

Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles

Olivier Jamond

► To cite this version:

Olivier Jamond. Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multimodèles. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale Paris, 2011. Français. NNT: 2011ECAP0020 . tel-01124020

HAL Id: tel-01124020 https://theses.hal.science/tel-01124020

Submitted on 6 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE présentée par **OLIVIER JAMOND** pour l'obtention du GRADE de DOCTEUR

Spécialité : Mécanique NumériqueLaboratoire : Laboratoire de Mécanique des Sols, Structures et Matériaux

Propagation numérique de zones critiques dans un pneumatique par approches multi-modèles

Soutenue le 2 mai 2011 devant le jury composé de :

Olivier	Allix	,	ENS Cachan	,	Président du jury
Frédéric	Feyel	,	ONERA	,	Rapporteur
Nicolas	Moës	,	Ecole Centrale de Nantes	,	Rapporteur
Patrice	Hauret	,	Michelin	,	Examinateur
Patrick	Massin	,	EDF	,	Examinateur
Hachmi	Ben Dhia	,	Ecole Centrale Paris	,	Directeur de thèse

To infinity ... and beyond ! Buzz Lightyear

Remerciements

Ce manuscrit de thèse marque la fin de mes études et donc une étape franchie dans ma vie. Ceci, je le dois à tous ceux qui m'ont accompagné et guidé jusque là.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance envers Hachmi qui m'a accompagné pendant ces trois années pour son soutien, ses conseils et pour tous les échanges, autant scientifiques qu'amicaux, que nous avons eu au cours de cette thèse. Je remercie aussi chaleureusement Pierre, Patrice et Gabriela qui m'ont encadré et fait confiance côté Michelin. Merci également à tout le personnel du service DTO/SIM chez Michelin et du laboratoire MSSMat de l'Ecole Centrale Paris pour m'avoir accueilli avec tant de gentillesse et de sympathie, avec une pensée particulière pour Gilbert, technicien de l'atelier de mécanique du MSSMat, qui lui aussi a toujours été de très bons conseils.

J'adresse de sincères remerciements à tous les membres de mon jury de thèse pour avoir donné de leur temps et m'avoir fait l'honneur d'examiner mes travaux. Je remercie en particulier Frédéric Feyel et Nicolas Moës pour avoir accepté la lourde tâche de rapporteur ainsi qu'Olivier Allix qui a présidé ce formidable jury.

D'autre part, je vais profiter de cette page de remerciements pour exprimer ma gratitude, dans un cadre plus global que celui de cette thèse, envers ceux qui ont fait de moi ce que je suis et que j'en suis là où je suis. Ainsi ma première pensée va à Camille, qui partage ma vie depuis déjà dix ans et qui m'a accompagné dans la joie comme dans les moments difficiles, pour le meilleur et pour le pire. Viennent ensuite ma famille et mes parents, qui ont su être sévères quand il le fallait pour me guider sur une bonne voie. Je pense aussi à mes amis, qui eux aussi partagent ma vie (certains depuis l'école maternelle!) et ont contribué, à leur manière, à faire de moi ce que je suis.

Après avoir pris pendant toutes ces années, il s'agit maintenant pour moi de commencer à apporter à mon tour.

Table des matières

Introduction

1	Elé	ments de bibliographie	3
	1.1	Introduction	3
	1.2	Fissurations réparties et éléments finis avec discontinuités intégrées	4
	1.3	Méthodes d'enrichissement conformes des espaces éléments finis	6
		1.3.1 La S-méthode	7
		1.3.2 Méthode de partition de l'unité (PUM)	7
		1.3.3 Méthode des éléments finis généralisés (GFEM)	8
		1.3.4 La méthode des éléments-finis étendus (XFEM)	8
		1.3.5 Eléments finis isogéométriques étendus	9
	1.4	Méthode Arlequin	9
	1.5	Bilan	10
2	Gér	néralités sur la mécanique du pneumatique	11
	2.1	Hypothèses de modélisation	12
	2.2	Formulation de l'équilibre mécanique	12
	2.3	Comportement hyperélastique incompressible	12
	2.4	Formulation du problème mécanique	13
	2.5	Cas des petites perturbations	13
	2.6	Modélisation de l'endommagement des matériaux	14
		2.6.1 Définition de la variable d'endommagement	15
		2.6.2 Contrainte effective, principe d'équivalence en déformation	16
	2.7	Loi d'endommagement par fatigue	16
		2.7.1 Loi de cumul linéaire de Palmgreen-Miner	17
		2.7.2 Courbes de Wölher	17
		2.7.3 Contrainte équivalente pour un chargement multiaxial	19
	2.8	Du VER à la structure, localisation de l'endommagement et délocalisation de la variable	
		d'endommagement	19
	2.9	Bilan	20
3	Pro	pagation d'une fissure dans une structure	21
	3.0	Résumé étendu	21
	3.1	Introduction	22
	3.2	Formulation of a cracked elastic body problem	24
	3.3	XFEM discretisation	25
	3.4	Use of XFEM within the Arlequin framework	27
		3.4.1 Continuous Arlequin Formulation	28
		3.4.2 Discretisation of the Arlequin problem using XFEM	29

1

		3.4.3 Some computational aspects	1
	3.5	Numerical results	2
		3.5.1 A kinked crack	2
		3.5.2 The double-cantilever beam test	4
		3.5.3 From a side-to-another propagation of a crack in a square plate	55
	3.6	Conclusion	5
4	\mathbf{Ext}	ension à la propagation d'endommagement 4	1
	4.1	Transition du champ d'endommagement à la fissure macroscopique	2
		4.1.1 Eléments bibliographiques	2
		4.1.2 Modèle heuristique adopté	:3
	4.2	Implémentation numérique et algorithme	:3
		4.2.1 Approximations du modèle de fatigue pour la simulation	:4
		4.2.2 Transfert du champ d'endommagement	:5
		4.2.3 Algorithme	7
	4.3	Illustrations numériques	:8
		4.3.1 Eprouvette CT	9
		4.3.2 Poutre Single Edge Notch (SEN)	0
	4.4	Commentaires et conclusions	2
5	Pris	se en compte de l'incompressibilité 5	5
	5.0	Résumé étendu	5
	5.1	Introduction	6
	5.2	Problem of an incompressible structure	7
		5.2.1 Formulation	$\overline{7}$
		5.2.2 Stability of the continuous problem	7
		5.2.3 Finite element discretization of the problem	8
	5.3	Arlequin modelling of the problem	9
		5.3.1 Proposed Arlequin formulation	9
		5.3.2 A stability result for the junction case	1
	5.4	Discretization scheme	3
		5.4.1 Discrete Arlequin incompressible problem	3
		5.4.2 A numerical Inf-Sup condition	3
		5.4.3 Treatment of partial elementary incompressibility	4
	5.5	Numerical investigations	5
		5.5.1 Numerical determination of the Inf-Sup value	6
		5.5.2 A thick cylinder under internal pressure	8
		5.5.3 A holed thick cylinder under internal pressure	2
		5.5.4 An incompressible viscous flow	5
		5.5.5 A pressurized fluid in a holed chamber	8
	5.6	Conclusion	1
	5.7	Extension : enrichissement par une fonction de Heaviside dans le cadre Arlequin incom-	
		pressible	1
6	Imp	lémentation du couplage Arlequin en 3D pour les élements-finis 8	5
	6.1	Problème cadre	5
	6.2	Calcul des matrices de couplage	6
	6.3	Calcul des intégrales pondérées	7
	6.4	Principaux algorithmes pour l'intersection de maillages	57
		6.4.1 Intersection de deux polyèdres convexes à faces planes et arêtes droites 8	57

	6.4.2	Intersection de deux éléments finis 3D	87
	6.4.3	Découpage d'un élément fini 3D par des surfaces maillées	88
	6.4.4	Pré-détection des intersections	89
	6.4.5	Calcul de la distance d'un point à une surface maillée	91
6.5	Illustr	ations numériques	92
	6.5.1	Trou sphérique dans un cube	92
	6.5.2	Bande de gomme percée	95
	6.5.3	Pneumatique avec un fissure dans le flanc	98
6.6	Bilan		98
Conclu	ision		103
Annex	\mathbf{es}		105
А	Loi én	ergie de Mooney-Rivlin	105
В	Struct	ure de données "half-edge"	105

Introduction

Les travaux présentés dans ce document ont été réalisés dans le cadre d'une convention CIFRE entre le laboratoire MSSMat UMR8579 et le service DTO/SIM de la société Michelin. Ce service est responsable, entre autres, du développement et du maintien de l'outil de simulation numérique pour la mécanique au sein de l'entreprise.

Le cadre industriel motivant les travaux de cette thèse est le suivant : dans le contexte de l'industrie du pneumatique, il est primordial pour Michelin de se maintenir à la pointe de la technologie et de l'innovation, notamment pour faire face à l'émergence des manufacturiers du sud-est asiatique. Pour cela, Michelin se doit de proposer en permanence des produits plus performants et à des coûts optimisés.

Parmi les différentes performances attendues d'un pneumatique (adhérence, capacité de charge, faible dissipation, ...), on s'intéresse dans le cadre de ces travaux à la performance d'endurance, c'est à dire à la tenue mécanique dans le temps du pneumatique.

Des essais expérimentaux d'endurance sont réalisés par la société Michelin par l'usage de différents moyens. Parmi ceux-ci, et en dehors de l'analyse des retours clientèle, figurent par exemple les essais d'endurance sur bancs de roulage (voir figure 1) ou sur pistes réelles, avec différents revêtements et courbes. Mais ces essais expérimentaux, s'ils restent nécessaires pour la validation, présentent des inconvénients : ils sont souvent coûteux, longs et les mesures sont difficiles et intrusives.

Avec l'essor de la simulation numérique, ces essais physiques sont de plus en plus remplacés par des essais numériques, moins coûteux et plus flexibles. Ceci suppose que l'outil de simulation numérique évolue en permanence pour intégrer des méthodologies numériques innovantes.



FIGURE 1 – Essai d'endurance sur rouleuse

Parmi les phénomènes conduisant à l'altération de l'intégrité mécanique d'un pneumatique, on

s'intéresse dans le cadre de cette thèse au phénomène de fatigue dû au chargement cyclique lié au passage d'une zone de la bande de roulement sur le sol lorsque le pneumatique est en roulage. Ce phénomène conduit à un endommagement progressif des matériaux constitutifs du pneumatique dans les zones les plus sollicitées. Cet endommagement génère des fragilités localisées qui peuvent amener à l'initiation puis à la propagation de fissures, conduisant ainsi à la ruine du pneumatique.

D'un point de vu numérique, la simulation de ce processus de ruine dans son intégralité est particulièrement délicate, en particulier parce qu'il fait intervenir des phénomènes mécaniques critiques locaux, à des échelles très fines. De plus, ces zones critiques peuvent se propager. Or, un pneumatique est de taille métrique alors que ces zones critiques sont à l'échelle millimétrique. Leur modélisation fine peut nécessiter l'échelle micrométrique, voire nanométrique. Or l'analyse du problème global décrit à l'échelle du détail fin reste hors d'atteinte des ordinateurs les plus performants d'aujourd'hui. Le recours à des méthodes d'enrichissement locaux et/ou multi-modèles s'impose afin, d'une part, de disposer dans les zones critiques de modèles physiques susceptibles de reproduire les différents phénomènes physiques ainsi que d'une discrétisation raffinée permettant de représenter les différents champs mécaniques avec précision, et d'autre part de préserver des niveaux de performances et de flexibilité acceptables lorsque les zones critiques se propagent.

L'objectif général de cette thèse est de développer une stratégie numérique globale et performante, exploitant le cadre de modélisation et de résolution Arlequin [13] et permettant la simulation numérique de l'intégralité du processus de ruine d'un pneumatique par fatigue, en particulier dans l'outil de calcul de la société Michelin. Cet objectif est décliné en trois sous-objectifs :

- 1. proposer une méthode s'appuyant sur le cadre arlequin permettant de propager de manière flexible et robuste des fissures dans une structure globale sujette à de l'endommagement,
- 2. permettre la cohabitation du couplage Arlequin avec une contrainte d'incompressibilité des matériaux,
- 3. développer un code industriel performant permettant d'intégrer l'approche Arlequin en 3D dans un code éléments finis tel que le code développé chez Michelin.

Ce document se décompose en six chapitres. Le premier contient un bref état de l'art sur certaines méthodes numériques répondant en partie ou en totalité au premier des trois sous-objectifs listés. On s'intéressera en particulier aux méthodes d'enrichissement des espaces éléments finis. Observons ici que d'autres éléments de bibliographie seront mentionnés au fil des chapitres suivants. Le second chapitre présente les modèles physiques que l'on considère dans nos développements. On y détaille, entre autres, le modèle d'endommagement par fatigue utilisé. Le troisième chapitre présente et valide une stratégie numérique mariant le cadre de modélisation Arlequin à l'enrichissement d'un espace éléments finis par la XFEM que l'on propose pour propager une fissure dans un modèle éléments finis, et ce de manière flexible. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication [20]. Le quatrième chapitre montre comment, en s'appuyant sur cette dernière stratégie numérique, on a développé le processus de simulation de la ruine d'une structure par fatigue; de l'apparition de l'endommagement à la propagation de macrofissures. Le cinquième chapitre s'intéresse à la problématique de cohabitation du couplage Arlequin et de la contrainte d'incompressibilité, caractéristique de matériaux constitutifs d'un pneumatique. On propose, dans ce chapitre, une formulation du problème continu ainsi qu'un processus de discrétisation permettant une cohabitation stable. Enfin, le sixième chapitre présente les techniques pratiques mises en oeuvre pour traiter la problématique de calcul d'intersection de maillages 3D, techniques dont la robustesse et l'efficacité sont nécessaires à l'implémentation générale, flexible et performante de la méthode Arlequin dans un code éléments finis. Le document est fermé par des conclusions générales et des perspectives.

Chapitre 1

Eléments de bibliographie

Sommaire

1.1	Introduction	3
1.2	Fissurations réparties et éléments finis avec discontinuités intégrées	4
1.3	Méthodes d'enrichissement conformes des espaces éléments finis	6
	1.3.1 La S-méthode	7
	1.3.2 Méthode de partition de l'unité (PUM) $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$	7
	1.3.3 Méthode des éléments finis généralisés (GFEM)	8
	1.3.4 La méthode des éléments-finis étendus (XFEM)	8
	1.3.5 Eléments finis isogéométriques étendus	9
1.4	Méthode Arlequin	9
1.5	Bilan	0

1.1 Introduction

Le travail de thèse lié à ce document a pour objectif de développer et d'analyser une stratégie numérique permettant de simuler de manière flexible, robuste et efficace la propagation de fissures et d'endommagement dans un modèle numérique de type éléments finis d'une structure incompressible telle qu'un pneumatique.

Les fonds de fissures et fronts d'endommagement sont des zones critiques localisées pour lesquelles il convient d'adopter des modèles physiques ainsi qu'une discrétisation raffinés afin de capter avec suffisamment de précision les phénomènes mécaniques qui s'y produisent. D'un point de vue numérique, les principales problématiques à aborder sont les suivantes :

- l'introduction dans un modèle éléments finis existant d'une discontinuité du champ de déplacement pour représenter une fissure.
- l'introduction de modèles physiques plus riches et d'une discrétisation plus fine dans les zones critiques (supposées être localisées). En particulier, on s'intéressera à la prise en compte d'un champ d'endommagement autour d'une pointe de fissure, champ qui pilote l'évolution de cette fissure.
- la propagation de telles zones critiques localisées dans un modèle numérique donné d'une structure globale. Cette propagation pose, en particulier, le problème du transfert de champs de variables internes entre différents maillages.

On présente dans ce chapitre des approches existantes visant à apporter des réponses à ces points.

1.2 Fissurations réparties et éléments finis avec discontinuités intégrées

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, la prise en compte d'un défaut localisé dans une structure sous chargements, notamment lorsque ce défaut a tendance à naître au cours du chargement et à se propager (typiquement le cas d'une localisation de déformation, dégénérant progressivement en fissure macroscopique) pose tout particulièrement la difficulté de remaillages fréquents, tout en augmentant de manière excessive le nombre d'inconnues du problème. Il en est ainsi des méthodes de type fissurations discrètes tel que suggéré par Ngo et Scordelis [76]. Différentes méthodes ont été développées pour pallier cette difficulté. Pour la fissuration fragile, la méthode introduite par Rashid [88] a consisté en la modification des rigidités élastiques de toute maille fissurée pour tenir compte de la présence en son sein d'une fissure. Cette approche présente un inconvénient majeur, qualifié de verrouillage en contraintes. Pour pallier cet inconvénient, Droz [39] a proposé l'utilisation de fonctions de bases particulières, discontinues au sein des éléments fissurés (voir figure 1.1). Observons ici que pour



FIGURE 1.1 – Fonctions de forme discontinues proposées par Droz (extrait de [39]))

des problèmes de plasticité parfaite monodimensionnelle, Johnson et Scott [60] avaient déjà montré la nécessité d'usage de fonctions de base discontinues pour approcher correctement la solution du problème (dont la déformation peut n'être qu'à variation bornée). Cette approche numérique a été également poursuivie dans [12] pour des problèmes de Hencky bidimensionnels. Mais les discontinuités étaient supposées respecter les maillages. La méthode, développée dans [39] est intéressante et peut être considérée comme « ancêtre lointain » de l'enrichissement des éléments finis par des fonctions de type Level-Set dans le cadre de la PUM, tel que réalisé par la méthode XFEM. Mais cette méthode est limitée à la rupture des matériaux parfaitement fragiles et ne semble avoir été testée qu'en bidimensionnel. Pour des matériaux métalliques, des bétons ou des polymères, une phase de localisation de la déformation progressive précède la rupture, i.e., le stade où il n'y a plus de transmission de contraintes par la fissure d'une lèvre à l'autre en cas d'ouverture. Pour la modélisation de la tenue de ces matériaux, plusieurs autres méthodes ont été proposées par différents auteurs. Les plus classiques peuvent être classées en 3 catégories :

- Les premières superposent des discontinuités faibles, i.e., des discontinuités de déformations, aux déformations dérivées des éléments finis classiques. Le papier de Ortiz et al. [77] est considéré comme précurseur pour ce genre d'approches. Ces auteurs enrichissent les déformations éléments finis standards par un mode de déformations dérivé de l'analyse de dégénérescence du tenseur acoustique et traitent ce mode incompatible par une méthode de type déformation présumée (dites aussi B-barre méthode). Dans [77], une seule ligne de de localisation peut exister à l'échelle de chaque élément; ce qui rend la bande de localisation dépendante du maillage.

Plusieurs améliorations ont été apportées à cette approche par Belytschko et *al.* [10] qui ont introduit un enrichissement, à l'échelle des éléments finis, par une bande de localisation des déformations d'épaisseur dépendante du matériau, à la place de la ligne définie par Ortiz et *al.* [77]. Mentionnons tout particulièrement une variante dûe à Belytschko et *al.* [9] dans laquelle des raffinements spectraux ont été superposés aux interpolations éléments finis de bas ordre dans les zones critiques pour capter de manière plus fine les bandes de localisation de déformations.

- Les secondes méthodes superposent, toujours à l'échelle d'un élément fini, une discontinuité forte, i.e., une discontinuité du champ des déplacements est rajoutée au champ éléments finis classique [42]. De manière plus précise, le champ des déplacements est développé comme suit : On note Γ_K une éventuelle fissure droite traversant un élément finis K de part en part. La fissure Γ_K sépare l'élement K en deux parties notées K^+ et K^- et on note n la normale unitaire à Γ_K , sortante de K^- . On écrit le champ de déplacement de cet élément K sous la forme :

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} N_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}_i + \left[H(\boldsymbol{x}) - N^+(\boldsymbol{x}) \right] \bar{\boldsymbol{u}}$$
(1.1)

où l'indice *i* indexe les noeuds de K, $\bar{\boldsymbol{u}}$ est le saut de déplacement au niveau de la fissure, H est une fonction de Heaviside telle que $(H = 0 \text{ sur } K^-, H = 1 \text{ sur } K^+)$ et $N^+(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K^+} N_i(\boldsymbol{x})$. La déformation se décompose en une déformation continue $\boldsymbol{\epsilon}^c$ et une fonction de Dirac $\boldsymbol{\delta}_{\Gamma_K}$ "localisée" sur la fissure. La déformation continue, qui détermine le tenseur des contraintes, s'écrit :

$$\boldsymbol{\epsilon}^{c}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K} \left[\boldsymbol{b}_{i}(\boldsymbol{x}) \otimes \boldsymbol{u}_{i} \right]^{S} - \left[\boldsymbol{b}^{+}(\boldsymbol{x}) \otimes \bar{\boldsymbol{u}} \right]^{S}$$
(1.2)

où $\boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x}) = \nabla N_i(\boldsymbol{x})$ désigne le vecteur gradient de la fonction de base N_i , $\boldsymbol{b}^+(\boldsymbol{x}) = \sum_{i \in K^+} \boldsymbol{b}_i(\boldsymbol{x})$ et $[*]^S$ désigne la partie symétrique du tenseur (*).

Une loi cohésive d'interface est alors introduite au niveau de la discontinuité. La fissure est ainsi munie d'une rigidité d'ouverture en associant au saut de déplacement \bar{u} modélisant la fissure une traction interne t:

$$\boldsymbol{t} = f(\bar{\boldsymbol{u}}) \tag{1.3}$$

Cette loi cherche à reproduire, à travers l'interface, l'adoucissement local du matériaux. On parle alors de modèles cohésifs (voir figure 1.2). Ces modèles cohésifs sont également utilisés pour simuler la propagation ductile des fissures où ils sont utilisés dans la zone de travail de la fissure (voir figure 1.3). Observons que les modèles « pères » de ces méthodes sont ceux de Dugdale [40] ||t||



FIGURE 1.2 – Exemple de loi cohésive

et Barenblatt [5]. Pour tenir compte de cet enrichissement par modèle cohésif dans la formulation mathématique du problème mécanique, les travaux virtuels des efforts internes classiques, liés à la déformation continue ϵ^c , sont incrémentés de travaux virtuels de forces cohésives d'interface qui s'écrivent, pour un champ virtuel v:

$$W_{\Gamma} = \int_{\bigcup \Gamma_K} \boldsymbol{t}(\bar{\boldsymbol{u}}) \cdot \bar{\boldsymbol{v}} \, d\boldsymbol{x}$$
(1.4)



FIGURE 1.3 – Zone de travail de la fissure

Plusieurs lois reliant les efforts cohésifs au saut des déplacements sont utilisées. Nous renvoyons à [79] pour des commentaires récents sur ce point. Observons ici que pour un élément fini classique donné, la position de la ligne de discontinuité ainsi que la compatibilité entre le tenseur des contraintes avec le vecteur t demande des adaptations particulières au niveau de chaque élément fini. Nous renvoyons aux travaux de Jirásek et *al.* [58, 59] et Sancho et *al.* [92] pour des éclairages techniques sur ces points.

Les troisièmes méthodes superposent les deux précédentes : une discontinuité faible est initiée et, à l'aide d'un critère physique, cette discontinuité faible dégénère en une discontinuité forte (e.g. [99, 94, 37]). Nous nous intéresserons particulièrement à ce type d'approches dans le chapitre 4 où d'autres éléments bibliographiques seront fournis.

Observons que pour l'ensemble des méthodes rapportées dans cette section, la procédure d'enrichissement est locale (au niveau de chaque élément) et donc relativement simple à mettre en oeuvre. Toutefois, les espaces globaux enrichis sont a priori non-conformes, ce qui nécessite des opérations particulières ainsi que des adaptations spécifiques aux différents types d'éléments finis, adaptations qui ne sont pas toujours évidentes.

Les méthodes que nous allons présenter maintenant demandent des développements numériques plus conséquents mais ne souffrent pas de ces difficultés.

1.3 Méthodes d'enrichissement conformes des espaces éléments finis

Des méthodes d'enrichissement conformes d'espaces éléments finis existants ont été développées dans les années 90. Elles consistent à enrichir un espace éléments finis standard, relativement grossier, par un ensemble de fonctions localisées permettant de capter avec une plus grande précision des phénomènes locaux. Ces fonctions sont le plus souvent spécifiques au problème étudié et intègrent une connaissance a priori du comportement local de la solution. La partie éléments finis standard de l'espace d'interpolation ainsi créé n'a alors qu'à reproduire avec une précision suffisante le comportement global de la solution.

L'espace des déplacements cinématiquement admissibles W_h pour la solution du problème et les champs virtuels s'écrit ainsi comme la somme d'un espace éléments finis classique W_H et d'un espace de correction δW_h généré à partir de l'ensemble des fonctions d'enrichissement.

$$\boldsymbol{W}_h = \boldsymbol{W}_H + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{W}_h \tag{1.5}$$

La solution u_h se décompose de la même manière en un terme global $u_H \in W_H$ et un terme contenant les corrections locales $u_h \in \delta W_h$.

$$\boldsymbol{u}_h = \boldsymbol{u}_H + \boldsymbol{\delta} \boldsymbol{u}_h \tag{1.6}$$

Ces approches permettent ainsi de capter des phénomènes relativement fins, tout en n'utilisant que des maillages et donc des espaces éléments finis relativement grossiers. Elles appellent néanmoins quelques commentaires :

– il faut veiller à conserver la continuité globale des éléments de W_h aux interfaces des éléments (dans les méthodes présentées dans la section précédente, cette continuitée n'est pas assurée a priori).

- les termes d'enrichissement peuvent nécessiter une attention particulière lors de l'intégration numérique des travaux virtuels.
- rien ne garantit a priori l'indépendance linéaire des deux espaces W_H et δW_h . De plus, même lorsque cette indépendance est satisfaite, il faut veiller au bon conditionnement des matrices de rigidité résultantes.

Nous présentons brièvement dans les paragraphes suivants quelques méthodes particulières d'enrichissement conforme.

1.3.1 La S-méthode

La S-méthode [45] est une méthode d'enrichissement qui utilise comme espace d'enrichissement δW_h un espace éléments finis classique : un maillage éléments finis local est superposé, dans voisinage de la zone d'intérêt, au maillage éléments finis global servant à décrire le comportement global de la solution. Ce maillage local est sensiblement plus fin que le maillage global et contient éventuellement des altérations qui ne sont pas prises en compte par ce dernier (fissures, interfaces, ...). L'espace d'enrichissement δW_h est généré à partir du maillage local, en imposant la nullité des degrés de liberté associés aux noeuds situés sur le bord de ce maillage afin de préserver la continuité globale des éléments de W_h .

La principale problématique liée à cette méthode est celle de l'indépendance linéaire des deux espaces W_H et δW_h . Certaines approches similaires à la S-méthode, comme la Fast Adaptative Composite-grid (FAC) [72] ou la méthode Chimère [95], tentent de s'affranchir de cette problématique en adoptant une stratégie de résolution itérative entre le niveau local et le niveau global.

1.3.2 Méthode de partition de l'unité (PUM)

La méthode de partition de l'unité (PUM pour Partition of Unity Method) [73] fournit un cadre général pour sommer des espaces d'approximation locaux, à la manière des méthodes d'enrichissement, tout en préservant la continuité globale des champs de l'espace somme ainsi formé. On considère un ensemble de sous domaines Ω^i recouvrant le domaine d'étude $\Omega = \bigcup \Omega^i$ ainsi qu'un ensemble d'espaces locaux d'approximation \boldsymbol{W}_h^i définis sur chacun des sous domaines et adaptés au comportement de la solution du problème dans le sous domaine associé. On forme l'espace global d'approximation \boldsymbol{W}_h en sommant les sous espaces locaux \boldsymbol{W}_h^i , pondérés par des fonctions φ^i , dont le support est contenu dans leur sous-domaine associé et formant une partition de l'unité :

$$\boldsymbol{W}_{h} = \sum_{i} \varphi^{i} \boldsymbol{W}^{i} \tag{1.7}$$

avec:

$$upp(\varphi^i) \subset \bar{\Omega}^i$$
 (1.8)

$$\sum_{i} \varphi^{i}(\boldsymbol{x}) = 1 \tag{1.9}$$

$$\varphi^i \in W^{1,\infty}(\Omega^i) \tag{1.10}$$

Un élément de \boldsymbol{W}_h peut alors s'écrire sous la forme :

$$\boldsymbol{u}_h(\boldsymbol{x}) = \sum_i \varphi^i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{u}^i(\boldsymbol{x}), \ \boldsymbol{u}^i \in \boldsymbol{W}^i$$
(1.11)

On note que la continuité des éléments de W_h est assurée.

Cette approche est le point de départ pour la méthode des éléments finis généralisés et pour la méthode des éléments finis étendus, auxquelles sont consacrés les deux paragraphes suivants.

1.3.3 Méthode des éléments finis généralisés (GFEM)

La méthode des éléments finis généralisés (GFEM pour Generalized Finite Element Method) [4] consiste à créer un espace d'approximation global sur le modèle de la PUM, en utilisant un maillage éléments finis et l'espace élément finis associé pour définir les sous-domaines Ω^i et les fonctions de pondération φ^i . On construit en chaque noeud V^i du maillage la fonction de pondération φ^i , égale à la fonction « chapeau » éléments finis de ce noeud V^i , ainsi que le sous-domaine Ω^i associé, égal au support de cette fonction φ^i . On note que l'on est bien dans le cadre de la PUM. En particulier, les fonctions φ^i forment bien une partition de l'unité. Il s'agit alors de construire les espaces d'approximation locaux W^i associés à chaque noeud. Ces espaces sont générés à partir d'un ensemble composé de la fonction constante unité et de fonctions reproduisant une connaissance a priori du comportement de la solution dans le sous-domaine considéré. On peut ainsi améliorer localement l'approximation de la solution par rapport à une approche éléments finis standard en captant par exemple les singularités au voisinage des angles du domaine d'étude par l'introduction locale autour de ces coins de développements asymptotiques connus pour de telles singularités. On note que cette approche peut être vue comme une généralisation de la méthode des éléments finis car dans le cas où tous les espaces locaux se réduisent à l'espace des fonctions constantes sur leur sous-domaine (c'est à dire qu'aucun enrichissement n'est fait), on retombe sur un espace éléments finis classique.

Dans le cas ou on introduit de l'enrichissement, la non-indépendance linéaire des espaces pondérés $\varphi^i W^i$ n'est plus garantie. Comme remède, les auteurs proposent de recourir à des techniques de factorisation partielle ou à des stratégies de régularisation.

1.3.4 La méthode des éléments-finis étendus (XFEM)

La méthode des éléments finis étendus (XFEM pour eXtended Finite Element Method) [8, 74, 38] utilise le cadre de la PUM pour introduire diverses discontinuités dans un modèle éléments finis sans avoir à en modifier le maillage. Ces discontinuités sont de deux types :

- Les discontinuités du champ de déplacement modélisent la présence de fissures traversant le maillage.
- Les discontinuités des dérivées normales du champ de déplacement rendent compte des sauts de déformation localisés aux interfaces entre les différentes phases mécaniques d'un matériau hétérogène.

