HAL
open science

Modélisation et simulations numériques du transfert radiatif dans les plasmas d'arc électrique

Nicolas Kahhali

To cite this version:

Nicolas Kahhali. Modélisation et simulations numériques du transfert radiatif dans les plasmas d'arc électrique. Autre. Ecole Centrale Paris, 2009. Français. NNT : 2009ECAP0023 . tel-01124195

HAL Id: tel-01124195

https://theses.hal.science/tel-01124195v1

Submitted on 31 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale Paris

THÈSE

présentée par

Nicolas KAHHALI

pour l'obtention du

GRADE de DOCTEUR

Formation doctorale : **Sciences pour l'Ingénieur**

Laboratoire d'accueil : **Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C) du CNRS et de l'ECP**

Modélisation et simulations numériques du transfert radiatif dans les plasmas d'arc électrique

Soutenue le 7 Juillet 2009

Composition du jury :

Mme	EL HAFI	M.	Rapporteur
MM.	GLEIZES	A.	Président et Rapporteur
	SOUFIANI	A.	
	RIVIERE	P.	
	PEROCHE	B.	
	GONNET	J.-P.	

Ecole Centrale des Arts et Manufactures
Grand Etablissement sous tutelle
du Ministère de l'Education Nationale
Grande Voie des Vignes
92295 CHATENAY MALABRY Cedex
Tél. : 33 (1) 41 13 10 00 (standard)
Télex : 634 991 F EC PARIS

Laboratoire d'Energétique Moléculaire
et Macroscopique, Combustion (E.M2.C.)
UPR 288, CNRS et École Centrale Paris
Tél. : 33 (1) 41 13 10 31
Télécopie : 33 (1) 47 02 80 35

2009 - ECAP0023

Remerciements

Ce travail de thèse représente l'aboutissement d'une réflexion menée au sein du Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion du CNRS à l'Ecole Centrale Paris ainsi qu'au sein de la direction de l'innovation de Schneider- Electric dans l'équipe Coupure et Modélisation du service Innovation et Expertise en Electromagnétisme Avancé.

Je voudrais remercier M. Nasser Darabiha, ex- directeur du laboratoire, de m'avoir chaleureusement accueilli lors de mon arrivée. Je voudrais ensuite remercier M. Alain Gleizes de m'avoir fait l'honneur d'accepter la double tâche de président du jury et rapporteur de ce manuscript de thèse. Je remercie également Mme Mouna El Hahi d'avoir accepté de rapporter ce travail en montrant un réel intêret pour les algorithmes présentés. M. Bernard Peroche a eu la surprise d'être contacté pour faire partie de ce jury. Je voudrais le remercier d'avoir pris le temps de relire ce manuscript en apportant ses remarques et critiques constructives.

Ce travail a été dirigé par Anouar Soufiani et Philippe Rivière. Le niveau d'exigence et la rigueur intellectuelle d' Anouar ont grandement contribué à élever la qualité de ce travail et de ce manuscript. Comme dans toute entreprise intellectuelle, il y a des moments de doute, Philippe Rivière a été un encadrant d'exception, un pédagogue remarquable et surtout une source d'inspiration inépuisable durant ces étapes difficiles. Nos diverses discussions représentaient une échapatoire salutaire ! Qu'il en soit ici remercié.

Je voudrais remercier MM. Christian Fievet, Jean Wild, Benoît Jusselin et Jean-Paul Gonnet de l'équipe Coupure et Modélisation. Les contributions de Jean-Yves Battandier et Loic Rondot ont également été appréciable. J'ai passé de très bons moments avec tous les membres de cette équipe, réorganisée depuis, et plus spécifiquement avec Vadim Nossov, Gabriela Sandolache et François Gentils.

Enfin ce travail de thèse n'aurait pas été aussi agréable sans la rencontre et les échanges avec tous les thésards et post-docs du laboratoire. Je pense plus spécifiquement à Philippe Berard, Romain Pierrat, Jean-Michel Lamet, Dave Pai, Gabi Stancu, Thierry Magin, Lise Caillaux, Yacine Babou, Barbar Zeghondy, Ghislain Singla, Nicolas Noiret. Je leur souhaite à tous bonne continuation dans leurs projets professionnel et personnel. J'ai une pensé pour les danseurs francais ou brésiliens avec qui j'ai passé de très bon moments et spécialement avec Jurema Cruz Alves qui a partagé ma vie pendant ces 3 ans... Enfin je voudrais remercier Daria Andréoli pour son soutient et sa présence. Je garde de très bons souvenirs de Cuba !

Mon parcours est le résultat du soutient inconditionnel que m'a toujours donné ma famille. Je n'oublie pas les moments de doute de mes parents, Nikola et Geneviève et les conseils de mon frère Yves. Je lui souhaite bonne chance dans son propre parcours. Mon oncle et mes tantes ont été également très présent pendant toutes ces années. Merci à tous.

A la mémoire de mon père, virtuose de l'aiguille, décédé en cours de route...

Table des matières

Introduction **ix**

I Généralités et physique de l'arc électrique **1**
I.1 Dispositif de coupure dans l'air : le disjoncteur basse tension 3
I.1.1 Introduction 3
I.1.2 Le disjoncteur, élément du réseau électrique 5
I.1.3 Principe de fonctionnement 6
I.2 Modélisation des phénomènes physiques dans les plasmas d'arc 9
I.2.1 Equilibre thermodynamique local 9
I.2.2 Equations de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes . . . 11
I.2.3 Equations de l'électromagnétisme 12
I.2.4 Modèle de dégradation de paroi 14
I.3 Modélisation du transfert radiatif 17
I.3.1 Introduction 17
I.3.2 Equation de transfert radiatif 17
I.3.3 Méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif 20
I.3.4 Mécanismes radiatifs élémentaires 26
I.3.5 Modélisation spectrale des propriétés radiatives 31
I.3.6 Etat de l'art du calcul du transfert radiatif dans les plasmas d'arcs . . 36
I.4 Conclusion et objectifs de la thèse 39

II Modèles spectraux globaux **41**
II.1 Introduction : enjeux de la modélisation spectrale 42
II.2 Principe des modèles globaux 43
II.2.1 Cas d'une colonne de plasma homogène et isotherme 43
II.2.2 Cas d'une colonne de plasma inhomogène et anisotherme 44
II.3 Un modèle MADF optimisé : le modèle MADF 36 47
II.3.1 Le problème d'optimisation et sa réduction 47
II.3.2 Algorithme utilisé pour la recherche de minimum 50
II.4 Analyse quantitative et statistique du modèle 52
II.4.1 Evolution des coefficients d'absorption et des poids en fonction de la température 52
II.4.2 Erreur relative sur l'émissivité donnée par le modèle MADF 36 55
II.5 Calcul de transfert radiatif - comparaison MADF 36/ MADF 216 60
II.6 Conclusion 62

III Méthode P1 et calculs couplés en géométrie bidimensionnelle **63**
III.1 Introduction 64

III.2 Étude de la validité de la méthode P_1 65
III.2.1 Equation P_1 dans le cadre du modèle MADF 65
III.2.2 Méthode de lancé de rayons dans le cadre du modèle MADF 66
III.2.3 Résultats de comparaison et discussion 67
III.3 Simulation bidimensionnelle de la propagation d'un arc 75
III.3.1 Electrostatique et magnétostatique en milieu électriquement neutre . 76
III.3.2 Le code de simulation hydrodynamique NS2 77
III.3.3 Formulation par éléments finis de l'équation P_1 78
III.3.4 Calculs couplés et comparaison avec l'émission nette 79
III.3.5 Conclusion 92
III.4 Conclusion 94

IV Méthode Monte Carlo optimisée en géométrie complexe tridimensionnelle 95
IV.1 Introduction 97
IV.2 Méthodes de Monte Carlo appliquées aux transferts radiatifs 99
IV.2.1 Quelques principes généraux 99
IV.2.2 Équation de transfert radiatif dans le cadre probabiliste 101
IV.2.3 Estimateurs statistiques des flux radiatifs, des puissances et de leurs variances 109
IV.3 Algorithmes de partitionnement spatial 110
IV.3.1 Introduction et bibliographie 110
IV.3.2 Optimisation par Octree 111
IV.3.3 Optimisation par BSP 116
IV.3.4 Construction d'une fonction entropie d'information spatiale 120
IV.4 Mise en oeuvre : algorithmie et structures de données associées 122
IV.4.1 Algorithmie de détection de faces solides tridimensionnelles 122
IV.4.2 Raffinement adaptatif de maillage 127
IV.5 Propagation de rayons dans l'octree 131
IV.5.1 Principe général de l'algorithme physique 131
IV.5.2 Intersection entre un rayon et une face solide 134
IV.5.3 Intersection entre un rayon et une face du maillage Octree 136
IV.5.4 Positionnement dans l'octree au cours de la propagation 137
IV.5.5 Algorithme de choix de la cellule absorbante 138
IV.6 Filtrage spatial des champs bruités de puissance et de flux radiatifs 141
IV.6.1 Fonction de recherche de voisins d'ordre n 141
IV.6.2 Choix des fonctions de filtrage F_P et F_Φ 143
IV.6.3 Exemple de filtrage spatial 143
IV.7 Algorithmie de calculs parallèles 147
IV.7.1 Choix de parallélisation 147
IV.8 Conclusion 149

V Validations et performances algorithmiques comparées 151
V.1 Introduction 152
V.2 Validation des algorithmes développés 153
V.2.1 Calcul de facteurs de forme tridimensionnels 153
V.2.2 Calcul de transfert radiatif en géométrie monodimensionnelle 154
V.2.3 Calcul de transfert radiatif en géométrie bidimensionnelle 156

V.3 Performance des différents algorithmes pour une géométrie complexe tridimensionnelle 163
V.3.1 Performance de l'algorithme octree en fonction de la profondeur de la structure de données 163
V.3.2 Calcul de transfert radiatif dans une géométrie représentative d'un disjoncteur 165
V.3.3 Temps de calcul comparés des trois algorithmes Monte Carlo 171

Conclusion **175**

A Description d'un élément fini pour la résolution des équation du modèle P_1 **179**

B Evolution des coefficients de transport et des conductivités en fonction de la température **183**

C Maillage 1 **187**

D Maillage 2 **189**

E Maillage 3 **191**

Références **193**

Introduction

De nombreuses études, aussi bien expérimentales que théoriques, ont été menées pour l'industrie électrique afin de comprendre et d'être capable de prédire les mécanismes intervenant lors d'une coupure électrique par arc. Ces études ont montré la grande diversité et complexité des phénomènes physiques et chimiques mis en oeuvre. L'arc électrique créé juste après la séparation des contacts est poussé par les forces électromagnétiques vers une zone d'extinction. Durant son développement et sa propagation, l'énergie lui est fournie par effet Joule et est dissipée par différents modes de transfert thermique. Son expansion rapide induit des effets de compressibilité avec la propagation d'ondes de pression. Le rayonnement intense du plasma créé, ainsi que les phénomènes aux pieds des électrodes, induisent une ablation des parois qui change la composition chimique du milieu et rend plus complexe la modélisation de l'ensemble des phénomènes couplés par hydrodynamique, électromagnétisme, transferts thermiques et diffusion d'espèces chimiques en régime fortement instationnaire. Le rôle du transfert radiatif est primordial dans la mesure où, d'une part, il conditionne le champ de température et donc les propriétés de transport, notamment électriques, et, d'autre part, participe pour une grande part à la thermo-dégradation des parois.

La modélisation de l'ensemble des phénomènes physico-chimiques a beaucoup progressé durant les vingt dernières années mais le calcul du transfert radiatif demeure un point bloquant dans l'avancement des méthodes de modélisation.

En effet, le champ de rayonnement est caractérisé par une luminance qui dépend de la longueur d'onde, de la position spatiale, de la direction de propagation, ainsi que du temps au travers ici des variations des champs de température et de la composition chimique. La prise en compte rigoureuse de toutes ces dépendances demeure inaccessible à l'heure actuelle pour des simulations complètes d'extinction d'arc, en particulier à cause de la complexité des spectres d'émission et d'absorption des milieux plasmas. Le recours à des modèles approchés pour le traitement spectral et/ou pour les dépendances géométriques et directionnelles est nécessaire.

Ce travail a été mené en collaboration entre le Laboratoire EM2C et la société Schneider Electric. Il fait suite à des travaux de collaboration antérieurs dont l'objectif était la détermination des propriétés radiatives fondamentales des plasmas d'arc (Thèse S. Chauveau). Le but principal du présent travail est de développer des modèles approchés mais précis, ainsi que des outils de simulation numérique avec différents degrés de finesse, pour le calcul du champ de puissance radiative et des flux pariétaux dans des chambres de coupure électrique basse tension. Les modèles et outils développés doivent être implémentés dans des codes de simulation hydrodynamique dédiés soit à des géométries bidimensionnelles simplfiées, soit à des géométries industrielles complexes et tridimensionnelles. Ces outils doivent

par ailleurs être modulaires, facilement maintenables et évolutifs.

Les études expérimentales menées sur des maquettes représentatives des dispositifs industriels montrent la présence de vapeurs plastiques et métalliques dues à l'ablation et à l'érosion des parois. La composition chimique change par ailleurs fortement avec le temps entre la naissance et l'extinction de l'arc électrique. Bien que les modèles développés ici puissent être adaptés à cette composition chimique complexe, nous supposerons tout le long de ce travail que le milieux gazeux est un plasma d'air à l'équilibre thermique et chimique local.

Dans le premier chapitre, le disjoncteur est d'abord introduit en tant qu'élément du circuit électrique. Nous présentons ensuite l'ensemble des mécanismes physiques qu'il est nécessaire de prendre en compte pour modéliser le milieu plasma et son évolution temporelle. Nous montrons en particulier comment la puissance radiative est couplée aux autres grandeurs physiques du problème et comment le flux radiatif intervient dans un modèle de dégradation de paroi utilisé dans le code de simulation de Schneider Electric. Un accent particulier est ensuite mis sur le mécanisme de transfert radiatif ainsi que sur les différentes méthodes de résolution de l'équation qui régit ce mode de transfert. La modélisation des propriétés radiatives du milieu fait également l'objet d'une discussion détaillée. Enfin une revue de l'état de l'art en ce qui concerne la modélisation des transferts radiatifs dans les plasmas d'arc est présentée.

Le deuxième chapitre est consacré à la modélisation des propriétés radiatives des plasmas d'air. Nous proposons une simplification d'un modèle de propriétés radiatives proposé par (Deron, Rivière, Perrin, et Soufiani 2004). Ce modèle, dit MADF (pour Mixture Absorption Distribution Function) est basé sur la discrétisation des valeurs prises par le coefficient d'absorption et sur la notion d'espèces fictives introduites pour représenter correctement les corrélations spectrales. Le modèle MADF original est dégradé dans le but de réduire le nombre de classes du coefficient d'absorption utlisées afin d'accélérer les calculs de puissance et de flux. Cette réduction du nombre de classes du coefficient d'absorption a nécessité la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire. Nous étudions à la fin de ce chapitre les performances du modèle réduit en comparant les résultats obtenus avec ceux du modèle initial. Ces comparaisons portent d'abord sur la prédiction des émissivités totales puis sur les transferts radiatifs dans une géométrie bidimensionnelle.

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons à la possibilité de simplifier le traitement géométrique du transfert radiatif en utilisant la méthode P_1. Cette méthode permet en effet de se ramener à des équations aux dérivées partielles d'ordre 2 sans discrétisation angulaire particulière. Bien qu'elle ait été largement étudiée dans la littérature, la précision de cette méthode dans le cadre particulier des plasmas d'arc électrique n'a fait l'objet que de très peu d'études. Il nous paraissait alors important de cerner sa précision pour la prédiction des puissances et des flux pariétaux dans le cadre de notre application afin que l'utilisateur potentiel soit conscient des limites de la méthode. Les tests sont effectués sur une géométrie cartésienne bidimensionnelle. La solution donnée par la méthode P_1 est comparée à une solution obtenue par une méthode de lancé de rayons également développée pour une géométrie identique. La méthode P_1, associée au modèle MADF, a été ensuite implémentée par un schéma aux éléments finis dans le code de simulation électrohydrodynamique bidimensionnel de Schneider Electric $NS2$. Ce code de calcul utilisait jusque là un coefficient d'émission nette pour simuler le transfert radiatif. Nous présentons la méthode employée ainsi qu'un résultat de simulation couplée d'électrohydrodynamique radiative dans une géométrie simplifiée. Des différences significatives sont observées sur la

dynamique de propagation de l'arc électrique lorsqu'on utilise la méthode P_1-MADF ou la méthode d'émission nette.

Pour disposer d'un outil plus précis de traitement du transfert radiatif en géométrie complexe tridimensionnelle, nous nous sommes orientés vers des méthodes probabilistes comme la méthode de Monte Carlo. Dans le cas du transfert radiatif, elle est particulièrement adaptée à des milieux spectralement complexes confinés dans des géométries tridimensionnelles également complexes. De nombreuses variantes de cette méthode existent et nous considérons ici une famille d'algorithmes dits de Monte Carlo "forward". Le chapitre 4 a pour but de présenter les trois algorithmes développés ainsi que leur mise en oeuvre dans le cas de géométries et de maillages complexes. En parallèle à un algorithme standard, nous avons mis en oeuvre un algorithme avec dépôt progressif de l'énergie absorbée et développé un algorithme original dédié à la réduction des temps de calculs de la méthode dite de "dépôt final". Cet algorithme introduit une partition de l'espace en octree, inspirée de problèmes de classification de données. Il a été implémenté pour la détection de faces solides dans le maillage tridimensionnel. Cette méthode, couramment utilisée dans les problèmes de calcul de rendu de scènes dans l'industrie de l'animation graphique, optimise le nombre de tests d'impacts nécessaire lors du transport des photons dans le maillage. La répartition des faces solides du maillage non structuré, utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes, dans les feuilles de la structure de données hiérarchiques en octree est un problème délicat que l'on résoud par un algorithme de découpe des faces solides en polygones quelconques. En particulier, nous montrons les structures de données en *noeuds virtuels* et en *faces virtuelles* imaginées et implémentées. Enfin nous montrons également comment les champs obtenus sur le maillage non structuré sont filtrés pour un calcul couplé sans introduction de bruit "non physique" dans l'équation de l'énergie. Les algorithmes développés ont par ailleurs été parallélisés grâce à la bibiothèque MPI.

Enfin le cinquième et dernier chapitre est consacré à la validation et à la comparaison des performances des différents algorithmes probabilistes développés dans ce travail. Nous séparons les cas tests suivant la complexité spectrale et géométrique du problème et la dimension de l'espace physique. Des validations élémentaires, relatives par exemple au calcul de facteurs de forme géométriques ou au transfert radiatif en géométrie monodimensionnelle, sont d'abord effectuées. Les calculs Monte Carlo sont ensuite comparés à des calculs bidimensionnels par lancé de rayons dans des boîtes rectangulaires où le champ de température est imposé. Nous montrons également des calculs dans des milieux gris pour différentes épaisseurs optiques afin de cerner le rôle de ce paramètre sur les vitesses de convergence. Enfin, des calculs sur une géométrie tridimensionnelle maillée par environ 3 millions de tétraèdres et contenant des obstacles solides internes sont effectués avec les trois algorithmes Monte Carlo développés. Ces calculs nous permettent de comparer les techniques d'accélération des calculs par dépôt progressif de l'énergie absorbée et par la structure de données en octree.

Chapitre I

Généralités et physique de l'arc électrique

Table des matières

I.1 Dispositif de coupure dans l'air : le disjoncteur basse tension . 3

I.1.1 Introduction . . . 3

I.1.2 Le disjoncteur, élément du réseau électrique . . . 5

I.1.3 Principe de fonctionnement . . . 6

I.2 Modélisation des phénomènes physiques dans les plasmas d'arc 9

I.2.1 Equilibre thermodynamique local . . . 9

Loi de Maxwell . . . 9

Loi de Boltzmann . . . 10

Loi de Saha . . . 10

Loi de Guldberg-Waage . . . 10

I.2.2 Equations de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes . 11

I.2.3 Equations de l'électromagnétisme . . . 12

I.2.4 Modèle de dégradation de paroi . . . 14

Modèle dans la phase condensée . . . 15

Modèle dans la phase gazeuze . . . 16

I.3 Modélisation du transfert radiatif . . . 17

I.3.1 Introduction . . . 17

I.3.2 Equation de transfert radiatif . . . 17

Phénomène d'émission et d'absorption de rayonnement . . . 17

Rayonnement d'équilibre thermodynamique . . . 18

Phénomène de diffusion du rayonnement . . . 18

Bilan d'énergie radiative et approximations . . . 19

Puissance et flux radiatifs . . . 20

I.3.3 Méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif . . . 20

Méthode de lancé de rayons . . . 21

Méthode des moments : P_n, SP_n et M_1 . . . 22

Méthode des ordonnées discrètes : DOM . . . 24

Fondement statistique de la méthode de Monte-Carlo . . . 25

I.3.4 Mécanismes radiatifs élémentaires . . . 26

Spectre de raie et transition *lié-lié* 26
Spectre continu, transition *libre-libre*, *lié-libre* 30
I.3.5 Modélisation spectrale des propriétés radiatives 31
Transferts radiatifs à haute résolution spectrale 32
Coefficient d'émission nette 33
Méthode des caractéristiques partielles 34
Modèle statistique à bandes étroites 35
Modèles spectraux globaux 36
I.3.6 Etat de l'art du calcul du transfert radiatif dans les plasmas d'arcs 36
I.4 Conclusion et objectifs de la thèse 39

I.1 Dispositif de coupure dans l'air : le disjoncteur basse tension

I.1.1 Introduction

Un disjoncteur est un élément inséré dans un circuit électrique qui permet d'éviter une exposition prolongée de ses éléments à un courant de surcharge ou un courant de court-circuit. Si un court-cricuit apparaît dans le réseau électrique, il est nécessaire de couper le courant le plus rapidement possible pour éviter des dégâts trop importants dans le réseau électrique. L'interruption se fait le plus souvent par l'ouverture de contacts électromécaniques au sein du disjoncteur. Un arc électrique se crée alors en une fraction de milliseconde aux extrémités des contacts qui se séparent dans la chambre de coupure. La figure I.1 donne à titre d'exemple une description mécanique des éléments d'un disjoncteur basse tension terminale dit "limiteur". Il peut être séparé en différents éléments fonctionnels tel qu'expliqué sur la figure I.2 :

- Un système mécanique pour ouvrir et fermer le circuit (figure I.2, [1])
- un bilame pour agir contre les surcharges prolongées [2],
- un circuit magnétique pour agir contre les court-circuits (courant pouvant atteindre plusieurs dizaines de milliers d'ampères) [3],
- une zone de coupure comprenant les contacts fixe et mobile, les séparateurs, la corne de commutation et les parois [4],
- et enfin une zone d'échappement des gaz [5].

Le courant en traversant le bobinage crée un champ magnétique. En cas de court-circuit, ce champ magnétique s'intensifie. Le 'plongeur' disposé à l'intérieur du solénoïde se déplace alors sous l'effet des forces magnétiques pour venir percuter le contact mobile. Il y a ainsi déclenchement et production d'un arc électrique.

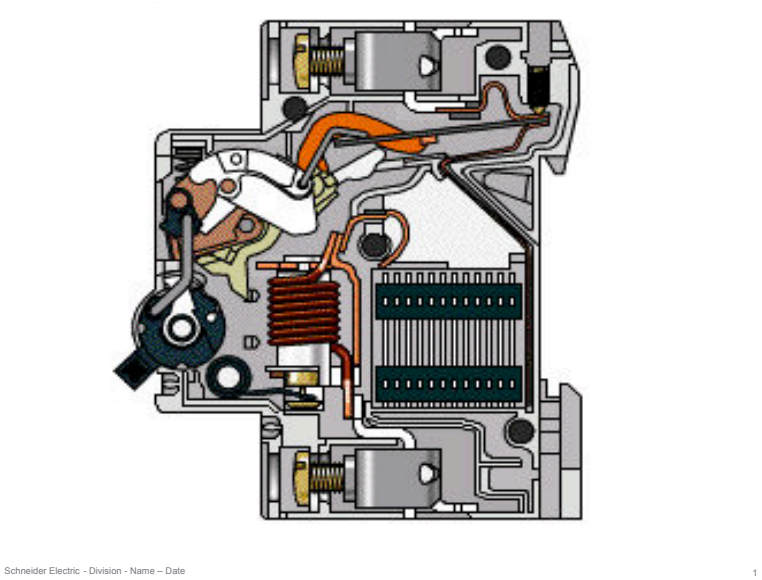

Figure I.1 – *Disjoncteur C-60 développé par la société Schneider-Electric.*

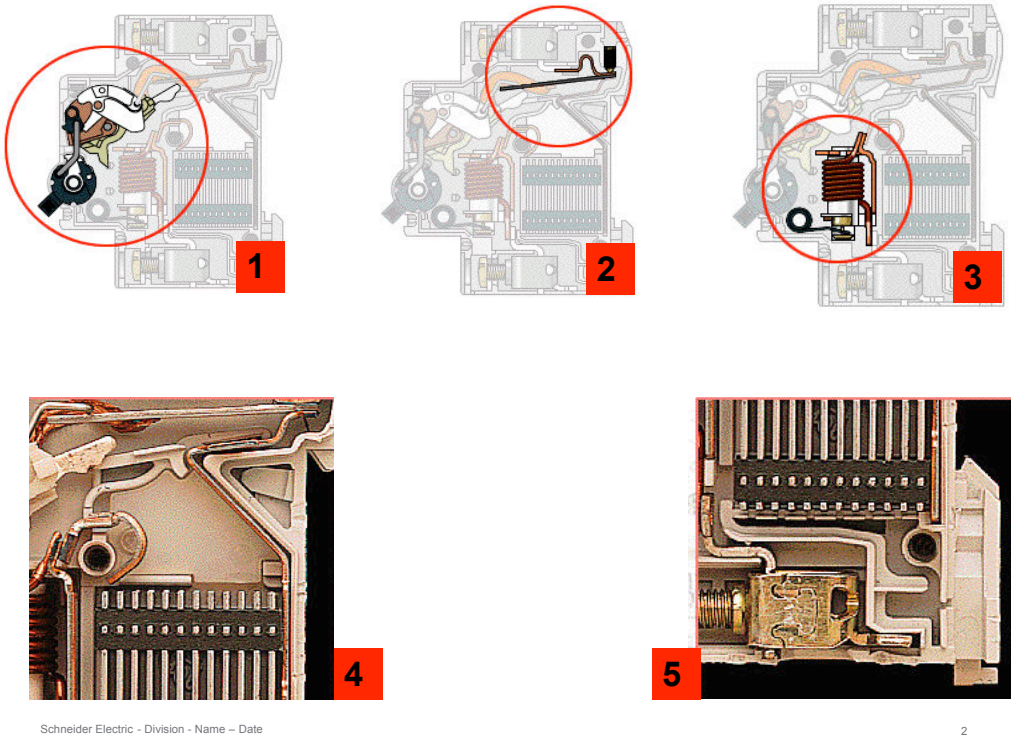

Figure I.2 – *Elements constitutifs d'un disjoncteur*

I.1.2 Le disjoncteur, élément du réseau électrique

Le circuit électrique peut être ramené par des transformations élémentaires à un circuit RLC comme indiqué sur la figure I.3, en trouvant les éléments équivalents pour la résistance, l'inductance et la tension du réseau (Lauraire 1996). L'équation du circuit électrique est alors donnée par :

$$U_r - U_{arc} = RI + L\frac{dI}{dt} \tag{I.1}$$

où U_r est la tension du réseau, U_{arc} est la tension d'arc, R est la résistance totale de l'installation et L est l'inductance totale de l'installation. En cas de court-circuit dans le réseau électrique, l'intensité du courant augmente brusquement ; la variation temporelle d'intensité du courant devient très grande de telle sorte à avoir $L\frac{dI}{dt} \gg RI$. Alors l'équation I.1 devient :

$$U_r - U_{arc} = L\frac{dI}{dt} \tag{I.2}$$

Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir la condition $U_r = U_{arc}$ pour que l'intensité du courant décroisse à nouveau. Nous allons voir les différentes étapes de la coupure dans le paragraphe qui suit.

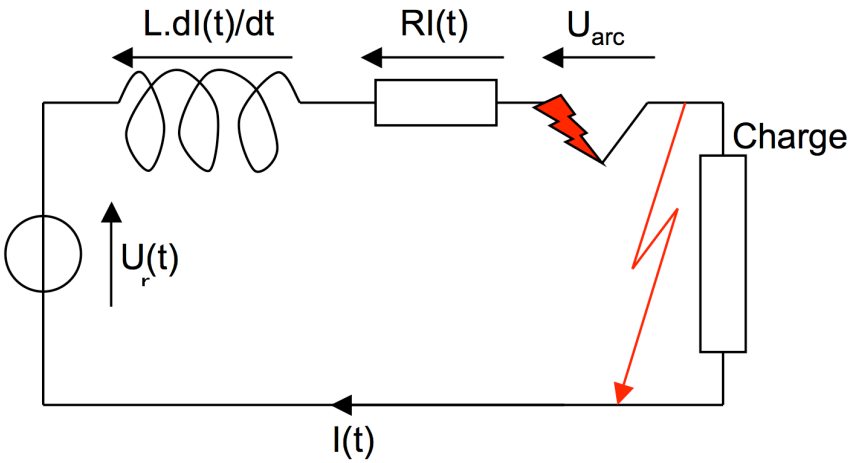

Figure I.3 – *Court-circuit dans le réseau modélisé par un circuit RLC : le court-cricuit apparaît dans le réseau électrique provoquant l'ouverture des séparateurs suite aux efforts électromécaniques induits par la présence du circuit magnétique. L'ouverture des contacts mobiles provoque la création d'un arc électrique.*

I.1.3 Principe de fonctionnement

La figure I.4 montre l'évolution temporelle des courants présumé et limité dans le circuit. On voit que le temps de coupure est nettement réduit par la présence du disjoncteur dans le circuit. Il est typiquement de l'ordre de 3 ms alors qu'il serait de l'ordre de 10 ms sans le disjoncteur avec des courants atteints très importants. Les différentes phases de coupure sont montrées sur la figure I.4.
La coupure se distingue par 3 phases caractéristiques. Lors de la phase 1 ou phase de stagnation, les contacteurs mobiles se séparent. La cathode chauffe et devient thermoémissive. Il y a émission d'électrons dans le milieu provenant majoritairement du point chaud. La séparation des contacts dans la chambre de coupure crée un arc électrique entre les 2 électrodes. La tension d'arc vient s'opposer à la tension du réseau d'alimentation. Lors de cette première étape, la tension d'arc augmente légèrement. Le plasma est constitué presque uniquement de cuivre. Il est encore en contact avec les parties solides de cuivre qui se subliment pour se mélanger au plasma. Cette phase intervient juste après que le pont fondu entre les contacts ait éclaté. La tension d'arc est alors faible et $I_L = I_p$.

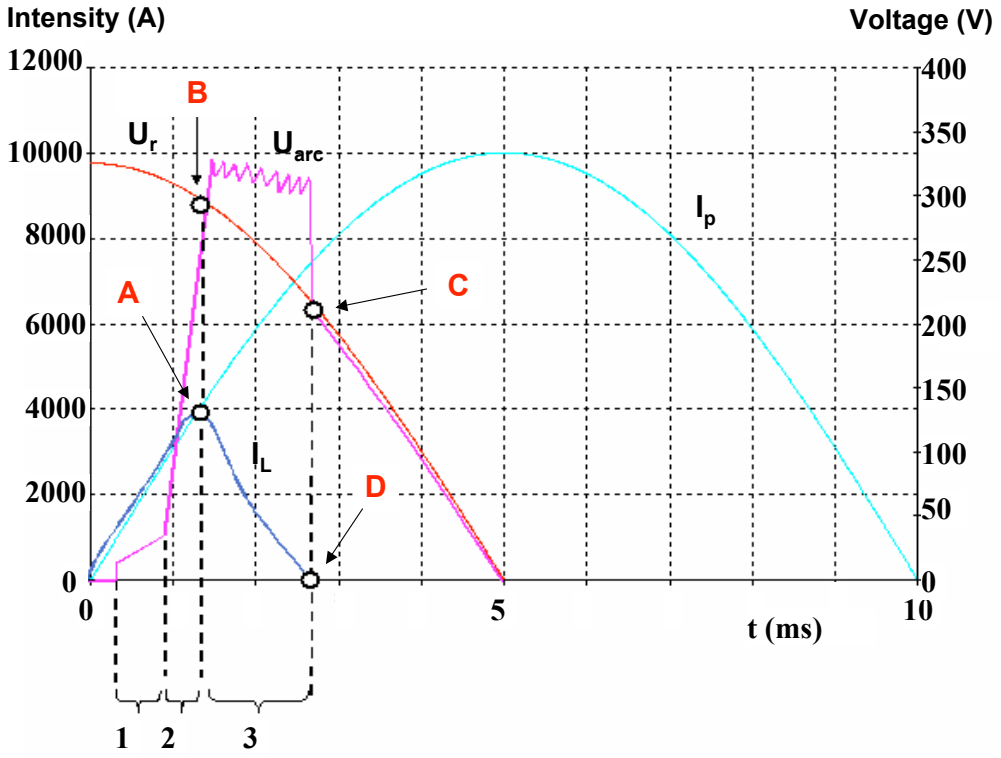

Figure I.4 – *Evolution temporelle des grandeurs électriques du réseau lors d'une coupure basse tension. On voit l'évolution de la tension du réseau U_r, de la tension d'arc U_{arc}, du courant présumé I_p et du courant limité I_L.*

Lors de la phase 2 ou phase de montée en tension, l'arc électrique formé entre les contacteurs mobiles, se déplace dans la chambre de coupure. Il est alors soumis aux forces de pression et aux forces de Laplace d'origine électromagnétique qui vont le propulser violemment vers la zone d'ailette. Le champ magnétique dû à la boucle de courant crée ces forces de Laplace ($\vec{F_v} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ par unité de volume) qui éloignent l'arc des contacts.

La composition du plasma dans la chambre de coupure est alors très différente de celle de la phase initiale. Le plasma est maintenant composé essentiellement d'air partiellement ionisé avec quelque résidus de particules de cuivre qui sont convectées au cours de l'écoulement. La température atteint alors son maximum au coeur de l'arc, qui peut être de l'ordre de $25000K$. A cette température élevée, le rayonnement ainsi que l'effet Joule sont les deux modes prépondérants de transfert d'énergie. Il s'établit en effet une compétition entre ces 2 modes de transfert : l'arc reçoit de l'énergie par effet Joule et en cède par rayonnement. Le rayonnement refroidit donc la zone d'arc alors que l'effet Joule la réchauffe. Le flux radiatif émis par le plasma est partiellement absorbé par les parois de la chambre de coupure. Ceci a pour effet d'élever le niveau de température de la paroi plastique faite de $PMMA$ ou de $PA6$. Au-delà d'un seuil de flux radiatif incident, la paroi commence à se dégrader et il se produit un phénomène complexe de sublimation / évaporation plastique. La composition du plasma contient donc des particules plastiques qui vont modifier les propriétés thermodynamiques et de transport du plasma (conductivités électrique et thermique, coefficient de viscosité et coefficients de diffusion des espèces) ainsi que ses propriétés radiatives. Il se crée donc un couplage entre les différents modes de transfert énergétique entre le plasma et la paroi. Le point A correspond au maximum de l'intensité du circuit : à ce moment la tension d'arc égale la tension du réseau au point B.

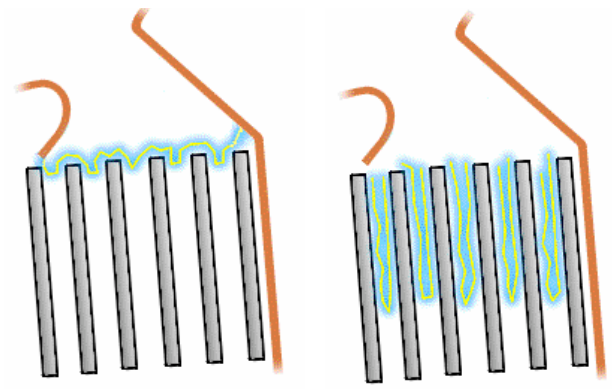

Figure I.5 – *L'arc électrique entre dans les ailettes et la tension d'arc est multipliée brusquement. Les ailettes jouent le rôle d'électrodes.*

La phase 3 correspond à l'entrée de l'arc dans les ailettes en aval de la chambre de coupure. La tension d'arc crête oscille alors autour d'une valeur moyenne très élevée, de l'ordre de $350V$ à $400V$. Cette phase correspond à une décroissance de l'intensité de courant limité, qui est l'intensité mesurée dans le circuit. Schématiquement, en notant E le champ électrique moyen créé entre les électrodes, on peut estimer la valeur de la tension d'arc avant pénétration dans les ailettes par :

$$U_{arc} = U_{a-c} + E \times L_{arc} \tag{I.3}$$

où L_{arc} est la longueur de l'arc électrique et U_{a-c} la chute de tension aux pieds d'arc (de l'ordre de 20 V). Cette chute de tension est liée aux échanges d'énergie au niveau des pieds d'arc entre le plasma et les pièces métalliques.

La figure I.5 représente l'entrée de l'arc dans les ailettes. Il s'agit donc, schématiquement, de multiplier la tension d'arc de façon à l'avoir la plus grande possible. Ceci est réalisé dans les ailettes. Elles agissent comme autant d'électrodes autour desquelles se crée une gaine de charge d'espace avec une forte différence de potentiel (entre 1 et 30 V par ailettes) propre aux milieux considérés. Cette différence de potentiel aux bornes de chaque ailette va agir comme un multiplicateur de la tension d'arc et va être à l'origine de sa forte augmentation dans les ailettes. Ainsi on peut écrire :

$$U_{arc} = N \times U_{a-c} + [L - Ne] \times E, \tag{I.4}$$

où L est la longueur de la chambre de coupure, N le nombre d'ailettes, e l'épaisseur des ailettes, E le champ électrique dans l'espace inter-ailettes. La fin de la phase 3 est marquée par une annulation du courant limité au point D et une égalité des tensions réseau et d'arc au point C. L'arc électrique s'est éteint à ce moment. Les phénomènes de pieds d'arc ne sont pas détaillés ici, on peut consulter à ce sujet par exemple les travaux récents de (Cayla 2008).

Il est parfois possible, si le milieu dans la chambre de coupure reste chaud et s'il contient des particules métalliques à forte conductivité thermique et électrique, d'observer un phénomène de reclacage. La densité de courant dans le milieu peut alors brusquement augmenter et on observe un arc se reformer dans la chambre de coupure. Cette situation affecte les performances du système car elle allonge les temps d'extinction de l'arc électrique.
On peut tirer de nombreux avantages d'une réduction significative du courant circulant dans le circuit :

- Réduction importante des efforts électrodynamiques (proportionnels à I^2)
- Réduction importante des échauffements de l'ensemble de l'installation (proportionnels à I^2)
- Réduction des efforts de pression de contact

Il est estimé que pour des courants d'arc de plus de 1000 A et des pressions de plus de 10 bar, 80% de l'énergie électrique injectée est émise par l'arc sous forme de rayonnement ultraviolet et visible (Lowke 1978). Il est alors nécessaire de pouvoir quantifier ces pertes radiatives de manière précise dans tout bilan d'énergie que l'on voudrait faire sur le plasma, en vue de pouvoir simuler l'extinction de l'arc. Nous allons montrer dans le paragraphe qui suit les différents modèles qui sont utilisés pour simuler les aspects mécaniques et électromagnétiques de l'écoulement, ainsi que certains modèles de dégradation de paroi.

I.2 Modélisation des phénomènes physiques dans les plasmas d'arc

On appelle plasma thermique tout milieu gazeux partiellement ionisé dont la température, de l'ordre de la dizaine à quelques dizaines de milliers de Kelvin, est la même pour toutes les particules (atomes, molécules, ions, électrons) et pour tous les degrés internes (Vacquié 2000). Ces plasmas rentrent dans la catégorie plus générale des plasmas froids, pouvant être hors d'équilibre thermodynamique et présenter des particules à des températures différentes, voire des distributions non-Boltzmaniennes des populations des différents niveaux d'énergie. Les plasmas froids s'opposent aux plasmas de fusion, dits aussi plasmas chauds, qui peuvent atteindre plusieurs millions de Kelvin. Les plasmas thermiques peuvent être crées par décharge continue ou par décharge radio-fréquence (torches ICP) ou micro-ondes. Les plasmas que l'on rencontre dans les chambres de coupure des disjoncteurs basse tension sont des plasmas créés par décharge électrique en courant alternatif basse fréquence ($50Hz$) aboutissant à la formation d'un arc électrique. Dans ce qui suit, nous allons présenter les différents modèles utilisés pour étudier et décrire ces milieux complexes.

I.2.1 Equilibre thermodynamique local

Les plasmas thermiques sont généralement à l'équilibre thermodynamique local (ETL), sauf au voisinage immédiat des électrodes. L'ETL se caractérise par l'existence d'une température locale identique pour l'ensemble des degrés de libertés de toutes les particules. Le champ de rayonnement ne peut, quand à lui, être considéré à l'équilibre local. L'existence de cet équilibre tangent pour les particules est due à la prépondérance des processus collisionnels entre particules par rapport aux processus radiatifs. Nous allons préciser les approximations qui sont faites dans ce cadre.

Loi de Maxwell

La loi de distribution de Maxwell donne la distribution des vitesses des particules à l'ordre zéro (en perturbation en nombre de Knudsen) dans un fluide à l'ETL. Les processus de diffusion (de particules neutres ou chargées, de quantité de mouvement et d'énergie) apparaissent aux ordres plus élevés. À l'ordre zéro, pour un plasma à la température T, la proportion de particules dont le module de la vitesse est compris entre v et $v+dv$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= f(v)dv \\ &= 4\pi v^2 dv \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{mv^2}{2k_B T}\right], \end{aligned} \tag{I.5}$$

ou N désigne la densité totale de l'espèce considérée des particules de masse m et k_B la constante de Boltzmann. Cette distribution isotrope des vitesses nous permet de calculer une vitesse moyenne par la relation $< v >= \sqrt{8k_B T/\pi m}$ et une vitesse quadratique moyenne par la relation $\sqrt{< v^2 >} = \sqrt{3k_B T/m}$.

Loi de Boltzmann

La loi de Boltzmann donne le peuplement des niveaux internes d'énergie pour un système à l'équilibre thermodynamique ou à l'équilibre thermodynamique local. Soit N la densité totale de particules considérées d'une espèce donnée, alors la densité N_i de particules dans le niveau d'énergie E_i est donnée par :

$$\frac{N_i}{N} = \frac{g_i}{Q(T)} \exp\left[-\frac{E_i}{k_B T}\right] \tag{I.6}$$

où g_i est la dégénérescence du niveau d'énergie E_i et $Q(T)$ la fonction de partition interne de l'espèce considérée donnée par :

$$Q(T) = \sum_i g_i \exp\left[-\frac{E_i}{k_B T}\right]. \tag{I.7}$$

Loi de Saha

La loi de Saha exprime la loi d'action de masse pour la réaction d'ionisation à l'équilibre thermodynamique ou à l'ETL. Considérons la réaction $X_i \rightleftarrows X_i^+ + e^-$ d'ionisation d'un atome neutre par exemple, cette loi est donnée par :

$$\frac{N_e N_i}{N_0} = 2\frac{Q_i(T)}{Q_0(T)} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left[-\frac{E_i - \Delta E}{k_B T}\right], \tag{I.8}$$

où N_e, N_i, N_0 sont respectivement les densités d'électrons, d'ions positifs et des atomes neutres, Q_i et Q_0 sont respectivement les fonctions de partition interne de l'ion et de l'atome, E_i est le potentiel d'ionisation de l'espèce considérée, h la constante de Planck, et enfin ΔE est l'abaissement du potentiel d'ionisation dû à la présence des particules chargées. La relation de Saha I.8 est écrite pour un ion ionisé une fois. Mais elle peut s'écrire également comme le rapport des densités d'ions chargés k et $k+1$ fois, ou par rapport à un niveau excité de l'atome. Elle est essentielle pour la détermination de la composition d'un plasma à l'ETL et à l'équilibre chimique.

Loi de Guldberg-Waage

Elle exprime l'équilibre de dissociation des espèces moléculaires du milieu à l'ETL. On considère la réaction chimique de dissociation suivante :

$$AB \leftrightarrows A + B$$

avec une énergie de dissociation E_{AB}. La relation de Guldberg-Waage relie les densités des particules A, B et AB :

$$\frac{N_A N_B}{N_{AB}} = \frac{Q_A(T) Q_B(T)}{Q_{AB}(T)} \frac{(2\pi \mu_{AB} k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp\left[-\frac{E_{AB}}{k_B T}\right] \tag{I.9}$$

où N_{AB}, N_A, N_B sont respectivement les densités de molécule AB, d'atome A et d'atome B, Q_A, Q_B, Q_{AB} les fonctions de partition internes des atomes A et B ainsi que la molécule AB. μ_{AB} est la masse réduite de la molécule diatomique AB. Comme la loi de Saha, elle est essentielle pour la détermination de la composition d'un plasma à l'ETL et à l'équilibre chimique.

I.2.2 Equations de l'hydrodynamique : les équations de Navier-Stokes

Le mouvement d'un fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes. Ces équations sont obtenues à partir de l'équation de Boltzmann en théorie cinétique des gaz. On donne ces équations dans le cadre général d'un plasma Newtonien à l'ETL qui est le siège de phénomènes de transfert radiatif.

- Equation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{I.10}$$

où le premier terme représente la variation temporelle de la densité massique ρ et $\rho\ \vec{v}$ représente le vecteur flux de masse , $\vec{v}$ étant la vitesse du fluide.

- Equation de conservation de la quantité de mouvement :
Pour un milieu électriquement neutre, et en négligeant les forces de pesanteur, la conservation de la quantité de mouvement s'écrit :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v} = -\vec{\nabla} p + \vec{j} \wedge \vec{B} + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Pi}} \tag{I.11}$$

où p représente la pression au sein du milieu, le terme $\vec{j} \wedge \vec{B}$ représente la force exercée par le champ magnétique $\vec{B}$ sur le fluide traversé par un courant de densité $\vec{j}$. Le tenseur de contraintes visqueuses $\overline{\overline{\Pi}}$ est composé de deux termes et il est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\Pi_{ik} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \xi \delta_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \tag{I.12}$$

où μ est le coefficient de viscosité dynamique et ξ le coefficient de viscosité en volume qui est généralement négligeable. Ainsi le terme $\vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Pi}}$ représente la force volumique due aux frottements visqueux. Il est à noter que les forces de pression radiative ont été négligées dans l'équation I.12. Ces forces ne jouent un rôle significatif que dans certains problèmes particuliers rencontrés en astrophysique ou des lasers de forte puissance par exemple.

- Equation de conservation de l'énergie écrite sous forme enthalpique :

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) h = \vec{\nabla} \cdot \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + \Phi_D + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \right) p + \vec{j} \cdot \vec{E} + P_{rad} \tag{I.13}$$

où h représente l'enthalpie massique (sensible + chimique) du plasma et λ le coefficient de conductivité thermique. P_{rad} représente la puissance radiative comptée positivement si la puissance est *absorbée* par le milieu. Φ_D représente la puissance dissipée par frottement visqueux. Elle est donnée par :

$$\Phi_D = \vec{\nabla} \vec{v} : \overline{\overline{\Pi}} \tag{I.14}$$

Enfin le terme $\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p$ représente la variation de l'enthalpie du fluide par compression et le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$ le chauffage du fluide par effet Joule.

Le plasma étant considéré à l'équilibre chimique local dans notre cas, la masse volumique, l'enthalpie du mélange, ainsi que les propriétés de transport, peuvent être déterminés sans ambiguité à partir de la température et de la pression du mélange. Nous donnons en annexe B l'évolution en fonction de la température des coefficients de transport et des conductivités qui apparaissent dans ces équations, tels qu'utilisés dans le logiciel de simulation numérique de Schneider-Electric et qui sont issus de la référence (Bacri et Raffanel 1989).

I.2.3 Equations de l'électromagnétisme

Les équations de Maxwell (Jackson 1999) décrivent l'évolution du champ électromagnétique dans un milieu. Elles font intervenir le champ électrique $\vec{E}$ (ou le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$), l'induction magnétique $\vec{B}$ (ou le champ magnétique $\vec{H}$), la densité de courant $\vec{j}$ et la densité de charge ρ_e. Elles se résument en un système de quatre équations aux dérivées partielles couplées :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{I.15}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{I.16}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \tag{I.17}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{I.18}$$

Il faut ajouter à ces équations les relations constitutives qui lient les vecteurs $\vec{D}$ et $\vec{B}$ à $\vec{E}$ et $\vec{H}$ au travers des permittivités électrique $\epsilon_0\epsilon_r$ et magnétique $\mu_0\mu_r$ du plasma :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} = \epsilon\vec{E} \\ \vec{B} &= \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \end{aligned} \tag{I.19}$$

Les équations précédentes impliquent la loi de conservation de la charge électrique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = 0 \tag{I.20}$$

Les plasmas d'arc électrique étant des milieux où l'électroneutralité $\rho_e = 0$ est en général réalisée, cette équation se réduit simplement à :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \tag{I.21}$$

La loi d'Ohm peut s'écrire dans le cadre de la magnétohydrodynamique comme (Delcroix et Bers 1994) :

$$\vec{j} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v_q} \times \vec{B} \right) \tag{I.22}$$

où $\vec{v_q}$ est la vitesse hydrodynamique des particules chargées.

Afin d'évaluer les ordres de grandeur des différents termes intervenant dans les équations de l'électromagnétisme dans le cadre des plasmas d'arcs, nous supposons disposer d'échelles caractéristiques de longueur (L_0), de temps (t_0). Ces grandeurs désignent par exemple

une taille caractéristique de l'arc et sa durée d'extinction. Une analyse dimensionnelle de l'équation (I.16) montre que le rapport entre le courant de déplacement $\partial\vec{D}/\partial t$ et le terme $\sigma\vec{E}$ de la densité de courant $\vec{j}$ est de l'ordre de $\epsilon/(\sigma t_0)$. Ce rapport est petit devant 1 dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire, largement vérifiée pour les plasmas d'arc (Vacquié 2000). Le champ magnétique $\vec{H}$ est ainsi de l'ordre de $L_0 j$ et celui de $\vec{B}$ $\mu L_0 j$. L'analyse dimensionnelle de la loi d'Ohm montre alors que le rapport entre les termes $\vec{j}$ et $\sigma v_q \times \vec{B}$ est de l'ordre du nombre de Reynolds magnétique $Re_m = \mu L_0^2 \sigma / t_0$ petit également dans le cas des plasmas d'arc. En outre, l'hypothèse $Re_m \ll 1$ permet de négliger l'induction magnétique dans l'équation de Maxwell-Faraday (I.15).

Les simplifications précédentes conduisent finalement aux équations de la magnétostatique et de l'électrostatique.

Le champ électrique satisfait l'équation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{I.23}$$

qui implique l'existence d'un potentiel scalaire V, défini par :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V \tag{I.24}$$

La loi d'Ohm devient :

$$\vec{j} = -\sigma \vec{\nabla} V \tag{I.25}$$

Le potentiel est alors calculé en pratique à partir de l'équation de conservation de la charge (I.21) qui s'exprime alors selon :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\sigma \vec{\nabla} V \right) = 0 \tag{I.26}$$

avec des conditions aux limites de potentiel imposé sur les frontières du domaine de calcul. Dans ce cadre nous parlons d'électrohydrodynamique.

De même, le champ magnétique $\vec{H}$ vérifie

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \tag{I.27}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{H}}{\mu} = 0 \tag{I.28}$$

ce qui conduit en supposant les propriétés magnétiques du milieu uniformes à la loi de Biot et Savart :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_r \mu_0}{4\pi} \int\int\int_{S \in \Omega} \frac{\vec{j}(S) \wedge \vec{SM}}{||\vec{SM}||^3} \mathrm{d}\Omega \tag{I.29}$$

I.2.4 Modèle de dégradation de paroi

Parmis les polymères couramment utilisés dans l'industrie, on trouve le $polyamide-6$ ($PA6$) et le polyméthacrylate de méthyle ($PMMA$ ou plexiglas). Ces polymères sont peu onéreux, légers et résistants, ce qui en fait de bons candidats pour les boîtiers de disjoncteurs. Un modèle d'ablation de paroi polymère développé pour modéliser l'interaction entre le plasma dans la chambre de coupure et les parois plastiques est décrit dans (Nossov, Fiévet, Hage, et Wild 2006). Ce modèle fait encore l'objet de différentes études numériques et expérimentales au sein de Schneider Electric. Nous reprenons les principales équations de ce modèle car elles illustrent le couplage entre les phénomènes radiatifs et l'ablation de paroi du disjoncteur. Le modèle prend en compte l'élévation de température de la paroi et sa sublimation dans une dynamique instationnaire incluant un flux radiatif incident variable lors de l'écoulement du plasma dans la chambre de coupure.
Ce modèle considère une paroi divisée en 2 zones séparées par une interface entre la phase solide et la phase gazeuze comme montré sur la figure I.6. La sublimation se fait donc au niveau de l'interface. Le modèle présenté est unidimensionnel car les variations de l'épaisseur solide de plastique se font essentiellement en profondeur selon la direction y. Les variations de longueur ablatée dans la phase gazeuze L_v sont de l'ordre de 5.10^{-3} cm ce qui est très petit par rapport à $L = 0.5$ cm. Les variations de la longueur L au cours du processus thermophotonique d'ablation sont donc négligées.

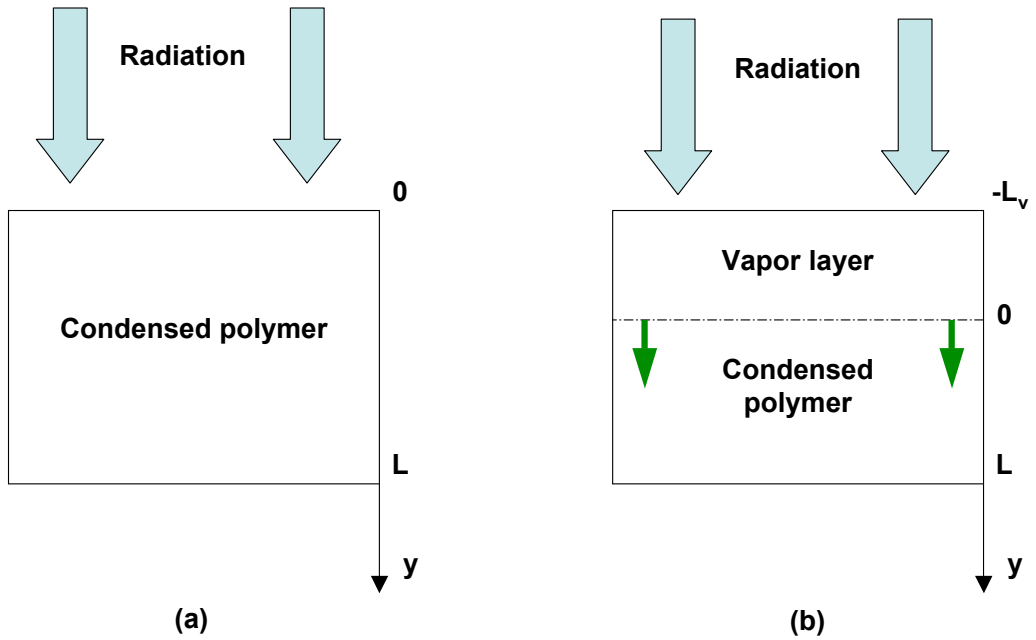

Figure I.6 – *Modèle de dégradation de paroi : (a) Paroi avant le dépassement du seuil de flux radiatif (b) après le dépassement du seuil de flux radiatif - (Nossov, Fiévet, Hage, et Wild 2006) montrent que le seuil de flux incident se situe autour de* $7,5J/cm^2$ *dans le cas du polymère PA-6*

Modèle dans la phase condensée

La phase condensée correspond au domaine $y \in [0; L]$. L'interface entre la phase condensée et la phase sublimée $y = 0$ se déplace ainsi à une vitesse de v_p. Dans la phase condensée, si n_b désigne la fraction volumique de liaisons chimiques rompues alors l'évolution de n_b est gouvernée par l'équation :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_b}{\partial t} - v_p \frac{\partial n_b}{\partial y} &= (1 - n_b)k(T) \\ &= (1 - n_b)k_0 \ \exp\left(-\frac{E_a}{k_b T}\right) \end{aligned} \tag{I.30}$$

où $k(T)$ est la constante de réaction chimique suivant une loi d'Arrhénius. E_a est l'énergie d'activation de la réaction et k_0 est une constante multiplicative. Cette équation décrit la cinétique chimique de dégradation de la paroi dans la phase solide. Dans ce modèle, la vitesse v_p est déterminée par le passage de n_b par une valeur critique $n_{b,cr}$. Toutefois, il faut rajouter à l'équation en n_b une équation de bilan d'énergie dans la paroi en considérant la conduction thermique dans la phase condensée, la puissance radiative absorbée Φ_a ainsi que l'enthalpie L_a par unité de volume nécessaire pour rompre toutes les liaisons chimiques et provoquer la réaction de changement de phase :

$$\frac{\partial H}{\partial t} - v_p \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{th}(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \Phi_a - L_a(1 - n_b)k(T) \tag{I.31}$$

L'enthalpie H est donnée à une température T par :

$$H(T) = \rho_{pl} \int_{T_0}^{T} \left[c_p(T') + H_m \delta(T' - T_m)\right] \mathrm{d}T' \tag{I.32}$$

où δ est la fonction de Dirac, T_m est la température de fusion, H_m est l'enthalpie de fusion, ρ_{pl} est la densité de matière plastique à l'état solide qui ne dépend pas de la température. Les propriétés thermophysiques de la phase condensée ainsi que les paramètres de la réaction de dissociation des polymères $PA6$ et $PMMA$ sont données dans (Nossov, Fiévet, Hage, et Wild 2006). Il faut ajouter à ces équations de la phase condensée un modèle de transport du flux radiatif au voisinage de l'interface. Ceci peut être fait par une loi de Beer-Lambert comme suit :

$$\frac{\partial G_\nu}{\partial y} = -\kappa_\nu G_\nu \tag{I.33}$$

où G_ν désigne le flux radiatif monochromatique (supposé collimaté) et κ_ν le coefficient d'absorption monochromatique dans la phase condensée. La puissance radiative totale absorbée est alors obtenue en sommant toutes les contributions monochromatiques :

$$\Phi_a = \int_\nu \kappa_\nu G_\nu \mathrm{d}\nu \tag{I.34}$$

Le modèle de propriétés radiatives du polymère sous la phase condensée considère un milieu gris par bande avec une valeur de coefficient d'absorption indépendante des champs thermophysiques dans le milieu. il varie de 0 cm^{-1} à 5.10^3 cm^{-1} suivant la gamme de longueurs d'onde considérée entre $0,12$ μm et 10 μm.

Modèle dans la phase gazeuze

La phase gazeuze correspond au domaine $y \in [-L_v; 0]$. Cette phase est décrite dans le modèle par un bilan d'énergie comme suit :

$$\frac{\partial H_g}{\partial t} - v_p \frac{\partial H_g}{\partial y} = \frac{\Phi_g}{\rho_{pl,g}(T)} \tag{I.35}$$

où H_g représente l'enthalpie par unité de masse de la phase gazeuze à la température T_g, Φ_g est la puissance radiative absorbé dans la phase gazeuze et $\rho_{pl,g}(T)$ représente la densité de matière plastique sous forme gazeuze, qui dépend de la température. Cette puissance radiative peut là encore être obtenue à partir d'une équation de Beer-Lambert monochromatique similaire à I.33. Il est impossible de développer des modèles de propriétés radiatives du polymère sous phase gazeuze car les données spectroscopiques de base ne sont pas disponibles pour des milieux d'une telle complexité. Les propriétés spectrales de ces polymères, constitués de longues chaînes carbonées, sont en effet difficiles à étudier. Leur détermination nécessiterait des recherches longues et coûteuses. Le modèle proposé par (Nossov, Fiévet, Hage, et Wild 2006) est donc une simplification des propriétés spectrales du milieu plastique sous phase gazeuze. Ainsi on peut écrire le coefficient d'absorption monochromatique dans la phase gazeuze $\kappa_{g,\nu}$ comme :

$$\begin{aligned} \kappa_{g,\nu}(T, P, x_i) &= \kappa_{g,UV} \frac{\rho_{pl}}{\rho_{pl,g}(T)} \\ \kappa_{g,UV} &= \sigma_{UV} \sum_j [n_j] \end{aligned} \tag{I.36}$$

en considérant que l'absorption se fait principalement dans la gamme de l'ultra-violet. Le coefficient d'absorption dans la gamme UV dépend de la concentration $[n_j]$ des différent gaz résultant de la dissociation de la chaine carbonée : C_2H_2, C_2H, C_2H_4, CHN. La section efficace σ_{UV} est prise égale à $2,5.10^{-19}\ cm^2$.

I.3 Modélisation du transfert radiatif

I.3.1 Introduction

La théorie du transfert radiatif a été développée initialement par les astrophysiciens pour expliquer la luminosité des étoiles et les propriétés de transmission du milieu interstellaire. Toutefois, cette théorie permet de prédire également les phénomènes de transfert radiatif à des températures plus froides que celles rencontrées au coeur des étoiles ; elle est donc devenue un outil essentiel pour l'étude des transferts d'énergie dans des systèmes à hautes températures (de l'ordre $1500K$ à $100000K$) que l'on peut rencontrer sur terre dans la manifestation de certains phénomènes naturels comme la foudre, dans des applications industrielles comme les milieux en combustion ou enfin dans les écoulements de plasmas lors de la rentrée d'engins dans l'atmosphère terrestre. Les plasmas d'air rentrent dans la catégorie des milieux pour lesquels cette théorie s'applique.

Après un rappel des concepts de base du transfert radiatif,nous détaillerons les principaux mécanismes élémentaires qui se produisent dans les plasmas d'arcs électriques et qui sont à l'origine du du rayonnement dans un tel milieu. Puis nous montrerons différentes méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif pour déterminer le champ de rayonnement. Enfin, les propriétés spectrales de ces milieux seront décrites par des modèles que nous introduirons avant de présenter l'état de l'art de la modélisation du transfert radiatif dans les plasmas thermiques.

I.3.2 Equation de transfert radiatif

Tout corps émet un rayonnement thermique non cohérent dépendant de ses conditions thermodynamiques (température, pression, volume). Nous choisissons dans cette étude une approche phénoménologique basée sur la description des phénomènes par des grandeurs macroscopiques. Ainsi le champ de rayonnement est décrit par la *luminance*, notée L'_ν, qui décrit la distribution spectrale, spatiale et directionnelle des flux d'énergie radiative. Elle représente la quantité d'énergie radiative dans l'intervalle spectral $\mathrm{d}\nu$ qui traverse un élément de surface $\mathrm{d}S$ dans un élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ autour d'une direction $\vec{u}$ orthogonale à $\mathrm{d}S$ par unité de temps, de surface, de fréquence et d'angle solide. Le flux élémentaire s'écrit donc :

$$\mathrm{d}^5\Phi'_\nu = L'_\nu \mathrm{d}S\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega \tag{I.37}$$

Phénomène d'émission et d'absorption de rayonnement

Nous supposerons dans tout ce qui suit que la partie réelle de l'indice du milieu est égale à 1, ce qui constitue une excellente approximation pour les plasmas thermiques. Le flux élémentaire $\mathrm{d}^5\Phi'_\nu$ est en partie absorbé par l'élément de volume $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\mathrm{d}s$, où s représente l'abscisse le long de la direction de propagation $\vec{u}$. L'expression générale du flux algébrique absorbé par l'élément de volume $\mathrm{d}V$ est :

$$\mathrm{d}^6\Phi'^a_\nu = -\kappa_\nu L'_\nu \mathrm{d}V\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega \tag{I.38}$$

L'équation I.38 définit le coefficient volumique d'absorption κ_ν, mesuré usuellement en cm^{-1}. Dans le cas particulier d'une colonne de longueur l, homogène et isotherme, le coefficient monochromatique d'absorption κ_ν est uniforme. En intégrant l'équation I.38 entre $s = 0$ et $s = l$, il vient :

$$\mathrm{d}^5\Phi'_\nu(l) = \exp\left[-\kappa_\nu l\right] \mathrm{d}^5\Phi'_\nu(0) \tag{I.39}$$

ce qui définit la transmitivité de la colonne de longueur l comme $\tau_\nu(l) = \exp\left[-\kappa_\nu l\right]$. Le milieu est susceptible d'absorber du rayonnement mais il est aussi susceptible d'en émettre. Ecrivons le flux monochromatique émis dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ par l'élément de volume isotherme $\mathrm{d}V$, dans l'intervalle spectral $\mathrm{d}\nu$:

$$\mathrm{d}^6\Phi'_\nu(e) = \eta_\nu(s)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu\mathrm{d}V \tag{I.40}$$

Ceci définit une nouvelle grandeur, le coefficient d'émission monochromatique en s, noté η_ν. C'est le flux émis, provenant de la contribution du processus élémentaire d'émission spontanée de photons. Nous développerons l'interprétation physique des coefficients monochromatiques d'absorption et d'émission dans le paragraphe suivant qui traite des propriétés radiatives des milieux.

Rayonnement d'équilibre thermodynamique

Si le champ de rayonnement est à l'équilibre thermodynamique à la température T, la luminance est donnée en tout point du milieu par la loi de Planck L^0_ν qui s'exprime par :

$$L^0_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{\exp\left[\frac{h\nu}{k_B T}\right] - 1} \tag{I.41}$$

À l'équilibre, le flux émis le long de $\mathrm{d}S$ compense exactement le flux absorbé sur le même trajet, ce qui conduit à la loi de Kirchhoff donnée par :

$$\eta_\nu(s) = \kappa_\nu L^0_\nu \tag{I.42}$$

Cette relation reste valable quand le milieu est à l'équilibre thermodynamique local. Si le milieu est fortement hors d'équilibre, η_ν et κ_ν doivent être calculé indépendemment à partir de la population des niveaux résultant d'un modèle cinétique à préciser (plasma hors équilibre, claquage laser, etc.).

Phénomène de diffusion du rayonnement

Le rayonnement peut dans certains milieux contenant des particules subir un phénomène de diffusion. On classifie généralement la diffusion en deux types appelés élastique ou inélastique suivant que l'énergie des photons se conserve ou non. La diffusion élastique se présente sous deux aspects qui contribuent au flux $\mathrm{d}^5\Phi'_\nu$ qui se propage dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$:

- Phénomène de diffusion constructive
  une partie du flux $\mathrm{d}^5\Phi'_\nu$ vient d'un angle solide $\mathrm{d}\Omega' \neq \mathrm{d}\Omega$ mais est déviée dans $\mathrm{d}\Omega$.

$$\mathrm{d}^6\Phi'^{d+}_\nu = \frac{\sigma_\nu}{4\pi}\mathrm{d}V\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu\int_{4\pi} p_\nu(\vec{u}' \to \vec{u})L'_\nu(\vec{u}')\mathrm{d}\Omega' \tag{I.43}$$

Cette relation introduit un nouveau coefficient : le coefficient volumique de diffusion, noté σ_ν et mesuré en cm^{-1}. Elle fait également apparaître une fonction de phase p_ν qui représente la probabilité de diffusion d'un photon venant de $\vec{u}'$ et diffusé dans $\vec{u}$.

- Phénomène de diffusion destructive
  une autre partie du flux $\mathrm{d}^5\Phi'_\nu$ se propageant dans l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ est déviée vers tous les autres angles solides $\mathrm{d}\Omega' \neq \mathrm{d}\Omega$.

$$\mathrm{d}^6\Phi'^{d-}_\nu = -\sigma_\nu L'_\nu \mathrm{d}V \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}\nu \tag{I.44}$$

Le phénomène de diffusion peut éventuellement contribuer au transfert radiatif dans le milieu dans le cadre d'une simulation couplée incluant le modèle de dégradation de paroi. En effet, en chauffant, le polymère $PMMA$ redonne son monomère de départ, le méthacrylate de méthyle ou MAM. Ce monomère est alors transporté par convection et diffusion dans le plasma et peut à son tour se recondenser dans le volume de la chambre de coupure s'il atteint une zone où le niveau de température est en dessous de sa température de sublimation. Il forme alors des particules plastiques en suspension dans le fluide. Ces particules peuvent être des sources de diffusion et modifier le champ de rayonnement dans le fluide.

Bilan d'énergie radiative et approximations

L'équation de transfert radiatif est une équation intégro-différentielle résultant alors du bilan des contributions précédentes le long d'une trajectoire lumineuse. Pour des milieux à l'équilibre thermodynamique et chimique local comme ceux considérés ici, elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c}\frac{\partial L'_\nu}{\partial t}(t,s,\vec{u}) + \vec{u}\cdot\vec{\nabla}L'_\nu(t,s,\vec{u}) &= -\left(\kappa_\nu + \sigma_\nu\right) L'_\nu(t,s,\vec{u}) \\ +\kappa_\nu L^0_\nu(T) &+ \frac{\sigma_\nu}{4\pi}\int_{4\pi} p_\nu(\vec{u}' \to \vec{u}) L'_\nu(t,s,\vec{u'})\mathrm{d}\Omega' \end{aligned} \tag{I.45}$$

Cette équation exprime le bilan d'énergie radiative le long d'une trajectoire lumineuse dans un milieu d'indice égal à 1. Toutefois le transfert radiatif dans les décharges électriques dans l'air permet de faire 2 approximations.

- Le milieu plasma est non diffusant
  Nous ne tiendrons pas compte de la présence d'éventuelles particules condensées dans le milieu et négligerons, à juste titre, la diffusion par les atomes, molécules et électrons du plasma.
- Le régime de transfert de rayonnement dans le milieu est quasi-stationnaire
  Le temps de coupure Δt est de l'ordre de 5 ms à 10 ms et la longueur caractéristique du système étudié Δs est de l'ordre de 3 cm. Il s'agit donc de comparer $c\Delta t = 15.10^5$ m avec $\Delta s = 3.10^{-2}$ m. D'où $1/c\Delta t \ll 1/\Delta s$. Le terme instationnaire est en fait important dans des applications de type impulsions laser ultra brève (10^{-12} s à 10^{-15} s) ou de fusion thermonucléaire par exemple. Dans ces cas, la propagation des photons ne peut plus être considérée comme instantanée. Dans notre étude, on peut donc négliger la dérivée temporelle dans l'équation de transfert radiatif I.46.

