



HAL
open science

Propagation des incertitudes dans un modèle réduit de propagation des infrasons

Michaël Bertin

► **To cite this version:**

Michaël Bertin. Propagation des incertitudes dans un modèle réduit de propagation des infrasons. Théorie de l'information et codage [math.IT]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2014. Français. NNT : 2014DENS0020 . tel-01124367

HAL Id: tel-01124367

<https://theses.hal.science/tel-01124367>

Submitted on 6 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN
ÉCOLE DOCTORALE EDSP
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES PRATIQUES

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

Mention : ACOUSTIQUE

Présentée et soutenue publiquement par

Michaël BERTIN

Propagation des incertitudes dans un modèle réduit de propagation des infrasons

préparée au CEA-DIF-DAM (Commissariat à l'Énergie Atomique
et aux Énergies Alternatives).

soutenue le 12 juin 2014

Jury

<i>Président du jury</i>	Florian DE VUYST	ENS Cachan
<i>Rapporteur</i>	Regis MARCHIANO	Université Paris VI (Institut d'Alembert)
<i>Rapporteur</i>	Jean-Michel BERNARD	CEA
<i>Directeur de thèse</i>	Daniel BOUCHE	CEA/ENS Cachan (CMLA)
<i>Co-directeur</i>	Christophe MILLET	CEA
<i>Co-directeur</i>	Jean-Christophe ROBINET	ENSAM ParisTech
<i>Examineur</i>	Roger WAXLER	University of Mississippi / NCPA

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier le directeur de cette thèse, Daniel Bouche, pour m'avoir fait l'honneur de m'accorder sa confiance, et ce dès le début, pour avoir toujours eu du temps à me consacrer quand j'en avais besoin malgré ses nombreuses responsabilités, pour m'avoir soutenu et aidé à de nombreux niveaux, pour son éclairage sur des approches mathématiques pointues et pour avoir toujours montré intérêt et bienveillance envers mon travail.

Mes remerciements vont également à Jean-Christophe Robinet dont l'enthousiasme pour l'approche proposée dans cette thèse fut communicative et bénéfique et dont l'aide et les conseils pratiques furent inestimables. Je regretterai nos longues discussions scientifiques et méthodologiques dans son bureau aux Arts et Métiers qui ont été pour moi très stimulantes et ont contribué petit à petit à m'aider à appréhender le cœur du métier de chercheur.

Je voudrais aussi exprimer ici mon immense gratitude envers Christophe Millet qui a été un pilier essentiel dans cette thèse. Il en a été à l'origine, les prémisses théoriques de notre démarche étaient déjà en germe dès 2009, lors de mon premier stage auprès de lui, et il a ensuite été mon principal encadrant pendant toutes ces années. Mais le seul terme encadrant ne me semble pas rendre justice au véritable rôle qu'il a joué dans cette thèse. Il a pour moi été un professeur et un interlocuteur privilégié, un collègue et un guide. Il m'a offert des opportunités de rencontres et de voyages qui m'ont permis de m'enrichir aussi bien intellectuellement que personnellement, il m'a facilité de nombreuses démarches, m'a soutenu, poussé, encouragé, motivé et s'est constamment montré disponible pour moi durant ce long labeur, n'hésitant jamais à donner de sa personne. Mais plus que tout, ce sont nos échanges théoriques qui ont été pour moi une constante stimulation, un moteur qui me faisait avancer. Son expérience et la finesse de ses raisonnements ont été pour moi une aide inestimable. Quand je repense à nos longs après-midi passés à noircir le tableau Velleda de son bureau, le cerveau en ébullition, il me vient une image qui me semble appropriée pour décrire ce rôle d'encadrant intellectuel qui fut le sien : j'ai été durant cette thèse une sorte de chercheur de métaux précieux, occupé à gratter la roche au fond d'une mine. Christophe m'a aidé à m'orienter dans ce réseau de galeries, il dépoussiérait les cailloux que je venais d'extraire et arrêtais mon geste si je les jetais en me les montrant : « tu vois, c'est de l'or », et, petit à petit, m'a appris à reconnaître la valeur d'un résultat, à voir au delà, à reconnaître toutes les idées et potentialités cachées derrière. Il m'a enseigné à reconnaître et exploiter les bons filons pour en extraire les pierres précieuses, et à les tailler pour en révéler leur éclat. Et à l'occasion, s'il m'arrivait de débouler, fier, devant lui avec un beau cailloux brillant et coloré, il pouvait me signifier d'un simple sourire poli « ne t'embête pas, c'est du toc ».

Je ne sais comment exprimer ma gratitude à ces trois personnes autrement qu'en leur assurant que je me servirai pleinement de tout ce qu'ils m'ont apporté et que je m'efforcerai toujours de me montrer à leur hauteur.

Je remercie Pierre-Franck Piserchia pour m'avoir accueilli dans son équipe au CEA, pour sa gentillesse et pour m'avoir à l'occasion prodigué de bienveillants et avisés conseils.

Pour les discussions que j'ai pu avoir avec eux, leurs suggestions et leurs contributions, je remercie tout particulièrement Gregory Dergham, Jelle Assink, Christophe Haynes, Julien Candelier et Lorenzo Costantino. Je remercie également Laurent Guillot et Olaf Gainville pour nos discussions enrichissantes, Ludovic Aubry pour son aide informatique, nos cafés et pour son investissement dans l'examen de mon travail, et plus généralement les membres permanents du laboratoire auprès de qui le travail quotidien était facilité par leur gentillesse, leur bonne humeur et leur disponibilité.

Jean-Michel Bernard et Régis Marchiano ont accepté d'être les rapporteurs de cette thèse, et je les en remercie profondément, de même que pour leur participation au Jury. Florian De Vuyst et Roger Waxler m'ont également fait l'honneur de participer au Jury de soutenance et je leur en suis immensément reconnaissant. Je remercie tout particulièrement Roger Waxler pour avoir eu la gentillesse de m'accueillir un mois au NCPA, à l'Université du Mississippi, et avec qui les échanges et le travail furent très stimulants en raison de sa grande expérience dans l'étude des infrasons et de son érudition pointue aussi bien en physique qu'en mathématique.

Je remercie également chaudement mon frère Thomas ainsi que mes parents Pierre et Marie-Christine pour leur constante confiance en moi, leur compréhension et leurs encouragements. Je remercie également Marion dont l'amitié et la confiance ont fortement contribué à ma détermination dans mon travail. Je remercie enfin Alice qui pour moi a été un véritable pilier, un réconfort infaillible, et qui a enduré mes instants de fatigue et lassitude sans cesser de m'encourager durant ces années de thèse.

Je passe ensuite une dédicace spéciale à tous les thésards, post-docs, apprentis et stagiaires que j'ai côtoyés, qui m'ont accompagné et avec qui j'ai passé d'excellents moments. Je remercie en premier lieu Sébastien Eveillard, nos nombreuses pauses cafés ont été pour moi essentielles et souvent salutaires. Je remercie également Julien Marty, Julien Candelier et Laurent Monasse qui terminaient leurs thèses quand j'entamais la mienne et qui m'ont aidé à mettre le pied à l'étrier. Enfin (et j'en oublie sûrement, pardon d'avance) merci à Quentin Coupey, Samy Fantar, Sébastien Terrana, Thomas Raimond, Louis-Jonardan Gallin, Martin Henneton, Augustin Jehl...

Je tiens également à mentionner le plaisir que j'ai eu à travailler au sein du CEA.

Enfin, ces remerciements ne seraient pas complets sans mentionner les auteurs, compositeurs, cinéastes, et créateurs qui m'ont enrichi, éveillé, questionné, ému et qui ont donc certainement contribué à mon équilibre durant cette thèse. En vrac et de façon non exhaustive : Franck Herbert, Stefan Zweig, Terry Pratchett, Emile Zola, Oscar Wilde, Philip Glass, Clint Mansell, Pink Floyd, Beethoven, Cliff Martinez, Erik Satie, John Williams, Markus Persson, Wes Anderson, Jean-Pierre Melville, Chris Marker, Takashi Miike, Darren Aronofsky, Gaspar Noé, Andrei Tarkovsky, Michael Mann...

Table des matières

1	Introduction	3
1.1	Contexte	3
1.2	Propagation acoustique	4
1.2.1	Structure stratifiée de l’atmosphère et ondes	4
1.2.2	Les ondes infrasonores	6
1.2.3	Réfraction et guides d’ondes	7
1.3	Propagation dans un milieu incertain	8
1.3.1	Incertitudes atmosphériques	8
1.3.2	Traitement des incertitudes	11
1.3.3	Notion de modèle réduit	13
1.4	Plan du manuscrit	14
2	Outils de modélisation pour la propagation des infrasons dans l’atmosphère	17
2.1	Modélisation	17
2.1.1	Equations de propagation	17
2.1.2	Conditions aux limites	20
2.1.3	Décomposition en modes normaux	21
2.2	Méthode numérique	29
2.2.1	Collocation spectrale	29
2.2.2	Résolution du problème aux valeurs propres	33
2.2.3	Calcul des signaux et causalité	40
2.2.4	Cas d’une faible variabilité horizontale	43
2.3	Conclusion	45
3	Analyse de sensibilité	49
3.1	Introduction	49
3.2	Sensibilité des infrasons aux perturbations atmosphériques	51
3.2.1	Sensibilité des modes et de leurs valeurs propres	51
3.2.2	Décomposition sur une base d’ondelettes	54
3.2.3	Matrice de sensibilité	57
3.2.4	Analyse SVD de la matrice de sensibilité	59
3.3	L’explosion du réacteur de la centrale de Fukushima	62
3.3.1	Problématique	62
3.3.2	Analyse de sensibilité	63
3.3.3	Perturbation optimale de la stratopause	66
3.3.4	Approximation au premier ordre	69
3.4	Problème de géolocalisation du bolide tombé en Bretagne le 19 Juillet 2011	72
3.4.1	Contexte	72

3.4.2	Approche perturbative et plan d'expérience	74
3.4.3	Géolocalisation	74
3.4.4	Sensibilité à la variation d'azimut	78
3.4.5	Bilan	78
3.5	Conclusion	80
4	A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere	83
4.1	Introduction	83
4.2	Normal mode decomposition of the pressure field	85
4.2.1	The mean atmosphere	85
4.2.2	The vertical structure equation	87
4.2.3	Normal modes for range-dependent atmospheres	88
4.3	Sensitivity of modes to the mean atmosphere	90
4.4	A low-order reduced model	93
4.4.1	Invariant subspaces	94
4.4.2	An estimate for the Fourier transform	97
4.5	Conclusion	102
4.6	Appendix : WKB approximation	103
5	Statistically accurate low-order models for infrasound propagation	107
5.1	Introduction	107
5.2	A stochastic normal mode decomposition of infrasounds	109
5.2.1	Mean state and uncertainties	109
5.2.2	The vertical structure equation	110
5.2.3	Stochastic eigenvalues	110
5.3	A stochastic reduced model	111
5.3.1	Variance-based reduced model	112
5.3.2	Confidence intervals of reduced models	116
5.4	Conclusion	120
5.5	Appendix : Impulsive point source	120
6	Conclusion	123
A	Application analytique : la couche limite atmosphérique nocturne	127
A.1	Modélisation de la couche limite	127
A.2	Caractérisation analytique du spectre	128
A.2.1	Le problème aux valeurs propres	128
A.2.2	La relation de dispersion	128
A.2.3	Détails des calculs	130
A.3	Application numérique	132

B	Méthode des éléments finis pour la propagation des infrasons	137
B.1	Equations	137
B.2	Méthode numérique	138
B.3	Comparaisons avec les modes normaux	139
C	Lecture qualitative des matrices de sensibilité	143
D	Caractérisation asymptotique du spectre dans le plan complexe	149
	Bibliographie	155

+

Introduction

Sommaire

1.1	Contexte	3
1.2	Propagation acoustique	4
1.2.1	Structure stratifiée de l'atmosphère et ondes	4
1.2.2	Les ondes infrasonores	6
1.2.3	Réfraction et guides d'ondes	7
1.3	Propagation dans un milieu incertain	8
1.3.1	Incertitudes atmosphériques	8
1.3.2	Traîtement des incertitudes	11
1.3.3	Notion de modèle réduit	13
1.4	Plan du manuscrit	14

1.1 Contexte

Le Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA) est actif dans cinq grands domaines : l'énergie nucléaire, les énergies décarbonnées, les technologies pour l'information, les technologies pour la santé et la Défense et la sécurité globale. Le pôle Défense est assuré par la direction des applications militaires (DAM). Parmi ses missions, la DAM est engagée pour lutter contre la prolifération nucléaire et le terrorisme et contribue à ce titre à la surveillance du respect du traité d'interdiction complète des essais nucléaires (TICE) pour les instances nationales et internationales.

Le TICE a été ouvert à la signature en 1996 à New York et n'est toujours pas entré en vigueur. Il interdit tout essai nucléaire ou tout autre type d'explosion nucléaire, que ce soit à des fins pacifiques ou militaires, dans quelque environnement que ce soit. La DAM est responsable, pour la France, de la surveillance de son application et développe les moyens de surveillance des essais dans le monde. Dans le cadre de l'OTICE (Organisation du traité d'interdiction complète des essais nucléaires), elle participe à la construction du système de surveillance international (SSI), à l'évaluation du centre international de données de Vienne et à la définition des procédures pour les futures inspections sur place.

Le réseau infrason est composé de plusieurs dizaines de stations de mesure réparties dans 35 pays. Ces stations sont équipées de capteurs microbarométriques et mesurent au niveau du sol les variations de pression induites par la propagation

d'ondes infrasonores dans l'atmosphère. Les infrasons sont des ondes acoustiques de fréquences inférieures à la bande de fréquences audibles pour l'humain (entre 20 et 20 000 Hz). Ils peuvent être d'origine naturelle (éruption volcanique, orage, houle océanique, météorite, etc) comme d'origine anthropique (explosions, tirs de carrière, avions supersoniques, etc).

L'étude des infrasons a pour ambition de déterminer la capacité de détection du réseau mais aussi de discriminer les ondes infrasonores produites par les explosions de celles produites par d'autres types de sources. Il faut pour cela étudier ce qui caractérise la propagation infrasonore selon le type de source qui en est à l'origine, et selon l'état de l'atmosphère que traverse l'onde. À cette fin, on associe à l'analyse des données recueillies par le réseau SSI un travail sur la modélisation mathématique, puis numérique de la propagation infrasonore.

Nous proposons dans cette thèse une méthode qui permet à la fois de mieux comprendre l'influence des incertitudes atmosphérique sur la propagation des infrasons dans l'atmosphère et de réduire considérablement les coûts de calcul pour des simulations déterministes comme statistiques. Le coeur de la problématique ainsi que la démarche suivie sont développés dans les sections suivantes.

1.2 Propagation acoustique

1.2.1 Structure stratifiée de l'atmosphère et ondes

L'atmosphère terrestre désigne l'enveloppe gazeuse entourant notre planète. Elle est principalement constituée de diazote (78%), de dioxygène (21%), d'argon (0,93%) et de dioxyde de carbone (0,039%), auxquels s'ajoutent des traces d'autre gaz (néon, hélium, méthane, dihydrogène ou vapeur d'eau). Son comportement thermodynamique est proche de celui d'un gaz diatomique.

L'atmosphère se divise en couches sphériques concentriques dont les limites sont marquées par les discontinuités majeures de variation de température, c'est-à-dire par les extrema locaux de température moyenne (Figure 1.1).

On distingue ainsi :

La troposphère : Il s'agit de la première couche atmosphérique. Elle concentre près de 80% de la masse totale de l'atmosphère. Elle s'étend du sol jusqu'à la tropopause située entre 10 et 20 km d'altitude. La variabilité des conditions météorologiques y est importante et la dynamique y est turbulente. La température décroît avec l'altitude au sein de cette couche. Par ailleurs, la tropopause présente des brèches (concentriques par rapport aux pôles, deux par hémisphère) qui occasionnent des courants dit de jet, ou *jet-streams*.

La stratosphère : La stratosphère s'étend de la tropopause jusqu'à la stratopause, située aux environs de 55 km d'altitude. Le gradient de température y est positif, ce qui empêche la formation de cellules de convection au sein de cette couche. L'augmentation progressive de la température est due au dégagement de chaleur dû à la réaction de la couche d'ozone aux rayonnements solaires.

La mésosphère : Le gradient de température est négatif dans la mésosphère et la température y descend jusqu'à 180 à 200 K au niveau de la mésopause, à environ 90 km d'altitude. Cette baisse de température y rend la stratification moins stable que dans la stratosphère.

La thermosphère : Aussi appelée ionosphère, la thermosphère contient des gaz ionisés qui sont à l'origine de la réflexion des ondes électromagnétiques. La température y croît sous l'effet de l'absorption du rayonnement solaire par l'azote et l'oxygène ionisés. Elle peut atteindre plus de 1000 K au-delà de 300 km d'altitude. La limite supérieure, la thermopause, se situe entre 350 km et 800 km d'altitude.

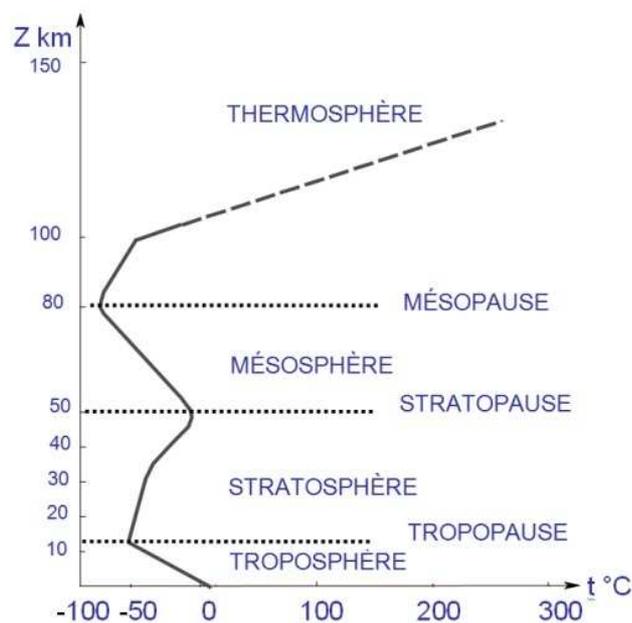


FIGURE 1.1 – Les différentes couches atmosphériques.

Au-delà de la thermopause se situe l'exosphère, la couche externe de l'atmosphère terrestre. Elle se caractérise par une extrême raréfaction des gaz et s'étend jusqu'à au moins 10 000 km d'altitude.

La dynamique de l'atmosphère à grande échelle est principalement le fait de fluctuations autour d'un état moyen défini par l'équilibre géostrophique et l'équilibre hydrostatique. L'équilibre géostrophique correspond à l'équilibre entre la force de Coriolis et la force du gradient horizontal de pression. D'autre part, l'équilibre hydrostatique signifie l'équilibre entre la poussée d'Archimède et le poids d'une particule fluide. La perturbation de ces équilibres va occasionner des réarrangements pour que l'atmosphère puisse revenir en position d'équilibre et, ce faisant, des ondes sont émises. Par exemple, les *ondes de gravité*, de vitesse de propagation plus faible

que celle du son, sont des ondes transversales qui peuvent entraîner mélange, turbulence et dissipation lorsqu'elles sont soumises à des instabilités et qu'elles déferlent [Gossard 1975], [Gill 1982]. Parmi ces dernières, on appelle *onde de gravité inertielle* une onde de gravité de longueur d'onde suffisamment grande pour qu'elle soit influencée par la rotation terrestre.

Par ailleurs on trouve aussi dans l'atmosphère (ou dans l'océan) les *ondes de Kelvin* qui sont des ondes non-dispersives qui correspondent à l'équilibre entre la force de Coriolis et les effets de la topographie (comme une côte) ou d'un guide d'onde, ou bien les *ondes de Rossby*, aussi appelées ondes planétaires : ce sont des ondes inertielles de grande longueur d'onde qui correspondent à des mouvements ondulatoires de la circulation atmosphériques dont l'initiation est due à la variation de la force de Coriolis selon la latitude.

Enfin, dans l'atmosphère se propagent aussi les ondes acoustiques qui sont des ondes élastiques résultant de la compressibilité du milieu [Gossard 1975]. Les *infrasons*, ou ondes acoustiques infrasonores, se propagent longitudinalement à la vitesse locale du son ($c_0 \approx 340 \text{ m.s}^{-1}$ à 288 K). Elles peuvent se propager sur de grandes distances par réflexions multiples sur les différentes couches de l'atmosphère et au sol.

1.2.2 Les ondes infrasonores

Sources infrasonores

Les possibles sources d'ondes infrasonores sont multiples et de diverses natures. Il existe de nombreuses sources naturelles caractérisées par différentes échelles temporelles et spatiales et différentes gammes de fréquence. On en retrouve une classification dans [Campus 2009]. On peut évoquer de façon non exhaustive les tornades, les fortes tempêtes, les éclairs, les météorites, mais aussi les effets du relief ou les séismes. Chacun de ces phénomènes entraîne une perturbation de l'équilibre hydrostatique et donc génère son cortège d'ondes associée au retour à l'équilibre. Des sources comme les ondes orographiques (ou ondes de montagnes : forme d'onde de gravité produite par le déplacement vertical des masses d'air provoqué par le déplacement au-dessus d'un relief), les tsunamis ou la houle océanique émettent sur de longues durées et permettent ainsi de suivre les évolutions du milieu de propagation (température et vents). Il existe aussi une large variété de source anthropiques comme les explosions nucléaires, les explosions chimiques, les avions (supersoniques ou subsoniques), ou bien les effets des ponts et structures. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons surtout à des sources de nature explosive (et ponctuelles), à durée d'émission très courte, localisées au sol, et pour lesquelles l'énergie acoustique ne se retrouve portée que par de très basses fréquences (de l'ordre du Hertz) à longue distance.

Facteurs régissant la propagation des infrasons

La propagation acoustique en milieu extérieur est largement étudiée depuis plusieurs dizaines d'années. Des synthèses bibliographiques telles que [Attenborough 1988] ou [Delany 1977] en témoignent. Plusieurs phénomènes gouvernent la propagation des infrasons dans l'atmosphère :

La divergence géométrique : elle est due à la dispersion géométrique des ondes acoustiques dans l'espace. Elle entraîne une diminution du niveau de pression sonore en $1/r^2$, soit de 6 dB par doublement de la distance r à la source, si celle-ci est ponctuelle.

L'absorption atmosphérique : elle est due à la viscosité de l'air, à la diffusion thermique et aux échanges d'énergie entre les molécules. En première approximation, elle est proportionnelle à la distance de parcours, à la fréquence, à la température et à l'humidité de l'air [Bass 1995]. Peu influente pour des distances de propagation de l'ordre de la centaine de mètres, elle devient très importante aux plus hautes altitudes, dans la thermosphère. Des modèles semi-empiriques ont été développés pour simuler l'absorption atmosphérique [Sutherland 2004].

L'effet de sol : le sol, qui délimite la zone de propagation, absorbe une partie de l'énergie incidente et on modélise cet effet au moyen de son *impédance* [Waxler 2002], [Waxler 2004]. L'impédance acoustique des matériaux caractérise leur résistance au passage du son (rapport entre la pression acoustique et la vitesse de déplacement des particules dans le milieu) et peut mener à l'absorption d'une quantité non-négligeable d'énergie acoustique (jusqu'à 10 dB).

La topographie : Les réflexions et diffractions multiples occasionnées par un obstacle rencontré peuvent créer de fortes disparités sur les niveaux sonores entre deux points voisins. En outre, l'écoulement peut se voir aussi modifié par la forme des obstacles, modifiant ainsi localement le profil de célérité effective.

Les conditions météorologiques : Les gradients de vent et de température, de même que la turbulence, ont un effet prépondérant sur la propagation acoustique dans l'atmosphère. C'est l'objet du paragraphe suivant.

1.2.3 Réfraction et guides d'ondes

Les gradients de vitesse du son modifient les trajectoires des fronts d'onde (les surface d'égaux phases de l'onde) par réfraction. En effet, les gradients de température et de vent génèrent des gradients d'indice de réfraction de l'air dont l'effet sera de modifier progressivement la relation de dispersion en fonction de l'altitude. Plus précisément, un gradient négatif de célérité effective du son c_{eff} (la vitesse du son plus la vitesse d'écoulement) va courber la direction de propagation vers le haut tandis qu'un gradient positif courbe ces trajectoires pour les dévier vers le sol (figure 1.2). Les variations verticales de température (figure 1.1) et de vent vont ainsi former des guides d'ondes qui piègent l'énergie acoustique.

Ces guides sont principalement les guides troposphériques, stratosphériques et thermosphériques, désignés en fonction de la couche atmosphérique où les ondes sont réfractées. Plusieurs guides d'ondes existent généralement simultanément et donc différentes trajectoires et différentes durées de parcours peuvent avoir lieu avant un retour au sol après réfraction. Ainsi, d'une unique source ponctuelle peuvent résulter différentes arrivées infrasonores sur une station de mesure, les différentes dates d'arrivées résultent alors de l'effet des différents guides sur l'onde infrasonore. Ces différents parcours de l'onde, appelés phases, peuvent en outre effectuer plusieurs rebonds entre leur altitude de réfraction et le sol où elles se réfléchissent et ainsi se propager sur de très grandes distances.

Ces mêmes mécanismes se retrouvent d'ailleurs lorsque la propagation acoustique se déroule dans le sous-sol [Romanowicz 2003]. En effet, la croûte terrestre forme un guide d'onde important, et les transitions successives à 410 km puis à 660 km de profondeur dans le manteau supérieur entraînent la réfraction vers le sol des ondes P et S, comme on peut l'observer sur la figure 1.2. Les cartes d'atténuation sont obtenues pour l'équation d'onde avec un forçage ponctuel monochromatique à 1 Hz situé au sol, à $R = 0$ km. Elles sont données en dB : $-10 \log_{10} |p/p_{\text{source}}|^2$, où p est la surpression. Les équations et méthodes numériques utilisées sont décrites dans le chapitre suivant.

Les différentes couches de l'atmosphère présentent de forts gradients de vitesse du son au niveau de leurs limites supérieures respectives. Les phases infrasonores atmosphériques les plus répandues sont donc les phases troposphériques, stratosphériques, mésosphériques et thermosphériques. Le gradient de température n'est pas la seule cause de réfraction de ces phases, la présence d'un fort vent, comme un courant-jet dans la troposphère, peut accentuer l'effet du guide d'onde, et rend la propagation anisotrope : en effet, la célérité effective du son dans l'atmosphère s'écrit $c_{\text{eff}} = c + \vec{v} \cdot \vec{e}_r$ si \vec{e}_r est le vecteur unitaire indiquant la direction de propagation considérée et \vec{v} le vent. Il est à noter que l'atténuation des hautes fréquences en haute atmosphère entraîne une déperdition d'énergie des phases thermosphériques à chaque réfraction. En outre, des petites variations de célérité effective peuvent apparaître localement, du fait de la turbulence autour de la stratopause, et peuvent engendrer des phases partielles. Il existe par ailleurs des guides d'onde secondaires autour de la tropopause et de la mésopause qui piègent l'énergie acoustique en altitude et empêchent la détection au sol, du fait des gradients négatifs de célérité effective.

1.3 Propagation dans un milieu incertain

1.3.1 Incertitudes atmosphériques

L'importante limitation que l'on rencontre lorsqu'il s'agit de mettre en oeuvre et d'exploiter des modèles de propagation acoustique dans l'atmosphère est le manque de connaissance que nous avons du milieu de propagation. Ce déficit d'information constitue une source d'incertitude.

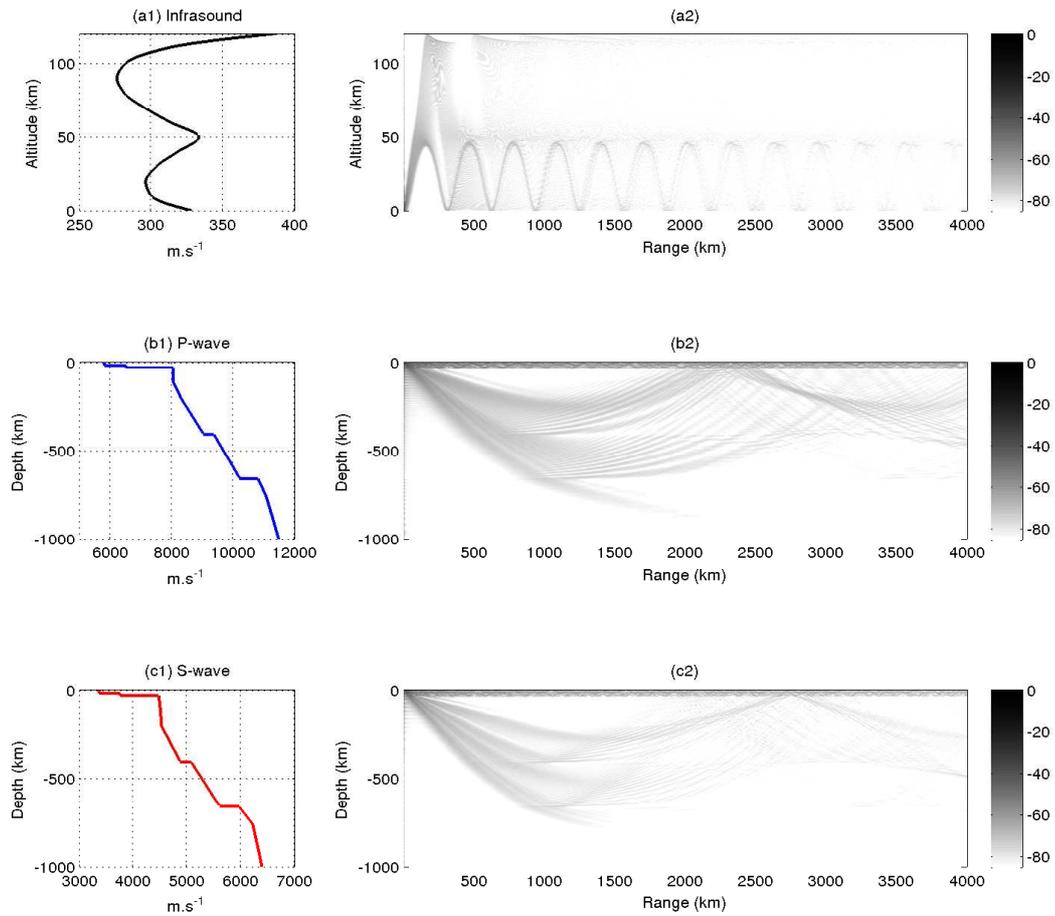


FIGURE 1.2 – (a1) Profil de vitesse du son dans l’atmosphère (idéalisée) et (a2) carte d’atténuation acoustique correspondante. (b1),(c1) Profils de vitesse respectivement des ondes P et des ondes S en fonction de la profondeur dans le sous-sol (modèle de référence IASP91 [Kennett 1991]), et (b2),(c2) les cartes d’atténuation correspondantes.

Concrètement, les données atmosphériques utilisées comme entrées des modèles de propagation sont issues de l'assimilation de données d'observation dans des modèles de circulation atmosphérique. Par exemple, la base de donnée du centre européen ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts) fournit notamment les champs de pression, de température et de vent avec une résolution spatiale de l'ordre du degré d'arc (soit environ 100 km au sol) et de 880 m en moyenne pour l'altitude, jusqu'à 80 km d'altitude (données ECMWF *91-levels*, [Molteni 1996], [Jung 2010]). La résolution temporelle est de 3 h au mieux. Un autre modèle semi-empirique de référence appelé G2S (Ground-to-Space) est produit par le laboratoire américain Naval Research Laboratory ([Drob 2003], [Drob 2010]).

Néanmoins, lorsque l'on compare ces données avec des observations directes, on constate d'importants écarts qui ne peuvent pas être négligés. Par exemple, la température issue de la télédétection par laser, ou LIDAR (LIght Detection And Ranging¹), présente systématiquement des différences avec les données ECMWF (figure 1.3), avec un écart-type qui peut atteindre 10 Kelvin (écart-type calculé pour un échantillon de 117 sondages).

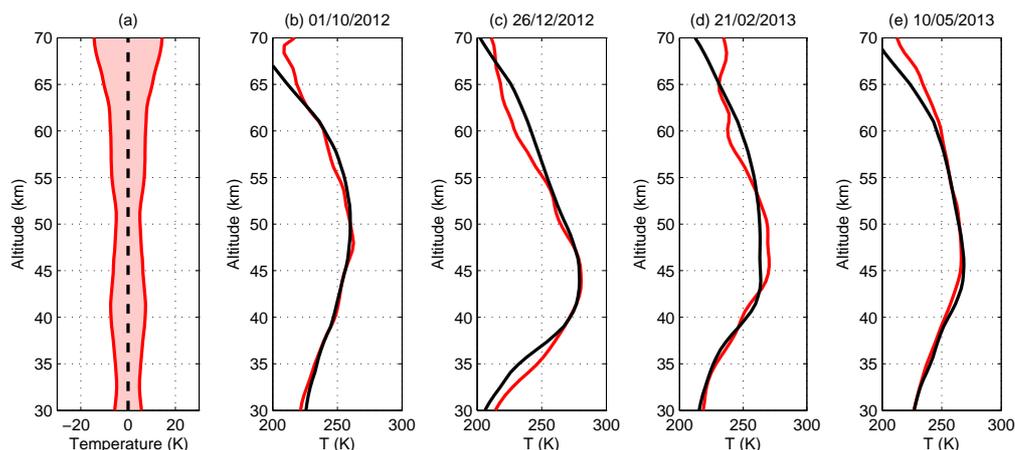


FIGURE 1.3 – (a) Ecart-type de l'écart entre 117 sondages LIDAR sur la période octobre 2012 - juin 2013, à l'observatoire de Haute-Provence, et les données ECMWF aux mêmes dates. (b)(c)(d)(e) Exemples de profils de température pour différentes dates : en noir, données ECMWF et en rouge, observations LIDAR.

Par ailleurs, nous savons que les ondes de gravités, lorsqu'elles déferlent, sont à

1. Technologie de mesure optique basée sur l'analyse des propriétés d'un faisceau renvoyé vers son émetteur. La méthode la plus courante est basée sur le laser à impulsion, et les fréquences utilisées sont celles de la lumière visible ou de l'infrarouge. En plus du système laser chargé d'émettre l'onde lumineuse, un lidar se compose d'un télescope qui récoltera l'onde rétrodiffusée par les particules rencontrées et d'une chaîne de traitement qui quantifiera le signal reçu. L'onde émise interagit avec les différents composants qu'elle rencontre et une partie de cette onde est rétrodiffusée et collectée par le télescope. À partir de cette composante rétrodiffusée, on peut alors déduire des informations quant au diffuseur.

l'origine d'une importante variabilité notamment au voisinage de la stratopause et de la basse mésosphère. A partir de 40-50 km d'altitude, la variabilité induite sur les profils de vent peut atteindre 30 m.s^{-1} , soit environ 10 % de la vitesse du son [Drob 2013]. Le fait est que les modèles semi-empiriques sont sous-résolus par rapport aux échelles caractéristiques des ondes de gravité et donc ne peuvent traduire cette importante variabilité dans les données qu'elles produisent. Or, comme nous l'avons vu dans la section précédente, la stratopause est un lieu d'une importante réfraction vers le sol des ondes acoustiques, et donc toute variabilité, toute incertitude sur les vents et la température dans cette région a un impact majeur sur les signaux infrasons enregistrés au sol.

De récentes études montrent que ces incertitudes associées au milieu de propagation ne peuvent pas être négligées si l'on souhaite exploiter des résultats de simulation. En particulier, de nombreuses simulations sont conduites pour construire des bulletins de détections infrasonores à partir des observations issues du réseau IMS (International Monitoring System) : les bases de données REB (Reviewed Event Bulletin) et LEB (Late Event Bulletin). Or ces bulletins présentent 80 à 90 % de fausses alarmes car les modèles utilisés sont très simplifiés et ne prennent pas en compte l'effet des différentes structures atmosphériques. Un enjeu majeur est la réduction de ce taux de fausses alarmes dans les bulletins. Mais cette volonté d'utiliser la simulation pour mieux caractériser les événements infrasonores s'accompagne d'une nécessité d'efficacité : le traitement des données doit s'effectuer dans un temps compatible avec le traitement de la détection. Ce double objectif nous place face à une alternative qui pose problème : soit nous utilisons des modèles simplifiés et peu coûteux, mais dans ce cas nous ne traitons pas l'effet des structures atmosphériques, soit nous améliorons la physique des modèles utilisés (en prenons en compte les différents effets atmosphériques et les incertitudes associées) pour être plus précis, mais cela rend alors les calculs très coûteux.

Ce que nous proposons dans ce manuscrit doit permettre de s'extraire de ces deux impasses. Notre objectif est en effet de simplifier le modèle de propagation (et donc de réduire les coûts CPU) en tenant compte des incertitudes associées au milieu de propagation.

1.3.2 Traitement des incertitudes

On cherche à résoudre le problème $Y = F(X)$ où F est le modèle de propagation, X est l'entrée du modèle soumis à des incertitudes (ici, l'état atmosphérique) et considérée ici comme une quantité aléatoire, et Y est la sortie du modèle que nous cherchons à caractériser (cela peut être un champ de surpression, ou bien uniquement le signal infrason au sol, à une distance donnée de la source).

La démarche de réduction de modèle lorsque des entrées sont aléatoires suit habituellement 3 grandes étapes. Il faut tout d'abord quantifier les lois d'incertitudes pour X , pour ensuite propager ces incertitudes à travers le modèle, c'est-à-dire pouvoir quantifier $\mathbb{E}[\phi(Y)]$, où \mathbb{E} est l'espérance mathématique, et ϕ est une observable. Enfin, en effectuant une analyse de sensibilité du modèle, on peut le simplifier en

éliminant les variables (composantes de X) les plus influentes si l'on souhaite réduire la variance de l'observable, ou les moins influentes si l'on souhaite évaluer la variance de l'observable.

La quantification des incertitudes est l'étape la plus difficile car nous n'avons que peu d'information sur l'entrée X . Classiquement, on peut postuler une loi analytique, ou bien faire appel à la méthode d'estimation par noyau (qui permet d'estimer la densité en tout point du support à partir de données statistiques). Il existe aussi des méthodes entropiques qui permettent notamment de simuler des événements rares, là où les densités de probabilité sont très faibles. Enfin, il y a les méthodes d'estimation par inférence Bayésienne ([Wilks 2011]) dont les applications sont déjà nombreuses pour quantifier des incertitudes atmosphériques : [Franks 1997] pour les flux sol-atmosphère, [Furrer 2007] pour la circulation globale océan-atmosphère, ou [Assink 2013] pour les vents en haute atmosphère (en utilisant des données infrasonores).

Par ailleurs, des méthodes spectrales basées sur l'énergie permettent de décomposer des ensembles de données sur des structures de base hiérarchisées (l'ACP, Analyse en Composantes Principales, ou bien la POD, Proper Orthogonal Decomposition [Rowley 2005], par exemple), néanmoins, ces approches ne sont pas adaptées à la description d'événements rares. En effet, nous savons que certaines structures atmosphériques dites optimales modifient radicalement la forme d'onde alors que leur probabilité d'occurrence est très faible (typiquement sous 0.001). La quantification des incertitudes de faible probabilité doit être l'objet d'un traitement spécifique. Il existe pour cela des techniques séquentielles à particules [Cérou 2012] ou bien basées sur l'estimation de fonctions de répartition complémentaires [Au 2001]. Il y a aussi la méthode SORM (Second Order Reliability Method [Kiureghian 1991]), ou bien le multilevel splitting [Guyadier 2011].

Nous ne traitons pas dans ce manuscrit le problème de quantification des loi d'incertitudes pour l'état atmosphérique. S'il est vraisemblable que ces incertitudes proviennent essentiellement de l'influence des ondes de gravité, le travail de modélisation stochastique de cette variabilité est un sujet à part entière, et nous avons préféré dans cette thèse concentrer nos efforts sur la sensibilité et la réduction du modèle de propagation, en supposant connue l'incertitude en entrée.

Une fois que l'on dispose d'un modèle pour les incertitudes en entrée, il s'agit de propager ces dernières dans le modèle F . Voici quelques méthodes possibles :

- Les méthodes de quadrature (Polynômes de Chaos) : elles permettent de planifier les expériences numériques nécessaires à l'évaluation des moments statistiques, mais cela représente un grand nombre d'appel au code et des contraintes sont imposées à ϕ . Malgré le temps de calcul important que cela nécessite, des applications ont été menées pour propager des incertitudes atmosphériques [Jeong 2010] (pour un bang supersonique), [LePage 2006] (pour des infrasons) ou bien en océanographie [Thacker 2012].
- Le développement de Taylor : méthode rapide mais qui ne permet pas de contrôler l'erreur (troncature du développement).
- Méthodes de Monte-Carlo (Quasi-Monte-Carlo, Techniques de réduction de

variance, etc) : souvent coûteuses mais la vitesse de convergence ne dépend pas de la dimension du problème et nulle contrainte n'est imposée à ϕ . Une classe de méthodes avancées appelée MCMC (Markov Chain Monte Carlo) permet d'adapter un échantillonnage à une distribution de probabilité donnée. Diverses méthodes permettent d'accélérer la convergence et donc d'approcher les moments statistiques à moindre coût [Tomassini 2007], [Minasny 2011].

Enfin, différentes approches existent pour analyser la sensibilité du modèle aux paramètres d'entrée. Il faut distinguer les approches globales et les approches locales (sensibilité à chacun des paramètres d'entrée du modèle). Il existe des méthodes d'analyse qualitative (comme le criblage, ou l'identification), et des méthodes d'analyse quantitative qui permettent d'estimer la sensibilité statistique [Sobol 1999] : méthodes OAT (One-parameter-At-a-Time), bifurcation séquentielle, etc. Un exemple d'évaluation de la sensibilité statistique globale peut être trouvé dans [Haynes 2013] où la méthode FAST (Fourier Amplitude Sensitivity Testing) est utilisée pour évaluer les variances conditionnelles relatives aux paramètres d'une chute de météorite.

1.3.3 Notion de modèle réduit

L'objectif de la réduction d'un modèle est de réduire la dimension de l'espace dans lequel on le résout : on réduit *l'ordre* du modèle. Une réduction naturelle effectuée en simulation numérique est de passer d'un problème continu à un problème discret et donc de dimension finie.

De façon générale, un problème physique peut s'écrire sous la forme d'un système d'équations aux dérivées partielles :

$$\partial_t \mathbf{V} = \mathbf{L}(\partial_x) \mathbf{V} + \mathbf{N}(\mathbf{V}), \quad (1.1)$$

où l'on distingue les termes linéaires $\mathbf{L}(\partial_x) \mathbf{V}$ des termes non-linéaires $\mathbf{N}(\mathbf{V})$. Il existe une base adaptée à la représentation de la solution, appelée base propre. Les éléments de cette base, appelés modes propres, sont le résultat du problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{L}^* \mathbf{X} = s \mathbf{X}, \quad (1.2)$$

où \mathbf{L}^* est l'adjoint de l'opérateur linéaire \mathbf{L} , dont la définition est issue du choix d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle \mathbf{Q}, \mathbf{L} \mathbf{P} \rangle = \langle \mathbf{L}^* \mathbf{Q}, \mathbf{P} \rangle \quad (1.3)$$

quels que soient \mathbf{P} et \mathbf{Q} . Ces modes sont bi-orthogonaux² et permettent d'exprimer la solution sous la forme :

$$\mathbf{V} = \sum_j X_j \mathbf{X}_j. \quad (1.4)$$

2. \mathbf{X}_j et \mathbf{X}_k sont orthogonaux si les valeurs propres s_j et s_k ne sont pas complexes conjuguées. Dans le cas où \mathbf{L} est auto-adjoint, le spectre est réel et la base est orthogonale.

A l'aide de cette décomposition, le problème initial se divise en sous-problèmes exprimés sur les modes propres :

$$\partial_t X_j = s_j X_j + \left\langle \mathbf{X}_j, \mathbf{N} \left(\sum_k X_k \mathbf{X}_k \right) \right\rangle, \quad (1.5)$$

expression que l'on obtient en écrivant le produit scalaire de (1.1) avec les éléments de la base. On constate que la non-linéarité se traduit par un effet de couplage entre les différents modes. Si les non-linéarités sont négligeables, il n'y a pas de couplage et le problème se résout entièrement grâce à la décomposition sur les modes propres : la résolution repose alors entièrement sur le problème aux valeurs propres. Or le nombre de modes propres dépend de la taille du problème discrétisé, et cette recherche de modes peut s'avérer coûteuse.

Quand on exprime une solution sur une base de modes propres, on constate généralement que tous les modes n'ont pas la même importance dans une configuration donnée. La réduction consistera alors à ne retenir que les modes les plus significatifs en fonction d'un critère que l'on se donne [Antoulas 2001], [Delville 1999], [Galletti 2004]. Par exemple, dans un contexte de contrôle optimal, on peut sélectionner les modes orthogonaux en fonction de leur contrôlabilité et/ou de leur observabilité à l'aide de l'approche BPOD (Balanced Proper Orthogonal Decomposition [Rowley 2005]).

Dans notre cas, nous réduisons un opérateur de propagation acoustique linéaire en ne conservant que certains modes sélectionnés en fonction de leur sensibilité déterministe ou statistique à des perturbations atmosphériques. Nous montrons que dans le cas de l'équation d'onde, seul un faible nombre de modes (par rapport à la taille du problème numérique) permet de retrouver les moments statistiques d'un signal infrason à une station de mesure.