La méthode des éléments finis étendus (XFEM pour eXtended Finite Element Method) a vu le jour avec comme objectif premier de permettre la propagation de fissures modélisées par un saut de déplacement dans un modèle éléments finis sans en altérer le maillage. Un tel saut de déplacement est introduit en enrichissant l'espace élément finis standard (continu) par une fonction qui saute le long de la fissure. La fissure est représentée par une surface orientée, noté Γ . La fonction d'enrichissement ψ^{Γ} est définie de la manière suivante :

$$\psi^{\Gamma}(\boldsymbol{x}) = H(sign(\boldsymbol{n}(\tilde{\boldsymbol{x}}) \cdot (\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}})))$$
(1.12)

où \tilde{x} est le point le plus proche de x sur Γ et H est une fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \ge 0\\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$
(1.13)

La fermeture de la fissure au niveau de sa pointe est prise en compte par un second enrichissement de l'espace d'approximation à l'aide d'un ensemble de fonctions F_j décrivant le champ de déplacement autour de la pointe de la fissure. Ces fonctions peuvent ainsi traduire une connaissance a priori du champ de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure. Par exemple, en deux dimensions pour une fissure droite dans un matériau linéaire et sous les hypothèses de petites perturbations, on peut introduire les fonctions de Westergaard :

$$\left\{F_{j}^{\Gamma}(r,\theta), \ j=1,4\right\} = \left\{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\}$$
(1.14)

où (r, θ) sont les coordonnées polaires d'un point dans le repère local centré sur la pointe de la fissure et dont le premier vecteur est tangent à celle-ci. Ces fonctions d'enrichissement $\{\psi^{\Gamma}, F_{j}^{\Gamma}\}$ sont localisées à la manière de la PUM en utilisant les fonctions de formes du modèle éléments finis. On note o la pointe de la fissure, ω_i le support de la fonction de base associée au noeud V_i , K^s et K^d les ensembles d'indices de noeuds définis de la manière suivante :

$$K^s = \{k, \ \boldsymbol{o} \in \omega_k\} \tag{1.15}$$

$$K^{d} = \{k, k \notin K^{s}, \, \mathring{\omega_{k}} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$$

$$(1.16)$$

Le champ de déplacement s'écrit :

$$\boldsymbol{u}_{h} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{u}_{i} N_{i} + \sum_{j \in K^{d}} \boldsymbol{a}_{j}^{d} N_{j} \psi^{\Gamma} + \sum_{k \in K^{s}} \sum_{l=1}^{m} \boldsymbol{a}_{k,l}^{s} N_{k} F_{l}^{\Gamma}$$
(1.17)

où n est le nombre de noeuds du maillage, m le nombre de fonctions d'enrichissement pour la pointe de fissure, N_i la fonction de base associée au noeud i, u_i les degrés de liberté standard et $(a_j^d, a_{k,l}^s)$ les degré de liberté correspondant à l'enrichissement.

Cette approche s'est montrée particulièrement efficace et est aujourd'hui largement utilisée. Néanmoins, alors que l'enrichissement par la fonction ψ^{Γ} pour représenter le saut de déplacement loin de la pointe de la fissure est relativement universel, une connaissance a priori du comportement du champ de déplacement autour de la pointe de fissure n'est pas toujours disponible dans le cas général.

Observons par ailleurs que la méthode XFEM a été utilisée pour enrichir le niveau micro d'une version micro/macro de la méthode LATIN, pour propager des fissures [63, 64, 51].

1.3.5 Eléments finis isogéométriques étendus

La méthode des éléments finis isogéométriques, proposée par Hughes et *al.* [56] peut également être enrichie, à la PUM, par des fonctions de type Heavidise. Plus récemment, Verhoosel et *al.* [97] ont proposé d'enrichir directement les espaces des éléments finis iso-géométriques standards en utilisant des T-Splines. L'intérêt d'une telle approche est celui plus général des méthodes des éléments isogéométriques qui permettent, par construction, de mieux approcher les interfaces et les fissures.

1.4 Méthode Arlequin

La méthode Alrequin, introduite par Ben Dhia [13] permet de superposer à une modélisation globale (souvent appelée modèle substrat dans le présent document) des modèles fins (patch) localisés dans diverses zones d'intérêt. Cette méthode s'adresse à des problèmes de la mécanique dont le domaine d'étude peut être partagé suivant plusieurs zones distinctes nécessitant des niveaux d'analyse différents. Ainsi, il est possible de définir différentes domaines qui peuvent chacun être associés à des modèles de diverse nature (analytique, numérique, mécanique, physico-chimique, ...). Le cadre multi-modèle, multi-échelle Arlequin permet d'introduire, avec grande flexibilité, quasiment tout type d'altération locale dans un modèle numérique existant et permettre ainsi des analyses numériques et/ou physiques locales plus avancées de ce modèle. Cette méthode a été testée avec succès pour insérer un trou, une inclusion, une fissure, un changement de modèle de structure, etc.[22, 18, 20]. Par souci de flexibilité, les domaines de ces modèles ne sont pas astreints à présenter, entre eux, des interfaces géométriquement compatibles, mais peuvent se recouvrir totalement ou partiellement. Une particularité de la méthode Arlequin est alors de raccorder ces modèles, non pas sur une frontière comme cela se fait classiquement, mais dans un volume. De cette façon, dans les zones de coexistence (superposition), la modélisation globale est obtenue par le mélange de plusieurs modélisations. Dans ces zones de superposition, les differents modèles sont gérés par l'introduction de fonctions de pondération. En résumé, la méthode Arlequin s'appuie sur les trois idées suivantes :

- superposer en volume les modèles mécaniques dans les zones de recouvrement, les états mécaniques,
- répartir les énergies des différents modèles mécaniques à l'aide de fonctions de pondération,
- coller ou coupler ces modèles sur les zones de collage, avec des opérateurs de couplage.

1.5 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons brièvement présenté des méthodes d'enrichissement classiques permettant notamment d'introduire des fissures dans un modèle éléments finis. Nous avons ensuite présenté le principe de la méthode Arlequin qui sera à la base des travaux de cette thèse.

Chapitre 2

Généralités sur la mécanique du pneumatique

Sommaire

2.1	Hypothèses de modélisation
2.2	Formulation de l'équilibre mécanique
2.3	Comportement hyperélastique incompressible
2.4	Formulation du problème mécanique
2.5	Cas des petites perturbations
2.6	Modélisation de l'endommagement des matériaux
	2.6.1 Définition de la variable d'endommagement
	2.6.2 Contrainte effective, principe d'équivalence en déformation
2.7	Loi d'endommagement par fatigue 16
	2.7.1 Loi de cumul linéaire de Palmgreen-Miner
	2.7.2 Courbes de Wölher
	2.7.3 Contrainte équivalente pour un chargement multiaxial
2.8	Du VER à la structure, localisation de l'endommagement et délocalisation de la va-
	riable d'endommagement
2.9	Bilan

Un pneumatique est une structure composite complexe. Elle est notament composée d'un assemblage de nappes variées de gommes de différentes nuances, de nappes dites métalliques (fils métalliques noyés dans une nappe de gomme) ou textiles (fils textiles noyés dans une nappe de gomme). Cette stucture est soumise au cours de sa vie à des chargements cycliques conduisant à des grandes transformations et déformations. Les matériaux qui constituent le pneumatique ont un comportement nonlinéaire dans ces conditions. De plus, le caractère cyclique du chargement pose la question de la tenue mécanique de la structure. Dans ce chapitre, nous allons donner quelques généralités sur la mécanique d'un pneumatique, considéré comme un solide hyperélastique incompressible dont la dégradation relève de la fatigue suite aux chargements cycliques qu'il subit. Ainsi, après avoir précisé les hypothèses de travail, nous rappelons l'écriture de l'équilibre mécanique d'un solide hyperélastique dans la section 2, le comportement hyperélastique incompressible dans la section 3, la formulation à deux champs (déplacement et pression hydrostatique) en section 4 et la linéarisation du problème en section 5. Les sections 6-8 sont dédiées à des éléments et des références au sujet de l'endommagement par fatigue. De nombreuses hypothèses simplificatrices seront faites dans la modélisation de la mécanique du pneumatique qui va être présentée.

2.1 Hypothèses de modélisation

Dans tout ce qui suit, on fait l'hypothèse que les matériaux ont un comportement hyperélastique incompressible. Ainsi, on suppose l'existence d'une densité d'énergie de déformation, ne dépendant que du tenseur gradient de déformation, dont dérive le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Par ailleurs, on néglige les effets thermiques, les dissipations visqueuses ainsi que les effets d'inertie dans les équations d'équilibre.

2.2 Formulation de l'équilibre mécanique



FIGURE 2.1 – Grandes transformations

On considère un solide hyperélastique \mathcal{B} , plongé dans l'espace \mathbb{R}^3 muni d'un repère orthonormé (o, e_1, e_2, e_3) . On appelle configuration de référence une position connue de \mathcal{B} pour laquelle on suppose que les contraintes internes sont nulles. On note Ω_0 le domaine ouvert de l'espace dont l'adhérence est occupée par le solide dans sa configuration de référence (cf. figure 2.1). Sous l'effet d'un chargement qui lui est appliqué, le solide subit une déformation $\phi(\boldsymbol{\xi})$ telle qu'un volume élémentaire de la structure, à la position $\boldsymbol{\xi}$ dans la configuration de référence, se retrouve à la position $\boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{\xi})$ dans la configuration dite déformée. On note \boldsymbol{F} le gradient Lagrangien de cette déformation défini par $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\xi}) = \nabla_{\boldsymbol{\xi}} \phi(\boldsymbol{\xi})$ et J son jacobien. On note $\Omega = \phi(\Omega_0)$ le domaine occupé par la configuration déformée. On note $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ et $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ les efforts volumiques et surfaciques appliqués sur le solide déformé. On note $\boldsymbol{u} = \phi - \boldsymbol{Id}$ le champ de déplacement. Un déplacement imposé \boldsymbol{u}_0 est appliquée sur une partie Γ_0^u du bord $\partial\Omega_0$ de Ω_0 . On note $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\xi})$ le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, défini sur la configuration de référence. On note $\boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}_0} = \{\boldsymbol{u} \ll$ suffisament régulier », $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 \operatorname{sur} \Gamma_0^u\}$.

Le Principe des Travaux Virtuels s'écrit : (formalisme Lagrangien)

$$\forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}},\tag{2.1}$$

$$\int_{\Omega_0} \mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega_0} J(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial \Omega_0} J \boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi}$$
(2.2)

où $\boldsymbol{F}^{-T} = \left(\boldsymbol{F}^{-1}\right)^{T}$.

2.3 Comportement hyperélastique incompressible

Le caoutchouc, et de manière générale les différents mélanges de gommes entrant dans la composition d'un pneumatique, sont des matériaux quasi-incompressibles. Tout échantillon d'un tel matériau conserve (quasiment) son volume lorsqu'il se déforme. C'est une propriété locale du matériau. Comme évoqué précédemment, on fait l'hypothèse d'un comportement hyperélastique incompressible pour les matériaux constitutifs de la structure considérée.

L'incompressibilité se traduit par :

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \Omega_0, \quad J(\boldsymbol{\xi}) = 1 \tag{2.3}$$

Du point de vue de la loi de comportement, en faisant l'hypothèse d'hyperélasticité, on fait l'hypothèse d'existence d'une densité d'énergie de déformation ψ_0 définie sur la configuration de référence dont dérive le premier tenseur de Piola-Kirchhoff Π . Cette densité d'énergie de déformation ne dépend que du gradient de la déformation F, et plus précisément du tenseur de Cauchy-Green droit $C = F^T F$. On introduit une dépendance en ξ pour la densité d'énergie de déformation afin de prendre en compte la présence de matériaux différents dans une même structure. Ainsi :

$$\psi_0 = \psi_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{C}) \tag{2.4}$$

La contrainte cinématique d'incompressibilité (2.3) est assurée par l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange p dans la densité d'énergie de déformation :

$$\psi_p = \psi_0(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{C}) - p(J-1) \tag{2.5}$$

Le premier tenseur de Piola-Kirshoff s'écrit alors :

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \psi_p}{\partial \boldsymbol{F}} = -p\boldsymbol{F}^T + \frac{\partial \psi_0}{\partial \boldsymbol{F}}$$
(2.6)

2.4 Formulation du problème mécanique

En ne gardant que u et p comme champs inconnus du problème et en écrivant faiblement l'équation de contrainte (2.3), la formulation du problème mécanique s'écrit :

Problème 1 (problème du solide hyperélastique incompressible).

Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}_0} \times Q$ tel que :

$$\forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}, \quad \int_{\Omega_{0}} \frac{\partial \psi_{0}(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{F}} : \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} - \int_{\Omega_{0}} p \boldsymbol{F}^{T} : \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} =$$

$$\int_{\Omega_{0}} J(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial \Omega_{0}} J \boldsymbol{F}^{-T}(\boldsymbol{u}) (\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{\phi}) \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi}$$

$$\forall q \in Q, \quad \int_{\Omega_{0}} q (J-1) \, d\boldsymbol{\xi} = 0$$

$$(2.7)$$

où Q est l'espace des champs de pression.

Lorsque les deux champs inconnus ont été calculés, on évalue la contrainte Π à l'aide de la loi de comportement (2.6).

2.5 Cas des petites perturbations

Dans le cadre des petites perturbations, on a $\phi \approx Id$. les configurations de référence et déformée sont considérées comme confondues. Cela se traduit notamment par :

- $\nabla_{\boldsymbol{\xi}} \approx \nabla_{\boldsymbol{x}}$. On note ainsi ∇ l'opérateur gradient.
- $-\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}$, avec $\nabla \mathbf{u}$ petit devant \mathbf{I} .
- $\boldsymbol{C} \approx \boldsymbol{I} + 2\boldsymbol{\epsilon}$, avec $\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}^T)$ petit devant \boldsymbol{I} .

 $- J \approx 1 + div(\mathbf{u})$, avec $div(\mathbf{u})$ petit devant 1. Le problème mécanique s'écrit alors :

Problème 2 (problème du solide hyperélastique incompressible en petites perturbations). Trouver $(\boldsymbol{u}, p) \in \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{u}_0} \times L^2(\Omega_0)$ tel que :

$$\forall \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}_{\boldsymbol{0}}, \quad \int_{\Omega_{0}} \frac{\partial \psi_{0}(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \bigg|_{\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{\xi} - \int_{\Omega_{0}} p div(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{\xi} =$$

$$\int_{\Omega_{0}} \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial \Omega_{0}} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{w} \, d\boldsymbol{\xi}$$

$$\forall \boldsymbol{q} \in L^{2}(\Omega_{0}), \quad -\int_{\Omega_{0}} q div(\boldsymbol{u}) \, d\boldsymbol{\xi} = 0$$

$$(2.10)$$

Par ailleurs, si l'on choisit une énergie quadratique de type $\psi_0 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{R} : \boldsymbol{\epsilon}$, où \boldsymbol{R} est un tenseur d'ordre 4, le terme de rigidité de l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\int_{\Omega_0} \frac{\partial \psi_0(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \boldsymbol{\epsilon}} \bigg|_{\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u})} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{\xi} = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{R} : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{w}) \, d\boldsymbol{\xi}$$
(2.11)

On s'intéressera à un tel problème dans le chapitre 5 traitant de la prise en compte de l'incompressibilité dans un cadre de modélisation Arlequin.

En considérant que le comportement des matériaux est hyperélastique, on suppose que les caractéristiques des matériaux constitutifs du solide considéré n'évoluent pas au cours de la résolution du chargement. Or on souhaite prendre en compte la dégradation progressive de ces caractéristiques par fatigue dûe au chargement répétitif lié au passage d'une partie de la bande de roulement sur la route. C'est pour cela que nous allons nous intéresser à la modélisation de l'endommagement par fatigue dans la suite de ce chapitre.

2.6 Modélisation de l'endommagement des matériaux

Au cours de la vie d'un matériau soumis à des déformations répétées, des fissures et cavités microscopiques peuvent apparaître et affecter son intégrité mécanique. Le matériau s'endommage. Lorsque le niveau d'endommagement augmente, ces micro-fissures et micro-cavités peuvent coalescer et former une macro-fissure. La mécanique de l'endommagement ne concerne que la phase d'initiation de telles macro-fissures. Une fois celles-ci formées, la mécanique de la rupture s'attache à fournir des modèles décrivant leur propagation (e.g. loi de Paris). On propose dans ce chapitre une approche ne relevant que de la mécanique de l'endommagement, combinée à un modèle heuristique d'initiation d'une macro-fissure. On représentera la propagation d'une macro-fissure comme une succession d'incréments de propagation, chacun correspondant à l'initiation d'une fissure correspondant à cet incrément.

Comme évoqué dans l'introduction de ce rapport, la mécanique de l'endommagement pose une problématique d'échelle : il est illusoire de modéliser chacune des micro-altérations dans une structure macroscopique, d'autant que cela conduirait, lors de la résolution numérique du problème mécanique à un système dont la taille serait inexploitable par les plus puissants des ordinateurs actuels.

L'approche mécanique classique consiste à remplacer l'ensemble des phénomènes physiques complexes liés à ces micro-altérations par un champ de variable interne, sensé reproduire au mieux cette complexité physique. Ce champ est piloté par une loi d'évolution décrivant l'évolution de l'endommagement des matériaux. On définit ainsi une variable d'endommagement à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (VER) de matériau, d'une taille suffisamment grande par rapport aux microhétérogénéités du matériau. La suite de cette section donne des éléments de synthèse au sujet de l'endommagement, permettant une auto-portance du présent document. Le lecteur intéressé par de plus amples détails sur ce sujet fondamental de la mécanique des matériaux pourra consulter plus avantageusement une littérature abondante sur le sujet, dont le monographe de Lemaitre et Chaboche [66].

2.6.1 Définition de la variable d'endommagement



FIGURE 2.2 – Micro-fissures dans la matière

On s'intéresse à un volume élémentaire représentatif d'un solide susceptible de s'endommager. On considère une section δS de normale \boldsymbol{n} du VER. On note δS_D l'aire totale de la trace des défauts (fissures et cavités) (voir figure 2.2). On définit alors l'aire résistante effective $\delta \tilde{S}$ par :

$$\delta \hat{S} = \delta S - \delta S_D \tag{2.12}$$

Une mesure de l'endommagement du VER, que l'on appelle variable d'endommagement notée D, se définit par :

$$D(\boldsymbol{n}) = \frac{\delta S_D}{\delta S} \tag{2.13}$$

où n est la normale à la section, supposée être orientée. Avec cette définition, on constate que l'on a toujours $0 \leq D \leq 1$ et que l'endommagement est généralement anisotrope. Cependant, dans tout ce qui suit, on fait l'hypothèse d'isotropie de l'endommagement : on considère que les fissures et cavités sont orientées uniformément dans toutes les directions de l'espace. Ainsi :

$$\forall \boldsymbol{n}, \quad D(\boldsymbol{n}) = D \tag{2.14}$$

On note D_c la valeur de l'endommagement D pour laquelle on considère qu'il y a rupture du VER. La variable d'endommagement D est gouvernée par une loi d'évolution dite loi d'endommagement. On s'intéresse dans la section 2.7 à l'endommagement par fatigue. La manière dont cette variable d'endommagement affecte le comportement du matériau est donnée par le principe d'équivalence en déformation.

2.6.2 Contrainte effective, principe d'équivalence en déformation

On définit la contrainte effective $\tilde{\sigma}$ comme la contrainte moyenne à laquelle est soumis le matériau au sein du VER :

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - D} \tag{2.15}$$

Le principe heuristique dit d'équivalence en déformation consiste à remplacer dans la loi de comportement du matériau endommagé la contrainte usuelle σ par la contrainte effective $\tilde{\sigma}$. On aura pour un matériau hyperélastique incompressible :

$$\mathbf{\Pi}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{F}) = -p\boldsymbol{F}^T + (1-D)\frac{\partial\psi_0}{\partial\boldsymbol{F}}$$
(2.16)

On note que sous certains chargements (notamment de compression), un ensemble de micro-fissures sont susceptibles de se refermer et de transmettre de l'effort dans la direction de leur normale. Ainsi, le comportement du VER endommagé diffère selon la nature du chargement qui lui est appliqué. La modélisation présentée ici, relativement sommaire, ne tient pas compte de cet effet. Le lecteur intéressé par cette problématique est invité à consulter notamment [1, 32, 83].

2.7 Loi d'endommagement par fatigue

L'endommagement par fatigue correspond à la naissance et à la croissance de micro-fissures sous l'effet de sollicitations cycliques jusqu'à l'amorçage d'une fissure mésoscopique, c'est à dire à l'échelle d'un VER. Une des caractéristiques de ce phénomène est qu'il peut se produire sous des contraintes faibles, en deça de la contrainte à rupture du matériau, mais répétées. Si le chargement appliqué au solide considéré n'est pas cyclique, il existe diverses méthodes (e.g. méthode rainflow [71]) permettant de transformer ce chargement continu en temps en un ensemble finis de cycles, considéré comme équivalent au vrai chargement.

Concernant la fatigue des métaux, on distingue deux régimes :

- La fatigue à grand nombre de cycles : le nombre de cycles à rupture est supérieur à 50000. Ce régime de fatigue est supposé ne mettre en jeu que des déformations quasi-élastiques.
- La fatigue (dite oligocyclique) à faible nombre de cycle. Pour ce régime, le nombre de cycle à rupture est inférieur à 50000. Des déformations plastiques interviennent dans le processus d'endommagement.

Les lois classiques de fatigue s'expriment, pour une sollicitation uniaxiale appliquée sur un VER, en fonction de grandeurs définies globalement sur un cycle et caractérisant ce dernier. En particulier, un cycle peut être caractérisé par la contrainte appliquée à l'échelle mésoscopique (c'est à dire la contrainte usuelle, pas la contrainte effective). Dans la suite on appellera cycle élémentaire la caractérisation d'un cycle représentée par un couple de grandeurs parmi les 5 définies ci-dessous :

- $-\sigma_M$ et σ_m qui sont respectivement les contraintes maximum et minimum vues par le volume élémentaire de matière au cours du cycle.
- $-\sigma_a = \frac{1}{2}(\sigma_M \sigma_m)$ et $\bar{\sigma} = \frac{1}{2}(\sigma_M + \sigma_m)$ qui sont respectivement l'amplitude de contrainte et la contrainte moyenne.

$$-R = \frac{\sigma_m}{\sigma_M}$$
 qui est le rapport de charge.

Comme on peut aisément s'en convaincre, on peut distinguer une infinité de cycles élémentaires. En pratique, on se restreint à un nombre fini. Un cycle élémentaire c^i peut, par exemple, être défini par la donnée du couple ($\sigma_a^i, \bar{\sigma}^i$). Une application unique du cycle élémentaire c^i sur le VER est appelée occurrence du cycle c^i .

Une loi d'endommagement par fatigue en contrainte est généralement de la forme :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = G(\sigma_a, \bar{\sigma}, D) \tag{2.17}$$

où N est le nombre de cycles appliqués et $\frac{\delta D}{\delta N}$ est l'incrément d'endommagement par cycle. Certaines lois d'endommagement par fatigue possèdent une propriété particulière dite de de cumul linéaire ou de Palmgreen-Miner.

2.7.1 Loi de cumul linéaire de Palmgreen-Miner

La loi de Palmgreen-Miner stipule que les dommages associés à chaque cycle élémentaire c^i se cumulent lorsqu'on les définit par leur facteur d'usage N^i/N_f^i , où N^i est le nombre d'occurrences du cycle élémentaire c^i et N_f^i est le nombre d'occurrences à rupture de ce cycle élémentaire c^i , que l'évolution du dommage D(N) soit linéaire ou non. La rupture du VER se produit quand :

$$\sum_{i} \frac{N^i}{N_f^i} = 1 \tag{2.18}$$

C'est une propriété des lois de fatigue pouvant se décomposer de manière multiplicative et s'écrire sous la forme générale suivante (en passant à une écriture continue) :

$$\frac{\partial D}{g(D)} = G(\sigma_a, \bar{\sigma}) \partial N \tag{2.19}$$

On définit le scalaire α par :

$$\alpha = \int_0^{D_c} \frac{dD}{g(D)} \tag{2.20}$$

Pour un chargement cyclique composé d'occurrences d'un seul et même cycle élémentaire $(\sigma_a^i, \bar{\sigma}^i)$, on a par intégration de (2.19) jusqu'à la rupture :

$$\alpha = G(\sigma_a^i, \bar{\sigma}^i) N_f^i = G^i N_f^i \tag{2.21}$$

Si l'on considère maintenant un historique de chargement conduisant à la rupture du VER et composé d'occurrences de différentes cycles élémentaires $(\sigma_a^i, \bar{\sigma}^i)$, i = 1, m, alors l'intégration de (2.19) jusqu'à la rupture donne la loi de Palmgreen-Miner :

$$\alpha = \sum_{i} G^{i} N^{i} = \alpha \sum_{i} \frac{N^{i}}{N_{f}^{i}}$$
(2.22)

2.7.2 Courbes de Wölher

Si l'on souhaite étudier, numériquement ou analytiquement, une structure susceptible de s'endommager par fatigue, il est nécessaire de caractériser son comportement par rapport à ce phénomène endommageant. Si on suppose une loi d'endommagement qui conduit à un cumul linéaire des dommages, ce comportement peut se traduire par le nombre N_f^i d'occurrences du cycle éléménetaire c^i qui conduit à rupture du VER. Les courbes de Wölher constituent la donnée expérimentale de ces nombres d'occurrences à rupture. Typiquement, une courbe de Wölher donne, pour un type de chargement donné (traction-compression, torsion, cisaillement, ...) et un rapport de charge R donné, une information statistique sur le nombre de cycles à rupture (généralement le nombre de cycles pour une probabilité de rupture de 0.5) en fonction de la contrainte maximum σ_M . La figure 2.3 donne un exemple de courbes de Wölher.



FIGURE 2.3 – Exemples de courbes de Wölher (extrait de [66])

Pour tracer ces courbes, on réalise généralement des essais simples qui consistent à soumettre chaque éprouvette (dont la géométrie conduit à une distribution de contraintes connue et quasi-uniforme dans la zone d'intérêt) à des cycles d'efforts périodiques à contrainte maximum et rapport de charge fixés et à noter le nombre de cycles à rupture, c'est-à-dire celui au bout duquel l'amorçage d'une fissure macroscopique est observé.

Si l'on suppose une loi de fatigue de la forme (loi à variables séparables donc à cumul linéaire des dommages et à évolution du dommage linéaire en N) :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = G(\sigma_M, \bar{\sigma}) \tag{2.23}$$

on obtient par intégration que $G(\sigma_M, \bar{\sigma}) = \frac{D_c}{N_f}$ et donc la loi de fatigue se déduit directement des courbes de Wöhler : $\frac{\delta D}{\delta N} = \frac{D_c}{N_f}$.

En général, les courbes de Wölher présentent deux limites : le nombre de cycles à rupture N_f tend vers 0 quand σ_M tend vers la contrainte de rupture statique noté σ_u . Par ailleurs, quand N_f tend vers l'infini, σ_M tend vers une valeur fixe appelée limite de fatigue et notée σ_l . La relation de Goodman fait dépendre la limite de fatigue linéairement de la contrainte moyenne $\bar{\sigma}$:

$$\sigma_l(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma} + \sigma_f (1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u})$$
(2.24)

où $\sigma_f = \sigma_l(0)$ est la limite de fatigue à contrainte moyenne nulle. C'est un coefficient matériau. Dans [66], les auteurs proposent de traduire ces observations par la formule suivante :

$$N_f = \frac{\sigma_u - \sigma_M}{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B_0(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u})} \right)^{-\beta}$$
(2.25)

Ce qui donne, en faisant l'hypothèse (2.23) :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = D_c \frac{\sigma_M - \sigma_l(\bar{\sigma})}{\sigma_u - \sigma_M} \left(\frac{\sigma_M - \bar{\sigma}}{B_0(1 - \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_u})} \right)^{\beta}$$
(2.26)

Une autre formule, plus grossière mais largement utilisée en l'absence de courbes de Wölher expérimentales, est la formule de Basquin [6] :

$$N_f = C \,\sigma_a^{-b} \tag{2.27}$$

où C et b sont des coefficients matériau. On note que cette formule ne tient pas compte du rapport de charge.

2.7.3 Contrainte équivalente pour un chargement multiaxial

Lorsqu'au cours d'un cycle, le volume élémentaire est soumis à un chargement multiaxial, il est nécessaire de définir une contrainte équivalente σ_{eq} scalaire afin d'utiliser la modélisation précédente du dommage. On peut ainsi déterminer les valeurs maximum σ_{eqM} et minimum σ_{eqm} du cycle de contrainte multiaxial et lui associer le cycle élémentaire uniaxial équivalent ($\sigma_M = \sigma_{eqM}, \sigma_m = \sigma_{eqm}$). Dans [66], par exemple, les auteurs proposent pour un matériau hookéen la contrainte équivalente suivante :

$$\sigma = \sigma_{VM} \left[\frac{2}{3} (1+\nu) + 3(1-2\nu) \left\langle \frac{\sigma_H}{\sigma_{VM}} \right\rangle^2 \right]^{1/2}$$
(2.28)

avec σ_{VM} la contrainte équivalente de Von Mises définie par :

$$\sigma_{VM} = \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{\sigma}':\boldsymbol{\sigma}'\right)^{1/2} \tag{2.29}$$

où $\boldsymbol{\sigma}'$ désigne le tenseur déviateur des contraintes, ν le coefficient de Poisson du matériau, $\sigma_H = \frac{1}{3}tr(\boldsymbol{\sigma})$ la contrainte hydrostatique et $\langle * \rangle$ la partie positive de *.

Dans [30, 31], les auteurs proposent une détermination de σ_{eqM} et σ_{eqm} adaptée aux élastomères : on définit la partie positive du tenseur des contraintes de Cauchy, noté σ^+ , par :

$$\boldsymbol{\sigma}^+ = <\sigma_i > \boldsymbol{t}_i \otimes \boldsymbol{t}_i \tag{2.30}$$

où, pour i = 1, 3, les σ_i sont les valeurs propres du tenseur de Cauchy et t_i les vecteurs propres normalisés associés. On note σ_0^+ le centre de la plus petite sphère contenant le trajet du tenseur σ^+ au cours du cycle et R_{σ^+} son rayon dans l'espace des contraintes. On écrit alors :

$$\sigma_{eqM} = \left\| \boldsymbol{\sigma}_0^+ \right\| + R_{\sigma^+} \text{ et } \sigma_{eqm} = \left\| \boldsymbol{\sigma}_0^+ \right\| - R_{\sigma^+}$$
(2.31)

où $||\boldsymbol{\sigma}_0^+||$ désigne la norme euclidienne de $\boldsymbol{\sigma}_0^+$.

2.8 Du VER à la structure, localisation de l'endommagement et délocalisation de la variable d'endommagement

Jusqu'à présent, on s'est intéressé à l'endommagement d'un VER isolé. On va maintenant s'intéresser à l'évolution de l'endommagement par fatigue d'une structure complète soumise à un chargement cyclique. Au cours de sa vie, le matériau va s'endommager par fatigue. La non-uniformité, a priori, de la distribution des contraintes et donc de l'endommagement conduit alors à une variabilité dans le temps et dans l'espace des cycles de contraintes locales, à chargement extérieur donné. De ce fait, il nous faut définir un champ, ici scalaire, décrivant le niveau d'endommagement de chaque volume élémentaire de la structure.

