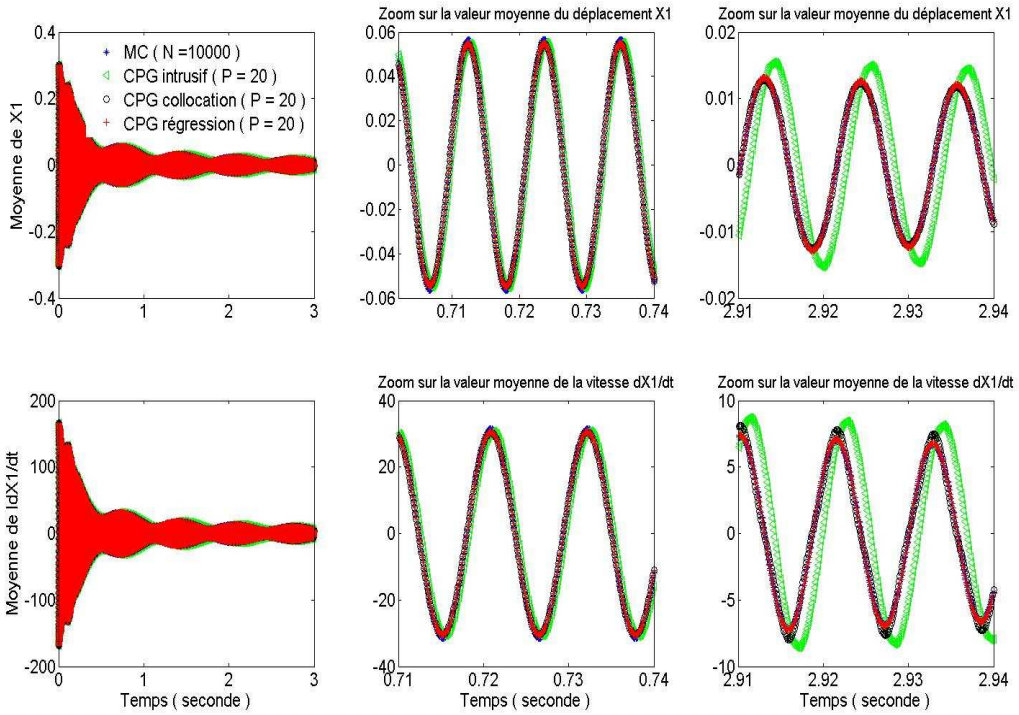


Fig.4. 37. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

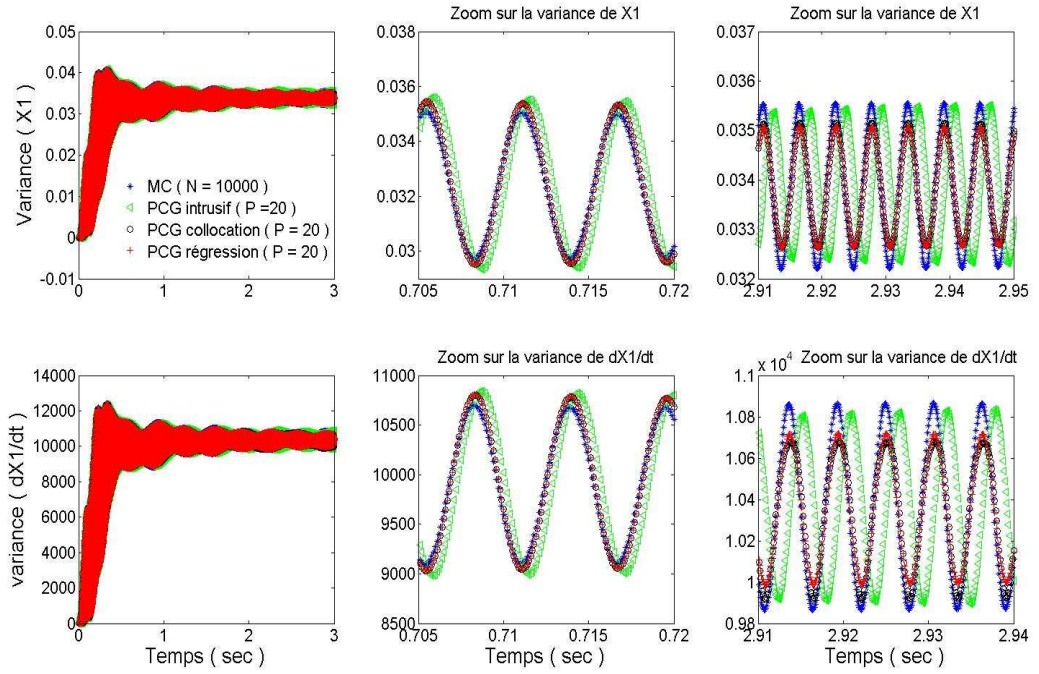


Fig.4. 38. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

Des figures (4.37) et (4.38) précédentes, il apparait que l'estimation des valeurs moyennes et des variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ obtenues en utilisant les techniques non intrusives (collocation et régression) avec $P = 20$ sont plus précises que celles obtenues avec la technique intrusive utilisant le même ordre *P*. Elles sont confondues avec les solutions référentielles de Monte Carlo sur la totalité de l'intervalle des 3 secondes contrairement aux solutions obtenues par la technique intrusive. En outre, les variances estimées avec les techniques non intrusives sont en phase avec la variance référentielle de MC mais avec une faible erreur sur les amplitudes. Les solutions non intrusives pour la valeur moyenne appartiennent, comme illustré dans la figure (4.39), à l'intervalle de confiance à 95% sur la totalité de l'intervalle des 3 secondes.

De la figure (4.40), les densités du déplacement X_1 en différents instants sont représentées. Là aussi, les méthodes non intrusives ont mieux approximé la densité référentielle obtenue par la méthode de Monte Carlo. Par ailleurs, les réalisations de X_1 correspondant respectivement à μ = 0.3, μ = 0.315, μ = 0.33 sont illustrées dans la figure (4.41). Les cycles limites correspondant sont tracés respectivement dans les figures (4.42), (4.43) et (4.44). On y observe une meilleure représentation avec les techniques non intrusives comparée à la technique intrusive. Une discrimination entre la technique de Gauss Legendre et celle de la régression peut être effectuée en terme de précision. En effet, les plus bas niveaux d'erreurs relatives sont enregistrés par la technique de régression avec 7.14% pour la valeur moyenne et 0.11% pour la variance sachant que le nombre de simulations utilisées est de 25 simulations pour 20 avec la technique de collocation de Gauss-Legendre.

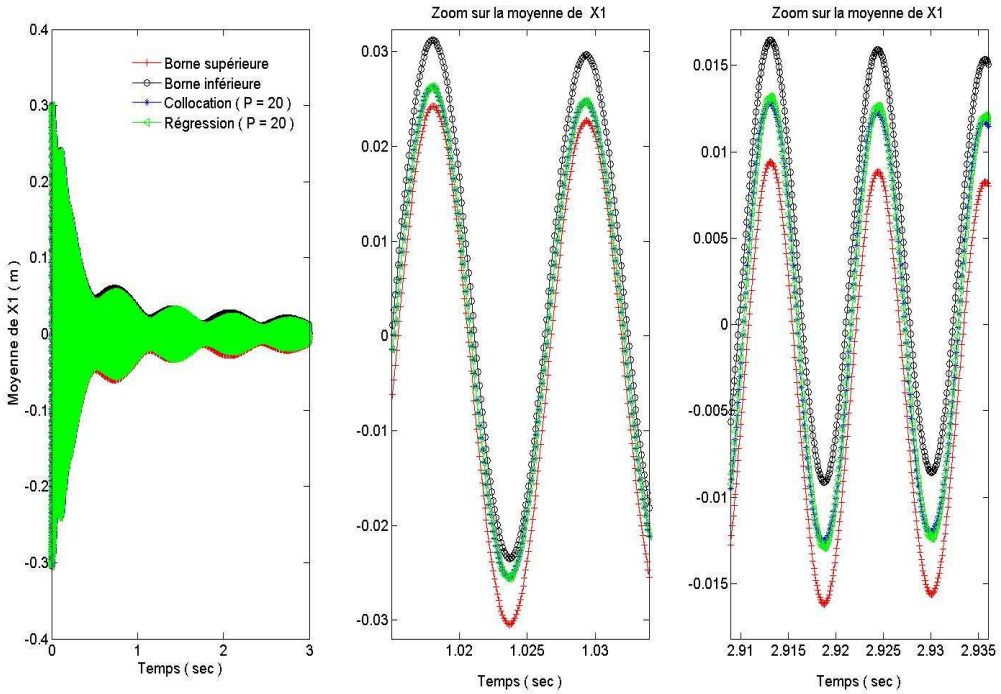


Fig.4. 39. Intervalle de confiance à 95% pour la valeur moyenne instantanée du déplacement X_1

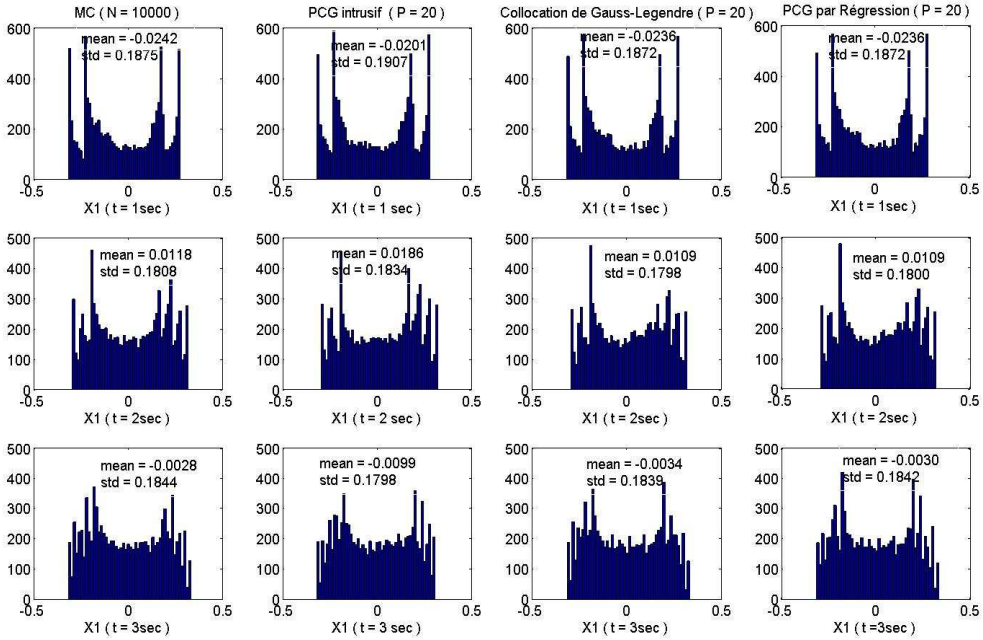


Fig.4. 40. Histogrammes instantanés du déplacement X_1 par les techniques non intrusives, intrusive et Monte Carlo

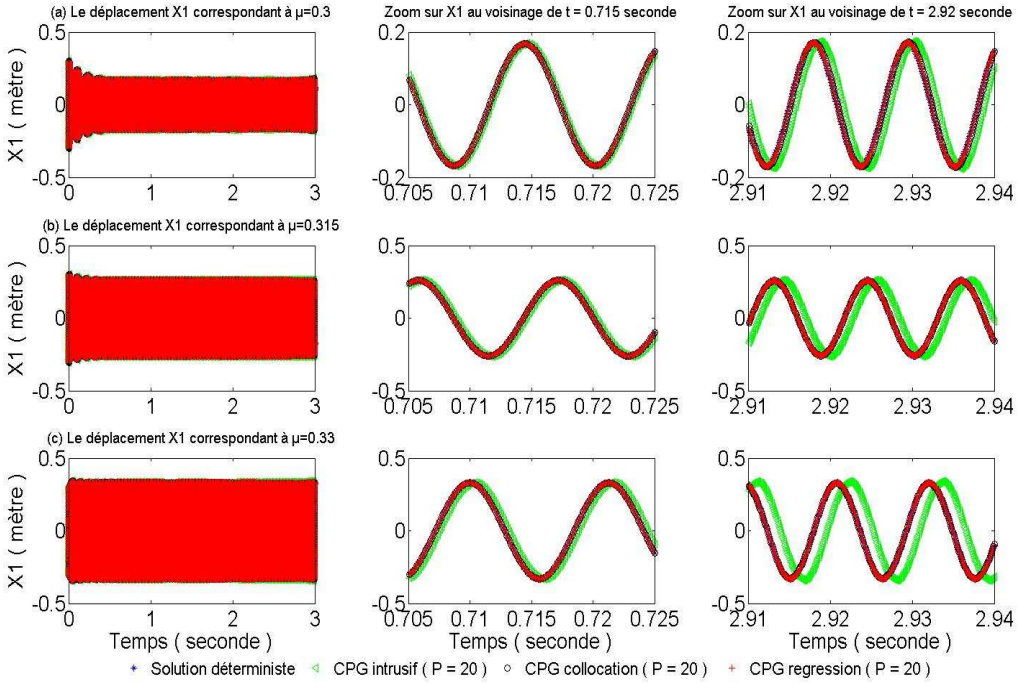


Fig.4. 41. Réalisations du déplacement X_1 via les techniques non intrusives, intrusive et par l'intégration déterministe

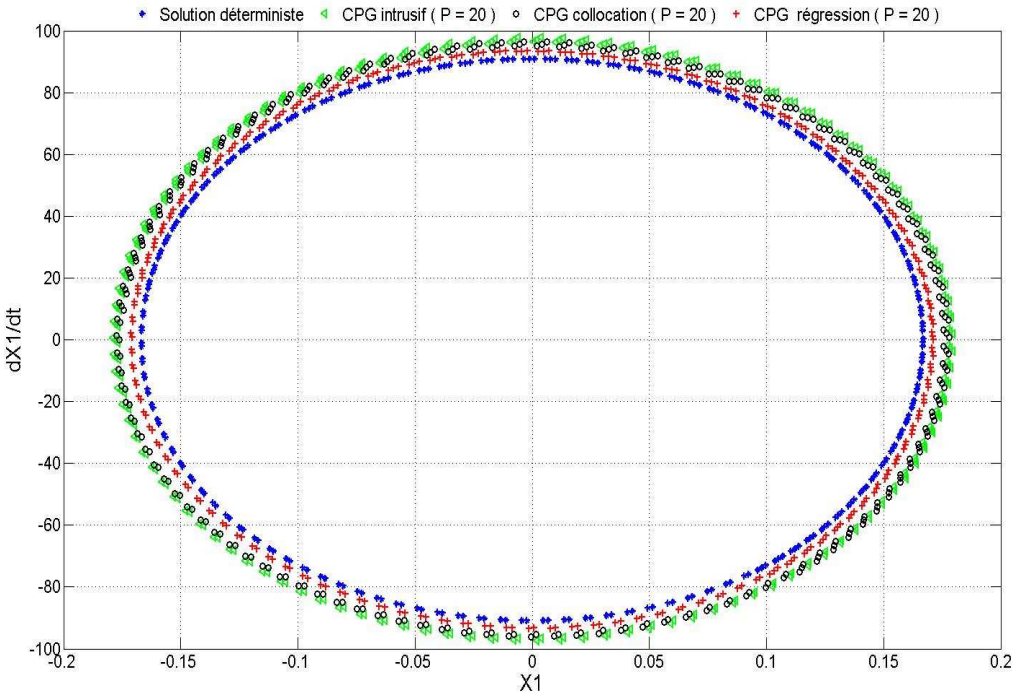


Fig.4. 42. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à *μ = 0.3* via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe

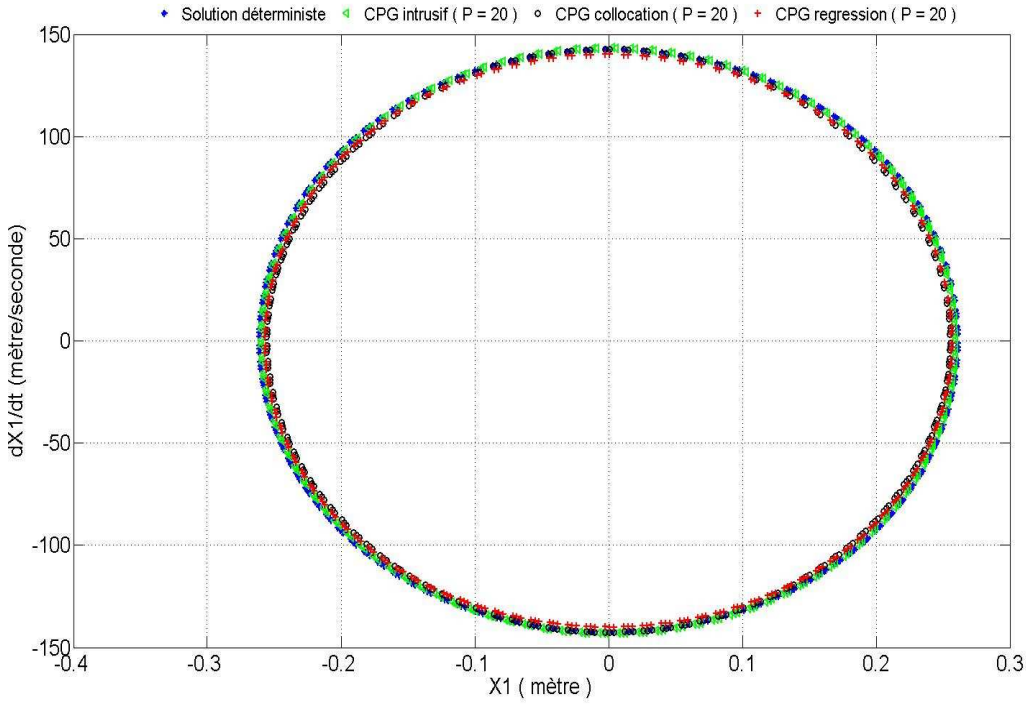


Fig.4. 43. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à *μ = 0.315* via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe

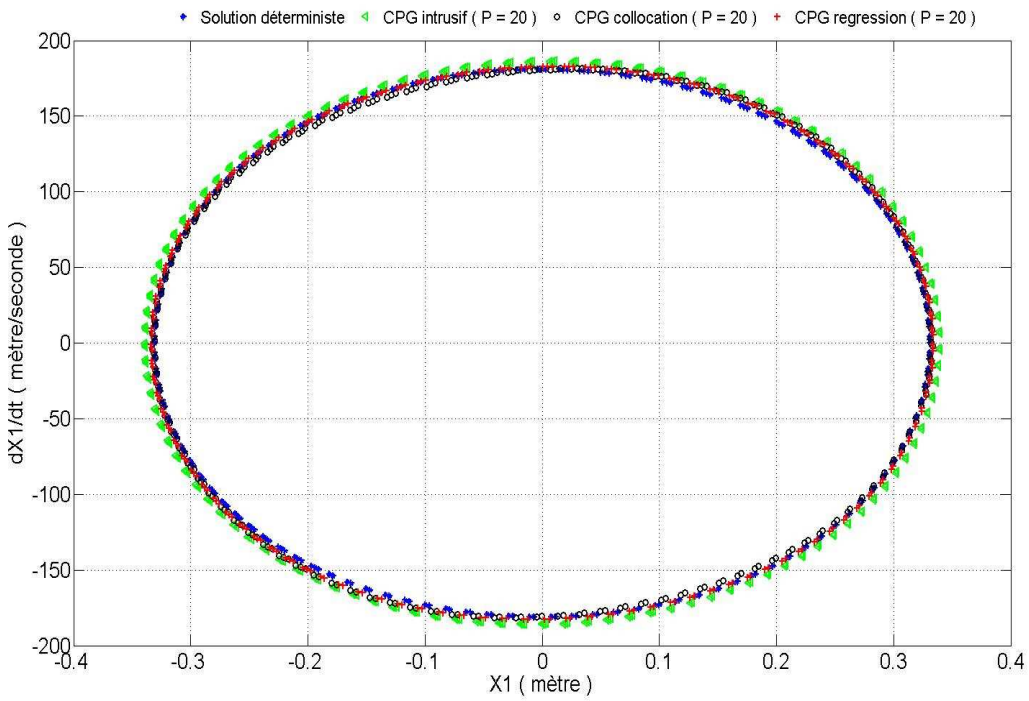


Fig.4. 44. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe

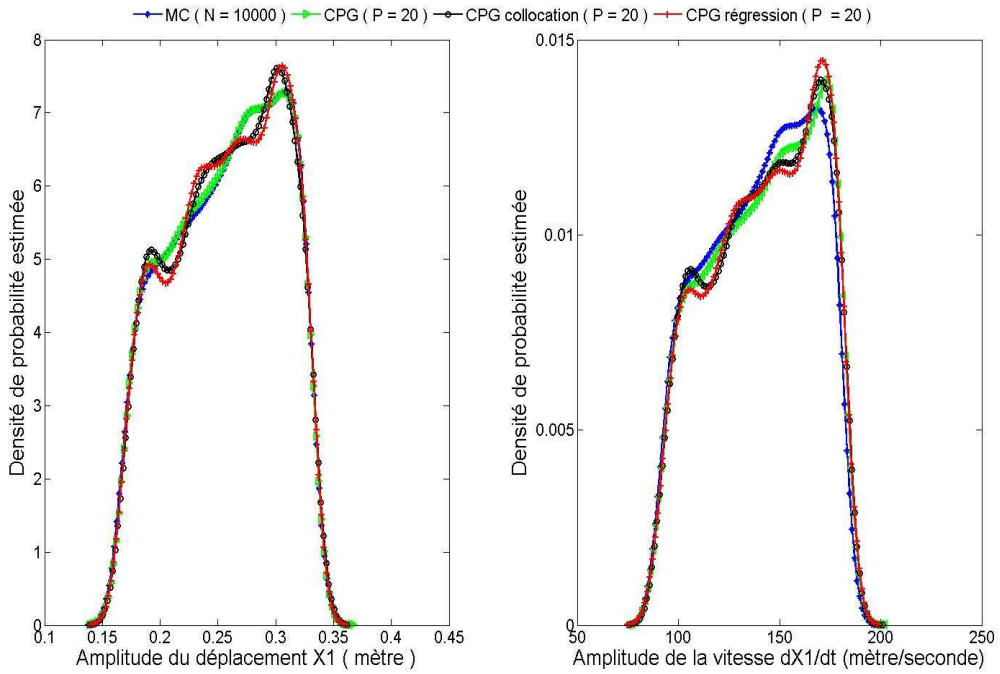


Fig.4. 45. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par les techniques non intrusives, intrusives et Monte Carlo

Les lois de probabilité des amplitudes des cycles limites dans l'intervalle [0.3, 0.33] sont estimées avec les deux techniques non intrusives (la NISP et la régression). Elles sont représentées et comparées à celles obtenues avec la technique intrusive et la méthode de MC dans la figure (4.45). Les caractéristiques statistiques des amplitudes de X_1 et $\dot{X}_1$ sont, respectivement, relevées dans les tableaux (4.7) et (4.8).

	MC	PCG intrusive (P = 20)	Collocation (P = 20)	Regression (P = 20)
Moyenne par Intervalle de confiance à 99%	0.2571±0.0012	0.2573±0.0012	0.2582±0.0012	0.2583±0.0012
Ecart type	0.0465	0.0465	0.0461	0.0461
Global min(X_1)	-0.3309	-0.3387	-0.3347	-0.3359
Global max(X_1)	0.3309	0.3385	0.3353	0.3363

Tab.4. 7. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par les techniques intrusive, non intrusives (*P = 20*) et Monte Carlo

	MC	PCG intrusive (P = 20)	Collocation (P = 20)	Regression (P = 20)
Moyenne par intervalle de confiance à 99%	138.6277±0.7457%	142.0122±0.6704	142.0122±0.6704	142.2326±0.6705
Ecart type	28.9007	25.9800	25.9809	25.9864
Global min(dX_1/dt)	-180.9520	-185.6655	-181.9281	-183.6523
Global max(dX1/dt)	180.9983	185.8295	182.1842	183.8365

Tab.4. 8. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ par les techniques intrusive, non intrusives (*P = 20*) et Monte Carlo

Les résultats montrent une bonne précision des techniques non intrusives avec un avantage pour la technique de collocation par rapport à la technique de régression dans l'estimation des minimum et maximum globaux. L'erreur relative ne dépasse pas 1.7% contrairement à la technique intrusive qui affiche une erreur relative plus important (<2.5%). L'enveloppe obtenue avec les différentes techniques surestime celle obtenue avec la technique référentielle de Monte Carlo. Cette surestimation est très importante pour une conception robuste mais elle n'est pas une propriété intrinsèque aux techniques du chaos polynomial. En d'autres termes, la surestimation de l'enveloppe est due à l'ordre du chaos polynomial choisi. Il est intéressant de souligner que la troncation de l'ordre du chaos aurait pu conduire à une sous-estimation. De toutes les manières, la précision est améliorée en augmentant l'ordre *P*. Cette opération implique des complications au niveau de l'implémentation particulièrement avec les techniques intrusives contrairement aux techniques non intrusives lesquelles, comme décrit au 3ième chapitre, offrent plus d'efficacité puisqu'elles ne requièrent que quelques calculs déterministes.

- **Etude avec *P = 30***

Pour améliorer les résultats présentés précédemment, les techniques non intrusives sont appliquées avec un ordre du chaos polynomial de Legendre augmenté (*P = 30*). Les caractéristiques statistiques des amplitudes de X_1 et $\dot{X}_1$ sont estimées Les résultats sont relevés dans les tableaux (4.9) et (4.10). Les densités de probabilité des amplitudes des cycles limites estimées sont tracées dans figure (4.44).

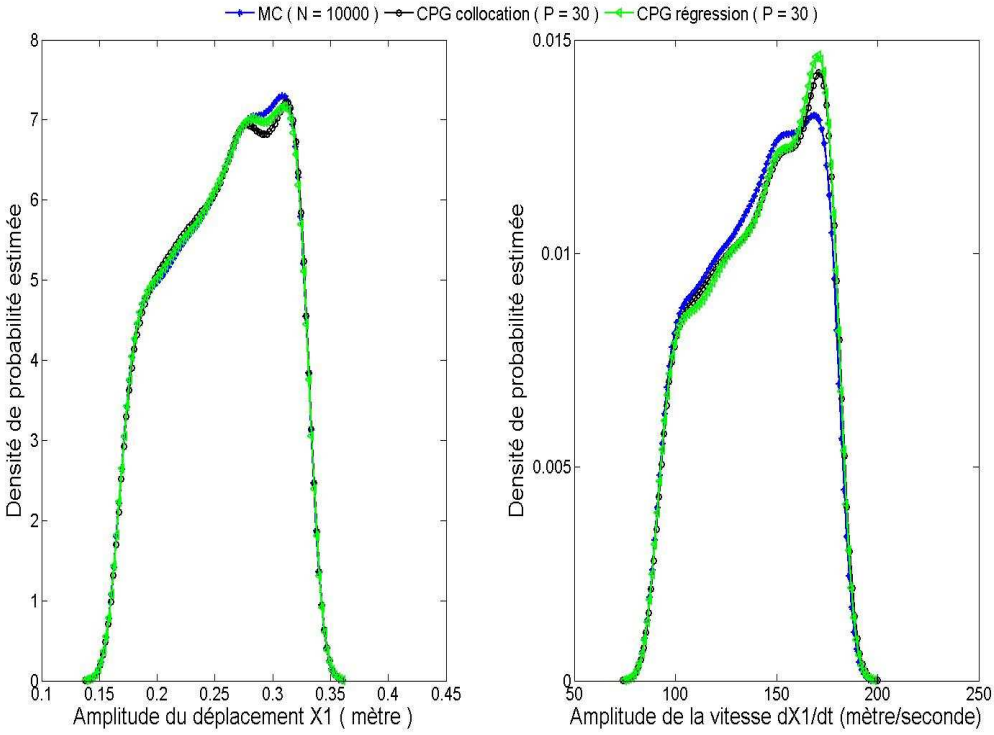


Fig.4.46. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par les techniques non intrusives, intrusives et Monte Carlo

	MC	Collocation de Gauss-Legendre (*P = 30*)	Regression (*P = 30*)
Moyenne par intervalle de confiance à 99%	0.2571±0.0012	0.2572±0.0012	0.2570±0.0012
Ecart type	0.0465	0.0465	0.0465
Global min(X_1)	-0.3309	-0.3307	-0.3309
Global max(X_1)	0.3309	0.3307	0.3309

Tab.4. 9. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par les techniques intrusive, non intrusives (*P* = 30) et Monte Carlo

	MC	Collocation de Gauss-Legendre ($P = 30$)	Regression ($P = 30$)
Moyenne par intervalle de confiance à 99%	138.6277±0.7457	142.6247±0.6673	141.6692±0.6661
Ecart type	28.9007	25.8614	25.8141
Global min(dX_1/dt)	-180.9520	-181.9158	-181.2867
Global max(dX1/dt)	180.9983	181.8950	181.3285

Tab.4. 10. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement par les techniques intrusive, non intrusives (*P* = 30) et Monte Carlo

Les résultats montrent un gain en précision et donc une diminution de la surestimation observé précédemment avec $P = 20$. Une précision remarquable est particulièrement enregistrée avec la technique de régression avec laquelle l'erreur relative n'excède pas 0.2% alors qu'avec la technique de projection non intrusive, l'erreur relative enregistrée est légèrement plus élevée mais ne dépasse pas 0.55%.

- **Choix des points de calculs de la méthode de la régression**

Le nombre de calculs déterministes utilisés dans la régression est égal à 35. Les points de calcul sont définis comme étant les zéros du polynôme d'ordre 35. Ce nombre, pour rappel, a été fixé arbitrairement supérieur à $P+1 = 30$. Cependant, les points de simulation peuvent être aussi générés aléatoirement suivant la loi de probabilité régissant le coefficient de frottement. L'utilisation de la génération déterministe des points de calcul est maintenant évaluée par rapport à la génération aléatoire. Pour cela, les deux premiers moments statistiques sont estimés en utilisant dans un premier cas 100 points générés aléatoirement puis 150 points et enfin 250 points. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec les 35 points, définis comme étant les zéros du polynôme de Legendre dont le degré est égal à 35. Les résultats sont relevés dans les figures (4.47) et (4.48).

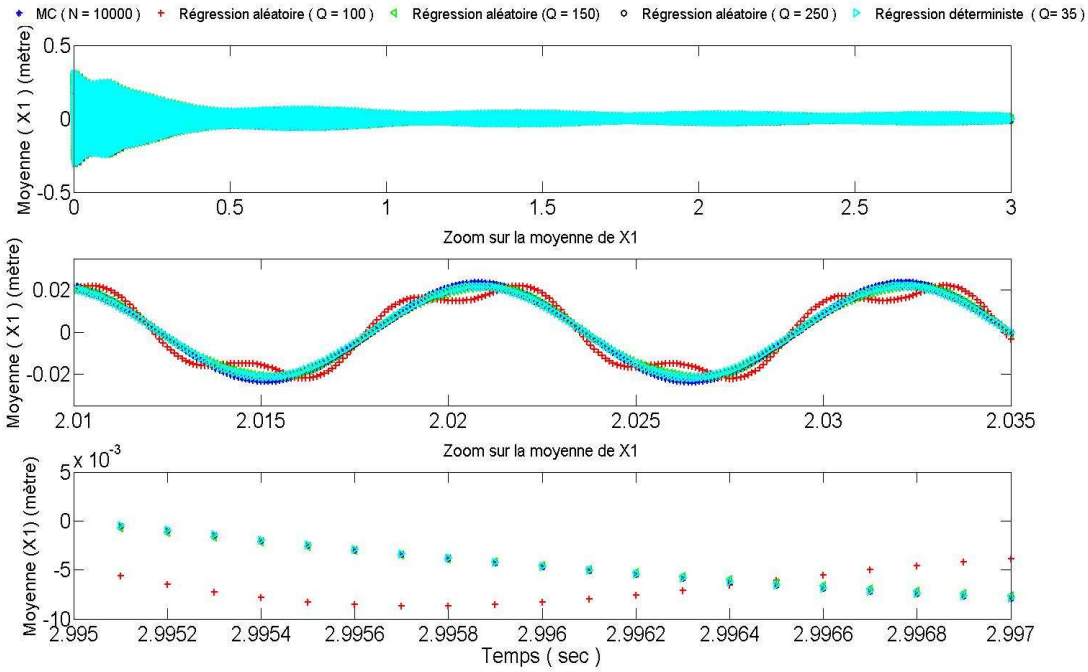


Fig.4. 47. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de régression utilisant Monte Carlo et les zéros des polynômes orthogonaux

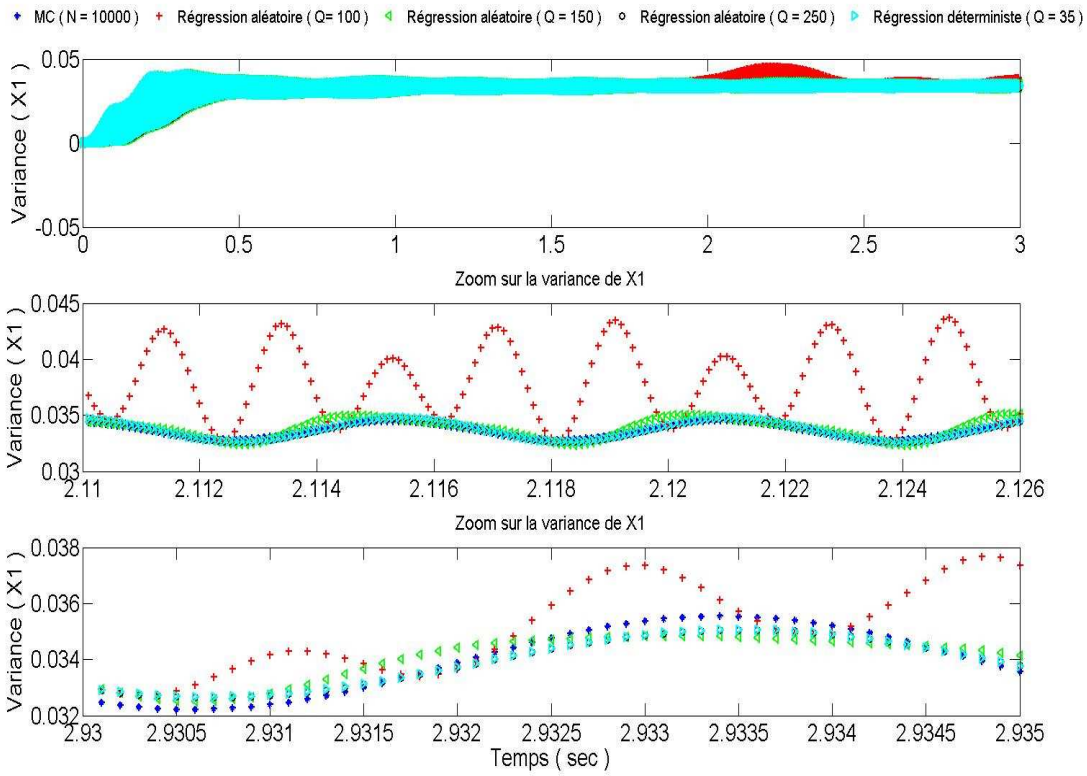


Fig.4. 48. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de régression utilisant Monte Carlo et les zéros des polynômes orthogonaux

Les estimations obtenues avec la méthode de régression utilisant seulement les 35 points (zéros du polynôme de Legendre) sont confondues avec celles obtenues avec les 250 points générés aléatoirement. Les résultats justifient de façon convaincante le choix des zéros comme points de calculs déterministes.

Conclusion 4.3 sur le chaos polynomial de Legendre calculé par les méthodes intrusive et non intrusives sur un intervalle temporel court

Dans cette section, il a été question du problème de la modélisation du comportement dynamique du système frottant (4.5) dont le coefficient de frottement incertain est régit par une loi uniforme sur un intervalle dans lequel le système (4.5) développe des instabilités de type flottement (cycles limites). L'objectif visé est de bien modéliser les cycles limites de telle façon à déterminer leurs caractéristiques statistiques et leurs amplitudes maximales. Dans cette perspective, le chaos polynomial de Legendre dans son schéma intrusif et non intrusif a été développé. Le premier schéma, bien qu'il permet de ne faire qu'une seule et unique simulation, présente des limites contraignantes. En effet, le schéma intrusif nécessite des modifications de plus en plus lourdes dés que l'ordre du chaos de Legendre devient important. Ceci fait exploser la dimension et le nombre de termes non linéaires dans la projection ce qui rend l'usage du schéma laborieux. De ce point de vue, il est plus judicieux de favoriser les techniques non intrusives qui ne nécessitent aucune modification du modèle original d'autant plus que les estimations prédites par ces méthodes sont précises. A cet effet, deux techniques non intrusives ont été appliquées. La première est basée sur la projection de la solution aléatoire dans la base du chaos polynomial tandis que la deuxième est la méthode de régression. Les deux méthodes nécessitent des nombres finis de calcul déterministes. Une meilleure précision a été relevée avec la technique de régression. Par ailleurs, il a été montré, dans le cas de la technique de régression, que l'utilisation de points de calcul générés de manière déterministe (zéros d'un polynôme de degré suffisamment élevé) offre une meilleure efficacité (précision, coût) par rapport à la méthode utilisant des points de calcul générés aléatoirement.

4.4.1.2. Insuffisance du chaos polynomial généralisé

Dans la section précédente, le but a été d'utiliser les techniques du chaos polynomial généralisé pour estimer les enveloppes des cycles limites correspondant à la dispersion du coefficient de frottement fixé à une distance proche du point de bifurcation de Hopf . Les différentes simulations effectuées ont été menées sur un temps relativement cours (3secondes) étant donné que les régimes transitoires avant obtention des cycles limites étaient courts et que l'objectif fixé était d'estimer la dispersion de l'amplitude de ces derniers. Le problème traité est ainsi inscrit dans un contexte particulier, celui de la modélisation et de l'analyse du comportement et des statistiques dynamiques à court terme. Cependant, les régimes transitoires avant apparition des cycles limites peuvent être plus longs pour certains systèmes frottants. Ainsi, l'objectif de l'étude dans la suite de cette section va consister à déterminer des modèles qui représentent au mieux le comportement dynamiques des systèmes frottants sur des intervalles temporels plus longs. L'intérêt est porté sur le comportement dynamique du système (4.5) sur un horizon temporel suffisamment long traduit par un nombre de périodes d'oscillation plus important. Ainsi, l'objectif est d'analyser l'aptitude du chaos polynomial de Legendre à modéliser les cycles limites sur un nombre de périodes suffisamment grand. Pour cela, le même problème traité dans la section précédente est reconsidéré mais dans un contexte plus général,

celui de la modélisation des statistiques dynamiques à long terme. Le but est d'estimer les moments statistiques du premier et du second ordre sur un intervalle non plus de 3 secondes mais de 10 secondes**.** Le chaos polynomial généralisé non intrusif utilisant la technique de régression est donc appliqué compte-tenu de ces bonnes performances illustrées dans la section précédente.

Les ordres $P=10$, $P=20$ et $P=30$ sont considérés pour observer l'apport de l'ordre du chaos polynomial de Legendre sur la précision des estimations des deux premiers moments statistiques. Les résultats sont relevés dans les figures (4.49) et (4.50). A partir de ces deux figures, il apparait clairement que l'ordre P nécessaire pour garder une bonne précision des deux moments statistiques croit avec le temps. En particulier, de la figure (4.50), on peut observer que l'ordre $P=10$ qui est suffisant pour estimer la variance de X_1 sur la première seconde ne l'est plus pour estimer les mêmes moments sur la deuxième seconde. De même, $P=20$ devient insuffisant également à partir de la troisième seconde tandis que les limites de $P=30$ apparaissent à partir de la cinquième seconde. Les mêmes observations peuvent être énoncées à partir de la réalisation de la solution X_1 correspondant à la valeur 0.33 du coefficient de frottement et illustrée dans la figure (4.51). L'augmentation de l'ordre de troncation ne fait que retarder la déficience du chaos polynomial de Legendre sur un nombre de périodes supplémentaires. Un ordre plus grand devient nécessaire. La méthode perd alors son intérêt en termes de précision et d'efficacité.