1.4 Plan du manuscrit

L'objet de cette thèse est l'étude de l'influence des incertitudes associées aux conditions atmosphériques sur la propagation des infrasons. Nous exploitons des mécanismes de sensibilité pour construire un modèle réduit qui permet d'une part de simuler la propagation infrasonore à moindre coût et d'autre part de pouvoir expliquer et exploiter les détections enregistrées aux stations de mesure.

Dans le chapitre 2, nous présentons le modèle physique ainsi que les méthodes numériques que nous utilisons pour modéliser la propagation des infrasons. En particulier, nous présentons la méthode des modes normaux qui consiste à décomposer le champ de perturbation de pression en modes verticaux. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que certaines notions présentes dans ce chapitre pourront être répétées dans les chapitres suivants de façon à définir chaque fois le cadre mathématique et physique dans lequel nous travaillons.

Dans le chapitre 3, nous analysons la sensibilité des modes et des signaux infrasonores à des perturbations atmosphériques. En particulier, nous établissons un lien

entre les différentes arrivées d'un signal acoustique et certaines structures spécifiques de l'atmosphère modélisées avec des ondelettes. Ces outils d'analyse de sensibilité sont utilisés pour étudier le cas de l'explosion à la centrale de Fukushima en mars 2011, puis pour géolocaliser la météorite tombée en Bretagne en juillet 2011.

Nous exploitons ensuite cette analyse de sensibilité dans le chapitre 4 pour simplifier le modèle et réduire le temps de calcul. Nous montrons en particulier que le meilleur modèle réduit est obtenu à partir des modes les plus sensibles. On réduit ainsi significativement le coût CPU nécessaire, tout en conservant la bonne forme d'onde en un point donné (une station de mesure). Le modèle réduit est appliqué au cas Fukushima.

Enfin, nous prolongeons le principe de réduction de modèle dans le chapitre 5 en prenant en compte des incertitudes aléatoires. Les modes les plus sensibles statistiquement sont cette fois utilisés pour construire un modèle réduit stochastique. Nous utilisons cette réduction stochastique pour étudier le cas de l'expérience de calibrage de Sayarim (Israël), en 2009 et 2011.

+

Outils de modélisation pour la propagation des infrasons dans l'atmosphère

Sommaire

2.1	Modélisation	17
2.1.1	Equations de propagation	17
2.1.2	Conditions aux limites	20
2.1.3	Décomposition en modes normaux	21
2.2	Méthode numérique	29
2.2.1	Collocation spectrale	29
2.2.2	Résolution du problème aux valeurs propres	33
2.2.3	Calcul des signaux et causalité	40
2.2.4	Cas d'une faible variabilité horizontale	43
2.3	Conclusion	45

2.1 Modélisation

Nous présentons dans cette section la méthode des modes normaux appliquée à l'équation d'onde, qui est le prototype d'équation mis en jeu dans la propagation des infrasons.

2.1.1 Equations de propagation

Nous considérons ici l'atmosphère comme un gaz parfait non visqueux, de conductivité thermique nulle, sans source de chaleur ni de force de volume. Sous ces conditions, les équations d'Euler peuvent s'écrire sous la forme d'un système différentiel non linéaire adimensionnel de la forme $\mathcal{S}(\Phi) = 0$, où le vecteur Φ correspond aux variables de vitesse u_i (les 3 composantes spatiales), de pression p et de masse volumique ρ . Considérons classiquement la perturbation d'un état de base noté $\bar{\Phi}$ qui satisfait les équations de l'écoulement fluide, en effectuant le changement $\Phi \mapsto \bar{\Phi} + \Phi$, les équations peuvent se mettre sous la forme :

$$\mathcal{S}(\bar{\Phi} + \Phi) = 0,$$

dont l'approximation linéaire s'écrit $\mathcal{L}(\bar{\Phi}) \Phi = 0$.

Considérant les équations d'Euler, on arrive à :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x_i} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{\mathcal{M}^2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + \gamma p \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = 0. \quad (2.2)$$

où γ désigne la constante adiabatique et \mathcal{M} le nombre de Mach défini par $\mathcal{M}^2 = 1/(\gamma\bar{p})$. En faisant l'hypothèse d'une atmosphère stratifiée, c'est-à-dire ne dépendant que de la variable d'altitude z , les équations (2.1) et (2.2) se combinent pour donner une équation différentielle pilotant la perturbation de pression p :

$$\left[\bar{\rho} \mathcal{M}^2 \mathcal{D}^3 - \left[2 \frac{d\bar{u}}{dz} \cdot \nabla_H + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dz} \mathcal{D} \right] \frac{\partial}{\partial z} - \mathcal{D} \Delta_H \right] p = 0 \quad (2.3)$$

où ∇_H et Δ_H désignent respectivement le gradient et le laplacien dans l'espace horizontal (auquel correspondent les variables x et y dans un repère cartésien), \bar{u} correspond ici aux composantes horizontales de l'écoulement de base, et l'opérateur différentiel noté \mathcal{D} désigne :

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \cdot \nabla_H.$$

En supposant que la solution peut se décomposer en ondes planes, on peut exprimer l'équation (2.3) dans l'espace spectral (ω, k) où ω est la pulsation et k est le vecteur d'onde horizontal $(k_x, k_y)^T$. En effet, en considérant l'onde plane $p \propto \psi e^{ik \cdot X - i\omega t}$ (où X est le vecteur position horizontal $(x, y)^T$), les opérateurs différentiels en temps et en espace deviennent de simples opérations algébriques :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &\rightarrow -i\omega \psi \\ \nabla_H \psi &\rightarrow ik \psi \\ \Delta_H \psi &\rightarrow -k^2 \psi \\ \mathcal{D} \psi &\rightarrow -i\omega \psi + ik \cdot \bar{u} \psi. \end{aligned}$$

Ce faisant, nous obtenons l'équation suivante (dite équation de Rayleigh) :

$$\left\{ \bar{\rho} \frac{d}{dz} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} - 2 \frac{d\bar{u}}{dz} \cdot \frac{k}{\omega - k \cdot \bar{u}} \frac{d}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{k \cdot \bar{u}}{\omega} \right)^2 - k^2 \right\} \psi = 0, \quad (2.4)$$

où $c = \sqrt{1/\bar{\rho}\mathcal{M}^2}$ est la vitesse de propagation du son dans le milieu.

Nous pouvons retirer le terme en d/dz dans le cas où le cisaillement vertical $d\bar{u}/dz$ peut être négligé. On obtient alors une première équation d'onde :

$$\left\{ \bar{\rho} \frac{d}{dz} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 - \frac{k \cdot \bar{u}}{\omega} \right)^2 - k^2 \right\} \psi = 0. \quad (2.5)$$

Si l'on considère que l'angle que fait l'écoulement avec la direction de propagation peut être petit, et dans le cas de faibles nombres de Mach, on peut utiliser l'équation suivante :

$$\left\{ \bar{\rho} \frac{d}{dz} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d}{dz} + \frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2} - k^2 \right\} \psi = 0, \quad (2.6)$$

où c_{eff} est la célérité effective du son dans l'atmosphère, c'est à dire $c + \bar{u} \cdot e_r$ si e_r est le vecteur unitaire indiquant la direction de propagation considérée. Enfin, pour se rapprocher de la forme classique d'une équation d'onde, et surtout pour simplifier la façon dont apparaît la dérivée seconde en vue des applications numériques ultérieures, on peut effectuer le changement de variable

$$\psi \mapsto \frac{\psi}{\sqrt{\bar{\rho}}}$$

introduit par [Bergmann 1946]. On retrouve la dérivée seconde classique dans l'équation

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2} - k^2 + H \right\} \psi = 0 \quad (2.7)$$

où le terme H , homogène à une fréquence, s'écrit :

$$H = \frac{1}{2} \frac{\bar{\rho}''}{\bar{\rho}} - \frac{3}{4} \left(\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\rho}} \right)^2.$$

Dans l'essentiel des développements présentés ultérieurement, nous utilisons comme modèle prototype l'équation d'onde simple en célérité effective :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2} - k^2 \right\} \psi = 0 \quad (2.8)$$

pour laquelle le terme H est négligé ($Hc^2/\omega^2 \ll 1$ pour $\omega \geq 0.1 \text{ rad.s}^{-1}$).

Il faut noter que dans les équations présentées ici, la vitesse du son c , l'écoulement moyen \bar{u} et la célérité effective du son c_{eff} dépendent de l'altitude z . La relation de dispersion $\mathcal{D}(\omega, k) = 0$ ne se présente donc pas de façon explicite, comme une relation algébrique, mais est obtenue en résolvant un problème aux valeurs propres, c'est-à-dire associé aux solutions ψ non triviales (non nulles).

Deux approches du problème sont possibles. Si on écrit formellement le modèle de propagation dans l'espace de Fourier (ω, k) :

$$\hat{\mathcal{L}} \left(\frac{d}{dz}, \omega, k \right) \psi = 0.$$

l'approche spatiale consiste à rechercher les paires propres (k_j, ψ_j) en considérant que la pulsation ω est fixée

$$\hat{\mathcal{L}} \left(\frac{d}{dz}, \omega, k_j \right) \psi_j = 0. \quad (2.9)$$

De façon similaire, l'approche temporelle revient à rechercher les paires propres (ω_j, ψ_j) en considérant que k est fixé

$$\hat{\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dz}, \omega_j, k\right) \psi_j = 0. \quad (2.10)$$

On notera la symétrie de ces approches. Dans la suite, c'est l'approche spatiale du problème qui sera adoptée.

2.1.2 Conditions aux limites

Etant donné que les équations de propagation sont exprimées dans l'espace spectral (ω, k) , elles prennent la forme d'une équation différentielle ordinaire sur la variable z , et le domaine considéré s'étend entre le sol $z = 0$ et $z \rightarrow \infty$. Pour fermer le système, il faut se donner des conditions aux limites.

Condition à l'infini

Nous cherchons ici à obtenir un champ de perturbation qui reste borné et donc qui ne soit pas exponentiellement croissant pour les plus hautes altitudes. Si l'on étudie par exemple le comportement à l'infini de l'équation (2.8) et si on considère que $c_{\text{eff}} \rightarrow c_\infty$:

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_\infty^2} - k^2 \right\} \psi = 0.$$

La solution prend alors la forme

$$\psi_\infty \propto e^{\pm z\alpha} \text{ avec } \alpha^2 = k^2 - \omega^2/c_\infty^2. \quad (2.11)$$

L'imposition d'une condition limite va permettre de réduire l'espace des solutions et de passer de 2 dimensions à une dimension. En choisissant par exemple l'exponentielle $e^{-z\alpha}$, notre condition impose que $\Re(\alpha) \geq 0$. Or α est une racine carrée qui est une fonction bivaluée sur \mathbb{C} (a priori, la pulsation et le nombre d'onde peuvent être des nombres complexes) et nécessite donc le choix d'une détermination. La détermination principale $\Re(\alpha) \geq 0$ impose que

$$-\pi \leq \arg\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c_\infty^2}\right) < \pi, \quad (2.12)$$

et, ce faisant, place une coupure associée à la fonction $\arg(k^2 - \omega^2/c_\infty^2)$ dont le point de branchement est $k^2 = \omega^2/c_\infty^2$. La pulsation et le nombre d'onde sont au carré dans l'argument de la racine, et donc la coupure apparaît dédoublée dans le plan complexe des valeurs propres k_j en approche spatiale (ou dans le plan des modes ω_j en approche temporelle) avec comme points de branchement $k_\infty = \pm\omega/c_\infty$ (Figure 2.1).

Plus précisément, en approche spatiale, on recherche les valeurs de k qui rendent l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ non inversible. L'opérateur étant non compact, son spectre est composé

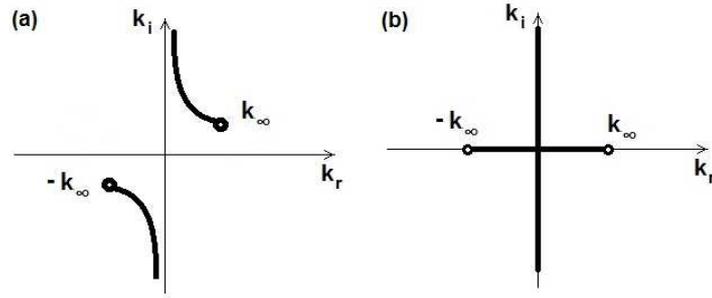


FIGURE 2.1 – Coupures dans le plan complexe k : (a) dans le cas général avec une pulsation ω complexe et (b) dans le cas réel $\Im(\omega) = 0$.

d'un spectre ponctuel (les valeurs propres k_j) et d'un spectre continu $k(s)$ (pour $s \in \mathbb{R}^+$, et $k^2(0) = k_\infty^2$). Les fonctions propres $\psi_j(z)$ associées au spectre ponctuel décroissent exponentiellement pour $z \rightarrow \infty$ tandis que les fonctions $\psi(s, z)$ associées au spectre continu ont un comportement oscillant pour $z \rightarrow \infty$ ($\psi \sim e^{-z\alpha}$ avec $\Re(\alpha) = 0$).

Réflexion au sol

Si on considère que le sol réfléchit parfaitement les ondes acoustiques, il suffit d'imposer une condition de Neumann homogène à $z = 0$

$$\frac{d\psi}{dz}(0) = 0. \quad (2.13)$$

En toute rigueur, on sait que les matériaux absorbent de l'énergie acoustique et donc l'impédance du sol a un effet d'atténuation sur la propagation ([Attenborough 1988], [Daigle 1987]). L'impédance complexe peut être prise en compte en imposant une condition de type Robin à $z = 0$ [Waxler 2002] :

$$\frac{d\psi}{dz}(0) = -\mathcal{C}(\omega)\psi(0) \quad (2.14)$$

où le coefficient complexe $\mathcal{C}(\omega)$ est relié à l'impédance Z de la façon suivante :

$$\mathcal{C}(\omega) = \frac{i\omega\bar{\rho}(0)}{Z(\omega)}. \quad (2.15)$$

Il faut noter que la condition de réflexion totale rend le modèle auto-adjoint, ce qui ne peut plus être le cas avec une impédance complexe au sol (si $\Im(\mathcal{C}) \neq 0$).

2.1.3 Décomposition en modes normaux

Plusieurs techniques peuvent être utilisées pour simuler la propagation des ondes infrasonores.

Il existe tout d'abord la méthode du tracé de rayons qui exploite le formalisme de l'acoustique géométrique. Il s'agit d'une méthode qui repose sur l'hypothèse haute fréquence selon laquelle les dimensions caractéristiques des plus petites structures atmosphériques sont très supérieures à la longueur d'onde. Numériquement, cela consiste à calculer les trajectoires des rayons acoustiques en résolvant l'équation *eikonale* (qui détermine l'angle de réfraction locale d'un rayon), et à calculer le champ acoustique le long des tubes de rayon avec une équation de transport.

La méthode du tracé de rayons ne tient pas compte de la diffraction, et une méthode alternative qui permet d'en tenir compte est celle de l'approximation parabolique. Cela consiste à dégénérer les équations hyperboliques de la mécanique des fluides en équations paraboliques en privilégiant un sens de propagation à variation rapide. La solution prend alors la forme d'une enveloppe à variation lente modulant une onde plane se propageant dans le sens privilégié. On peut résoudre ces équations paraboliques dans le domaine temporel ou fréquentiel.

Enfin, il y a la méthode des modes normaux, qui est celle que nous développons dans la suite, et qui consiste à décomposer l'onde sur une base de modes verticaux. Ces modes verticaux sont les solutions non nulles d'équations aux dérivées ordinaires en altitude et se trouvent numériquement par la recherche du spectre d'une matrice.

Nous venons dans la section précédente de décrire les équations homogènes de la propagation, c'est-à-dire sans second membre, sans terme source. Or nous souhaitons ici pouvoir étudier la propagation acoustique provoquée par une perturbation ponctuelle du champ moyen de pression \bar{p} (simulant une explosion par exemple). Nous introduisons donc un forçage au second membre et décrivons dans cette section comment la solution peut s'exprimer sous la forme d'une somme discrète indexée sur les valeurs propres k_j du problème (2.9), c'est à dire sur les modes normaux [Gossard 1975], [Jensen 1994], [Pekeris 1948]. Dans la suite, nous exprimons le problème de propagation acoustique avec un sol plat et parfaitement réfléchissant dans une coupe 2D verticale avec un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) (la source se situe à $r = 0$ et $z=0$, et la direction de propagation θ est fixée). Sous ces conditions, le nombre d'onde k sera un scalaire issu de la projection du vecteur d'onde sur la direction horizontale donnée par l'azimut θ .

Solution de Green

Ecrivons tout d'abord le problème avec forçage ponctuel de façon formelle :

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dz}, \frac{d}{dt}, \nabla_H \right) p = \delta(z - z_s) \otimes \delta(r) \otimes s(t). \quad (2.16)$$

Dans le second membre, δ est la distribution de Dirac, et le forçage est donc situé à l'altitude $z = z_s$ et à $r = 0$.

Nous allons résoudre ce problème en étudiant auparavant le cas où la source est complètement impulsionnelle, c'est-à-dire avec $s(t) = \delta(t)$, suivant les développements que l'on trouve dans [Huerre 1985], [Millet 2011] :

$$\mathcal{L} \left(\frac{d}{dz}, \frac{d}{dt}, \nabla_H \right) g = \delta(z - z_s) \otimes \delta(r) \otimes \delta(t). \quad (2.17)$$

La solution de ce dernier problème est la réponse impulsionnelle du système, ou fonction de Green $g(z, t, r)$ ([Bender 1999]). Le retour à la solution de (2.16) s'opère alors avec un produit de convolution en temps. Suivant la même méthode introduite dans la section précédente, nous exprimons le problème dans l'espace de Fourier (ω, k) et ce dernier devient alors une équation différentielle ordinaire :

$$\hat{\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dz}, \omega, k\right)\psi = \delta(z - z_s), \quad (2.18)$$

soit le problème (2.9), mais avec un second membre qui introduit une discontinuité de la dérivée de ψ à $z = z_s$ (les transformées de Fourier des distributions de Dirac en r et en t donnent 1 et donc n'apparaissent plus).

Dans ce cadre, la fonction de Green $g(z, t, r)$ sera le résultat de la transformée inverse de Fourier en temps et en espace horizontalement de $\psi(z, \omega, k)$ définie de la façon suivante :

$$g(z, t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \left(\int_{L_k} \psi(z, \omega, k) K(k, r) dk \right) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (2.19)$$

où le noyau de la transformée de Fourier inverse en coordonnées cylindriques est

$$K(k, r) = \frac{kH_0^{(1)}(kr)}{4\pi},$$

où $H_0^{(1)}$ est la fonction de Hankel de première espèce et d'ordre zéro. Les chemins d'intégration L_ω et L_k respectivement en pulsation et en nombre d'onde sont pour l'instant confondus avec l'axe réel \mathbb{R} .

Il est important de noter ici que l'équation (2.18) est exprimée dans l'espace non plus des fonctions mais dans l'espace des distributions. Ecrivons les formules de saut des dérivées première et seconde de distribution :

$$\frac{d\psi}{dz} = \left\{ \frac{d\psi}{dz} \right\} + \sigma_0(z_s)\delta(z - z_s) \quad (2.20)$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = \left\{ \frac{d^2\psi}{dz^2} \right\} + \sigma_1(z_s)\delta(z - z_s) + \sigma_0(z_s)\delta'(z - z_s). \quad (2.21)$$

Dans les expressions (2.20) et (2.21), les accolades indiquent que $\{f\}$ est la distribution régulière associée à la fonction définie presque partout f , δ' est la dérivée de la distribution de Dirac, et $\sigma_0(z_s)$ et $\sigma_1(z_s)$ sont respectivement les sauts de ψ et de sa dérivée à $z = z_s$:

$$\begin{aligned} \sigma_0(z_s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi]_{z_s - \varepsilon}^{z_s + \varepsilon} \\ \sigma_1(z_s) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi']_{z_s - \varepsilon}^{z_s + \varepsilon} \end{aligned}$$

Si l'on introduit ces relations de saut dans l'équation (2.18), dans le cas où l'opérateur ne contient que la dérivée seconde en z (c'est le cas de l'équation d'onde (2.8)), on obtient l'expression suivante :

$$\left\{ \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dz}, \omega, k\right)\psi \right\} + \sigma_1(z_s)\delta(z - z_s) + \sigma_0(z_s)\delta'(z - z_s) = \delta(z - z_s).$$

Compte tenu du fait que 1 , δ et δ' sont des distributions linéairement indépendantes, on peut déduire de cette expression un système d'équations dans l'espace des fonctions :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dz}, \omega, k\right) \psi = 0 & \text{si } z \neq z_s \\ \sigma_0(z_s) = 0 \\ \sigma_1(z_s) = 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

Nous pouvons alors définir les solutions au sens des fonctions de la première équation de (2.22) de part et d'autre de la discontinuité z_s . Appelons ψ_- et ψ_+ les solutions respectives des problèmes avec conditions aux limites suivants :

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}\psi_- = 0 & \text{si } z < z_s \\ \psi'_- = 0 & \text{pour } z = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}\psi_+ = 0 & \text{si } z > z_s \\ \psi_+ \text{ évanescent} & \text{pour } z \rightarrow \infty \end{cases}$$

Il nous faut alors trouver les constantes d'intégration A et B qui rendent $A\psi_- + B\psi_+$ solution du problème. Les relations de saut présents dans (2.22) permettent d'écrire un système linéaire de deux équations dont les constantes d'intégration sont les inconnues :

$$\begin{cases} B\psi_+(z_s) - A\psi_-(z_s) = 0 \\ B\psi'_+(z_s) - A\psi'_-(z_s) = 1 \end{cases} \quad (2.23)$$

Dans (2.23), nous écrivons par abus d'écriture $\psi_-(z_s)$ et $\psi_+(z_s)$, mais désignons en réalité respectivement $\lim_{z \rightarrow z_s^-} \psi_-(z)$ et $\lim_{z \rightarrow z_s^+} \psi_+$ (de même pour $\psi'_-(z_s)$ et $\psi'_+(z_s)$). Le déterminant de (2.23) est un wronskien et s'écrit (en notant cette fois toutes les dépendances) :

$$W(z_s, \omega, k) = \psi_+(z_s, \omega, k)\psi'_-(z_s, \omega, k) - \psi_-(z_s, \omega, k)\psi'_+(z_s, \omega, k) \quad (2.24)$$

et si ce wronskien est non-nul, les constantes A et B se trouvent directement :

$$\begin{cases} A = \psi_+(z_s, \omega, k)/W(z_s, \omega, k) \\ B = \psi_-(z_s, \omega, k)/W(z_s, \omega, k) \end{cases}$$

et donc la solution générale peut s'écrire :

$$\psi(z; \omega, k) = \begin{cases} \psi_+(z_s, \omega, k)\psi_-(z, \omega, k)/W(z_s, \omega, k) & \text{pour } z < z_s \\ \psi_-(z_s, \omega, k)\psi_+(z, \omega, k)/W(z_s, \omega, k) & \text{pour } z > z_s \end{cases} \quad (2.25)$$

Finalement, en réintroduisant cette expression dans les intégrales de Fourier (2.19), nous obtenons une expression générale pour la réponse à un forçage impulsionnel situé à l'altitude $z = z_s$:

$$g(z, t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \frac{\psi_+(z_s, \omega, k)\psi_-(z, \omega, k)kH_0^{(1)}(kr)}{W(z_s, \omega, k)} dk \right) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.26)$$

si $z < z_s$, et

$$g(z, t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{L_\omega} \left(\frac{1}{4\pi} \int_{L_k} \frac{\psi_-(z_s, \omega, k) \psi_+(z, \omega, k) k H_0^{(1)}(kr)}{W(z_s, \omega, k)} dk \right) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.27)$$

si $z > z_s$.

Cette expression pour la solution est fastidieuse à évaluer en pratique et nous allons voir que l'intégrale en k peut se ramener en une somme discrète en utilisant le théorème des résidus de Cauchy.

Théorème des résidus de Cauchy

Remarquons tout d'abord le statut particulier du wronskien $W(z_s, \omega, k)$ défini par l'expression (2.24). Son annulation, pour un ω et un k donnés, signifie que les solutions ψ_- et ψ_+ ne sont plus indépendantes et qu'il existe donc un scalaire a tel que $\psi_-(z_s, \omega, k) = a \psi_+(z_s, \omega, k)$ et $\psi'_-(z_s, \omega, k) = a \psi'_+(z_s, \omega, k)$. Dans ce cas précis, la fonction ψ^* formée de la façon suivante :

$$\psi^*(z, \omega, k) = \begin{cases} \psi_-(z, \omega, k) & \text{si } z \leq z_s \\ a \psi_+(z, \omega, k) & \text{si } z > z_s \end{cases}$$

est une fonction de z continue sur $[0, \infty[$, satisfaisant $\hat{\mathcal{L}}\psi^* = 0$ sur tout ce domaine, ainsi que les conditions aux limites en $z = 0$ et $z \rightarrow \infty$. On peut en conclure que la relation de dispersion est vérifiée : $\mathcal{D}(\omega, k) = 0$. Ainsi, le wronskien peut être directement identifié à la relation de dispersion de l'opérateur de propagation acoustique : $W(z_s, \omega, k) = \mathcal{D}(\omega, k)$. Pour un ω fixé, les valeurs de k qui l'annulent sont donc des valeurs propres pour le problème en approche spatiale (2.9), et les $\psi^*(z, \omega, k)$ sont les fonctions propres correspondantes.

Par ailleurs, le wronskien apparaissant au dénominateur dans les intégrales de Fourier (2.26) et (2.27), les valeurs de k qui annulent le wronskien pour un ω donné sont non seulement des valeurs propres mais aussi des pôles pour l'intégrale de Fourier en espace. Le théorème des résidus de Cauchy va alors nous permettre de simplifier l'intégrale spatiale en utilisant les paires propres (k_j, ψ_j) de (2.9).

En effet, si γ est un lacet fermé dans un ouvert de \mathbb{C} , et si une fonction $f(z)$ est définie et holomorphe sur cet ouvert sauf sur un ensemble de points singuliers, distincts et isolés (z_1, z_2, \dots, z_n) , entourés par le lacet γ , alors :

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \mathcal{R}(f, z_j) \text{Ind}_{\gamma}(z_j)$$

où $\mathcal{R}(f, z_j)$ est le résidu de f en z_j , et $\text{Ind}_{\gamma}(z_j)$ est l'indice du lacet γ par rapport à z_j .

Dans notre cas, l'intégrale porte sur $L_k = \mathbb{R}$ et il nous faut alors le fermer pour former un lacet γ dans le plan complexe. A priori 2 solutions s'offrent à nous : soit nous fermons le contour d'intégration dans le demi-plan inférieur ($k_i < 0$), soit nous le fermons dans le demi-plan supérieur ($k_i > 0$). Ce choix est en réalité déterminé par

le fait que nous cherchons une solution qui ne soit pas exponentiellement croissante lorsque l'on s'éloigne de la source. En effet, asymptotiquement, la fonction de Hankel présente un comportement en exponentielle complexe :

$$H_0^{(1)}(kr) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}}$$

et donc les contributions du demi-plan supérieur ($k_i > 0$) entraînent une décroissance exponentielle vers les r croissants, tandis que les contributions du demi-plan inférieur entraînent le comportement inverse. Nous formons donc le lacet γ_R dans le plan complexe, pour $R \in \mathbb{R}^+$, composé du segment de l'axe réel $\gamma_{1,R} = [-R, R]$, et du demi-cercle $\gamma_{2,R} = \{z \in \mathbb{C} | \Im(z) > 0, |z| = R\}$, le tout orienté dans le sens trigonométrique. Par ailleurs, notons que la solution $\psi_+(z, \omega, k)$, présente au numérateur dans (2.27), possède le comportement exponentiel décrit par (2.11) pour $z \rightarrow \infty$. La condition d'onde évanescence implique donc la présence d'une coupure de racine (2.12) dans le plan (k_r, k_i) (figure 2.1) et notre lacet ne peut pas traverser cette coupure sinon la quantité intégrée n'est plus holomorphe dans le domaine délimité. Il faut donc ajouter à γ_R le parcours $\gamma_{3,R}$ qui permet de contourner la coupure dans le plan complexe (figure 2.2). Ainsi, formons l'intégrale $I(R)$ sur ce lacet :

$$I(R) = \oint_{\gamma_R} \frac{q(z_s, z, \omega, k, r)}{W(z_s, \omega, k)} dk = I_1(R) + I_2(R) + I_3(R)$$

où q est le numérateur de la quantité intégrée sur L_k définie dans (2.26) et (2.27). I_1 , I_2 et I_3 sont respectivement les intégrales sur les contours $\gamma_{1,R}$, $\gamma_{2,R}$ et $\gamma_{3,R}$. Le théorème des résidus implique que l'on peut décomposer cette intégrale sur le spectre discret ([Bender 1999]) :

$$I(R) = 2\pi i \sum_{j=1}^N \frac{q(z_s, z, \omega, k_j, r)}{\partial_k W(z_s, \omega, k_j)} \quad (2.28)$$

où les k_j sont les valeurs propres discrètes du problème (2.9), et N est la taille du spectre discret. Le numérateur q étant évalué pour une valeur de k qui satisfait à la relation de dispersion, il peut s'écrire $q(z_s, z, \omega, k_j, r) = 1/(4\pi) \psi_j(z_s, \omega) \psi_j(z, \omega) k_j H_0^{(1)}(k_j r)$ où ψ_j est la fonction propre associée à k_j .

Si l'on fait tendre maintenant le paramètre réel R vers l'infini, l'intégrale $I_1(R)$ tend vers l'intégrale recherchée (c'est-à-dire sur le contour $L_k = \mathbb{R}$) et l'intégrale $I_2(R)$ tend vers 0 par le lemme de Jordan (du fait du comportement asymptotique de la fonction de Hankel). Reste l'intégrale longeant de part et d'autre la coupure que l'on appellera I_c . On obtient finalement, pour l'intégrale de Fourier en k :

$$\int_{L_k} \psi(z, \omega, k) K(k, r) dk = \frac{i}{2} \sum_{j=1}^N \frac{\psi_j(z_s, \omega) \psi_j(z, \omega) k_j H_0^{(1)}(k_j r)}{\partial_k W(z_s, \omega, k_j)} - I_c. \quad (2.29)$$

Quand la fréquence ω augmente, des pôles k_j passent du second feuillet de Riemann ($\Re(\sqrt{z}) < 0$) au premier ($\Re(\sqrt{z}) > 0$) à travers la coupure¹. Cela vient

1. Dans le cas de l'équation d'onde, les pôles arrivent dans le premier feuillet de Riemann en passant par le point de branchement k_∞

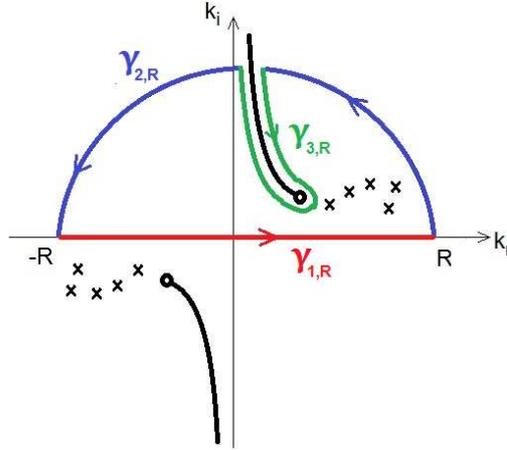


FIGURE 2.2 – Contour d’intégration dans le plan complexe (k_r, k_i) . Le lacet γ_R , orienté dans le sens trigonométrique, est composé des chemins $\gamma_{1,R}$, en rouge, $\gamma_{2,R}$, en bleu et $\gamma_{3,R}$, en vert. Les lignes épaisses noires représentent les coupures liées à la condition limite pour $z \rightarrow \infty$ (figure 2.1), et les croix représentent les points d’annulation de la relation de dispersion $W(z_s, \omega, k)$, c’est-à-dire les valeurs propres du problème (2.9).

ajouter des résidus supplémentaires dans la somme (2.28) et donc des discontinuités en ω sont introduites. En réalité, c’est l’intégrale I_c le long de la coupure qui vient corriger cet effet.

Nous savons que cette contribution de coupure permet de décrire le régime transitoire en instabilité hydrodynamique ([Pedlosky 1964], [Farrell 1982], [Farrell 1984], [Huerre 1990]) et plusieurs démarches existent pour l’évaluer. Une évaluation numérique directe de cette intégrale est possible mais extrêmement coûteuse [Waxler 2002] (il faut calculer numériquement les solutions ψ_- et ψ_+ pour chaque point k_s du contour $\gamma_{3,R}$). Une autre solution consiste à déformer le contour $\gamma_{3,R}$ pour qu’il entoure les pôles dans le second feuillet de Riemann, et cela nécessite une déformation du contour en fréquence L_ω dans le plan complexe. On obtient alors une somme infinie de résidus où les termes associés aux pôles du second feuillet sont issus d’un prolongement analytique [Haddon 1984], [Haddon 1986]. Enfin, une approche efficace consiste à déduire le comportement asymptotique du spectre continu à partir des singularités de sa représentation intégrale [Stickler 1980].

Dans le cas de la propagation acoustique, cette contribution est dominante au voisinage des caustiques dans le champ d’onde [Le Dizès 2007]. Néanmoins, Roger Waxler a montré que loin de la source, au sol, et en dehors des gammes de fréquences ω pour lesquelles un mode k_j se trouve dans le voisinage du point de branchement $|k_j - k_\infty| \ll 1$, l’atténuation n’est pas significativement affectée par cette contribution [Waxler 2003].

Dans la suite, nous supposons que seuls les modes discrets suffisent pour évaluer

l'intégrale de Fourier en L_k . En pratique, on prolonge la célérité effective avec un comportement croissant pour $z \rightarrow \infty$ de sorte que le point de branchement puisse être déplacé autant que nécessaire pour garder les pôles k_j dans le premier feuillet lorsque ω varie.

Il reste une ultime difficulté dans cette approche par le théorème des résidus : la présence de la dérivée de la relation de dispersion au dénominateur des résidus : $\partial_k W(z_s, \omega, k_j)$, alors que la relation de dispersion n'est pas explicite en général et dépend des profils atmosphériques et des conditions aux limites. Il existe cependant une simplification que l'on peut effectuer dans le cas de l'équation d'onde (2.8) et qui rend le dénominateur complètement explicite. Remarquons d'abord que, pour un ω fixé, la relation de dispersion $W(z, k)$ ne dépend pas de l'altitude de la source z si $\psi_-(z, k)$ et $\psi_+(z, k)$ sont solutions de l'équation d'onde (2.8). En effet, le calcul de sa dérivée donne dans ce cas

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial z}(z, k) &= \psi_+(z, k) \frac{\partial^2 \psi_-}{\partial z^2}(z, k) - \psi_-(z, k) \frac{\partial^2 \psi_+}{\partial z^2}(z, k) = 0 \\ &= \left[k^2 - \frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2(z)} \right] [\psi_+(z, k) \psi_-(z, k) - \psi_-(z, k) \psi_+(z, k)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Le taux d'accroissement

$$T(z, k) = \frac{W(z, k) - W(z, k_j)}{k - k_j} = \frac{W(z, k)}{k - k_j}$$

dont on cherche la limite lorsque $k \rightarrow k_j$, peut donc s'écrire :

$$T(k) = \frac{W(0, k)}{k - k_j} = \frac{1}{k - k_j} \left(\psi_+(0, k) \frac{\partial \psi_-}{\partial z}(0, k) - \psi_-(0, k) \frac{\partial \psi_+}{\partial z}(0, k) \right).$$

En multipliant cette relation par le rapport $\psi_j(0)/\psi_-(0, k)$, on obtient :

$$T(k) \frac{\psi_j(0)}{\psi_-(0, k)} = \frac{1}{k - k_j} \left(\psi_+(0, k) \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(0) - \psi_j(0) \frac{\partial \psi_+}{\partial z}(0, k) \right), \quad (2.30)$$

où on a pris en compte le fait que ψ_j et ψ_- satisfont la même condition limite au sol, et donc que $\partial_z \psi_j(0)/\psi_j(0) = \partial_z \psi_-(0, k)/\psi_-(0, k)$. Ensuite, toujours en prenant en compte le fait que ces fonctions sont solutions de l'équation d'onde, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\psi_+(z, k) \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(z) - \psi_j(z) \frac{\partial \psi_+}{\partial z}(z, k) \right) = (k_j^2 - k^2) \psi_+(z, k) \psi_j(z).$$

et si l'on intègre cette relation sur tout le domaine vertical, on obtient la relation suivante :

$$\psi_+(0, k) \frac{\partial \psi_j}{\partial z}(0) - \psi_j(0) \frac{\partial \psi_+}{\partial z}(0, k) = (k^2 - k_j^2) \int_0^\infty \psi_+(z, k) \psi_j(z) dz. \quad (2.31)$$

où il a été pris en compte la condition limite pour $z \rightarrow \infty$. Enfin, en combinant (2.30) et (2.31), on peut exprimer le taux d'accroissement de la façon suivante :

$$T(k) = \frac{\psi_-(0, k)}{\psi_j(0)} (k + k_j) \int_0^\infty \psi_+(z, k) \psi_j(z) dz \quad (2.32)$$

et donc la limite pour $k \rightarrow k_j$ donne directement une expression pour la dérivée de W en k_j :

$$\partial_k W(k_j) = 2k_j \int_0^\infty \psi_j^2(z) dz. \quad (2.33)$$

Dans la suite, nous nous référerons toujours aux fonction propres ψ_j en considérant qu'elles sont normées² de sorte que ([Waxler 2002]) :

$$\int_0^\infty \psi_j^2(z) dz = 1 \quad (2.34)$$

et alors la somme de résidus (2.29) peut s'écrire pour l'équation d'onde :

$$\hat{g}(z, \omega, r) = \int_{L_k} \psi(z, \omega, k) K(k, r) dk = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \psi_j(z_s, \omega) \psi_j(z, \omega) H_0^{(1)}(k_j r). \quad (2.35)$$

Ainsi, pour tout ω du contour L_ω , il nous suffit de rechercher le spectre discret $(k_j(\omega), \psi_j(\omega, z))$ du problème (2.8) en prenant garde à ce que les fonctions propres soient normées pour satisfaire (2.34), et la formule de sommation (2.35) nous fournit alors $\hat{g}(z, \omega, r)$, la transformée de Fourier temporelle de la réponse impulsionnelle $g(z, t, r)$.

2.2 Méthode numérique

Nous venons dans la section précédente de décrire la méthode de décomposition en modes normaux pour une approche spatiale. La mise en oeuvre numérique va consister à résoudre le problème aux valeurs propres (2.9) discrétisé pour différentes valeurs ω_n (discrétisation régulière du contour L_ω), puis à calculer la somme de résidus sur ce spectre (2.35) pour obtenir le spectre de Fourier $\hat{g}(z, \omega_n, r)$. Enfin, le champ de perturbation de pression s'obtient par produit de convolution entre la réponse impulsionnelle g et le terme source s , soit en effectuant une transformée de Fourier inverse rapide (algorithme FFT) du produit $\hat{g}(z, \omega_n, r) \hat{s}(\omega_n)$. Mais certains cas idéalisés peuvent aussi être traités analytiquement. Un exemple est présenté en annexe A.

Nous présentons dans cette section la méthode de discrétisation utilisée (approche pseudo-spectrale), ainsi que certaines méthodes numériques pour la recherche des valeurs propres, pour obtenir finalement le champ de surpression. Nous aborderons en fin de chapitre des méthodes qui permettent de prendre en compte une faible variabilité horizontale du milieu de propagation.

2.2.1 Collocation spectrale

Approche pseudo-spectrale et polynômes de Tchebychev

Si l'on approche les équations de propagation présentées dans la section précédente en recherchant des solutions sous forme de modes normaux $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{X} - \omega t)}$, ces

2. Il faut noter qu'il ne s'agit pas là de la norme $L^2(\mathbb{C})$ usuelle.

équations aux dérivées partielles deviennent alors de simples équations différentielles à dérivées ordinaires 1D selon la variable d'altitude z . Il faut donc trouver un moyen d'évaluer les dérivées selon z . L'approche pseudo-spectrale consiste à approcher une fonction $f(z)$ en la décomposant sur une base de fonctions connues ([Canuto 2006]) :

$$f(z) \approx \sum_j a_j \Phi_j(z), \quad (2.36)$$

où les Φ_j peuvent être par exemple des fonctions trigonométriques (Fourier), des polynômes de Legendre, d'Hermite ou de Tchebychev. Dans la suite, nous utiliserons une base de polynômes de Tchebychev. Cette décomposition effectuée, la dérivation de f est facilitée par la connaissance des fonctions de base. En effet, la dérivée de ces fonctions de base se projette sur cette même base :

$$\frac{d\Phi_k}{dz}(z) = \sum_j q_{jk} \Phi_j(z), \quad (2.37)$$

et la dérivée de f s'approche directement par :

$$\frac{df}{dz}(z) \approx \sum_j b_j \Phi_j(z),$$

avec

$$b_j = \sum_k a_k q_{jk}.$$

Remarquons ici que l'évaluation des dérivées se fait de façon globale (tous les points du domaine sont mis à contribution), ce qui évite l'apparition d'instabilités numériques, contrairement aux différences finies où l'évaluation est locale (seul le voisinage du point où la dérivée est évaluée est utilisé). En outre, quand les différences finies convergent avec une loi en $O(N^{-p})$ (si N est le nombre de points de discrétisation), la méthode pseudo-spectrale présente une convergence dite spectrale, c'est-à-dire que l'erreur décroît exponentiellement avec N .

Nous utilisons ensuite la méthode de collocation spectrale qui est une approche qui permet de rester constamment dans l'espace physique, c'est à dire qui permet de calculer df/dz directement à partir de f par un simple produit matrice-vecteur, sans passer explicitement par l'espace spectral des Φ_j . En effet, avec une discrétisation $\{s_j\}$ adaptée à l'espace spectral choisi (avec un nombre de points N égal à la taille de la base), on peut construire les matrices \mathbf{T} et \mathbf{Q} (formée des q_{jk} définis dans (2.37)) qui permettent respectivement la projection sur la base et la dérivation dans l'espace spectral :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_N) \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix}.$$

On peut alors calculer la matrice de dérivation $\mathbf{D} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{T}$ de sorte que :

$$\begin{bmatrix} f'(s_1) \\ f'(s_2) \\ \vdots \\ f'(s_N) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \begin{bmatrix} f(s_1) \\ f(s_2) \\ \vdots \\ f(s_N) \end{bmatrix}.$$

S'agissant d'une base de polynômes de Tchebychev, une discrétisation adaptée pour la collocation spectrale se trouve être la grille de Gauss-Lobatto-Tchebychev [Camuto 2006] :

$$s_j = \cos \frac{(j-1)\pi}{2N+1}, \quad j = 1, \dots, 2N+2. \quad (2.38)$$

Cette grille de points permet de discrétiser le domaine $[-1, 1]$ et la matrice de dérivation \mathbf{D} adaptée à cette discrétisation se définit alors de la façon suivante :

$$D_{jk} = \begin{cases} \frac{c_j(-1)^{j+k}}{c_k(s_j-s_k)} & j \neq k \\ -\frac{s_j}{2(1-s_j^2)} & j = k, j \neq 1, j \neq 2N+2 \\ \frac{2(2N+2)^2+1}{6} & j = k = 1 \text{ ou } j = k = 2N+2 \end{cases} \quad (2.39)$$

avec $c_0 = c_{2N+2} = 2$ et $c_k = 1$.

Si l'on note $f_j = f(s_j)$ et $f'_j = df/dz(s_j)$, l'opération de dérivation devient alors

$$f'_j = D_{jk}f_k, \quad (2.40)$$

et les dérivations d'ordre supérieur à 1 sont naturellement issues de cette même matrice :

$$f_j^{(n)} = D_{jk}^{(n)}f_k, \text{ avec } \mathbf{D}^{(n)} = \mathbf{D}^n. \quad (2.41)$$

S'agissant de l'étude de la propagation dans l'atmosphère, le domaine vertical étudié est $[0, z_\infty]$ où z_∞ dénote l'altitude maximum pour l'étude numérique. Il faut donc transformer la distribution de points de Gauss-Lobatto-Tchebychev qui ne décrit que l'intervalle $[-1, 1]$ pour couvrir ce domaine :

$$z_j = \frac{1-s_j}{2z_\infty}. \quad (2.42)$$

Cette transformation affine nécessite de modifier la matrice de dérivation en la multipliant par la matrice jacobienne \mathbf{J} diagonale correspondant au changement de variable $s \rightarrow z$:

$$\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{J}\mathbf{D} \text{ avec } \mathbf{J} = -\frac{2}{z_\infty}\mathbf{I}_N. \quad (2.43)$$

Discrétisation de l'opérateur de propagation acoustique

Disposant ainsi de la discrétisation de l'opérateur de dérivation, nous pouvons construire la matrice $\mathbf{M}(\omega, k)$ correspondant au modèle de propagation. Si, de façon générale, l'opérateur s'écrit de la façon suivante

$$\hat{\mathcal{L}}\left(\frac{d}{dz}, \omega, k\right) = \frac{d^2}{dz^2} + a(z, \omega, k)\frac{d}{dz} + b(z, \omega, k),$$

alors l'opérateur discrétisé se construit directement :

$$\mathbf{M} = \bar{\mathbf{D}}^2 + \mathbf{A}\bar{\mathbf{D}} + \mathbf{B} \quad (2.44)$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des matrices diagonales avec respectivement $a(z_j, \omega, k)$ et $b(z_j, \omega, k)$ sur leurs diagonales. Dans le cas de l'équation d'onde simple, nous avons $a(z, \omega, k) = 0$ et $b(z, \omega, k) = \omega^2/c_{\text{eff}}^2(z) - k^2$, et l'opérateur discrétisé s'écrit alors simplement

$$\mathbf{M} = \bar{\mathbf{D}}^2 + \text{diag}\left(\frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2(z_j)} - k^2\right).$$

Afin d'intégrer la condition limite au sol à la matrice, il suffit de remplacer la première ligne de la matrice par $d_0 + \mathcal{C}(\omega)$, où d_0 est la première ligne de $\bar{\mathbf{D}}$, dans le cas de la prise en compte de l'impédance complexe du sol (2.14), ou tout simplement par d_0 si l'on souhaite une réflexion totale du sol (2.13). De la même façon, si on souhaite imposer une condition de Dirichlet homogène à $z = z_\infty$ ($\psi(z_\infty) = 0$), on remplacera la dernière ligne de la matrice par $[0, 0, \dots, 0, 1]$, ou bien par d_N , la dernière ligne de $\bar{\mathbf{D}}$, si on veut une condition de Neumann homogène ($\psi'(z_\infty) = 0$).