L'application locale de la modélisation de la variable d'endommagement en tout point d'une structure dans le cadre de la mécanique des milieux continus conduit au phénomène pathologique bien connu de localisation de l'endommagement et de la déformation [85, 86, 80] : l'endommagement a tendance à se localiser dans une zone de mesure nulle et une rupture se produit sans dissipation d'énergie, ce qui est inacceptable sur le plan de la physique. La discrétisation par éléments finis, en introduisant naturellement une dimension minimum pour la description des phénomènes, donne un caractère fini à cette localisation mais introduit une très forte dépendance au maillage de l'évolution du dommage et donc de la solution.

Il existe plusieurs méthodes pour traiter cette problématique [57, 67, 82, 81, 68]. Une approche relativement simple consiste à « délocaliser » la variable d'endommagement en effectuant une convolution sur le taux d'endommagement. Si la loi de fatigue choisie pour le VER s'écrit :

$$\frac{\delta D}{\delta N} = G(\sigma_a(\boldsymbol{x}), \bar{\sigma}(\boldsymbol{x}), D(\boldsymbol{x}))$$
(2.32)

alors on peut lui associer une loi de fatigue délocalisée au point x (e.g. [85, 57, 30]) :

$$\frac{\delta D}{\delta N}(\boldsymbol{x}) = \frac{\int_{\Omega} G(\sigma_a(\boldsymbol{y}), \bar{\sigma}(\boldsymbol{y}), D(\boldsymbol{y})) e^{-\frac{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||^2}{r^2}} d\boldsymbol{y}}{\int_{\Omega} e^{-\frac{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||^2}{r^2}} d\boldsymbol{y}}$$
(2.33)

où Ω désigne le domaine occupé par la structure considérée et r la distance de délocalisation. On considère que cette distance de délocalisation est une caractérisitique du matériau.

Un raffinement relativement simple de cette délocalisation peut être réalisé en considérant qu'un VER du solide situé en un point \boldsymbol{x} ne peut subir l'influence au travers de cette délocalisation d'un autre VER situé en un point \boldsymbol{y} que si le segment $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$ ne coupe aucune frontière du solide. Il s'agit alors de calculer la convolution en chaque point sur un domaine qui tient compte de la « visibilité » de ce point. Soit :

$$\frac{\delta D}{\delta N}(\boldsymbol{x}) = \frac{\int_{\tilde{\Omega}(\boldsymbol{x})} G(\sigma_a(\boldsymbol{y}), \bar{\sigma}(\boldsymbol{y}), D(\boldsymbol{y})) e^{-\frac{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||^2}{r^2}} d\boldsymbol{y}}{\int_{\tilde{\Omega}(\boldsymbol{x})} e^{-\frac{||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}||^2}{r^2}} d\boldsymbol{y}}$$
(2.34)

où $\tilde{\Omega}(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{y} \in \Omega, [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}] \cap \partial \Omega = \emptyset\}$ (voir figure 2.4).



FIGURE 2.4 – Domaine pour la délocalisation

2.9 Bilan

Nous avons présenté dans ce chapitre une synthèse des modèles mécaniques qui régissent le comportement d'un pneumatique ainsi que son endommagement par fatigue.

Nous ne pouvons de ce fait prétendre à aucune contribution originale sur ces sujets. Cette synthèse nous a semblée nécessaire. Elle porte les chapitres numériques qui vont suivre et qui forment le coeur de ces travaux de thèse.

Chapitre 3

Propagation d'une fissure dans une structure

Sommaire

3.0	Résumé étendu
3.1	Introduction
3.2	Formulation of a cracked elastic body problem
3.3	XFEM discretisation
3.4	Use of XFEM within the Arlequin framework
	3.4.1 Continuous Arlequin Formulation
	3.4.2 Discretisation of the Arlequin problem using XFEM
	3.4.3 Some computational aspects
3.5	Numerical results
	3.5.1 A kinked crack
	3.5.2 The double-cantilever beam test $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 34$
	3.5.3 From a side-to-another propagation of a crack in a square plate
3.6	Conclusion

3.0 Résumé étendu

L'objectif ultime de la thèse étant le développement de méthodes performantes permettant de propager des fronts d'endommagement pouvant se transformer en fissures macroscopiques, nous consacrons ce chapitre à une première étape qui consiste à proposer un méthodologie nouvelle permettant de propager une fissure dans un milieu élastique, tout en gardant en point de mire l'objectif ultime, rappelé ci-dessus. Cette méthodologie a fait l'objet de la publication [20] ainsi que de communications à des congrès nationnaux et internationnaux (Colloque nationnal en calcul des structures 2009, USNCCM 2009, ECCM 2010). Le texte de cette publication est rapporté intégralement (en anglais) à la suite du résumé étendu suivant qui donnne les points principaux qui sont évoqués dans ce papier.

L'introduction du papier [20] donne un bref état de l'art des méthodes numériques récentes visant l'introduction flexible d'une fissure dans un modèle numérique existant. On y précise également que la méthode proposée s'inscrit dans la suite de travaux effectués au sein du laboratoire MSSMat [90, 15, 91] , travaux dont les figures 3.1 et 3.2 donnent des illustrations. La méthodologie proposée dans ce papier consiste essentiellement : i) à enrichir par une fonction de Heaviside, à la manière de la XFEM, un modèle éléments finis d'une structure globale afin de représenter la fissure relativement loin de la pointe de celle-ci et ii) à introuduire dans le cadre Arlequin un modèle éléments finis local dans le voisinage de la fissure afin d'améliorer la précision de la solution dans cette zone critique. Ce modèle local n'est pas enrichi; son maillage est compatible avec la fissure. Les figures 3.6 et 3.7 illustrent cette démarche. Après avoir posé le problème du solide élastique fissuré dans la section 3.2 et rappelé les principaux aspects de la XFEM dans la section 3.3, la formulation ainsi que la procédure de mise en oeuvre détaillée de notre méthologie est donnée dans la section 3.4. En particulier, l'espace éléments finis enrichi pour le modèle global est donné dans l'équation (3.29) et le problème discret résultant par les équations (3.31)-(3.36). Une recommandation sur la taille de la zone libre est donnée par l'équation (3.30). Trois essais numériques attestant de la pertinence et de la flexibilité de l'approche sont présentés dans la section 3.5. Le premier d'entre eux (section 3.5.1) concerne une fissure coudée et montre que notre approche permet de capter avec precision l'interaction entre deux singulatrités proches, au travers de comparaisons avec un calcul de référence. Le second (section 3.5.2) s'interesse à la trajectoire de la propagation d'une fissure dans une poutre double-cantilever. Les résultats obtenus sont similaires à ceux obtenus par la seule XFEM dans [8]. Le dernier test numérique (section 3.5.3) illustre le potentiel de l'approche à propager une fissure d'un bout à l'autre d'une plaque carrée. Le papier est fermé par des conclusions et perspectives.

3.1 Introduction

Generation of classical regular finite element meshes that are capable of properly representing material discontinuities or accurately simulating the propagation of cracks in complex structures with high strain and stress localization is a tedious and time consuming endeavor. This explains the search over the last two decades for flexible numerical methodologies in order to efficiently tackle this difficult issue. Among others, methods that have been proposed are the so-called meshless methods, see e.g. [75, 11], the partition-of-unity method (PUM) [73, 3] and its well-known instances, namely the generalized finite element method (GFEM) (e.g. [4]) and the extended finite element method (XFEM), see e.g. ([8, 74, 38]). In these methods, somewhat reminiscent of the Treftz approach, the finite element space associated with a given coarse mesh is enriched by analytical or semi-analytical functions based on a priori knowledge of the unknown solution. In the XFEM approach, for example, one uses level set functions and asymptotic local modal functions around the cracks.

XFEM/GFEM methods are particularly relevant and effective whenever the local behavior of the solution is known.

Another class of approaches is given by the s-method [45], which is in many ways similar to the Fast Adaptive Composite-grid (FAC) method [72]. This approach can be considered as a genuine finite element method in which the coarse finite element space is locally enriched by fine scale basis functions associated with a fine mesh. Although effective in many regards, the method may suffer from redundancy. Moreover, the resulting problem in the s-method is solved globally. An approach similar to the s-method is one that involves the use of local meshes (also called patches), but whose resulting system of equations is solved by a relaxed Chimera algorithm [50, 49] (see also the Schwarz algorithm (see e.g [95])).

Our ultimate goal being the simulation of physically-based damage, localisations and crack propagation, we propose a novel and alternative approach, experienced in this paper on basic tests. The approach is based on the multimodel and multiscale Arlequin framework [13, 22, 89, 23, 52, 54]. The method essentially consists in superimposing a fine scale model (in a patch) to a large scale model combined together using a partition of energy. The construction of the resulting coupled model allows for great flexibility; indeed, one may independently refine the mesh or use different constitutive laws, governing equations, or geometries within the patch. For instance, the Arlequin framework has been recently employed for successfully coupling atomistic models with continuum models [100, 18, 7, 87].

The idea of using the Arlequin framework for the simulation of crack propagation, fatigue, or damage phenomena in a structure, has already been advanced a few years ago [90, 15, 91]. In order to expose our motivation and put in evidence our new numerical achievements, we report here some of our earlier

results. In the first example (from [90]), we considered a solid composed of two materials, one soft (rubber) and one hard (steel). The structure was submitted to a cyclic loading on the top surface, to symmetry conditions along the bottom surface, while the other two boundaries were kept free. Figure 3.1 shows the evolution of damage as well as nucleation and propagation of macroscopic cracks whenever damage exceeded a prescribed threshold.



FIGURE 3.1 – Propagation of damage and creation of a crack within the Arlequin framework (three selected snapshots)

The fine scale phenomena near the crack tip were taken into account using an Arlequin patch which was free to move and grow according to the evolution of the crack tip. In this case, the simulation was still relatively simple due to the fact that the direction of propagation was a priori known to be the straight bi-material interface. The second example, taken from [91], illustrates the crack propagation in a linearly elastic structure as shown in Figure 3.2.



FIGURE 3.2 – Propagation of a crack for the double-cantilever elastic beam (three selected snapshots)

The patch consisted of a very fine mesh at the tip and was progressively adapted following the evolution of the crack. We note that the underlying coarse mesh was kept unchanged during the whole process. Data for this test case (referred to as the double-cantilever beam test) were taken from Be-lytschko and Black [8]. The obvious drawback of the method was that the number of finite elements along the faces of the crack was far from being optimal, which unnecessarily increased the cost of the computation. Moreover, the treatment of more than one crack would quickly become an intricate issue. In this work, we propose to circumvent the aforementioned issues by introducing Heaviside enrichment functions, as in XFEM, within the Arlequin framework, with the objective of further reducing computational costs and enhancing the flexibility of crack propagation simulations in this framework. In



FIGURE 3.3 – Problem of a cracked linear elastic solid

particular, we will show that the combined approach allows us to consider smaller patches to capture the local features near the tip since Heaviside functions are used to enrich the coarse model. The main goal of the present paper is to describe the proposed methodology and to assess its performance through numerical experiments.

The paper is organized as follows. Following the introduction, we provide in Section 2 the continuous formulation of the crack problem in a linearly elastic structure. In Section 3, we recall the main features of the extended finite element method. We then show in Section 4 how enrichment functions $\dot{a} \, la$ XFEM can be incorporated into the Arlequin framework. In particular, we describe the continuous Arlequin formulation for the crack problem in Subsection 4.1. The discrete counterpart is given in Subsection 4.2 and practical aspects related to numerical integration are detailed in Subsection 4.3. Numerical results in order to assess the performance of our approach are then presented in Section 5. We use to that effect two examples, one dealing with the simulation of a kinked crack and the double-cantilever beam test case. In these two examples, the patch is strictly contained in the interior of the global domain (no intersection between the boundary of the patch and the global domain boundary). A third numerical example shows the feasibility of the simulation of the propagation of a crack from a side of a square plate to the opposite one. This example shows, in particular, how the patch is adapted easily when it hurts the boundary of the global domain. The paper closes with concluding remarks and some ongoing works in Section 6.

3.2 Formulation of a cracked elastic body problem

Let us consider a linear elastic cracked solid, occupying the closure of a bounded domain Ω_0 . For the sake of clarity, we will consider the bidimensional case. The boundary of the solid is partitioned into Γ_u , Γ_g , Γ^+ and Γ^- , where Γ_u is the part where the solid is clamped and Γ_g is the part on which an applied density of loads g is given. The other two parts of the boundary Γ^+ and Γ^- define the faces of the crack whose tip is denoted by o (see figure 3.3). It is assumed that the crack is closed in the undeformed configuration of the solid. Thus, from a geometrical point of view, we have $\Gamma^+ \equiv \Gamma^- \equiv \Gamma$. But free boundary conditions are applied on Γ^+ and Γ^- in the remainder of the article. That is to mean that no unilateral contact loads are considered between the faces of the crack. Moreover, for the sake of conciseness, we neglect external body forces.

The classical weak form of the linearized primal elastic problem reads :

find
$$\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_0; \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_0$$

 $a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v})$ (3.1)

where :

$$\boldsymbol{V}_0 = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^1(\Omega_0); \ \boldsymbol{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u \right\}$$
(3.2)

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega_0} \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \, dx \tag{3.3}$$

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_g} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma \tag{3.4}$$

with σ and ϵ standing for the stress and linearized strain tensors, the stess tensor being related to $\epsilon(u) = \nabla_s(u)$ by the Hooke's law :

$$\sigma_{ij}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{R}_{ijkl} \epsilon_{kl}(\boldsymbol{u}) \quad in \quad \Omega_0 \tag{3.5}$$

where the Einstein's convention of summation on repeated indices is used and where the elasticity tensor R is assumed to verify :

$$\boldsymbol{R}_{ijkl} = \boldsymbol{R}_{jikl} = \boldsymbol{R}_{klij} \quad \text{(symmetry)} \tag{3.6}$$

$$\exists c_0; \quad \mathbf{R}_{ijkl} \tau_{ij} \tau_{kl} \ge c_0 \tau_{ij} \tau_{ij}, \quad \forall \tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \text{(coercivity)}$$
(3.7)

$$\boldsymbol{R}_{ijkl} \in L^{\infty}(\Omega_0)$$
 (regularity) (3.8)

For a classical conforming finite element approximation of this problem, the mesh has to match the crack. But since the latter may propagate into the solid without necessarily fiting the existing mesh edges, one has to generate repetively new meshes compatible with the evolution of the crack in order to achieve an accurate numerical approximation of the problem solution. This procedure is clearly unflexible and costly. The Extended Finite Element Method is one of the most efficient methods that has been designed to address this issue. Since the XFEM is partly used in our approach, its main features are recalled in the next section where some notations are introduced.

3.3 XFEM discretisation

The XFEM discretization of the problem (3.1)-(3.5) consists in constructing a finite dimensional subspace of V_0 by enrichment of a classical finite element subspace of

$$\boldsymbol{V}_{0}^{\Gamma} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1}(\Omega_{0}^{\Gamma}); \ \boldsymbol{v} = 0 \text{ in } \Gamma_{u} \right\}$$
(3.9)

where $\Omega_0^{\Gamma} = \Omega_0 \cup \Gamma$ denotes the uncracked domain.

This is done as follows. Let T_h be a mesh of the uncracked solid whose edges do not necessarily match Γ . Let $(\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n)$ denote a basis spanning a classical Lagrange finite element space V_{0h}^{Γ} , associated to T_h (see e.g. [35, 55, 102]) and assumed to be a subspace of V_0^{Γ} . The compact support of a shape function φ_i is denoted by ω_i and its interior by $\hat{\omega_i}$. The set of indices k such that $o \in \omega_k$ is denoted by K^s ($K^s = \{7, 8, 9, 10\}$ in the scalar case depicted by figure 3.4). The set of indices k such that $k \notin K^s$ and $\hat{\omega_k} \cap \Gamma \neq \emptyset$ is denoted by \mathcal{M}^d . The latter is divided by the crack Γ into two domains, denoted by Ω_d^+ and Ω_d^- . A precise definition of the domain Ω_d^+ (and thus of Ω_d^-) relies on the signed distance function : by defining at each point $\mathbf{p} \in \Gamma$ a classical positively oriented frame (τ_p, ν_p) where τ_p and ν_p refer to unit tangent and normal vectors to the crack at point \mathbf{p} (see figure 3.5), one can associate to each point $\mathbf{x} \in \Omega_d$ (one of) its nearest point(s) \mathbf{x}^* on Γ (as in contact mechanics, e.g. [24]). The domain Ω_d^+ is then defined by : (see figure 3.5)

$$\Omega_d^+ = \{ \boldsymbol{x} \in \Omega_d \; ; \; (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^*) \cdot \boldsymbol{\nu}_{\boldsymbol{x}^*} \ge 0 \}$$
(3.10)


FIGURE 3.4 – XFEM discretization

	Ω_d^+			
φ_1	φ_2	$arphi_3$	$\varphi_7 \uparrow^r$	φ_8
			1 o	
φ_4	φ_5	$arphi_6$	$arphi_9$	φ_{10}
	Ω_d^-			

FIGURE 3.5 – Local frame

The XFEM finite dimensional space is then defined by :

$$\boldsymbol{V}_{0h} = span\left\{(\boldsymbol{\varphi}_i)_{i=1,n}, (H\boldsymbol{\varphi}_j)_{j\in K^d}, (F_k\boldsymbol{\varphi}_l)_{k=1,4; \ l\in K^s}\right\}$$
(3.11)

where H refers to the sign-like field, defined by :

$$H(x) = \begin{cases} +1 \text{ in } \Omega_d^+ \\ -1 \text{ elsewhere} \end{cases}$$
(3.12)

and where the functions F_j are given by : (see e.g.[8, 74, 38, 62, 34], for details and more general considerations)

$$\{F_j(r,\theta), \ j=1,4\} = \left\{\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\}$$
(3.13)

with (r, θ) referring to the polar coordinates in the local frame (o, τ_o, ν_o) (see figure 3.5). Observe here that the enriched XFEM solution is defined by :

$$\boldsymbol{u}_{h0} = \sum_{i=1,n} u_i \boldsymbol{\phi}_i + \sum_{j \in K_d} a_j H \boldsymbol{\phi}_j + \sum_{k=1,4} \sum_{l \in K^s} b_l^k F_k \boldsymbol{\phi}_l$$
(3.14)

where $(u_i)_{i=1,n}$, $(a_j)_{j \in K_d}$ and $(b_l^k)_{k=1,4; l \in K^s}$ are the unknown degrees of freedom.

To summarize, for the simulation of a cracked solid, XFEM is based on a double enrichment of classical finite element spaces by :

- a localized sign-like field that reproduces the material discontinuity due to the crack;
- localized asymptotic modes in the near crack tip zone.

The first enrichment could be considered as universal. In the contrary, for general mechanical problems, the asymptotic knowledge of the behaviour of the solution in critical zones is unfortunately unavailable and one has to resort to numerical approximations in these zones. For the numerical treatment of these general problems, we suggest here to use only the first enrichment within the Arlequin framework.

3.4 Use of XFEM within the Arlequin framework

In this section, by using the Arlequin framework, a local model is super-imposed to the global one in the neighborhood of the crack tip (see figure 3.6). The two models are combined together using a partition of energy and a coupling operator, leading to a continuous Arlequin formulation of the problem, detailed in Subsection 4.1.

A first key (modeling) feature of this continuous formulation is that it allows us, by means of different



FIGURE 3.6 – Arlequin domains

approximations of the super-imposed models, to elaborate multimodel (and also multiscale) discrete formulations. The one elaborated in Subsection 4.2 uses : (see figure 3.7)

- the XFEM to enrich a coarse global finite element approximation of the global model;
- a fine finite element space for the approximation of the local model. (Observe here that discrete models such as atomistic ones can also be used locally instead of the continuum elasticity model [100, 18, 7, 87], but these topics are not considered in this paper).



FIGURE 3.7 – Examples of meshes for the two arlequin models

A second key (computational) feature of the Arlequin formulation is related to its substructuring character which allows for the use of domain decomposition-like solvers (see e.g. [43, 19]).

3.4.1**Continuous Arlequin Formulation**

Let Ω_1 be a (copy of a) non-zero measured given regular subdomain of Ω_0 , located in the near crack tip zone. We assume for clarity that Ω_1 is strictly embedded in Ω_0 (see figure 3.6). This subdomain is partitioned into two regular non overlapping domains Ω_c and Ω_f such that (see figure 3.8) :

$$\boldsymbol{o} \in \Omega_f \tag{3.15}$$

$$\partial\Omega_1 \subset \partial\Omega_c \tag{3.16}$$

$$meas(\Omega_i) > 0, i = c, f \tag{3.17}$$



The domains Ω_c and Ω_f are the models *coupling* and *free* zones. In the former, the models are coupled; so that they have to be quite similar. In the latter, the models are super-imposed but free from each other; so that they can potentially be very different.

A Lagrangian Arlequin formulation of our problem, using an energy scalar product as coupling operator,

reads as following : (see e.g. [22, 23, 17])

Find
$$(\boldsymbol{u}_0, \, \boldsymbol{u}_1, \, \boldsymbol{\Phi}) \in \boldsymbol{V}_0 \times \boldsymbol{V}_1 \times \boldsymbol{M}$$
; (3.18)

$$\forall \, \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0, \quad a_0(\boldsymbol{u}_0, \, \boldsymbol{v}_0) + c(\boldsymbol{\Phi}, \, \boldsymbol{v}_0) = l_0(\boldsymbol{v}_0) \tag{3.19}$$

$$\forall \boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{V}_1, \quad a_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) - c(\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{v}_1) = 0 \tag{3.20}$$

$$\forall \Psi \in \boldsymbol{M}, \quad c(\Psi, \,\boldsymbol{u}_0 - \boldsymbol{u}_1) = 0 \tag{3.21}$$

where V_0 is defined by (3.2) and where $V_1 = H^1(\Omega_1)$ and the mediator space $M = H^1(\Omega_c)$. Furthermore, for i = 0, 1, the weighted internal and external virtual works are defined by :

$$\forall \mathbf{u}_i, \, \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i, \quad a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = \int_{\Omega_i} \alpha_i \, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_i) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_i) \, dx \tag{3.22}$$

$$\forall \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0, \quad l_0(\boldsymbol{v}_0) = \int_{\Gamma_n} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}_0 \, d\gamma \tag{3.23}$$

The internal energy weight parameter functions (α_i) , i = 0, 1, are defined in the whole domain Ω_0 and satisfy : ([16, 17])

$$\alpha_i \in [0, 1] \text{ in } \Omega_0 \tag{3.24}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \text{ in } \Omega_0 \tag{3.25}$$

$$\alpha_0 = 1 \text{ in } \Omega_0 \backslash \Omega_1 \tag{3.26}$$

$$\exists \alpha_{\min} > 0; \ \alpha_i \geqslant \alpha_{\min} \ \text{in} \ \Omega_f \tag{3.27}$$

The coupling operator c is defined by :

$$\forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_i) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{V}_i , c(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_i) = \int_{\Omega_c} \kappa_0 \left\{ \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{v}_i \right\} + \kappa_1 \left\{ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_i) \right\} dx$$
(3.28)

The positive parameters κ_0 and κ_1 are chosen such that the two terms defining c are homogeneous. In the numerical section, we have taken, as in [23], $\kappa_0 = 1$ and $\kappa_1 = l_c^2$, where l_c refers to the thickness of the coupling zone Ω_c .

Before closing this subsection, let us here recall two mathematical results concerning the Arlequin problem, defined above :

- Stability : the mixed Arlequin problem, defined by (3.19)-(3.28), has been analyzed mathematically and proved to be well-posed in [17] and previously in [21], but under more stringent conditions on the α_i (not allowing for regular α_i).
- Relevance of the Arlequin formulation : if one modifies, for Ω_0 , the part of the crack contained in Ω_f , without modifying the same part of the crack for the local domain Ω_1 , then, under some appropriate hypotheses on the data [17]; mainly when, the restriction to Ω_f of α_1 is a constant that goes to 1, the solution of the problem (3.19)-(3.28) converges to the solution of the (mono-)model problem, defined in Section 2. This result, proved in [17] and assessed by previously published numerical tests (e.g. [22, 23, 17]), is used in the sequel for a flexible construction of the discrete Arlequin problems.

3.4.2 Discretisation of the Arlequin problem using XFEM

To solve efficiently the Arlequin problem defined in the previous subsection, we suggest the following scheme : let T_h^0 be a mesh of the unfractured domain Ω_0^{Γ} . Let T_h^1 be a mesh of Ω_1 , significantly finer than T_h^0 , especially in the very near crack tip zone. Let Ω_o^s denote the set of elements of T_h^0 containing the crack tip \boldsymbol{o} . Let Γ_0 denote the part of the crack Γ exterior to Ω_o^s . Finally, let $B_0 = (\varphi_{0i}, i = 1, n_0)$ be a classical vector-valued finite element basis associated to the mesh T_h^0 and denote by \boldsymbol{V}_{0h}^r the finite element space spanned by B_0 .

Referring to XFEM recalled in Section 3, the coarse space V_{0h}^r is enriched as following :

let K_0^d be the set of indices k such that $\hat{\omega}_k \cap \Gamma_0 \neq \emptyset$ (recall that $\hat{\omega}_k$ stands for the interior of the support of the basis function φ_{0k}). Let Ω_d denote the union of these supports and define Ω_d^+ as in (3.10). The space V_{0h}^r is enriched by the space $V_{0h}^d = \text{span } \{H\varphi_{0j}, j \in K_0^d\}$ where H is the sign field, defined by (3.12).

The following finite dimensional space :

$$\boldsymbol{V}_{0h} = \boldsymbol{V}_{0h}^r + \boldsymbol{V}_{0h}^d = span\{(\boldsymbol{\varphi}_{0i})_{i=1,n_0}, (H\boldsymbol{\varphi}_{0j})_{j\in K_0^d}\}$$
(3.29)

is then taken as an approximation of V_0 .

Now, based on the fine mesh T_h^1 of the cracked subdomain Ω_1 , a classical finite element subspace of V_1 , denoted V_{1h} , is constructed. The discrete mediator space, denoted M_h , is taken as the restriction of V_{1h} to the coupling zone Ω_c (though other choices are possible, as reported in [23, 17]). Finally, when using low order finite elements to generate the coarse spaces V_{0h} , we assume that :

$$\Omega_o^s \subset \Omega_f \tag{3.30}$$

The condition (3.30) is a kind of relaxation of the condition (3.15). It takes into account the finite scale introduced by the coarse discretization and means that the free zone Ω_f has at least to contain the coarse elements that contain the singular crack tip. Its optimality in the discrete finite element framework as a low bound for the size of Ω_f is assessed in the numerical Section (see also [19] for other investigations on this topic).

With these finite dimensional spaces, our discrete enriched finite element approximation of the problem defined by (3.19)-(3.28), using XFEM, reads as follows.

Find
$$(\boldsymbol{u}_{0h}^{r}, \boldsymbol{u}_{0h}^{d}, \boldsymbol{u}_{1h}, \boldsymbol{\phi}_{h}) \in \boldsymbol{V}_{0h}^{r} \times \boldsymbol{V}_{0h}^{d} \times \boldsymbol{V}_{1h} \times \boldsymbol{M}_{h};$$

 $\forall (\boldsymbol{v}_{0h}^{r}, \boldsymbol{v}_{0h}^{d}, \boldsymbol{v}_{1h}, \boldsymbol{\psi}_{h}) \in \boldsymbol{V}_{0h}^{r} \times \boldsymbol{V}_{0h}^{d} \times \boldsymbol{V}_{1h} \times \boldsymbol{M}_{h}$
 $a_{0}(\boldsymbol{u}_{0h}^{r}, \boldsymbol{v}_{0h}^{r}) + a_{0}^{d}(\boldsymbol{u}_{0h}^{d}, \boldsymbol{v}_{0h}^{r}) + c(\boldsymbol{\phi}_{h}, \boldsymbol{v}_{0h}^{r}) = l_{0}(\boldsymbol{v}_{0h}^{r})$

$$(3.31)$$

$$a_0^d(\boldsymbol{u}_{0h}^r, \boldsymbol{v}_{0h}^d) + a_0(\boldsymbol{u}_{0h}^d, \boldsymbol{v}_{0h}^d) + c^d(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{v}_{0h}^d) = l_0(\boldsymbol{v}_{0h}^d)$$
(3.32)

$$a_1(\boldsymbol{u}_{1h}, \boldsymbol{v}_{1h}) - c(\boldsymbol{\phi}_h, \boldsymbol{v}_{1h}) = 0$$
(3.33)

$$c(\boldsymbol{\psi}_{h}, \boldsymbol{u}_{0h}^{r} - \boldsymbol{u}_{1h}) + c^{d}(\boldsymbol{\psi}_{h}, \boldsymbol{u}_{0h}^{d}) = 0$$
(3.34)

where :

$$a_0^d(\boldsymbol{u}_{0h}^r, \boldsymbol{v}_{0h}^d) = \int_{\Omega_0 \cap \Omega_d^+} \alpha_0 \,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{0h}^r) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_{0h}^d) \, dx + \int_{\Omega_0 \cap \Omega_d^-} \alpha_0 \,\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u}_{0h}^r) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_{0h}^d) \, dx \tag{3.35}$$

$$c^{d}(\boldsymbol{\psi}_{h},\boldsymbol{u}_{0h}^{d}) = \int_{\Omega_{c}\cap\Omega_{d}^{+}} \left\{ \kappa_{0}\boldsymbol{\psi}_{h}\cdot\boldsymbol{u}_{0h}^{d} \right\} + \kappa_{1}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_{h}):\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{0h}^{d})) dx \qquad (3.36)$$
$$+ \int_{\Omega_{c}\cap\Omega_{d}^{-}} \left\{ \kappa_{0}\boldsymbol{\psi}_{h}\cdot\boldsymbol{u}_{0h}^{d} \right\} + \kappa_{1}\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}_{h}):\boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}_{0h}^{d})) dx$$

As a matter of fact, one can observe that, unless the crack tip \boldsymbol{o} belongs to the boundary $\partial\Omega_d$, the space V_{0h} is not a subspace of V_0 . Indeed, assume that the crack tip $\boldsymbol{o} \notin \partial\Omega_d$ (see figure 3.9). Under this hypothesis, the set Ω_o^s is necessarily composed of only one element of T_h^0 . Consider now the subset of basis functions $\varphi_{0k}^d = H\varphi_{0k}$ such that Ω_o^s is included in the support ω_k of φ_{0k} . These functions are clearly discontinuous, not only on the part of the crack tip \boldsymbol{o} till the point \boldsymbol{o}' where the extension crosses the boundary of Ω_o^s (see figure 3.9). Thus, the discrete problem, defined by (3.31)-(3.33), is a non-conforming approximation of the continuous problem (3.19)-(3.28). However, and this

is one of the main features of the Arlequin method recalled at the end of the previous subsection, this non-conformity is with no significant impact on the solution when the Arlequin parameters are chosen appropriately : in the considered scenario, with a sufficiently large free zone, one has simply to take the weight parameter α_1 constant and approximately equal to one in Ω_f to stress the patch model and compute a good Arlequin solution.