Avec ces 2 hypothèses simplificatrices, l'équation de transfert radiatif I.46 devient :

$$\frac{\partial L'_\nu}{\partial s}(s,\vec{u}) = \kappa_\nu\left(L^0_\nu(T) - L'_\nu(s,\vec{u})\right) \tag{I.46}$$

Cette équation sera dénommée équation de transfert radiatif, ou ETR, dans tout ce qui suit. C'est une équation différentielle linéaire en la luminance, du premier ordre et avec second membre. Le second membre représente le terme source de rayonnement.

Puissance et flux radiatifs

La solution formelle de l'ETR conduit à une forme intégrale qu'on peut écrire comme :

$$L'_\nu(\vec{u}, s) = L'_\nu(\vec{u}, s = 0)\tau_{\nu,0\to s} + \int_{s'=0}^{s'=s} L^0_\nu\left(T(s')\right) \frac{\partial \tau_{\nu,s'\to s}}{\partial s'} \mathrm{d}s' \tag{I.47}$$

Cette équation fait intervenir la transmittivité monochromatique d'une colonne élémentaire de plasma. Cette transmittivité est définie entre les abscisses s' et s par :

$$\tau_{\nu,s'\to s} = \exp\left[-\int_{s''=s'}^{s''=s} \kappa_\nu(s'')\mathrm{d}s''\right] \tag{I.48}$$

Le moment d'ordre 1 de la luminance par rapport à la direction $\vec{u}$ donne alors le flux radiatif au sein du milieu :

$$\vec{\Phi}(s) = \int_0^{+\infty} \int_{4\pi} L'_\nu(s, \vec{u})\vec{u}\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}\nu \tag{I.49}$$

En tout point du milieu, la puissance radiative s'exprime à partir du flux radiatif :

$$\begin{aligned} P_{rad}(s) &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}(s) \\ &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{d}\nu \int_{4\pi} \vec{u} \cdot \vec{\nabla} L'_\nu(s, \vec{u})\mathrm{d}\Omega \end{aligned} \tag{I.50}$$

Puis en utilisant l'équation de transfert radiatif I.46, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{rad}(s) &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\nu \int_{4\pi} \kappa_\nu L'_\nu(s, \vec{u})\mathrm{d}\Omega - 4\pi \int_0^{+\infty} \kappa_\nu L^0_\nu(T)\mathrm{d}\nu \\ &= P^a - P^e \end{aligned} \tag{I.51}$$

où P^a est la puissance absorbée et P^e est la puissance émise au point s.

I.3.3 Méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif

L'équation de transfert radiatif I.46 doit être résolue pour pouvoir déduire le champ de rayonnement et ainsi pouvoir calculer le terme source radiatif P_{rad} de l'équation de bilan d'énergie I.13 et les flux radiatifs pariétaux qui interviennent dans les équations I.31 et I.35 pour évaluer la quantité de matière solide ablatée. Il est toutefois difficile de résoudre cette équation dans des géométries réelles tridimensionnelles. Nous allons montrer dans ce qui suit les différentes méthodes, approchées ou exactes, qui existent.

Méthode de lancé de rayons

Cette méthode est la méthode déterministe de calcul de transfert radiatif généralement utilisée quand on a affaire à une géométrie simple. Dans cette méthode, le milieu est discrétisé en N_m noeuds noté M_i et les parois sont discrétisées en N_p noeuds notés P_j. Ces noeuds peuvent être issus d'un maillage non structuré de mécanique des fluides. On associe des propriétés thermophysiques à chaque noeud du milieu et des parois en début de calcul :

- Noeuds de parois P_j :
  Pour une paroi opaque, la température T_j et la réflectivité $\rho_{j,\nu}$

- Noeuds du milieu M_i :
  Température T_i, pression p_i, fraction molaire en constituants k notée $x_{k,i}$

Cela permet de déterminer les coefficients d'absorption $\kappa_{i,\nu}$ en chaque noeud M_i. L'objectif de la méthode est de déterminer les flux radiatifs Φ_j aux noeuds P_j des parois et les puissances radiatives $P_{rad,i}$ aux noeuds M_i du milieu.

- Calcul du flux pariétal :
  Le flux pariétal en P_j est donné par :

$$\Phi_j = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\nu \int_{2\pi} \left[L_\nu'^i(P_j, \vec{u}_d) - L_\nu'^p(P_j, \vec{u}_d) \right] cos(\theta) \mathrm{d}\Omega \tag{I.52}$$

où $L_\nu'^i(P_j, \vec{u}_d)$ représente la luminance du rayonnement incident en P_j, L'^p la luminance partante du même point et θ l'angle entre la direction $\vec{u}_d$ et la direction normale à la paroi. L'^i s'exprime à partir de la luminance provenant du point Π_j situé sur le même rayon de direction $\vec{u}_d$ sur la paroi par :

$$L_\nu'^i(P_j, \vec{u}_d) = L_\nu'^p(\Pi_j, \vec{u}_d)\tau_{\nu,\Pi_j \to P_j} + \int_0^{\Pi_j P_j} L_\nu^0\left(T(s)\right) \frac{\partial}{\partial s} \tau_{\nu,s \to P_j} \mathrm{d}s \tag{I.53}$$

où s désigne l'abscisse curviligne du point M_s sur le segment $[\Pi_j, P_j]$. Π_j n'est pas nécessairement un point P_j' du maillage des parois. Dans ce cas, la luminance en Π_j est obtenue par interpolation de la luminance des points voisins sur le maillage des parois. De même pour l'abscisse curviligne s sur le segment $[\Pi_j, P_j]$: dans le cadre d'une implémentation algorithmique sur ordinateur, $L_\nu^0\left[T(s)\right]$ est représenté par $L_\nu^0[T(M_s)]$ et sa valeur est aussi obtenue par interpolation des points voisins de M_s et présents sur le maillage. La luminance du rayonnement partant de P_j s'exprime comme la somme du rayonnement émis et celle du rayonnement réfléchi. Etant donné que la réflectivité bidirectionnelle de la paroi est très mal connue en pratique, on traitera le cas d'une paroi opaque et isotrope. Dans ce cas, la luminance partante est isotrope et est donnée par :

$$L_\nu^p(P_j, \vec{u}_d) = \epsilon_\nu(P_j) L_\nu^0(T_j) + \left[1 - \epsilon_\nu(P_j)\right] L_\nu^i(P_j) \tag{I.54}$$

où $\epsilon_\nu(P_j)$ est l'émissivité monochromatique au point P_j du maillage de la paroi et L_ν^i représente la luminance incidente isotrope équivalente donnée par :

$$L_\nu^i(P_j) = \frac{1}{\pi} \int_{2\pi} L_\nu'^i(P_j, \vec{u}_{d'}) cos(\theta') \mathrm{d}\Omega' \tag{I.55}$$

Toutes les intégrales écrites ici sont bien sûr à discrétiser dans le cadre d'une implémentation et on les remplace par des sommes discrètes. La substitution des équations I.53 et

I.55 dans I.54 conduit à un système de N_p équations à N_p inconnues qui sont les L^p. Cette résolution doit être conduite fréquence par fréquence d'où des temps de calcul prohibitifs pour des géométries de chambre de coupure complexe.

- Calcul de la puissance radiative :
  La puissance radiative en un point M_i du milieu est alors donnée par un calcul explicite à partir de l'équation I.51 par :

$$P(M_i) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}\nu \int_{4\pi} \kappa_{\nu,i} L'_\nu(M_i, \vec{u}_d)\mathrm{d}\Omega - 4\pi \int_0^{+\infty} \kappa_{\nu,i} L^0_\nu(T_i)\mathrm{d}\nu \tag{I.56}$$

  où la luminance en M_i est donnée par une relation strictement similaire à l'équation I.53 donnant la luminance en M_i en fonction de la luminance partante d'un point de la paroi Π_j.

Cette méthode est intuitive et elle présente l'avantage de calculer le champ de luminance en un point sans tenir compte de la valeur de la luminance des plus proches voisins. Il n'y a donc pas de phénomène de diffusion numérique dans cette méthode et les résultats sont très souvent fiables à condition de considérer un nombre suffisant de rayons. D'autre part, il n'y a pas d'approximation sur la nature de la distribution angulaire de la luminance ce qui assure une très bonne précision sur les flux aux parois si suffisamment de rayons sont choisis.

Méthode des moments : P_n, SP_n et M_1

Les méthodes P_n proposent de simplifier la dépendance directionnelle de la luminance en se ramenant à un système d'équations aux dérivées partielles couplées, associés à une condition aux limites, dont la solution permet de déduire la puissance radiative dans le milieu et le flux radiatif aux parois. Cette méthode a fait l'objet de nombreuses études résumées dans (Modest 2003). Elle est également connue sous le nom de méthode des harmoniques sphériques. Nous présentons ici une formulation de l'approximation P_1 en moments, telle qu'étudiée dans le cadre de ce travail.

En projetant la luminance $L_\nu(\vec{r}, \vec{u})$ sur la base d'harmoniques sphériques $\{Y_0^0, Y_1^{-1}, Y_1^0, Y_1^1\}$ et en utilisant la relation entre les harmoniques sphériques et les polynômes de Legendre, on obtient une expression de la luminance de la forme :

$$L_\nu(\vec{r}, \vec{u}) = \alpha_\nu(\vec{r}) + \vec{\beta}_\nu(\vec{r}) \cdot \vec{u} \tag{I.57}$$

Le moment d'ordre 0 de la luminance[1] est alors donné par :

$$\begin{aligned} G_\nu(\vec{r}) &= \int_{4\pi} L_\nu(\vec{r}, \vec{u})\mathrm{d}\Omega \\ &= \alpha_\nu(\vec{r}) \int_{4\pi} \mathrm{d}\Omega + \vec{\beta}_\nu(\vec{r}) \cdot \int_{4\pi} \vec{u}\mathrm{d}\Omega \\ &= 4\pi\alpha_\nu(\vec{r}) \end{aligned} \tag{I.58}$$

1. Le moment d'ordre 0 de la luminance représente la densité spectrale d'énergie au facteur multiplicatif c près.

De même on peut également calculer le moment d'ordre 1 de la luminance pour obtenir le flux radiatif monochromatique Φ_ν :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_\nu(\vec{r}) &= \int_{4\pi} L_\nu(\vec{r},\vec{u})\vec{u}\mathrm{d}\Omega \\ &= \alpha_\nu(\vec{r})\int_{4\pi}\vec{u}\mathrm{d}\Omega + \vec{\beta}_\nu(\vec{r})\int_{4\pi}\vec{u}\vec{u}\mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{4\pi}{3}\vec{\beta}(\vec{r})\end{aligned} \tag{I.59}$$

Les équations I.59 et I.60 permettent d'écrire alors :

$$L_\nu(\vec{r},\vec{u}) = \frac{1}{4\pi}\left[G_\nu(\vec{r}) + 3\vec{\Phi}_\nu(\vec{r})\cdot\vec{u}\right] \tag{I.60}$$

Cette équation est injectée dans l'équation de transfert radiatif dont on prend les moments d'ordre 0 et 1 par rapport à $\vec{u}$. On montre ainsi que G_ν satisfait l'équation aux dérivées partielles elliptique :

$$\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{3\kappa_\nu(T)}\vec{\nabla}G_\nu\right) + \kappa_\nu(T)G_\nu = \kappa_\nu(T)G^0_\nu(T) \tag{I.61}$$

Cette équation doit être associée à une condition aux limites. Il existe différentes possibilités de formulation du problème aux limites du domaine de calcul. La formulation la plus couramment utilisée est connue sous le nom de *condition de Marshak*. Elle aboutit pour une paroi opaque à propriétés radiatives isotropes, d'émissivité spectrale ϵ_ν et de température T_w, à la relation liant la fonction G_ν et son gradient à la paroi (Modest 2003) :

$$\frac{\epsilon_\nu}{2-\epsilon_\nu}G_\nu - \frac{2}{3\kappa_\nu(T)}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}G_\nu = \frac{\epsilon_\nu}{2-\epsilon_\nu}G^0_\nu(T_w) \tag{I.62}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la paroi orienté vers le fluide. Le flux monochromatique et la puissance monochromatique sont alors obtenus par :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi}_\nu &= -\frac{1}{3\kappa_\nu(T)}\vec{\nabla}G_\nu \\ P_\nu &= -\vec{\nabla}\cdot\left(-\frac{1}{3\kappa_\nu(T)}\vec{\nabla}G_\nu\right)\end{aligned} \tag{I.63}$$

Une intégration sur tout le domaine spectral des relations I.63 donne alors le flux radiatif et la puissance radiative effectivement prédits par la méthode. On voit que cette méthode propose une simplification directionnelle du problème de calcul du transfert radiatif. Toutefois elle peut s'avérer très approximative du fait de la troncature à l'ordre 1 dans la décomposition en harmoniques sphériques. Il existe néanmoins différentes possibilités d'amélioration de la distribution angulaire du flux.

La méthode SP_n (Larsen, Thömmes, Klar, Seaïd, et Götz 2002) fut introduite initialement en neutronique et adaptée ensuite aux cas du transfert radiatif. Elle propose de considérer un développement asymptotique, dans un milieu optiquement épais, de l'opérateur $1/\left(1+\epsilon/\kappa_\nu\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)$, où $\epsilon = 1/(\kappa_{ref}L_{ref})$ représente l'inverse d'une épaisseur optique

de référence, κ_ν représente le coefficient d'absorption du milieu adimensionné par κ_{ref} et l'opérateur de différenciation $\vec{\nabla}$ est supposé également adimensionné par L_{ref}. La série de Neumann de l'opérateur s'écrit formellement :

$$\frac{1}{\left(1+\frac{\epsilon}{\kappa_\nu}\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)} = 1 - \frac{\epsilon}{\kappa_\nu}\vec{u}\cdot\vec{\nabla} + \frac{\epsilon^2}{\kappa_\nu^2}\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)^2 - \frac{\epsilon^3}{\kappa_\nu^3}\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)^3 + \frac{\epsilon^4}{\kappa_\nu^4}\left(\vec{u}\cdot\vec{\nabla}\right)^4 + ... \tag{I.64}$$

La troncature du dévelopement aux ordres $\mathcal{O}(\epsilon^4)$, $\mathcal{O}(\epsilon^6)$ et $\mathcal{O}(\epsilon^8)$ conduit respectivement aux méthodes SP_1, SP_2 et SP_3. Dans le cas de la méthode SP_3, on se ramène à un système de 2 équations aux dérivées partielles en deux fonctions $\psi_{1,\nu}$ et $\psi_{2,\nu}$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} -\vec{\nabla}\cdot\frac{\epsilon^2\mu_1^2}{\kappa_\nu}\vec{\nabla}\psi_{1,\nu} + \kappa_\nu\psi_{1,\nu} &= 4\pi\kappa_\nu L_\nu^0 \\ -\vec{\nabla}\cdot\frac{\epsilon^2\mu_2^2}{\kappa_\nu}\vec{\nabla}\psi_{2,\nu} + \kappa_\nu\psi_{2,\nu} &= 4\pi\kappa_\nu L_\nu^0 \end{aligned} \tag{I.65}$$

avec L_ν^0 la luminance du corps noir, $\mu_i = (3 \pm \sqrt{6/5})/7$, $i = 1, 2$. Ce système, a priori découplé, est associé à deux conditions aux limites, couplant de fait $\psi_{1,\nu}$ à $\psi_{2,\nu}$, données par :

$$\begin{aligned} \alpha_1\psi_{1,\nu} + \frac{\epsilon}{\kappa_\nu}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_{1,\nu} &= -\beta_2\psi_{2,\nu} + \eta_1 L_\nu^0(T_w) \\ \alpha_2\psi_{2,\nu} + \frac{\epsilon}{\kappa_\nu}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}\psi_{2,\nu} &= -\beta_1\psi_{1,\nu} + \eta_2 L_\nu^0(T_w) \end{aligned} \tag{I.66}$$

où les coefficients α_1, α_2, β_1, β_2, et η_1, η_2, dépendant des émissivités des parois, sont donnés dans (Larsen, Thömmes, Klar, Seaïd, et Götz 2002).

Les fonctions $\psi_{1,\nu}$ et $\psi_{2,\nu}$ permettent ensuite de calculer la puissance radiative selon :

$$P_{rad} = \int_0^\infty \vec{\nabla}\cdot\frac{1}{\kappa_\nu}\vec{\nabla}(a_1\psi_{1,\nu} + a_2\psi_{2,\nu})\mathrm{d}\nu \tag{I.67}$$

avec $a_i = (5 \mp 3\sqrt{5/6})/30$, $i = 1, 2$. Dans cette dernière équation, nous sommes repassés en grandeurs dimensionnelles pour κ_ν et ∇.

Un autre type de méthodes utilisées parfois en astrophysique est la famille des méthodes M_1. Ce type de méthodes propose une fermeture des moments d'ordre 2, définis comme dans la méthode P_1, par un tenseur anisotrope. Ce tenseur, appelé *tenseur d'Eddington* intervient également dans la méthode P_1 mais dans ce cas il est proportionnel au tenseur unité. Cette méthode est détaillée dans (Minerbo 1978).

Méthode des ordonnées discrètes : DOM

Le principe des méthodes *DOM* est de remplacer les intégrales angulaires par des quadratures qui définissent un ensemble discret de directions $\vec{u}_m$ pour lesquelles l'équation de transfert radiatif est résolue. Lors de la résolution de l'équation de transfert radiatif, on

utilise une méthode de type volumes finis pour avancer de proche en proche. Comme la méthode de lancé de rayons, on récupère un système d'équations différentielles couplées par la diffusion éventuelle et par les conditions aux limites. Les intégrales intervenant pour le calcul des différents moments de la luminance sont estimées par des quadratures. Il existe plusieurs quadratures angulaires. Les plus connues sont la famille des S_N qui exploitent certaines symétries par rapport aux directions principales du repère choisi. Cette approche est détaillée dans (Carlson et Lathrop 1964) et (Modest 2003) et a été utilisée dans les milieux en combustion par (Liu, Guo, Smallwood, et El Hafi 2004). (Menart 2000) propose d'utiliser la méthode DOM avec une description des propriétés radiatives à haute résolution. Il montre un calcul dans un plasma d'argon traversé par un courant de 200 A dans une géométrie bidimensionnelle. Cette méthode présente toutefois des problèmes de précision s'il n'y pas un nombre suffisant de directions choisies, ainsi que des problèmes de diffusion numérique liés à l'intégration de l'ETR sur des volumes finis.

L'ensemble des méthodes des moments ainsi que des ordonnées discrètes ne sont pas compatibles avec un modèle statistique de description du spectre tel la famille des modèles statistiques à bandes étroites. Nous avons choisi toutefois dans le cadre de ce travail de comparer la méthode P_1 avec une méthode de référence telle la méthode de lancé de rayons dans le but de l'implémenter dans le code de simulation d'électrohydrodynamique bidimensionnelle de Schneider-Electric. Ce travail est présenté au chapitre 3.

Fondement statistique de la méthode de Monte-Carlo

Nous présentons ici le principe général d'estimation d'une intégrale par une méthode probabiliste. Nous entrons plus dans les détails de cette méthode telle qu'elle est appliquée dans le cas du transfert radiatif dans les chapitres 4 et 5 qui font l'objet d'une présentation de sa mise en oeuvre dans le cadre de ce travail. Cette méthode d'estimation d'intégrales est surtout utilisée pour des intégrales dans des espaces de grandes dimensions (supérieure à 5) car la vitesse de convergence de l'estimateur construit décroît peu avec la dimension et la complexité du problème traité. Dans le cas du transfert radiatif, elle est considérée comme la variante probabiliste du lancé de rayons.
On cherche à évaluer l'intégrale :

$$I = \int_K g(\vec{R}) d\vec{R} \tag{I.68}$$

où K est un espace de dimension finie quelconque et g une fonction de K à valeurs réelles et intégrable sur K. Pour estimer cette intégrale, on introduit une densité de probabilité de référence, noté $P(\vec{R})$. L'intégrale I peut alors se réécrire :

$$I = \int_K f(\vec{R}) P(\vec{R}) d\vec{R} \tag{I.69}$$

avec

$$f(\vec{R}) = \frac{g(\vec{R})}{P(\vec{R})} \tag{I.70}$$

Mais I peut aussi être considérée comme la moyenne de f pour $\vec{R}$ distribuée selon la densité de probabilité de référence $P(\vec{R})$. On construit alors une nouvelle variable aléatoire notée

I_M et définie par :

$$I_M = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\vec{R}_i) \tag{I.71}$$

où les $\vec{R}_i$ représentent des variables aléatoires indépendantes de densité de probabilité $P(\vec{R})$. Or d'après le théorème centrale limite pour un nombre de réaliations M *assez grand*, la variable aléatoire I_M est distribuée selon une loi normale (gaussienne) avec une moyenne μ_f égale à I et une variance σ_f^2/M où σ_f est l'écart-type de la loi de $f(\vec{R})$. Donc pour M assez grand, I_M conduira à une bonne estimation de I :

$$\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} f(\vec{R}_m) \rightarrow I \tag{I.72}$$

En supposant que I_M suit véritablement une loi normale, il est possible de donner un intervalle de confiance à 96% pour $I \pm 2\sigma_f/\sqrt{M}$. Néanmoins on ne connaît pas σ_f *a priori* mais on peut l'estimer par :

$$\begin{aligned} < \sigma_f^2 >_M &= \frac{1}{(M-1)}\sum_{m=1}^{M}\left[f(\vec{R}_m) - \frac{1}{M}\sum_{p=1}^{M} f(\vec{R}_p)\right]^2 \\ &\rightarrow \sigma_f^2 \end{aligned} \tag{I.73}$$

Il est clair qu'un choix judicieux de la densité de probabilité de référence est crucial pour espérer réduire la variance pour un échantillon R de taille M fixée. Il existe différentes méthodes de réduction de variance dans la littérature (Rubinstein 1981). Il s'agit de choisir une densité de probabilité P qui minimise la variance σ_f.

I.3.4 Mécanismes radiatifs élémentaires

Les processus d'émission et d'absorption présentés précédemment résultent d'interactions microscopiques entre le champ de rayonnement et la matière. Nous allons à présent détailler les processus élémentaires qui sont à l'origine des transferts radiatifs dans le milieu plasma lors de la coupure. Les notions de sections efficaces et de probabilité de transition d'un état quantique à un autre jouent alors un rôle primordial dans la description microscopique. En effet, le champ de rayonnement est la conséquence de photons qui sont simultanément émis et absorbés par divers processus microscopiques à différentes fréquences et en tout point du milieu. Nous n'entrerons toutefois pas dans les détails de mécanique quantique à l'origine des grandeurs que nous serons amenés à définir. Ils sont détaillés pour des plasmas d'air dans (Chauveau 2001) par exemple. Les processus sont classés dans différentes catégories fonction du type de transitions mises en jeu. Après une introduction à chaque catégorie puis une description des spectres correspondants, on se propose dans une deuxième partie de décrire les méthodes usuelles et simplifiées de modélisation des spectres de milieux plasmas.

Spectre de raie et transition *lié-lié*

Les interactions entre le champ de rayonnement et les espèces mono- ou polyatomiques correspondants à des transitions entre états liés aboutissent à la formation de raies dans

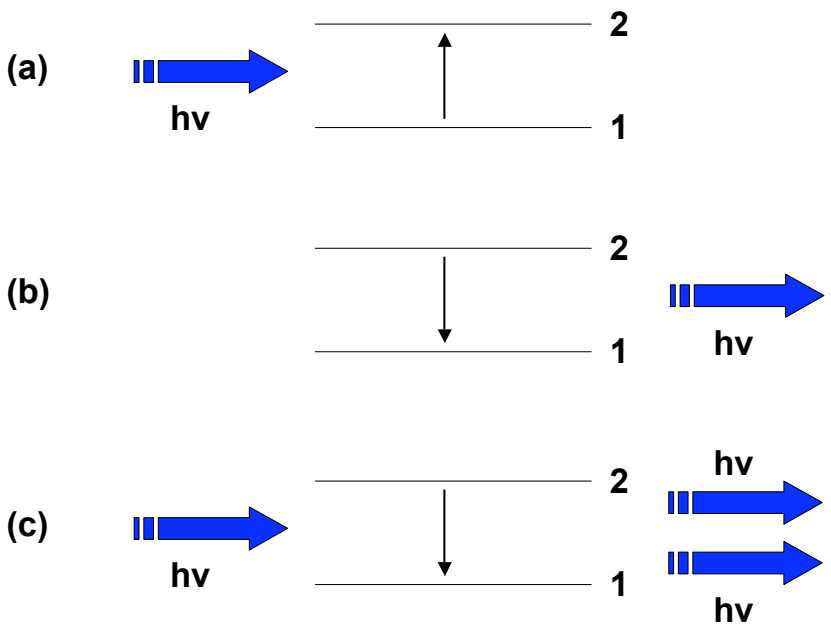

Figure I.7 – *Processus d'interaction entre le rayonnement et la matière : transition* liélié. *(a) Absorption d'un photon incident d'énergie $h\nu$ (b) Emission spontanée d'un photon d'énergie $h\nu$ (c) Emission induite de photon d'énergie $h\nu$*

le spectre d'émission ou d'absorption. Chaque raie correspond à une transition d'énergie quantifiée. On peut donner de manière générale une signification phénoménologique des coefficients d'absorption κ_ν et d'émission η_ν. On considère donc dans tout ce qui suit que le système est formé par une espèce mono- ou polyatomique, donnée une fois pour toutes, qui possède 2 niveaux d'énergie quantifiée (1 et 2) notée E_1 et E_2 de dégénérescence g_1 et g_2. On note d'autre part n_1 et n_2 les densités de particules des niveaux 1 et 2. Les interactions élémentaires avec le champ de rayonnement couplant ces niveaux sont l'absorption, l'émission spontanée et l'émission induite. Les énergies des niveaux sont d'autre part reliés par la relation de conservation de l'énergie du photon émis ou absorbé $E_2 - E_1 = h\nu$. On se propose d'écrire les équations cinétiques décrivant l'évolution des populations de chaque niveau d'énergie sous l'effet des divers mécanismes radiatifs puis d'en déduire les expressions des coefficients d'absorption et d'émission.

- Phénomène d'absorption
  On considère un photon incident d'énergie $h\nu$ en interaction avec le système décrit précédemment dans l'état d'énergie 1 sous le seul effet de l'absorption. Les populations des niveaux sont alors couplées par le système d'équations différentielles :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial n_1}{\partial t} &= B_{12} n_1 u_\nu \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} &+ \frac{\partial n_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{I.74}$$

u_ν est la densité spectrale d'énergie radiative par unité de volume et B_{12} est le coefficient d'Einstein pour la réaction d'absorption.

- Phénomène d'émission spontanée
  Il y a dans ce cas désexcitation spontanée du système à partir de l'état 2 accompagnée d'émission de photons. C'est un phénomène incohérent et les photons sont émis de manière isotrope selon le processus réactionnel suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} &= -A_{21} n_2 \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} &+ \frac{\partial n_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{I.75}$$

  A_{21} est appelé coefficient d'Einstein d'émission spontanée. C'est la probabilité pour qu'une particule dans l'état d'énergie E_2 émette une photon de fréquence ν par unité de temps.

- Phénomène d'émission induite
  C'est un phénomène de résonance entre le photon incident et le système dans l'état excité 2. On observe alors 2 photons identiques à la fin de l'interaction, comme présenté sur la figure ci-dessus. Le processus est décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_2}{\partial t} &= -B_{21} n_2 u_\nu \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} &+ \frac{\partial n_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{I.76}$$

  Les équations I.78 font apparaître le coefficient d'Einstein pour l'émission induite B_{21}. Ce phénomène est à la base du principe de fonctionnement des lasers. Il s'agit à présent de faire un bilan radiatif des 3 processus. L'évolution des densités de population des niveaux 1 et 2 est donnée par l'équation de bilan :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= A_{21} n_2 + (B_{21} n_2 - B_{12} n_1)\, u_\nu \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} &+ \frac{\partial n_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{I.77}$$

  Cependant ce modèle ne prend pas en compte l'allure réelle des spectres d'absorption et d'émission observés et il est insuffisant pour les décrire précisément. Il faut en effet tenir compte de l'élargissement des raies qui est principalement dû aux collisions et à l'effet Doppler.

- Elargissement Doppler
  Les équations précédentes sont valables dans le référentiel de la particule qui rayonne. Cependant ce référentiel est en mouvement par rapport au référentiel du laboratoire dans lequel la mesure est faite. Dans la mesure où la distribution de la vitesse des particules peut être considérée comme Maxwellienne c'est à dire à l'équilibre thermodynamique local, le profil de raie Doppler est donné par :

$$\begin{aligned} F_D(\nu-\nu_r) &= \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\frac{1}{\gamma_D}\exp\left[-\frac{(\nu-\nu_r)^2\ln 2}{\gamma_D^2}\right] \\ \gamma_D &= \frac{\nu_r}{c}\sqrt{\frac{2\ln 2 k_B T}{m}} \end{aligned} \tag{I.78}$$

  où m est la masse de la particule, T la température et ν_r la fréquence de résonance de l'interaction dans le référentiel de la particule. γ_D est la demi-largeur à mi-hauteur du profil Doppler de la raie.
- Elargissement collisionel
  Il existe un autre type d'élargissement d'origine collisionelle, souvent modélisé par un profil Lorentzien :

$$F_L(\nu-\nu_r) = \frac{\gamma_L}{\pi}\frac{1}{\gamma_L^2+(\nu-\nu_r)^2} \tag{I.79}$$

  où γ_L est la la demi-largeur à mi-hauteur du profil Lorentzien. Lorsque la particule rayonnante est en collision avec des particules chargées, l'élargissement résultant est appelé effet Stark (Zel'dovich et Raizer 2002). Ce type d'élargissement peut s'observer sur les raies d'absorption monoatomiques d'un plasma d'air.
- Dans la mesure où les deux mécanismes d'élargissement précédents sont indépendants, le profil de raie résultant est le produit de convolution des profils Doppler et Lorentz, appelé profil Voigt :

$$\begin{aligned} F_V(\nu) &= \frac{a}{\pi\gamma_D}\sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-y^2}}{a^2+(\zeta-y)^2}dy \\ a &= \frac{\gamma_L}{\gamma_D}\ln 2 \\ \zeta &= \sqrt{\ln 2}\,\frac{\nu-\nu_{ul}}{\gamma_D} \end{aligned} \tag{I.80}$$

- Equation de transfert radiatif revisitée
  Avec les considérations précédentes sur le profil des raies, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} &= \int_\nu \left[A_{21}n_2 + (B_{21}n_2 - B_{12}n_1)\,u_\nu\right] F_r(\nu-\nu_r)\mathrm{d}\nu \\ \frac{\partial n_1}{\partial t} &+ \frac{\partial n_2}{\partial t} = 0 \end{aligned} \tag{I.81}$$

  On écrit alors le bilan radiatif total pour la transition considérée pour faire apparaître les

expressions des coefficients d'absorption et d'émission. La puissance radiative échangée au sein du volume élémentaire $\mathrm{d}V$ pour des photons dans l'intervalle spectral $\mathrm{d}\nu$ et dans $\mathrm{d}\Omega$ est alors donnée par :

$$\mathrm{d}P_\nu = \mathrm{d}V \left[A_{21} n_2 \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi} + L_\nu \frac{\mathrm{d}\Omega}{c} (B_{21} n_2 - B_{12} n_1) \right] h\nu F_r(\nu - \nu_r) \mathrm{d}\nu \tag{I.82}$$

où $\mathrm{d}V = \mathrm{d}S\mathrm{d}z$ avec $\mathrm{d}S$ la surface élémentaire normale à $\mathrm{d}z$. Or $\mathrm{d}P_\nu = \mathrm{d}L_\nu \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}S \mathrm{d}\nu$ ce qui donne l'équation de transfert radiatif en régime stationnaire en l'absence de diffusion :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}L_\nu}{\mathrm{d}z} &= \eta_\nu - \kappa_\nu L_\nu \\ \kappa_\nu &= [B_{21} n_2 - B_{12} n_1] \frac{h\nu}{c} F_r(\nu - \nu_r) \\ \eta_\nu &= \frac{A_{21} n_2}{4\pi} h\nu F_r(\nu - \nu_r) \end{aligned} \tag{I.83}$$

L'équation de transfert radiatif a été ici introduite pour une transition entre états liés, sans tenir compte des processus d'interaction faisant intervenir des états initiaux ou finaux libres de la particule.

Spectre continu, transition *libre-libre*, *lié-libre*

On traite à présent le cas de spectre continu qui correspond à des transitions faisant intervenir un état libre : transition libre-libre, lié-libre et libre-lié. Les états libres du système sont en fait également quantifiés, cependant la différence d'énergie entre 2 états consécutifs du système est très faible devant l'énergie $k_B T$ aux températures considérées pour notre application. Les niveaux d'énergie des états sont très rapprochés.

- Transition *libre-libre*
  En absorption, le processus est appelé *Bremsstrahlung inverse* et est décrit par la réaction :

$$A + e_i^- + h\nu \rightarrow A + e_f^- \tag{I.84}$$

  Son analogue en émission est le rayonnement de *Bremsstrahlung* ou rayonnement de *freinage* car l'électron perd au cours de la collision avec la particule lourde A, mono- ou polyatomique, neutre ou chargée, une partie de son énergie cinétique et émet un photon d'énergie $h\nu$. L'équation de conservation de l'énergie donne alors $h\nu = E_c(e_f^-) - E_c(e_i^-)$. Il existe différentes expressions du coefficient d'absorption κ_ν selon que la particule lourde A est un atome ou un ion (Delcroix et Bers 1994).

- Transition *lié-libre* ou *libre-lié*
  On désigne ainsi les processus élémentaires de photoionisation, photodétachement, photodissociation et photoionisation dissociative. Les deux premiers cas correspondent à une

absorption de photon par la particule A et une éjection d'électron avec une certaine énergie cinétique. La photoionisation correspond à une particule A (atome ou molécule) ayant un degré d'ionisation $n \geq 0$:

$$A^{n+} + h\nu \rightarrow A^{(n+1)+} + e^- \tag{I.85}$$

Le photodétachement correspond au cas où l'atome ou la molécule A est chargé négativement :

$$A^- + h\nu \rightarrow A + e^- \tag{I.86}$$

Enfin, la photodissociation et la photoionisation dissociative correspondent à des cas où la particule A est de type moléculaire et plus particulièrement pour notre étude, diatomique homo- ou hétéronucléaire BC. La photodissociation simple est décrite par le processus :

$$BC + h\nu \rightarrow B + C \tag{I.87}$$

La photoionisation dissociative est décrite par le processus :

$$BC + h\nu \rightarrow B + C^+ + e^- \tag{I.88}$$

Les phénomènes de photoionisation et de photodissociation moléculaires jouent un rôle prépondérant aux faibles températures où les densités moléculaires sont grandes devant les densités atomiques.
On présente sur la figure I.8 les spectres d'absorption de plasmas d'air à pression atmosphérique à 3000 K, 6000 K et 15000 K issus de la référence (Chauveau 2001). On voit que le spectre se compose d'une superposition de raies et de rayonnement du continuum. Pour les transitions lié-lié, à 3000 K et 6000 K, les spectres sont essentiellement dominés par des raies moléculaires, puis par des raies atomiques à 15000 K. Le rayonnement du continuum est dominé par la photodissociation de O_2 et la photoionisation moléculaire à 3000 K, tandis qu'à 15000 K, on retrouve des contributions importantes du rayonnement de Bremsstrahlung en dessous de 50000 cm^{-1} et de la photoionisation atomique au delà de 10^5 cm^{-1}.

Le tableau I.1 résume l'ensemble des mécanismes radiatifs pris en compte dans la référence (Chauveau 2001) et qui sont à la base des modèles simplifiés développés au chapitre II.

I.3.5 Modélisation spectrale des propriétés radiatives

Les processus élémentaires décrits précédemment permettent de connaitre les spectres d'absorption du plasma à différentes températures. Toutefois pour effectuer un calcul de transfert

radiatif au sein du milieu, il est nécessaire de résoudre l'équation de transfert radiatif pour chaque fréquence du spectre. Dès lors, il est nécessaire de modéliser de façon simplifiée les spectres d'absorption par des méthodes que l'on va préciser dans ce qui suit.

Transferts radiatifs à haute résolution spectrale

Pour une molécule, l'ensemble des raies associées aux transitions entre 2 niveaux de vibration est appelé une bande. Un milieu absorbant ou/et émettant peut être vu comme constitué d'espèces ayant des moments dipolaires électriques qui peuvent émettre et absorber des ondes électromagnétiques. Considérons un milieu constitué par un mélange d'espèces absorbantes $(N_2, O_2, NO, etc.)$ notées i. Le coefficient d'absorption κ_ν du milieu, à une fréquence donnée, est la somme des coefficients d'absorption respectifs $\kappa_{\nu,r,i}$ de chaque constituant i. Cette approche nécessite une connaissance des propriétés spectroscopiques de chaque raie de chaque constituant : positions des centres ν_r, profils normalisés $F_{\nu,r,i}$ et intensités donné par $S_{\nu,r,i} = 1/n_i \int_0^{+\infty} \kappa_{\nu,r,i} \mathrm{d}\nu$ où n_i est le nombre de molécules absorbantes par unité de volume du constituant i contribuant au coefficient d'absorption $\kappa_{\nu,r,i}$ de la raie centrée en $\nu_{r,i}$. Résoudre l'équation de transfert radiatif à haute résolution spectrale, c'est à dire avec un pas plus petit que la largeur des raies est toutefois prohibitif si on envisage de l'appliquer à des transferts par rayonnement dans des géométries complexes telle celles rencontrées en milieu industriel. Il est en effet nécessaire d'avoir quelques 10^6 points de discrétisation spectrale, à rajouter à la discrétisation directionnelle et spatiale. On voit que

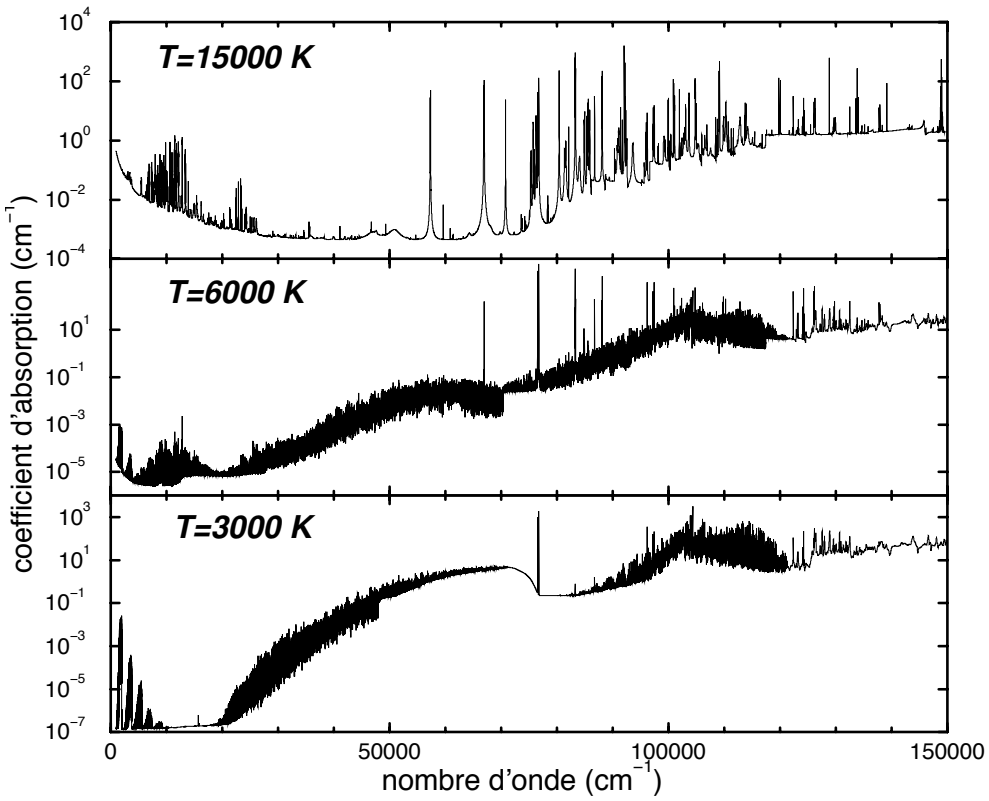

Figure I.8 – *Spectres d'absorption d'un plasma d'air à trois températures à la pression atmosphérique.*

Transitions lié-lié	
– espèces atomiques	N, N^+, N^{++}, O, O^+, O^{++}
– espèces diatomiques	N_2, O_2, NO, N_2^+
Transitions lié-libre	
– photoionisation atomique	N , N^+, O, O^+
– photodétachement atomique	N^-, O^-
– photoionisation moléculaire	N_2, O_2, NO
– photodissociation moléculaire	O_2 Schumann-Runge
Transitions libre-libre	N, N^+, N^{++}, O, O^+, O^{++}

Table I.1 – *Processus radiatifs pris en compte dans la base de données spectroscopiques (Chauveau 2001).*

la complexité spectrale du problème de calcul du transfert radiatif rend toute approche à haute résolution impraticable dans des géométries tridimensionnelles complexes et avec des profils thermophysiques comportant de fort gradients. Il est donc nécessaire de recourir à des modèles approchés de propriétés radiatives. L'approche à haute résolution constitue toutefois une méthode de référence nécessaire pour construire les modèles et tester leur validité.

Coefficient d'émission nette

Nous considérons dans ce modèle une sphère de plasma isotherme de rayon R_p et on cherche à calculer un coefficient d'émission tenant compte de l'auto-absorption dans la sphère :

$$P(R_p, T) = \int_0^{+\infty} L_\nu^0(T)\kappa_\nu(T) \exp\left[-R_p\kappa_\nu(T)\right] \mathrm{d}\nu \tag{I.89}$$

Ce coefficient représente la puissance radiative volumique par unité d'angle solide au centre d'un milieu plasma sphérique et isotherme. La figure I.9 représente la dépendance de ce coefficient en fonction de la température pour différentes valeurs de R_p et est extraite de (Deron 2003).

On constate qu'à basse température ($T < 5000K$), le milieu est optiquement mince ; l'auto-absorption est négligeable. Ce modèle nous permet de calculer aisément et sans introduire de concept de luminance ni d'équation de transfert radiatif la puissance en un point du milieu z par :

$$-\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi} = 4\pi P\left(R_p, T(z)\right) \tag{I.90}$$

Ce modèle nécessite toutefois que la valeur du rayon R_p soit ajustée de façon à correspondre avec les puissances données par une approche haute résolution spectrale dans les régions chaudes. Il ne permet pas de prédire les puissances radiatives en tout point du milieu, en particulier dans les zones absorbantes dans la mesure où il est par nature positif. De même, il ne permet pas de prédire les flux pariétaux. Il présente l'avantage d'être simple mais est insuffisant pour décrire les phénomènes physiques de rayonnement du plasma de décharge. C'est le modèle qui était utilisé dans le logiciel $NS2$ de Schneider-Electric pour décrire les transferts radiatifs.

Méthode des caractéristiques partielles

Cette méthode a été introduite par Sevst'yanenko (Sevast'yanenko 1979; Sevast'yanenko 1980). Dans cette méthode, l'intégration spectrale intervenant dans le calcul des puissances et des flux est faite une fois pour toutes pour estimer deux intégrales, S_{om} et $\triangle S_{im}$, appelées les *caractéristiques partielles*. Ces caractéristiques partielles sont tabulées afin de calculer le flux radiatif et sa divergence rapidement lors d'un calcul d'écoulement instationnaire d'arc électrique. Le principe de la méthode est de considérer une évolution linéaire du profil de température entre tout couple de points du milieu échangeant de l'énergie par rayonnement. Les intégrales S_{om} et $\triangle S_{im}$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} S_{om}\left(T_x, T_\eta, \eta - x\right) &= \int_0^{+\infty} \left\{ L_\nu^0\left(T_x\right) \kappa_\nu\left(T_x\right) \exp\left(- \int_x^\eta \kappa_\nu(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \right\} \mathrm{d}\nu \qquad \text{(I.91)} \\ \triangle S_{im}\left(T_x, T_y, y - x\right) &= \int_0^{+\infty} \left\{ \left[L_\nu^0\left(T_x\right) - L_\nu^0\left(T_y\right) \right] \kappa_\nu\left(T_x\right) \kappa_\nu\left(T_y\right) \exp\left(- \int_x^y \kappa_\nu(\xi) \mathrm{d}\xi \right) \right\} \mathrm{d}\nu \end{aligned}$$

où T_x et T_y sont les températures en deux points x et y du milieu et T_η est la température en η à la frontière du milieu et où la variation de température entre les abscisses x et y ou x et η est supposée linéaire. La puissance radiative par unité d'angle solide au point d'abscisse x peut être calculée par :

$$P(x, \vec{u}) = S_{om}\left(T_x, T_\eta, \eta - x\right) - \int_x^\eta \triangle S_{im}\left(T_x, T_\xi, \xi - x\right) \mathrm{d}\xi \qquad \text{(I.92)}$$

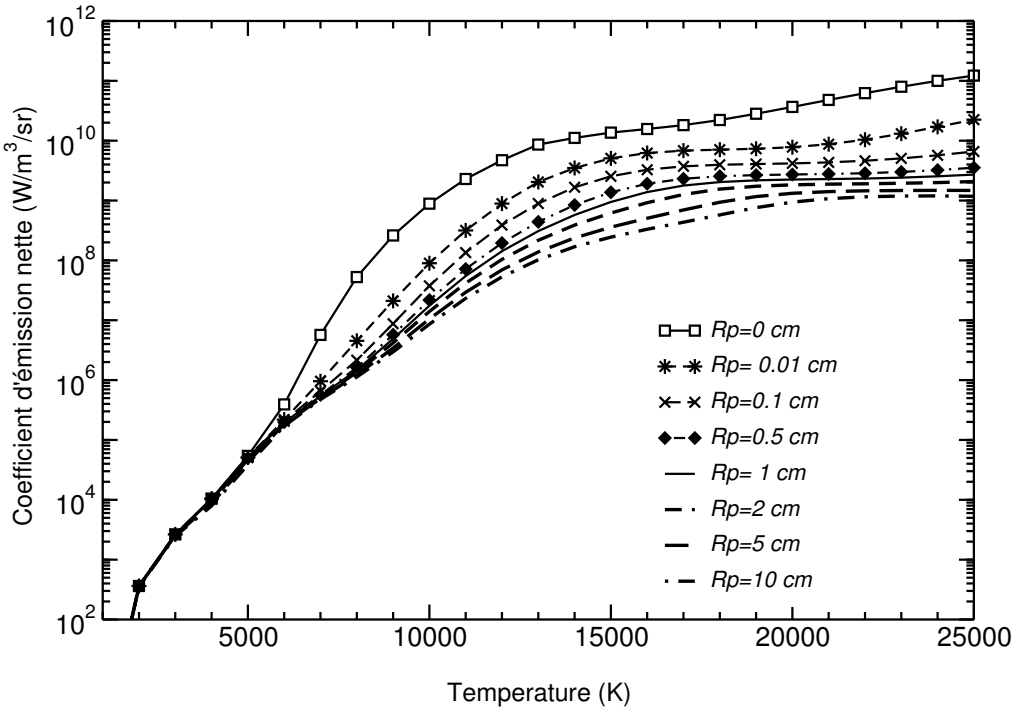

Figure I.9 – *Coefficient d'émission nette pour un plasma d'air à pression atmosphérique différentes valeurs du rayon R_p (d'après (Perrin, Rivière, et Soufiani 2008)*

et la puissance radiative par :

$$\vec{\nabla} \cdot \Phi = \int_{4\pi} P(x, \vec{u}) \mathrm{d}\Omega. \tag{I.93}$$

Modèle statistique à bandes étroites

Ce modèle de propriétés radiatives est explicité en détail dans (Taine et Soufiani 1999) pour des applications de type combustion. Des extensions à plus haute température peuvent être trouvées dans (Rouzaud, Tesse, Soubrie, Soufiani, Riviere, et Zeitoun 2008; Lamet, Perrin, Soufiani, Rivière, et Tessé 2008).

L'ensemble du spectre est discrétisé en intervalles de largeur $\triangle\nu$ sur lesquels on va chercher à déterminer une transmitivité moyenne par intervalle. On néglige dans un premier temps la contribution du rayonnement continu et on suppose que toutes les raies dans l'intervalle spectral $\triangle\nu$ considéré ont le même profil spectral (Doppler, Lorentz ou Voigt) mais pas nécessairement la même largeur ni la même intensité. Dans ces modèles, on calcule les propriétés d'absorption d'une colonne de longueur l donnée, moyennée sur un intervalle spectral de largeur $\triangle\nu$, en faisant les hypothèses suivantes :

- L'intervalle spectral $\triangle\nu$ contient un grand nombre de raies N
- Les positions des centres des raies ν_i sont distribuées aléatoirement selon une loi uniforme et sont indépendantes
- Les intensités S_i sont distribuées suivant une densité de probabilité $P(S)$
- Les largeurs des raies sont toutes petites par rapport à la largeur spectrale $\triangle\nu$
- L'absorption est uniquement due aux N raies dans l'intervalle spectral $\triangle\nu$ considéré

Avec ces hypothèses il est possible de montrer que l'expression de la transmittivité moyenne sur l'intervalle spectral de largeur $\triangle\nu$ est donnée par :

$$< \tau >_{\triangle\nu} = \exp\left[-\frac{< W >}{\delta}\right] \tag{I.94}$$

où $\delta = \frac{\triangle\nu}{N}$ est l'espacement moyen entre 2 raies consécutives, $< W >= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} W_i$ est la valeur moyenne des largeurs des raies noires équivalentes en émissivité données par $W_i = \int_0^{+\infty} [1 - \exp(-\kappa_{i,\nu} l)]\, \mathrm{d}\nu$. Compte tenu de l'hypothèse donnant la distribution des intensités des raies suivant la densité $P(S)$, on a $< W >= \int_0^{+\infty} P(S) W(S) \mathrm{d}S$. Différentes densités de probabilité de distribution des intensités des raies ont été proposées par divers auteurs :

- Distribution uniforme $P(S) = \delta(S - \sigma)$
- Distribution exponentielle de Goody $P(S) = \frac{1}{\sigma} \exp\left[-\frac{S}{\sigma}\right)$
- Distribution de Godson $P(S) = \frac{\sigma}{S S_m}$ si $S < S_m$ et $P(S) = 0$ si $S > S_m$
- Distribution exponentielle-inverse $P(S) = \frac{1}{S} \exp\left[-\frac{S}{\sigma}\right]$

Ces quatre densités de probabilité de distribution des intensités nous donnent l'intensité moyenne $\sigma = \int_0^{+\infty} S P(S) \mathrm{d}S$. Le coefficient d'absorption $\kappa_{i,\nu}$ de l'espèce absorbante en dépendant, $W(S)$ dépend donc aussi du profil de raie choisi (Doppler, Lorentz ou Voigt). Ce choix modifie la valeur moyenne $< W >$ et donc aussi l'expression de la transmittivité moyenne sur l'intervalle spectral de largeur $\triangle\nu$ considéré. Nous n'entrons pas dans les détails des expressions des différentes grandeurs suivant le choix du profil de raie. Une description exhaustive est donnée dans (Goody et Yung 1989; Taine et Soufiani 1999).

Modèles spectraux globaux

Il existe également une autre approche de description des spectres d'absorption dans les milieux plasmas. Il s'agit d'une approche globale qui cherche à décrire le spectre dans son ensemble. Ce type de modèle et particulièrement le modèle *MADF* fait l'objet du deuxième chapitre de ce travail. Nous n'entrons pas plus dans les détails de ce type de modélisation ici.

I.3.6 Etat de l'art du calcul du transfert radiatif dans les plasmas d'arcs

De nombreuses études, avec des degrés d'approximation plus ou moins importants, ont été menées pour prendre en compte les transferts radiatifs dans la modélisation d'un arc électrique dans différents gaz : A_r, air, SF_6 etc. Parmis les études pionnières, (Lowke 1969) a calculé le profil de température dans un plasma axisymétrique unidimensionnel (arc stabilsé par parois) de vapeur de sodium à 250 torr en résolvant de façon rigoreuse l'équation de transfert radiatif mais en prenant en compte uniquement deux raies du sodium. Il a résolu de façon itérative l'équation de bilan d'énergie en l'absence de convection :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \sigma E^2 - \vec{\nabla} \cdot \vec{q_r} - \vec{\nabla} \cdot \vec{q_c} \tag{I.95}$$

dans laquelle interviennent un terme de conduction thermique $-\vec{\nabla}\cdot\vec{q_c}$, un terme de puissance radiative $-\vec{\nabla} \cdot \vec{q_r}$ et un terme Joule σE^2. Seule la solution stationnaire de cette équation était recherchée. Il a estimé, dans le cas d'un courant injecté de $4,5\ A$ et pour un rayon d'arc de $0,35\ cm$ qu'environ 37 % de la puissance électrique injectée est transférée à l'extérieur du milieu par rayonnement pour des températures de paroi du cylindre égales à 1200K. (Lowke et Capriotti 1969) ont effectué une étude similaire pour des décharges dans l'air à plus haute pression (30 atm). Ils n'ont pris en compte à ces hautes pressions que le rayonnement continu du plasma et ont montré que la méthode P_1 conduisait à des résultats assez précis dans ce cas par comparaison à une méthode de lancé de rayons pour un profil de température imposé. (Hermann et Schade 1972) sont parmis les premiers à avoir effectué des calculs complets de transferts radiatifs à haute résolution spectrale, couplés au travers de l'équation I.95 aux autres modes de transfert en régime stationnaire, pour des plasmas d'azote. Il n'ont cependant pris en compte que le rayonnement des raies atomiques et du continuum. En régime instationnaire, (Lowke, Voshall, et Ludwig 1973) ont étudié l'extinction d'arcs dans différents mélanges gazeux (Ar, N2, SF6, H2, air) mais devant la complexité que représente le traitement des raies atomiques et moléculaires, ils ont soit considéré les milieux comme optiquement minces, soit négligé la contribution des raies.

Plus récemment, (Gogel, Sedghinasab, et Kiefer 1994) ont effectué des calculs couplés de transfert radiatif et de champ de température au sein de plasmas d'arc axisymétriques 1D dans l'air et l'ammoniac à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. Ils ont négligé la contribution des raies dans le cas des plasmas d'air et n'ont pris en compte que quelques raies dans le cas des plasmas d'ammoniac. (Menart, Heberlein, et Pfender 1999) et (Menart 2000) ont par ailleurs combiné une approche raie par raie à une méthode de résolution de l'ETR par ordonnées discrètes afin de calculer les transferts radiatifs au sein de plasmas d'arc (Ar et Ar-Cu) axisymétriques bidimensionnels. Néanmoins, les temps CPU requis étaient

excessifs pour pouvoir envisager une résolution couplée à l'équation de bilan d'énergie. Un tel calcul couplé, mais en 1D, a été effectué par (Deron, Rivière, Perrin, et Soufiani 2006) pour des plasmas d'argon à pression atmosphérique et les résultats en termes de profils de température calculés ont été favorablement comparés à des mesures spectroscopiques effectuées sur un arc Maecker. Les résultats des calculs montrent que la non prise en compte du rayonnement surestime la température d'environ 2000 K au centre du plasma, alors que la non prise en compte de l'absorption dans les calculs (milieu supposé mince) sousestime cette température d'environ 2000 K également.

Les travaux cités précédemment montrent que des approches rigoureuses en termes de propriétés radiatives et de résolution de l'ETR ne peuvent être pratiquées que pour des géométries relativement simples. Plusieurs méthodes approchées ont alors été proposées pour permettre le traitement de géométries plus compliquées. La méthodes des caractéristiques partielles proposée initialement par (Sevast'yanenko 1979; Sevast'yanenko 1980) a été appliquée par (Aubrecht et Lowke 1994) pour traiter des plasmas de SF6 en géométrie axisymétrique 1D en utilisant l'équation I.95 en régime stationnaire. Une méthode statistique a été appliquée pour le choix des directions de propagation. (Raynal, Vergne, et Gleizes 1995) ont effectué une étude similaire en prenant en compte des vapeurs de cuivre dans des plasmas de SF6. La méthode des caractéristiques partielles a également été utilisée par (Raynal et Gleizes 1995) pour cerner la précision de la méthode du coefficient d'émission nette dans des plasmas de SF6. Cette méthode, beaucoup plus simple pour la mise en oeuvre, s'est avérée efficace pour la prédiction de la température des régions chaudes du plasma à condition de choisir correctement le rayon utilisé pour le calcul de ce coefficient.

La méthode des caratéristiques partielles s'avère elle aussi relativement lourde et parfois peu précise à cause du profil de température supposé linéaire entre les deux points utilisés pour la tabulation. Diverses méthodes approchées tant du point de vue de la modélisation des propriétés radiatives du plasmas que du calul du transfert radiatif ont été mises en oeuvre dans le but de pouvoir aborder des problèmes industriels en géométrie complexe. En particulier, la méthode P_1 a largement été utilisée conjointement avec divers modèles de propriétés radiatives pour le plasma. Ainsi, (Rümpler, Reichert, Berger, Stammberger, et Terhoeven 2007) utilisent une méthode P_1 associée à des coefficients d'absorption moyennés sur quelques bandes spectrales (6 en pratique) afin de simuler l'évolution d'un arc dans de l'air au sein de diverses chambres de coupure tridimensionnelles relativement complexes : ceci leur permet d'étudier l'influence de la géométrie de la chambre et des séparateurs sur la dynamique de l'arc. Leur modèle de rayonnement a été partiellement validé au préalable par comparaison aux résultats d'une méthode d'ordonnées discrètes utilisant la même modélisation spectrale des propriétés radiatives du plasma, dans une géométrie simple axisymétrique monodimensionnelle (cas d'un arc stabilisé par paroi) (Reichert, Rümpler, Berger, Stammberger, et Terhoeven 2007). La principale faiblesse de ce type d'approche réside précisément dans le modèle de propriétés radiatives retenu qui ne tient pas compte de la dynamique spectrale au sein de chaque bande — même si des facteurs d'échappement sont utilisés afin de tenir compte de l'autoabsorption des raies atomiques de résonnance les plus intenses — et dont le comportement est de ce fait difficilement prévisible, notamment en géométrie tridimensionnelle (Deron, Rivière, Perrin, et Soufiani 2004). Au contraire, (Iordanidis, Nordborg, et Franck 2007; Nordborg et Iordanidis 2008) ont développé un modèle de type k-distribution (Goody et Yung 1989) pour les plasmas de SF_6 et l'ont validé en géométrie axisymétrique mono-dimensionnelle par comparaison avec une approche raie par raie en utilisant aussi bien une méthode de lancer de rayon pour le transfert radiatif qu'une

approche P_1. Ce modèle spectral associé à la méthode P_1 leur a permis de simuler des coupures dans des disjoncteurs haute tension en tenant compte des phénomènes d'ablation aux parois (Iordanidis et Franck 2008a) et d'aborder des problèmes en géométrie complexe tridimiensionnelle (Iordanidis et Franck 2008b). Enfin, signalons également un modèle original dédié aux propriétés radiatives des plasmas d'argon basé sur le regroupement des raies les plus auto-absorbées en quelques raies qui sont ensuite discrétisées spectralement, conduisant à un modèle pseudo-monochromatique d'environ une cinquantaine de points spectraux "équivalents" (Lacombe, Delannoy, et Trassy 2008) : ce modèle associé à la méthode P_1 a permis de simuler des écoulements de torches plasma à induction.

Des méthodes plus approchées ont été utilisées comme par exemple l'approximation de Rosseland qui consiste à traiter le transfert radiatif comme un transfert diffusif en utilisant des conductivités radiatives ((Gidalevitch, Goldsmith, et Boxman 2002)). Cette approximation peut cependant se révéler très imprécise du fait de l'existence de zones spectrales où le plasma ne peut être considéré comme optiquement épais.

Finalement, la méthode la plus simple à mettre en oeuvre et qui consomme le moins de temps de calcul, est la méthode du coefficient d'émission nette proposée par (Lowke 1974). Ses performances ont fait l'objet de quelques études comme celle de (Raynal et Gleizes 1995) citée précédemment ou celle de (Eby, Trépanier, et Zhang 1998) qui la compare à une méthode P_1 avec un modèle de propriétés radiatives similaire à celui de (Reichert, Rümpler, Berger, Stammberger, et Terhoeven 2007) brièvement décrit ci-dessus. L'approche par coefficient d'émission nette reste encore la méthode la plus largement utilisée pour traiter des applications concrètes faisant appel à des géométries relativement complexes et en régime instationnaire. Elle est utilisée par exemple dans la référence ((Swierczynski, Gonzalez, Teulet, Freton, et Gleizes 2004)) pour étudier l'extinction d'un arc en géométrie tridimensionnelle comprenant des ailettes pour la coupure de l'arc. Une revue de différentes applications où cette méthode est utilisée est fournie dans la référence (Gleizes, Gonzalez, et Freton 2005).

I.4 Conclusion et objectifs de la thèse

Après avoir décrit le principe de fonctionnement d'un disjoncteur basse tension, nous avons présenté les équations de l'hydrodynamique, de l'électromagnétisme et du transfert radiatif qui interviennent dans la modélisation du plasma thermique qui s'y développe. Ces équations expriment les bilans de masse, de quantité de mouvement et de l'énergie en présence des champs électrique et magnétique. La loi d'Ohm, qui donne la densité de courant électrique dans le fluide, se simplifie en négligeant les courants induits par le mouvement de l'arc électrique lui-même devant les courants de conduction. Dans le cadre de l'approximation quasi-stationnaire, on néglige également le courant de déplacement devant la densité de courant. On se place ainsi dans le cadre de l'électrostatique et de la magnétostatique classique.

Le modèle de dégradation de parois plastiques développé par Schneider-Electric nécessite la connaissance du flux radiatif absorbé au niveau de la paroi. Il faut donc connaître le flux radiatif incident et l'émissivité spectrale des parois pour déterminer le flux radiatif absorbé par les parois solides. Les principales difficultés de modélisation de ce phénomène réside dans la méconnaissance des propriétés spectrales du polymère considéré sous forme condensée et gazeuze, ainsi que dans le calcul du flux radiatif incident et absorbé au niveau de la paroi dans une géométrie industrielle réelle. Il est toutefois nécessaire de connaître le flux radiatif pour équilibrer les bilans d'énergie dans la phase gazeuze et dans la phase solide, ce qui est primordial pour ce type de phénomène à seuil.

Le flux radiatif intervient également dans l'ablation de matière métallique au niveau de l'anode dans la chambre de coupure. Dans le cas de la haute tension, (Ciobanu 1996) étudie le cas d'un arc composé d'air et de vapeurs métalliques de cuivre expérimentalement et numériquement. Il considère également un phénomène d'ablation de vapeurs métalliques de l'anode et propose un bilan d'énergie à l'anode faisant intervenir le flux radiatif, la conduction thermique dans la phase solide, le flux d'énergie transporté par les électrons à l'anode ainsi que le flux conducto-convectif échangé entre l'anode et le gaz.

Enfin, le terme de puissance radiative dans l'équation de bilan d'enthalpie au sein même du plasma joue un rôle très important dans les zones chaudes de l'arc. Il doit être évalué précisément pour une bonne prédiction des niveaux de température et donc des propriétés de transport, notamment électrique, qui pilotent la dynamique de l'arc. Cette dynamique peut également être sensible aux phénomènes d'absorption dans les zones froides du milieu comme c'est le cas par exemple dans les problèmes de propagation des streamers pilotés par la photoionisation (Bourdon, Pasko, Liu, Celestin, Segur, et Marode 2007).

En résumé, la modélisation des plasmas d'arcs de coupure requiert une prédiction précise, d'une part, des flux radiatifs aux parois pour les phénomènes d'ablation et de dégradation des parois, et des puissances radiatives volumiques pour les champs de température et la dynamique de l'arc. La prédiction de ces transferts radiatifs doit être réalisée de manière couplée à la résolution des équations de l'électrohydrodynamique présentées ci-dessus et constitue le principal objet de la suite de ce manuscrit.

La présentation de l'état de l'art donnée à la fin du paragraphe précédent montre que la modélisation précise du transfert radiatif n'a été entreprise jusque là que pour des géométries simples ou des milieux ne présentant pas de spectres trop complexes.

L'objectif du présent travail est de développer des outils de prédiction des transferts radiatifs dans des plasmas d'arc utilisables en géométrie complexe quasi-industrielle. Ces outils doivent permettre de prendre en compte l'absorption du rayonnement par les zones périphériques de l'arc et de prédire correctement les flux incidents sur les parois. En outre, ils doivent s'appuyer sur une description réaliste des propriétés radiatives des plasmas, tenant compte notamment des corrélations spectrales induites par la contribution des transitions lié-lié. Ces outils doivent être par ailleurs suffisamment performants en mémoire et en temps de calcul pour envisager leur utilisation couplée dans des codes de simulation de l'ensemble des phénomènes intervenant dans la propagation et la coupure d'un arc électrique.

Chapitre II

Modèles spectraux globaux

Table des matières

II.1 Introduction : enjeux de la modélisation spectrale 42
II.2 Principe des modèles globaux 43
II.2.1 Cas d'une colonne de plasma homogène et isotherme 43
II.2.2 Cas d'une colonne de plasma inhomogène et anisotherme 44
II.3 Un modèle MADF optimisé : le modèle MADF 36 47
II.3.1 Le problème d'optimisation et sa réduction 47
Problème d'optimisation sur les absorptivités 48
Problème d'optimisation sur les émissivités 49
II.3.2 Algorithme utilisé pour la recherche de minimum 50
II.4 Analyse quantitative et statistique du modèle 52
II.4.1 Evolution des coefficients d'absorption et des poids en fonction de la température 52
II.4.2 Erreur relative sur l'émissivité donnée par le modèle MADF 36 . 55
II.5 Calcul de transfert radiatif - comparaison MADF 36/ MADF 216 60
II.6 Conclusion 62

II.1 Introduction : enjeux de la modélisation spectrale

Lorsque l'on observe un spectre d'absorption de plasma d'air à une température donnée, on y voit une succession de raies qui se superpose à un rayonnement continu. La figure I.8 du chapitre précédent (p. 32) présente des spectres de plasmas d'air pour trois températures différentes. Nous voyons que la densité de raies d'absorption est variable en fonction de la fréquence du rayonnement. Les valeurs du coefficient d'absorption varient également de plusieurs ordres de grandeurs (de 10^{-5}cm^{-1} à 10^4 cm^{-1}). Une raie donnée représente plusieurs échelles d'extinction de rayonnement. Il faut décrire chaque profil de raie avec une discrétisation suffisamment fine : c'est la haute résolution spectrale. Du fait du très grand nombre de raies moléculaires et atomiques, qui viennent se superposer sur le rayonnement continu, il faut donc considérer, lors d'un calcul de transfert radiatif, quelques 3.10^6 fréquences différentes. Ceci est impossible en terme de temps CPU en considérant un problème de transfert radiatif couplé à la mécanique des fluides et à l'électromagnétisme, comme c'est le cas pour la simulation hydrodynamique des plasmas instationnaires. Différents modèles approchés ont été proposés pour réduire les temps de calcul tout en gardant des niveaux de puissance et de flux réalistes. Nous allons présenter ici le principe des modèles globaux de type ADF/ MADF puis nous montrerons comment il est possible de réduire encore le nombre de coefficients d'absorption nécessaire pour décrire le milieu avec une bonne précision en terme de calcul de puissance au sein du milieu et de flux sur les interfaces de la géométrie.

II.2 Principe des modèles globaux

L'idée centrale des modèles basés sur la fonction de distribution cumulée du coefficient d'absorption est de remplacer l'intégration spectrale par une intégration sur les valeurs possibles du coefficient d'absorption pour utiliser beaucoup moins de points d'intégration (une dizaine). Le modèle que nous présentons ici est dédié à des plasmas d'air pur anisotherme entre $300K$ et $25000K$, isobare à pression atmosphérique et de composition chimique à l'équilibre local. Il ne permet de prendre qu'approximativement en compte les variations de pression du milieu, et ne permet pas de considérer un milieu dans lequel on aurait rajouté, au cours de l'évolution dynamique du plasma, des particules de vapeurs plastiques ou métalliques comme c'est le cas pour l'ablation de matière des parois.

II.2.1 Cas d'une colonne de plasma homogène et isotherme

Ce modèle a été présenté et étudié initialement dans (Rivière, Soufiani, Perrin, Riad, et Gleizes 1996) pour des plasmas d'air à des températures au dessus de 10000 K. Les contributions moléculaires n'étaient alors pas significatives. Le modèle a été étendu par la suite à des températures plus basses, en incluant les contributions moléculaires (Deron 2003) et (Deron, Rivière, Perrin, et Soufiani 2004).
Nous considérons dans un premier temps une colonne homogène, isotherme de température T, de pression égale à la pression atmosphérique, de composition chimique fixée et de longueur ℓ. On cherche à calculer l'émissivité de cette colonne. Celle-ci s'écrit :

$$\epsilon(\ell) = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int_0^\infty \left[1 - e^{-\kappa_\nu \ell}\right] L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu \tag{II.1}$$

où σ désigne la constante de Stefan-Boltzmann. On cherche à reformuler cette intégrale pour aboutir à une discrétisation de spectre en coefficient d'absorption. On introduit pour cela la fonction de distribution cumulée du coefficient d'absorption, notée $F(k,T)$, et pondérée par la fonction de Planck $L_\nu^0(T)$:

$$F(k,T) = \frac{\pi}{\sigma T^4} \int_{\nu/\kappa_\nu < k} L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu \tag{II.2}$$

Cette fonction nous permet de réécrire l'émissivité (II.1) par :

$$\epsilon(\ell) = \int_0^\infty \left[1 - e^{-k\ell}\right] \frac{\partial F}{\partial k}(k,T) \mathrm{d}k \tag{II.3}$$

On voit que l'on passe d'une intégrale sur ν à une intégrale sur k ce qui va nous donner une discrétisation en ordonnées très commode du spectre d'absorption. On la réécrit sous la forme d'une somme discrète d'émissivités de J gaz gris de coefficients d'absorption $k_i, i = 1...J$ pondérée par une série de poids $a_i(T), i = 1...J$ dont la somme vaut :

$$\epsilon(\ell) = \sum_{i=1}^{J} a_i(T) \left[1 - e^{-k_i \ell}\right] \tag{II.4}$$

avec

$$a_i(T) = F(k_i^+) - F(k_i^-). \tag{II.5}$$

$a_i(T)$ représente la fraction de l'aire sous la fonction de Planck dans les régions spectrales où le coefficient d'absorption est proche de $k_i(k_i^- < k_i < k_i^+)$ pour une température T.