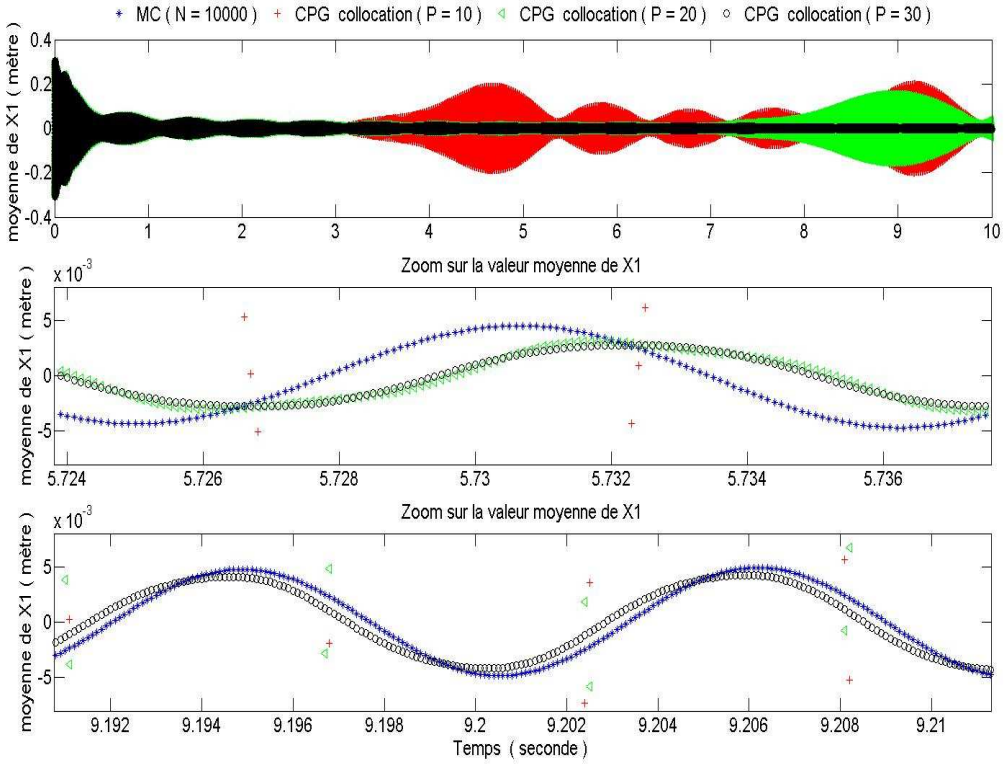


Fig.4. 49. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de projection non intrusive (collocation) sur l'intervalle temporelle [0, 10]

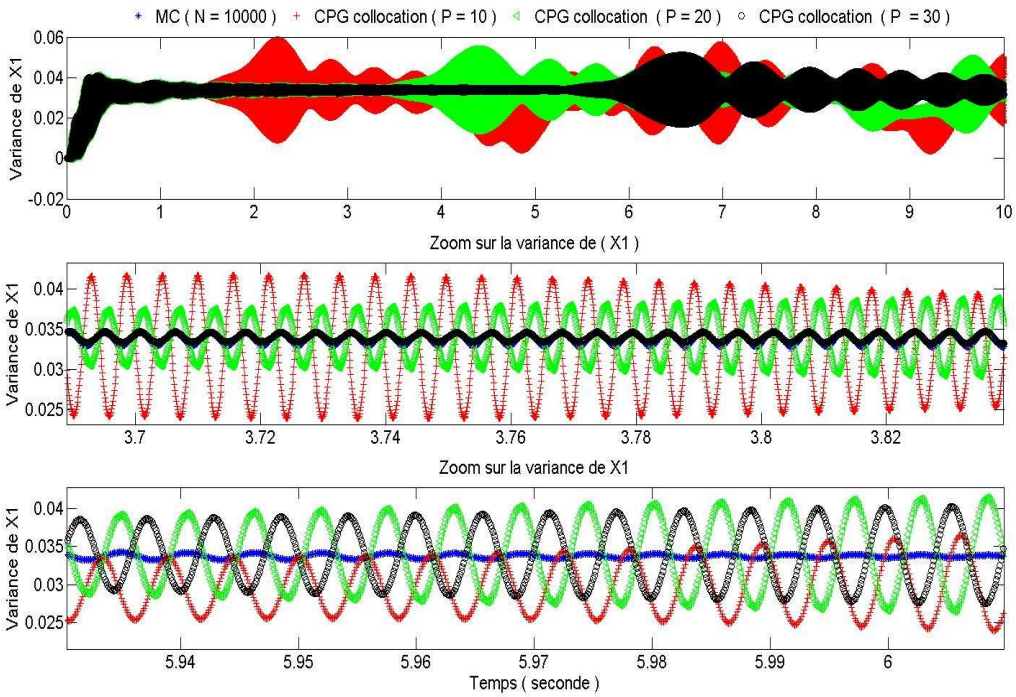


Fig.4. 50. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de projection non intrusive (collocation) sur l'intervalle temporelle [0, 10]

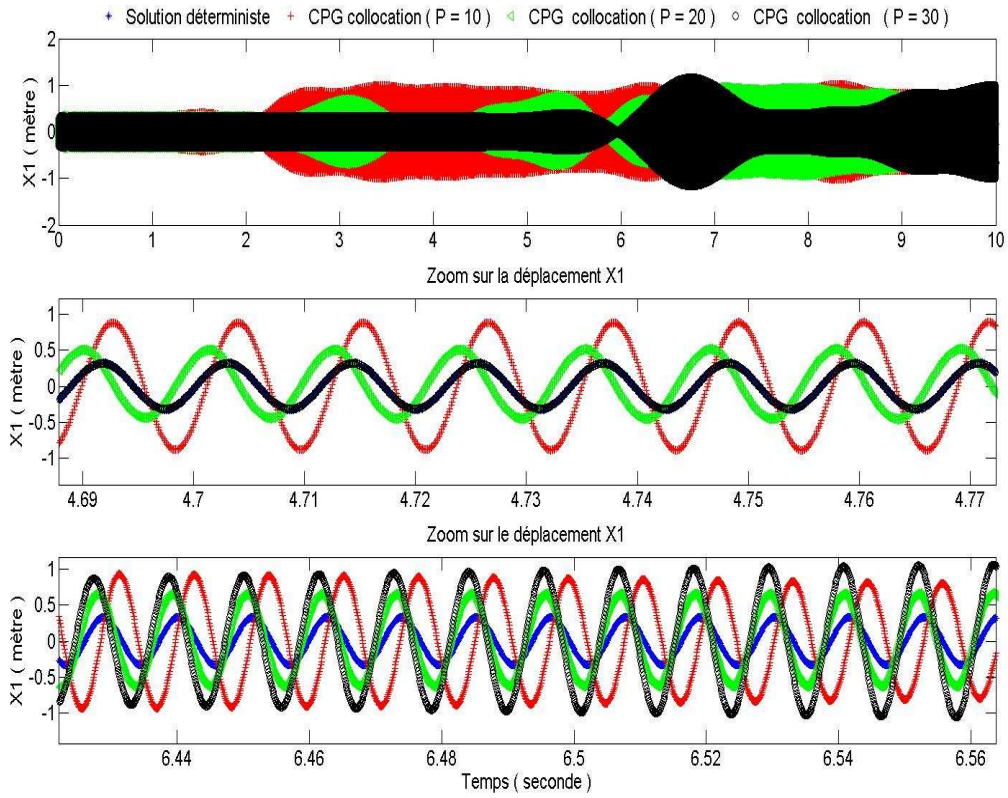


Fig.4. 51. Réalisation du déplacement X_1 par la technique de projection non intrusive (collocation) et l'intégration déterministe, correspondant à μ = 0.33

En traçant dans la figure (4.52), l'évolution du déplacement X_1 dans la dimension stochastique modélisée par la variable de Legendre, la déficience du chaos polynomial généralisé de Legendre peut être expliquée. En effet, le modèle (4.10) devient incapable, à partir d'un certain temps, de modéliser les évolutions rapide et non linéaire du déplacement dans la dimension stochastique qui deviennent plus importantes avec le temps. Plus la fonction est non linéaire et à variation rapide, plus grand est l'ordre du chaos polynomial généralisé nécessaire pour maintenir une bonne précision avec le temps. Dans le cas du système traité, à t = 6 sec, l'ordre $P = 30$ devient aussi insuffisant. L'ordre nécessaire pour bien approximer la fonction non linéaire devient si grand que l'usage de la méthode devient non pratique. Le recours à d'autres méthodes devient ainsi nécessaire.

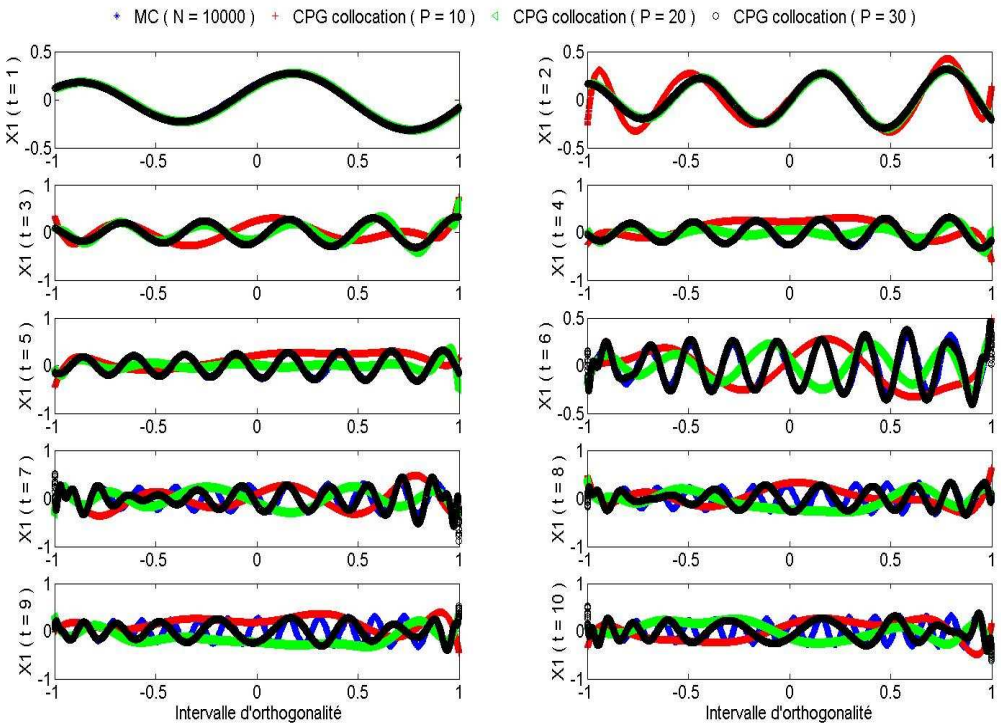


Fig.4. 52. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1]

4.4.1.3. Application du chaos polynomial de Legendre multi-éléments

Pour contourner les difficultés décrites précédemment, le chaos polynomial de Legendre multi-éléments est considéré dans cette section. L'objectif est, dans une première étape, de modéliser les cycles limites du système (4.5) sur l'horizon temporel défini par l'intervalle $[0 \;\; 10]$ puis d'estimer leurs amplitudes maximales engendrées par la dispersion du coefficient de frottement.

L'idée de la méthode est, pour rappel, de diviser l'intervalle de l'incertitude considéré en plusieurs éléments puis de définir dans chaque élément une variable aléatoire locale par rapport à laquelle le chaos polynomial de Legendre est appliqué. L'approximation globale est ensuite reconstruite.

Deux éléments puis quatre éléments ($m = 2, m = 4$) sont considérés. Ayant donné la meilleure performance (comme montré dans la section précédente), l'ordre $P = 30$ est testé.

$x_{i,k}\left(t,\overline{\xi}^{k}\right)$ (i = 1,…,4, $k=1,...,m$) est le processus aléatoire correspondant au kième élément modélisé par la variable locale $\overline{\xi}^{k}$ uniformément distribuée sur l'intervalle $\left[-1\ 1\right]$ d'où :

$$x_{i,k}\left(t,\overline{\xi}^{k}\right)=\sum_{j=0}^{P}\overline{x}_{i,k,j}\left(t\right)L_{j}\left(\overline{\xi}^{k}\right),\ k=1,...,m \tag{4.22}$$

A base de (4.22), l'approximation globale de $x_i\left(t,\xi\right)$ est reconstruite comme suit:

$$x_{i}\left(t,\xi\right)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=0}^{P}\overline{x}_{i,k,j}\left(t\right)L_{j}\left(\overline{\xi}^{k}\right)Z_{k} \tag{4.23}$$

Z_k étant la fonction indicatrice définie dans le troisième chapitre.

A noter que seule la technique non-intrusive est utilisée pour calculer, pour chaque élément k, les modes stochastiques $\overline{x}_{i,k,j}\left(t\right)$. Ce choix est justifié par les moins bonnes performances de la technique intrusive illustrées précédemment. La technique de projection spectrale et la régression sont appliquées avec les mêmes modalités techniques décrites précédemment.

4.4.1.3.1. Chaos polynomial de Legendre multi-éléments avec la technique NISP

La technique de collocation de Gauss-Legendre est utilisée pour calculer les modes stochastiques dans chaque élément. Les approximations globales de la valeur moyenne et de la variance du déplacement $X_1=x_1\left(t,\xi\right)$ sont reconstruites et représentées respectivement dans les figures (4.53) et (4.54).

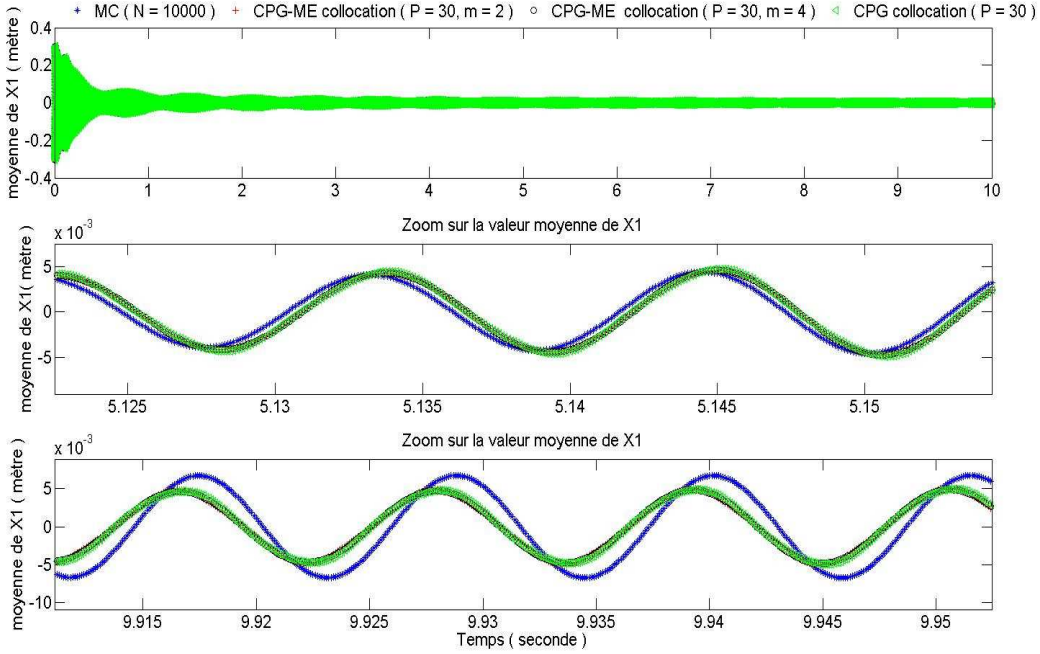


Fig.4. 53. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos polynomial de Legendre et le chaos multi-éléments via la technique de projection non intrusive

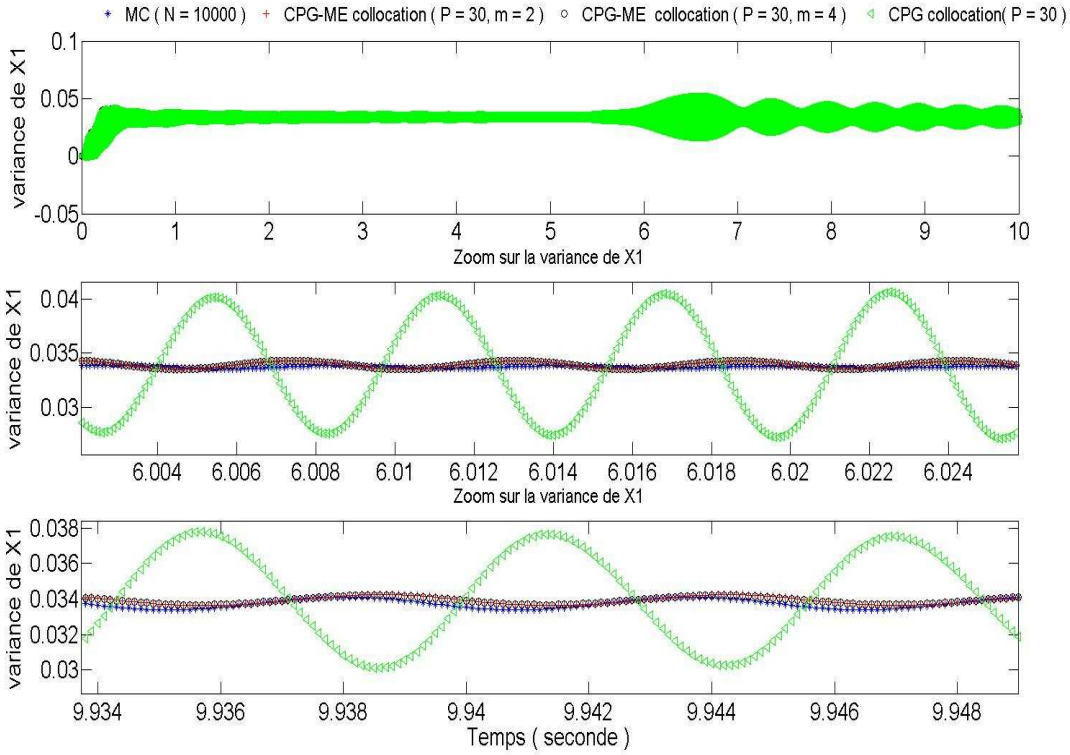


Fig.4. 54. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos polynomial de Legendre et le chaos multi-éléments via la technique de projection non intrusive

Concernant la valeur moyenne relevée dans figure (4.53), il peut être noté que la performance de la méthode du chaos de Legendre avec 2 et 4 éléments est similaire à celle obtenue avec la méthode du chaos polynomial de Legendre. L'apport du chaos multi-éléments est plus significatif dans le problème de l'estimation de la variance dont l'évolution est illustrée dans figure (4.54). En effet, le modèle (4.23) estime correctement la solution référentielle de Monte Carlo pour la variance sur la totalité de l'intervalle $[0\ 10\,\text{sec}]$. Par ailleurs, on peut noter que la précision obtenue avec deux éléments est similaire à celle acquise avec 4 éléments dans l'estimation des deux moments statistiques. Les réalisations du déplacement X_1 correspondant aux valeurs μ = 0.3, μ = 0.315 *et* μ = 0.33 sont relevées respectivement dans les figures (4.55), (4.56) et (4.57). On peut y remarquer que l'utilisation de la technique du multi-éléments a effectivement pallié aux insuffisances du chaos de Legendre observées dans la section précédente. En effet, les oscillations sont bien modélisées sur la totalité de l'intervalle temporel considéré. Les cycles limites correspondant aux mêmes réalisations de μ sont tracés dans le plan de phase $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ en utilisant les 300 derniers points de X_1 et $\dot{X}_1$. Ils sont relevés dans les figures (4.58), (4.59) et (4.60). La reconstruction par le modèle (4.23) des cycles limites, tout comme la densité de probabilité de l'amplitude de X_1 et $\dot{X}_1$ illustrée dans figure (4.61), est plus précise avec 4 éléments qu'avec 2 éléments. Tous les résultats montrent que 4 éléments sont suffisants pour estimer et modéliser correctement les caractéristiques statistiques du comportement dynamiques du système (4.5).

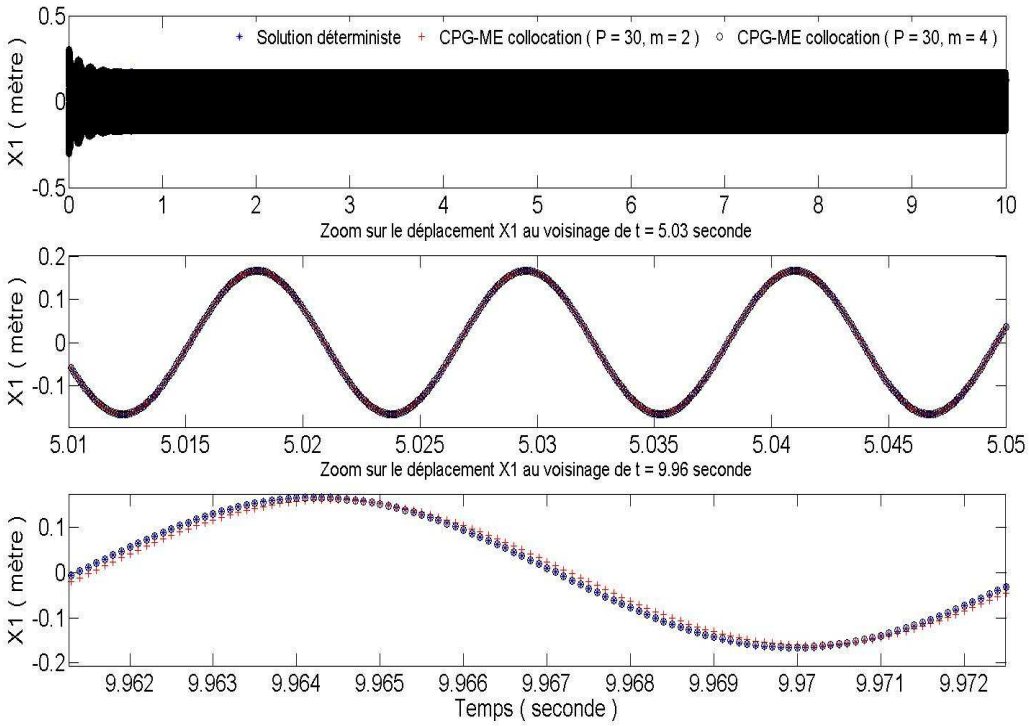


Fig.4. 55. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à *μ = 0.3* par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

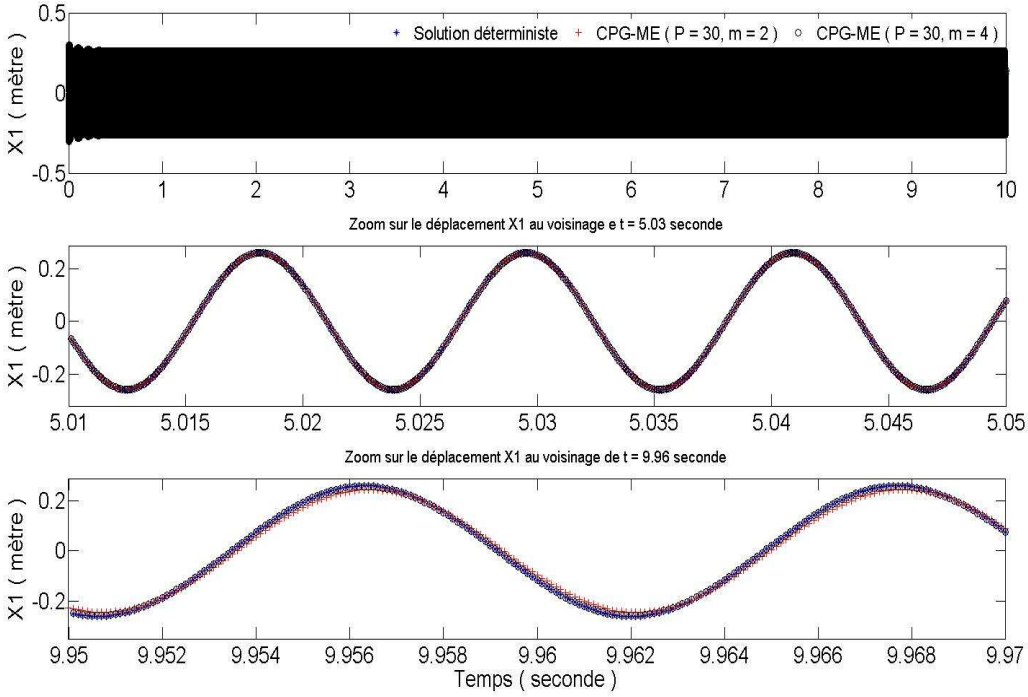


Fig.4. 56. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

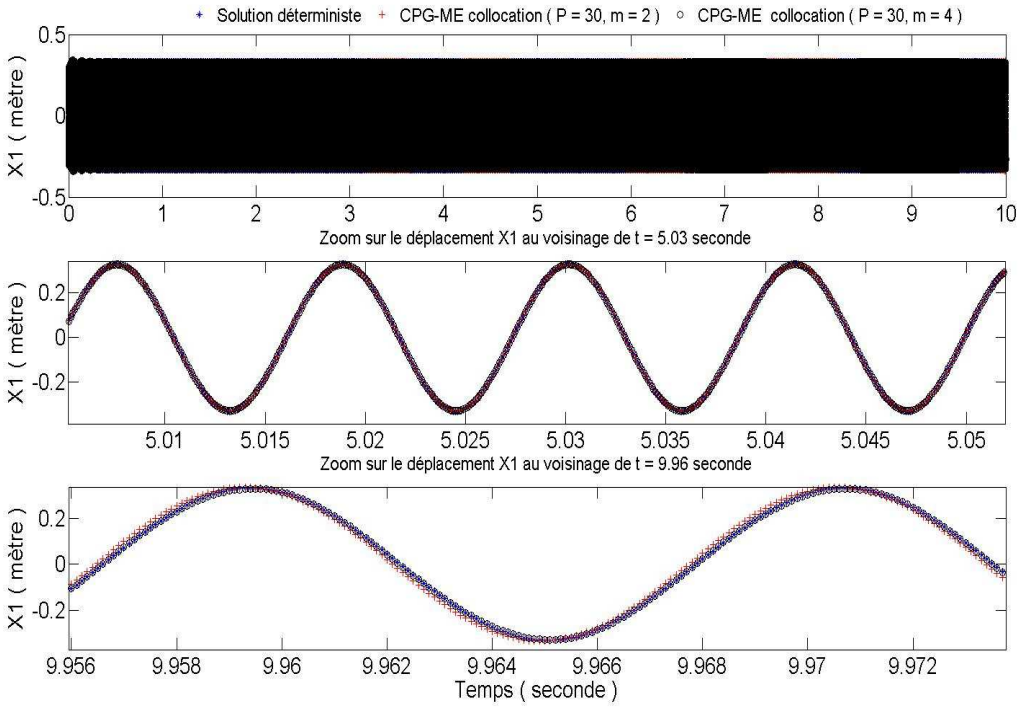


Fig.4. 57. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

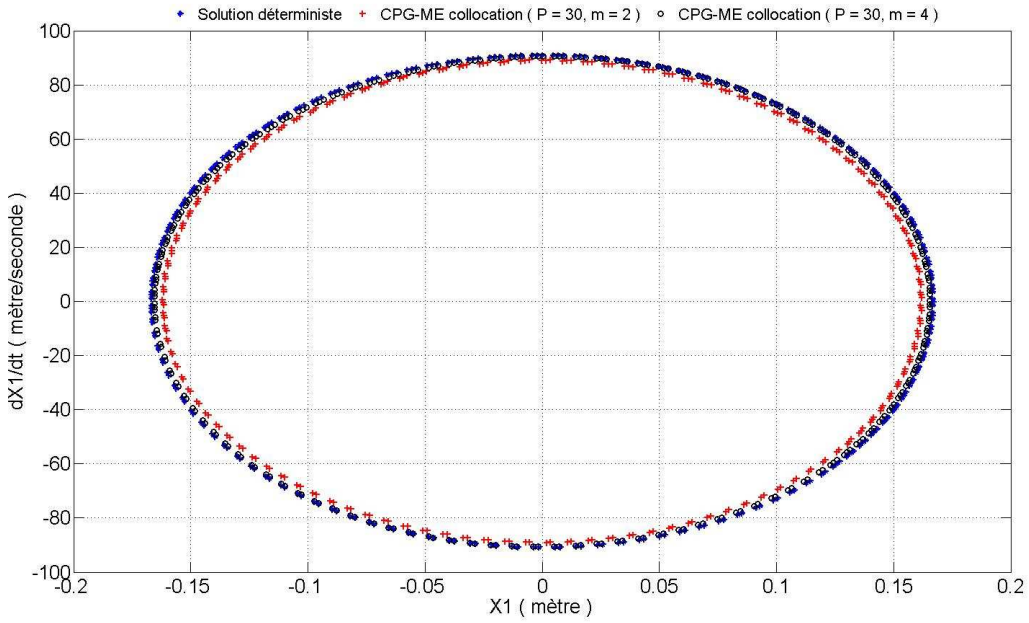


Fig.4. 58. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

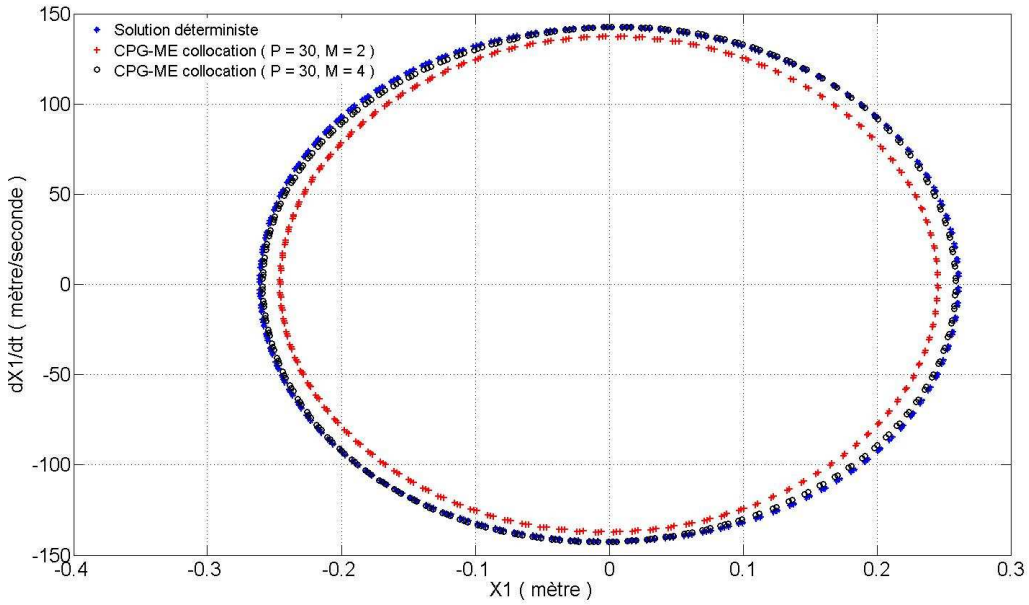


Fig.4. 59. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

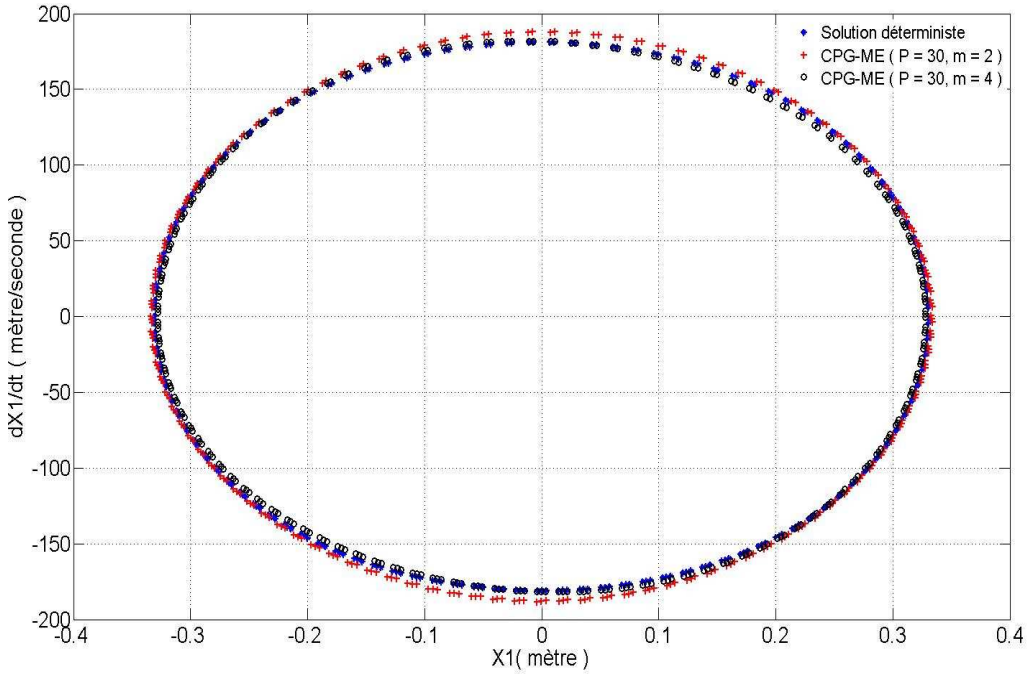


Fig.4. 60. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe

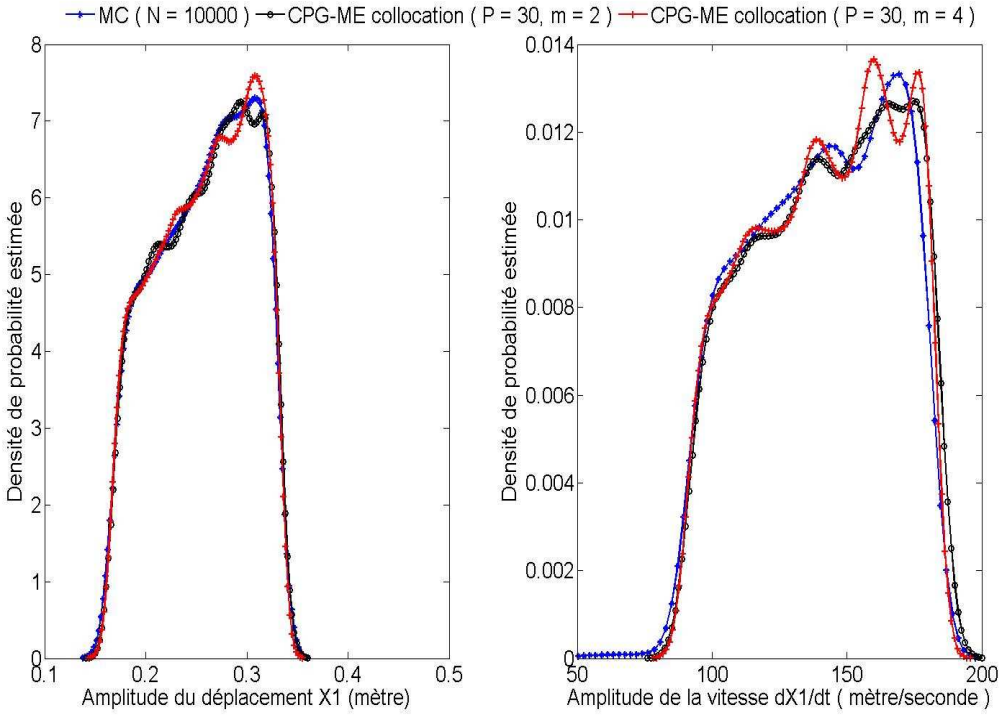


Fig.4.61. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par Monte Carlo

A partir de ce paragraphe, dans un souci de clarté et afin de ne pas trop alourdir ce rapport, seules les courbes les plus représentatives des résultats seront présentées.

- **Illustration de l'effet du chaos multi-éléments sur l'ordre du chaos**

L'ordre du chaos polynomial de Legendre utilisé pour chaque élément était égal à P = 30 (étude précédente avec la méthode CPG-ME). Cet ordre a été utilisé pour tester la méthode du CPG-ME puisqu'il avait permis, parmi tous les ordres considérés, la meilleure performance (mais insuffisante) du modèle (4.10) sur le problème de l'estimation des statistiques à long terme (la totalité des 10 secondes). Maintenant, pour observer l'effet de l'utilisation de la méthode du CPG-ME sur l'ordre du chaos, nous avons relevé pour, P = 10 *et* P = 20 et avec m = 4, la variance instantanée du déplacement X_1, dans figure (4.62). On y remarque l'insuffisance de P = 10 pour estimer correctement la variance contrairement à P = 20 qui offre une estimation confondue avec celle obtenue par P = 30. Ceci permet de conclure que l'utilisation du CPG-ME peut permettre la diminution de l'ordre du chaos nécessaire à une bonne estimation des caractéristiques statistiques.

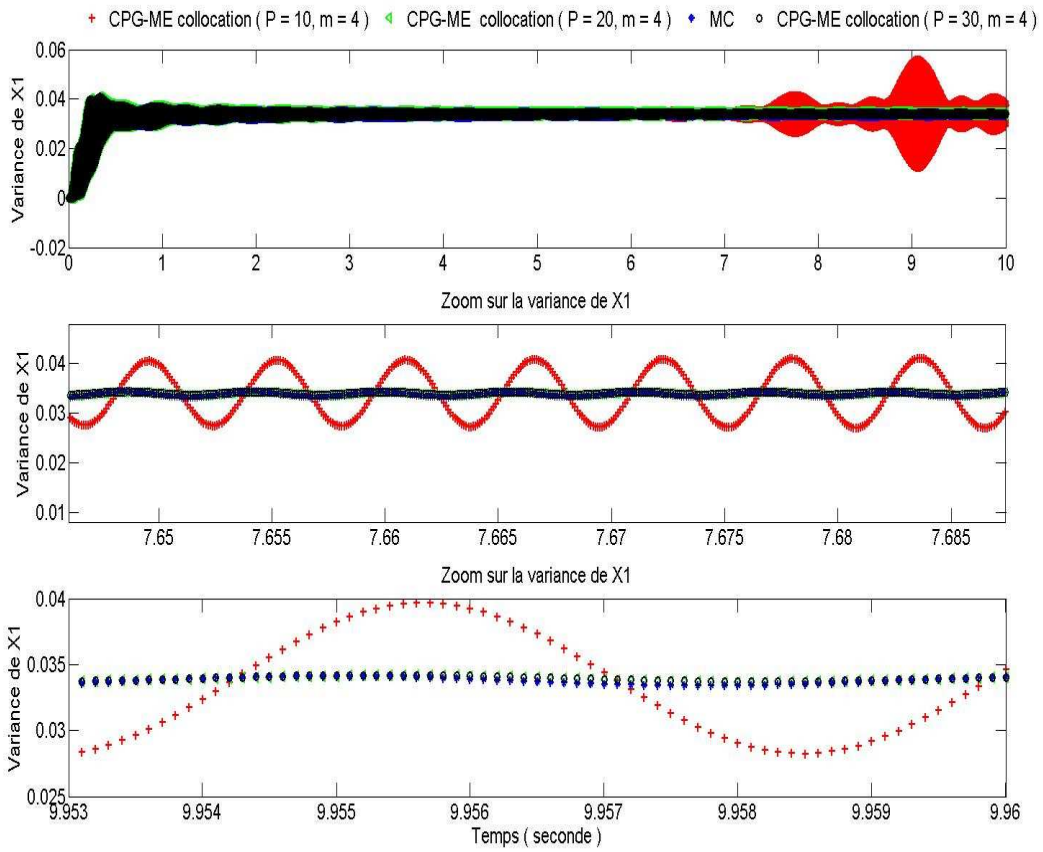


Fig.4. 62. Variance instantanée du déplacement estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) avec différents ordres de troncation

Les niveaux vibratoires des cycles limites estimés par la méthode du chaos polynomial de Legendre à 4 éléments avec $P = 20$ et $P = 30$ sont relevés dans les tableaux (4.11) et (4.12). Les résultats sont discutés avec ceux de la technique de régression dans la section suivante.