FIGURE 3.9 – Element containing the crack tip

3.4.3 Some computational aspects

The discrete problem (3.31)-(3.34) is equivalent to the following linear mixed system :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{0}^{rr} & \mathbf{K}_{0}^{rd} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{0}^{r} \\ \mathbf{K}_{0}^{rd}^{\top} & \mathbf{K}_{0}^{dd} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_{0}^{d} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{1} & \mathbf{C}_{1} \\ \mathbf{C}_{0}^{r\top} & \mathbf{C}_{0}^{d^{\top}} & \mathbf{C}_{1}^{\top} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{0}^{r} \\ \mathbf{U}_{0}^{d} \\ \mathbf{U}_{1} \\ \Phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{0}^{r} \\ \mathbf{F}_{0}^{d} \\ \mathbf{F}_{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$
(3.37)

The stiffness matrix \mathbf{K}_0^{rd} involves terms that require specific numerical integration, when compared to the ones developed for the standard Arlequin formulation, given in [23] and for the XFEM, given in [74]. Indeed, the generic terms of \mathbf{K}_0^{rd} read :

$$(\mathbf{K}_{0}^{rd})_{ij} = a_{0}^{d}(\varphi_{0i}, \varphi_{0j}^{d})$$
(3.38)

where φ_{0i} is an element of the basis of V_{0h}^r and where φ_{0j}^d is an element of the basis of V_{0h}^d . These terms are classically evaluated by summing elements contributions. However, one may have particular situations where coarse elements are crossed by the coupling zone boundary and the crack. For each of these particular elements, one has to create an integration mesh that fits both the parts of the coupling zone boundary and the crack, contained in this element, as shown in figure 3.10, in order to use classical quatrature formulae in this integration mesh.

Before giving some numerical results, let us observe that system (3.37) is similar to systems derived by domain decomposition methods. It can then be solved by Krylov solvers. Very recently, the FETI method [43] has been adapted to the solution of such systems [19] and proved to be very efficient. This efficiency is due in particular to the fact that thanks to the energy coupling operator involved by the Arlequin formulation, it is possible de derive "natural" local pre-conditioners (see [19], for details).



FIGURE 3.10 – Mesh subdivision for the integration issue

3.5 Numerical results

Three tests are considered in this Section to assess the methodology developed in this paper. For the three of them, we have taken $\alpha_0 = 0$ in the coupling zone and $\alpha_0 = 10^{-3}$, in the free zone. The first involves a 2D-structure with a kinked crack; the kink being very close to the crak tip. Our results are compared to the ones obtained with a classical globally refined finite element model. The propagation of a crack in an elastic beam is studied as a second test and our results are compared to those obtained in [8]. The third result shows the capability of the method to propagate a crack from a side to the opposite one of a square plate. Let us observe here that for all of the tests, there is no compatibility requirement between the coarse and fine meshes.

3.5.1 A kinked crack

We consider a homogeneous and isotropic cracked elastic plate in plane strain conditions. The dimensions of the plate (in meters) are given in figure 3.11. The Young modulus is equal to $210^5 MPa$ and the coefficient of Poisson is equal to 0.3. The plate is clamped on its lower edge. A given normal displacement is prescribed on the upper edge. The two other edges are free. A straight crack is deviated sharply with a relatively small increment as shown by figure 3.11. This situation may represent the deviations of a crack during its propagation with small and unknown increments. For the numerical simulation of this test, the two interacting singularities have to be considered, either by introducing the appropriate singular modes by XFEM, for instance, or, as done here, by refining sufficiently the local domain mesh around the two singular points.

For comparison purpose, we have first computed a classical globally refined monomodel finite element solution. The mesh size in the near crack tip is taken equal to about 0.02m in the very near crack tip zone. The deformed mesh is shown in figure 3.12.

Three cases are computed with our methodology.

In the first, a uniform quadrangular 9×9 elements fixed mesh is used for the global domain. The edges of this mesh do not match the crack. The patch is a disk of radius r = 1.2m, centered at the crack tip.



FIGURE 3.11 – Kinked crack problem

The coarse element, of diameter $H_c = 1.73m$, containing the two hot points (the kink and the crack tip) is included in the free zone. The thickness of the coupling zone is taken equal to r/8 and the mesh size of the patch in the very near crack tip zone is of about 0.02m.

The deformed meshes are given in the left part of figure 3.13. A zoom of the critical zone is shown in the right part of this figure. The red lines represent the position of the deformed faces of the crack in the global model. One can observe that while the coarse deformed crack does fit the fine crack in the coupling zone, the two surfaces do not match in the free zone. But, as mentioned at the end of Subsection 3.4.2, this is with no impact on the Arlequin solution, dominated by the fine local solution in this zone thanks to the fact that the fine model is stressed in this zone by choosing its weight parameter α_1 nearly equal to 1 (here, $\alpha_1 = 0.999$).

Figure 3.14 shows the Von Mises stresses at the Gauss quadrature points of the patch and one can notice that the two singularities are captured (up to the precision of the used numerical models : no h-adaptivity is herein carried out).

The similarity of the reference solution given in figure 3.12 with the one shown in figure 3.13 is clear.

For further comparison, stress intensity factors KI and KII and energy release rates G are computed for the considered reference monomodel and for Arlequin-XFEM models with patches having radii varying from 0.2m to 3m, with 0.125 ratio between the thickness of the coupling zone and the radius of the patches. The right part of figure 3.15 shows a reasonable decrease, followed by a stabilisation of the error with the increase of the ratio between the radius of the free zone, denoted by R_f , and the coarse mesh size, denoted by H_c . Notice that the relative error is already less than 5% when $\frac{R_f}{H_c}$ is greater than 0.8 and of order 1% when this ratio is of order 1. The left part of figure 3.15 shows the same tendency for local relative displacement errors $e_1 = \frac{(u_y(\mathbf{o}) - u_y^{ref}(\mathbf{o}))}{u_y^{ref}(\mathbf{o})} \times 100$ and $e_2 = \frac{(u_y(\mathbf{k}) - u_y^{ref}(\mathbf{k}))}{u_y^{ref}(\mathbf{k})} \times 100$, at the two critical points \mathbf{o} and \mathbf{k} , shown in figure 3.16. One can also notice significant errors when the radius of the free zone is too small with respect to H_c . In figure 3.17, we show the deformed meshes for such an inappropriate choice of the free zone dimension. These results are to be linked to hypothesis (3.30).

In a second case, the same procedure has been used by changing only the coarse mesh size : a 19×19 coarse structured mesh is used instead of the 9×9 mesh. In this case, the diameter of the coarse elements is $H_c = 0.74m$. The obtained results are shown in figure 3.18. A remarkable feature is the similarity of the profile of error between the two considered numerical models. For instance, for



FIGURE 3.12 – Classical globally refined monomodel finite element solution

both models, the error in terms of stress intensity factors and energy release rate, is of order 1% when the ratio $\frac{R_f}{H_c}$ is of order 1.

In a third case, the uniform quadrangular 19×19 elements fixed mesh is used for the global domain, as in the second case. But in this third case, the patch is a disk of a fixed radius r = 1.5m, centered at the crack tip. It is meshed finely as in the first test. We have considered various thiknesses of the coupling zone which induce various radii R_f for the free zones, while keeping fixed the patch mesh. The same comparisons in terms of the same quantities of interest as for the first and second tests are reported in figure 3.19.

One can observe the same tendency, with more regular decrease of the errors with the increase of $\frac{R_f}{H_c}$. This can be explained by the fact that in the considered case, the fine local mesh is kept fixed, while it is not in the first and second ones.

3.5.2 The double-cantilever beam test

The test studied in [8] and shown in the introduction of the present paper is analyzed here by our new methodology. It consists in a rectangular $L \times h 2D$ homegeneous and isotropic elastic structure in plane stress conditions, with L = 0.3m and h = 0.1m. The Young modulus is equal to $210^5 MPa$ and the Poisson coefficient is equal to 0.3. The structure contains an initial straight crack of lenght a = 0.1m, aligned with the x axis. A small increment of 0.002m with an angle θ of 5.71° is added to the initial crack and the structure is submitted to a symmetric pointwise opening loading P = 877N, as shown in figure 3.20. We study the quasi-static growth of the crack. The used procedure is the following : the stress intensity factors using the domain form of the interaction integrals are computed. With these quantities, the propagation angle, corresponding to the maximum orthoradial stress $\sigma_{\theta\theta}$ is evaluated and the crack is advanced 0.002m in this direction.

Figure 3.21 shows the propagation of the crack which is qualitatively similar to the one obtained in [8]. Figure 3.22 shows zooms of the crack tip zone at the last step of the propagation. The deformed meshes are given by the left part of the figure and the Von Mises stresses in the quadrature points of



FIGURE 3.13 – Deformed meshes of the substrate and the patch

the patch's mesh by the right part.

3.5.3 From a side-to-another propagation of a crack in a square plate

In this last test, we consider a square homegeneous and isotropic elastic plate in plane strain conditions, with an initial relatively small crack. The dimensions of the plate are given in figure 3.23. The Young modulus is equal to $2 \, 10^5 MPa$ and the Poisson coefficient is equal to 0.3. The initial straight crack of lenght 0.1m is aligned with the x axis. The plate is clamped on its lower edge and submitted to opening loads on its upper edge. The reminder of the boundary is free. A coarse and fixed uniform 9X9 bilinear finite element space is used for the approximation of the coarse Arlequin solution. When completely included in the global domain, the radius of the considered (whole) patch is equal to 1.5m and the thickness of the coupling zone is equal to 0.2m. The mesh size of the patch, in the near crack tip zone, is taken equal to 0.01m.

The patch geometry is adapted whenever it touches the boundary of the plate. This is simply realized by considering the restriction of the whole patch to the global domain. Observe then that the coupling zone is no more the crown satisfying the condition (3.16), but the portion of the crown, satisfying the following adapted condition :

$$\partial\Omega_1 \cap \Omega_0 \subset \partial\Omega_c \tag{3.39}$$

The same procedure as the one used in the previous subsection is used for the quasi-static propagation of the crack. Four snapshots of the deformed meshes during the propagation of the crack are represented in figure 3.24. A zoom of the crack tip zone in the first opening step is given in figure 3.25. This test could possibly be delicate to achieve with classical enrichment methods.

3.6 Conclusion

A new methodology using the Heaviside enrichment key feature of the extendend finite element method within the Arlequin framework has been developed in this paper for flexible simulations of kinked cracks and the propagation of cracks. When compared to our previous works (e.g. [23]), the new methodology reduces significantly the global computational costs since a small cracked patch is used in the working zone; the part of the crack located outside of the critical zones being taken into account by means of a Heaviside function.



FIGURE 3.14 – Interaction between the sigularities on the patch mesh



FIGURE 3.15 – Evolution of the error on chosen mechanical quantities of interest with the increase of the radius of the free zone and with a fixed ratio of patch radius vs. free zone radius

For the propagation of a crack, the patch, finely meshed, is attached to the crack tip and moves with it over the underlying global domain, approximated by a fixed coarse finite element enriched by a Heaviside function.

This methodology is assessed in this paper by some simple but relevant mecanical tests. A kinked crack is calculated by following two different scenarii. For both of these scenarii, reasonable low errors, in terms of quantities of interst, are reached when the size of the free zone is of the same order than the size of the coarse elements containing the singularities. The potential of the methodology to propagate cracks with significantly enhanced flexibility is shown by firstly investigating a double cantilever test without using a priori knowledge of the local singular modes. Our results are shown to compare qualitatively well with the ones given by Belytschko and Black [8]. Secondly, a final feasibility test is carried out to show the capapility of the method to propagate a crack from a side to another of a structure by adapting the patch geometry.

The extension of this methodology to the simulation of the propagation of cracks, while taking into account more complex physics in the working zones, is an ongoing work.



FIGURE 3.16 – Nodes of interest



FIGURE 3.17 – Deformed meshes for inappropriate choice of the free zone dimension



FIGURE 3.18 - Evolution of the error on chosen mechanical quantities of interest with the increase of the radius of the free zone and with a fixed ratio of patch radius vs. free zone radius



FIGURE 3.19 - Evolution of the error on chosen mechanical quantities of interest with the increase of the radius of the free zone and fixed patch radius



FIGURE 3.20 – Geometry of the double cantilever beam test



FIGURE 3.21 – Deformed meshes of the substrate and the patch



FIGURE 3.22 – Zoom of the near crack tip zone $% \mathcal{F}_{\mathrm{S}}$



FIGURE 3.23 – Mode 1 propagation problem



FIGURE 3.24 – Deformed meshes of the substrate and the patch



FIGURE 3.25 – Zoom on the initial crack at the beginning of the propagation

Chapitre 4

Extension à la propagation d'endommagement

Sommaire

4.1	Transition du o	champ d'endommagement à la fissure macroscopique $\ldots \ldots \ldots 42$	
	4.1.1 Elémen	ts bibliographiques	1
	4.1.2 Modèle	heuristique adopté	
4.2	Implémentation	n numérique et algorithme	
	4.2.1 Approx	timations du modèle de fatigue pour la simulation	<u>.</u>
	4.2.2 Transfe	ert du champ d'endommagement 45)
	4.2.3 Algorit	hme	,
4.3	Illustrations nu	umériques	5
	4.3.1 Eprouv	rette CT)
	4.3.2 Poutre	Single Edge Notch (SEN) 50)
4.4	Commentaires	et conclusions $\ldots \ldots 52$)

Dans le chapitre précédent, on a présenté une méthodologie numérique permettant de propager une fissure modélisée par une discontinuité du champ de déplacement dans une structure. Concernant le traitement de la problématique générale de simulation de l'initiation et de la propagation de fissures dans un pneumatique sous chargement cyclique, on propose dans ce chapitre de franchir une étape supplémentaire.

Traditionnellement, la tenue mécanique d'une structure soumise à une déformation est analysée sous deux angles différents : la mécanique de la rupture et la mécanique de l'endommagement. La mécanique de la rupture s'intéresse à la criticité de macro-fissures existantes ainsi qu'à leur stabilité. La mécanique de l'endommagement s'intéresse à une phase amont, celle de la dégradation progressive dans le volume des propriétés mécaniques du matériau à des échelles microscopiques (telle que présentée au chapitre 2) amenant à l'avènement de fissures macroscopiques. Contrairement à la mécanique de la rupture, la mécanique de l'endommagement est par nature capable de reproduire une dégradation diffuse et progressive des matériaux. Elle s'est montrée efficace au cours des premières phases d'apparition et d'expansion de micro-fissures, au début du processus de ruine du matériau. Cependant, comme nous l'avions mentionné au chapitre 2, il est indispensable de régulariser un modèle mécanique d'endommagement en introduisant un caractère non-local permettant d'éviter, notamment, une dépendance pathologique au maillage dans une simulation éléments finis. Cette délocalisation peut conduire à une dégradation de la réponse de ces modèles d'endommagement au cours des phases finales du processus de ruine du matériau dûe à leur incapacité à reproduire des surfaces de rupture : l'endommagement a tendance à s'étendre de manière irréaliste (cf. [94]). De plus, la simulation numérique d'un modèle unique dans lequel coexistent des zones intègres et des zones très fortement endommagées est délicate à cause du mauvais conditionnement des systèmes discrets résultants.

L'objectif de ce chapitre est de présenter une stratégie numérique permettant de « combiner » mécanique de l'endommagement et mécanique de la rupture. Cette procédure est appliquée à la simulation de l'intégralité d'un processus de ruine des matériaux d'un pneumatique soumis a un chargement de fatigue; de l'apparition de micro-fissures à la propagation de macro-fissures.

Pour cela, une modélisation de l'endommagement des matériaux par fatigue est prise en compte dans la méthodologie présentée au chapitre précédent [20]. Les processus d'initiation et de propagation de macro-fissures sont gouvernés par l'évolution du champ d'endommagement. Soulignons ici et de nouveau, le fait que notre objectif est de démontrer une faisabilité de la stratégie numérique adoptée et aucunement de fournir des résultats prédictifs. Ainsi, les différents modèles mécaniques utilisés sont « basiques » et simplifiés (peut-être même incohérents entre eux). Mais les difficultés introduites nous paraissent représentatives de celles rencontrées avec des modèles physiquement plus réalistes.

On considère une modélisation de l'endommagement des matériaux telle que présentée dans le chapitre 2. En particulier, on suppose un endommagement par fatigue à cumul linéaire, de la forme donnée par l'équation (2.23). Ainsi, le comportement en fatigue du matériau est donné par des courbes de Wölher. Par ailleurs, le champ d'endommagement est délocalisé à la manière de ce qui est présenté dans la section 2.8 (convolution avec une gaussienne du taux d'endommagement). Cette délocalisation introduit un nouveau paramètre matériau, difficilement accessible : la distance de délocalisation. La contrainte équivalente considérée est celle donnée par l'équation (2.28). Enfin, pour gouverner les phénomènes d'initiation et de propagation de macro-fissures par le champ d'endommagement, on introduit un nouveau modèle de transition d'un champ d'endommagement à une fissure macroscopique ainsi qu'une procédure pragmatique de transfert du champ d'endommagement.

Dans la section 4.1, nous présentons le modèle que nous proposons pour la transition d'un champ d'endommagement à une fissure macroscopique. La section 4.2 est consacrée à l'intégration du modèle de fatigue et de transition endommagement/fissure dans l'approche présentée dans le chapitre 3. Enfin, la section 4.3 présente des illustrations numériques de la méthodologie proposée.

4.1 Transition du champ d'endommagement à la fissure macroscopique

4.1.1 Eléments bibliographiques

On trouve dans la littérature relativement peu de propositions de stratégies numériques pour combiner les mécaniques de l'endommagement et de la rupture. On évoquera ici quelques publications traitant de cette problématique.

Dans [99] et [94], une fissure est introduite dans le matériau lorsqu'une grandeur mécanique choisie (déformation équivalente pour [99], niveau d'endommagement pour [94]) atteint une valeur critique. La direction de la fissure est donnée par un modèle heuristique produisant une direction de propagation. De plus, dans [94], les auteurs traitent de la problématique de transmission d'information à travers la macro-fissure posée par la délocalisation du modèle d'endommagement. En effet, sans précautions particulières, l'utilisation d'un modèle d'endommagement non-local conduit à ce que l'endommagement du matériau situé d'un coté de la macro-fissure soit directement affecté par l'endommagement du matériau situé de l'autre coté de celle-ci ; ce qui est physiquement inacceptable.

Dans [37], les auteurs se donnent une estimation analytique de la largeur des bandes de localisation de la déformation en fonction du niveau d'endommagement. Une macro-fissure est introduite lorsque la taille des élements du maillage devient trop grande par rapport à cette largeur de bande estimée. La « perte » d'énergie occasionnée par l'introduction de la macro-fissure est compensée par l'introduction d'une loi cohésive adaptée. Dans [46] et [27], les auteurs proposent une approche originale et unifiée concernant l'initiation (qui relève classiquement de la mécanique de l'endommagement) et la propagation de fissures (qui relève classiquement de la mécanique de la rupture). En particulier, ils font l'hypothèse qu'à tout instant, la structure considérée est dans un état qui minimise une énergie qui dépend du champ de déplacement mais aussi de la distribution des fissures, sous une contrainte d'irreversibilité du processus de fissuration (la matière ne peut pas se « recoudre »). Ainsi, la distribution de fissures est une inconnue du problème en tant que paramètre de minimisation à chaque pas du calcul. Dans [34], les auteurs précisent la notion d'initiation de fissure et introduisent une énergie cohésive lors de l'ouverture de la fissure.

4.1.2 Modèle heuristique adopté

L'objectif est de simuler l'initiation et la propagation de macro-fissures dûes à un endommagement par fatigue. Il s'agit alors de modéliser ces macro-fissures ainsi que le phénomène de propagation. Une macro-fissure est modélisée par une discontinuité du champ de déplacement (pour l'instant, le contact entre les lèvres de la fissure n'est pas pris en compte).

Afin de réaliser notre étude de faisabilité de simulation de l'évolution de l'endommagement, de la transition d'un endommagement critique à un incrément macroscopique de fissuration et enfin de la propagation de cette dernière, nous avons adopté un cadre de modélisation simplifié et un certain nombre d'hypothèses. Nous partons d'une structure initialement saine dans laquelle nous identifions clairement une zone critique, typiquement une zone de concentration de contraintes telle que la zone entourant un trou, ou une singularité de contraintes telle la zone entourant un fond de fissure. Nous supposons qu'en cas de propagation, la fissure se propage de manière incrémentale. De plus, à chaque pas de propagation, la direction et la distance de propagation sont entièrement définies par le champ d'endommagement et le champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure. Ainsi, et de manière similaire à ce qui est suggéré en discret dans [99], nous proposons, de manière heuristique, de propager une fissure située dans un solide 2D occupant l'adhérence d'un domaine Ω , dans la direction **d** donnée par :

$$\boldsymbol{d} = \int_{S_D \cap \Omega} \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}) \left(\frac{\sigma_{eq}(\boldsymbol{x})}{\sigma_0}\right)^{\gamma} e^{-\frac{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}||^2}{r^2}} d\boldsymbol{x}$$
(4.1)

$$d(\boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}}{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{o}||} \tag{4.2}$$

où \boldsymbol{o} est la pointe de la fissure et σ_{eq} est la valeur de la contrainte équivalente utilisée dans le modèle de fatigue pour un chargement correspondant au point haut du cycle. σ_0 est un facteur de normalisation et γ un exposant réel. S_D est l'intersection entre le domaine délimité par la ligne de niveau $D = D_c$ (en supposant une régularité suffisante de champ d'endommagement) contenant la pointe de fissure et le secteur angulaire centré sur \boldsymbol{o} , d'angle $\pi/2$ et symétrique par rapport à l'axe dirigé par la tangente à la fissure en \boldsymbol{o} (voir figure 4.1).

Concernant la distance de propagation, la fissure est alors propagée dans la direction d jusqu'à son intersection avec la ligne de niveau $D = D_c$.

4.2 Implémentation numérique et algorithme

L'approximation numérique pertinente des phénomènes d'initiation et de propagation de fissures dues à un endommagement (tel que décrit dans la section précédente) nécessite l'usage de méthodes numériques avancées (par exemple, les auteurs proposent dans [47] une stratégie de résolution parallèle), permettant, avec flexibilité, de reproduire avec une bonne précision des phénomènes mécaniques localisés (liés ici aux fronts d'endommagement) dans une structure où les champs sont supposés être réguliers



FIGURE 4.1 – Détermination de la direction de propagation

en dehors de ces zones critiques. En particulier, il convient que la méthode retenue puisse permettre l'usage d'une échelle de discrétisation inférieure à la distance de délocalisation de l'endommagement dans les zones critiques afin de déterminer avec une précision suffisante l'évolution du champ d'endommagement et par conséquent des macro-fissures. Pour respecter cette préconisation, on constate que l'usage de la méthode classique des éléments finis nécessiterait, non seulement des maillages du solide considéré permettant une décroissance progressive de la taille des mailles jusqu'à atteindre celle exigée par la préconisation sur la taille de maille en zones critiques, mais aussi des remaillages très fréquents dûs à la propagation. Une telle méthodologie n'est pas optimale et pourrait même être impraticable dans certains cas de grandes structures telles qu'un pneumatique dont la complexité exige, indépendamment de la prise en compte de propagation de défauts localisés, un très grand nombre de mailles (plusieurs dizaines de milliers de mailles).

Pour cela, on adopte la méthodologie numérique présentée dans le chapitre précédent : un patch Arlequin est introduit au voisinage du front d'endommagement et de la pointe de la fissure (qui sont dans le même voisinage en adoptant le modèle décrit à la section 4.1.2) et une fonction de Heaviside est utilisée pour enrichir l'espace élements finis du modèle global afin de représenter le saut de déplacement lié à la macro-fissure en dehors du patch.

Par ailleurs, observons que certains aspects de la modélisation continue sont ici approchés afin d'en faciliter l'implémentation numérique. D'autres problématiques comme le transfert du champ d'endommagement entre différents maillages sont spécifiques à la discrétisation. Ces points sont éclairés dans la suite.

4.2.1 Approximations du modèle de fatigue pour la simulation

Rappelons encore une fois que l'objectif du travail d'implémentation numérique qui a été réalisé n'a pas pour vocation de produire des résultats numériques prédicitifs de la réalité. Il cherche plutôt à montrer une faisabilité de simulation numérique. A ce titre, de nombreuses simplifications (pragmatiques) sont faites lors de l'implémentation.

Tout d'abord, en l'absence de courbes de Wölher expérimentales, nous avons considéré un modèle de fatigue dans lequel le nombre de cycles à rupture est donné par la formule (2.25), proposée dans [66].

Par ailleurs, dans sa mise en oeuvre numérique, le taux d'endommagement n'est pas délocalisé à l'aide d'un convolution, comme indiqué à la fin du chapitre 2, équation (2.33). La valeur du taux d'endommagement en un point d'intégration p est calculée comme la moyenne arithmétique pondérée des taux d'endommagement locaux des points d'intégration situés dans $\Omega_p \cap \Omega$, où Ω_p est un disque centré sur le point d'intégration p considéré et de rayon 4r; r étant la distance de délocalisation. Ainsi

on définit :

$$\frac{\partial D}{\partial N}(\boldsymbol{p}) = \frac{\sum_{\boldsymbol{q}\in\Omega_{\boldsymbol{p}}} w(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) \frac{\partial D}{\partial N}(\boldsymbol{q})}{\sum_{\boldsymbol{q}\in\Omega_{\boldsymbol{p}}} w(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}$$
(4.3)

20

où q désigne aussi un point d'intégration et :

$$w(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = e^{-\frac{||\boldsymbol{p}-\boldsymbol{q}||^2}{r^2}}$$
(4.4)

On note que par soucis de simplification additionnelle, la présence de la macro-fissure n'est pas prise en compte dans ce nouveau processus de délocalisation, c'est à dire qu'un point d'intégration situé d'une coté de la fissure et proche de celle-ci peut subir l'influence des taux d'endommagement locaux de points d'intégration situés de l'autre coté de la fissure.

Enfin, la direction de propagation est évaluée a l'aide d'une approximation numérique de la formule (4.1):

$$\boldsymbol{d} = \sum_{\boldsymbol{p} \in S} \left(\frac{\sigma_{eq}(\boldsymbol{p})}{\sigma_0} \right)^{\gamma} A(\boldsymbol{p}) e^{-\frac{||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{o}||^2}{r^2}} \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{o}}{||\boldsymbol{p} - \boldsymbol{o}||}$$
(4.5)

où p désigne un point d'intégration et A(p) est la surface d'un disque dont le rayon est la distance entre le point p et son plus proche voisin. La fissure n'est propagée que si la longueur de l'incrément de propagation calculée est supérieure à la taille de maille caractéristique en pointe de fissure.

4.2.2 Transfert du champ d'endommagement



FIGURE 4.2 – Déplacement de la distribution des points d'intégration

Dans un contexte numérique, les différents champs mécaniques sont décrit et stockés sous la forme d'un échantillonnage de leurs valeurs sur le domaine. Certains de ces champs, généralement échantillonnés aux noeuds du maillage (le champ de déplacement par exemple), sont intrinsèquement définis comme une interpolation de leur échantillonnage. La donné de cet échantillonnage suffit ainsi à fournir la connaissance de tels champs en tous points du domaine d'étude. D'autre champs (le champ d'endommagement par exemple) ne sont connus qu'aux points où ils sont évaluée, généralement aux points



FIGURE 4.3 – Evaluation et stockage de la variable d'endommagement à la fin d'un pas de calcul

d'intégration du modèle éléments finis. Ces points d'intégration étant généralement liés au maillage du modèle éléments finis, leurs positions changent lorsque l'on modifie le maillage. Il s'agit alors de transférer l'échantillonnage des champs de l'ancien maillage au nouveau. Pour les champs pour lesquels on dispose d'une connaissance continue sur tout le domaine, il suffit de les évaluer en leurs nouveaux points d'échantillonage. Le cas des champs, comme le champ d'endommagement, définis aux points d'intégration est plus problématique. On doit transférer leur connaissance discrète des anciens points d'intégration vers les nouveaux. De nombreux auteurs se sont penchés sur ce problème dans la littérature. Le lecteur intéressé par le sujet est invité à consulter les références [78, 84, 26, 98, 61].

Dans notre cas, la problématique de transfert de champ est la suivante : A la fin d'un pas de calcul p, l'incrément de propagation de la macro-fissure est évalué. Au début du pas p + 1, le maillage du patch est régénéré afin que celui-ci reste compatible avec la fissure propagée et centré sur la pointe de celle-ci. Ainsi, comme l'illustre la figure 4.2, la distribution de points d'intégration évolue au cours de la simulation. Par ailleurs, un échantillonnage de la variable d'endommagement est évalué dans l'ensemble de la structure à la fin de chaque pas de calcul. Elle est calculée aux points d'intégration du modèle patch (en utilisant la contrainte calculée sur le patch) ainsi qu'aux points d'intégration du modèle substrat qui ne sont pas à l'intérieur du domaine occupé par le patch (voir figure 4.3). Cet échantillonnage de la variable d'endommagement est stocké et sert comme donnée d'entrée pour le pas de calcul suivant. Il s'agit donc, au cours d'un pas de calcul, de transférer la variable d'endommagement échantillonnée aux points d'intégration des maillages (patch et substrat) issue du pas précédent vers les points d'intégration des maillages du pas de calcul courant. Compte tenu de la modélisation Arlequin, ceci doit se faire, pour chaque pas de calcul p et suite à un déplacement du patch :

- du patch de ce pas p vers le substrat, dans la zone « découverte » par le patch (zone verte dans la figure 4.2), i.e. la zone transitant d'une superposition patch-substrat à une mono-représentation substrat.
- du substrat vers le patch du pas p + 1, dans la zone nouvellement couverte par le patch (zone jaune dans la figure 4.2).
- du patch de ce pas p vers le patch du pas p + 1, dans la zone occupée par le patch aux pas p et p + 1 (zone bleue dans la figure 4.2).

Il existe différentes méthodes pour transférer une variable interne des points d'intégration d'un maillage au pas p vers les points d'intégration d'un nouveau maillage au pas p + 1. Une procédure classique consiste à créer un champ d'endommagement continu à partir du champ d'endommagement évalué aux points d'intégration du maillage au pas p puis utiliser ce champ continu comme entrée du pas p + 1 ([84, 26]). Cette procédure passe par les étapes suivantes :

- 1. transfert de l'endommagement des points d'intégration du pas p aux noeuds du maillage du pas p et création d'un champ d'endommagement continu par utilisation des fonctions de forme éléments finis.
- 2. transfert du champ d'endommagement des noeuds du maillage du pas p vers les noeuds du maillages du pas p + 1 à l'aide d'un échantillonage ponctuel ou d'une projection.
- 3. transfert du champ d'endommagement des noeuds du maillage du pas p + 1 vers les points d'intégration du pas p + 1 par interpolation éléments finis.

Cette procédure est relativement simple. Mais elle souffre d'un problème de diffusion numérique, et d'inconsistance. En effet, si on l'applique au transfert d'une variable interne (évaluée aux points de Gauss) entre deux maillages identiques, cette variable interne ne reste pas inchangée.