Approche multi-domaine

Une difficulté associée à la collocation spectrale avec les polynômes de Tchebychev est que la grille de points de Gauss-Lobatto (2.38) présente une densité de points non-uniforme. La résolution sera plus forte aux bords du domaine et plus lâche au centre. Or les profils atmosphériques peuvent présenter des petites structures spatiales situées à des altitudes intermédiaires qui sont déterminantes pour la propagation, autour de la stratopause notamment. On comprend que, sauf à augmenter exagérément le nombre de points de collocation afin d'obtenir la résolution souhaitée au centre du domaine, cette approche peut facilement présenter une convergence trop faible.

Un moyen de pallier cette difficulté est d'adopter une approche multi-domaines pour la construction des matrices de dérivation ([Malik 1990]). En effet, si l'on accole deux grilles de points de collocation, on obtient une forte densité de points à la jonction entre les deux domaines. Ainsi, si l'on choisit différentes altitudes d'intérêt z_1, z_2, \dots, z_P (avec $z_1 = 0$ et $z_P = z_\infty$), c'est à dire autour desquelles la résolution est primordiale pour converger (lieu des fortes variation de gradient de température, typiquement), on peut construire les matrices de dérivation $\bar{\mathbf{D}}_1, \bar{\mathbf{D}}_2, \dots, \bar{\mathbf{D}}_{P-1}$, où chaque $\bar{\mathbf{D}}_k$ correspond à une distribution de points de collocation spectrale entre z_k

et z_{k+1} , que l'on notera $(\tilde{z}_j^{(k)})$ avec $\tilde{z}_0^{(k)} = z_k$ et $\tilde{z}_{N_k}^{(k)} = z_{k+1}$, si $N_k + 1$ est le nombre total de points de discrétisation choisis entre z_k et z_{k+1} . L'opérateur de dérivation total devient alors une matrice diagonale par blocs contenant les $\bar{\mathbf{D}}_k$, matrices carrées de taille $(N_k + 1 \times N_k + 1)$. Par extension, la matrice \mathbf{M} devient elle aussi diagonale par bloc et correspond à l'expression de l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}$ dans les différents domaines $[z_k, z_{k+1}]$. Pour rechercher des solutions dans le domaine complet $[0, z_\infty] = [z_1, z_P]$, il faut donc pouvoir imposer une condition de continuité aux frontières entre les différents sous-domaines.

Remarquons d'abord que la distribution totale de points avec cette approche prend la forme $(\tilde{z}_0^{(1)}, \tilde{z}_1^{(1)}, \dots, \tilde{z}_{N_{k-1}}^{(k)}, \tilde{z}_{N_k}^{(k)}, \tilde{z}_0^{(k+1)}, \tilde{z}_1^{(k+1)}, \dots)$, et que chaque altitude frontière z_{k+1} est alors représentée 2 fois, c'est-à-dire une fois par domaine : $\tilde{z}_{N_k}^{(k)}$ dans le domaine $[z_k, z_{k+1}]$ et $\tilde{z}_0^{(k+1)}$ dans le domaine $[z_{k+1}, z_{k+2}]$. Afin d'assurer une continuité de type \mathcal{C}^1 à cette frontière, il suffit de remplacer la ligne de \mathbf{M} correspondant au point de collocation $\tilde{z}_{N_k}^{(k)}$ par $[0, \dots, 0, -1, 1, 0, \dots, 0]$ (les termes non-nuls de la ligne correspondent aux points $\tilde{z}_{N_k}^{(k)}$ et $\tilde{z}_0^{(k+1)}$), et de remplacer la ligne de \mathbf{M} correspondant au point $\tilde{z}_0^{(k+1)}$ par $[0, \dots, 0, -d_{N_k}^{(k)}, d_0^{(k+1)}, 0, \dots, 0]$ où $d_{N_k}^{(k)}$ est la dernière ligne de $\bar{\mathbf{D}}_k$ et $d_0^{(k+1)}$ est la première ligne de $\bar{\mathbf{D}}_{k+1}$. Ce faisant, on assure une continuité de l'opérateur à la frontière z_{k+1} : si le vecteur X correspond à la solution ψ évaluée sur la distribution de points multi-domaine, alors

$$\mathbf{M}X = 0 \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathcal{L}}\psi(\tilde{z}_j^{(q)}) = 0 & \forall \tilde{z}_j^{(q)} \in]z_k, z_{k+1}[\cup]z_{k+1}, z_{k+2}[\\ \psi(\tilde{z}_{N_k}^{(k)}) = \psi(\tilde{z}_0^{(k+1)}) \\ \psi'(\tilde{z}_{N_k}^{(k)}) = \psi'(\tilde{z}_0^{(k+1)}) \end{cases}$$

Des arrangements similaires peuvent être opérés pour garantir une continuité \mathcal{C}^2 aux frontières inter-domaines (de même que pour les continuités \mathcal{C}^n , $n > 2$). Les détails techniques peuvent se trouver dans [Malik 1990]. Cependant, à taille de matrice fixée, plus l'on modifie de lignes (pour les continuités \mathcal{C}^2 , \mathcal{C}^3 , etc), plus on altère le problème que l'on résoud. Dans notre cas, assurer la continuité \mathcal{C}^1 aux frontières est suffisant pour trouver numériquement les bonnes fonctions propres et c'est donc cette méthode que nous adoptons.

2.2.2 Résolution du problème aux valeurs propres

L'objectif étant, comme cela a été dit, de rechercher les paires propres (k_j, ψ_j) de (2.9) en approche spatiale, il nous faut choisir et mettre en oeuvre un algorithme de résolution de problèmes aux valeurs propres. Mais avant tout, définissons exactement quelles sont les matrices concernées.

Formulation du problème

Nous venons d'introduire une méthode pseudospectrale permettant de discrétiser l'opérateur de propagation pour un ω et un k donnés : $\hat{\mathcal{L}}(\omega, k) \rightarrow \mathbf{M}(\omega, k)$. Afin d'en

tirer la formulation classique d'un problème aux valeurs propres, faisons dans un premier temps l'hypothèse que la valeur propre k apparaît uniquement au premier ordre dans l'opérateur. Il en résulte que l'on peut écrire :

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{P} + k\mathbf{Q}.$$

et donc exprimer le problème aux valeurs propres généralisé suivant :

$$\mathbf{A}X = k\mathbf{B}X$$

avec $\mathbf{A} = \mathbf{P}$ et $\mathbf{B} = -\mathbf{Q}$. Si l'on examine le cas de l'équation d'onde simple (2.8), on remarque que la valeur propre k n'y est présente qu'à l'ordre 2. Dans ce cas, le raisonnement précédent reste valable et le problème numérique à résoudre devient :

$$\mathbf{A}X = k^2\mathbf{B}X \quad (2.45)$$

où \mathbf{B} est la matrice identité avec des zéros sur la diagonale au niveau des extrémités des distributions de points de collocation (à cause des conditions aux limites et de l'approche multi-domaine), et est donc non-inversible. En revanche \mathbf{A} est inversible (diagonale par blocs, avec des sous-matrices inversibles) et nous pouvons construire le problème aux valeurs propre suivant :

$$\tilde{\mathbf{A}}X = \lambda X \quad (2.46)$$

où $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ et $\lambda = k^{-2}$. En pratique l'inverse de \mathbf{A} ne se calcule pas explicitement et le produit $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ est le résultat de la décomposition LU de \mathbf{A} et des substitutions de descente-remontée effectuées pour résoudre les systèmes linéaire $\mathbf{A}X = b_i$, où les b_i sont les colonnes de \mathbf{B} .

En revanche, si l'opérateur $\hat{\mathcal{L}}(\omega, k)$ fait intervenir k à différents ordres, il faut alors construire un système de taille supérieur. Prenons l'exemple où k est présent à l'ordre 1 et à l'ordre 2, alors :

$$\mathbf{M}(k) = \mathbf{P} + k\mathbf{Q} + k^2\mathbf{R}.$$

Dans ce cas, il faut résoudre un problème aux valeurs propres généralisé de taille $2N \times 2N$ (si \mathbf{M} est de taille $N \times N$) :

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{X} = k\tilde{\mathbf{B}}\tilde{X} \quad (2.47)$$

où $\tilde{\mathbf{A}}$ est une matrice compagnon par bloc :

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{P} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix},$$

et

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Si alors on distingue les deux parties de taille N du vecteur \tilde{X} , $\tilde{X} = [Y, X]^T$, alors le problème (2.47) entraîne que 1) $\mathbf{P}X + \mathbf{Q}Y = -k\mathbf{R}Y$ et 2) $Y = kX$, soit que $\mathbf{P}X + k\mathbf{Q}X + k^2\mathbf{R}X = 0$. Les valeurs propres k sont donc bien celles recherchées, et les vecteurs propres recherchés s'extraient des vecteurs \tilde{X} .

On comprend que plus k sera présent à différents ordres dans l'opérateur de propagation, plus le problème aux valeurs propres à résoudre sera coûteux. Dans la suite des développements numériques, nous nous sommes concentrés sur l'équation d'onde simple (2.8) et donc à la résolution d'un problème de la forme (2.46).

Méthode QR

Nous utilisons en pratique une décomposition QR pour résoudre le problème (2.46), c'est-à-dire une décomposition de type $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, où \mathbf{Q} est une matrice orthogonale et \mathbf{R} est une matrice triangulaire supérieure. Différents algorithmes tels que le procédé de Gram-Schmidt ou la méthode de Householder permettent d'effectuer la décomposition. Cette opération constitue la base d'un algorithme (l'algorithme QR) permettant la résolution de problèmes aux valeurs propres. L'idée principale est la décomposition QR successive de matrices \mathbf{A}_k dans un processus séquentiel. Pour résoudre le problème (2.46), on initialise comme suit :

$$\mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{A}},$$

et à chaque itération, on procède à une décomposition QR et on forme la matrice suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_k &= \mathbf{Q}_k\mathbf{R}_k \\ \mathbf{A}_{k+1} &= \mathbf{R}_k\mathbf{Q}_k. \end{aligned}$$

La suite \mathbf{A}_k converge alors vers une matrice triangulaire supérieure correspondant à la décomposition de Schur de $\tilde{\mathbf{A}}$, c'est-à-dire avec les valeurs propres sur la diagonale. En pratique, nous utilisons des routines fortran issues de la librairie LAPACK pour effectuer cet algorithme, et le coût est $O(N^3)$ si $\tilde{\mathbf{A}}$ est de taille $N \times N$. Il s'agit de l'étape numérique la plus coûteuse et donc la plus contraignante, d'autant plus que la taille de matrice doit permettre de converger sur le spectre que l'on recherche.

En effet, nous avons vu que la résolution de notre distribution de points de discrétisation doit pouvoir couvrir les petites structures dans le profil de célérité effective du son. Cela peut s'effectuer en adoptant une approche multi-domaine, et en choisissant un nombre suffisant de points. La taille de notre problème sera d'autant plus importante que les profils de vents auront une fine résolution et présenteront de nombreuses variations très localisées. Par ailleurs, il faudra aussi d'autant plus de points de collocation que la fréquence ω fixée sera importante afin de pouvoir converger sur les plus petites longueurs d'onde. Le fait qu'une distribution de points de type Gauss-Lobatto (2.38) présente un pas en espace plus large au centre du domaine que sur les bords ne permet pas de paramétrer un nombre défini de points par longueur d'onde, comme on pourrait aisément le faire avec une méthode de différences finies par exemple. Une solution serait éventuellement de faire en sorte que le pas le plus large présent dans la discrétisation soit une fraction définie de la plus

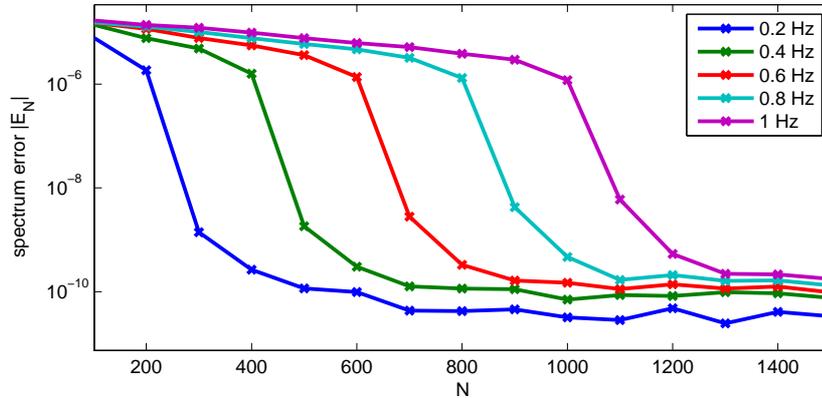


FIGURE 2.3 – Erreur maximale sur les valeurs propres calculées avec LAPACK en fonction de N , le nombre de points de collocation, pour différentes fréquences ω . Le cas traité est celui du profil de célérité effective simplifié présenté à la figure 2.5

petite longueur d'onde, mais la matrice serait alors sur-résolue et les temps de calcul de spectre deviendraient rapidement prohibitifs. Une rapide étude de convergence sur le spectre pour différentes fréquences ω permet de trouver les tailles de matrices adéquates (figure 2.3). En pratique, l'essentiel de nos applications numériques a été effectué pour des fréquences inférieures ou égales à 1 Hz, la taille maximale de matrice traitée (pour 1 Hz) varie environ de 1500 à 2500 (2500 pour les profils de célérité effective les plus accidentés).

Ensuite, la résolution numérique du problème aux valeurs propres présente comme difficulté que les valeurs propres obtenues peuvent correspondre soit au spectre ponctuel de l'opérateur, soit au spectre continu (sur la branche de coupure). En effet, la discrétisation de l'opérateur en une matrice fait que la branche de coupure se verra elle aussi discrétisée dans le spectre que l'on recherche (voir la figure 2.4). Pour distinguer valeurs propres de coupure et valeurs propres du spectre ponctuel (ce sont ces derniers que l'on somme), on décide de ne garder après calcul que les valeurs k_i vérifiant $\Re(k_i) > \Re(k_\infty) = \omega_r/c_\infty$, c'est à dire au-delà du point de branchement.

La figure 2.5 présente un exemple de résultat de recherche de spectre pour l'équation d'onde (2.8), avec un profil de célérité effective simplifié.

Méthode de bisection

Face au coût important de la méthode QR appliquée sur des matrices pleines, il existe une autre technique qui s'avère efficace pour peu que la fréquence ω soit réelle. La méthode de bisection ([Stoer 2002], [Givens 1953]) peut en effet être appliquée pour rechercher des valeurs propres réelles si la matrice est tridiagonale. Il faut donc dans ce cas abandonner l'approche pseudo-spectrale et discrétiser la dérivée seconde de l'équation d'onde (2.8) avec des différences finies. En effet, si la discrétisation

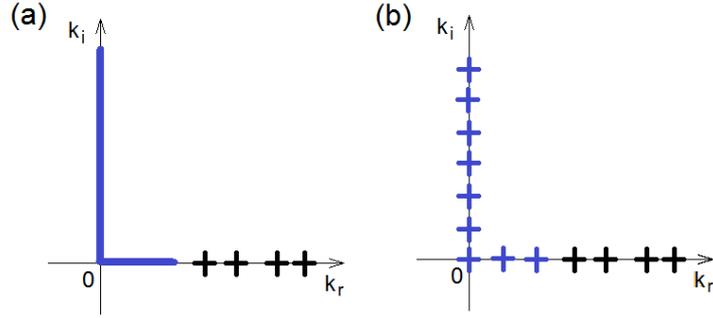


FIGURE 2.4 – Représentation schématique du spectre de valeurs propres de (a) l'opérateur (le spectre ponctuel en noir, le spectre continu en bleu), (b) l'opérateur discrétisé (la branche de coupure est aussi discrétisée)

spatiale est régulière, selon un pas h ($z_j = jh$, $j = 0, \dots, N - 1$), le schéma centré d'ordre 2 de la dérivée seconde permet d'obtenir, comme matrice de dérivation seconde :

$$\mathbf{D}^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

où la première ligne permet d'assurer la dérivée nulle au sol (c'est-à-dire la réflexion totale). La matrice du problème $\mathbf{A} = \mathbf{D}^2 - \text{diag}(\omega^2/c_{\text{eff}}^2(z_j))$ est donc symétrique tridiagonale et ses valeurs propres $\lambda = k^2$ sont sur l'axe réel.

Les valeurs propres λ_i sont par définition racines du polynôme caractéristique $P(\lambda) = |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}|$. Or ce polynôme caractéristique peut être construit par récurrence du fait de la structure tridiagonale de \mathbf{A} . Si l'on définit de façon imbriquée les matrices \mathbf{A}_k telles que :

$$\mathbf{A}_k - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & \mathbf{A}_{k-1} - \lambda\mathbf{I} & & & \\ & & & & a_{k-1,k} \\ 0 & \dots & a_{k,k-1} & a_{k,k} - \lambda & \end{bmatrix}$$

alors le déterminant $P_k(\lambda) = |\mathbf{A}_k - \lambda\mathbf{I}|$ satisfait la relation suivante :

$$P_k(\lambda) = (a_{k,k} - \lambda)P_{k-1}(\lambda) - a_{k,k-1}^2 P_{k-2}(\lambda) \quad (2.48)$$

où il a été pris en compte que $a_{k,k-1} = a_{k-1,k}$, la matrice étant symétrique. Cette relation de récurrence s'initialise avec $P_1(\lambda) = a_{1,1} - \lambda$ et $P_0(\lambda) = 1$. Une telle suite de polynômes est appelée suite de Sturm ([Givens 1953]) caractérisée entre autre par le fait que $P_{k+1}(x)P_{k-1}(x) < 0$ si x est racine réelle de P_k . Le nombre de racines

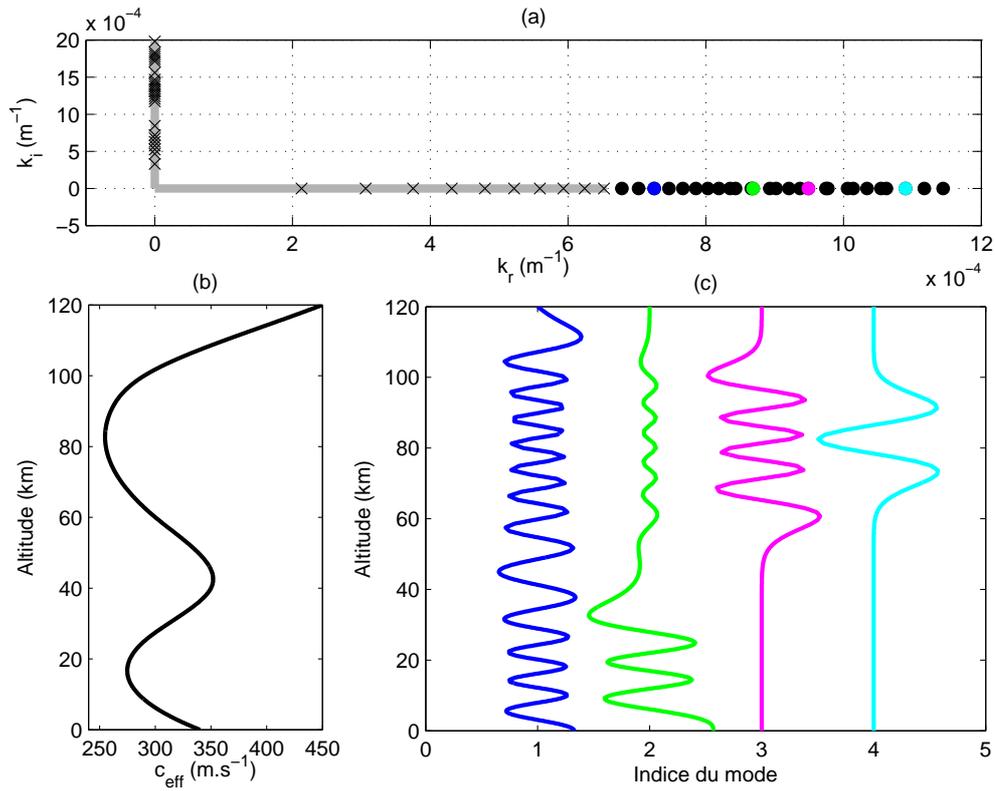


FIGURE 2.5 – (a) Spectre numérique k issu de l'équation d'onde pour une fréquence $\omega = 0,3 \text{ rad.s}^{-1}$ et pour le profil de célérité $c_{\text{eff}}(z)$ (b) (cas artificiel). Le spectre est représenté par des points noirs dans le plan complexe ($k_r = \Re(k)$, $k_i = \Im(k)$). La partie grisée correspond à la coupure et les croix représentent la partie du spectre numérique située sur la coupure. Le spectre est issu de la méthode QR (LAPACK), et l'opérateur est discrétisé avec 200 points de collocation. (c) Exemples de fonctions propres. Chaque fonction propre est associée à la valeur propre représentée avec la même couleur dans (a).

réelles isolées de $P = P_N$ dans l'intervalle $[a, b]$ est alors donné par $s(b) - s(a)$ où $s(x)$ est le nombre de changement de signes de la suite de Sturm évaluée sur $x : (P_0(x), P_1(x), P_2(x), \dots, P_N(x))$.

Nous avons donc rapidement accès au nombre de racines de P , c'est-à-dire de valeurs propres de \mathbf{A} , sur un intervalle réel quelconque. Il suffit de calculer la suite de Sturm évaluée sur les bornes de l'intervalle à l'aide de la relation de récurrence (2.48) et de comparer les changements de signes. Si une des bornes se trouve être racine d'un polynôme intermédiaire $P_k(x) = 0$, il suffit alors de recommencer en prenant une autre valeur.

Dans le cas de l'équation d'onde, on recherche d'abord le nombre M de valeurs propres réelles dans l'intervalle $[k_{\min}^2, k_{\max}^2]$ (où $k_{\min} = \omega/c_{\max}$ et $k_{\max} = \omega/c_{\min}$) à l'aide de ce procédé. Il faut ensuite subdiviser successivement l'intervalle en de plus petits jusqu'à ce qu'ils ne contiennent chacun qu'une valeur propre. On obtient de la sorte une suite croissante de réels x_i qui s'intercallent entre les valeurs propres recherchées :

$$x_1 < \lambda_1 < x_2 < \lambda_2 < x_3 < \dots < x_M < \lambda_M < x_{M+1}.$$

Enfin, une stratégie de bisection classique peut être suivie à partir d'un intervalle $[x_n, x_{n+1}]$ contenant une valeur propre. On introduit $x = (x_n + x_{n+1})/2$ et on calcule $s(x)$ à l'aide de (2.48). Si $s(x) - s(x_n) = 1$, alors on continue à partir de l'intervalle $[x_n, x]$, sinon, ce sera l'intervalle $[x, x_{n+1}]$, et ce jusqu'à ce qu'on atteigne la précision souhaitée pour la valeur propre λ_n .

Le coût de cette méthode n'est que de $O(NM)$ où $M < N$ est le nombre de valeurs propres recherchées dans l'intervalle ciblé (contre $O(N^3)$ pour la méthode QR en approche pseudo-spectrale). Mais il faut noter que l'on a introduit l'erreur du schéma différence finie $O(h^2)$, et que l'on perd la stabilité numérique par rapport à l'approche pseudo-spectrale. Par ailleurs, cette méthode ne permet d'aborder que les cas où le spectre est réel. Nous l'utilisons donc pour des applications à fréquence ω réelle. Mais comme nous le verrons plus tard, imposer une fréquence avec une partie imaginaire non-nulle peut présenter un intérêt, et nous aurons alors recours à l'approche pseudo-spectrale.

Projection sur des sous-espaces de Krylov

Pour des matrices complexes de très grande taille, la recherche des valeurs propres par la méthode QR s'avère vite trop coûteuse en ressources de calcul. Les techniques dites de projections sur des sous-espaces de Krylov permettent de réduire la tailles des matrices sur lesquelles on recherche le spectre, et donc de réduire les coûts de calcul, tout en convergeant vers les valeurs propres recherchées. Ces techniques sont d'ailleurs parfaitement adaptées et présentent de bonnes propriétés de convergence lorsqu'elles sont utilisées conjointement avec la méthode de collocation spectrale sur la base des polynômes de Tchebychev ([Watkins 2007]).

La base de projection s’appelle sous-espace de Krylov et se définit de la façon suivante : pour un vecteur initial b déterminé a priori au hasard, les vecteurs $(b, \mathbf{A}b, \mathbf{A}^2b, \dots, \mathbf{A}^{p-1}b)$ constituent une base pour le sous-espace de Krylov \mathcal{K}_p de la matrice \mathbf{A} de taille $N \times N$ ($p < N$). Nous savons que $\mathbf{A}^{p-1}b$ est une approximation du vecteur propre associée à la plus grande valeur propre. De même, les autres vecteurs de la base permettent d’approcher le reste des vecteurs propres. Ces vecteurs ne sont pas orthogonaux mais une méthode comme l’orthonormalisation de Gram-Schmidt peut être appliquée pour obtenir une base orthonormée de \mathcal{K}_p : (q_1, q_2, \dots, q_p) .

La méthode générale consiste à calculer itérativement les vecteur q_j et à les utiliser pour construire une matrice de Hessenberg supérieure \mathbf{H}_j (tous les éléments en-dessous de la première sous-diagonale sont nuls) qui représente la projection de \mathbf{A} sur \mathcal{K}_j . Etant donné que \mathbf{H}_p est une matrice de Hessenberg de petite taille ($p \times p$), un algorithme QR peut être appliqué pour trouver rapidement ses paires propres, appelées paires de Ritz. Les valeurs propres de Ritz seront alors proches des p valeurs propres dominantes de \mathbf{A} .

Lorsque \mathbf{A} est une matrice Hermitienne (ce n’est pas notre cas ici), l’algorithme utilise l’itération de Lanczos, et dans le cas général, la méthode est appelée algorithme d’Arnoldi. Pour des raisons de coût en espace mémoire, la méthode d’Arnoldi est en général implémentée de sorte qu’elle redémarre après un certain nombre d’itérations et la technique la plus efficace et répandue aujourd’hui est celle appelée *Implicitly Restarted Arnoldi Method* ([Lehoucq 2001]), implémentée dans la librairie Fortran ARPACK.

Si cet algorithme est appliqué à la matrice \mathbf{A} telle quelle, les valeurs propres de Ritz n’approcheront pas les valeurs propres que l’on cherche, mais les points du spectre continu discrétisé (figure 2.4), ceux de plus grand module. En pratique, on utilise une technique de préconditionnement pour pouvoir orienter la recherche de spectre vers une cible précise dans le plan complexe. Ces techniques sont alors intégrées à l’itération d’Arnoldi. Il y a par exemple la technique *Shift-and-Invert* : on recherche les valeurs propres dominantes de $\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I})^{-1}$ où σ est un scalaire complexe. Moyennant la transformation inverse, ces valeurs propres correspondent alors aux valeurs propres de \mathbf{A} les plus proches de σ . Il y a aussi la transformation de Cayley ([Meerbergen 2000]) : on opère une transformation de la forme $\mathbf{M} = (\mathbf{A} - \sigma\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \mu\mathbf{I})$, qui permet de trouver les valeurs propres les plus proches du pôle σ , mais préférentiellement dans la direction donnée par $\vec{\mu\sigma}$ (et c’est d’autant plus vrai que μ et σ seront éloignés dans le plan complexe).

2.2.3 Calcul des signaux et causalité

Nous présentons brièvement ici comment, à l’aide de l’algorithme de transformée de Fourier rapide (FFT), nous pouvons retrouver le signal acoustique dépendant du temps. Le calcul pour des fréquences strictement réelles produit des parasites sur les signaux (c’est un cas limite où la causalité numérique n’est plus respectée), nous montrons alors qu’ajouter une partie imaginaire à la fréquence permet de résoudre

le problème.

Une fois les paires propres $(k_j(\omega), \psi_j(z, \omega))$ obtenues pour une fréquence ω donnée, nous pouvons les injecter dans la somme de résidus (2.28) pour obtenir $\hat{g}(z, \omega, r)$. En réalité, nous répétons ces étapes de calcul M fois, pour chaque fréquence ω_m d'une discrétisation régulière du chemin d'intégration L_ω . Nous considérons dans un premier temps ici que $L_\omega = \mathbb{R}$. Nous pouvons en fait n'étudier que \mathbb{R}^+ car le résultat est pair en fréquence (ω apparaît au carré dans (2.8)) et donc $\omega_m = m\omega_M/M$. La fréquence maximale ω_M est choisie en fonction du profil fréquentiel de la source $\hat{s}(\omega)$. En effet, si toute l'énergie de la source est concentrée sous une fréquence limite, il n'y a pas de raison de calculer la réponse impulsionnelle au-delà.

Disposant ainsi de $(\hat{g}(z, \omega_m, r))_{m \leq M}$ (que l'on peut à ce stade multiplier par $\hat{s}(\omega_m)$ si l'on souhaite simuler la propagation à partir d'un forçage précis), l'algorithme FFT peut être utilisé pour calculer la transformée de Fourier inverse (2.19) pour obtenir le signal temporel $g(z, t, r)$. Il faut noter que selon le choix de convention opéré ici, le noyau de la transformée inverse en temps est $e^{-i\omega t}$ et non $e^{+i\omega t}$, ce qui ne correspond pas à une transformée inverse usuelle. Il faut donc utiliser l'algorithme FFT direct.

La figure 2.6(c1) montre un exemple de signal au sol calculé selon cette méthode, avec un chemin d'intégration L_ω réel, et donc des valeurs propres réelles. On remarque que le signal présente une série d'arrivées parasites, des échos. En réalité, le choix $L_\omega = \mathbb{R}$ est un cas limite qui ne garantit pas la causalité dans notre calcul. En effet, comme l'indique [Huerre 2000], le chemin L_ω doit se situer au-dessus des modes temporels $\omega_j(k)$ (solutions de (2.10)) lorsque le nombre d'onde k parcourt l'axe réel afin d'assurer la causalité ($g(t) = 0$ pour $t < 0$). Or si k est réel, alors $\omega_j(k)$ aussi, et donc L_ω doit en toute rigueur se situer au-dessus de l'axe réel. En pratique, les arrivées parasites dans le signal peuvent ne pas se voir si de l'atténuation est introduite dans l'opérateur (de l'absorption atmosphérique ou une impédance complexe au sol par exemple). Mais le cas traité ici est l'équation d'onde simple, avec réflexion totale au sol.

Nous définissons donc un nouveau chemin L'_ω légèrement décalé vers les imaginaires positifs. En se fixant une petite partie imaginaire $\omega_i \ll 1$, le nouveau chemin d'intégration s'écrit : $L'_\omega = \mathbb{R} + i\omega_i$ (figure 2.6(a)). Cela signifie que l'on résout le problème aux valeurs propres pour des fréquences ω_m complexes, et donc que le spectre, auparavant contenu dans l'axe réel, s'étale désormais dans le demi-plan complexe supérieur (figure 2.6(b)). Dans ce nouveau cas de figure, l'intégrale de Fourier devient une transformée de Fourier-Laplace. L'algorithme FFT est appliqué cette fois sur le prolongé analytique de $(\hat{g}(z, \omega_m, r))_{m \leq M}$, l'intégration se portant sur la partie réelle de la fréquence, et le retour à la solution se fait simplement au moyen du facteur multiplicatif $e^{\omega_i t}$:

$$\begin{aligned} g(z, t, r) &= \frac{1}{(2\pi)} \int_{L'_\omega} \hat{g}(z, \omega, r) e^{-i\omega t} d\omega \\ &= e^{\omega_i t} \frac{1}{(2\pi)} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(z, \omega_r + i\omega_i, r) e^{-i\omega_r t} d\omega_r \end{aligned} \quad (2.49)$$

On constate alors sur la figure 2.6(c) que le signal est débarrassé des parasites dès lors que $\omega_i > 0$. Notons aussi que si elle influe sur la distribution des valeurs propres,

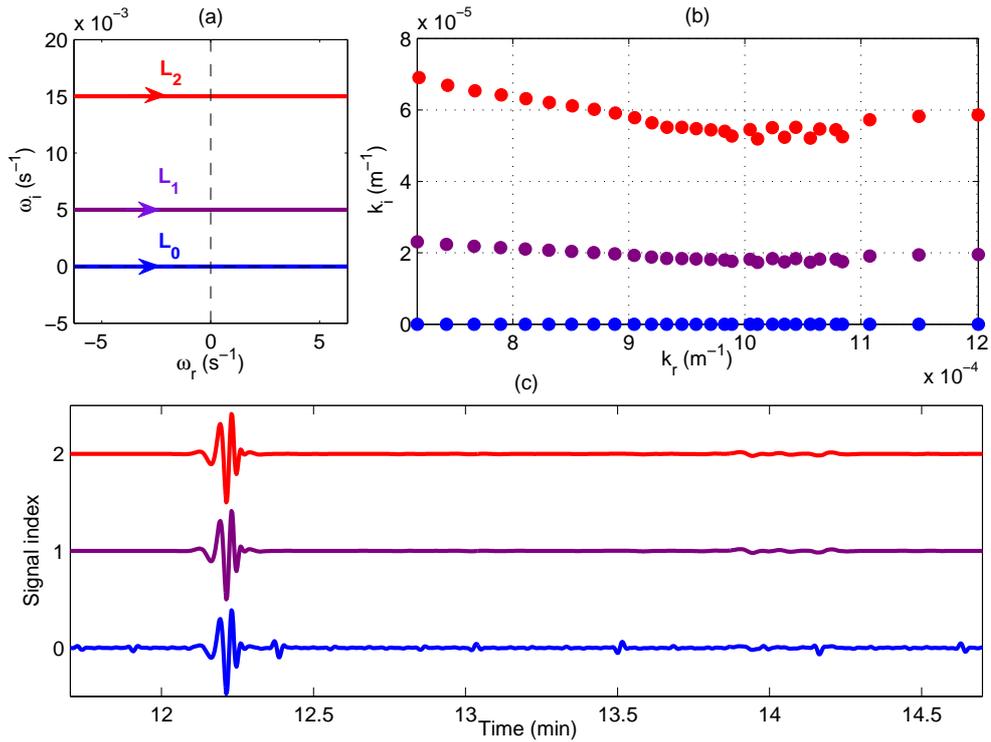


FIGURE 2.6 – (a) Localisation dans le plan complexe du chemin d'intégration L_ω pour 3 ω_i distincts. L_0 , L_1 et L_2 correspondent respectivement à $\omega_i = 0, 0.05$ et 0.15 s^{-1} . (b) Spectres de valeurs propres $k_j(\omega)$ calculés pour un profil $c(z)$ donné, et pour une fréquence fixée sur chacun des chemins L_ω définis par (a). (c) Signaux acoustiques calculé au sol, à 200 km de la source (elle-même située au sol), avec chaque chemin d'intégration en fréquence définis par (a). La FFT est effectuée sur 512 points de fréquence, dont la partie réelle se situe entre 0 et 1 Hz.

la valeur du décalage complexe ω_i n'influence cependant pas le signal infrason en fin de calcul. Les signaux représentés en rouge et en violet dans la figure 2.6(c) sont identiques bien que sommés sur des modes différents (figure 2.6(b)). Dans la suite, tous les calculs seront effectués au moyen de ce prolongement analytique avec un petit décalage ω_i .

2.2.4 Cas d'une faible variabilité horizontale

La méthode des modes normaux est présentée jusqu'ici avec l'hypothèse que le milieu ne varie pas horizontalement. Dans le cas de la propagation d'infrasons dans l'atmosphère, cette hypothèse apparaît raisonnable car les champs de température et de vents présentent clairement une séparation d'échelle, la variabilité verticale dominant largement la variabilité horizontale. Cependant, dans le cas d'une atmosphère turbulente par exemple, ou bien pour des études de propagation à longue distance (le premier rebond stratosphérique revient au sol à 200-300 km de la source), nous savons que la variabilité horizontale ne peut plus être négligée. Le problème aux valeurs propres à résoudre devient alors localement :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_{\text{eff}}^2(r, z)} - k(r)^2 \right\} \psi = 0. \quad (2.50)$$

où r est la coordonnée horizontale dans le système cylindrique, autrement dit la distance (horizontale) à la source de l'onde.

Il existe un moyen de prendre en compte la lente variabilité horizontale du milieu à moindre frais dans la méthode des modes normaux. On trouve une description de cette méthode en acoustique océanique [Jensen 1994]. L'idée de départ est l'hypothèse adiabatique, c'est-à-dire l'absence d'échange d'énergie entre les modes, introduite par [Pierce 1965]. Cette approximation peut apparaître contraignante dans certains cas, mais permet de réduire considérablement les temps de calculs (la prise en compte des effets de couplage entre modes est possible mais au prix de la résolution d'un système linéaire de grande taille [Jensen 1994]).

L'hypothèse adiabatique permet d'exprimer la solution à partir des modes locaux issus de (2.50) :

$$g(r, z; \omega) = \sum_j \phi_j(r) \psi_j(r, z) \quad (2.51)$$

Ensuite, l'expression des coefficients $\phi_j(r)$ se trouve au moyen d'une hypothèse supplémentaire de haute fréquence. Plus précisément, on suppose que la longueur d'onde horizontale est très inférieure aux échelles caractéristiques horizontales de l'atmosphère. C'est pour cette raison que l'on considère ici une faible variabilité horizontale de la célérité effective. La séparation d'échelle que présentent naturellement les champs atmosphériques (les gradients verticaux dominant les gradients horizontaux) permet d'effectuer cette approximation dans la plupart des cas. Néanmoins, des phénomènes turbulents de moindre échelle peuvent advenir et dans ce cas l'approximation adiabatique ne sera plus valable. Nous introduisons donc un changement de variable $R = \varepsilon r$, ε étant un petit paramètre de l'ordre de grandeur

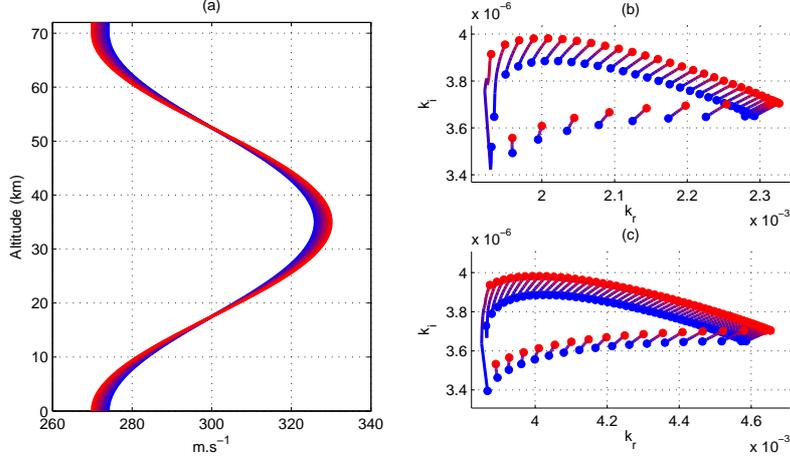


FIGURE 2.7 – (a) Profil fictif de célérité effective faiblement variable horizontalement, de $r = 0$ km (en bleu) à $r = 200$ km (en rouge). (b), (c) Spectres complexes de nombre d'onde k , (la fréquence a une partie imaginaire de $\omega_i = 3.10^{-2} \text{ s}^{-1}$), représentés lorsque r varie de 0 km (bleu) à 200 km (rouge). Les spectres sont représentés pour des fréquences de (b) 0.1 Hz et (c) 0.2 Hz

des échelles caractéristiques de variation horizontale. Ce faisant, l'approche WKB (Wentzel, Kramers et Brillouin) permet, en tronquant au premier ordre le développement asymptotique de $\phi_j(R/\varepsilon)$ ([Bender 1999]), d'obtenir finalement comme solution approchée :

$$g(z; \omega, R) \simeq \frac{ie^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi r}} \sum_{j=0}^N \frac{\psi_j(z_s; \omega, 0)\psi_j(z; \omega, R)}{\sqrt{k_j(\omega, R)}} \exp \left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^s k_j(\omega, R) ds \right\}, \quad (2.52)$$

Notons que cette méthode est similaire à ce que l'on peut trouver en dynamique des fluides, pour des étude de stabilité, sous le nom PSE (Parabolized Stability Equations), méthode exposée dans l'Annual Review de [Herbert 1997].

En pratique, il nous faut résoudre le problème aux valeurs propres pour une série de distances (R_1, R_2, \dots, R_M). Numériquement, cela suppose que l'on puisse identifier un même mode k dans une série d'ensembles $(k_j(R_m))_{j,m}$, et en faisant attention à ce que les fonctions propres $\psi_j(z; \omega, R)$ ne changent pas de signe d'un calcul à l'autre (contrairement au cas sans variation horizontale, il faut ici que les modes gardent leur polarité). Pour pouvoir suivre en pratique un mode k_j lorsque l'on passe de R_{m-1} à R_m , nous utilisons la condition :

$$\int_0^\infty \psi_j(z; \omega, R_m) \frac{\partial \psi_j}{\partial R}(z; \omega, R_m) dz = 0, \quad (2.53)$$

où la dérivée partielle s'approche en pratique avec une différence finie :

$$\frac{\partial \psi_j}{\partial R}(z; \omega, R_m) \approx \frac{\psi_j(z; \omega, R_m) - \psi_j(z; \omega, R_{m-1})}{R_m - R_{m-1}}. \quad (2.54)$$

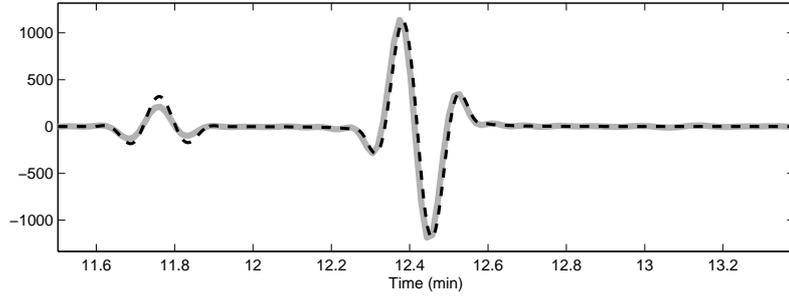


FIGURE 2.8 – Signal au sol, à $r=200$ km de la source avec le profil variable de célérité effective donné dans la figure 2.7(a). En gris : calcul effectué avec le calcul des modes normaux locaux et l’approximation adiabatique. En pointillés noirs : calcul effectué avec un code 2D de propagation par éléments finis (FreeFem), [Dergham 2013].

Cette condition se trouve simplement en dérivant par rapport à R la condition sur la norme (2.34) (on la retrouve aussi dans les méthodes PSE). Pour un mode $\psi_j(z; \omega, R_{m-1})$ donné, on teste alors toutes les fonctions propres (et leurs opposées) trouvées au rang m , et celle satisfaisant la condition se trouve être $\psi_j(z; \omega, R_m)$, avec le bon signe.

Pour que cette méthode fonctionne en pratique, il faut que la discrétisation horizontale (R_1, R_2, \dots, R_M) ne soit pas de résolution trop large. Cependant, plus on utilise de points, plus il faut calculer de spectres, ce qui peut considérablement rallonger le temps de calcul. La figure 2.7 montre, sur un exemple fictif, comment varient dans le plan complexe les valeurs propres $k_j(\omega, R)$ quand la variation de R entraîne de petites variations du profil de célérité effective. L’algorithme précédemment décrit permet de correctement identifier ces modes (et de conserver leur polarité). Ils sont ensuite utilisés dans la formule de sommation avec approximation WKBJ (2.52) pour obtenir finalement le signal au sol à 200 km de la source (figure 2.8). On déduit de la comparaison avec la méthode des éléments finis (voir l’annexe B) que l’approximation adiabatique est pertinente dans le cas proposé.

2.3 Conclusion

Nous venons dans ce chapitre d’exposer les modèles et outils de base que l’on utilise afin de simuler la propagation des infrasons dans l’atmosphère. En pratique, la démarche de calcul pour la méthode des modes normaux se résume toujours à la recherche d’un spectre, itéré pour un certain nombre de fréquences (voire pour un certain nombre de distances r si l’on tient compte de la variabilité horizontale du milieu), puis à une transformée de Fourier discrète pour obtenir le signal acoustique que peut enregistrer une station de mesure. L’approche par les modes normaux présente l’avantage de pouvoir traiter l’influence des plus petites échelles atmosphériques, ce que ne peut faire une méthode asymptotique comme le tracé de rayons.