4.4.1.3.2. Chaos polynomial de Legendre multi-éléments par la technique de régression

L'objectif dans cette section est d'associer la technique de régression avec le chaos multi-éléments et d'en analyser la performance sur les mêmes problèmes considérés jusqu'ici à savoir, la modélisation et la prédiction des cycles limites ainsi que l'estimation de leurs caractéristiques statistiques. Dans cette perspective, nous avons reconsidéré la régression avec un nombre de calculs déterministes égal à 35, les points de calcul étant générés de façon déterministes (zéros du polynôme de Legendre de degré 35).

- **Etude sur 4 éléments avec les ordres P = 20 et P = 30**

Dans cette étude, seul le cas $m = 4$ est considéré avec les ordres du chaos $P = 20$ et $P = 30$. Les deux moments du premier et second ordre du déplacement X_1 sont relevés dans les deux figures (4.63) et (4.64). Les estimations obtenues sont confondues avec les solutions référentielles de Monte Carlo. $P = 20$ estime aussi bien que $P = 30$ les moments statistiques du déplacement X_1. Les réalisations correspondant à $\mu = 0.3$, $\mu = 0.315$ et $\mu = 0.33$ reconstruites par le modèle (4.23) calculé par la régression sont comparées aux solutions déterministes, solutions du système (4.5) pour les valeurs fixées du coefficient de frottement. Les résultats sont relevés dans les figures (4.65) et (4.66) et (4.67). De même, les cycles limites correspondant sont représentés dans le plan de phase dans les figures (4.68) et (4.69) et (4.70). Une modélisation précise de la dynamique oscillatoire du système (4.5) peut y être constatée aussi bien avec $P = 30$ qu'avec $P = 20$, le nombre d'éléments étant $m = 4$.

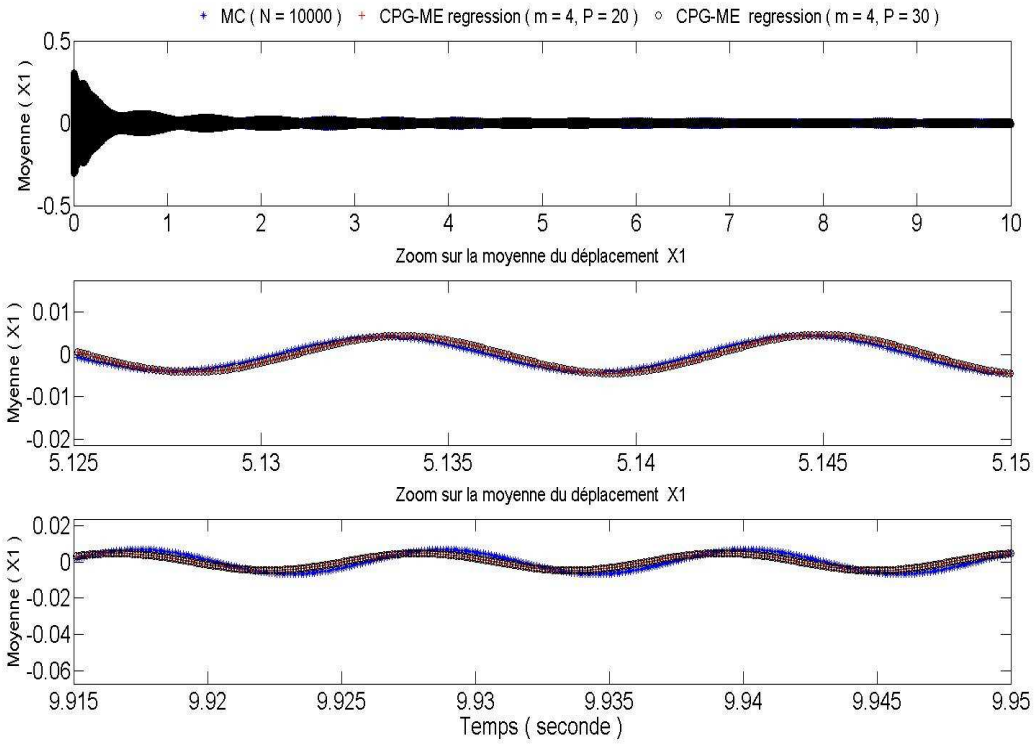


Fig.4. 63. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de régression

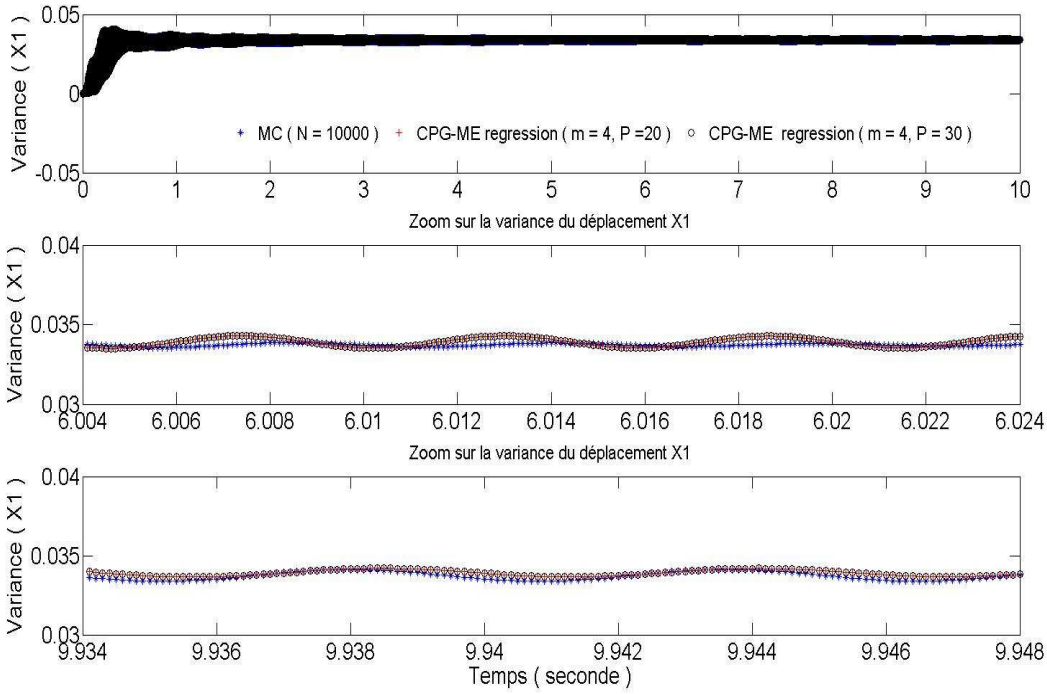


Fig.4. 64. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de régression

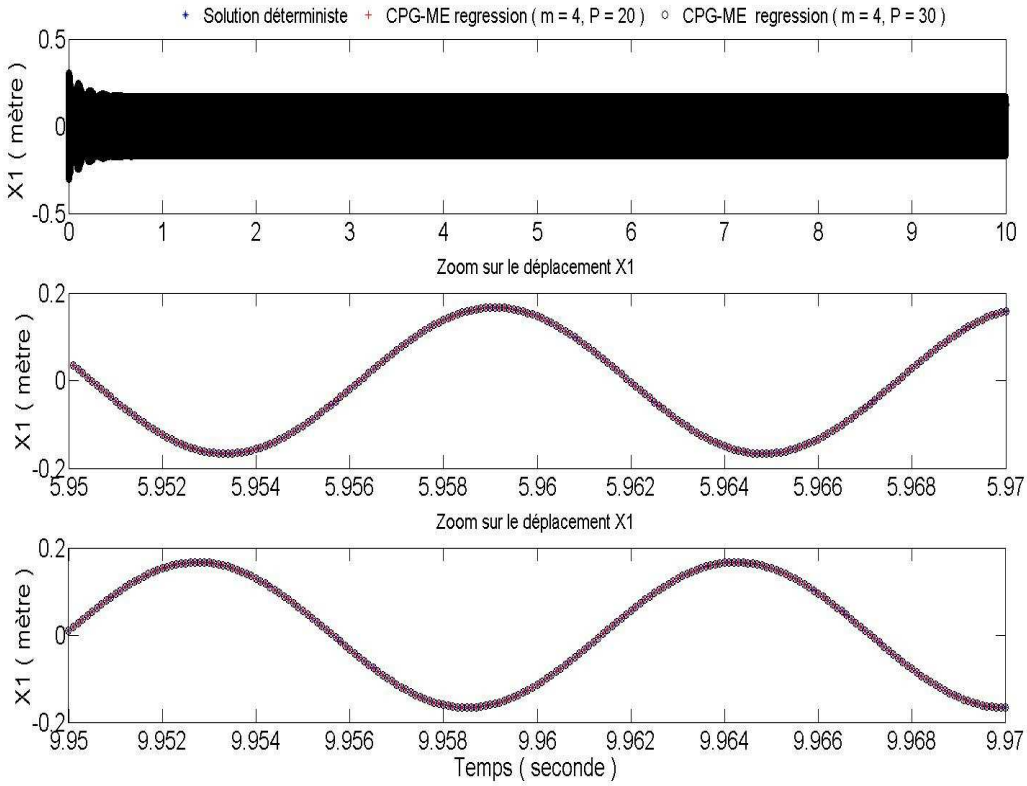


Fig.4. 65. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

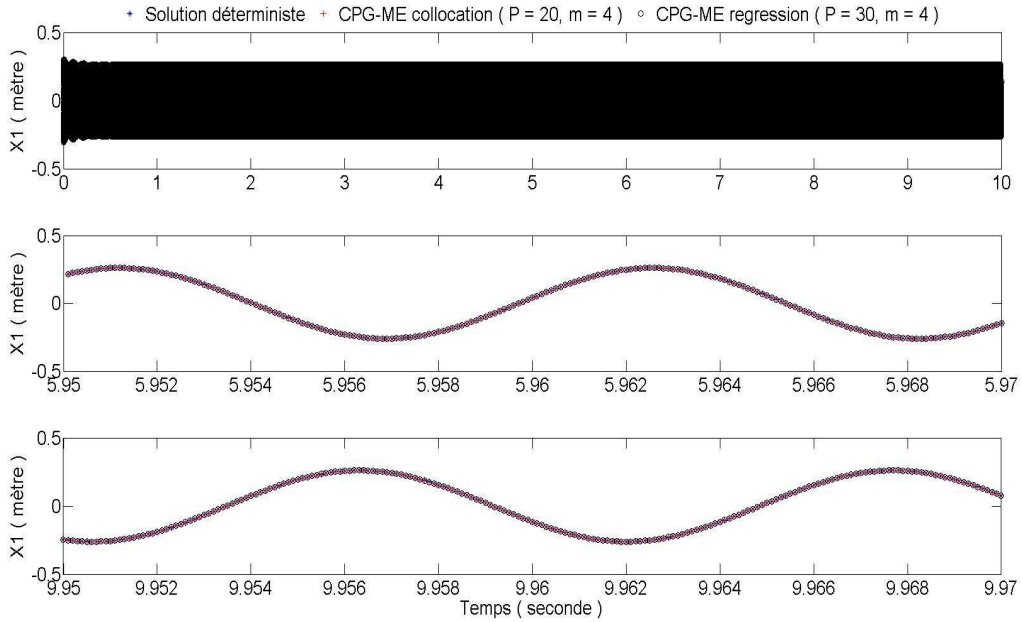


Fig.4. 66. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

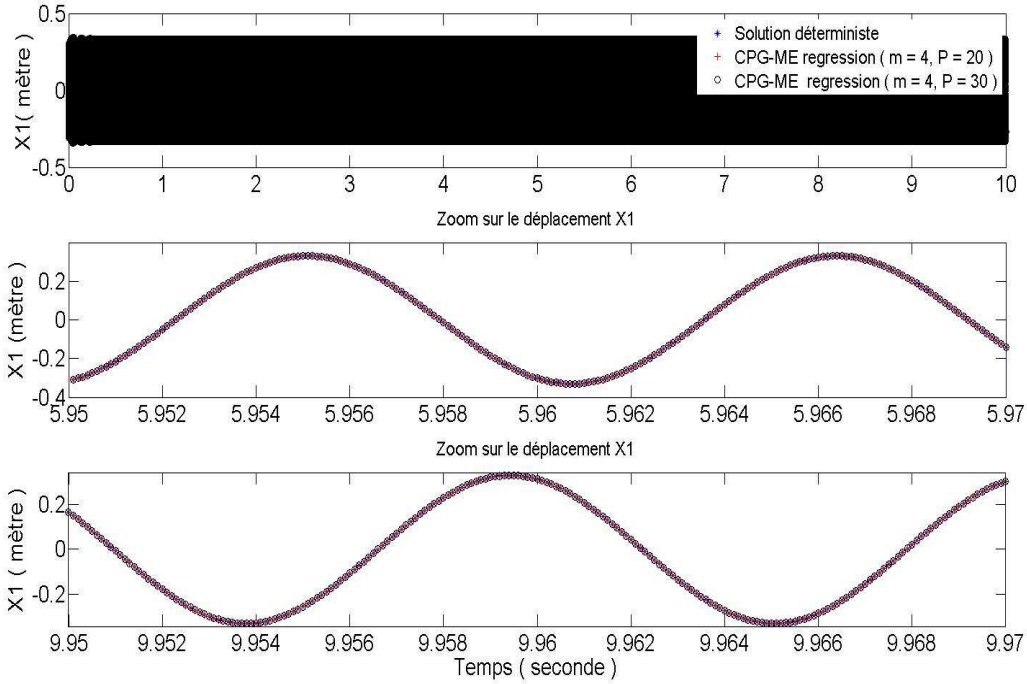


Fig.4. 6.7 Réalisation du déplacement X_1 correspondant à $\mu = 0.33$ par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

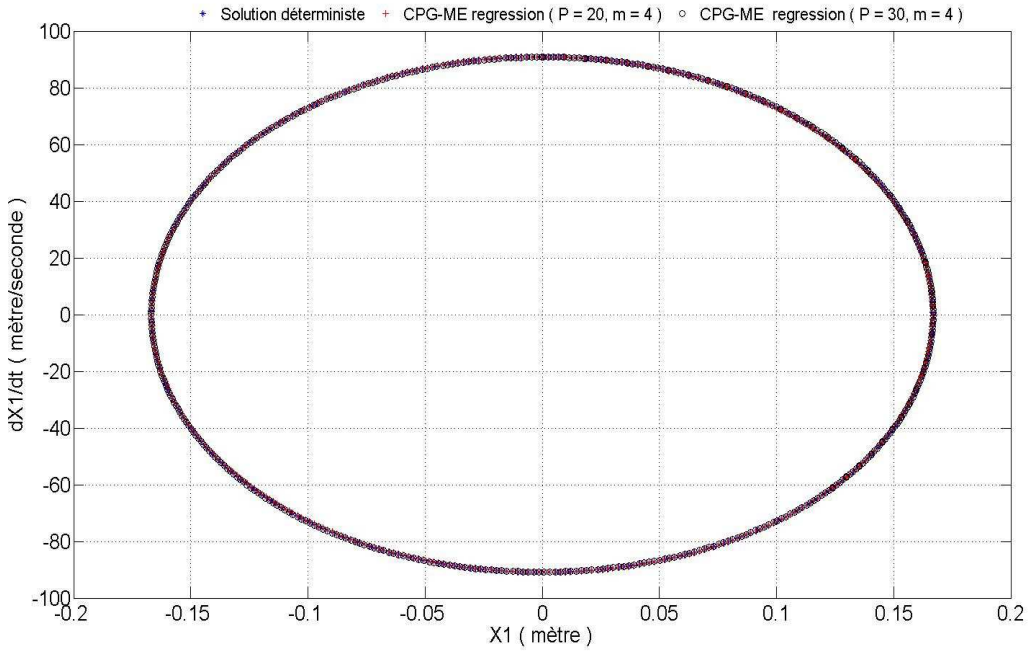


Fig.4. 68. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à $\mu = 0.3$ par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

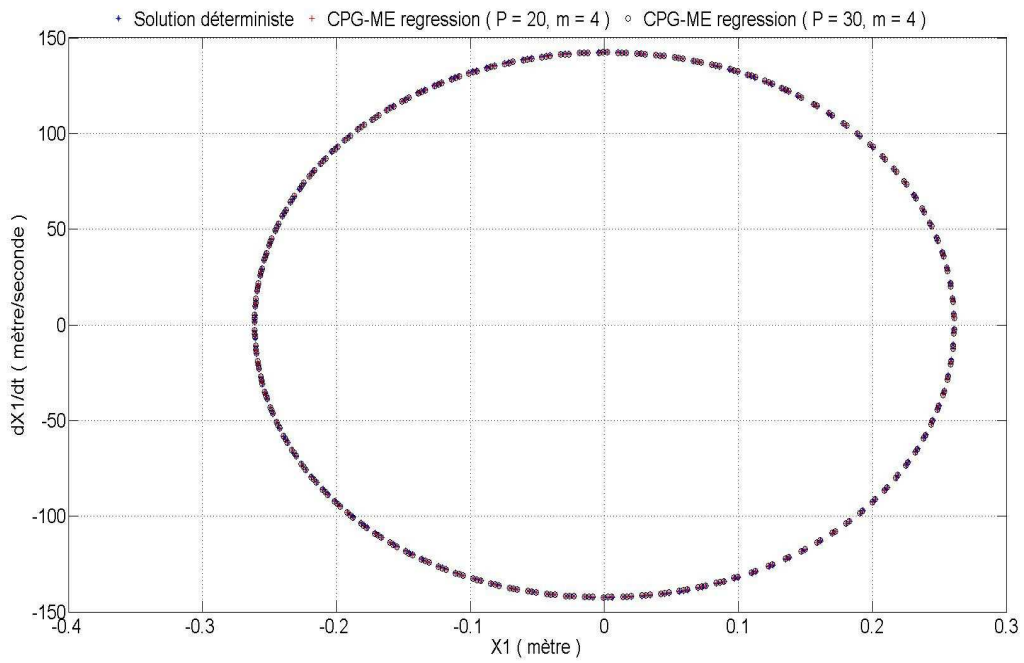


Fig.4. 69. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

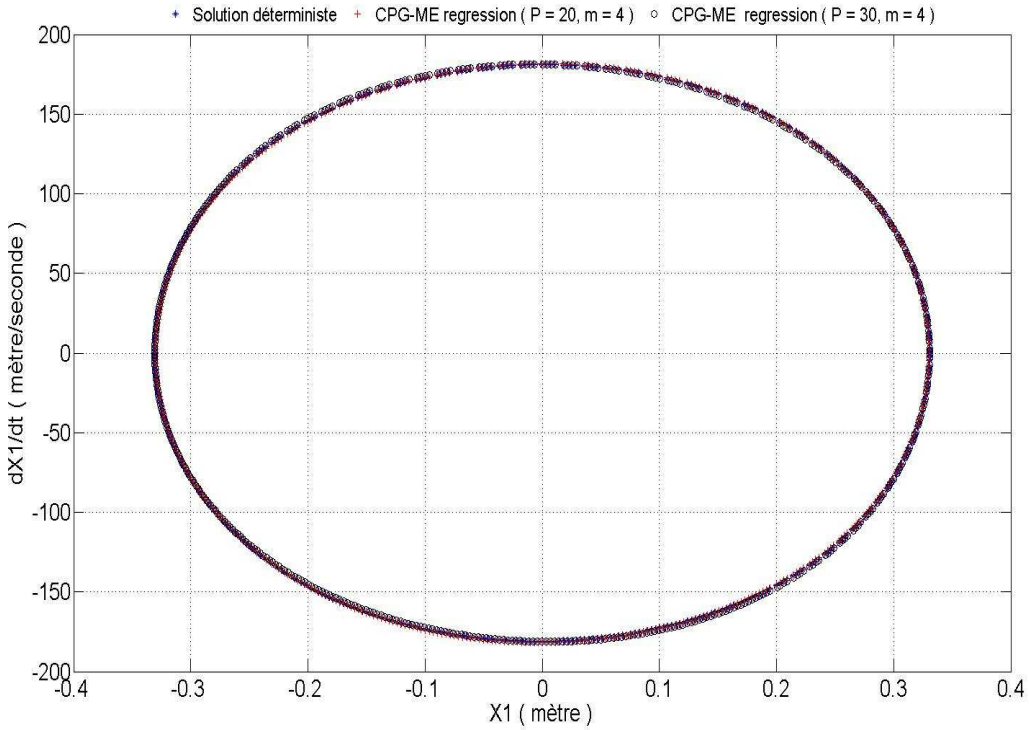


Fig.4. 70. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe

La densité de probabilité des amplitudes de X_1 et de $\dot{X}_1$ calculées via le modèle (4.23) en utilisant les la technique de régression sont représentées dans la figure (4.71). Par ailleurs, les moments statistiques des ces amplitudes (moyenne, écart type, minimum et maximum) avec ceux estimés avec la technique NISP sont relevés dans les tableaux (4.11) et (4.12).

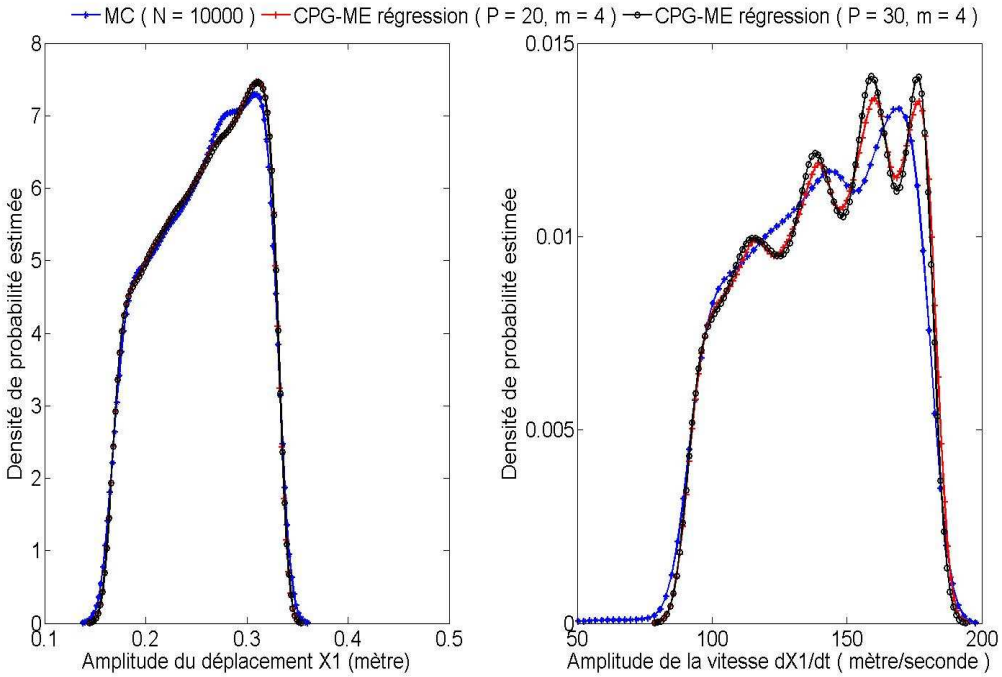


Fig.4.71. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et Monte Carlo

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	0.2571±0.0012	0.0465	-0.3309	0.3309
CPG-ME collocation (*P = 20, m =4*)	0.2573±0.0012	0.0466	-0.3339	0.3339
CPG-ME régression (*P = 20, m =4*)	0.2573±0.0012	0.0466	-0.3315	0.3315

(a)

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	138.6277±0.7457	28.9007	-181.0107	181.0107
CPG-ME collocation (*P = 20, m = 4*)	141.6694±0.6761	26.2069	-185.8546	185.8618
CPG-ME régression (*P = 20, m = 4*)	141.6872±0.6755	26.1845	-181.9907	181.9907

(b)

Tab.4. 11. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi élément via les techniques non intrusives (*P* = 20 *et m* = 4) et comparaison avec les résultats de MC

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	0.2571±0.0012	0.0465	-0.3309	0.3309
CPG-ME collocation *(P = 30, m = 4*)	0.2574±0.0012	0.0467	-0.3330	0.3330
CPG-ME regression (*P = 30, m = 4*)	0.2573±0.0012	0.0466	-0.3319	0.3319

(a)

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	138.6277±0.7457	28.9007	-181.0107	181.0107
CPG-ME collocation (*P = 30, m = 4*)	141.3615±0.6713	26.0196	-183.4838	183.4761
CPG-ME régression (*P = 30, m = 4*)	141.2399±0.6699	25.9671	-181.7968	181.7953

(b)

Tab.4.12. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi-éléments via les techniques non intrusives (*P* = 30 *et m* = 4) et comparaison avec les résultats de MC

Les niveaux vibratoires estimés avec la méthode du chaos polynomial de Legendre multi-éléments sont d'une bonne précision particulièrement ceux obtenus en utilisant la technique de régression. En effet, les erreurs relatives par rapport aux niveaux référentiels de Monte Carlo ne dépassent pas 0.45% pour $P = 30$ et 0.55% pour $P = 20$. Par ailleurs, les erreurs des estimations obtenues avec la technique de projection sont légèrement plus élevées mais ne dépassent pas 1.5% pour $P = 30$ et 3% pour $P = 20$.

- **Etude sur 8 éléments avec l'ordre *P* = 30**

Afin de mieux évaluer la convergence du modèle (4.23) en fonction du nombre d'éléments, une étude a été en utilisant le chaos de Legendre avec 8 éléments calculés via la régression avec *P = 30*, cette dernière étant la méthode qui a présenté les meilleures performances de précision. Les caractéristiques statistiques des amplitudes de X_1 et de $\dot{X}_1$ sont données dans le tableau (4.13). La précision des estimations des niveaux vibratoires a atteint les mêmes valeurs (aux arrondis numériques) que celles obtenues par la méthode de MC. Les moments statistiques (valeurs moyennes et écarts types) ont très peu évolué ce qui renseigne la bonne convergence statistique du modèle (4.23).

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	0.2571±0.0012	0.0465	-0.3309	0.3309
CPG-ME régression (*P = 30, m = 8*)	0.2572±0.0012	0.0465	-0.3309	0.3309

(a)

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	138.6277±0.7457	28.9007	-181.0107	181.0107
CPG-ME régression (*P = 30, m = 8*)	140.4083±0.6700	25.9671	-181.0081	181.0081

(b)

Tab.4. 13. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi élément via les techniques non intrusives (*P = 30 et m = 8*) et comparaison avec les résultats de MC

Conclusion 4.4 sur le chaos polynomial de Legendre multi-éléments

Dans cette section, la méthode du chaos polynomial multi-éléments a été développée et appliquée pour évaluer ces capacité à surpasser les limites avérées du modèle chaos polynomial généralisé dans la modélisation et la prédiction des cycles limites sur un temps long traduit par un nombre de périodes d'oscillation suffisamment important. Il a été montré à travers tous les résultats présentés que le modèle chaos polynomial généralisé multi-éléments constitue effectivement un outil efficace puisqu'il a permis de modéliser et prédire, avec des précisions notables, les dispersions des niveaux vibratoires du système étudié. Deux paramètres interviennent dans l'établissement d'une bonne précision du modèle multi élément, à savoir l'ordre du chaos et le nombre d'éléments. Ces derniers sont déterminés à travers des études de convergence. La technique de régression a montré une meilleure performance comparée à la technique de projection spectrale non intrusive utilisant la méthode de collocation de Gauss-Legendre.

4.4.1.4. Application du développement de Wiener-Haar

La deuxième alternative proposée pour pallier aux insuffisances des méthodes utilisant le chaos polynomial est celle qui consiste à utiliser les ondelettes de Haar. L'idée est d'exprimer le processus stochastique dans une base orthonormée, générée par une série d'ondelettes de Haar décalées et translatées. Cette représentation permet de séparer le caractère aléatoire du processus de son caractère déterministe. L'objectif dans cette partie est d'évaluer la capacité de cette méthode à bien modéliser les cycles limites sur le système (4.5).

La première étape de la méthode est d'exprimer les processus aléatoires du système (4.5) $x_i\left(t,\xi\right)$ dans la base des ondelettes de Haar :

$$x_i\left(t, M_\xi^{-1}\left(z\right)\right) \approx \overline{x}_{i,0}\left(t\right) + \sum_{j=0}^{J}\sum_{k=0}^{2^j-1} \overline{x}_{i,k}^{j}\left(t\right)\psi_k^j\left(z\right),\ i=1,..,4 \tag{4.24}$$

z étant une variable uniforme sur l'intervalle $\left[0\ \ 1\right]$ introduite pour pouvoir utiliser les ondelettes de Haar, fonctions continues par morceaux sur le même intervalle. La variable z modélise l'incertitude du coefficient de frottement sur l'intervalle $\left[a\ \ b\right]=\left[0.3\ 0.33\right]$ tel que :

$$z = M_\xi^{-1}\left(\mu\left(\xi\right)\right) = \frac{1}{b-a}\left(\mu\left(\xi\right)-a\right)$$

Le problème consiste alors à calculer $\overline{x}_{i,0}\left(t\right)$ (valeur moyenne du processus) et les coefficients d'ondelette $\overline{x}_{i,k}^{j}\left(t\right)$. Pour traiter ces problèmes, seules les techniques non intrusives sont utilisées, ces dernières ayant offert les meilleures performances.

4.4.1.4.1. Technique de projection non intrusive

Le calcul des coefficients se fait en projetant la solution $x_i\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)$ dans la base orthonormée que forme les ondelettes de Haar. Cette projection permet d'exprimer les coefficients $\overline{x}_{i,k}^j(t)$, avec j = *0,…,J*, omme suit :

$$\overline{x}_{i,k}^j(t) = \int_0^1 x_i\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)\psi_k^j(z)\,dz \tag{4.25}$$

Les coefficients définis par l'expression (4.25) peuvent être déterminés en utilisant la méthode de Monte Carlo d'où l'approximation (4.26).

$$\overline{x}_{i,k}^j(t) \approx \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N} x_i\left(t, M_\xi^{-1}(z_l)\right)\psi_k^j(z_l) \tag{4.26}$$

La précision de l'approximation (4.24) dépend de l'ordre de troncation J qui représente le niveau de la résolution de l'approximation par les ondelettes de Haar dans le domaine stochastique. Le niveau de résolution doit être fixé dans une première étape. L'influence du niveau de résolution sur la précision de l'approximation (4.24) est illustrée en considérant deux exemples de réalisation du déplacement $X_1 = x_1(t,\xi)$, reconstruites à base des coefficients $\overline{x}_{i,k}^j(t)$ calculés par (4.26) en considérant J = 4, J = 5 *et* J = 6. Ces solutions sont comparées aux solutions déterministes du système (4.5). Les résultats sont relevés dans les figures (4.72) et (4.73).

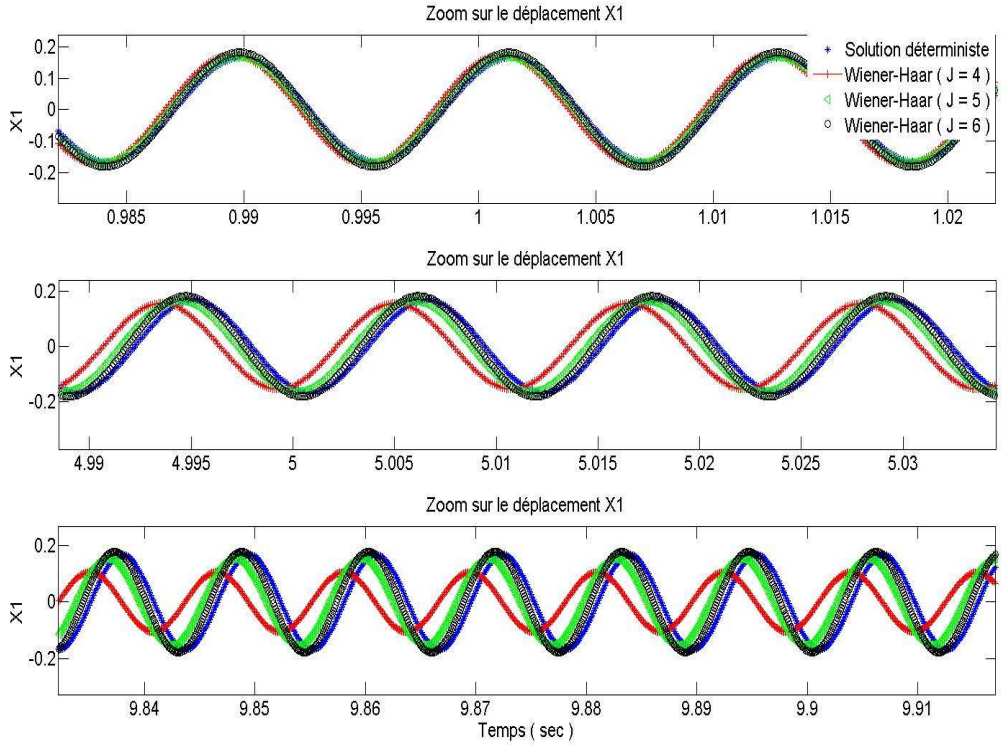


Fig.4. 72. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Wiener-Haar via Monte Carlo et par l'intégration déterministe

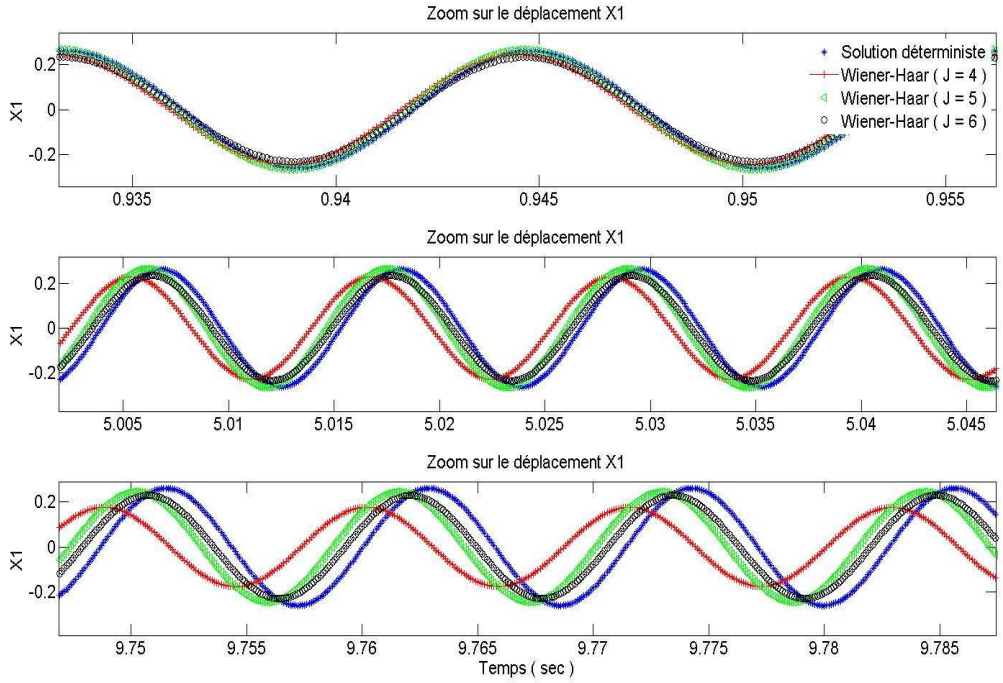


Fig.4. 73. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Wiener-Haar via Monte Carlo et par l'intégration déterministe

A partir des deux réalisations illustrées dans les deux figures précédentes, il peut être observé que, plus grand est le niveau de résolution, meilleure est la précision de la solution construite. L'amplitude et la phase des oscillations sont mieux approximées en utilisant $J=6$. Le modèle (4.24) est utilisé pour approximer l'évolution du déplacement $X_1 = x_1\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)$ dans la dimension stochastique modélisé par l'intervalle d'orthogonalité de Legendre. Cette évolution est représentée et comparée à celle obtenue par la méthode de Monte Carlo dans figure (4.74).

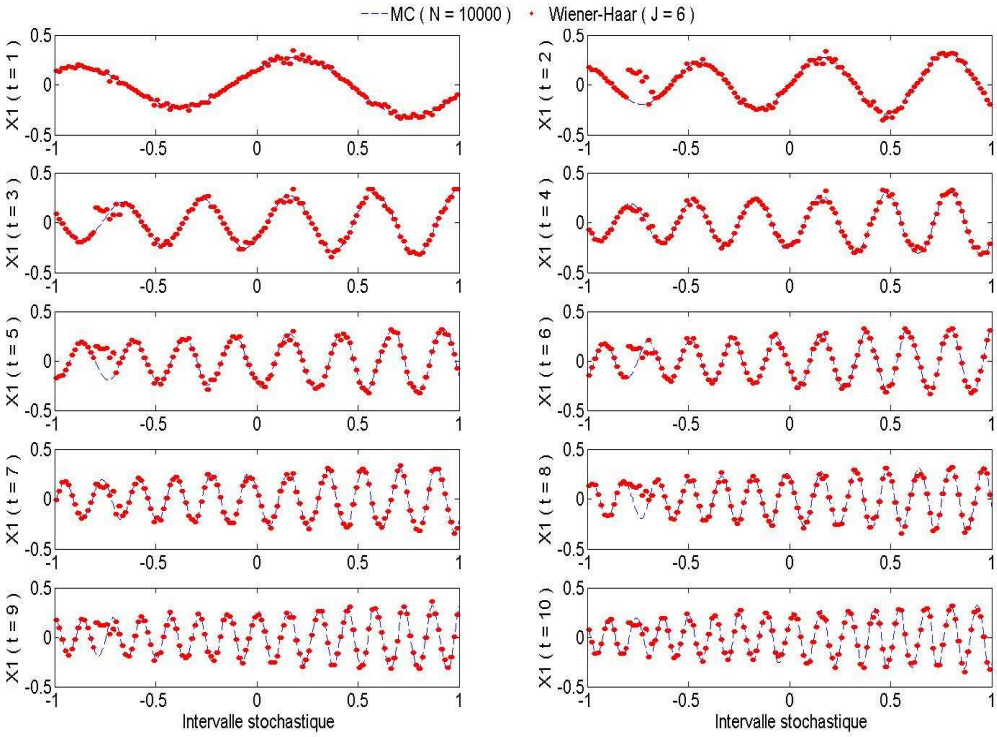


Fig.4. 74. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1], calculé via le développement de Wiener-Haar

Le niveau de résolution choisi, à savoir $J=6$ permet effectivement de bien approximer la variation rapide et non linéaire du processus aléatoire $X_1 = x_1\left(t, M_\xi^{-1}(z)\right)$ dans la dimension stochastique. De $t = 1\sec$ à $t = 10\sec$, la modélisation est, à part quelques points d'imprécision isolés, très acceptable. Cette modélisation précise dans le domaine stochastique se traduit par des reconstructions correctes des lois de probabilité instantanées de X_1 comme l'indiquent les résultats relevés dans figure (4.75).

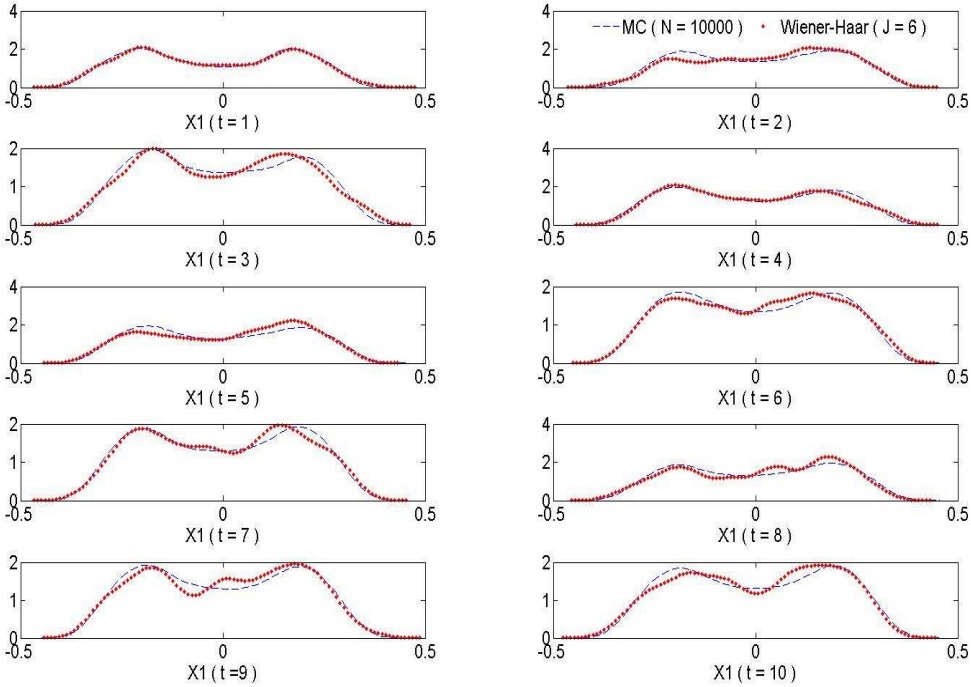


Fig.4. 75. Densité de probabilité du déplacement X_1 en différent instant estimées par le développement de Wiener-Haar et par Monte Carlo

Les différents résultats montrent bien l'apport de l'utilisation des ondelettes de Haar comme base orthonormée où l'aléa du système (4.5) est décomposé. En effet, il a été montré que le développement de Wiener-Haar permet de pallier aux limites affichées par les méthodes du chaos polynomial en termes d'incapacité à modéliser les cycles limites sur un nombre de périodes suffisamment grand.