Cette méthode permet une intégration de fonction à variation lente nécessitant moins de points de discrétisation qu'une intégration sur l'ensemble des fréquences. Elle repose sur l'hypothèse essentielle de milieu isotherme et homogène. Dans notre application le milieu est anisotherme et inhomogène, il se pose donc le problème de corrélation spectrale des intervalles $[k_i^-, k_i^+]$ à différentes températures.

II.2.2 Cas d'une colonne de plasma inhomogène et anisotherme

Les intervalles spectraux associés à l'intervalle $[k_i^-, k_i^+]$ ne se conservent pas lorsque la température du milieu change c'est à dire lorsque l'on passe d'un point à un autre du milieu. (Denison et Webb 1995) ont proposé pour corréler les différents intervalles une autre densité de probabilité cumulée donnée par :

$$F(k, T_g, T_p) = \frac{\pi}{\sigma T_p^4} \int_{\nu/\kappa_\nu(T_g)<k} L_\nu^0(T_p) \mathrm{d}\nu \tag{II.6}$$

avec T_p température associée à la fonction de Planck a priori différente de T_g. La discrétisation des valeurs de k est effectuée d'abord pour une température prise comme référence T_{ref}. Ceci définit les intervalles de coefficients d'absorption $[k_i^-(T_{ref}), k_i^+(T_{ref})]$.

Lorsque la température change, la corrélation entre les coefficients $k_i(T_{ref})$ et $k_i(T)$ s'obtient dans le cadre du modèle "Absorption Distribution Function" (ADF) en résolvant l'équation implicite suivante :

$$F(k_i(T), T, T_{ref}) = F(k_i(T_{ref}), T_{ref}, T_{ref}) \tag{II.7}$$

Ceci nous permet de déduire le coefficient $k_i(T)$. Les poids associés sont calculés dans le cadre du modèle ADF par (Pierrot, Rivière, Soufiani, et Taine 1999) :

$$a_i(T) = F(k_i^+(T), T, T_p = T) - F(k_i^-(T), T, T_p = T) \tag{II.8}$$

Le modèle présenté ci-dessus est rigoureux à la discrétisation près pour des spectres séparables, i.e. tels que $\kappa_\nu(T)$ puisse s'écrire sous la forme $\kappa_\nu(T) = g(\nu)f(T)$, ce qui est loin d'être le cas pour les plasmas considérés ici. En effet, dans un plasma, tel le plasma d'air rencontré dans les chambres de coupure de disjoncteur basse tension, la composition chimique du milieu change suivant la gamme de température considérée. Pour ce type d'application, Rivière et al. (1996) ont développé une version multi-espèce du modèle ADF dans laquelle le plasma est décomposé en n espèces fictives dont l'évolution des spectres est globalement similaire quelque soit la fréquence. Dans cette version, dite "Mixture Absorption Distribution Function" (MADF), on construit une fonction densité de probabilité cumulée pour chaque espèce donnée par :

$$F_\alpha(k^\alpha, T_g, T_p) = \frac{\pi}{\sigma T_p^4} \int_{\nu/\kappa_\nu^\alpha(T_g)<k^\alpha} L_\nu^0(T_p)\mathrm{d}\nu \tag{II.9}$$

où α appartient à $(1, 2, \ldots n)$ et désigne l'espèce fictive considérée. Les coefficients d'absorption κ_ν^α de chaque espèce fictive sont alors discrétisés en J intervalles $[k_{i_\alpha}^{\alpha^-}(T), k_{i_\alpha}^{\alpha^+}(T)]$. Une valeur représentative $k_{i_\alpha}^\alpha$ est alors prise à l'intérieur de chaque intervalle. On définit ainsi J^n gaz gris de coefficients d'absorption :

$$k_{i_1,\ldots,i_n} = \sum_{\alpha=1}^{n} k_{i_\alpha}^\alpha \tag{II.10}$$

Le poids associé est alors donné par :

$$a_{i_1,\ldots,i_n} = \frac{\pi}{\sigma T_p^4} \int_{\bigcap_{\alpha=1}^{n}\{\nu/k_{i_\alpha}^{\alpha^-}<\kappa_\nu^\alpha(T_g)<k_{i_\alpha}^{\alpha^+}\}} L_\nu^0(T_p)\mathrm{d}\nu \tag{II.11}$$

La luminance totale s'écrit alors dans le cadre de ce modèle comme la somme des luminances partielles de chaque espèce fictive :

$$L(s) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} L_{i_1,\ldots,i_n}(s) \tag{II.12}$$

Et l'équation de transfert radiatif s'écrit pour chaque n-uplet d'intervalle spectral :

$$\frac{\partial L_{i_1\ldots i_n}}{\partial s} = k_{i_1,\ldots,i_n}\left[a_{i_1,\ldots,i_n}\frac{\sigma T_p^4}{\pi} - L_{i_1,\ldots,i_n}\right] \tag{II.13}$$

Cette méthode présente un intérêt d'autant plus grand que le nombre d'espèces fictives et le nombre d'intervalles de discrétisation est petit car on se retrouve avec J^n équations de transfert du rayonnement à résoudre avant de sommer toutes les solutions. En pratique le modèle MADF est utilisé avec J=6 et n=3. On sépare donc le spectre en 3 espèces fictives correspondant en pratique à (i) la contribution des molécules, (ii) celle des raies atomiques neutres et du continuum monoatomique au delà de 80000 cm^{-1} et (iii) celle des raies atomiques ionisées et du continuum en dessous de 80000 cm^{-1}. Pour chaque gaz fictif, on représente la variation du coefficient d'absorption par 6 coefficients. Les propriétés spectrales du plasma entre $300K$ et $25000K$ sont donc représentées par $6^3 = 216$ échelles. Nous obtenons donc une représentation de l'émissivité de la colonne de plasma donnée par :

$$\epsilon(\ell, T) = \sum_{1\leq i_1,i_2,i_3\leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T)\left[1 - e^{-\left[k_{i_1}^1(T)+k_{i_2}^2(T)+k_{i_3}^3(T)\right]\ell}\right] \tag{II.14}$$

Nous pouvons également calculer dans le cadre de ce modèle et de manière similaire à l'émissivité, une absorptivité pour la colonne de plasma précédente soumise à un rayonnement de corps noir à la température T_{ref} par :

$$\epsilon^a(\ell, T, T_{ref}) = \sum_{1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T_{ref}) \left[1 - e^{-\left[k^1_{i_1}(T) + k^2_{i_2}(T) + k^3_{i_3}(T)\right]\ell} \right] \tag{II.15}$$

La formulation de la méthode en coefficient d 'absorption permet l'utilisation de toutes les méthodes de résolution de l'ETR, déterministe ou probabiliste. Il est possible d'utiliser le modèle MADF avec des approches de résolution de l'ETR déterministe de type lancé de rayon ou probabiliste de type Monte Carlo, ainsi qu'avec des méthodes de résolution d'équations aux dérivées partielles de type P_n. La précision attendue par rapport à une approche raie par raie est de l'ordre de 10 pourcents. L'utilisation de ce modèle dans le cadre d'une méthode P_n présente toutefois l'inconvénient d'avoir J^n équations de transfert radiatif à résoudre, ce qui n'est pas le cas dans le cadre d'une approche stochastique de type Monte Carlo, le terme source étant choisi aléatoirement parmi les J^n termes sources. Ainsi pour diminuer encore le nombre d'équations à résoudre nous avons cherché à optimiser le modèle MADF en réduisant le nombre de coefficients utilisés. Nous allons présenter les principes qui ont conduit à ce modèle optimisé.

II.3 Un modèle MADF optimisé : le modèle MADF 36

Le but du modèle " MADF dégradé " est de réduire le nombre de coefficients d'absorption à 36 en regroupant les gaz fictifs des classes 2 et 3 et en conservant la classe 1 telle quelle. On obtient ainsi non pas $6^3 = 216$ gaz fictifs mais $6^2 = 36$ gaz fictifs qui doivent correspondre à des valeurs d'émissivité et d'absorptivité équivalentes, par la résolution d'un problème d'optimisation non linéaire sous contraintes. Ceci peut être justifié si on considère que la température reste en dessous d'une valeur de $20.000K$ environ. Ce regroupement correspond à ne plus distinguer les classes des atomes de celles des ions.

Nous présentons dans une première partie le problème d'optimisation à résoudre c'est-à-dire ici un problème de minimisation d'une fonction non convexe dans un espace à 12 dimensions. Dans une deuxième partie nous détaillerons l'algorithme adopté puis nous montrerons dans une troisième partie quelques résultats statistiques sur le niveau de précision de ce modèle, ainsi qu'un exemple de calcul en transfert comparé à un calcul de transfert avec le modèle MADF 216 sur une géométrie $2D$ simple.

Le niveau d'erreur estimé sur les émissivités atteint 20 pourcents autour de $T = 18.000K$ avec toutefois un niveau d'erreur de moins de 10 pourcents en transfert pour un temps de calcul divisé par 6 par rapport au modèle MADF à 216 gaz fictifs dans le cadre d'une approche de résolution de l'équation de transfert radiatif avec une méthode P_1.

II.3.1 Le problème d'optimisation et sa réduction

Nous devons à présent définir une notion essentielle dans tout ce qui suit. Il s'agit de l'émissivité partielle des 2 espèces fictives 2 et 3 à i_1 fixé. Elle est donnée par :

$$\epsilon^{i_1}(\ell, T) = \sum_{1 \leq i_2, i_3 \leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T) \left[1 - e^{-\left[k^2_{i_2}(T) + k^3_{i_3}(T)\right]\ell} \right] \tag{II.16}$$

Nous voulons mélanger les classes fictives 2 et 3 au sein d'une même classe, que l'on peut désigner par $2'$. L'indice m fera référence dans tout ce qui suit à la classe $2'$. Il faut donc trouver un jeu de paramètres pour chaque échelle d'extinction de la classe 1. En d'autres termes, pour chaque indice i_1 fixé, il s'agit de trouver 6 coefficients d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m}$, $m \in [1, ..., 6]$ et 6 poids $\tilde{a}_{i_1,m}$, $m \in [1, ..., 6]$ tels que l'émissivité partielle de la classe $2'$, notée $\tilde{\epsilon}^{i_1}$ et donnée par :

$$\tilde{\epsilon}^{i_1}(\ell, T) = \sum_{1 \leq m \leq 6} \tilde{a}_{i_1,m}(T) \left[1 - e^{-\tilde{k}_{i_1,m}(T)\ell} \right] \tag{II.17}$$

soit la plus proche possible de l'émissivité partielle des classes 2 et 3 et désignée plus haut par ϵ^{i_1} , pour chaque température.

Il s'agit donc de trouver pour chaque i_1 compris entre 1 et 6, et chaque température T comprise entre $300K$ et $25000K$, un jeu de douze paramètres $(\tilde{k}_{i_1,m}, \tilde{a}_{i_1,m}), 1 \leq m \leq 6$ tels que quelque soit ℓ compris entre 10^{-3} cm et 3 cm, on aie :

$$\epsilon^{i_1}(\ell, T) \approx \tilde{\epsilon}^{i_1}(\ell, T) \tag{II.18}$$

sous les contraintes suivantes :

$$0 \leq \tilde{a}_{i_1,m}(T) \leq 1, \tag{II.19}$$

$$\sum_{1 \leq m \leq 6} \tilde{a}_{i_1,m}(T) = \sum_{1 \leq i_2, i_3 \leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T) \tag{II.20}$$

$$m \leq m' \Rightarrow \tilde{k}_{i_1,m}(T) \leq \tilde{k}_{i_1,m'}(T) \tag{II.21}$$

Ceci revient à minimiser pour chaque valeur de i_1 et de T, sous les contraintes précédentes, la fonction de 12 variables suivante :

$$\mathcal{G}^{i_1}(\tilde{a}_{i_1 m}(T), \tilde{k}_{i_1 m}(T), 1 \leq m \leq 6) = \sum_{\ell} \left[\epsilon^{i_1}(\ell, T) - \tilde{\epsilon}^{i_1}(\ell, T) \right]^2 \tag{II.22}$$

Les longueurs de colonne sont discrétisées logarithmiquement sur un intervalle $[L_{min}; L_{max}]$ discuté plus loin. Les fonctions $\mathcal{G}^{i_1}$ sont des fonctions continues non linéaires, non convexes dépendant de 12 paramètres dont il faut trouver le minimum et les coordonnées du point qui l'atteint. Toutefois on voit bien que cette démarche peut conduire à une estimation hasardeuse des coefficients d'absorption étant donné que les poids a_{i_1,i_2,i_3} qui pondèrent les termes exponentiels sont d'une grande disparité (de 10^{-50} à 0.8). Les coefficients d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m}$ correspondant à des poids élevés vont être correctement optimisés alors que ceux correspondant à des poids faibles vont être totalement écrasés et n'interviendront donc pas dans le calcul d'optimisation ; toute valeur choisie pour ces coefficients de faible poids est donc solution du problème. Or ces coefficients d'absorption peuvent jouer un rôle en absorption. Tout se passe comme si on aurait alors réduit la dimension de l'espace de recherche du minimum, alors que nous imposons de trouver 6 coefficients d'absorption pour chaque indice i_1 fixé entre 1 et 6 en respectant les contraintes précisées ci-dessus. Pour éviter ce problème et trouver la valeur de paramètre idoine quelque soit le poids associé au coefficient d'absorption, on divise le problème en 2 sous problèmes que l'on résout successivement à chaque température. Ceci est rendu possible par le fait qu'il n'existe pas de relation de contrainte liant les poids et les coefficients d'absorption. Les espaces de recherche de solution sont disjoints. On va déterminer dans un premier temps les coefficients d'absorption, puis, dans un second temps, les poids associés.

Problème d'optimisation sur les absorptivités

Pour trouver les bons paramètres de coefficients d'absorption, on raisonne en absorptivité. Considérons l'équation II.15. En fixant l'indice i_1 correspondant à la classe 1, l'absorptivité partielle d'une colonne de plasma de température T, de longueur ℓ soumise à un rayonnement de corps noir à la température T_{ref} peut s'écrire :

$$\epsilon^a_{i_1}(\ell, T, T_{ref}) = \sum_{1\leq i_2, i_3 \leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T_{ref})\left[1 - e^{-\left[k^2_{i_2}(T)+k^3_{i_3}(T)\right]\ell}\right] \tag{II.23}$$

On cherche à la représenter par l'expression suivante :

$$\tilde{\epsilon}^a_{i_1}(\ell, T, T_{ref}) = \sum_{1\leq m\leq 6}\left[\sum_{1\leq i_3\leq 6} a_{i_1,m,i_3}(T_{ref})\right]\left[1 - e^{-\tilde{k}_{i_1,m}(T)\ell}\right]. \tag{II.24}$$

Il est à noter que nous avons privilégié, pour le calcul de ces absorptivités, les poids initiaux du deuxième gaz fictif. Ceci revient donc à minimiser la fonction suivante :

$$\mathcal{G}^{i_1}_a(\tilde{k}_{i_1m}(T), 1 \leq m \leq 6) = \sum_{\ell}\left[\epsilon^{i_1}_a(\ell, T) - \tilde{\epsilon}^{i_1}_a(\ell, T)\right]^2 \tag{II.25}$$

sous les contraintes associées

$$1 \leq m^{'}, m \leq 6, m \leq m^{'} \Rightarrow \tilde{k}_{i_1,m}(T) \leq \tilde{k}_{i_1,m'}(T) \tag{II.26}$$

pour toute la gamme de température de $300K$ à $25000K$. Ce problème d'ajustement des absorptivités est plus simple que le précédent problème où l'on cherchait des coefficients d'absorption et des poids dans le même ajustement. La séparation des ajustements des coefficients d'absorption et des poids permet d'une part de trouver une valeur pour tous les paramètres coefficients d'absorption $\tilde{k}_{i_1m}$ étant donné qu'à présent tous les poids sont du même ordre de grandeur, d'autre part on divise la dimension de l'espace de recherche du minimum par 2 ce qui simplifie la recherche.

Problème d'optimisation sur les émissivités

Une fois les paramètres coefficients d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m}$ estimés comme explicité précédemment, il s'agit d'estimer les paramètres poids $\tilde{a}_{i_1,m}$. On minimise pour cela la fonction :

$$\mathcal{G}^{i_1}(\tilde{a}_{i_1,m}(T), 1 \leq m \leq 6) = \sum_{\ell}\left[\epsilon^{i_1}(\ell, T) - \tilde{\epsilon}^{i_1}(\ell, T)\right]^2 \tag{II.27}$$

sous les contraintes suivantes :

$$0 \leq \tilde{a}_{i_1m}(T) \leq 1, \tag{II.28}$$

$$\sum_{1\leq m\leq 6} \tilde{a}_{i_1,m}(T) = \sum_{1\leq i_2,i_3\leq 6} a_{i_1,i_2,i_3}(T) \tag{II.29}$$

La recherche du minimum dans le cas des poids est un problème linéaire d'une fonction convexe dans un espace à également 6 dimensions.

On a ainsi réduit le problème de recherche du minimum d'une fonction non linéaire non convexe à 12 paramètres en 2 sous- problèmes indépendants plus simples à résoudre. De plus, étant donné que les classes 2 et 3 que l'on essaye de regrouper n'existent qu'à partir de $T = 2000K$ - car elles correspondent respectivement au rayonnement des atomes et des ions qui n'existent pas pour des températures faibles -, nous ne résolvons le problème d'optimisation qu'à partir de cette température ($2000K$) et jusqu'à $25000K$. Les températures sont discrétisées tous les $1000K$. Les longueurs de colonne élémentaires de plasma ℓ sont discrétisées logarithmiquement entre $L_{min} = 10^{-3}$ cm et $L_{max} = 4000$cm. Cette dernière longueur peut sembler aberrante compte tenu de la taille d'un plasma d'arc électrique de disjoncteur BT - de l'ordre de 3 cm environ - mais en réalité il est nécessaire de la choisir ainsi pour bien trouver par optimisation les petits coefficients d'absorption. En effet, si $\tilde{k}_{i_1,m}\ell \ll 1$ alors le terme $\tilde{a}_{i_1,m}(T)\big[1 - \exp(-\tilde{k}_{i_1,m}(T)\ell)\big]$ dans l'émissivité partielle de la classe fictive $2'$ sera négligeable et nous ne pourrons trouver ni le poids $\tilde{a}_{i_1,m}$ ni le coefficient d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m}$ correspondant. Il est donc nécessaire d'avoir $\tilde{k}_{i_1,m}\ell \simeq 1$ pour toutes les échelles de coefficients d'absorption, y compris pour les plus petites.

II.3.2 Algorithme utilisé pour la recherche de minimum

Pour une échelle fixée i_1 de la classe fictive 1, l'ajustement des paramètres $\tilde{k}_{i1,m}(T), m = 1, ..., 6$ par minimisation de $\mathcal{G}_a^{i_1}(\tilde{k}_{i_1,m}(T), 1 \leq m \leq 6)$ et des paramètres $\tilde{a}_{i1,m}(T), m = 1, ..., 6$ par minimisation de $\mathcal{G}^{i_1}(\tilde{a}_{i_1,m}(T), 1 \leq m \leq 6)$ se fait température par température. Les ajustements sont donc indépendants entre eux. Or pour un indice m fixé, il est nécessaire de garantir la continuité du coefficient d'absorption et du poids en fonction de la température et ceci pour 2 raisons essentielles à la qualité du modèle et à son sens physique :

- Nous devons interpoler ces coefficients en température sur le maillage
- Nous devons garantir une corrélation des coefficients d'absorption car le milieu est anisotherme

Les techniques de recherche stochastique de type algorithme génétique ne sont pas utilisables ici. En effet ces techniques garantissent pratiquement (si on est suffisamment patient car les temps CPU peuvent être très longs) d'atteindre le minimum global de la fonction sur le domaine de recherche. Or nous voulons un ajustement de paramètres sans nécessairement trouver le minimum global sur le domaine de recherche et ceci pour garantir une continuité en température des paramètres cherchés. Le choix systématique du minimum global pour les paramètres à ajuster peut avoir pour corollaire la non continuité en température car les ajustements sont indépendants de la température. D'autre part, nous excluons ici les algorithmes de type simplex qu'il est difficile d'utiliser sous contraintes. Les techniques de recherche séquentielles déterministes sont toute basées sur des algorithmes de calcul du gradient et de la matrice hessienne - qui doit rester définie positive - de la fonction à minimiser. Nous utilisons donc cette famille de recherche car elles ont l'avantage de partir d'une estimation de la solution, ce qui va nous permettre de garantir une continuité en température des paramètres cherchés. L'algorithme retenu, après plusieurs essais, est l'algorithme SQP - Sequential Quadratic Programming. Cet algorithme est implémenté sous forme de fonction dans " l' optimisation toolbox " de MATLAB 7.2.

Pour assurer la continuité en température des paramètres $\tilde{k}_{i_1m}(T)$ et $\tilde{a}_{i_1m}(T)$, nous commençons par résoudre le problème d'optimisation à la température de référence de la classe 2,

$T_{ref} = 13000K$. Les coefficients d'absorption à ajuster sont initialisés par ceux du deuxième gaz fictif du modèle à 216 échelles :

$$\tilde{k}_{i_1,m}(T_{ref}) = \tilde{k}^2_{i_2=m}(T_{ref}). \tag{II.30}$$

Les poids sont initialisés par la somme sur les différentes échelles du troisième gaz fictif des poids du modèle à 216 échelles :

$$\tilde{a}_{i_1,m}(T_{ref}) = \sum_{1 \leq i_3 \leq 6} a_{i_1,i_2=m,i_3}(T_{ref}). \tag{II.31}$$

Après l'ajustement de l'ensemble des paramètres à cette température de référence, nous effectuons une descente en température jusqu'à $2000K$ où nous initialisons les paramètres recherchés à la température T_{n+1} par la solution obtenue à l'étape précédente à la température T_n. De même nous faisons une montée en température de $13000K$ à $25000K$. Cette procédure nous permet ainsi d'assurer, de façon pragmatique, une dépendance continue des coefficients d'absorption et des poids en la température, et également de conserver un sens physique aux différentes échelles de la classe $2'$ (qui sont censées representer un ensemble d'intervalles spectraux peu dépendants de la température) et à leur utilisation en transfert radiatif en milieu anisotherme.

Nous avons ainsi déterminé une nouvelle classe de gaz fictif, incluant les atomes et les ions, c'est à dire que l'on a regroupé les classes 2 et 3 au sein d'une même classe. Nous avons pour cela déterminé pour chaque valeur de l'indice i_1 compris entre 1 et 6, caractérisant le coefficient d'absorption de la classe fictive 1, 6 coefficients d'absorption et 6 poids de la classe fictive $2'$. Ainsi nous obtenons pour décrire les propriétés spectrales du plasma d'air $6 \times 6 = 36$ échelles d'absorption, ce qui revient à résoudre, pour le calcul du transfert radiatif, 36 équations de transfert avec des coefficients d'absorption égaux à $k^1_{i_1} + \tilde{k}_{i_1,m}$ et des poids égaux à $\tilde{a}_{i_1,m}$. Voyons à présent quelques éléments quantitatifs d'analyse de la qualité du modèle.

II.4 Analyse quantitative et statistique du modèle

II.4.1 Evolution des coefficients d'absorption et des poids en fonction de la température

Nous montrons sur la figure II.1 l'évolution des coefficients d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m}(T)$ en fonction de la température entre $2000K$ et $25000K$ pour chaque valeur de l'indice i_1 successivement entre 1 et 6. Chaque graphique correspond à une valeur donnée de i_1 et les différentes courbes qui y sont représentées correspondent aux 6 valeurs de m avec $\tilde{k}_{i_1,m}(T)$ croissant avec m.

La qualité des ajustements est mesurée par la continuité de l'évolution des coefficients d'absorption avec la température. Ce critère est fondamental car dans le cas d'un calcul de transfert, il est nécessaire de faire des interpolations en température de ces coefficients. La difficulté de construire un nouveau modèle en regroupant des classes réside dans la conservation de ces corrélations. Nous voyons que quelque soit la valeur de l'indice i_1, la continuité est satisfaisante pour les 6 coefficients. Ceci est assuré par les algorithmes de descente et de montée en température commençant à $T_{ref} = 13000K$, pour lesquels le point initial du calcul d'optimisation à une température donnée est le résultat du calcul à la température précédente. On conserve ainsi une "mémoire" des coefficients d'absorption d'une température à l'autre. On voit que la continuité du plus petit coefficient d'absorption $\tilde{k}_{i_1,m=1}(T)$ est plus difficile à obtenir aux basses températures quelque soit la valeur de l'indice i_1 car ces coefficients sont caractéristiques des échanges à grande distance. Nous avons choisi une longueur maximale de colonne pour nos calculs de $L_{max} = 4000$ cm, pour un $\tilde{k}_{i_1,m=1}(T)$ de l'ordre de $10^{-8}cm^{-1}$, c'est à dire que $\tilde{k}_{i_1,m=1}(T) \times L_{max} \ll 1$. Le terme correspondant dans la somme d'exponentielles à ajuster est donc complètement écrasé lors du calcul d'optimisation. Ce qui en d'autres termes veut dire que toute valeur respectant les contraintes du calcul d'optimisation est solution. Mais dans ce cas nous ne pouvons imposer un critère de continuité en température car le calcul est fait indépendamment à chaque température. Nous limitons toutefois cet effet à de très faibles valeurs de $\tilde{k}_{i_1,m}(T)$ par le choix d'un L_{max} suffisamment grand. Nous avons également testé d'autres valeurs de L_{max} mais nous avons rencontré des problèmes de divergence due probablement à un manque de robustesse des algorithmes utilisés.

Voyons à présent l'évolution des poids en fonction de la température. La figure II.2 montre l'évolution des poids $\tilde{a}_{i_1,m}$ en fonction de la température, chacun des graphes correspondant à une valeur fixée de i_1. Nous voyons que pour un indice i_1 petit, le poids correspondant à la plus faible valeur du coefficient d'absorption écrase tous les autres. Toutefois la situation se rééquilibre à partir de $i_1 = 4$ où les poids tendent à avoir le même ordre de grandeur. Là aussi le critère de continuité en température sur les poids est crucial pour les interpolations lors des calculs de transfert. Hormis une discontinuité sur 2 poids entre $2000K$ et $3000K$ pour $i_1 = 1$, nous pouvons considérer que l'évolution des poids est continue. Les deux relations de contraintes sur les poids sont également satisfaites. Nous ne représentons pas ici de courbes sur la qualité de ces contraintes. Nous pouvons toutefois voir que tous les poids sont compris entre 0 et 1. Quelques poids sont nuls.

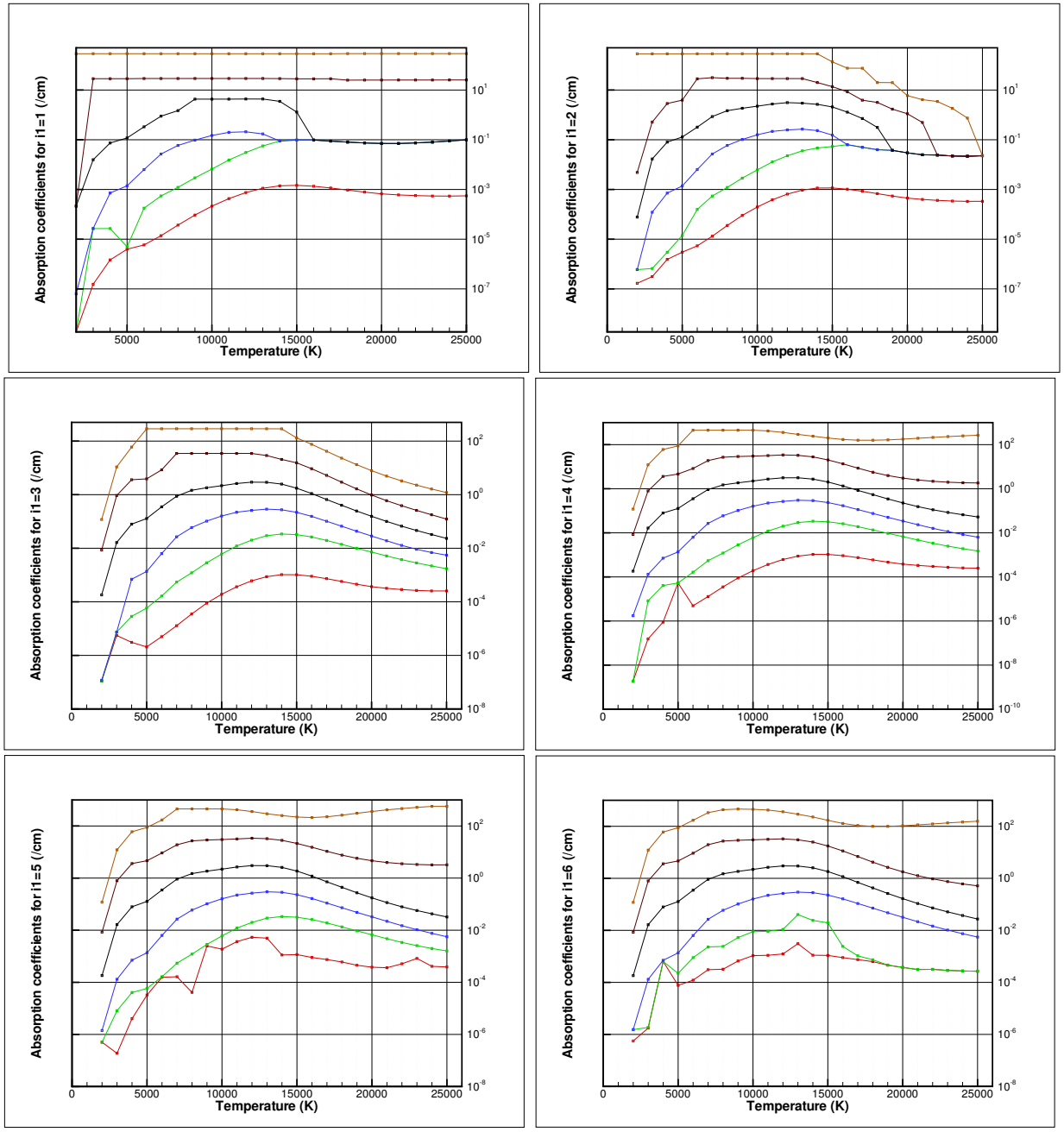

FIGURE II.1 – *Evolution des 6 coefficients d'absorption* $\tilde{k}_{i_1,m}$ *pour* $m = 1, \ldots, 6$ *de la classe ficitive* $2'$ *en fonction de la température. Les graphes de gauche à droite, puis de haut en bas, correspondent respectivement aux différentes échelles* $i_1 = 1, \ldots, 6$ *de la classe fictive 1*

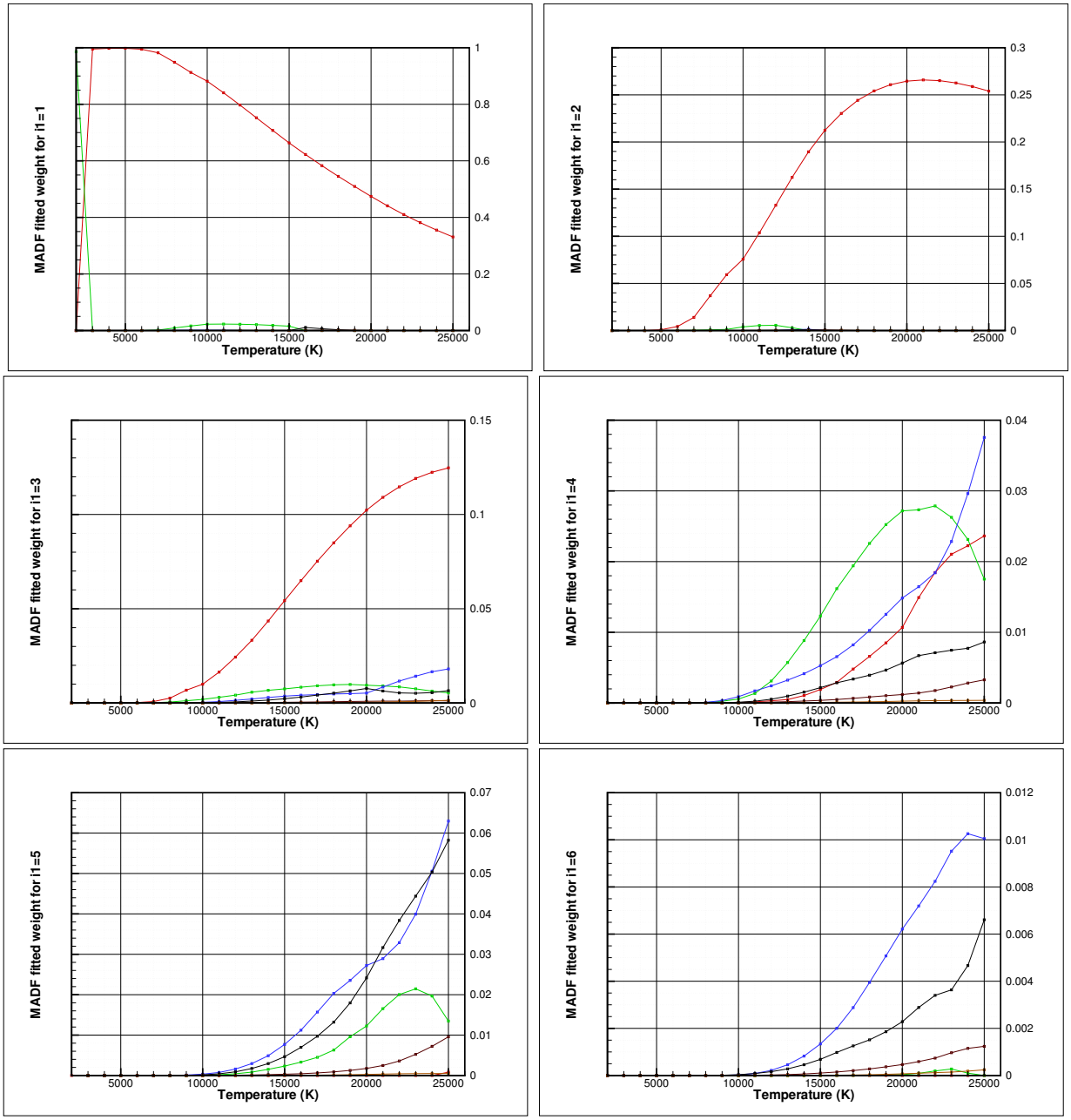

FIGURE II.2 – *Evolution des* 6 *poids* $\tilde{a}_{i_1,m}$ *pour* $m = 1, \ldots, 6$ *en fonction de la température. Les couleurs associées à chaque valeur de* m *sont identiques à celles de la Fig. II.1. Les graphes de gauche à droite, puis de haut en bas, correspondent respectivement aux différentes valeurs de* $i_1 = 1, \ldots, 6$.

II.4.2 Erreur relative sur l'émissivité donnée par le modèle MADF 36

Nous avons tracé sur la figure II.3 l'erreur relative, notée η obtenue sur l'émissivité totale du plasma en fonction de la température, calculée en utilisant MADF 36. La référence est l'émissivité totale du modèle MADF 216 donnée par l'équation II.14. Dans le cadre du modèle MADF 36, nous pouvons écrire l'émissivité totale comme :

$$\tilde{\epsilon}(\ell, T) = \sum_{1 \leq i_1, m \leq 6} \tilde{a}_{i_1,m}(T) \left[1 - e^{-\left[k^1_{i_1}(T) + \tilde{k}_{i_1,m}(T)\right]\ell} \right]. \tag{II.32}$$

Ainsi l'erreur relative peut s'écrire comme :

$$\eta(T) = \frac{1}{N_l} \sum_{\ell} \frac{\epsilon(\ell, T) - \tilde{\epsilon}(\ell, T)}{\epsilon(\ell, T)} \tag{II.33}$$

où N_l représente le nombre de longueurs de colonnes choisies pour l'ajustement. Nous avons représenté l'erreur relative moyenne sur une gamme de longueurs allant de (a) 10^{-3} cm à 4000 cm et de (b) 10^{-1} cm à 10 cm qui correspond à une gamme de longueurs plus réaliste pour les plasmas d'arc dans les chambres de coupure de disjoncteurs basse tension. On voit que l'erreur est inférieur à 5 % jusqu'à une température de $18000K$ pour (a) et (b) avec toutefois pour une température de $19000K$ un pic à 7% pour (a). Ce pic est caractéristique des limitations du modèle. En effet, la température de référence de la classe 3 est prise égale à $18000K$ et en faisant disparaître cette classe on a construit un modèle approximatif qui se comporte de manière volatile autour de cette température.

Voyons à présent l'écart type relatif sur l'émissivité totale que l'on obtient avec ce modèle.

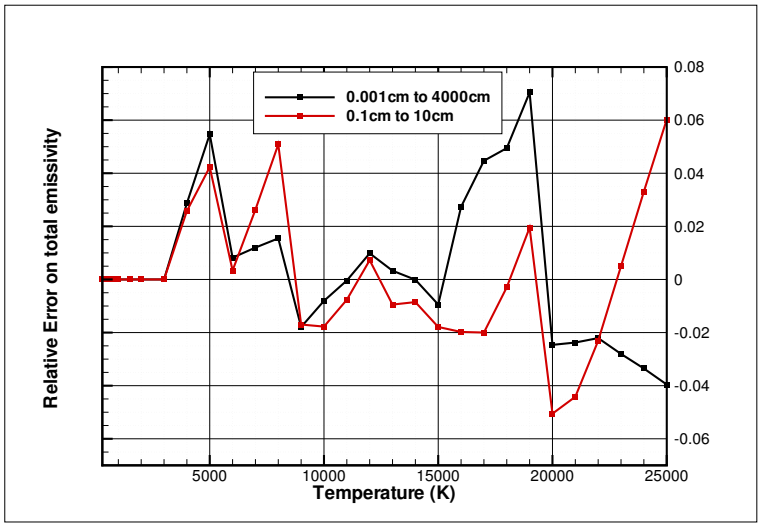

Figure II.3 – *Erreur relative sur les émissivités*

Il est donné par :

$$\sigma(T) = \sqrt{\frac{1}{N_l}\sum_{\ell}\left[\frac{\epsilon(\ell,T)-\tilde{\epsilon}(\ell,T)}{\epsilon(\ell,T)}\right]^2} \tag{II.34}$$

La figure II.4 présente l'écart-type sur les émissivités moyenné sur une gamme de longueur allant de (a) 10^{-3} cm à 4000 cm et de (b) 10^{-1} cm à 10 cm. On voit que l'écart type est faible de l'ordre de 5 % en dessous de $18000K$ pour (a) et (b). A une température de $19000K$ il augmente brusquement pour atteindre 15 % pour (a) et 9% pour (b). Ces résultats montrent là encore le faible niveau de précision atteint par le modèle autour de la température de référence de la classe fictive 3 que l'on a supprimée. Le modèle MADF 36 est peu fiable au-delà de cette température. Notons que l'écart type atteint 15% à $25000K$ pour le cas (b).

Nous avons représenté sur les figures II.5 à II.10 les émissivités totales calculées respectivement par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour différentes températures en fonction de la longueur de colonnee de plasma. Nous observons globalement un bon accord entre les deux modèles sur toute la gamme de température avec un très bon accord pour des températures inférieures à $15000K$. De petites différences apparaissent à partir de $15000K$, ce qui est cohérent avec les observations faites en ce qui concerne l'analyse statistique des erreurs discutée précédemment.

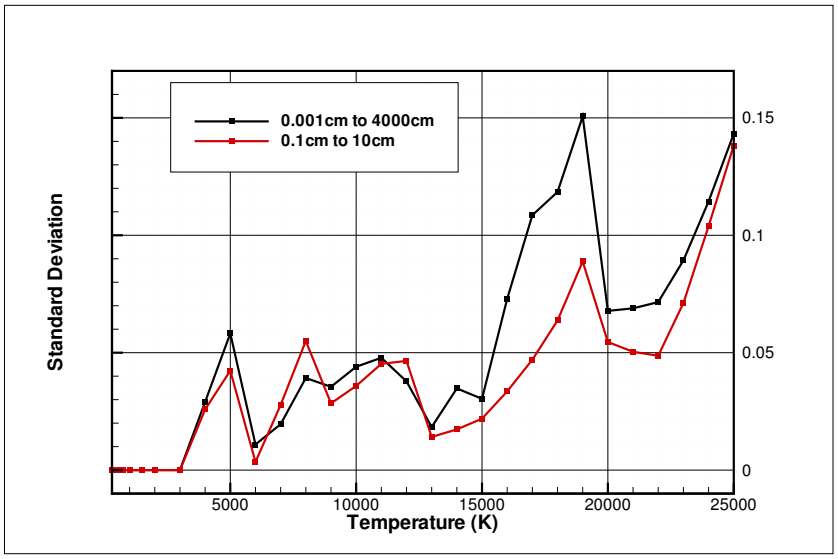

Figure II.4 – *Ecart-type sur les émissivités*

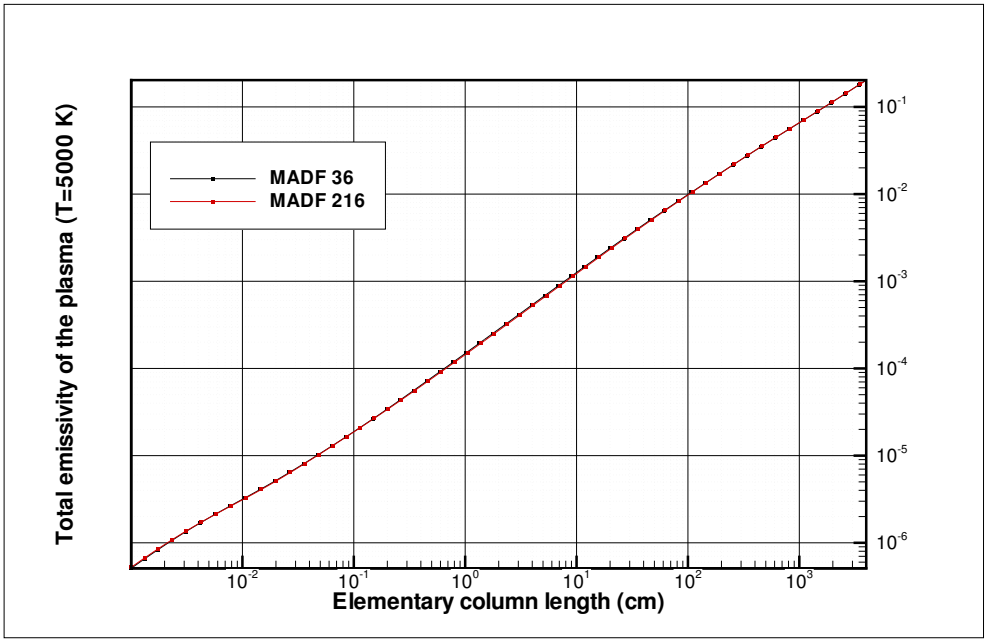

Figure II.5 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 5000K*

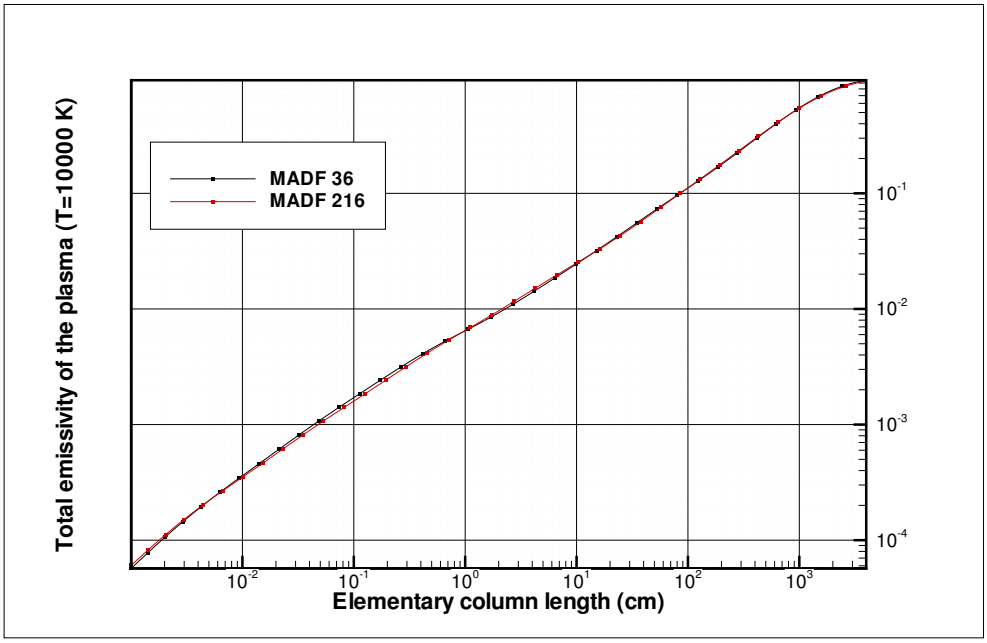

Figure II.6 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 10000K*

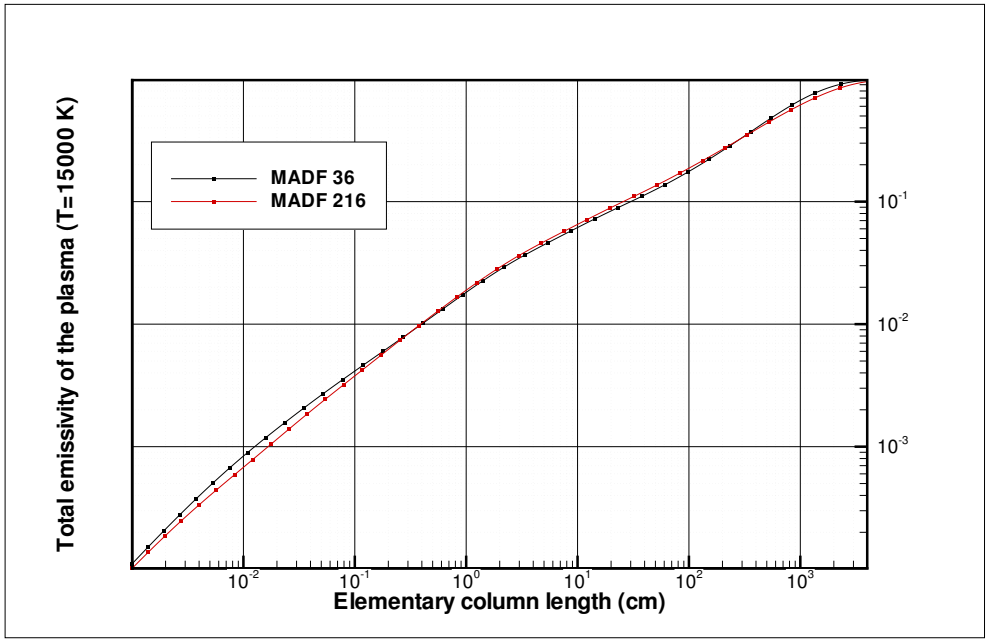

Figure II.7 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 15000K*

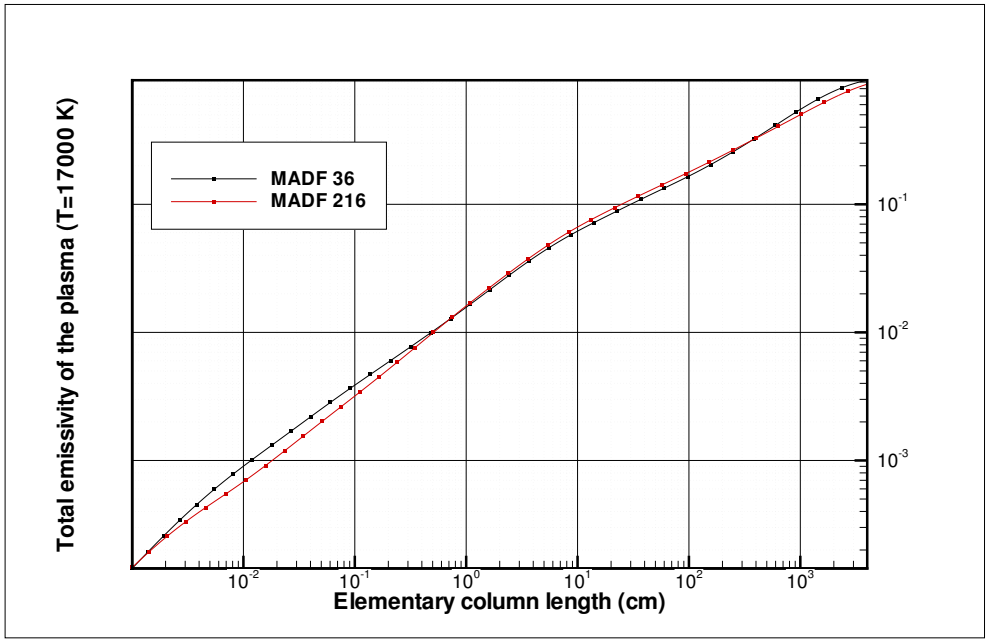

Figure II.8 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 17000K*

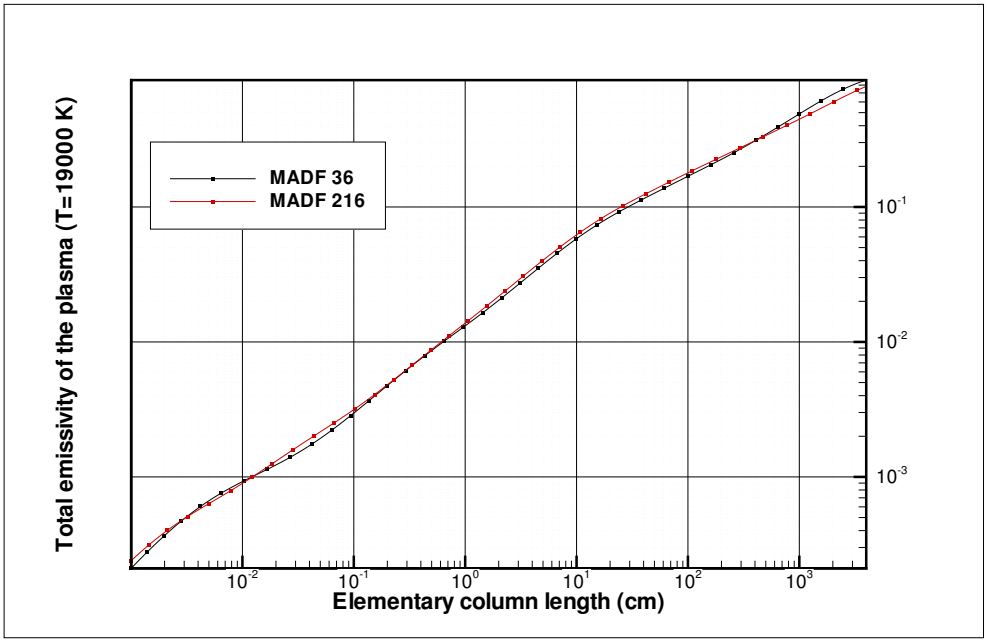

FIGURE II.9 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 19000K*

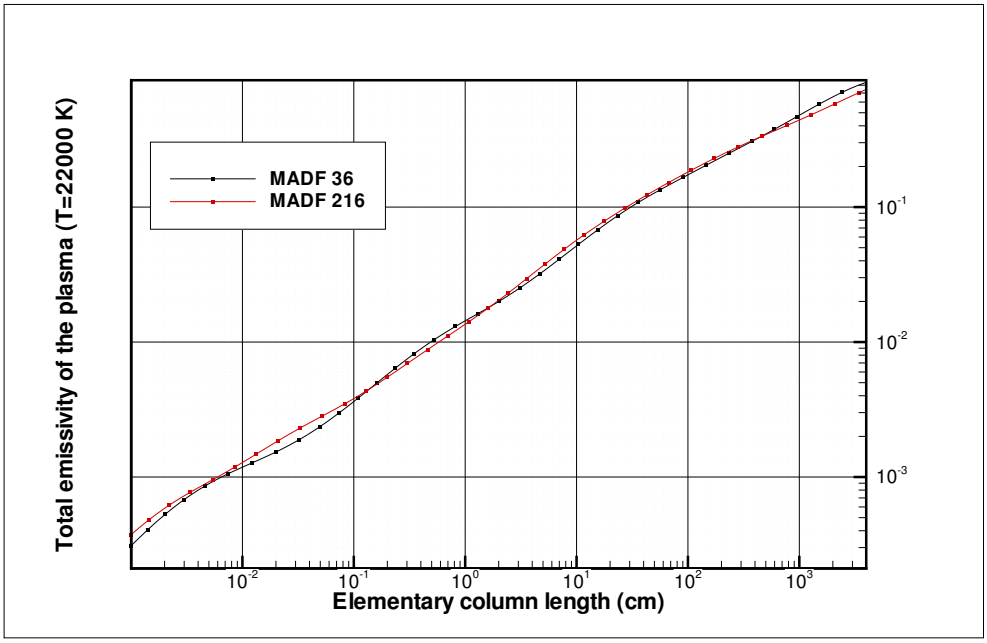

FIGURE II.10 – *Emissivités calculées par les modèles MADF 36 et MADF 216 pour une température de plasma de 22000K*

II.5 Calcul de transfert radiatif - comparaison MADF 36/ MADF 216

Afin de tester et valider le modèle MADF 36 dans un cas de calcul de transfert radiatif, nous avons considéré une géométrie bidimensionnelle de cavité carrée de côté 2 cm $\times$ 2 cm dans laquelle se trouve un palsma d'air dont les propriétés spectrales sont décrites avec les modèles MADF 216 et MADF 36. À l'intérieur de la géométrie, nous avons considéré un profil analytique de température représentatif d'un cas de plasma d'arc. Ce profil est décrit par l'équation :

$$T(x,y) = 2000 + 13000 \exp\left(-\alpha(x-x_0)^2 - \beta(y-y_0)^2\right). \tag{II.35}$$

La cavité correspond à $(x,y) \in [0, 2cm] \times [0, 2cm]$ avec $x_0 = y_0 = 1cm$. Cette cavité carrée est maillée à l'aide d'un maillage cartésien composé de 100 noeuds dans chaque direction. Nous utilisons une méthode de lancé de rayons pour calculer le flux radiatif aux parois de la cavité et la puissance radiative au sein du milieu. A partir de chaque noeud du maillage volumique on tire 80 rayons et à partir de chaque noeud du maillage surfacique, on tire 40 rayons. La discrétisation et le détail des équations seront donnés au chapitre 3 lors de l'étude de la validité de la méthode P_1 pour des plasmas d'air. Toutefois nous présentons ici des résultats de comparaisons entre les 2 modèles testés en transfert avec ce code de tracé de rayons pour un profil gaussien circulaire et peu confiné de plasma d'air dans la cavité : $\alpha = \beta = 2cm^{-2}$. Les parois sont supposées noires et à 2000 K dans ces calculs.

La figure II.11 représente le flux aux parois en fonction de l'abscisse le long de la paroi. Nous obtenons ici un bon accord entre les modèles MADF 36 et MADF 216 sur toute la face. Nous observons moins de 5 % d'erreur sur le flux aux centres de la face et une erreur de l'ordre de 10 % dans les coins.

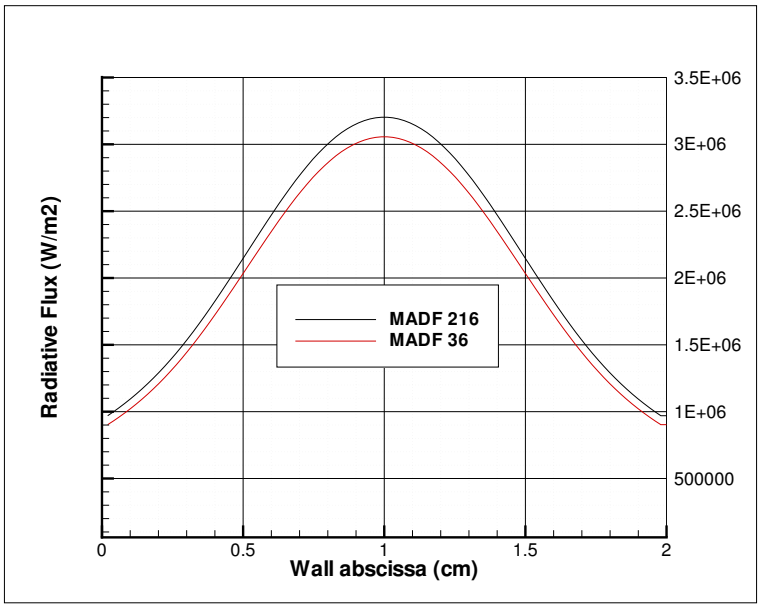

Figure II.11 – *Comparaison MADF 36/ MADF 216 sur les flux*

Nous montrons sur la figure II.12 le résultat de calcul de puissance radiative. La comparaison entre MADF 36 et MADF 216 montre un très bon accord en général et une erreur de moins

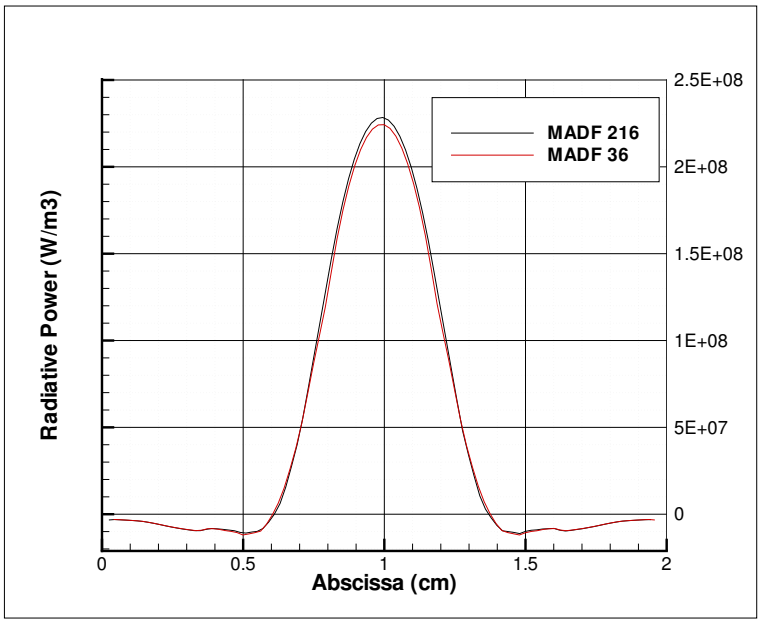

Figure II.12 – *Comparaison MADF 36/ MADF 216 sur la puissance radiative*

de 2 % dans les zones chaudes émissives du plasma.
La figure II.13 montre une coupe de puissance radiative en $y = 1,5cm$ où on observe des puissances négatives correspondant à des zones absorbantes. On voit sur cette coupe que les deux modèles donnent des résultats très proches le long d'une coupe non centrale. Les ondulations observées sur ces courbes sont le reflet de la diversité d'épaisseurs optiques de notre milieu. La description des propriétés optiques par le modèle MADF 36 est capable de prendre en compte cette diversité de coefficients d'absorption. Le niveau d'erreur atteint dans ces zones absorbantes est de l'ordre de 8 %.

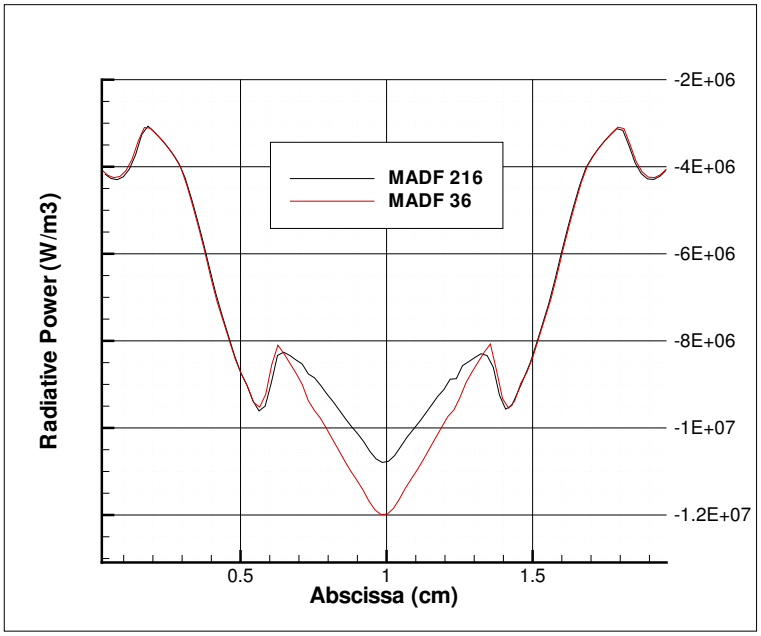

Figure II.13 – *Comparaison MADF 36/ MADF 216 sur la puissance radiative en* $y = 1,5$ *cm*

II.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le principe du modèle global MADF qui permet de décrire les propriétés radiatives d'un plasma d'air à l'équilibre thermodynamique et chimique local. Le modèle initial discrétise les valeurs du coefficient d'absorption en 216 classes, ce qui demeure assez lourd d'un point de vue numérique en vue d'une utilisation avec une méthode déterministe de transferts radiatifs (DOM, lancé de rayon, P1, ...) couplée aux calculs de l'écoulement du plasma. Les $6^3 = 216$ classes correspondent à une séparation des spectres en trois spectres de gaz fictifs, chacun modélisé par 6 classes de coefficient d'absorption. Nous avons optimisé ce modèle initial en regroupant les deux derniers gaz fictifs correspondant respectivement aux spectres des raies des atomes et des ions, avec des contributions des continua. Le modèle, ainsi construit par ajustement des absorptivités partielles et des émissivités de colonnes homogènes et isothermes, permet de réduire le nombre de classes de coefficients d'absoption à $6^2 = 36$.

Concernant la précision de ce modèle optimisé, nous avons obtenu un très bon accord avec les émissivités de colonnes uniformes calculées à l'aide du modèle initial. Les écarts relatifs restent limités à environ 5% pour une température inférieure à 15000 K et culminent à environ 10 % pour une température inférieure à 24000 K. La perte de précision à haute température s'explique clairement par le rôle joué par l'espèce fictive 3 du modèle initial au delà de 16000 K.

La précision du modèle MADF 36 a également été étudiée pour simuler le transfert radiatif dans un plasma bidimensionnel à profil de température imposé entre 2000 K et 15000 K. L'équation de transfert radiatif a été résolue par une méthode de lancé de rayons. Un bon accord avec les résultats du modèle MADF 216 a été obtenu aussi bien pour les flux pariétaux que pour les puissances radiatives volumiques.

Le modèle MADF initial, ainsi que celui optimisé ici, sont dédiés à des plasmas d'air à pression atmosphérique à l'équilibre chimique. Toutefois, les variations de pression au sein d'une chambre de coupure peuvent être prises en compte pragmatiquement en supposant une dépendance linéaire des coefficients d'absorption avec la pression. Cette hypothèse est raisonnable tant que les variations de pression ne modifient pas de façon significative les fractions molaires des espèces. Le principal inconvénient du modèle global MADF demeure son incapacité à traiter des milieux de composition variable dans le temps, du fait par exemple de l'inclusion de vapeurs métalliques ou plastiques au cours de la coupure. Une paramétrisation pour différentes compositions chimiques est possible mais le nombre de classes de coefficients d'absorption deviendrait alors très important. Une solution alternative consisterait à utiliser un modèle statistique à bandes étroites mais qui ne serait alors applicable qu'avec des méthodes de résolution de l'ETR de type lancé de rayons déterministes ou stochastiques.

Chapitre III

Méthode P1 et calculs couplés en géométrie bidimensionnelle

Table des matières

III.1 Introduction **64**
III.2 Étude de la validité de la méthode P_1 . . . . . **65**
III.2.1 Equation P_1 dans le cadre du modèle MADF 65
III.2.2 Méthode de lancé de rayons dans le cadre du modèle MADF . . . 66
III.2.3 Résultats de comparaison et discussion 67
Comparaison des flux 67
Comparaison des puissances radiatives 70
Comparaison des temps de calculs et discussion 72
III.3 Simulation bidimensionnelle de la propagation d'un arc **75**
III.3.1 Electrostatique et magnétostatique en milieu électriquement neutre 76
III.3.2 Le code de simulation hydrodynamique NS2 77
III.3.3 Formulation par éléments finis de l'équation P_1 78
III.3.4 Calculs couplés et comparaison avec l'émission nette 79
conditions des calculs 79
Phase d'amorce : l'arc électrique se crée dans la chambre 84
Propagation de l'onde de pression dans la chambre et réflexion sur la paroi 84
Retour de l'onde de pression dans la chambre de coupure et impact sur l'arc 85
L'effet conjugué des ondes de pression cisaille l'arc électrique en 2 parties 85
L'arc est évacué en fond de chambre 85
Caractéristiques globales de l'arc 91
Temps de calcul observés 91
III.3.5 Conclusion 92
III.4 Conclusion **94**

III.1 Introduction

La méthode P_N consiste à discrétiser la luminance sur une base d'harmoniques sphériques pour traiter la dépendance angulaire de la luminance. Une méthode équivalente consiste à calculer les moments directonnels successifs de l'équation de transfert radiatif dans le but de se ramener à une équation aux dérivées partielles (ou un système d'équations aux dérivées partielles couplées si $N \geq 3$). Nous obtenons ainsi une suite d'équations non fermées dans la mesure où l'équation du moment à l'ordre N fait intervenir le moment d'ordre $N+1$. Il est alors nécessaire de fermer le système ainsi formé. La fermeture se fait naturellement en tronquant la décomposition de la luminance sur la base des harmoniques sphériques à un certain ordre. Si la troncature est faite à l'ordre 1, nous obtenons une équation aux dérivées partielles elliptique en le moment d'ordre 0 à résoudre avec une condition aux limites mixte. C'est la méthode P_1.

De nombreuses études ont été proposées concernant cette méthode comme rappelé au premier chapitre. Elle est largement utilisée dans les codes de simulation de mécanique des fluides commerciaux ou de recherche lorsque le transfert radiatif au sein du milieu est un mode de transfert d'énergie non négligeable devant les autres modes de transfert d'énergie. Étant donné son faible coût en temps CPU et sa facilité de mise en oeuvre, il nous paraît pertinent d'envisager son utilisation comme solveur radiatif dans des codes industriels.

Cependant, il est difficile de trouver des résultats précis concernant la validité de cette méthode dans le cas de plasmas d'arc électrique utilisant des propriétés radiatives réalistes. On peut citer l'étude de la Ref. (Lowke et Capriotti 1969) où la validité de la méthode P_1 a été testée dans le cas d'un plasma d'arc dans de l'air à haute pression mais ne considérant que le rayonnement continu. Nous nous proposons donc ici d'étudier la validité de cette méthode dans le cas d'un plasma thermique d'air entre $300K$ et $25000K$ et à une pression constante de 1 bar. Les propriétés spectrales du plasma d'air sont données par le modèle MADF 216 précédemment décrit. Cette méthode approchée est comparée à une méthode exacte de lancé de rayons sur une même géométrie bidimensionnelle.

Nous avons implémenté par éléments finis cette méthode dans le code de simulation de mécanique des fluides NS2 de Schneider pour des géométries bidimensionnelles. Nous montrons des résultats de calculs couplés sur des champs de température et de puissance radiative, sans toutefois considérer des géométries avec ailettes. Nous montrons à ce titre des différences significatives sur la dynamique d'extinction de l'arc lorsqu'on calcule la puissance radiative à l'aide d'un coefficient d'émission nette ou par la méthode P_1 associée au modèle MADF.

III.2 Étude de la validité de la méthode P_1

On considère ici une géométrie bidimensionnelle rectangulaire contenant un plasma d'air stationnaire à l'équilibre thermodynamique local et à l'équilibre chimique local. On compare les résultats de calculs de puissance radiative et de flux radiatif donnés par la méthode P_1 à ceux d'une méthode exacte de lancé de rayons dans la même géométrie. Dans les deux cas, on adopte le modèle MADF à 216 échelles du coefficient d'absorption pour une intégration spectrale efficace et peu gourmande en temps CPU. Le profil de température est fixé analytiquement et est donné (en Kelvin) par :

$$T(x,y) = 2000 + 13000 \exp\left(-\alpha(x-x_0)^2 - \beta(y-y_0)^2\right), \tag{III.1}$$

où x_0 et y_0 désignent les coordonnées du point le plus chaud et α et β sont des paramètres caractérisant le confinement du plasma dans la boîte. Les parois sont supposées noires à une température T_w de $2000K$. Ce cas test est représentatif des chambres de coupure des disjoncteurs basse tension.