Or ces petites échelles peuvent avoir une influence déterminante sur la propagation. En outre, la décomposition en modes normaux offre une description structurée des mécanismes qui régissent la propagation acoustique indépendamment de toute considération sur la source : la sommation de modes opérée avec le théorème des résidus est en quelque sorte la fonction de transfert de l'atmosphère. En pratique, cela signifie qu'un seul calcul permet de couvrir tous les cas de figures possibles au niveau de la source.

Néanmoins, les temps de calcul en jeu peuvent rapidement devenir prohibitifs si la fréquence augmente ou si les profils présentent des forts gradients sur de petites échelles. Ces paramètres influent sur la taille des matrices, et le principal coût numérique est causé par la recherche des valeurs propres de ces matrices. Voici un tableau récapitulatif sur les méthodes de recherche de spectre, leurs caractéristiques et le cadre dans lequel nous les utilisons.

Méthode	Fréquence	Convergence	Remarque
QR	$\omega \in \mathbb{C}$	Convergence lente en $O(N^3)$.	Méthode très coûteuse utilisée pour calculer le spectre complet dans le cas complexe.
Bissection	$\omega \in \mathbb{R}$	Convergence rapide en $O(NM)$, avec $M < N$.	Méthode très efficace, mais utilisée uniquement pour calculer le spectre ponctuel $k_{\min} < k_j < k_{\max}$ dans le cas réel.
Krylov-Arnoldi	$\omega \in \mathbb{C}$	La convergence (rapide) dépend du nombre de paire de Ritz recherchées.	Méthode utilisée pour calculer un petit nombre de modes (par rapport à la taille de la matrice), quand on souhaite cibler une zone spécifique du plan complexe.

Comme nous l'avons vu, les matrices que l'on manipule sont à valeurs complexes (prolongement analytique pour des fréquences complexes), et donc la méthode de bissection, efficace pour trouver le spectre dans le cas réel, ne peut plus être utilisée. Restent donc la méthode QR (très coûteuse) et l'algorithme d'Arnoldi (peu coûteux, mais c'est un calcul approché qui nécessite de savoir où cibler la recherche dans le plan complexe). Le problème est le suivant : doit-on allouer d'importantes ressources de calcul pour une simulation alors que des incertitudes seront attachées au résultat ?

En effet, la propagation des infrasons dans l'atmosphère fait intervenir des pa-

ramètres qui sont mal connus et en particulier l'état de l'atmosphère. Les bases de données atmosphériques disponibles, comme celles du centre européen ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts), sont inévitablement accompagnées d'incertitudes. Ces incertitudes sont souvent localisées dans la moyenne atmosphère, à des altitudes où les ondes de gravité sont connues pour entraîner une forte variabilité. Il faut donc pouvoir rendre compte de l'influence de cette variabilité dans nos calculs, sans quoi les résultats de simulation ne présentent pas une grande valeur explicative si on les compare à des données enregistrées par les stations de mesure.

A cette fin, une méthode d'analyse de sensibilité basée sur la décomposition en valeurs singulières du problème de propagation est présentée et discutée dans le chapitre 3. Ensuite, une baisse significative de coût de calcul est obtenue en réduisant la complexité de la méthode des modes normaux via un modèle réduit que l'on présente au chapitre 4. Enfin, cette approche rapide est utilisée au chapitre 5 pour étudier statistiquement l'expérience Sayarim, un cas d'application connu et pour lequel nous disposons de données.

+

Analyse de sensibilité

Sommaire

3.1	Introduction	49
3.2	Sensibilité des infrasons aux perturbations atmosphériques	51
3.2.1	Sensibilité des modes et de leurs valeurs propres	51
3.2.2	Décomposition sur une base d'ondelettes	54
3.2.3	Matrice de sensibilité	57
3.2.4	Analyse SVD de la matrice de sensibilité	59
3.3	L'explosion du réacteur de la centrale de Fukushima	62
3.3.1	Problématique	62
3.3.2	Analyse de sensibilité	63
3.3.3	Perturbation optimale de la stratopause	66
3.3.4	Approximation au premier ordre	69
3.4	Problème de géolocalisation du bolide tombé en Bretagne le 19 Juillet 2011	72
3.4.1	Contexte	72
3.4.2	Approche perturbative et plan d'expérience	74
3.4.3	Géolocalisation	74
3.4.4	Sensibilité à la variation d'azimut	78
3.4.5	Bilan	78
3.5	Conclusion	80

3.1 Introduction

Nous avons vu dans le précédent chapitre comment modéliser et simuler la propagation d'infrasons dans l'atmosphère. La méthode des modes normaux permet de décomposer le champ de surpression sur une base complète de modes verticaux. Cette méthode, ainsi que les autres techniques classiquement utilisées pour simuler les infrasons (le tracé de rayon et les équations paraboliques), constituent une approche déterministe du phénomène étudié. C'est-à-dire qu'en plus des hypothèses et approximations nécessaires à l'application de ces modèles, il est en plus supposé que la célérité effective du son (dérivée de la température et du vent) ainsi que les caractéristiques de la source sont connues dans nos applications.

Les travaux de [North 1984] ont montré l'intérêt particulier que présentent les modes normaux quand il s'agit d'étudier l'aléa entraîné par une incertitude sur la

source. En effet, si l'altitude de la source est aléatoire suivant une loi uniforme, alors les fonctions propres de la décomposition en modes normaux sont exactement les EOF (Empirical Orthogonal Functions, [North 1982]) du champ de pression, définis comme les vecteurs propres de la matrice de variance-covariance du profil vertical de pression $p(z)$ à une distance r donnée. Enfin, en ce qui concerne l'incertitude sur les autres caractéristiques de source, comme l'énergie ou la dépendance temporelle, leur étude est triviale étant donné qu'elles sont linéairement transmises au champ de surpression. C'est pour ces raisons que l'on va conserver dans la suite une approche déterministe concernant la source, et étudier le rôle particulier des profils atmosphériques dans nos calculs, c'est-à-dire des incertitudes aléatoires.

Dans les faits, nous utilisons en entrée du code des profils issus de bases de données météorologiques. Plus précisément nous utilisons les profils de vent et de températures provenant des bases de données du centre européen ECMWF (European Centre for Medium-Range Weather Forecasts)¹. Pour décrire les plus hautes altitudes, nous utilisons les modèles empiriques de référence HWM-93 (Horizontal Wind Model) et MSIS-90 (Mass Spectrometer and Incoherent Radar Model), [Hedin 1996]. Les données de réanalyse et les modèles empiriques sont alors raccordés au moyen d'une interpolation de type Spline pour pouvoir se doter de profils verticaux de célérité effective allant du sol jusqu'à la thermosphère (entre 100 et 150 km d'altitude). Des incertitudes accompagnent inévitablement les profils que nous utilisons et peuvent avoir un impact sur les résultats de simulation. Par exemple des phénomènes turbulents causés par des ondes de gravité peuvent présenter des échelles caractéristiques en dessous de la résolution des données ECMWF (limitées par les capacités de stockage) et donc peuvent ne pas être pris en compte dans nos calculs, quand bien même ils auraient de l'importance (les fluctuations peuvent atteindre plusieurs dizaines de mètres par seconde). Les derniers efforts menés pour modéliser ces ondes de gravité tendent vers une approche stochastique [Drob 2013] et l'incertitude associée serait alors formellement (mathématiquement) aléatoire.

Pour convenablement simuler la propagation des infrasons, il convient alors d'étudier l'impact des incertitudes aléatoires sur le modèle afin de savoir comment une variabilité des données atmosphériques se traduit sur le signal infrasonore que peut enregistrer une station de mesure. Pour ce faire, nous adoptons dans ce chapitre une approche perturbative en effectuant une analyse de sensibilité de la propagation infrasonore. Les échelles atmosphériques déterminantes sont identifiées à l'aide d'une décomposition sur une base d'ondelette et d'une analyse SVD (Singular Value Decomposition). Le cas d'application est l'explosion à la centrale de Fukushima (Japon) qui eut lieu le 12 mars 2011, et une attention particulière est portée à l'incertitude associée à la phase stratosphérique. Enfin nous présentons un exemple d'utilisation de cette approche perturbative dans le cas de la géolocalisation de la météorite tombée en Bretagne en juillet 2011.

1. Ces données numériques sont le résultat de la réanalyse par assimilation de données d'observations régulières de l'état de l'atmosphère jusqu'à 50 km d'altitude (données *ERA-Interim*) ou 80 km (données *91 niveaux*), [Molteni 1996], [Jung 2010]).

3.2 Sensibilité des infrasons aux perturbations atmosphériques

3.2.1 Sensibilité des modes et de leurs valeurs propres

Nous étudions dans cette section l'effet d'une perturbation du profil de célérité effective sur le champ de surpression. Etant donné que la méthode des modes normaux repose sur la résolution d'un problème aux valeurs propres, nous étudions d'abord la sensibilité du spectre à une perturbation atmosphérique. La perturbation d'un problème aux valeurs propres est un sujet classique et largement étudié ([Kato 1995], [Trefethen 1997]). Formellement, nous considérons ici une perturbation de la forme suivante :

$$c(z; \varepsilon) = c_0(z)(1 + \varepsilon\delta(z)) \quad (3.1)$$

où $c_0(z)$ est la célérité effective de base, $\delta(z)$ est une fonction normée² ($\|\delta\| = 1$), et ε est un réel positif que l'on suppose petit : $\varepsilon \ll 1$. Le paramètre ε représente le poids relatif de la perturbation par rapport à l'état de base car il majore en norme l'écart relatif :

$$\frac{\|c - c_0\|}{\|c_0\|} \leq \varepsilon. \quad (3.2)$$

Pour rappel, nous réécrivons ici le problème aux valeurs propres (2.8) pour la célérité de base :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c_0^2} - k_j^2 \right\} \psi_j = 0, \quad (3.3)$$

que l'on note formellement :

$$\mathcal{L}_0 \psi_j = 0, \quad (3.4)$$

où k_j^2 et ψ_j sont respectivement une valeur propre et sa fonction propre associée pour une valeur fixée de ω . Quant au problème perturbé, il s'écrit :

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c(z; \varepsilon)^2} - \tilde{k}_j^2(\varepsilon) \right\} \tilde{\psi}_j(z; \varepsilon) = 0. \quad (3.5)$$

Le spectre dépend ici du petit paramètre ε et nous pouvons donc écrire le développement de Taylor de la valeur propre :

$$\tilde{k}_j(\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{k}_j^{(n)}(0)}{n!} \varepsilon^n, \quad (3.6)$$

soit, si l'on se limite au premier ordre : $\tilde{k}_j(\varepsilon) = k_j + \varepsilon \partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0)$. Et, de la même manière, la fonction propre s'approche au premier ordre : $\tilde{\psi}_j(z; \varepsilon) = \psi_j(z) + \varepsilon \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0)$. Nous cherchons dans un premier temps à évaluer les dérivées partielles $\partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0)$ et $\partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0)$, à savoir la sensibilité du spectre lorsqu'une perturbation de la forme $\delta(z)$ est appliquée à l'état atmosphérique de base.

2. Norme L^2 .

Si l'on dérive (3.5) par rapport au paramètre ε , on obtient l'équation suivante (évaluée pour $\varepsilon = 0$) :

$$\mathcal{L}_0 \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0) = 2 \left\{ \frac{\omega^2 \delta(z)}{c_0(z)^2} + k_j \partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) \right\} \psi_j(z) \quad (3.7)$$

Ensuite, nous effectuons le produit scalaire hermitien L^2 (noté $\langle a, b \rangle = \int \bar{a} b dz$) de (3.7) avec le conjugué de la fonction propre $\psi_l(z)$ (noté $\bar{\psi}_l(z)$) :

$$\left\langle \bar{\psi}_l(z), \mathcal{L}_0 \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0) \right\rangle = 2 \left\langle \bar{\psi}_l(z), \left\{ \frac{\omega^2 \delta(z)}{c_0(z)^2} + k_j \partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) \right\} \psi_j(z) \right\rangle. \quad (3.8)$$

De cette dernière égalité, nous pouvons directement déduire l'expression de la sensibilité de la valeur propre. En effet, pour $l = j$, le terme de gauche s'annule étant donné que $\bar{\psi}_j(z)$ est fonction propre de l'adjoint de l'opérateur \mathcal{L}_0 auquel sont associées des conditions aux limites homogènes (l'opérateur est normal). Il s'agit de la condition de solvabilité issue de l'alternative de Fredholm : le système linéaire (3.7) possède bien une solution étant donné que le membre de droite est orthogonal au noyau de l'adjoint de l'opérateur. On trouve une démarche similaire appliquée à l'opérateur d'Orr-Sommerfeld dans [Bottaro 2003]. Il s'ensuit donc que :

$$\partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) = -\frac{\omega^2}{k_j} \left\langle \bar{\psi}_j, \frac{\delta}{c_0^2} \psi_j \right\rangle. \quad (3.9)$$

Par ailleurs, dans le cas où $l \neq j$, nous utilisons le fait que $\langle \bar{\psi}_l, \psi_j \rangle = 0$ (cela se déduit de $\langle \bar{\psi}_l, \mathcal{L}_0(k_j) \psi_j \rangle = 0$) et (3.8) se simplifie alors :

$$(k_l^2 - k_j^2) \left\langle \bar{\psi}_l(z), \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0) \right\rangle = 2 \left\langle \bar{\psi}_l(z), \frac{\omega^2 \delta(z)}{c_0(z)^2} \psi_j(z) \right\rangle. \quad (3.10)$$

Cette dernière expression permet de projeter la sensibilité $\partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0)$ sur la base orthonormée des fonctions propres. En effet, le produit $\left\langle \bar{\psi}_j(z), \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0) \right\rangle$ est nul (il suffit de dériver la condition que l'on s'impose pour la norme (2.34)) et il reste :

$$\partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(z; 0) = 2\omega^2 \sum_{l \neq j} \frac{1}{k_l^2 - k_j^2} \left\langle \bar{\psi}_l, \frac{\delta}{c_0^2} \psi_j \right\rangle \psi_l(z). \quad (3.11)$$

Ainsi, si l'on dispose des valeurs propres k_j et des fonctions propres ψ_j pour une fréquence ω donnée, les expressions (3.9) et (3.11) nous fournissent directement leur sensibilité à une perturbation $\delta(z)$ donnée.

Enfin, si l'on souhaite connaître la sensibilité du champ de surpression au sol (on se restreint ici au sol car on souhaite étudier en particulier les signaux que peuvent enregistrer les stations de mesure), il suffit de dériver la formule de sommation des résidus (2.35) par rapport au petit paramètre ε :

$$\partial_\varepsilon \hat{g}(\omega, r; 0) = \frac{i}{4} \sum_{j=1}^N \left(2\psi_j(0) \partial_\varepsilon \tilde{\psi}_j(0; 0) H_0^{(1)}(k_j r) - r \partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) \psi_j(0)^2 H_1^{(1)}(k_j r) \right). \quad (3.12)$$

En injectant les expressions (3.9) et (3.11), nous obtenons la sensibilité de l'onde infrasonore au sol exprimée sous la forme d'un produit scalaire L^2 avec la perturbation $\delta(z)$:

$$\partial_z \hat{g}(\omega, r; 0) = \langle \delta, \hat{S} \rangle, \quad (3.13)$$

où \hat{S} peut être défini comme le résultat d'une forme quadratique :

$$\hat{S}(z, \omega, r) = \Psi(\omega, z)^T \mathbf{A}(\omega, r) \Psi(\omega, z), \quad (3.14)$$

où les éléments de la matrice \mathbf{A} sont :

$$A_{jl} = \omega^2 \hat{s}_{jl}(r) H_0^{(1)}(k_j r), \quad (3.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{s}_{jl}(r) &= i/(k_l^2 - k_j^2) \quad \text{si } j \neq l \\ &= r/(4k_j) \quad \text{si } j = l, \end{aligned} \quad (3.16)$$

et les éléments du vecteur Ψ sont :

$$\Psi_j(z) = \psi_j(0) \frac{\psi_j(z)}{c_0(z)}. \quad (3.17)$$

Nous avons utilisé dans (3.14) le fait que $H_1^{(1)}(x) \approx -iH_0^{(1)}(x)$, ce qui est vrai asymptotiquement [Abramowitz 1964]. Notons que les termes diagonaux de \mathbf{A} sont relatifs à la sensibilité des valeurs propres (formule (3.9)) tandis que les termes non-diagonaux proviennent de la sensibilité des fonctions propres (3.11). On remarque tout de suite que dans les cas de propagation à longue distance ($r \rightarrow \infty$), les termes diagonaux A_{jj} sont dominants (il faut en particulier $r \gg 4 \max(|k_j| / |k_l^2 - k_j^2|)$) et l'expression de la sensibilité peut se simplifier :

$$\hat{S}(z, \omega, r) \approx \frac{r\omega^2}{4} \sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j(z)^2}{k_j} H_0^{(1)}(k_j r). \quad (3.18)$$

Il apparaît donc que la sensibilité du signal infrason ne dépend à grande distance que de la sensibilité des valeurs propres (et non de celle des fonctions propres). Enfin, si $r \gg \max(1/|4k_j|)$ et $-\pi < \arg(k_j r) < 2\pi$, nous pouvons utiliser la forme asymptotique de la fonction de Hankel [Abramowitz 1964] :

$$\hat{S}(z, \omega, r) = \sqrt{\frac{r}{8\pi}} \omega^2 e^{-i\pi/4} \sum_{j=1}^N \frac{\Psi_j(z)^2}{k_j^{3/2}} e^{ik_j r}. \quad (3.19)$$

Si la formule (3.14) fournit la sensibilité du signal dans l'espace de Fourier, une transformée inverse permet directement d'avoir accès à la sensibilité du signal temporel :

$$\partial_z g(t, r; 0) = \langle \delta, S \rangle, \quad (3.20)$$

où S est la transformée de Fourier inverse en temps de \hat{S} .

Notons que, dans ce paragraphe, le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ utilisé se réfère à une intégrale impropre car le domaine vertical s'étend de $z = 0$ à $z \rightarrow \infty$. La convergence ne pose pas de difficulté quand seules les fonctions propres $\psi_j(z)$ sont intégrées du fait de leur comportement exponentiellement décroissant :

$$\psi_j(z) \sim a(z)e^{-bz}, \quad (3.21)$$

quand $z \rightarrow \infty$, où $|a|$ est une fonction bornée et b un réel positif. Mais les formules de sensibilité (3.9) et (3.11) font intervenir en outre dans les intégrales la perturbation δ et la célérité de base c_0 au carré, au dénominateur. Le caractère borné de δ ne modifie pas les propriétés de convergence et le caractère monotone croissant de la célérité effective c_0 au-delà d'une certaine altitude (car la température est croissante dans la thermosphère, au-dessus de 100 km d'altitude) assure aussi la convergence de l'intégrale. Enfin, pour les applications numériques, étant donné que nous bornons le domaine avec une altitude maximum $z_\infty > 0$, les intégrales portent sur l'intervalle fini $[0, z_\infty]$ et sont convergentes.

3.2.2 Décomposition sur une base d'ondelettes

Dans la section précédente, en dehors de son caractère continu, rien n'est précisé sur la nature de la perturbation $\delta(z)$ appliquée à l'état de base. Nous souhaitons dans ce chapitre mener une analyse globale de la sensibilité qui permette d'éclairer l'influence de chaque structure de l'atmosphère sur la propagation. Il faut donc décomposer δ sur une base qui représente ces différentes structures. En particulier, les différentes échelles atmosphériques peuvent être étudiées en décomposant δ sur une base de Fourier par exemple. Cependant, nous savons que des gammes d'altitudes particulières peuvent aussi jouer un rôle significatif sur la propagation : typiquement les zones d'inversion de gradient de température qui constituent des guides d'onde. Donc la base de décomposition de la perturbation doit non seulement distinguer les échelles mais aussi les altitudes caractéristiques. C'est pour cette raison que nous décidons ici de représenter les structures atmosphériques à l'aide d'une base d'ondelettes.

La décomposition en ondelettes est une technique similaire à la transformée de Fourier à court terme (ou à fenêtre glissante). Apparue pour la première fois au début du XXème siècle avec Alfréd Haar (1910), elle correspond intuitivement à l'utilisation de petits paquets d'ondes (d'où son nom). Plus précisément, chaque ondelette θ est une fonction qui résulte d'une transformation homothétique à partir d'une unique fonction Θ appelée ondelette mère :

$$\theta_{sd}(z) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Theta \left(\frac{z-d}{s} \right), \quad z, d \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}^+. \quad (3.22)$$

Comme pour une analyse de Fourier, cette technique apporte une information sur le contenu fréquentiel d'un signal et, du fait du caractère *local* des ondelettes, une information sur la position dans le signal. Ainsi, une base d'ondelettes peut décrire l'ensemble des positions et échelles souhaitées pour une étude. C'est ce qui nous

intéresse ici : identifier l'effet des structures de l'atmosphère sur la propagation infrasonore.

Nous souhaitons ici utiliser une base discrète d'ondelettes orthogonales ([Meyer 1992]) et plus précisément avec l'approche multi-résolution de [Mallat 1989]. L'algorithme de Mallat, dont on trouve un exposé précis dans [Truchetet 1998], permet d'effectuer la transformée et la transformée inverse sur une base orthonormée d'ondelettes de façon efficace et peu coûteuse. Cette méthode fait intervenir une base dyadique, c'est-à-dire que le rapport d'échelle entre les ondelettes est une puissance de 2 :

$$\theta_{mn}(z) = 2^{-m/2} \Theta(2^{-m}z - n), \quad m, n \in \mathbb{Z}. \quad (3.23)$$

Si l'ondelette mère $\Theta(z)$ est une fonction mesurable de \mathbb{R} , de carré sommable, vérifiant :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta(z)\Theta(z+n)dz = \delta(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.24)$$

$$\sum_n \left| \hat{\Theta}(\xi + 2\pi n) \right|^2 = 1, \quad (3.25)$$

et

$$\hat{\Theta}(0) = 1, \quad (3.26)$$

(où ici $\delta(n) = 1$ si $n = 0$ et vaut 0 ailleurs) alors la famille $(\theta_{mn}(z))_{m,n \in \mathbb{Z}}$ constitue bien une base orthonormée ([Truchetet 1998]). En pratique, nous nous concentrons ici sur un intervalle défini pour les positions possibles (nous étudions le domaine $z_1 < z < z_2$) et de même considérons un domaine fréquentiel fini, ici caractérisé par les échelles $\lambda_z \in [2^{m_1}, 2^{m_2}]$, avec $m_1 < m_2 \in \mathbb{Z}$. Ainsi, la perturbation $\delta(z)$ se décompose de la façon suivante :

$$\delta(z) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \sum_{n=2^{-m}n_1}^{2^{-m}n_2} x_{mn} \theta_{mn}(z) \quad (3.27)$$

où $n_1 = \lceil z_1 \rceil$ et $n_2 = \lfloor z_2 \rfloor$. Dans les faits, étant donné qu'à chaque changement d'échelle (passage à une échelle plus « grossière » : $m \rightarrow m+1$), nous considérons moitié moins de positions n , nous ajustons au préalable les valeurs n_1 et n_2 de sorte que $N = n_2 - n_1 + 1$ soit une puissance de 2. Ce faisant, les coefficients x_{mn} correspondent à la transformée discrète de δ en ondelettes, définie par :

$$x_{mn} = \int_{z_1}^{z_2} \delta(z) \theta_{mn}(z) dz. \quad (3.28)$$

Avec l'approche multi-résolution de l'algorithme FWT (Fast Wavelet Transform) on peut calculer les coefficients x_{mn} sans calculer explicitement les intégrales, mais en utilisant récursivement un filtre numérique sur les données $\delta(z_i)$ (où les altitudes z_i correspondent à une grille régulière d'altitudes, avec la résolution la plus fine : $z_{i+1} - z_i = 2^{m_1}$). Les coefficients du filtre caractérisent le type d'ondelette utilisé (ils caractérisent l'ondelette mère). La transformée inverse (retrouver un signal à partir des coefficients x_{mn}) s'effectue à l'aide d'une méthode similaire.

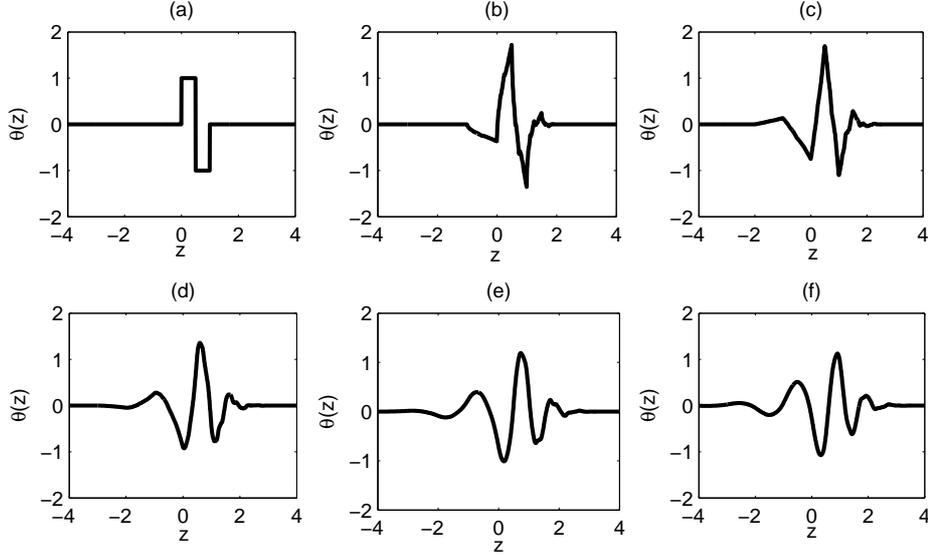


FIGURE 3.1 – Ondelettes mère de Daubechies (a) D2 (aussi appelée ondelette de Haar), (b) D4, (c) D6, (d) D8, (e) D10 et (f) D12.

Nous utilisons ici les ondelettes de [Daubechies 1988] (voir la figure 3.1). Largement répandues et documentées (utilisées dans le standard JPEG 2000) ce sont des ondelettes à support compact, et dont les filtres utilisés dans l’algorithme de Mallat sont à réponse impulsionnelle finie (filtres FIR). Sur la figure 3.2(b) est représenté un exemple de transformée en ondelettes D4 effectué à l’aide de l’algorithme de Mallat. Sur l’exemple proposé, on remarque qu’il suffit de balayer 6 niveaux de résolution, de $m = 1$ ($\lambda_z = 2$ km) à $m = 6$ ($\lambda_z = 64$ km), pour retrouver exactement la fonction δ d’origine avec la transformée inverse (figure 3.2(c)).

Dans la suite, afin d’alléger les notations et pour avoir une représentation vectorielle de la décomposition en ondelettes, nous abandonnons la notation en double indice (m, n) et adoptons un unique indice p :

$$\theta_p(z) = \theta_{mn}(z), \quad (3.29)$$

si $p = 2N(2^{-m_1} - 2^{-m}) + n - 2^{-m}n_1 + 1$, de sorte que p varie de 1 à $P = N(2^{-m_1+1} - 2^{-m_2})$. Ainsi, la perturbation $\delta(z)$ se décompose de la façon suivante :

$$\delta(z) = \sum_{p=1}^P x_p \theta_p(z). \quad (3.30)$$

La base d’ondelettes étant orthonormée, nous pouvons déduire que

$$\|\delta\|_{L^2} \approx \|X\|_2, \quad (3.31)$$

si X est le vecteur dont les composantes sont les x_p , $p = 1, 2, \dots, P$.

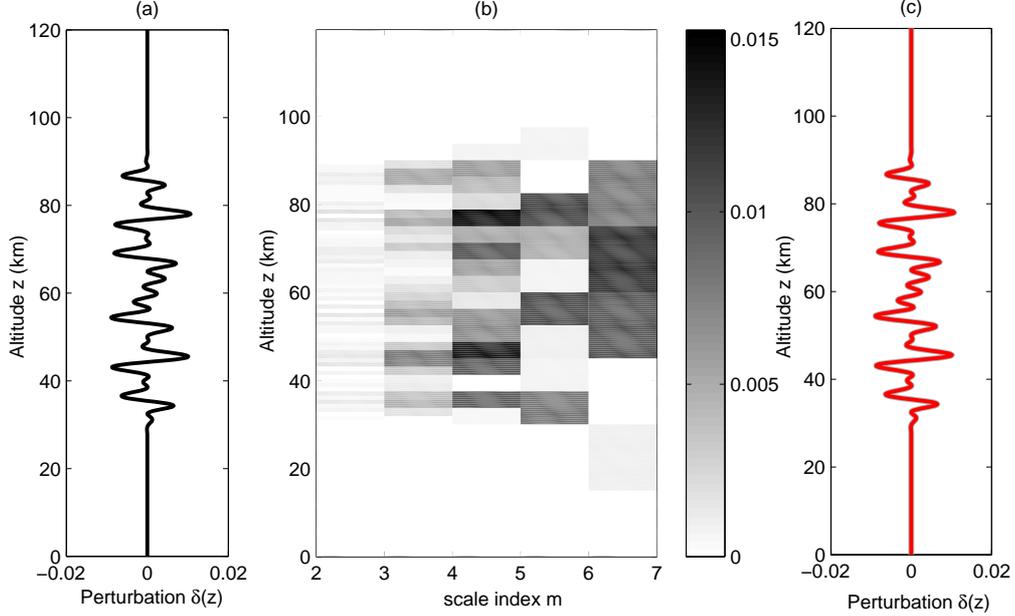


FIGURE 3.2 – (a) Perturbation $\delta(z)$ quelconque. (b) Représentation de la transformée en ondelettes D4 de $\delta(z)$. Sont affichés les coefficients $|x_{mn}|$ en fonction de l’altitude z correspondant à n , et de l’indice d’échelle m . (c) En gris : $\delta(z)$, et en rouge : la transformée inverse issue des coefficients x_{mn} représentés sur la figure (b).

Suivant le formalisme introduit ici, chaque structure atmosphérique (caractérisée par une altitude et une échelle) est représenté par une ondelette θ_p . Le fait de projeter la perturbation $\delta(z)$ sur ces structures permet de ré-interpréter le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ comme une transformée en ondelettes. En effet, pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^+)$,

$$\langle \delta, f \rangle \approx \sum_{p=1}^P x_p y_p, \quad (3.32)$$

où $(y_p)_{p \leq P}$ est la transformée en ondelettes de $f(z)$.

3.2.3 Matrice de sensibilité

Si nous adoptons une décomposition en ondelettes pour la perturbation de célérité effective $\delta(z)$, les calculs de sensibilité présentés en début de chapitre permettent alors de détailler le rôle particulier de telle ou telle ondelette dans la propagation infrasonore.

En effet, si on injecte la décomposition (3.30) dans l’expression de la sensibilité

de la valeur propre k_j (3.9), alors on obtient :

$$\partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) = -\frac{\omega^2}{k_j} \sum_p x_p \int_0^\infty \theta_p(z) \left[\frac{\psi_j(z)}{c_0(z)} \right]^2 dz, \quad (3.33)$$

soit

$$\partial_\varepsilon \tilde{k}_j(0) = \sum_p x_p \kappa_{jp}, \quad (3.34)$$

si $(\kappa_{jp})_{p \leq P}$ est le résultat de la transformée en ondelettes de $-\omega^2/k_j(\psi_j/c_0)^2$. Chaque coefficient κ_{jp} correspond ici à la sensibilité de la valeur propre k_j si on perturbe le profil c_0 avec l'ondelette θ_p . On remarque que la sensibilité du spectre peut alors être obtenue simplement via une multiplication matrice-vecteur :

$$\begin{bmatrix} \partial_\varepsilon \tilde{k}_1(0) \\ \partial_\varepsilon \tilde{k}_2(0) \\ \vdots \\ \partial_\varepsilon \tilde{k}_N(0) \end{bmatrix} = \mathbf{K}X, \quad (3.35)$$

si les éléments de la matrice \mathbf{K} sont les coefficients κ_{jp} .

De façon similaire, si l'on examine la sensibilité d'un signal infrasonore pris au sol, à une distance r de la source, nous pouvons détailler le rôle des différentes échelles atmosphériques. Introduisons (3.30) dans (3.13) :

$$\partial_\varepsilon \hat{g}(\omega, r; 0) = \sum_p x_p \int_0^\infty \theta_p(z) \hat{S}(z, \omega, r) dz, \quad (3.36)$$

soit

$$\partial_\varepsilon \hat{g}(\omega, r; 0) = \sum_p x_p \hat{\sigma}_p(\omega, r), \quad (3.37)$$

si $(\hat{\sigma}_p(\omega, r))_{p \leq P}$ est le résultat de la transformée en ondelettes de $\hat{S}(z, \omega, r)$. Et, de la même façon, la sensibilité du signal temporel se déduit :

$$\partial_\varepsilon g(t, r; 0) = \sum_p x_p \sigma_p(t, r), \quad (3.38)$$

où $(\sigma_p(t, r))_{p \leq P}$ sont les coefficients de la transformée en ondelettes de $S(z, t, r)$. Il apparaît clairement ici que $\sigma_p(t, r)$ est aussi la transformée de Fourier inverse en temps de $\hat{\sigma}_p(\omega, r)$.

A présent, nous échantillons le domaine fréquentiel. Pour rappel, le chemin d'intégration L_ω que nous adoptons ici est l'axe réel translaté dans le demi-plan $\omega_i > 0$ (l'intégrale est donc une transformée de Laplace). Pour les applications numériques, c'est la partie réelle de la fréquence qui est échantillonnée et sur laquelle l'algorithme FFT est appliqué. Le retour à la transformée de Laplace à partir de l'intégrale de Fourier se fait alors au moyen d'un facteur multiplicatif :

$$\int_{L_\omega} \partial_\varepsilon \hat{g}(\omega, r; 0) e^{-i\omega t} d\omega = e^{\omega_i t} \times \int_{\mathbb{R}} \partial_\varepsilon \hat{g}(\omega_r + i\omega_i, r; 0) e^{-i\omega_r t} d\omega_r. \quad (3.39)$$

Notons alors M la taille de l'échantillon en fréquence. On définit ainsi une grille régulière de pulsations réelles $(\omega_m)_{m \leq M}$. De même, l'échelle temporelle se voit discrétisée : $(t_m)_{m \leq M}$. A une distance r fixée, le signal infrason peut donc être représenté par un vecteur :

$$Y(\varepsilon) = \begin{bmatrix} g(r, t_1; \varepsilon) \\ g(r, t_2; \varepsilon) \\ \vdots \\ g(r, t_M; \varepsilon) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \hat{Y}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \hat{g}(r, \omega_1; \varepsilon) \\ \hat{g}(r, \omega_2; \varepsilon) \\ \vdots \\ \hat{g}(r, \omega_M; \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Et la sensibilité du signal infrasonore à une perturbation atmosphérique est alors le résultat d'une multiplication matrice-vecteur :

$$\partial_\varepsilon Y(0) = \Sigma X \quad \text{et} \quad \partial_\varepsilon \hat{Y}(0) = \hat{\Sigma} X \quad (3.41)$$

où les matrices Σ et $\hat{\Sigma}$ sont des matrices rectangulaires $M \times P$ dont les éléments sont respectivement $\sigma_p(t_m, r)$ et $\hat{\sigma}_p(\omega_m, r)$.

Examinons le statut particulier de la matrice Σ (ou $\hat{\Sigma}$). Il s'agit d'une version discrétisée de l'application $\mathcal{S} : \delta \mapsto \partial_\varepsilon g$ qui, du fait de la représentation en ondelettes, permet de lier directement les structures atmosphériques au signal infrasonore.

En pratique nous construisons la matrice de sensibilité de la façon suivante :

1. Pour chaque ω_m de la grille de fréquence, nous calculons les paires propres $(k_j, \psi_j(z))_{j \leq N}$ du problème (2.8).
2. A l'aide du spectre, nous calculons $\hat{S}(z, \omega_m, r)$ (3.14).
3. Nous utilisons ensuite l'algorithme de Mallat pour calculer $(\hat{\sigma}_p(\omega_m, r))_{p \leq P}$, transformée en ondelettes de $\hat{S}(z, \omega_m, r)$. Il s'agit de la $m^{\text{ième}}$ ligne de la matrice de sensibilité $\hat{\Sigma}$.
4. Une fois les M lignes de $\hat{\Sigma}$ calculées, une FFT inverse sur les P colonnes de $\hat{\Sigma}$ ainsi que la multiplication des lignes par $e^{\omega_i t_m}$ permettent d'obtenir Σ .

Nous rappelons ici que les calculs sont précisés pour la réponse impulsionnelle g . Si l'on souhaite étudier un signal infrasonore résultant d'une source caractérisée par la fonction temporelle $s(t)$, il suffit d'effectuer la convolution des colonnes de Σ avec $s(t_m)$ (ou de multiplier chaque colonne de $\hat{\Sigma}$ par $\hat{s}(\omega_m)$ avant d'effectuer la FFT).

3.2.4 Analyse SVD de la matrice de sensibilité

Nous avons défini dans la section précédente une matrice rectangulaire qui permet de relier une perturbation atmosphérique représentée sur une base d'ondelettes à la sensibilité du signal infrasonore au sol, à une distance r de la source. De la même façon que la méthode des modes normaux permet d'étudier la propagation infrasonore indépendamment de la forme de la source (la somme de résidus peut être considérée comme une fonction de transfert), nous nous proposons ici d'étudier la sensibilité de l'onde à l'état atmosphérique indépendamment de la perturbation.

Nous ne faisons donc ici aucune hypothèse sur δ ou X , et considérons la matrice $\hat{\Sigma}$, construite à l'aide des modes, comme une "fonction de transfert" pour la sensibilité.

Et, de même que la décomposition en valeurs propres de l'opérateur de propagation fournit une représentation structurée et optimale pour l'onde infrasonore, nous effectuons ici la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la matrice de sensibilité afin de dégager une structure présentant les principales tendances de la sensibilité.

Sachant que $\hat{\Sigma}$ est de taille $M \times P$, alors il existe une factorisation de la forme :

$$\hat{\Sigma} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^* \quad (3.42)$$

avec \mathbf{U} et \mathbf{V} des matrices unitaires respectivement de taille $M \times M$ et $P \times P$ (\mathbf{V}^* est la transconjugée de \mathbf{V}) et \mathbf{S} est une matrice rectangulaire ($M \times P$) dont les éléments diagonaux sont des réels positifs ou nuls (ses autres éléments sont nuls partout ailleurs.) Les éléments diagonaux de \mathbf{S} , généralement ordonnés par ordre décroissant, sont les valeurs singulières de $\hat{\Sigma}$, tandis que les colonnes de \mathbf{U} et \mathbf{V} sont respectivement appelées vecteurs singuliers à gauche (ou de sortie) et à droite (ou d'entrée) de $\hat{\Sigma}$.

Cette factorisation est voisine de la décomposition classique en valeurs propres pour $M = P$. En effet, le carré du module de chaque valeur singulière non-nulle de $\hat{\Sigma}$ est égal au module de la valeur propre non-nulle correspondante de $\hat{\Sigma}^*\hat{\Sigma}$ et de $\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^*$. Et les vecteurs singuliers à gauche sont des vecteurs propres pour $\hat{\Sigma}\hat{\Sigma}^*$, tandis que les vecteurs singuliers à droites sont des vecteurs propres pour $\hat{\Sigma}^*\hat{\Sigma}$.

Numériquement, la décomposition en valeurs singulières peut s'avérer coûteuse pour les matrices de grande taille. Cependant, un choix de base d'ondelettes qui se limite aux altitudes et échelles d'intérêt pour représenter la perturbation δ permet de réduire le nombre de colonnes P de la matrice. En outre, de la même façon que pour la recherche de valeurs propres, la projection sur des sous-espaces de Krylov permet de réduire le temps de calcul tout en convergeant sur les plus grandes valeurs singulières (bibliothèque Fortran ARPACK, ou fonction *svds* dans Matlab).

La décomposition en valeurs singulières provient originellement de la géométrie différentielle (fin XIXème siècle). Cette technique a été largement étudiée, généralisée à plusieurs dimensions, et est aujourd'hui particulièrement utilisée en traitement du signal, en météorologie et en statistique. Il existe en effet une interprétation statistique de cette factorisation quand elle est appliquée à un ensemble de données, les vecteurs singuliers de sortie représentent alors les directions de plus grande variation et les valeurs singulières l'énergie (ou représentativité). Cela rejoint directement les techniques d'analyse statistique de type décomposition de Karhunen-Loève, ou analyse en composantes principales, largement utilisées dans les études météorologiques (Empirical Orthogonal Functions, ou EOF, présentés par [North 1982]).

Cette interprétation de type *représentativité* de la décomposition en valeurs singulières peut se traduire concrètement dans notre cas. Si, dans la série décroissante de valeurs singulières de $\hat{\Sigma}$, un petit nombre q domine toutes les autres, alors la matrice d'origine peut être approchée par une matrice de rang q qui conserve les

principales tendances :

$$\hat{\Sigma} \approx \sum_{i=1}^q s_i u_i v_i^* \quad (3.43)$$

où les s_i sont les valeurs singulières et u_i et v_i sont les vecteurs singuliers correspondants (les matrices $u_i v_i^*$ sont donc unitaires). Il apparaît alors qu'une telle factorisation met à jour directement le lien entre les structures atmosphériques (les vecteurs singuliers d'entrée, dans l'espace des ondelettes) et des structures dans le spectre de Fourier du signal infrasonore (les vecteurs singuliers de sortie, orthogonaux entre eux). Si l'analyse SVD est effectuée sur Σ , au lieu de $\hat{\Sigma}$, alors le lien sera établi pour des structures du signal en temps (des pics d'arrivée par exemple). L'intérêt de cette approche est qu'elle permet de ne supposer aucune forme particulière pour la perturbation atmosphérique $\delta(z)$. Toutes les possibilités sont explorées au travers de la SVD, et seuls les mécanismes significatifs au regard de la propagation d'infrasons sont révélés.

Par ailleurs, l'analyse SVD de la matrice de sensibilité permet aussi une interprétation probabiliste. Si en effet ε est suffisamment petit pour que l'approximation de premier ordre $\tilde{Y}(\varepsilon) = Y(0) + \varepsilon \Sigma X$ soit valable ($\|\tilde{Y} - Y\| < \eta$ avec η petit), et que les coefficients x_p de la décomposition en ondelettes de la perturbation sont des variables aléatoires centrées de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors :

$$\mathbb{E}[\tilde{Y}] = Y(0), \quad (3.44)$$

et surtout :

$$\mathbb{E}\left[\left(\tilde{Y} - Y(0)\right)\left(\tilde{Y} - Y(0)\right)^T\right] = \varepsilon^2 \Sigma \mathbb{E}[X X^T] \Sigma^T = \varepsilon^2 \Sigma \Sigma^T \quad (3.45)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ est l'espérance mathématique. Dans ce cas, la matrice de covariance du signal infrason (du moins de son approximation au premier ordre) est exactement égale au produit $\Sigma \Sigma^T$. Cela signifie que ses composantes principales indépendantes sont les vecteurs singuliers de sortie de la matrice de sensibilité, et que les valeurs singulières sont exactement les écart-types associés à ces composantes indépendantes. De ce fait, la décomposition en valeurs singulières de Σ donne accès aux tendances principales de l'incertitude associée au signal infrasonore (et l'examen des vecteurs singuliers à droite fournit les structures atmosphériques responsables de ces tendances).

3.3 L'explosion du réacteur de la centrale de Fukushima

3.3.1 Problématique

Nous étudions ici, au moyen de la méthode d'analyse de sensibilité présentée plus haut, le cas de la propagation infrasonore qui eut lieu à l'occasion de l'explosion de réacteur n°1 de la centrale nucléaire de Fukushima-Daiichi (Japon), le 12 mars 2011 (explosion d'hydrogène). Une station microbarographique du réseau IDC (International Data Center), I30JP, située à 243 km de Fukushima, au sud, a détecté un signal infrasonore une dizaine de minutes après l'explosion.

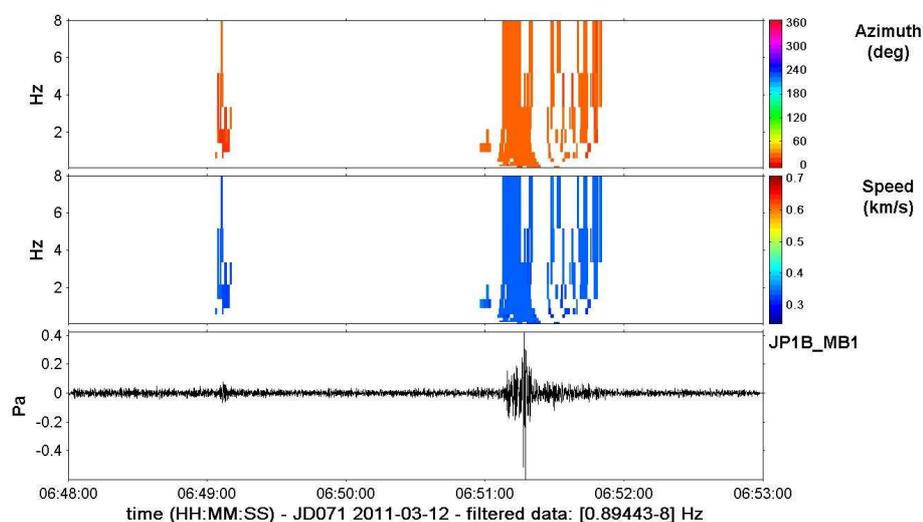


FIGURE 3.3 – Résultat du traitement PMCC (Progressive Multi-Channel Correlation) du signal enregistré par la station infrason I30JP le 12 mars 2011. Représentation en spectrogramme de l'azimut et de la vitesse des arrivées détectées, et signal filtré à 8 Hz.