Une autre approche proposée dans [98] consiste à déterminer localement autour de chaque point d'intégration du maillage au pas p + 1 une approximation polynomiale de la variable interne à transférer qui respecte des équations d'équilibre et dont une certaine distance avec la définition de la variable interne du maillage au pas p soit minimum. Mais là encore la procédure introduit de la diffusion numérique.

Dans le cadre de notre implémentation, par soucis de simplicité, le transfert de la variable d'endommagement entre les maillages se fait par simple recherche de plus proches voisins : au cours d'un pas de calcul, on attribue à chaque point d'intégration du modèle Arlequin discret du pas courant un niveau d'endommagement égal à la valeur de la variable d'endommagement au point le plus proche dans l'échantillonnage de la variable d'endommagement issu du pas précédent. Cette procédure respecte la consistance.

4.2.3 Algorithme

L'algorithme utilisé pour simuler la propagation d'endommagement et de macro-fissures est similaire à celui proposé dans [30] en y intégrant la démarche numérique présentée au chapitre précédent. Il concerne une structure soumise à un chargement cyclique, où tous les cycles de chargement extérieur sont identiques. Chaque cycle de chargement peut potentiellement faire évoluer le champ d'endommagement. Or il est bien sûr impossible (et pas forcément utile) de reévaluer et de refaire un calcul éléments finis à chaque cycle de chargement. On procède donc par paquets de cycles, en considérant que le champ d'endommagement et donc la loi de comportement du matériau évoluent peu sur un paquet de cycles. Pour caractériser ceci, on considère que la structure est affectée de manière significative par l'évolution de l'endommagement à l'échelle où on la décrit lorsqu'au moins un élément fini, pour lequel la variable d'endommagement est inférieur à la moitié de la valeur de rupture D_c pour au moins un de ses points d'intégration, voit la variable d'endommagement atteindre la valeur de rupture D_c en un de ses points d'intégration. Le nombre de cycle N_c du pas courant est donné par :

$$N_{c} = \min_{\{K \in T_{h}^{1}, \exists \boldsymbol{p} \in K, D(\boldsymbol{p}) < D_{c}/2\}} \left[\max_{\boldsymbol{p} \in K} \left(\frac{D_{c} - D(\boldsymbol{p})}{\frac{\partial D}{\partial N}(\boldsymbol{p})} \right) \right]$$
(4.6)

où K désigne un élément du maillage du patch T_h^1 et p un point d'intégration. L'algorithme utilisé est décrit par la figure 4.4, où p désigne un point d'intégration. On note qu'à chaque pas de calcul, le taux d'endommagement en un point d'intégration est calculé à partir des seules contraintes maximales et minimales sur le cycle en ce point d'intégration. Dans le contexte qui est le notre où le problème mécanique est linéaire à chaque pas de calcul, il suffit de faire un calcul au « point haut » du cycle, pour obtenir les contraintes maximum, et de multiplier la solution par le rapport de charge, pour obtenir les contraintes minimum.



FIGURE 4.4 – Algorithme de calcul pour la simulation de propagation d'endommagement par fatigue

4.3 Illustrations numériques

Différents tests numériques sont présentés dans cette section afin d'illustrer la méthodologie proposée et d'en asseoir la faisabilité. On s'interesse ainsi à la propagation quasi-statique de macro-fissures pilotées par un champ d'endommagement par fatigue.

Dans l'ensemble des tests, on considère un matériau linéaire élastique correspondant à de l'acier 52100 à $20^{\circ}C$. Le comportement en fatigue de ce matériau est donné par la loi (2.26) associée à la contrainte équivalente (2.28). Les coefficients matériau sont les suivants :

En l'absence de données expérimentales, la distance de délocalisation est fixée arbitrairement à 0.1mm,

 $D_c \ge 0.9$ et $\gamma \ge 4$.

D'un point de vue numérique, on adopte le cadre de modélisation présenté dans les chapitres 3 et 4. On choisit $\alpha_0 = 0$ dans la zone de couplage et $\alpha_0 = 1e^{-3}$ dans la zone libre. Les espaces éléments finis sont générés à partir d'éléments isoparamétriques Q1 pour les quadrangles et P1 pour les triangles.

4.3.1 Eprouvette CT

On s'intéresse pour ce cas test à une éprouvette CT en contraintes planes, sollicitée en mode 1. La sollicitation est un effort imposé vertical cyclique de valeur maximale 1000N/mm et de rapport de charge R = 0, appliqué sur un des deux axes, l'autre étant bloqué. Les axes peuvent tourner librement dans leur alésage. La géométrie de l'éprouvette est donnée par la figure 4.5. La zone critique initiale d'où peut partir une fissure est identifiée comme étant le sommet de l'entaille dans l'axe de symétrie de l'éprouvette. On s'intéresse à l'évolution du champ d'endommagement et d'une éventuelle macro-fissure initiée dans cette zone. Le problème étant symétrique, on s'attend à une évolution de l'endommagement symétrique et une propagation de fissure horizontale. Le maillage du modèle substrat est composé



FIGURE 4.5 – Géométrie de l'éprouvette CT

de 1187 noeuds et 1253 éléments. Le maillage du modèle patch est généré à chaque incrément de propagation de la fissure à partir de l'intersection entre un disque de rayon 5mm, centré sur la pointe de la fissure et le domaine occupé par l'éprouvette non déformée. Initialement, le patch est centré sur le sommet de l'entaille. La taille caractéristique du maillage du patch autour de la pointe de fissure est de 0.02mm. La largeur de la zone de couplage est fixée à 2mm. Les coefficients κ_0 et κ_1 valent 1.

La figure 4.6 donne les maillages déformés (avec un coefficient d'amplification de 20) du substrat et du patch à différents pas de la simulation. La figure 4.7a donne la trajectoire de la fissure (non défomée). La figure 4.7b donne l'évolution de la vitesse de propagation au cours de la simulation. On observe que la propagation évolue vers une propagation catastrophique lorsque la longueur de la fissure augmente. La sollicitation extérieure étant à efforts imposés, ce phénomène est attendu et témoigne d'une certaine pertinence du modèle heuristique de propagation de fissure utilisé. Par ailleurs, on note que le modèle d'endommagement par fatigue perd de sa validité lorsque la vitesse de propagation devient trop importante. Enfin, la figure 4.8 donne un aperçu du champ d'endommagement à un état donné de la simulation.



FIGURE 4.6 – Maillages déformés à différentes étapes de la simulation

4.3.2 Poutre Single Edge Notch (SEN)

On s'intéresse à une poutre en déformations planes dont la géométrie et le chargement sont donnés par la figure 4.9. La sollicitation est cyclique, de rapport de charge R = 0 et telle que F = 12000N/mm (voir figure 4.9).

Une fissure horizontale de longueur 0.2mm émergeant au point S est initiée. On s'intéresse à l'évolution de l'endommagement dans la poutre et à la propagation de cette fissure. Le maillage du modèle substrat est composé de 3143 noeuds et 3724 éléments. Le maillage du modèle patch est généré à chaque incrément de propagation de la fissure à partir de l'intersection entre un disque de rayon 10mm centré sur la pointe de la fissure et le domaine occupé par l'éprouvette non déformée. Initialement, le patch est centré sur la pointe de la fissure initiale. La taille caractéristique du maillage du patch autour de la pointe de fissure est de 0.02mm. La largeur de la zone de couplage est fixée à 4mm. Les coefficients κ_0 et κ_1 valent 0.25 et 1, respectivement.

La figure 4.10 donne les maillages déformés (avec un coefficient d'amplification de 20) du substrat et du patch à différents états de la simulation. La figure 4.11a donne la trajectoire de la fissure (non défomée). A titre de comparaison qualitative, la trajectoire de la fissure obtenue expérimentalement pour une poutre en béton de même géométrie et soumise à un chargement similaire à celui considéré ici est donné par la figure 4.11b (cf. [93]). La similarité entre ces deux trajectoires montre une certaine



(b) Longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles effectués

FIGURE 4.7 – Chemin et vitesse de propagation



(a) Variable d'endommagement du patch

(b) Variable d'endommagement du patch et du substrat

FIGURE 4.8 – Aperçu de la variable d'endommagement, N=472308

pertinence de notre modèle heuristique de propagation de fissure. Enfin, la figure 4.12 donne un aperçu du champ d'endommagement pour un état donné de la simulation. On observe une extension irréaliste de ce champ d'endommagement autour de la fissure pour le modèle substrat, en dehors du patch. Ce phénomène s'explique principalement par le faible niveau de discrétisation mais peut aussi être lié à notre processus grossier de transfert de champs. On note que ce phénomène est beaucoup moins marqué pour le cas précédent (cf. figure 4.8). Cela s'explique par le fait que dans le cas de l'éprouvette CT, le maillage du modèle substrat est tel que la fissure passe près des bords des éléments sur ce modèle substrat. Le découpage des éléments pour l'intégration des termes d'enrichissement de la matrice de rigidité du modèle substrat conduit alors à une forte densité de points d'intégration au voisinage de la fissure.



FIGURE 4.9 – Géométrie de la poutre SEN

4.4 Commentaires et conclusions

Dans ce chapitre, nous avons montré comment la stratégie de simulation développée dans [20] pouvait être étendue pour simuler le processus de ruine d'une structure par fatigue, de l'initiation d'une macro-fissure à sa propagation. Une fois encore, la pauvreté des modèles physiques utilisés ne permet pas de prétendre à des résultats prédictifs mais montre une faisabilité de l'approche. En outre, les résultat numériques proposés reproduisent des tendances attendues quant au trajet et à la vitesse de propagation de la macro-fissure.

De manière plus générale, cette approche définit le cadre d'une nouvelle stratégie de simulation pour les problèmes où un endommagement se localise en bandes étroites et conduit à l'apparition de macro-fissures. L'introduction de macro-fissures dans le modèle numérique peut notamment permettre de prévenir une extension irréaliste de l'endommagement au cours des phases finales du processus de ruine du matériau [94].



FIGURE 4.10 – Maillages déformés à différents états de la simulation



(b) Trajectoire expérimentale de la fissure (extrait de [93])

FIGURE 4.11 – Chemin de propagation



(a) Variable d'endommagement du patch

(b) Variable d'endommagement du patch et du substrat

FIGURE 4.12 – Aperçu de la variable d'endommagement, N=1815773

Chapitre 5

Prise en compte de l'incompressibilité

Sommaire

5.0	Résumé étendu				
5.1	Introduction				
5.2	Problem of an incompressible structure				
	5.2.1 Formulation				
	5.2.2 Stability of the continuous problem				
	5.2.3 Finite element discretization of the problem				
5.3	Arlequin modelling of the problem				
	5.3.1 Proposed Arlequin formulation				
	5.3.2 A stability result for the junction case				
5.4	Discretization scheme				
	5.4.1 Discrete Arlequin incompressible problem				
	5.4.2 A numerical Inf-Sup condition				
	5.4.3 Treatment of partial elementary incompressibility				
5.5	Numerical investigations				
	5.5.1 Numerical determination of the Inf-Sup value				
	5.5.2 A thick cylinder under internal pressure				
	5.5.3 A holed thick cylinder under internal pressure				
	5.5.4 An incompressible viscous flow				
	5.5.5 A pressurized fluid in a holed chamber				
5.6	Conclusion				
5.7	5.7 Extension : enrichissement par une fonction de Heaviside dans le cadre Arlequin in-				
	compressible				

5.0 Résumé étendu

L'objectif général de ces travaux de thèse étant la simulation de l'évolution d'un endommagement pouvant conduire à la propagation de fissures dans un pneumatique, nous avons proposé dans les chapitres 3 et 4 des stratégies numériques s'appuyant sur le cadre de modélisation multi-modèles Arlequin permettant de réaliser de telles simulations pour des structures constituées de matériaux compressibles. Or, les matériaux constitutifs d'un pneumatique sont (quasi-)incompressibles. Une nouvelle étape doit donc être franchie pour permettre la prise en compte de la contrainte d'incompressiblité des matériaux dans le cadre Arlequin. La difficulté est liée à la coexistance de la contraintes d'égalité des champs de déplacement entre les modèles global et local et la contrainte cinématique d'incompressibilité des matériaux. On s'attache dans ce chapitre à répondre à cette problématique. L'intégralité du texte d'une publication en préparation (en anglais, sections 5.1-5.6), concernant la prise en compte d'une contrainte d'incompressibilité dans le cadre Arlequin, est reproduit dans ce chapitre. Il est complété par un paragraphe (en français, section 5.7) s'intéressant la cohabitation de l'incompressibité des matériaux et du couplage Arlequin lorsque le modèle global est enrichi par une fonction Heaviside à la manière de ce qui est présenté dans le chapitre 3. Ce dernier point est lié à la problématique générale de cette thèse.

Après avoir rappelé la formulation mixte classique pour un solide elastique incompressible et discuté de la condition Inf-Sup dans la section 5.2, nous proposons une formulation Arlequin continue pour un tel problème dans la section 5.3.1. La principale caractéristique de cette formulation est qu'elle n'impose la contrainte d'incompressibilité qu'une seule fois en chaque point matériel dans la zone de superposition des modèles global et local. Nous montrons la stabilité de cette formulation dans le cas de jonction pour lequel la zone de couplage est identique à la zone de superposition dans la section 5.3.2. Une discrétisation s'appuyant sur l'élément finis de Taylor-Hood de plus bas degré est proposée dans la section 5.4. Une procédure de test numérique de la condition Inf-Sup, utilisée dans la section 5.5 dediée aux tests numériques, est présentée dans la sous-section 5.4.2. Une problématique de traitement d'une incompressibité partielle au niveau de l'élément, dûe à l'introduction d'une échelle de discrétisation, est soulevée dans la section 5.4.3. La stabilité et la précision de la solution des problèmes discrets qui découlent de la méthodologie présentée sont analysées pour différents choix des paramètres de modélisation au travers de nombreux tests numériques dans la section 5.5. Ce papier en préparation est fermé par des conclusions et un ensemble de recommandations pratiques.

5.1 Introduction

The Arlequin method is a general concept that allows, with significant flexibility, to i) introduce defects into existing numerical models ([13]), ii) couple different continuum models like a thin structure model (beam, plate, thin-walled, ...) and a solid one ([14, 89, 23, 54]) or iii) couple atomistic local models to continuum global ones. This method relies on a superposition principle, a partition of energy and the enforcement of a weak continuity of the super-imposed fields in what is called the coupling zone. The latter constraint is generally treated by means of a Lagrange multipliers. The Resulting Arlequin problem is a mixed system. For restricted choices of the parameters introduced by the method, the stability of this sytem (in the linear elasticty framework), has been established in [21] by using the Brezzi theories. Later, similar results were derived in [16, 17] for modelling of more general partitions of unity, both for the continuous and finite element discrete Arlequin systems.

Nevertheless, the Arlequin method has not been yet used for incompressible materials. Incompressibility is a local volume conservation constraint that has motivated several theoretical and numerical works ([2, 28, 48, 29]). The main additional difficulty of the Arlequin system when considering incompressible materials is that one has to face two constraints in the same time : the equality of the super-imposed fields in the coupling zone and the incompressibility of the materials in the same zone. A methodology is developed in this paper and proved to lead to stable Arlequin systems and to reasonably accurate numerical results.

An outline of the paper is the following. The classical mixed formulation of an incompressible elastic structure problem is recalled and the Inf-Sup condition is discussed in section 5.2. In section 5.3, the same problem is formulated in the Arlequin framework and a stability result is proved for a junction Arlequin problem in which the gluing zone is identical to the superposition one. For more general Arlequin problems, a numerical investigation is carried out in section 5.5 to show that as far as in the gluing zone, the incompressibility is taken into account either in the patch or in the substrate, the Inf-Sup condition is satisfied, leading to well-posed Arlequin discrete systems. The Final section is devoted to several numerical tests from which practical recommandations are derived. The paper is closed with some concluding remarks.

5.2 Problem of an incompressible structure

In this section, we recall a mixed formulation of a classical incompressible elastic solid and comment on its stability and finite element discretization.

5.2.1 Formulation

Let us consider a linear elastic homogeneous and isotropic incompressible solid, occupying the closure of a bounded domain Ω . For the sake of clarity, we will consider the bidimensional case. The boundary of the solid is partitioned into non-zero measured parts denoted by Γ_u and Γ_g , where Γ_u is the part where the solid is clamped and Γ_g is the part on which an applied density of loads $\boldsymbol{g} \in \boldsymbol{L}^2(\Gamma_g)$ is given. For the sake of conciseness, we neglect external body forces. Under the hypotheses of small perturbations, the classical two-fields mixed formulation of the problem defines the displacement \boldsymbol{u} and the hydrostatic pressure p as solution of the following system of equations :

Problem 1 (Classical monomodel formulation). Find $(u, p) \in V \times Q$ such that :

$$a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + b(p, \boldsymbol{v}) = l(\boldsymbol{v}), \quad \forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$$

$$(5.1)$$

$$b(q, \boldsymbol{u}) = 0, \quad \forall \boldsymbol{q} \in Q \tag{5.2}$$

where :

$$\boldsymbol{V} = \left\{ \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{H}^{1}(\boldsymbol{\Omega}); \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \ on \ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{u}} \right\}$$
(5.3)

$$Q = \boldsymbol{L}^2(\Omega) \tag{5.4}$$

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = 2 \int_{\Omega} \mu \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{u}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}) \, dx \tag{5.5}$$

$$l(\boldsymbol{v}) = \int_{\Gamma_g} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v} \, d\gamma \tag{5.6}$$

$$b(p, \boldsymbol{v}) = -\int_{\Omega} p \, div(\boldsymbol{v}) \, dx \tag{5.7}$$

with ϵ standing for the linearized strain tensors and μ the shear modulus of the medium. The stess tensor σ is given by :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\boldsymbol{I}\boldsymbol{d} + 2\mu\boldsymbol{\epsilon} \tag{5.8}$$

5.2.2 Stability of the continuous problem

The problem 1 is a mixed problem. Its solvability and stability relies on the Brezzi's theory [28, 29], which is summurized in the following theorem :

Theorem 1. (Brezzi)

Let V and Q be two Hilbert spaces. $a(\cdot, \cdot)$ is a continuous bilinear form on $V \times V$ and $b(\cdot, \cdot)$ is a continuous bilinear form on $Q \times V$. f belongs to V', the dual space of V and g belongs to Q', the dual space of Q. B: $V \to Q'$ is the linear operator related to b, definied by $\langle Bv, q \rangle_{Q' \times Q} = b(v,q), \forall (v,q) \in V \times Q$. If:

-a is coercive on ker B, that is :

$$\exists \alpha > 0, \, \forall v \in \ker B, \, a(v,v) > \alpha \, ||v||_V^2 \tag{5.9}$$

- b fulfills the inf-sup or LBB (Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi) condition, that is :

$$\exists \beta > 0, \, \forall q \in Q, \, \sup_{v \in V} \frac{b(q, v)}{||v||_V} \ge \beta \, ||q||_Q \tag{5.10}$$

Then:

$$\exists !(u,p) \in V \times Q, \ a(u,v) + b(p,v) + b(q,u) = f(v) + g(q)$$
(5.11)

Furthermore :

$$\exists \gamma > 0, \ ||u||_{V} + ||q||_{Q} < \gamma \left(||f||_{V'} + ||g||_{Q'} \right)$$
(5.12)

Now, to apply this theorem to problem 1, we observe that the two main points that one has to check are the coercivity and the Inf-Sup condition (the others being obvious). The coercivity condition (5.9) relies on the Korn's inequality (e.g. [41]). Concerning the LBB condition, let us observe that in the litterature, it was mainly established in the case where a pure Dirichlet boundary condition is prescribed ($\Gamma_u = \partial \Omega$). Let us also recall that, in this case, one has to change the space Q into :

$$Q = \left\{ q \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} q \, dx = 0 \right\}$$
(5.13)

since the pressure is defined up to a constant.

The more general case with mixed boundary conditions, namely a Dirichlet condition prescribed on a part of the boundary of the domain and a Neumann boundary condition defined on the other part of the boundary, is almost never addressed in the litterature. Nevertheless, even for this case, the Inf-Sup condition is still satisfied. This result is established in [36]. For the completeness of the document, it is recalled here.

Proposition 1. LBB condition (5.10) is fulfilled for problem 1.

Proof 1. We take any $q \in L^2(\Omega)$ and decompose $it : q = q_0 + \bar{q}$ where $\bar{q} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} q \, dx$. Let $\phi \in \mathbf{H}^1(\bar{\Omega})$ such that $\int_{\Omega} div(\phi) \, dx = 1$. We know from [48] that $: \exists \mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ such that $div(\mathbf{v}_0) = q_0$ and $|\mathbf{v}_0|_1 \leq C_0 ||q_0||_0, C_0 > 0$. We choose $\mathbf{v} = \alpha^2 \mathbf{v}_0 + \bar{q}\phi$ where $\alpha = ||div(\phi)||_0$. Then we have $||\mathbf{v}||_1 \leq C_0' ||q||_0, C_0' > 0$.

$$\int_{\Omega} q \, div(\boldsymbol{v}) \, dx = \alpha^2 \, ||q_0||_0^2 + \frac{1}{|\Omega|} \, ||\bar{q}||_0^2 + \frac{sign(\bar{q})}{|\Omega|^{1/2}} \, ||\bar{q}||_0 \int_{\Omega} q_0 div(\boldsymbol{\phi}) \, dx \tag{5.14}$$

$$\geq \alpha^{2} ||q_{0}||_{0}^{2} + \frac{1}{|\Omega|} ||\bar{q}||_{0}^{2} - \frac{\alpha}{|\Omega|^{1/2}} ||\bar{q}||_{0} ||q_{0}||_{0}$$
(5.15)

$$\geq \alpha^{2} ||q_{0}||_{0}^{2} + \frac{1}{|\Omega|} ||\bar{q}||_{0}^{2} - \frac{1}{2|\Omega|} ||\bar{q}||_{0}^{2} - \frac{\alpha^{2}}{2} ||q_{0}||_{0}^{2}$$
(5.16)

$$\geq \frac{\min\left(\alpha^{2}, \frac{1}{|\Omega|}\right)}{2C_{0}^{\prime}} \left|\left|\boldsymbol{v}\right|\right|_{1} \left|\left|q\right|\right|_{0}$$

$$(5.17)$$

5.2.3 Finite element discretization of the problem

The point here is to construct finite element subspaces V_{h_u} and Q_{h_p} of the functional spaces Vand Q. The most intricate point for the construction of such spaces is that they have to be compatible, in the sense that they have to satisfy uniformly the discrete LBB condition. That is to mean that there exists a constant $\beta > 0$, independent of h_u and h_p , such that :

$$\sup_{\boldsymbol{v}_h \in \boldsymbol{V}_{h_u}; \, \boldsymbol{v}_h \neq \boldsymbol{0}} \frac{\int_{\Omega} q_h \, div(\boldsymbol{v}_h) \, dx}{||\boldsymbol{v}_h||_1} \ge \beta \, ||q_h||_0 \,, \quad \forall q_h \in Q_{h_p}$$
(5.18)

Though other mixed finite element spaces have been designed in the litterature, the one we use in the sequel is the well-known lowest-order Taylor-Hood element (introduced in [53], see also [25, 96] for the Inf-Sup condition proof). This mixed element is based on the same mesh for both the displacement and the pressure. Quadratic quadrangular finite elements Q2 (or quadratic triangle finite elements P2) are paired with bilinear finite elements Q1 (or linear triangular elements P1) for the approximation of the displacement field u and the hydrostatic pressure p, respectively.

5.3 Arlequin modelling of the problem

Our aim is now to formulate this problem in the Arlequin framework. For this, let Ω_0 and Ω_1 be two overlapping and non-zero measured given regular subdomains of Ω , such that $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}$. We implicitly assume that Ω_1 is located in a zone of intersest. The mechanical model which will be constructed on this domain will be labeled the local model or the patch. The mechanical model which will be constructed on the domain Ω_0 will be labeled the global model or the substrate. The overlap Ω_s is partitioned into two regular non overlapping domains Ω_c and Ω_f such that :

$$\bar{\Omega}_f \cup \bar{\Omega}_c = \bar{\Omega}_s \tag{5.19}$$

$$meas(\Omega_c) > 0 \tag{5.20}$$

The domains Ω_c and Ω_f are the models *coupling* and *free* zones. In the former, the models are coupled; so that they have to be quite similar. In the latter, the models are super-imposed but free from each other; so that they can potentially be very different.

5.3.1 Proposed Arlequin formulation

Due to incompressibility, the application of the Arlequin method is not straightforward. One can easily check that a local superposition of an incompressible (possibly alterated) model on a global incompressible one would lead to a redundancy. The continuous Arlequin formulation that we suggest consists actually on :

- applying the incompressibility condition only once at each point of the whole domain, as a general rule
- applying the incompressibility condition on the local model at each point of the free zone of the superposition zone

- applying the incompressibility condition on the global model at each point of the coupling zone This formulation reads :

Problem 2 (Arlequin problem). Find $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, p_0, p_1, \boldsymbol{\lambda}) \in \boldsymbol{V}_0 \times \boldsymbol{V}_1 \times Q_0 \times Q_1 \times \boldsymbol{M}$ such that :

$$\forall \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0, \quad a_0(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0) + b_0(p_0, \boldsymbol{v}_0) + c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}_0) = l_0(\boldsymbol{v}_0) \tag{5.21}$$

- $\forall \boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{V}_1, \quad a_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + b_1(p_1, \boldsymbol{v}_1) c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}_1) = 0$ (5.22)
- $\forall \boldsymbol{q}_0 \in Q_0, \quad b_0(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{u}_0) = 0 \tag{5.23}$
- $\forall \boldsymbol{q}_1 \in Q_1, \quad b_1(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{u}_1) = 0 \tag{5.24}$

$$\forall \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{M}, \quad c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_0) = 0 \tag{5.25}$$

where : (with i = 0, 1)

$$\boldsymbol{V}_0 = \left\{ \boldsymbol{\mathbf{v}} \in \boldsymbol{H}^1(\boldsymbol{\Omega}_0); \ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \ on \ \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{u}} \right\}$$
(5.26)

$$\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{H}^1(\Omega_1) \tag{5.27}$$

$$Q_0 = L^2(\Omega_0 \backslash \Omega_f) \tag{5.28}$$

$$Q_1 = L^2(\Omega_1 \backslash \Omega_c) \tag{5.29}$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}^1(\Omega_c) \tag{5.30}$$

$$\forall \mathbf{u}_i, \, \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i, \quad a_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i) = 2 \int_{\Omega_i} \alpha_i \, \mu \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_i) : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}_i) \, dx \tag{5.31}$$

$$\forall \, \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0, \quad l_0(\boldsymbol{v}_0) = \int_{\Gamma_g \cap \partial \Omega_0} \boldsymbol{g} \cdot \boldsymbol{v}_0 \, d\gamma \tag{5.32}$$

$$\forall (p_0, \boldsymbol{v}_0) \in Q_0 \times \boldsymbol{V}_0, \quad b_0(p_0, \boldsymbol{v}_0) = -\int_{\Omega_0 \setminus \Omega_f} p_0 \, div(\boldsymbol{v}_0) \, dx \tag{5.33}$$

$$\forall (p_1, \boldsymbol{v}_1) \in Q_1 \times \boldsymbol{V}_1, \quad b_1(p_1, \boldsymbol{v}_1) = -\int_{\Omega_1 \setminus \Omega_c} p_1 \, div(\boldsymbol{v}_1) \, dx \tag{5.34}$$

The internal energy weight parameter functions (α_i) are defined in the whole domain Ω and satisfy : ([17])

$$\alpha_i \in [0,1] \quad in \ \Omega \tag{5.35}$$

$$\alpha_0 + \alpha_1 = 1 \ in \ \Omega \tag{5.36}$$

$$\alpha_i = 1 \ in \ \Omega_i \backslash \Omega_j, \ j \neq i \tag{5.37}$$

$$\exists \alpha_0 > 0; \ \alpha_i \ge \alpha_0 \ in \ \Omega_f \tag{5.38}$$

The coupling operator $c(\cdot, \cdot)$ is defined by :

$$\forall (\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_i) \in \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{V}_i , c(\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{v}_i) = \int_{\Omega_c} \kappa_0 \left\{ \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{v}_i \right\} + \kappa_1 \left\{ \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{\psi}) : \boldsymbol{\epsilon}(\boldsymbol{v}_i) \right\} dx$$
(5.39)

The positive parameters κ_0 and κ_1 are chosen such that the two terms defining $c(\cdot, \cdot)$ are homogeneous.

Remark 1. Let us notice here that to simplify the notations (without any restriction), we have assumed that the clamped part of the domain and the loaded one are contained in the boundary of Ω_0 .

Remark 2. More importantly, one can observe that in the coupling zone, the incompressibility is enforced in the global domain (see equation (5.33)) and not in the local one. Of course, we can exchange the parts played by the local and global domains by taking :

$$Q_0 = L^2(\Omega_0 \backslash \Omega_1) \tag{5.40}$$

$$Q_1 = L^2(\Omega_1) \tag{5.41}$$

and setting :

$$\forall (p_0, \boldsymbol{v}_0) \in Q_0 \times \boldsymbol{V}_0, \quad b_0(p_0, \boldsymbol{v}_0) = -\int_{\Omega_0 \setminus \Omega_1} p_0 \, div(\boldsymbol{v}_0) \, dx \tag{5.42}$$

$$\forall (p_1, \boldsymbol{v}_1) \in Q_1 \times \boldsymbol{V}_1, \quad b_1(p_1, \boldsymbol{v}_1) = -\int_{\Omega_1} p_1 \, div(\boldsymbol{v}_1) \, dx \tag{5.43}$$

The two scenarii are equivalent in the continuous "world". They are not in the discrete finite element one, as it will be shown by our numerical investigations.



FIGURE 5.1 – Junction cases

5.3.2 A stability result for the junction case

In this section, we consider a particular case of the Arlequin problem 2 corresponding to the (volume) junction of two models (cf. figure 5.1) :

$$\Omega_c = \Omega_s \tag{5.44}$$

In this case, we are able to prove easily the well-posedness of the Arlequin problem. For this let us first observe that by using a generalization of the well-known Lax-Milgram theorem (given in [2], theorem 2.1), we have the following result :

Proposition 2. Under the regularity hypotheses of the data, if we consider a given couple (u_1, p_1) in $V_1 \times Q_1$, then there exists a unique $\lambda \in M$ such that the system (5.22) is verified.

Proof 2.

When the couple (v_1, p_1) is given, the system (5.22) defines λ as solution of the following problem :

Find
$$\lambda \in M$$
, $\forall v_1 \in V_1$, $c(\mu, v_1) = a_1(u_1, v_1) + b_1(p_1, v_1)$ (5.45)

It is now obvious that the right hand side member of (5.45) is a linear and continuous form on V_1 . The coupling bilinear form c is also clearly continuous in the Hilbert space $\mathbf{M} \times \mathbf{V}_1$. Moreover, since there is a continuous lifting from the space \mathbf{M} into V_1 , we have :

$$\exists \beta > 0, \ \forall \boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{M}, \sup_{\boldsymbol{v}_1 \in \boldsymbol{V}_1} \frac{c(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{v}_1)}{||\boldsymbol{v}_1||_1} \ge \beta ||\boldsymbol{\mu}||_1$$
(5.46)

Theorem 2.1 in [2] allows to conclude.