Cependant, la précision de la modélisation dépend du niveau de résolution. Ce qui peut être vu comme une limite principale de la méthode est lié au calcul des coefficients d'ondelette définis par (4.25). Dans le cas traité, c'est la méthode de Monte Carlo qui a été utilisée pour calculer (4.26). Une précision raisonnable pour le calcul de ces coefficients nécessite beaucoup de tirages d'où son coût prohibitif (10000 tirages ont été utilisé dans le cas présenté). Par ailleurs, l'apport de l'utilisation d'autres méthodes d'intégration (Simpson, Rieman, trapèze) par rapport à la méthode de Monte Carlo n'est pas significatif (Pettit et Beran, 2006). L'algorithme proposé par Mallat est appliqué maintenant pour un calcul moins coûteux et plus efficace, (Mallat, 2011).

4.4.1.4.2. Calcul du développement de Wiener-Haar en utilisant l'algorithme de Mallat

La récursivité établie dans l'algorithme de Mallat permet de réduire de façon conséquente le nombre de tirages nécessaires pour le calcul des coefficients d'ondelette. Le coût de calcul s'y trouve par conséquent réduit de manière considérable. En effet, seules 2^{J+1} simulations sont nécessaires, un nombre très inférieur à celui requis par une procédure d'intégration numérique, en particulier celle de Monte Carlo. Le principe de l'utilisation de l'algorithme de Mallat est, pour rappel, présenté dans le

troisième chapitre. Le schéma (3. 1) est utilisé pour le calcul des coefficients de Fourier généralisés. Ce schéma est implémenté dans Matlab en particulier dans la boite à outils Wavetools dédiée aux ondelettes. L'objectif est de modéliser le déplacement X_1 et la vitesse $\dot{X}_1$ en les exprimant au moyen du développement en séries de Wiener-Haar (2.24). Différents niveaux de résolution sont considérés *J* = 4 à 7 pour en observer l'influence sur la précision des prédictions du modèle de Wiener-Haar. Les réalisations du déplacement X_1 aux valeurs $\mu = 0.3$, $\mu = 0.315$ et $\mu = 0.33$ sont reconstruites et représentées respectivement dans les figures (4.76), (4.77) et (4.78).

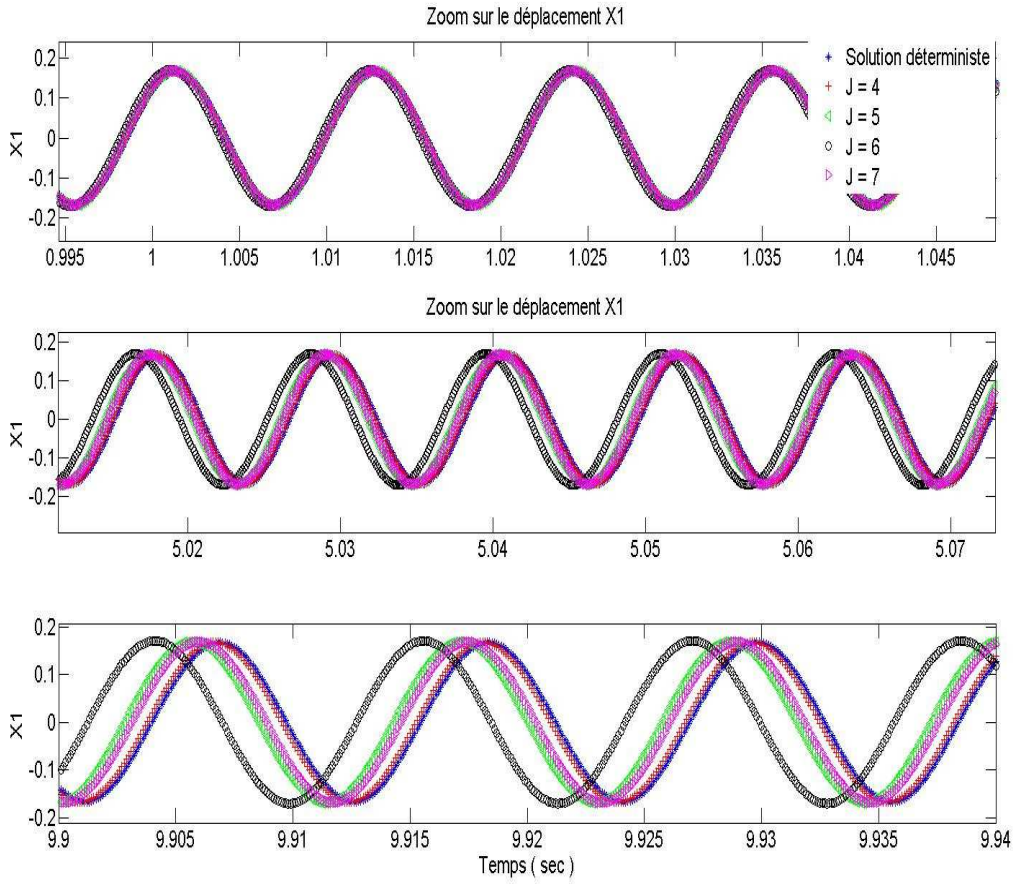


Fig.4. 76. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat

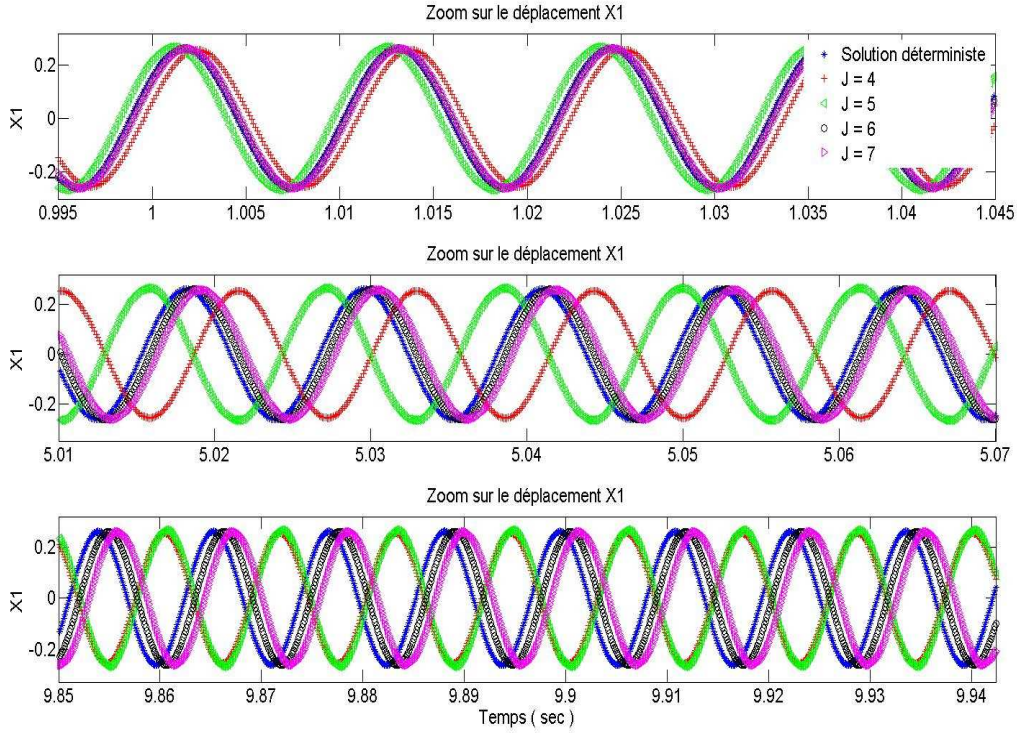


Fig.4. 77. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat

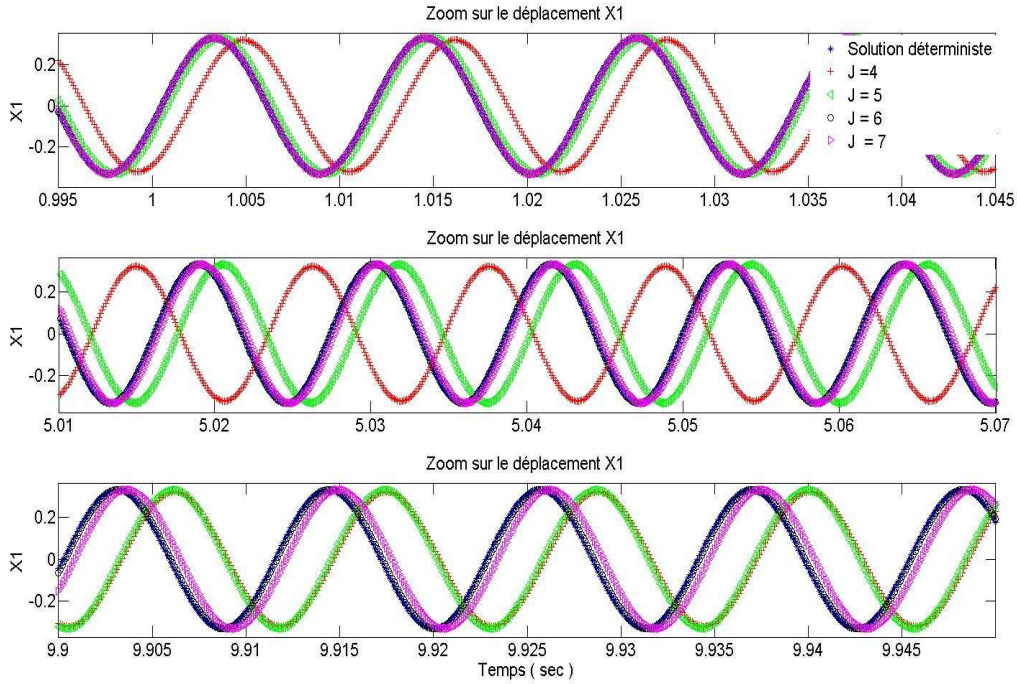


Fig.4. 78. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat

Sur les trois réalisations du déplacement X_1, il apparait nettement que la déficience caractérisant les méthodes du chaos polynomial généralisé est éliminée. L'intérêt devient alors celui de la précision. Plus grand est la résolution J plus fine et plus précise sont la modélisation et la prédiction qu'offrent le modèle de Wiener-Haar (4.24). Les développements de Wiener-Haar avec $J = 6$ et $J = 7$ offrent les meilleures prédictions. Les réalisations des cycles limites correspondant aux mêmes valeurs du coefficient de frottement sont tracées dans le plan de phase $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ (figures (4.79), (4.80) et (4.81)). Dans la figure (4.82), la modélisation de l'évolution du déplacement X_1 dans la dimension stochastique est légèrement meilleure avec $J = 7$ qu'avec $J = 6$. Dans les deux cas, la performance est nettement meilleure que celle du chaos polynomial généralisé dont les limites sont avérées dans la modélisation des fonctions à variations non linéaires rapides. Une bonne estimation des lois de probabilité instantanées régissant le déplacement X_1 est aussi obtenue avec le modèle de Wiener-Haar, figure (4.83).

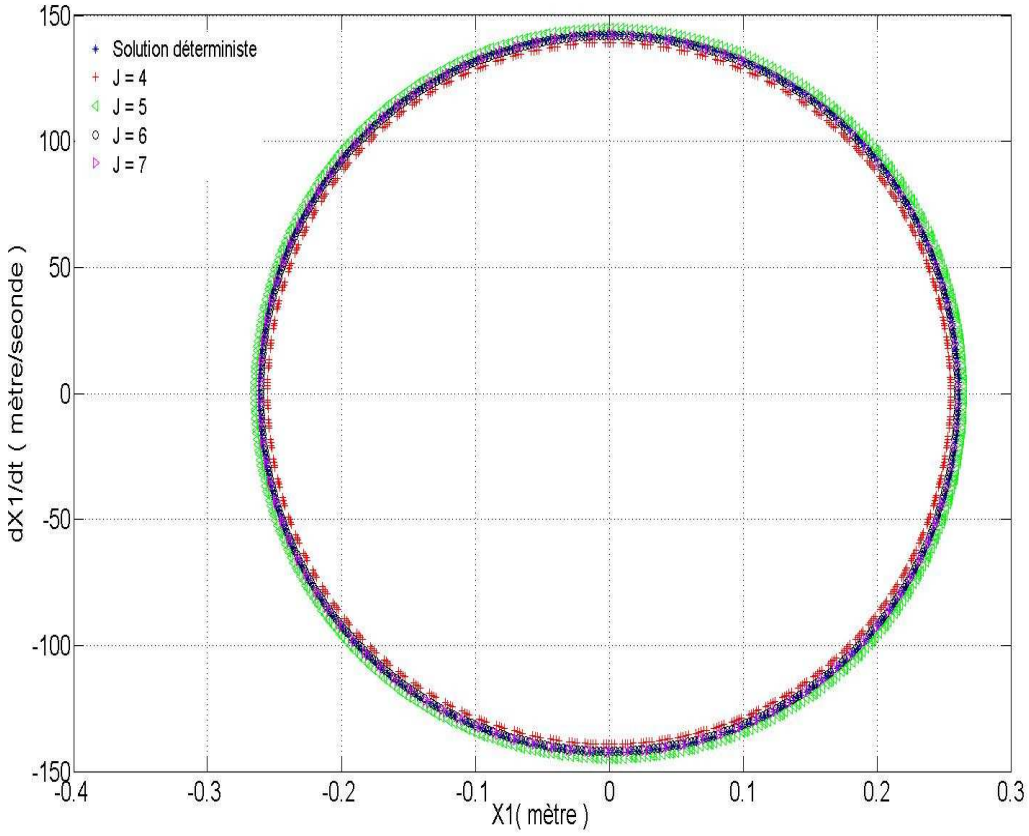


Fig.4. 79. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe

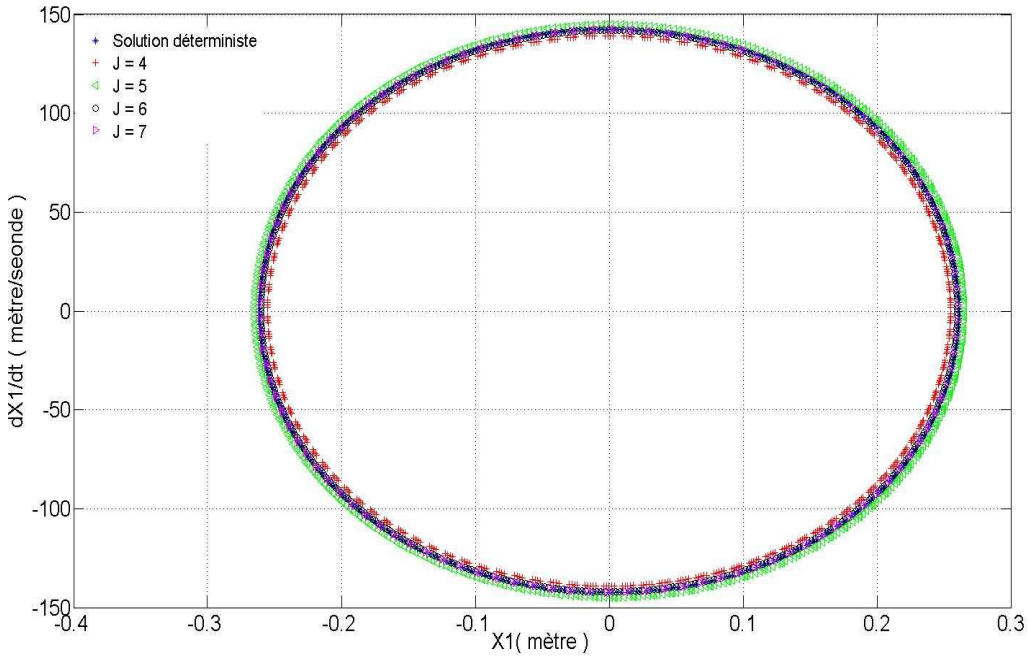


Fig.4. 80. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe

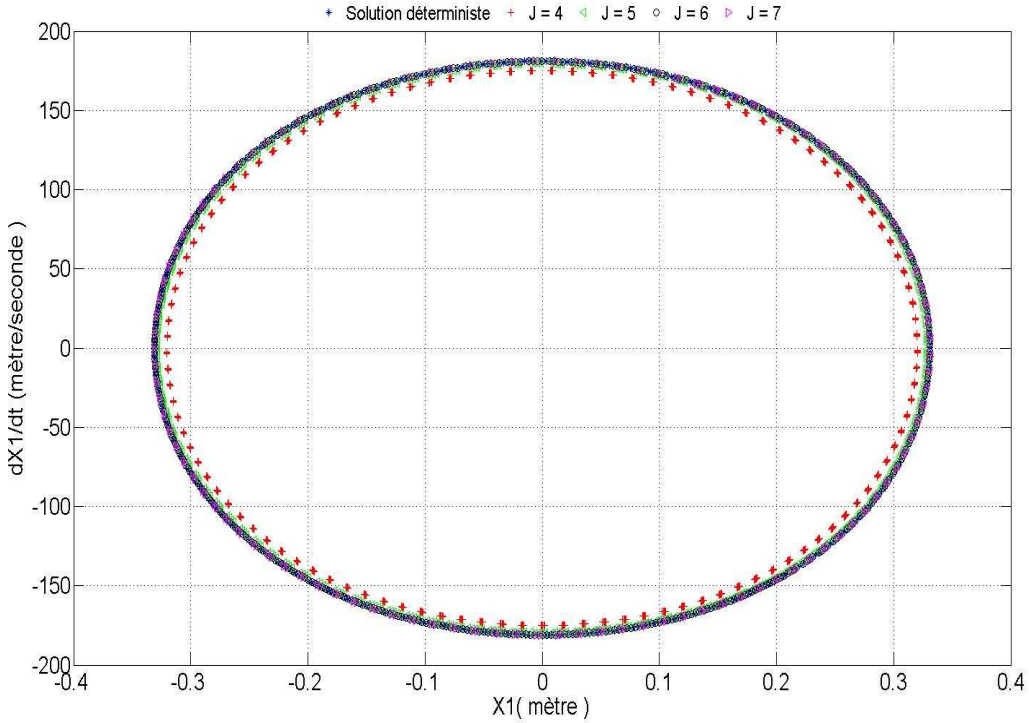


Fig.4.81. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe

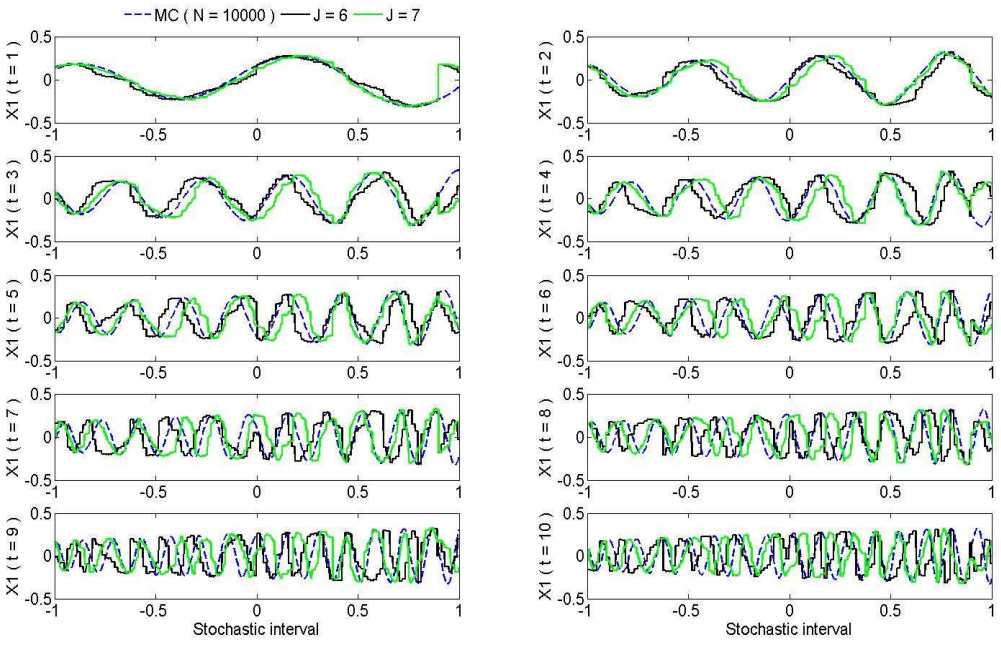


Fig.4. 82. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1], calculé par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo

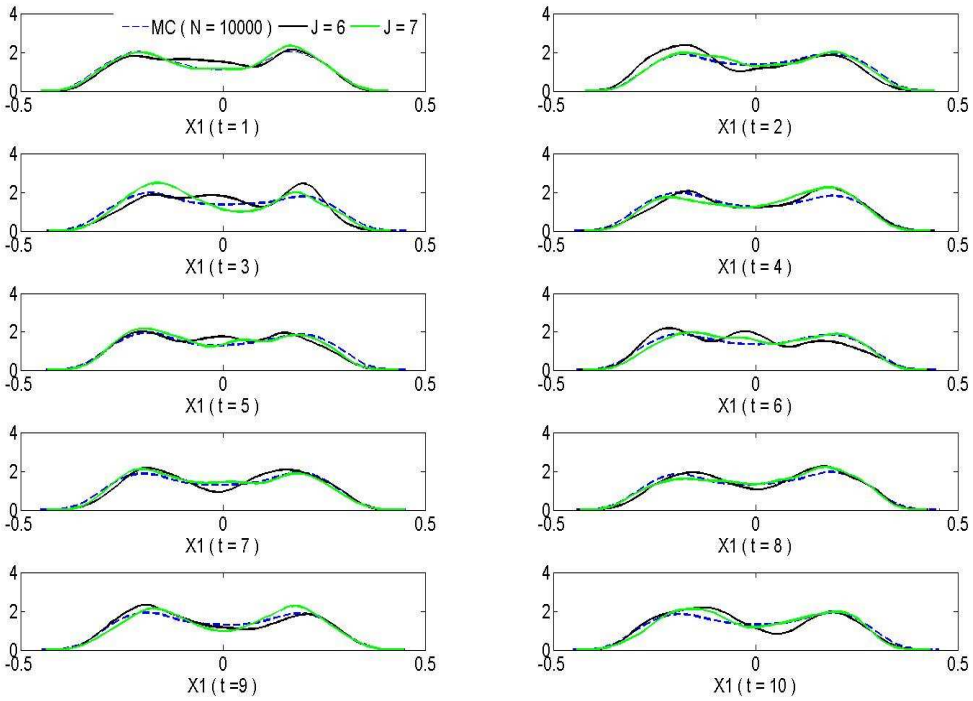


Fig.4. 83. Densités de probabilité du déplacement X_1 en différents instants, estimées par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo

Les amplitudes du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ modélisés par le développement de Wiener-Haar (4.24) sur l'intervalle d'incertitude [0.3, 0.33] fixé pour le coefficient de frottement μ sont estimées. 10000 réalisations sont reconstruites. Les lois de probabilité régissant ces amplitudes sont représentées dans la figure (4.84). Plus grande est la résolution J meilleure est l'estimation de la densité de probabilité.

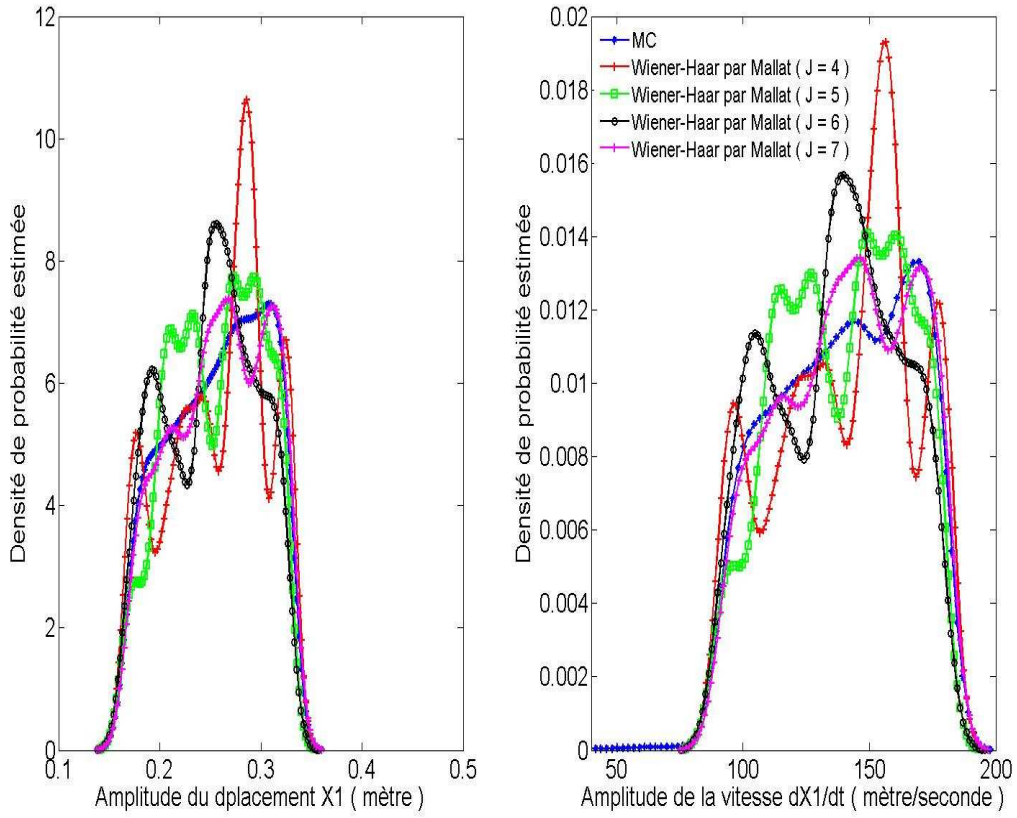


Fig.4. 84. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et la méthode de Monte Carlo

Sur les 10000 réalisations reconstruites précédemment, les statistiques des amplitudes du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ sont estimées. Les résultats relevés dans les tableaux (4.14) et (4.15) montrent une précision remarquables du développement de Wiener-Haar particulièrement ceux dont la résolution est égale $J = 7$ et $J = 6$. Les erreurs relatives des estimations ne dépassent pas les 0.019% pour $J = 7$ et 0.035% pour $J = 6$ alors qu'elles sont plus importantes pour $J = 5$ (0.7%) et $J = 4$ (3.25%).

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	0.2571±0.0012	0.0465	-0.3309	0.3309
Wiener-Haar ($J = 4$)	0.2577±0.0012	0.0482	-0.3284	0.3284
Wiener-Haar ($J = 5$)	0.2554±0.0011	0.0443	-0.3260	0.3260
Wiener-Haar ($J = 6$)	0.2566±0.0012	0.0467	-0.3308	0.3308
Wiener-Haar ($J = 7$)	0.2582±0.0012	0.0462	-0.3309	0.3309

Tab.4. 14. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo

	Moyenne	Écart type	Minimum	Maximum
MC	138.6277±0.7457	28.9007	-181.0107	181.0107
Wiener-Haar ($J = 4$)	140.7001±0.6830	26.4724	-179.5887	179.5887
Wiener-Haar ($J = 5$)	139.4568±0.6281	24.3439	-178.2996	178.2996
Wiener-Haar ($J = 6$)	140.1208±0.6618	25.6501	-180.9481	180.9481
Wiener-Haar ($J = 7$)	140.9610±0.6544	25.3625	-180.9766	180.9760

Tab.4. 15. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo

Conclusion 4.5 sur le développement de Wiener-Haar

Le développement de Wiener-Haar a été exploité pour modéliser les instabilités de type flottement générés dans les systèmes frottants. Afin de pallier aux insuffisances du modèle par chaos polynomial généralisé, l'objectif est de prédire correctement les cycles limites sur un nombre plus important de périodes d'oscillation et d'estimer la dispersion de leur amplitude correspondant à la dispersion du coefficient de frottement. Les résultats obtenus ont montré une efficacité notable pour le modèle de Wiener-Haar. En effet, le modèle a permis une prédiction précise des cycles limites ainsi que la dispersion de leurs amplitudes. Une discrimination a été effectuée entre deux types de méthodes non intrusives utilisées pour le calcul du développement de Wiener-Haar. La deuxième basée sur l'algorithme pyramidal de Mallat s'est avérée plus efficace comparée à la première faisant appel à des méthodes d'intégrations numériques. En effet, le modèle de Wiener-Haar déterminé via l'algorithme de Mallat a permis des estimations d'une précision similaire à celle de la méthode référentielle de Monte Carlo mais avec moins de calcul. En effet, l'algorithme de Mallat a nécessité pour la résolution J = 7, 2^8 = 256 simulation du système (4.5) contre 10,000 simulations avec la technique classique de MC. Le seul préalable à l'utilisation du développement de Wiener-Haar est de fixer un niveau de résolution suffisant. Ceci est effectué, de façon similaire aux différentes méthodes présentées jusqu'ici, par une étude de convergence.

4.4.1.5. Conclusion sur l'étude des cycles limites proche du point de bifurcation de Hopf

La méthode du chaos polynomial généralisé a été utilisée pour estimer la dispersion de l'amplitude des cycles limites proche du point de bifurcation de Hopf. Elle a permis, particulièrement dans le cas où elle est implémentée suivant un schéma non intrusif, une bonne précision avec un coût en volume de calcul largement inférieur à celui occasionné par la méthode de MC. Cette performance a été enregistrée pour un intervalle temporel d'intégration relativement court (3secondes) mais suffisant pour atteindre les cycles limites.

L'utilisation des méthodes du chaos polynomial généralisé multi-éléments et du chaos de Wiener-Haar s'est inscrit dans l'optique de pallier aux limites de la méthode du chaos polynomial généralisé qui, comme illustré, ne parvient pas à bien modéliser les cycles limites au delà d'un certain nombre de périodes d'oscillation. Il a été montré que les solutions proposées permettent effectivement de remédier aux insuffisances. La performance de la méthode du chaos polynomial généralisé multi-éléments dépend de l'ordre du chaos polynomial généralisé mais aussi du nombre d'éléments considérés. Des niveaux d'erreurs relatives très bas ont été relevés sur l'estimation des niveaux vibratoires maximaux. Par ailleurs, le nombre d'éléments peut avoir un effet réducteur sur l'ordre du chaos polynomial nécessaire à une bonne précision. Quant à la performance du développement de Wiener-Haar, celle-ci dépend du niveau de résolution. Il a été montré que lorsque ce dernier est convenablement fixé, la précision du modèle est aussi comparable à celle de la méthode référentielle de Monte Carlo. A ce sujet, l'algorithme de Mallat a montré une efficacité intéressante qui le rend plus approprié par rapport aux méthodes d'intégration numériques en particulier la technique de Monte Carlo.

La comparaison des deux modèles (chaos polynomial généralisé multi-éléments et chaos de Wiener-Haar) est difficile à faire de manière concrète et objective particulièrement par rapport à leurs coûts en temps de calcul compte tenu de la simplicité du système d'Hultèn. Néanmoins, les nombres de calculs (principalement le nombre de simulations du modèle) peuvent servir de base de comparaison. Ces derniers dépendent de l'ordre du chaos et du nombre d'éléments pour la méthode du chaos multi-éléments et du niveau de la résolution pour le chaos de Wiener-Haar. Pour le cas du système étudié, les meilleures performances (les plus faibles niveaux d'erreurs relatives) relevées sont pratiquement du même ordre. Elles ont occasionné aussi un nombre de simulations du même ordre à savoir 256 simulations pour le modèle de Wiener-Haar (calculé par l'algorithme de Mallat) correspondant à $J = 7$ et 280 simulations correspondant à la méthode multi-éléments ($m = 8$ et $P = 30$) via la régression.

4.4.2. Modélisation et analyse des cycles limites loin de la bifurcation de Hopf

L'objectif dans cette section est de tester l'aptitude des méthodes développées jusqu'ici à être utilisées pour modéliser les cycles limites caractérisant des zones de flottement situées loin du point de bifurcation de Hopf. On considère l'intervalle de dispersion [0.5, 0.55] pour le coefficient de frottement soit une valeur moyenne μ_m égale à 0.525 et un coefficient de variation C_v égal à 2.75%. La valeur moyenne μ_m de la dispersion est à une variation de 80% du point de bifurcation de Hopf : $\mu_m = \mu_0 (1+\varepsilon), \varepsilon = 0.8$. Dans ces zones de flottement, les cycles limites sont caractérisés par des

fréquences et des amplitudes plus importantes que celles situées dans la zone proche du point de bifurcation de Hopf.

4.4.2.1. Application du chaos polynomial généralisé avec la technique de régression

Le chaos polynomial de Legendre est utilisé pour modéliser le comportement dynamique du système (4.5) sur l'intervalle temporel [0 3sec]. Comme elle a offert les meilleures performances, la technique de la régression déterministe est seulement appliquée. L'ordre du chaos de Legendre P = 30 avec un nombre de simulations déterministes Q = 35 est tout d'abord testé puisque ces paramètres ont permis une bonne performance sur l'intervalle proche du point de bifurcation de Hopf. L'ordre P = 40 avec Q = 45 est ensuite considéré. Les réalisations du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.5, μ = 0.525 *et* μ = 0.55 sont relevées dans les figures suivantes.

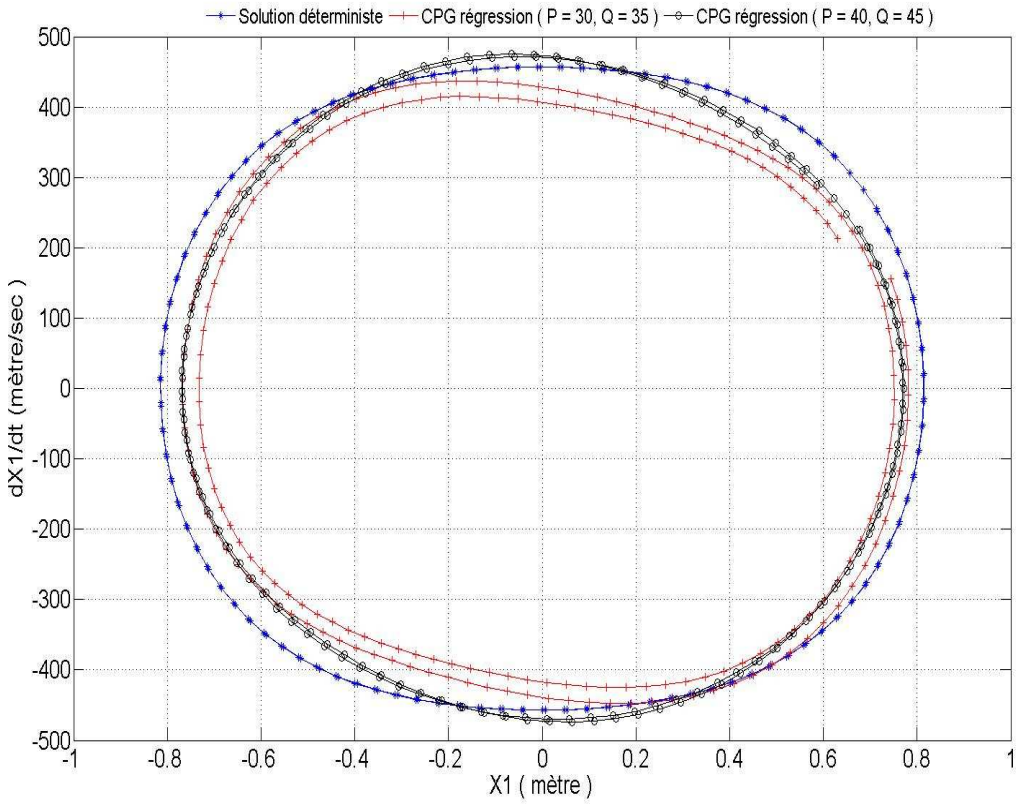


Fig.4. 85. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_2\right)$ correspondant à μ = 0.5 par le développement en polynômes de Legendre et par l'intégration déterministe

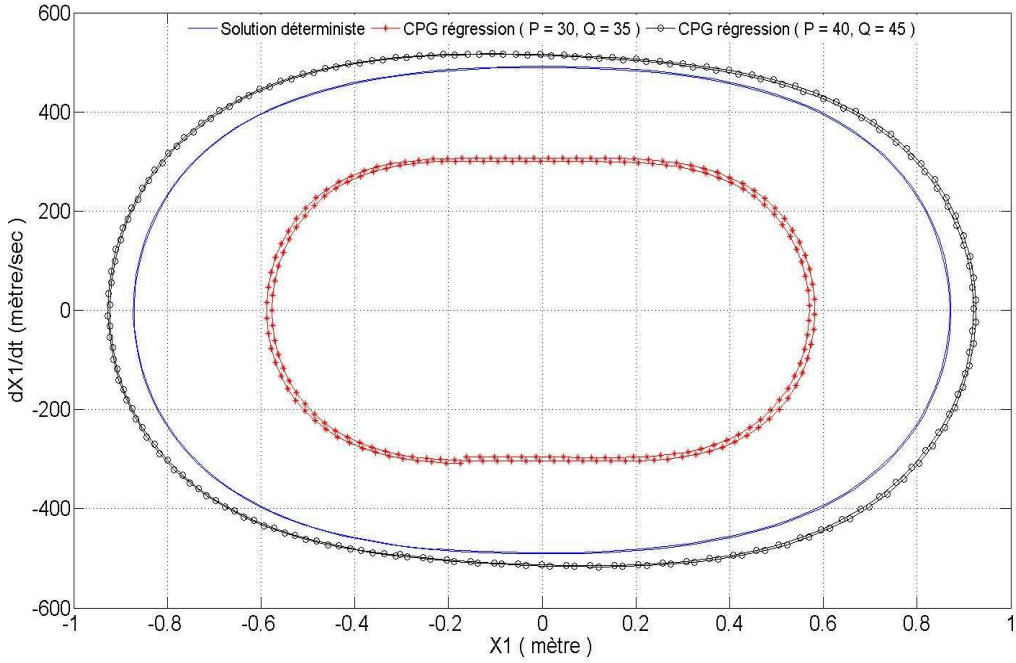


Fig.4. 86. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.525 par le développement en polynôme de Legendre et par l'intégration déterministe

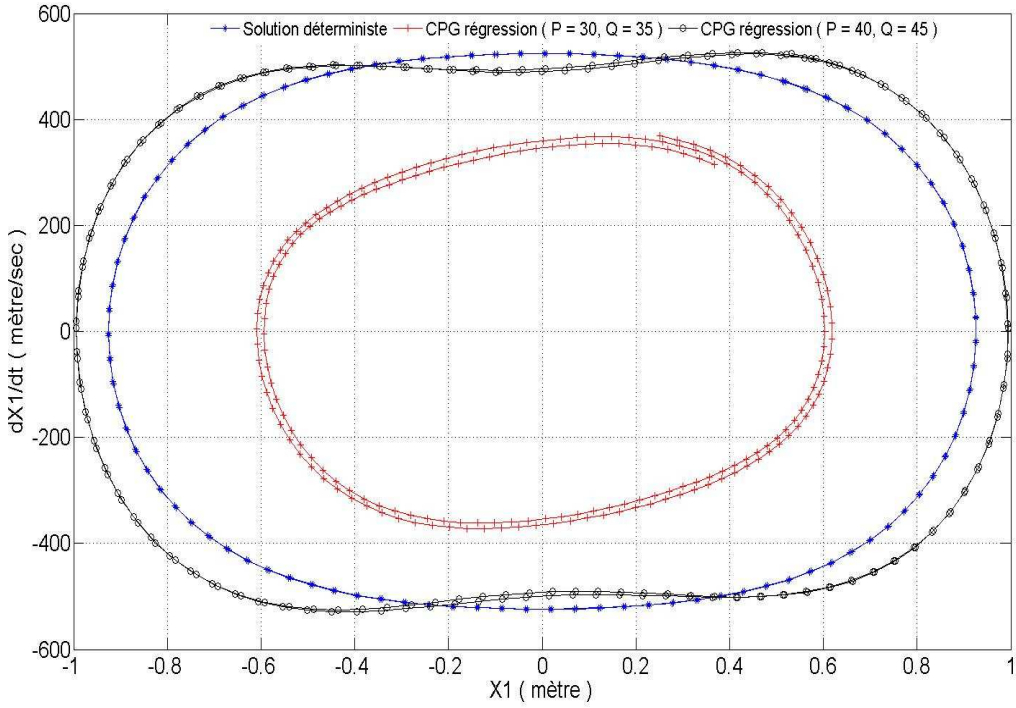


Fig.4. 87. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.55 par le développement en polynôme de Legendre et par l'intégration déterministe

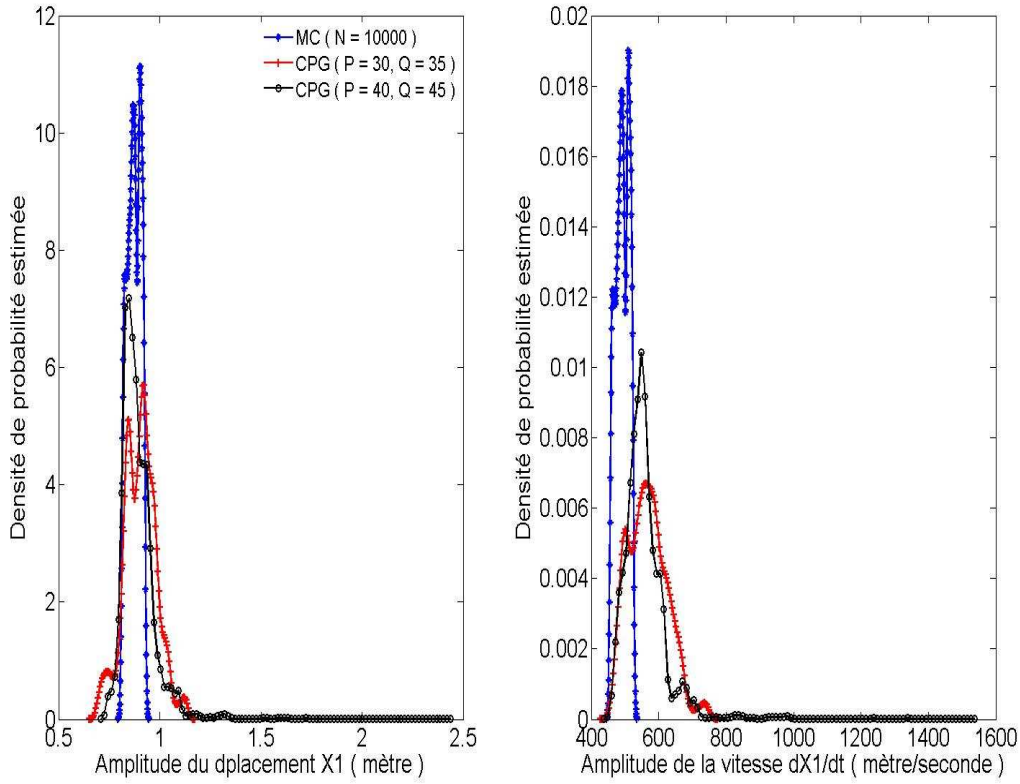


Fig.4. 88. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ sur l'intervalle [0.5, 0.55], calculées par le développement en polynômes de Legendre via la technique de régression et la méthode Monte Carlo

Le modèle du chaos de Legendre (4.10) avec P = 30 et Q = 35 n'a pas permis une bonne précision comme celle enregistrée sur l'intervalle [0.3 0.33]. En effet, à partir des figures (4.86), (4.87) et (4.88), on peut remarquer que le modèle (4.10) utilisé n'a pas pu modéliser les cycles limites. L'augmentation significative de l'ordre du chaos de Legendre à $P = 40$ avec Q = 45 (nombres de simulations du système (4.5)) n'a pas amélioré de façon conséquente la précision de la modélisation. De même, les densités de probabilité des amplitudes de X_1 et de $\dot{X}_1$ estimées et représentées dans la figure (4.88) sont incorrectes. Ces résultats montrent bien la sensibilité de la précision du modèle par chaos polynomial généralisé (4.10) à la position de la zone d'incertitude dans les régions d'instabilité. Dans ce qui suit, les méthodes du chaos multi-éléments et de Wiener-Haar sont utilisées pour analyser leurs capacités à améliorer les performances du chaos polynomial de Legendre dans des zones d'instabilités situées loin du point de bifurcation de Hopf.