III.2.1 Equation P_1 dans le cadre du modèle MADF

L'équation elliptique donnant le moment d'ordre zéro de la luminance au sein du milieu, associée à la méthode P_1, doit être résolue pour chacune des 216 échelles du modèle MADF. Dans ce cadre nous pouvons donc l'écrire pour chaque échelle j :

$$\vec{\nabla} \cdot \left(-\frac{1}{3k_j(T)}\vec{\nabla}G_j\right) + k_j(T)G_j = k_j(T)G_j^0(T). \tag{III.2}$$

où le terme source G_j^0 de l'équation III.2 représente le moment d'ordre 0 de la luminance pour la contribution de la j^{ime} échelle, et est donné par

$$G_j^0(T) = 4a_j(T)\sigma T^4. \tag{III.3}$$

Cette équation est associée à une condition aux limites mixte de type Robin dite condition de Marshak (cf Eq. I.62) qui s'écrit dans le cadre du modèle MADF :

$$\frac{\epsilon_w}{2-\epsilon_w}G_j - \frac{2}{3k_j(T)}\vec{n}\cdot\vec{\nabla}G_j = \frac{\epsilon_w}{2-\epsilon_w}G_j^0(T_w), \tag{III.4}$$

Le vecteur $\vec{n}$ représente la normale sortante de la paroi. Chaque flux partiel associé à une espèce fictive j et noté $\vec{q_j}$ est alors donné en fonction de G_j par :

$$\vec{q_j} = -\frac{1}{3k_j}\vec{\nabla}G_j \tag{III.5}$$

La puissance partielle est elle donnée par :

$$P_j = -\vec{\nabla}\cdot\vec{q_j} = -k_j(T)\left(G_j^0(T) - G_j\right). \tag{III.6}$$

Pour retrouver la puissance radiative au sein du milieu et le flux radiatif aux parois, on somme alors toutes les puissances partielles et tous les flux partiels :

$$P = \sum_j P_j \tag{III.7}$$

$$\vec{q} = \sum_j \vec{q_j} \tag{III.8}$$

L'équation elliptique III.2 associée a sa condition aux limites III.4 est résolue par une méthode de différences finies centrée d'ordre 2 y compris pour la condition aux limites sur une grille bidimensionnelle régulière. Ceci mène à un système d'équations linéaires qui, écrit sous forme matricielle, peut être inversé par une méthode de gradient bi-conjugué stabilisé. Toutefois, les propriétés d'opacité du milieu sont décrites par des coefficients d'absorption qui diffèrent de plusieurs ordres de grandeurs entre eux - jusque 8 ordres de grandeurs de différences - . Ceci mène à un coefficient de conditionnement de matrice très élevé. Pour traiter ce problème, nous utilisons un pré-conditionnement de Jacobi de la matrice avant de l'inverser par itérations successives. Le nombre de points de discrétisation nécessaire dans chacune des deux directions est de l'ordre de 100 à 1000 (dépendant de l'épaisseur optique du milieu) pour une précision de l'ordre de 0.1%.

III.2.2 Méthode de lancé de rayons dans le cadre du modèle MADF

Dans cette méthode, le flux radiatif total est encore donné comme la somme des flux partiels. Pour chaque espèce fictive, des rayons partant de chaque élément de paroi et de volume sont tracés de manière déterministe. L'intégration dans la troisième direction (selon l'angle φ de la figure III.1) est faite de façon analytique. On calcule en premier lieu les luminances du rayonnement partant des parois par :

$$L_j^l = \epsilon_w \, L_j^0(T_w) + \frac{1-\epsilon_w}{\pi} \, q_{j,w}^i, \tag{III.9}$$

où L_j^0 est le terme source donné par :

$$L_j^0(T) = a_j(T)\frac{\sigma T^4}{\pi}, \tag{III.10}$$

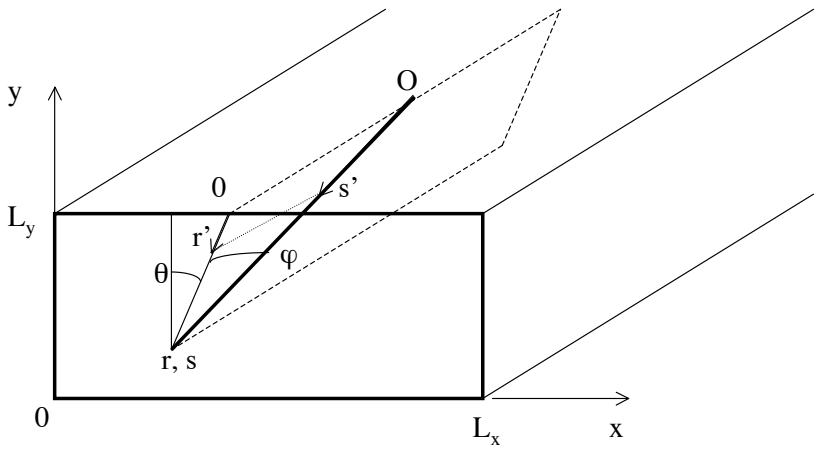

Figure III.1 – *Géométrie pour la méthode de lancé de rayons*

et le flux incident $q^i_{j,w}$, au point R, résulte de l'intégration directionnelle de la luminance incidente :

$$q^i_{j,w} = \pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[L^l_j(0)\, S_1 \left(\int_0^R k_j(r)\, dr \right) + \int_0^R L^0_j(T(r))\, \frac{\partial}{\partial r} S_1 \left(\int_r^R k_j(r')\, dr' \right) dr \right] \cos\theta\, d\theta \ , \tag{III.11}$$

où r désigne ici la projection dans le plan (x,y) des coordonnées du point courant comme indiqué sur la Fig. III.1. Une méthode itérative nous donne alors à la fois les flux incident et partant. Après cette première étape, on peut en déduire la puissance radiative au sein de chaque cellule du maillage par :

$$\begin{aligned} P_j(r) = -4\pi\, k_j(r) L^0_j(T(r)) + \pi k_j(r) \int_0^{2\pi} \Bigg[& L^l_j(0)\, S_2 \left(\int_0^r k_j(r')\, dr' \right) \\ & + \int_0^r L^0_j(T(r'))\, \frac{\partial}{\partial r'} S_2 \left(\int_{r'}^r k_j(r'')\, dr'' \right) dr' \Bigg] d\theta, \end{aligned} \tag{III.12}$$

Les fonctions spéciales S_i qui apparaissent dans les équations III.12 et III.11 donnant les flux radiatifs et les puissances radiatives sont données par :

$$S_i(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\mu^{3-i}}{\sqrt{1-\mu^2}} \exp\left(\frac{-x}{\mu} \right) d\mu. \tag{III.13}$$

Ces fonctions sont calculées par un développement en série de Taylor à l'ordre 1 si x$<10^{-4}$, un développement asymptotique pour x$>$15 (Yuen et Wong 1983) et une intégration directe entre ces 2 valeurs avec une interpolation par splines. Cette méthode de lancé de rayons a été implémentée sur une géométrie bidimensionnelle rectangulaire avec une grille régulière de typiquement 100 noeuds dans chaque direction. On tire typiquement 50 rayons de chaque noeud de paroi pour calculer les flux radiatifs et 100 rayons de chaque noeud de volume pour déterminer les puissances radiatives. Chaque rayon est ensuite discrétisé en environ 60 colonnes élémentaires homogènes. On associe ensuite une température interpolée bilinéairement à chaque colonne élémentaire, ainsi que des propriétés spectrales interpolées dans le cadre du modèle MADF 216. Ces choix de discrétisation (typiquement 10000 cellules avec 100 rayons par cellule) correspondent à un compromis entre temps CPU nécessaire aux calculs géométriques (environ 1h. sur un processeur INTEL cadencé à 1.8 Ghz) et espace mémoire disponible et nécessaire (environ 500 Moctets).

III.2.3 Résultats de comparaison et discussion

Bien que de nombreuses configurations aient été testées, nous nous limitons ici à une configuration de paroi noire dans un souci de clarté et parce qu'en général les réflectivités spectrales des parois ne sont pas bien connues.

Comparaison des flux

Nous considérons dans un premier temps un plasma dans la cavité carrée. Le profil de température y est décrit par l'équation III.1. Nous considérons des profils centrés, plus

Valeurs de α et β (cm^{-2})	Méthode P_1 (W/m)	Méthode LR (W/m)
$\alpha = \beta = 2.0$	$1.70.10^5$	$1.75.10^5$
$\alpha = \beta = 3.0$	$9.28.10^4$	$9.46.10^4$
$\alpha = \beta = 5.0$	$4.97.10^4$	$5.32.10^4$

Table III.1 – *Flux radiatifs intégrés pour différents cas de confinement du plasma au centre de la cavité carrée de côté 2cm*

Valeurs de α et β (cm^{-2})	Méthode P_1 (W/m)	Méthode LR (W/m)
$\alpha = 2.0$, $\beta = 0.0$	$9.0.10^7$	$9.5.10^7$
$\alpha = 2.0$, $\beta = 5.0$	$7.9.10^6$	$7.1.10^6$
$\alpha = 2.0$, $\beta = 2.0$	$1.4.10^7$	$1.3.10^7$

Table III.2 – *Flux radiatifs intégrés pour différents cas de confinement du plasma au centre de la cavité rectangulaire* $10cm \times 2cm$

ou moins confinés dans la cavité en faisant varier les paramètres α et β. La figure III.2 montre la distribution du flux radiatif sur les 4 faces de la géométrie dans le cas d'une cavité carrée de taille $2cm \times 2cm$ calculé par les méthodes P_1 et de lancé de rayons. On y voit clairement que la méthode P_1 sous-estime les flux au centre des faces et les surestime aux 4 coins de la cavité. Ce comportement est amplifié lorsque le plasma est très confiné au centre de la cavité. Il peut être expliqué par la nature diffusive de cette méthode. La dépendance angulaire de la luminance ne peut être correctement représentée par la simple addition d'un terme proportionnel à $\vec{u}.\vec{q}$ pour corriger le terme isotrope $G/4\pi$. Toutefois le flux intégré sur les 4 faces est en bon accord avec la méthode de lancé de rayons comme le montre le tableau III.1 où les erreurs de la méthode P_1 sont de l'ordre de 2% à 6%.

Considérons à présent une cavité rectangulaire de dimensions $10cm \times 2cm$. Nous avons représenté le flux aux parois d'une telle cavité pour différentes valeurs des paramètres α et β, le centre du plasma étant toujours placé au centre de la cavité. La figure III.3 montre que les flux sont sous-estimés au centre des faces (jusqu'à 50% d'erreur) et très nettement sur-estimés dans les coins de la cavité (jusqu'à un facteur 10). Nous observons toutefois là aussi une très forte dépendance au confinement du plasma dans la cavité. Dans cette géométrie très allongée contenant un plasma axisymétrique, les erreurs que provoquent la méthode P_1 y sont amplifiées. Toutefois, comme le montre le tableau III.2, l'erreur sur les flux intégrés reste de l'ordre de 5% à 11%.

Il est également intéressant de comparer les comportements de la méthode P_1 précédemment mis en évidence en utilisant le modèle MADF avec ceux obtenus pour un milieu gris. Ceci nous permettrait éventuellement d'identifier certaines épaisseurs optiques dominantes dans ce type de milieu fluide. La figure III.4 nous donne la distribution des flux sur les parois d'une cavité carrée de côté 2cm avec un profil de température gaussien (α=β=2cm^{-2}) pour un milieu gris caractérisé par différentes valeurs du coefficient d'absorption. On observe un très fort lissage des flux à la paroi donné par P_1 pour de faibles épaisseurs optiques, alors que P_1 redevient précis pour de plus grandes épaisseurs optiques. Ceci démontre que des plasmas réels ne peuvent pas être décrits par un milieu gris avec une épaisseur optique unique mais que l'on doit tenir compte de la multiplicité des différentes échelles d'extinction au sein du milieu pour espérer estimer les flux radiatifs correctement. En effet, le lissage des flux à la paroi est moins prononcé dans le cas d'une description de propriétés spectrales

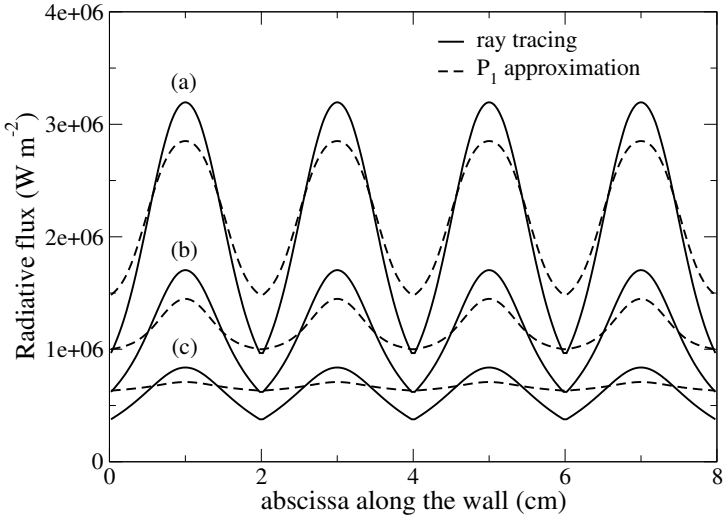

FIGURE III.2 – *Flux radiatif pour une cavité carrée de coté* $2cm$ *et pour différentes valeurs des paramètres* α *et* β *:(a)* α*=*β*=2* cm^{-2}*, (b)* α*=*β*=3* cm^{-2}*, (c)* α*=*β*=5* cm^{-2}*.*

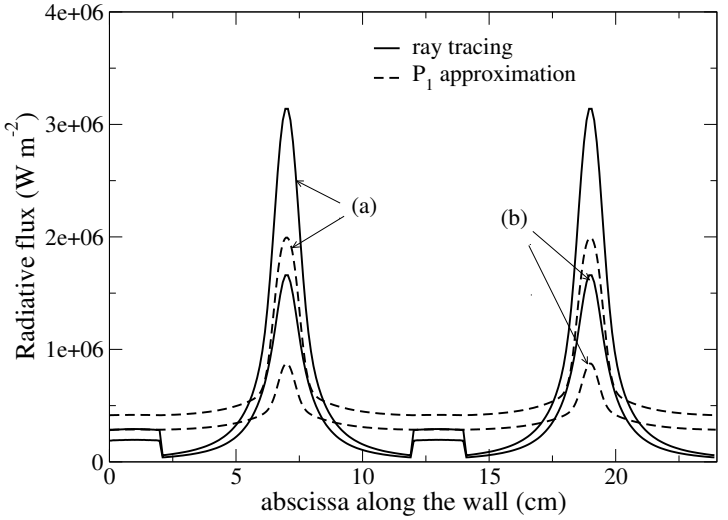

FIGURE III.3 – *Flux radiatif pour une cavité rectangulaire de coté* $2cmX10cm$ *et pour différentes valeurs des paramètres* α *et* β *:(a)* α*=*β*=2* cm^{-2}*, (b)* α*=*β*=3* cm^{-2}

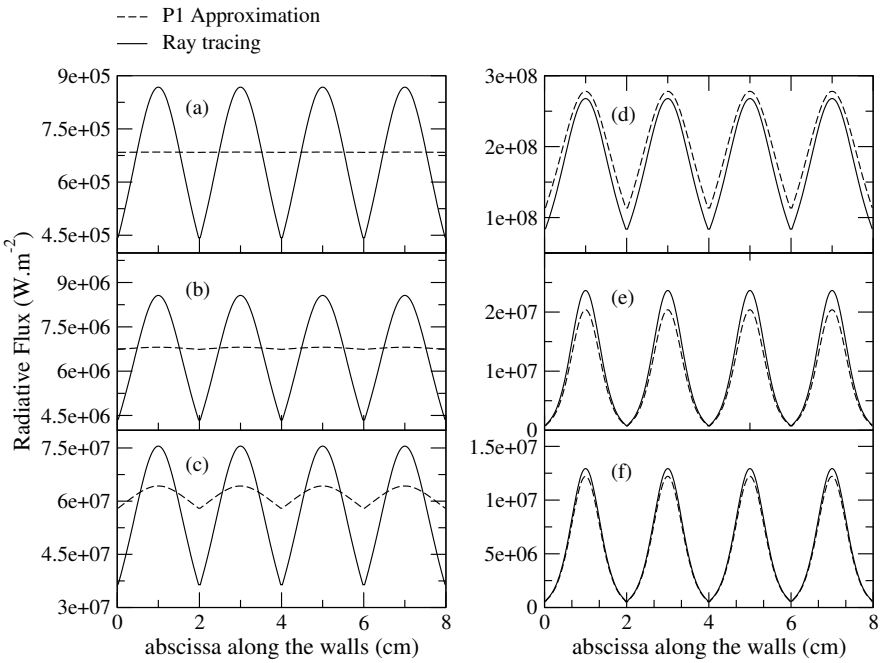

Figure III.4 – *Flux radiatif pour une cavité carrée de côté 2cm, avec α=β=2cm^{-2} pour un milieu gris :(a) κ=10^{-3} cm^{-1}, (b) κ=10^{-2} cm^{-1}, (c) κ=10^{-1} cm^{-1}, (d) κ=1 cm^{-1}, (e) κ=10 cm^{-1}, (f) κ=30 cm^{-1}*

donnée par MADF que pour de faibles épaisseurs optiques grises.

Comparaison des puissances radiatives

Nous considérons à nouveau la même configuration de cavité carrée que précédemment en nous intéressant cette fois à la distribution de puissance radiative au sein du milieu. La figure III.5 montre une coupe de puissance radiative au centre de la cavité de côté 2 cm. On voit un bon accord entre la méthode P_1 et la méthode de lancé de rayons. On observe une erreur au centre de la cavité (au point le plus chaud) de l'ordre de 13 % pour les 3 confinements de plasma testés.

Si nous observons plus en détail les zones où le plasma est absorbant, comme montré sur la figure III.6, nous pouvons remarquer des ondulations qui se forment quelque soit le confinement de notre plasma dans la cavité.

Ces ondulations apparaissent aussi bien en utilisant P_1 que le lancé de rayons pour tous les confinements de plasma testés. Cette similarité laisse penser que cette dynamique résulte de la multiplicité des échelles d'absorption dans notre milieu pour un profil de température Gaussien imposé.

Toutefois un écart entre les niveaux d'absorption est observé et peut atteindre jusqu'à 20% localement. Si l'on regarde les zones de forte émission de puissance radiative, comme montré sur la figure III.7, on peut distinguer des écarts de 10% à 14% entre une méthode P_1 et une méthode de lancé de rayons suivant le confinement du plasma dans la cavité. La méthode

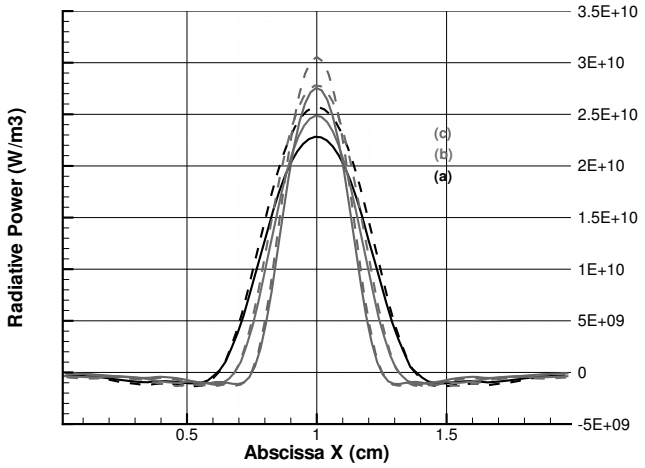

Figure III.5 – *Coupe de puissance radiative au centre d'une cavité carrée de côté 2cm, avec (a) α=β=2cm^{-2}, (b) α=β=3cm^{-2}, (c) α=β=5cm^{-2}*

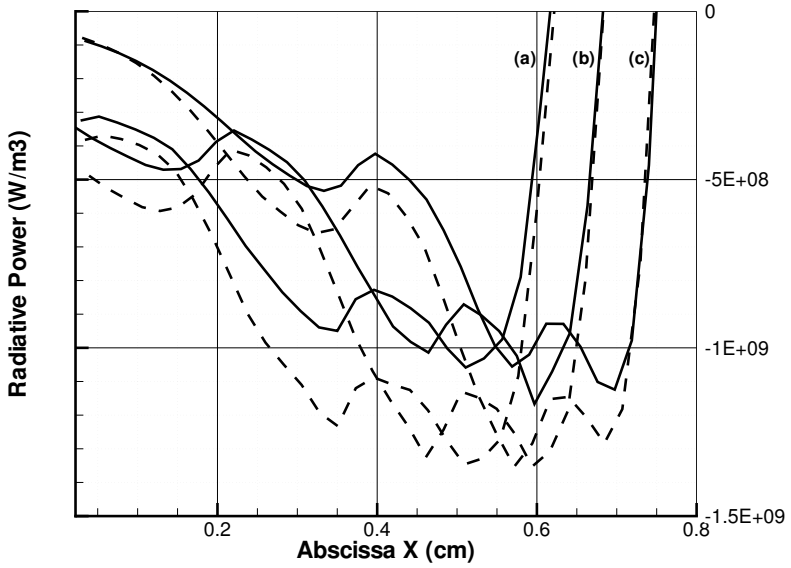

Figure III.6 – *Coupe de puissance radiative pour une cavité carrée de côté 2cm : zone absorbante, avec (a) α=β=2cm^{-2}, (b) α=β=3cm^{-2}, (c) α=β=5cm^{-2}. Les calculs P_1 sont représentés en trait pointillé et le lancé de rayons en trait continu.*

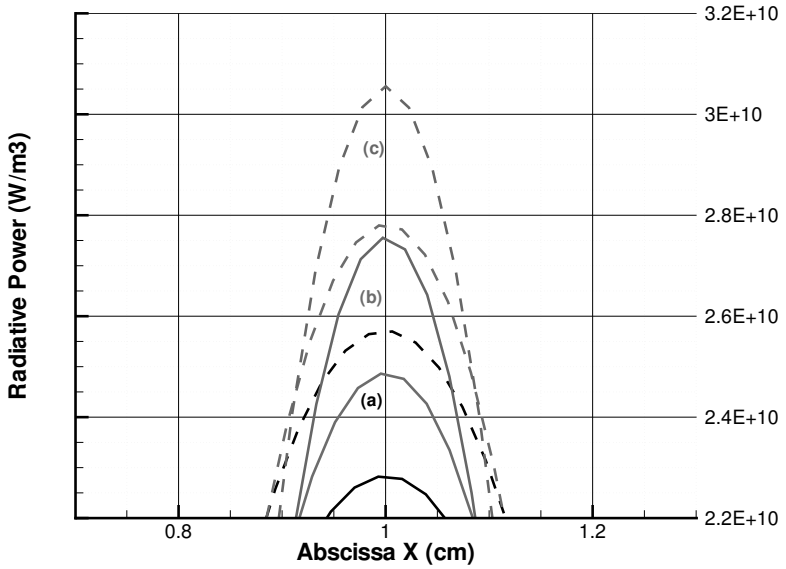

Figure III.7 – *Coupe de puissance radiative pour une cavité carrée de côté* $2cm$ *en* $y = 1cm$*, avec (a)* α=β=$2cm^{-2}$*, (b)* α=β=$3cm^{-2}$*, (c)* α=β=$5cm^{-2}$*. Les calculs* P_1 *sont représentés en trait pointillé et le lancé de rayon en trait continu.*

P_1 conduit ainsi à une légère sur-estimation de la puissance dans les zones émettrices au centre du plasma, mais également à une surestimation de la puissance absorbée dans les zones périphériques. La puissance radiative intégrée sur tout le volume de calcul est quant à elle bien prédite comme c'était le cas pour les flux radiatifs intégrés sur les parois. Il est également intéressant d'analyser les résultats de calculs de puissance radiative sur des géométries rectangulaires de taille $10cm \times 2cm$. La figure III.8 montre une coupe de puissance radiative en $x = 5cm$ (qui contient le centre du plasma) pour 2 confinements différents. On y observe un bon accord globalement entre P_1 et le lancé de rayons. Là encore, les erreurs dans les zones fortement émettrices sont de l'ordre de 10% mais atteignent 20 à 30% dans les zones absorbantes. La figure III.9 compare les puissances calculées dans une section loin de la zone chaude correspondant à $x = 7cm$. On y voit clairement une forte différence entre les puissances calculées par P_1 et celles calculées par le lancé de rayons. En $y = 1cm$, une différence de 16% pour $\alpha = 2cm^{-2}$ est observée alors que cette différence s'élève à 34% pour $\alpha = 3cm^{-2}$.

Comparaison des temps de calculs et discussion

Nous montrons à titre indicatif ci-dessous les temps de calculs typiques requis par les deux méthodes. Dans le cas de la méthode de lancé de rayons un maillage cartésien de 5000 noeuds à été utilisé. Nous faisons varier ici le nombre de rayons tirés en chaque noeud. Toutefois les résultats présentés précédemment ont été réalisés avec une grille cartésienne suffisamment fine (100×100 noeuds) et un nombre de tirs suffisamment élevés (100 par noeud de volume et 50 par noeud de paroi). En terme de mémoire vive nécessaire, P_1 demande moins de 100 MO pour des maillages de l'ordre de 10000 cellules alors que le

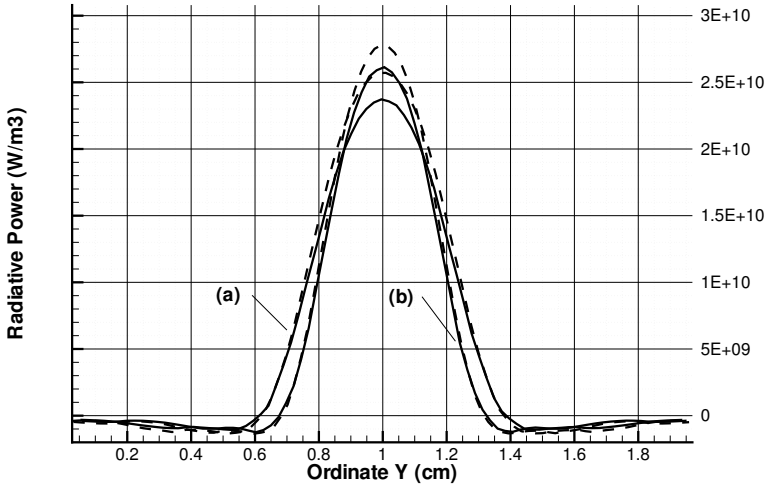

Figure III.8 – *Coupe de zones de puissance radiative pour une cavité rectangulaire de coté 10cmX2cm en x=5cm, avec (a) α=β=2cm^{-2}, (b) α=β=3cm^{-2}. Les calculs P_1 sont représentés en trait pointillé et le lancé de rayon en trait continu.*

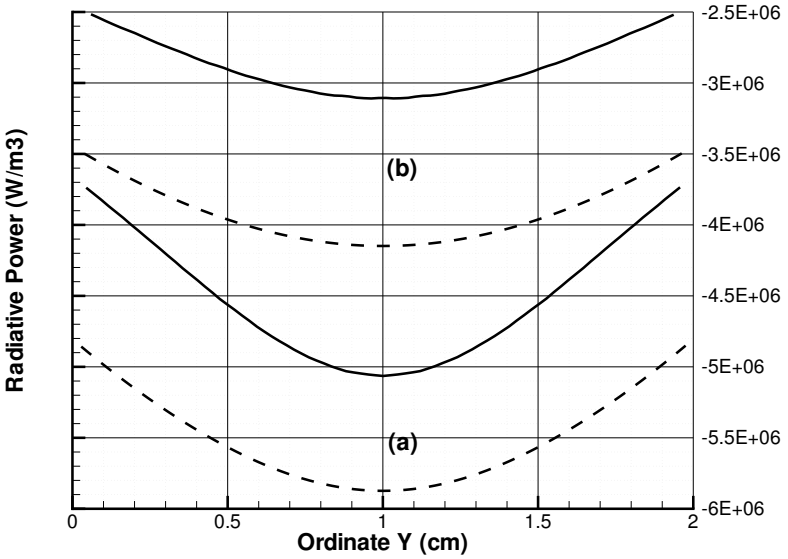

Figure III.9 – *Coupe de puissance radiative pour une cavité rectangulaire de coté 10cmX2cm en x=7cm, avec (a) α=β=2cm^{-2}, (b) α=β=3cm^{-2}*

Nombre de rayons tirés par noeud	Temps CPU (s)
10	300
20	600
40	1260
80	2520
100	3600

Table III.3 – *Temps CPU pour la méthode de lancé de rayons pour un maillage de 5000 noeuds*

Nombre de noeuds du maillage	Temps CPU (s)
400	0.8
1600	4
3600	10
6400	20
12100	60

Table III.4 – *Temps CPU pour la méthode P_1*

lancé de rayons nécessite plus de 500 MO pour des maillages de l'ordre de 5000 cellules avec 100 tirs par noeud. On voit que la méthode P_1 est beaucoup plus rapide que la méthode de lancé de rayons. Cette méthode présente donc un avantage certain en terme de temps CPU pour la réalisation de calculs couplés.

La précision de la méthode P_1, appliquée à des plasmas d'arc représentatifs de l'application visée, est satisfaisante en ce qui concerne le calcul de la puissance radiative dans les zones fortement émettrices. Cette précision se dégrade quelque peu dans les zones absorbantes dont la localisation est cependant bien prédite. Nous avons montré par ailleurs que la méthode P_1 permettait de prédire de façon assez précise les flux radiatifs intégrés sur les parois.

Toutefois si on cherche à calculer la distribution spatiale de ces flux pariétaux, notre étude montre qu'elle n'est pas fiable. Ce problème nous empêche d'avoir un calcul précis de la matière plastique (PA6 ou PMMA) ablatée des parois. Ce phénomène est en effet dépendant de la quantité d'énergie incidente à la paroi : c'est un phénomène qui nécessite non pas uniquement d'avoir des flux moyens mais de connaître précisément la distribution spatiale du flux pour voir si le seuil de déclenchement de la réaction d'ablation est atteint localement.

Malgré les limitations intrinsèques à la méthode P_1, il nous paraissait intéressant de l'implémenter dans le code d'hydrodynamique compressible interne de Schneider compte tenu de ses performances en temps de calcul et de sa relative précision pour les termes source radiatifs volumiques. A ce titre, une formulation par éléments finis de l'équation de P_1, associée à sa condition aux limites de Marshak, a été mise en oeuvre et des calculs couplés ont été réalisés.

Ceci nous a permis d'étudier les différences entre les résultats de la méthode P_1 et la méthode du coefficient d'émission nette dans la dynamique d'extinction de l'arc électrique dans une géométrie bidimensionnelle proche d'une chambre de coupure (paragraphe suivant).

III.3 Simulation bidimensionnelle de la propagation d'un arc

Nous simulons dans ce paragraphe la propagation d'un arc électrique dans un boîtier bidimensionnel initialement rempli d'air à pression atmosphérique. Ce problème est traité dans (Rachard 1995) avec toutefois la prise en compte du transfert radiatif grâce à un modèle simplifié de coefficient d'émission nette dans l'équation de conservation de l'énergie. Nous proposons ici de reprendre ce travail avec un calcul radiatif à l'aide du modèle MADF et de la méthode P_1. La figure III.10 montre le plan d'étude dit *plan des parois* car il est perpendiculaire aux parois du boîtier du disjoncteur. On y voit les deux électrodes et le plan d'étude situé à mi distance entre les électrodes. Les deux électrodes sont reliées à une source de courant qui délivre un courant sinusoïdal donné par :

$$i(t) = I_0 \sin(2\pi f t + \phi). \tag{III.14}$$

Les électrodes induisent un champ magnétique qui est pris en compte dans ce plan. Il en résulte une force qui souffle l'arc électrique vers le fond de la chambre de coupure. Ceci correspond à la configuration dite de *boîtier expérimental* dans (Rachard 1995).

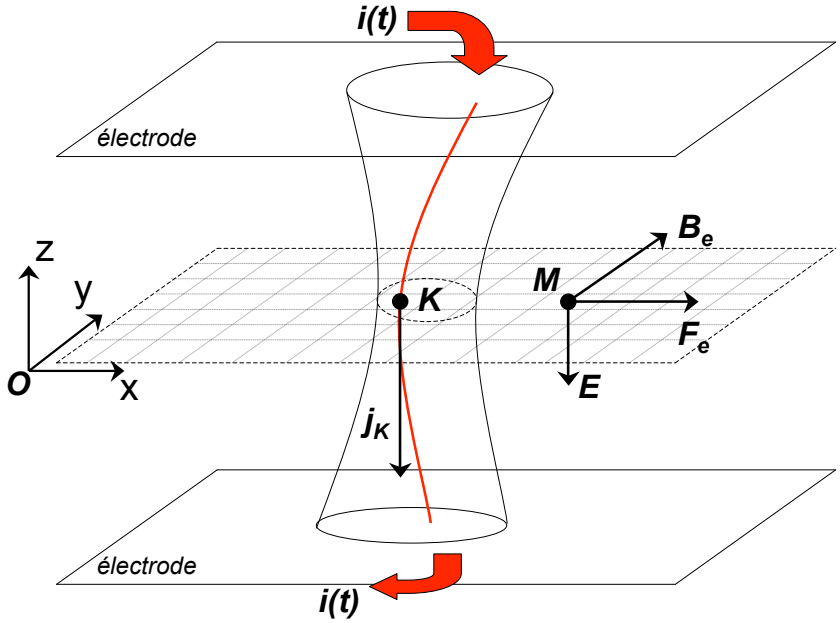

Figure III.10 – *Plan des parois utilisé pour le calcul instationnaire bidimensionnel*

III.3.1 Electrostatique et magnétostatique en milieu électriquement neutre

L'hypothèse principale qui est faite dans ce plan d'étude est que le champ électrique $\vec{E}$ est selon Oz et ne dépend pas du point considéré dans le plan. Il n'est donc dépendant que du temps t. Ainsi on peut écrire la densité de courant $\vec{j}$ comme :

$$\vec{j}(x,y,t) = \sigma(T(x,y,t))\vec{E}(t) \tag{III.15}$$

La conservation du courant total imposé $i(t)$ permet de déterminer le champ électrique selon :

$$\vec{E}(t) = -\frac{i(t)}{\int\int_{\mathcal{P}} \sigma(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\vec{e}_z \tag{III.16}$$

Le terme d'effet Joule est alors déterminé par :

$$W_{Joule}(x,y,t) = \sigma(T(x,y,t))||\vec{E}(t)||^2. \tag{III.17}$$

Ce terme intervient directement dans l'équation de conservation de l'énergie.

Le champ magnétique dans le milieu comporte deux contributions principales : une contribution due aux électrodes et une contribution due à l'arc lui même. Nous allons expliciter ces deux termes.

- **Contribution induite par la présence des électrodes**

  La présence des électrodes induit un champ magnétique à l'intérieur du boîtier, noté $\vec{B}_e$, que l'on peut déterminer en un point M du maillage par la loi de Biot et Savart. Toutefois si on suppose une amenée de courant filaire, l'intégrale conduit à une expression analytique :

$$\vec{B}_e(x,y,t) = \left(\frac{\mu_0 i(t)}{4\pi z} + \frac{\mu_0 i(t)}{4\pi(h-z)}\right)\vec{e}_y \tag{III.18}$$

  où h est la distance inter-électrodes. Dans notre cas le plan d'étude se trouve en $z = h/2$. Ainsi la contribution des électrodes à l'induction magnétique totale dans le plan des parois ne dépend que du courant imposé $i(t)$ et elle est uniforme dans ce plan.

- **Contribution induite par l'arc électrique**

  L'arc électrique étant lui même un conducteur en mouvement, il induit un champ magnétique dans l'espace. Ce champ est à l'origine de l'effet de striction observé sur l'arc. Cette contribution à l'induction magnétique totale est également déterminée par la loi de Biot et Savart. Ecrivons l'induction magnétique créée en un point $M(x,y)$, à un instant t de la coupure, par l'ensemble des éléments de volume dV_K autour d'un point K où règne une densité de courant $\vec{j}_K(t)$:

$$\vec{B}_f^M(x,y,t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{K\in\mathcal{V}} \frac{\vec{j}_K(t) \wedge \vec{KM}}{||\vec{KM}||^3}\mathrm{d}V_k \tag{III.19}$$

  où $\mathcal{V}$ désigne le volume total de l'arc. Dans notre configuration 2D, cette intégrale est analytique selon z et ne reste qu'une intégrale faisant intervenir la densité de courant dans le plan de calcul.

Dans un cas tridimensionnel, le calcul de l'intégrale dans la loi de Biot et Savart est relativement lourd et des stratégies alternatives comme par exemple la méthode multipôle rapide (*Fast Multipole Method*) peuvent être utilisées. On pourra consulter par exemple (Barnes et Hut 1986) et (Greengard et Rokhlin 1987) pour une présentation détaillée de cette méthode qui propose de regrouper les contributions des termes éloignés au sein d'ensembles afin de calculer une contribution unique.

- **Calcul de la force magnétique totale appliquée en tout point du fluide chargé**

La force magnétique totale appliquée sur un élément de surface autour du point $M(x, y)$ peut être à présent déterminée comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{F}(x,y,t) &= \vec{F}_e + \vec{F}_f \\ &= \vec{j}(x,y,t) \wedge \vec{B}_e(t) + \vec{j}(x,y,t) \wedge \vec{B}_f(x,y,t) \end{aligned} \tag{III.20}$$

Elle contient une contribution dans les deux directions Ox et Oy due à l'arc, et une contribution uniquement selon Ox due aux électrodes.

III.3.2 Le code de simulation hydrodynamique NS2

Les équations du problème sont résolues à l'aide d'un logiciel de simulation numérique interne à la direction de l'innovation de Schneider-Electric : le logiciel $NS2$. Il résoud les équations de Navier-Stokes pour les écoulements compressibles, visqueux dans des géométries bidimensionnelles proches des géométries industrielles des boîtiers de coupure de disjoncteurs. D'autres modules ont été développés par la suite pour traiter les équations de l'électrostatique et de la magnétostatique puis dans le cadre de cette thèse le calcul de transfert radiatif. Une méthode de calcul de puissance radiative avait été développée dans le cadre du travail de (Chevrier 1992) mais celle-ci est basée sur un modèle de coefficient d'émission nette qui ne permet pas de calculer une distribution des flux radiatifs aux parois et de prédire les zones d'absorption de rayonnement au sein du milieu plasma. D'autre part le choix du rayon est un paramètre critique qui affecte directement les bilans d'énergie dans le fluide et est utilisé plutôt comme un paramètre d'ajustement des niveaux de température de la zone d'arc.
Le maillage est généré par un mailleur spécifique au logiciel $NS2$. Il est homogène et conforme mais peut être éventuellement non structuré et constitué d'éléments quadrilatères.
La méthode de discrétisation temporelle est une méthode de pas de temps fractionnaire. Le schéma de discrétisation temporelle est d'ordre 1 et est semi-implicite en temps avec un découplage des phénomènes convectifs et diffusifs. La discrétisation spatiale des termes de diffusion repose sur une méthode d'éléments finis. Cette méthode est une méthode de minimisation de fonctionnelle aux noeuds du maillage [1]. Les termes convectifs sont traités par une méthode de volumes finis. La discrétisation repose sur un schéma de Godunov ou

1. Les algorithmes de gradient conjugué développés pour traiter l'équation du potentiel électrique par la méthode des éléments finis servent de base à la résolution de l'équation P_1.

de Van Leer (Hirsch 1999).

Dans ce qui suit, on donne une formulation variationnelle des équations de P_1 qui correspond à celle implémentée dans le cadre de ce travail. Ce travail d'implémentation a été réalisé au sein de la direction de l'innovation de Schneider-Electric par Jean-Yves Battandier.

III.3.3 Formulation par éléments finis de l'équation P_1

Pour une échelle donnée j du coefficient d'absorption, la formulation variationnelle de l'équation III.2, associée à la condition aux limites III.4, conduit à minimiser la fonctionnelle :

$$J = \int\int_{\Omega} F\left(G_j(x,y), \frac{\partial G_j}{\partial x}(x,y), \frac{\partial G_j}{\partial y}(x,y)\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_{\partial\Omega} H(G_j(x,y))\mathrm{d}s \qquad \text{(III.21)}$$

où les fonctions F et H sont données par :

$$\begin{aligned} F(G_j) &= \frac{1}{2}\frac{1}{3k_j}\left[\left(\frac{\partial G_j}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial G_j}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{1}{2}k_j\left(G_j - G_j^0\right)^2 \qquad \text{(III.22)} \\ H(G_j) &= \frac{\varepsilon_w}{2-\varepsilon_w}\frac{1}{4}\left(G_j - G_j^0\right)^2 \end{aligned}$$

Cette méthode est détaillée dans (Glowinski 1984). L'équation (III.21) est ensuite discrétisée comme une somme d'intégrales sur chaque élément du maillage. Si le maillage contient N mailles élémentaires, au sein de chaque maille $e \in [1, N]$, la fonction G_j est interpolée à l'aide de la valeur de G_j aux noeuds i de la maille e notée G_e^i. Le coefficient d'absorption est lui aussi interpolé en fonction de la valeur aux noeuds du maillage. G_j et k_j sont donc variables au sein d'une maille. Le type d'éléments utilisés dans notre étude est décrit dans l'annexe A.

Nous montrons dans le paragraphe suivant des résultats de calculs couplés effectués à l'aide du logiciel de calcul $NS2$. Nous montrons à ce titre des différences intéressantes sur la dynamique d'extinction de l'arc telle que prédite par une méthode P_1 et par un modèle de coefficient d'émission nette.

III.3.4 Calculs couplés et comparaison avec l'émission nette

Les résultats que nous montrons ci dessous ont été réalisés dans une configuration géométrique sans ailettes avec de l'air.

Le but est de montrer dans un premier temps la faisabilité de calculs couplés avec la méthode P_1 et le modèle MADF en terme de temps CPU sans parallélisation du code. Ces calculs nous permettent d'étudier l'impact de la finesse de la modélisation du rayonnement (P_1+MADF ou émission nette) sur les champs de température et la dynamique de l'arc.

La géométrie considérée est une géométrie simplifiée de disjoncteur modélisé par une boîte rectangulaire de 1,4 cm (selon y) $\times$ 9,4 cm (selon x) suivie d'une zone d'échappement reliée à la boîte rectangulaire par un col de petites dimensions. Le maillage utilisé contient environ 4000 cellules quadrilatérales. La figure III.11 montre la géométrie ainsi que le maillage utilisés. Le temps de simulation se situe entre les instants 0 et $1,2$ ms.

conditions des calculs

Les conditions utilisées pour notre cas test sont les suivantes :

- Parois noires à faible température (émission négligeable)
- Zone d'échappement ouverte avec pression externe imposée à 1 bar
- Distance inter-électrodes $h = 2.4\ cm$
- Pas de vapeurs plastiques ni métalliques
- Pas de prise en compte de la viscosité du fluide
- Température initiale dans le milieu gazeux : 300K
- Pression initiale dans le milieu gazeux : $0,1.10^6\ Pa$
- Vitesse initiale du gaz : $0\ m.s^{-1}$
- Pas de temps adaptatif, de l'ordre de $10^{-8}\ s$. Le pas de temps initial vaut également $10^{-8}\ s$.
- La phase ϕ du courant à l'instant t=0 est prise égale à 0,094 rad.
- Le courant crête (I_0 dans l'équation III.14) vaut 12000 A.

L'amorçage numérique du plasma est effectué en imposant un terme source dans l'équation de bilan d'énergie. Ce dépôt d'énergie suit une gaussienne et est constant dans le temps entre les instants $0\ s$ et $4.39.10^{-5}\ s$. L'écart-type de la gaussienne vaut $0,3\ cm$ et l'amplitude vaut $2.10^{11} W/m^3$ avec un centre de la gaussienne situé en x=2,1 cm et y=0,7 cm. Il élève la température du milieu jusque 15000K pour initier l'écoulement. Durant cette phase non physique, ni le rayonnement ni l'effet joule ne sont pris en compte.

En ce qui concerne les simulations avec le modèle du coefficient d'émission nette, nous utilisons un rayon R_p égal à 1 mm. Cette valeur permet de retrouver un niveau correct de température maximale même si elle est très éloignée de la dimension calculée de l'arc comme on le verra plus tard.

Les figures III.12 à III.16 montrent les profils comparés de température, de pression, de densité et de densité de courant respectivement aux instants $t = 50\ \mu s$, $t = 140\ \mu s$, $t = 210\ \mu s$, $t = 360\ \mu s$ et $t = 750\ \mu s$ le long de l'axe central (y=0,7 cm). Les figures III.17

à III.26 montrent les champs de température, de vitesse hydrodynamique et de puissance radiative (comptée positivement si absorbée) aux mêmes instants.

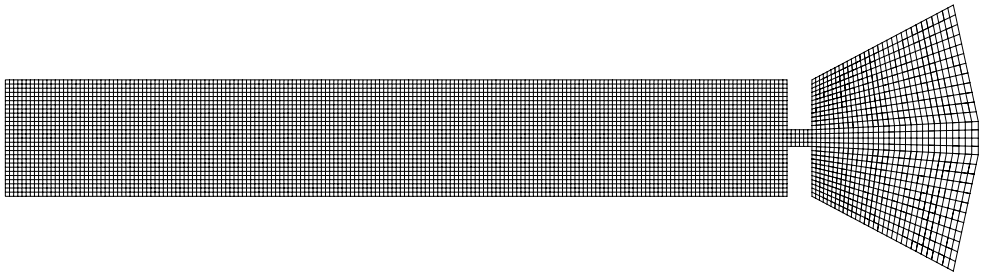

FIGURE III.11 – *Maillage utilisé pour la simulation couplée 2D*

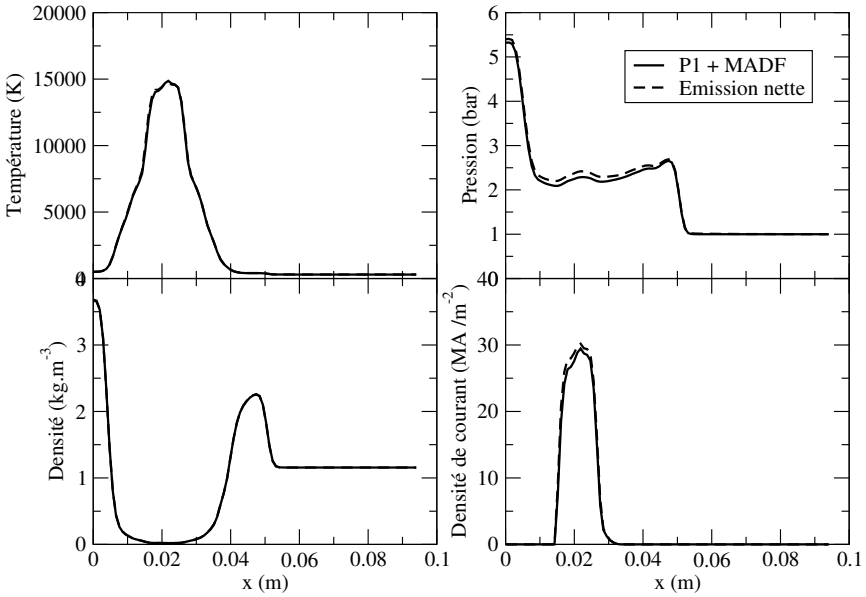

FIGURE III.12 – *Coupe le long de l'axe central des profils de température, pression, densité et densité de courant avec les deux modèles de rayonnement à* $t = 50\ \mu s$

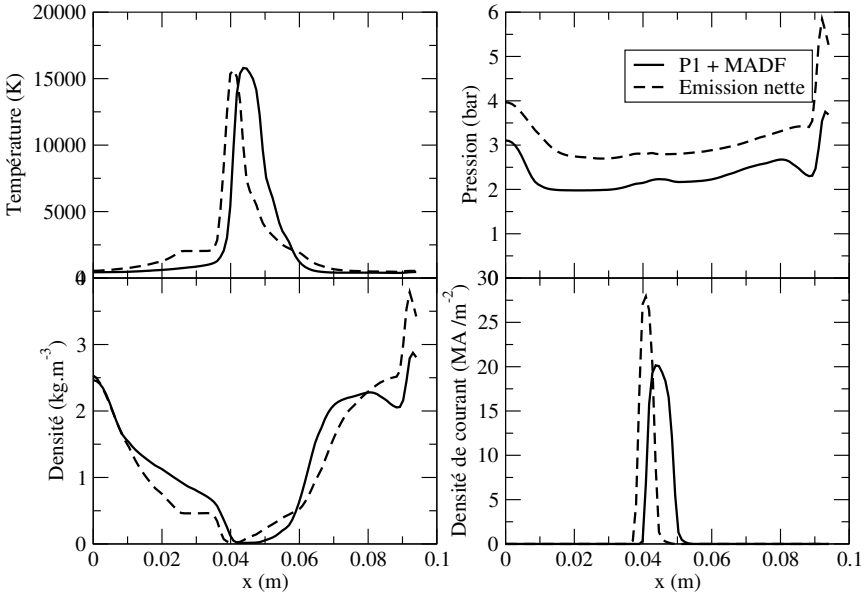

Figure III.13 – *Coupe le long de l'axe central des profils de température, pression, densité et densité de courant avec les deux modèles de rayonnement à* $t = 140\ \mu s$

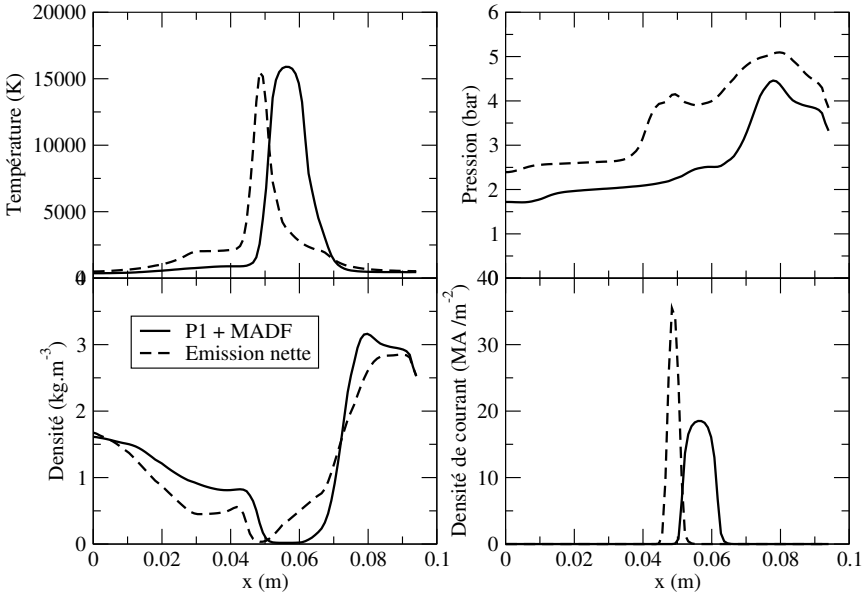

Figure III.14 – *Coupe le long de l'axe central des profils de température, pression, densité et densité de courant avec les deux modèles de rayonnement à* $t = 210\ \mu s$

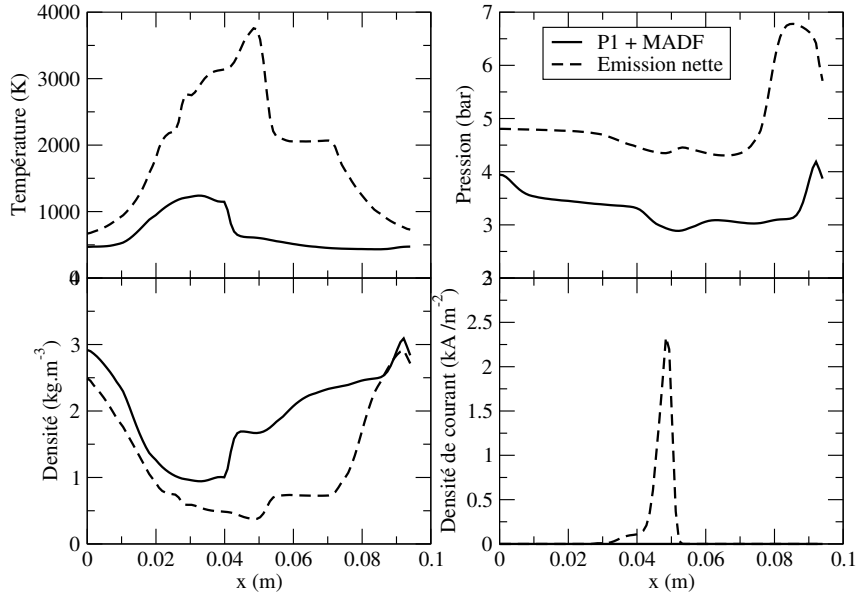

FIGURE III.15 – *Coupe le long de l'axe central des profils de température, pression, densité et densité de courant avec les deux modèles de rayonnement à* $t = 360\ \mu s$

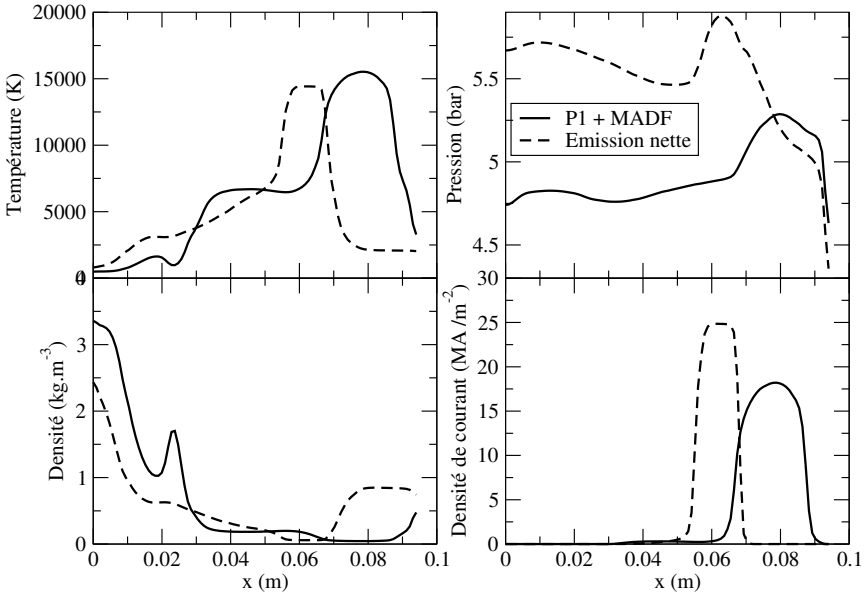

FIGURE III.16 – *Coupe le long de l'axe central des profils de température, pression, densité et densité de courant avec les deux modèles de rayonnement à* $t = 750\ \mu s$

Phase d'amorce : l'arc électrique se crée dans la chambre

L'énergie déposée aux premiers instants a pour effet d'augmenter le niveau de température. Lorsque la température atteint 15000 K, c'est à dire lorsque la conductivité électrique du milieu est suffisamment élevée, les simulations débutent avec prise en compte du rayonnement et de l'effet Joule (à l'instant t=43,9 μs). Durant cette phase d'amorçage, on observe une forte expansion du plasma chaud dans la chambre en amont et en aval.

On voit sur la figure III.12 que lorsque la température augmente brusquement et localement pour atteindre 15000 K, la pression monte fortement jusqu'à environ 5 bar localement ce qui a pour effet de créer une onde de pression qui vient percuter la paroi amont opposée à l'orifice d'échappement. A t=50 μs, la pression à la paroi est presque de 5,5 bar. On voit au même instant que la densité est très faible en x=0,02 m et qu'un front de matière est transporté par compression/ accélération du gaz. Au point d'impact à la paroi en amont, la densité de matière atteint $3,6\ kg.m^{-3}$. Le front de matière qui se déplace dans la chambre vers l'orifice atteint lui une densité de $2,4\ kg.m^{-3}$. La pression au niveau du front atteint $2,5\ bar$. Ce front se déplace a une vitesse de l'ordre de 350 $m.s^{-1}$. Au même instant la densité de courant, qui a eu le temps de s'établir, monte jusque $3.10^7\ A.m^{-2}$ au point le plus chaud. A ce stade, on observe peu de différences significatives entre $P1\ +\ MADF$ et l'émission nette car les transferts radiatifs ne sont pris en compte que depuis 6,1 μs.

La figure III.18 montre les champs de puissance radiative calculés par l'émission nette et par $P1{+}MADF$. Le calcul avec $P1{+}MADF$ montre la dynamique spatiale de la puissance dans les zones d'absorption et on retrouve les résultats similaires à ceux obtenus précédemment avec un profil de température gaussien imposé.

Propagation de l'onde de pression dans la chambre et réflexion sur la paroi

L'onde de pression traverse toute la chambre de coupure pour se réfléchir sur la paroi aval à $t = 140\mu s$. La pression à la paroi monte jusque 6 bar pour l'émission nette et jusque $3,7\ bar$ pour $P1$. La densité de matière à la paroi aval est de l'ordre de $3,9\ kg.m^{-3}$ pour l'émission nette et de $2,9\ kg.m^{-3}$ pour $P1 + MADF$ ce qui résulte directement des profils de pression. Le niveau de pression est globalement plus élevé dans toute la chambre de coupure avec l'émission nette. La figure III.13 montre un profil de température plus étalé pour $P1$ que pour l'émission nette. Les densités de courant reflètent directement les profils de température : la densité de courant monte jusque $27.10^6\ A.m^{-2}$ pour l'émission nette alors qu'elle vaut au maximum $20.10^6\ A.m^{-2}$ pour $P1 + MADF$. En effet, le courant total se conservant et le profil de densité de courant étant moins étalé dans le cas de l'émisison nette, le niveau est plus élevé.

A ce stade les profils de température montrent un arc calculé par $P1 + MADF$ légèrement en avance par rapport à l'émission nette ce qui se voit également sur les figures III.19 et III.20. On y voit également les deux traînées de gaz chaud, autour de 7500 K, laissées après le passage de l'arc. La puissance radiative calculée avec $P1$ montre une zone de forte absorption sur les côtés de l'arc et juste après le passage du point le plus chaud derrière l'arc. Le maximum de puissance radiative absorbée atteint $2,5.10^{10}\ W.m^{-3}$, ce qui est comparable au niveau d'émission maximal dans l'arc.

Retour de l'onde de pression dans la chambre de coupure et impact sur l'arc

A $t = 210\mu s$, les deux ondes de pression qui se sont réfléchies sur les parois amont et aval de la géométrie arrivent à peu près en même temps sur l'arc, au milieu de la chambre de coupure. Le phénomène est nettement plus marqué avec l'émission nette qu'avec $P1 + MADF$. Entre les instants 50 μs et 210 μs, on peut estimer la vitesse de déplacement de l'arc dans le cas de $P1 + MADF$ à environ 220 m.s^{-1} et dans le cas de l'émission nette à environ 180 m.s^{-1}. Cette différence montre l'influence de la zone d'absorption en amont de l'arc comme montré sur la figure III.22 sur la dynamique de l'écoulement dans la chambre. L'absorption de rayonnement en aval apporte de l'énergie au milieu et a pour effet d'augmenter le niveau de température dans ces zones. Ceci augmente donc la densité de courant dans ces zones avant le passage de l'arc et favorise l'avancement du point le plus chaud. Le profil de température est toujours plus étalé dans le cas de $P1 + MADF$. La figure III.21 montre les champs de température de l'émission nette et de $P1$ où l'on retrouve ces tendances. Toutefois, le courant total étant conservé dans cette configuration, la densité de courant montrée sur la figure III.14 est nettement plus élevée dans le cas de l'émission nette au point maximum : elle atteint 35.10^6 $A.m^{-2}$ alors que le maximum pour $P1$ vaut 18.10^6 $A.m^{-2}$.

L'effet conjugué des ondes de pression cisaille l'arc électrique en 2 parties

A t=360 μs l'arc est complétement cisaillé par un flux de matière qui revient du fond de la chambre. Il est scindé en deux parties qui évoluent séparément. L'onde de pression aval a de nouveau été réfléchie par la paroi en fond de chambre. Le niveau de pression atteint alors 6.7 *bar* avec l'émission nette et 4 *bar* pour $P1$ au niveau de la paroi. L'arc électrique commence à se reformer avec l'émission nette sous l'effet conjugué des forces de striction. Dans le cas de $P1$, on voit sur la figure III.24 que la zone inter-arc est sujette à une forte absorption qui contribue à chauffer le milieu, ce qui refacilite l'établissement d'une densité de courant élevée et donc la recombinaison de l'arc sous l'effet des forces de striction électromagnétiques. Il est à noter que le phénomène de cisaillement de l'arc en deux parties n'est pas observé sur les maquettes expérimentales et pourrait être un simple artefact lié à la modélisation bidimensionnelle utilisée ici.

L'arc est évacué en fond de chambre

A $t = 750$ μs, l'arc est évacué en fond de chambre de coupure. Il se forme alors derrière l'arc une traînée de gaz chaud avec un palier à 7000 K. On voit sur la figure III.16 que ce palier est nettement plus marqué dans le cas de $P1 + MADF$ que dans le cas de l'émission nette et qu'il persiste pendant une longue période. Ceci montre l'influence des zones d'absorption de rayonnement sur la possibilité de reclaquage dans la chambre de coupure.