Thanks to this preliminary result, we can now prove the following well-posedness of the Arlequin incompressible problem in the junction case.

Proposition 3. Under the regularity of the data mentioned in subsection 5.2.1, problem 2 with condition (5.44) admits a unique solution $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, p_0, p_1, \boldsymbol{\lambda})$ in $\mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_1 \times Q_0 \times Q_1 \times \mathbf{M}$. Furthermore, $(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, p_0, p_1)$ is equal to the solution of the mono-model problem 1 in the following sense :

$$\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_{|\Omega_0} \tag{5.47}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_{|\Omega_1} \tag{5.48}$$

 $p_0 = p_{|\Omega_0} \tag{5.49}$

$$p_1 = p_{|(\Omega_1 \setminus \Omega_0)} \tag{5.50}$$
Proof 3.

Existence of a solution :

 (\boldsymbol{u},p) being the unique solution of problem 1, we set :

=0

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{u}_{\mid \Omega_0} \\ \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_{\mid \Omega_1} \end{cases}$$
(5.51)

$$\begin{cases} p_0 = p_{|\Omega_0} \\ p_1 = p_{|(\Omega_1 \setminus \Omega_0)} \end{cases}$$

$$(5.52)$$

Since the couple (u_1, p_1) is given, Proposition 2 asserts that there exists a unique $\lambda \in \mathbf{M}$ such that equation (5.22) is verified.

Let us now check that these five fields $(u_0, u_1, p_0, p_1, \lambda)$ satisfy all the other equations of problem 2:

using equations (5.21) and (5.22), the fact that $\mathbf{V}_{0|\Omega_1} \subset \mathbf{V}_1$ and the fact that (\mathbf{u}, p) is the solution of problem 1, We can write :

$$\forall \boldsymbol{v}_0 \in \boldsymbol{V}_0, \quad a_0(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0) + b_0(p_0, \boldsymbol{v}_0) + c(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{v}_0) - l_0(\boldsymbol{v}_0) \tag{5.53}$$

$$=a_0(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{v}_0) + b_0(p_0, \boldsymbol{v}_0) + a_1(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_0) + b_1(p_1, \boldsymbol{v}_0) - l_0(\boldsymbol{v}_0)$$
(5.54)

$$=a(u, v_0) + b(p, v_0) - l(v_0)$$
(5.55)

Thus equation (5.21) is verified. To check that equations (5.23) and (5.24) are satisfied, one can simply observe that they are particular cases of equation (5.2). The last equation (5.25) is trivial. **Uniqueness :**

Let $(\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, p_0^*, p_1^*, \boldsymbol{\lambda}^*)$ be any solution of the problem 2. We define the following fields :

$$\boldsymbol{u}^* = \alpha_0 \boldsymbol{u}_0^* + \alpha_1 \boldsymbol{u}_1^* \tag{5.57}$$

$$p^* = \begin{cases} p_0^* \text{ on } \Omega_0 \\ p_1^* \text{ on } \Omega_1 \backslash \Omega_0 \end{cases}$$

$$(5.58)$$

Then one can notice that $\mathbf{u}^* \in \mathbf{V}$ and $p^* \in Q$, \mathbf{V} and Q being defined in problem 1. The couple $(\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*)$ verifying equation (5.25), we have the equality $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{u}_1^*$ in Ω_c . Now, summing equation (5.21) and equation (5.22) leads to :

$$\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}, \quad a_0(\boldsymbol{u}_0^*, \boldsymbol{v}) + b_0(p_0^*, \boldsymbol{v}) + a_1(\boldsymbol{u}_1^*, \boldsymbol{v}) + b_1(p_1^*, \boldsymbol{v}) = l_0(\boldsymbol{v})$$
(5.59)

namely,

$$a(u^*, v) + b(p^*, v) = l_0(v)$$
 (5.60)

Summing equation (5.23) and equation (5.24) gives :

$$\forall \boldsymbol{q} \in L^2(\Omega_0), \quad b_0(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}_0^*) + b_1(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}_1^*) = 0$$
(5.61)

namely,

$$b(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{u}^*) = 0 \tag{5.62}$$

Equations (5.60) and (5.62) assess that $(\mathbf{u}^*, p^*) = (\mathbf{u}, p)$ since problem 1 admits a unique solution. Definitions (5.57), (5.58), (5.35)-(5.38) and the fact that $\mathbf{u}_0^* = \mathbf{u}_1^*$ in Ω_c allows to conclude that $(\mathbf{u}_0^*, \mathbf{u}_1^*, p_0^*, p_1^*)$ is uniquely defined. Furthermore, proposition 2 gives the uniqueness of $\boldsymbol{\lambda}^*$.

The case of an inclusion with a non-zero measured free zone is more intricated.

5.4 Discretization scheme

All along this section, we call substrate the global model defined by $\{\Omega_0, u_0, p_0\}$ and patch the local model defined by $\{\Omega_1, u_1, p_1\}$. We consider T_{0h} and T_{1h} as classical regular meshes of the substrate and the patch, respectively. They may be incompatible (see figure 5.2). Following the considerations recalled in section 5.2.3, the lowest-order Taylor-Hood mixed element is used to generate the finiteelement spaces V_{0h} , V_{1h} , Q_{0h} , and Q_{1h} . The coupling zone Ω_c is defined by an appropriate collection of elements of the patch's mesh. The space of Arlequin Lagrange multipliers M_h is defined by the restriction to this coupling zone of either V_{0h} or V_{1h} .

5.4.1 Discrete Arlequin incompressible problem

The discrete Arlequin incompressible problem reads :

Problem 3 (Discrete Arlequin problem). Find $(\boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{u}_{1h}, p_{0h}, p_{1h}, \boldsymbol{\lambda_h}) \in \boldsymbol{V}_{0h} \times \boldsymbol{V}_{1h} \times Q_{0h} \times Q_{1h} \times \boldsymbol{M}_h$ such that :

$$\forall \boldsymbol{v}_{0h} \in \boldsymbol{V}_{0h}, \quad a_0(\boldsymbol{u}_{0h}, \boldsymbol{v}_{0h}) + b_0(p_{0h}, \boldsymbol{v}_{0h}) + c(\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{v}_{0h}) = l_0(\boldsymbol{v}_{0h}) \tag{5.63}$$

$$\forall \boldsymbol{v}_{1h} \in \boldsymbol{V}_{1h}, \quad a_1(\boldsymbol{u}_{1h}, \boldsymbol{v}_{1h}) + b_1(p_{1h}, \boldsymbol{v}_{1h}) - c(\boldsymbol{\lambda}_h, \boldsymbol{v}_{1h}) = 0$$
(5.64)

$$\forall \boldsymbol{q}_{0h} \in Q_{0h}, \quad b_0(\boldsymbol{q}_{0h}, \boldsymbol{u}_{0h}) = 0$$
(5.65)

$$\forall \boldsymbol{q}_{1h} \in Q_{1h}, \quad b_1(\boldsymbol{q}_{1h}, \boldsymbol{u}_{1h}) = 0$$
(5.66)

$$\forall \boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{M}_{h}, \quad c(\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{h}}, \boldsymbol{u}_{1h} - \boldsymbol{u}_{0h}) = 0 \tag{5.67}$$

This problem is equivalent to the solution of the following linear system :

$$\begin{pmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 & C_0 \\ 0 & A_1 & 0 & B_1 & -C_1 \\ B_0^\top & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_1^\top & 0 & 0 & 0 \\ C_0^\top & -C_1^\top & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_1 \\ P_0 \\ P_1 \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(5.68)

where, for k = 0, 1 and $\phi_i^{V_k}$, $\phi_i^{Q_k}$ and ϕ_i^M being basis functions of V_{kh} , Q_{kh} and M_h respectively, the generic terms of the matrices are :

$$(\boldsymbol{A}_k)_{ij} = a_k(\boldsymbol{\phi}_i^{V_k}, \boldsymbol{\phi}_j^{V_k})$$
(5.69)

$$(\boldsymbol{B}_{k})_{ij} = b_{k}(\phi_{i}^{V_{k}}, \phi_{j}^{Q_{k}})$$
(5.70)

$$(\boldsymbol{C}_k)_{ij} = c(\boldsymbol{\phi}_i^M, \boldsymbol{\phi}_i^{V_k}) \tag{5.71}$$

Now, we are going to discuss two issues linked to the discrete problem, defined by (5.63)-(5.67). The first issue concerns the compatible choices of the primal and dual spaces which ensure that this discrete problem is well-posed. As recalled for the continuous problem, one has to check (in particular) that the Inf-Sup condition holds.

The second issue is related to the way we treat possible partial incompressibility at the element level if we wish : i) to cope with the continuous requirement that the incompressibility constraint is to be enforced only once at each material point and ii) to treat incompatible meshes T_{0h} and T_{1h} .

5.4.2 A numerical Inf-Sup condition

Let us recall that the discrete Inf-Sup condition requires the existence of a strictly positive constant β , independent of the meshes T_{0h} and T_{1h} such that :

$$\inf_{(q_{0h},q_{1h},\boldsymbol{\mu}_h)\in\boldsymbol{\mathcal{D}}_h}\sup_{(\boldsymbol{v}_{0h},\boldsymbol{v}_{1h})\in\boldsymbol{\mathcal{P}}_h}\frac{b_0(q_{0h},\boldsymbol{v}_{0h})+b_1(q_{1h},\boldsymbol{v}_{1h})+c(\boldsymbol{\mu}_h,\boldsymbol{v}_{0h}-\boldsymbol{v}_{1h})}{\left(||\boldsymbol{v}_{0h}||_1^2+||\boldsymbol{v}_{1h}||_1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(||q_{0h}||_0^2+||q_{1h}||_0^2+||\boldsymbol{\mu}_h||_1^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ge \beta$$
(5.72)

where :

$$\mathcal{P}_{h} = \{ (\boldsymbol{v}_{0h}, \boldsymbol{v}_{1h}) \in \boldsymbol{V}_{0h} \times \boldsymbol{V}_{1h}; (\boldsymbol{v}_{0h}, \boldsymbol{v}_{1h}) \neq (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) \}$$
(5.73)

$$\mathcal{D}_{h} = \{ (q_{0h}, q_{1h}, \boldsymbol{\mu}_{h}) \in Q_{0h} \times Q_{1h} \times \boldsymbol{M}_{h}; (q_{0h}, q_{1h}, \boldsymbol{\mu}_{h}) \neq (0, 0, \mathbf{0}) \}$$
(5.74)

However, this condition is not easy to prove for our Arlequin discrete problem involving the incompressibility and the gluing constraints in the same time. In the litterature [69, 29, 33], numerical evaluations of the Inf–Sup condition are suggested. For our problem, this numerical evaluation, based on the following proposition (see e.g. [69] for a proof), gives indications on whether the Inf-Sup condition is fulfilled or not for given dual and primal finite element spaces \mathcal{D}_h and \mathcal{P}_h .

Proposition 4. Let \mathbf{I}^S be the matrix associated with the scalar product of a generic finite-element space S, $n = \dim(\mathbf{V}_{0h}) + \dim(\mathbf{V}_{1h})$ and $m = \dim(Q_{0h}) + \dim(Q_{0h}) + \dim(\mathbf{M}_h)$. We consider the following eigenproblem :

$$\begin{pmatrix} B_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1 \\ C_0 & C_1 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} I^{Q_{0h}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I^{Q_{1h}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & I^{M_h} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} B_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_1 \\ C_0 & C_1 \end{pmatrix} \Psi = \eta \begin{pmatrix} I^{V_{0h}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I^{V_{1h}} \end{pmatrix} \Psi$$
(5.75)

If $\eta_1 \leq \eta_2 \leq \ldots \leq \eta_m$ are the *m* largest magnitude eigenvalues of the eigenproblem (5.75), then the constant β_h in (5.72) is given by $\sqrt{(\eta_1)}$ if $m \leq n$ and 0 else.

Of course, one has to check by some increasing refinement of meshes whether the sequence of β_h , defined in proposition 4 is bounded from below by a strictly positive constant β , independant of h, or not. This will be done in the numerical section.

5.4.3 Treatment of partial elementary incompressibility

One of the major interest of an Arlequin discrete modelization is that it allows the meshes of the coupled models to be totally incompatible, which brings great practical flexibility. As a consequence, a particular issue related to the treatment of a partial elementary incompressibility condition arises. Since the coupling zone is made of a collection of elements of the patch's mesh, the rigorous application of the continuous formulation given in problem 2 to the discrete spaces V_{ih} , Q_{ih} and M_h requires that in general, some elements of the substrate model have to be only partially incompressible. To clarify this point, let $S^o = \{K \in T_{0h}; K \cap \Omega_c \neq \emptyset$ and $K \cap (\Omega_0 \setminus \Omega_1) \neq \emptyset\}$ be the set of elements of the substrate model intersecting the coupling zone and lying partially outside of the substrate model intersecting the coupling zone and lying partially in the free zone. We denote Ω^o and Ω^i the outerpatch and inner-patch particular zones, defined by : (see figure 5.2)

$$\Omega^o = \bigcup_{K \in S^o} K \cap (\Omega_0 \backslash \Omega_1)$$
(5.76)

$$\Omega^i = \bigcup_{K \in S^i} K \cap \Omega_1 \tag{5.77}$$

Depending on the choice of the model for which the incompressibility is enforced in the coupling zone (see remark 2), the elements of S^o or S^i have to be partially incompressible. The direct application of the formulation given in problem 2 leads to consider for these elements of the substrate a partial incompressibility constaint of the form :

$$b_{K_0}(q_0, \boldsymbol{v}_0) = \int_{K_0 \cap (\Omega_0 \setminus \Omega_k)} q_0 \, div(\boldsymbol{v}_0) \, dx \tag{5.78}$$



FIGURE 5.2 – Some problematic zones

with $k = \{1, f\}.$

The issue now is how to treat such a partial incompressibility. A first solution consists in evaluating the integral defined by (5.78) by special numerical quadrature rules (as done for the evaluation of the weighted internal works). However, since the discrete scheme introduces a numerical scale related to the size of these particular elements the partial incompressibility condition may diffuse artificially into these elements. This observation leads us to make some particular choices that will be clarified in the following numerical section.

5.5 Numerical investigations

In the reminder of this paper, some results are presented into arrays which have to be read the following way : each column corresponds to a specific choice of some simulation parameters (the others being fixed), defining a simulation scenario. Each scenario is identified by a "scenario id" which is also used to reference convergence curves. The varying simulation parameters are the space of Arlequin Lagrange multipliers, the model which is incompressible in the couplig zone and the weighting functions in Ω_c . The array row labeled "M" indicates for each scenario the space of the Arlquin Lagrange multipliers. The array row labeled " α_1 " gives for each scenario the value of α_1 in the coupling zone (α_0 being equal to $1 - \alpha_1$). The choice of the model which is incompressible in the coupling zone is indicated in the array row labeled "incompressible model in Ω_c " : "0" indicates that the incompressibility constraint is kept only on the substrate in the coupling zone and "1" that the incompressible in the coupling zone. "both" means that both models are incompressible in the coupling zone. "both" means that both models are incompressible in the coupling zone. The coupling zone is indicated in the coupling zone. The substrate in the coupling zone is indicated in the coupling zone. The substrate in the coupling zone is indicated in the incompressibility constraint is kept only on the patch in the coupling zone. "both" means that both models are incompressible in the coupling zone. The substrate in the coupling zone is indicated in the coupling zone. In these arrays, the computers notation may be used : for instance, 2e3 means 210³.

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_0 _{\Omega_c}$
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1

The differents simulation scenarii that will be used are given in the table of the figure 5.3.

FIGURE 5.3 – Simulation scenarii

Let us note that removing the incompressibility from the substrate in the coupling zone means that there is no incompressibility constraint on the elements K_0 of the substrate mesh for which the intersection with the coupling zone is not empty (i.e. their contribution $b_{K_0}(p_0, \boldsymbol{v}_0) = \int_{K_0 \cap \Omega_0 \setminus \Omega_f} p_0 div(\boldsymbol{v}_0) dx$ to the incompressibility matrix is not computed). Moreover, the incompressibility constraint is systematically removed from the element of the substrate which are totally included in the free zone. This defines our choice to treat the partially incompressible elements.

5.5.1 Numerical determination of the Inf-Sup value

The two following tests give an indication on the evolution of the numerical Inf-Sup constant β_h discussed in section 5.4.2. Fot this we have considered seven scenarii corresponding to different choices of the Arlequin parameters. For these scenarii we have carried out several numerical tests corresponding to increasingly refined meshes T_{1h} , T_{0h} being kept fixed, which fits with the general Arlequin modeling orientation.

5.5.1.1 first test

The first scenario is the simpliest possible to test the stability of our formulation and discretization scheme. Here, $\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_c = [0,1] \times [0,1]$ and so $meas(\Omega_f) = 0$. The mesh of the substrate is reduced to a single quadrangle and then has a characteristic size of 1. Five meshes (compatible with the substrate mesh) are used for the patch, dividing by 2 in each direction the elements of the previous mesh. Characteristic mesh sizes for these succeding meshes are 1, 1/2, 1/4, 1/8 and 1/16. κ_0 and κ_1 are equal to 1. Results are reported in figures 5.4 and 5.5.

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$oldsymbol{V}_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1
β , mesh 1	1.306e-08	7.214e-01	7.214e-01	7.214e-01	7.214e-01	7.214e-01	7.214e-01
β , mesh 2	1.950e-08	7.213e-01	4.135e-08	4.135e-08	7.213e-01	7.214e-01	7.209e-01
β , mesh 3	$0.000e{+}00$	7.213e-01	$0.000e{+}00$	0.000e+00	7.213e-01	7.214e-01	7.209e-01
β , mesh 4	$0.000e{+}00$	7.213e-01	$0.000e{+}00$	$0.000e{+}00$	7.213e-01	7.214e-01	7.209e-01
β , mesh 5	$0.000e{+}00$	7.213e-01	$0.000e{+}00$	$0.000e{+}00$	7.213e-01	7.214e-01	7.209e-01

FIGURE 5.4 – Inf-Sup value for different simulation scenarii



FIGURE 5.5 – Inf-Sup numerical test

5.5.1.2 second test

This second test introduce a non-zero measured free-zone. The geometry is given in figure 5.7. The mesh of the substrate is made of 5x5 regular and uniform quadrangular elements. Five meshes

(compatible with the substrate mesh) are used for the patch, dividing regularly in each direction the elements of the previuous mesh. Characteristic mesh sizes for these succeding meshes are 1, 1/2, 1/4, 1/8 and 1/12. κ_0 and κ_1 are equal to 1. Results are reported in figures 5.6 and 5.8.

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$oldsymbol{V}_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$oldsymbol{V}_0 _{\Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1
β , mesh 1	5.093e-05	3.978e-01	4.036e-01	4.036e-01	3.978e-01	3.979e-01	4.036e-01
β , mesh 2	8.322e-08	3.097e-01	8.673e-02	8.673e-02	3.097e-01	4.191e-01	4.042e-01
β , mesh 3	7.727e-09	3.078e-01	3.967e-09	3.967e-09	3.078e-01	4.241e-01	4.041e-01
β , mesh 4	$0.000e{+}00$	2.820e-01	$0.000e{+}00$	$0.000e{+}00$	2.820e-01	4.250e-01	4.040e-01
β , mesh 5	0.000e+00	2.697e-01	0.000e+00	0.000e+00	2.697e-01	4.252e-01	4.040e-01

FIGURE 5.6 – Inf-Sup value for different simulation scenarii



FIGURE 5.7 – Overlapping Arlequin domains



FIGURE 5.8 – Inf-Sup numerical test

We notes that for both tests, the scenarii 1, 3 and 4 do not satisfy the numerical Inf-Sup test. The discrete problem related to these scenarii are likely to be unstable.

5.5.2 A thick cylinder under internal pressure

In this test, we consider a thick cylinder under internal pressurew hose geometry and loading are given by figure 5.9. For the numerical solution of this problem, we assume that the matérial is elastic, homogeneous and incompressible. The shear modulus μ is equal to $10^5/3$. Under small perturbation hypothesis, the analytical solution for this test is known and is given in polar coordinates by equations (5.79)-(5.83). Some Arlequin simulations are carried out. The finite element are isoparametric. The constant κ_0 is equal to 410^4 and κ_1 is equal to 1. The weight function for the substrate in the free zone $\alpha_{0|\Omega_f}$ is equal to 10^{-6} .



FIGURE 5.9 – Geometry and loading

$$\tilde{u}^r = \frac{P}{2\mu} \frac{R_1^2 R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \frac{1}{r}$$
(5.79)

$$\tilde{u}^{\theta} = 0 \tag{5.80}$$

$$\tilde{\sigma}^{rr} = P \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$
(5.81)

$$\tilde{\sigma}^{\theta\theta} = P \frac{R_2^2}{R_1^2 - R_2^2} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right)$$
(5.82)

$$\tilde{\sigma}^{r\theta} = 0 \tag{5.83}$$

The domains Ω_0 , Ω_1 and Ω_c are described in figure 5.10. In a first scenario, the incompressibility is kept for both the pach and substrate in the coupling zone. In a second scenario, the incompressibility constraint is removed from the patch in the coupling zone. The space of Arlequin Lagrange multipliers is taken as the restriction to the coupling zone of the space of displacements of the patch. The mesh of the substrate is kept unchanged while the mesh of the patch is refined. Three meshes (compatible with the substrate mesh) are used for the patch, dividing by 2 in each direction the elements of the previous mesh. Characteristic mesh size for the substrate is about $1.4 \, 10^{-2}$. Characteristic mesh sizes for these different meshes of the patch are about $1.4 \, 10^{-2}$, $6.7 \, 10^{-3}$ and $3.3 \, 10^{-3}$. The elements edges are "straigthened" in the coupling zone in order to ease the computation of intersections.

Figures 5.11 and 5.12 show pathological oscilations of the Arlequin Lagrange multiplier and the hydrostatic pressure in Ω_1 when incompressibility is kept for both the patch and substrate models. Energy relative errors, defined by equations (5.84) and (5.85), are computed in the free zone Ω_f . These errors are computed for the three meshes of the patch and for different scenarii. They are reported in figures 5.13, 5.14 and 5.15. An error of 100% for scenario 1 with the finest mesh correspond to a total locking of the Arlequin solution due to an overconstraining in the couplig zone, leading to a null displacement in the coupling zone for the patch and consequently in the whole patch. This confirms numerically that the incompressibility constraint must be removed from either the substrate or the patch model in the coupling zone.



FIGURE 5.10 – Overlapping Arlequin domains

$$e_{nrg} = 100 \frac{\int_{\Omega_f} (\sigma_1 - \tilde{\sigma}) : (\epsilon_1 - \tilde{\epsilon}) \, dx}{\int_{\Omega_f} \tilde{\sigma} : \tilde{\epsilon} \, dx}$$
(5.84)

$$e_{tr(\sigma)} = 100 \frac{\int_{\Omega_f} tr(\sigma_1) - tr(\tilde{\sigma}) \, dx}{\int_{\Omega_f} tr(\tilde{\sigma}) \, dx}$$
(5.85)



FIGURE 5.11 – Arlequin Lagrange multiplier



FIGURE 5.12 – hydrostatic pressure on the patch model

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$				
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1
e_{nrg} , mesh 1	1.125e-04	1.125e-04	1.124e-04	1.124e-04	1.125e-04	1.125e-04	1.124e-04
e_{nrg} , mesh 2	$3.897e{+}00$	1.913e-05	1.120e-04	1.130e-04	2.031e-05	2.486e-03	2.313e-03
e_{nrg} , mesh 3	1.000e+02	1.904e-05	1.000e+02	1.000e+02	2.075e-05	1.301e-03	1.493e-03
$e_{tr(\sigma)}, \text{ mesh } 1$	4.619e-04	4.624e-04	4.624e-04	4.624e-04	4.624e-04	4.624e-04	4.624e-04
$e_{tr(\sigma)}, \text{ mesh } 2$	$5.541e{+}01$	1.992e-04	2.421e-03	2.418e-03	1.976e-04	2.398e-02	3.032e-02
$e_{tr(\sigma)}, \text{ mesh } 3$	$1.600e{+}03$	1.573e-04	$1.600e{+}03$	$1.600e{+}03$	2.206e-04	1.672e-02	2.279e-02

FIGURE 5.13 – Errors for the different scenarii



FIGURE 5.14 – Evolution of energy errors in the free zone



FIGURE 5.15 – Evolution of errors on the hydrostatic pressure in the free zone

5.5.3 A holed thick cylinder under internal pressure

In this numerical test a hole is introduced in the previous cylinder. The geometry and loading for this test are given in figure 5.16. The domains Ω_0 , Ω_1 and Ω_c are given in figure 5.17. Several numerical tests are performed removing the incompressibility constraint from either the substrate or the patch in the coupling zone and changing some simulation parameters for four levels of mesh refinement for the patch. Characteristic mesh sizes for these meshes are given in figure 5.18. These meshes are unstructured meshes. The mesh for the substrate is a structured mesh, kept unchanged, with a characteristic size of $1.4 \, 10^{-2}$. The finite elements are isoparametric. The parameters μ , κ_0 , κ_1 and $\alpha_{0|\Omega_f}$ are the same than in the previous test. For each scenario, the orthoradial stress at point \boldsymbol{a} (see figure 5.16) is compared to the one obtained with a monomodel by means of the error defined by equation (5.86), where the indice m refers to the monomodel solution. Actually, the stress is evaluated at point \boldsymbol{a} (located on the boundary of the hole) by means of a weighted average of the stresses at the Gauss quadrature points of the elements linked to point \boldsymbol{a} . The results are reported in figures 5.19 and 5.20.



FIGURE 5.16 – Geometry and loading



FIGURE 5.17 – Overlapping Arlequin domains

$$e_{qoi} = 100 \frac{\sigma_0^{\theta\theta}(\boldsymbol{a}) - \sigma_m^{\theta\theta}(\boldsymbol{a})}{\sigma_m^{\theta\theta}(\boldsymbol{a})}$$
(5.86)

One can observe that scenarii 3 and 4 present a pathological convergence behaviour when the size of

	in Ω_c	around the hole
mesh 1	2.4e-04	2.4e-03
mesh 2	1.2e-04	1.2e-03
mesh 3	0.6e-04	0.6e-03
mesh 4	0.6e-04	0.2e-03
monomodel	0.5e-04	0.5e-03

FIGURE $5.18 - 6$	Characteristic	mesh	sizes
-------------------	----------------	-----------------------	-------

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_1 _{\Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$oldsymbol{V}_{0\mid\Omega_c}$
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1
e_{qoi} , mesh 1	-6.965e+00	-6.701e+00	-6.137e+00	-6.237e+00	$-6.275e{+}00$	-6.960e+00	-6.423e+00
e_{qoi} , mesh 2	-4.083e+00	-3.927e+00	-3.520e+00	-3.362e+00	-3.210e+00	-3.875e+00	-3.442e+00
e_{qoi} , mesh 3	4.423e+00	-7.822e-01	-4.644e-01	-3.177e-01	-3.687e-01	-5.795e-01	-2.225e-01
e_{qoi} , mesh 4	-1.425e+02	-1.882e-01	-1.425e+02	-1.425e+02	-1.406e-01	1.761e-01	2.733e-01

FIGURE 5.19 – Error on a quantity of interest for the different scenarii

the mesh step of the patch tends to zero. This numerical patholgy can be explained as following : since the Lagrange multiplier space is equal to the restriction to the coupling zone of the space V_{1h} , when refining the mesh of the patch, we enforce the equality $u_0 = u_1$ to be satisfied pointwise. Thus the field u_{1h} tends to belong to V_{0h} , (the step size of which being fixed). In the same time, the dimension of the space of virtual pressure Q_{1h} increases with the refinement of the patch. This leads to an overincompressibility constraining of the displacement field u_{1h} and explains the observed increase of the error.



FIGURE 5.20 – Evolution of errors on a quantity of interest

5.5.4 An incompressible viscous flow

This test consists in an obstacle embedded in an incompressible viscous fluid (see figure 5.21). Since the problem is symmetric, only its upper half part is considered. The domains Ω_0 , Ω_1 and Ω_c are given in figure 5.22. The shear modulus μ is equal to 1/3, κ_0 is equal to 4 and κ_1 is equal to 1. $\alpha_{0|\Omega_f}$ is the same than in previous numerical tests. As for the previous numerical tests, the mesh of the substrate is kept unchanged while the patch is refined. The mesh of the substrate is made of 3x10 regular and uniform quadrangular elements. The characteristic mesh size is 1. Four meshes (compatible with the substrate mesh) are used for the patch, dividing by 2 in each direction the elements of the previous mesh. Their characteristic mesh sizes are 1/2, 1/4, 1/8, 1/16. A classical fine monomodel simulation taken as a reference is computed with a characteristic mesh size of 1/16 in the whole domain. Several numerical tests are performed removing the incompressibility constraint on either the substrate or the patch in the coupling zone and testing some simulation parameters for the four levels of mesh refinement.

The norm of the sum of the loads exerted on the obstacle, taken as a quantity of interest, is compared, for each scenario, to the one computed for the reference monomodel. The relative error between these quantities is denoted by e_{qoi} . Energy errors defined by equations (5.84) and (5.85) are computed as well. The results are reported in figures 5.23, 5.24, 5.25 and 5.26. The conclusions are the same as for the previous tests.