4.4.2.2. Application du chaos polynomial généralisé multi-éléments

La méthode du chaos polynomial de Legendre multi-éléments est appliquée en utilisant la technique de régression déterministe. L'ordre du chaos polynomial ainsi que le nombre de calculs déterministes sont gardés identiques à ceux utilisés lors de l'analyse effectuée sur l'intervalle proche du point de

bifurcation de Hopf soient : l'ordre du chaos $P = 30$ et le nombre de simulations $Q = 35$, c'est derniers ayant été validés. Plusieurs éléments sont aussi considérés (m = 2, 4, 8, 16). Les réalisations correspondant à $\mu = 0.5$, $\mu = 0.525$ et $\mu = 0.55$ sont relevées dans les figures respectives (4.89), (4.90) et (4.91). Les densités de probabilité des amplitudes du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ sont également estimées (figure (4.92)).

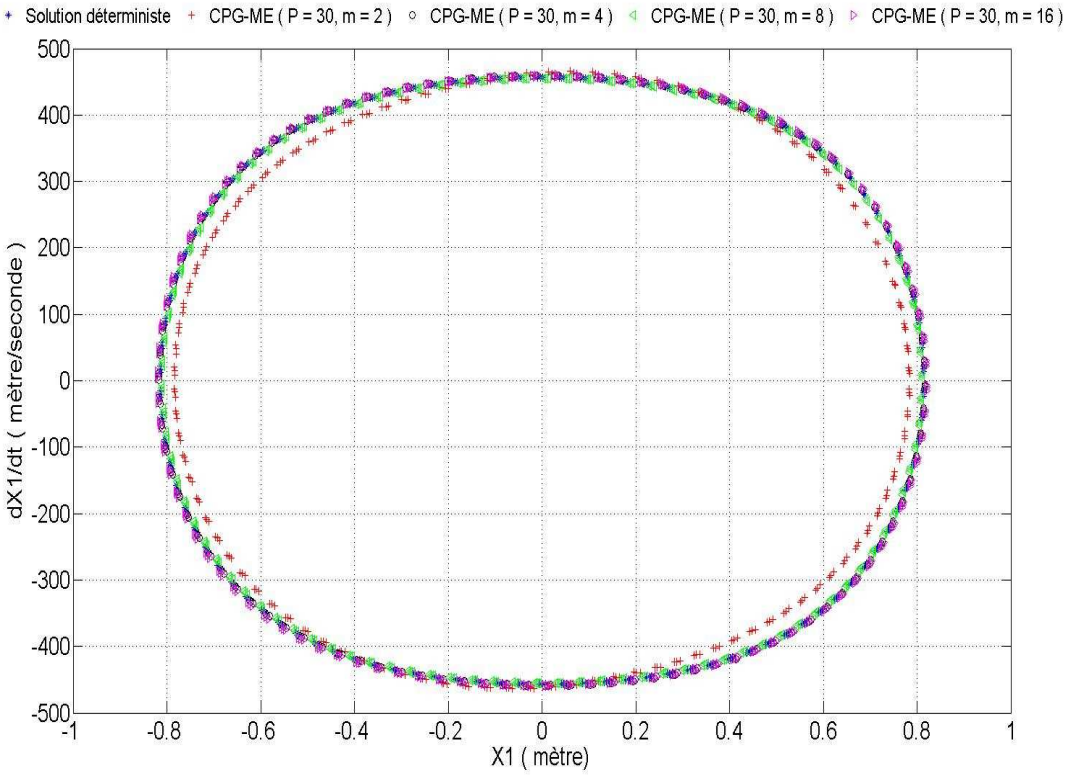


Fig.4. 89. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à $\mu = 0.5$ par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe

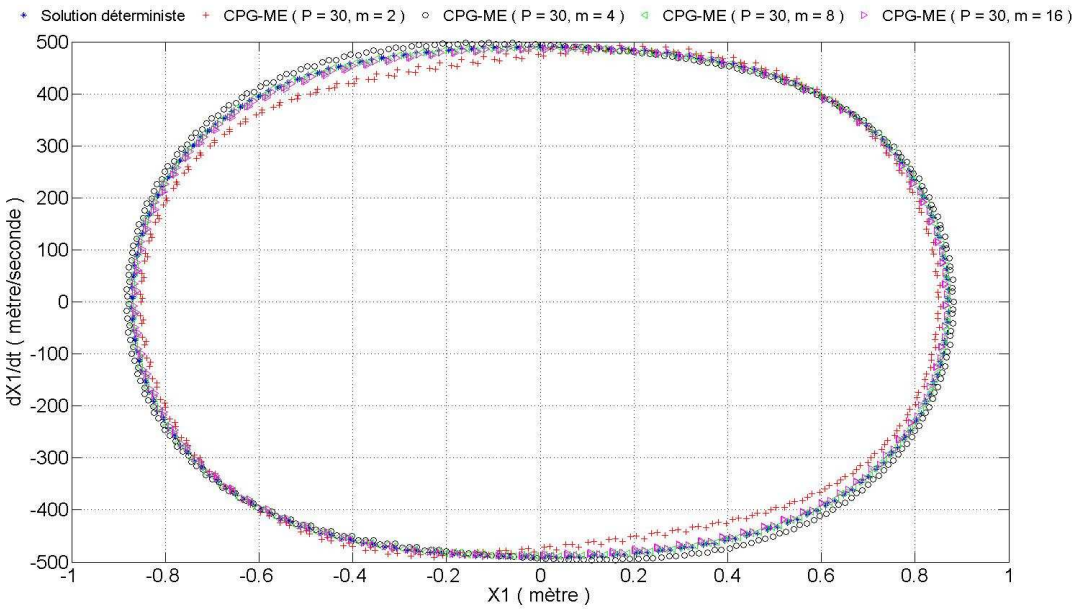


Fig.4. 90. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à *μ = 0.525* par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe

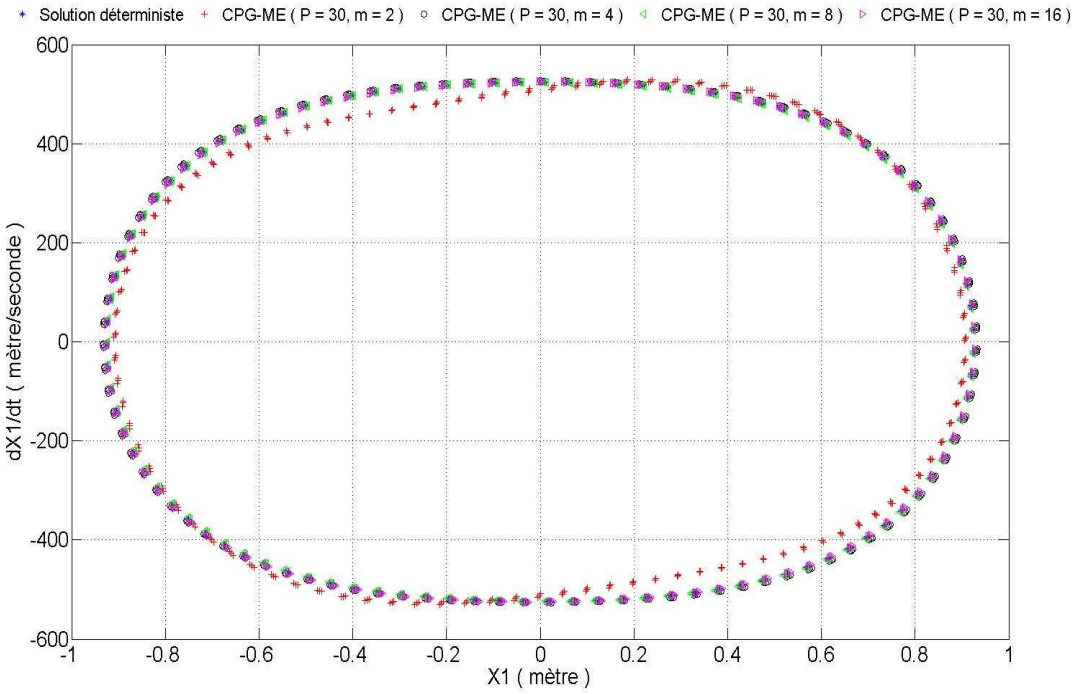


Fig.4. 91. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à *μ = 0.55* par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe

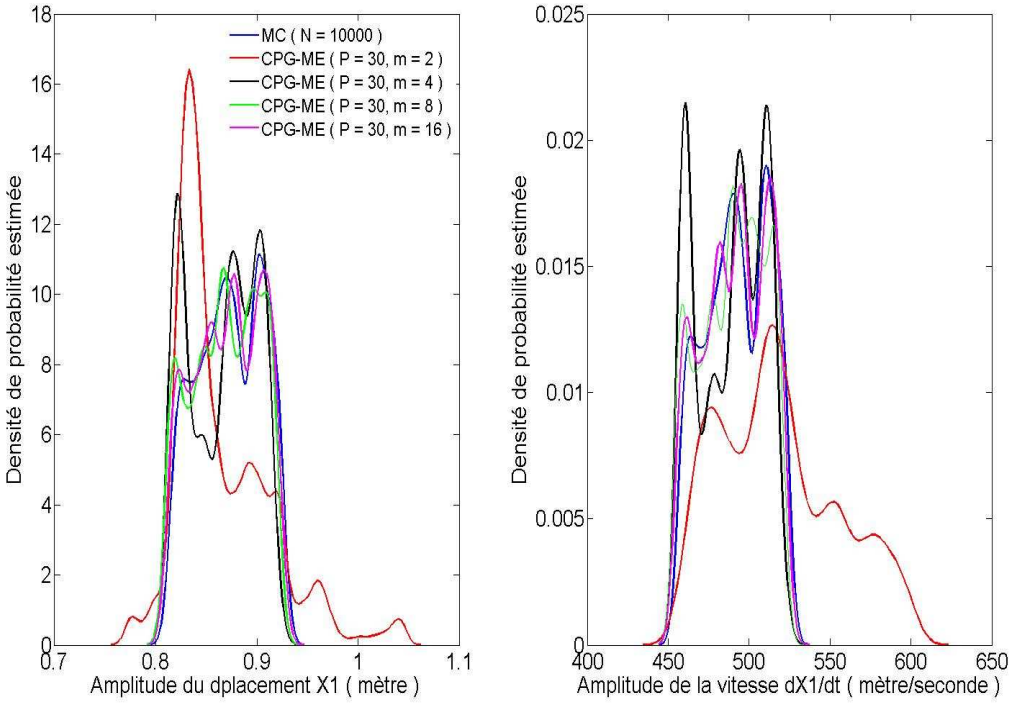


Fig.4. 92. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et Monte Carlo

Les résultats montrent que le modèle du CPG-ME à 4 éléments, suffisant pour une bonne estimation de la densité de probabilité des amplitudes de X_1 et $\dot{X}_1$ sur l'intervalle proche du point de bifurcation de Hopf, ne l'est plus loin du même point. La précision s'est nettement améliorée en augmentant le nombre d'éléments. Elle atteint un niveau très intéressant particulièrement avec 16 éléments comme l'illustrent les résultats donnant les caractéristiques statistiques des amplitudes de X_1 et de $\dot{X}_1$ estimées et relevées dans les tableaux (4.16) et (4.17). Les niveaux vibratoires maximaux estimés en utilisant le modèle (4.23) avec $m = 16$ via la technique de MC sont, en effet, obtenus avec un pourcentage d'erreur ne dépassant pas 0.2%. Le nombre total de calculs déterministes effectués est égal à 560 donné par le nombre de calculs utilisés pour la régression multiplié par le nombre d'éléments considérés.

CPG-ME	*P = 30, m = 2*	*P = 30, m = 4*	*P = 30, m = 8*	*P = 30, m = 16*	MC
Moyenne	0.8650 ± 0.0013	0.8654 ± 0.0008	0.8683 ± 0.0008	0.8703 ± 0.0008	0.8730 ± 0.0008
Ecart type	0.0485	0.0328	0.0321	0.0322	0.0316
Min	-1.0448	-0.9202	-0.9220	-0.9263	-0.9260
Max	1.0448	0.9198	0.9208	0.9263	0.9260

Tab.4. 16. Statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 estimées par le CPG-ME via la technique de régression

CPG-ME	*P = 30, m = 2*	*P = 30, m = 4*	*P = 30, m = 8*	*P = 30, m = 16*	MC
Moyenne	518.0657 ± 0.9493	488.2448 ± 0.5167	489.5521 ± 0.5020	490.6609 ± 0.5053	492.3341 ± 0.4956
Ecart type	36.7938	20.0271	19.4584	19.5841	19.2087
Min	-602.1431	-521.8708	-521.2620	-525.1518	-524.1963
Max	602.2645	521.6795	521.5239	525 .2058	524.1963

Tab.4. 17. Statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le CPG-ME via la technique de régression

4.4.2.2. Application du chaos de Wiener-Haar

Le développement de Wiener-Haar est considéré dans cette partie avec différents niveaux de résolution (J = 6 à 9). Les coefficients de Fourier généralisés sont calculés en utilisant l'algorithme de Mallat dont l'efficacité a été démontrée. Les réalisations des cycles limites correspondant à $\mu = 0.5, 0.525$ et 0.55 sont relevées respectivement dans les figures (4.93), (4.94) et (4.95).

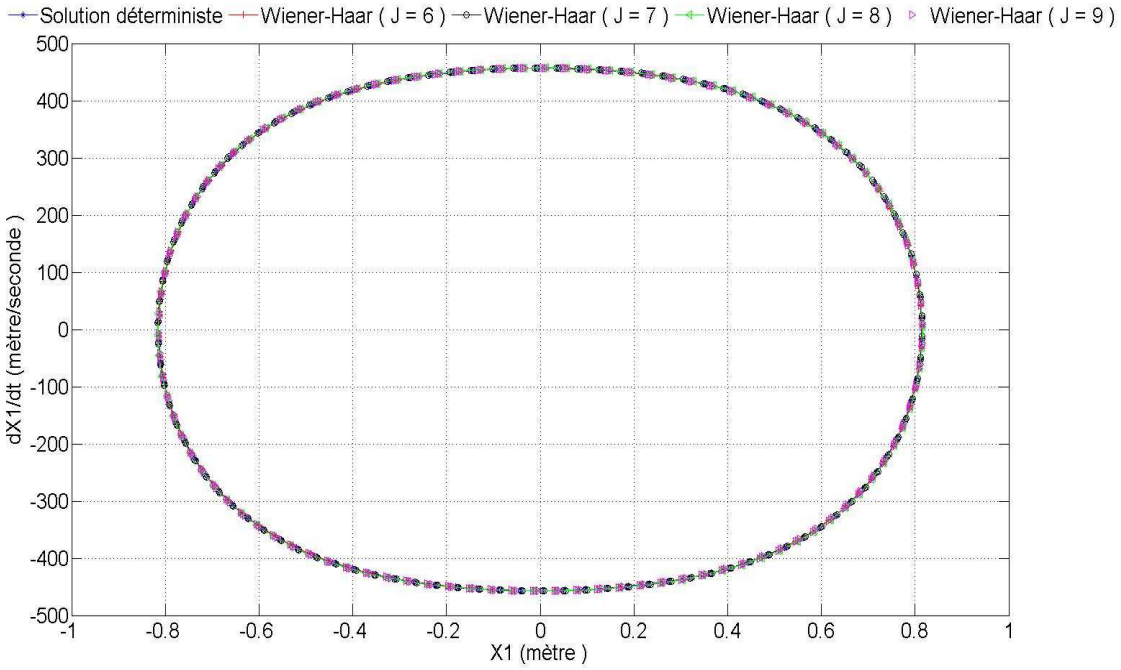


Fig.4. 93. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.5 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe

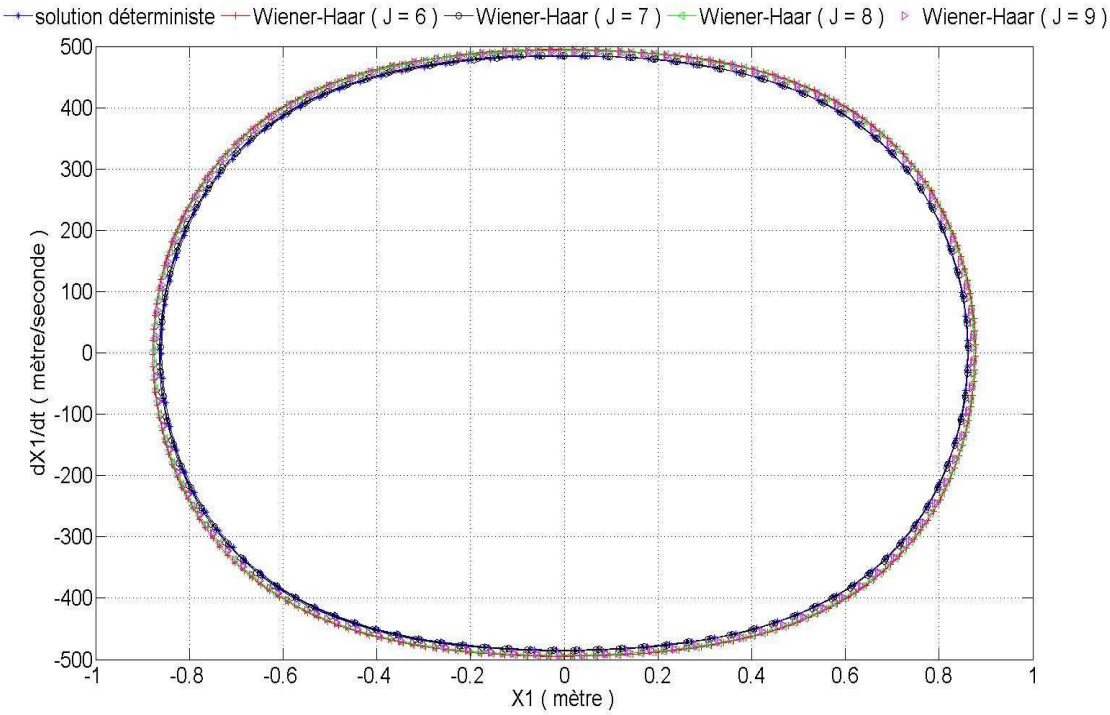


Fig.4. 94. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.525 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe

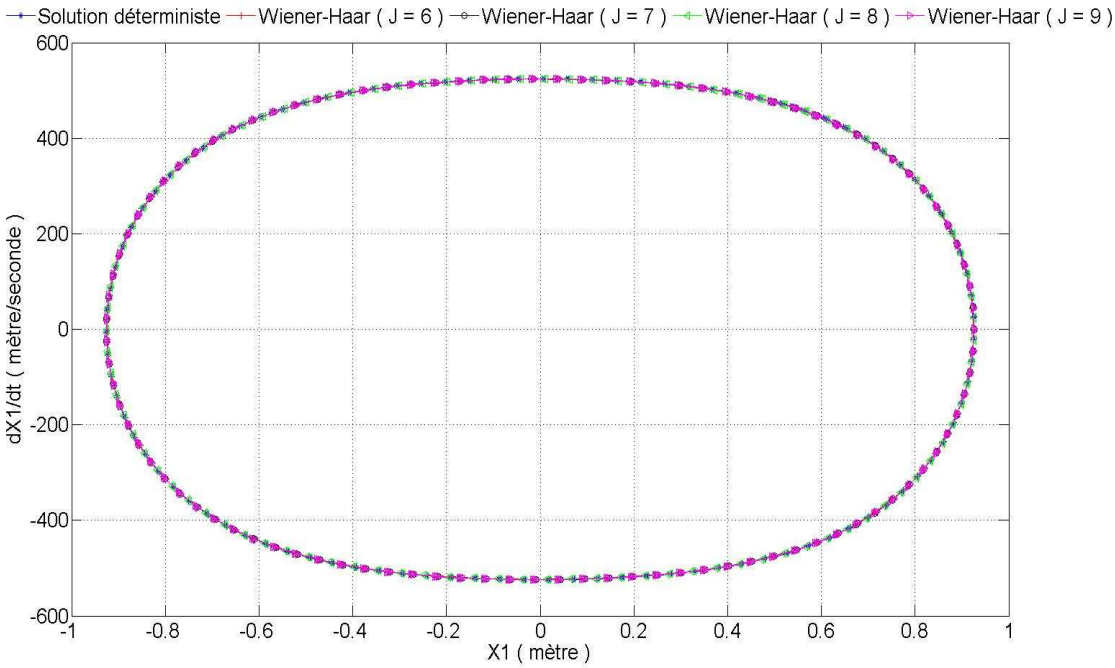


Fig.4. 95. Réalisation du cycle limite correspondant à μ = 0.55 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe

Les cycles limites représentées et estimées via le développement de Wiener-Haar à différents niveaux de résolution (J = 6, 7, 8, 9) sont corrects par comparaison à ceux calculés en intégrant les équations différentielles décrivant la dynamique du système (4.5). En observant les lois de probabilité des amplitudes des cycles limites dans figure (4. 96), il apparait que c'est le développement de Wiener-Haar avec $J = 9$ qui estime le mieux la loi référentielle obtenues par la méthode de Monte Carlo. Les caractéristiques statistiques des niveaux vibratoires relevées dans les tableaux (4.18) et (4.19) confirment aussi la suprématie de modèle de Wiener-Haar avec $J = 9$. Les niveaux vibratoires maximaux estimés par le développement de Wiener-Haar avec $J = 9$ sont obtenus avec un très faible pourcentage d'erreur (0.004%). Les estimations obtenues avec les résolutions $J=7$ et $J=8$ sont aussi très appréciables et caractérisées par des pourcentages d'erreurs aussi très faible, 0.004% pour $J=7$ et 0.028% pour $J=8$ tandis qu'avec le niveau de résolution $J=6$, le niveau de l'erreur est plus légèrement élevé (0.11%).

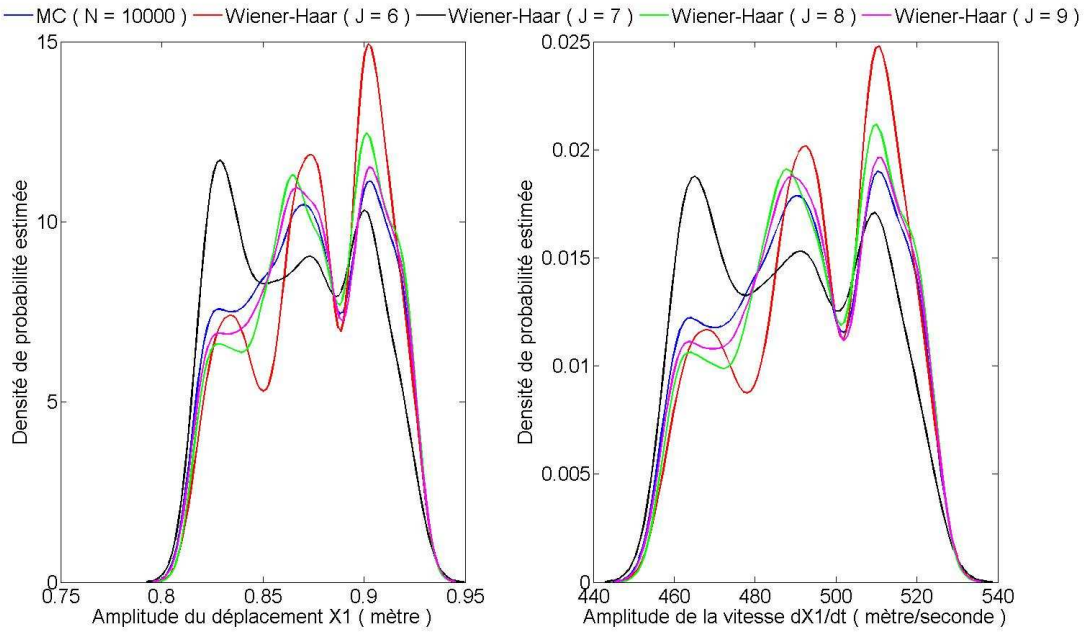


Fig.4. 96. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par la méthode de Monte Carlo

Wiener-Haar	*J=6*	*J = 7*	*J = 8*	*J = 9*	MC
Moyenne	0.8772 ± 0.0007	$0.8666 \pm$	0.8757 ± 0.0008	0.8743 ± 0.0008	0.8730 ± 0.0008
Ecart type	0.0305	0.0318	0.0308	0.0313	0.0316
Min	-0.9253	-0.9259	-0.9257	-0.9259	-0.9260
Max	0.9253	0.9259	0.9257	0.9259	0.9260

Tab.4. 18. Statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat

Wiener-Haar	*J=6*	*J = 7*	*J = 8*	*J = 9*	MC
Moyenne	494.8626 ± 0.4790	488.4426 ± 0.5010	493.9819 ± 0.4824	493.1156 ± 0.4897	492.3341 ± 0.4956
Ecart type	18.5666	19.4170	18.6994	18.9798	19.2097
Min	-523.7879	-524.1760	-524.0464	-524.1750	-524.1963
Max	523.7876	524.1755	524.0464	524.1747	524.1963

Tab.4. 19. Statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat

4.4.2.3. Conclusion sur l'analyse des cycles limites loin du point de bifurcation de Hopf

La modélisation des cycles limites développés dans la zone d'instabilité située loin du point de bifurcation de Hopf a été considérée dans cette section. Il a été illustré que la distance de la zone d'incertitude du coefficient de frottement par rapport au point de bifurcation de Hopf influe considérablement sur les performances des différentes méthodes. La méthode du chaos polynomial généralisé nécessite un ordre de plus en plus élevé rendant son utilisation inefficace. La méthode du chaos polynomial généralisé multi-éléments a donné plus de satisfaction en termes de précision mais avec un nombre beaucoup plus important d'éléments occasionnant ainsi un nombre de calculs déterministes plus important mais qui reste inférieur à celui requit pour la méthode de Monte Carlo. Le modèle de Wiener-Haar a offert aussi des performances très intéressantes mais avec un niveau de résolution plus grand se traduisant par un nombre plus important de calculs déterministes mais qui reste aussi inférieur à celui requis par la méthode de Monte Carlo. Les modèles du chaos de Legendre multi-éléments et de Wiener-Haar utilisés ont requis un nombre de simulations du même ordre de grandeur pour des précisions similaires. La résolution est le seul paramètre qui influe sur la précision du modèle de Wiener-Haar et qui définit aussi son coût (en temps et en volume) tandis que pour le modèle du chaos de Legendre multi-éléments, sa précision dépend à la fois de l'ordre du chaos et du nombre d'éléments considérés. De ces deux paramètres dépend aussi le coût en temps et en volume de calcul.

4.4.3. Analyse des cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf

Comme pour les zones étudiées précédemment, l'objectif initial de cette étude est d'estimer la dispersion de l'amplitude des cycles limites correspondant à la dispersion du coefficient de frottement au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Cependant le système (4 .5) présente, pour des valeurs du coefficient de frottement au voisinage du point de bifurcation de Hopf, des régimes transitoires très long avant d'atteindre les cycles limites ce qui oblige à utiliser des ordres de chaos ou des résolutions si élevés que les calculs deviendraient laborieux. L'objectif de l'étude au voisinage du point de bifurcation de Hopf va donc consister à modéliser le comportement du système sur son seul régime transitoire, l'apparition des cycles limites se situant à des temps beaucoup trop élevés. Dans ce cadre, Il serait donc intéressant de pouvoir associer des méthodes de réduction de modèle et des méthodes de

prise en compte des incertitudes basées sur les développements spectraux pour pallier aux deux inconvénients suivants :

- Coût prohibitif de la simulation des comportements dynamiques des systèmes particulièrement ceux ayant un grand nombre de degrés de liberté.
- Coût de la prise en compte des incertitudes.

Se situant au voisinage du point de bifurcation de Hopf, la méthode de la variété centrale est la mieux appropriée au problème de la réduction. L'objectif dans cette partie est d'illustrer la praticabilité de la combinaison variété centrale/chaos polynomial généralisé. Montrer la praticabilité de cette combinaison en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement comme ça été le cas jusqu'ici, est plus délicat compte tenu du fait que le modèle réduit par la méthode de la variété centrale est valable uniquement pour une valeur déterministe de μ. Ainsi, il faut construire une variété centrale aléatoire et par conséquent un modèle réduit aléatoire valable pour toute la dispersion du coefficient de frottement au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Nous avons donc opté pour un cas plus simple, celui d'utiliser une seule variété centrale pour une propagation des incertitudes se situant au niveau des conditions initiales dont on connait, de façon générale l'influence sur la dynamique des systèmes non linéaires.

On entame cette étude par illustrer la difficulté d'obtenir les cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf lorsqu'on procède par l'intégration directe des équations différentielles complètes décrivant le système (4.5). La méthode de la variété centrale est par la suite appliquée pour réduire la dimension du système (4.5) et donc simplifier la simulation du comportement du système et ainsi le calcul des cycles limites. Enfin, la praticabilité de la combinaison du modèle réduit par la variété centrale avec le chaos polynomial généralisé est illustrée en considérant le système (4.5) et au voisinage du point de bifurcation de Hopf avec des conditions initiales incertaines.

4.4.3.1. Calcul des cycles limites par intégration des équations complètes

L'intérêt est donc attribué au calcul de cycles limites au voisinage du point de bifurcation du système (4.5). La méthode directe utilisée dans cette perspective est, pour rappel, basée sur l'intégration numérique des équations différentielles. Cette opération est, en général, très coûteuse due à la complexité des systèmes dynamiques non linéaires d'une part et d'autre part au fait qu'au voisinage de la bifurcation de Hopf, il existe des valeurs propres à parties réelles proches de zéro indiquant un faible amortissement de la dynamique. En guise d'exemple, le déplacement X_1 et la vitesse $\dot{X}_1$ du système (4.5) correspondant à la valeur $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$ avec $\varepsilon = 10^{-4}$, sont illustrés respectivement dans les figures (4.97) et (4.98).

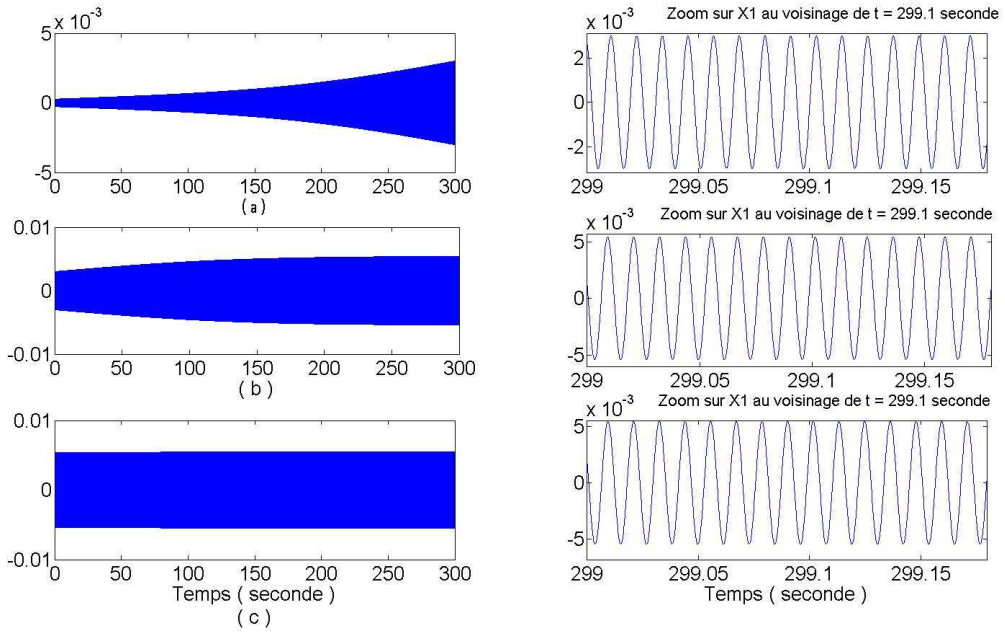


Fig.4. 97. Le déplacement X_1 correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction du temps

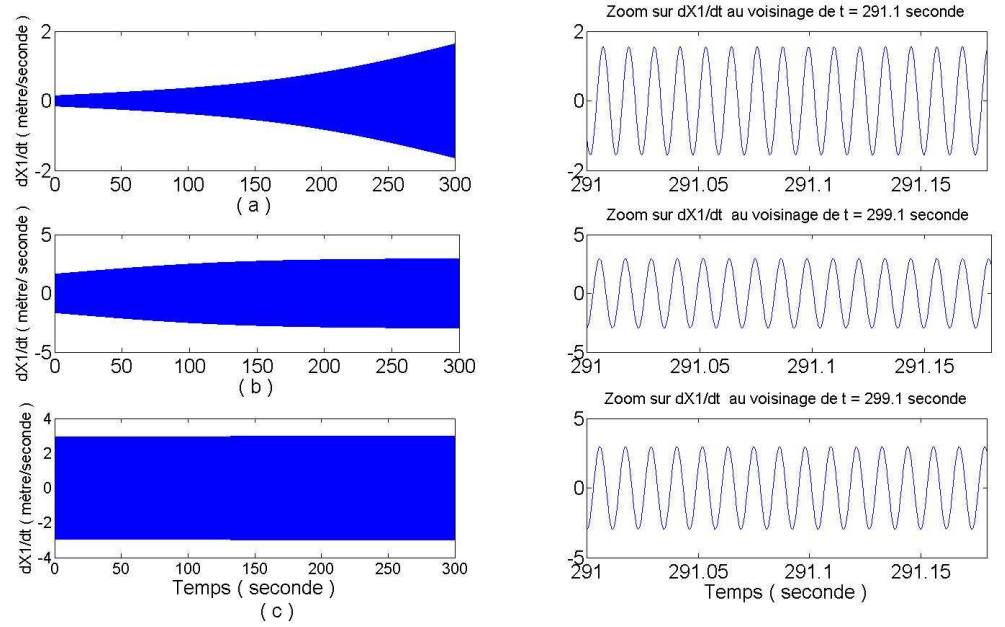


Fig.4. 98. La vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction du temps

Le régime transitoire précédant l'établissement du cycle limite est bien plus long que ceux obtenus dans les cas proche et loin du point de bifurcation de Hopf ; il s'étale sur plusieurs centaines de secondes (600 secondes) au lieu de quelques secondes pour les deux autres zones considérées.

A cause des difficultés numériques, le calcul des réponses a été réparti sur trois intégrations. La première (figures 4.98a et 4.99a) utilise une condition initiale arbitraire, la seconde (figures 4.98b et

4.99b) utilise comme condition initiale l'état final de la première intégration tandis que la troisième (figures 4.98c et 4.99c) utilise l'état final de la deuxième intégration. On peut facilement imaginer les difficultés numériques encourues dans le cas des systèmes dynamiques plus complexes. Pour pallier à ces inconvénients, la méthode de la variété centrale peut être une solution.