La figure 3.3 montre que cette station a relevé deux arrivées respectivement entre 12 et 13 min et entre 14 et 15 min après l'explosion. Nous effectuons un premier calcul en utilisant la méthode des modes normaux et construisons le signal infrasonore à 243 km de la source. Pour ce faire, nous testons différents profils de célérité effective (le calcul ne tient pas compte ici d'une lente variation horizontale, c'est l'objet du chapitre suivant). Plus précisément, nous utilisons les bases de données ECMWF ERA-Interim et 91-niveaux, et les coordonnées de la source comme celles de la station de mesure (voir la figure 3.4(a)). Le calcul de signal (figure 3.4(b)) montre une claire domination de la première arrivée, entre 12 et 13 min, tandis que la seconde arrivée, quand elle est visible, est étalée et d'amplitude très faible (relativement à la première). Toute la question est de comprendre pourquoi, alors que deux arrivées ont été détectées à la station I30JP, les calculs ne permettent

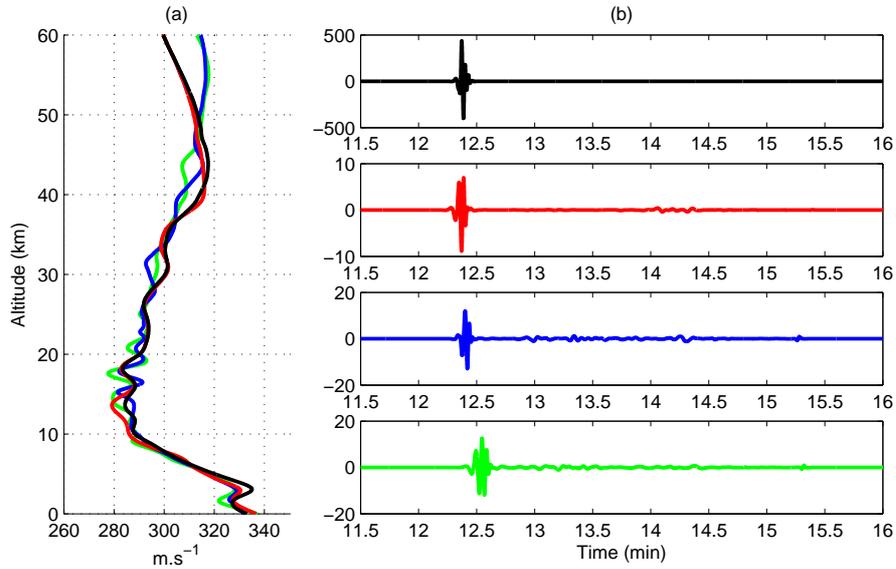


FIGURE 3.4 – (a) Profils de célérité effective. En noir : profil ERA-Interim pris au niveau de la source. En rouge, profil ERA-interim pris au niveau de la station I30JP. En bleu : profil 91 niveaux pris au niveau de la source. En vert, profil 91 niveaux pris au niveau de la station I30JP. (b) Signaux infrasons correspondants aux profils, calculé à l'aide des modes normaux à $r=243$ km de la source. Nous avons utilisé un échantillon de 512 fréquences pris entre 0 et 1 Hz pour les différents calculs de spectre.

d'en voir qu'une. Par ailleurs, alors même que les profils utilisés apparaissent très proches, le profil ERA-Interim à la source (en noir dans la figure 3.4) entraîne une première arrivée d'amplitude 50 fois supérieure à celle des autres cas. Cela semble indiquer une forte sensibilité de cette arrivée infrasonore, et la question est alors de savoir quelle échelle atmosphérique est responsable de cette forte sensibilité, et plus généralement comment le signal réagit lorsque l'on perturbe la célérité effective.

3.3.2 Analyse de sensibilité

Nous souhaitons construire la matrice de sensibilité Σ . Cela ne nécessite pas un grand coût de calcul car nous utilisons les modes déjà calculés (pour construire le signal), et l'approximation pour la sensibilité à grande distance (3.19) est valable dans ce cas. Se pose alors la question du choix de la base d'ondelettes (type d'ondelette et taille de la base). L'étude de convergence présentée dans la figure 3.5 apporte des éclaircissements à ce sujet. D'une part, il apparaît que l'analyse SVD ne dépend pas du type d'ondelettes utilisé. D'autre part, notons que si l'on ne passe pas par la décomposition en ondelettes pour la perturbation, il est possible de construire la

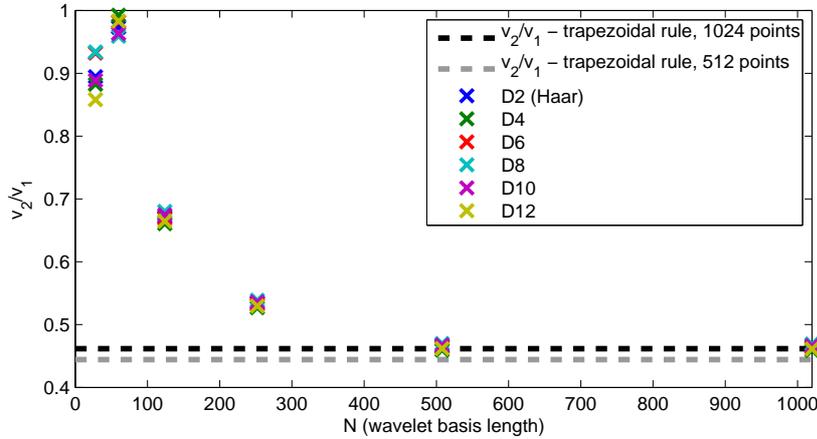


FIGURE 3.5 – Étude de convergence de l’analyse SVD sur la matrice de sensibilité Σ . Est représenté le rapport v_2/v_1 entre les deux premières valeurs singulières de la matrice Σ , lorsque cette dernière est construite dans la base canonique (altitudes) en utilisant la méthode des trapèzes avec 1024 points de discrétisation (pointillés noirs) et 512 points (pointillés gris). Les tracés de couleurs correspondent au rapport v_2/v_1 lorsque Σ est construite avec différents types d’ondelettes de Daubechies. Le rapport est tracé en fonction de la taille de la base.

matrice de sensibilité correspondant à l’opérateur

$$\delta(z) \mapsto \int \delta(z)S(z, t)dz \quad (3.46)$$

en utilisant la méthode des trapèzes pour discrétiser l’intégrale. Et dans ce cas il faut 2 fois plus de points de discrétisation qu’avec la base d’ondelettes pour converger. Cela confirme donc l’intérêt de passer par les ondelettes : la matrice sur laquelle on effectue la SVD est moitié moins grande et le choix de type d’ondelette n’importe pas (la méthode est stable).

Les figures 3.6 et 3.7 montrent respectivement le détail de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de sensibilité pour les profils ERA-Interim pris respectivement à la source et à la station I30JP. Dans le premier cas, la première valeur singulière (en rouge) domine clairement, et, en examinant ses vecteurs singuliers associés, on observe qu’elle lie la sensibilité de la première arrivée à une perturbation de très basse altitude (sous 5 km). Il faut en revanche attendre la 7^{ième} valeur singulière (en bleu), soit 2 ordres de grandeur en dessous de la première, pour observer un mécanisme différent : le lien entre la seconde arrivée dans le signal, et une perturbation haute fréquence entre 40 et 50 km d’altitude (alors même que cette seconde arrivée n’est pas visible dans le signal, voir figure 3.4). En revanche, dans le second cas (figure 3.7), il n’y a plus de valeur singulière dominante (les 23 premières sont du même ordre de grandeur). On ne peut donc plus conclure qu’une sensibilité en particulier domine le signal. Les 22 premières valeurs singulières lient la seconde

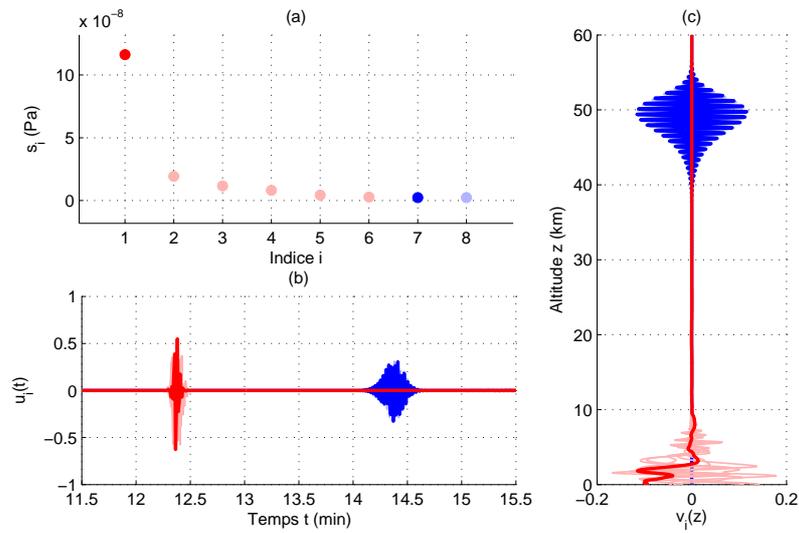


FIGURE 3.6 – Analyse SVD de la matrice de sensibilité Σ calculée pour le profil ERA-Interim à la source (figure 3.4). (a) Les 8 plus grandes valeurs singulières s_i ordonnées par ordre décroissant. (b) Vecteurs singuliers de sortie $u_i(t)$ (sans unité). (c) Transformée en ondelettes inverse des vecteurs singuliers d'entrée $v_i(z)$ (sans unité).

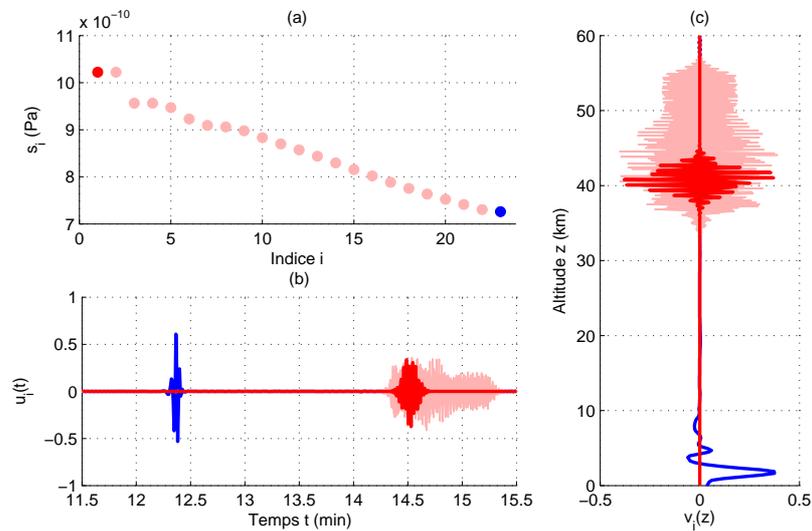


FIGURE 3.7 – Analyse SVD de la matrice de sensibilité Σ calculée pour le profil ERA-Interim à la station I30JP (figure 3.4). (a) Les 23 plus grandes valeurs singulières s_i ordonnées par ordre décroissant. (b) Vecteurs singuliers de sortie $u_i(t)$ (sans unité). (c) Transformée en ondelettes inverse des vecteurs singuliers d'entrée $v_i(z)$ (sans unité).

arrivée à une perturbation haute fréquence autour de 40 km d'altitude. La 23^{ième} valeur relie quant à elle la première arrivée avec une perturbation de la troposphère.

Ces résultats montrent à la fois les intérêts et limites de l'approche SVD pour l'analyse de sensibilité. Tout d'abord, le couple de vecteurs singuliers (d'entrée et de sortie) associé aux plus grandes valeurs singulières permet d'établir un lien formel entre arrivée infrasonore et guide d'onde. Dans les 2 cas traités, nous avons confirmation que la première arrivée est une arrivée troposphérique (les profils de célérité effective ont un fort gradient sous 5 km d'altitude et forment un guide d'onde, voir figure 3.4). Ensuite, même si nos calculs de signaux ne permettent pas d'observer une nette seconde arrivée, l'analyse SVD confirme que cette partie du signal est particulièrement sensible, et qu'elle est en particulier sensible à une perturbation de la stratopause, entre 40 et 50 km d'altitude. Il s'agit donc d'une arrivée stratosphérique. Cependant, ces résultats montrent aussi que le calcul du signal comme l'analyse de sensibilité dépendent fortement de l'état de base $c_0(z)$. Les profils visibles dans la figure 3.4(a) semblent proches mais les signaux associés ont des comportements sensibles très différents. En outre, comme aucune hypothèse n'est faite sur la perturbation, toutes les possibilités sont prises en compte, même les moins réalistes physiquement. Cela ne permet donc pas de conclure sur la seconde arrivée. En effet, comment expliquer qu'elle soit clairement présente dans la détection à I30JP, mais quasiment absente dans nos calculs ?

Dans la suite, nous allons donc faire des hypothèses sur la perturbation δ afin de trouver les conditions pour lesquelles une seconde arrivée peut apparaître dans le signal.

3.3.3 Perturbation optimale de la stratopause

Nous savons qu'en déferlant, les ondes de gravité peuvent générer des couches turbulentes et ainsi engendrer une variabilité non négligeable au niveau de la basse mésosphère et de la stratosphère. C'est pour cette raison que l'on étudie d'abord une perturbation simplifiée de forme gaussienne que l'on teste sur différentes altitudes entre 30 et 60 km. Plus précisément, nous effectuons le calcul du signal à la station I30JP pour les profils perturbés

$$c(z) = c_0(z) [1 + \varepsilon \delta_{z_m}(z)] \quad (3.47)$$

où la perturbation $\delta_{z_m}(z)$ est définie de la façon suivante :

$$\delta_{z_m}(z) = e^{-\frac{(z-z_m)^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.48)$$

Nous prenons des gaussiennes de largeur à mi-hauteur 6 km ($\sigma=6/2.3548$), et une amplitude de 1 % ($\varepsilon = 0.01$). La figure 3.8(b) montre l'évolution du rapport d'amplitude entre la seconde et la première arrivée sur le signal infrasonore. Même si ce rapport reste globalement faible quand on balaye les altitudes z_m (sous 0.2), il apparaît qu'un maximum local est atteint lorsque la perturbation est appliquée à 40 km d'altitude (figure 3.8(a)).

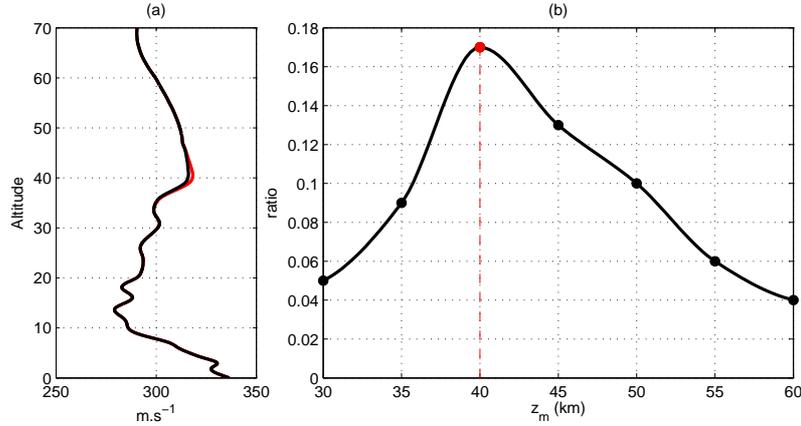


FIGURE 3.8 – (a) Profils de célérité effective. En noir : $c_0(z)$ (ERA-Interim à I30JP), en rouge : $c(z)$, profil perturbé avec une perturbation gaussienne centrée à 40 km. (b) Ratio entre l'amplitude de la seconde arrivée et celle de la première arrivée à la station I30JP en fonction de l'altitude de perturbation z_m .

Nous conservons donc cette altitude caractéristique pour la seconde arrivée et employons cette fois pour modèle de perturbation :

$$\delta_{\lambda_z}(z) = e^{-\frac{(z-z_m)^2}{2\sigma^2}} \times \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_z}(z - z_m)\right) \quad (3.49)$$

où σ garde la même valeur, $z_m = 40$ km, et où on fait varier la longueur d'onde λ_z . Il s'agit d'un modèle naïf et simplifié qui représente les fluctuations de petites échelles atmosphériques. Nous conservons ici une amplitude de 1 % pour pouvoir étudier uniquement le rôle joué par la longueur d'onde λ_z . La figure 3.9(b) montre l'évolution du rapport d'amplitude entre la seconde et la première arrivée sur le signal lorsque cette longueur d'onde varie. Un premier maximum apparaît pour $\lambda_z \approx 1$ km et l'amplitude de l'arrivée stratosphérique atteint alors 4 fois l'amplitude de la première arrivée (figures 3.9(a) et 3.9(c)). On note un second maximum local, plus faible, pour $\lambda_z \approx 1.8$ km. Ensuite, plus la longueur d'onde augmente, moins l'arrivée stratosphérique est présente.

Ce qui frappe dans ce dernier résultat, c'est qu'avec une amplitude constante et faible (seulement 1 %!), la perturbation puisse avoir autant d'effet du seul fait de sa longueur d'onde. Des petites fluctuations de l'ordre de 1 km au niveau de la stratopause peuvent rendre le guide stratosphérique dominant dans la propagation des infrasons et nous permettent alors de retrouver nettement la deuxième arrivée détectée par la station I30JP (figure 3.3). On peut de même remarquer que ces petites longueurs d'onde rappellent la forme des vecteurs singuliers d'entrée associés à la deuxième arrivée dans les analyses SVD de la section précédente (figures 3.6 et 3.7). En particulier, le spectre de Fourier du premier vecteur singulier d'entrée de l'analyse SVD présenté sur la figure 3.7 présente un pic pour la longueur d'onde de

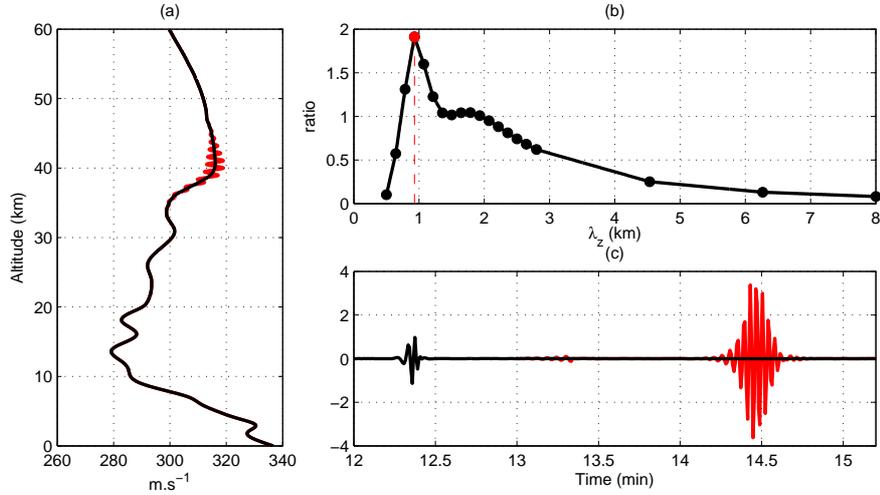


FIGURE 3.9 – (a) Profils de célérité effective. En noir : $c_0(z)$ (ERA-Interim à I30JP), en rouge : $c(z)$, profil perturbé avec une perturbation gaussienne centrée à 40 km modulée avec un cosinus de longueur d’onde $\lambda_z=1$ km. (b) Ratio entre l’amplitude de la seconde arrivée et celle de la première arrivée à la station I30JP en fonction de la longueur d’onde λ_z qui caractérise la perturbation. (c) Signal infrason calculé à $r=243$ km. En noir : calcul avec $c_0(z)$. En rouge : calcul avec la perturbation optimale δ_{λ_z} ($\lambda_z=1$ km).

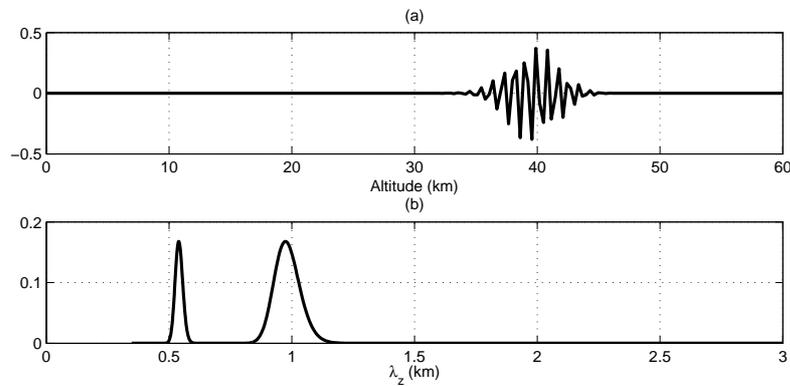


FIGURE 3.10 – (a) Transformée en ondelettes inverse du premier vecteur singulier d’entrée v_1 de l’analyse SVD présentée dans la figure 3.7. (b) Spectre de puissance de Fourier du vecteur singulier v_1 , représenté en fonction de la longueur d’onde λ_z .

1 km (figure 3.10). Il semble que l’influence des petites fluctuations en haute altitude fasse partie des tendances modélisées par la matrice de sensibilité. Se pose alors la question de savoir si ce résultat peut effectivement être approché au moyen de la matrice de sensibilité Σ et d’une approximation au premier ordre.

3.3.4 Approximation au premier ordre

Comme indiqué précédemment, l'approximation au premier ordre de la série de Taylor fait directement intervenir la matrice de sensibilité et donne au signal une dépendance affine en la perturbation :

$$\tilde{Y}(\varepsilon) = Y(0) + \varepsilon \Sigma X_{\lambda_z} \quad (3.50)$$

où $\tilde{Y}(\varepsilon)$ est l'approximation du signal discrétisé $Y(\varepsilon)$, et X_{λ_z} est un vecteur contenant les coefficients de la transformée en ondelettes de $\delta_{\lambda_z}(z)$. L'étude de l'erreur d'approximation (figure 3.11(a)) montre que l'approche affine s'avère bonne dès lors que ε ne dépasse pas 1 % (erreur inférieure à 10^{-2}). Cela représente un gain certain en temps de calcul : un unique calcul autour de l'état de base $c_0(z)$ via les modes normaux suffit pour atteindre tous les cas perturbés dès lors que la perturbation n'excède pas 1 %. Nous pouvons donc conserver ici des perturbations d'amplitude $\varepsilon = 0.01$. Si l'on réitère l'étude précédente mais avec le modèle approché $\tilde{Y}(\varepsilon)$, nous retrouvons sans peine le principal maximum trouvé pour $\lambda_z = 1$ km (figure 3.11(b)). En revanche, l'erreur commise augmente par la suite et ne permet pas de retrouver l'optimum secondaire à $\lambda_z = 1.8$ km.

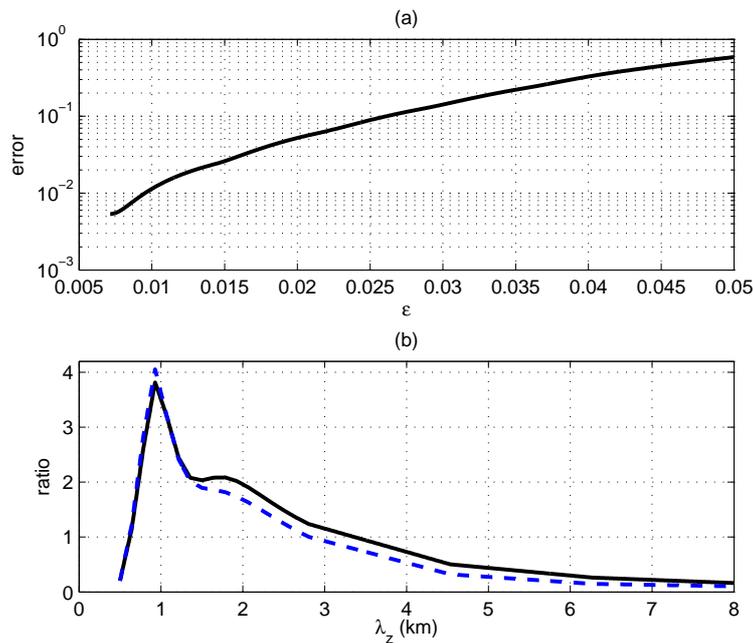


FIGURE 3.11 – (a) Erreur de l'approximation au premier ordre du signal perturbé : $\max_{\lambda_z} \left\| \tilde{Y} - Y \right\| / \|Y\|$ (norme L^2) en fonction du paramètre ε . (b) Evolution du ratio d'amplitude entre la seconde et la première arrivée du signal infrason, avec une perturbation $\varepsilon = 1$ %, quand λ_z varie. En noir : calcul exact (figure 3.9), en tirets bleus : calcul avec l'approximation de premier ordre $\tilde{Y}(\varepsilon)$.

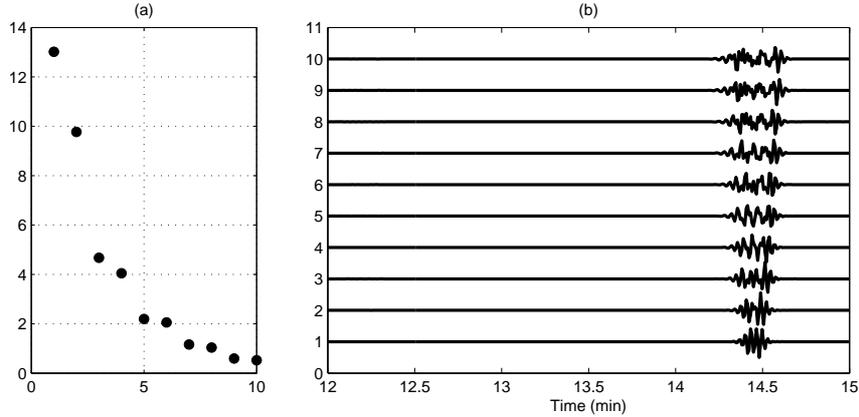


FIGURE 3.12 – (a) Les 10 plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance du signal approché \tilde{Y} , rangées par ordre décroissant. (b) Vecteurs propres associés aux 10 plus grandes valeurs propres de la matrice de covariance.

Une autre façon de confirmer cette tendance est d'effectuer une étude d'incertitude. Si l'on considère à présent que la fréquence caractéristique $k_z = 2\pi/\lambda_z$ de la perturbation est une variable aléatoire, alors on a facilement accès aux moments statistiques du signal (de son approximation au premier ordre). En effet :

$$\mathbb{E} \left[\left(\tilde{Y} - Y(0) \right) \left(\tilde{Y} - Y(0) \right)^T \right] = \varepsilon^2 \mathbf{\Sigma} \mathbf{C} \mathbf{\Sigma}^T \quad (3.51)$$

avec \mathbf{C} la matrice de covariance de X . En pratique, nous imposons pour la fréquence k_z une loi uniforme entre $7.854 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ ($\lambda_z = 8 \text{ km}$) et 0.0126 m^{-1} ($\lambda_z = 500 \text{ m}$). En construisant un échantillon de $N = 10^4$ réalisations de X , transformée en ondelettes de δ_{λ_z} , on peut estimer classiquement (estimateur de Monte-Carlo) la matrice de covariance \mathbf{C} . Disposant alors de la matrice de covariance du signal, nous pouvons effectuer une analyse en composantes principales, c'est à dire rechercher le spectre de $\mathbf{\Sigma} \mathbf{C} \mathbf{\Sigma}^T$. Nous constatons que les 2 (voire 4) plus grandes valeurs propres dominent le reste du spectre, et que les vecteurs propres associés (les composantes indépendantes de plus grande variance) correspondent à la seconde arrivée du signal (figure 3.12). On voit ici directement l'impact de l'hypothèse que l'on a faite sur la forme de la perturbation. En effet, lorsqu'aucune hypothèse n'est faite, toutes les échelles et toutes les positions sont équiprobables et l'analyse d'incertitude montre alors que les variances de la première et la seconde arrivée sont quasiment équivalentes (analyse SVD présentée sur la figure 3.7). Si au contraire la perturbation concerne la stratopause, une tendance se dégage clairement : la haute variabilité de la seconde arrivée.

Enfin, la question de la perturbation optimale peut être directement abordée au moyen de l'analyse SVD. Le lien entre valeurs singulières et problèmes d'optimisation est connu et exploité en physique de l'atmosphère. Par exemple, la SVD est utilisée pour identifier la configuration optimale de température de surface océanique qui

maximise le forçage de l'atmosphère ([Sokolikhina 2006], [Frankignoul 2011]). Dans notre cas, si l'on se focalise sur la seconde arrivée, nous pouvons définir la quantité scalaire à maximiser de la façon suivante :

$$\mathcal{J}(X) = \left(\tilde{Y} - Y(0) \right)^T \mathbf{I}_0 \left(\tilde{Y} - Y(0) \right) \quad (3.52)$$

où \mathbf{I}_0 est une matrice carrée nulle partout sauf sur les termes diagonaux correspondants aux dates $13 < t_m < 15$ min, ce qui fait de $\mathcal{J}(X)$ la norme 2 de la perturbation de la seconde arrivée dans le signal. On peut aussi écrire :

$$\mathcal{J}(X) = \varepsilon^2 X^T \Sigma^T \mathbf{I}_0 \Sigma X = \varepsilon^2 X^T \Sigma_0^T \Sigma_0 X \quad (3.53)$$

où Σ_0 est la matrice de sensibilité Σ à laquelle on a retiré les lignes ne correspondant pas à la plage de détection de la seconde arrivée ($13 < t_m < 15$ min). La question devient donc un problème de perturbation optimale pour la forme quadratique $\Sigma_0^T \Sigma_0$, sous la contrainte $\|X\| = 1$. Nous pouvons déduire de l'analyse SVD de Σ (figure 3.7) que cette même analyse portée cette fois sur Σ_0 fournit la même distribution de valeurs singulières et vecteurs singuliers que Σ à ceci près que les valeurs et vecteurs singuliers liés à la première arrivée (et à la perturbation troposphérique) sont retirés. Le maximum du problème d'optimisation quadratique sous contrainte est donné par la plus grande valeur propre de $\Sigma_0^T \Sigma_0$, qui est donc aussi le carré de la première valeur singulière donnée dans la figure 3.7. La perturbation optimale X^* associée est donc aussi le premier vecteur singulier (figure 3.10), d'échelle caractéristique $\lambda_z \approx 1$ km. Nous retrouvons ainsi le résultat de la section précédente, mais cette fois sans contraindre explicitement la forme de la perturbation δ , et uniquement au moyen de l'analyse SVD du problème perturbé autour de l'état de base (1 seul calcul de modes normaux nécessaire). Le paquet d'ondelettes localisé sur la stratopause, d'échelle caractéristique 1 km, est donc bien la perturbation qui rend la seconde arrivée maximale et dominante dans le signal (alors même que cette seconde arrivée n'apparaît pas avec l'état de base).

La question qui peut apparaître quand on compare le signal relevé en station (figure 3.3) et les quelques signaux calculés directement (figure 3.4) est de savoir si les deux arrivées captées sont le fait de deux explosions distinctes ou bien d'une seule explosion et de l'effet de structures atmosphériques sur la propagation. La décomposition en valeurs singulières du problème perturbé correspond en général à une analyse d'incertitude sans hypothèse sur la perturbation (loi uniforme) et ne peut répondre à cette question. Néanmoins, si on localise la perturbation aléatoire à 40 km, on constate la grande variabilité de la seconde arrivée du signal. Et si l'on cherche à optimiser cette seconde arrivée, l'analyse SVD de la matrice de sensibilité nous fournit même directement la structure atmosphérique responsable sous la forme d'un paquet d'ondelettes. La stratopause étant une région de l'atmosphère dont nous savons par ailleurs qu'elle est soumise à une grande variabilité et pour laquelle les données dont nous disposons sont imprécises, nous sommes donc fondés à penser que les deux arrivées détectées à la station I30JP ont pour origine une unique explosion, et que la seconde arrivée est une onde guidée par la stratosphère.

3.4 Problème de géolocalisation du bolide tombé en Bretagne le 19 Juillet 2011

3.4.1 Contexte

Le 19 juillet 2011, autour de 03h20' TU, la chute d'un bolide a été visuellement constatée au dessus de la Bretagne et des signaux infrasonores et sismiques ont été enregistrés. Nous examinons ici essentiellement les données issues d'une part de la station infrason FLERS pour laquelle le signal enregistré est très net (onde en N), et d'autres part des stations sismiques GRR, QUIF, ROSF et SGMF qui se situent en Bretagne et en Normandie (voir la figure 3.13). En ne prenant en compte que la vitesse du son moyenne, et en la perturbant uniformément, une première géolocalisation statistique du point d'émission utilisant les données de ces 5 stations fournit une localisation finale sous la forme d'un point et d'une ellipse de confiance. Le point central P_0 de l'ellipse est aux coordonnées (lat = 48.08° , lon = -2.08°), le demi-grand axe est de 0.1097° (soit environ 11 km) et le demi-petit axe de 0.0855° (environ 9 km). La date d'émission est estimée à $T_0 = 03h22'20''$ TU avec un écart-type de 8 s. Par ailleurs, la station FLERS a enregistré un angle d'azimut et un angle d'élévation d'entrée du signal respectivement de 237.5° et 8.2° .

Le problème que pose cette démarche est qu'elle dépend fortement des caractéristiques du bruit choisi pour perturber la vitesse moyenne, et ce bruit est choisi arbitrairement. La qualité de la géolocalisation (la taille de l'ellipse) n'est donc que le reflet des paramètres pris en entrée.

L'objectif ici est de montrer que l'on peut obtenir une géolocalisation affinée en utilisant un modèle numérique de propagation infrasonore grâce à une approche perturbative. Un emploi similaire de l'analyse de sensibilité a déjà été illustré dans [Haynes 2013] pour l'étude de la chute de la météorite de Carancas (Pérou, 2007). En particulier, on peut calculer l'impact de certains paramètres physiques incertains caractérisant l'événement sur l'onde émise. Dans notre cas, nous utilisons un modèle simple d'équation d'onde pour lequel nous avons effectué une analyse de sensibilité via l'approche perturbative exposée dans ce chapitre. Nous montrons que cette approche permet d'une part de minimiser le nombre de calculs nécessaires dans le plan d'expérience nécessaire à l'étude, et d'autre part que la sensibilité des signaux aux paramètres variables est une indication qui permet d'utiliser au mieux les informations fournies par les stations de mesure.

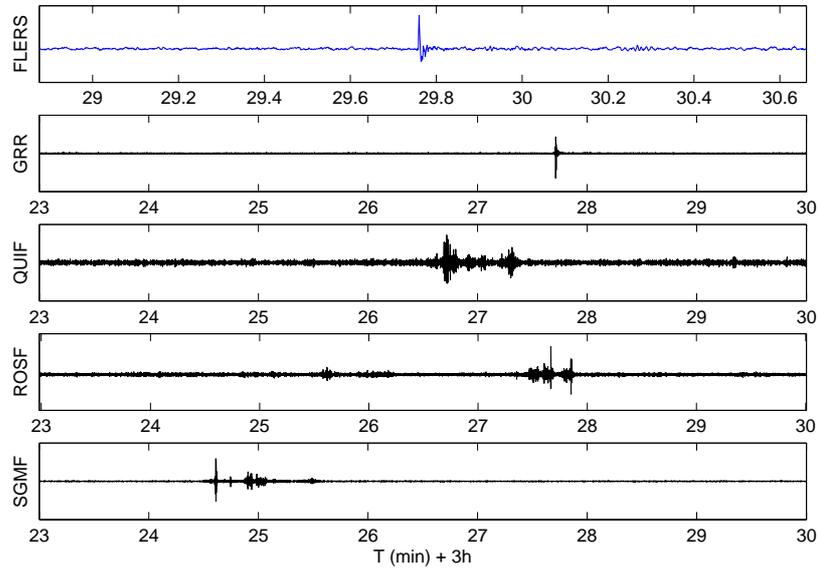


FIGURE 3.13 – Enregistrement des stations de mesure le 19 juillet 2011. FLERS (station infrason) : signal filtré dans la bande $[0.2,8]$ Hz. GRR, QUIF, ROSF, SGMF (stations sismiques) : signaux filtrés dans la bande $[2,8]$ Hz.

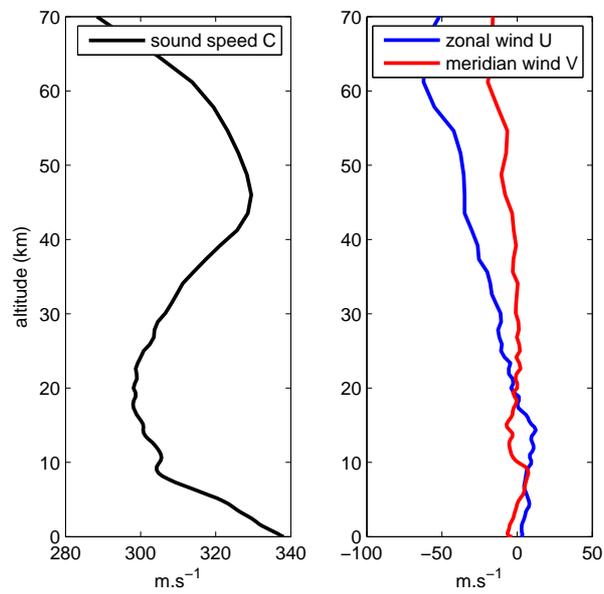


FIGURE 3.14 – Profils de célérité du son dans l'air et de vents pris à la verticale du point P_0 (lat= 48.08° , lon= -2.08°) le 19 juillet 2011, données 91 niveaux issues de la base ECMWF

3.4.2 Approche perturbative et plan d'expérience

Nous souhaitons ici simuler les arrivées infrasonores aux 5 stations de mesure avec un degré de liberté spatial pour la localisation de la source. Le signal mesuré à la station infrason FLERS étant très net, nous supposons que l'azimut d'entrée ainsi que l'angle d'élévation du signal mesuré est correct. Nous définissons donc un degré de liberté horizontal x le long de l'azimut mesuré par FLERS, allant de part et d'autre du point P_0 issu de la première géolocalisation (voir la figure 3.15). L'altitude z de cette source est ensuite donnée par l'angle d'élévation. Par ailleurs, nous supposons la météo invariante horizontalement et prenons comme référence les profils de température et de vents pris à la verticale de P_0 . Nous utilisons les données 91 niveaux de la base ECMWF jusqu'à 80 km d'altitude (voir la figure 3.14) raccordées avec les modèles empiriques HWM-93 et MSISE-90 pour les hautes altitudes (au delà de 100 km). Dans ces conditions, une variation du paramètre spatial x aura comme seul effet sur l'équation d'onde une variation de l'azimut de projection θ pour la célérité effective (voir la figure 3.15).

Nous avons mis en place un plan d'expérience se limitant à quelques azimuts θ pour lesquels il faut effectuer le calcul complet. Nous avons ensuite accès analytiquement aux résultats pour d'autres azimuts en perturbant les spectres avec (3.9) et (3.11) et en utilisant un développement au premier ordre. En effet, si l'azimut θ est perturbé avec un petit angle $\varepsilon \ll 1$, alors la célérité effective s'écrit :

$$c(z; \theta + \varepsilon) = c(z; \theta) [1 + \varepsilon \delta(z; \theta)], \quad (3.54)$$

où $c(z; \theta) = c(z) + u(z)\sin(\theta) + v(z)\cos(\theta)$ ($c(z)$ est la vitesse du son, $u(z)$ et $v(z)$ sont respectivement les vents zonaux et méridiens), et la perturbation δ est donnée par :

$$\delta(z; \theta) = \frac{u(z)\cos(\theta) - v(z)\sin(\theta)}{c(z; \theta)}. \quad (3.55)$$

A l'aide de cette approche perturbative, la formule (3.14) fournit l'ordre 1 de la pression, et donc :

$$p(\theta + \varepsilon) \approx p(\theta) + \varepsilon \partial_\varepsilon p(\theta) \quad (3.56)$$

Ce faisant, nous avons calculé les signaux infrasonores reçus à chaque station pour chaque valeur souhaitée du paramètre x . Cela donne notamment accès à des estimations numériques pour les dates des arrivées infrasonores en fonction des dates T_0 supposées d'émission par simple translation.

3.4.3 Géolocalisation

Nous utilisons les résultats du modèle pour les comparer aux observations afin de déduire la position x^* (et donc l'altitude z^* via l'angle d'élévation) et la date d'émission T_0^* de la source. Pour ce faire, nous calculons une fonction coût $J(x, T_0)$ sur une grille discrète $(x^k, T_0^k)_k$ afin de trouver son minimum. Cette fonction est construite sur le principe des moindres carrés et se définit par :

$$J(x, T_0) = \frac{1}{N} \left(\tilde{T}(x, T_0) - T \right) \mathbf{R} \left(\tilde{T}(x, T_0) - T \right)^T \quad (3.57)$$

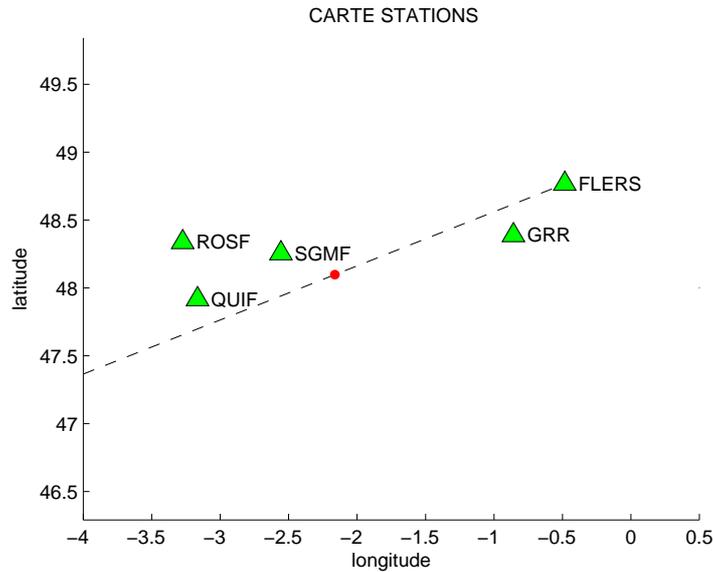


FIGURE 3.15 – Carte des stations de mesure. En rouge : localisation de P_0 (latitude = 48.08° , longitude = -2.08°), la position déduite de la première estimation statistique. La ligne discontinue correspond au degré de liberté x étudié pour la localisation de la source : de part et d'autre de la première estimation (où $x = 0$), le long de l'azimut enregistré par la station FLERS.

où $\tilde{T}(x, T_0)$ est le vecteur contenant les temps d'arrivée simulés pour chacune des stations de mesure pour le paramètre x et la date d'émission T_0 , T est le vecteur contenant les temps d'arrivée observés à chacune des stations, N le nombre de stations prises en compte dans la fonction coût, et \mathbf{R} est une matrice de pondération.

En toute rigueur, dans un formalisme stochastique, \mathbf{R} doit être l'inverse de la matrice de covariance d'erreur de mesure des temps d'arrivée. Ces incertitudes peuvent provenir des erreurs des instruments de mesure et surtout de la variabilité météorologique. Nous nous contentons ici d'utiliser pour \mathbf{R} une matrice diagonale dont les éléments sont les inverses des variances d'incertitude de lecture des données (les arrivées étant plus ou moins nettement datées selon les stations, voir la figure 3.13).

En outre, pour les stations QUIF, ROSF, et SGMF, la simulation numérique comme les signaux enregistrés montrent au moins deux arrivées. Les dates de première et seconde arrivées sont donc prises en compte dans la fonction de moindres carrés J .