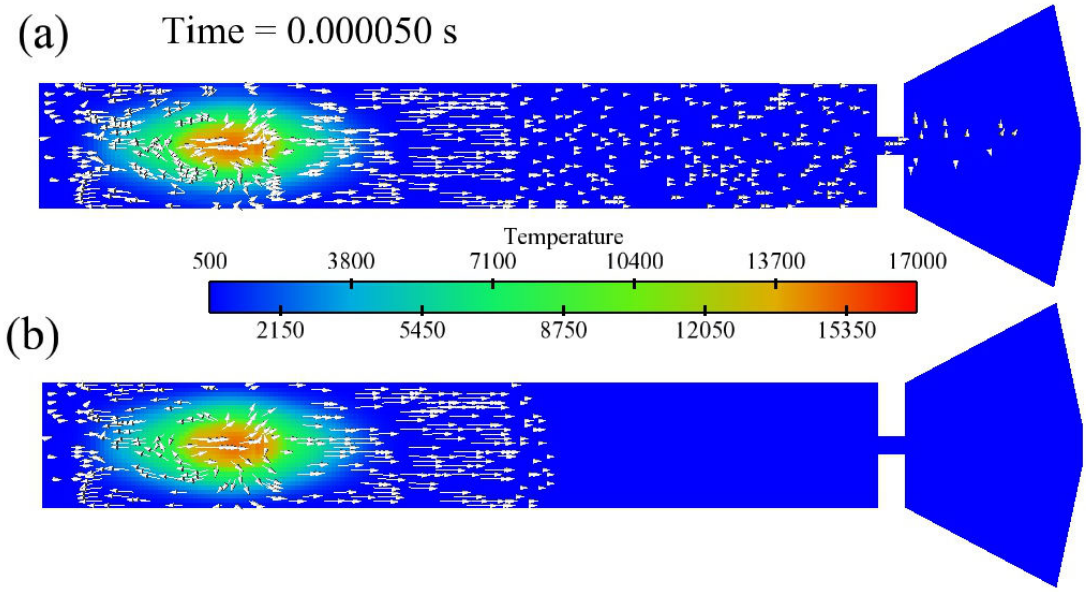

Figure III.17 – *Champs de température et de vitesse hydrodynamique calculés par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 50\ \mu s$*

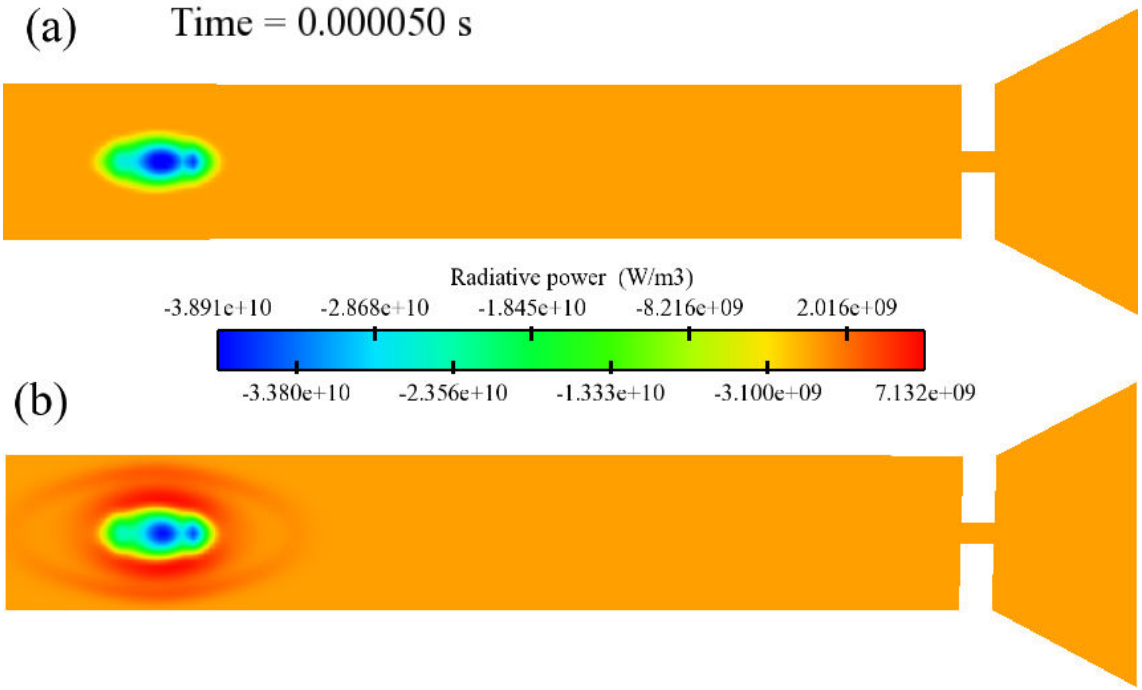

Figure III.18 – *Champ de puissance radiative calculé par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 50\ \mu s$*

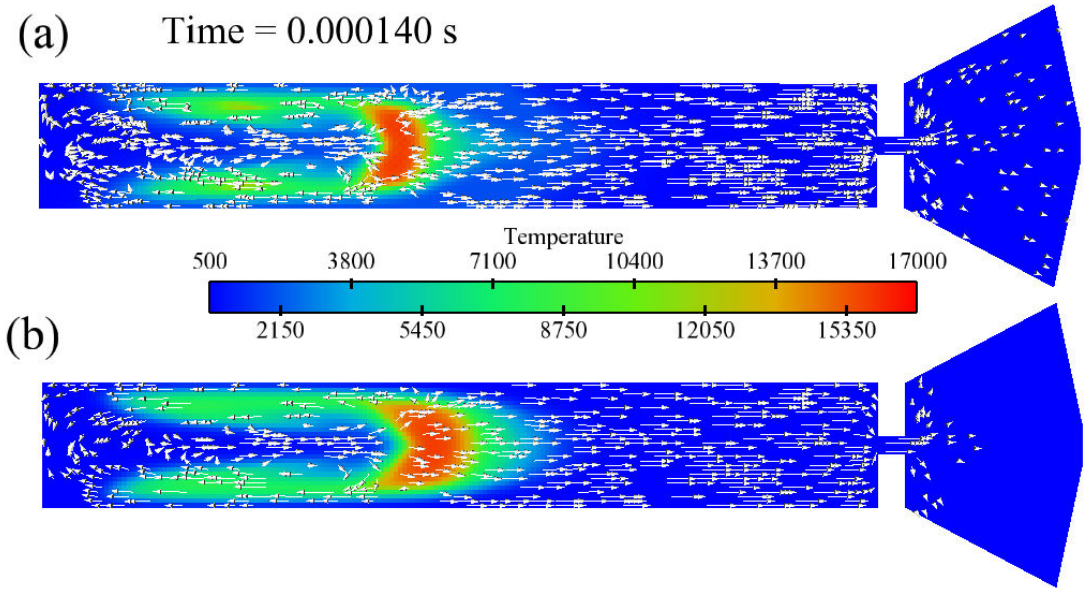

FIGURE III.19 – *Champs de température et de vitesse hydrodynamique calculés par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 140\ \mu s$*

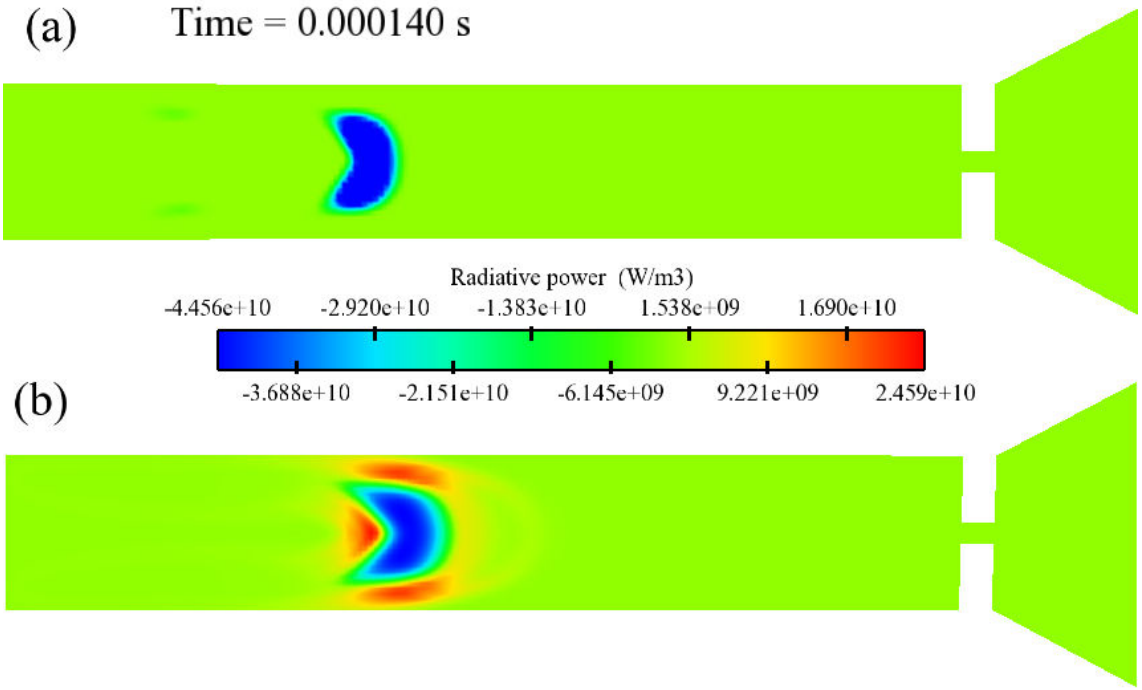

FIGURE III.20 – *Champ de puissance radiative calculé par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 140\ \mu s$*

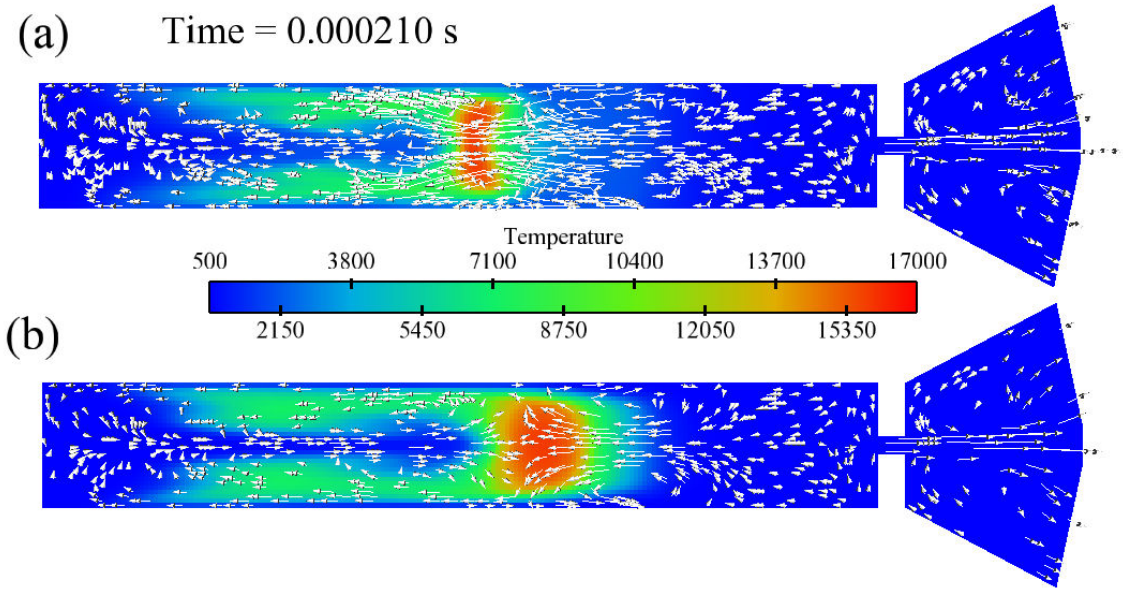

Figure III.21 – *Champs de température et de vitesse hydrodynamique calculés par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 210\ \mu s$*

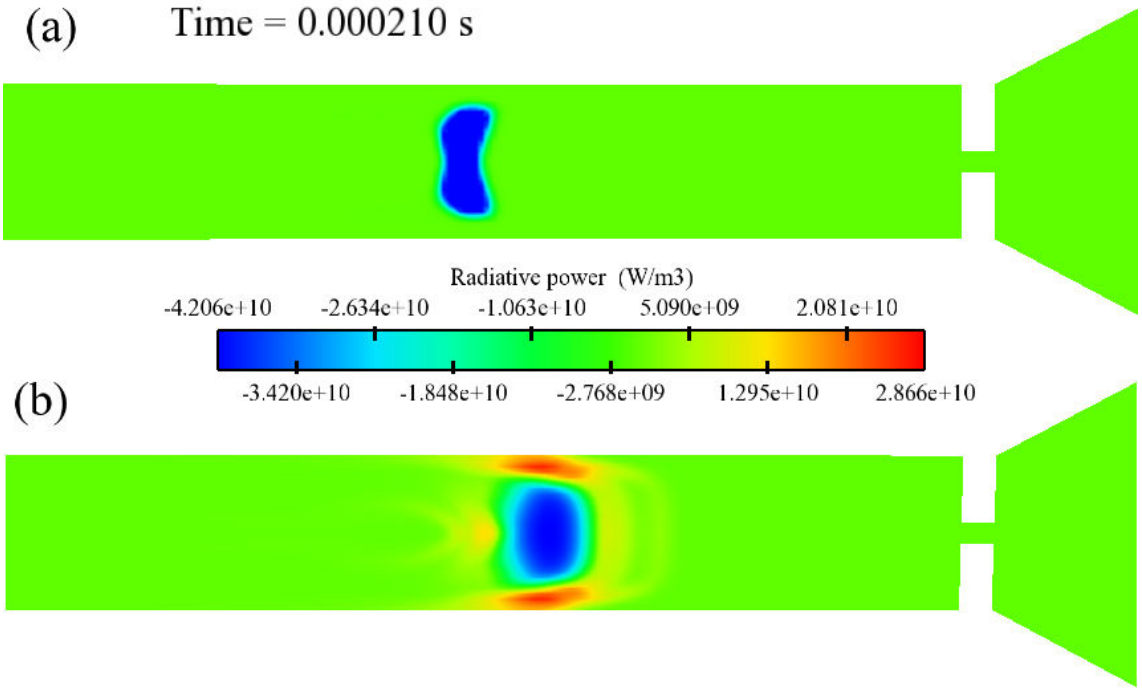

Figure III.22 – *Champ de puissance radiative calculé par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 210\ \mu s$*

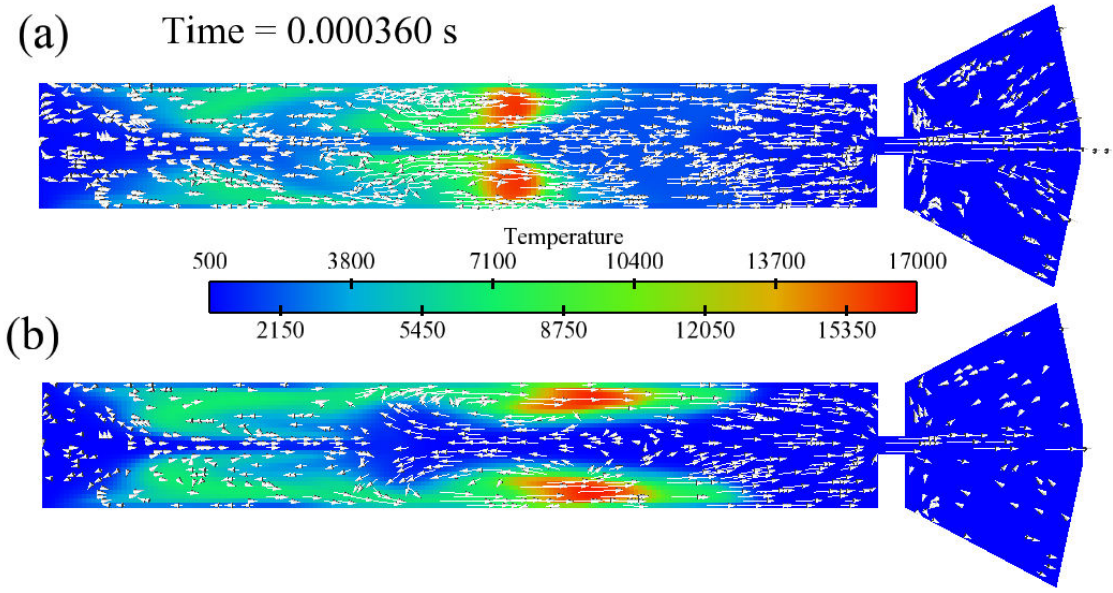

FIGURE III.23 – *Champs de température et de vitesse hydrodynamique calculés par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 360\ \mu s$*

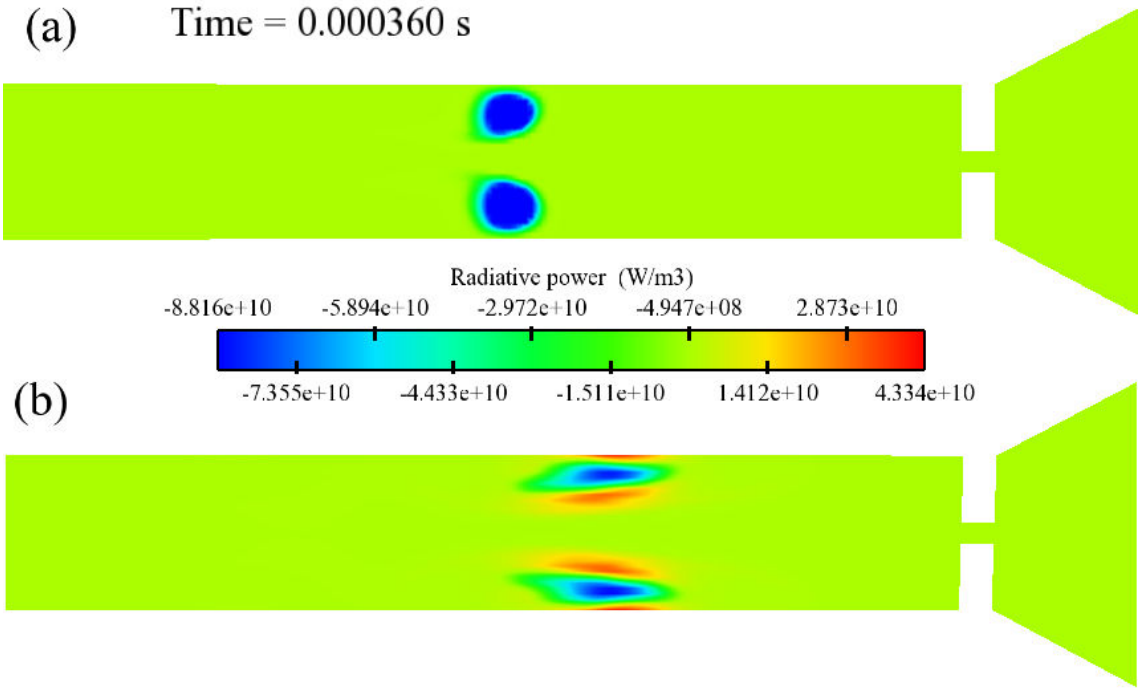

FIGURE III.24 – *Champ de puissance radiative calculé par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 360\ \mu s$*

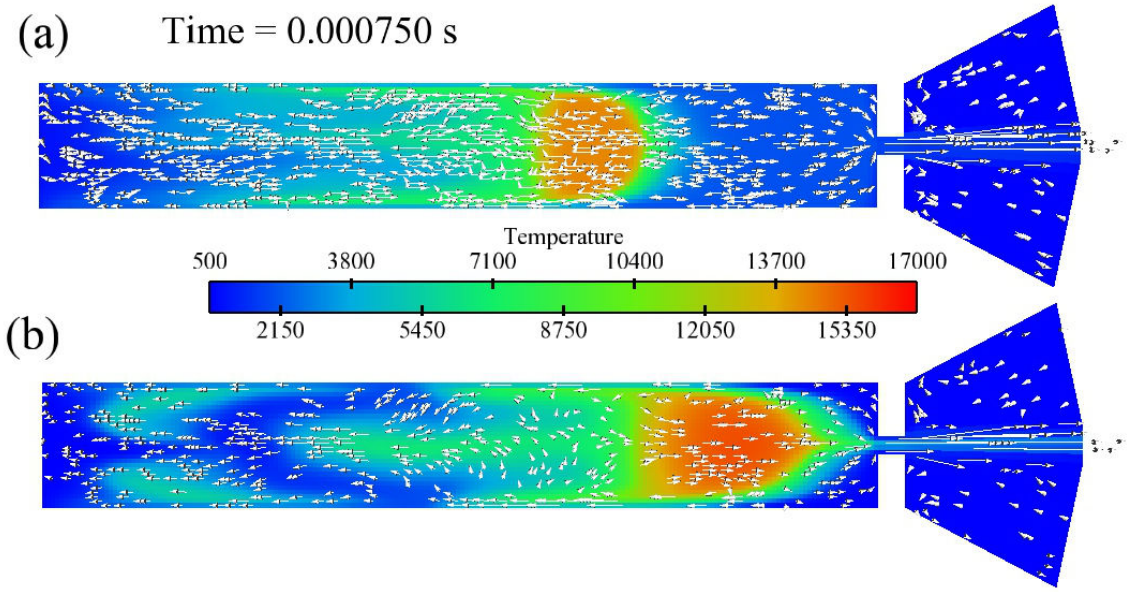

Figure III.25 – *Champs de température et de vitesse hydrodynamique calculés par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 750$ μs*

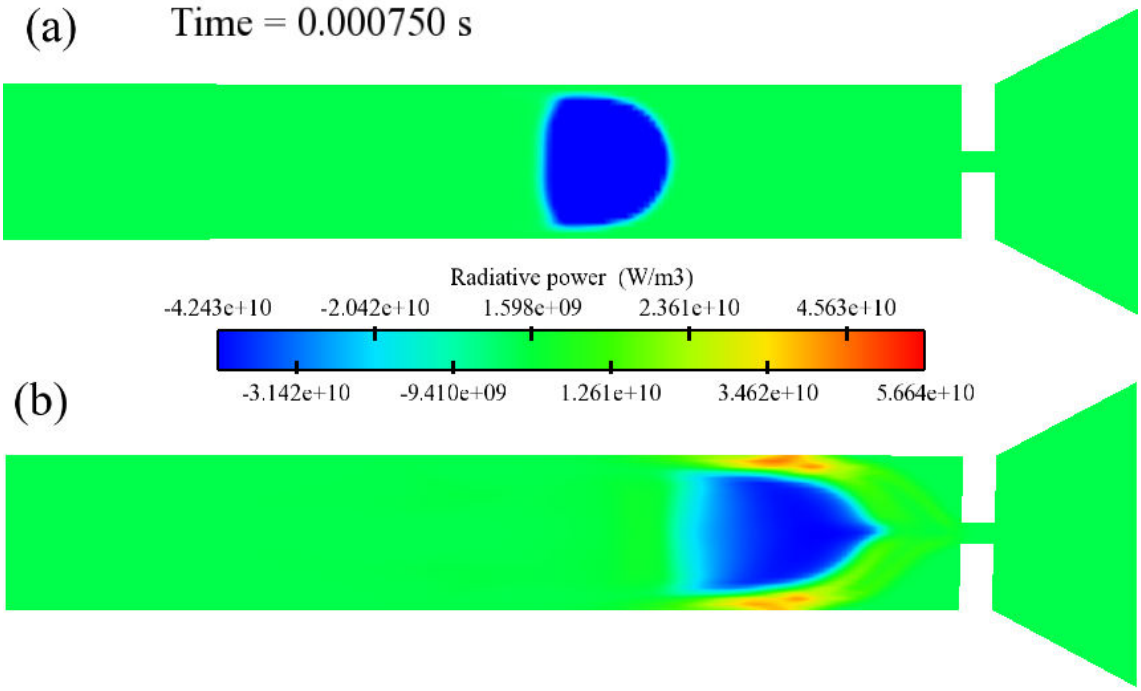

Figure III.26 – *Champ de puissance radiative calculé par par l'émission nette (a) et par $P1 + MADF$ (b) à $t = 750$ μs*

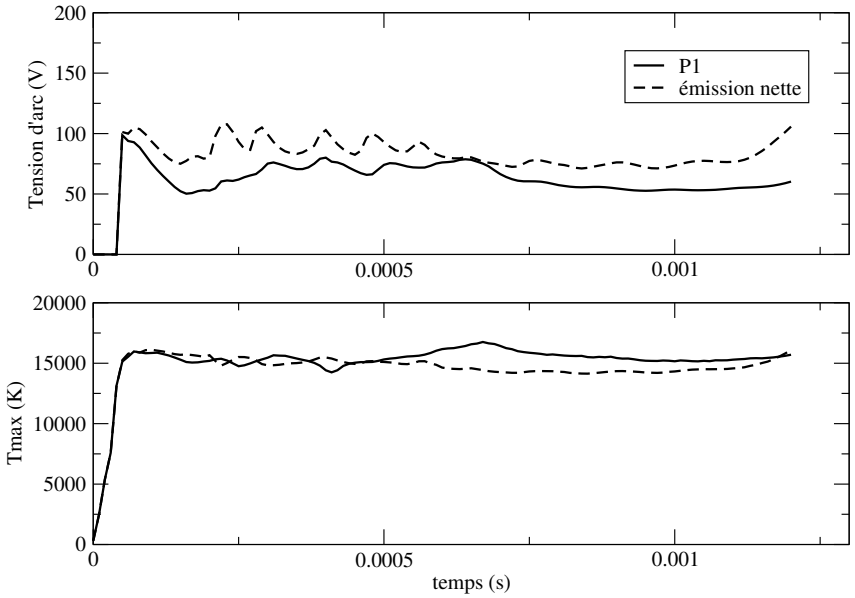

FIGURE III.27 – *Comparaison entre les évolutions temporelles des tensions d'arc et des températures maximales obtenues avec le modèle d'émission nette et la méthode P_1-MADF.*

Caractéristiques globales de l'arc

La figure III.27 compare les comportements globaux de l'arc simulés à l'aide de la méthode du coefficient d'émission nette et la méthode couplant P_1 et MADF pour les transferts radiatifs. Nous rappelons que dans les simulations présentées, le courant total est imposé et varie quasi-linéairement dans le temps entre 3000 A et 4000 A pour t variant de 50 μs et 1200 μs.

La température maximale atteinte est sensiblement la même pour les deux modèles comme discuté précédemment. Par contre, la tension d'arc prédite par le modèle P_1-MADF est sensiblement plus faible que celle prédite par la méthode d'émission nette. Ceci est cohérent avec les constations faites précédemment concernant l'étalement spatial de l'arc plus important dans le cas du modèle P_1-MADF, ce qui conduit à une conductance électrique globale de l'arc plus importante.

Temps de calcul observés

Les résultats présentés ci-dessus correspondent à un calcul avec le modèle MADF 216 avec un pas de temps de calcul de rayonnement égal au pas de temps fluide. C'est la configuration la plus longue en terme de temps CPU. Les temps de calcul varient beaucoup en fonction de la fréquence de calcul de la puissance radiative et du modèle de propriétés spectrales utilisé. Nous indiquons dans le tableau III.5 les résultats obtenus. Nous n'avons pas observé de différences significatives sur les résultats des calculs en recalculant le champ de rayonnement

Méthode P_1	MADF 36	MADF 216
calcul rayonnement tous les Δt_{fluide}	21239 s	90515 s
calcul rayonnement tous les $5\Delta t_{fluide}$	4159 s	13889 s
calcul rayonnement tous les $50\Delta t_{fluide}$	2027 s	3959 s
coefficient d'émission nette	947 s	

Table III.5 – *Méthode P_1 : temps CPU de calculs couplés*

tous les pas de temps convectifs ou tous les 50 pas de temps.
Nous voyons que lorsque nous passons d'un modèle MADF 216 à un modèle MADF 36, nous gagnons un facteur inférieur à 6 bien qu'il soit nécessaire d'inverser la matrice P_1 autant de fois qu'il y a d'échelles d'extinction. Ceci est dû au fait que les matrices sont inversées par une routine itérative de gradient conjugué qui s'arrête suivant un critère de convergence numérique : plus les matrices sont difficiles à inverser à cause d'un fort conditionnement, plus l'algorithme va converger lentement. Lorsque l'on passe d'un modèle à 216 gaz à un modèle à 36 gaz, les coefficients d'absorption peuvent avoir des variations très différentes avec la température d'un modèle à l'autre.
D'autre part, on voit que la différence s'estompe si on réduit la fréquence de calcul. Ceci est dû au fait que lorsqu'on réduit la fréquence de calcul, on réduit la dépendance du temps de calcul global au temps de calcul de la routine de rayonnement.
Ces temps CPU sont à comparer avec le temps de calcul d'un cas avec l'émission nette où l'on trouve $947s$. La version $P1$ en utilisant un modèle MADF à 36 gaz fictifs avec un calcul de rayonnement tous les 50 pas de temps présente alors un bon compromis en terme de temps CPU.

III.3.5 Conclusion

Nous avons présenté ici des résultats de calculs couplés sur une géométrie simplifiée bidimensionnelle de disjoncteur basse tension. Le but était, d'une part, de montrer la faisabilité d'un calcul couplé complet en géométrie bidimensionnelle avec le logiciel $NS2$ et un modèle de rayonnement réaliste et, d'autre part, de comparer les résultats obtenus avec ceux issus d'une modélisation plus approchée du rayonnement utilisant des coefficients d'émission nette.

Nous n'avons pas eu de problèmes de stabilité temporelle lors du couplage des équations. Par contre il a été difficile de pouvoir inverser les matrices associées à cette méthode. Nous avons utilisé une méthode de gradient conjugué avec préconditionnement, les matrices ayant un fort conditionnement à cause de la forte variation du coefficient d'absorption au sein de chaque classe entre les différentes mailles de la géométrie.

Ces calculs ont montré des différences intéressantes dans la dynamique d'un arc dans une chambre de coupure simplifiée en fonction du modèle de rayonnement que l'on utilise. Nous avons montré l'intérêt de l'utilisation de la méthode P_1 associée à une description spectrale réaliste des propriétés radiatives du plasma. Nous avons montré que le calcul du transfert radiatif avec la méthode P_1 prédit une vitesse de déplacement de l'arc supérieure à celle prédite lors de simulation avec l'émission nette. Ceci est probablement le résultat du préchauffage du gaz en aval de l'arc par absorption du rayonnement. De façon générale,

le modèle P_1+MADF conduit à un arc plus étalé avec des traînées de gaz chauds plus étendues pouvant avoir des effets importants sur le phénomène de reclaquage. Ce phénomène contribue à détériorer les systèmes utilisés et peut s'avérer dangereux.

Notre modèle de rayonnement, constitué de la méthode P_1 associée au modèle MADF pour les propriétés radiatives, est operationnel dans le code NS2 avec un temps de calcul à peine deux fois plus important que le modèle d'émission nette si on utilise MADF-36.

III.4 Conclusion

Nous avons montré dans cette partie quelles sont les limites de la méthode P_1 pour le calcul de la puissance radiative et des flux radiatifs dans le cadre des plasmas et des géométries qui nous intéressent. Cette méthode, connue pour être précise dans des milieux optiquement épais et dans des géométries peu allongées, l'est moins dans les plasmas d'air que l'on peut trouver dans des chambres de coupure de disjoncteur basse tension. Elle est toutefois largement utilisée par la communauté des plasmas thermiques. Il est possible de l'améliorer avec une méthode de type SP_1 au prix de la résolution de deux équations au lieu d'une. Nous n'avons pas exploité cette possibilité ici. Nous avons montré son niveau de précision sur le calcul de puissance radiative dans les zones froides et dans les zones chaudes d'un plasma d'arc fictif suivant un profil de température prescrit analytiquement. Nous avons également montré le niveau de précision espéré sur les flux dans des géométries très allongées. On peut estimer globalement la précision à environ 10 % pour les puissances volumiques dans les zones émettrices et 20 à 30 % dans les zones absorbantes. Le flux intégré sur toute la surface de la géométrie est correctement prédit mais sa distribution spatiale l'est moins bien.

Compte tenu de ce niveau de précision et des temps de calcul attendus en géométrie bidimensionnelle, cette méthode a été implémentée dans le logiciel de calcul hydrodynamique $NS2$ afin d'améliorer la prédiction des transferts radiatifs. Nous avons montré que l'utilisation de cette méthode est possible en terme de temps CPU puisque nous obtenons un facteur 2 entre une méthode par émission nette et une méthode P_1 avec un modèle à 36 gaz et avec un pas de temps de calcul du rayonnement Δt_{rayt}=50Δt_{fluide}.

La comparaison entre les résultats obtenus avec les deux modèles de rayonnement (P_1+MADF et émission nette) a montré une grande sensibilité de la dynamique de l'arc au type de modèle utilisé.

D'autre part ce modèle P_1+MADF présente, par rapport à la méthode d'émission nette, un intérêt pour la simulation de la quantité de matière plastique (PMMA ou PA6) ablatée des parois dans la mesure où il fournit une première estimation des flux radiatifs. Cependant, nous avons montré que la distribution spatiale des flux était très mal prédite avec la méthode P_1, en particulier pour des géométries allongées. Pour pouvoir espérer simuler quantitativement et localement l'ablation des parois, il est nécessaire d'employer d'autres méthodes. Nous présentons dans la partie suivante une approche probabiliste de calcul des transferts radiatifs à partir de la méthode de Monte Carlo. C'est l'approche qui a été retenue pour la simulation tridimensionnelle du transfert radiatif au sein d'un arc électrique.

Chapitre IV

Méthode Monte Carlo optimisée en géométrie complexe tridimensionnelle

Table des matières

IV.1 Introduction 97

IV.2 Méthodes de Monte Carlo appliquées aux transferts radiatifs . 99

IV.2.1 Quelques principes généraux 99

IV.2.2 Équation de transfert radiatif dans le cadre probabiliste 101

Algorithme de Monte Carlo forward 101

Algorithme de Monte Carlo backward 108

IV.2.3 Estimateurs statistiques des flux radiatifs, des puissances et de leurs variances 109

IV.3 Algorithmes de partitionnement spatial 110

IV.3.1 Introduction et bibliographie 110

IV.3.2 Optimisation par Octree 111

IV.3.3 Optimisation par BSP 116

Cas général 116

Cas particulier : le kd-tree 118

IV.3.4 Construction d'une fonction entropie d'information spatiale . . . 120

Définition de la fonction de gain 120

Choix de la mesure d'impureté : fonction entropie de Shannon . . 121

IV.4 Mise en oeuvre : algorithmie et structures de données associées 122

IV.4.1 Algorithmie de détection de faces solides tridimensionnelles . . . 122

Algorithme de découpe des faces solides 122

Modélisation de la frontière et structure de données du maillage virtuel 123

Suppression des faces virtuelles situées à une profondeur maximum 125

Exemple de génération de l'octree de détection d'obstacles 125

IV.4.2 Raffinement adaptatif de maillage 127

Principe de la méthode de raffinement spatial 127

Choix du critère de tolérance et du nombre minimum de cellules pour le raffinement 128

IV.5 Propagation de rayons dans l'octree 131

IV.5.1 Principe général de l'algorithme physique 131
Présence d'un obstacle mais pas d'impact détecté 131
Présence d'un obstacle avec détection d'impact à l'intérieur de la feuille 132
Présence d'un obstacle avec détection d'impact à l'extérieur de la feuille 132
IV.5.2 Intersection entre un rayon et une face solide 134
IV.5.3 Intersection entre un rayon et une face du maillage Octree 136
IV.5.4 Positionnement dans l'octree au cours de la propagation 137
IV.5.5 Algorithme de choix de la cellule absorbante 138
IV.6 Filtrage spatial des champs bruités de puissance et de flux radiatifs 141
IV.6.1 Fonction de recherche de voisins d'ordre n 141
IV.6.2 Choix des fonctions de filtrage F_P et F_Φ 143
IV.6.3 Exemple de filtrage spatial 143
IV.7 Algorithmie de calculs parallèles 147
IV.7.1 Choix de parallélisation 147
IV.8 Conclusion 149

IV.1 Introduction

Les méthodes de Monte Carlo ont été utilisées depuis très longtemps pour traiter des problèmes complexes à grand nombre de variables. L'un des premiers mathématiciens à utiliser cette méthode a été Buffon pour résoudre le fameux problème de l'aiguille de Buffon. Au début du vingtième siècle, la méthode a été utilisée pour résoudre l'équation de Boltzmann. En 1908, le statisticien Student utilise cette méthode pour estimer un paramètre de corrélation dans des distributions de variables aléatoires. (Rubinstein 1981) donne une bonne introduction à l'utilisation de cette méthode et à son application dans différentes branches de la science et de l'ingénierie. C'est à Von Neumann et Ulam que revient la paternité du terme alors qu'ils travaillaient ensemble au projet Manhattan au début des années 1940. Ils appliquèrent cette méthode probabiliste pour simuler la diffusion de neutrons dans des matériaux fissiles. Peu après, la méthode s'est étendue aux calculs d'intégrales à grand nombre de dimensions.
Cette méthode a historiquement été utilisée pour résoudre des problèmes de nature aléatoire. Elle peut aussi être utilisée pour résoudre des problèmes déterministes. C'est cette approche qui est appliquée dans le cas du transfert radiatif : (Siegel et Howell 2002) montrent son intérêt pour des géométries complexes où d'autres méthodes sont peu précises ou sont trop longues en terme de temps CPU. Le but de la méthode est de calculer les flux radiatifs et les puissances radiatives au sein du milieu. Il existe différentes variantes de la méthode de Monte Carlo dans le cadre du transfert radiatif. Les premiers travaux dans ce domaine débutent avec Howell et Perlmutter qui proposent d'appliquer la méthode dans le cas d'un milieu participant avec parois grise puis dans le cas d'un milieu anisotherme avec des propriétés optiques dépendantes du profil de température. Plusieurs techniques de réduction de variance ont été proposées, historiquement appliquées aux problèmes de transport de neutrons (Mikhailov 1991). (Cherkaoui, Dufresne, Fournier, Grandpeix, et Lahellec 1998), (Walter et Buckius 1992) ainsi que (Tessé, Dupoirieux, Zamuner, et Taine 2002) proposent de considérer des méthodes basées sur le principe de réciprocité qui peuvent conduire à des gains substantiels en temps de calculs pour des milieux à faibles gradients de température. Parallèlement au développement de techniques de réduction de variance, des techniques d'optimisation de tracé de rayons en géométries complexes ont été mises au point dans le domaine de la synthèse d'images. Parmi celles-ci, la technique de partitionnement spatial par octree a été étendue au cas de milieux participants comme les gaz de combustion par (Perez 2002). Une revue détaillée de ce type de techniques est donnée au paragraphe IV.3.

D'autres auteurs proposent des méthodes hybrides Monte-Carlo/diffusion (Farmer et Howell 1994) ou Volumes Finis/Monte Carlo (Baek, Byun, et Kang 2000). Pour des besoins de simulations couplées, la méthode de Monte Carlo a été utilisée dans des milieux en combustion dans (Wu, Modest, et Haworth 2007) et (Tessé 2001). Dans le cas des plasmas

thermiques cette méthode a été utilisée par (Gogel, Sedghinasab, et Kiefer 1994) pour montrer le couplage entre la conduction thermique, électrique et le transfert radiatif dans le cas de plasmas cylindriques d'azote. Elle n'a pas encore été utilisée pour prédire les champs de puissances radiatives et de flux aux parois dans des milieux plasmas confinés dans des géométries tridimensionnelles complexes.

Nous présentons dans le paragraphe qui suit les principes généraux de la formulation probabiliste du calcul de transfert radiatif. Nous avons choisi de considérer deux algorithmes physiques de calculs dans notre étude : l'un dit de "dépôt progressif" et l'autre dit de "dépôt final". L'algorithme physique de "dépôt final" se décline à son tour dans deux versions qui diffèrent uniquement par la trajectographie et la discrétisation des rayons considérés. Nous présentons ensuite différentes méthodes d'optimisation du problème de tracé de rayons, classique dans des problèmes de graphisme sur ordinateur et de traitement d'images pour des calculs de rendu. Ces méthodes reposent sur l'utilisation de structures de données efficaces adaptées aux algorithmes développés. L'algorithme de partitionnement spatial développé dans le cadre de cette étude, ainsi que la structure de données associée, sont détaillés dans le paragraphe IV.4. La propagation des rayons dans l'espace, ainsi partitionné, est décrite dans le paragraphe IV.5.

IV.2 Méthodes de Monte Carlo appliquées aux transferts radiatifs

IV.2.1 Quelques principes généraux

Considérons un domaine Ω ayant pour frontière $\partial\Omega$ tel que montré sur la figure IV.1. Ce domaine contient un milieu fluide à l'équilibre thermodynamique local mais en déséquilibre radiatif, dans lequel règne des champs de température, de pression et de composition chimique que nous appelons champs thermophysiques dans la suite. Les champs de puissance radiative et des flux pariétaux dépendent des coefficients d'absorption spectraux qui eux-mêmes dépendent des champs thermophysiques. Nous notons la position de tout point de Ω par $\vec{r}(T, P, x_i)$ et de tout point de $\partial\Omega$ par $\vec{z'}(T, P, x_i)$ et nous choisirons de ne pas noter la dépendance en fonction des champs thermophysiques locaux. Le point $\vec{r}$ émet du rayonnement de manière isotrope dans l'espace et en reçoit de tout le domaine Ω et de toute la frontière $\partial\Omega$. Un bilan d'énergie conduit à écrire la puissance radiative en ce point comme :

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{q_r}(\vec{r}) &= \int_\nu 4\pi\kappa_\nu(\vec{r}) I_\nu^0(\vec{r}) d\nu \qquad \text{(IV.1)} \\
&\quad \text{(puissance émise en mince du point } \vec{r}\text{)} \\
&- \int_\nu \kappa_\nu(\vec{r}) \left\{ \int\int\int_{\vec{r'}\in\Omega} \kappa_\nu(\vec{r'}) I_\nu^0(\vec{r'}) \exp\left[-\int_0^{|\vec{r'}-\vec{r}|} \kappa_\nu(s') ds' \right] \frac{d\vec{r'}}{\mid \vec{r'} - \vec{r} \mid^2} \right\} d\nu \\
&\quad \text{(puissance transmise de tout le domaine } \Omega \text{ et absorbée en } \vec{r}\text{)} \\
&- \int_\nu \kappa_\nu(\vec{r}) \left\{ \int\int_{\vec{z'}\in\partial\Omega} I_\nu^p(\vec{z'}) \exp\left[-\int_0^{|\vec{z'}-\vec{r}|} \kappa_\nu(s') ds' \right] \frac{(\vec{z'} - \vec{r}) \cdot d\vec{S}(\vec{z'})}{\mid \vec{z'} - \vec{r} \mid^3} \right\} d\nu \\
&\quad \text{(puissance transmise de toute la frontiere } \partial\Omega \text{ et absorbée en } \vec{r}\text{)}
\end{aligned}$$

Les parois du domaine sont supposées être à l'équilibre thermodynamique local. Dans ces conditions, l'absorptivité et l'émissivité des parois sont égales. De plus, le terme de puissance transmise de la frontière fait intervenir la luminance partante de la frontière qui peut s'écrire en fonction de la luminance incidente comme :

$$I_\nu^p(\vec{z'}) = \epsilon_{\nu p} I_\nu^0(\vec{z'})(+(1 - \epsilon_{\nu p}) I_\nu^i(\vec{z'}) \qquad \text{(IV.2)}$$

Dans le cas d'un réflexion spéculaire, cette luminance incidente $I_\nu^i(\vec{z'})$ est celle correspondant à la direction symétrique de $\vec{r} - \vec{z'}$ par rapport à la normale à la paroi. Dans le cas d'une réflexion diffuse, il s'agit d'un luminance équivalente intégrée sur toutes les directions d'incidence. Ainsi, on peut également écrire le flux radiatif aux parois du domaine de manière analogue à l'équation IV.2. Nous rappelons que dans le cadre du modèle MADF des propriétés radiatives du plasma, les parois doivent avoir une émissivité $\epsilon_{\nu p}$ nécessairement

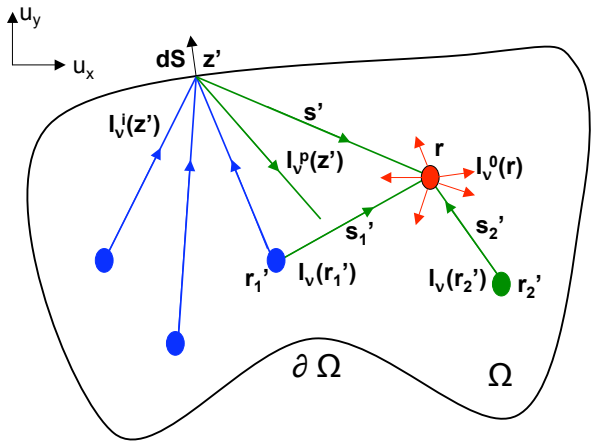

Figure IV.1 – *Echange d'énergie par rayonnement dans un milieu fluide : bilan dans le domaine et sur sa frontière*

grise.
On voit que le problème de calcul de la puissance radiative et du flux radiatif fait intervenir des intégrales non triviales et multidimensionnelles à calculer. En effet, dans des géométries tridimensionnelles, les variables de notre problème sont la fréquence d'émission, 3 coordonnées de position et 2 angles de direction de propagation pour calculer l'intégrale sur l'angle solide. De plus, le milieu étant non gris, la dépendance spectrale du coefficient d'absorption est complexe ce qui rend une approche de calcul de l'intégrale spectrale impossible en considérant toutes les raies de façon individuelle pour des questions de temps CPU et surtout de stockage. De plus cette dépendance change d'un point à un autre du domaine car le fluide est anisotherme. Il faut donc prendre en compte les corrélations spectrales entre les coefficients d'absorption en différents points du domaine. Nous utilisons pour calculer cette intégrale le modèle MADF (dans sa version d'origine ou optimisé à 36 gaz).

Nous allons montrer dans cette partie comment on peut traiter le problème de calcul de ses intégrales multidimensionnelles par des méthodes probabilistes et les choix qui ont été retenus et implémentés en Fortran 95 dans le cadre de ce travail. Notons que dans un problème de simulation, le domaine est maillé avec un maillage qui peut être quelconque en terme de nature des cellules élémentaires et éventuellement mixte et non conforme. Dans le cas le plus général, ce maillage est amené à bouger et à se déformer lors d'une simulation de coupure en géométrie réelle.

IV.2.2 Équation de transfert radiatif dans le cadre probabiliste

Le point commun de tous les algorithmes Monte Carlo est le choix de variables aléatoires pour simuler des évènements suivant des densités de probabilité. Les méthodes diffèrent alors par le choix des variables physiques que l'on décrit à l'aide de variables aléatoires. Nous présentons dans ce travail deux algorithmes physiques de résolution. Le premier algorithme dit de "dépôt final" propose de traiter par des variables aléatoires la direction de tir pour simuler l'intégrale sur l'angle solide, le point d'absorption du milieu suivant les propriétés thermophysiques et l'intégrale sur la fréquence d'émission qui correspond à un choix de l'échelle du coefficient d'absorption parmi 216 (resp. 36) dans le cadre du modèle MADF. Les réflexions aux parois sont également traitées de manière statistique en fonction de l'émissivité de la paroi. Le deuxième algorithme dit de "dépôt progressif" reprend le traitement statistique pour les mêmes variables physiques que dans le premier cas hormis pour le dépôt d'énergie qui est traité de manière déterministe et continue.

Algorithme de Monte Carlo forward

- **Choix du point de tir et du nombre de tirs d'une cellule**

  Il existe plusieurs possibilités de choix pour l'origine des rayons. Dans ce travail, et pour des maillages quelconques tétraédriques ou hexaédriques, des tirs sont générés à partir des cellules du maillage fluide et des faces solides. Les points origines des tirs sont les barycentres des cellules et des faces solides, comme montré sur les Fig.IV.2 et IV.3. Le choix de tir des barycentres des cellules pose des problèmes pour les cellules optiquement épaisses. En effet, la puissance radiative s'échappant d'une cellule épaisse n'est pas estimée correctement en ne considérant que des rayons issus du barycentre. En toute rigueur, il est nécessaire d'effectuer un tirage uniforme dans le volume de chaque cellule. Pour ce faire, une possibilité consiste à utiliser un algorithme de rejet : on peut par exemple générer uniformément un point dans un parallélépipède rectangle englobant la cellule et tester si le point généré est à l'intérieur ou à l'extérieur du volume. Ces tests d'appartenance peuvent être faits en utilisant le critère de Jordan (explicité plus loin) mais sont coûteux en temps CPU si la cellule est de volume petit devant celui du parallélépipède englobant. Etant donné la nature très générale des maillages fluides à considérer ici nous avons préféré ne pas utiliser un tel algorithme.
  Les maillages initiaux, qui servent de point de départ pour le calcul des transferts radiatifs, sont imposés a priori par le problème de discrétisation des équations de Navier-Stokes. Ces maillages sont suffisamment fins de façon à avoir de faibles différences des variables thermophysiques entre cellules voisines. Les cellules peuvent être cependant très épaisses optiquement (en particulier pour les échelles correspondant aux fréquences du VUV) dans le cas des plasmas thermiques.
  Nous avons implémenté dans le cas plus restrictif des maillages tétraédriques un algorithme de tirage uniforme des points d'émission au sein d'une cellule donnée qui ne nécessite pas le recours à des rejets, et qui est donc peu coûteux en termes de temps de calcul. Dans une cellule tétraédrique de sommets $ABCD$, et à partir de trois nombres aléatoires uniformes sur $[0;1]$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, on définit d'abord un triangle $B'C'D'$ parallèle à BCD par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB'} &= \alpha_1^{1/3}\overrightarrow{AB}\\ \overrightarrow{AC'} &= \alpha_1^{1/3}\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AD'} &= \alpha_1^{1/3}\overrightarrow{AD},\end{aligned} \tag{IV.3}$$

puis dans ce triangle, un segment $C''D''$ parallèle à $C'D'$ par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B'C''} &= \alpha_2^{1/2}\overrightarrow{B'C'}\\ \overrightarrow{B'D''} &= \alpha_2^{1/2}\overrightarrow{B'D'},\end{aligned} \tag{IV.4}$$

et enfin le point de tir O par

$$\overrightarrow{C''O} = \alpha_3\overrightarrow{C''D''}. \tag{IV.5}$$

Un tel algorithme pourrait être généralisé de façon relativement simple à des cellules hexaédriques une fois décomposée en tétraédres.
Le nombre de tirs à partir de chaque cellule et de chaque face solide est déterminé à partir de l'émission mince de chaque cellule du milieu et de chaque face solide de la frontière du domaine. Ainsi on peut écrire la puissance émise en mince d'une cellule i, de volume ϑ_i, du maillage fluide, dans le cadre du modèle MADF à N_ν gaz (216 ou 36 en pratique) par :

$$P_i^e = 4\sigma T_i^4 \vartheta_i \sum_{j=1}^{N_\nu} a_j(T_i)k_j(T_i) \tag{IV.6}$$

De même pour le flux émis à partir d'une face solide i de surface S_i :

$$\Phi_i^e = \epsilon_i \sigma T_i^4 S_i \sum_{j=1}^{N_\nu} a_j(T_i) \tag{IV.7}$$

Le nombre total N_{tot} de tirs dans la simulation Monte Carlo est scindé en N_{paq} paquets de $N_{tot}^{paq} = N_{tot}/N_{paq}$ afin de réaliser des estimations des variances des différentes grandeurs calculées. Au sein d'un paquet, le nombre de tirs par une cellule i est donné par :

$$N_{tir,i}^c = E\left[N_{tot}^{paq}\frac{P_i^e}{\sum_{j=1}^{N^c} P_j^e + \sum_{j=1}^{N^f}\Phi_j^e}\right], \tag{IV.8}$$

où E désigne la partie entière, N^c et N^f désigne respectivement le nombre de cellules et le nombre de faces solides dans le maillage, et le nombre de tirs des faces solides est donné par :

$$N_{tir,i}^f = E\left[N_{tot}^{paq}\frac{\Phi_i^e}{\sum_{j=1}^{N^c} P_j^e + \sum_{j=1}^{N^f}\Phi_j^e}\right] \tag{IV.9}$$

Le choix de considérer à la fois l'émission des faces solides et des cellules dans une même variable énergie totale émise permet d'adapter le calcul de transfert radiatif au problème étudié et notamment à ne pas se poser la question de l'importance de l'émission des faces

par rapport à celle du volume. Il est à noter que la puissance élémentaire $\mathcal{E}_i$ transportée par un paquet émis par une cellule ou une face i est presque constante et vaut :

$$\mathcal{E}_i \approx \mathcal{E} = \frac{\sum_{j=1}^{N^c} P_j^e + \sum_{j=1}^{N^f} \Phi_j^e}{N_{tot}^{paq}}. \tag{IV.10}$$

L'écart entre $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}$ est calculé de telle sorte à conserver rigoureusement la répartition de l'émission totale entre les différents élements de volume et de surface.

- **Choix de la direction de tir**

La direction de tir est également choisie aléatoirement suivant une densité de probabilité que l'on va préciser. Ecrivons la puissance volumique monochromatique émise par un élément de volume du milieu dans tout l'espace :

$$\begin{aligned} P_\nu(\vec{r}) &= \int_{4\pi} \kappa_\nu(\vec{r}) L_\nu^0(\vec{r}) \mathrm{d}\Omega \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \kappa_\nu(\vec{r}) L_\nu^0(\vec{r}) \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi, \end{aligned} \tag{IV.11}$$

où les angles θ et φ sont définis dans la figure IV.2. On peut donc choisir une densité de probabilité uniforme sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ pour l'angle φ et θ est obtenu à partir d'une variable aléatoire uniforme dans $[0; 1]$ Γ_θ^c donnée par :

$$\Gamma_\theta^c = \frac{1 - \cos\theta}{2} \tag{IV.12}$$

Le choix qui est fait ici correspond à un choix d'échantillonnage selon l'importance dans le but de construire un estimateur non biaisé. Toutefois, il est possible de choisir d'autres densités de probabilité à condition de tenir compte de la contribution d'un poids (qui correspond au ratio de vraissemblance) à l'estimateur total.
De même, on peut écrire la densité surfacique de flux émis à la paroi comme :

$$\Phi_\nu(\vec{s}) = \int_{\theta'=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \epsilon_\nu L_\nu^0(\vec{r}) \cos\theta' \sin\theta' \mathrm{d}\theta' \mathrm{d}\varphi' \tag{IV.13}$$

Ceci correspond à un angle φ' tiré uniformément sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ et un angle θ' choisi selon la densité de probabilité cumulée :

$$\Gamma_{\theta'}^f = \frac{\sin^2\theta'}{2}, \tag{IV.14}$$

choisie uniforme. Les angles φ' et θ' sont choisis dans un référentiel orthonormé lié à la face solide. Ces angles sont donc tirés aléatoirement dans ce référentiel puis une matrice de passage attachée à chaque face solide permet de les exprimer dans le référentiel global du maillage fluide (figure IV.3).

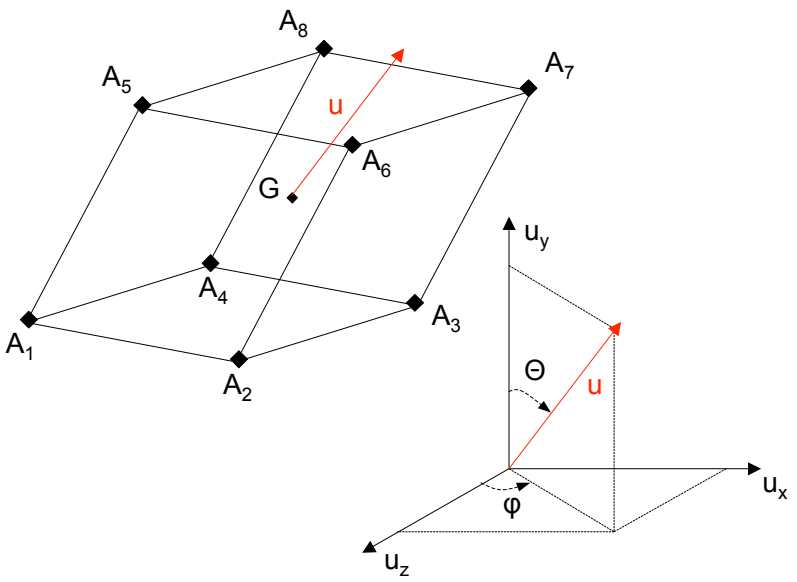

Figure IV.2 – *Choix du point de tir et de la direction de tir pour un rayon sortant d'une cellule*

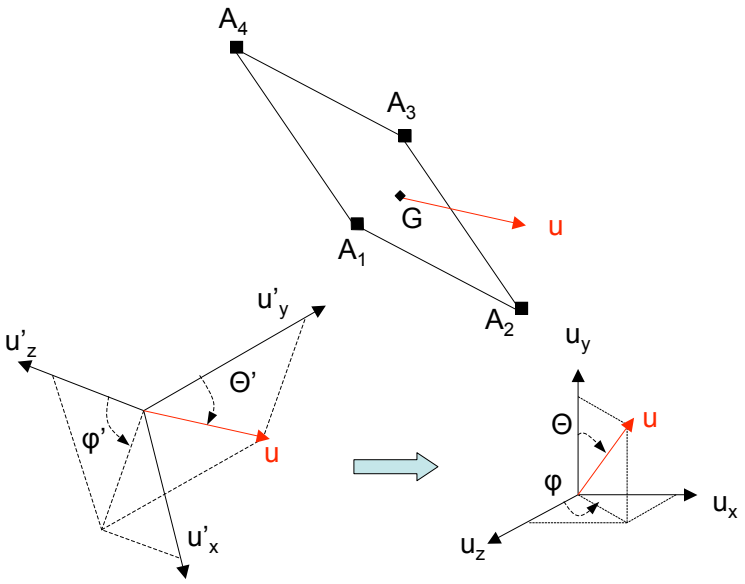

Figure IV.3 – *Point et direction de tir d'un rayon à partir d'une face : changement de repère*

- **Choix de la fréquence de tir d'une cellule**

Le choix de la fréquence de tir au sein d'une cellule se fait en fonction d'une densité de probabilité cumulée représentant la distribution spectrale de l'émission totale. La densité de probabilité cumulée s'écrit ici :

$$\Gamma_\nu^c(\nu') = \frac{\int_0^{\nu'} \kappa_\nu(\vec{r}) L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu}{\int_0^{+\infty} \kappa_\nu(\vec{r}) L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu} \tag{IV.15}$$

Dans le cadre du modèle MADF, cette densité cumulée peut s'écrire également comme :

$$\Gamma_\nu^c(N') = \frac{\sum_{i=1}^{N'} a_i(T) k_i(\vec{r})}{\sum_{i=1}^{N_\nu} a_i(T) k_i(\vec{r})} \tag{IV.16}$$

avec $N_\nu = 216$ ou $N_\nu = 36$ suivant le modèle de propriétés spectrales utilisé et N' le numéro de gaz choisi.

La figure IV.4 représente la densité de probabilité cumulée Γ_ν^c pour plusieurs températures de cellule. On voit que plus la température est élevée, plus les échelles de coefficient d'absorption de numéro élevé ont de chance d'être choisies au hasard : en effet, la contribution spectrale de chaque gaz "gris" à l'émission mince dépend de la température du milieu. On voit également qu'autour d'une température de 13000K, qui est la température de référence de la classe fictive 2, on réalise une quasi équipartition de la densité d'énergie spectrale.

- **Choix de la fréquence de tir d'une face solide**

De même que précédemment, on choisit la fréquence de tir des faces à partir d'une densité de probabilité cumulée similaire à celle des cellules :

$$\Gamma_\nu^f(\nu') = \frac{\int_0^{\nu'} L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu}{\int_0^{+\infty} L_\nu^0(T) \mathrm{d}\nu} \tag{IV.17}$$

Dans le cadre du modèle MADF, cette densité cumulée peut s'écrire également comme :

$$\Gamma_\nu^f(N') = \frac{\sum_{i=1}^{N'} a_i(T)}{\sum_{i=1}^{N_\nu} a_i(T)}. \tag{IV.18}$$

- **Traitement de la transmission et de l'absorption**

  - **Algorithme de dépôt final**

L'algorithme de dépôt final traite la transmittivité du milieu de manière probabiliste. Ainsi si on considère une colonne de plasma de longueur d et étant donnée une fréquence de tir choisie (ν ou i en MADF), le coefficient d'absorption $\kappa_\nu(s)$ en tout point d'abscisse s le long de cette colonne est complètement déterminé par ν et $T(s)$. Nous pouvons donc écrire la transmittivité de cette colonne comme :

$$\tau_\nu(d) = \exp\left[-\int_0^d \kappa_\nu(T(s)) \mathrm{d}s\right] \tag{IV.19}$$

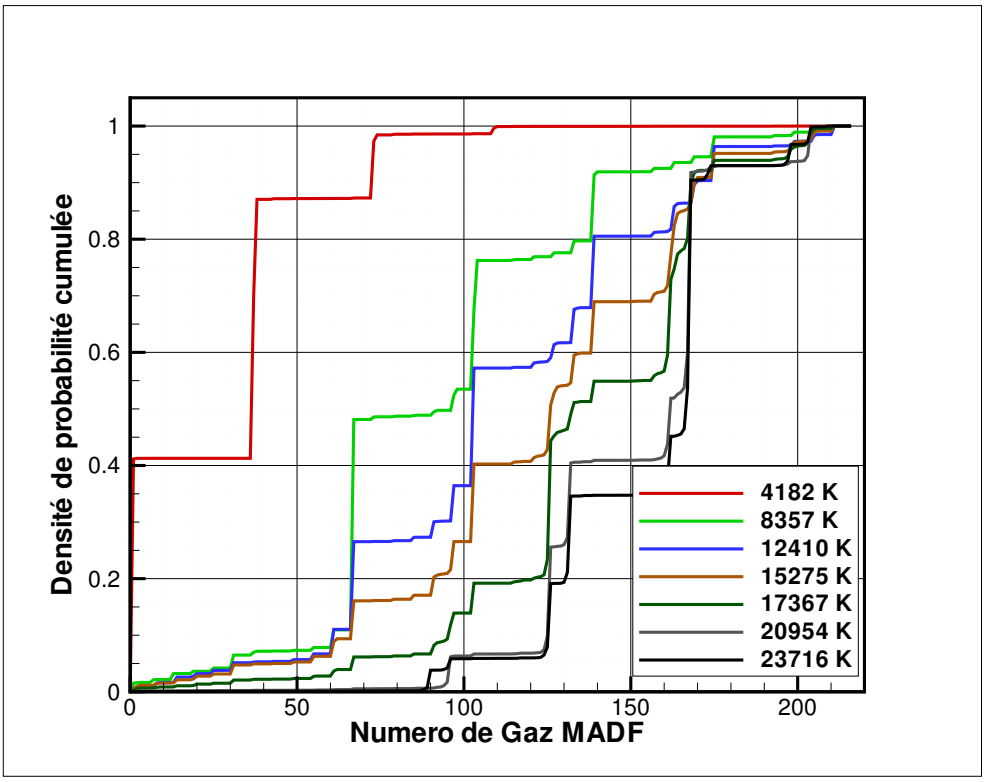

Figure IV.4 – *Fonction de distribution cumulée de la fréquence dans le cadre du modèle MADF 216 pour différentes températures de cellule*

Cette transmittivité τ_ν étant tirée au hasard suivant une densité de probabilité uniforme sur $[0, 1]$ la distance à parcourir avant absorption est donnée par :

$$\int_0^{d_{abs}^{(0)}} \kappa_\nu(T(s))\mathrm{d}s = \ln \frac{1}{\tau_\nu} \tag{IV.20}$$

Dans le cadre du modèle MADF, cette distance s'écrit encore :

$$\int_0^{d_{abs}^{(0)}} \kappa_i(T(s))\mathrm{d}s = \ln \frac{1}{\tau_i} \tag{IV.21}$$

où i correspond à un indice compris entre 1 et 216 tiré au hasard suivant la loi IV.16 pour le tir d'une cellule et suivant la loi IV.18 pour le tir d'une face. Comme le coefficient d'absorption change le long de la trajectoire du paquet d'énergie avec les propriétés thermophysiques, l'inversion des relations précédentes est effectuée en réévaluant à chaque traversée par le rayon d'un élément homogène isotherme n de température T_n et de longueur $\ell^{(n)}$ l'épaisseur optique selon :

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} - k_i(T_n)\ell^{(n)}, \tag{IV.22}$$

avec $\sigma^{(0)} = \ln(1/\tau_i)$. Cette épaisseur optique actualisée nous permet de réévaluer la nouvelle distance à parcourir avant absorption par :

$$d_{abs}^{(n+1)} = \frac{\sigma^{(n+1)}}{k_i(T_{n+1})}. \tag{IV.23}$$

Ce processus est poursuivi jusqu'à l'intersection du rayon avec une paroi ou absorption dans le milieu. Il y a absorption du paquet par une cellule lorsque l'épaisseur optique, calculée par IV.22, s'annule ou devient négative. Dans le cas de l'algorithme de dépôt final, on dépose alors l'ensemble de l'énergie transportée par le paquet dans cette cellule. On peut déterminer les coordonnées exactes du point absorbant le long de la trajectoire et donc la cellule absorbante dans le maillage selon un algorithme précisé plus loin.

- **Algorithme de dépôt progressif**

Dans le cas de l'algorithme de dépôt progressif, on suit la trajectoire du paquet, émis initialement par un élément de volume ou de surface i, dans le maillage fluide et on dépose une fraction de puissance transportée dans chaque cellule n traversée en fonction de la distance ℓ^n parcourue dans celle-ci et du coefficient d'absorption local $k_i(T_n)$. La puissance déposée $\mathcal{E}_i^n$ s'écrit alors :

$$\mathcal{E}_i^{(n)} = \mathcal{E}_i[1 - \exp(-k_i(T_n)\ell_n)] \prod_{j=0}^{n-1} \exp(-k_i(T_j)\ell_j). \tag{IV.24}$$

La propagation du paquet s'arrête lorsque la puissance transmise devient inférieure à une fraction prédéfinie de la puissance initiale.

- **Traitement des réflexions**

  - **Algorithme de dépôt final**

Dans le cas de parois non noires, il faut traiter les réflexions éventuelles des rayons impactant les parties solides. Ce traitement peut être fait soit de manière déterministe soit de manière probabiliste. Pour rester cohérent avec la démarche adoptée, les réflexions sont également traitées de manière probabiliste. Si un rayon impacte une face solide avant d'être absorbé, il faut déterminer si l'énergie transportée est absorbée à la paroi ou si le rayon est réfléchi. On tire un nombre aléatoire uniformément sur $[0, 1]$; il est comparé à l' absorptivité de la face solide. Si ce nombre est inférieur à l'absorptivité, il y a absorption de la totalité de l'énergie transportée sinon il y a réflexion de la totalité de l'énergie transportée.

  - **Algorithme de dépôt progressif**

Le traitement des réflexions éventuelles se fait dans le cas de l'algorithme de dépôt progressif de manière déterministe pour conserver une certaine cohérence dans le dépôt d'énergie. Dans ce cas, une fraction de l'énergie transportée par le rayon, égale à l'émissivité ϵ de la face solide, est absorbée par la face solide impactée. Le rayon est donc toujours réfléchi avec une énergie transportée multipliée par $(1 - \epsilon)$.

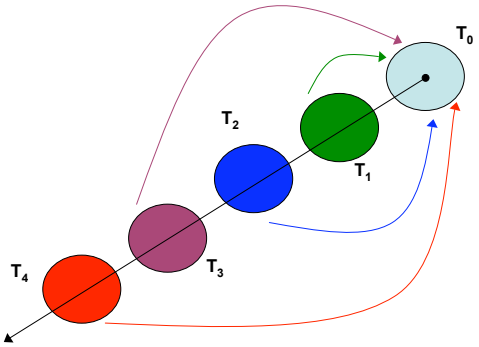

Figure IV.5 – *Principe de la méthode de Monte Carlo Backward*

Algorithme de Monte Carlo backward

Cette version de la méthode de Monte Carlo qui s'appuie sur le principe de réciprocité explicité dans (Case 1957) peut s'avérer intéressante si on ne recherche que des flux ou des puissances dans des endroits localisés du système ou pour des directions d'incidence particulières. Par exemple, pour le calcul de la puissance absorbée par une cellule donnée (de température T_0), le principe de la méthode repose sur le tir de rayons à partir de cette cellule et sur le calcul de l'émission par les différentes cellules traversées (de températures T_1, $T_2 \ldots$) vers la cellule initiale d'intérêt. La figure IV.5 illustre cette méthode de calcul de puissance absorbée.

Cette méthode est par exemple exploitée dans l'algorithme ERM développé dans (Tessé, Dupoirieux, Zamuner, et Taine 2002). Dans cet algorithme, on exploite le fait que la transmitivité globale le long d'un segment sur la trajectoire ne dépend pas du sens de parcours le long de cette trajectoire. Les événements statistiques sont générés comme dans la méthode forward, mais lors de la traversée de chaque cellule j, la puissance qui y serait absorbée dans la méthode forward est renvoyée vers la cellule émettrice i avec un facteur $(L^0_\nu(T_j)/L^0_\nu(T_i) - 1)$.

Cette méthode peut présenter des problèmes de convergence sur l'estimateur de flux radiatif et l'estimateur de puissance radiative dans des milieux dont les propriétés spectrales sont fortement hétérogènes. En effet, La densité de probabilité utilisée pour le tir des "fréquences" est celle de la zone émettrice. Or dans le cas de forts gradients de température, et sachant que le spectre d'émission dépend fortement de cette température, ces densités de probabilités ne sont pas adaptées au calcul de l'absorption par les zones froides du milieu (Ce rayonnement étant essentiellement émis par les zones chaudes). Cette méthode ne présente donc pas d'intérêt en terme de réduction de variance dans des milieux spectralement très hétérogènes comme ceux rencontrés dans les plasmas d'arc électrique. Nous ne l'avons donc pas implémentée dans ce travail.

IV.2.3 Estimateurs statistiques des flux radiatifs, des puissances et de leurs variances

Le calcul de l'estimateur du champ de flux radiatif aux parois se fait en écrivant un bilan d'énergie pour chaque face solide du maillage. Le flux émis en mince Φ_i^e de chaque face solide est calculé une fois pour toutes selon l'équation déterministe IV.7 et est parfaitement fixé par la température de la face et son émissivité. Le flux radiatif reçu par chaque face est estimé statistiquement. L'ensemble des tirs est divisé en N_{paq} paquets qui vont correspondre à N_{paq} réalisations de la variable aléatoire "flux radiatif incident". Ainsi nous pouvons noter pour une face solide i de la frontière du maillage fluide et pour le $k^{\text{ième}}$ paquet $\widetilde{\Phi}_{i,k}^a$ la réalisation de cette variable aléatoire. Le bilan d'énergie au sein du $k^{\text{ième}}$ paquet et pour la face i impose donc d'écrire le flux net comme :

$$\tilde{\Phi}_{i,k} = \Phi_i^e - \tilde{\Phi}_{i,k}^a. \tag{IV.25}$$

Ainsi l'estimateur sur le champ de flux radiatif s'écrit comme :

$$\tilde{\Phi}_i^{N_{paq}} = \frac{1}{N_{paq}} \sum_{k=1}^{N_{paq}} \tilde{\Phi}_{i,k} \tag{IV.26}$$

La mesure de convergence peut ainsi se calculer par la variance en fonction du nombre de paquets utilisés pour l'estimation. Ainsi on peut écrire l'estimateur de la variance associée comme :

$$\tilde{\sigma}_{i,N_{paq}}^2 = \frac{1}{N_{paq}(N_{paq}-1)} \sum_{k=1}^{N_{paq}} \left[\tilde{\Phi}_{i,k} - \tilde{\Phi}_i^{N_{paq}}\right]^2 \tag{IV.27}$$

où $\tilde{\sigma}_{i,N_{paq}}$ représente l'estimateur de l'écart-type sur le flux radiatif pour la face solide i.

Un bilan identique peut être fait pour déterminer le champ de puissance radiative au sein du volume fluide. Ainsi la puissance émise en mince est calculée de façon déterministe dans chaque cellule du maillage selon IV.6. La puissance absorbée pour le $k^{\text{ième}}$ paquet et pour la cellule i, notée $\widetilde{P}_{i,k}^a$, dépend des chemins optiques générés à partir de toutes les cellules du maillage et se terminant dans la cellule i. C'est donc une réalisation de la variable aléatoire "Puissance radiative absorbée". Ainsi pour chaque paquet et pour chaque cellule i du maillage un bilan d'énergie nous permet d'écrire :

$$\tilde{P}_{i,k} = P_i^e - \tilde{P}_{i,k}^a \tag{IV.28}$$

Ainsi l'estimateur de puissance nette pour la cellule i s'écrit en fonction du nombre N_{paq} de paquets :

$$\tilde{P}_i^{N_{paq}} = \frac{1}{N_{paq}} \sum_{k=1}^{N_{paq}} \tilde{P}_{i,k} \tag{IV.29}$$

Comme précédemment, une mesure de convergence est donnée par l'estimateur de la variance associée :

$$\tilde{\sigma}_{i,N_{paq}}^2 = \frac{1}{N_{paq}(N_{paq}-1)} \sum_{k=1}^{N_{paq}} \left[\tilde{P}_{i,k} - \tilde{P}_i^{N_{paq}}\right]^2 \tag{IV.30}$$

IV.3 Algorithmes de partitionnement spatial

La version de l'algorithme de Monte Carlo avec dépôt final nécessite de déterminer une distance de propagation du paquet d'énergie émis. Cette distance avant absorption correspond à un libre parcours moyen du paquet. Mais le milieu n'étant pas homogène, il est nécessaire de réactualiser cette distance en fonction des propriétés thermophysiques locales le long de la trajectoire. Toutefois, cette réactualisation n'est pas nécessaire à chaque traversée de cellule. Il suffit de le faire lorsque les propriétés thermophysiques ont suffisamment changé de façon à modifier l'estimation du libre parcours moyen. Il n'est donc pas non plus nécessaire de calculer les intersections avec les différentes faces fluides le long de la trajectoire d'un rayon pour passer de cellule fluide en cellule fluide. Il suffit de calculer les intersections des rayons avec les faces solides pour déterminer les réflexions ou absorptions éventuelles, à condition de pouvoir estimer les libres parcours moyens pour chaque paquet d'énergie sans utiliser l'information thermophysique stockée sur le maillage fluide.

La procédure que l'on utilise pour optimiser le temps de calcul de la trajectoire dans la géométrie, les intersections éventuelles avec les faces solides et l'estimation adaptative des propriétés thermophysiques est inspirée des algorithmes de traitement d'images et de calcul de rendu sur des scènes tridimensionnelles. C'est un problème d'optimisation géométrique. On va chercher à traiter l'information géométrique sur la position des obstacles ainsi que l'information spatiale sur les gradients thermophysiques comme un problème de classification spatiale de données métriques (Samet 2006a).

IV.3.1 Introduction et bibliographie

Il existe différents algorithmes qui permettent de traiter le problème de classification et de regroupement de données que l'on peut classer en différentes familles tel qu'explicité dans (Wegman et Solka 2005).

Une première famille de méthodes, appelées méthodes à base de noyau de densité, propose la construction d'une fonction de densité de données sur une grille (maillage cartésien) qui discrétise l'espace de recherche. Cette grille peut être adaptative si l'on se fait une idée *a priori* de la densité recherchée. Cette densité permet un regroupement de données en différents sous-groupes. Il est également possible d'utiliser une fonction de maximum de vraissemblance qui est performante dans le cas d'espace de recherche de grande dimension (> 20) : l'algorithme CoFD est présenté dans (Li, Zhu, et Ogihara 2003). Toutefois il est difficile de l'appliquer dans le cas de données spatiales étendues telles que les faces obstacles de maillages tridimensionnels rencontrées dans notre problème.

Une deuxième famille de méthodes utilise un réseau de neurones. Ces méthodes se basent sur l'architecture neuronale biologique pour construire un système qui va reproduire l'activité cérébrale et notamment les processus de décision et de classification. Un réseau de neurones est formé d'un ensemble de neurones artificiels identiques. Il est essentiellement un outil de calcul de régression statistique non linéaire. Une description détaillé des réseaux de neurones dans le cadre du data mining appliqué au traitement d'image peut être trouvé dans (Lin, Ohsuga, et Liau 2005) et (Shirvaikar et Trivedi 1995).

Enfin une troisième famille de méthodes propose un classement hiérarchique des différents

sous-ensembles de l'espace de recherche. Cette famille de classement hiérarchique de données permet une représentation naturelle des sous-ensembles obtenus en arbre de recherche. La structure ainsi obtenue est alors appelée dendrograme. Il convient de distinguer deux sous-méthodes de cette famille de classement hiérarchique de données : les méthodes agglomératives et les méthodes divisives. La première sous-famille de méthodes propose d'agglomérer les données pour former des ensembles de cardinal croissant. Le critère d'union peut être basé sur une distance définie dans l'espace métrique où sont plongées les données (espace euclidien de dimension 3 dans notre cas) ou à l'aide d'une fonction de mesure d'impureté entre les différents sous-ensembles. Si le critère d'agglomération est basé sur une distance, on distingue 3 sous-familles suivant que le critère de regroupement prend en compte des éléments très proches, très éloignés ou de distance moyenne (de manière à éviter les cas d'éloignement extrême). On trouvera des détails sur les méthodes agglomératives dans (Larose 2005). Cette sous-famille de méthodes est la plus utilisée des méthodes de structuration hiérarchique de données. La deuxième sous-famille de méthodes est basée sur un critère de division de l'ensemble de données total. Il s'agit donc d'un raffinement de l'ensemble initial de données pour obtenir des sous-ensembles de plus en plus homogènes selon un critère d'impureté ou selon un critère de distance. Cette méthode est largement utilisée dans les problèmes de classification de données spatiales pour le traitement d'image et le calcul de rendu dans des scènes réelles tridimensionnelles et nous allons montrer comment l'utiliser efficacement pour le problème qui nous intéresse.

Il reste un algorithme qu'il est difficile de classer dans les 3 grandes familles précédentes : l'algorithme K-means. Cet algorithme est décrit dans (Hand, Mannila, et Smith 2001). Il est itératif et permet le regroupement d'un ensemble de données en un nombre fini et fixé à l'avance de sous-ensembles par une succession de pavages de Voronoi de l'espace de recherche. Plusieurs améliorations de cet algorithme ont été proposées et sont décrites notamment dans (Pelleg et Moore 1999). Toutefois cette approche nécessite de connaître *a priori* le nombre de sous-ensembles à l'avance, ce qui peut s'avérer délicat notamment pour des données spatiales. Certains auteurs (Wegman et Solka 2005) proposent la résolution d'un problème d'extrêma de fonctions pour trouver le nombre de sous-groupes optimum.