4.4.3.2. Calcul par intégration des équations réduites par la variété centrale

Cette technique permet de réduire le coût du calcul en réduisant la dimension du système non linéaire. La méthode exploite le fait qu'au voisinage de l'équilibre et du point de bifurcation de Hopf, les caractéristiques essentielles du système dynamique non linéaire sont gouvernées par sa variété centrale engendrée par la dynamique des pôles imaginaires purs. L'idée est d'exprimer les variétés stables en fonction des variétés centrées par l'intermédiaire d'une approximation prise dans le plus simple des cas polynomiale avec un degré fixé au préalable. Les détails de la méthode sont présentés dans le deuxième chapitre. Rappelons tout de même qu'au voisinage du point de bifurcation de Hopf , le système (4.5) peut être exprimé au moyen d'une transformation de base T comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c(\tilde{\mu})\, y + F_c(y, z, \tilde{\mu}) \\ \dot{z} = A_s(\mu)\, z + F_s(y, z, \tilde{\mu}) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \tag{4.27}$$

où $\tilde{\mu} = \mu_0(1+\varepsilon)$ avec $\varepsilon << 1$, $y \in \mathbb{R}^2$ les variables centrées et $z \in \mathbb{R}^2$ les variables stables.

Le théorème de la variété centrale montre l'existence d'une variété centrée W_{loc}^c locale telle que :

$$W_{loc}^c = \{(y, \tilde{\mu}, z) / z = h(y, \tilde{\mu})\} \tag{4.28}$$

dans laquelle le système (4.27) peut être décrit par la dynamique du second ordre donnée par :

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c(\tilde{\mu})\, y + F_c(y, h(y, \tilde{\mu}), \tilde{\mu}) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \tag{4.29}$$

L'ordre de la fonction polynomiale h est arbitrairement fixé à trois. Le cycle limite $(X_1, \dot{X}_1)$ correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ et calculé à base du modèle réduit, est relevé dans la figure (4.99). Il y est comparé à celui obtenu en intégrant le système original (4.5).

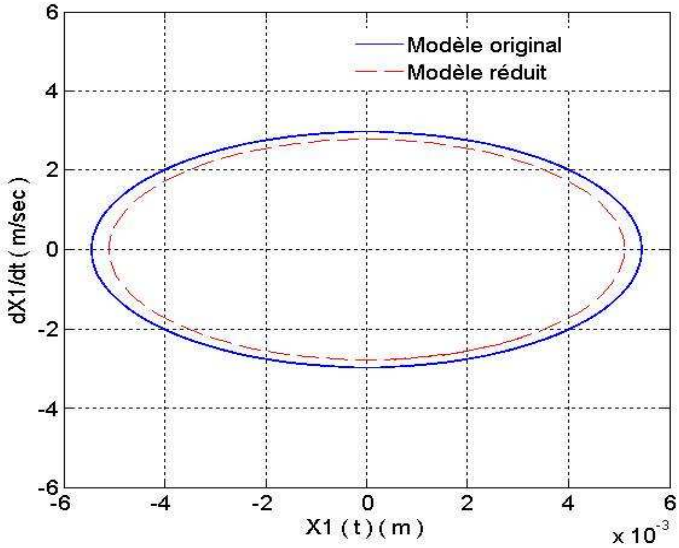


Fig.4. 99. Le cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0,\ \varepsilon = 10^{-4}$ calculé par intégration du système (4.5) et du modèle réduit (4.29).

Le système d'ordre réduit (4.29) présente une dynamique similaire à celle du système original (4.5) au voisinage du point de bifurcation de Hopf défini par $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0,\ \varepsilon = 10^{-4}$. Cette dynamique se caractérise par un régime oscillatoire que définit le cycle limite représenté dans le plan de phase $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ dans la figure (4.99). Un écart sur l'amplitude est observé. Cet écart se justifie par le fait qu'exprimer les variétés stables en fonction des variétés centrées est une approximation, cette dernière étant modélisée par un polynôme d'ordre trois.

4.4.3.3. Analyse du comportement dynamique par combinaison de la variété centrale et le chaos polynomial généralisé

Nous proposons maintenant la combinaison de la méthode de la variété centrale avec celle du chaos polynomial généralisé pour une effectuer une propagation d'incertitude en appliquant le chaos polynomial généralisé sur le modèle réduit par la variété centrale. Pour appliquer cette méthode, le déplacement initial $X_1(t=0)$ est supposé incertain et régi par une loi uniforme sur l'intervalle de dispersion [10^{-4}, 3.10^{-4}].

Remarquons tout d'abord la sensibilité importante du comportement dynamique du système (4.5) par rapport aux variations des conditions initiales. Ce fait est illustré dans la figure (4.100) où les trajectoires de phase correspondant à trois conditions initiales différentes sont relevées. Il faut aussi noter que les trajectoires tracées ne représentent pas des cycles limites.

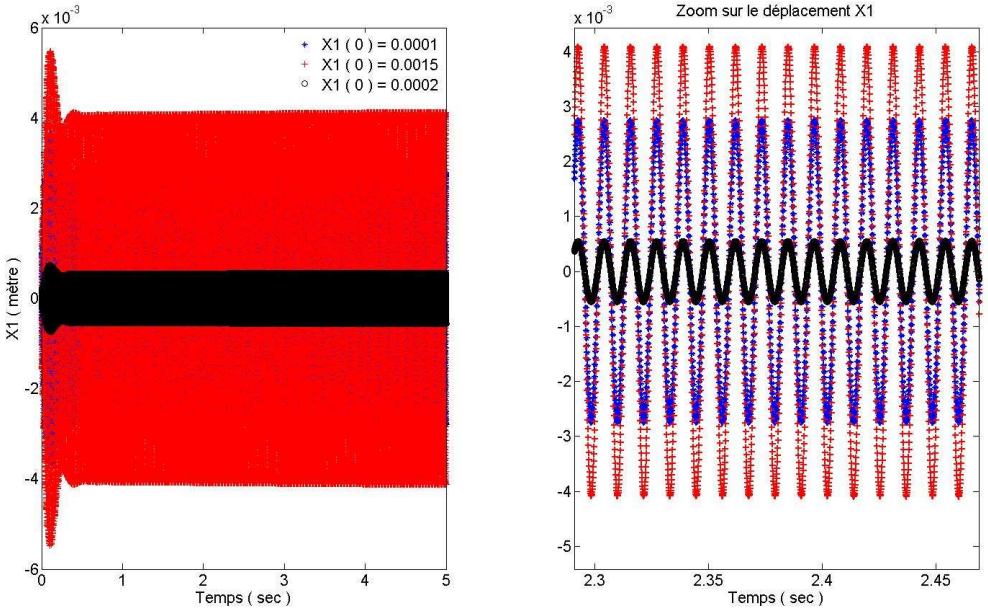


Fig.4. 100. Le déplacement X_1 en fonction du temps correspondant à différentes conditions initiales

Les techniques non intrusives (la régression ainsi que la projection spectrale non intrusive utilisant la collocation de Gauss) et la méthode de MC sont appliquées au modèle réduit. L'influence de l'ordre du développement n'est pas traitée dans cette section. En effet, rappelons que l'objectif de l'application est de montrer la praticabilité de la combinaison variété centrale et chaos polynomial.

La valeur moyenne et l'écart type du déplacement et de la vitesse correspondant sont estimés via le modèle du chaos de Legendre avec $P = 5$. Ils sont comparés aux résultats obtenus par la méthode de MC appliquée au modèle original. Les valeurs moyennes instantanées du système (4.5) estimées par les différentes méthodes sont représentées dans la figure (4.101) tandis que les écarts types instantanés sont illustrés dans la figure (4.102).

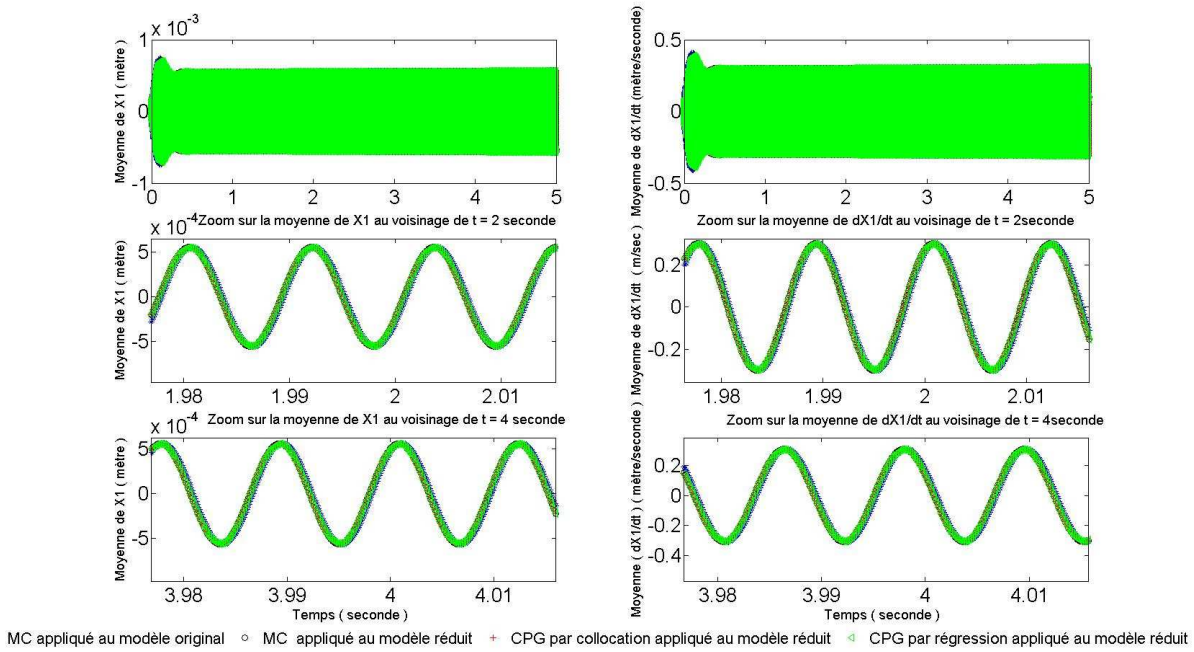


Fig.4. 101. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

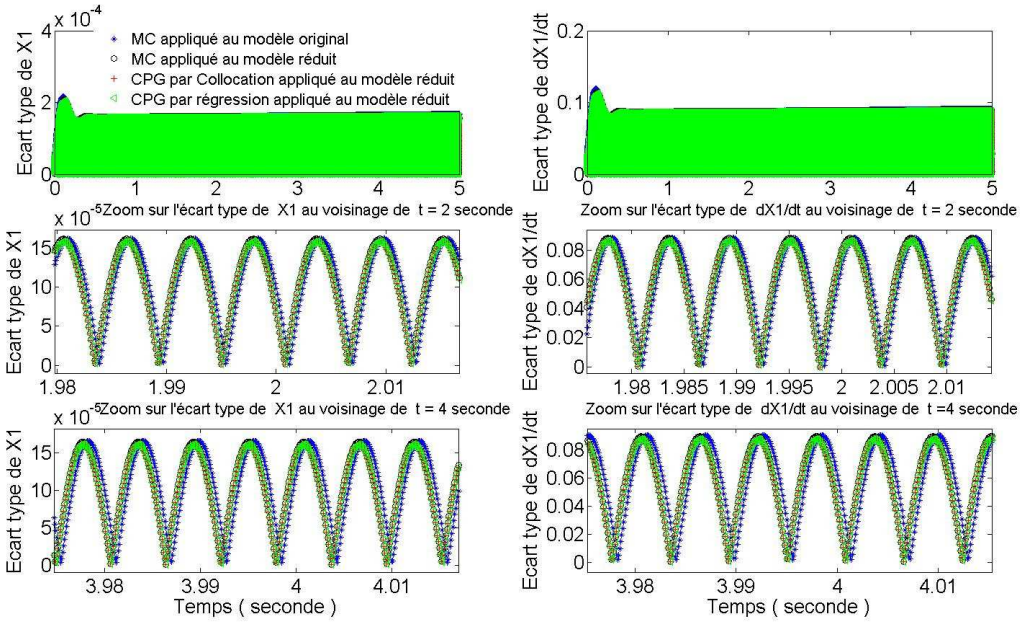


Fig.4. 102. Ecart type instantané du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$

En observant les figures (4.101) et (4.102), il peut être remarqué que les statistiques (les valeurs moyennes et les écarts types instantanés) du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ obtenus en propageant l'incertitude dans le modèle réduit via les différentes méthodes (la projection spectrale utilisant la collocation de Gauss, la régression et la méthode de MC) approximent convenablement les statistiques du système original, obtenues par la méthode de MC.

Comme illustré dans les sections précédentes, le développement en série de polynômes de chaos peut être vu comme étant un modèle plus simple pouvant être utilisé pour simuler la dynamique d'un système incertain complexe. En effet, la réponse peut être reconstruite une fois les modes stochastiques calculés en évaluation les polynômes en les points de calcul désirés. Aucune simulation du système original n'est nécessaire. Dans le contexte de l'application développée jusqu'ici, les réponses du système original (4.5) correspondant à quelques tirages des conditions initiales sont reconstruites en utilisant le modèle par chaos polynomial de Legendre dont les modes ont été calculés en utilisant le modèle d'ordre réduit. Les trajectoires de phase correspondant à $x_1(0) = 2.10^{-4}$ et à $x_1(0) = 3.10^{-4}$ sont relevées respectivement dans les figures (4.103) et (4.104). La précision du modèle réduit combiné avec le chaos polynomial de Legendre est très claire.

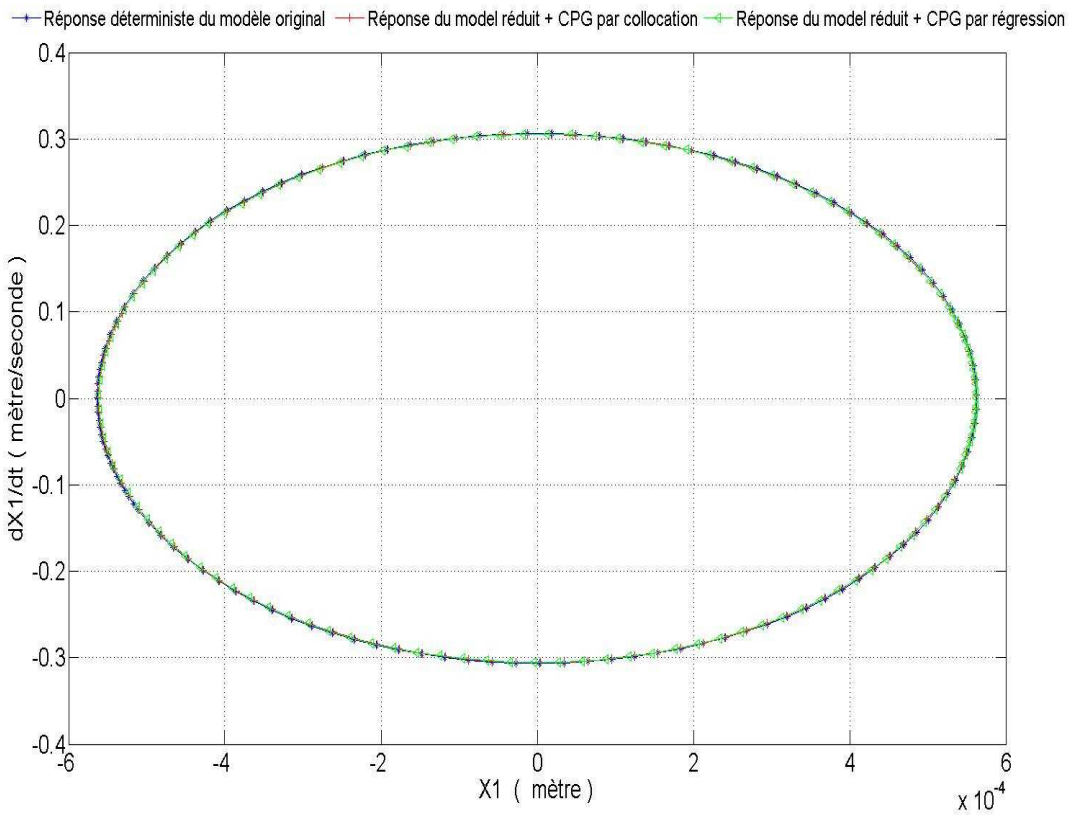


Fig.4. 103. Réalisation de la trajectoire de phase du système (4.5) correspondant à $x_1(0) = 2.10^{-4}$

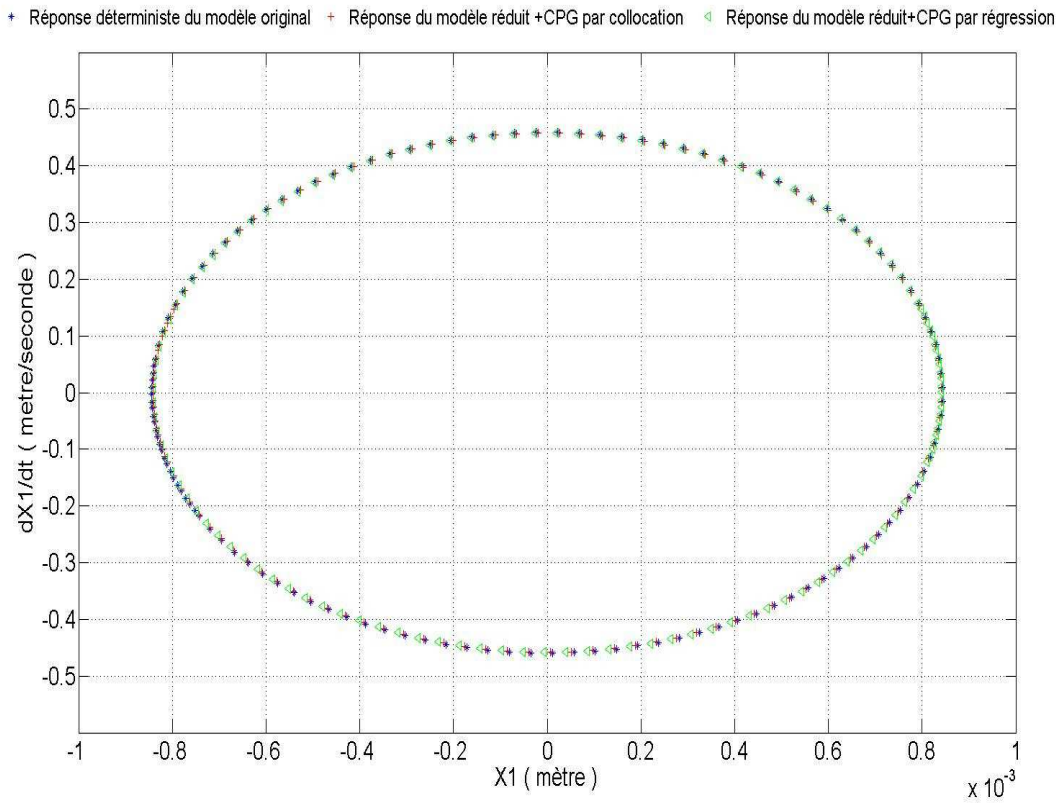


Fig.4. 104. Réalisation de la trajectoire de phase du système (4.5) correspondant à $x_1(0) = 3.10^{-4}$

4.4.3.4. Conclusion sur l'analyse au voisinage du point de bifurcation de Hopf

La méthode de la variété centrale a été exploitée pour une détermination plus simple et plus efficace des cycles limites au voisinage du point de bifurcation de Hopf. Elle a été ensuite combinée avec l'approche du chaos polynomial généralisé pour propager les incertitudes au niveau des conditions initiales. L'objectif de cette combinaison était de montrer la faisabilité et la praticabilité de la combinaison originale. Les caractéristiques statistiques et les réponses reconstruites par la combinaison ont montré l'efficacité de celle-ci. La nature simple du système d'Hultèn a fait qu'aucune évaluation quantitative plus objective (gain en temps de calcul) n'a pu se faire.

4.5. Conclusion de l'étude des cycles limites avec les méthodes spectrales

Dans ce chapitre, l'objectif était d'analyser le comportement dynamique d'un modèle à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage à tambour, en tenant compte de l'incertitude du coefficient de frottement. Deux grands axes ont été traités, à savoir l'analyse de la stabilité et la modélisation et la prédiction des cycles limites correspondant à une dispersion probabiliste du coefficient de frottement. Les méthodes dérivant du chaos polynomial ont été proposées pour traiter de ces problèmes abordés souvent par la méthode coûteuse de Monte Carlo. Il a été montré que, de façon générale, la théorie du chaos polynomial offre un ensemble d'outils puissants permettant des analyses robustes, efficaces et

précises du comportement dynamique des systèmes frottants, le tout en tenant comptes des aspects non linéaires et stochastiques des dynamiques. L'idée principale de ces méthodes et d'exprimer toutes les grandeurs aléatoires par des développements en séries de fonctions orthogonales. Le schéma non intrusif, nécessitant uniquement des mesures en des points particulier, a démontré une efficacité remarquable. Le seul a priori à l'utilisation de ces méthodes est celui de devoir fixer le nombre de termes dans les développements en séries. Cette tâche passe nécessairement par des études de convergence. Survient ainsi l'inconvénient de ne pas disposer de critère mathématique permettant le controle de l'erreur due à la troncation des développements. En termes de résultats concrets, il a été montré que la combinaison de la méthode du chaos polynomial généralisé avec l'approche de Lyapunov offre une méthode puissante qui permet de tracer, efficacement et avec des niveaux de précision et de confiance élevés, la carte de stabilité. Le chaos polynomial généralisé a présenté aussi une performance notable dans la modélisation et la prédiction des cycles limites. L'importance de cette capacité est liée au fait qu'elle permet de ne pas nécessiter la résolution des équations différentielles, une tâche connues pour sa difficulté particulièrement dans le cas des systèmes dynamiques non linéaires à grand nombre de degrés de liberté. La dispersion des niveaux vibratoires (amplitude des cycles limites) a été estimée avec une grande précision La limite majeure du chaos polynomial a été montrée sur la modélisation et prédiction des cycles limites au-delà d'un certain nombre périodes d'oscillation. A ce sujet, les méthodes du chaos polynomial généralisé multi-éléments et le chaos de Wiener-Haar ont été proposées comme solutions. Elles ont montré des capacités intéressantes puisqu'elles ont permis de surpasser la limite du chaos polynomial en estimant avec précision la dispersion probabiliste des niveaux vibratoires. Enfin nous avons montré la praticabilité de la combinaison de la méthode de la variété centrale avec le chaos polynomial généralisé pour une propagation d'incertitudes et une analyse robuste du comportement dynamique plus efficaces.

Conclusion générale

La modélisation et l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires ont constitué les mots clés autour desquels se sont situés les travaux de cette thèse. Ces derniers se placent dans un contexte plus général, celui d'aider à asseoir une démarche de conception robuste des systèmes dynamiques. Une telle démarche est nécessaire car elle permet de garantir les exigences des cahiers des charges (stabilité, niveaux vibratoires, performances) en présence de divers types d'incertitudes pouvant être à différentes niveaux du cycle de vie du système et de différentes natures (erreurs de modélisations, variabilité des excitations, dispersion des paramètres dues aux imprécisions géométriques etc.).

Un intérêt particulier a été accordé aux systèmes frottants. Ces derniers, constituant une classe particulière des systèmes dynamiques non linéaires, sont caractérisés par des comportements dynamiques très sensibles aux variations des lois de frottement s'illustrant par des changements qualitatifs importants de leurs propriétés de stabilité et de leurs comportements vibratoires. L'objectif principal de cette thèse a été de définir des méthodologies permettant de modéliser et de prédire de manière robuste, c'est à dire en tenant compte à la fois des phénomènes non linéaires et des dispersions des lois de frottement, le comportement dynamique de ce type de système.

Le phénomène du couplage de modes a été considéré comme le mécanisme étant à l'origine de l'occurrence des instabilités de flottement avec du frottement. Le problème traité est alors d'analyser la stabilité et de déterminer la dispersion de l'amplitude des cycles limites lorsqu'un système frottant est soumis à une instabilité de flottement avec une dispersion probabiliste préalablement identifiée du coefficient de frottement.

L'approche probabiliste basée sur le concept du chaos polynomial a été proposée pour traiter de ces deux problèmes. Elle a été développée et évaluée sur un exemple à deux degrés de liberté décrivant un système de freinage à tambour. L'idée d'avoir utilisé ce système est, en plus du fait qu'il est suffisant pour décrire les phénomènes de couplages de modes, liée à sa simplicité, une propriété en mesure d'aider à évaluer efficacement l'approche proposée. Cette dernière nécessitant un modèle probabiliste décrivant l'incertitude du coefficient de frottement, une loi uniforme a été supposée comme régissant la dispersion du coefficient de frottement. Ce modèle est alors propagé sur le système frottant en utilisant une des différentes méthodes dérivant du concept de chaos polynomial. Le but est de caractériser le comportement dynamique du système en traçant, dans une première étape, sa carte de stabilité puis son comportement vibratoire dans une deuxième étape.

Dans la première étape, pour analyser la stabilité en tenant compte de la dispersion du coefficient de frottement, deux approches ont été proposées. La première combine un développement en série de fonctions orthogonales (chaos polynomial généralisé, chaos de Wiener-Haar) avec l'approche directe de Lyapunov. L'idée est d'analyser la stabilité du système avec incertitudes via l'analyse de la stabilité de la dynamique déterministe des modes stochastiques (cas du développement du chaos polynomial) ou des coefficients de Fourier généralisés (cas du développement de Wiener-Haar) définie après l'exécution d'une projection de Galerkin intrusive. La méthode permet de bien appréhender la stabilité du système incertain mais reste insuffisante puisqu'elle n'est pas concluante dans le cas où aucune fonction de Lyapunov n'est déterminée. La combinaison du développement en chaos polynomial de Legendre dans son schéma non intrusif avec l'approche indirecte de Lyapunov a été alors proposée pour délimiter à la fois les zones de stabilité et d'instabilité. Deux procédures ont été proposées. Elles

sont basées sur l'expression des valeurs propres du système incertain par des développements dans la base du chaos polynomial généralisé. Une fois les développements calculés, par les techniques non intrusives (régression ou technique de projection spectrale non intrusive), l'analyse de la stabilité se fait soit en utilisant la méthode indirecte de Lyapunov dans un schéma de Monte Carlo ou en appliquant, après la résolution de problèmes d'optimisation non linéaires, des critères généralisés développés aussi à partir de la méthode indirecte de Lyapunov. L'efficacité des deux méthodes a été illustrée. Toutes les deux ont permis de conclure sur la stabilité et l'instabilité en fonction de la distribution uniforme du coefficient de frottement. Les niveaux de précision et de confiance des conclusions offerts par les deux méthodes sont aussi élevés que ceux offerts par la méthode référentielle de Monte Carlo. Ne faisant pas appel au modèle du système incertain (une fois les représentations par le chaos polynomial généralisé obtenues), les méthodes proposées sont largement moins coûteuses en volume de calcul que la méthode classique de Monte Carlo.

La détermination de la dispersion des niveaux vibratoires correspondant à la dispersion du coefficient de frottement est la deuxième étape considérée dans cette thèse. Cette étude, avec celle de la stabilité, sont indispensables pour avoir une analyse complète du comportement dynamique. L'objectif a été de modéliser et de prédire les cycles limites en tenant compte du caractère aléatoire du coefficient de frottement. Ne pouvant pas être déterminés analytiquement (solutions d'équations différentielles stochastiques impossibles à résoudre), les solutions numériques ont été favorisées. Celles qui consistent à intégrer les équations différentielles pour chaque valeur de la distribution du coefficient de frottement sont très coûteuses. Les méthodes basées sur les développements spectraux ont été ainsi proposés pour à la fois modéliser et prédire les solutions des équations différentielles stochastiques en particulier les solutions de type cycle limite. Une fois le développement spectral approprié déterminé, il n'y a plus aucun recours à la résolution des équations différentielles.

La méthode du chaos polynomial généralisé en particulier le chaos polynomial de Legendre a été la première méthode testée. Celle-ci a montré une grande efficacité lorsque l'intervalle d'incertitude du coefficient de frottement est proche du point de bifurcation de Hopf. En effet, il a été montré que lorsque le régime transitoire des cycles limites est court, le modèle par chaos polynomial de Legendre permet de prédire correctement les cycles limites et d'en estimer efficacement les niveaux maximaux d'amplitude. Pour des niveaux de précision et de confiance identiques à ceux de la méthode référentielle de Monte Carlo, le modèle par chaos polynomial de Legendre occasionne un coût en volume de calcul largement inférieur à celui de la méthode de MC, celle-ci étant basée sur l'intégration des équations différentielles décrivant le système contrairement au modèle basé sur le chaos polynomial généralisé où il n'y a que des polynômes à évaluer et des sommes à calculer.

En outre, il a été montré que le modèle par chaos polynomial de Legendre est insuffisant sur les problèmes d'intégrations longues. En effet, il a été vérifié que la performance du modèle dépend du degré de complexité et de non linéarité des solutions oscillatoires (cycles limites) dans leurs dimensions stochastiques. Les performances en termes de précision et d'efficacité sont négativement affectées lorsque les processus modélisés sont d'évolutions rapides et non linéaires dans leurs dimensions stochastiques. La déficience du modèle via le chaos polynomial généralisé a été aussi montrée dans le cas où l'intervalle de dispersion de l'incertitude est loin du point de bifurcation de Hopf. Ainsi, pour des solutions fortement non linéaires et ou à évolutions rapides dans leurs dimensions stochastiques, d'autres types de modèles ont été proposés. Il s'agit, en l'occurrence, du chaos polynomial généralisé multi-éléments et du chaos de Wiener-Haar. Ces modèles ont montré une efficacité importante puisqu'ils ont permis de prédire les cycles limites dans le cas des intégrations

temporelles plus longues et aussi dans le cas où l'intervalle d'incertitude du coefficient de frottement est loin du point de bifurcation de Hopf. Ils ont permis également dans les deux cas d'estimer, correctement et avec de très faibles niveaux d'erreurs, la dispersion de l'amplitude des cycles limites avec un volume de calcul très inférieur à celui requis par la méthode de Monte Carlo. Le fait que la convergence et la précision du modèle de Wiener-Haar dépendent uniquement de la résolution, peut favoriser son usage par rapport au modèle multi-éléments puisque celui-ci dépend de deux paramètres à savoir l'ordre du chaos et le nombre d'éléments et donc nécessite une double convergence (une par rapport à chaque paramètre).

En définitive, tous les résultats obtenus ont montré, de part la précision comparée à la technique référentielle de Monte Carlo, l'adéquation de l'utilisation des méthodes basées sur le chaos polynomial au problème de la modélisation et de l'analyse robuste du comportement dynamique des systèmes frottants. Le choix de la méthode dépend naturellement de la complexité du système étudié dans sa dimension stochastique en termes de rapidité d'évolution, de non linéarité et de discontinuité.

Perspectives

L'aspect pratique du chaos polynomial et des méthodes qui en dérivent pose certaines difficultés relatives à l'absence de critères de contrôle de l'erreur de troncature. Ce point crucial reste ouvert aux recherches. A défaut d'en disposer, on est souvent obligé, en pratique, de faire des études de convergence lesquelles, dans le cas de plusieurs paramètres incertains, sont coûteuses. Une réflexion pour définir des critères pour éviter ces études est nécessaire.

Le problème traité tout au long de la thèse a porté sur la prise en compte de la seule et unique dispersion du coefficient de frottement. Les autres paramètres de conception ont été considérés suffisamment contrôlables pour leur attribuer le caractère déterministe. Une deuxième perspective est alors de considérer un nombre plus important de paramètres incertains et donc des lois probabilistes pour plus de paramètres (raideurs, amortissements, frottement). Devenant très clairement plus délicat, une analyse de sensibilité devient alors nécessaire pour quantifier et par conséquent hiérarchiser l'importance de l'effet de la variation de chaque paramètre sur le comportement dynamique du système frottant. Cette étude permettra de ne considérer ensuite que les paramètres les plus influents.

Les méthodes spectrales basées sur le chaos polynomial étant évaluées sur un simple système à deux degrés de liberté, il n'a pas été possible de quantifier et de comparer les méthodes en temps de calcul même si les faibles nombre et volume de calcul relevés nous donnent déjà une forte indication sur le potentiel des méthodes considérées à permettre une diminution considérable du temps de calcul par rapport aux méthodes classiques de Monte Carlo. La première perspective qui se dégage du travail réalisé est d'appliquer les différentes méthodes développées sur un système industriel ayant un nombre de degrés de liberté beaucoup plus élevé.

Enfin, l'approche par chaos polynomial offre, en plus du fait qu'elle aide à une conception robuste, d'autres perspectives relatives au contrôle actif de vibrations. L'approche, tel qu'il a été montré, s'apprête bien aux problèmes de la modélisation et de la prédiction des cycles limites. Une nouvelle direction consiste à l'exploiter pour réaliser des objectifs de contrôle tels que la suppression ou la réduction des amplitudes des cycles limites.

Références bibliographiques

Antoniou, S.S., Cameron, A., Gentle, C.R., (1976). The Friction-Speed Relation from Stick-Slip Data. *Wear*, 36, 235-254.

Aronov, V., D'Souza, A. F., Kalpakjian, S., Sharper, I., (1984). Interaction among friction, wear and system stiffness- part 1: effect of normal load and system stiffness;part 2:vibrations induced by dry friction;part 3:Wear model. Journal of Lubrification Technique, 106, 54-69.

Askey, R., Wilson, J., (1985). Some Basic Hypergeometric Polynomials that Generalize Jacobi Polynomials. Memoirs American Mathematical Society, 319.

Aylward, E.M., Parrilo, P., Slotine, J-J., (2008). Stability and robustness analysis of nonlinear systems via contraction metrics and SOS programming. Automatica, 44, 2163-2170.

Babuska, R., Tempone, G.E., Zouraris, (2004). Galerkin finite element approximation of stochastic elliptic partial differential equations. SIAM Journal of Scientific Computing, 24 (2), 619-644.

Babuska, I.M., Nobile, F., Tempone, R., (2007). A stochastic collocation method for elliptic partial differential equations with random input data. SIAM Journal on Numerical Analysis, 45 (3), 1005–1034.

Baillargeon, G., (1990). Méthodes statistiques de l'ingénieur. Les editions SMG, volume 1, 3ième edition, Canada.

Barmish, B. R., Lagoa, C. M., Shcherbakov. P. S., (1996). Probabilistic enhancement of robustness margins provided by linear matrix inequalities. In Proceedings of the 34th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, Monticello, IL, 1996, pp. 160–169.

Begout, M., (1979). Les problèmes liés au frottement élastomère-verre dans l'automobile. Mémoire de thèse, Université Paul Sabatier Toulouse.

Benaroya, H., Rehak, M., (1988). Finite element method in probabilistic structural analysis: A selective review. Applied Mechanic Reviews, ASME, 41 (5), 201-213.

Beran. P. S., Pettit. C. L., Millman. D. L, (2006). Uncertainty quantification of limit-cycle oscillations. Journal of Computational Physics, 217, 217–247

Blanchard, E., Sandu, A., Sandu, C., 2009. Parameter estimation for mechanical systems via an explicit representation of uncertainty. Int. J. for Computer-Aided Engineering Computation. 26, 541-569.

Blanchard, E., Sandu, A., Sandu, C., 2010a. Polynomial chaos-based parameter estimation methods applied to vehicle system. Proc. Of the Institution of Mechanical Engineers Part K: J. of Multi-Body Dynamics. 224, 59-81.

Blanchard, E., Sandu, A., Sandu, C., 2010b. A polynomial chaos-based Kalman filter approach for parameter estimation of mechanical systems. ASME J. Dyn. Sys. Mea. Control, Special Issue on Physical System Modeling. 132, 18 pages.

Blatman, G., Sudret, B., (2008). Sparse polynomial chaos expansions and adaptive stochastic finite elements using a regression approach. C. R. Mecanique (336), 518-523.

Bowden, F.P., Tabor, D., (1950). The friction and lubrification of solids. Oxford at the Clarendon Press

Cameron. H., Martin. W, (1947). The orthogonal development of nonlinear functionals in series of Fourier-Hermite functional. Annals of Mathematics, 48, 385-392.

Carr, J., (1981). Application of Center Manifold, Springer Verlag.

Chambrette, P., (1991). Stabilité des Systèmes Dynamiques avec Frottement sec : Application au crissement des freins à Disque. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Chatillon, M-M., (2005). Méthodologie de conception robuste appliquée aux trains de véhicules de tourisme. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Cherki, A., Tison, T., Guerra, M., Level, P., (1997). On evaluating structures sensitivities to prescribed displacements uncertainties using fuzzy numbers. Engineering Computations, 14 (5), 529-541.

Cherrier, E., Bouttayeb, M., Ragot, J., (2003). Evaluation des bornes de l'état d'un système incertain, approche par intervalle. Journal européen des systèmes automatisés, volume 2003.

Chevennement-Roux, C., Dreher, T., Alliot, P., Aubry, E., Lainé , J-P., Jézéquel, L., 2007. Flexible wiper system system dynamic instabilities: modeling and experimental validation. Experimental Mechanics. 47, 201-210.

Chevennement-Roux, C., Grenouillat, R., Dreher, T., Alliot, P., Aubry, E., Lainé, J-P., Jézéquel, L., 2005. Wiper system with flexible structures-Instabilities analysis and correlation with a theoretical model. SAE transactions. 114, 2694-2703.

Codfert, V., (1997). Modélisation des instabilités dynamiques d'un système d'essyage. Mémoire de thèse, Université des Sciences et Technologie de Lille.

Crestaux. T, Le Maitre. O, Martinez. J. M, (2009). Polynomial Chaos Expansion for Sensitivity Analysis, Reliability Engineering and System Safety. 94 (7), 1161-1172.

Crolla, D.A., Lang A.M.,(1991). Brake Noise and Vibration - State of Art, *Tribologie-Vehicle Tribology*, 18, 165-174.

Coudeyras, N., (2009). Analyse non linéaire des instabilités multiples aux interfaces frottantes:Application au crissement de frein. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Dahl, P., (1976). A solid friction damping of mechanical vibrations. AIAA Journal, 14, 1675-1682.

Didrit, O., (1997). Analyse par intervalles pour l'automatique; résolution globale et garantie de problemes non linéaires en robotique et en commande robuste. Thèse doctorat, Université de Paris-sud, UFR scientifique d'Orsay.

Dessombz, O., (2000). Analyse dynamique de structures comportant des parameters incertains. Thèse doctorat, Ecole Central de Lyon.

Duvaut, G., Lions, J.L., (1972). Les inéquations en mécanique et physique. Dunod, Paris.

Earles, S.W.E., Badi, M.N., (1976). Oscillatory Instabilities Generated in a Double-Pin and Disc Undamped System: a Mechanism of Disc-Brake Squeal. Proceeding of the Institution of Mechanical Engineers, Conference on Vibration and Noise in Motor Vehicles, 43-50.

Elishakoff, I., Renet, Y. J., Shinozuka, M., (1995). .Improved finite element method for stochastic problems. Chaos, Solitons and Fractals, 5 (5), 833–846.

Eriksson, M., Jacobson, S., (2001). Friction behaviour and squeal generation of disc brakes at low speeds. In proceedings of the Institution of mechanical Engineers, D215 of D12, 1245-1256.

Evans, M., Swartz, T., (2000). Approximating Integrals via Monte Carlo and Deterministic Methods,Oxford University Press,Oxford.

Fansen, K., Junyi, Y., (1999). Fuzzy dynamic response analysis of machine tool structure. International Journal of Machine Tool &Manufacture, 39, 1993-2002.

Fisher, J., Bhattacharya, R., (2008a). Stability analysis of stochastic systems using polynomial chaos. 2008 American Control Conference, Westin Seatle Hotel, Seatle, Washington, USA; June 11-13.

Fisher, J., (2008b). Stability analysis and control of stochastic dynamic systems using polynomial chaos. Phd thesis, Texas A&M University.

Fishman, G. S., (1996). Monte Carlo:Concepts, Algorithms and Applications.Springer Verlag.

Flint, F., Hulten, J., (2002). Lining-deformation-induced modal coupling as squeal generator in a distributed parameter disc brake model. Journal of sound and vibration, 254(1), 1-21.

Frulla, G., (2000). Rigid rotor dynamic stability using Floquet theory. European Journal of Mechanics-A/Solids, 19 (1), 139-150.

Gao, C., Kuhlmann-Wilsdorf, D., Makel, D.D., (1994). The Dynamic Analysis of Stick-Slip Motion. *Wear*, **173**, 112, 1994.

Ganappathysubramanian,B., Zabaras, N., 2007. Sparse grid collocation schemes for stochastic natural convection problems. J of Computational Physics 225, 652–685.