Les figures 3.16, 3.17 et 3.18 montrent des exemples de résultats. La figure 3.16 présente la nappe $J(x, T_0)$ calculée en sommant sur l'ensemble des 5 stations, son minimum se trouve à 3 km de P_0 , vers FLERS, et la date d'émission est proche de la première estimation statistique. Les figures 3.17 et 3.18 présentent respectivement le meilleur et le pire résultat de minimisation parmi les 10 combinaisons possibles de 3 stations parmi les 5. On se rend compte qu'en utilisant uniquement FLERS, GRR, et SGMF pour la géolocalisation (figure 3.17), on retrouve le même minimum que

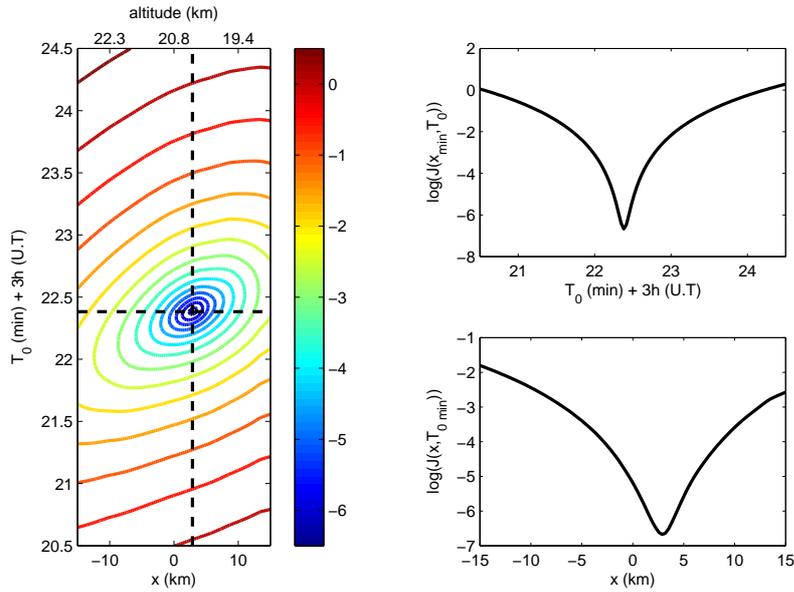


FIGURE 3.16 – Logarithme de la fonction coût représenté en courbes de niveaux. Les stations FLERS, GRR, QUIF, ROSF et SGMF sont prises en compte. En haut à droite : coupe verticale au niveau du minimum ; en bas à droite : coupe horizontale au niveau du minimum. $x^* = +2,9$ km, $z^* = 20,4$ km et $T_0^* = 03h22'23''$ TU.

dans le cas où les 5 stations sont prises en comptes et avec une meilleure définition (il s'agit même de la meilleure minimisation parmi toutes les combinaisons possibles de stations) tandis que les stations QUIF et ROSF semblent détériorer la qualité de la minimisation (figure 3.18). La quantité d'information prise en compte ne paraît donc pas corrélée avec la précision de la géolocalisation.

Plusieurs hypothèses peuvent expliquer cela. Tout d'abord la netteté des signaux enregistrés sur QUIF et ROSF semble moindre par rapport aux autres enregistrements (voir la figure 3.13) et donc leur utilisation peut apporter plus d'incertitude qu'elle n'apporte d'information pour le problème inverse. En outre, rien ne permet d'affirmer que toutes les stations ont enregistré le même événement, et plusieurs émissions ont pu avoir lieu sur la trajectoire du bolide (et donc en dehors de l'azimut enregistré par FLERS). Néanmoins, la qualité de la minimisation quand seules les stations FLERS, GRR, et SGMF sont prises en compte permet de penser raisonnablement que ces 3 stations ont enregistré le même événement.

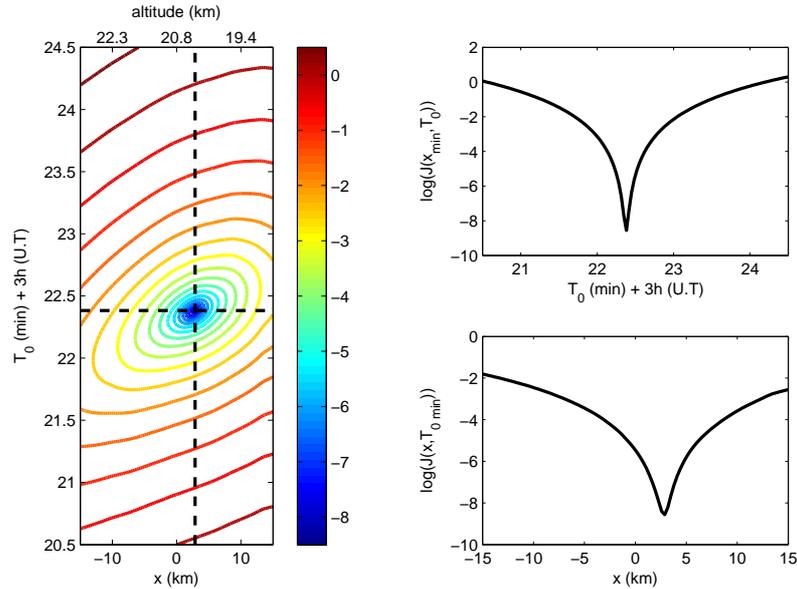


FIGURE 3.17 – Logarithme de la fonction coût représenté en courbes de niveaux. Seules les stations FLERS, GRR, et SGMF sont prises en compte. En haut à droite : coupe verticale au niveau du minimum ; en bas à droite : coupe horizontale au niveau du minimum. $x^* = +2,9$ km, $z^* = 20,4$ km et $T_0^* = 03h22'23''$ TU.

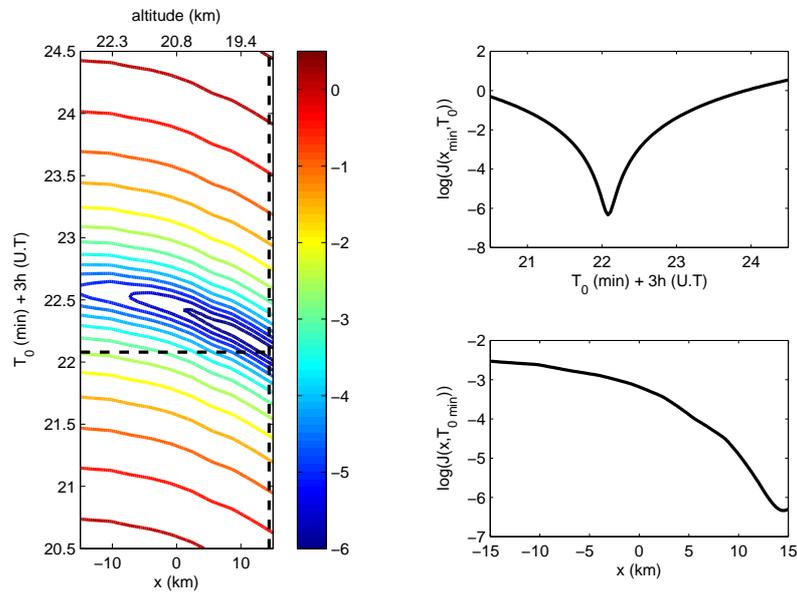


FIGURE 3.18 – Logarithme de la fonction coût représenté en courbes de niveaux. Seules les stations QUIF, ROSF, et SGMF sont prises en compte. En haut à droite : coupe verticale au niveau du minimum ; en bas à droite : coupe horizontale au niveau du minimum. $x^* = +14,4$ km, $z^* = 18,8$ km et $T_0^* = 03h22'05''$ TU.

3.4.4 Sensibilité à la variation d'azimut

L'approche perturbative est utilisée précédemment comme un moyen de calcul direct et permet, au moyen du plan d'expérience mis en oeuvre, d'illustrer le fait que toutes les informations issues des données d'observation ne se valent pas. En effet, la prise en compte des données de la station QUIF semble dégrader la qualité de la géolocalisation, tandis que celles de FLERS ou de GRR paraissent déterminantes. Cette même idée peut se prolonger à l'examen d'un même signal. En effet, les stations QUIF, ROSF, et SGMF présentent des signaux composés de deux arrivées distinctes. Contrairement à une étude ne prenant en compte que des arrivées directes via des vitesses moyennes, l'utilisation de l'équation d'onde dans un milieu stratifié permet de calculer les différentes phases de l'onde, et donc les différentes arrivées.

Les méthodes de calcul de sensibilité du signal présentées dans ce chapitre permettent de connaître précisément le rôle d'une variation d'azimut (c'est-à-dire dans notre cas du paramètre x) sur le signal. Les figures 3.19(a)(b) montrent qu'une variation d'un degré de l'azimut représente une variation de vitesse du son de moins d'1 m.s⁻¹, s'agissant de la station SGMF, la plus proche de la source. Si deux arrivées sont présentes dans le signal résultant, la sensibilité du signal (figure 3.19(d)) montre que seule la première arrivée est réellement sensible à cette variation d'azimut. On observe sur la figure 3.19(c) que le signal résultant de cette variation d'1 degré voit d'ailleurs cette première arrivée légèrement retardée.

Autrement dit, les deux arrivées ne peuvent jouer le même rôle dans le problème de géolocalisation. On comprends que la première arrivée apporte plus d'information que la seconde en ce sens. Ainsi, une pondération en conséquence (calculée à l'aide de la sensibilité du signal $\partial_\theta p(t; \theta)$) doit être intégrée à la matrice de pondération \mathbf{R} dans la fonctionnelle du problème des moindres carrés. Toutes les arrivées n'étant pas également sensibles, elles ne doivent pas être également prises en compte.

Plus précisément : nous effectuons le changement suivant pour le i^{ème} élément R_i de la diagonale de \mathbf{R} :

$$R_i \mapsto R_i \times \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \left| \partial_x p(\tilde{T}_i(T_0, x), T_0, x) \right| dx, \quad (3.58)$$

autrement dit, nous pondérons la fonction des moindres carré par la sensibilité moyenne des différentes arrivées au paramètre spatial x . Ici, nous choisissons de considérer $X = 15$ km, c'est-à-dire la sensibilité moyenne sur 15 km de part et d'autre de $x = 0$. La figure 3.20 montre l'effet de la prise en compte de la sensibilité sur la fonction des moindres carrés. Si la précision sur T_0 n'est pas modifiée (ce qui est normal), on constate en revanche un resserrement de la fonction J dans la direction du paramètre x et donc une meilleure localisation spatiale.

3.4.5 Bilan

Parce qu'elle repose sur la recherche de spectre d'opérateurs, la mise en oeuvre de la méthode des modes normaux s'avère coûteuse en temps de calcul. Néanmoins, il est possible d'utiliser des techniques perturbatives pour pouvoir se ramener à un plan

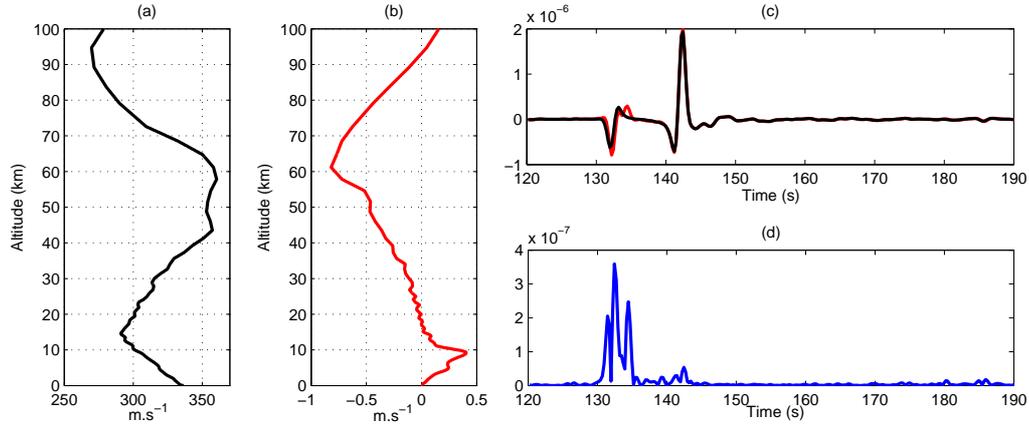


FIGURE 3.19 – (a) Célérité du son effective pour la station SGMF. (b) Perturbation de la célérité effective si l'on varie l'azimut d'un degré d'arc. (c) Signal infrasonore calculé à la station SGMF. En noir : à l'aide du profil montré en (a), en rouge : à l'aide du profil perturbé. (d) Sensibilité du signal à l'azimut : $|\partial_{\theta}p(t; \theta)|$

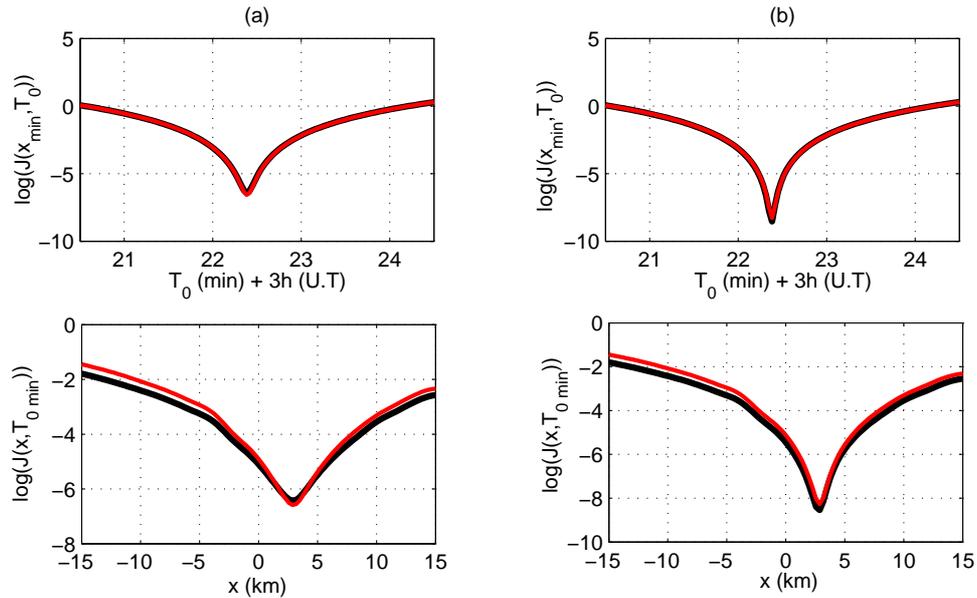


FIGURE 3.20 – (a) Fonction des moindres carrés dans le cas où toutes les stations sont prises en comptes, en noir : sans pondération par la sensibilité, en rouge : avec prise en compte de la sensibilité. (b) Fonction des moindres carrés dans le cas où seules les stations FLERS, GRR, et SGMF sont prises en comptes, en noir : sans pondération par la sensibilité, en rouge : avec prise en compte de la sensibilité. En haut : coupe au x optimal, en fonction de T_0 . En bas : coupe au T_0 optimal, en fonction de x .

d'expérience raisonnable pour aborder le problème inverse et la recherche de spectre peut être ciblée sur les modes de guide d'onde avec l'algorithme d'Arnoldi. De cette façon, nous avons traité un modèle propagatif simple basé sur l'équation d'onde et nous avons trouvé des résultats de géolocalisation peu éloignés de la première étude statistique.

En outre, nous avons aussi remarqué une décorrélation entre la quantité d'observations et la qualité de la géolocalisation en testant toutes les combinaisons possibles de 3 stations parmi les 5. Il est apparu que les signaux des stations FLERS, GRR et SGMF suffisaient à retrouver le résultat et avec une meilleure définition. A contrario, les informations issues de QUIF et ROSF ne semblent pas apporter une information aussi précise. Cela peut être dû à l'incertitude de mesure, ou bien au fait que ces stations ont enregistré un événement différent. Enfin, une étude de sensibilité a permis de montrer qu'au sein d'un même signal, il semble que toutes les structures ne se valent pas en terme statistique. Des pics d'arrivée sont plus sensibles que d'autres à une variation de la localisation de la source et sont donc à prendre en compte prioritairement dans une démarche de problème inverse.

3.5 Conclusion

D'un point de vue méthodologique, le calcul de la sensibilité du signal acoustique à des perturbations modélisées par des ondelettes permet de construire une matrice Σ qui synthétise tous les effets d'ordre 1 que peuvent avoir les différentes échelles de l'atmosphère sur la propagation infrasonore. Le calcul de cette matrice nécessite uniquement les valeurs et fonctions propres de l'opérateur de propagation calculés pour le profil de célérité effective de base $c_0(z)$. Il est à noter qu'en règle générale, si l'opérateur n'est pas normal, le calcul de sensibilité requiert en outre les fonctions propres adjointes de l'opérateur (cela représente un calcul supplémentaire). Une fois le spectre disponible, l'algorithme de Mallat permet d'exprimer à un coût quasi-nul les perturbations sur une base d'ondelettes, et donc de construire la matrice de sensibilité Σ . Le calcul de cette matrice ainsi que sa décomposition en valeurs singulières constituent un bon outil de diagnostic et d'interprétation du signal infrasonore :

- La SVD fournit un lien formel entre les différentes arrivées du signal et les guides d'onde atmosphériques qui les ont engendrées (cela est aussi possible sans passer par la SVD, voir l'annexe C).
- La SVD est équivalente à une analyse ACP (Analyse en Composantes Principales) si la perturbation atmosphérique est aléatoire et suit une loi uniforme.
- La matrice de sensibilité Σ permet d'évaluer la matrice de covariance du signal étant donné une loi particulière pour la perturbation aléatoire.
- Les premiers vecteurs singuliers d'entrée de Σ sont des paquets d'ondelettes qui correspondent aux perturbations optimales qui vont maximiser les arrivées dans le signal infrasonore.

En outre, nous avons vu que de façon générale, l'approche perturbative qui permet d'évaluer la sensibilité d'un signal infrasonore à un paramètre physique permet d'améliorer les démarches de type problème inverse comme la géolocalisation d'une source par exemple. Il faut cependant rappeler que ces résultats et leurs interprétations ne sont valables que dans le cas où l'on considère des petites perturbations.

Dans le cas Fukushima, l'approche au premier ordre est valable pour des perturbations de moins de 1 %, mais cela semble suffisant pour révéler des mécanismes majeurs pour la propagation. En effet, quand elle présente des fluctuations de très petite échelle (1 km), une faible perturbation autour de 40 km d'altitude peut faire apparaître et même rendre dominante une arrivée dans le signal infrasonore. En outre, ces mécanismes de premier ordre dépendent largement de l'état de base $c_0(z)$, en témoignent les différences entre les analyses SVD faites pour 2 profils proches (figures 3.6 et 3.7). Ces résultats démontrent que l'on ne peut se contenter d'un unique résultat de simulation pour comprendre et interpréter des signaux relevés. Les pistes empruntées dans l'exploitation de données infrasonores peuvent être diverses : on peut par exemple chercher à géolocaliser une source si celle-ci est mal connue, ou bien on peut vouloir tirer des informations sur l'état de l'atmosphère si au contraire la source est bien connue. Dans tous les cas, les incertitudes liées aux données atmosphériques ainsi que la grande sensibilité que peut avoir un signal infrasonore à de petites perturbations impliquent au minimum la nécessité de faire des analyses de sensibilité et au mieux d'adopter une approche complètement statistique. Il nous faut en effet effectuer un grand nombre de calculs correspondant à un grand nombre de configurations possibles pour l'atmosphère si l'on veut avoir une description statistique pertinente du signal infrasonore. Les méthodes courantes de simulation des infrasons (le tracé de rayon, les équations paraboliques) s'avèrent trop coûteuses dans cette perspective. La méthode des modes normaux l'est même encore plus (recherche de spectre pour des matrices de grande taille) mais la sensibilité des modes constitue un indicateur que nous exploitons dans le chapitre suivant afin de réduire le temps de calcul à travers un modèle réduit.

+

A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere

Sommaire

4.1	Introduction	83
4.2	Normal mode decomposition of the pressure field	85
4.2.1	The mean atmosphere	85
4.2.2	The vertical structure equation	87
4.2.3	Normal modes for range-dependent atmospheres	88
4.3	Sensitivity of modes to the mean atmosphere	90
4.4	A low-order reduced model	93
4.4.1	Invariant subspaces	94
4.4.2	An estimate for the Fourier transform	97
4.5	Conclusion	102
4.6	Appendix : WKB approximation	103

4.1 Introduction

The usual approach to study infrasound propagation is to compute the acoustic component superimposed to a given atmospheric state, which is classically obtained from global empirical models ([Drob 2008], [Hedin 1996]) as well as operational numerical weather prediction centers (e.g., NOAA global forecast system or ECMWF integrated forecast system). The justification of such a deterministic approach is questionable given that unresolved large-scale gravity waves, turbulence and matching conditions of the various available data may affect the waveforms in such a way that some arrivals may literally appear/disappear. While a significant amount of data has become available on the temperature and wind structure of the atmosphere, it is not clear whether classical propagation techniques (ray tracing, PE method) are able to *statistically* capture the effects of small-scale uncertainties ([Kulichkov 2013], [Chunchuzov 2011], [Hedlin 2012]). The lack of knowledge allows one to regard the atmospheric structures as being generated by random gravity wave sources, an approach that was recently popularized by [Drob 2013]. However, as far as statistics

are concerned, the question of the computational cost is critical as a large number of runs is required for the results to converge.

This paper considers a class of low order propagation models obtained from the normal mode decomposition of infrasounds in complex atmospheres. While the ray theory cannot predict some important refracted paths ([Waxler 2008]), the normal mode technique can be used to simulate signals within environments that cover a wide range of vertical scales. The complete acoustic field is constructed by summing up contributions of each of the modes which are roughly akin to the modes of a vibrating string. These modes can be obtained by seeking the roots of the so-called dispersion relation. In most cases the poles are complex so that one needs to use a two-dimensional search algorithm. In addition to the difficulties inherent in searching in two dimensions, it is important to point out that the number of modes is proportional to the number of grid points used and thus, the numerical cost increases with the frequency. Subsequently, [Waxler 2002] has emphasized that the imaginary parts (the attenuation rates) can be obtained through a perturbative approach, by solving a fixed point equation with a Newton-like method. Such an approach, however, is restricted to poles that are close to the real axis. In this paper we are interested in the manner in which the modes provide the best reduced model (finding the dominant modes) and more generally we are interested in the behavior of the selected poles in the complex plane as the background atmospheric state is varied.

This work is an outgrowth of the authors' effort to find the simplest mathematical model that "does the job" in order to estimate signal statistics. It is often the case that first-principles modeling or system identification result in unnecessarily high-dimensional mathematical models. Model (order) reduction is about systematic approximation of such models. There are many advantages in working with models with low-dimensional state space since low-dimensional models are often easier to analyze and much faster to simulate. As pointed out by [Antoulas 2001] in his survey on reduction methods, we can identify two sets of methods which are currently in use, namely the SVD (Singular Value Decomposition) based methods and the moment matching methods.

In fluid dynamics applications, SVD based methods are the most used, the most common approach being the Proper Orthogonal Decomposition (POD) method and its variants such as the BPOD (Balanced Proper Orthogonal Decomposition) ([Rowley 2005]). POD methods are based on the Galerkin projection of the dynamical model on a subspace obtained with a SVD analysis of experimental or numerical datasets. It is known that only a few POD modes can summarize the flow organization in many cases ([Delville 1999], [Galletti 2004]). It also appears that reduced-order models generally lose accuracy for flow parameters different from those used to generate the POD basis, even if a local improvement can be made with a sensitivity analysis of the modes ([Hay 2009]). For control optimization problems, instead of using a POD basis, some authors directly use the global eigenmodes as a projection basis, even if it appears that it does not show sufficient robustness ([Barbagallo 2011]). For instance, the optimal growth in a separated boundary-layer

flow can be studied with the sum of the non-normal global modes (that are the most sensitive to any flow perturbation) ([Akervik 2007]).

The other set of methods, the moment matching approach, is not commonly used for fluid dynamics model reduction and is mostly found in structural dynamics or circuit simulations. It consists in using Krylov subspace methods to get a low-order model that shows a good approximation of the transfer function, and more precisely of the first coefficients of its Laurent expansion ([Bai 2002], [Srinivasan Puri 2009]). Arnoldi and Lanczos algorithms that perform iterative projections on Krylov subspaces ([Watkins 2007]) are modified in order to guide the reduction to the best approximation of the transfer function. Progress in other Krylov subspace techniques allow the reduction of a large variety of dynamical systems, including second-order systems ([Salimbahrami 2006]) and nonlinear systems ([Bai 2002]). Turning to the wave equation, it is easy to apply the Krylov-Arnoldi algorithm to compute a few of the smallest or largest modes of a large matrix obtained from the discretized problem. But there is no universal way in which the modes may be sorted, and indeed much of the emphasis in the present work is to show that the modes lie in the vicinity of regions in the complex plane, for each of which there are different features in the vertical sound speed profile.

The paper is organized as follows : the derivation of the range-dependent normal-mode method is described in section 2. A sensitivity analysis is discussed in section 3 and it is shown that, to a first approximation, the most sensitive modes to waveguide perturbations provide the best low-order reduced model for long-range infrasound propagation. In section 4, we use a WKB approach to find the most sensitive regions in the complex plane and an implicitly restarted Arnoldi procedure is used to obtain the most sensitive modes. We show that the contribution of each mode is confined to a narrow range of frequencies so that when the stationary phase method is limited to the first most sensitive mode, it gives a very good approximation of the waveform. We illustrate this in the case of the Fukushima explosion that was detected 243 km away from the source, at the Japanese infrasound station I30JP (12 March 2011). Finally, in section 5, we show that adding stratospheric uncertainties may trigger a stratospheric arrival even though the classical criteria, based on the ratio of stratospheric sound speed to that at ground level, is not satisfied.

4.2 Normal mode decomposition of the pressure field

4.2.1 The mean atmosphere

There is no consensus on how mean atmospheric specifications can be obtained from operational numerical weather predictions or atmospheric climate reanalysis. In this work, the wind and temperature profiles are extracted from the atmospheric database provided by the European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF). Following [Millet 2007], the profiles are obtained from the ERA-Interim and 91-level datasets for altitudes less than 50 km or 80 km, respectively, and matched to statistical data for higher altitudes. The statistical data is obtained using

empirical reference models, known as HWM-93 (Horizontal Wind Model) and MSIS-90 (Mass Spectrometer and Incoherent Radar Model). Although these models represent a smoothed compromise between the original data sources, they are known to present systematic differences, particularly near the mesopause ([Hedin 1996]).

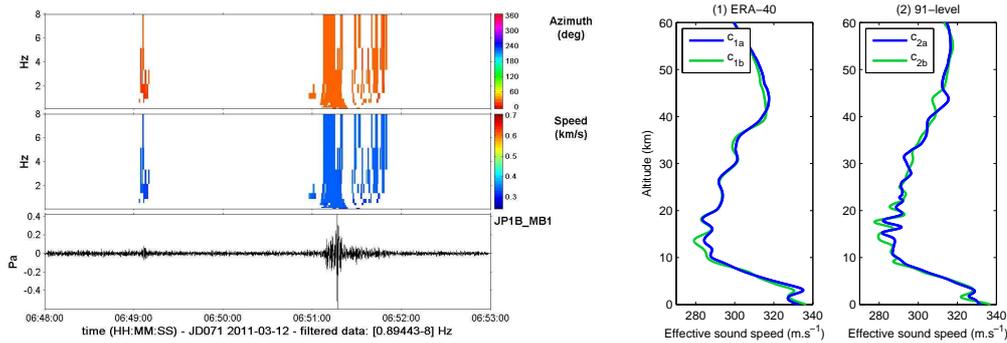


FIGURE 4.1 – Data. Left : recorded signal at the japanese infrasound station I30JP ; right : effective sound speed profiles obtained from the ECMWF ERA-Interim dataset (1) and the ECMWF 91-level dataset (2) for locations that correspond to the Fukushima nuclear power plant (c_{1a} , c_{2a}) and I30JP (c_{1b} , c_{2b}).

In this study, we consider the explosion of the Fukushima Daiichi nuclear power plant - suspected to be caused by hydrogen gas - that occurred on 12 March 2011. The recorded infrasound signal at I30JP, located 243 km away from Fukushima, is shown in figure 4.1 as well as the effective sound speed profiles. Even though the 91-level dataset (figure 4.1b) seems to present a better resolution than the ERA-interim dataset (figure 4.1a), both profiles do not change significantly over the distance between the source and the infrasound station. Because of this, most infrasound propagation simulations focus on range-independent problems. Using this assumption, recent simulations by [Bertin 2012] have shown that the signal is composed of two arrivals : a strong tropospheric arrival, 12-13 minutes after the explosion, followed by a weaker stratospheric ‘tail’. As part of their study, [Bertin 2012] have suggested on numerical grounds that, depending on the vertical profile, the amplitude of the first arrival can change by several orders of magnitude. It is therefore reasonable to conclude that range-independent approaches break down for this tropospheric arrival. More generally, it is not clear how small changes in 2D atmospheric fields can affect long-range infrasound propagation and indeed, much of the emphasis in the present paper is to show that small vertical changes are coupled to horizontal changes through a small parameter. Due to its strong dependence to the sound speed profile, we will focus on the first arrival.

4.2.2 The vertical structure equation

As our starting point, we use the wave equation in cylindrical coordinates (r, θ, z) , where r and z are the distance from the source and altitude, respectively. The perturbation is assumed to be initiated by a ground-based localized excitation of frequency ω .

The most elementary approach consists in entirely neglecting the horizontal variability of the medium : if the atmosphere is considered as uniform in the horizontal direction, the vertical structure $\phi(z)$ satisfies the Helmholtz equation

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right] \phi = -\frac{\delta(z)}{2\pi}, \quad (4.1)$$

which, for unbounded atmospheres, requires a boundedness condition as $z \rightarrow \infty$. In the above equation $c(z)$ is the effective sound speed, k is the horizontal wavenumber and δ is the Dirac delta function which mimics a point source at $z = 0$.

The solution of (4.1) is, within a constant of proportionality, the Green's function of the wave equation. Following the classical approach (e.g. [Jensen 1994]), the spatial part p of the wave field can be obtained from the discrete-spectrum contribution, which is composed of the sum of the residues evaluated at the (simple) roots of the dispersion relation $D(k, \omega)$

$$p(r, z; \omega) = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^N \frac{\phi_j(z; \omega) \phi_j(0; \omega)}{\partial_k D(k_j(\omega), \omega)} k_j(\omega) \text{H}_0^{(1)}(k_j(\omega)r), \quad (4.2)$$

where $\text{H}_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind ([Abramowitz 1964]) and ϕ_j is the eigenfunction associated with the spatial eigenvalue $k_j(\omega)$. The equation (4.2) can be simplified by properly scaling ϕ_j . Taking

$$\int_0^\infty \phi_j^2(z; \omega) dz = 1, \quad (4.3)$$

a straightforward calculation gives $\partial_k D(k_j, \omega) = 2k_j(\omega)$ so that the pressure field at ground level ($z = 0$) reads

$$p(r, 0; \omega) = \frac{i}{2} \sum_{j=0}^N [\phi_j(0; \omega)]^2 \text{H}_0^{(1)}(k_j(\omega)r). \quad (4.4)$$

Note that, for unbounded atmospheres, ϕ_j is in general non-analytic in k and the spatial part $p(r, z; \omega)$ involves a continuous-spectrum contribution that arises from the integral along the branch cuts. In practice, however, this contribution can be neglected, provided we are sufficiently far from the source ([Waxler 2003, Waxler 2002]).

The poles are readily identified as the zeroes of $D(k, \omega)$, *i.e.* the spatial eigenvalues $k_j(\omega)$. Zeroes of $D(k, \omega)$ may also be sought in terms of temporal eigenvalues $\omega_j(k)$ when the wavenumber is assumed to be real. In this work, we use a boundary value (or implicit) method for solving the eigenvalue problem. The wave equation

(4.1) is reduced to a linear algebraic equation using a pseudo-spectral technique ([Candelier 2012, Candelier 2011]). The global eigenvalues are obtained by applying a QR algorithm to the generalized eigenvalue problem. While care must be exercised to preclude spurious eigenvalues, it is worth mentioning that such an approach can be applied to problems in which the eigenvalue appears nonlinearly ([Bridges 1984]) so that the absorption can be considered with the same numerical framework.

The leading behaviour of the temporal response is then obtained by applying the inverse Fourier transform to (4.4) to obtain

$$p(r, 0; t) \sim \frac{i}{4\pi} \sum_{j=0}^N \int_F [\phi_j(0; \omega)]^2 H_0^{(1)}(k_j(\omega)r) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (4.5)$$

where the integration is performed along the path F in the complex ω -plane. One recognizes in expression (4.5) a wave packet composed of freely evolving spatial modes generated by a source, at $r = 0$. The contour cannot be chosen arbitrarily since both the convergence of (4.5) and the *causality condition*, $p(r, z; t) = 0$ for $t < 0$, should be ensured. As pointed out by [Huerre 2000], the contour F has to be chosen to lie above all temporal eigenvalues $\omega_j(k)$ as k travels along the real axis. Thus, to avoid confusion, the frequency parameter ω is treated as a Fourier-Laplace transform variable, $\omega = \omega_r + i\omega_i$, with a small positive imaginary part $\omega_i \ll 1$. For this reason, the eigenvalues $k_j(\omega)$ lie in the upper half of the complex k -plane, as shown in figure 4.2. The calculation of the inverse Fourier transform along F then proceeds in a straightforward manner.

4.2.3 Normal modes for range-dependent atmospheres

Most environments of interest are spatially non uniform in the horizontal direction r . The previous notions can then be taken to apply locally as long as the non-uniformities of the medium are small over a typical acoustic wavelength. Thus, the horizontal variation of the medium is characterized by a slow space variable $R = \varepsilon r$, where ε is a small parameter of the same order of magnitude as the scaled nonuniformities. Decomposition into local normal modes leads to a dispersion relation of the form $D(k, \omega; R) = 0$. The eigenvalue problem is therefore solved for a discrete set of ranges R_1, R_2, \dots, R_N .

In going from one range to another, we assume that the modes couple adiabatically, i.e. without any transfer of energy into other modes. This approximation, that was introduced in the study of underwater acoustics by [Pierce 1965], is a reasonable compromise between accuracy and run time. The WKB approximation then reads

$$p(z; \omega, R) \simeq \frac{i e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi r}} \sum_{j=0}^N \frac{\phi_j(0; \omega, R) \phi_j(z; \omega, R)}{\sqrt{k_j(\omega, R)}} \exp \left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_0^R k_j(\omega, s) ds \right\}, \quad (4.6)$$

where $\phi_j(z; \omega, R)$, which is the eigenfunction associated with the local wavenumber $k_j(\omega, R)$ (for a given ω), satisfies the condition

$$\int_0^\infty \phi_j(z; \omega, R) \frac{\partial \phi_j}{\partial R}(z; \omega, R) dz = 0, \quad (4.7)$$

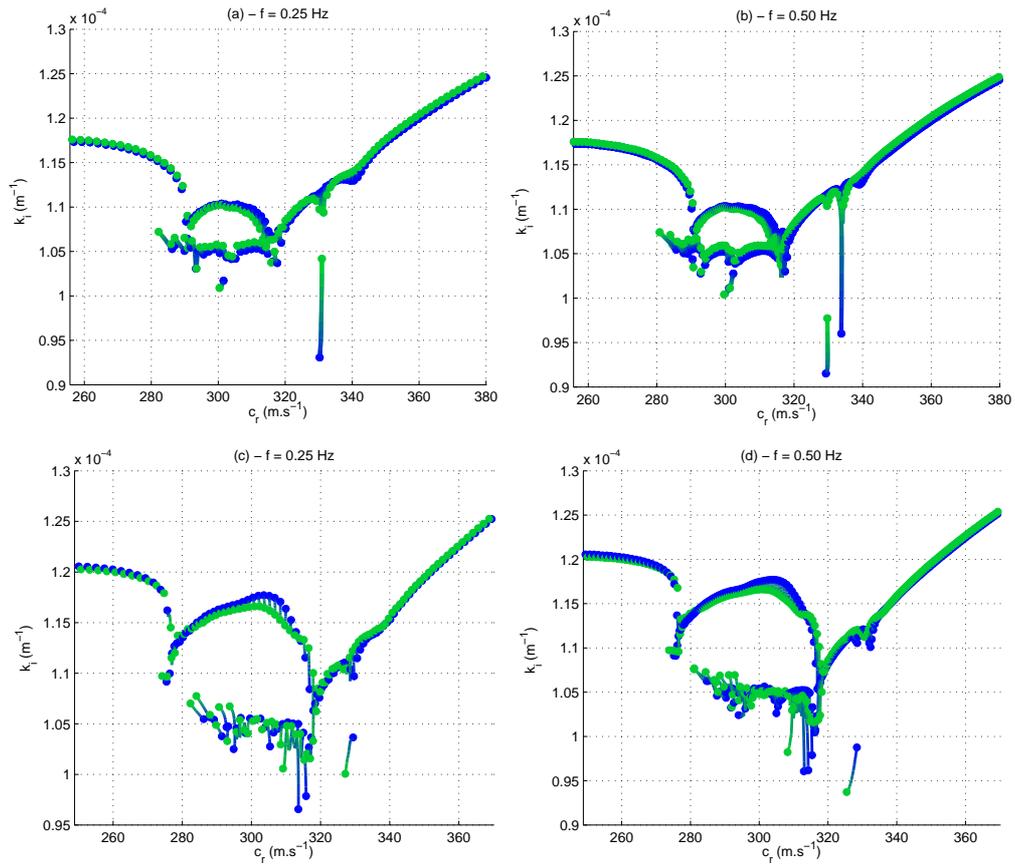


FIGURE 4.2 – The complex k -plane showing the trajectories of the local eigenvalues as R varies for the ERA dataset (a, b) and the 91-level dataset (c, d). Blue : $r = 0$ km ; green : $r = 243$ km (I30JP).

where the derivative can be approximated with a finite difference.

Figure 4.2 shows the trajectories of the local eigenvalues k_j as R increases from the source $R = 0$ to the infrasound station I30JP. While most eigenvalues are not significantly affected by horizontal variations of the vertical profile, the eigenvalues which are close to a cusp at $c_r \simeq 335 \text{ m.s}^{-1}$ trace the longest trajectories in the k -plane (essentially along the imaginary axis). It is straightforward to see that such eigenvalues, that are strongly sensitive to horizontal variations, correspond to waves travelling with exactly the phase velocity at a local maximum of $c(z)$ (which is also a double turning point in the limit $\omega \rightarrow \infty$). This maximum is associated with a low altitude tropospheric waveguide (see figure 4.1), below 5 km altitude. Hence, waves of this kind strongly depend on large-scales, as a result of the weak coupling between horizontal and vertical low-altitude atmospheric structures, through the small parameter ε . In addition, it is important to point out that the most sensitive eigenvalues depend on the atmospheric specification. A closer examination of the trajectories in the complex k -plane shows that the path lengths of most sensitive modes are smaller for the 91-level dataset (figures 4.2c,d). In spite of this, the phase velocity change (along the real axis) is larger and thus, the arrival time of the corresponding waveform is more affected.

The cusp may be exploited to track the most sensitive eigenvalues : *the appearance of a cusp in the spectrum at a particular c_r is an indication that the eigenvalues are on the verge of being critically dependent on small variations in the vertical profile.* This criterion, which is completely general, may be used to reduce the complexity (and computation time) of any range-dependent infrasound propagation problem.

4.3 Sensitivity of modes to the mean atmosphere

This work focuses on the underlying assumption that the mean atmospheric state is fixed and given by operational numerical weather predictions or atmospheric climate reanalysis. In these data, the major setback is that important subgrid-scale phenomena are filtered out during the data assimilation, thereby implying a degree of uncertainty associated with the mean atmospheric state.

Assuming that deviations of a given amplitude from the reference state may occur, we seek to determine the resultant effect on the computed signal at I30JP without computing the whole eigensystem. The sensitivity of the eigenvalues to modifications of the medium can be assessed through a perturbative approach of the normal modes ([Kato 1995], [Trefethen 1997]). The effective sound speed profile can be written as

$$c(z) = c_0(z) + \varepsilon c_1(z), \tag{4.8}$$

where ε is a measure of the perturbation amplitude. In order to carry out a comprehensive study on the influence of every atmospheric structure on the propagation,

we decompose the perturbation into a wavelet basis

$$c_1(z) = c_0(z) \sum_m \sum_n c_{mn} \Psi_{mn}(z), \quad (4.9)$$

where each wavelet Ψ_{mn} is generated by translation and dilatation of a function $\Psi_{mn}(z) = a^{-m/2} \Psi(a^{-m}z - nb)$, with $a > 1$ and $b > 0$, so that the basis depicts every position and every scale.

The sensitivity of the eigenvalue k_j is obtained by substituting (4.8) into (4.1) and then differentiating with respect to ε . Taking an inner product with the eigenfunction ϕ_j leads to

$$\frac{\partial k_j}{\partial \varepsilon} = -\frac{\omega^2}{k_j} \int_0^\infty \frac{\phi_j^2(z) c_1(z)}{c_0^3(z)} dz. \quad (4.10)$$

Upon substitution of (4.9) into (4.10), we obtain

$$\frac{\partial k_j}{\partial \varepsilon} = \sum_m \sum_n c_{mn} K_{jmn}, \quad (4.11)$$

where K_{jmn} is given by

$$K_{jmn} = -\frac{\omega^2}{k_j} \int_0^\infty \frac{\phi_j^2(z)}{c_0^2(z)} \Psi_{mn}(z) dz. \quad (4.12)$$

It is clear from (4.12) that the components K_{jmn} are nothing but the (complex) sensitivities of k_j to each wavelet Ψ_{mn} . In practice, these components are easily computed through the multiresolution discrete wavelet transform of ϕ_j^2/c_0^2 with the Mallat algorithm that only involves recursive filterings ([Mallat 1989]).

Now, to obtain a relation between the sensitivity of a given mode and its relative contribution to the sum of the residues (4.4), we use the completeness and the orthonormality of the wavelet basis to deduce from (4.12) that

$$\phi_j^2(z) = -\frac{k_j c_0^2(z)}{\omega^2} \sum_m \sum_n K_{jmn} \Psi_{mn}(z). \quad (4.13)$$

Upon substituting (4.13) into (4.4), the ground-based pressure field becomes

$$p(r, 0; \omega) \sim -\frac{ic_0(0)^2}{4\pi} \sum_j \frac{k_j(\omega)}{\omega^2} \sum_{(m,n)} K_{jmn}(\omega) H_0^{(1)}(k_j(\omega)r) \Psi_{mn}(0). \quad (4.14)$$

For a given mode, the above formula presents the advantage of determining which wavelets are relevant to the ground-based pressure field. We conclude, as expected intuitively, that only the wavelets that connect the perturbation at a given altitude to the source ($\Psi_{mn}(0) \neq 0$) play a role in the sum (4.14). For these wavelets, the larger the sensitivity K_{jmn} , the larger the contribution of the wavelet to the signal. Note that this result only accounts for the case the source and the receptor are located on the ground. More generally, if z_s is the source altitude and z_r is the altitude of

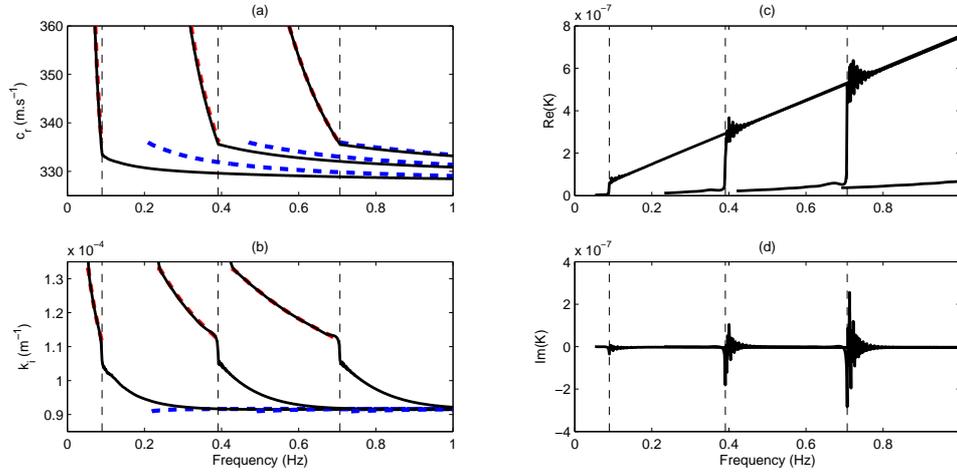


FIGURE 4.3 – Phase velocity (a) and growth rate (b) of the 3 most sensitive eigenvalues, as functions of the frequency. Dashed lines give the WKBJ approximations. Real (c) and imaginary (d) parts of sensitivities K_{jmn} associated with the most sensitive eigenvalues for D10 wavelets $a = 2$, $b = 1$, $m = 10$ and $n = 1$ (see equation 4.9). Eigenvalues are computed for frequencies with a constant imaginary part of $\omega_i = 0.03 \text{ .s}^{-1}$.

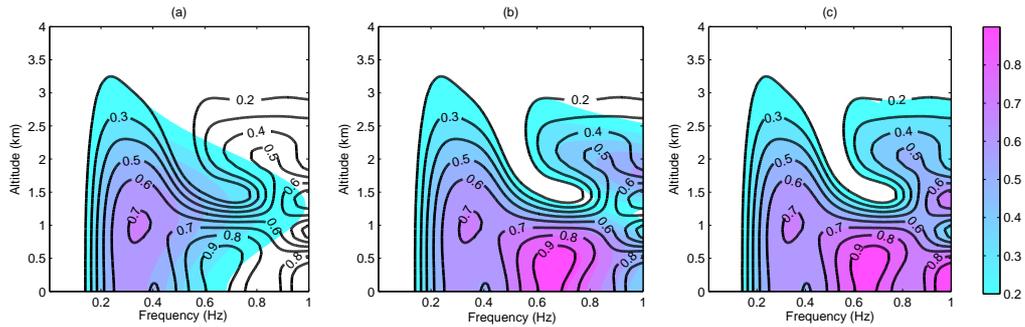


FIGURE 4.4 – Pressure field contours in the ω_r - z plane at $r = 243 \text{ km}$, for the three most sensitive modes of figure 4.3. (a) first mode; (b) two modes and (c) three modes. Black levels give the pressure field $|\hat{p}/\hat{p}_{\max}|$ computed with 580 modes. Eigenvalues are computed for frequencies with an imaginary part $\omega_i = 0.03 \text{ .s}^{-1}$.

the receptor, similar developments lead to consider primarily the wavelets whose compact support connects the perturbations to both altitudes.