IV.3.2 Optimisation par Octree

Les algorithmes de calcul de rendu sur des scènes tridimensionnelles complexes décrivant avec une grande précision la luminosité ambiante sont essentiels dans des domaines tels que la réalité virtuelle, les films d'animations ou encore dans les jeux vidéo. Ces algorithmes nécessitent toutefois une grande puissance de calcul numérique car ils sont basés sur des méthodes de lancé de rayons (Whitted 1980), sans toutefois considérer le milieu comme participant. Il est connu depuis (Fujimoto, Tanaka, et Iwata 1986) que 75% à 95% du temps de calcul de tels algorithmes sert à calculer des intersections géométriques entre des rayons et des objets de la scène tridimensionnelle. Depuis le travail pionnier de (Arvo et Kirk 1987), de nombreuses optimisations géométriques ont été proposées. Elles se classent essentiellement en deux familles (Arvo et Kirk 1989) qui proposent soit d'utiliser moins de rayons pour le calcul de rendu (optimisation statistique) soit de calculer les intersections plus rapidement (hiérarchie de volumes englobants, subdivision spatiale, algorithmes d'intersection efficaces). Les structures de données en octree ont été introduites pour la première fois par

(Herbert 1983) pour représenter des objets tridimensionnels complexes autrement que par une succession de cellules primitives (tétraèdres, hexaèdres, pyramides,etc.). Une étude précise sur le coût de tels algorithmes de tracé de rayons peut être trouvée dans (Brönnimann et Glisse 2006), (Aronov, Brönnimann, Chang, et Chiang 2005). Nous allons présenter le principe d'une telle subdivision récursive de l'espace. Cette approche a été implémentée dans le cadre de ce travail de thèse car elle correspond bien à des géométries complexes comme celles rencontrées dans nos applications industrielles.
La méthode utilise la division de volumes parallélépipédiques pour pouvoir raffiner le découpage jusqu'à un niveau de profondeur donné. Etant donnés deux entiers n et p, on peut démontrer par récurrence que l'on peut décomposer le segment $[0,1]$ comme une réunion de segments disjoints pour former une partition de l'intervalle [1] :

$$[0,1] = \bigcup_{k=1}^{p^n} \left[\frac{k-1}{p^n}, \frac{k}{p^n}\right] \tag{IV.31}$$

Cette décomposition est à la base de l'algorithme de division récursive de l'espace par octree. En effet, en plaçant l'ensemble du maillage dans un parallélépipède englobant, il est possible de construire une telle structure hiérarchique pour localiser les faces solides tridimensionnelles dans des zones de volumes de plus en plus faibles. On réalise alors une décomposition de chaque arrête du parallélépipède englobant comme indiqué par l'équation IV.31 après homotéthie sur l'ensemble $[0,1]^3$ et translation d'un coin du volume englobant sur l'origine du repère global de l'espace. En pratique on utilise $p = 2$ et on parle alors de partition dichotomique qui conduit en dimension 3 à la terminologie d'octree. À chaque étape récursive de découpe n, dite encore niveau de profondeur, chaque parallélépipède (appelé père à ce niveau) est découpé en huit parallélépipèdes appelés fils. La structure globale obtenue peut être schématisée par un arbre dont chaque branche possède huit ramifications. Les ramifications finales, correspondant au niveau de profondeur maximal sont appelées feuilles. Informatiquement, cette structure de données est constituée d'un arbre chaîné alloué dynamiquement en mémoire par une procédure récursive.

On présente sur les figures IV.6 à IV.10 le déroulement de l'algorithme jusqu'au traitement du premier fils du 2ième niveau de profondeur. Les figures représentent un maillage bidimensionnel pour des raisons de clarté. La géométrie peut éventuellement avoir des zones ouvertes avec transfert de masse ou de chaleur avec l'extérieur mais l'espace de simulation est borné. Si de telles zones existent, il est essentiel d'y placer une condition aux limites radiative d'absorption.

1. La démonstration récursive utilise la décomposition de chaque segment élémentaire comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{k=1}^{p^n} \left[\frac{k-1}{p^n}, \frac{k}{p^n}\right] &= \bigcup_{k=1}^{p^n} \bigcup_{j=1}^{p} \left[\frac{(k-1)+(j-1)}{p^{n+1}}, \frac{k+(j-1)}{p^{n+1}}\right] \\
&= \bigcup_{k'=1}^{p^{n+1}} \left[\frac{k'-1}{p^{n+1}}, \frac{k'}{p^{n+1}}\right] \; avec\; k' = k + j - 1
\end{aligned}$$

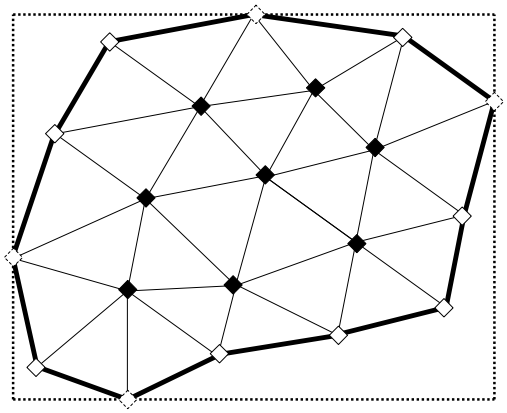

Figure IV.6 – *Le maillage initial comporte des parties solides et des parties fluides ; les faces solides sont représentées par des traits pleins épais. La géométrie entière est parfaitement englobée dans un rectangle qui définit ainsi le niveau de profondeur 0.*

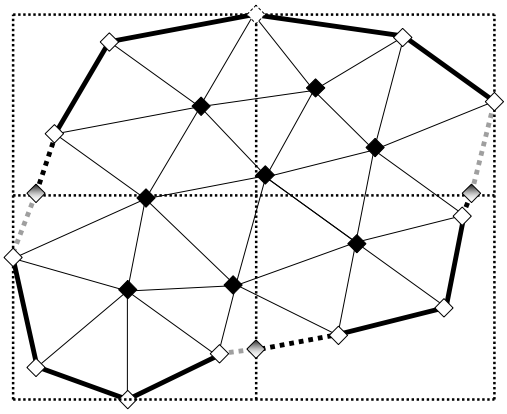

Figure IV.7 – *L'algorithme détecte la présence des faces solides dans le volume englobant. Il va donc créer les fils du volume englobant de profondeur 0 par allocation dynamique de mémoire. Ces fils se trouvent au niveau de profondeur 1. Les plans de séparation de fils de profondeur 1 (en traits pointillés) intersectent une partie des faces solides présentes à l'intérieur du volume de profondeur 0. Ces intersections, calculées précisément (losanges grisés) correspondent en 3D à des segments qui découpent les faces solides. Chaque morceau de face solide découpée est alors placé dans un fils de niveau 1 et est représenté ci-dessus en traits pointillés épais noir ou gris selon le fils auquel il est associé. Une structure de données spécifique permettant de gérer la découpe de ces faces solides a été développée et est décrite plus loin (cf §IV.4.1).*

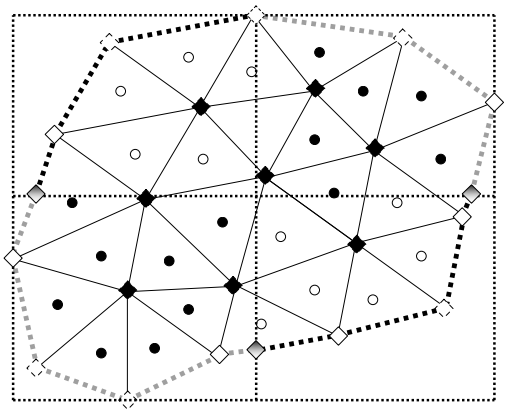

Figure IV.8 – *Les faces solides non découpées sont également distribuées dans les fils de niveau 1 et représentées avec les mêmes conventions que ci-dessus (traits pointillés épais noir ou gris selon le fils de niveau 1). De même, les cellules sont placées, en fonction des coordonnées de leurs barycentres (représentés par des cercles pleins ou vides) dans les fils de niveau 1. À ce stade, on libère l'espace mémoire utilisé pour le stockage des faces solides et des cellules dans le niveau 0.*

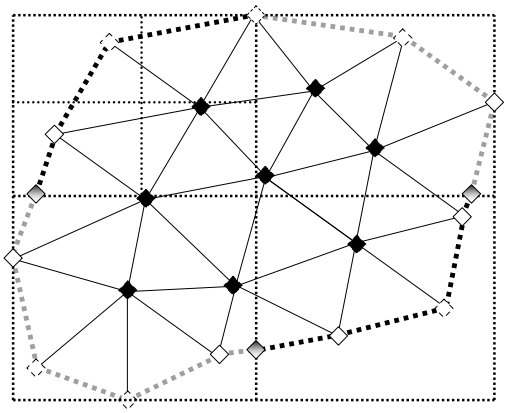

Figure IV.9 – *Le premier fils de niveau 1 (dans le coin supérieur gauche de la figure) détecte à son tour la présence de faces solides (ou de morceau de faces solide) dans son volume : il crée dynamiquement ses fils de niveau 2 (dont les plans de séparation sont également représentés en traits pointillés).*

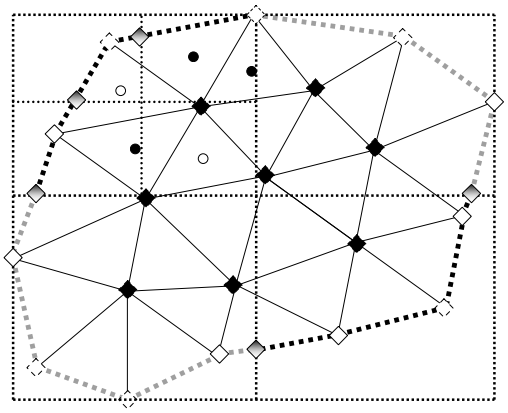

Figure IV.10 – *Les plans de coupe des fils de niveau 2 créés intersectent les faces solides présentes dans le volume de niveau 1 (selon de nouveaux losanges grisés au nombre de deux dans le cas représenté) : les faces solides sont alors là-aussi découpées. Remarquons qu'il est possible de découper un morceau de face qui résulte de la découpe au niveau 0. Les morceaux de face résultant de cette découpe sont alors placés dans les fils de niveau 2 de même que les faces solides non découpées à cette étape de l'algorithme. Les cellules sont également distribuées dans les fils de niveau 2. A ce stade l'espace alloué pour le stockage des cellules et des faces solides au niveau 1 est libéré. On redécoupe récursivement le premier fils pour obtenir 4 zones de niveau 3. L'algorithme s'arrête lorsqu'on atteint une profondeur maximale ou un nombre de faces solides par zone inférieur à un nombre maximal.*

IV.3.3 Optimisation par BSP

On appelle *Binary Space Partitioning* ou *BSP* toute structure de partitionnement de l'espace en arbre binaire. L'espace est divisé dans ces méthodes récursivement à l'aide d'un plan de coupe. Il existe une littérature abondante à ce sujet actif de recherche. Une bonne introduction au sujet est présenté dans (Foley, van Dam, Feiner, et Hughes 1990). Cet algorithme n'a pas été implémenté dans notre cas. Il peut s'avérer toutefois plus performant que l'octree pour le tracé de rayons. Nous présentons essentiellement les 2 choix qui existent : le premier présente la structure BSP la plus générale et la plus difficile à mettre en oeuvre, le second présente un BSP particulier appelé le *Kd-tree*.

Cas général

Cette structure de données est également très largement utilisée pour accélérer les algorithmes de tracé de rayons. Elle fut utilisée pour la première fois dans l'industrie graphique des jeux vidéo avec *DOOM*. Elle fut introduite par (Fuchs, Kedem, et Naylor 1980). Elle est aussi très utilisée pour la détection de collision en robotique. Le principal désavantage d'une telle structure est la difficulté de la mise en oeuvre informatique de la méthode liée au choix du plan de coupe. Il est possible dans certains cas de choisir un plan support d'une des surfaces présentes dans la zone que l'on découpe tout en cherchant plutôt à minimiser le nombre de découpes à calculer. On peut également utiliser un algorithme de clustering binaire comme le K-means dans chaque fils (*avec* $K = 2$) ce qui peut être assez coûteux en temps CPU. Les feuilles d'une telle structure représentent nécessairement des polyhèdres convexes, les faces de chaque polyhèdre représentant les plans de coupe choisis par l'algorithme lors de la construction de la structure de données. Toutefois, la plupart des moteurs de rendu exploite les différentes possibilités de choix du plan de coupe et se garde la possibilité de modifier le choix fait *a priori* lors du tracé de rayon si ce choix ne convient pas ou s'il n'est pas optimum. Les différentes étapes de l'algorithme sont les mêmes que pour la construction de l'octree ; nous rappelons toutefois deux phases essentielles sur les schémas IV.11 et IV.12. A l'inverse de la structure de données octree, les plans de coupe dans cette structure pouvant être orientés de manière quelconque dans l'espace, il est nécessaire d'utiliser un produit scalaire pour se positionner par rapport à la normale de chaque plan de coupe. Toutefois le choix d'un plan de coupe quelconque permet de rendre la structure de données optimum par rapport à la complexité géométrique de la scène et représente donc un net avantage par rapport aux autres structures de données.

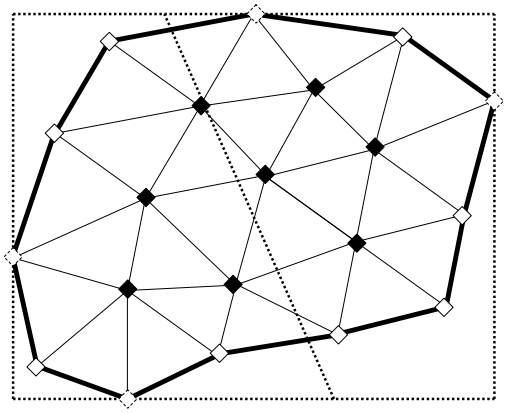

Figure IV.11 – *L'algorithme BSP détecte des faces solides dans la zone de niveau 0 : des fils sont donc créés par allocation dynamique de mémoire. Le choix du plan de coupe est un problème difficile traité de manière à minimiser le calcul de découpe des faces solides ou de permettre un minimum de tests lors de la propagation des rayons.*

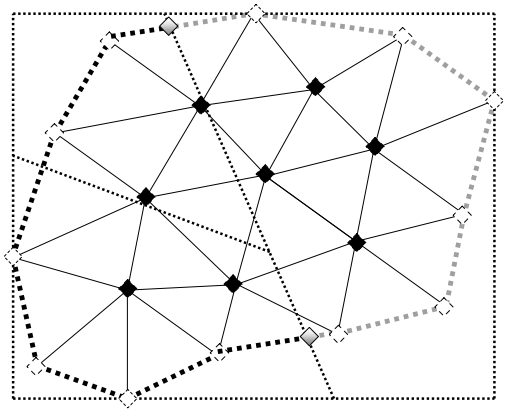

Figure IV.12 – *L'algorithme BSP examine récursivement les fils et détecte des faces solides dans le premier fils de niveau 1. Des fils de niveau 2 sont donc créés par allocation dynamique.*

Cas particulier : le kd-tree

Le kd-tree est une structure de données similaire au BSP mais plus simple à mettre en oeuvre dans la mesure où les plans de coupe sont systématiquement parallèles aux plans du maillage cartésien. Elle fut introduite par (Bentley 1975). La principale motivation dans l'utilisation d'un kd-tree plutôt que d'un BSP général est la simplicité et la rapidité des calculs d'intersections entre le rayon qui se propage dans la structure et les plans de coupe créés par l'algorithme de découpe. Il est estimé que le gain en temps CPU concernant les calculs d'intersections lors de la propagation d'un rayon sont de l'ordre d'un facteur 3 par rapport au BSP (Havran 2000).

Traditionnellement, le plan de coupe est positionné au milieu de la direction à diviser et les dimensions sont alternées. Il est également possible dans certains cas de choisir la direction de coupe le long de la taille la plus grande de la zone à diviser et de positionner le plan de coupe de telle sorte à réaliser une équipartition des objets entre les 2 fils : on parle de *coupe médiane* dans ce cas. La position du plan de coupe est le critère primordial qui va affecter les performances du lancé de rayons ; ceci est particulièrement vrai pour des géométries peu denses en parties solides. Nous rappelons 2 étapes importantes de la construction de cette structure de données sur les schémas IV.13 et IV.14. Le critère de terminaison de la subdivision spatiale est également un élément important pour les performances du tracé de rayons car il modifie la profondeur de l'arbre binaire obtenu. On peut soit limiter le nombre d'objets dans les feuilles soit choisir une profondeur maximum en fonction de la résolution spatiale désirée.

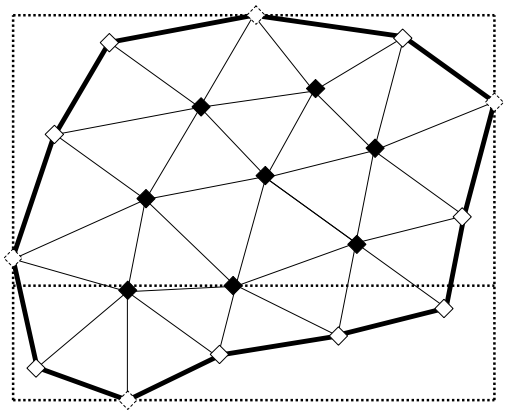

Figure IV.13 – *L'algorithme kd-tree détecte des faces solides dans la racine : il va donc diviser cette zone par 2 fils comme dans le BSP mais en conservant le plan de coupe parallèle à l'un des plans canoniques dans le repère global. Le choix du plan de coupe et de la dimension selon laquelle on coupe est un problème non trivial. Le choix qui est fait habituellement propose de diviser selon la dimension qui correspond à la plus grande taille de la zone parallélépipédique mère mais d'autres possibilités existent également.*

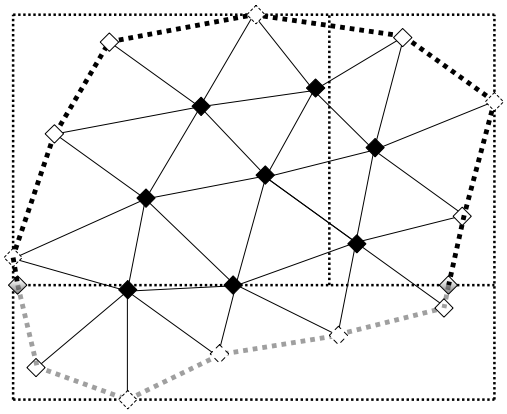

Figure IV.14 – *L'algorithme kd-tree détecte alors récursivement si il y a des faces solides dans les fils de niveau 1 auquel cas il divise la zone et passe au niveau 2.*

IV.3.4 Construction d'une fonction entropie d'information spatiale

Il existe différents critères de terminaison des algorithmes de subdivision spatiale introduits précédemment. La plupart des auteurs considèrent soit un critère sur le nombre d'objets dans les feuilles de la structure de données soit un critère de profondeur maximum de la structure de données. Bien que peu d'exemples existent dans la littérature concernant l'application d'un principe entropique pour terminer l'algorithme de découpe dans le cas du tracé de rayons tridimensionnel, nous présentons ici une méthodologie appliquée en data mining pour les algorithmes de division d'ensemble.
Il est possible de construire une fonction de *mesure d'impureté*, notée $I_{i_1,...,i_k}$, pour chaque noeud de l'arbre défini par sa profondeur k et le chemin $i_1, ..., i_k$ descendant le long des branches de l'arbre. $i_1, ..., i_k$ sont les numéros des fils successifs permettant d'atteindre le noeud considéré à partir de la racine [2]. Ceci nous permet de choisir un critère de terminaison dépendant directement d'une valeur seuil de cette fonction de mesure ou d'une estimation du gain possible en terme de *réduction d'impureté* d'un niveau à l'autre le long d'une même branche. Il faut alors choisir une fonction convenable et différents choix de mesure d'impureté de partitionnement sont possibles (Tan, Steinbach, et Kumar 2005). Un exemple en est donné plus loin.

Définition de la fonction de gain

Le *gain* lors du passage du niveau de profondeur k au niveau $k+1$ est défini comme la réduction de la mesure d'impureté résultant du tri de l'ensemble des objets dans un noeud de la structure de données. C'est une grandeur qui peut servir de critère de mesure de la qualité d'une partition d'un noeud donné. Pour un noeud à une profondeur k de la structure de données déterminé par son chemin $i_1, i_2, ..., i_k$, on définit le gain du passage de la profondeur k à la profondeur $k+1$ par :

$$\triangle_{i_1,i_2,...,i_k} = I_{i_1,i_2,...,i_k} - \sum_{i_{k+1}=1}^{p^{n_d}} \frac{m_{i_1,...,i_{k+1}}}{m_{i_1,...,i_k}} I_{i_1,...,i_{k+1}} \tag{IV.32}$$

où $m_{i_1,...,i_k}$ est le nombre d'objets à classer dans le noeud de chemin $i_1, ..., i_k$. Dans notre étude, cette grandeur représente le nombre de faces solides présentes dans un noeud de la structure de données. Dans ces conditions nous avons les deux conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \sum_{i_{k+1}=1}^{p^{n_d}} \frac{m_{i_1,...,i_{k+1}}}{m_{i_1,...,i_k}} &\geq 1 \\ m_{i_1,...,i_{k+1}} &\leq m_{i_1,...,i_k} \end{aligned} \tag{IV.33}$$

Ces conditions expriment le fait que le nombre de faces solides à classer diminue le long d'une branche de la structure de données arborescente et que la distribution des faces solides d'un noeud de la structure dans les noeuds fils ne représente pas une partition disjointe des

2. Les indices i_k sont compris entre 1 et p^{n_d} qui est le nombre de fils d'un noeud de la structure de données

faces solides à classer dans ces fils. Les faces solides peuvent en effet être présentes dans plusieurs noeuds fils d'un noeud à subdiviser. On peut alors choisir de maximiser cette fonction de gain dans le cadre des algorithmes de type BSP ou kd-tree présentés plus haut pour obtenir le tri le plus pertinent possible au sens de la mesure d'impureté choisie. Le gain peut également servir de critère de raffinement adaptatif de maillage le long d'une branche de la structure de données dans le cas d'un octree, ce qui permet d'éviter de fixer une même profondeur maximum pour toutes les branches. Il reste à choisir une fonction de mesure d'impureté convenable.

Choix de la mesure d'impureté : fonction entropie de Shannon

En se basant sur la théorie de l'information développée par Shannon, certains auteurs (Tan, Steinbach, et Kumar 2005) proposent de considérer l'entropie d'information comme mesure d'impureté dans des problèmes plus généraux de classement de données. Dans le cadre des algorithmes de partitionnement spatial de données, on peut définir cette entropie par :

$$I_{i_1,\ldots,i_k} = -p_{i_1,\ldots,i_k} \ln\left(p_{i_1,\ldots,i_k}\right) \tag{IV.34}$$

où $p_{i_1,\ldots,i_k}$ représente la fraction de faces solides dans l'ensemble de toutes les faces du maillage se trouvant dans le noeud de chemin $i_1, \ldots, i_k$:

$$p_{i_1,\ldots,i_k} = \frac{\mathfrak{F}^s_{i_1,\ldots,i_k}}{\mathfrak{F}^s_{i_1,\ldots,i_k} + \mathfrak{F}^f_{i_1,\ldots,i_k}} \tag{IV.35}$$

où $\mathfrak{F}^s_{i_1,\ldots,i_k}$ et $\mathfrak{F}^f_{i_1,\ldots,i_k}$ représentent respectivement le nombre de faces solides et fluides dans le noeud de chemin $i_1, \ldots, i_k$ dans la structure de données. Dans ce cas de choix de l'entropie de shannon, on parle de *gain d'information spatial* pour la fonction de gain. Il existe cependant de nombreuses autres possibilités pour le choix de cette mesure d'impureté dans le domaine des statistiques (entropie de Reyni, fonction de Diniz, etc.). Toutefois dans notre étude nous n'avons pas privilégié ces idées et nous ne les avons pas testés. Leur mise en oeuvre ne présente pas de difficultés particulières dans le cas des algorithmes de partitionnement pour l'optimisation du tracé de rayons.

IV.4 Mise en oeuvre : algorithmie et structures de données associées

IV.4.1 Algorithmie de détection de faces solides tridimensionnelles

L'objectif de la construction de la structure de données en octree est de réduire le nombre de tests d'impact effectués lors de la propagation d'un paquet d'énergie. Il s'agit de pouvoir regrouper les faces dans des zones très localisées de l'espace afin de ne tester que le petit nombre de faces présentes dans de telles zones au moment où le paquet d'énergie s'y trouve. Il faut donc pouvoir distribuer spatialement les faces solides de la géométrie maillée. Nous allons expliquer dans le paragraphe qui suit l'algorithme développé pour traiter le problème de distribution spatiale des faces solides dans des géométries tridimensionnelles.

Algorithme de découpe des faces solides

Lors de la construction de l'octree, les plans séparant les fils d'une zone donnée en train d'être divisée peuvent passer à l'intérieur de faces solides se situant sur ces interfaces. Il faut donc pouvoir situer ces faces solides dans plusieurs zones filles d'une zone donnée. Les algorithmes traditionnels utilisés dans les moteurs de rendu graphique considèrent une *bounding box* ou boîte englobante autour des faces solides à distribuer spatialement. Positionner la face solide dans les fils générés à un niveau donné revient donc à positionner sa bounding box ce qui est beaucoup plus simple et plus rapide étant donné que la bounding box est un parallélépipède dont les faces sont des plans canoniques. Toutefois cette approche n'a pas été retenue dans notre travail. Nous avons choisi de développer un algorithme de découpe exacte des faces obstacles, ce qui permet d'avoir une structure de données qui s'ajuste exactement aux zones de forte densité spatiale d'objets solides : frontière du domaine ou objets solides à l'intérieur du volume fluide. Avant de développer de tels algorithmes valables pour n'importe quelle géométrie générée par un mailleur commercial, il faut pouvoir modéliser les faces obstacles par une structure de données souple, dynamique et à accès rapide à l'information géométrique et topologique qui indique comment les différents éléments sont interconnectés. En effet, les algorithmes recherchés pour la découpe des faces sont susceptibles de modifier la topologie de chaînage de la frontière elle-même voire de rajouter ou de supprimer de nouveaux noeuds et de nouvelles faces. Il existe une littérature abondante sur la représentation d'un objet tridimensionnel par sa frontière ou plus généralement d'un objet dans un espace multidimensionnel par une frontière plongée dans un hyperplan de l'espace. Notre objectif n'est pas de faire une revue exhaustive de cette littérature ici. Toutefois, on peut se référer à (Samet 2006b) pour une revue détaillée et un tour d'horizon des possibilités de représentation de telles structure de données par des *graphes*.

Nous montrons un cas de partitionnement de la frontière lors de l'algorithme de découpe des faces solides sur les figures IV.15 à IV.16. La face $A_1A_2A_3$ est située sur 2 zones filles d'une zone donnée. Le plan de coupe représente un des 3 plans canoniques d'équation $x = cste$, $y = cste$ ou $z = cste$ générés lors de la découpe d'une feuille ne se situant pas à la profondeur maximum mais contenant des obstacles. La structure de données développée dans notre travail est intuitive et propose de d'associer à chaque face obstacle une face

virtuelle définie par une liste chaînée de ses noeuds *virtuels*. Nous y reviendrons plus loin.

Un premier calcul de coordonnées des points d'intersection du plan de coupe avec les côtés de la face obstacle est effectué et le résultat est stocké dans un champ associé à la structure de noeuds virtuels alloués. Ces noeuds sont en fait dédoublés de chaque côté de l'interface si bien que les 4 noeuds sont superposés 2 à 2 : ils diffèrent toutefois par leurs connectivités (figure IV.15). Le résultat est un chaînage cyclique des noeuds virtuels créés pour définir une face virtuelle. Les faces virtuelles sont à leur tour susceptibles d'être redécoupées au sein d'une même zone par un autre plan canonique de direction orthogonale au plan de coupe représenté. A la fin du processus de création des 8 fils, chaque face virtuelle et chaque noeud virtuel sont associés par pointeur à un seul des 8 fils. Ces pointeurs sont utilisés dans l'algorithme récursivement pour situer chaque morceau de face virtuelle dans une des feuilles de l'arbre. Les feuilles de l'arbre contiennent enfin un vecteur dynamique d'entiers correspondant au numéro de faces solides qu'elles contiennent.

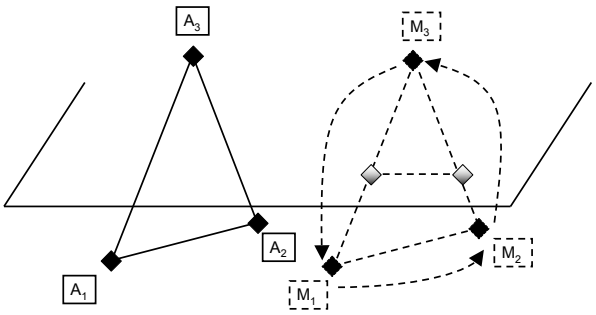

Figure IV.15 – *Représentation schématique d'une face obstacle $A_1A_2A_3$ et de la face virtuelle associée $M_1M_2M_3$. Les flèches en pointillés représentent le chaînage des noeuds virtuels. Les 2 points d'intersection entre le plan de coupe et la face virtuelle sont déterminés précisément.*

Modélisation de la frontière et structure de données du maillage virtuel

On voit que le problème de création des faces virtuelles est un problème complexe de construction de connectivité. En effet il faut pouvoir ajouter et supprimer des noeuds et des faces au maillage initial en conservant les connectivités existantes et en ajoutant des numéros aux nouvelles faces et aux nouveaux noeuds. Le choix de la structure de données a été guidé par un souci constant d'accès rapide à l'information. Ainsi on a choisi de représenter chaque face découpée par une liste chaînée de faces filles *virtuelles* qui sont elles-mêmes représentées par une liste chaînée de noeuds *virtuels* (cf. figure IV.17). En réalité, le fait de chaîner les faces virtuelles associées à une face réelle du maillage et de chaîner au sein de chaque face virtuelle les noeuds virtuels qui la composent est une méthode simple de traiter ce problème. Il ne devient alors plus nécessaire de stocker un numéro pour chaque élément

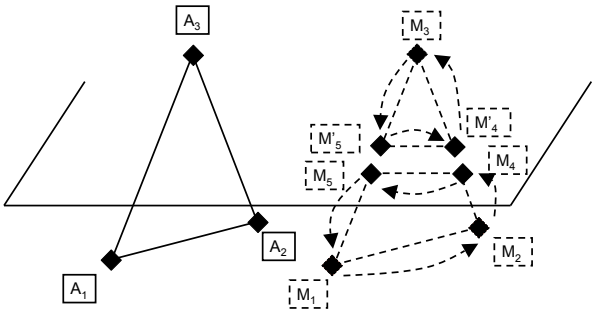

Figure IV.16 – *L'algorithme crée 2 polygones virtuels. Une structure de données modélisant ces noeuds virtuels permet de les créer dynamiquement. Chaque noeud est créé en double : il est en effet nécessaire de gérer la connectivité de chaque côté de l'interface du plan de coupe. Les noeuds virtuels doubles ont les mêmes coordonnées mais des connectivités différentes. Les polygones virtuels sont à leur tour susceptibles d'être découpés par les plans de coupe considérés par la suite de l'algorithme.*

(face virtuelle ou noeud virtuel) créé ou supprimé mais simplement de remettre à jour le chaînage dynamique des éléments, auquel on n'accède alors par pointeur.

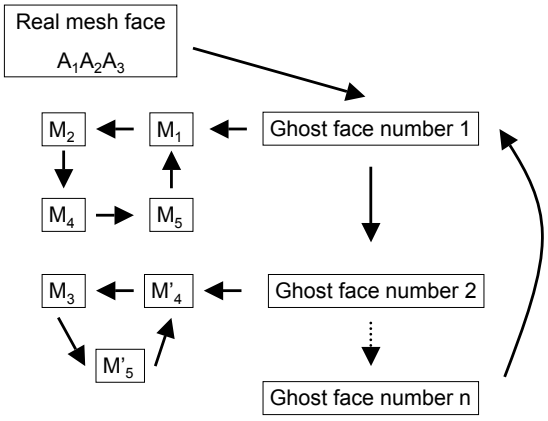

Figure IV.17 – *Structure de données pour les faces virtuelles et connectivité entre noeuds virtuels modélisés par un graphe : les flêches représentent des pointeurs sur des structures de données abstraites. La numérotation des points est celle de la figure IV.16*

.

Suppression des faces virtuelles situées à une profondeur maximum

Lors de la découpe d'une face, il se peut qu'une partie de la face soit située à une profondeur maximum dans la structure de données et d'autres non encore. Pour éviter de stocker de l'information inutile, les faces virtuelles étant situées à une profondeur maximum ne pouvant plus descendre plus bas le long des branches de l'arbre, nous désallouons la face virtuelle située à cette profondeur, ainsi que les noeuds virtuels qui la composent. En effet, comme on n'a besoin que du numéro de la face obstacle initiale interceptant une feuille terminale, la face virtuelle dans cette feuille devient inutile. Il faut alors modifier le chaînage des faces virtuelles existantes et associées à la face en train d'être découpée pour tenir compte de la suppression de l'une d'entre elles.

Exemple de génération de l'octree de détection d'obstacles

Nous montrons à présent un exemple de construction de l'octree sur le maillage 1 de l'annexe C correspondant à un cube emboîté dans un autre cube concentrique. Des coupes de l'octree construit sur ce maillage sont montrées sur la figure IV.18. On y voit le raffinement de la structure de données autour des zones solides. Ces zones solides sont distribuées dans les feuilles de l'arbre et découpées si nécessaire. Une même face peut être découpée en plusieurs morceaux qui constituent une liste. La longueur de cette liste est très variable en fonction de la position de la face solide par rapport aux plans de coupe. On peut typiquement atteindre 30 morceaux ou plus suivant les maillages utilisés. Le tableau IV.1 montre quelques données statistiques sur la construction de cet octree.

Profondeur Maximum estimée pour l'octree	6
Temps CPU de construction de l'octree	0,77 s
Nombre de feuille dans la structure géométrique	64352
Nombre moyen d'obstacles par feuille géométrique	3,016
Ecart-type de distribution des obstacles dans les feuilles de la structure	54,71 %
Nombre de feuilles contenant des obstacles	28864

Table IV.1 – *Caractéristiques de la structure de données en octree et temps CPU de construction de cette structure pour le maillage 1 de l'annexe C.*

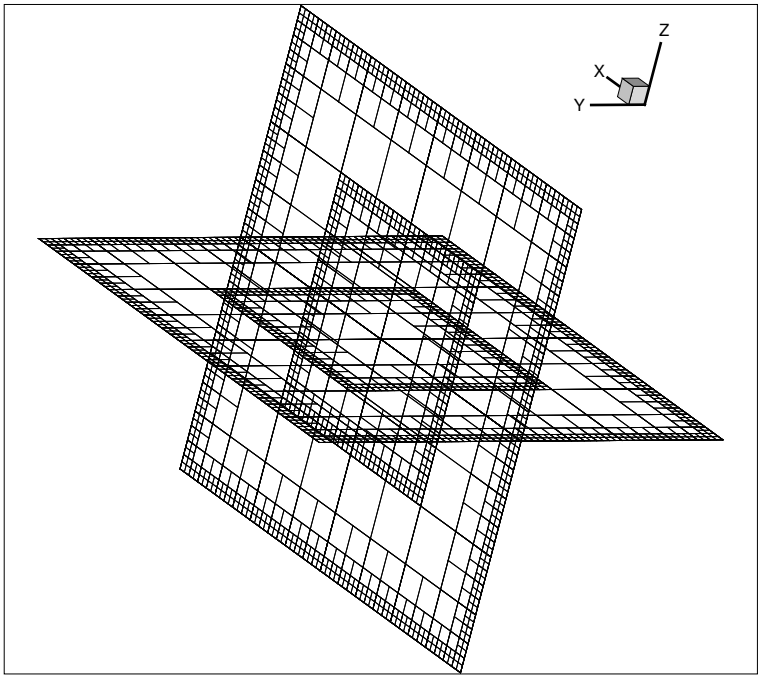

Figure IV.18 – *Octree construit sur le maillage 1 de l'annexe C. On voit le raffinement autour du cube solide central.*

IV.4.2 Raffinement adaptatif de maillage

Pour résoudre le problème de transfert radiatif par une méthode de Monte Carlo, il est nécessaire de discrétiser les différents rayons tirés se propageant dans le milieu en colonnes élémentaires homogènes en propriétés thermophysiques. On peut choisir alors un critère de longueur Δ pour chaque colonne élémentaire le long du rayon une fois pour toutes pour tout le calcul de transfert radiatif. Cette longueur élémentaire doit être suffisamment petite pour résoudre tous les gradients présents dans le milieu. Une telle procédure n'est pas optimale car l'évaluation fréquente de la variation des champs thermophysiques locaux peut s'avérer inutile et coûteuse en temps CPU si ceux-ci varient peu sur de grandes zones. C'est le cas par exemple lorsque le plasma se crée entre les électrodes, aux premiers instants de la coupure, et que l'on considère la zone d'ailettes au fond de la chambre de coupure où les propriétés thermophysiques n'ont pas encore eu le temps de varier suffisamment. Il faut d'autre part pouvoir trouver très rapidement dans quelle cellule du maillage fluide le point courant se trouve (ce qui peut s'avérer très difficile et long sur des géométries tridimensionnelles) afin de connaître les propriétés thermophysiques et radiatives locales. Pour remédier à ce problème, il est possible de calculer la propagation du rayon dans un maillage adapté aux variations des propriétés thermophysiques. Nous présentons ci-dessous la méthode implémentée et utilisée dans notre code de transfert radiatif pour générer un tel maillage.

Principe de la méthode de raffinement spatial

La méthode proposée pour homogénéiser l'espace en fonction des propriétés thermophysiques complète la structure de données arborescente en octree présentée plus haut. Elle est présenté sur les figures IV.19 à IV.21 et s'inspire des travaux de (Perez 2002; Perez, Paulin, et El Hafi 2007). A ce stade, le domaine a déjà été discrétisé pour avoir la distribution spatiale des parois solides et des barycentres de cellules dans les feuilles de l'octree. En examinant les cellules au sein des feuilles de l'octree, il est possible d'évaluer les variations de propriétés thermophysiques d'une cellule à l'autre au sein de chaque feuille de l'arbre. L'algorithme va alors discrétiser chaque feuille de l'octree en 8 nouveaux fils si les variations des propriétés dépassent un certain seuil fixé par l'utilisateur et si la feuille ne se trouve pas à une profondeur maximum.

Pour découper une feuille de l'octree, il est toutefois nécessaire que celle-ci contienne un nombre minimum de cellules en son sein. Il est en effet inutile de discrétiser l'espace plus finement que le maillage fluide, étant donné que l'information spatiale sur les champs thermophysiques est maximale dans ce maillage. Les barycentres des cellules sont à nouveau redistribués dans les fils mais cette fois les faces solides ne sont pas transmises aux fils. On obtient donc une structure de données hybride portant à la fois l'information géométrique et l'information physique. Pour trouver l'information physique ou géométrique qui nous intéresse pour le calcul de transfert radiatif, on utilise alors 2 pointeurs : l'un pointant vers un noeud de l'arbre ou une feuille contenant l'information sur la position des obstacles et l'autre vers une feuille contenant l'information sur les propriétés thermophysiques homogènes. Chaque feuille terminale de l'arbre possède alors un champ attaché qui indique si elle contient des faces solides, des cellules ou les deux à la fois. Au sein de chaque feuille, on calcule alors une température moyenne en fonction des cellules qui s'y trouvent et un

coefficient d'absorption a cette température moyenne pour chacun des gaz fictifs du modèle MADF (à 216 ou 36 gaz fictifs) par interpolation linéaire en température.

Les rayons sont alors naturellement discrétisés en colonnes homogènes si leur trajectoire est suivie dans la structure de données en octree. Il suffit lors de la propagation de chaque rayon de trouver d'une part le noeud ou la feuille contenant l'information sur les obstacles et d'autre part la feuille contenant l'information sur les propriétés thermophysiques homogénéisées.

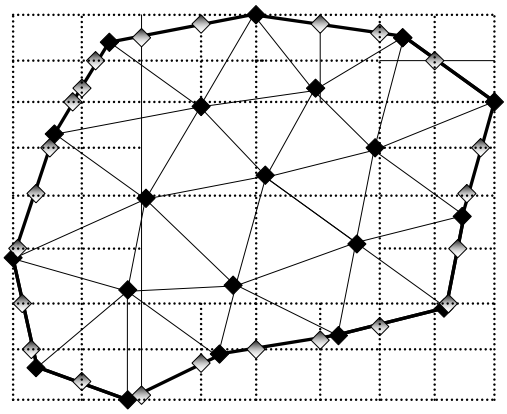

Figure IV.19 – *Génération adaptative de maillage en fonction des propriétés thermophysiques : la structure de données en octree a déjà été construite pour localiser les positions des faces solides. Il s'agit à présent de prolonger cette structure hiérarchique par la localisation de zone où règnent de forts gradients thermophysiques : température, pression ou/et composition chimique.*

Choix du critère de tolérance et du nombre minimum de cellules pour le raffinement

Compte tenu de l'évolution des coefficients d'absorption en fonction de la température, comme montré au chapitre 2, nous avons considéré qu'un critère de variation de 10% sur la température était suffisant pour homogénéiser une feuille de l'arbre. D'autre part, le nombre minimum de cellule pour homogénéiser une feuille est fixé à 10. Ce nombre, ainsi que le critère précédent, peuvent toutefois être modifiés par l'utilisateur suivant le maillage utilisé. Des calculs présentés au chapitre suivant sont par exemple effectués avec un critère d'homogénéisation correspondant à une variation absolue de la température n'excédant pas 200 K. Il est à noter que ces critères n'ont d'influence que sur les propriétés de transmission du milieu ; les propriétés d'émission locale sont, elles, déterminées rigoureusement lors du lancé d'un rayon d'une cellule donnée.

Il se peut qu'une feuille contenant suffisamment de cellules pour être discrétisée engendre certains fils ne contenant aucune cellule. Dans ce cas, le fils hérite d'une cellule arbitraire de son père même si le barycentre de celle-ci n'est pas situé dans ce fils. La cellule est alors présente dans 2 feuilles. Ceci nous permet de trouver dans toutes les situations une

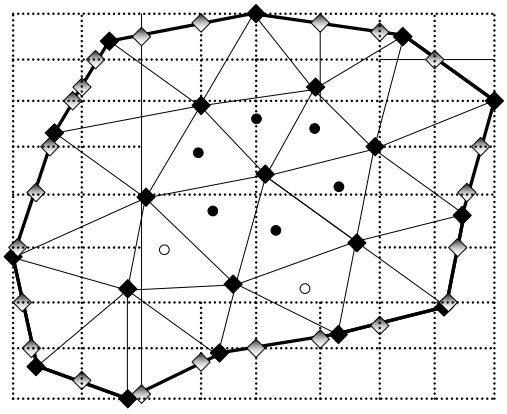

Figure IV.20 – *L'algorithme examine les feuilles de la structure de données octree qui ne sont pas à une profondeur maximum (elles ne peuvent donc pas contenir de faces solides). Ces feuilles contiennent toutefois des cellules du maillage fluide qui y ont été positionnées. Les propriétés thermophysiques (schématisées par des ronds pleins ou vides) étant stockées aux barycentres des cellules, il est possible de déterminer si les zones en question sont le siège de forts gradients.*

température et donc un coefficient d'absorption pour chaque gaz fictif du modèle MADF au sein de chaque feuille.

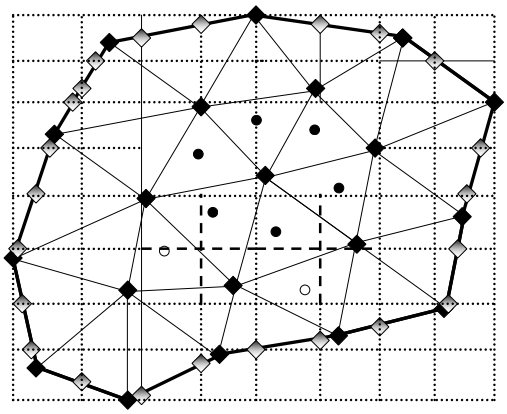

Figure IV.21 – *Si de forts gradients sont détectés (présence de ronds pleins et vides dans une même feuille), l'algorithme va alors diviser récursivement les feuilles de la structure octree jusqu'à une profondeur maximum et/ou un nombre de cellules minimum dans chaque zone.*

IV.5 Propagation de rayons dans l'octree

Nous supposons à présent que la structure de données est construite et que chaque feuille de l'arbre contient un vecteur d'entiers contenant les numéros des faces présentes, un vecteur d'entiers contenant les numéros des cellules présentes (en terme de positionnement de barycentre) et des indices pour déterminer les positions des 8 noeuds de la feuille (on ne stocke pas les coordonnées des 8 noeuds mais les indices k et n de l'équation IV.31). On stocke également au sein de chaque feuille une température moyenne et l'ensemble des 216/36 coefficients d'absorption du modèle MADF interpolés à cette température moyenne au sein de chaque feuille de la structure d'homogénéisation.

IV.5.1 Principe général de l'algorithme physique

Lors du tir d'un barycentre de cellule ou de face solide, le paquet d'énergie se propage dans le maillage jusqu'à subir un phénomène de réfléxion ou d'absorption. Le libre parcours moyen du paquet est estimé lors de l'émission de celui-ci et réactualisé au cours de sa propagation en tenant compte des propriétés thermophysiques (composition, pression et température) locales. La structure de données de détection d'obstacles et d'homogénéisation nous permet naturellement de discrétiser les rayons en colonnes élémentaires homogènes. Il suffit en effet de propager le rayon sur ce maillage et d'estimer le libre parcours moyen à chaque interface entre 2 feuilles de l'arbre pour déterminer si il y a absorption ou suite de la propagation. En cas de présence d'obstacles on détermine s'il y a absorption ou réflexion en cas d'impact ou absorption ou transmission s'il n'y a pas d'impact. Nous détaillons ci-dessous les cas qui peuvent se présenter en présence d'obstacles.

Présence d'un obstacle mais pas d'impact détecté

Ce cas est représenté sur la figure IV.22. Un rayon rentre dans une feuille qui contient un obstacle. La face est testée pour déterminer si il y a impact. Un résultat négatif est trouvé. La distance d de traversée de la feuille est déterminée. En notant $k_j(T_{feuille})$ le coefficient d'absorption du j^{ime} gaz MADF à la température $T_{feuille}$ de la feuille où le paquet d'énergie vient de rentrer, on peut déterminer également la distance avant absorption par :

$$d_{abs} = \frac{\sigma^{(n)}}{k_j(T_{feuille})}, \tag{IV.36}$$

où $\sigma^{(n)}$ représente l'épaisseur optique restant à parcourir. On rappelle que le choix du gaz fictif j est fait aléatoirement lors de l'initialisation du tir par inversion de la densité de probabilité cumulée du coefficient d'absorption à la température T de la cellule d'où il est tiré.

Alors la distance à parcourir le long du trajet paramétrique du paquet d'énergie est donnée par :

$$d_{prop} = \min(d_{abs}, d) \tag{IV.37}$$

Enfin on réactualise l'épaisseur optique σ par :

$$\sigma^{(n+1)} = \sigma^{(n)} - k_j(T_{feuille})d_{prop} \tag{IV.38}$$

Remarquons que si $d_{prop} = d_{abs}$, alors $\sigma^{(n+1)} = 0$ et le paquet d'énergie est absorbé par une cellule de la feuille (à déterminer) avant d'atteindre l'interface entre les 2 feuilles.

Présence d'un obstacle avec détection d'impact à l'intérieur de la feuille

Ce cas est représenté sur la figure IV.23. Le rayon rentre cette fois dans une zone qui contient des obstacles mais le test d'impact donne un résultat positif : une face est détectée. On détermine la distance d_3 de traversée de la feuille ainsi que la distance à la face solide impactée d_2. De même que précédemment, on détermine la distance avant absorption en fonction des propriétés thermophysiques locales de la feuille où le rayon va entrer. La distance de propagation est alors donnée par :

$$\begin{aligned} d_{prop} &= \min(d_{abs}, d_2, d_3) \\ &= \min(d_{abs}, d_2) \end{aligned} \tag{IV.39}$$

En cas d'impact avant absorption par le plasma, c'est à dire si $d_{prop} = d_2$, le choix entre réflexion et absorption, ainsi que le choix de la direction éventuelle du rayon réfléchi, sont effectués comme décrit au paragraphe IV.2.2. L'épaisseur optique est également réactualisée en fonction de d_{prop}.

Présence d'un obstacle avec détection d'impact à l'extérieur de la feuille

Ce cas est représenté sur la figure IV.24. Dans ce cas un test d'impact est effectué et le résultat est positif. Cependant le point d'impact sur la face solide est situé en dehors de la feuille. Il n'est donc pas considéré. En effet, il se peut qu'il y ait une autre face solide sur la trajectoire du paquet d'énergie située dans la feuille suivante et impactée avant cette face ci. On se ramène donc à la situation sans impact avec :

$$\begin{aligned} d_{prop} &= \min(d_{abs}, d_2, d_3) \\ &= \min(d_{abs}, d_3) \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Là encore on remet à jour l'épaisseur optique en fonction des propriétés physiques locales avant de sortir de la feuille.

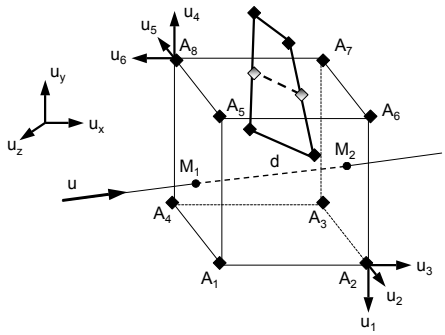

Figure IV.22 – *Traversée d'une feuille de l'octree : la feuille contient un obstacle, détecté lors de la construction récursive de l'octree, mais le rayon ne touche pas la face obstacle*

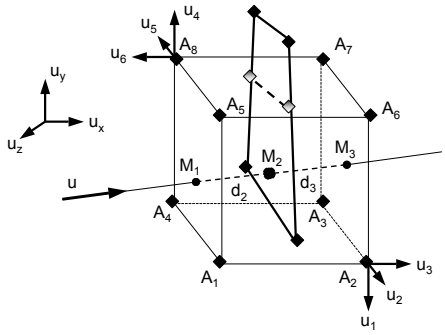

Figure IV.23 – *Traversée d'une feuille de l'octree : la feuille contient un obstacle, détecté lors de la construction récursive de l'octree, et le rayon touche la face obstacle avant d'arriver à l'interface entre feuilles. Il y a absorption ou réflexion du rayon*

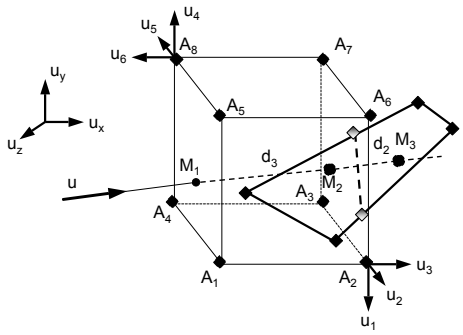

Figure IV.24 – *Traversée d'une feuille de l'octree : la feuille contient un obstacle, détecté lors de la construction récursive de l'octree, mais le rayon touche la face obstacle en dehors de la feuille. Il traverse donc la feuille sans détecter d'obstacle.*

IV.5.2 Intersection entre un rayon et une face solide

Au sein de chaque feuille de la structure de donnée octree, on a accès par construction à la liste réduite de faces solides dans cette région de la géométrie. Ces faces sont testées une à une pour déterminer un éventuel point d'impact sur une face de paroi et éventuellement avoir une réflexion. Nous allons expliciter ci-dessous le test d'impact réalisé. La figure IV.25 montre un rayon qui impacte une face. Un premier calcul est réalisé pour déterminer les coordonnées du point d'impact M_1 sur le plan support de la face. On détermine la distance d du point M au plan support de la face $A_1A_2A_3$ par :

$$d = \frac{\overrightarrow{MA_1} \cdot \vec{n}}{\vec{u} \cdot \vec{n}} \tag{IV.41}$$

Les coordonnées de M_1 sont ensuite données par :

$$\overrightarrow{MM_1} = d\vec{u} \tag{IV.42}$$

Il faut déterminer si ce point M_1 d'intersection est réel (il appartient à la face) ou s'il est fictif (il est en dehors de la face). Il est possible de lever l'indétermination dans l'espace à 3 dimensions, cependant pour accélérer les calculs la face et le point d'impact sur le plan support sont ensuite projetés sur un des 3 plans canoniques de l'espace (xOy), (xOz), (yOz). Le choix du plan est fait de telle sorte à ce qu'il soit le plan dont l'aire de la face projetée est maximale pour éviter une projection de dimension 0. Ce plan est déterminé en considérant les coordonnées du vecteur normale à la face. Nous notons ce plan le plan (U, V). On se ramène donc à un problème à 2 dimensions. Notons que ceci est possible bien que la projection ne soit pas isométrique car elle conserve la topologie en terme d'intérieur et d'extérieur.
Dans le plan (U, V), nous utilisons un lemme dû à C. Jordan $(1838 - 1922)$ pour déterminer si le point M_1' est à l'intérieur de la face $A_1'A_2'A_3'$, comme indiqué sur la figure IV.26. Il s'agit de compter le nombre d'intersections entre une demi-droite quelconque dont l'origine est le point M_1' et les arrêtes de la face projetée $A_1'A_2'A_3'$. Si ce nombre est pair alors le point est en dehors de la face, s'il est impair alors le point est dans la face. Ce critère est valable quelque soit la convexité de la face et quelque soit son nombre de sommets. Il est donc valable pour tout type de maillage. Pour réduire encore la dimension du problème et accélérer les calculs, la demi-droite choisie a sytématiquement pour vecteur directeur le vecteur $(1, 0)$ dans le plan (U, V). Ainsi on se ramène à un problème monodimensionnel et on ne traite que la première coordonnée dans le plan de projection.

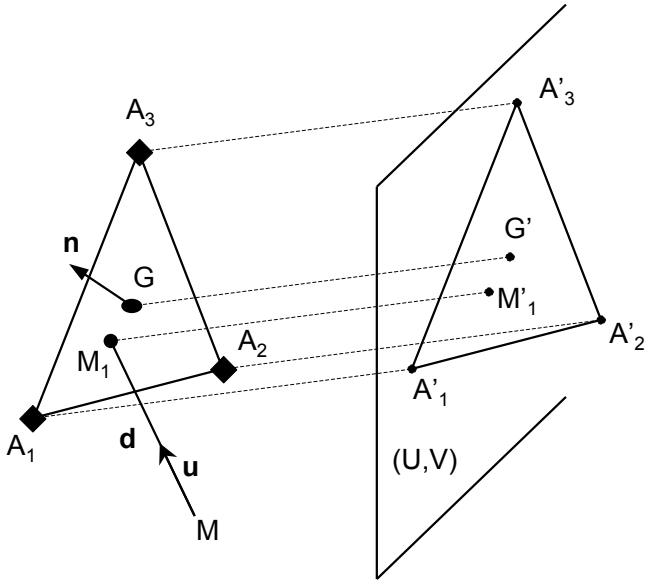

Figure IV.25 – *Réduction de la dimensionalité*

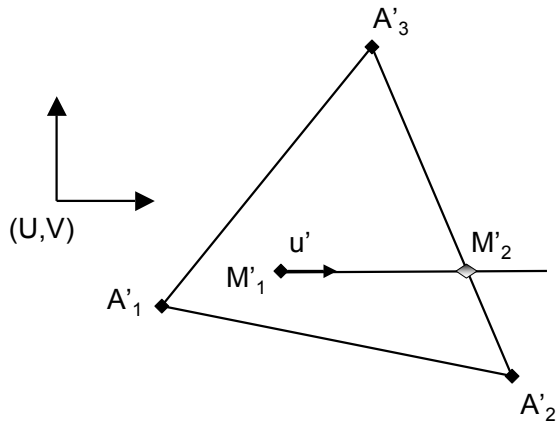

Figure IV.26 – *Lemme de Jordan*

IV.5.3 Intersection entre un rayon et une face du maillage Octree

La propagation dans le maillage octree nous permet de profiter de l'équation très simple des plans canoniques qui forment les feuilles de la structure de données pour accélérer les calculs d'intersection à l'interface entre 2 feuilles. Il s'agit de déterminer par quel plan le rayon va sortir de la feuille et de trouver les coordonnées du point à l'interface. Ceci peut être fait très simplement comme montré sur la figure IV.27. On considère les points A_2 et A_8 formant une grande arrête du pavé droit. On indique également les 6 normales $u_i,\ i \in \{1, ..., 6\}$ aux 6 faces de la feuille. Alors on détermine les 6 distances algébriques aux 6 plans canoniques support des 6 faces formant la feuille. Ces distances, notées d_i, sont données par :

$$d_i = \frac{\overrightarrow{M_1 A_n} \cdot \vec{u_i}}{\vec{u} \cdot \vec{u_i}} \tag{IV.43}$$

où $n \in \{2, 8\}$. La distance à l'interface entre feuilles et alors donnée par :

$$d = \min\{d_i, i \in \{1, ..., 6\} \mid d_i > 0\} \tag{IV.44}$$

Toutefois, les normales ont toutes leurs coordonnées nulle sauf une qui vaut 1. Les produits scalaires avec les normales sont donc déterminés de manière très simple en considérant une seule coordonnée. Le calcul de chaque distance revient donc à effectuer une seule et unique opération de division ce qui est très rapide en terme de temps CPU et certainement plus rapide que d'intersecter une face du maillage fluide non structuré.

Le point M_2 est alors déterminé par :

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = d\vec{u} \tag{IV.45}$$

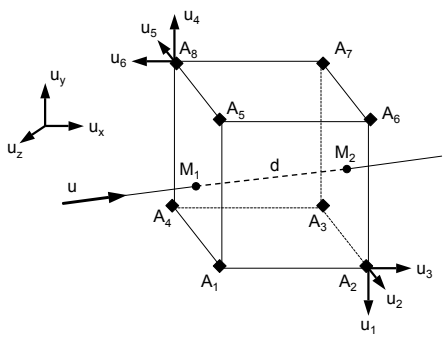

Figure IV.27 – *Traversée d'une feuille de la structure de données arborescente, homogène en propriétés thermophysiques*

IV.5.4 Positionnement dans l'octree au cours de la propagation

Les structures de données en octree qui servent à accélérer les calculs de tracé de rayons pour les simulations de rendu physique en traitement d'image sont généralement utilisées de façon à éviter des calculs d'intersection onéreux et inutiles entre le rayon qui se propage et des zones parallélépipédiques trop petites (les feuilles de la structure arborescente). En effet, il suffit de calculer dans quelle zone de niveau élevé dans la structure le rayon passe pour examiner récursivement la trajectoire plus précise du rayon dans les fils de niveau plus profond. Toutefois cette approche n'est pas applicable dans notre problème car nous avons choisi de prolonger la structure de données géométrique par une structure physique d'homogénéisation des propriétés physiques. Le rayon doit donc passer de feuille en feuille dans la structure de données pour ne pas franchir de gradient trop important. Si cette situation se produit alors les distances de propagation risquent d'être mal évaluées et le résultat peut donc être complètement faux.

Lorsque le point courant se propageant dans le maillage passe d'une feuille à une autre de la structure de données arborescente, il est nécessaire de pouvoir se repositionner dans l'arbre pour trouver la nouvelle feuille. Ce repositionnement est fait en partant d'un pointeur sur la racine et en repositionnnant le pointeur sur l'un des fils, tant qu'il y a un fils. Le choix du fils est déterminé en utilisant les coordonnées du point courant qui se propage et en les comparant au 3 plans de coupe tel que montré sur la figure IV.28. Le point se propageant dans la structure de données passant d'une feuille à une autre, ses coordonnées ne sont calculées que sur les interfaces séparant les feuilles. Il est donc nécessaire d'utiliser la direction de propagation d'un rayon pour déterminer au dernier niveau de profondeur de laquelle des 2 feuilles vient le rayon et dans laquelle il va.

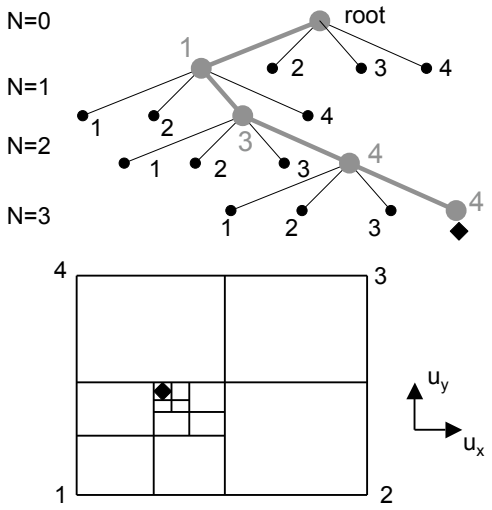

FIGURE IV.28 – *Algorithme de positionnement (schématisé en 2D) dans la structure de données octree. L'ordonnancement des fils 1, 2, 3 et 4 est conservé de père en fils.*

IV.5.5 Algorithme de choix de la cellule absorbante

Lorsque le paquet d'énergie est absorbé dans une cellule du maillage fluide, il faut pouvoir positionner le point courant dans ce maillage pour incrémenter la puissance absorbée au sein de cette cellule. Or la propagation du point courant ne se fait pas dans le maillage fluide de cellule voisine en cellule voisine mais dans le maillage octree. Il faut donc utiliser la connectivité entre les 2 maillages et exploiter la répartition des cellules fluides dans les feuilles de l'octree. Le principe général est expliqué sur la figure IV.29. Le rayon se propage dans l'octree, de feuille en feuille, et entre dans une feuille homogénéisée en propriétés thermophysiques. Le point P est le point d'entrée/sortie à l'interface entre les 2 feuilles. Le choix de la nouvelle feuille se fait par positionnement dans l'octree en descendant le long des branches de l'arbre et en exploitant les coordonnées du point P comme expliqué précédemment. Le paquet d'énergie est absorbé dans cette feuille et les coordonnées du point d'absorption M sont calculées en fonction des propriétés thermophysiques locales à cette feuille. Cette feuille de l'octree contient une liste de toutes les cellules fluides dont les barycentres se trouvent à l'intérieur. Pour déterminer le numéro de la cellule qui contient M, on va partir de la première cellule dans la liste et utiliser un algorithme de déplacement de voisine en voisine pour localiser la cellule qui contient M.

Cet algorithme est explicité sur la figure IV.30. Nous considérons ici un point M situé dans la cellule $A_1A_5A_6$. Supposons que nous partions de la cellule $A_1A_2A_3$. Nous testons successivement toutes les faces de cette cellule et au premier résultat de test négatif, nous passons à la cellule voisine de cette face. Le test réalisé consiste à positionner le point M et la cellule testée du côté droit ou du côté gauche de la face (suivant la convention donnée par le mailleur utilisé qui est que la normale pointe vers la cellule dite de droite). Si ils ne sont pas du même côté, il faut changer de cellule en passant à la cellule de l'autre côté de la face testée. Nous voyons que le produit scalaire du vecteur $\vec{A_1M}$ par la normale $\vec{n_{13}}$ est positif. Le point M est donc à droite de la face A_1A_3. Or la cellule $A_1A_2A_3$ est du côté gauche de cette face. Cette cellule n'est pas située du même côté que le point M. Par contre sa voisine $A_1A_3A_4$ l'est. On change donc de cellule testée. La cellule cible est trouvée lorsque toutes les faces ont donné un résultat de test positif.

Il se peut, dans des géométries de topologie non convexe, que le test d'une face appartenant à la frontière du domaine donne pour résultat la cellule neutre. Cette cellule est par définition la voisine extérieure à la géométrie de toute face frontière. Dans ce cas de sortie du maillage fluide l'algorithme est repris avec pour nouvelle cellule de départ la cellule suivante dans la liste de cellule associée à la feuille de l'octree dans lequel le point courant se trouve. En cas de sortie de maillage pour chaque cellule de la feuille prise comme cellule de départ, le paquet d'énergie est localisé dans la première cellule de cette liste.

Cet algorithme n'est toutefois pas fiable en termes de convergence vers la cellule cible. En effet, nous montrons un cas sur la figure IV.31 où il n'est pas possible de localiser la cellule cible. En effet dans certains cas, les tests successifs peuvent aboutir à un état puit de l'algorithme. Supposons que nous commencions par tester la cellule $A_1A_2A_3A_4$. Pour cette cellule supposons également que l'on teste la face A_1A_2 avant la face A_1A_3. Dans ce cas, le test étant négatif, nous passons à la cellule $A_1A_2A_8A_7$. Supposons de même que l'on teste la face A_7A_8 avant la face A_3A_5. Alors, là encore, le test étant négatif nous passons à la cellule suivante qui est $A_5A_6A_8A_7$. Et ainsi de suite jusqu'à la cellule de départ qui était $A_1A_2A_3A_4$. On voit qu'il est nécessaire de marquer chaque cellule testée en allouant un

pointeur de marquage au sein de la structure de données associée à une cellule. Toutefois, il n'est pas possible de connaître le nombre de cellules à tester avant d'atteindre la cible. Il faut donc construire une liste chaînée de tous les numéros de cellules testées pour pouvoir les retrouver et désallouer le pointeur de marquage une fois la cible déterminée. Si une situation d'état puit se produit, on recommence l'algorithme de recherche de cible avec pour cellule de départ la cellule suivante dans la liste de cellule associée à la feuille de l'octree. Si toutes les cellules associées à la feuille ont été choisi comme point de départ et que l'algorithme n'a jamais atteint la cellule cible, on dépose l'énergie transporté par le paquet au sein de la première cellule de la feuille de l'octree. Cette situation est toutefois très rare et ne se produit jamais dans le cas de maillage tétrahédrique. Même s'il existe de telles zones franches au sein de la géométrie, on peut espérer que le volume total de ces zones est petit vis à vis du volume total de la géométrie. Cette situation est plus probable dans le cas de maillage mobile ou des cellules sont écrasées au niveau des interfaces non conformes lorsque le maillage se déforme.

Si le paquet d'énergie est absorbé dans une feuille qui contient des obstacles solides et si le test d'impact se révèle positif, alors la cellule de départ de l'algorithme de positionnement est celle adjacente à la face impactée sur la trajectoire. En fait dans ce cas, le chemin entre la cellule de départ et la cellule cible étant continu sur une ligne droite, l'algorithme de recherche ne peut échouer et donne systématiquement le bon résultat.

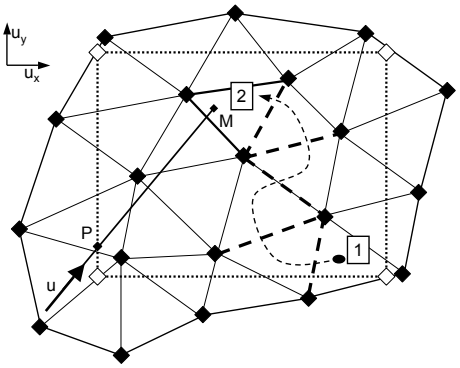

Figure IV.29 – *Algorithme de recherche de la cellule du maillage fluide où déposer l'énergie du rayon*

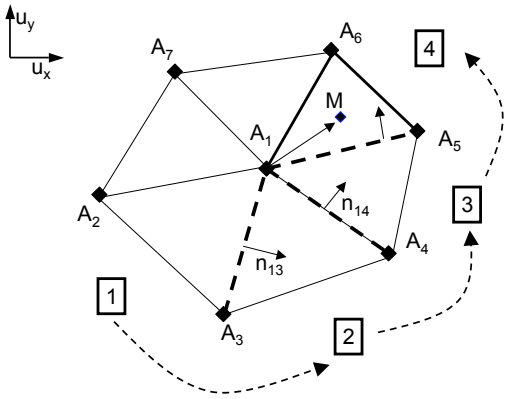

Figure IV.30 – *Algorithme de déplacement de cellule voisine en cellule voisine pour atteindre la cellule cible*

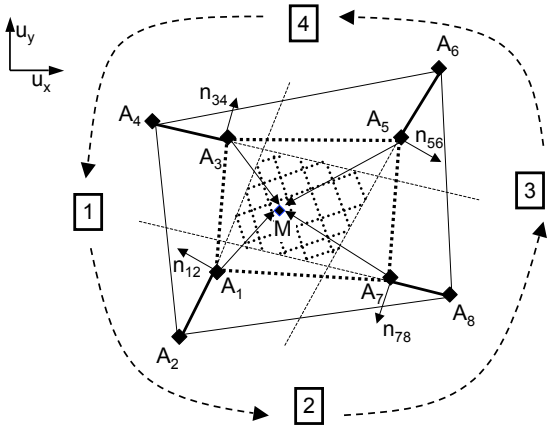

Figure IV.31 – *Faille de l'algorithme de déplacement : constitution d'un état puit*

IV.6 Filtrage spatial des champs bruités de puissance et de flux radiatifs

Les algorithmes de Monte Carlo développés au cours de ce travail s'accompagnent nécessairement de la présence de bruit spatial dans l'estimation des puissances radiatives et des flux radiatifs aux parois. Or dans le cadre d'une simulation couplée de mécanique des fluides, d'électromagnétisme et de transfert radiatif, les grandeurs radiatives sont introduites dans l'équation de bilan d'énergie. La présence de bruit spatial dans ces grandeurs se propage donc par le couplage aux grandeurs non radiatives. Une étude précise et rigoureuse sur la propagation de ce type de bruit est délicate étant donné la complexité géométrique du problème tridimensionnel et la nature mathématique des équations couplées par le champ de température. Ce bruit spatial peut en outre générer des instabilités numériques de nature à faire diverger le calcul couplé.
Il est dès lors nécessaire de remédier à ce problème par un algorithme de filtrage numérique des grandeurs radiatives. Toutefois, les algorithmes de filtrage usuels dans l'espace de Fourier sont délicats à mettre en oeuvre étant donné le caractère non structuré du maillage tridimensionnel. On se contente ici d'effectuer des moyennes locales pondérées. Il faut d'autre part que le temps CPU de filtrage de la solution ne soit pas trop pénalisant : il faut trouver un compromis entre l'augmentation du nombre total de tirs (qui est aussi une façon de réduire le bruit) et l'usage d'un filtre spatial. Il faut également proposer une fonction de convolution efficace pour le filtre. Ecrivons le produit de convolution de la puissance radiative estimée par l'algorithme de Monte Carlo par une fonction de filtrage à définir :

$$< P(\vec{r}) >= \int\int\int_{\vec{r'}\in B(\vec{r},R)} \tilde{P}(\vec{r'})F_P(\vec{r'}-\vec{r})d\Omega \tag{IV.46}$$

De la même manière, on peut écrire un produit de convolution pour le filtrage des flux radiatifs aux parois :

$$< \Phi(\vec{r}) >= \int\int_{\vec{r'}\in B(\vec{r},R)\cap parois} \tilde{\Phi}(\vec{r'})F_\Phi(\vec{r'}-\vec{r})dS \tag{IV.47}$$

Dans ces deux équations, $B(\vec{r},R)$ représente une boule centrée au barycentre $\vec{r}$ d'une cellule du maillage et de rayon R. Notons que dans le cas du filtrage sur le flux radiatif, le produit de convolution ne considère que les points qui sont situés sur la surface solide de la géométrie. On voit que pour pouvoir calculer ces intégrales volumiques sur une discrétisation du volume fluide par un maillage, il est nécessaire de chercher les voisins de la cellule considérée qui sont présents dans $B(\vec{r},R)$.