Ghanem, R., Ghosh, D., (2007). Efficient characterization of the random eigenvalue problem in a polynomial chaos decomposition. International Journal for Numerical Methods in engineering, vol. 72, (4), pp. 486-504

Ghanem. R. G and Spanos. P. D, (1991). Stochastic Finite Elements: a Spectral Approach. Springer Verlag.

Grossmann, A., Holschneider, M., Kronland-Martinet, R., Morlet, J., (1987). Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms. In Advances in Electronics and Electron Physics, Suppl. 19, Inverse Problems, pp. 289-306.

Hairer, E., Wanner, G., (2002). Solving ordinary differential equations II stiff and differential-algebraic problems. Springer Series in Computational Mathematics.

Handa, K., Andersson, K., (1981). Application of finite element methods in the statistical analysis of structures. In T. Moan and M. Shinozuka (Eds). Proc. 3rd Int. Conf. Struct. Safety and Reliability (ICOSSAR'81), Trondheim, Norway, pp. 409-420.

Helton, J. C., Davis, F. J., (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Reliability Engineering and System Safety, (81), 23–69.

Hervé, B., (2009). Crissement d'embrayage: analyse linéaire, non linéaire et etude expérimentale. Mémoire de these, Ecole Centrale de Lyon.

Hoffmann, N., Fisher, M., Allgaier, R., Gaul, L., (2002). A minimal model for studying properties of the mode coupling type instability in friction induced oscillations. Mechanics Research Communications, 29, 197-205.

Hoffmann, N., Gaul, L., (2003). Effects of damping on mode-coupling instability in friction-induced oscillations. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik 83 (2003) 524-534.

Holschneider, M., (1988). On the wavelet transformation of fractal object. Journal of Statistical Physics, 50 (5-6), 953-593

Hover. F. S., Michael S., Triantafyllou, (2006). Application of polynomial chaos in stability and control. Automatica, 42, 789 – 795.

Hubard,B.B., (1995). Ondes et ondelettes: la saga d'un outil mathématique. Edition Pour la Science, Paris.

Hulten, J., (1993). Drum brake squeal- a self exciting mechanism with constant friction," in SAE. Truck and Bus Meeting, Dettroit.

Hung, S. L., (1990). Automated robotic assembly using a vibratory work table: Optimal tuning of vibrators based on the Tagushi method. Massachusets Institute of Technology.

Ibrahim, R.A., (1994a). Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos: Part I- Mechanics of contact and friction. ASME Applied Mechanics Reviews. 47 (7), 209-226.

Ibrahim, R.A., (1994b). Friction-induced vibration, chatter, squeal and chaos: Part II- Dynamics and modeling. ASME Applied Mechanics Reviews 47 (7), 227-253.

Isukapalli, S. S., Roy, A., Georgopoulos, P. G., (1998). Stochastic response surface methods (SRSMs) for uncertainty propagation: Application to environmental and biological systems. Risk Analysis. 18, 351-363.

Isukapalli,S.S., Georgopoulos, P.G., (2001). Computational methods for sensitivity and uncertainty analysis for environmental and biological models. Research Triangle Park, NC, United States Environmental Protection Agency, Office of Research and Development, National Exposure Research Laboratory, 145 pp. (EPA/600/R-01-068.

Jablonowski, M., (1998). Fuzzy risk analysis in civil engineering. In: Ayyub BM, ed. Uncertainty modeling and analysis in civil engineering. Boca Raton, FL, CRC Press, 137–148.

Jaffard, S., (1989). Exposants de Holder en des points donnés et coefficients d'ondelettes. C.R. Acad. Sci. Paris, série. 1308, 79-81

Jarvis, R. P., Mills, B., (1963). Vibration induced by dry friction. In proceedings of the Institution of mechanical Engineers, 178, 32, 847-866.

Jaulin, L., (1999). Proving set inclusion via intervals: application to parametric robust stability; Automatica, 35, 627-632.

Johnson, E. A., Bergman, L. A., Spencer, B. F., (1997). Parallel implementation of Monte Carlo simulation-comparative studies from stochastic structural dynamics. Probabilistic Engineering Mechanics, 12(4), 208–212, Special Issue on Computational Stochastic Mechanics.

Kackar, R. N., (1985). Off-line quality control, parameter design, and the Taguchi approach. Journal of Quality Technology,17(4), 176-209.

Kaminski, M., (2002). Stochastic perturbation approach to engineering structure vibrations by the finite difference method. Journal of Sound and Vibration, 251 (4), 651-670.

Kewlani. G, Iagnemma. K (2009). A multi-element generalized polynomial chaos approach to analysis of mobile robot dynamic under uncertainty. The IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, October 11-15, 2009 St. Louis, USA.

Kinkaid, N., O'Reilly, O., Papadopoulos, P., (2003). Automotive disc brake squeal. Journal of Sound and Vibration, 267, 105-166.

Kleiber, M., Hien, T. D., (1992). The Stochastic Finite Element Method: Basic Perturbation Technique and Computer Implementation, John Wiley & Sons, Chichester, UK.

Kobayashi, M., (1990). Sound and vibration in brakes. Japanese Journal of Tribology, 35, 561-567.

Kraichnan, R.H. (1963). Direct-interaction approximation for asystem of several Interacting simple shear waves. The Physics of Fluids, 6(11):1603–1609.

Lallemand, B., Cherki, A., Tison, T., Level, P., (1999). Fuzzy modal finite element analysis of structures with imprecise material properties. Journal of Sound and Vibration, 220 (2), 353–364.

Le Maître. O. P., Knio. O. M., Najm. H. N., Ghanem. R. G, (2001). A stochastic projection method for fluid flow. I. Basic formulation, J. Comput.Phys. 173 (2), 481–511.

Le Maitre. O. P., Knio. M., Najm. H. N., Ghanem. R. G, (2004a). Uncertainty propagation using Wiener-Haar expansions. Journal of computational physics, 197, pp. 28-57.

Le Maitre. O. P., Najm. H. N., Ghanem. R. G., Knio. M, (2004b). Multi-resolution analysis of Wiener –type uncertainty propagation schemes. Journal of computational physics, 197, 502-531.

Lemarié-Rieusset, P. G., (1992). Existence de « function-père » pour les ondelettes à support compact. C.R.A.S, Paris, t. 314, série. I, 17-19.

Liaw, D.G., Yang, H.T.Y., (1993). Reliability and nonlinear supersonic flutter of uncertain laminated plates. AIAA Journal, 31(12), 2304–2311.

Linck, V., (2005). Modélisation numérique temporelle d'un contact frottant:mise en évidence d'instabilités locales de contact- conséquences tribologiques. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Lindsley, N. J., Beran, P. S., Pettit, C. L., (2002a). Effects of uncertainty on nonlinear plate aeroelastic response, in: 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, CO, 2002 AIAA-2002-1271.

Lindsley, N. J., Beran, P.S., Pettit, C. L., (2002b). Effects of uncertainty on nonlinear plate response in supersonic flow, in: Ninth AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Atlanta,GA, 2002 AIAA-2002-5600.

Lindsley. N. J., Beran. P. S, (2005). Increased efficiency in the stochastic interrogation of an uncertain nonlinear aeroelastic system. International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics, Munich, Germany, IF-055, June, 2005.

Liu, J. S., (2001). Monte Carlo Strategies in Scientific Computing,Springer-Verlag.

Liu, W., Belytshko, T., Mani, A., (1986). Probabilistic finite elements for non linar structural dynamics. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 56, 61-86.

Loeven. G. J. A., Witteveen. J. A. S., Bijlz. H, (2007). Probabilistic Collocation: An Efficient Non-Intrusive Approach For Arbitrarily Distributed Parametric Uncertainties. 45th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit 8 - 11 January, Reno, Nevad.

Lofberg. Yalmip 3, 2004. http://control.ee.ethz.ch/ ~joloef/yalmip.msql

Lohner, R.J., (1987). Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. Wiley (Ed), Computer Arithmetic: Scientific Computation and Programming Languages, 255-286.

Lovet. T.E., Monti, A., Ponci, F., (2008). Automatic synthesis of uncertain models for linear circuit simulation: A polynomial chaos theory approach. Simulation Modelling Practice and Theory, 16, 796-816.

Lucor, D., Xiu, D., Su, C. H., Karniadakis, G. E., (2003). Predictability and uncertainty in CFD. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 43, 483–505

Lucor, D., Su, C. H., Karniadakis, G. E., (2004). Generalized polynomial chaos and random oscillators. International Journal for Numerical Method in Engineering, 60, 571–596

Mallat, S., (1989). A theory for multi-resolution signal decomposition: the wavelet representation. IEEE Transaction on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 11 (7), 674-693.

Mallat, S., Hwang, L. H., (1990). Singularity detection and processing with wavelets. Courant Inst. Tech. Rep. No. 549, New York, NY

Mallat, S., (2011). Une exploration des signaux en ondelettes. Les Editions de l'Ecole Polytechnique.

Marsden J.E., McCracken M., (1976). The Hopf Bifurcation and its Applications. New-York Springer-verlag.

Martins, J. A. C., Faria, L. O., Guimaraes, J., (1999). Dynamic surface solutions in linear elasticity with frictional boundary conditions. Friction induced vibration , Chatter, Squeal and Chaos, ASME, 49, 13-32.

Mathelin, L., Hussaini, M.Y., Zang, T.A., 2005. Stochastic approaches to uncertainty quantification in CFD simulations. Numerical Algorithms 38,209–236.

McKay, M. D., Beckman, R. J., Conover, W. J., (1979). A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, Technometrics, 21 (2), 237–240.

Meng, G., Gasch, R., (2000). Stability and stability degree of acracked flexible rotor supported on journal bearings. Journal of Vibration and Acoustics,122, 116-125.

Meslem, N., Ramdani, N., Candau, Y., (2009). Approximation garantie de l'espace d'état atteignable des systems dynamiques continus incertains. Journal Européen des Systèmes Automatisés, 43 (1), 241-266.

Meslem, N., Ramdani, N., Candau, Y., (2008). Interval observers for uncertain nonlinear systems: Application to bioreactors. Proceedings of the 17th World Congress IFAC Control, Seoul, Korea, July 6-11.

Metropolis, N., Ulam, S., (1949). The Monte Carlo Method. Journal of the American Statistical Association, 44, (247), 335-341

Meziane, A., (2007). Apport des analyses numériques temporelles et fréquentielles dans l'étude des instabilités de contact-Validation expérimentale. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Millman. D.R, King, P. I, Beran. P. S, (2005). Airfoil pitch-and-plunge bifurcation behaviour with Fourier chaos expansions. Journal of aircraft, 42. PP, 376-384.

Millman. D.R., King, P. I., Beran. P.S., (2003). A stochastic approach for predicting bifurcation of a pitch and plung airfoil. In: 21st AIAA Applied Aerodynamics Conference, Orlando, FL, USA, Paper no. AIAA-2003-3515.

Millner, N., (1978). An Analysis of Disc Brake Squeal. *SAE*, paper 780332

Misiti, M., Misiti, Y., Oppenheim, G., Poggi, G.M., (1993). Analyse des signaux classiques par décomposition en ondelettes. Revue de statistique appliquée, tome 41, N° 4, pp, 5-32.

Morlet, J., (1983). Sampling theory and wave propagation. NATO ASI, Vol. FI, Issues on acoustics signal/image processing and recognition, ed, C. H. Chen. Berlin, Springr.

Moirot, F., (1998). Etude de la Stabilité d'un Equilibre en Présence de Frottement de Coulomb. Application à l'Etude des Freins à Disque. Mémoire de thèse, Ecole Polytechnique, Student Press.

Moore, R.E., (1966). Interval analysis, Prentic-Hall.

Murlidharan, R. L., (1991). Fuzzy behavior of beams on winkler foundation. Journal of Engineering Mechanics, 117, 1953-1972.

Muscolino, G., Ricciardi, G., Impollonia, N., (2000). Improved dynamic analysis of structures with mechanical uncertainties under deterministic input. Probabilistic Engineering Mechanics,15, 199–212.

Nagy, Z. K., Braatz. R.D, (2006), Distributional uncertainty analysis using power series and polynomial chaos expansions. Journal of Process Control, 17, 229–240.

Nayfeh, A. H., Balachandran, B., (1995). Applied nonlinear dynamics-Analytical, computational and experimental methods. Jhon Wiley&Sons, Inc.

Nedialkov, N., (1999). Computing rigorous bounds on the solution of an initial value problem for an ordinary differential equation. Mémoire de Thèse, Université de Torronto.

Noor, A. K., Starnes, J. H., Peters, J. M., (2001). Uncertainty analysis of stiffened composite panels. Composite Structures, 51, 139-158.

North, M.R., (1971). A Mechanism of Disk Brake Squeal. 14th FISITA Congress, paper 1/9.

Oden, J.T., Martins, J.A.C., (1985). Models and Computational Methods for Dynamic Friction Phenomena. Computer Methods in Applied mechanics and Engineering, 52, 527-634.

Orszagand., S. A., Bissonnette, L. R., (1967). Dynamical properties of truncated Wiener-Hermite expansions. The Physics of Fluids, 10 (12), 2603–2613.

Ouyang, H., Mottershead, D., Brookfield, D., James, S., Cartnell, M., (2000). Methodology for the determination of dynamic instabilities in a car disc brake. International Journal of Vehicle Design, 23(3/4), 241-262.

Papadrakakis, M., Papadopoulos, V., (1999). Parallel solution Methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, (168) 305–320.

Papachristodoulou, A., Prajna, S., (2002). On the construction of Lyapunov function using sum of square decomposition. In proceeding of IEEE Conference On decision and control.

Papachristodoulou, A., Prajna,S., (2005). A Tutorial on Sum of Square Techniques for Systems Analysis. American Control Conference. Proceedings of the 2005, Vol.4.

Parrilo, P. A., (2000). Structured semidefinite programs and semialgebraic geometry methods in robustness and optimization. PhD thesis, California institute of technology.

Petkovski, D. B., (1991). Reduced conservatism in stability analysis of interval matrices. Journal of Optimization Theory and Applications, 70 (3), 597-606.

Pettit. C.L, Beran. P.S, (2004). Polynomial chaos expansion applied to airfoil limit cycle oscillations. In: 45th AIAA/ASME/ASCE/ AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, California, Paper no. AIAA 2004-1691.

Pettit, C.L, Beran, P.S, (2006). Spectral and multi-resolution Wiener expansions of oscillatory stochastic process. Journal of Sound and Vibration 294, 752–779.

Phadke, Madhav S., (1989). Quality Engineering Using Robust Design. A T & T Bell Laboratories, Prentice-Hall.

Poirion, F, (2005). Polynomial chaos representation of parametric uncertainties in aeroelasticity. IFASD 2005, Munich, Allemagne 28 Juin-1 Juillet.

Prajna, S., Papachristodoulou, A., Parrilo, P.A., (2002). Introducing Sostools : A general purpose Sum of Squares Programming Solver. Proceeding of IEEE CDC.

Pulch, R., (2008). Polynomial chaos for analysing periodic processes of differential algebraic equations with random parameters. Special Issue:79th Annual Meeting of the International Association of Applied Mathematics and Mechanics (GAMM), 8(1), 10069-10072.

Qiu, Z., Ma, L., wang, X., (2009). Non-probabilistic interval analysis method for dynamic response analysis of nonlinear systems with uncertainty. Journal of sound and vibration, 319, 531-540.

Ragot, P., (2007). Contribution à la conception robuste en dynamique des systèmes: Application à un système frottant présentant des instabilités de type Sprag-Slip. Mémoire de thèse, Ecole Nationale Supérieure d'Ingénieurs Sud Alsace, UHA.

Ragot. P., Berger. S., Sinou. J.J., Aubry. E, (2008). Interval approach applied to blades of windscreens wiper. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 46 (5), 643-648, ISSN 1311-8080, Academic Publications.

Rauh, A., Ketting, M., Aschemann, H., Hofer, E. P., (2006). Interval methods for simulation of dynamical systems with state dependent switching characteristics. International Conference on Control applications, Munich, 4-6 October.

Rigaud, E., Mayeux, F., Driot, N., Perret-Liaudet, J., (2003). Variabilité des régimes critiques d'une boite de vitesses : Influence des pré-charges de roulements. Mécanique et Industries, 4, 107-112.

Rihm, R., (1994). Interval methods for initial value problems in odes. In Computational mathematics, E. s. (ed); Validated computations: Proceedings of the IMACS-GAMM International Workshop on Validated Computations, Amsterdam, 127-208.

Rubinstein, R. Y., (1981). Simulation and the Monte Carlo Method. JohnWiley and Sons.

Roy, R.V., Spanos, P. D., (1991). Padé-type approach to nonlinear random vibration analysis. Engineering Probabilistic Mechanics, 6, 119-128.

Sarkar, S.,Witteveen, J.A.S., Loeven, A., Bijl, H, (2008). Effect of uncertainty on the bifurcation behaviour of pitching airfoil stall flutter. Journal of Fluids and Structures 25, 304-320.

Shahriari, K., (2007). Analyse de sureté de procédés multi-modes par des méthodes à base d'intervalles. Thèse doctorat, université Joseph Fourier.

Shin, K., Oh, J-E., Brennan, M. J., (2002a). Nonlinear analysis of friction induced vibrations of a two degree of freedom model for disc brake squeal noise. JSME International Journal 45, 426-432.

Shin, K., Brennan, M. J., Oh, J-E., Harris, C. J., (2002b). Analysis of disc brake noise using a two-degree-of-freedom model. Journal of Sound and Vibration 254, 837-848.

Shinozuka, M., Yamazaki, F., (1988). Stochatic Structural Dynamics: Progress in Theory and Applications, Stochastic Finite Element Analysis: an Introduction. Elsevier Applied Sciences, éditeurs: S.T.Ariaratnam, G.I.Schuëller, I.Elishakoff.

Sinclair, D., Manville, N. J., (1955). Frictional vibration. ASME Journal on Applied Mechanics, 22, 207-213.

Singpurwalla, N. D., (1990), Design by decision theory: A unifying perspective on Taguchi's approach to quality engineering . In NSF Design and Manufacturing Systems Grantees Conference, Tempe Arizona, 1990.NSF. In the supplement to the Proceedings.

Sinou, J. J., (2002). Synthèse non-linéaire des systèmes vibrants. Application aux systèmes de freinage. Mémoire de thèse, Ecole Centrale de Lyon.

Sinou, J.J., Jezequel, L., (2004). Methods to reduce Non-Linear Mechanical Systems for instability Computation. Archive of Computational Methods in Enginnering,11(3), 257-334

Sinou. J. J., Dereure. O., Mazet. F., Thouverez. F., Jezequel. L, (2006a). Friction-induced vibration for an aircraft brake system-Part 1: Experimental approach and stability analysis. International Journal of Mechanical Sciences, 48, 536-554.

Sinou. J. J., Thouverez. F., Jezequel. L., Dereure. O., Mazet. F, (2006b). Friction-induced vibration for an aircraft brake system-Part 2: Non-linear dynamics. International Journal of Mechanical Sciences, 48, 555-567.

Slotine, J.J., (1991). Applied nonlinear control. Prentice Hall, INC.

Smith. A. H. C., Monti. A., Ponci.F, (2007). Indirect measurements via a polynomial chaos observer. IEEE Trans. Instrum. Meas. 56, (3), 743–752.

Smith, R. L, (1984). Efficient Monte Carlo procedures for generating points uniformly distributed over bounded regions, Operations Research 32 (1984) 1296–1308.

Spurr, R.T., (1961). A Theory of Brake Squeal. Proceedings of the Institution of mechanical Ingineers, 1, 33-40.

Soize, C., Ghanem, R., (2004). Physical systems with random uncertainties: Chaos representations with arbitrary probability measure. SIAMJ.Sci.Comput.26 (2), 395-410.

Stengel, R. F., Ryan, L., (1991). Stochastic robustness of linear time-invariant control Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 36, pp. 82–87.

Sturm, J.F., (1999). Using SeDumi 1.02, a Matlab toolbox for optimization over symmetric cones. Optimisation Methods and Software, 11-12:625-653, 1999. Available at http://fewcal.kub.nl/sturm/software/sedumi.html .

Sudret. B, (2008). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. Reliability. Engineering System Safety, 93(7), 964-979.

Sudret, B., (2007). Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods, Memoires HDR, Université Blaise Pascal, Clairemont II.

Taguchi, G., (1986). Introduction to Quality Engineering. Asian Productivity Organization.

Thomas, J. P., Dowell, E. H., Hall, K. C., Denegri, C. M., (2005). Further investigation of modeling limit cycle oscillation behavior of the F-16 fighter using a harmonic balance approach, AIAA 2005-1917.

Thompson, S. K., (1992), Sampling.Wiley Interscience.

Tolstoi, D.M., (1967). Significance of the Normal Degree of Freedom and Natural Normal Vibrationsin Contact Friction. Wear, 10, 199-213.

Valliapan, S., Pham, T. D., (1995). Elasto-plastic finite element analysis with fuzzy parameters. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38, 531-548.

Van De Velde, F., De Baets, P., (1998a). A new approach of stick-slip based on quasi-harmonic tangential oscillations.Wear, 216, 15-26.

Van De Velde, F., De Baets, P., (1998b). The relation between friction force and relative speed during the slip-phase of stick-slip cycle. Wear, 219, 220-226.

Venditi,V., (1998). Aspects du principe de maximum d'entropie en modélisation statistique. Memoire de Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Walter, E., Jaulin, L., (1994). Guaranteed characterization of stability domains via set inversion. IEEE Transactions on Automatic Control, 39 (4), 886-889.

Wang, G.Y., OU, J. P ., (1990). Theory of fuzzy random vibration with fuzzy parameters. Fuzzy Set sand Systems, 36, 103-112.

Wan, X., Karniadakis, G., (2005). An adaptive multi-element generalized polynomial chaos method for stochastic differential equations. Journal of computational physic, 209, 617-642.

Wan, X., Karniadakis, G, (2006a). Beyond Wiener–Askey expansions: handling arbitrary PDFs. Journal of Scientific Computing 27, 455–464.

Wan, X., Karniadakis, G., (2006b). Multi-element generalized polynomial chaos for arbitrary probability measures. SIAM J. Scientific Computing, 28, 901-928.

Wiener, N., (1938). The homogeneous chaos. American Journal of Mathematics, 60, 897-936.

Williams, M. M. R., (2006). Polynomial chaos functions and stochastic differential equations. Annals of Nuclear Energy, 33, 774-785.

Witteveen, J. A. S., Loeven, A., Sarkar, S., Bijl, H., (2008). Probabilistic collocation for period 1-limit cycle oscillations. Journal of sound and vibration, 311, 421-439.

Xiu, D., Luckor, D., Su, C-H., Karnadakis, G. E., (2003). Performance Evaluation of Generalized Polynomial Chaos. Springer Verlag.

Xiu, D., Karniadakis, G. E., (2003). Modelling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. Journal of Computational Physics, 187,137-167.

Xiu, D., Karniadakis, G. E, (2002). Modeling uncertainty in steady state diffusion problems via generalized polynomial chaos. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 191, 4927-4948.

Xiu, D.B., Hesthaven,J.S., (2005). High-order collocation methods for differential equations with random inputs. SIAM Journal on Scientific Computing, 27, 1118-1139.

Yedavalli, R. K., (1986). Stability analysis of interval matrices- Another sufficient condition. International Journal of Control, Vol. 43, pp. 767-772.

Yedavalli, R. K., (1987). Stability analysis of linear interval systems- Polynomial matrix approach. Proceedings of the American Control Conference, Ft. Lauderdale, Florida, pp. 1579-1583.

Zachary, W. J.W., (2001). Lyapunov based analysis and controllers synthesis for polynomial systems using sum of squares optimization. PhD thesis, university of California, Berkeley.

Zadeh, L. A., (1965). Fuzzy sets. Information and Control, 8: 338–353.

Zhenyu, L., Qiu, C., (2002). A New approach to fuzzy finite element analysis. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg, 191, 5113-5118.

Liste des publications et communications personnelles

Publications dans des journaux internationaux avec comité de lecture

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Robust Analysis of Uncertain Dynamic Systems: Combination of the Centre Manifold and Polynomial chaos theories. WSEAS Transactions on Systems, Issue 4, Volume 9, pages, 386-395, April 2010.

- Nechak L. Berger S., Aubry E., A Polynomial Chaos Approach to the Robust analysis of the Dynamic Behaviour of Friction Systems. Europeen Journal of Mechanics- A/Solids, 30 (4), 594-607

Publications soumises à des journaux internationaux avec comité de lecture

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Robust Analysis of the Dynamic Behaviour of Nonlinear Friction Systems using a Multi-Element Generalized Polynomial Chaos Approach. (soumis au Journal of Vibration and Acoustics).

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Wiener-Haar Expansion for the Modelling and Prediction of the Dynamic Behaviour of Nonlinear Uncertain Systems (soumis au Journal of Dynamic systems Measurement and Control).

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Non-intrusive generalized polynomial chaos for the stability analysis of uncertain dynamic friction systems (soumis au Journal of Sound and Vibration)

Congrès internationaux avec actes et comité de lecture

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Non-Intrusive Generalized Polynomial Chaos Approach to the Stability Analysis of Uncertain Nonlinear Dynamic Systems. Proceeding of the 8th IEEE International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, SSD11, Sousse, Mars 2011.

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Robust Approach for Limit Cycle Oscillation Analysis in Nonlinear Dynamic Friction Systems. IV European Conference on Computational Mechanics (ECCM2010), Paris, Mai 2010.

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Analyse Robuste du Comportement Dynamique des Systèmes Non Linéaires par la Combinaison des théories de la Variété Centrale et du Chaos Polynomial. 6ième Conférence Internationale Francophone d'Automatique, CIFA 2010, Nancy, 02-04 Juin, 2010.
- Nechak L. Berger S., Aubry E., Stability of nonlinear dynamic friction systems. Premier Colloque International, Dynamique des Systèmes, des matériaux et des Structures, Djerba, Mars 2010.

- Nechak L. Berger S., Aubry E., Uncertainty propagation using Polynomial Chaos and Centre Manifold theories. Proceeding of the Recent Advances in Signal Processing, Robotics and Automation Conference, pages, 46-51, Combridge, February 2010.

Congrès nationaux avec actes et comité de Lecture

- Nechak L., Berger S., Aubry E., Modélisation et prédiction du comportement dynamique des systèmes non linéaires incertains par le chaos de Wiener-Haar. 3ème Journées Identification et Modélisation Expérimentale, Douai, 6-7 Avril 2011.

- Nechak L., Berger S., Aubry E., Analyse robuste du comportement dynamique des systèmes non linéaires frottant par le chaos polynomial multi-élément. 20ième Congrès Français de Mécanique, Besançon, Aout 2011

Annexe A : Calcul de la variété centrale

A.1. Introduction

La méthode de la variété centrale a été présentée dans le deuxième chapitre. La méthode permet de simplifier les systèmes dynamiques non linéaires en exprimant, au voisinage du point de bifurcation de Hopf, les variétés stables en fonction des variétés centrées. Cette fonction est définie solution d'une équation algébrique dont l'obtention passe, à défaut d'obtenir la solution exacte, par l'approximation de la variété centrale par une fonction polynomiale d'un ordre fixé préalablement. L'obtention de cette fonction est discutée dans cette annexe. En effet, l'objectif est de donner l'expression analytique des coefficients de la variété centrale notée *h*. L'étude développée par Sinou (Sinou, 2002) comporte plus de détails sur la méthode de la variété centrale ainsi que son calcul. Nous en avons tiré les éléments importants pour le calcul.

Replaçons-nous dans le cadre générale de la dynamique augmentée (2.39) rappelée ci-dessous.

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c\left(\tilde{\mu}\right) y + F_c\left(y, z, \tilde{\mu}\right) \\ \dot{z} = A_s\left(\mu\right) z + F_s\left(y, z, \tilde{\mu}\right) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \tag{a.1}$$

Considérons, le cas particulier où (a.1) est une dynamique polynomiale possédant des non linéarités quadratiques et cubiques. Par conséquent, elle peut être formulée comme suit :

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c\left(\tilde{\mu}\right) y + \left[G_{(2)}^{ij}\right].v \otimes v + \left[G_{(3)}^{ik}\right].v \otimes v \otimes v \\ \dot{z} = A_s\left(\mu\right) z + \left[H_{(2)}^{ij}\right].v \otimes v + \left[H_{(3)}^{ik}\right].v \otimes v \otimes v \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \tag{a.2}$$

avec $v = \left[y \;\; z \;\; \tilde{\mu}\right]^T$, *y* et *z* désignent respectivement les variétés centrées et les variétés stables. $G_{(2)}^{ij}$, $G_{(3)}^{ik}$, $H_{(2)}^{ij}$ et $H_{(3)}^{ik}$ définissent les coefficients des termes non linéaires quadratiques et cubiques avec $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le \left(n+1\right)^2$ et $1 \le k \le \left(n+1\right)^3$, $\otimes$ désigne le produit de Kronecker.

Pour rappel, le théorème de la variété centrale montre l'existence d'une variété centrale locale de la forme :

$$W_{loc}^{c} = \left\{\left(y, \tilde{\mu}, z\right) / \, z = h\left(y, \tilde{\mu}\right), \left\|y\right\| < \delta, \left\|\tilde{\mu}\right\| < \delta'\right\} \tag{a.3}$$

avec $h\left(0,0\right) = 0, D_{(y,\tilde{\mu})} h\left(0,0\right) = 0$, telle que le système (a.1) se réduit à la dynamique (a,4).

$$\begin{cases} \dot{y} = A_c\left(\tilde{\mu}\right)y + F_c\left(y, h\left(y,\tilde{\mu}\right),\tilde{\mu}\right) \\ \dot{\tilde{\mu}} = 0 \end{cases} \tag{a.4}$$

Le problème se résume à déterminer la fonction *h*, une étape que nous présentons ci-dessous.

A.2. Variété centrale du second ordre

L'expression de la variété centrale *h* est considérée polynomiale du second degré sous la forme générale suivante :

$$z = h\left(y,\tilde{\mu}\right) = a_{200}y_1^2 + a_{110}y_1y_2 + a_{020}y_2^2 + a_{101}y_1\tilde{\mu} + a_{011}y_2\tilde{\mu} + a_{002}\tilde{\mu}^2 \tag{a.5}$$

avec $a_{200}, a_{110}, a_{020}, a_{101}, a_{011}$ et a_{002} les vecteurs inconnus qu'il s'agit de déterminer. Ce sont des vecteurs de dimension *n-2* dont les éléments sont désignés par $a_{k,ijl}$ (avec $i+j+l=2$, $i \in \mathbb{N}^+$, $j \in \mathbb{N}^+$, $l \in \mathbb{N}^+$) relatifs à la $k^{ième}$ variété stable.

L'expression (a.5) vérifie la relation suivante :

$$D_{y,\tilde{\mu}}\left(h^{(1)}\left(y,\tilde{\mu}\right)\right).A_c.y - A_s.h^{(1)}\left(y,\tilde{\mu}\right) - H_2\left(y,\tilde{\mu}\right) = 0 \tag{a.6}$$

Les expressions analytiques des coefficients vérifiant (A.6) sont définies ci-dessous, (Sinou et Jezéquel 2004) :

$$a_{k,200} = \frac{H_{(2)}^{k,1}}{2A_{c_1} - A_{s_k}} \tag{a.7}$$

$$a_{k,110} = \frac{H_{(2)}^{k,2} + H_{(2)}^{k,n+2}}{A_{c_1} + A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.8}$$

$$a_{k,020} = \frac{H_{(2)}^{k,n+3}}{2A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.9}$$

$$a_{k,101} = \frac{H_{(2)}^{k,n+1} + H_{(2)}^{k,n(n+1)+1}}{A_{c_1} - A_{s_k}} \tag{a.10}$$

$$a_{k,011} = \frac{H_{(2)}^{k,2(n+1)} + H_{(2)}^{k,n(n+1)+2}}{2A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.11}$$

$$a_{k,002} = \frac{-H_{(2)}^{k,(n+1)^2}}{A_{s_k}} \tag{a.12}$$

où A_{c_1}, A_{c_2} dénotent les deux termes diagonaux de la matrice diagonale A_c et A_{s_k} le $k^{ième}$ terme de la matrice diagonale A_s.

A.3. Variété centrale du troisième ordre

La fonction *h* est un polynôme du troisième ordre de la forme générale suivante :

$$\begin{aligned} z = h^{(2)}\left(y,\tilde{\mu}\right) = h^{(1)}\left(y,\tilde{\mu}\right) + a_{300}y_1^3 + a_{210}y_1^2y_2 + a_{120}y_1y_2^2 + a_{030}y_3^3 \\ + a_{201}y_1^2\tilde{\mu} + a_{111}y_1y_2\tilde{\mu} + a_{021}y_2^2\tilde{\mu} + a_{102}y_1\tilde{\mu}^2 + a_{012}y_2\tilde{\mu}^2 + a_{003}\tilde{\mu}^3 \end{aligned} \tag{a.13}$$

Les expressions analytiques des coefficients $a_{k,ijl}$ de la $k^{ième}$ variété stable au troisième ordre sont déterminées ainsi :

$$a_{k,300} = \frac{-2a_{k,200}G_{(2)}^{1,1} - a_{k,110}G_{(2)}^{2,1} + H_{(3)}^{k,1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,200}\left(H_{(2)}^{k,2+i} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right)}{3A_{c_1} - A_{s_k}} \tag{a.14}$$

$$a_{k,210} = \frac{\begin{aligned} -2a_{k,200}\left(G_{(2)}^{1,2} + G_{(2)}^{1,n+2}\right) - a_{k,110}\left(G_{(2)}^{1,1} + G_{(2)}^{2,2} + G_{(2)}^{2,n+2}\right) - 2a_{k,020}G_{(2)}^{2,1} + H_{(3)}^{k,2} + H_{(3)}^{k,n+2} \\ + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+1} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,110}\left(H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,200}\left(H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right) \end{aligned}}{2A_{c_1} + A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.15}$$

$$a_{k,120} = \frac{\begin{aligned} -2a_{k,020}\left(G_{(2)}^{2,2} + G_{(2)}^{2,n+2}\right) - a_{k,110}\left(G_{(2)}^{2,n+3} + G_{(2)}^{1,2} + G_{(2)}^{1,n+2}\right) \\ -2a_{k,200}G_{(2)}^{1,n+3} + H_{(3)}^{k,n+3} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+2} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+2} \\ + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,020}\left(H_{(2)}^{k,i+2} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right) + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,110}\left(H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right) \end{aligned}}{A_{c_1} + 2A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.16}$$

$$a_{k,030} = \frac{-2a_{k,020}G_{(2)}^{2,n+3} - a_{k,110}G_{(2)}^{1,n+3} + H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+3} + \sum_{i=1}^{n-2} a_{i,020}\left(H_{(2)}^{k,n+i+3} + H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right)}{3A_{c_2} - A_{s_k}} \tag{a.17}$$

$$a_{k,201}=\frac{\begin{array}{l}-a_{k,101}G_{(2)}^{1,1}-a_{k,011}G_{(2)}^{2,1}-2a_{k,200}\left(G_{(2)}^{1,n+1}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+1}\right)-a_{k,110}\left(G_{(2)}^{2,n+1}+G_{(2)}^{2,n(n+1)+1}\right)\\+H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+1}+H_{(3)}^{k,n(n+1)+1}+H_{(3)}^{k,(n+1)}\\+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,101}\left(H_{(2)}^{k,i+2}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,200}\left(H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)}+H_{(2)}^{k,n(n+1)+i+2}\right)\end{array}}{2A_{c_1}-A_{s_k}} \quad \text{(a.18)}$$

$$a_{k,021}=\frac{\begin{array}{l}-a_{k,101}G_{(2)}^{1,n+3}-a_{k,011}G_{(2)}^{2,n+3}-2a_{k,020}\left(G_{(2)}^{2,2(n+1)}+G_{(2)}^{2,n(n+1)+2}\right)-a_{k,110}\left(G_{(2)}^{1,2(n+1)}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+2}\right)\\+H_{(3)}^{k,(n+1)^2+2(n+1)}+H_{(3)}^{k,2(n+1)^2-n+1}+H_{(3)}^{k,(n+1)^3-2(2n+1)}\\+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,020}\left(H_{(2)}^{k,(i+2)(n+1)}+H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,011}\left(H_{(2)}^{k,2n-1+i}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right)\end{array}}{2A_{c_2}-A_{s_k}}$$

(a.19)

$$a_{k,102}=\frac{\begin{array}{l}-a_{k,200}G_{(2)}^{1,(n+1)^2}-a_{k,110}G_{(2)}^{2,(n+1)^2}-a_{k,101}\left(G_{(2)}^{1,n+1}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+1}\right)-a_{k,011}\left(G_{(2)}^{2,(n+1)}+G_{(2)}^{2,n(n+1)+1}\right)\\+H_{(3)}^{k,(n+1)^2}+H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n+1}+H_{(3)}^{k,(n+1)^3-n}\\+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,101}\left(H_{(2)}^{k,(i+2)(n+1)}+H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,002}\left(H_{(2)}^{k,i+2}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right)\end{array}}{A_{c_1}-A_{s_k}}$$

(a.20)

$$a_{k,012}=\frac{\begin{array}{l}-a_{k,110}G_{(2)}^{1,(n+1)^2}-2a_{k,020}G_{(2)}^{2,(n+1)^2}-a_{k,101}\left(G_{(2)}^{1,2(n+1)}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+2}\right)-a_{k,011}\left(G_{(2)}^{2,2(n+1)}+G_{(2)}^{2,n(n+1)+2}\right)\\+H_{(3)}^{k,2(n+1)^2}+H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+2(n+1)}+H_{(3)}^{k,(n+1)^3-n+1}\\+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,011}\left(H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)}+H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,002}\left(H_{(2)}^{k,2n-1+i}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right)\end{array}}{A_{c_2}-A_{s_k}}$$

(a.21)

$$a_{k,111}=\frac{\begin{array}{l}-a_{k,101}\left(G_{(2)}^{1,2}+G_{(2)}^{1,n+2}\right)-a_{k,110}\left(G_{(2)}^{1,(n+1)}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+1}+G_{(2)}^{1,2(n+1)}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+2}\right)\\ -2a_{k,200}\left(G_{(2)}^{1,2(n+1)}+G_{(2)}^{1,n(n+1)+2}\right)-2a_{k,020}\left(G_{(2)}^{2,n+1}+G_{(2)}^{2,n(n+1)+1}\right)-a_{k,011}\left(G_{(2)}^{22}+G_{(2)}^{2,n+2}\right)\\ +H_{(3)}^{k,2(n+1)}+H_{(3)}^{k,n(n+1)+2}+H_{(3)}^{k,(n+1)^2+n+1}+H_{(3)}^{k,2(n+1)^2-n}+H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n-2}\\ +H_{(3)}^{k,n(n+1)^2+n+2}+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,110}\left(H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)}+H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2}\right)\\ +\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,011}\left(H_{(2)}^{k,(2+i)}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+1}\right)+\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,101}\left(H_{(2)}^{k,2n-1+i}+H_{(2)}^{k,(n+1)(i+1)+2}\right)\end{array}}{A_{c_1}+A_{c_2}-A_{s_k}} \qquad \text{(a.22)}$$

$$a_{k,003}=\frac{a_{k,102}G_{(2)}^{1,(n+1)^2}+a_{k,012}G_{(2)}^{2,(n+1)^2}-H_{(3)}^{k,(n+1)^3}-\sum_{i=1}^{n-2}a_{i,002}\left(H_{(2)}^{k,(n+1)(2+i)}+H_{(2)}^{k,(n+1)n+i+2}\right)}{A_{s_k}} \qquad \text{(a.23)}$$

Annexe B : Programmation SOS via Sostools

B.1. Introduction

L'objectif de cette annexe est de donner quelques éléments sur l'utilisation de la boite à outils Sostools dans le contexte particulier de la construction des fonctions de Lyapunov pour l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires polynomiaux. Tel que présenté dans le deuxième chapitre, la programmation SOS (Sum Of Square Programming) constitue un outil mathématique puissant permettant de résoudre de façon générale des problèmes d'optimisation dont les applications peuvent être diverses. L'avantage principal dans cette approche est relatif essentiellement à l'existence de supports logiciels permettant une systématisation intéressante de résolution. Nous y présentons donc la boite à outils Sostools.