Figure 4.3 gives the sensitivities K_{jmn} of the three most sensitive modes to D10 wavelets ([Daubechies 1988]) as functions of the frequency ω_r . The results are shown for the wavelet that maximizes the sensitivity, among 2046 wavelets that cover the altitudes in the range 0-120 km and the wavelengths from 117 m to 60 km. As ω_r is increased, a subset of normal modes becomes highly sensitive to low altitude wavelets (figure 4.3c) and correspondingly their contribution to the ground-based pressure field increases, as shown in figure 4.4. Indeed, for each mode, the sensitivity can be described by a few of the wavelets (m, n) whose contributions are maximum over a narrow range of frequencies. These wavelets provide the vertical structures that are responsible for the transition from the cusp to a region of constant imaginary state, as shown in figure 4.3b. Note that the region where the most sensitive modes converge (as $\omega_r \rightarrow \infty$) can be obtained through a WKB analysis of (4.1). The WKB modes are given by dashed lines in figure 4.3. This holds despite the fact that such an approximation fails to describe the transition.

It is important to point out that the family of (most sensitive) modes issuing from the cusp gives the leading-order contribution of (4.4) over frequencies as large as 1 Hz ($\omega_r = 2\pi$). Since the integration in k is performed first, we observe that the integral can be replaced by the sum of contribution of three poles. Figure 4.4 shows the truncation of (4.4) to the third most sensitive modes as a function of ω_r and z , for $r = 243$ km. The first of these modes gives the leading order behavior up to 0.5 Hz (figure 4.4a), while the third mode is necessary to describe the high frequency content close to the ground (figure 4.4c). Given that ω is a continuous variable, there are an infinite number of such contributions, which has to be included by the integration over ω . However, if the Fourier transform of the source is zero outside a finite-length interval, usually taken to be $0 \leq \omega \leq \omega_0$, the contribution of high frequencies $\omega > \omega_0$ turns out to be zero, as a result of the convolution theorem.

The previous results can be interpreted within the setting of the range-dependent formulation presented in section 4.2.3. Provided the sound speed profile is slowly varying in the horizontal direction, the expansion (4.8) is the first order Taylor series of $c(z)$ about $R = 0$ and ε plays the same role as in the section 4.2.3. When considering the acoustic propagation downstream, $k_j(R; \omega)$ traces out a trajectory issuing from the cusp. The associated contribution as given by (4.4) becomes dominant over a frequency range that depends on vertical structures of $c_1(z)$ and thus, a lower bound for the frequency range can be obtained from the sensitivities. For each R , this lower bound plays the role of a cut-off frequency $\omega_0(R)$. On the other hand, it can be shown that the Hankel function in (4.5) vanishes as $\omega_r \rightarrow \infty$.

4.4 A low-order reduced model

The basic principle in the reduction methods consists in computing a small number of relevant modes (a part of the spectrum) through specific methods. If

a matrix is really large, the computation of its complete spectrum is out of reach. However, we noted in the previous section that it suffices to compute just a few of the eigenvalues that are closest to some specified target value. Eigenvalue methods for large problems are designed to perform tasks like these, and they do it by computing the invariant subspace associated with the desired eigenvalues.

4.4.1 Invariant subspaces

A close examination of figure 4.2 shows that the eigenvalues lie on interconnected curves that are related to specific regions in the effective sound speed profile. The global structure of these curves can be obtained using an analysis which is similar to that of [Bender 1999], except that the modes are complex. The main assumption, besides the exclusion of range-dependence, is that the frequency is sufficiently large, so that we have $K = \varepsilon k = O(1)$ and $\Omega = \varepsilon \omega = O(1)$, where ε is a small parameter. Using this approximation in (4.1) gives

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 p}{dz^2} = Q(z)p, \quad (4.15)$$

where Q is given by

$$Q(z) = K^2 - \frac{\Omega^2}{c^2(z)}. \quad (4.16)$$

WKB analyses performed in the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ for a vertical profile $c(z)$ with the typical shape displayed in figure 4.5 show that the modes of the ‘‘bounded states’’ (i.e. with $K_1 < K < K_2$) are given by the well-known *Bohr-Sommerfeld* quantization rule ([Bender 1999])

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_1}^{z_2} [-Q(z)]^{1/2} dz = 2\pi(n + 1/2), \quad (4.17)$$

where z_1 and $z_2 > z_1$ are linear turning points and $\text{Re}[Q(z)] < 0$ for $z_1 < z < z_2$. Adding a small imaginary part ω_i leads to the necessary condition

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_1}^{z_2} \text{Im} [-Q(z)]^{1/2} dz = \frac{2}{3\varepsilon} \text{Re} \left[\frac{Q^{3/2}(z_2)}{Q'(z_2)} - \frac{Q^{3/2}(z_1)}{Q'(z_1)} \right] + O(\varepsilon), \quad (4.18)$$

which reduces to

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{z_0} \text{Im} (-Q(z))^{1/2} dz = \frac{2}{3\varepsilon} \text{Re} \left[\frac{Q^{3/2}(z_0)}{Q'(z_0)} \right] + O(\varepsilon), \quad (4.19)$$

when the oscillating region extends to the ground; i.e. $\text{Re}[Q(z)] < 0$ for $0 \leq z < z_0$. Through algebraic manipulations, we can generalize the condition (4.18) to an arbitrary number of turning points (see Appendix). It is worth mentioning that equation (4.18) is based on the fact that each turning point is simple and thus, this approach fails for altitudes z at which two oscillating regions merge. This is

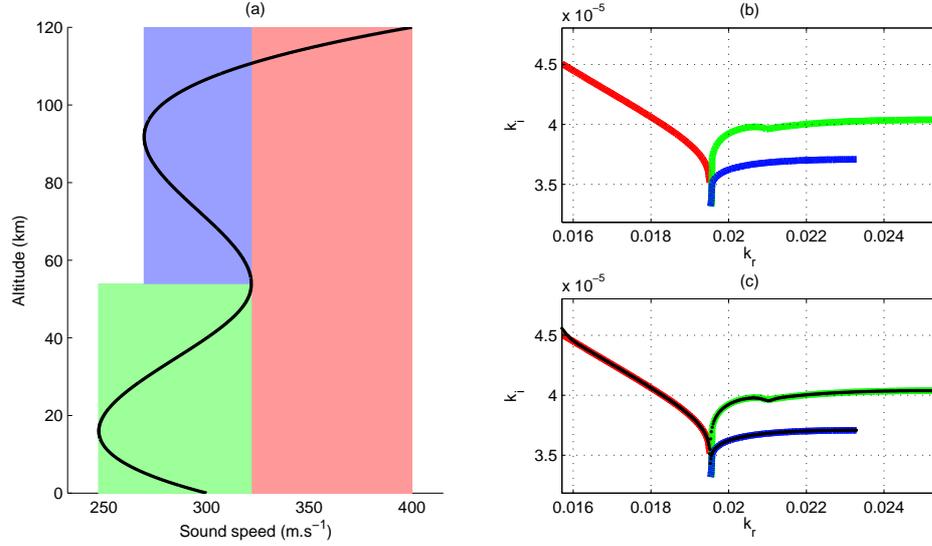


FIGURE 4.5 – Typical effective sound speed profile (a) and various solutions of (4.17) (b) for $\omega = 2\pi + 0.03i$. The black circles (c) show the corresponding discrete spectrum (eigenvalues), as obtained with a QR algorithm.

a familiar restriction which excludes a small neighborhood of cusp regions in the complex K -plane.

Following the above reasoning, the real turning points $z(K)$ and the oscillating regions are first obtained by solving $Q(z; K, \Omega) = 0$, for a fixed frequency Ω . As the mapping of a given K into the complex z -plane is generally multivalued, we denote the various images of K that lie along the real axis by $z_m(K)$. The mapping of a contour in the complex K -plane into the z -axis may be rendered single-valued by constructing a multisheeted K -plane with n sheets, each corresponding to a single oscillating region $z_m < z < z_{m+1}$. The profile $c(z)$ can be seen as a potential, each of its oscillating region (or waveguide) being associated with one curve γ_n (lying on a single sheet) in the complex K -plane on which eigenvalues are distributed according to the real part of the Bohr-Sommerfeld condition (4.17). The appearance of a cusp in the spectrum structure (which is a branch point of the square root in (4.17)) at a particular phase velocity serves as a warning signal that the partition into two disconnected sheets is not possible. Such a cusp corresponds to a local maximum (a double turning point) of $c(z)$ at which two oscillating regions merge and, thus, two sheets are connected in the complex plane, as illustrated in figure 4.5.

Equation (4.18), while hardly trivial, is readily solved (for a fixed Ω) by standard methods for complex root determination. Here we use a Newton-Raphson method for finding K , subject to the constraint $z_m < z < z_{m+1}$. Figure 4.5 shows that typical curves γ_n ($n = 1, 2, 3$) merge at $k_r = \omega_r/c$, where $c = 320 \text{ m.s}^{-1}$. Similar results are shown in figure 4.6 for both the ERA-Interim and 91-level profiles.

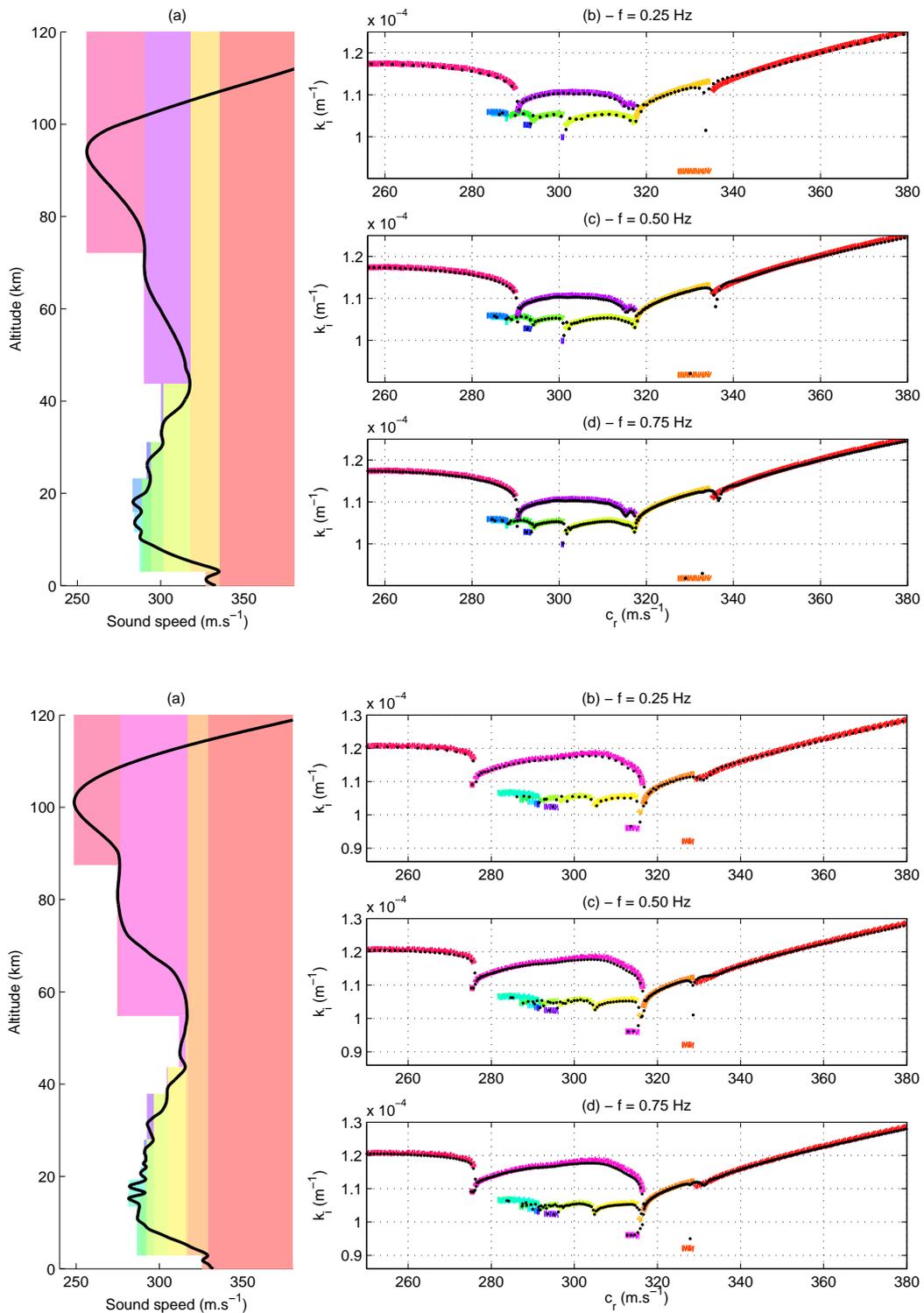


FIGURE 4.6 – Various curves γ_n in the complex k -plane (a) for $\omega_i = 0.03$ and the associated regions of the vertical profile $c(z)$ (b). (a,b) : ERA-Interim data. (c,d) 91-levels data.

As can be seen from figure 4.6, the most sensitive modes issuing from the cusp at $c_r \simeq 335 \text{ m.s}^{-1}$ converge to the path of lowest growth rate k_i (orange curve), so that, in view of results of section 4.3, the eigenvalue computation can be restricted to the invariant subspace associated with the neighborhood of this curve, which will be called γ_1 . Specifically, an implicitly restarted Krylov-Arnoldi algorithm ([Watkins 2007]) is used with a shift-and-invert method, or a Cayley transform ([Lehoucq 2001], [Meerbergen 2000]), centered in the middle of γ_1 . For each frequency ω , the Arnoldi algorithm is applied to find the 10 closest eigenvalues to γ_1 . Since Krylov subspace methods have good convergence properties when combined with Tchebychev collocation points ([Beattie 2001]), we find a good agreement between both the QR algorithm (LAPACK Fortran library) and the Arnoldi algorithm (ARPACK Fortran library); the relative error on the eigenvalues being below 10^{-6} . Figure 4.7 shows results for the profile $c_{1a}(z)$. In terms of computational cost, there is a huge benefit in doing so, especially when the frequency is high (figure 4.7b). While the QR algorithm needs more than 7 h to compute a signal up to 1 Hz (with 512 frequency samples) the application of the Arnoldi algorithm in the vicinity of γ_1 leads to a total computation time as short as several minutes (2 %) on a single processor.

Recall that for the range-dependent approach, the sensitivity of eigenvalues strongly depends on the local vertical profile $c(z; R)$ so that, modes may become dominant over a fairly narrow range of distances or new modes (issuing from a single or several new paths) may literally appear/disappear. The higher the horizontal variation, the larger the probability is to have a significant contribution from these modes to the ground-based signal. That is the main reason for which the sound speed profile evolution $c(z; R)$ has to be studied before proceeding with our reduction method. Once the relevant curves $\gamma_n(\omega, R)$ (and plausible cusps) have been computed over the frequency-range domain, a Krylov-Arnoldi algorithm can be used to compute the invariant subspace associated with the most sensitive eigenvalues. The eigenvalues can finally be analyzed as R varies with a Newton-Raphson algorithm or a step-by-step Krylov-Arnoldi algorithm.

4.4.2 An estimate for the Fourier transform

The easiest way to obtain waveforms is to compute the inverse Fourier transform of (4.6) using the FFT (Fast Fourier Transform) algorithm. To solve the initial value problem, we use a simplified source model defined by

$$s(t) = \left[1 - \cos \frac{\pi t}{2} \right] \sin \left(\pi t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.20)$$

together with $s(t) = 0$ for $t < 0$ s and $t > 4$ s. Hence, the power spectra at the station I30JP ($R=243$ km) is simply the product of the Fourier Transform of (4.20) and (4.6).

Recall that the spatial eigenvalues $k_j(\omega)$ have been introduced as solutions of the dispersion relation when the contour F in the complex ω -plane differs from the real

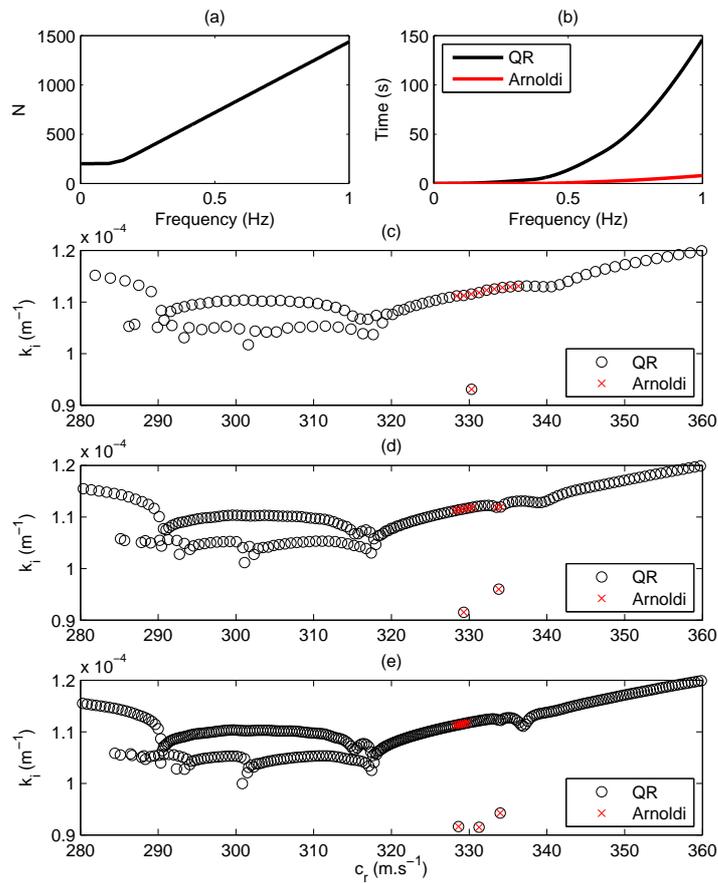


FIGURE 4.7 – (a) Size N of the matrix discretization for the profile $c_{1a}(z)$ (figure 4.1) as function of the frequency. (b) Computation time for both the QR algorithm (LAPACK) and the implicitly restarted Krylov-Arnoldi algorithm (ARPACK). (c),(d),(e) Eigenvalues computed with both the QR algorithm (whole spectrum) and the Krylov-Arnoldi algorithm (10 Ritz pairs) for frequencies 0.3 Hz, 0.6 Hz and 0.9 Hz, respectively.

axis. Although a straightforward interpretation is missing, the temporal branches $k_j(\omega)$ are objects that are naturally involved whenever the initial contour is gradually displaced upward from the real axis. According to the frequency shifting property of the Fourier-Laplace transform, the ground-based signal can be obtained from the classical FFT algorithm (for $\omega = \omega_r$) together with the mapping $p(t) \mapsto p(t)e^{\omega_i t}$. Figure 4.9 shows the waveforms at the station I30JP with 512 frequency domain samples in the range 0-1 Hz. A trapezoidal rule was used to compute the phase in (4.6), using 12 intermediate ranges R between the source and the station. While the complete computation involves 580 modes, the implicitly restarted Krylov-Arnoldi method is used to find the 3 most sensitive modes that correspond to the tropospheric waveguide, with a cost of 2 % of the total run time, as previously indicated (figure 4.7). The signal obtained from the truncated sum shows a very good agreement with the complete ground signal.

The above analysis demonstrates that the tropospheric sheet in the complex k -plane (figure 4.5) contains all the necessary information for waveform synthesis. This sheet is an attracting sector for the mode trajectories (as the frequency increases) that are most sensitive to low altitude perturbations thereby leading to a physical interpretation in terms of atmospheric structures. Furthermore, the modes emerge from a cusp at a specific cutoff frequency ω_0 (0.09 s^{-1} , 0.39 s^{-1} and 0.71 s^{-1} for the first, second and third mode, respectively). On the other hand, since $\omega_i > 0$ these modes lie in the upper half of the complex k -plane and thus, the contribution of the various poles vanishes as $\omega_r \rightarrow +\infty$, as shown in figure 4.4. We can therefore take advantage of these results to compute the temporal Fourier transform.

To develop the leading-order term of the inverse Fourier transform, we first rewrite (4.6) along an arbitrary fixed spatio-temporal ray $r/(t - \tau) = v$, where $\tau\omega$ is the phase shift of the source term (4.20)

$$p(r, 0; r/v) = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{4}}}{4\pi\sqrt{2\pi r}} \sum_{j \in J} e^{\omega_i(\frac{r}{v} + \tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} p_j(\omega_r, r) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\Phi_j(\omega_r, R)\right\} d\omega_r, \quad (4.21)$$

where J is the subset of most sensitive modes and

$$p_j(\omega_r, r) = \frac{[\phi_j(0; \omega, R)]^2}{\sqrt{k_j(\omega, R)}} |\hat{s}(\omega_r)|, \quad (4.22)$$

where \hat{s} is the Fourier transform of (4.20). In the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ with R fixed, the integral may be evaluated asymptotically by the well-known stationary phase method. The phase function of (4.21) is

$$\Phi_j(\omega_r) = \int_0^R k_j(s, \omega_r) ds - \frac{\omega_r R}{v}. \quad (4.23)$$

The points of stationary phase are given by the roots of $\Phi_j'(\omega_r) = 0$ or, from (4.23),

$$\int_0^R \frac{\partial k_j}{\partial \omega} ds - \frac{R}{v} = 0, \quad (4.24)$$

subject to the constraint $\omega_0 < \omega < 2\pi$, where ω_0 is the cut-off frequency ($\omega_0=0.09 \text{ s}^{-1}$ for the first most sensitive mode).

Two distinct behaviors are possible. Whenever $v_1 < v < v_2$, (4.24) has a unique real solution that we denote by $\omega_r = \bar{\omega}(R, v)$, as shown in figure 4.8. Thus, among all the frequencies contained in the source, the atmosphere filters out, along each ray $x/t = v$ one particular frequency $\bar{\omega}$ given by (4.24). In the opposite case, where the velocity v is greater than v_2 or less than v_1 , there is no solution to (4.24) and thus, the integral vanishes ([Bender 1999]). Indeed, once the velocity front v_1 has reached the infrasound station, the atmosphere returns to the rest state with a decay rate that can be obtained through asymptotic analysis.

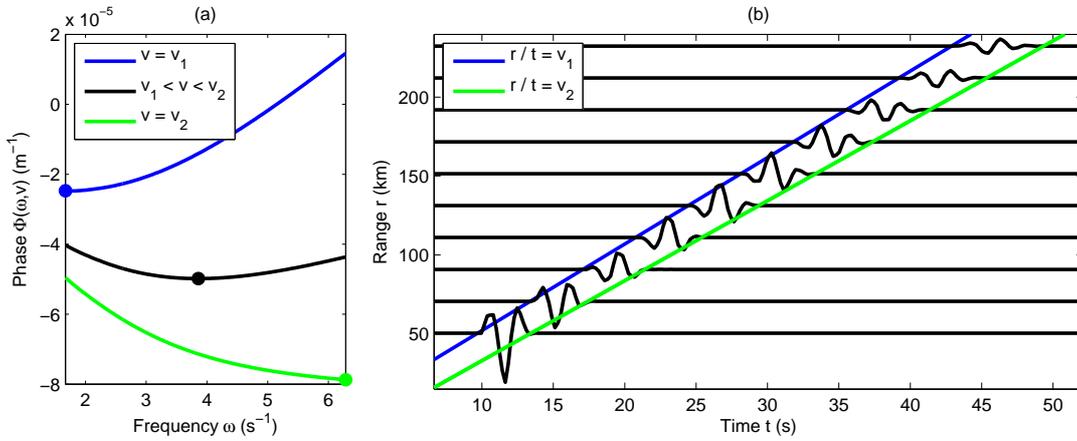


FIGURE 4.8 – Phase Φ associated with the first dominant mode as a function of the real frequency ω_r for distinct values of the velocity v ($v_1=335 \text{ m.s}^{-1}$ and $v_2=328 \text{ m.s}^{-1}$). Circles show the point of stationary phase $\bar{\omega}$. Ground-based signals obtained with the stationary phase method for the first most sensitive mode. Signals are shown with a shifted time : $t' = t - r/c_0$ ($c_0 = 350 \text{ m.s}^{-1}$).

The leading-order contribution arising from the first dominant mode ($j = 1$) in expression (4.21) can be evaluated according to the general formulas given in [Bender 1999]. As $\varepsilon \rightarrow 0$, the impulse response associated with this mode reduces to

$$p(r, v) \sim \frac{i\bar{\phi}_1^{-2}(R, v)e^{i\frac{\bar{\Phi}_1(R, v)}{\varepsilon} + \omega_i(\frac{r}{v} + \tau)}}{4\pi\sqrt{r} \left[\frac{\bar{k}_1(R, v)}{\varepsilon} \int_0^R \frac{\partial^2 k_1}{\partial \omega^2}(s, v) ds \right]^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \frac{\alpha(R, v)}{\varepsilon} + \dots \right] \quad (4.25)$$

where

$$\alpha = \frac{5ip_1[\Phi_1^{(3)}]^2 + 12ip_1^{(2)}\Phi_1^{(2)^2} - 12ip_1^{(1)}\Phi_1^{(3)}\Phi_1^{(2)} - 3ip_1\Phi_1^{(4)}\Phi_1^{(2)}}{12p_1[\Phi_1^{(2)}]^3}, \quad (4.26)$$

evaluated at $\bar{\omega}$, with the notation

$$\Phi_1^{(l)} = \frac{\partial^{(l)} \Phi_1}{\partial \omega^{(l)}}(R, \omega), \quad p_1^{(l)} = \frac{\partial^{(l)} p_1}{\partial \omega^{(l)}}(R, \omega) \quad \text{and} \quad \phi_1 = \phi_1(0; R, \omega).$$

The response takes the form of a wavepacket in the (r, t) plane, as shown in figure 4.8. The wave packet is confined within a wedge bounded by the two rays $r/t = 328 \text{ m.s}^{-1}$ and $r/t = 335 \text{ m.s}^{-1}$. Inside the packet, the contribution is dominated by the stationary phase. For $\alpha = 0$, the wave packet (4.25) is compared to the FFT with 580 modes in figure 4.9. We find a very good overall approximation of the waveform with a single mode (the first most sensitive mode issuing from the cusp at $c_r \simeq 335 \text{ m.s}^{-1}$) evaluated at the frequency $\bar{\omega}$. In practice, we apply the Krylov subspace process to find the eigenvalues that are nearest the curve γ_1 in the complex k -plane. Once the eigenvalues k_j are obtained for a fixed frequency, a Newton-Raphson method is used to solve $\Phi_1' = 0$ for a given v , without significant supplementary CPU time. In striking contrast to other numerical methods, the complex waveform can be computed from a single mode evaluated at the frequency $\bar{\omega}$, with a CPU time of typically 1-10 seconds.

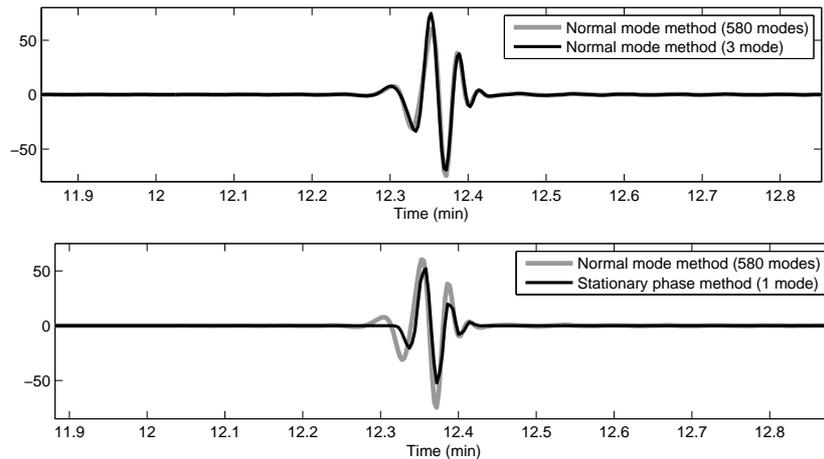


FIGURE 4.9 – Ground-based signals computed at the station I30JP with the range-dependent normal mode approach. The reference signal (gray), obtained with 580 modes using the FFT algorithm (with 512 frequency samples), is compared to that obtained with the three most sensitive modes (top) and the stationary phase approximation for the first mode (bottom).

The question of how relevant the stationary phase approximation is to practical applications is intimately related to confidence intervals. Through algebraic manipulations, we can find a higher-order asymptotic expansion to (4.21). However, the expansion requires higher-order derivatives $k_j^{(3)}, k_j^{(4)}, \dots$ (see (4.26)) and thus, accurate means of solving the dispersion relation in the complex k -plane. Such an approach would require higher computer time. It led us to believe that our approach,

which gives an approximate waveform at a considerably lower CPU time, promises to be more fruitful than seeking the maximum precision for a fixed atmospheric state. In other words, we hypothesize that, the higher the sampling size, the better the obtained statistics, which is the ultimate goal of many infrasound studies. In the meantime, the present paper has shown how the CPU time can be considerably reduced, through the analytic continuation of the range-dependent normal mode method in the complex k -plane, which provides relevant statistics for applications.

4.5 Conclusion

We have examined the pressure field generated by a point source explosion within a background atmospheric state given by a combination of ECMWF data and empirical reference models. The impact on long-range infrasound propagation of small departures from a given profile was studied through perturbation theory. In practice, these imperfections may stem from atmospheric structures that are not considered (e.g. gravity waves) or they may simply be the result of horizontal variation. While a consensus seems to have emerged that gravity waves with length scales of less than about 100 km are filtered out in available atmospheric specifications, it is not clear whether classical high frequency techniques are able to capture the effects of these scales.

In this paper, we used a range-dependent normal mode approach with no constraint on the frequency. The analysis of the vertical structure of the wave equation in the complex wavenumber plane (the so-called k -plane) indicates that only a few eigenvalues are involved in long-range propagation of infrasounds. These modes, that are most sensitive to key atmospheric features, can be computed with a high degree of accuracy through a Krylov subspace process that uses a shift-and-invert strategy. Sensitivity arguments indicate that these modes are close to curves in the complex k -plane that may be obtained through the analytic continuation of the classical WKB analysis. The process time of our reduced model is two orders of magnitude less than the computation of the complete spectrum with a QR algorithm. It therefore appears that a low order reduced model based on a few suitable eigenvalues can provide the impulse response over large ranges of frequencies. This reduced model maintains full generality and waveforms can be recovered by using a stationary phase method. In this case the process time is no longer than several seconds on a single processor.

Our reduced model gives insights into the role of atmospheric structures in the waveform features. By means of a wavelet-based decomposition of the profile perturbation, we have shown that the components leading to the most sensitive eigenvalues give regions and wavelengths of atmospheric structures involved in the propagation. Other regions of the background atmosphere are not relevant to the computed waveform. Indeed, our reduced model allows sensitivity analysis and statistical studies at minimum CPU time.

4.6 Appendix : WKB approximation

We consider here the wave equation

$$\varepsilon^2 \frac{d^2 p}{dz^2} = Q(z; K, \Omega) p, \quad (4.27)$$

where ε is a small parameter, with

$$Q(z; K, \Omega) = K^2 - \Omega^2/c^2(z)$$

where K and Ω are complex. Furthermore, we make the assumption that $\text{Im}[Q] \ll \text{Re}[Q]$ so that (4.27) refers to the complex perturbation of the real problem fully treated by [Bender 1999]. By limiting the asymptotic expansion of the phase to order 1, the classical approach leads us to express the solution as a linear combination of two independent solutions :

$$p(z) = Q^{-1/4}(z) \left[A e^{\frac{1}{\varepsilon}\phi(z)} + B e^{-\frac{1}{\varepsilon}\phi(z)} \right], \quad (4.28)$$

where $\phi' = Q^{1/2}$ and A and B are scalar constants depending on boundary conditions. Since function $Q(z)$ is close to the real axis, the solution clearly has two distinct behaviors along the z -axis : the solution is dominated by a real exponential for $\text{Re}[Q(z)] > 0$ and is mostly oscillating in regions where $\text{Re}[Q(z)] < 0$.

In the vicinity of points z^* such that $\text{Re}[Q(z^*)] = 0$, the asymptotic expansion is no longer valid. Nevertheless, a first order Taylor expansion can be obtained through a change of variable $z \rightarrow Z(z; \varepsilon)$, thereby leading to the Airy equation $d^2/dZ^2 p = Zp$. The solution in this critical layer can be expressed as a linear combination of Airy functions. Matching arguments provide a direct linear relation between the coefficients of (4.28), (A_u, B_u) and (A_l, B_l) above and below the critical layer respectively

$$\begin{bmatrix} A_u \\ B_u \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} A_l \\ B_l \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Let the zeros of $\text{Re}(Q)$ be sorted so that $0 < z_1 < z_2 < \dots < z_N$, and P_1, P_2, \dots, P_N be the corresponding *passing* matrices. From an iterative process, we can deduce from (4.29) the relation

$$\begin{bmatrix} A_N \\ B_N \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

where $M = P_N \dots P_2 P_1$.

Finally, we take into account the boundary conditions at $z \rightarrow \infty$ and $z = 0$ to obtain conditions on Q . The boundary conditions can be written as linear relations on the coefficients : $\alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 = 0$ for the condition at the ground $z=0$, and $\alpha_N A_N + \beta_N B_N = 0$ for $z \rightarrow \infty$. Adding these conditions to the system (4.30) provides a unique relation that is a necessary and sufficient condition for the existence of a solution for the problem (4.27)

$$\beta_1 (\alpha_N M_{11} + \beta_N M_{21}) = \alpha_1 (\alpha_N M_{12} + \beta_N M_{22}). \quad (4.31)$$

Real and imaginary parts of the above relation lead to two expressions. First, we find the *Bohr-Sommerfeld* quantization rule (4.17) where z_1 and z_2 correspond to ordered pairs surrounding an oscillating area ($\text{Re}[Q] < 0$). Then, since $\text{Im}[Q] \neq 0$, there is also the necessary condition (4.18) or (4.19) in the case $\text{Re}[Q] < 0$ near the ground ($0 < z < z_1$). Note that (4.18) and (4.19) are given for homogeneous boundary conditions or, in other words, the solution vanishes as $z \rightarrow \infty$ and there is a perfect reflection at $z = 0$ ($p_1'(0) = 0$).

+

Statistically accurate low-order models for infrasound propagation

Sommaire

5.1	Introduction	107
5.2	A stochastic normal mode decomposition of infrasounds	109
5.2.1	Mean state and uncertainties	109
5.2.2	The vertical structure equation	110
5.2.3	Stochastic eigenvalues	110
5.3	A stochastic reduced model	111
5.3.1	Variance-based reduced model	112
5.3.2	Confidence intervals of reduced models	116
5.4	Conclusion	120
5.5	Appendix : Impulsive point source	120

5.1 Introduction

It is now generally recognized that long-range infrasound propagation is sensitive to the upper atmosphere (see [Rind 1978]) as well as to lower altitude layers such as the stratosphere. During the past ten years extensive simulations were carried out by [Kulichkov 2013], [Chunchuzov 2011], [Hedlin 2012] and [Bertin 2014]. These numerical models provide a firm numerical basis for the understanding of the impact of stratospheric structures on waveforms. An examination of these data indicates that waveforms are rich in characteristic features and may consist in several subsets, the characteristics of which being sensitive to subgrid structures ([Dergham 2013]).

The most popular method for identifying atmospheric structures is known under the names empirical orthogonal eigenfunctions (EOF), principal component analysis (PCA) or proper orthogonal decomposition ([Holmes 1998]). Such a decomposition is based on an energy ranking of structures obtained from diagonalizing the spatial correlation matrix. The space of coefficients can be thought of as the state space for atmosphere evolution, and the wind at every altitude is a vector-valued function on that state space ([Mezic 2013]). This approach is well-suited to slowly varying media, for which a limited number of EOFs describes the overall ‘evolution’ of the media. Due to the small dimensionality of the model space, a grid search method

can be used to solve the inverse problem as described by [Assink 2013]. However, there are two major drawbacks. First, there is the question in all these orthogonal decompositions as to how the truncation error should decrease (and how the error propagates through the estimation method). Second, the energy may not in all circumstances be the correct measure to rank the structures. Recently [Bertin 2014] have shown that small sub-grid variations in the profile may have major impacts on the recorded signal.

In infrasound propagation modeling, the wind and temperature profiles are usually obtained as a result of estimates of some kind and thus inevitably involve some random errors ([Drob 2013]). It is more realistic, therefore, to regard the coefficients depending upon such measurements such as random variables with a probability distribution reflecting the distribution of the measured values. The mathematical formulation of the problem leads to linear differential equations whose coefficients are random functions of space and time, a problem which belongs to the class of linear stochastic equations. The main difficulty of the problem stems from the fact, first observed by [Kraichnan 1961], that in spite of its apparent linearity, the solution is nonlinear in stochastic quantities. This gives rise to mathematical difficulties such as the divergence of perturbation expansions, the appearance of secular terms, and the fact that even the lowest order moments of the solution depend on the complete set of all the moments of the coefficients.

If random inputs are small, a simpler approach, though not general, consists in perturbing the equations and its eigenvalues ([Kato 1995], [Trefethen 1997]). However, in many applications, the model can still be rather complex and the system dimension makes the computation infeasible, due to memory and time limitation as well as the ill-conditioning. A way to overcome this problem is to use reduced models ([Antoulas 2001], [Salimbahrami 2006]). The problem of model reduction is to replace a given mathematical model by a model that is much smaller than the original one, yet still describes (at least approximately) certain aspects of the system. If the approximation error is within a given tolerance, only the smaller system's model needs to be simulated, which will in general take much less time and computer memory than the original large-scale system would do.

The main objective of this paper is to develop a stochastic reduced-order model starting from the classical normal mode technique. The theory, which is to be applicable to the near field as well as to the far field, is used to study the experiments that was carried out at the Sayarim Military Range, Israel (see [Fee 2013] for an overview of the experiments). The explosions led to several distinct detections on the International Monitoring System (IMS) infrasound network. Numerical calculations were performed by [Fee 2013] to compute the transmission loss from a 0.5 Hz Parabolic Equation (PE) modeling and the ray tracing technique. However, such calculations do not explain neither the recorded waveforms, nor the sequence of stratospheric arrivals.

The rest of the paper is organized as follows. In § 2, we formulate the stochastic model. The resulting system is nonlinear in the perturbation. The reduction algorithm is described in § 3, based on the so-called Sobol indices. It is shown that as the

acoustic wave propagates, it captures more randomness through multiple reflections and thus, the sample size used to compute statistics needs to be increased to warrant a given confidence level. A brief summary and concluding remarks are given in § 4.

It should be stressed that achieving faster simulation is not the only goal for applying model reduction. It is essential to gain insight into the cause of ducting and thus, waveforms deformation, given statistical properties of inputs.

5.2 A stochastic normal mode decomposition of infrasounds

5.2.1 Mean state and uncertainties

There is no consensus on how mean atmospheric specifications can be obtained from operational numerical weather predictions or atmospheric climate reanalysis. Both the European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) and G2S (Ground to Space) specifications have been used extensively in long-range infrasound propagation studies. In most cases the ECMWF profiles are matched to statistical data for altitudes higher than 80 km.

While it is known that neither the G2S nor ECMWF specifications can resolve small-scale variability, the major setback in modeling studies is that the two effective sound speed profiles show a discrepancy that increases with altitude, reaching more than 20 m.s^{-1} at 50 km altitude for the profiles used in the Sayarim studies (see Figure 3 in the paper by [Fee 2013]). The most likely origin of such a difference, which is known to have a major impact on stratospheric phases, could be possibly related to the way gravity waves are parameterized.

There are three basic length scales in infrasound propagation phenomena : the typical acoustic wavelength, the typical propagation distance R , and the typical size of the inhomogeneities λ . There is also a typical order of magnitude that characterizes the standard deviation of the dimensionless fluctuations of the parameters of the medium (the effective sound speed). It is not always so easy to identify the scale λ , but we may think of λ as a typical correlation length. In this study, the effective sound speed profile is given by

$$c(z) = \bar{c}(z) [1 + \varepsilon X(z)], \quad (5.1)$$

where the mean state \bar{c} is obtained from the ECMWF and G2S profiles, ε is a small parameter and X is a stationary random process with mean zero, *i.e.* the *first moment* or *expectation* is given by $\mathbb{E}[X(z)] = 0$. The second moment of X is given by the Ornstein-Uhlenbeck covariance function,

$$\mathbb{E}[X(z)X(z')] = \exp(-\lambda^{-1}|z - z'|), \quad (5.2)$$

where $\lambda > 0$ is the characteristic length-scale of the process (practically, "how far apart" two points z and z' have to be for X to change significantly.) The Ornstein-Uhlenbeck process, which is known to be the unique stationary first-order Markovian

Gaussian process, was first introduced as a mathematical model of the velocity of a particle undergoing Brownian motion ([Uhlenbeck 1930]).

There are no known results that justify why we should consider a specific profile \bar{c} in any way, thereby rendering any intermediate mean state valid. In the present paper, the mean state \bar{c} in (5.1) consists of weighted means of the convex function $x\bar{c}_1 + (1-x)\bar{c}_2$, where \bar{c}_1 and \bar{c}_2 are the profiles provided by the ECMWF and G2S specifications, respectively.

5.2.2 The vertical structure equation

Following [Bertin 2014], we use the wave equation in cylindrical coordinates (r, θ, z) , where r and z are the distance from the source and altitude, respectively. The perturbation is assumed to be initiated by a *deterministic* ground-based localized excitation of frequency ω . The vertical structure $\phi(z)$ satisfies the Helmholtz equation

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k^2 \right] \phi = -\frac{\delta(z)}{2\pi}, \quad (5.3)$$

which, for unbounded atmospheres, requires a boundedness condition as $z \rightarrow \infty$. In the above equation $c(z)$ is defined by (5.1), k is the (random) horizontal wavenumber and δ is the Dirac delta function which mimics a point source at $z = 0$.

Following the classical approach (e.g. [Jensen 1994]), the spatial part p of the wave field can be obtained from the discrete-spectrum contribution,

$$p(r, z; \omega) = \frac{i}{4} \sum_{j=0}^N \phi_j(z; \omega) \phi_j(0; \omega) H_0^{(1)}(k_j(\omega)r), \quad (5.4)$$

where $H_0^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind ([Abramowitz 1964]) and ϕ_j is a suitably normalized eigenfunction associated with the spatial eigenvalue $k_j(\omega)$. The signal is then obtained by applying the inverse Fourier transform to (5.4) to obtain at ground level ($z = 0$)

$$p(r, 0; t) \sim \frac{i}{4\pi} \sum_{j=0}^N \int_F [\phi_j(0; \omega)]^2 H_0^{(1)}(k_j(\omega)r) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (5.5)$$

where the integration is performed along the path F in the complex ω -plane. In order to avoid spurious noncausal effects, the frequency parameter ω is treated as a complex variable $\omega = \omega_r + i\omega_i$, with a small positive imaginary part $\omega_i \ll 1$ and thus, the eigenvalues k_j are complex. According to the frequency shifting property of the Fourier-Laplace transform, the ground-based signal can be obtained from the classical FFT algorithm (for $\omega = \omega_r$) together with the mapping $p(t) \mapsto p(t)e^{\omega_i t}$.

5.2.3 Stochastic eigenvalues

The eigenvalues $k_j(\omega)$ are readily identified as the zeroes of a dispersion relation that depends on $c(z)$. As a result, the eigenvalues k_j and eigenfunctions ϕ_j are

random variables and random functions whose statistical properties are determined by those of the random function $c(z)$. In this work we intend to capitalize upon the fact that we seek to determine not the eigenvalues themselves but only their statistical moments $\mathbb{E}(k_j^n)$.

For small ε , we can make use of perturbation expansions and compute the mean eigenvalues from a differential operator that we obtain by replacing the random coefficient in (5.3) by its respective mean value \bar{c} . Assuming expansions of the form

$$k_j = \sum_{l=0}^{\infty} k_{jl} \varepsilon^l, \quad \text{and} \quad \phi_j = \sum_{l=0}^{\infty} \phi_{jl}(z) \varepsilon^l, \quad (5.6)$$

the coefficients may be successively determined. From equation (5.6) it follows

$$\mathbb{E}(k_j) = \sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{E}(k_{jl}) \varepsilon^l. \quad (5.7)$$

Since the leading order k_{j0} depends only on the mean problem, it is determinate; the remaining coefficients k_{jl} ($l > 1$) being random. Figure 5.1 shows typical mean eigenvalues k_{j0} in the complex k -plane. The eigenvalues lie on interconnected curves that are related to specific regions in the effective sound speed profile. These regions can be obtained from (5.3) as shown in [Bertin 2014].

The eigenvalues of figure 5.1 are computed using a boundary value (or implicit) method. The equation (5.3) was reduced to a linear algebraic equation using a pseudo-spectral technique ([Candelier 2012, Candelier 2011]) and the global eigenvalues were obtained by applying a QR algorithm to the generalized eigenvalue problem.

5.3 A stochastic reduced model

Model reduction methods based on normal modes is probably one of the oldest model reduction techniques ([Marschall 1969]). The basic idea is to project the dynamics of the linear system onto an invariant subspace corresponding to the dominant modes of the system. An obvious, though not optimal, choice of dominant modes is to select the eigenvalues having negative, or small positive imaginary parts. According to the asymptotic expansion of the Hankel function in (5.4) (for large r), those eigenvalues dominate the long-range propagation of infrasounds. Such a view, however, is not suited to waveform synthesis as it neither takes into account the frequency dependence of the eigenvalues nor their sensitivity with respect to small perturbations.