IV.6.1 Fonction de recherche de voisins d'ordre n

On va expliquer à présent le principe de l'algorithme de recherche de voisins développé pour le calcul du filtre sur un maillage tridimensionnel non structuré. Etant donné la généralité des maillages à considérer (aucune contrainte mis à part le fait que le maillage doit être conforme), l'algorithme développé utilise une structure de données dynamique qui va chaîner des numéros de cellules et les marquer au fur et à mesure de leur parcours pour éviter les doublons et ainsi biaiser le calcul de l'intégrale. Il est possible soit de fixer l'ordre spatial des

voisins à trouver ; dans ce cas, le rayon de la sphère n'est pas fixé et l'algorithme continue sa recherche jusqu'à trouver tous les voisins d'ordre n fixé ; soit de fixer le rayon de la sphère (par rapport à une distance caractéristique d'arrête du maillage) et l'algorithme effectue des calculs de carrés de distances euclidiennes pour tester si les cellules trouvées sont dans la sphère ou non.

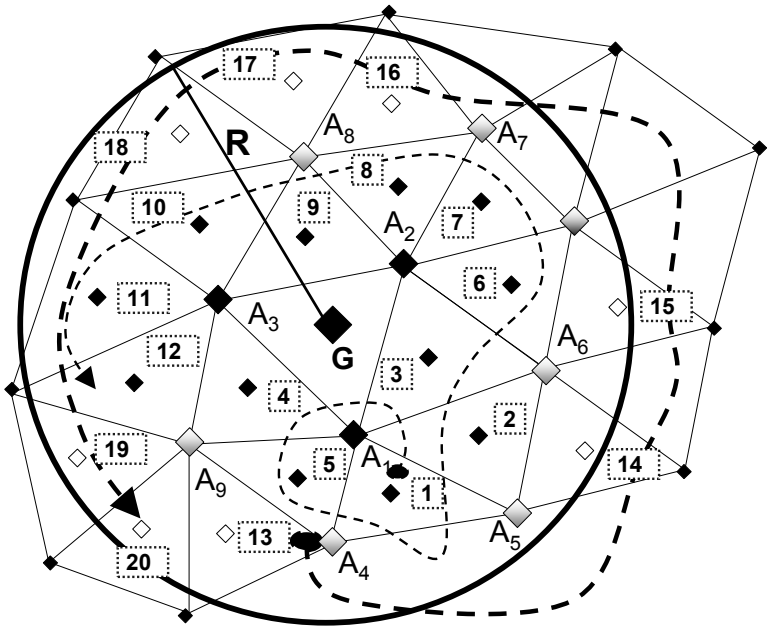

Figure IV.32 – *Algorithme de recherche de voisins (au sens des noeuds) dans une boule de rayon R : l'algorithme construit une liste chaînée de numéros de cellules. Pour construire cette liste, il va examiner les voisins au sens des noeuds de la cellule centrale, qui sont en fait les voisins d'ordre 1. Puis un pointeur va parcourir les éléments d'ordre 1 trouvés précédemment et examiner leurs voisins au sens des noeuds : si ils ne sont pas marqués, ils sont ajoutés à la liste. L'algorithme continue ainsi de suite jusqu'à parcourir un ensemble de cellules toutes de même ordre (3 ici) et toutes se trouvant à l'extérieur de la sphère de rayon R.*

IV.6.2 Choix des fonctions de filtrage F_P et F_Φ

La fonction de filtrage F_Φ choisie pour la puissance radiative est une lorentzienne d'équation :

$$F_P(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + 1}. \tag{IV.48}$$

Le paramètre x_0 est variable sur le maillage selon le nombre de tirs utilisés au sein de chaque cellule. Il est ainsi possible d'avoir un poids de filtrage adapté à la quantité de bruit dans le résultat calculé par simulation Monte Carlo. Ce paramètre est choisi selon l'équation :

$$x_0(n_c) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{n_2 - n_1}(n_c - n_1) + \gamma_1 \tag{IV.49}$$

où n_c est le nombre de tirs d'une cellule donnée, $n_1 = 1$, n_2 est le nombre maximum de tir d'une cellule du maillage et les paramètres γ_1 et γ_2 sont des grandeurs dépendantes d'une dimension caractéristique du maillage δ et sont données par $\gamma_1 = \delta/2$ et $\gamma_2 = \delta/5$. Dans les cas de calcul présentés dans ce travail δ est choisi comme étant la plus petite arrête du maillage. Ceci nous permet d'avoir un filtrage adaptatif en fonction du niveau de bruit dans chaque cellule. Le niveau de bruit dépend plus précisément du nombre de rayons absorbés et émis par chaque cellule. Mais le nombre de rayons absorbés dépend de la complexité géométrique et est donc difficilement quantifiable.

Pour le filtrage du flux radiatif aux parois, on a choisi dans ce travail de moyenner localement le flux radiatif sur une face donnée avec le flux radiatif des faces voisines au sens des noeuds ($F_\Phi = 1$). Il est toutefois possible d'adopter un filtrage plus compliqué, comme dans le cas des cellules volumiques si la complexité géométrique le requiert et notamment si il y a des zones d'ombre.

IV.6.3 Exemple de filtrage spatial

Nous montrons à présent quelques résultats obtenus par cet algorithme de filtrage. La géométrie considérée est celle du maillage 2a (annexe D). Le profil de température est donné par l'équation :

$$T(x, y, z) = T_0 + (T_c - T_0)\exp(-\alpha(x^2 + y^2 + z^2)) \tag{IV.50}$$

avec une température maximum T_c=25000 K. Le point le plus chaud est au centre du cube et on a $\alpha = 1.2\ cm^{-2}$. Les parois sont des corps noirs à une température égale à $T_0 = 2000\ K$. L'algorithme utilisé est l'algorithme de Monte Carlo avec dépôt final en utilisant l'octree. Nous donnons à titre indicatif dans le tableau IV.2 quelques statistiques sur l'octree géométrique et son prolongement physique construit sur ce profil de température.

Profondeur Maximum estimée pour l'octree	5
Temps CPU de construction de l'octree	0.4 s
Nombre de feuilles dans la structure physique	2324
Nombre d'obstacles en moyenne dans les feuilles de la structure	3.75
Ecart-type de distribution des obstacles dans les feuilles de la structure	40.39 %
Nombre total de feuilles dans la structure géométrique	11992
Nombre de feuilles contenant des obstacles	5768
Nombre de paquets utilisés pour la simulation Monte Carlo	20
Temps CPU moyen de calcul d'un paquet	5.6 s
Temps CPU de filtrage	8.35 s

Table IV.2 – *Données relative à la structure de données en octree pour le maillage 2a (annexe D) et temps CPU.*

Nous présentons ci-dessous des résultats de l'algorithme de filtrage sur le champ de puissance radiative. La figure IV.33 montre une iso-valeur du champ de puissance radiative non filtré et la figure IV.34 montre le même champ filtré à l'ordre 1. On voit une nette réduction du bruit spatial par l'application de l'algorithme de filtrage dans cette zone. Avant filtrage, le niveau d'écart type dans cette zone en fin de calcul Monte Carlo était de l'ordre de 6% à 7%.

De même les figures IV.35 et IV.36 montrent respectivement les flux aux parois avant et après l'application de l'algorithme de filtrage à l'ordre 1. On voit que le flux non filtré est bruité spatialement. Le bruit engendré par l'algorithme Monte Carlo est nettement réduit par l'algorithme de filtrage à l'ordre 1.

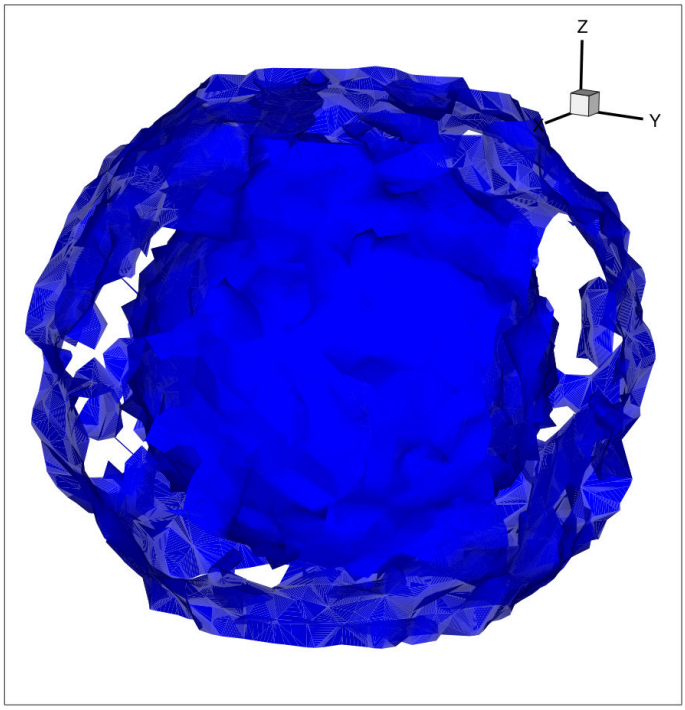

FIGURE IV.33 – *Iso-surface de puissance radiative non filtrée à* $-3,3.10^9$ $W.m^{-3}$.

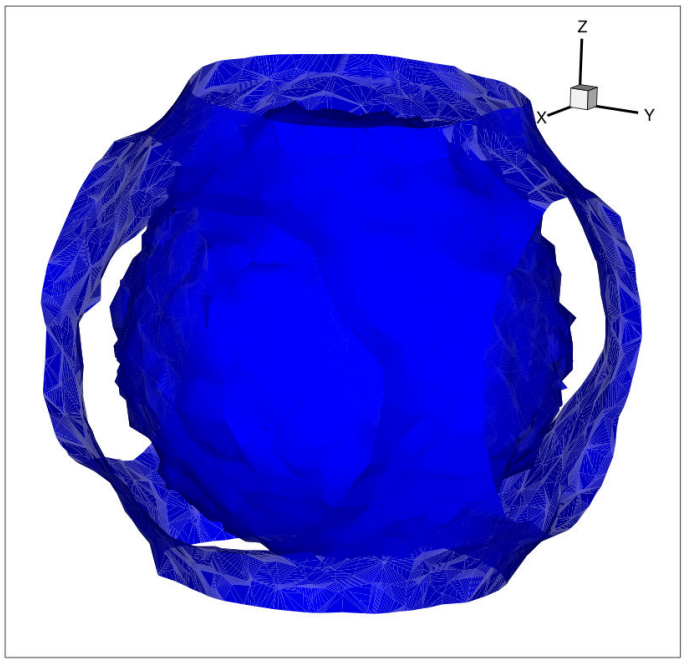

FIGURE IV.34 – *Iso-surface de puissance radiative filtrée à l'ordre 1 à* $-3,3.10^9$ $W.m^{-3}$.

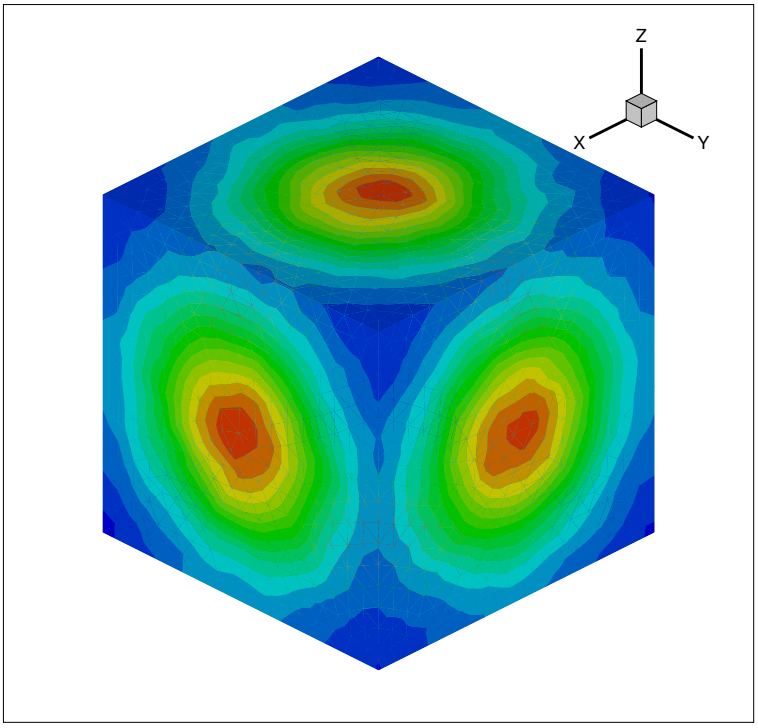

Figure IV.35 – *Flux radiatif non filtré aux parois*

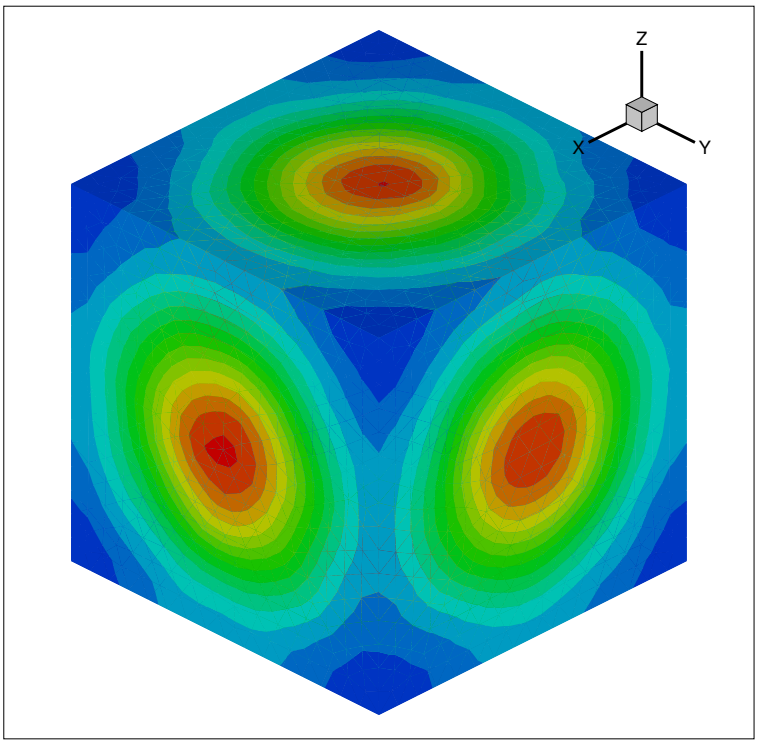

Figure IV.36 – *Flux radiatif filtré à l'ordre 1 aux parois*

IV.7 Algorithmie de calculs parallèles

Les algorithmes de calcul de transfert radiatif développés se prêtent particulièrement bien à la parallélisation. En effet, les calculs Monte Carlo réalisés à la fois dans les algorithmes de dépôt final et de dépôt progressif reposent sur la nécessité de simuler un grand nombre de réalisations des variables aléatoires "champ de puissance radiative" et "champ de flux radiatif sur les faces solides". Les estimateurs sont d'autant plus précis que le nombre de réalisations est élevé. Il s'agit en effet de traiter le même nombre de rayons sur chaque processeur et de reconstruire les deux estimateurs de flux et puissance sur un processeur unique en fin de simulation. Nous allons présenter la méthodologie de parallélisation ci-dessous.

IV.7.1 Choix de parallélisation

La parallélisation se fait suivant les paquets de rayons à tirer. Chaque processeur va simuler une réalisation des variables aléatoires champs de puissance et de flux radiatif. Un processeur va calculer une moyenne de toutes les réalisations en fin de calcul. La figure IV.37 montre schématiquement la répartition des taches sur chaque processeur et la somme finale qui est réalisée. La seule boucle qui est parallélisée est la boucle sur les paquets.

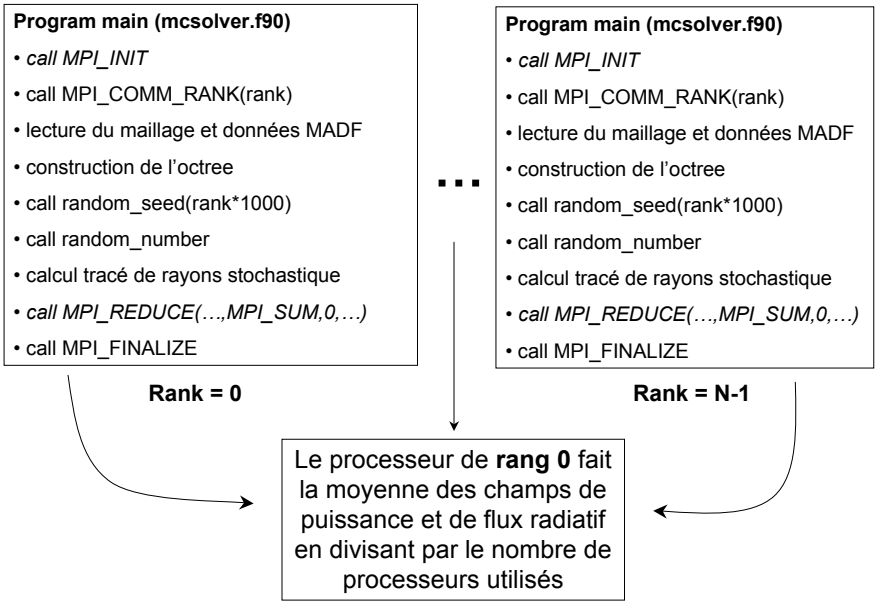

Figure IV.37 – *Algorithmie de calcul parallèle. Tous les processeurs réalisent la même tâche. Ils executent l'ensemble du programme principal qui contient la lecture des données d'entrée du programme, la construction de l'octree, la génération des tables de nombres aléatoires et le calcul de tracé de rayons stochastique. En fin de calcul, le processeur de rang 0 réalise la moyenne des champs de puissance et de flux radiatif.*

Il est à noter que, avec ce choix de parallélisme, il ne se pose aucun problème de scalabilité car tous les processeurs traitent exactement le même nombre de rayons. De légères différences peuvent apparaître sur les temps CPU à cause du traitement des réfléxions éventuelles qui peuvent différer suivant les trajectoires des rayons tirés ou des différences d'épaisseurs optiques le long des trajectoires. Mais ces cas peuvent se produire sur tous les processeurs avec une équiprobabilité ce qui élimine les déséquilibres de charge éventuels. À titre d'exemple les calculs présentés au chapitre suivant avec des maillages complexes conduisent à un écart type de la charge de chaque processeur de l'ordre de 3,5 %.

IV.8 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre les trois algorithmes que nous avons développé et implémenté pour la simulation du transfert radiatif dans des géométries complexes contenant des milieux plasmas. Les deux premiers algorithmes sont classiques et utilisent directement le maillage fluide aussi bien pour la propagation des rayons que pour l'évaluation des propriétés thermophysiques et optiques du milieu le long de cette propagation. Ils nécessitent ainsi le calcul des intersections avec les cellules fluides définissant la géométrie. La différence entre ces deux premiers algorithmes concerne la façon dont la puissance radiative absorbée est déposée dans le milieu fluide. Cette puissance est soit déposée dans sa totalité lorsque le point d'absorption choisi aléatoirement est atteint, soit déposée de proche en proche de façon déterministe dans toutes les cellules traversées. Le troisième algorithme est très différent des deux premiers dans la mesure où on s'affranchit du maillage fluide pour éviter le calcul fréquent des intersections avec les faces des cellules. L'idée principale consiste à accélérer le calcul de la propagation des rayons dans les zones ne contenant pas d'obstacles solides et où les gradients des grandeurs thermophysiques sont modérés. Ceci nécessite la construction d'une structure de données arborescente, appelée octree, superposée sur le maillage fluide.

Dans cette dernière approche, une première structure en octree permet de répartir les faces solides du maillage dans les feuilles terminales de cet arbre afin de minimiser le nombre de calculs d'intersections avec les faces solides et de dégager de grands volumes libres d'obstacles. Une deuxième structure prolonge cet octree géométrique permettant de créer des zones homogènes en propriétés thermophysiques au sein de ces grands volumes libres. Nous avons expliqué les algorithmes de construction de ces octree ainsi que les structures de données dynamiques relatives à la génération d'un maillage virtuel pour traiter les faces solides du maillage initial. Les questions de topologie de graphes soulevées ont particulièrement retenu notre attention dans ce travail car ce choix détermine la rapidité d'accès à l'information géométrique et à la connectivité entre les noeuds virtuels et les faces virtuelles générés pour pouvoir contruire l'octree. Cette dernière méthode nécessite également de pouvoir trouver une cellule où déposer l'énergie en fin de parcours. Nous avons donc développé un algorithme de déplacement de cellule fluide en cellule fluide au sein d'une même feuille de l'octree. Il faut également pouvoir transporter les photons dans l'octree donc pouvoir franchir des interfaces entre feuilles de l'octree sans pour autant utiliser une notion de connectivité entre feuilles géographiquement voisines. L'approche retenue est de descendre à partir de la racine de l'octree en utilisant les coordonnées du point d'impact à l'interface. Les algorithmes probabilistes présenté ici ont également été parallélisés sur le nombre de paquet.

Nous présentons dans la dernière partie de ce travail les tests de validation ainsi que des comparaisons de performances en temps CPU des trois algorithmes pour identifier les comportements en fonction des complexités spectrales et géométriques.

Chapitre V

Validations et performances algorithmiques comparées

Table des matières

V.1 Introduction 152

V.2 Validation des algorithmes développés 153

V.2.1 Calcul de facteurs de forme tridimensionnels 153

V.2.2 Calcul de transfert radiatif en géométrie monodimensionnelle . . 154

V.2.3 Calcul de transfert radiatif en géométrie bidimensionnelle 156

Calculs en milieu gris 156

Calculs avec le modèle MADF 160

Temps de calcul observés 160

V.3 Performance des différents algorithmes pour une géométrie complexe tridimensionnelle 163

V.3.1 Performance de l'algorithme octree en fonction de la profondeur de la structure de données 163

V.3.2 Calcul de transfert radiatif dans une géométrie représentative d'un disjoncteur 165

Puissance radiative dans le milieu 168

Flux radiatif aux parois 169

V.3.3 Temps de calcul comparés des trois algorithmes Monte Carlo . . 171

V.1 Introduction

Nous rappelons que le but principal de ce travail est de proposer des algorithmes efficaces en temps de calcul et suffisament précis et robustes pour former une bibliothèque de calcul de transfert radiatif destinée à être couplée à un solveur numérique de mécanique des fluides. Le choix du solveur peut être quelconque à condition de pouvoir accéder à toutes les informations de connectivités de maillage et aux champs de propriétés thermophysiques via une interface de communication. Cette bibliothèque doit être utilisable pour des géométries industrielles réelles dans le but de réaliser des calculs couplés d'électrohydrodynamique radiative tridimensionnelle. Nous n'entrons pas ici dans le détail architectural de l'interface, ni dans la correspondance entre maillages différents nécessaire à la mise en oeuvre d'un calcul couplé. La complexité géométrique du problème est un des facteurs de motivation de l'étude étant donné le large choix qui peut être fait par l'utilisateur utilisant un mailleur commercial.

Nous montrons dans une première partie de ce chapitre quelques résultats de validation des deux algorithmes de Monte Carlo développés : dépôt final avec octree et dépôt progressif sur le maillage de mécanique des fluides. Ces résultats sont obtenus dans le cas de géométries simples unidimensionnelles ou bidimensionnelles pour lesquelles nous disposons de solutions de référence. Le logiciel de lancé de rayons développé dans la première partie de thèse et présenté au chapitre 3 est utilisé comme cas de référence pour cette validation lorsque les profils de température sont bidimensionnels. Dans une deuxième partie, nous considérons un exemple de géomètrie complexe 3D représentative d'une chambre de coupure d'un disjoncteur basse tension. Nous montrons les résultats obtenus avec une méthode de Monte Carlo en dépôt final accélérée par un maillage sous-jacent structuré en octree. Cette méthode est comparée avec une méthode de Monte carlo en dépôt progressif qui utilise la dicrétisation de la géométrie donnée par le mailleur commercial, ainsi qu'avec une méthode de Monte Carlo en dépôt final qui utilise également la discrétisation donnée par le mailleur commercial. Les performances des différents algorithmes développés sont étudiées en comparant les temps de calcul requis à niveaux de variance des puissances radiatives et des flux radiatifs fixés.

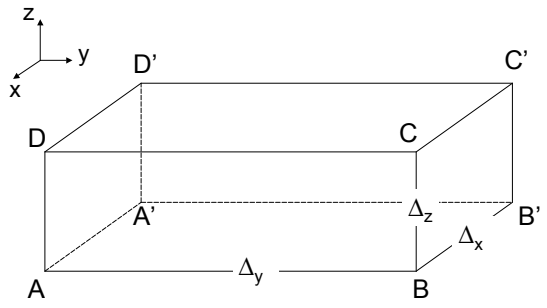

Figure V.1 – *Géométrie parallélépipédique pour le calcul des facteurs de forme*

V.2 Validation des algorithmes développés

Nous montrons dans ce paragraphe quelques exemples de validation des algorithmes Monte Carlo mis en oeuvre pour des géométries simplifiées et des profils de température analytiques. Les deux premières validations sont relatives à des calculs de facteurs de forme géométriques et au transfert radiatif dans une couche plane homogène, pour lesquels nous disposons de résultats analytiques. La troisième validation concerne une géométrie bidimensionnelle cartésienne pour laquelle la méthode de lancé de rayons déterministe est utilsée comme référence.

V.2.1 Calcul de facteurs de forme tridimensionnels

Nous avons effectué des calculs de facteurs de formes géométriques afin de valider les procédures de propagation des rayons et intersections avec les parois. Nous considérons ainsi la géométrie présentée sur la figure V.1 où le milieu est non participant. Nous calculons le facteur de forme de la surface $ABCD$ de dimension $\triangle_z$ et $\triangle_y$ vers la surface $DCC'D'$ de dimension $\triangle_x$ et $\triangle_y$. Les rayons sont tirés uniquement à partir de la face $ABCD$. Nous faisons varier le paramètre $\alpha = \triangle_z/\triangle_y$. Le calcul a été réalisé sur le maillage 2a (annexe D) qui a été plus ou moins dilaté dans la direction z pour faire varier le paramètre α en gardant $\Delta_x = \Delta_y$. La figure V.1 montre les résultats obtenus pour un paramètre α compris entre 0.1 et 2 avec la méthode de calcul de flux radiatif par l'algorithme de Monte Carlo optimisé par octree, comparé à un résultat analytique (Siegel et Howell 2002). On voit un très bon accord sur toute la gamme de paramètre α testée avec toutefois un léger écart qui augmente lorsque α augmente. Cet écart peut s'expliquer par l'insuffisance du maillage utilisé pour les grandes valeurs de α et par le fait que dans cet exemple, les tirs ne sont effectués que des centres des mailles.

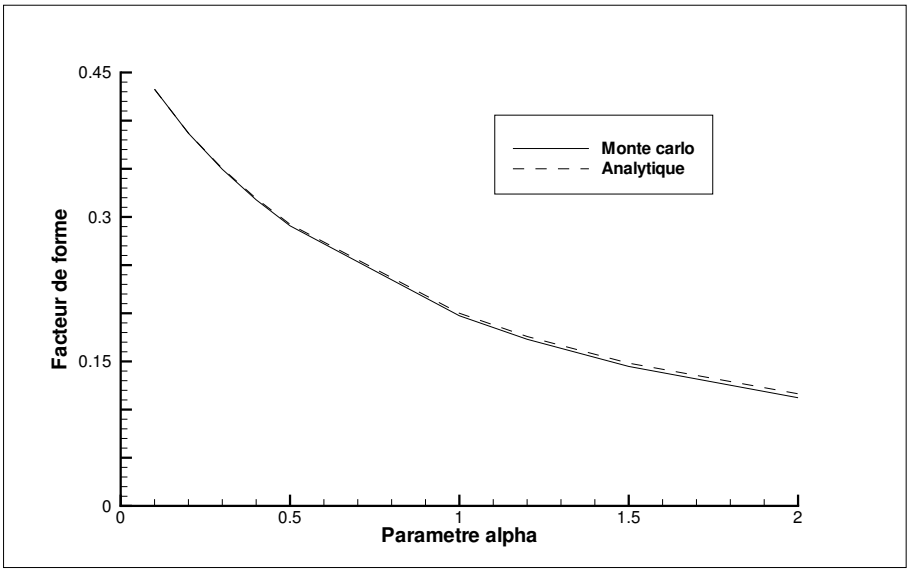

FIGURE V.2 – *Calcul du facteur de forme entre 2 plaques rectangulaires et perpendiculaires. On compare les résultats de calcul Monte Carlo avec octree avec un calcul analytique.*

V.2.2 Calcul de transfert radiatif en géométrie monodimensionnelle

Nous présentons ici des résultats de validation dans le cas d'une géométrie plane comprise entre deux murs parallèles distants de L. Ce calcul a été réalisé sur le maillage 2a (annexe D) où les deux faces horizontales sont supposées être des corps noirs à très faible température (émission négligeable) et les quatre faces verticales sont supposées parfaitement réfléchissantes de façon spéculaire de telle sorte qu'on puisse simuler un milieu 1D. Le milieu est gris de coefficient d'absorption k et à une température $T = 10000\ K$. Le nombre de réflexions maximum autorisé pour un rayon donné est de 20. Les conditions sont rappelées dans le tableau V.1. Le flux à l'une des deux parois s'exprime simplement par :

$$\Phi_w = \sigma T^4[1 - 2E_3(kL)], \tag{V.1}$$

où E_3 est la fonction intégro-exponentielle d'ordre 3 : $E_3(x) = \int_0^1 \mu \exp(-x/\mu) d\mu$. La figure V.3 représente les résultats du calcul Monte Carlo comparés au résultat analytique pour différentes épaisseurs optiques kL. On représente le flux surfacique moyenné sur l'ensemble des faces d'émissivité égale à 1. Les barres entourant les points de calcul Monte Carlo représentent la dispersion spatiale des résultats obtenus pour chacune des faces triangulaires

Température du milieu	10000 K
Nombre de tirs moyen par cellule	30
Nombre de tirs moyen par face	0
Nombre de paquets utilisé	256
Nombre de réflexions maximum	20

TABLE V.1 – *Conditions de calculs pour les simulations Monte Carlo dans le cas du slab 1D.*

(valeurs minimale et maximale). On voit un très bon accord entre calcul Monte Carlo et résultat analytique sur toute la plage des épaisseurs optiques considérées.

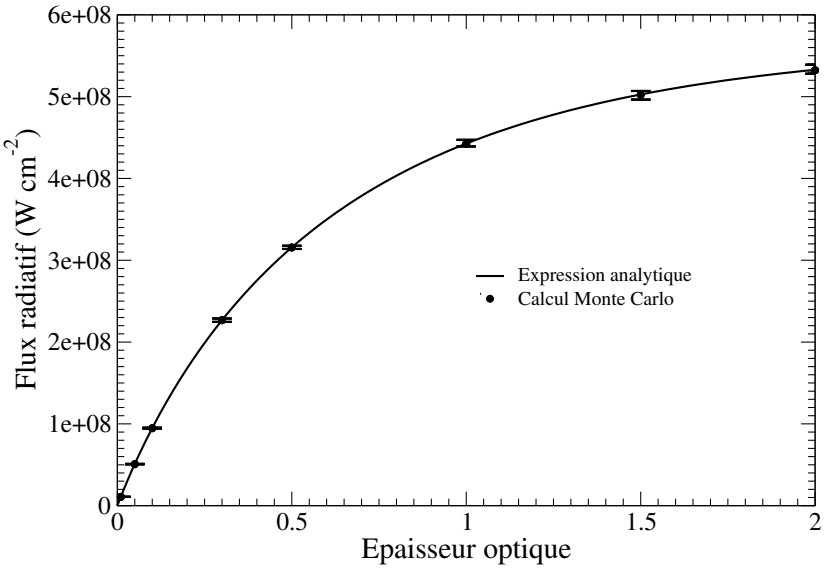

Figure V.3 – *Comparaison de calculs de flux radiatifs dans une géométrie plane unidimensionnelle obtenus par l'algorithme de Monte Carlo par octree et le résultat analytique pour différente épaisseurs optiques du milieu.*

V.2.3 Calcul de transfert radiatif en géométrie bidimensionnelle

Nous montrons dans ce qui suit des calculs de validation dans une géométrie bidimensionnelle avec un profil de température analytique $T(x, y)$, comparé avec un calcul par lancé de rayon similaire à ceux effectués aux chapitres 2 et 3 et considéré comme référence. Les calculs Monte-Carlo sont réalisés sur le maillage 2.b (annexe D) contenant environ 3,3 millions ce cellules et 86000 faces solides. Pour simuler le milieu bidimensionnel, les parois parallèles au plan (x, y) ont une émissivité nulle et sont supposées réfléchir de façon spéculaire. Le milieu est ainsi infini du point de vue du rayonnement dans la direction (Oz). Les autres parois sont supposées noires et à 2000 K. Les dimensions de la boîte carrée sont telles que $(x, y) \in [-1, 1cm] \times [-1, 1cm]$.
Dans tout ce paragraphe, le profil de température est donné par :

$$T(x, y) = 2000 + 13000 \exp\left[-\alpha(x^2 + y^2)\right] \tag{V.2}$$

avec $\alpha = 2cm^{-2}$. Le calcul de transfert radiatif par lancé de rayons bidimensionnel a été effectué sur un maillage cartésien régulier de 150×150 noeuds pour la discrétisation spatiale. Pour la discrétisation angulaire, on a utilisé 80 rayons pour les noeuds de volume et 40 rayons pour les noeuds de paroi. Ceci représente un bon niveau de discrétisation pour le cas de référence compte tenu de l'étalement du profil de température. Nous indiquons dans le tableau V.2 les conditions utilisées pour les simulations Monte Carlo en dépôt final avec octree lorsque le modèle MADF est utilisé.

Le milieu est gris dans un premier temps de façon à étudier la précision des algorithmes probabilistes dans des cas à épaisseur optique connue et fixée. Dans un deuxième temps, les calculs sont réalisés dans un milieu dont les propriétés spectrales sont données par le modèle MADF à 216 gaz gris. On montre dans ce qui suit les flux radiatifs aux parois ainsi que les puissances radiatives. On note également les temps de calculs pour les simulations Monte Carlo ainsi que le niveau de variance atteint en fin de simulation pour les deux algorithmes probabilistes.

Calculs en milieu gris

- Flux radiatif

Nombre moyen de tirs par cellule, par face et par paquet	100
Nombre de paquets	256
Nombre maximum de réflexions autorisées	20
Profondeur maximum de la structure octree	7
Nombre total de feuilles dans la structure octree géométrique	219080
Nombre de feuilles géométriques contenant des obstacles	96776
Nombre moyen d'obstacles par feuille de l'octree	4.6
Ecart-type de distribution des obstacles dans les feuilles de l'octree	30,1 %
Nombre de feuilles physiques	1546622
Taille mémoire de la structure de données en octree	1,2 Go

Table V.2 – *Conditions de calcul pour les simulations Monte Carlo*

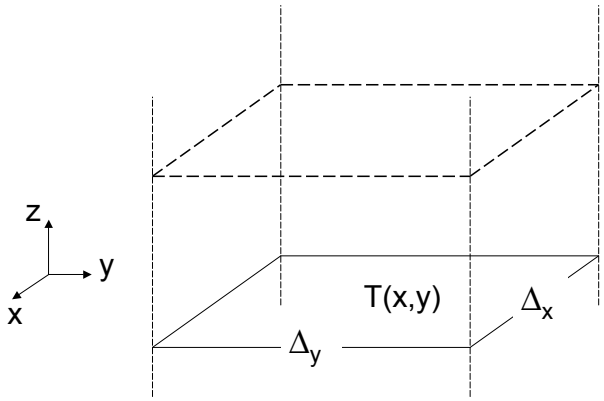

Figure V.4 – *Géométrie bidimensionnelle infinie selon Oz.*

Les figures V.5 et V.6 montrent la distribution du flux radiatif pariétal le long d'un des côtés de la boîte carrée, calculé avec la méthode de lancé de rayons. Les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo, également présentés sur ces figures, correspondent à la moyenne de 100 coupes horizontales (z constant) des flux calculés sur les parois verticales de la boîte tridimensionnelle. Les deux figures correspondent respectivement à un milieu gris avec $k = 1$ cm^{-1} et $k = 10$ cm^{-1}. Ceci correspond à une épaisseur optique totale $k \times \Delta_x$ de 2 ou de 20. On voit un très bon accord entre les deux algorithmes probabilistes et la méthode de lancé de rayons pour les deux épaisseurs optiques considérées. Des calculs effectués pour des épaisseurs optiques plus faibles (non montrés ici) conduisent également à un très bon accord.

- Puissance radiative

Les figures V.7 et V.8 représentent des coupes de puissance radiative dans le domaine en $y = 0$ (moyenné sur 100 coupes à z constant) avec respectivement $k = 1$ cm^{-1} et avec $k = 10$ cm^{-1}. On y voit un très bon accord entre les 2 algorithmes probabilistes et le lancé de rayons dans le cas où $k = 1$ cm^{-1} mais de légères différences au centre de la cavité dans le cas où $k = 10$ cm^{-1}. Cependant le niveau de variance atteint en fin de calcul est de 6% pour l'algorithme de Monte carlo en dépôt progressif et de $4,6$ % pour l'algorithme en dépôt final avec octree. De plus le calcul par lancé de rayons est conservatif à $2,5$ % dans ces conditions de forte épaisseur optique car le calcul de la puissance est ponctuel et non pas intégré sur une maille comme c'est le cas pour les calculs Monte Carlo. L'écart observé entre les algorithmes probabilistes et la méthode déterministe est donc inférieur au niveau de convergence atteint en fin de calcul et se situe dans les deux intervalles de confiance des deux estimateurs de puissance radiative.

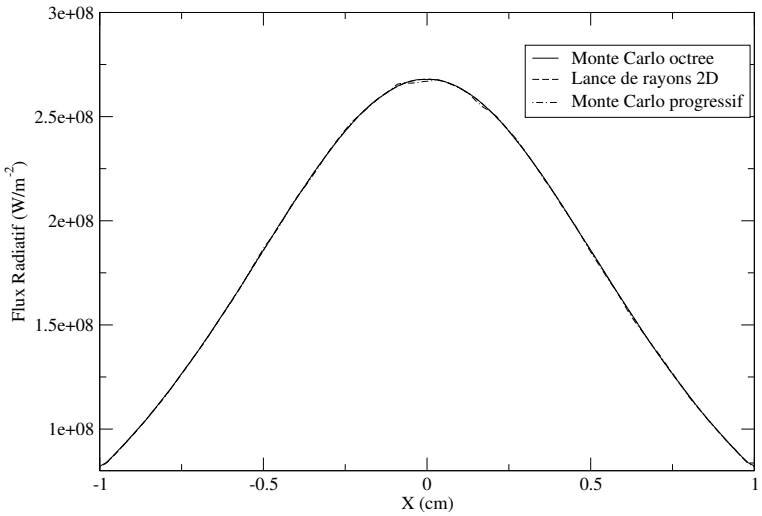

Figure V.5 – *Flux radiatif calculé par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et la méthode de lancé de rayons dans le cas d'un milieu gris à $k = 1\ cm^{-1}$. Les courbes Monte Carlo représentent des moyennes spatiales de 100 coupes horizontales réalisées sur une des faces de la géométrie cubique.*

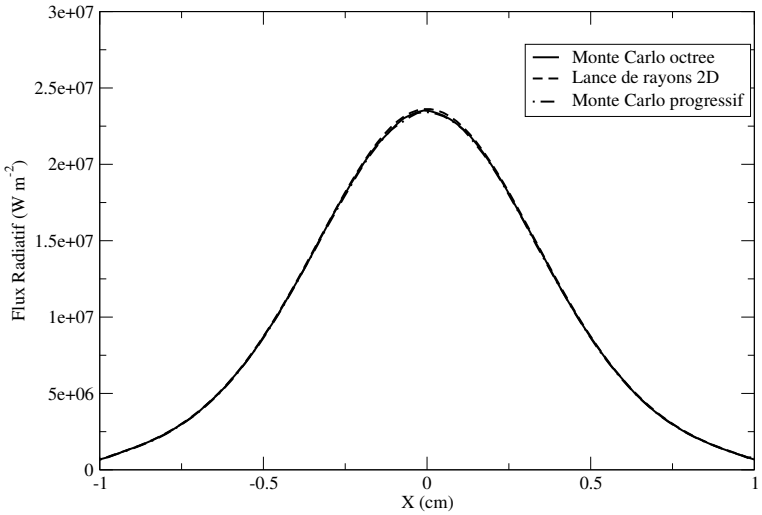

Figure V.6 – *Flux radiatif calculé par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et la méthode de lancé de rayons dans le cas d'un milieu gris à $k = 10\ cm^{-1}$. Les courbes Monte Carlo représentent des moyennes spatiales de 100 coupes horizontales réalisées sur une des faces de la géométrie cubique.*

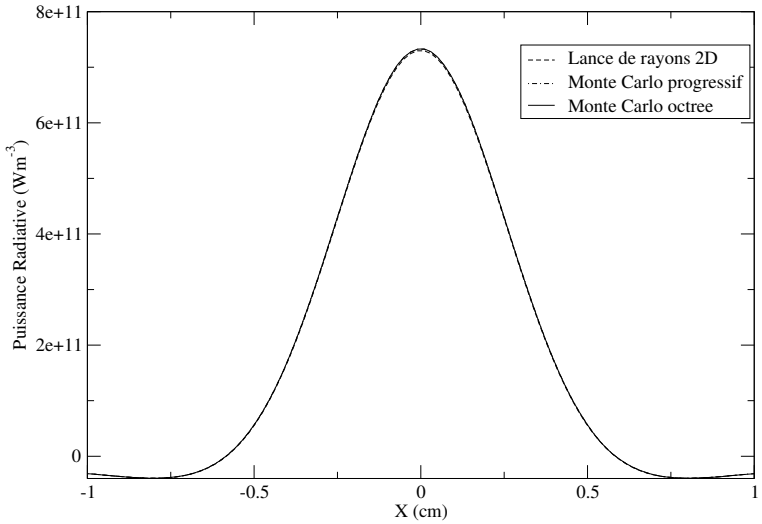

FIGURE V.7 – *Puissance radiative calculée par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et la méthode de lancé de rayons dans le cas d'un milieu gris à $k = 1\ cm^{-1}$. Les courbes Monte Carlo représentent des moyennes spatiales de 100 coupes horizontales dans le plan $y = 0$.*

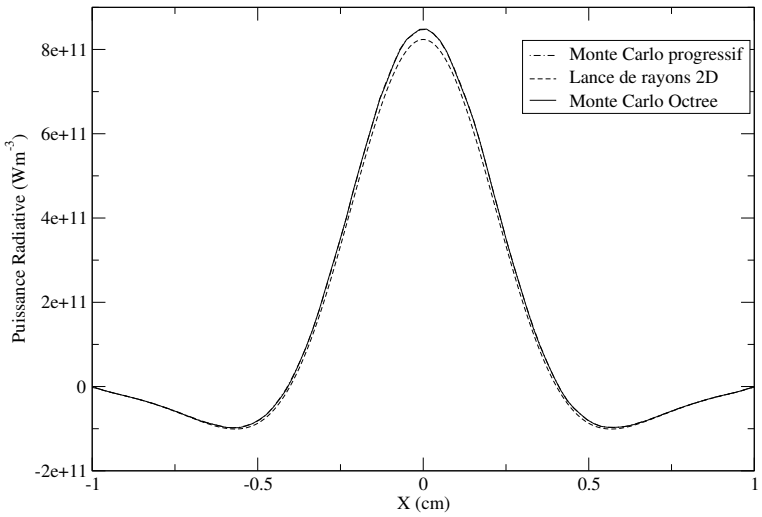

FIGURE V.8 – *Puissance radiative calculée par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et la méthode de lancé de rayons dans le cas d'un milieu gris à $k = 10\ cm^{-1}$. Les courbes Monte Carlo représentent des moyennes spatiales de 100 coupes horizontales dans le plan $y = 0$.*

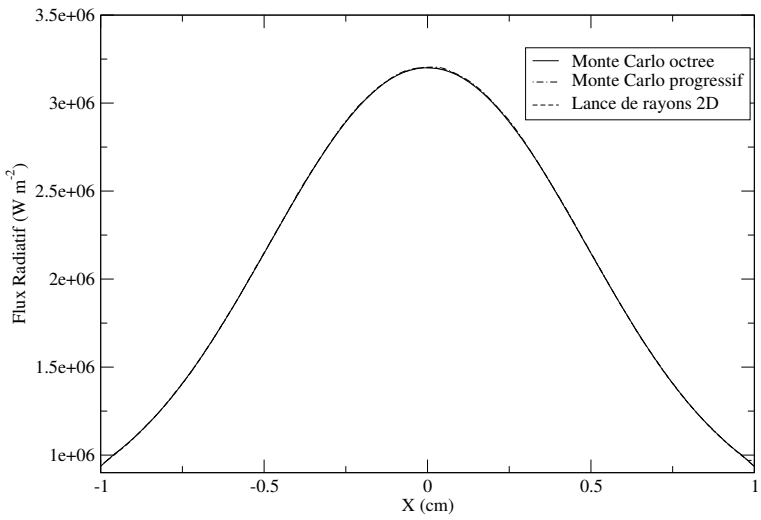

Figure V.9 – *Flux radiatif calculé par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et par lancé de rayons dans le cas d'un milieu plasma décrit par le modèle MADF.*

Calculs avec le modèle MADF

La figure V.9 montre la distribution du flux pariétal (moyenné sur 100 coupes) à la paroi et calculé par les deux algorithmes de Monte Carlo proposés ainsi que le lancé de rayons bidimensionnel dans le cas où les propriétés spectrales du milieu sont données par le modèle MADF à 216 gaz gris. On y voit un très bon accord entre les deux méthodes probabilistes et le lancé de rayons en tout point de la paroi.

La figure V.10 montre le profil de la puissance radiative en $y = 0$ (moyennée sur 100 coupes horizontales). On y voit un bon accord entre les 2 méthodes probabilistes et le lancé de rayons dans les zones absorbantes mais de légers écarts sont observés au centre de la zone chaude. Ces écarts sont de l'ordre de la variance en fin de calcul qui est de 3% pour l'algorithme de dépôt progressif et de 2 % pour l'algorithme par octree.

L'ensemble des tests effectués, comprenant le calcul de facteurs de forme, les transferts en géométries mono- et bidimensionnelle, nous conforte dans l'idée que les algorithmes de Monte Carlo développés ici ont été correctement implémentés.

Temps de calcul observés

On présente à titre indicatif dans les tableaux V.3 et V.4 les temps CPU de calcul obtenus. Les calculs ont été réalisés sur un calculateur IBM power 6 de l'Institut pour le Développement et les Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) avec 128 ou 256 processeurs. Les temps de calcul présentés sont ramenés à un processeur. L'écart type représente un

écart type adimensionné moyenné sur tout le volume ou toute la surface selon :

$$\sigma(P) = \frac{\int_V \sigma_v(M)\mathrm{d}V}{\int_V |P_{rad}(M)|\mathrm{d}V} \tag{V.3}$$

$$\sigma(\Phi) = \frac{\int_S \sigma_s(M)\mathrm{d}S}{\int_S |\Phi_{rad}(M)|\mathrm{d}S} \tag{V.4}$$

où $\sigma_v(M)$ et $\sigma_s(M)$ représentent respectivement les écarts types absolus obtenus sur le calcul de la puissance radiative et du flux radiatif en un point M du volume ou de la surface. Les temps CPU présentés ont été obtenus en supposant que le temps CPU est proportionnel au nombre total de rayons tirés. Ainsi on peut écrire que l'écart type du calcul statistique de la puissance ou du flux varie selon $\sigma \propto t_{CPU}^{-1/2}$. Les temps donnés dans les tableaux V.3 et V.4 ont donc été ramenés à un écart type de 1 % par cette hypothèse. Les écarts type atteints en fin de calcul étaient de l'ordre de 1% à 6% dans tous les cas. La discussion concernant les comparaisons de ces temps de calcul fait l'objet du paragraphe suivant où on considère des géométries plus complexes.

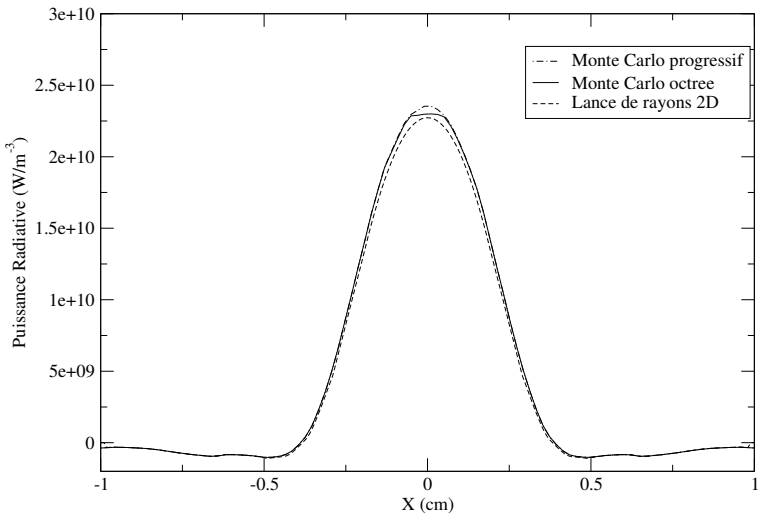

Figure V.10 – *Puissance radiative calculée par les deux méthodes de Monte Carlo (dépôt final et dépôt progressif) et par lancé de rayons dans le cas d'un milieu plasma décrit par le modèle MADF.*

	$k = 1\ cm^{-1}$	$k = 10\ cm^{-1}$	MADF
Monte carlo progressif	91,31	32204,7	3942,75
Monte carlo Octree	1815,9	29478,82	4103,4

Table V.3 – *Temps CPU (h) de calcul équivalent monoprocesseur pour un écart-type intégré relatif de 1% sur le champ de puissance radiative.*

	$k = 1\ cm^{-1}$	$k = 10\ cm^{-1}$	MADF
Monte carlo progressif	186,5	6514,3	1117
Monte carlo Octree	176,5	1588,91	203,64

Table V.4 – *Temps CPU (h) de calcul équivalent monoprocesseur pour un écart-type intégré relatif de 1% sur le champ de flux radiatif.*

V.3 Performance des différents algorithmes pour une géométrie complexe tridimensionnelle

V.3.1 Performance de l'algorithme octree en fonction de la profondeur de la structure de données

Dans le domaine de la synthèse d'image, la géométrie est généralement définis par les parois et on ne dispose généralement pas de maillage associé au volume englobé par ces parois. La mise en oeuvre d'une structure de partitionnement spatial de type octree permet alors de minimiser le nombre d'éléments de parois testées lors d'un tracé de rayons. Nous illustrons dans ce premier paragraphe les performances de l'algorithme octree dans un cas similaire où on ne s'intéresse qu'au temps de calcul requis par le calcul d'intersection des rayons avec les parois.

La figure V.11 montre l'évolution du temps CPU de tracé de rayons dans un calcul Monte Carlo optimisé par octree en fonction de la profondeur de l'octree ainsi que l'évolution de la mémoire nécessaire. Le maillage utilisé est le maillage 2a (annexe D, maillage tétraédrique). On tire un nombre de rayons identique de chaque cellule du maillage fluide et de chaque face solide. Le milieu est non participant de sorte que tous les rayons arrivent à impacter une face. Les faces sont des corps noirs donc il n'y a pas de réfléxions possibles. On ne considère qu'un seul paquet ici.

On voit que le temps de tracé de rayons diminue fortement avec la profondeur de la structure de données jusqu'à une certaine limite. À cette profondeur limite, de l'ordre de 5 ici, un calcul d'ordre de grandeur montre que la surface des côtés des cubes terminaux de l'arbre est approximativement égale à la surface typique d'une maille de paroi. À cette profondeur le gain en temps CPU est nettement significatif (rapport de l'ordre de 100) par rapport à un calcul à la profondeur 0 qui nécessite de tester toutes les faces solides du maillage pour chaque rayon tiré. Ce gain est du même ordre que celui constaté par d'autres auteurs (Perez 2002; Perez, Paulin, et El Hafi 2007). On voit également une légère remontée des temps CPU de tracé de rayons respectivement des faces solides et des cellules au-delà de la profondeur limite de 5. En effet, dans ce cas, la structure de données arborescente discrétise la géométrie au delà du maillage initial. Il n'y a donc plus de gain d'information sur la position des faces solides testées. Le temps CPU de calcul de trajectoire dans l'octree devient non négligeable par rapport au temps CPU de test d'impact sur les faces solides dans les feuilles de l'arbre. L'explosion de la mémoire nécessaire est aussi significative de ce stockage d'information inutile sur la position des faces solides. La remontée des temps CPU est plus marquée pour les tirs des faces solides car ces rayons traversent deux zones denses en feuilles de l'octree systématiquement (celle de la face de départ et celle de la face d'arrivée).

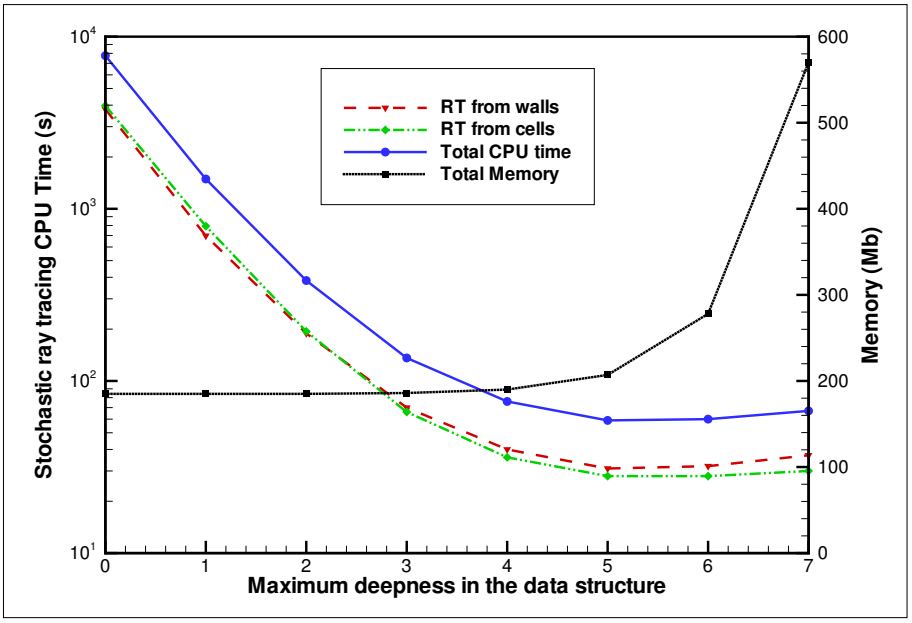

Figure V.11 – *Evolution du temps CPU de tracé de rayons et de l'espace mémoire nécéssaire de stockage de la structure de donnée arborescente en fonction de la profondeur maximum de l'arbre octree pour le maillage 2a (annexe D).*

V.3.2 Calcul de transfert radiatif dans une géométrie représentative d'un disjoncteur

Nous montrons à présent des calculs Monte-Carlo dans une géométrie présentant les mêmes contraintes en terme de présence de pièces solides incluses dans la zone fluide que dans les problèmes industriels. La figure V.12 représente schématiquement cette géométrie constituée d'un prallélépipède rectangle de dimensions 10 cm, 9 cm et 7 cm selon x, y et z respectivement. Ce boîtier contient deux plaques représentant les électrodes et quatre autres plaques représentant les ailettes de la chambre de coupure. L'arc est représenté par un champ de température analytique imposé, de forme ellipsoïdale :

$$T(x, y, z) = 2000 + 13000 \exp(-\alpha_x(x - x_0)^2 - \alpha_y(y - y_0)^2 - \alpha_z(z - z_0)^2), \qquad \text{(V.5)}$$

avec $(x_0, y_0, z_0) = (5,\ 2.5,\ 4\,\text{cm})$ et $(\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z) = (1,\ 0.1,\ 0.5\,\text{cm}^{-2})$, le point $(0, 0, 0)$ étant un coin du parallélépipède. La géométrie est multiplement connexe étant donné que les parties solides sont extraites du volume global. La figure V.13 représente le profil de température utilisé. Le point chaud est à 15000 K. On représente également une iso-température à 2000 K. Les parois sont noires à 500 K.

Cette géométrie a été d'abord maillée en tétraèdres comme décrit en annexe E afin de simuler un maillage de CFD sur lequel on souhaite déterminer les champs des flux et des puissances radiatives. Le nombre total de cellules est d'environ 3 millions et le nombre de faces solides (triangles) est d'environ 530000.

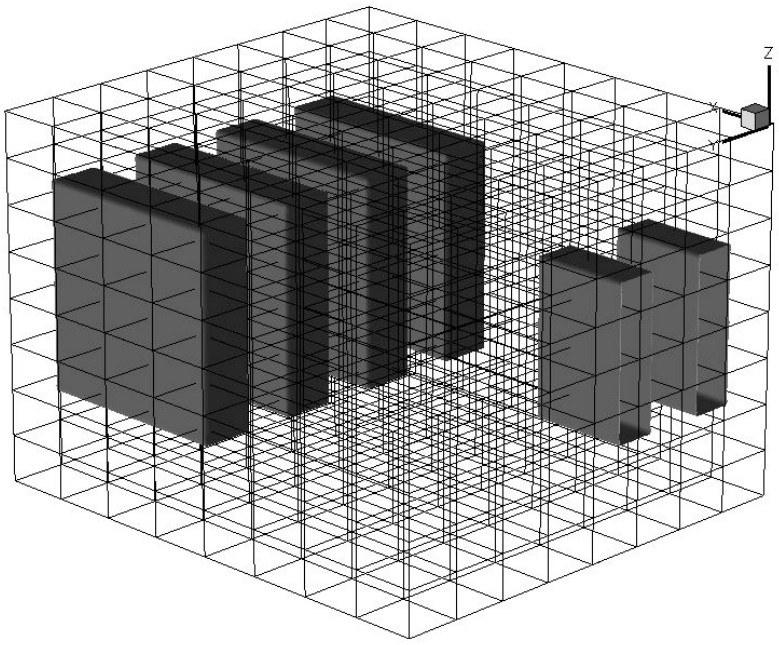

Figure V.12 – *Schéma simplifié d'une géométrie de disjoncteur. On y voit les 2 électrodes ainsi que 4 ailettes.*

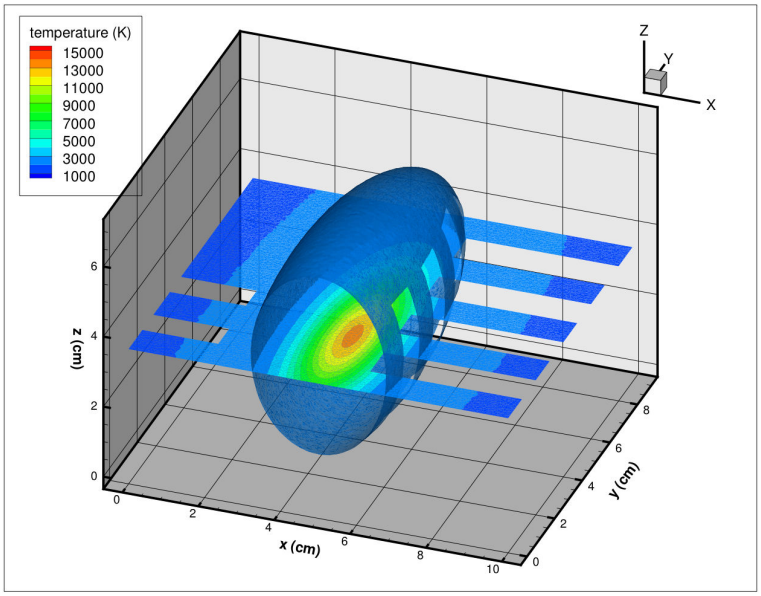

Figure V.13 – *Profil de température caractéristique en géométrie complexe. Coupe au plan z=4 cm et surface iso-température à 2000 K.*

Les structures en octree géométrique, puis physique, ont ensuite été engendrées automatiquement par le programme de calcul de transfert radiatif. La figure V.14 montre la superposition du maillage tétraédrique et des deux maillages octree avec des coupes pour visualiser l'intérieur de la géométrie. On représente sur la figure V.15 trois coupes de la structure de données en octree géométrique, puis sur la figure V.16 une coupe où apparaissent à la fois la structure géométrique et son prolongement physique. Le seuil de raffinement physique a été fixé à 200 K, ce qui est relativement fin compte tenu des gradients de température au sein du milieu et de la discrétisation du maillage fluide.

Le tableau V.5 synthétise quelques données relatives aux structures en octree et aux calculs Monte Carlo de transfert radiatif lorsque le modèle MADF est mis en oeuvre.

Nombre de tirs moyen par face et par cellule	30
Profondeur effective de la structure octree	7
Temps de construction de l'octree	24,2 s
Nombre moyen d'obstacles par feuille de l'octree	4,96
Ecart - type de la distribution des obstacles dans les feuilles	26,84 %
Nombre de feuilles physique	251475
Nombre total de feuilles géométriques	315022
Nombre de feuilles géométriques contenant des obstacles	138922
Nombre de processeurs utilisés (nombre de paquets)	256
Taille mémoire utilisée par la structure de données	500 Mo
Temps de calcul par processeur	1250 s

Table V.5 – *Caractéristiques des maillages en octree et conditions de calculs pour les simulations Monte Carlo en géométrie complexe avec le modèle MADF.*

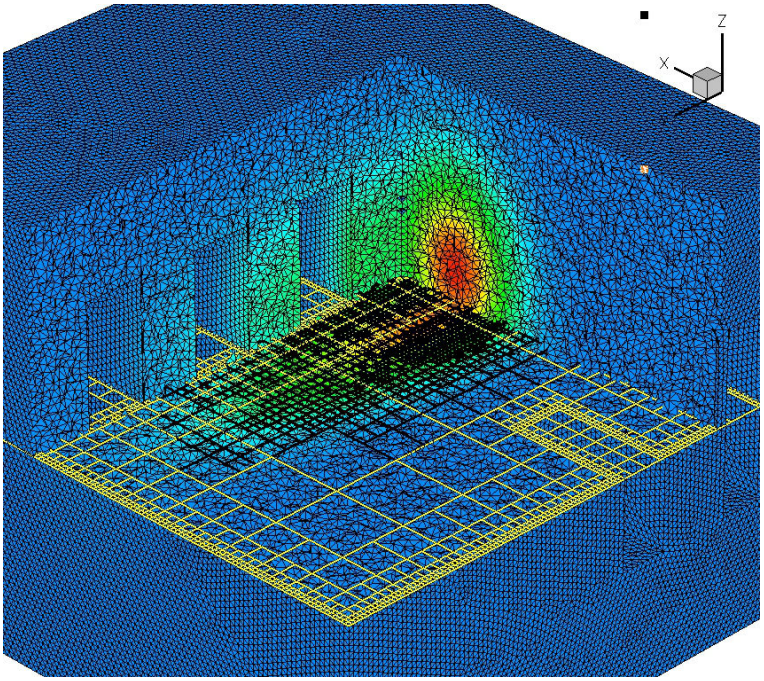

Figure V.14 – *Visualisation du maillage tétraédrique initial et d'une coupe montrant les maillages en octree géométrique (en jaune) et physique (en noir). On peut également voir le champ de température sur le maillage tétraédrique.*

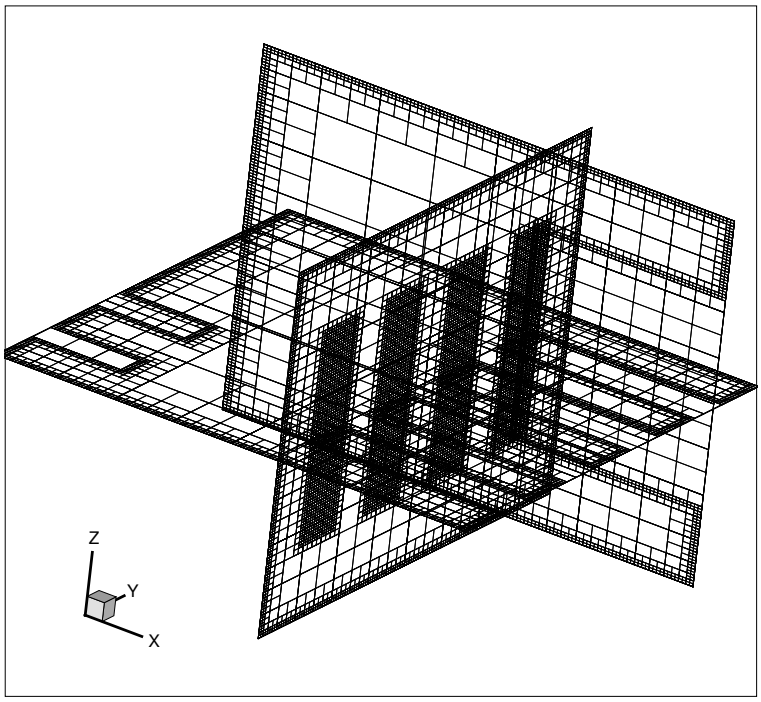

Figure V.15 – *Visualisation de la structure de données arborescente octree géométrique. On observe un raffinement adaptatif de la structure autour des zones solides. On voit également la création de grandes zones centrales qui ne contiennent aucun obstacle.*

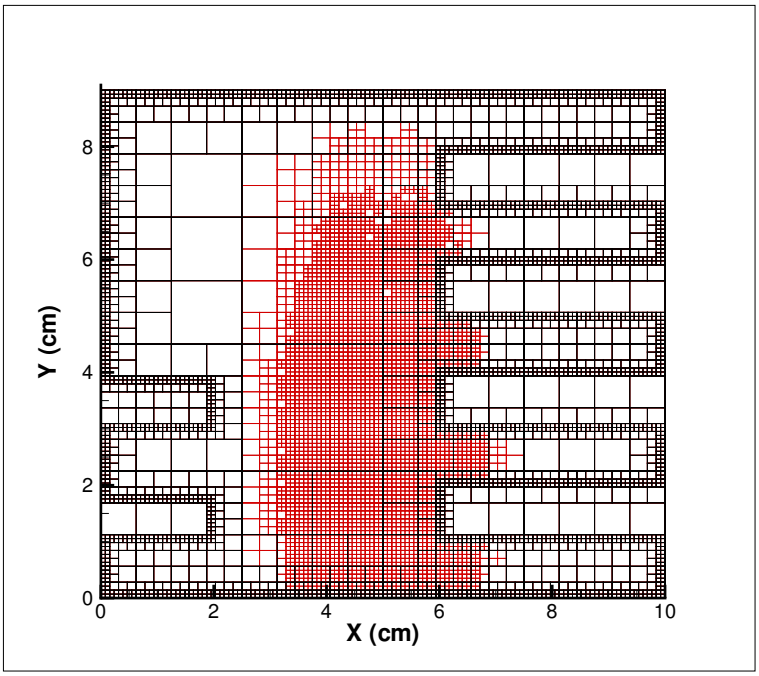

Figure V.16 – *Coupe de la structure de données arborescente en octree. On observe un raffinement adaptatif de la structure autour des zones solides (noires) et des zones ou une variation de température supérieure à* 200 K *est observée. Ces zones de raffinement en propriétés thermophysiques permettent de créer des zones homogènes. La coupe est réalisée à une cote* $z = 3.5$ *cm.*

Puissance radiative dans le milieu

Les calculs ont été effectués soit en utilisant le modèle MADF-216, soit en supposant le milieu gris avec différentes valeurs du coefficient d'absorption. Nous ne présentons ici que les champs obtenus avec le modèle MADF. Les résultats pour des milieux gris seront utilisés au paragraphe suivant pour analyser les performances des différents algorithmes. De même, tous les calculs ont été menés avec les trois algorithmes Monte Carlo mais nous ne présentons ici que les résultats obtenus avec la version dépôt final avec octree. Nous avons verifié que la différence entre les résultats des trois algorithmes était de l'ordre du bruit statistique.

La figure V.17 montre quatre surfaces iso-puissance correspondant aux valeurs 10^9, 10^6, -1. 10^7 et -2. 10^8 Wm^{-3}. Les valeurs positives correspondent à des zones émettrices dans les régions les plus chaudes et les valeurs négatives à des zones absorbantes situées en périphérie du plasma. On constate tout d'abord que ces surfaces sont relativement lisses attestant d'une bonne convergence des calculs Monte Carlo. Les données relatives à ce calcul sont résumées dans le tableau V.5. On peut remarquer que les surfaces correspondant aux zones absorbantes peuvent présenter des structures complexes en plusieurs nappes. Ceci est le résultat du profil de température imposé et de l'existence de plusieurs échelles d'extinction dans le milieu.

La figure V.18 montre une coupe de la puissance radiative à la côte z=3,9 cm. La palette de couleurs est seuillée pour mettre en évidence les zones absorbantes à puissance radiative négative. Le niveaux d'absorption atteint au maximum une valeur de l'ordre de $-1,1.10^9$ $W.m^{-3}$. Ceci représente, en valeur absolue, environ le vingtième du bilan de puis-

sance radiative au point le plus chaud. On voit également que les zones les plus absorbantes sont proches des zones fortement émettrices. Cette figure montre également des zones absorbantes dans l'espace inter-ailettes.