B.2. Présentation du Logiciel Sostools

Sostools est une boite à outils conçue sous Matlab, (Prajna et al, 2002). Elle peut être utilisée pour résoudre deux types de programmes SOS : des problèmes d'optimisation et des problèmes de réalisabilité dont les formes générales ont été définies dans le deuxième chapitre.

Les programmes SOS sont traités en les reformulant sous forme de programmes semi définis (SDP, pour semi definite programming) qui sont résolus efficacement en utilisant les méthodes du point intérieur. Bien que la conversion des programmes SOS en des programmes SDP soit manuellement possible pour des problèmes de petite taille, elle est très difficile dans le cas général. Il est alors nécessaire de pouvoir l'automatiser en utilisant des supports logiciels. C'est, en effet, l'objet principal de la boite à outils Sostools. Cette dernière permet de systématiser la transformation d'un programme SOS en un problème de programmation semi défini, de faire appel au solveur des problèmes SDP et enfin de récupérer la solution du problème SOS original. Le schéma suivant synthétise toutes ces étapes.

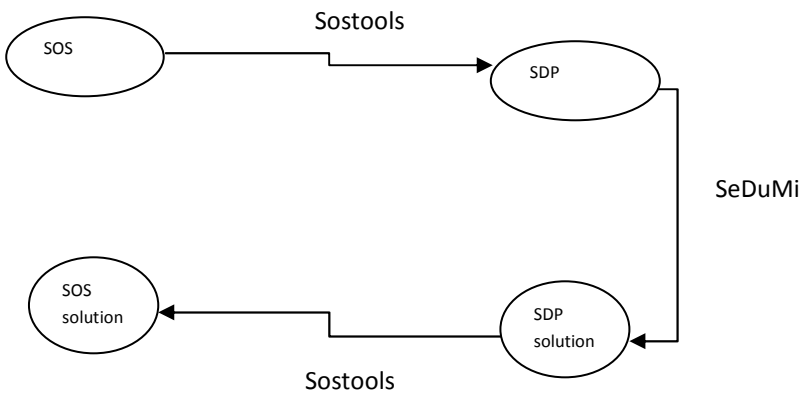


Fig.B. 1. Schéma de résolution des programmes SOS

B.2.1. Programme semi défini

Compte tenu de la relation étroite liant la programmation SOS à la programmation semi définie, quelques définitions relatives à ce dernier concept sont énoncées, (Parillo, 2000).

Définition B.1 : Une matrice M carrée, symétrique est positive semi définie (PSD) si et seulement si : $x^T Mx \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ c'est-à-dire que toutes les valeurs propres de la matrice M sont non négatives. La notation $M \geq 0$ est souvent utilisée pour désigner que M est positive semi définie.

Définition B.2 : Fondamentalement la programmation semi définie (SDP pour son abréviation anglaise) peut être considérée comme étant l'extension de la programmation linéaire au cas matriciel : les contraintes sur les variables de décision dans un programme linéaire sont remplacées par un cône de matrices positives semi définies dans un programme semi défini.

Définition B.3 : Un programme semi défini est un problème d'optimisation d'une fonctionnelle (fonction objectif) sur un ensemble admissible, défini par l'intersection d'un sous espace affine avec un cône formé par des matrices positives semi définies.

La forme primale d'un programme semi défini est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} &\min(C \bullet X) \\ &Sujet\ \ à \quad \begin{array}{c} A_i \bullet X = b_i, i = 1, 2, \ldots, q \\ X \geq 0 \end{array} \end{aligned} \tag{b.1}$$

où $X \in S^n$ dénote les variables de décision, $A_i, C \in S^n$ et $b \in \mathbb{R}^q$ sont les données du problème. Avec S^n désigne l'ensemble constitué des matrices symétriques et $C \bullet X$ désigne la trace du produit matriciel CX .

Le tableau (B.1) suivant illustre le fait qu'un programme semi défini constitue effectivement une généralisation d'un programme linéaire.

	Programme linéaire (LP)	Programme semi défini (SDP)
Programme primal	$\min(c^T x)$ $Ax = b$ $sà \quad x \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ $, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$	$\min(C \bullet X)$ $A_i \bullet X = b_i$ $sà$ $X \geq 0 \quad X \in S^n$

Tab.B. 1. Niveau de généralité d'un programme semi défini par rapport à un programme linéaire

Dans la version originale de Sostools, les polynômes sont implémentés uniquement comme étant des objets symboliques ce qui permet l'utilisation complète des capacités de la boite à outils du calcul symbolique de Matlab. Ceci étant donne à l'utilisateur la possibilité de faire toutes les opérations possibles sur les polynômes telles que les opérations arithmétiques, la différentiation, l'intégration etc.

Pour installer Sostools, il est nécessaire de disposer de :

- Matlab, à partir de version 5.
- SeDuMi. C'est un logiciel mis en œuvre pour résoudre des problèmes de programmation semi définie (Sturm, 1999).

B.3. Solution des programmes SOS

Pour définir et résoudre un programme SOS sous Sostools, il suffit de parcourir les étapes suivantes :

1. Initialiser un programme SOS et déclarer les variables du problème.
2. Définir les contraintes du programme
3. Définir la fonction objective (pour les problèmes d'optimisation)
4. Faire appel au solveur
5. Déterminer les solutions

Le tableau suivant englobe les étapes essentielles à parcourir pour résoudre un problème de programmation SOS. Chacune des cinq étapes précédentes lui correspond une instruction bien précise dans Sostools. Le tableau (B.2) suivant fait état de cette correspondance.

Etape	**Instruction**
Initialiser le programme SOS	Sosprogram
Définir les contraintes du programme SOS	sosineq (pour les inéquations) et soseq (pour les équations
Définir la fonction objective	Sossetobject
Appel du logiciel de résolution SDP	Sossolve
Conversion de la solution	Getsossol

Tab.C. 1. Instructions fondamentales pour la construction et la résolution d'un programme SOS

B.3.1. Construction de fonction de Lyapunov via Sostools

Considérons le problème de construire une fonction de Lyapunov $V(x)$ pour le système dynamique polynomial décrit dans l'espace de phase à deux dimensions par :

$$\dot{x} = f(x) \tag{b.2}$$

où *f* est une champ de vecteur non linéaire polynomial et $x = [x_1 \ x_2]^T \in \mathbb{R}^2$.

La construction de la fonction $V(x)$ se faisant sous Matlab en utilisant le calcul symbolique, les variables x_1 et x_2 doivent être déclarées et définies en tant que variables réelles.

L'étape 1, se traduit par l'initialisation d'un programme SOS dont font partie les variables d'état du système, (Papachristodoulou et Prajna, 2002).

1. Prog = sosprogram (*x*)

L'étape 2 consiste à définir la fonction de Lyapunov à construire en tant que polynôme SOS du programme. Les monômes constituant la fonction peuvent être imposés.

2. Prog = sospolyvar (Prog, $\left[x_1^2, x_1x_2, x_2^2\right]$, 'wscoeff')

Wscoeff dénote les coefficients de la fonction de Lyapunov recherchée.

Dans l'étape 3, il s'agit de définir les contraintes du programme SOS. Ces dernières concernent la fonction de Lyapunov à construire. Une première contrainte est utilisée pour garantir à $V(x)$ le fait d'être strictement définie positive. La deuxième concerne la dérivée $\dot{V}(x)$ qui doit être définie négative.

3. Prog = sosineg (Prog, $V-\left(x_1^2+x_2^2\right)$) , Prog = sosineg (Prog, $-\dfrac{\partial V(x)}{\partial x} f(x)$).

Toutes les contraintes étant définies, l'étape 4 fait appel à l'algorithme de résolution. Le programme est problème de réalisabilité (feasibility) puisqu'il n'y a pas de fonction à optimiser.

4. Prog = sossolve (Prog)

Enfin, la fonction de Lyapunov construite est affichée via l'étape 5,

5. Solution = sosgetsol (Prog, V)

Le parcours des étapes (1-5) à permis de construire des fonctions de Lyapunov pour le système (4.11) correspondant aux intervalles [0.1, 0.2], [0.2, 0.28]. Ces fonctions sont données respectivement par les expressions (B.3) et (B.4).

$$\begin{aligned}V_2(\bar{x}) = {} & 0.27\bar{x}_{11}^2 + 0.22\bar{x}_{13}^2 - 0.06\bar{x}_{11}\bar{x}_{13} + 0.22\bar{x}_{12}^2 + 1.24\bar{x}_{30}^2 + 1.23\bar{x}_{31}^2 + 1.23\bar{x}_{32}^2 + 1.21\bar{x}_{33}^2 - 0.11\bar{x}_{10}\bar{x}_{30} \\ & - 0.11\bar{x}_{10}\bar{x}_{30} + 0.01\bar{x}_{12}\bar{x}_{30} - 0.02\bar{x}_{10}\bar{x}_{31} - 0.08\bar{x}_{11}\bar{x}_{31} + 0.01\bar{x}_{13}\bar{x}_{31} - 0.05\bar{x}_{30}\bar{x}_{31} + \\ & 0.01\bar{x}_{10}\bar{x}_{32} - 0.07\bar{x}_{12}\bar{x}_{32} - 0.04\bar{x}_{31}\bar{x}_{32} - 0.03\bar{x}_{12}\bar{x}_{33} - 0.07\bar{x}_{13}\bar{x}_{33} - 0.03\bar{x}_{32}\bar{x}_{33} + 1.23\bar{x}_{33}^2\end{aligned} \tag{b.3}$$

$$\begin{aligned}V_3(\bar{x}) = {} & 1.07\bar{x}_{31}^2 + 1.05\bar{x}_{33}^2 - 0.04\bar{x}_{31}\bar{x}_{30} - 0.03\bar{x}_{33}\bar{x}_{32} - 0.07\bar{x}_{10}\bar{x}_{12} + 1.08\bar{x}_{30}^2 + 0.27\bar{x}_{11}^2 + 0.01\bar{x}_{30}\bar{x}_{12} \\ & - 0.14\bar{x}_{30}\bar{x}_{10} - 0.06\bar{x}_{11}\bar{x}_{13} - 0.09\bar{x}_{32}\bar{x}_{12} + 0.01\bar{x}_{32}\bar{x}_{10} + 0.22\bar{x}_{13}^2 - 0.01\bar{x}_{31}\bar{x}_{10} - 0.11\bar{x}_{31}\bar{x}_{11} + \\ & - 0.01\bar{x}_{31}\bar{x}_{13} + 1.07x_{32}^2 + 0.22\bar{x}_{12}^2 + 0.37\bar{x}_{10}^2 - 0.004\bar{x}_{32}\bar{x}_{31} + -0.02\bar{x}_{33}\bar{x}_{12} + 0.01\bar{x}_{33}\bar{x}_{11} - 0.09\bar{x}_{33}\bar{x}_{13}\end{aligned} \tag{b.4}$$

Annexes C : Intégration numérique

C.1. Introduction

L'objectif de cette annexe est de donner un aperçu sur les méthodes d'intégration numériques les plus répandues. On se penche particulièrement sur les méthodes de collocation Gauss par lesquelles les projections dans la base du chaos polynomial sont calculées.
Le principe directeur d'une méthode d'intégration d'une fonction *f* continue sur un intervalle borné $[a,b]$ est de l'approximer par une somme finie. L'erreur d'approximation dépend catégoriquement des critères utilisés pour parcourir ou subdiviser l'intervalle d'intégration et pour choisir les coefficients intervenant dans la somme. Ces critères définissent globalement deux classes de méthode à savoir les méthodes composées dans lesquelles la fonction *f* est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision et les méthodes de Gauss fondées sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

Définition 1.c. L'intégrale *I* d'une fonction *f* continue sur $[a,b]$ est approximé en subdivisant l'intervalle d'intégration en un nombre fini, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, et en approchant f par la somme finie de la forme :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i) \tag{c.1}$$

Définition 2.c. Une méthode d'intégration est dite d'ordre *k* si l'erreur *e(f)* de l'approximation de l'intégrale définie par (c.1) est nulle lorsque *f* est un polynôme de degré inférieur ou égal *k+1*.

$$e(f) = \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} c_i f(x_i) \tag{c.2}$$

C.2. Intégration numérique en utilisant les polynômes d'interpolation

C.2.1. Méthode des trapèzes

Soit *f* une fonction continue et dérivable sur [*a, b*] et $a = x_0 < x_1 < \cdots x_{n-1} < x_n = b$ une subdivision régulière de l'intervalle [*a, b*]. On note h le pas de la subdivision.

La méthode des trapèzes procède en remplaçant la fonction f sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ par la droite joignant les points $(x_i, f(x_i))$ et $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, soit :

$$h(x)=\frac{(x-x_i)\,f(x_{i+1})-(x-x_{i+1})\,f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} \qquad x\in[x_i,x_{i+1}] \tag{c.3}$$

La méthode des trapèzes permet d'approximer (c.1) comme suit :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1}(x_{i+1}-x_i)\frac{f(x_i)+f(x_{i+1})}{2} \tag{c.4}$$

Lorsque la subdivision se réduit à sa plus simple expression, $x_0=a$, $x_1=b$, l'approximation (c.4) devient :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big) \tag{c.5}$$

La méthode des trapèzes est une méthode d'ordre 1. L'erreur dans la méthode des trapèzes est donnée par l'expression suivante :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-S\right| \le \frac{1}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}\sup_{x\in[a,b]}\left|f''(x)\right| \tag{c.6}$$

où la somme S est donnée comme suit :

$$S=\frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right) \tag{c.7}$$

Pour améliorer la précision, la formule des trapèzes corrigée suivante est utilisée :

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right)-\frac{h^2}{12}\big(f'(b)-f'(a)\big) \tag{c.8}$$

C.2.2. Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à remplacer la fonction f par un polynôme du second ordre définissant un arc de parabole passant par les points $\big(x_i,\,f(x_i)\big)$, $\big(x_{i+1},\,f(x_{i+1})\big)$, $\big(x_{i+2},\,f(x_{i+2})\big)$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{6}(x_{i+1}-x_i)\left(f(x_{i+1}) + f(x_i) + 4f\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}\right)\right) \tag{c.9}$$

La technique de Simpson est une méthode d'ordre 4. L'erreur d'approximation est estimée comme suit :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - S\right| \le \frac{1}{2880}\frac{(b-a)^5}{n^4}\sup_{x\in[a,b]}\left|f^{(5)}(x)\right| \tag{c.10}$$

S étant la somme qui approche l'intégrale de f et qui s'exprime par :

$$S = \frac{h}{2}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f(a+ih) + f(a+(i+1)h) + 4f\left(a+ih+\frac{h}{2}\right)\right) \tag{c.11}$$

C.2.3. Intégration numérique en utilisant les polynômes orthogonaux (méthodes de Gauss)

Les méthodes d'intégration de Gauss utilisent une subdivision particulière de l'intervalle d'intégration. En effet, elles considèrent les points x_i comme étant les racines d'une famille de polynômes orthogonaux. Ces points ne sont pas régulièrement espacés contrairement à ceux considérés par les méthodes présentées précédemment. Tout d'abord, quelques notions relatives à la propriété d'orthogonalité sont rappelées.

C.2.3.1. Produits scalaires

Soit *E* un espace vectoriel réel.

Définition 3.c. Un produit scalaire sur *E* est une application

$$\begin{aligned} E\times E &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \langle x,y\rangle \end{aligned}$$ qui vérifie :

a. $\langle x,x\rangle \ge 0, \forall x\in E \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=0$
b. $\forall x,y\in E, \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$
c. $\forall x,y,z\in E, \forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, \langle \alpha x+\beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$

E est dit dans ces cas là Euclidien.

Sur l'espace des fonctions continues $C([a,b]) = \{ f : [a,b]\to\mathbb{R}\}$, le produit scalaire est défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx \tag{c.12}$$

Définition 4.c. Une norme sur un espace vectoriel réel E est une application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}^+$ telle que :

a. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
b. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)
c. $\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

Sur $\mathbb{R}^n$, les expressions suivantes définissent des normes :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \tag{c.13}$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad , \ p \geq 1 \tag{c.14}$$

$$\|x\|_\infty = \max\left(|x_1|, ..., |x_n|\right) \tag{c.15}$$

C.2.3.2. Familles orthogonales

Dans cette section on considère encore un espace Euclidien $(E, \langle , \rangle)$.

Définition 3.C. Un ensemble de vecteurs $\{v_1, ..., v_p\} \subset E$ est une famille orthogonale si les v_i sont orthogonaux entre eux. La famille est dite orthogonale. Si de plus, les v_i sont unitaires (i.e de norme égale à 1) alors la famille des v_i est dite orthonormée. De façon formelle, une famille de vecteurs $\{v_1, ..., v_p\} \subset E$ est orthonormale si et seulement si :

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \text{ , pour } i, j=1,\ldots,p$$

Où δ_{ij} est le delta de Kronecker défini par :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ si \ i = j \\ 0 \ si \ i \neq j \end{cases}$$

La définition 3.C est valable pour l'espace de fonctions continues $C([a,b]) = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \}$. Il existe plusieurs familles de fonctions polynomiales orthogonales. Quelques exemples sont donnés ci-dessous.

C.2.3.2.1. Les Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite monodimensionnels d'ordre n sont des fonctions vérifiant la forme récursive

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x) \tag{c.16}$$

avec $H_0(x) = 1$ et $H_1(x) = 2x$

La fonction de poids correspondant aux polynômes d'Hermite est donnée par $W(x) = e^{-x^2}$ définie sur $]-\infty, +\infty[$.

L'orthogonalité des polynômes d'Hermite se traduit par la propriété suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}\, 2^n n! \delta_{n,m} \tag{c.17}$$

Pour améliorer la précision des calculs, les polynômes d'Hermite peuvent être normalisés en posant :

$$\tilde{H}_n(x) = \frac{H_n(x)}{\sqrt{2^n n!}} \tag{c.18}$$

La forme de récurrence correspondant aux polynômes $\tilde{H}_n$ est alors donnée par :

$$\tilde{H}_{n+1}(x) = x \tilde{H}_n(x) \sqrt{\frac{2}{n+1}} - \tilde{H}_{n-1}(x) \sqrt{\frac{n}{n+1}} \tag{c.19}$$

avec $\tilde{H}_0(x) = 1$ et $\tilde{H}_0(x) = \sqrt{2}x$

Conséquence de la normalisation,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{H}_n(x) \tilde{H}_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \delta_{n,m} \tag{c.20}$$

C.2.3.2.2. Polynôme de Legendre

Les polynômes de Legendre d'ordre *n* sont définis par la relation de récurrence suivante :

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1)xL_n(x)-nL_{n-1}(x) \tag{c.21}$$

avec $L_0(x)=1,\ L_1(x)=x$

La fonction poids est $W(x)=1$ sur l'intervalle *[-1, 1]*. Le produit scalaire :

$$\langle L_n, L_m\rangle=\int_{-1}^{1}L_n(x)L_m(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{n,m} \tag{c.22}$$

Un procédé de normalisation (similaire à celui effectué sur les polynômes d'Hermite), conduit à une nouvelle relation de récurrence sur les polynômes $\tilde{L}_n$:

$$\tilde{L}_{n+1}(x)=\frac{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}{n+1}x\tilde{L}_n(x)-\frac{n}{n+1}\sqrt{\frac{2n+3}{2n-1}}\tilde{L}_{n-1}(x) \tag{c.23}$$

avec $\tilde{L}_0(x)=1$, $\tilde{L}_1(x)=\sqrt{3}x$. Les polynômes $\tilde{L}_n$ vérifient la propriété suivante :

$$\int_{-1}^{1}\tilde{L}_n(x)\tilde{L}_m(x)dx=2\delta_{n,m} \tag{c.24}$$

C.2.3.2.3. Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre d'ordre n sont définis par la relation de récurrence :

$$(n+1)L_{n+1}(x)=(2n+1-x)L_n(x)-nL_{n-1}(x) \tag{c.25}$$

avec $L_0(x)=1$, $L_1(x)=1-x$

La fonction de poids liée aux polynômes de Laguerre est définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par $W(x)=e^{-x}$ et le produit scalaire correspondant est donné par :

$$\int_{0}^{+\infty}L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx=\delta_{n,m} \tag{c.26}$$

C.2.3.3. Intégration de Gauss-Hermite

Les polynômes d'Hermite forment une base orthogonale sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ par rapport à la fonction de pondération $W(x)=e^{-x^2}$. Ils permettent de calculer une approximation de l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} f(x)e^{-x^2}dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{c.27}$$

L'erreur d'approximation est donnée par :

$$\varepsilon = \frac{(n+1)!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c) \tag{c.28}$$

C.2.3.4. Intégration de Gauss-Legendre

Lorsque la famille de polynômes orthogonaux est la famille des polynômes de Legendre relative à la fonction de pondération $W(x)=1$ sur l'intervalle [-1, 1], l'intégrale est approchée par la formule

$$\int_{-1}^{+1} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + \varepsilon \tag{c.29}$$

où les nombres w_i sont donnés par :

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{i=0}^{n} \left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right) dx \tag{c.30}$$

et les x_i sont les racines du polynôme de Legendre L_{n+1}. L'erreur s'exprime par :

$$\varepsilon = \frac{2^{2n+3}\left[(n+1)!\right]^4}{(2n+3)\left[(2n+2)!\right]^3} f^{(2n+2)}(c)\ ,\ c \in [-1, 1] \tag{c.31}$$

C.2.3.5. Intégration de Gauss-Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont orthogonaux sur l'intervalle $[0,\infty[$ relativement à la fonction de pondération $W(x)=e^{-x}$. Ils permettent de calculer une approximation de l'intégration :

$$\int_{0}^{\infty} f(x)e^{-x}dx \simeq \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{c.32}$$

L'erreur est donnée par : $$\varepsilon = \frac{\left[(n+1)!\right]^2}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c)$$

Remarque 1.c : Le cas traité dans cette thèse est celui d'une incertitude monodimensionnel. Seuls les polynômes (de Legendre, Laguerre, Hermite) d'une seule variables ont été présentés dans cette annexe. Les polynômes multi variables peuvent être obtenus par tensorisation des polynômes monodimensionnel.

Annexe D : Estimation par Intervalle de Confiance

D.1. Introduction

L'objectif de cette annexe est de rappeler quelques éléments essentiels sur l'utilisation des intervalles de confiance en tant qu'outils pertinents permettant de donner des informations concernant la précision des estimations statistiques. Un certain nombre de définitions est énoncée dans cette perspective.

D.2. Estimation par intervalle de confiance

L'estimation par intervalle d'un paramètre inconnu θ consiste à calculer, à partir d'un estimateur choisi $\hat{\theta}$, un intervalle dans lequel il est vraisemblable que la valeur correspondante du paramètre s'y trouve, (Baillargeon, 1990).

Définition D.1 : L'intervalle de confiance est défini par deux limites auxquelles est associée une certaine probabilité $\Pr$, fixée à l'avance et aussi élevée qu'on le désire, de contenir la valeur vraie du paramètre :

$$\Pr\left(l_i \leq \theta \leq l_s\right) = \Pr\left(\hat{\theta} - k \leq \theta \leq \hat{\theta} + k\right) = 1 - \alpha \qquad \text{(d.1)}$$

où,

- l_i : limite inférieure de l'intervalle de confiance.
- l_s : limite supérieure de l'intervalle de confiance.
- $1-\alpha$: la probabilité associée à l'intervalle d'encadrer la vraie valeur du paramètre.
- k : quantité qui tient compte des fluctuations d'échantillonnage de l'estimateur $\hat{\theta}$ et de la probabilité $1-\alpha$.

L'intervalle de confiance signifie que, si nous répétons l'expérience un grand nombre de fois dans $100(1-\alpha)$ cas sur 100, l'intervalle recouvre la vraie valeur du paramètre.

Remarques D.1 :

1. L'intervalle de confiance est un intervalle aléatoire. En effet, les limites de l'intervalle sont des variables aléatoires, fonctions des observations de l'échantillon.

2. La quantité α représente la probabilité complémentaire et correspond au risque qu'à l'intervalle de ne pas contenir la vraie valeur du paramètre. Si on affirme que θ est compris dans l'intervalle $[l_i \ l_s]$, on ne se trompera, en moyenne, que 100α sur 100.
3. La quantité $1-\alpha$ lorsqu'elle est exprimée en pourcentage s'appelle le niveau de confiance de l'intervalle.

D.2.1. Estimation d'une moyenne par intervalle de confiance

On se propose d'estimer, par intervalle de confiance, la moyenne θ d'un caractère mesurable d'une population. On obtient cet intervalle en calculant les deux limites auxquelles est associée une certaine assurance de contenir la valeur de θ. Cet intervalle se définit par l'expression (d.1) et les limites prendront, après le calcul de l'estimation $\hat{\theta}$, la forme suivante :

$$\hat{\theta}-k \leq \theta \leq \hat{\theta}+k$$

où *k* sera déterminée à l'aide de l'écart type de la distribution de $\hat{\theta}$ et du niveau de confiance $1-\alpha$ choisi a priori.

Le cas où la variance σ^2 de la population étudiée est inconnue, un échantillon de taille $N \geq 30$ permet, d'après le théorème central limite, de considérer que $\hat{\theta}$ suit approximativement une loi normale. Dans ce cas, la constante *k* est déterminée par :

$$k = z_{\alpha/2} . \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \qquad \text{(d.2)}$$

où $z_{\alpha/2}$ désigne la valeur de la variable normale centrée réduite telle que la probabilité que Z soit comprise entre $-z_{\alpha/2}$ et $z_{\alpha/2}$ est égale à $1-\alpha$, Z étant défini par : $Z = \dfrac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma/\sqrt{N}}$.

D.2.2. Estimation d'une proportion par intervalle de confiance

L'intervalle de confiance associé à l'estimation de P_r, la proportion d'éléments possédant un certain caractère qualitatif dans une population, ayant un niveau de confiance $100(1-\alpha)\%$ de contenir la valeur vraie de P_r est, dans le cas où $NP_r \geq 5$ et $N(1-P_r) \geq 5$, donné par :

$$\hat{P}_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}_r\left(1-\hat{P}_r\right)}{N}} \leq P_r \leq \hat{P}_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}_r\left(1-\hat{P}_r\right)}{N}} \qquad \text{(d.3)}$$

où $\hat{P}_r$ représente la valeur estimée de la proportion P_r sur l'échantillon de taille N .

- **Marge d'erreur associée à l'estimation de la proportion**

Comme la valeur estimée $\hat{P}_r$ est sujette à des fluctuations d'échantillonnage, il existera pratiquement toujour un écart entre la valeur observée $\hat{P}_r$ et la valeur réelle P_r . Cet écart en valeur absolue constitue la marge d'erreur dans l'estimation de P_r . Pour un niveau de confiance $100(1-\alpha)\%$, la marge d'erreur *e* sera déterminée par :

$$\left|P_r - \hat{P}_r\right| \leq z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{P}_r\left(1-\hat{P}_r\right)}{N}} = e \qquad \text{(d.4)}$$

La formule précédente peut être exploitée pour déterminer le nombre minimal de tirages nécessaires pour avoir une marge d'erreur désirée e et un niveau de confiance $100(1-\alpha)\%$. Celui-ci est donné par :

$$N = \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{P}_r\left(1-\hat{P}_r\right)}{e^2} \qquad \text{(d.5)}$$

Liste des figures

Fig.0. 1. Cycle en V de l'ingénierie système 1
Fig.1. 1. Expérience du plan incliné 7
Fig.1. 2. Illustration du cône de frottement de Coulomb 8
Fig.1. 3. (a) Premier modèle du Stick-Slip- (b) Déplacement en fonction du temps 10
Fig.1. 4. (a) Deuxième modèle du Stick-Slip- (b) Déplacement en fonction du temps 11
Fig.1. 5. Exemple de système développant le Sprag-Slip 12
Fig.1. 6. Modèle de Hoffman à deux degrés de liberté 13
Fig.1. 7. Evolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système (1.4) en fonction de μ 14
Fig.2. 1. Schématisation des types de stabilité : (a) stabilité ISL – (b) stabilité asymptotique 36
Fig.2. 2. Schématisation des espaces : centré, stable et instable 37
Fig.2. 3. La stabilité des systèmes non linéaires suivant la méthode indirecte de Lyapunov 39
Fig.2. 4. Schématisation des espaces locaux : centré, stable et instable 41
Fig.2. 5. (a) Cycle limite stable – (b) cycle limite instable 56
Fig.3. 1. Schéma récursif de Mallat 89
Fig.3. 2. (a)- Ondelette de Haar, (b)- fonction d'échelle de Haar 90
Tab.3. 3. Coefficients d'approximation et de détails du signal X 93
Fig.3. 3. Décomposition du signal X par les ondelettes de Haar 93
Fig.3. 4. Fonctions de Fourier multipliées par une gaussienne 98
Fig.4. 1. Système à deux degrés de liberté d'Hultén 101
Fig.4. 2. Evolution des parties réelles et imaginaires des valeurs propres du système (4.5) en fonction du coefficient de frottement. (a) parties réelles, (b) partie imaginaire 107
Fig.4. 3. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 110
Fig. 4.4. Variance instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 111
Fig.4. 5. Réalisation du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à μ = 0.05 111
Fig.4. 6. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ en utilisant la chaos polynomial généralisé et la méthode de Monte Carlo 112
Fig.4. 7. Variance instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ en utilisant la chaos polynomial généralisé et la méthode de Monte Carlo 112
Fig.4. 8. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée dans les bases de Legendre et de Hermite 114
Fig.4. 9. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée dans les bases de Legendre et de Hermite 115
Fig.4. 10. Réalisation dans les base d'Hermite et de Legendre du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à $\mu = 0.05$ 115
Fig.4. 11. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar 117
Fig.4. 12. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar 118

Fig.4. 13. Réalisation du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à μ = 0.02 118
Fig.4. 14. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar et par la méthode de MC 119
Fig.4. 15. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le développement de Wiener-Haar et par la méthode de MC 119
Fig.4. 16. Evolution de l'erreur moyenne des moindres carrés en fonction de l'ordre du chaos polynomial chaos avec *N = 10,000* 123
Fig.4. 17. Reconstruction des parties réelles des valeurs propres avec la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC 124
Fig.4. 18. Distributions des parties réelles des valeurs propres estimées par la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC..... 124
Fig.4. 19. Reconstruction des parties imaginaires des valeurs propres par la technique NISP, comparaison avec la méthode de MC..... 125
Fig.4. 20. Etude de convergence par rapport au nombre de calculs dans la méthode de régression ... 127
Fig.4. 21. Etude de convergence par rapport à l'ordre du chaos polynomial de Legendre calculé par la technique de régression 128
Fig.4. 25. Proportion de stabilité correspondant aux paramètres d'amortissement et au coefficient de frottement uniforme sur [0, 0.5] estimée par le modèle chaos polynomial de Legendre (4.17).. 135
Fig.4. 26. Proportion de stabilité correspondant aux paramètres d'amortissement et au coefficient de frottement uniforme sur [0, 0.5] estimée par la méthode de MC 136
Fig.4. 27. Deux réalisations du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ 139
Fig.4. 28. Valeurs moyennes instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 141
Fig.4. 29. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 142
Fig.4.30. Histogramme instantané du déplacement X_1 142
Fig.4. 31. Réalisations du déplacement X_1 pour différentes valeurs du coefficient de frottement 143
Fig.4. 32. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3..... 143
Fig.4. 33. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315..... 144
Fig.4. 34. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33..... 144
Fig.4. 35. Densité de probabilité des amplitudes du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 145
Fig.4. 36. Intervalle de confiance à 95% de la valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 146
Fig.4. 37. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 147
Fig.4. 38. Variances instantanées du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 147
Fig.4. 39. Intervalle de confiance à 95% pour la valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 ... 148
Fig.4. 40. Histogrammes instantanés du déplacement X_1 par les techniques non intrusives, intrusive et Monte Carlo..... 149
Fig.4. 41. Réalisations du déplacement X_1 via les techniques non intrusives, intrusive et par l'intégration déterministe 149
Fig.4. 42. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = *0.3* via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe..... 150

Fig.4. 43. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = *0.315* via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe 150
Fig.4. 44. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 via les techniques non intrusives, intrusive et l'intégration déterministe 151
Fig.4. 45. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par les techniques non intrusives, intrusives et Monte Carlo 151
Fig.4.46. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par les techniques non intrusives, intrusives et Monte Carlo 153
Fig.4. 47. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de régression utilisant Monte Carlo et les zéros des polynômes orthogonaux 155
Fig.4. 48. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de régression utilisant Monte Carlo et les zéros des polynômes orthogonaux 155
Fig.4. 49. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de projection non intrusive (collocation) sur l'intervalle temporelle [0, 10] 157
Fig.4. 50. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par la technique de projection non intrusive (collocation) sur l'intervalle temporelle [0, 10] 158
Fig.4. 51. Réalisation du déplacement X_1 par la technique de projection non intrusive (collocation) et l'intégration déterministe, correspondant à μ = 0.33 159
Fig.4. 52. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1] 160
Fig.4. 53. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos polynomial de Legendre et le chaos multi-éléments via la technique de projection non intrusive 162
Fig.4. 54. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos polynomial de Legendre et le chaos multi-éléments via la technique de projection non intrusive 162
Fig.4. 55. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = *0.3* par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 163
Fig.4. 56. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 164
Fig.4. 57. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 164
Fig.4. 58. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 165
Fig.4. 59. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 165

Fig.4. 60. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par l'intégration déterministe 166
Fig.4.61. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) et par Monte Carlo..... 166
Fig.4. 62. Variance instantanée du déplacement estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de projection non intrusive (collocation) avec différents ordres de troncation..... 167
Fig.4. 63. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de régression 169
Fig.4. 64. Variance instantanée du déplacement X_1 estimée par le chaos de Legendre multi-éléments via la technique de régression..... 169
Fig.4. 65. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe..... 170
Fig.4. 66. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe..... 170
Fig.4. 6.7 Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = *0.33* par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe..... 171
Fig.4. 68. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe 171
Fig.4. 69. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe 172
Fig.4. 70. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et par l'intégration déterministe 172
Fig.4.71. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et Monte Carlo..... 173
Fig.4. 72. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Wiener-Haar via Monte Carlo et par l'intégration déterministe..... 177
Fig.4. 73. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Wiener-Haar via Monte Carlo et par l'intégration déterministe..... 177
Fig.4. 74. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1], calculé via le développement de Wiener-Haar 178
Fig.4. 75. Densité de probabilité du déplacement X_1 en différent instant estimées par le développement de Wiener-Haar et par Monte Carlo..... 179
Fig.4. 76. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.3 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat..... 180
Fig.4. 77. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.315 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat..... 181

Fig.4. 78. Réalisation du déplacement X_1 correspondant à μ = 0.33 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat 181
Fig.4. 79. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.3 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe 182
Fig.4. 80. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.315 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe 183
Fig.4.81. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.33 par le développement de Wiener-Haar via le développement de Haar et par l'intégration déterministe 183
Fig.4. 82. Evolution du déplacement X_1 dans le domaine stochastique modélisé par le domaine d'orthogonalité des polynômes de Legendre [-1, 1], calculé par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo 184
Fig.4. 83. Densités de probabilité du déplacement X_1 en différents instants, estimées par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo 184
Fig.4. 84. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ calculées par le développement de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et la méthode de Monte Carlo 185
Fig.4. 85. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_2\right)$ correspondant à μ = 0.5 par le développement en polynômes de Legendre et par l'intégration déterministe 188
Fig.4. 86. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.525 par le développement en polynôme de Legendre et par l'intégration déterministe 189
Fig.4. 87. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.55 par le développement en polynôme de Legendre et par l'intégration déterministe 189
Fig.4. 88. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ sur l'intervalle [0.5, 0.55], calculées par le développement en polynômes de Legendre via la technique de régression et la méthode Monte Carlo 190
Fig.4. 89. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = *0.5* par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe 191
Fig.4. 90. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = *0.525* par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe 192
Fig.4. 91. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = *0.55* par le CPG-ME via la technique de régression et par l'intégration déterministe 192
Fig.4. 92. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Legendre multi-éléments via la régression et Monte Carlo 193
Fig.4. 93. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.5 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe 194
Fig.4. 94. Réalisation du cycle limite $\left(X_1, \dot{X}_1\right)$ correspondant à μ = 0.525 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe 195
Fig.4. 95. Réalisation du cycle limite correspondant à μ = 0.55 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par l'intégration déterministe 195

Fig.4. 96. Densités de probabilité de l'amplitude du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par la méthode de Monte Carlo 196
Fig.4. 97. Le déplacement X_1 correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction du temps 199
Fig.4. 98. La vitesse $\dot{X}_1$ correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ en fonction du temps..... 199
Fig.4. 99. Le cycle limite $(X_1, \dot{X}_1)$ correspondant à $\mu = (1+\varepsilon)\mu_0$, $\varepsilon = 10^{-4}$ calculé par intégration du système (4.5) et du modèle réduit (4.29)..... 201
Fig.4. 100. Le déplacement X_1 en fonction du temps correspondant à différentes conditions initiales 202
Fig.4. 101. Valeur moyenne instantanée du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 203
Fig.4. 102. Ecart type instantané du déplacement X_1 et de la vitesse $\dot{X}_1$ 203
Fig.4. 103. Réalisation de la trajectoire de phase du système (4.5) correspondant à $x_1(0) = 2.10^{-4}$ 204
Fig.4. 104. Réalisation de la trajectoire de phase du système (4.5) correspondant à $x_1(0) = 3.10^{-4}$ 205

Liste des tableaux

Tab.3. 1. Correspondance entre le type de distribution et le type de la base du chaos polynomial 72
Tab.3. 2. Représentation d'une variable aléatoire en fonction d'une variable gaussienne à moyenne nulle et à variance unitaire avec $erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$ 73
Tab.3. 3. Coefficients d'approximation et de détails du signal X 93
Tab.3. 4. Fonctions orthonormées de la base du chaos de Fourier..... 98
Tab.4. 1. Estimation de la valeur de la bifurcation de Hopf avec la technique NISP..... 126
Tab.4. 2. Estimation de la valeur de la bifurcation de Hopf avec la technique de régression..... 130
Tab.4. 3. Intervalle de confiance des proportions de stabilité du système (4.5) estimées par le chaos polynomial de Legendre 131
Tab.4. 4. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0 0.5]..... 133
Tab.4. 5. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0 0.25]..... 133
Tab.4. 6. Les valeurs minimales et maximales des parties réelles des valeurs propres estimées par le développement en polynômes de Legendre avec *P = 30* sur [0.25 0.5]..... 134
Tab.4. 7. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par les techniques intrusive, non intrusives (*P = 20*) et Monte Carlo..... 152
Tab.4. 8. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ par les techniques intrusive, non intrusives (*P = 20*) et Monte Carlo..... 152
Tab.4. 9. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par les techniques intrusive, non intrusives (*P* = 30) et Monte Carlo..... 153
Tab.4. 10. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement par les techniques intrusive, non intrusives (*P* = 30) et Monte Carlo..... 154
Tab.4. 11. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi élément via les techniques non intrusives (*P* = 20 *et m* = 4) et comparaison avec les résultats de MC..... 173
Tab.4.12. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi-éléments via les techniques non intrusives (*P* = 30 *et m* = 4) et comparaison avec les résultats de MC..... 174
Tab.4. 13. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 (a) et de la vitesse $\dot{X}_1$ (b) par le chaos multi élément via les techniques non intrusives (*P = 30 et m = 8*) et comparaison avec les résultats de MC..... 174
Tab.4. 14. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo 186
Tab.4. 15. Estimation des caractéristiques statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat et par Monte Carlo 186

Tab.4. 16. Statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 estimées par le CPG-ME via la technique de régression..... 193
Tab.4. 17. Statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le CPG-ME via la technique de régression..... 194
Tab.4. 18. Statistiques de l'amplitude du déplacement X_1 estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat..... 196
Tab.4. 19. Statistiques de l'amplitude de la vitesse $\dot{X}_1$ estimées par le chaos de Wiener-Haar via l'algorithme de Mallat..... 197
Tab.B. 1. Niveau de généralité d'un programme semi défini par rapport à un programme linéaire... 230
Tab.C. 1. Instructions fondamentales pour la construction et la résolution d'un programme SOS 231