FIGURE 5.21 – Geometry and loading



FIGURE 5.22 – Overlapping Arlquin domains

scenario ID	1	2	3	4	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$
α_1	1	0	0	1	1	1	1
incompressible model in Ω_c	both	0	1	1	0	0	1
e_{qoi} , mesh 1	-1.754e-01	-1.761e-01	-1.754e-01	-1.754e-01	-1.761e-01	-5.278e-01	-4.235e-01
e_{qoi} , mesh 2	2.655e-02	-7.014e-02	2.655e-02	2.655e-02	-7.014e-02	-2.817e-01	-1.704e-01
e_{qoi} , mesh 3	6.725e-02	-3.157e-02	6.725e-02	6.725e-02	-3.157e-02	-1.817e-01	-7.466e-02
e_{qoi} , mesh 4	8.626e-02	-1.332e-02	-1.467e-01	8.626e-02	-1.332e-02	-1.407e-01	-3.590e-02
e_{nrg} , mesh 1	$3.075\mathrm{e}{+00}$	$3.045e{+}00$	$3.059e{+}00$	$3.059\mathrm{e}{+00}$	$3.045e{+}00$	$9.704e{+}00$	$9.852e{+}00$
e_{nrg} , mesh 2	$2.621e{+}00$	8.398e-01	$2.622e{+}00$	$2.622e{+}00$	8.398e-01	$3.556e{+}00$	$3.763e{+}00$
e_{nrg} , mesh 3	$2.143e{+}00$	3.546e-01	$2.131e{+}00$	$2.131e{+}00$	3.546e-01	$1.208e{+}00$	$1.547 e{+}00$
e_{nrg} , mesh 4	1.884e + 00	9.740e-02	$1.836e{+}00$	$1.884e{+}00$	9.740e-02	3.207e-01	7.495e-01
$e_{tr(\sigma)}, \text{ mesh } 1$	$2.381e{+}01$	5.517e-02	5.590e-02	5.590e-02	5.517e-02	1.226e-01	1.231e-01
$e_{tr(\sigma)}, $ mesh 2	6.402e-02	1.221e-02	6.398e-02	6.398e-02	1.221e-02	3.863e-02	4.828e-02
$e_{tr(\sigma)}, \text{ mesh } 3$	2.583e-01	1.090e-02	6.409e-02	6.409e-02	1.090e-02	1.810e-02	2.726e-02
$e_{tr(\sigma)}, $ mesh 4	9.307e-02	1.414e-03	5.697 e-02	5.542e-02	1.414e-03	2.948e-03	1.056e-02

FIGURE 5.23 – Errors for the different scenarii



FIGURE 5.24 – Evolution of errors on a quantity of interest



FIGURE 5.25 – Evolution of energy errors in the free zone



FIGURE 5.26 – Evolution of errors on the hydrostatic pressure in the free zone

5.5.5 A pressurized fluid in a holed chamber

This test aims at illustrating the effects of the particular zones Ω^i and Ω^o , presented in section 5.4.3. We consider here a holed chamber filled with a viscous incompressible fluid. The geometry and loading of this case are given in figure 5.27. We assume that the fluid slips freely on the inner surfaces of the chamber. The boundary condition on these surfaces is $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ on the surfaces AE, FB, BC and CD, where \boldsymbol{v} is the velocity of the fluid. A free surface condition is applied on eF. A rigid piston translating horizontally pressurizes the fluid with a resultant force \boldsymbol{F} of magnitude equal to 1. The shear modulus is equal to 1/3. We consider two Arlequin finite-element modelizations for this problem, which differ only by the size of the free zone. In both cases, the hole EF is contained in the boundary of the free zone. The free surface condition on EF is applied only on the patch model, whereas a condition $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$ is applied on EF for the substrate model. The meshes of the substrate and the patch and the coupling zone are represented in figures 5.28 and 5.29 for the two Arlequin numerical modelizations. In these two figures, a hatched area indicates a boundary condition of type $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} = 0$. Corresponding triangle meshes are generated by cutting each quadrangle into two triangles. The constant κ_0 is 4 and κ_1 is 1. The weight parameter $\alpha_{0|\Omega_f}$ is the same than in previous numerical tests.



FIGURE 5.27 – Geometry and loading



FIGURE 5.28 – Mesh 1 and coupling zone

The quantity of interest is the flow ϕ through the hole. A reference flow ϕ_0 is evaluated by means of a refined monomodel. The results are reported in table 5.30 for the scenarii 2, 5, 6 and 7 (the scenarii 1, 3 and 4 have shown to be numerically unstable). The velocity field for the refined reference monomodel and for the patch of scenario 5 around the hole is given by figure 5.31. These results illustrate the influence of the inner-patch zone Ω^i (see section 5.4.3). We notice here a severe locking phenomenom for the mesh 2 when the incompressibility constraint is removed from the patch in the coupling zone. This is due to the fact that the free zone is too narrow. There is no element totally included in the free zone for the substrate and then, due to our discretization scheme, the whole substrate is incompressible. Given the boundary conditions for the substrate model, the velocity must be null everywhere. On the



FIGURE 5.29 – Mesh 2 and coupling zone

scenario ID	2	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$
α_1	0	1	1	1
incompressible model in Ω_c	0	0	0	1
$100 \phi / \phi_0$, quadrangle mesh 1	98.91	98.91	98.89	99.00
$100 \phi / \phi_0$, triangle mesh 1	94.48	94.48	94.51	94.56
$100 \phi / \phi_0$, quadrangle mesh 2	0.000	0.000	0.000	97.70
$100 \phi / \phi_0$, triangle mesh 2	0.000	0.000	0.000	90.68

FIGURE 5.30 – Errors for the different scenarii

contrary, for both meshes 1 and 2, if the incompressibility constraint is removed from the substrate in the coupling zone, there are some compressible elements in the substrate which can accommodate the deformation, avoiding this way the locking.

The influence of the outer-patch zone Ω^{o} (see section 5.4.3) can be illustrated by measuring the global incompressibility of the fluid for mesh 1. Let ϕ_i denote the input flow in the chamber due to the piston (equal to 4 times the velocity of the piston). Then we consider the error in global incompressibility e_i given by :

$$e_i = 100 \frac{\phi - \phi_i}{\phi_i} \tag{5.87}$$

Obviously, for a perfectly incompressible fluid, this error is equal to 0.

The results are reported in table 5.32. We observe that the error is much larger in presence of such an outer-patch zone, when the incompressibility constraint is removed from the substrate in the coupling zone. This is due to the fact that an incompressible zone, namely the zone Ω^{o} , definied by (5.76), is treated as a compressible one.



FIGURE 5.31 – Velocity field around the hole

scenario ID	2	5	6	7
M	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{1 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$	$V_{0 \Omega_c}$
α_1	0	1	1	1
incompressible model in Ω_c	0	0	0	1
e_i , quadrangle mesh 1	-15.90	-15.90	-17.31	-87.11
e_i , triangle mesh 1	-16.25	-16.25	-17.63	-87.94

FIGURE 5.32 – Errors for test 4 for different scenarii

5.6 Conclusion

In this paper, we have rised the fact that using the Arlequin framework for the modeling of incompressible materials leads to a double constraint : the enforcement of the equality of the super-imposed fields in the coupling zone and the incompressibility of the material in the same zone. We have proposed a continuous Arlequin formulation for which the main idea consists in enforcing the incompressibility constraint only once in the overlapping zone. The continuous Arlequin problem has then been proved to be well-posed and consistant for the junction case. A discretization has also been developed. Different computational scenarii, corresponding to different sets of Arlequin parameters, have been tested numerically for mixed finite element spaces, based on the lowest-order Taylor-Hood triangular and quadrangular elements. These tests have confirmed that it is mandatory to remove the incompressibility constraint from one of the two models in the coupling zone. Furthermore, when one of the two models mesh is significantly finer than the other in the coupling zone and the space for the Arlequin Lagrange multipliers is the restriction to the coupling zone of the fine finite elements space of displacements, it is mandatory to enforce the incompressibility for the coarsest model. Choosing the space for the Arlequin Lagrange multipliers as the restriction of the coarse finite element space of displacement realeases partially the equality between the displacements of the two models in the coupling zone. This allows the enforcement of the incompressibility constraint for the fine model in the coupling zone. But our numerical results show that this choice leads to a significant loss of precision due to the presence of partially incompressible elements.

In brief, assuming that the coupling zone is defined by a set of elements of the patch model and that the patch numerical model is at least as fine as the substrate model in this coupling zone, our final recommandations are the following :

- the incompressibility is to be removed from the patch's elements forming the coupling zone;
- there must be at least one element of the substrate totally included in the free zone from which the incompressibility constraint is to be removed.

5.7 Extension : enrichissement par une fonction de Heaviside dans le cadre Arlequin incompressible

Nous avons développé dans le présent chapitre une procédure permettant de faire cohabiter le couplage Arlequin avec une contrainte d'incompressiblité des matériaux. Nous avons, par ailleurs, proposé dans le chapitre 3 une stratégie numérique mariant le cadre de modélisation Arlequin avec un enrichissement par une fonction Heaviside, à la manière de la XFEM afin d'introduire et de propager une fissure dans un modèle éléments finis.

La problématique générale de la simulation du processus de ruine d'un pneumatique, de l'initiation de fissures à leur propagation, pose alors la question de la cohabitation du couplage Arlequin et d'une contrainte d'incompressiblité, en présence d'un enrichissement par une fonction Heaviside du modèle global tel que proposé au chapitre 3. Dans le cadre de l'approche développée au chapitre 3, une fissure est introduite dans le modèle global en enrichissant l'espace éléments finis des déplacements par une fonction Heaviside. Un modèle éléments finis local est superposé au modèle global dans le voisinage de la pointe de la fissure. Le maillage de ce modèle local respecte la géométrie de la fissure. Contrairement au modèle substrat, l'espace éléments finis local n'est donc pas enrichi. Pour tenir compte de l'incompressibilité du modèle éléments finis substrat enrichi, nous suivons la démarche de [65] et enrichissons l'espace éléments finis des pressions dans le domaine substrat, au même titre que l'espace des déplacements. Ces espaces sont alors définis comme suit :

$$\boldsymbol{V}_{0h} = span\left\{ (\boldsymbol{\varphi}_{0i}^{u})_{i=1,n_{0}^{u}}, (H\boldsymbol{\varphi}_{0j}^{u})_{j\in K_{0}^{ud}} \right\}$$
(5.88)

$$Q_{0h} = span\left\{(\varphi_{0i}^{p})_{i=1,n_{0}^{p}}, (H\varphi_{0j}^{p})_{j\in K_{0}^{pd}}\right\}$$
(5.89)

où les φ_{0i}^u sont les n_0^u fonctions de base pour l'espace des déplacements, les φ_{0i}^p sont les n_0^p fonctions de base pour l'espace des pressions. K_0^{ud} et K_0^{pd} sont des ensembles d'indices définis de la même manière que dans le chapitre 3, section 3.4.2.

Ces espaces éléments finis enrichis par une fonction de Heaviside sont très similaires aux espaces éléments finis standards que l'on aurait pu générer en découpant les éléments traversés par la fissure de manière à avoir un maillage compatible avec celle-ci. On peut ainsi s'attendre à ce que les problèmes discrets aient la même stabilité en présence ou non de l'enrichissement de Heaviside. A des fins de vérification, nous allons tout de même tester numériquement le comportement de la constante β de la condition Inf-Sup sur un test élémentaire, de la même manière que dans la section 5.5.1. Pour ce



FIGURE 5.33 – Test élémentaire de la constante Inf-Sup en presence d'enrichissement

test élémentaire, on a $\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_c = [0, 1] \times [0, 1]$ (et donc Ω_f est vide). Une fissure droite notée Γ est située en y = 0.5. Cette géométrie est illustrée par la figure 5.33. Le maillage du modèle substrat est réduit à un unique quadrangle. Sa taille caractéristique est 1. Le modèle substrat est enrichi par une fonction Heaviside dont la discontinuité est portée par Γ . On considère 4 maillages successifs quadrangulaires pour le patch, compatibles avec la fissure Γ , en divisant par 2 dans chaque direction les éléments du maillage précédent. Les tailles caractéristiques de ces maillages successifs sont 1/2, 1/4, 1/8 et 1/16. κ_0 et κ_1 valent 1. Les valeurs de la constante β calculées pour les différents cas considérés dans ce chapitre sont données par la figures 5.34. Les conclusions sont identiques à celles qui ont été émise précédemment, en l'absence d'enrichissement.

Un second test numérique, plus conséquent, est mené afin notamment de vérifier la régularité des champs dans la zone de couplage. La géométrie et le chargement de ce dernier cas sont donnés par la figure 5.35. Le maillage du modèle substrat est un maillage régulier composé de 21×21 quadrangles. Le modèle patch est un disque de rayon 2, centré sur la pointe de la fissure Γ . Le maillage du patch est un maillage radiant, raffiné au niveau de la pointe de la fissure (voir figure 5.36), composé de 512 éléments et 2049 noeuds. La couplage se fait sur deux couches d'éléments du patch, à partir de sa frontière extérieure (excluant la fissure). κ_0 et κ_1 valent 9.1827 et 1 respectivement. Les autres paramètres Arlequin sont ceux du cas identifié par le numéro 5 dans ce chapitre. La figure 5.37 donne les maillages déformés, la figure 5.38 les pressions hydrostatiques et la figure 5.39 la norme du multiplicateur de Lagrange Arlequin. On observe que la solution parait raisonnablement régulière, ce qui confirme la stabilité numérique de l'approche.

On a ainsi montré au travers de cette étude préliminaire que la combinaison des stratégies numériques développées dans le présent chapitre et dans le chapitre 3 semble conduire à des problèmes stables et bien posés, sans développements particuliers.



FIGURE 5.34 – Constante Inf-Sup



FIGURE 5.35 – Géométrie et chargement



FIGURE 5.36 – Maillages non-déformés



FIGURE 5.37 – Maillages déformés



FIGURE 5.38 – Pression hydrostatique



FIGURE 5.39 – Norme du multiplicateur de Lagrange Arlequin

Chapitre 6

Implémentation du couplage Arlequin en 3D pour les élements-finis

Sommaire

6.1	Problè	eme cadre	85
6.2	Calcul	des matrices de couplage	86
6.3	Calcul	des intégrales pondérées	87
6.4	Princi	paux algorithmes pour l'intersection de maillages	87
	6.4.1	Intersection de deux polyèdres convexes à faces planes et arètes droites	87
	6.4.2	Intersection de deux éléments finis 3D	87
	6.4.3	Découpage d'un élément fini 3D par des surfaces maillées	88
	6.4.4	Pré-détection des intersections	89
	6.4.5	Calcul de la distance d'un point à une surface maillée	91
6.5	Illustr	ations numériques	92
	6.5.1	Trou sphérique dans un cube	92
	6.5.2	Bande de gomme percée	95
	6.5.3	Pneumatique avec un fissure dans le flanc	98
6.6	Bilan		98

La complexité de la mise en oeuvre de la méthode Arlequin a déja été évoquée dans [89, 23, 22]. La principale difficulté est liée au calcul d'intersections de maillages éléments finis. Les raisons rendant nécessaire ce calcul d'intersection seront brièvement rappelées ici. En outre, l'approche proposée par Rateau dans [89] pour y parvenir sera évoquée et analysée. On note que les méthodes d'enrichissement en général, XFEM ou GFEM par exemple nécessitent aussi la mise en place de méthodes d'intersection d'objets géométriques.

Une nouvelle implémentation des procédures d'intersection de maillages est réalisée dans le cadre de cette thèse sous la forme d'une librairie de fonctions C++ nommée MTL3D (pour Mesh Toolbox Library 3D). Les algorithmes principaux utilisés dans cette librairie sont détaillés dans ce chapitre. Les limites d'utilisation de cette librairie sont également précisées.

Tel que souligné dans [89], la complexité de la mise en oeuvre de la méthode Arlequin est conditionnée par la nature des modèles que l'on superpose et la liberté que l'on s'accorde sur le choix des ingrédients du couplage Arlequin. On va donc commencer par préciser le cadre dans lequel on se place.

6.1 Problème cadre

On cherche à implémenter la méthode Arlequin de manière à coupler deux modèles éléments finis 3D identifiés par les indices/exposants 0 et 1 et définis sur leurs domaines respectifs Ω_0 et Ω_1 . On

dispose des maillages éléments finis, notés T^0 et T^1 , associés aux domaines Ω_0 et Ω_1 . Ces maillages peuvent être totalement indépendants l'un de l'autre. Aucune compatibilité n'est supposée. Dans la suite, un élément du modèle $k, k \in \{0, 1\}$, sera noté génériquement K_i^k , k renvoyant au numéro du maillage et i au numéro de l'élément dans ce maillage. Cette notation désigne à la fois l'entité élément et le volume qu'il occupe. On a :

$$T^{k} = \left\{ K_{i}^{k}; \, i = 1, n_{K}^{k} \right\}$$
(6.1)

$$\Omega_k = \bigcup_{K^k \in T^k} K^k \tag{6.2}$$

où n_K^k désigne le nombre d'éléments du maillage T^k . On suppose que la zone de couplage Ω_c est définie par une restriction d'un des deux maillages, disons par exemple T^1 , au sens suivant :

$$T^c \subset T^1 \tag{6.3}$$

$$\Omega_c = \bigcup_{K^1 \in T^c} K^1 \cap \Omega_0 \tag{6.4}$$

En considérant exclusivement des éléments finis de Lagrange, on génère les espaces éléments finis $V^k = vect \{\varphi_i^k; i = 1, n^k\}, k \in \{0, 1\}$, associés aux maillages T^k . On choisit comme espace des multiplicateurs de Lagrange M la restriction de V^0 ou de V^1 à la zone de couplage. Par la suite, afin de ne pas distinguer les différentes possibilités, on suppose que :

$$M = vect\left\{\varphi_i^1; i = 1, n^1; \widetilde{supp(\varphi_i^1)} \cap \Omega_c \neq \emptyset\right\}$$
(6.5)

6.2 Calcul des matrices de couplage

Un terme de la matrice de couplage C^k du modèle $k, k = \{0, 1\}$, s'écrit :

$$C_{ij}^{k} = \int_{\Omega_{c}} \kappa_{0} \varphi_{i}^{k} \cdot \varphi_{j}^{1} + \kappa_{1} \epsilon(\varphi_{i}^{k}) : \kappa_{0} \epsilon(\varphi_{j}^{1}) \, d\boldsymbol{x}$$

$$(6.6)$$

La difficulté d'évaluation de ce terme de couplage réside dans la possible irrégularité de l'intégrande, liée à l'incompatibilité des deux maillages T^0 et T^1 dans la zone de couplage Ω_c . Observons que si l'on dispose d'un maillage $T^z = \{K_i^z; i = 1, n_K^z\}$ (pas forcement régulier) du domaine d'intégration sur lequel l'intégrande $P(\varphi_i^k, \varphi_j^1, \mathbf{x})$ est suffisamment régulière pour être approchée avec précision par des polynômes de bas degré, alors l'évaluation de cette intégrale devient aisée. En effet, une procédure classique consiste à évaluer l'intégrale comme la somme des contributions sur chaque élément du maillage T^z en utilisant des quadratures standards.

Dans [22, 89], les auteurs proposent d'utiliser T^c comme maillage d'intégration en introduisant une procédure d'intégration adaptative. Cependant, bien que relativement simple à implémenter, cette stratégie est apparue (e.g. [23]) comme sous-optimale en terme de performances.

Une autre possibilité, adoptée dans [23], consiste à calculer un maillage T^z convenable pour le calcul des matrices C^k . Avec des éléments finis de Lagrange standards, les non-régularités des fonctions de bases sont restreintes aux frontières des éléments composant les maillages. On peut alors morceler le domaine d'intégration en éléments compatibles avec l'ensemble de ces frontières. Ainsi, la réunion de toutes les intersections entre mailles de T^0 et de T^c forme un tel maillage T^z :

$$T^{z} = \left\{ K^{z} = K^{0} \cap K^{c}, \, K^{0} \in T^{0}, \, K^{c} \in T^{c} \right\}$$
(6.7)

6.3 Calcul des intégrales pondérées

Pour la partition des énergies, la formulation du problème Arlequin introduit pour le modèle k, $k \in \{0, 1\}$ des termes de la forme :

$$\int_{\Omega_k} \alpha_k(\boldsymbol{x}) f^k(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{dx}$$
(6.8)

On suppose que les fonctions f^k sont régulières par morceaux et que leurs restrictions sur chaque élément du maillage T^k sont suffisamment régulières pour être approchées par des polynomes de bas degré. Les fonctions de pondération α_k sont aussi polynomiales par morceaux : leurs restrictions aux domaines Ω_c, Ω_f et $(\Omega_0 \cup \Omega_1) \setminus (\Omega_c \cup \Omega_f)$ sont polynomiales. De même que pour les matrices de couplage, on peut calculer les intégrales (6.8) en utilisant des quadratures standards si l'on dispose de maillages d'intégration $T^{kw}, k \in \{0, 1\}$, tels que les restrictions de l'intégrande $\alpha_k f^k$ sur chaque élément de ce maillage T^{kw} soient suffisamment régulières pour être approchées par des polynomes de bas degré. En ayant fait le choix que maillage T^c est une restriction du maillage T^1 au sens de (6.3)-(6.4), le maillage T^1 convient comme maillage d'intégration pour les intégrales de la forme (6.8) pour le modèle 1. Le cas du modèle 0 est plus problématique. Les mêmes stratégies d'intégration adaptative ou de calcul explicite d'un maillage T^{0w} sont envisageables. On note que les zones de non-régularité sont limitées aux bords de la zone de couplage. On remarque aussi que l'on peut choisir des fonctions α_k très régulières afin d'utiliser T^0 comme maillage d'intégration pour le modèle 0, en supposant que les restrictions de $\alpha_0 f^0$ à chaque élément de T^0 peuvent être approchées avec une précision suffisante par des polynomes.

6.4 Principaux algorithmes pour l'intersection de maillages

L'objectif de la thèse de développement d'un code industriel performant permettant d'intégrer l'approche Arlequin en 3D dans un code éléments finis se traduit en particulier par le développement d'un ensemble de procédures permettant l'évaluation des maillages d'intégration T^z et T^{0w} pour le calcul des matrices de couplage et des matrices de rigidité pondérées respectivement. L'ensemble des procédures développées ont été regroupées au sein d'une librairie C++ nommée MTL3D (pour Mesh Toolbox Library 3D). Les principaux algorithmes constituant ces procédures sont décrits ici.

6.4.1 Intersection de deux polyèdres convexes à faces planes et arètes droites

L'objectif est ici d'obtenir un maillage de l'intersection de deux polyèdres convexes dont toutes les faces sont planes et toutes les arètes sont des droites. La procédure utilisée dans MTL3D est la suivante :

- 1. On calcul l'ensemble V des intersections faces/arètes entres les deux polyèdres
- 2. On ajoute à V les noeuds de chaque polyèdre qui sont strictement inclus dans l'autre polyèdre
- 3. On lance un mailleur de Delaunay sur cette ensemble de points V pour obtenir le maillage souhaité de l'intersection des deux polyèdres

A la fin de la deuxième étape, on obtient l'ensemble des sommets de l'intersection des deux polyèdres. Ces derniers étant convexes, leur intersection est aussi convexe. Un maillage de delaunay de cet ensemble de points donne ainsi un maillage de l'intersection des deux polyèdres.

6.4.2 Intersection de deux éléments finis 3D

Dans sa version actuelle, la librairie MTL3D ne gère que les maillages éléments finis du premier ordre. Les éléments volumiques envisagés sont :

- le tetraèdre à 4 noeuds
- l'hexaèdre à 8 noeuds
- $-\,$ le prisme à base triangle à 6 noeuds
- la pyramide à base carrée à 5 noeuds

Bien que du premier ordre, ces éléments peuvent présenter des faces à 4 noeuds non-planes et être non-convexes (au niveau de ces faces). Les faces à 4 noeuds non-planes sont détectées selon un critère de non-planéité et approximées en introduisant une arète par deux faces triangulaires (voir figure 6.1). Chaque élément contenant au moins une face non-plane est alors subdivisé en tetraèdres et pyramides à base carrée (plane) en utilisant le centre de l'élément (voir figure 6.2). L'intersection d'un tel élément subdivisé avec un autre élément est alors la réunion des intersections de chaque sous-élément avec l'autre élément.



FIGURE 6.1 – Simplification des faces non-planes



FIGURE 6.2 – Subdivision d'un élément

6.4.3 Découpage d'un élément fini 3D par des surfaces maillées

Comme évoqué précédemment, il s'agit pour le calcul des intégrales pondérées de la formulation Arlequin de disposer d'un maillage d'intégration T^{0w} . En observant que les zones de non-régularité des intégrandes sont limitées aux frontières internes et externes de la zone de couplage, l'objectif est ici de calculer pour chacun des éléments K_i^0 du maillage T^0 une subdivision T_i^{0w} (c'est à dire un maillage, par forcement régulier, du volume occupé par K_i^0) de cet élément telle qu'aucun élément $K_{i,j}^{0w}$ de cette subdisvision ne traverse les frontières de la zone de couplage.

On utilise dans MTL3D la procédure récursive suivante, décrite en pseudo-code :

```
1 PROCEDURE cut_element_by_surface
2
     "T"=constraint_tetrahedralize(polyhedron related to the element,
                                    set of meshed surfaces)
3 END PROCEDURE
1 FUNCTION "T"=constraint_tetrahedralize("Polyhedron", "Setofsurfaces0")
     compute the vertices "V" of the intersection between "Polyhedron" and each surface
2
       of "Setofsurfaces0" using the same procedure as for two 3D polyhedra.
3
     append to "V" the vertices of "Polyhedron"
     launch a delaunay tetrahedralization on the vertex set "V" and get a set "TO" of
 4
       tetrahedra
5
    FOR each tetrahedron "t" in "TO" DO
6
       create an empty set of surfaces "Setofsurfaces1"
7
       FOR each surface "s" in "Setofsurfaces0" DO
8
         IF "t" crosses "s" THEN
           append "s" to "Setofsurfaces1"
9
10
         END IF
11
       END FOR
       "T1"=constraint_tetrahedralize("t", "Setofsurfaces1")
12
13
      replace "t" by "T1" in "T0"
     END FOR
14
15 END FUNCTION
```

6.4.4 Pré-détection des intersections

Une stratégie simple pour calculer l'intersection de deux maillages éléments finis au sens de l'équation (6.7) consisterait à calculer pour chaque élément d'un des deux maillages l'intersection (possiblement vide) avec tous les éléments de l'autre maillage. Cette procédure aurait alors un complexité au mieux en $O(n_K^0 n_K^1)$. Il est possible de faire mieux en classant les éléments des deux maillages au cours d'une étape préliminaire dans des structures de données de type arbre enraciné ou arborescence. Une telle structure de données peut se représenter sous la forme d'un graphe acyclique orienté possédant une unique racine, et tel que tous les noeuds, sauf la racine, ont un unique parent (voir figure 6.3). Une fois un tel arbre construit, il existe des algorithmes permettant de le parcourir et d'obtenir de manière efficace des informations sur les données classées. Concernant l'intersection de maillages, on s'attâche à des requêtes d'informations géométriques telle une recherche de plus proches voisins par exemple. Il existe de nombreux types d'arbres enracinés. On considère en particulier les arbres binaires pour lesquels chaque noeud possède au maximum deux noeuds fils.



FIGURE 6.3 – Arbre enraciné

Dans [89], Rateau utilise un arbre binaire et propose la procédure suivante pour calculer l'intersection des deux maillages T^0 et T^c :

- 1. Un arbre binaire de T^0 est construit en séparant récursivement l'espace par des plans séparateurs. La procédure de construction peut se décrire comme suit pour un ensemble d'éléments :
 - (a) Choix d'un plan séparateur divisant l'espace en deux régions
 - (b) Répartition des éléments en deux sous-ensembles selon les régions créées. Les éléments intersectés par le plan sont intégrés à chacun des deux sous-ensembles.
 - (c) Sauf critère d'arrêt, reprendre les étapes (a) à (c) pour chacun des deux sous-ensembles.
- 2. Pour chaque éléments K^c de T^c , on évalue l'ensemble $A(K^c)$ des éléments de T^0 qui intersectent K^c par une recherche de proche en proche de la manière suivante :
 - (a) A l'aide de l'arbre du maillage T^0 , on trouve un élément de T^0 contenant le centre de K^c . Cela donne un premier élément de $A(K^c)$
 - (b) On parcourt les éléments de T^0 voisins des éléments de $A(K^c)$ encore non-visités pendant cette étape et on ajoute à $A(K^c)$ ceux d'entre eux qui intersectent K^c .
 - (c) On répète l'étape (b) jusqu'à ce que le nombre d'éléments de $A(K^c)$ n'augmente plus.
 - (d) On évalue toutes les intersections entre K^c et les éléments de $A(K^c)$.

Cette procédure ne permet pas de couvrir l'ensemble des situations rencontrées en pratique. En particulier, elle peut s'avérer problématique lorsque l'ensemble des éléments de T^1 formant le maillage T^c utilisé pour définir la zone de couplage (voir équations (6.3)-(6.4)) n'est pas entièrement inclus dans Ω_0 . Tout d'abord, il est possible pour un élément de T^c qui intersecte effectivement Ω_0 que son centre n'appartienne pas à un élément de T^0 . Par ailleurs, la figure 6.4 illustre une problématique posée par la recherche de proche en proche.



FIGURE 6.4 – Problématique liée à la recherche de proche en proche

6.4.4.1 La structure d'arbre dans MTL3D

L'arborescence implémentée dans MTL3D est un arbre binaire. La procédure de construction est la même que celle décrite ci-dessus. Les différences avec ce qui est proposé dans [89] résident dans le choix des plans séparateurs et la répartition des éléments de part et d'autre du plan. Un autre différence essentielle est que dans MTL3D, on stocke à chaque noeud la boîte englobante alignée sur les axes de l'ensemble d'éléments qui lui est associé.

6.4.4.1.1 Choix des plans séparateurs Les plans séparateurs sont orientés selon les axes principaux du repère global. A chaque noeud, les trois plans sont testés de la manière suivante : on positionne le plan à la valeur médiane des coordonnées des centres des éléments correspondantes à l'axe normal au plan considéré. Deux critères de choix sont alors évalués pour ce plan : n^+ est le nombre d'éléments dont la distance normale signée au plan est positive ou nulle et n le nombre d'éléments. Le premier critère C0 vaut $|2n^+ - n^-|$. Le second C1 est la somme des distances normales au plan des centres des éléments. Le plan sélectionné est celui pour lequel C0 est le plus faible. En cas d'égalité, on choisit celui pour lequel C1 est le plus élevé.

6.4.4.1.2 Répartition des éléments Les éléments sont simplement répartis de part et d'autre du plan en fonction du signe de la distance signée normale au plan.

6.4.4.1.3 Critère d'arrêt L'arbre se construit récursivement avec à chaque noeud, le critère d'arrêt suivant : il n'y a qu'un élément ou la procédure de répartition conduit à avoir tous les éléments du même coté du plan.

6.4.4.2 Algorithme de prédétection des intersections

Les arbres de T^c et T^0 sont construits. Un algorithme de parcours simultané des deux arbres, extrait de [101], est utilisé afin de détecter efficacement des groupes d'éléments de T^c et T^0 susceptibles de s'intersecter. Une description en pseudo-code de cet algorithme est donnée ci-dessous.

```
1 PROCEDURE contact_predetection
2
     "output"=[]
     tandem_traversal(root of tree 0, root of tree 1, "output")
3
4 END PROCEDURE
1 FUNCTION tandem_traversal("tnode0", "tnode1", "output")
2
     IF bounding boxes of "tnode0" and "tnode1" do not intersect THEN
3
      RETURN
4
    END TF
5
    IF "tnode0" and "tnode1" are leaves THEN
       append the pair ("tnode0", "tnode1") to output
6
7
      RETURN
8
    END IF
9
     IF "tnode0" is not a leaf THEN
10
      tandem_traversal(left child of "tnode0", "tnode1", "output")
      tandem_traversal(right child of "tnode0", "tnode1", "output")
11
12
     ELSE
13
       tandem_traversal("tnode0", left child of "tnode1", "output")
       tandem_traversal("tnode0", right child of "tnode1", "output")
14
15
    END IF
16 END FUNCTION
```

Cette procédure est utilisée dans MTL3D pour évaluer les intersections potentielles entre maillages 3D/3D et 3D/2D.