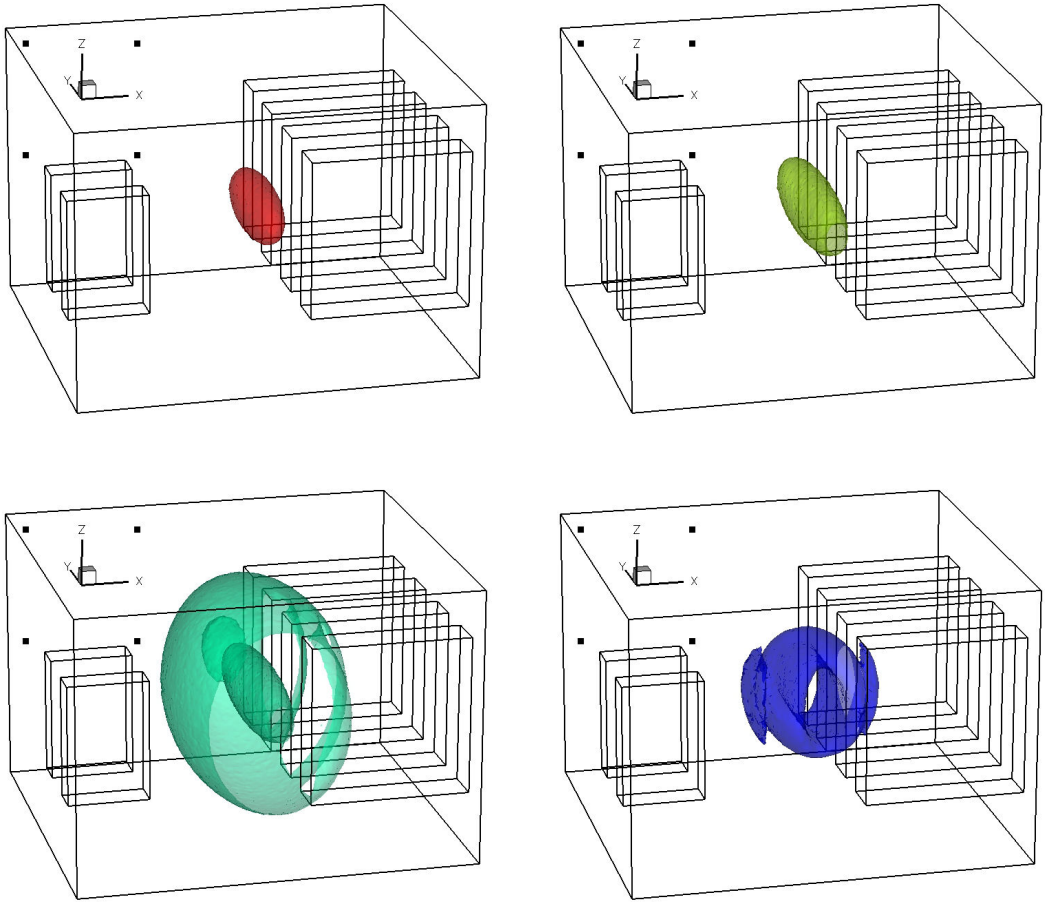

Figure V.17 – *Surfaces iso-valeurs de la puissance radiative volumique. De gauche à droite et de haut en bas : 10^9, 10^6, -1. 10^7, -2. 10^8 Wm^{-3}.*

Flux radiatif aux parois

La figure V.19 montre la distribution de flux radiatif aux parois de la géométrie, notamment sur les ailettes. On voit que le flux radiatif pénètre dans la zone inter-ailettes et que les lignes iso-valeurs sont bien lisses, ce qui atteste là encore, de la bonne convergence statistique du calcul. Le niveau de flux atteint son maximum sur les ailettes et il vaut environ $7,0.10^6 W.m^{-2}$. On ne voit qu'une partie des 3 premières ailettes étant donné que la $4^{\text{ième}}$ n'est presque pas éclairée.

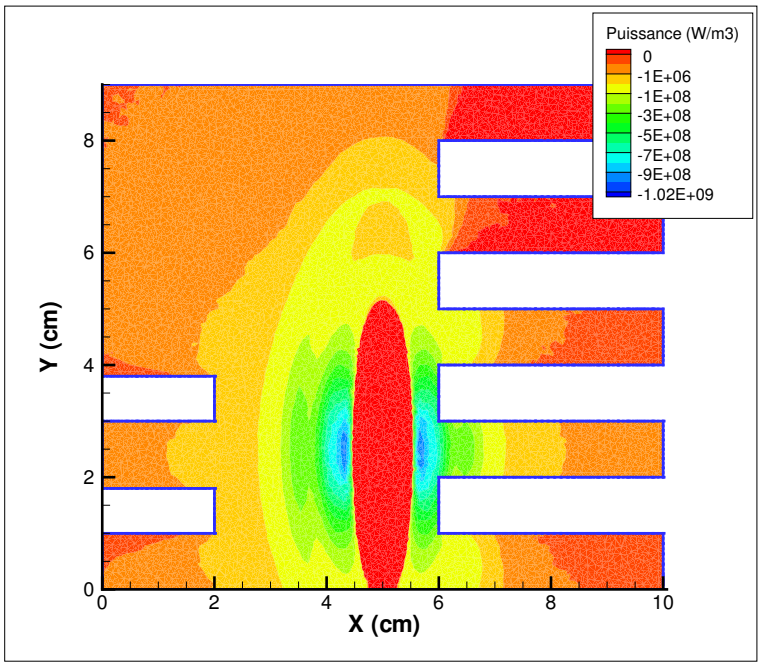

Figure V.18 – *Visualisation de la dynamique spatiale de la zone d'absorption de rayonnement sur une coupe de la géométrie à une côte $z = 3.9$ cm. On y voit une très forte zone d'absorption tangente à la zone d'arc.*

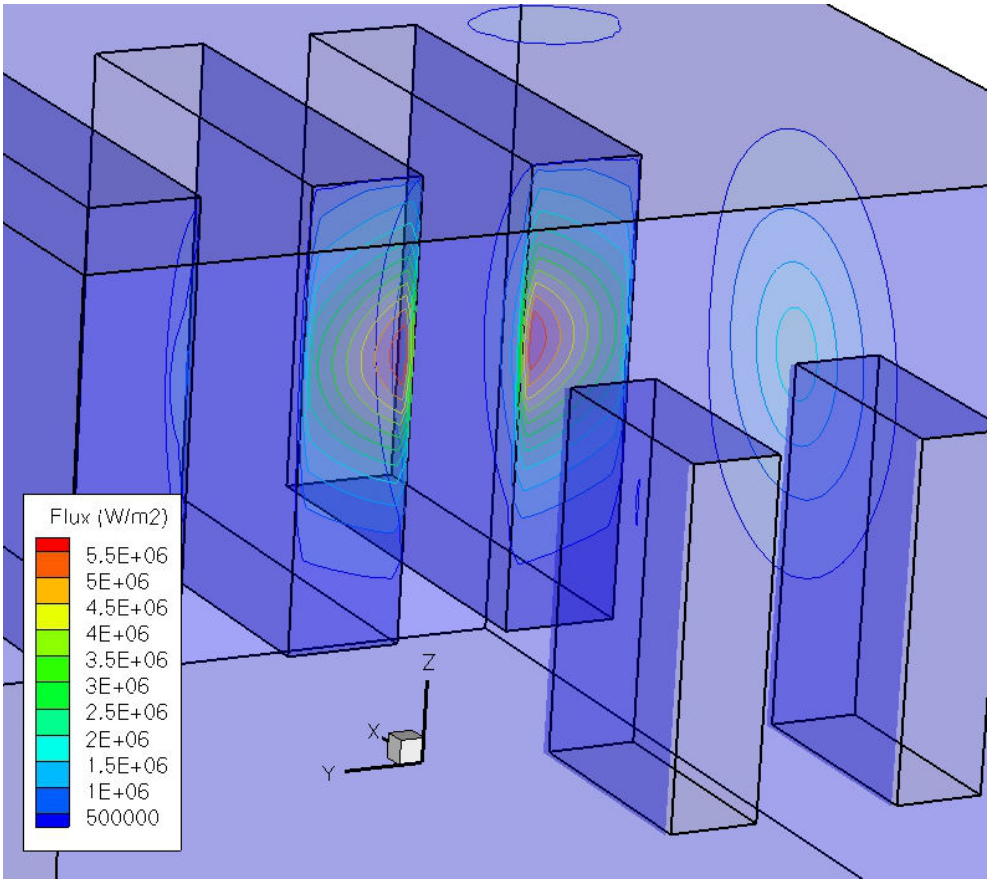

Figure V.19 – *Lignes iso-valeurs du flux radiatif sur les parties solides de la géométrie.*

V.3.3 Temps de calcul comparés des trois algorithmes Monte Carlo

Les algorithmes développés convergent tous vers la même estimation du champ de puissance radiative et de flux radiatif aux parois. Toutefois, les temps de calcul observés sont très différents, à niveau de précision donné, suivant l'épaisseur optique du milieu et/ ou le modèle utilisé pour décrire les propriétés spectrales. Le but de ce paragraphe est d'étudier les performances des trois algorithmes Monte Carlo pour le calcul des transferts radiatifs dans la géométrie et le profil de température présentés au pragraphe précédent. Nous comparons les temps de calculs requis pour un plasma d'air décrit avec le modèle MADF-216 ainsi que pour des milieux hypothétiques supposés gris avec différentes épaisseurs optiques.

Afin d'analyser de façon objective les performances des algorithmes, nous comparons les temps de calcul requis pour un écart type moyen estimé identique pour chaque calcul. Nous rappelons à ce stade les expressions des écarts types moyens relatifs au champ de puissance radiative $\sigma(P)$ et aux flux radiatifs $\sigma(\Phi)$ (Equ. V.3) :

$$\sigma(P) = \frac{\int_V \sigma_v(M)\mathrm{d}V}{\int_V |P_{rad}(M)|\mathrm{d}V} \qquad \text{(V.6)}$$
$$\sigma(\Phi) = \frac{\int_S \sigma_s(M)\mathrm{d}S}{\int_S |\Phi_{rad}(M)|\mathrm{d}S}$$

En pratique, nous nous sommes assurés que la convergence statistique des calculs suivait bien la loi classique de décroissance de l'écart-type en $1/\sqrt{N}$ où N est le nombre total de tirs du calcul Monte Carlo. En admettant que le temps CPU est proportionnel à N, nous avons estimé les temps CPU requis pour atteindre $\sigma(P) = 0.01$ ($\tilde{t}^P_{CPU}$) ou bien $\sigma(\Phi) = 0.01$ ($\tilde{t}^\Phi_{CPU}$) à partir des temps observés $t_{CPU,obs}$ selon :

$$\tilde{t}^P_{CPU} = t_{CPU,obs} \times \frac{\sigma(P)^2}{0.01^2}, \qquad \text{(V.7)}$$
$$\tilde{t}^\Phi_{CPU} = t_{CPU,obs} \times \frac{\sigma(\Phi)^2}{0.01^2}. \qquad \text{(V.8)}$$

Les calculs ont été réalisés sur un calculateur IBM Power 6 de l'Insitut pour le Dévelopement et les Ressources en Informatique Scientifique (IDRIS) avec 128 ou 256 processeurs. L'écart type effectif atteint en fin de calcul Monte Carlo est de l'ordre de $0,5\%$ à 2% dans tous les cas.

Nous présentons dans le tableau V.6 les résultats sur ces temps CPU ramenés à même niveau de précision ($\sigma = 1\%$) sur la puissance et sur le flux. L'ensemble de ces temps de calcul ont été adimensionnés par le temps requis pour obtenir $\sigma(P) = 0.01$ dans le cas d'un gaz gris de coefficient d'absorption $\kappa = 0.1$ cm^{-1}, ce qui correspond à une épaisseur optique de l'ordre de 1, avec l'algorithme standard. Ce temps d'adimensionnement est de l'ordre de 240 heures mono-processeur.

L'analyse de ce tableau est faite en comparant les trois algorithmes implémentés deux à deux avant de mener une discussion globale.

- Comparaison entre les algorithmes Monte Carlo de dépôt final avec et sans octree
  Il est intéressant de comparer les algorithmes Monte carlo avec octree et sans octree (donc de dépôt final mais en traversant le maillage fluide). On peut noter que pour une

	Type de propriétés radiatives				
	Coefficient d'absorption gris κ (cm^{-1})				Modèle
algorithme	$\kappa = 0.01$	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 1$	$\kappa = 10$	MADF
Résultats pour la puissance radiative					
Standard	0.052	1	0.95	21	0.95
dépôt progressif	5.4×10^{-5}	4.3×10^{-3}	7.2×10^{-2}	12	0.20
octree	1.2×10^{-2}	0.24	0.34	19	0.23
Résultats pour les flux radiatifs					
Standard	0.12	0.18	0.13	0.97	0.41
dépôt progressif	0.17	0.16	0.11	1.1	0.56
octree	2.8×10^{-2}	4.3×10^{-2}	4.6×10^{-2}	0.90	9.9×10^{-2}

Table V.6 – *Temps de calcul CPU normalisés requis par les trois algorithmes pour atteindre un écart type moyen $\sigma(P_{rad}) = 0.01$ (partie haute du tableau) et $\sigma(q_{rad}) = 0.01$ (partie basse).*

épaisseur optique $\kappa = 0.1$ cm^{-1} l'algorithme avec octree converge environ 4 fois plus vite aussi bien pour les puissances que pour les flux radiatifs. Ce gain se retrouve aux épaisseurs optiques faibles et intermédiaires.
Par contre lorsque l'épaisseur optique du milieu devient très grande, l'algorithme avec octree n'apporte plus aucun gain par rapport à l'algorithme standard. En effet, lorsque le libre parcours moyen des photons devient du même ordre que la taille typique des cellules, l'utilisation d'une structure en octree avec des feuilles terminales de dimension beaucoup plus grande que ce libre parcours moyen ne réduit plus le nombre de calculs d'intersection. Il est à noter cependant que ce cas se produit pour des épaisseurs optiques très importantes, de l'ordre de 100 pour $\kappa = 10$ cm^{-1}, alors que pour $\kappa = 1$ cm^{-1}, l'accélération apportée par l'utilisation de la structure en octree est encore de l'ordre de 3. On remarque qu'aussi bien avec l'algorithme standard qu'avec l'algorithme octree, le temps CPU devient très important, de l'ordre de 5000 heures pour atteindre le niveau de convergence requis sur les puissances radiatives pour $\kappa = 10$ cm^{-1}. Cette convergence très lente des méthodes Monte Carlo pour des milieux optiquement très épais est bien connue et des méthodes spécifiques ont été développées pour pallier ce problème en biaisant la densité de probabilité de la position spatiale du point d'émission dans une cellule donnée (de Lataillade, Dufresne, El Hafi, Eymet, et Fournier 2002).
Avec le modèle MADF plus réaliste, et qui prend en compte les multiples échelles d'extinction du milieu, le gain reste de l'ordre d'un facteur 4 entre l'algorithme octree et l'algorithme standard avec des temps de calcul raisonnables.

- Comparaison entre les algorithmes Monte Carlo de dépôt final sans octree (algorithme standard) et de dépôt progressif
  Les deux algorithmes comparés ici n'utilisent ni l'un ni l'autre la structure de données en octree pour calculer la trajectoire des rayons mais directement le maillage fluide. En ce qui concerne les milieux gris, on retrouve un résultat classique (Modest 2003) à savoir que l'algorithme de dépôt progressif de l'énergie (appelé parfois partionnement de l'énergie dans la littérature) converge plus rapidement (en temps CPU) pour le calcul des puissances radiatives que l'algorithme standard : le gain observé en temps CPU peut

atteindre un facteur 1000 pour les très faibles épaisseurs optiques ($\kappa = 0.01$ cm^{-1}), et décroît progressivement lorsque l'épaisseur optique augmente ; pour la plus grande épaisseur optique considérée ici ($\kappa = 10$ cm^{-1}), le gain observé est encore d'un facteur 2. Enfin, dans le cas du modèle MADF qui correspond au cas de plasmas "réels", on observe un gain d'un facteur 4.75 en faveur de l'algorithme de dépôt progressif.
En ce qui concerne le calcul des flux radiatifs, l'algorithme de dépôt progressif n'apporte qu'un faible gain aux épaisseurs optiques intermédiaires (de 10 à 15 %), et est même sensiblement moins performant (d'environ 40 %) dans le cas des milieux très minces : il est peut-être utile de rappeler que dans la configuration test étudiée ici, la source de rayonnement est essentiellement le milieu plasma très chaud tandis que les parois sont supposées froides et noires ; dans le cas où le milieu est mince, et donc l'absorption négligeable, le calcul du dépôt progressif de la puissance le long d'un rayon ne fait que ralentir le calcul du rayon sans pour autant augmenter la vitesse de convergence des flux en terme de nombre de tir. Enfin, dans le cas de propriétés radiatives représentées par le modèle MADF, l'algorithme de dépôt progressif apparaît également moins performant que l'algorithme standard d'environ 40 % pour le calcul des flux ; il faut sans doute noter que la contribution des échelles optiquement minces du modèle MADF aux flux pariétaux est très certainement prépondérante.

- Discussion globale
  On a vu que pour la prédiction des puissances radiatives, les algorithmes de dépôt progressif de l'énergie absorbée et celui utilisant la structure en octree conduisent tous les deux à une accélération importante de la méthode standard de Monte Carlo (sauf pour les milieux à très forte épaisseur optique). Le premier améliore la convergence statistique de la puissance absorbée, alors que le deuxième accélère le calcul de lancé de rayons en minimisant le nombre de calculs d'intersections avec les cellules du maillage.
  Aux faibles épaisseurs optiques, l'algorithme de dépôt progressif converge environ 220 fois plus vite que l'algorithme de dépôt final avec octree pour les puissances radiatives. Cette supériorité se retrouve à toutes les épaisseurs optiques avec toutefois des différences moins spectaculaires lorsque l'épaisseur optique du milieu augmente. Dans le cas d'un milieu décrit par le modèle MADF on peut remarquer que les temps sont comparables, ce qui est assez étonnant compte tenu de la supériorité du dépôt progressif en gris.
  Aux faibles épaisseurs optiques, l'algorithme de dépôt final avec octree converge environ 6 fois plus rapidement que celui de dépôt progressif pour les flux radiatifs. Cette différence s'estompe aux épaisseurs optiques intermédiaires à fortes. On observe un facteur 5,7 en faveur de la structure en octree dans le cas d'un milieu réel décrit par le modèle MADF. Alors que l'absorption progressive de l'énergie radiative dans les cellules traversées par un rayon améliore naturellement la convergence statistique de la puissance radiative, elle n'a pratiquement aucun effet sur les flux pariétaux.
  L'algorithme de dépôt final avec octree apparaît alors comme le meilleur compromis parmi tous les algorithmes testés dans le cas d'un milieu réel décrit par le modèle MADF en géométrie complexe tridimensionnelle pour des profils de température caractéristiques des milieux plasmas considérés ici. En effet, il conduit à un temps de calcul nettement inférieur à celui du dépôt progressif pour les flux radiatifs et un temps de calcul comparable pour les puissances radiatives.

- Amélioration possible de l'algorithme Monte Carlo avec octree

Il est encore possible de réduire les temps de calcul de l'algorithme de dépôt final avec octree si on s'affranchit de l'algorithme de positionnement dans le maillage fluide. La recherche de la cellule où déposer l'énergie absorbée consomme environ 30 % du temps de calcul global. Il est possible d'utiliser des méthodes plus efficaces comme par exemple la mise en oeuvre d'un octree de positionnement. Il est également possible de s'affranchir, pour passer d'une feuille de l'octree à l'une de ses voisines lors de la propagation d'un rayon, de la redescente de la racine de l'arbre en utilisant une structure de données adéquate pour le maillage cartésien adaptatif : ceci nécessiterait cependant de construire une connectivité entre feuilles et faces des feuilles de l'octree.
Enfin, une dernière piste qu'il serait intéressant d'explorer consiste à allier les gains obtenus d'une part par le dépôt progressif de l'énergie absorbée et, d'autre part, par la structure en octree. Deux possibilités pourraient alors être envisagées : soit associer la même puissance absorbée à toutes les cellules contenues dans la même feuille terminale, soit interpoler cette puissance du maillage octree sur le maillage physique. Une telle démarche pourrait cependant s'avérer imprécise si les feuilles de l'octree ne sont pas optiquement minces. Un simple critère basé sur l'homogénéité en température pourrait se révéler insuffisant pour construire l'octree physique. Une autre difficulté technique proviendrait du calcul de la fraction de volume fluide au sein de chaque feuille terminale.

Conclusion

La simulation numérique et la modélisation du transfert radiatif dans les milieux plasma est un problème important pour de nombreuses applications industrielles, notamment pour les disjoncteurs basse tension considérés dans ce travail. Il s'agit en effet de proposer des méthodes de résolution de l'équation de transfert radiatif qui soient efficaces en temps de calculs et qui puissent tenir compte de la complexité spectrale du milieu d'une part et de la complexité géométrique d'autre part. Le milieu plasma considéré dans cette étude est un milieu où siège un arc électrique dans l'air. L'échelle de température varie de 300 K à 25000 K et la pression de 1 bar à 10 bar. Dans ces conditions thermophysiques, même si le milieu est supposé localement à l'équilibre thermique et chimique, il est impossible d'envisager une approche de résolution de l'équation de transfert radiatif à haute résolution spectrale. Il est nécessaire de disposer d'un modèle de propriétés radiatives qui puisse tenir compte de la grande variété d'échelles d'extinction du milieu. La complexité géométrique des maillages industriels non structurés, mobiles et parfois non conformes considérés nécessite elle aussi de proposer des méthodes efficaces d'intégration de l'équation de transfert radiatif.

Nous avons rappelé dans le premier chapitre l'ensemble des phénomènes physiques qu'il est nécessaire de considérer pour étudier la dynamique d'extinction d'un plasma d'arc dans une chambre de coupure de disjoncteur basse tension. Le calcul de puissance radiative volumique est essentiel pour équilibrer une équation de bilan d'énergie dans le milieu. En effet, il est estimé que 80 % des pertes d'énergie au sein de l'arc sont dues au transfert radiatif. Le flux radiatif surfacique calculé aux parois solides de la géométrie est essentiel pour déterminer la quantité de matière polymère ablatée. Nous avons décrit de façon détaillée les nombreuses méthodes utilisées dans la littérature pour résoudre l'équation de transfert radiatif ainsi que les divers modèles de propriétés radiatives qui cherchent avec une précison variable à déterminer ces deux grandeurs.

Pour modéliser les propriétés de notre milieu plasma d'air, nous avons proposé au deuxième chapitre de cette thèse une réduction d'un modèle existant et développé par (Deron, Rivière, Perrin, et Soufiani 2004) : le modèle MADF. Ce modèle fait intervenir, dans sa formulation initiale, une fonction de distribution du coefficient d'absorption cumulée sur tout le spectre et la notion d'espèces fictives. Nous avons proposé ici un regroupement des gaz fictifs 2 et 3 de façon à accélérer les calculs de transfert radiatif d'un facteur 6. En effet le modèle ainsi construit ne comporte plus 216 gas mais seulement 36 gaz (ou classes du coefficient d'absorption) pour lesquels il s'agit de résoudre l'équation de transfert radiatif pour déterminer une puissance radiative totale au sein du volume de plasma. Ce modèle a été construit par une méthode d'optimisation non linéaire sous contraintes détaillée dans ce chapitre. Le modèle a été validé en transfert sur une géométrie rectangulaire bidimensionnelle avec un profil analytique de température. Les champs de puissance et de flux ont été comparés avec ceux obtenus par le modèle MADF d'origine et un bon accord a été trouvé entre les deux

modèles.

Le troisième chapitre a eu pour but de tester la précision de la méthode P_1, couramment employée dans ce type de milieux, sur le calcul de la puissance radiative et du flux radiatif. Pour ce faire, une méthode de calcul de puissance et de flux par tracé de rayons, servant de référence, a été mise en oeuvre pour une géométrie bidimensionnelle. L'équation de P_1 à été résolue par une méthode de différences finies implémentée sur une géométrie identique et des comparaisons ont été effectuées pour des profils analytiques de température dans des milieux gris et dans des milieux plasmas décrits par le modèle MADF d'origine. Il en résulte que la méthode P_1 est utilisable avec une très bonne précision dans le cas de milieux optiquement épais et dans des géométries présentant de faibles rapports d'allongement, ce qui est classiquement admis dans la littérature. Ceci n'est pas le cas pour les milieux plasmas confinés dans des géométries allongées. On montre par exemple que dans le cas d'un rectangle avec un fort rapport d'allongement et des propriétés radiatives décrites par le modèle MADF, une erreur de l'ordre de 50% au centre des faces et une surestimation d'un facteur 10 dans les coins sont observées pour le flux radiatif . Il est à noter que les erreurs introduites par ce modèle sur le calcul des puissances volumiques sont plus faibles que celles observées sur les flux pariétaux. De même, le flux pariétal intégré sur toute la surface de l'enceinte est en général relativement bien prédit par la méthode P_1, par contre sa distribution spatiale l'est plus ou moins en fonction de l'épaisseur optique et de l'allongement de la cavité.

Malgré les imprécisions de la méthode P_1 soulignées ci-dessus, et à cause de ses performances remarquables en termes de temps de calcul, une implémentation de l'équation de P_1, a été réalisée dans le code de simulation d'électrohydrodynamique $NS2$. Une méthode déléments finis sur un maillage bidimensionnel non structuré a été mise en oeuvre pour cette implémentation. Ceci a permis de réaliser des calculs complets bidimesionnels de propagation d'un arc électrique dans une géométrie simplifiée et de comparer les résultats obtenus par la méthode P_1-MADF avec des calculs utilisant la méthode du coefficient d'émission nette. Des différences significatives sur la dynamique de propagation de l'arc dans la chambre ont ainsi été mises en évidence. Alors que des niveaux de température maximales similaires sont atteints avec les deux types de calculs, la vitesse de l'arc dans les premières phases, prédite avec le modèle tenant compte des zones absorbantes (P_1-MADF), est supérieure à celle prédite par le modèle de coefficient d'émission nette. Ceci est probablement dû à l'existence d'une zone de préchauffage du gaz en amont de l'arc par rayonnement. De même, l'utilisation du modèle P_1-MADF conduit à un volume d'arc plus étalé. L'impact de la modélisation du transfert radiatif sur le champ de température se retrouve naturellement sur toutes les autres grandeurs, en particulier au travers des différences induites sur la conductivité électrique du milieu.

Le quatrième chapitre présente les méthodes de calcul et les algorithmes développés pour le cas des géométries industrielles tridimensionnelles. La méthode de calcul de Monte Carlo a finalement été retenue dans le cadre de ce travail. Elle est particulièrement adaptée lorsque la complexité spectrale et géométrique du milieu est élevée comme c'est le cas dans les applications présentées ici. Nous avons mis en oeuvre trois versions de cet algorithme. La première, standard, consite à parcourir les cellules de proche en proche à partir d'un point d'émission jusqu'au point où l'énergie totale du rayon est absorbée. Elle sert de référence pour étudier les performances des autres algorithmes. La deuxième version vise à accélérer la convergence statistique de la version standard en traitant de façon déterministe

et progressive l'absorption du rayonnemment par les cellules traversées par un rayon. Dans la troisième version, particulièrement dédiée aux géométries complexes, une structure en octree est juxtaposée au maillage initial afin de créer de larges zones libres d'obstacles et de minimiser le nombre de calculs d'intersections. L'absorption est traitée de façon statistique et totale dans cette troisième version. La structuration de l'espace en octree est inspirée des problèmes de classification de données en informatique et en statistique. Elle est très utilisée en synthèse d'images. Nous avons proposé une approche de mesure de la qualité de l'algorithme de raffinement de l'octree par une fonction d'entropie spatiale.

Nous avons expliqué l'ensemble des algorithmes géométriques nécessaires à l'implémentation de la méthode de Monte Carlo, quelle que soit la verison considérée, sur un maillage tridimensionnel non structuré. La mise en oeuvre de la méthode utilisant la structure en octree est particulièrement difficile et une description aussi claire que possible des structures de données développées a été proposée. En particulier la notion de *noeud virtuel* et de *face virtuelle* a fait l'objet d'une attention particulière. Les chaînages multiples de ces structures ont été expliqués, et en particulier la mise en oeuvre des pointeurs lors de la construction de la structure hiérarchique en *octree*.

Par ailleurs, les résultat de calculs Monte Carlo de puissance et de flux aux parois étant statistiques, nous avons proposé un algorithme de filtrage de ces champs pouvant aller à un ordre spatial quelconque. La mise en oeuvre de cet algorithme a nécessité le développement d'un algorithme de recherche de plus proches voisins pour toute cellule fluide et toute face solide du maillage non structuré. Une parallélisation du code a également été mise en oeuvre en utilisant la bibliothèque *MPI*.

Le cinquième chapitre a pour but d'étudier les performances comparées des trois versions de la méthode de Monte Carlo pour une géométrie complexe représentative d'une chambre de coupure électrique. Au préalable, ces trois versions sont validées dans différentes configurations. Après des validations élémentaires dans des cas où des solutions analytiques existent (calculs de facteurs de forme géométriques, transferts en géométrie 1D), des validations sont entreprises dans le cas de géométries 2D planes où les résultats Monte Carlo sont comparés favorablement à ceux de la méthode de lancé de rayons déterministe.

L'étude des performances des différents algorithmes est conduite pour une géométrie tridimensionnelle maillée par environ 3 millions de tétraèdres à l'intérieur de laquelle un arc électrique est simulé à l'aide d'un champ de température tridimensionnel analytique. Les calculs sont effectués dans le cas d'un milieu décrit par le modèle MADF ainsi que dans le cas de divers milieux supposés gris afin d'analyser l'effet de l'épaisseur optique. Nous montrons en particulier, à variances en fin de calculs égales, que la méthode de dépôt final par octree est la plus appropriée pour un calcul sur ce type de géométrie complexe car elle est équivalente à la méthode de dépôt progressif en temps CPU sur le calcul de la puissance radiative mais conduit à une accélération d'un facteur de l'ordre de 5 sur le flux radiatif.

L'architecture modulaire du code de simulation a permis de le coupler au logiciel *Fluent* de façon à réaliser des calculs d'électrohydrodynamique radiative tridimensionnelle. Ces calculs n'ont pas pu être réalisés dans le cadre de ce travail par manque de temps mais l'interface de communication qu'il a été nécessaire de développer est fonctionnelle. Elle permet l'échange de l'information relative aux connectivités du maillage et des champs thermophysiques (température, pression, composition du milieu). Cette interface a été développée dans le langage C, langage utilisé par Fluent pour faire appel à une bibliothèque de calcul

externe. Elle permet de traiter des maillages non structurés, hybrides, mobiles mais uniquement *conformes*.

L'une des premières perspectives de ce travail consiste alors à démontrer la faisabilité d'un calcul tridimensionnel couplé et complet de l'extinction d'un arc dans une chambre de coupure avec la méthode de Monte Carlo pour les transferts radiatifs. Un tel calcul couplé devrait pouvoir simuler de façon beaucoup plus réaliste non seulement la dynamique de l'arc dans la chambre, mais également les phénomènes de thermo-dégradation des parois. Les temps de calcul paraissent importants mais la réduction de la variance en fin de calcul à 1% n'est probablement pas nécessaire. Il serait intéressant d'étudier le meilleur compromis entre le filtrage de résultats Monte Carlo bruités et le nombre de tirs requis pour atteindre une convergence satisfaisante.

Des pistes ont par ailleurs été proposées pour accélérer davantage les calculs Monte Carlo. Parallèlement aux aspects algorithmiques et de connectivités de maillages, il serait intéressant d'étudier la possibilité d'allier les gains en temps de calcul de la puissance radiative produits d'une part par le partitionnement de l'énergie absorbée et, d'autre part, par le partitionnement spatial en octree.

D'un point de vue plus physique, il nous paraît important de tenir compte de façon plus réaliste de la composition chimique du plasma et des gaz en écoulement dans les chambres de coupure. La présence de vapeurs métalliques et plastiques peut changer de façon significative les propriétés radiatives du milieu. La détermination des propriétés radiatives de ces mélanges complexes et leur modélisation approchée par des modèles globaux comme MADF ou par d'autres types de modèles comme les modèles statistiques sera alors un préalable nécessaire à la réalisation d'outils complètement prédictifs. Ces outils pourront alors être couplés à ceux utilisés pour la simulation des phénomènes de dégradation des parois, phénomènes à l'origine même de la production de vapeurs plastiques.

Enfin, il est à noter que les algorithmes Monte Carlo et les outils de calcul développés dans le cadre de cette thèse pour des plasmas d'arc en géométrie complexe ont des applications potentielles dans de nombreux autres domaines où les transferts radiatifs jouent un rôle important, en particulier dans le domaine de la combustion. Ils paraissent particulièrement adaptés par exemple à la prédiction des transferts radiatifs dans des foyers aéronautiques ou dans des fours verriers à géométries complexes.

Annexe A

Description d'un élément fini pour la résolution des équation du modèle P_1

Un élément e est constitué de sa maille de référence S_r, de la position des noeuds dans la maille de référence [1], de la fonction d'interpolation dans la maille de référence $\tilde{f}_\phi$ choisie, de la fonction d'interpolation des points non nodaux choisie dans la maille réelle [2](Garrigue 1999). A partir de ces informations, on peut en déduire une fonction d'interpolation sur l'élément réel.

- Choix de l'interpolation d'une fonction scalaire dans la maille de référence

  Si on connaît les valeurs α_i d'une fonction scalaire $\tilde{f}_\phi$ aux noeuds de la maille de référence, il est possible de déterminer une valeur de la fonction à l'intérieur de cette maille de référence par une interpolation. L'interpolation choisie dans notre problème est polynomiale linéaire. Ainsi la fonction peut s'écrire au point $M(u, v)$ de la maille de référence comme :

$$\tilde{f}_\phi(u, v) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i P^{(i)}(u, v) \tag{A.1}$$

  où les polynomes $P^{(i)}$ vérifient la contrainte $P^{(i)}(u^{(j)}, v^{(j)}) = \delta_{ij}$ avec $u^{(j)}, v^{(j)}$ les coordonnées du noeud j de la maille de référence et sont donnés par :

$$\begin{aligned} P^1(u, v) &= \frac{1}{4}(1 - u - v + uv) \\ P^2(u, v) &= \frac{1}{4}(1 + u - v - uv) \\ P^3(u, v) &= \frac{1}{4}(1 + u + v + uv) \\ P^4(u, v) &= \frac{1}{4}(1 - u + v - uv) \end{aligned} \tag{A.2}$$

1. Le maillage est conforme donc la maille de référence contient obligatoirement les sommets du polygone qui la constitue
2. L'interpolation des coordonnées détermine l'approximation géométrique de l'élément

avec la propriété $\tilde{f}_\phi(M_i) = \alpha_i$.

- Choix de la transformation ϕ

La fonction ϕ de transformation des coordonnées d'un point de la maille de référence dans la maille réelle doit vérifier certaines contraintes :

- ϕ doit être inversible
- ϕ doit faire correspondre les frontières de la maille de référence avec les frontières de la maille réelle
- ϕ doit faire correspondre les noeuds de la maille de référence avec les noeuds de la maille réelle

Il y a une infinité de transformation ϕ qui vérifient ces contraintes et le choix d'une transformation inversible qui conserve les frontières est très délicat. On se contente en pratique de ne satisfaire que la première et la dernière de ces contraintes[3]. On fait le choix ici d'une interpolation polynomiale. Ainsi si $M(u,v)$ est un point de la maille de référence, alors son image $M'(U,V)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} U &= \chi(u,v) = \sum_{i=1}^{4} U_e^{(i)} Q^{(i)}(u,v) \\ V &= \psi(u,v) = \sum_{i=1}^{4} V_e^{(i)} Q^{(i)}(u,v) \end{aligned} \tag{A.3}$$

où U_e^i, V_e^i sont les coordonnées des noeuds de la maille réelle. Plusieurs choix de base d'interpolation sont possibles et nous choisissons dans cette étude une base identique à la précédente. Ainsi on $Q^{(i)} = P^{(i)}$. Ceci définit parfaitement la transformation ϕ[4]. On vérifie qu'elle est bien inversible en calculant le jacobien associé à la transformation par :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \chi}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}$$

et les dérivées partielles qui peuvent se réécrire en fonction des coordonnées du point dans la maille de référence comme :

3. Ceci a pour conséquence de transformer l'élément de référence en une *approximation géométrique* de la maille réelle. Cette conséquence entraîne une estimation des intégrales sur une *approximation géométrique* du maillage réel.

4. On parle alors d'élément isoparamétrique linéaire à 4 noeuds

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \chi}{\partial u}(u,v) &= \frac{v-1}{4}(U_e^{(1)} - U_e^{(2)}) + \frac{v+1}{4}(U_e^{(3)} - U_e^{(4)}) \\
\frac{\partial \chi}{\partial v}(u,v) &= \frac{u-1}{4}(U_e^{(1)} - U_e^{(4)}) + \frac{u+1}{4}(U_e^{(3)} - U_e^{(2)}) \\
\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,v) &= \frac{v-1}{4}(V_e^{(1)} - V_e^{(2)}) + \frac{v+1}{4}(V_e^{(3)} - V_e^{(4)}) \\
\frac{\partial \psi}{\partial v}(u,v) &= \frac{u-1}{4}(V_e^{(1)} - V_e^{(4)}) + \frac{u+1}{4}(V_e^{(3)} - V_e^{(2)})
\end{aligned} \tag{A.4}$$

On voit que si la maille réelle est non dégénérée, le jacobien ne s'annule pas et la transformation ϕ ainsi définie est inversible. Ceci assure que le calcul des intégrales à estimer sur les mailles réelles peut se faire sur les mailles de référence à condition de tenir compte du jacobien de ϕ :

$$\begin{aligned}
\int\int_{S_e} h\left[U,V\right] \mathrm{d}U\mathrm{d}V &= \int\int_{S_r} h\left[\chi(u,v),\psi(u,v)\right] J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\
&= \int\int_{S_r} \sum_{i=1}^{4} h^i_{e=S_e} P^i\left(u,v\right) J(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v
\end{aligned} \tag{A.5}$$

L'intégration se fait donc sur le maillage de référence, ce qui permet d'utiliser une quadrature de Gauss pour l'estimation de l'intégrale sur chaque maille. En pratique la fonction h est donnée par les fonctions $F(G)$ et $H(G)$. Ainsi en écrivant que : ä

$$\frac{\partial J}{\partial G_e^i} = 0 \tag{A.6}$$

ä pour tous les noeuds (i) de toutes les mailles (e) du maillage réel, on construit ainsi un système matriciel global à inverser.
Les intégrales sont calculées approximativement sur chaque maille en utilisant une quadrature de Gauss à 9 points dans chaque direction[5] en utilisant les polynômes de Legendre pour le choix des points de calcul[6]. Une quadrature de Gauss à 4 points a été testée au préalable pour le calcul de l'intégrale sur chaque maille mais ceci a conduit à des problèmes d'instabilité numérique d'inversion du système matriciel global provenant du fort conditionnement de cette matrice étant donné la très forte variation du coefficient d'absorption au sein d'un même gaz gris en fonction de la température. Les coefficients d'absorption dans notre milieu (donnés dans le cadre du modèle MADF original à 216 gaz ou dans sa version dégradée à 36 gaz) sont effectivement très disparates et peuvent varier de 8 ordres de grandeurs. Le terme d'intégrale de volume faisant intervenir la fonction F contient un terme proportionnel à κ et un autre proportionnel à $1/\kappa$ qu'il est nécessaire d'estimer de manière précise. L'inversion du système matriciel global est alors effectuée à l'aide d'un algorithme de gradient conjugué avec pré-conditionnement par méthode de Jacobi (Glowinski 1984).

5. Ce qui nécessite donc 81 points de calcul sur la maille de référence
6. Les racines du 9^{ime} polynôme de Legendre donnent les points de $[-1,1]\times[-1,1]$ où estimer la fonction à intégrer. Ces points ainsi que les poids associés sont données dans des tables de calcul numérique.

Annexe B

Evolution des coefficients de transport et des conductivités en fonction de la température

Nous montrons ici l'évolution des grandeurs thermodynamiques de transport et des coefficients de conductivités d'un plasma d'air pur en fonction de la température correspondant à celles utilisées dans le logiciel de simulation $NS2$. Ces données sont issues de la référence (Bacri et Raffanel 1989).

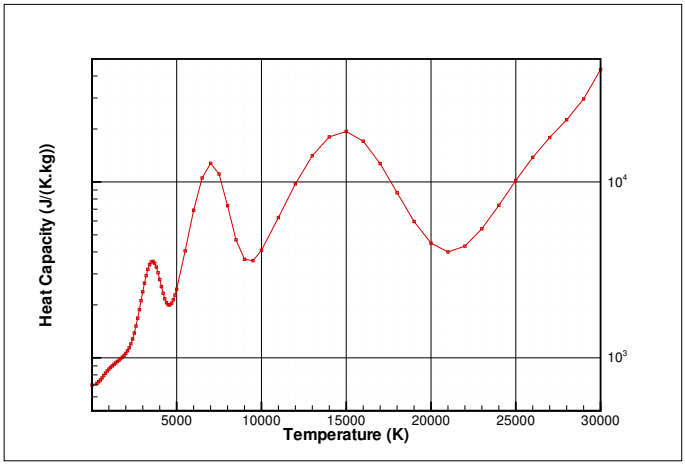

Figure B.1 – *Capacité calorifique d'un plasma d'air pur en fonction de la température pour une pression de 1 bar*

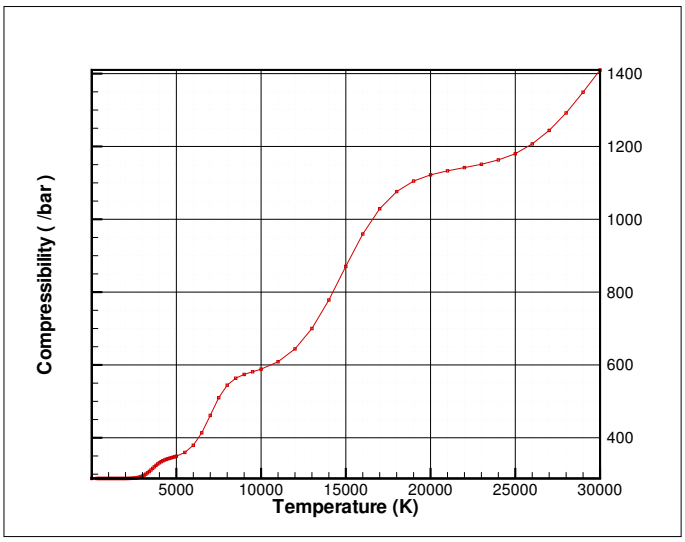

FIGURE B.2 – *Coefficient de compressibilité d'un plasma d'air pur en fonction de la température pour une pression de 1 bar*

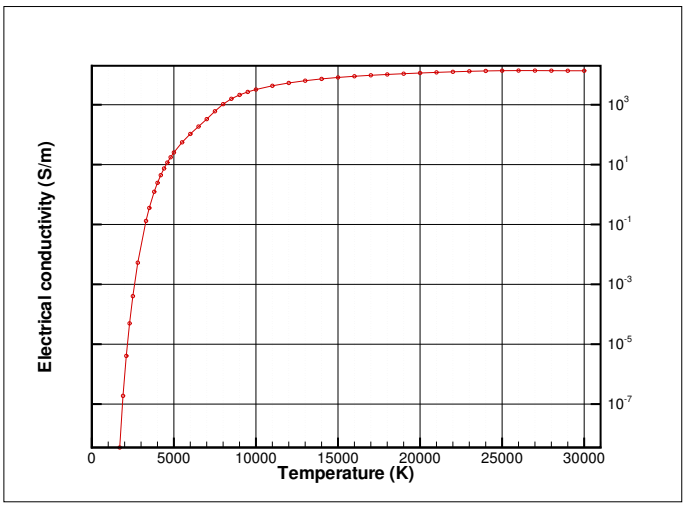

FIGURE B.3 – *Conductivité électrique d'un plasma d'air pur en fonction de la température pour une pression de 1 bar*

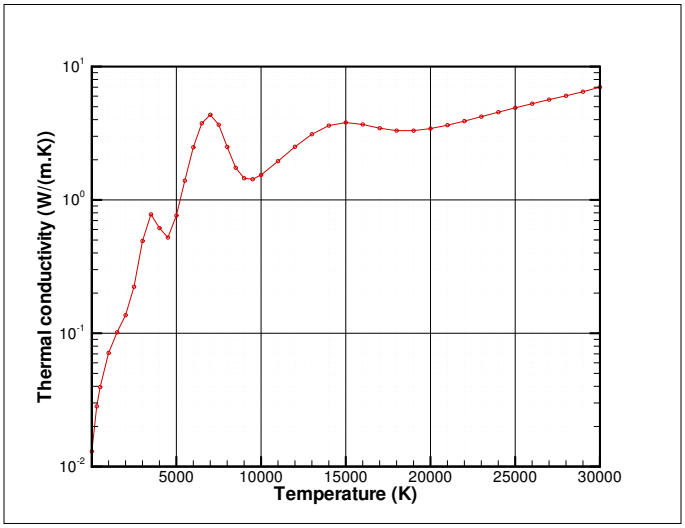

Figure B.4 – *Conductivité thermique d'un plasma d'air pur en fonction de la température pour une pression de 1 bar*

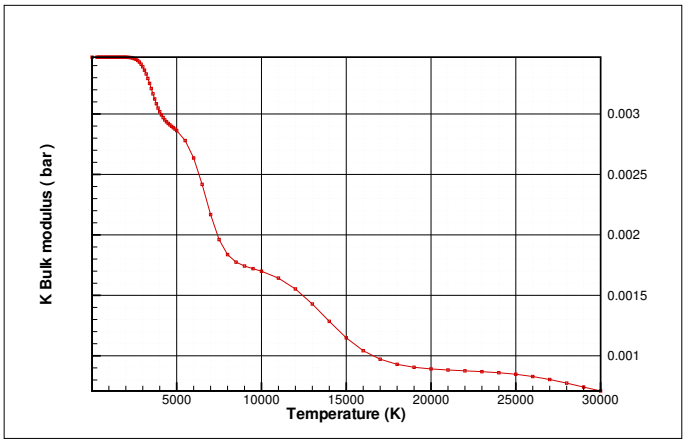

Figure B.5 – *Elasticité d'un plasma d'air pur en fonction de la température pour une pression de 1 bar*

Annexe C

Maillage 1

Nombre de cellules	74911
Nombre de faces totale	155215
Nombre de faces solides	10786
Nombre de noeuds	15221

Table C.1 – *Données du maillage 1.*

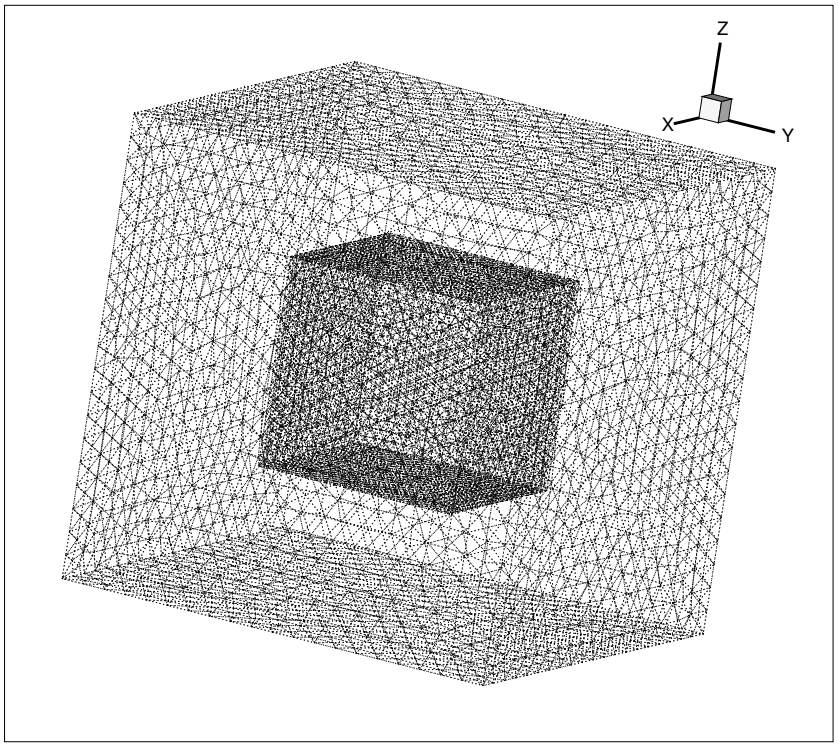

Figure C.1 – *Maillage 1 : cube fluide contenant une partie solide cubique. La partie solide à l'intérieur de la géométrie est obtenue par soustraction du petit cube. Le cube extérieur a 2cm de coté et le cube intérieur a* 0.9 *cm de coté. Les faces des cubes sont parallèles 2 à 2. Le maillage est tétrahédrique.*

Annexe D

Maillage 2

Nombre de cellules	24668
Nombre de faces totale	52311
Nombre de faces solides	5950
Nombre de noeuds	5667

Table D.1 – *Données du maillage 2a.*

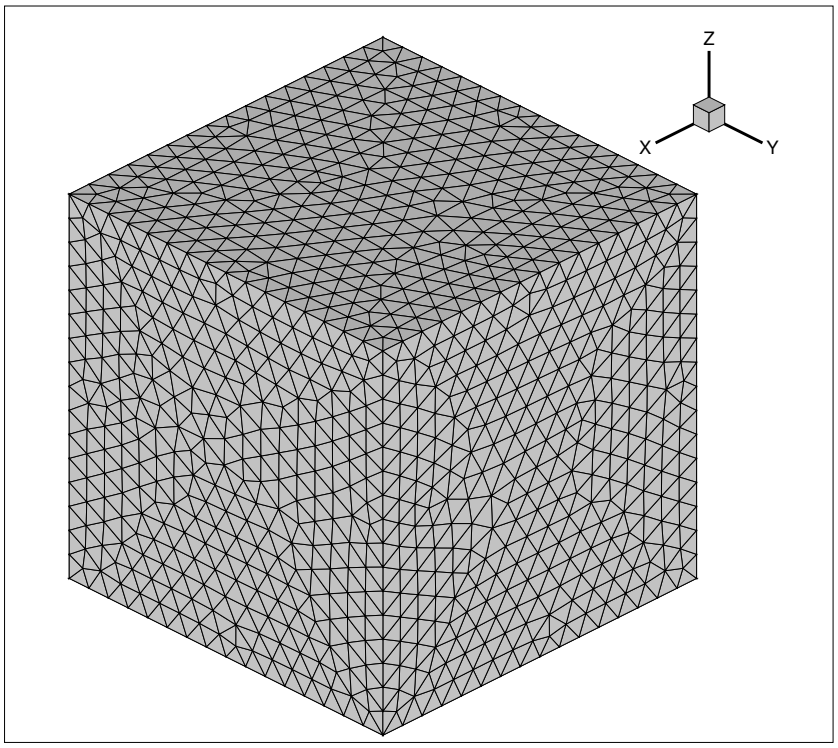

Figure D.1 – *Maillage 2 : Cube maillé en tétrahèdres. Les arrêtes mesurent 2 cm.*

Nombre de cellules	3334422
Nombre de faces totale	6711967
Nombre de faces solides	86246
Nombre de noeuds	577165

Table D.2 – *Données du maillage 2b.*

Annexe E

Maillage 3

Nombre de cellules	2967739
Nombre de faces totale	6007270
Nombre de faces solides	530365
Nombre de noeuds	143584

Table E.1 – *Données du maillage 3.*

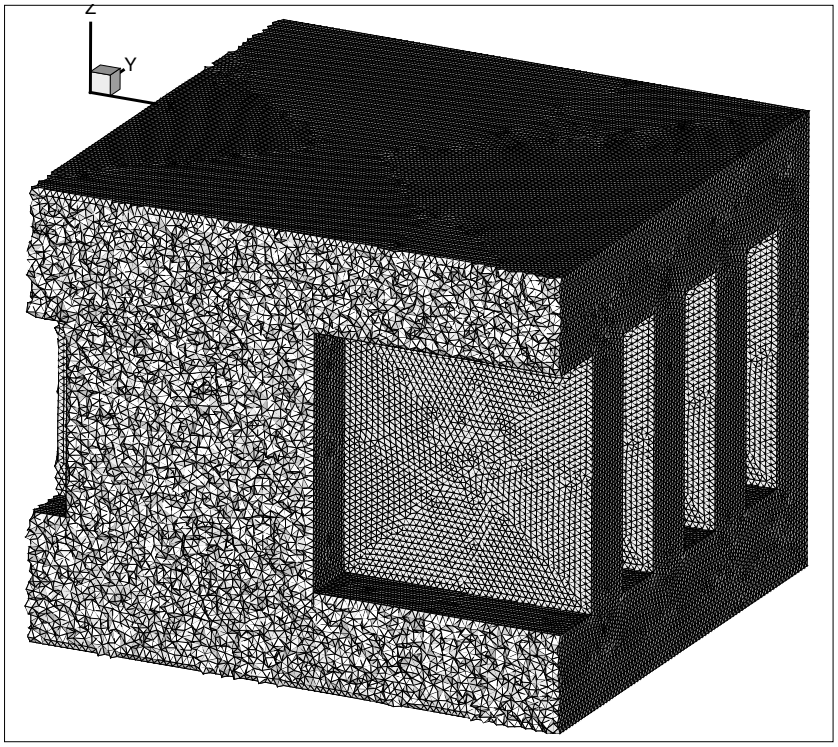

Figure E.1 – *Maillage 3 : Géométrie représentant un disjoncteur. Le maillage est tétrahédrique et il n'est représenté qu'en partie. On voit les 4 ailettes ainsi qu'une partie d'une électrode. L'espace inter-ailette est maillé avec environ une dizaine de couches tétrahédriques.*

Références

Aronov, B., H. Brönnimann, A. Chang, et Y.-J. Chiang (2005). Cost-driven octree construction schemes : an experimental study. *Computational Geometry Theory and Application 31*(1-2), 127–148.

Arvo, J. et D. Kirk (1987). Fast ray tracing by ray classification. In *SIGGRAPH '87 : Proceedings of the 14th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, New York, NY, USA, pp. 55–64. ACM.

Arvo, J. et D. Kirk (1989). *A survey of ray tracing acceleration techniques*. London, UK, UK : Academic Press Ltd.

Aubrecht, V. et J. Lowke (1994). Calculations of radiation transfer in SF_6 plasmas using the method of partial characteristics. *Journal of Physics D : Applied Physics 27*, 2066–2073.

Bacri, J. et S. Raffanel (1989). Calculation of transport coefficients of air plasmas. *Plasma Chemistry and Plasma Processing 9*(1), 133–154.

Baek, S., D. Byun, et S. Kang (2000). The combined Monte Carlo and finite volume method for radiation in a two-dimensional irregular geometry. *International Journal of Heat and Mass Transfer 43*, 2337–2344.

Barnes, J. et P. Hut (1986). A hierarchical force calculation algorithm. *Nature 324*, 446–449.

Bentley, J.-L. (1975). Multidimensional binary search trees used for associative searching. *Commununications of the ACM 18*(9), 509–517.

Bourdon, A., V. P. Pasko, N. Y. Liu, S. Celestin, P. Segur, et E. Marode (2007). Efficient models for photoionization produced by non-thermal gas discharges in air based on radiative transfer and the Helmholtz equations. *Plasma Sources Science and Technology 16*(3), 656–678.

Brönnimann, H. et M. Glisse (2006). Octrees with near optimal cost for ray-shooting. *Computational Geometry Theory and Application 34*(3), 182–194.

Carlson, B. et K. Lathrop (1964). Discrete ordinate angular quadrature of the neutron transport equation. In *Technical Information Series Report LASL 3186, Los Alamos Scientific Laboratory*.

Case, K. (1957). Transfer problems and the reciprocity principle. *Reviews of Modern Physics 29*(4), 651–663.

Cayla, F. (2008). *Modélisation de l'interaction entre un arc électrique et une cathode*. Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

Chauveau, S. (2001). *Constitution de bases de données spectroscopiques relatives à un plasma d'air. Application au calcul de transferts radiatifs*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale Paris, Chatenay-Malabry, France.

Cherkaoui, M., J.-L. Dufresne, R. Fournier, J.-Y. Grandpeix, et A. Lahellec (1998). Radiative net-exchange formulation within one-dimensional gas enclosures with reflective surfaces. *Journal of heat transfer 120*, 275–278.

Chevrier, P. (1992). *Simulation numérique de l'interaction arc électrique - écoulement gazeux dans les disjoncteurs moyenne et haute tension.* Ph. D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.

Ciobanu, S.-S. (1996). *Production de vapeur métallique dans un arc de disjoncteur électrique. Etude optique et spectroscopique de l'arc et simulation hydrodynamique.* Ph. D. thesis, Université d'Orléans, Orléan, France.

de Lataillade, A., J. L. Dufresne, M. El Hafi, V. Eymet, et R. Fournier (2002). A net-exchange Monte Carlo approach to radiation in optically thick systems. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 74*(5), 563–584.

Delcroix, J.-L. et A. Bers (1994). *Physique des plasmas (tome 2).* CNRS Editions.

Denison, M. et B. Webb (1995). The spectral-line-based Weigthed-Sum-of-Gray-Gases model in nonisothermal nonhomogeneous media. *J. Heat Transfer 117*, 359–365.

Deron, C. (2003). *Rayonnement thermique des plasmas d'air et d'argon : modélisation des propriétés radiatives et étude expériemntale.* Ph. D. thesis, Ecole centrale Paris, Châtenay-Malabry, France.

Deron, C., P. Rivière, M.-Y. Perrin, et A. Soufiani (2004). Modelling radiative properties of LTE air atmospheric plasmas. In *Proceedings of the 15th International Conference on Gas Discharges and their Applications, Toulouse*, pp. 145–148.

Deron, C., P. Rivière, M.-Y. Perrin, et A. Soufiani (2006). Coupled radiation, conduction and Joule heating in Argon thermal plasma. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer 20*(2), 211–219.

Eby, S., J. Trépanier, et X. Zhang (1998). Modelling radiative transfer in SF_6 circuit-breaker arcs with the P-1 approximation. *Journal of Physics D : Applied Physics 31*(13), 1578–1588.

Farmer, J. et J. Howell (1994). Hybrid Monte Carlo/diffusion methods for enhanced solution of radiative transfer in optically thick non gray media. *ASME HTD 276*, 203–212.

Foley, J., J. van Dam, S. Feiner, et J. Hughes (1990). *Computer Graphics Principles and Practice - Systems Programming Series.* Addison-Wesley.

Fuchs, H., Z. Kedem, et B. Naylor (1980). On visible surface generation by a priori tree structures. In *Proceedings of SIGGRAPH 80*, pp. 124–133.

Fujimoto, A., T. Tanaka, et K. Iwata (1986). ARTS : Accelerated Ray-Tracing System. *IEEE Computer Graphics and Applications 6*(4), 16–26.

Garrigue, J. (1999). *Cours sur la méthode des éléments finis.* http ://jgarrigues.perso.ec-marseille.fr.

Gidalevitch, E., S. Goldsmith, et R. Boxman (2002). Theoretical modelling of high pressure argon arc radiation. *Plasma Sources, Science and Technology 11*, 513–519.

Gleizes, A., J. Gonzalez, et P. Freton (2005). Thermal plasma modelling - Topical review. *Journal of Physics D : Applied Physics 38*, R153–R183.

Glowinski, R. (1984). *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems.* Springer-Verlag.

Gogel, T., A. Sedghinasab, et D. Kiefer (1994). Radiation transfer computation in cylindrical arc columns using a Monte Carlo method. *Journal of Quantitative Spectroscopy*

and Radiative Transfer 52, 179–194.

Goody, R. et Y. Yung (1989). *Atmospheric radiation.* Oxford University Press.

Greengard, L. et V. Rokhlin (1987). A fast algorithm for particule simulation. *JCP 73*, 325–348.

Hand, D., H. Mannila, et P. Smith (2001). *Principles of data mining.* The MIT Press.

Havran, V. (2000). *Heuristic Ray Shooting Algorithms.* Ph. D. thesis, Faculty of Electrical Engineering, Czech Technical University, Prague, Czech Republic.

Herbert, F. (1983). Solid modelling using a volume encoding data structure. *Computers & Graphics 7*(1), 97–99.

Hermann, W. et E. Schade (1972). Radiative energy balance in cylindrical nitrogen arcs. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 12*, 1257–1282.

Hirsch, C. (1999). *Numerical computation of internal and external flows.* Elsevier.

Iordanidis, A. et C. Franck (2008a). Self-consistent radiation-based simulation of electric arcs : II. Application to gas circuit breakers. *Journal of Physics D-Applied Physics 41*(13), 135206.

Iordanidis, A. et C. Franck (2008b). Self-consistent simulation of arcs in realistic non-cylindrical breaker nozzles. In *Proceedings of the 17th International Conference on Gas Discharges and their Applications, Cardiff.*

Iordanidis, A., H. Nordborg, et C. Franck (2007). Radiation based SF_6 and PTFE arc simulations. In *Proceedings of the 17th Symposium on Physics of Switching Arc,Nove Mesto na Morave, Czech Republic*, pp. 121–124.

Jackson, J. (1999). *Classical Electrodynamics.* Wiley.

Lacombe, J., Y. Delannoy, et C. Trassy (2008). The role of radiation in modelling of argon inductively coupled plasmas at atmospheric pressure. *Journal of Physics D : Applied Physics 41*(16), 165204 (9pp).

Lamet, J., M.-Y. Perrin, A. Soufiani, P. Rivière, et L. Tessé (2008). Radiation Modelling for Air Plasma in Nonequilibrium Conditions : Application to Earth Atmospheric Re-entry. In *Proc. of Third Workshop on Radiation of High Temperature Gases in Atmospheric Entry, Heraklion, Greece.* ESA.

Larose, D. (2005). *Discovering knowledge in data : an introduction to data mining.* Wiley.

Larsen, E., G. Thömmes, A. Klar, M. Seaïd, et T. Götz (2002). Simplified P_n approximations to the equation of radiative heat transfer and applications. *Journal of Computational Physics 183*, 652–675.

Lauraire, M. (1996). L'arc électrique dans l'appareillage de protection BT. Rapport technique interne - schneider electric industrie, Schneider Electric.

Li, T., S. Zhu, et M. Ogihara (2003). Algorithms for clustering high dimensional and distributed data. *Intelligent Data Analysis 7*(4), 305–326.

Lin, T., S. Ohsuga, et C. Liau (2005). *Foundations of data mining and knowledge discovery.* Springer.

Liu, F., H. Guo, G. Smallwood, et M. El Hafi (2004). Effects of gas and soot radiation on soot formation in counterflow ethylene diffusion flames. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 84*(4), 501 – 511.

Lowke, J. (1969). A relaxation method of calculating arc temperature profiles applied to discharges in sodium vapor. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 9*, 839–854.

Lowke, J. (1974). Predictions of arc temperature profiles using approximate emisison coefficients for radiation losses. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 14*, 111–122.

Lowke, J. (1978). Circuit interruption in high voltage networks. In *Brown Boveri Symposium on Current Interruption in High-Voltage Networks*, pp. 299. Plenum Pub Corp.

Lowke, J. et E. Capriotti (1969). Calculation of temperature profiles of high pressure electric arcs using the diffusion approximation for radiation transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 9*, 207–236.

Lowke, J., R. Voshall, et H. Ludwig (1973). Decay of electrical conductance and temperature of arc plasmas. *Journal of Physics D : Applied Physics 44*, 3513–3523.

Menart, J. (2000). Radiative transport in a two-dimensional axisymmetric thermal plasma using the S-N discrete ordinates method on a line-by-line basis. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 67*, 273–291.

Menart, J., J. Heberlein, et E. Pfender (1999). Theoretical radiative transport results for a free-burning arc using a line-by-line technique. *Journal of Physics D : Applied Physics 32*, 55–63.

Mikhailov, G. (1991). *Minimization of computational costs of non-analogue Monte-Carlo methods, Series on soviet and east european mathematics, Vol. 5*. World Scientific Publishing.

Minerbo, G. N. (1978). Maximum entropy Eddington factors. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 20*, 541–545.

Modest, M. F. (2003). *Radiative heat transfer*. Academic Press.

Nordborg, H. et A. Iordanidis (2008). Self-consistent radiation based modelling of electric arcs : I. Efficient radiation approximations. *Journal of Physics D-Applied Physics 41*(13), 135205.

Nossov, V., C. Fiévet, B. Hage, et J. Wild (2006). Modelling of polymer wall ablation induced by arc thermal radiation in low voltage circuit breaker. In *Proceedings of EUROTHERM - Computational thermal radiation in participating media II*, pp. 359–358.

Pelleg, D. et A. Moore (1999). Accelerating Exact k-means Algorithms with Geometric Reasoning. In S. Chaudhuri et D. Madigan (Eds.), *Proceedings of the Fifth ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining*, New York, NY, pp. 277–281. AAAI Press.

Perez, P. (2002). *Calcul du transfert radiatif en géométrie complexe*. Ph. D. thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.

Perez, P., M. Paulin, et M. El Hafi (2007). Application of a computer graphics technique for radiative transfer simulation in multidimensional combustion systems. In *Proc. of The Fifth International Symposium on Radiative Transfer, Bodrum, Turkey, 2007*. ICHMT.

Perrin, M.-Y., P. Rivière, et A. Soufiani (2008). *Radiation database for Earth and Mars entry*. VKI Lecture Series 2008. von Karman Institute for Fluid Dynamics.

Pierrot, L., P. Rivière, A. Soufiani, et J. Taine (1999). A fictitious-gas-based absorption distribution function global model for radiative transfer in hot gases. *JQSRT 62*, 609–624.

Rachard, H. (1995). *Etude par Simulation numérique des phénomènes couplés électromagnétiques et aerothermodynamiques au sein d'un arc de coupure*. Ph. D. thesis, Ecole

Centrale de Lyon, Lyon, France.

Raynal, G. et A. Gleizes (1995). Radiative transfer calculation in SF_6 arc plasmas using partial characteristics. *Plasma Sources Sci. Technol. 4*(1), 152–160.

Raynal, G., P. Vergne, et A. Gleizes (1995). Radiative transfer in SF_6 and $SF_6 - Cu$ arcs. *Journal of Physics D : Applied Physics 28*, 508–515.

Reichert, F., C. Rümpler, F. Berger, H. Stammberger, et P. Terhoeven (2007). Simulation of the radiative transfer in air plasma flows. In *Proceedings of the 17th Symposium on Physics of Switching Arc,Nove Mesto na Morave, Czech Republic*, pp. 177–180.

Rivière, P., A. Soufiani, M.-Y. Perrin, H. Riad, et A. Gleizes (1996). Air mixture radiative property modelling in the temperature range $10000K - 40000K$. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 56*, 29–45.

Rouzaud, O., L. Tesse, T. Soubrie, A. Soufiani, P. Riviere, et D. Zeitoun (2008). Influence of radiative heating on a Martian orbiter. *Journal of Thermophysics and Heat Transfer 22*(1), 10–19.

Rubinstein, R. (1981). *Simulation and the Monte carlo method.* John Wiley and sons.

Rümpler, C., F. Reichert, F. Berger, H. Stammberger, et P. Terhoeven (2007). Simulation and verification of the arc behaviour in quenching chambers with splitter plates. In *Proceedings of the 17th Symposium on Physics of Switching Arc,Nove Mesto na Morave, Czech Republic*, pp. 181–184.

Samet, H. (2006a). *Foundations of multidimensional and metric data structures.* Morgan Kaufman.

Samet, H. (2006b). *Foundations of multidimensional and metric data structures.* Morgan Kaufman.

Sevast'yanenko, V. (1979). Radiation transfer in a real spectrum. Integration over frequency. *J. Engineering Physics 36*, 138–148.

Sevast'yanenko, V. (1980). Radiation transfer in a real spectrum. Integration with respect to the frequency and angles. *J. Engineering Physics 38*, 173–179.

Shirvaikar, M. et M. Trivedi (1995). A neural network filter to detect small targets in high clutter backgrounds. *IEEE Transaction on Neural Network 6*, 257–257.

Siegel, J. et R. Howell (2002). *Thermal radiation Heat Transfer.* Taylor and Francis.

Swierczynski, B., J. J. Gonzalez, P. Teulet, P. Freton, et A. Gleizes (2004). Advances in low-voltage circuit breaker modelling. *Journal of Physics D : Applied Physics 37*(4), 595–609.

Taine, J. et A. Soufiani (1999). Gas IR radiative properties : From spectroscopic data to approximate models. In *Advances in heat transfer Vol. 33*, pp. 295–414. Academic press.

Tan, P., M. Steinbach, et V. Kumar (2005). *Introduction to data mining.* Addison-Wesley.

Tessé, L. (2001). *Modélisation du transfert radiatif dans les flammes turbulentes par une méthode de Monte Carlo.* Ph. D. thesis, Ecole Centrale Paris, Chatenay-Malabry, France.

Tessé, L., F. Dupoirieux, B. Zamuner, et J. Taine (2002). Radiative transfer in real gases using reciprocal and forward Monte Carlo methods and a correlated-k approach. *IJHMT 45*, 2797–2814.

Vacquié, S. (2000). *L'Arc électrique.* Eyrolles.

Walter, D. et R. Buckius (1992). Rigorous development of radiation heat transfer in nonhomogeneous ansorbing, emitting and scattering media. *International Journal of Heat and Mass Transfer 35*, 3323–3333.

Wegman, E. et J. Solka (2005). *Statistical data mining*. Elsevier B.V.

Whitted, T. (1980). An improved illumination model for shaded display. *Commun. ACM 23*(6), 343–349.

Wu, Y., M. F. Modest, et D. C. Haworth (2007). A high-order photon Monte Carlo method for radiative transfer in direct numerical simulation. *Journal of Computational Physics 223*(2), 898–922.

Yuen, W. et L. Wong (1983). Numerical computation of an important integral function in two-dimensional radiative transfer. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer 29*, 145–149.

Zel'dovich, Y. B. et Y. P. Raizer (2002). *Physics of shock waves and high temperature hydrodynamic phenomena*. New York, NY, USA : Dover Publications.