6.4.5 Calcul de la distance d'un point à une surface maillée

Une autre requête géométrique, largement utilisée dans MTL3D et s'appuyant sur l'arborescence liée à un maillage, est le calcul de la distance (signée ou non) d'un point à une surface maillée. Là-

encore, les faces composants cette surface maillée doivent être planes. Une procédure simple consisterait à calculer la distance du point à chacune des faces puis à choisir le minimum de ces distances. Mais l'arborescence de la surface permet de procéder de manière beaucoup plus efficace, dans MTL3D par l'intermédiaire de l'algorithme suivant, décrit en pseudo-code :

```
1 PROCEDURE distance_to_surface
 2
     "d"=distance(root of surface tree, "point", +INFINITY)
 3 END PROCEDURE
 1 FUNCTION "d"=distance("tnode", "point", "d")
 2
     IF "tnode" is a leaf THEN
 3
       IF minimum distance "dloc" between "point" and each faces of "tnode" < "d" THEN
 4
         "d"="dloc"
         RETURN "d"
 5
 6
       END IF
 7
     END IF
 8
     IF "point" is on the left side of "tnode" plane THEN
 9
       "d"=distance(left child of "tnode", "point", "d")
10
     ELSE
       "d"=distance(right child of "tnode", "point", "d")
11
12
     END IF
     IF "d" > distance between point and the plane of "tnode" THEN
13
14
       IF "point" is on the left side of "tnode" plane THEN
15
         "d"=distance(right child of "tnode", "point", "d")
       ELSE
16
17
         "d"=distance(left child of "tnode", "point", "d")
18
       END IF
     END IF
19
20 END FUNCTION
```

6.5 Illustrations numériques

6.5.1 Trou sphérique dans un cube

On s'intéresse à l'introduction d'un trou au centre d'un pain de gomme cubique en traction. Le pain de gomme est un cube de 24mm de côté et le trou en son centre est une sphère de 2mm de rayon. La face inférieure du cube est encastrée et on applique un déplacement imposé de 2.4mm sur la face supérieure dans la direction de sa normale. Les déplacements dans le plan de la face supérieure sont bloqués. Le matériau constitutif du pain de gomme est incompressible (appliquée par pénalisation) et décrit par une loi de Mooney-Rivlin (cf. annexe A). Les coefficients de cette loi sont $C_{10} = 3.787e^{-2}daNmm$ et $C_{01} = 4.208e^{-3}daNmm$.

On adopte une modélisation Arlequin de ce problème. On considère un modèle substrat constituant le pain de gomme non-troué, auquel on superpose un patch contenant le trou. Les maillages de ces deux modèles sont consitutés exclusivement d'éléments hexahèdriques isoparamétriques (avec sous-intégration du terme d'incompressibilité). Le maillage du substrat est un maillage réglé constituté de 729 noeuds et 512 éléments. Le maillage du patch est constitué de 2368 noeuds et 2058 éléments. Les bordures de ces deux maillages sont réprésentées sur la figure 6.5. La zone de couplage est générée en prenant deux couches d'éléments à partir de la frontière externe du patch. En reprenant les notations des chapitres précédents et en indiçant par 0 le substrat et par 1 le patch, les paramètres Arlequin sont les suivants : $M = V_{1|\Omega_c}$, $\alpha_{0|\Omega_c} = 0.5$, $\alpha_{0|\Omega_c} = 0.001$, $\kappa_0 = 1$, $\kappa_1 = 2.5$.



FIGURE 6.5 – Maillages pour le cas du pain de gomme

A titre d'illustration, les maillages d'intégration T^z et T^{0w} pour le calcul des matrices de couplage et des matrices de rigidités pondérées sont représentés sur les figures 6.6 et 6.7, respectivement (une coupe de T^{0w} est représentée sur la figure 6.7). Les tetraèdres constituant ces maillages sont contractés afin d'améliorer la visualisation et les surfaces (en rouge sur la figure 6.7) représentent les bords internes et externes de la zone de couplage.

Enfin, la figure 6.8 présente la solution de ce problème du pain de gomme. On y observe les maillages déformés (avec un coefficient d'amplification de 5) du patch et du substrat ainsi qu'une coupe de la densité d'énergie de déformation et de la pression hydrostatique du patch.



FIGURE 6.6 – Maillage d'intégration pour les matrices de couplage pour le cas du pain de gomme



FIGURE 6.7 – Coupe du maillage d'intégration pour les matrice de rigidités pondérées pour le cas du pain de gomme



(a) maillages déformés pour le cas du pain de gomme



(b) coupe de la densité d'énergie sur le patch
 (c) coupe de la pression hydrostatique sur le patch
 FIGURE 6.8 – Solution du problème Arlequin pour le cas du pain de gomme

6.5.2 Bande de gomme percée

On s'intéresse à une bande de gomme percée en son centre. Sa géométrie est donnée par la figure 6.9. En appelant z l'axe correspondant à sa plus grande dimension, la face z = 0 est encastrée et la face z = 48mm est soumise à un déplacement imposé de $4.8e^{-3}mm$ dans la direction de l'axe z. Le matériau consitutif de la bande de gomme est décrit de la même façon que dans le cas précédents. Les espaces éléments finis sont générés à partir de l'élement hexaèdrique à 8 noeuds (ou prismatique à 6 noeuds) pour les champs des déplacements, avec sous-intégration pour l'incompressibilité.

La modélisation Arlequin est la suivante : un modèle substrat représente la bande de gomme nontrouée. Cinq patchs Arlequin sont superposés et couplés à ce modèle substrat. Quatre d'entre eux sont placés aux quatre coins afin d'améliorer la précision de la solution dans ces zones singulières. Le cinquième est situé au centre de la bande de gomme et permet l'introduction du trou dans le modèle global. La figure 6.10 donne la position de ces patchs ainsi que les zones de couplage. La figure 6.11 montre les maillages utilisés pour ce cas. Les paramètres Arlequin sont les mêmes que dans le cas précédent, à l'exception de κ_1 qui vaut 0.25. Un apperçu de la solution est donné par les figures 6.12



FIGURE 6.9 – Géométrie pour la bande de gomme percée



FIGURE 6.10 – Positions des patchs Arlequin et des zones de couplage

et 6.13 (avec un facteur d'amplification de la déformation de 2500). Sur la figure 6.12, on observe la déformée des maillages et sur la figure 6.13, la densité d'énergie ainsi que la pression hydrostatique dans les zones critiques. On observe la présence d'un léger mode en damier pour la pression hydrostatique, qui s'explique par le choix des éléments finis utilisés.



FIGURE 6.11 – Maillages pour le cas de la bande de gomme percée



FIGURE 6.12 – Maillages déformés pour le cas du de la bande de gomme percée



 ${\rm FiGURE}$ 6.13 – Densité d'énergie de déformation et pression hydrostatique pour la bande de gomme percée
6.5.3 Pneumatique avec un fissure dans le flanc

Nous terminons ces illustrations numériques par une qui nous rapproche de l'objectif industriel de la thèse. On s'y intéresse à un pneumatique monté sur jante, gonflé, en contact avec le sol et à flanc entaillé. Cet essais numérique a pour unique objectif d'illustrer une utilisation de la méthode Arlequin pour un cas industriel tridimensionnel. Pour des raisons de confidentialité, aucune donnée quantitative n'est fournie pour ce cas.

On considère que la fissure ne perturbe pas la symétrie du problème et le cas n'est ainsi traité que sur un quart de pneumatique soumis à des conditions de symétrie. La modélisation Arlequin est la suivante : un patch fissuré est superposé, dans la zone souhaitée, à un modèle global de quart de pneumatique, non-fissuré. Les figures 6.14 et 6.15 montrent les maillages du quart de pneumatique et du patch. La zone de couplage est constituée à partir d'un ensemble d'élements du patch. Elle est représentée par la figure 6.16. Les paramètres Arlequin sont les mêmes que dans les cas précédents, à l'exception de κ_1 qui vaut 1. On note que l'utilisation d'une approche multi-modèle est ici cruciale car il serait très difficile, voir impossible, de mailler un tel cas monomodel uniquement en hexaèdres (éléments de base utilisés dans le code Michelin). La figure 6.17 donne la déformée du pneumatique et



FIGURE 6.14 – Maillages pour le cas du pneumatique

du patch dans la zone de contact avec le sol. La figure 6.18 donne la densité d'énergie de déformation et la pression hydrostatique pour le patch. Enfin, la figure 6.19 montre des coupes de la densité d'énergie de déformation autours de la fissure. Ces résultats montrent la faisabilité industrielle de l'inclusion d'un patch fissuré dans un modèle de pneumatique global sain.

6.6 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons proposé dans un ensemble de techniques et de procédures permettant le calcul de d'intersections de maillages 3D/3D et 3D/2D de manière performante. Ces techniques, nécessaires au deploiement industriel de la méthode Arlequin, ont été implémentées sous la forme d'une librairie nommée MTL3D et intégrées au travers d'un code de calcul de couplage Arlequin à la chaine de simulation de la société Michelin. Des essais numériques concluants ont permis permettent de valider les techniques développées et de leurs implémentations.



FIGURE 6.15 – Maillage du patch



FIGURE 6.16 – Zone de couplage pour le cas du pneumatique fissuré



 ${\rm FIGURE}$ 6.17 – Maillages déformé (rouge) et non-déformé (noir) pour le cas du pneumatique dans la zone de contact avec le sol





(b) Pression hydrostatique

 ${\rm Figure}~6.18$ – Densité d'énergie de déformation et pression hydrostatique sur le patch pour le cas du pneumatique fissuré



 ${\rm FIGURE}$ 6.19 – Coupes de la densité d'énergie de déformation autour de la fissure pour le cas du pneumatique fissuré

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a porté sur le développement, l'implémentation et la validation d'une stratégie numérique pour la simulation de l'évolution d'un endommagement localisé susceptible de conduire à l'apparition, puis à la propagation de fissures dans une structure complexe incompressible. L'application industrielle visée est la prédiction de la ruine d'un pneumatique par fatigue. Pour atteindre cet objectif ambitieux, nous avons procédé par étapes.

Dans un premier temps, nous avons développé une méthodologie numérique innovante pour la propagation de fissures dans le cadre de la mécanique de la rupture fragile. Cette méthodologie a deux caractéristiques importantes : incluant l'enrichissement Heaviside de la méthode XFEM dans le cadre de modélisation Arlequin, cette méthodologie permet de ne pas remailler la structure initiale, au cours de la propagation de la fissure. Attachant un patch Arlequin local en fond de la fissure qui se propage, elle permet d'approcher, avec la précision nécessaire, le comportement local des champs mécaniques. Ce choix prépare la perspective que nous avons développée par la suite. Cette méthodologie a été implémentée et testée numériquement dans un prototype MATLAB, développé dans le cadre de ces travaux de thèse. Elle a fait l'objet de la publication [20].

Dans un deuxième temps, nous avons étendu cette méthodologie pour la prise en compte de l'endommagement par fatigue. Dans l'approche développée, l'inititation et la propagation de fissures sont pilotées par l'évolution du champ d'endommagement. Un modèle heuristique simple est proposé. Ce modèle fournit les incréments de propagation d'une fissure à partir des champs d'endommagement et de contraintes au voisinage de sa pointe. Par ailleurs, la présence de la variable interne d'endommagement a posé de nouvelles problématiques, en particulier celle classique du transfert de champs entre les maillages du modèle global et du patch Arlequin lorsque ce dernier se propage. En utilisant des modèles physiques grossiers mais représentatifs des difficultés liées à cette problématique d'initiation et de propagation de fissures sous l'effet d'un endomagement par fatigue, nous avons montré, à travers des essais numériques, une faisabilité de notre approche.

Dans un troisième temps, et afin de nous rapprocher davantage de l'objectif industriel des ces travaux de thèse, nous nous somme intéressés à la prise en compte de la contrainte d'incompressibilité dans une modélisation Arlequin. L'intégration de cette contrainte pose pour la formulation Arlequin continue et/ou discrète un certain nombre de questions spécifiques : comment gérer la double contrainte dans la zone de couplage en continu et en discret ?, comment traiter les éléments partiellement incompressibles ? Des proposition claires sont formulées et étayées, soit théoriquement, soit numériquement. Ainsi, comme le cadre Arlequin superpose des modèles, nous avons proposé de n'imposer la contrainte d'incompressibilité qu'une seule fois pour avoir des problèmes bien posés. Pour le discret, et vu le caractère implicitement plus raffiné du modèle éléments finis du patch, nous avons montré la nécessité d'imposer l'incompressibilité au modèle substrat dans la zone de couplage des modèles lorsque l'espace médiateur est l'espace éléments finis fins. Nous avons enfin discuté des éléments partiellement compressibles et proposé des préconisations pratiques.

Enfin, nous avons proposé un ensemble de procédures pratiques, permettant d'évaluer, de manière générale et performante, une intersection de maillages tridimentionnels. Ces développements sont nécessaires à la mise en oeuvre opérationnelle du cadre Arlequin dans des codes industriels. Ces développements sont validés par des résultats de calculs Arlequin 3D. Parmi ces derniers, citons tout particulièrement le résultat où un modèle de pneu avec fissure, prise en compte par l'intermédiaire d'un patch Arlequin, a été calculé avec le code DELI de Michelin.

Même si notre objectif initial, consistant à développer une méthodologie industrialisable, permettant de faire propager dans un pneumatique un dommage dont le front peut se transformer en une fissure qui elle-même se progage, n'est pas complètement atteint, l'ensemble des briques développées et testées dans le cadre de ces travaux de thèses nous permettent d'affirmer que nous n'en sommes pas loins. Parmi les ojectifs court et moyen terme, il serait intéressant de tenir compte des contacts frottants entre lèvres de fissures créés par évolution d'un endommagement. Des perspectives plus lointaines et plus conséquentes consistent à intégrer le vrai comportement du pneu composite (polymères chargés, renforcés par des nappes d'acier et de textiles) dans une modélisation plus réaliste, notamment dans les zones critiques, celles prises en compte par les patchs Arlequin, en utilisant eventuellement des méthodes d'homogénéisation numérique de type FE^2 [44]. La prise en compte des aléas est un autre horizon de recherche.

Annexes

A Loi énergie de Mooney-Rivlin

Un matériau de Mooney-Rivlin est un matériau hyperélastique incompressible dont la densité d'énergie de déformation ψ_0 est une combinaison linéaire des deux premiers invariants I_1 et I_2 du tenseur de déformation de Cauchy-Green droit $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, où \mathbf{F} est le gradient Lagrangien de la déformation. On écrit :

$$\psi_0 = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \tag{6.9}$$

où C_{10} et C_{01} sont des coefficients matériau à identifier.

B Structure de données "half-edge"

De manière classique, un maillage est décrit par la donné des coordonnées de ses noeuds et d'un table de connectivité. Cette représentation, bien que très simple, peut s'avérer très peu performante et très peu commode dès qu'il s'agit d'obtenir des relations topologiques d'adjacence, par exemple l'ensemble des faces reliées à un noeud donné ou l'ensemble des arètes bordant une face donnée.

La structure de données "half-edge" [70] permet de décrire des 2-variétés. C'est une structure de données dite "complète", c'est à dire que l'on peut obtenir toutes les relations d'adjacence en temps constant (ou proportionnel au nombre d'entités retrouvées). En outre, une fois la structure de données half-edge implémentée, les routines de requête de relation d'adjacence sont très simples à implémenter. Cette structure de données est utilisée pour décrire les surfaces maillées ainsi que les polyèdres connexes. Ces derniers sont décrits par l'intermédiaire de leur surface extérieure (représentation dite "B-Rep") adjointe d'une notion d'intérieur/extérieur.

La principale caractéristique de la structure de données "half-edge" est que l'on ne stocke pas les arètes de la surface maillée mais des demi-arètes (les half-edges). Une arète faisant la jonction entre deux faces est dédoublée en deux demi-arètes. Chacune d'elles est liée à une des deux faces et est orientée (voir figure 6.20). En détail, on stocke :

- pour chaque demi-arète :
 - son noeud terminal
 - la demi-arète jumelle, d'orientation opposée
 - la face que borde la demi-arète en question
 - la demi-arète suivante dans la face
- pour chaque noeud :
 - ses coordonnées
 - une demi-arète émanant du noeud en question
- pour chaque face :
 - une demi-arète bordant la face en question

Dans un style C, on peut utiliser des pointeurs :

struct HEhedge { // structure décrivant une demi-arète



FIGURE 6.20 – Half-edge data structure

```
HEvertice *vertice; // noeud terminal
                       // demi-arète jumelle
 HEhedge *twin;
                      // face bordée par la demi-arète
 HEface *face;
 HEhedge *next;
                     // demi-arète suivante
  . . .
}
struct HEvertice {
                       // structure décrivant un noeud
 double coor[3];
                       // coordonnées du noeud
 HEhedge *hedge;
                       // demi-arète émanant du noeud
  . . .
}
struct HEface {
                       // structure décrivant une face
                       // demi-arète bordant la face
 HEhedge *hedge;
  . . .
}
```

Les requêtes de relations d'adjacence peuvent alors être implémentées simplement. Par exemple, on peut parcourir facilement les faces adjacentes à un noeud donné de la manière suivante :

```
HEhedge* hedge=vertice->hedge;
```

```
do {
    ... // faire quelquechose avec hedge->face
    hedge=hedge->twin->next;
} while (hedge!=vertice->hedge);
```

Bibliographie

- S. Andrieux, Y. Bamberger, and J.-J. Marigo. Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 5:471–513, 1986.
- [2] I. Babuška. Error-bounds for finite element method. Numerische Mathematik, 16:322–333, 1971.
- [3] I. Babuška and J.M. Melenk. The partition of unity method. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 40:727–758, 1997.
- [4] I. Babuška, T. Strouboulis, and K. Copps. The design and analysis of the generalized finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181:43–69, 2000.
- [5] G.I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in applied mechanics, 7:55–129, 1962.
- [6] O.H. Basquin. The exponential law of endurance tests. In Proceedings of American Society of Testing Materials, 1910.
- [7] P.T. Bauman, H. Ben Dhia, N. Elkhodja, J.T. Oden, and S. Prudhomme. On the application of the arlequin method to the coupling of particle and continuum models. *Computational Mechanics*, 42:511–530, 2008.
- [8] T. Belytschko and T. Black. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45:601–620, 1999.
- [9] T. Belytschko, J. Fish, and A. Bayliss. The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81:71–89, 1990.
- [10] T. Belytschko, J. Fish, and B.E. Engelmann. A finite element with embedded localization zones. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 70:59–89, 1988.
- [11] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element-free galerkin methods. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 37 :229–256, 1994.
- [12] H. Ben Dhia. Numerical analysis of a bidimensional hencky problem approximated by a discontinuous finite element method. SIAM Journal on Numerical Analysis, 29 :1059–1073, 1992.
- [13] H. Ben Dhia. Multiscale mechanical problems : the arlequin method. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB, 326 :899–904, 1998.
- [14] H. Ben Dhia. Numerical modelling of multiscale problems : the arlequin method. In European Conference on Computational Mechanics, 1999.
- [15] H. Ben Dhia. The arlequin method : a partition of models for concurrent multiscale analyses, may 2006. Challenges in Computational Mechanics Workshop, Cachan, France.
- [16] H. Ben Dhia. Global-local approaches : the arlequin framework. European Journal of Computational Mechanics, 15 :67–80, 2006.
- [17] H. Ben Dhia. Further insights by theoretical investigations of the multiscale arlequin method. International Journal for Multiscale Computational Engineering, 6 :215–232, 2008.
- [18] H. Ben Dhia and N. Elkhodja. Coupling of atomistic and continuum models in the arlequin framework. 8ème Congrès de Mécanique, April 2007.

- [19] H. Ben Dhia, N. Elkhodja, and F.-X. Roux. Multi-modeling of multi-alterated structures in the arlequin framework. solution with a domain decomposition solver. *European Journal of Computational Mechanics*, 17 :969–980, 2008.
- [20] H. Ben Dhia and O. Jamond. On the use of xfem within the arlequin framework for the simulation of crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2010.
- [21] H. Ben Dhia and G. Rateau. Analyse mathématique de la méthode arlequin mixte. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 332 :649–654, 2001.
- [22] H. Ben Dhia and G. Rateau. Application of the arlequin method to some structures with defects. *Finite Element European Review*, 11:291–304, 2002.
- [23] H. Ben Dhia and G. Rateau. The arlequin method as a flexible engineering design tool. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 62 :1442–1462, 2005.
- [24] H. Ben Dhia and C. Zammali. Level-sets, placement and velocity-based lagrangian formulation of impact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:2711–2735, 2007.
- [25] M. Bercovier and O. Pironneau. Error estimates for finite element method solution of the stokes problem in the primitive variables. *Numerische Mathematik*, 33:211–224, 1977.
- [26] B. Boroomand and O.C. Zienkiewicz. Recovery procedures in error estimation and adaptivity. part ii : Adaptivity in nonlinear problems of elasto-plasticity behaviour. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176 :127–146, 1999.
- [27] B. Bourdin, G. A. Francfort, and J.-J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 48 :797–826, 2000.
- [28] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. Revue Française d'Automatique, Informatique, et Recherche Operationnelle, série analyse numérique, 8 :129–151, 1974.
- [29] F. Brezzi and M. Fortin. Mixed and Hybrid Finite Element Methods. Spinger, New York, 1991.
- [30] J.-B. Brunac. Modélisation numérique du comportement en fatigue des élastomères chargés de noir de carbone. PhD thesis, Université Paris 6, 2006.
- [31] J.-B. Brunac, O. Gérardin, and J.-B. Leblond. On the heuristic extension of haigh's diagram for the fatigue of elastomers to arbitrary loadings. *International Journal of Fatigue*, 31:859–867, 2009.
- [32] J.-L. Chaboche. Une nouvelle condition unilatérale pour décrire le comportement des matériaux avec dommage anisotrope. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB, 314 :1395– 1401, 1992.
- [33] D. Chapelle and K.J. Bathe. The inf-sup test. Computers & structures, 47:537–545, 1993.
- [34] M. Charlotte, J. Laverne, and J.-J. Marigo. Initiation of cracks with cohesive force models : a variational approach. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 25 :649–669, 2006.
- [35] P.G. Ciarlet. The Finite Element Method for Elliptic Problems. North-Holland, 1978.
- [36] P.Jr. Ciarlet and V. Girault. Condition inf-sup pour l'élément fini de taylor-hood p2-iso-p1, 3-d; application aux équations de maxwell. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I -Mathematics, 335:827-832, 2002.
- [37] C. Comi, S. Mariani, and U. Perego. An extended fe strategy for transition from continuum damage to mode i cohesive crack propagation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31 :213–238, 2007.
- [38] J. Dolbow, N. Moës, and T. Belytschko. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36 :235–260, 2000.

- [39] P. Droz. Modèle numérique du comportement non-linéaire d'ouvrages massifs en béton non armé. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1987.
- [40] D. S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8 :100–104, 1960.
- [41] G. Duvaut and J.-L. Lions. Les inéquations en mécanique et en physique. Dunod, 1972.
- [42] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño, and G. Gioia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:541–564, 1990.
- [43] C. Farhat and F.-X. Roux. A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:1205–1227, 1991.
- [44] F. Feyel. A multilevel finite element method (fe2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 192 :3233–3244, 2003.
- [45] J. Fish. The s-version of the finite element method. Computer and Structures, 43:539–547, 1992.
- [46] G. A. Francfort and J.-J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46 :1319–1342, 1998.
- [47] N. Germain, J. Besson, F. Feyel, and P. Gosselet. High-performance parallel simulation of structure degradation using non-local damage models. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 71 :253–276, 2007.
- [48] V. Girault and P.A. Raviart. Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations. Spinger, 1986.
- [49] R. Glowinski, J. He, A. Lozinski, J. Rappaz, and J. Wagner. Finite element approximation of multi-scale elliptic problems using patches of elements. *Numerische Mathematik*, 101 :663–687, 2005.
- [50] R. Glowinski, J. He, J. Rappaz, and J. Wagner. Approximation of multi-scale elliptic problems using patches of finite elements. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, 337 :779–684, 2003.
- [51] P.-A. Guidault, O. Allix, L. Champaney, and C. Cornuault. A multiscale extended finite element method for crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197 :381–399, 2008.
- [52] P.-A. Guidault and T. Belytschko. On the l2 and the h1 couplings for an overlapping domain decomposition method using lagrange multipliers. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 70 :322–350, 2007.
- [53] P. Hood and C. Taylor. A numerical solution of the navier stokes equations using the finite element technique. *Computers and Fluids*, 1 :1–28, 1973.
- [54] H. Hu, S. Belouettar, M. Potier-Ferry, and E.M. Daya. Multi-scale modelling of sandwich structures using the arlequin method part i : Linear modelling. *Finite Elements in Analysis and Design*, 45 :37–51, 2008.
- [55] T.J.R Hughes. The Finite Element Method : Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice Hall, 1987.
- [56] T.J.R Hughes, J.A. Cottrell, and Y. Bazilevs. Isogeometric analysis : Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194 :4135–4195, 2005.

- [57] M. Jirásek. Nonlocal models for damage and fracture : Comparison of approaches. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 35 :4133–4145, 1998.
- [58] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188:307–330, 2000.
- [59] M. Jirásek and T. Zimmermann. Embedded crack model : I. basic formulation. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 50 :1269–1290, 2001.
- [60] C. Johnson and R. Scott. A finite element method for problems in perfect plasticity using discontinuous trial functions. In Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, pages 307–324. 1981.
- [61] A.R. Khoei and S.A. Gharehbaghi. Three-dimensional data transfer operators in large plasticity deformations using modified-spr technique. *Applied Mathematical Modelling*, 33 :3269–3285, (2009).
- [62] P. Laborde, J. Pommier, Y. Renard, and M. Salaün. High order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64:354–382, 2005.
- [63] P. Ladevèze. Nonlinear computational structural mechanics : New approaches and nonincremental methods of calculation. Springer (New York), 1999.
- [64] P. Ladevèze and D. Dureisseix. A micro/macro approach for parallel computing of heterogeneous structures. International Journal for Computational Civil and Structural Engineering, 1:18–28, 2000.
- [65] G. Legrain, N. Moës, and A. Huerta. Stability of incompressible formulations enriched with x-fem. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197 :1835–1849, 2008.
- [66] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, A. Benallal, and R. Desmorat. Mécanique des matériaux solides. Dunod, 3rd edition, 2009.
- [67] E. Lorentz and S. Andrieux. A variational formulation for nonlocal damage models. International Journal of Plasticity, 15 :119–138, 1999.
- [68] E. Lorentz and S. Andrieux. Analysis of non-local models through energetic formulations. International Journal of Solids and Structures, 40 :2905–2936, 2003.
- [69] D.S. Malkus. Eigenproblems associated with the discrete lbb condition for incompressible finite elements. *International Journal of Engineering Science*, 19:1299–1310, 1981.
- [70] M. Mäntylä. An Introduction to Solid Modeling. Computer Science Press, Rockville, USA, 1988.
- [71] M. Matsuishi and T. Endo. Fatigue of metals subjected to varying stress. Japan Society of Mechanical Engineers, 1968.
- [72] S.F. McCormick and J. Thomas. The fast adaptive composite-grid (fac) method for elliptic equations. *Mathematics of Computation*, 46:439–456, 1986.
- [73] J.M. Melenk and I. Babuška. The partition of unity finite element method : Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139 :289–314, 1996.
- [74] N. Moës, J. Dolbow, and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46 :131–150, 1999.
- [75] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method : diffuse approximation an diffuse elements. *Computers and Structures*, 10:307–318, 1992.
- [76] D. Ngo and A. C. Scordelis. Finite element analysis of reinforced concrete beams. ACI Journal Proceedings, 64 :152–163, 1967.
- [77] M. Ortiz, Y. Leroy, and A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 61 :189–214, 1987.

- [78] M. Ortiz and J.J. Quigley. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 90:781–804, 1991.
- [79] M. Paggi and P. Wriggers. A nonlocal cohesive zone model for finite thickness interfaces part i : Mathematical formulation and validation with molecular dynamics. *Computational Materials Science*, doi :10.1016, 2010.
- [80] B. Patzák and M. Jirásek. Process zone resolution by extended finite elements. Engineering Fracture Mechanics, 70:957–977, 2003.
- [81] R.H.J. Peerlings, R. de Borst, W.A.M. Brekelmans, and M.G.D. Geers. Localisation issues in local and nonlocal continuum approaches to fracture. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21:175–189, 2002.
- [82] R.H.J. Peerlings, M.G.D. Geers, R. de Borst, and W.A.M. Brekelmans. A critical comparison of nonlocal and gradient-enhanced softening continua. *International Journal of Solids and Structures*, 38:7723–7746, 2001.
- [83] V. Pensée and D. Kondo. Une analyse micromécanique 3-d de l'endommagement par mésofissuration. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB, 329 :271–276, 2001.
- [84] D. Perić, Ch. Hochard, M. Dutko, and D.R.J Owen. Transfer operators for evolving meshes in small strain elasto-placticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 137:331–344, 1996.
- [85] G. Pijaudier-Cabot and Z. P. Bazant. Nonlocal damage theory. Journal of Engineering Mechanics, 113 :1512–1533, 1987.
- [86] G. Pijaudier-Cabot and A. Benallal. Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. International Journal of Solids and Structures, 30 :1761–1775, 1993.
- [87] S. Prudhomme, L. Chamoin, H. Ben Dhia, and P.T. Bauman. An adaptive strategy for the control of modeling error in two-dimensional atomic-to-continuum coupling simulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 :1887–1901, 2009.
- [88] Y.R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. Nuclear Engineering and Design, 7:334–344, 1968.
- [89] G. Rateau. Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles. application à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 2003.
- [90] G. Rateau and H. Ben Dhia. Méthode arlequin pour la propagation de défauts dans des pneus : Etude de faisabilité. Technical report, Michelin Company, 2005.
- [91] Y. Romdhane and H. Ben Dhia. Report. Technical report, Michelin Company, 2006.
- [92] J.M. Sancho, J. Planas, D.A. Cendón, E. Reves, and J.C. Gálvez. An embedded crack model for finite element analysis of concrete fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:75–86, 2007.
- [93] E. Schlangen. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete. PhD thesis, Delft University of Technology, 1993.
- [94] A. Simone, G.N. Wells, and L.J. Sluys. From continuous to discontinuous failure in a gradientenhanced continuum damage model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 :4581–4607, 2003.
- [95] J.L. Steger and J.A. Benek. On the use of composite grid schemes in computational aerodynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 64 :301–320, 1987.
- [96] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the stokes equations. Revue Française d'Automatique, Informatique, et Recherche Operationnelle, série analyse numérique, 18:175–182, 1984.

- [97] C. Verhoosel, M. Scott, R. de Borst, and T.J.R Hughes. An isogeometric approach to cohesive zone modeling. Technical report, The Institute for Computational Engineering and Sciences, 2010.
- [98] P. Villon, H. Borouchaki, and K. Saanouni. Transfert de champs plastiquement admissibles. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics, 330:313–318, 2002.
- [99] G.N. Wells, L.J. Sluys, and R. de Borst. Simulating the propagation of displacement discontinuities in a regularized strain-softening medium. *International Journal for Numerical Methods* in Engineering, 53 :1235–1256, 2002.
- [100] S.P. Xiao and T. Belytschko. A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193 :1645–1669, 2004.
- [101] B. Yang and T. Laursen. A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. *Computational Mechanics*, 41 :189–205, 2008.
- [102] O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor. The Finite Element Method. McGraw-Hill, New York, 1999.