The sensitivity of waveforms to given vertical structures can be preserved in the reduced model by retaining the eigenvalues that are close to local maxima of $c(z)$. The associated structures in the complex k -plane are the so-called cusps described by [Bertin 2014] (see Figure 5.1). Indeed, each profile $c(z)$ can be seen as a potential, each of its oscillating regions being associated with one curve in the complex k -plane, on which eigenvalues are distributed. Since the cusps can be computed at

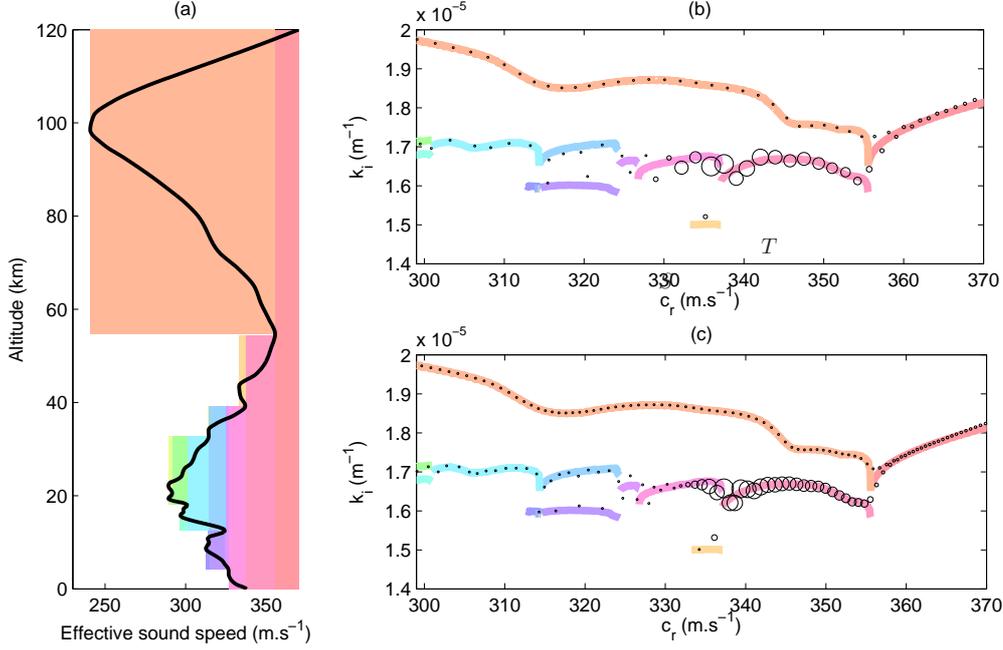


FIGURE 5.1 – Effective sound speed profile \bar{c} (a) and mean eigenvalues for frequencies of 0.25 Hz (b) and 0.5 Hz (c). $\omega_i = 0.005 \text{ rad.s}^{-1}$ and $\varepsilon = 1 \%$. For each eigenvalue, the size of circle is proportional to the sensitivity/Sobol index. The curves on which eigenvalues are distributed are associated with the altitude ranges given in (a).

very low CPU cost through a WKB approximation, the eigenvalues can be obtained through Krylov methods together with a shift-and-invert method. Such an approach is very attractive for large-scale systems since only matrix-vector multiplications are required.

5.3.1 Variance-based reduced model

In this section we perform a sensitivity analysis on how the eigenvalues affect the pressure field, with the aim of selecting the statistically significant eigenvalues. For given ω and r , the pressure field defined by (5.4) is reduced in a random variable with mean $\mathbb{E}(p)$ and variance $\text{Var}(p)$. Hence, the variance can be decomposed into fractions which can be attributed to the (input) eigenvalues k_j . The first sensitivity index (or Sobol index) is defined by

$$S_j(r, \omega) = \frac{\text{Var}(\mathbb{E}[p(r, \omega)|k_j])}{\text{Var}(p(r, \omega))}, \quad (5.8)$$

where $\mathbb{E}[p(r, \omega)|k_j(\omega)]$ is the conditional expectation of $p(r, \omega)$ given the eigenvalue $k_j(\omega)$. Using the perturbation expansions (5.6), the sensitivity indices can be estimated with a relatively good level of accuracy. For larger ε , these indices can be

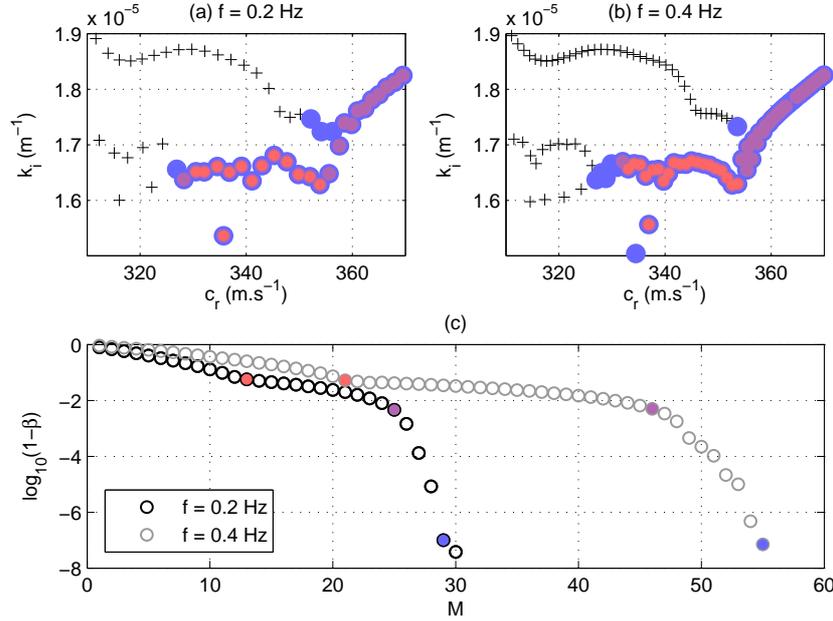


FIGURE 5.2 – Reduced models in the frequency domain for frequencies of 0.2 Hz (a) and 0.4 Hz. (c) : Truncated sum β (to M Sobol indices, by decreasing order) versus M . The eigenvalues associated to the reduced models indicated by colored full circles in (c) are identified by circles of same color in (a) and (b). $\omega_i = 0.005 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

obtained at low cost using a Fourier Amplitude Sensitivity Test ([Haynes 2013]).

Typical results are displayed in figure 5.1(b,c) for the ECMWF profile ($x = 1$). The larger indices are associated with eigenvalues that are close to the cusp located at $c_r \simeq 338 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; the closer the eigenvalues are to the cusp, the more they contribute to the pressure field. For a given sensitivity level, it appears that other eigenvalues have to be retained in the reduced model. These eigenvalues spread along a curve (denoted by S in figure 5.1), up to a second cusp, at $c_r \simeq 356 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, implying that the corresponding eigenfunctions are oscillating for altitudes up to 40 - 58 km (figure 5.1a). This broader band of modes is crucial to capture the variance of stratospheric arrivals. The remaining eigenvalues can be neglected since their contribution to the statistical properties of signals are not significant.

Before relating the statistical results from our reduced model, we must address a question : how might the approximation error associated with the reduced model be quantified? Uncertainty arises from two sources : finite sampling and reduction process. Owing to the discrete nature of the spectrum, a discrete sequence of random functions $q_M(\omega)$ can be obtained from (5.4) by retaining $M \leq N$ modes. The modes are sorted in decreasing sensitivity indices and thus, the random functions define (stochastic) reduced models of increasing statistical accuracy (see figure 5.2). Since the imaginary part of the associated eigenvalues is a decreasing function of S_j ,

it turns out that the random functions $q_M(\omega)$ forms a sequence of order functions ([Eckhaus 1973]), *i.e.* $q_{M+1} = o(q_M)$. In other words, by arranging the terms in (5.4) in decreasing orders of magnitude, the resulting truncated series may be thought of as a uniformly valid expansion

$$q_M(\omega) = \sum_{j=1}^M p_j(\omega), \quad (5.9)$$

where p_j is the term in the sum (5.4), evaluated at the (simple) pole k_j , with

$$S_N(\omega) < S_{N-1}(\omega) < \dots < S_j < \dots < S_1(\omega). \quad (5.10)$$

Correspondingly, the sensitivity indices can be summed up to form the ratio

$$\beta(\omega) = \sum_{j=1}^M S_j(\omega) \left[\sum_{j=1}^N S_j(\omega) \right]^{-1}, \quad (5.11)$$

so that $\beta = 1$ for $M = N$ whatever the value ω . Figure 5.2 shows β as a function of M for two frequencies. For $\omega_r = 0.25$ Hz, we obtain $\log_{10}(1 - \beta) = -2$ (or equivalently $\beta = 0.99$) with only $M = 80$ modes. For a given order M , the partial sum of sensitivity indices is a decreasing function of ω . This means that M must necessarily be increased for the statistical accuracy of the reduced model to be preserved as $\omega \rightarrow \infty$. However, as already mentioned, the conditional expectation of p given k_j strongly depends on the location of k_j within the spectrum and, more precisely, to its distance to cusps. Hence, the growth rate of β (for fixed ω) exhibits several types of behaviour in M , each of the regions being associated with sub-sets of eigenvalues in the complex k -plane, as shown in figure 5.2. Indeed, the most important feature of our reduced model lies in the fact that the order can be computed to satisfy a given statistical accuracy whatever the frequency.

An important point is that the above formalism describes the statistical behavior of each component $q_M(\omega)$ in the (complex) frequency domain, whereas in most cases we are interested in how the FFT of (5.9) converges to the signal (5.5) as M increases. We can take advantage of the definition of sensitivity indices to measure the statistical precision of the reduced model in time domain. To any frequency ω_r , one may associate the maximum order $M(\omega_r)$ for which $\beta(\omega_r) \leq \beta_c$. Reverting to the temporal space *via* the FFT, the statistical moments $\mathbb{E}[q_M^n]$ can therefore be estimated from a set of possible profiles $c(z)$ satisfying (5.1) and (5.2). It is useful to introduce the error

$$\mu = \frac{\|\mathbb{E}[q(t)] - \mathbb{E}[p(t)]\|}{\|\mathbb{E}[p(t)]\|}, \quad (5.12)$$

where $\|\cdot\|$ is the euclidian norm over all possible stratospheric arrival times (*i.e.* t of non zero $q(t)$). In order to measure the dispersion, the expectancy in (5.12) is replaced by the standard deviation. Note that in the calculations, the characteristic length-scale λ is fixed to 1 km and the signal is computed at the Israel array IN3 (figure 3 in [Fee 2013]), located 363 km away from the source.

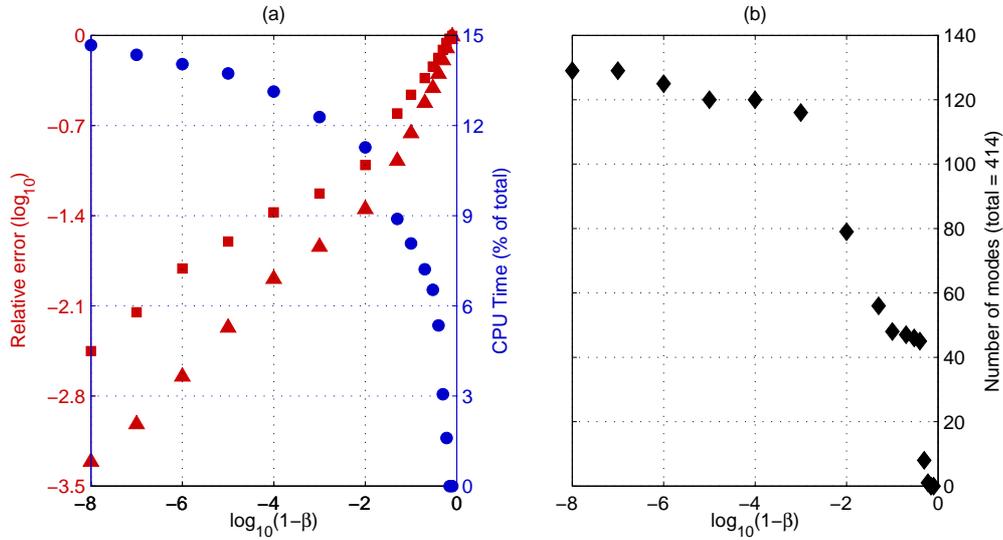


FIGURE 5.3 – (a) Relative error associated with the mean signal (red squares) and its standard deviation (triangles) as functions of β_c . The corresponding CPU cost as required by the Krylov-Arnoldi algorithm is given by circles. (b) Number of modes involved in the reduced model to get the confidence level β_c .

Figure 5.3a shows the errors as functions of β_c for a family of reduced models of increasing order. The relationship between M and β is given in figure 5.3b. The colored curves that are plotted in 5.1 and the associated eigenvalues are computed through a WKB approach ([Bender 1999]), and by applying a Krylov-Arnoldi algorithm ([Bai 2002]), respectively. The numerical technique is described by [Bertin 2014]. The pressure signal at $r = 0$ is given by a simplified model which is described in the appendix and $\lambda = 1$ km.

In figure 5.3b, the number of modes is given at 1 Hz ($\omega_r = 2\pi$). The accuracy of both the standard deviation and the mean signal increase with the same rate even though $M(2\pi)$ does not change significantly (especially for $\beta > 0.999$ or, equivalently $\log_{10}(1 - \beta) < -3$). This result is not surprising since the characteristic length of 1 km is lower than the acoustic wavelength at 1 Hz. While the order M is suited for large structures (for a fixed β_c), it must be increased locally (i.e. in narrow frequency ranges) to capture details in the signal that most contribute to the desired statistics. This approach (given β_c , find M) provides an order M which depends on the frequency. Then, the FFT of the reduced model (5.9) can no longer be associated to a fixed order. In the following, the index M is dropped when q is expressed in time domain.

It is worthwhile to note that convergence techniques (such as that described by [Beattie 2001]) can considerably decrease the numerical cost of the Krylov approach. In the present study, however, the parameters of the Krylov-Arnoldi technique are fixed, thereby giving rise to a CPU time which is a relatively smooth

function of β_c . Nevertheless, the statistical moments of waveforms are correctly and accurately captured by the reduced model up to the third decimal place (for variance) with a CPU cost of 10% of that observed with a *deterministic* classical QR algorithm. While the computation of a signal from several full spectra (2^{10} frequencies uniformly distributed in the range 0-1 Hz) needs 7-8 h (on a single processor), the stochastic low-order reduced model provides the statistical moments at lower cost (less than 1 h), provided that ε is sufficiently small for (5.6) and (5.7) to apply.

5.3.2 Confidence intervals of reduced models

It should be emphasized that the reduction algorithm described in the previous section is divided into two distinct parts, only one of which is statistical. It consists of first expressing the most sensitive modes in terms of the mean profiles \bar{c} (x varying in the range 0-1), without regard to whether these profiles are random or determinate. Having obtained such relations (in the complex k -plane), one then examines their statistical implications by using perturbation expansions, based upon assumptions about the statistical character of c (for fixed x). For each x , the perturbative method involves the computation of the jacobian matrix of the discretized problem, with a cost of $O(N_2)$ for N_2 discrete frequencies, whatever the sample size N_1 . Hence, this approach merely reduces to matrix-vector products, which requires a lower bound of $O(N_1 N_2^2)$ operations, and FFT transforms, which requires $O(N_1 N_2 \log N_2)$ operations.

The accuracy of this type of reduction process is clearly dependent upon both ε and the sample size N_1 . While for relatively small N_1 , the numerical cost is dominated by that of the low-order reduced model, which is known to vary as $O(N_2)$ (for the Krylov-Arnoldi algorithm), the cost of the perturbative part increases with N_1 and dominates for $N_1 > O(10^4)$. Indeed, the statistical convergence properties depend on the typical propagation distance, which is our third characteristic length scale R .

The rate of convergence (as N_1 increases) can be estimated using (5.11) in which the expected values are approximated by the sample mean (or empirical mean)

$$\bar{q} = \frac{1}{N_1} \sum_{j=1}^{N_1} q^{(j)}(t), \quad (5.13)$$

where $q^{(j)}(t)$ is the signal obtained from the j -th outcome of $c(z)$. Using (5.13) for two successive sample sizes $N_1 - 1$ and N_1 , we obtain

$$\mu(t) = 1 - \frac{N_1}{N_1 - 1} \sum_{j=1}^{N_1-1} q^{(j)}(t) \left[\sum_{j=1}^{N_1} q^{(j)}(t) \right]^{-1}. \quad (5.14)$$

Note that the norm sign in (5.11) has been dropped to study the pointwise convergence. Figure 5.4c shows $\mu(t)$ as a function of N_1 for the signals computed at the infrasound stations IN3 (figure 5.3a) and IS48 (figure 5.3b), located 363 km and

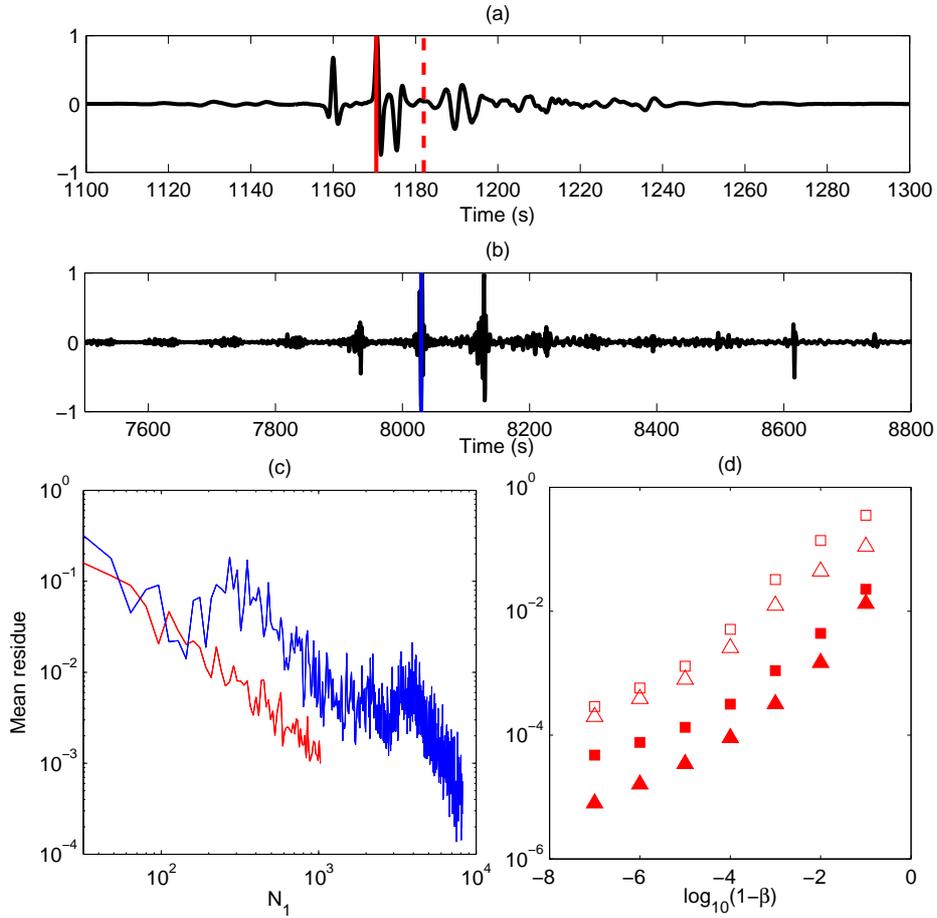


FIGURE 5.4 – Mean signals at the infrasound stations IN3 (a) and IS48 (b), located 363 km and 2454 km away from the source, respectively. (c) : μ versus sample size N_1 for the arrival times indicated by the red and blue lines in (a) and (b). (d) : Coefficients a (squares) and b (triangles) versus β for the arrival times indicated by the solid and dashed lines (\square , \triangle).

2454 km away from the source, respectively. The second signal (figure 5.3b) exhibits several distinct stratospheric components between 7900 s and 8200 s. While these features are similar to that recorded (figure 7 in [Fee 2013]), figure 5.3c shows that a larger N_1 is required for the empirical mean to converge. Indeed, as R increases and the acoustic wave captures more randomness through multiple reflections, the sample size needs to be increased to warrant a given confidence level. This result holds whatever λ in the range 0.1 – 10 km.

The pressure signal associated with the reduced model and the original one are provided by (5.9) and (5.4) and, after applying the FFT transform, reduce in two column matrices of same dimension N_2 . Then, the random functions q and p can be

	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
a	3.15e-2	1.18e-2	2.78e-3	4.73e-4	6.03e-5	1.49e-5	5.96e-6
b	3.98e-2	2.19e-2	7.24e-3	2.76e-3	4.98e-4	2.04e-5	1.43e-5

TABLE 5.1 – Maximum values of a and b versus $\log_{10}(1 - \beta)$.

regarded as N_2 random variables and the differences $q - p$ can be studied in details either in frequency domain or in time domain. The 95% confidence interval may be given from the central limit theorem that states

$$\Pr \left(|\bar{q} - \mathbb{E}(q)| < \frac{2\sigma_q}{\sqrt{N_1}} \right) \geq 0.95, \quad (5.15)$$

where σ_q is the standard deviation of the reduced model. Bearing in mind that q can be expressed from p , equation (5.15) becomes

$$\Pr \left(|\bar{q} - (1 + a)\mathbb{E}(p)| < \frac{2\sigma_p\sqrt{1+b}}{\sqrt{N_1}} \right) \geq 0.95, \quad (5.16)$$

where a and b can easily be determined from the moments of $q - p$ and p . Introducing σ_p as the standard deviation of the original model, the length of the confidence interval is increased by a factor of $\sigma_p\sqrt{1+b}$. For simplicity, we can compute the maximum values of a and b over the N_2 random variables p and q (i.e. over time domain). Typical values are given in Table 1 for the waveforms computed at IN3. We first observe that the coefficients a and b vanish in the limit $\beta \rightarrow 1$, which is the expected behavior. For $\beta = 0.9$, a and b are less than 4×10^{-2} which means that using a low-order reduced model to compute the sample mean \bar{q} does not significantly extent the length of the 95 % confidence interval. This trend, however, hides variability in a and b . Indeed, the coefficients a and b evaluated at the arrival time τ with a maximum amplitude (solid line in figure 5.4a) are larger than that obtained in time windows where the signal is smaller (e.g. dashed line). The main impact of reduction on the confidence interval is the shift $a\mathbb{E}(p) = \mathbb{E}(q - p)$ which is independent on N_1 .

Because it can be applied to completely arbitrary distributions, the inequality (5.15) gives a poor bound and valuable information is lost. Indeed, the coefficients p and q can be viewed as a collection of N_2 random variables, one corresponding to each point t_l ($l \leq N_2$) in time domain. Alternatively, we may envision a suitable function space containing the possible realizations of random functions and discuss the properties of $\mathbb{E}[q^n(t)]$ compared to that of $\mathbb{E}[p^n(t)]$ or, equivalently $\mathbb{E}[(q - p)^n]$. Figure 5.5 gives the mean and variance of $q - p$ as a function of t for several values of β . The variance of main components in the mean signal is correctly captured by the lowest reduced model ($\beta = 0.9$) up to 1200 s. These features are related to stratospheric waveguides that can be captured with few eigenvalues of decreasing Sobol indices. Features of smaller amplitude that appear for $t > 1200$ s present less dispersion and thus a higher-order reduced model is necessary to obtain accurate statistics, especially for $t \simeq 1235$ s (where the variance of p is $O(10^{-2})$).

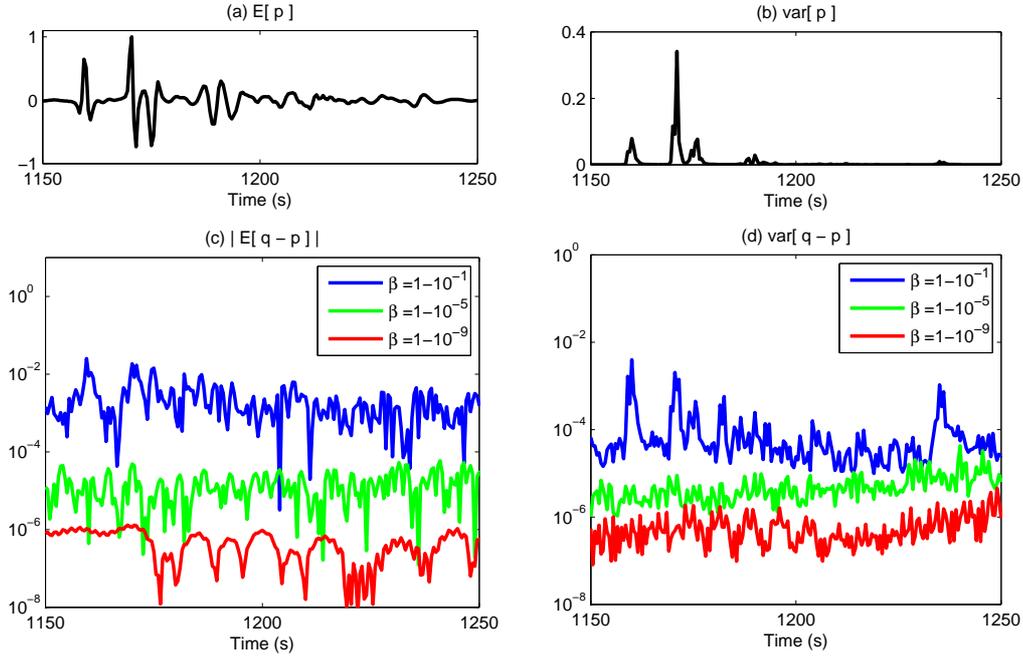


FIGURE 5.5 – (a,b) : Mean and variance of signals computed at IN3 from the original model. (c,d) : Mean and variance of $|p - q|$ for several β .

The variance of $q - p$ in Figure 5.5d shows increasingly less large-scale features as β increases, which is consistent with the dependence of a on time t (figure 5.4). This is a consequence of the variance-based process to select the modes in the k -plane. As the process is designed to capture structures with large variance, the statistics obtained from the reduced model are correlated with $\text{Var}[p(t)]$. For $t = \tau$, both the variance and the mean of the computed signals (at IN3) are maximum. Hence, the reduced model is far more accurate in the neighborhood of $t = \tau$ (figure 5.5c) than in other regions. As a result, the confidence interval shift is smaller (figure 5.4d). In contrast, for $t \simeq 1235$ s the variance is small and a relatively low-order reduced model (e.g. with $\beta = 0.1$) cannot extract the variance.

These results illustrate the potential of approximating the statistical moments from a low-order reduced model even though the variance of waveforms is only partially (but sufficiently) captured by the reduced model. It is important to realize that modes of low Sobol indices can play a significant role in high-order statistical moments, at least locally in time. If, however, rare outcomes are of interest, a suitable reduced-model can be obtained from (5.9) by retaining the eigenvalues with a low Sobol index.

5.4 Conclusion

This paper has examined a new approach for modeling long-range infrasound propagation in complex media with the aim of simplifying the model to the point that the predicted waveforms are correct, even though some small quantitative detail is lost. In contrast to previous modeling works, the present investigation has emphasized the statistical results rather than a deterministic viewpoint, and an algorithm has been given to obtain a stochastic reduced model.

One value of the reduced model presented in this paper lies in the simplification achieved by reduction. By rearranging the eigenvalues by decreasing Sobol indices, the reduced model maximizes the information content per component of degree of freedom (the eigenvalues) and preserves the overall structure of waveforms under sufficiently small perturbations of the vertical profile. The stochastic reduced model allows studies of atmospheric configurations that occur with finite probability at very low cost. To our knowledge, this approach is new and does not seem to have been published elsewhere.

It should be stressed that another important characteristic of the reduced model is that it preserves structures under extension to more degrees of freedom. In a sense, the original model, based on normal modes, possesses adequate complexity. Given that complexity, the model can be reduced for special cases with the assurance that it can be extended again as the scope of our interest widens. Such a property is not shared by ray tracing or parabolic equation techniques.

5.5 Appendix : Impulsive point source

Different investigators have used models with various sources. Although the source is not a point in space, it is convenient to consider it so, and it is also assumed reasonable to consider the linear wave to be that of a spherically diverging acoustic wave a short distance from the blast (at $r = 0$). In the present work, a source function is introduced on the right-hand side of (5.3) in the form

$$P(\omega) = iK\omega e^{ib\omega} \exp\left[-\frac{a\omega + (a\omega)^2}{2}\right], \quad (5.17)$$

where $2\pi a = 75/21$ and $b = -7.5$. The pressure signal is obtained as the real part of the inverse Fourier transform of (5.17).

$$p(\tau) = iK\tau e^{\tau^2} \quad \text{with} \quad \tau = \frac{a - 2i(b + t)}{2\sqrt{2}a}, \quad (5.18)$$

where K is a suitable coefficient that yields a normalized pulse, for instance $p(t) < 1$.

+

Conclusion

Nous avons pendant cette thèse développé une démarche de réduction de modèle fondée sur quelques idées clés. Tout d'abord, un problème linéaire (ou linéarisé) s'exprimant par une équation ou un système d'équations aux dérivées partielles peut se décomposer sur une base propre. La démarche consiste alors à rechercher les valeurs propres de l'opérateur, et la complexité du calcul repose sur la taille de cette base propre. Or, la configuration des paramètres physiques en entrée et le choix de l'observable recherchée font que tous les modes n'ont pas la même importance. En effet, pour la propagation des infrasons dans l'atmosphère, nous avons constaté que les modes peu sensibles aux perturbations atmosphériques ne contribuaient pas ou très peu au signal acoustique mesuré au sol. L'objectif est alors de ne calculer et sommer que les modes les plus importants pour le résultat. Cela revient en pratique à projeter l'opérateur sur le sous-espace propre correspondant à ces modes, via un algorithme de type Krylov-Arnoldi.

Mais pour rendre cette opération possible, il faut pouvoir connaître à l'avance le sous-espace approprié à la réduction, c'est-à-dire localiser à l'avance les valeurs propres les plus sensibles pour ne cibler que ces dernières dans le calcul. Or dans le cas de l'équation d'onde sans absorption, sans amortissement, les valeurs propres se trouvent toutes indistinctement sur l'axe réel. Mais il est apparu que quand on impose une partie imaginaire à la fréquence, toutes les valeurs propres se retrouvent projetées sur un réseau de courbes interconnectées dans le plan complexe. Cette structuration du spectre complexe est le reflet direct des structures du champ de base en entrée (le profil de célérité effective dans notre cas). On peut même retrouver facilement cette structure du spectre à l'aide de la théorie WKB. Chaque branche de cette structure correspond à un guide d'onde local et chaque point de connexion entre les branches correspond à un maximum local de célérité effective. Ainsi, la forme que prend le spectre dans le plan complexe permet de distinguer les valeurs propres les plus sensibles (correspondant à certaines structures spécifiques de l'atmosphère) des autres. Ce faisant, le sous-espace de réduction peut être construit en ciblant uniquement les zones du plan complexe concernés par ces modes, et nous obtenons un modèle d'ordre réduit adapté au cas traité. Par ailleurs, dans le cas des modes normaux pour l'équation d'onde, les valeurs propres recherchées dépendent de la fréquence. Au regard des gammes de fréquence mises en jeu par la source, il apparaît que les modes ne contribuent pas de façon égale au signal sur tout le domaine fréquentiel et une méthode de phase stationnaire peut alors être utilisée pour n'utiliser la contribution d'un mode que sur une fréquence.

Dans un contexte où le champ de base est soumis à des incertitudes, la même

démarche peut être mise en oeuvre. Nous avons vu que les modes les plus contributifs aux deux premiers moments statistiques du signal infrason sont ceux de plus grande sensibilité statistique (i.e. de plus grande variance conditionnelle). Quand la perturbation aléatoire du champ de base est de petite variance, les zones du plan complexe concernées par la réduction restent localisées et se déduisent de l'analyse des structures du champ de base moyen de la même façon que dans le cas déterministe.

Notons ici le statut particulier attaché à cette décomposition en modes propres. En effet, depuis [North 1984] nous savons que les fonctions propres d'une décomposition en modes normaux correspondent exactement aux modes de la covariance de la solution lorsque le forçage est soumis à une incertitude uniforme. Ces structures peuvent être ordonnées et un modèle stochastique d'ordre réduit peut être ainsi formé. Dans notre cas, ce n'est pas le forçage mais le milieu de propagation qui est incertain. Si les détails techniques changent, l'idée reste la même : les modes propres de l'opérateur constituent la meilleure base de description du phénomène, et ces modes peuvent être ordonnés selon leur pertinence statistique pour construire un modèle réduit.

Concrètement, lorsque l'on applique cette démarche de réduction à l'étude d'événements connus d'émissions d'onde infrasonore (l'explosion du réacteur de Fukushima, les expériences Sayarim 2009 et 2011), les résultats montrent un bon accord avec ce que donne le modèle complet (quand tous les modes sont sommés). Si en ne sommant que peu de modes, un faible écart d'amplitude peut être constaté, on retrouve néanmoins les bons temps d'arrivée et la structure globale du signal. Dans le cas stochastique, il s'avère que même si on n'exploite que peu de modes (et donc si une erreur est introduite), la convergence des estimateurs statistiques n'est que peu altérée et l'espérance et la variance sont bien évaluées.

Néanmoins, l'étude de cas réels pour lesquels nous disposons des signaux enregistrés par les stations de mesure montre que les signaux peuvent être extrêmement sensibles à des petites variations atmosphériques et des arrivées peuvent apparaître/disparaître dans le signal selon le champ de base utilisé en entrée du calcul (une perturbation localisée de 1 % de la célérité effective fait apparaître une arrivée stratosphérique dans le cas Fukushima). Or la variabilité dans les champs atmosphériques causée notamment par les ondes de gravité peut entraîner des perturbation de vitesse du son locale de l'ordre de 10 %. On comprend bien que l'utilisation du modèle d'ordre réduit sur un seul champ de base (déterministe ou avec de faibles incertitudes aléatoires) ne suffit pas à l'interprétation et à l'exploitation des résultats de mesure, et un véritable modèle stochastique pour les champs de vitesse et de température doit être construit en entrée du modèle de propagation.

Nous pensons qu'une piste pertinente pour modéliser la variabilité atmosphérique est de la décomposer (ici aussi) en modes, et plus précisément de représenter cette dynamique sur une base réduite. En effet, si l'on dispose des principales structures atmosphériques mises en jeu dans la variabilité, on peut traiter indépendamment ces différentes échelles à l'aide du modèle réduit de propagation acoustique et donc à chaque échelle associer le groupe de modes qui lui correspond. On obtiendrait

ainsi un modèle multi-échelles qui associerait à chaque tendance de la dynamique atmosphérique les structures associées pour la propagation acoustique. L'analyse spectrale des données atmosphérique permet pour cela différentes approches. Il y a par exemple des techniques basées sur l'énergie comme l'ACP (Analyse en Composantes Principales) mais dont le défaut sera d'exhiber des structures atmosphériques avec certes de fortes probabilités d'occurrence mais éloignées de la dynamique réaliste de l'atmosphère et/ou sans impact notable sur la propagation acoustique. Une autre grande tendance à souligner dans l'exploitation des séries temporelles d'observations est la décomposition en *modes dynamiques* [Schmid 2010], [Mezic 2013].

+

Application analytique : la couche limite atmosphérique nocturne

A.1 Modélisation de la couche limite

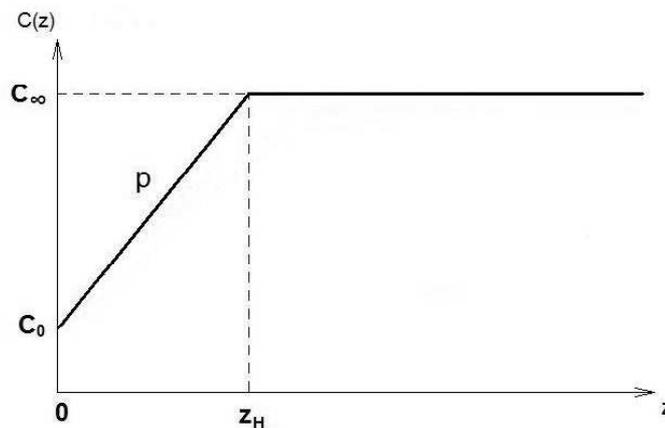


FIGURE A.1 – Profil artificiel de célérité du son dans l'air.

La tendance naturelle du profil de température dans l'atmosphère est inversée la nuit. L'air est dans ce cas plus froid près du sol et il s'ensuit une croissance de la température avec l'altitude jusqu'à généralement une centaine de mètres. En conséquence, le profil vertical de la célérité du son dans l'air est lui aussi croissant dans la couche limite atmosphérique. Cette inversion entraîne la présence d'un guide acoustique près du sol [Waxler 2003], [Waxler 2004]. Nous pouvons idéaliser cette tendance en définissant un profil simple de vitesse du son (figure A.1) qui commence depuis le sol par une croissance linéaire jusqu'à une altitude z_H et qui continue avec un plateau pour les hautes altitudes. Selon les notations de la figure, z sera la coordonnée d'altitude, c_0 la célérité du son au sol, c_∞ la célérité aux hautes altitudes, et p est la pente de la phase croissante ($p = \frac{c_\infty - c_0}{z_H}$).

Nous nous plaçons en outre dans le contexte d'hypothèses simples permettant la mise en oeuvre de la méthode des modes normaux pour un problème à une dimension, tel qu'exposé dans le chapitre 2. L'atmosphère est supposée invariante horizontalement (la célérité du son ne varie que selon l'altitude z). Nous imposons une condition de réflexion totale des ondes au sol, soit une condition d'impédance

infinie (mais les calculs resteront similaires dans le cas d'une impédance complexe finie). Puis nous appliquons la condition d'onde sortante pour la limite $z \rightarrow \infty$.

Nous considérons dans ce contexte l'équation d'onde (Helmholtz) :

$$\Delta f - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0, \quad (\text{A.1})$$

et nous exprimons aussi la condition de réflexion au sol :

$$\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z=0} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Ici, c est la célérité du son dans l'air, et f est la dérivée temporelle de la perturbation de pression ($f = \partial_t p$, si $P = \bar{p} + p$ où \bar{p} est la pression moyenne).

A.2 Caractérisation analytique du spectre

A.2.1 Le problème aux valeurs propres

Si nous effectuons une transformée de Fourier en temps ainsi qu'en espace de l'équation (A.1), on obtient :

$$L_{\omega, \alpha} F = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c(z)^2} - \alpha^2 \right) \right\} F = 0, \quad (\text{A.3})$$

où $F(\alpha, z, \omega) = \iint f(x, z, t) e^{i(\omega t - \alpha x)} dx dt$, ω étant la pulsation, et α le nombre d'onde horizontal. Dans la suite, nous appellerons $k(z)$ le nombre d'onde *local* : $k(z) = \omega/c(z)$. Si bien que l'opérateur s'écrit :

$$L_{\omega, \alpha} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k(z)^2 - \alpha^2) \quad \text{avec } k(z) = \begin{cases} k_\infty = \frac{\omega}{c_\infty} & \text{si } z > z_H \\ \frac{\omega}{c_0 + pz} & \text{si } z < z_H \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

La méthode des modes normaux requiert que l'on recherche les solutions non triviales (non nulles) de ce problème homogène, c'est-à-dire les triplets (ω, α, F) tels que $L_{\omega, \alpha} F = 0$. Plus précisément, en approche spatiale, nous nous donnons une pulsation ω et nous recherchons les paires propres (α, F) de ce problème alors devenu un problème aux valeurs propres. L'objet du calcul présenté ci-après est l'approche de ces solutions par la construction analytique d'une relation de dispersion.

A.2.2 La relation de dispersion

Le nombre d'onde local $k(z)$ dans l'opérateur $L_{\omega, \alpha}$ n'est pas C^1 en $z = z_H$. Il n'y a donc aucune raison que F le soit¹ dans l'équation homogène $L_{\omega, \alpha} F = 0$.

1. On s'en rend compte quand on dérive l'équation $F'' + (k^2 - \alpha^2)F = 0$, et que l'on suppose F suffisamment régulière. Cela donne : $F''' + (k^2 - \alpha^2)F' + 2k'kF = 0$ où k' n'est pas C^0 en z_H alors que tout est continu ailleurs.

Nous introduisons donc la formule de saut de la dérivée seconde, en cette discontinuité, dans l'équation $L_{\omega,\alpha}F = 0$, et nous obtenons :

$$\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c(z)^2} - \alpha^2 \right) F \right\} + \sigma_{F'}(z_H)\delta(z - z_H) + \sigma_F(z_H)\delta'(z - z_H) = 0,$$

où $\sigma_F(z_H)$ et $\sigma_{F'}(z_H)$ sont respectivement les sauts de F et de sa dérivée en z_H . Ce qui nous ramène au système suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega^2}{c(z)^2} - \alpha^2 \right) F &= 0 \\ \sigma_F(z_H) &= 0 \\ \sigma_{F'}(z_H) &= 0 \end{aligned} \tag{A.5}$$

Nous sommes en mesure d'examiner les solutions du problème (A.5) (au sens des fonctions) de part et d'autre de la discontinuité. Nous définissons ainsi $\Phi_-(\alpha, z)$ et $\Phi_+(\alpha, z)$ les solutions respectives des problèmes suivants :

$$\begin{cases} y'' + \left(\frac{\omega^2}{(c_0+pz)^2} - \alpha^2 \right) y = 0 & \text{pour } z < z_H \\ y' = 0 & \text{pour } z = 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

et

$$\begin{cases} y'' + (k_\infty^2 - \alpha^2)y = 0 & \text{pour } z > z_H \\ y \searrow \text{exponentiellement pour } z \rightarrow \infty \end{cases} \tag{A.7}$$

Reste donc à rechercher les constantes d'intégration A et B pour que $A\Phi_- + B\Phi_+$ soit solution du problème complet. Reportant cette expression dans les identités $\sigma_F(z_H) = 0$ et $\sigma_{F'}(z_H) = 0$, nous obtenons un système linéaire homogène dont les inconnues sont les constantes d'intégration :

$$\begin{cases} B\Phi_+(\alpha, z_H) - A\Phi_-(\alpha, z_H) = 0 \\ B\Phi'_+(\alpha, z_H) - A\Phi'_-(\alpha, z_H) = 0 \end{cases} \tag{A.8}$$

Le déterminant de ce système est un Wronskien :

$$D(\alpha, z_H) = \frac{\partial \Phi_+}{\partial z}(\alpha, z_H)\Phi_-(\alpha, z_H) - \Phi_+(\alpha, z_H)\frac{\partial \Phi_-}{\partial z}(\alpha, z_H). \tag{A.9}$$

Lorsque ce déterminant est non nul, la solution du système homogène est le couple nul $(0, 0)$ et la solution du problème (A.3) est donc aussi nulle. Or nous nous intéressons aux solutions non triviales (le spectre) et cela est possible aux points d'annulation de ce déterminant. Nous pouvons alors voir $D(\alpha, z_H)$ comme la relation de dispersion. Pour approcher analytiquement le spectre, nous devons construire ce déterminant et examiner ses zéros (en fonction de α).

A.2.3 Détails des calculs

Nous allons à présent détailler le calcul de Φ_- et Φ_+ , permettant la construction de la relation de dispersion $D(\alpha, z_H)$.

Calcul de Φ_+

Il suit directement de la forme de l'équation (A.7) que la solution appartient à l'espace vectoriel de dimension 2 : $\text{Vect}\{e^{K_1 z}, e^{K_2 z}\}$, où K_1 et K_2 sont les deux racines carrées de $(\alpha^2 - k_\infty^2)$. La condition d'onde sortante va nous imposer de ne garder que l'exponentielle qui sera décroissante vers les hautes altitudes, autrement dit, nous ne gardons que la racine K_i dont la partie réelle est négative.

La racine carrée complexe est une fonction bivaluée. Aussi, pour nous ramener à une fonction monovaluée sur le plan complexe, il nous faut opter pour une détermination, i.e un choix d'intervalle pour l'argument complexe. Ce choix revient à ne considérer qu'un seul feuillet de la surface de Riemann sur laquelle la racine carrée est monovaluée, et donc à placer une branche de coupure. Dans notre cas, pour garantir la condition d'onde sortante, nous souhaitons $\arg(\sqrt{s}) \in]\pi/2, 3\pi/2]$ pour $s \in \mathbb{C}$, ce qui permettrait de vérifier $\Re(\sqrt{s}) < 0$. Cela revient à nous imposer que $\arg(s) \in]\pi, 3\pi]$: c'est notre détermination de racine, celle avec laquelle nous calculons $K = \sqrt{\alpha^2 - k_\infty^2}$.

Calcul de Φ_-

Avec les transformations adéquates, l'équation (A.6) peut se ramener à une équation similaire à celle de Riccati-Bessel², ce qui nous donne l'idée de chercher les deux solutions de base sous la forme $\sqrt{X} J_\eta(X)$ et $\sqrt{X} Y_\eta(X)$ avec $X = a + bz$. Restent à déterminer a , b et η .

Examinons $R_{a,b,\eta}(z) = (a + bz)^{\frac{1}{2}} J_\eta(a + bz)$ (le raisonnement est le même pour la fonction de Bessel de deuxième espèce). Le calcul de ses dérivées successives donne :

$$R'_{a,b,\eta}(z) = \frac{1}{2}b(a + bz)^{-\frac{1}{2}} J_\eta(a + bz) + b(a + bz)^{\frac{1}{2}} J'_\eta(a + bz),$$

et

$$R''_{a,b,\eta}(z) = -\frac{1}{4}b^2(a + bz)^{-\frac{3}{2}} J_\eta(a + bz) + b^2(a + bz)^{-\frac{1}{2}} J'_\eta(a + bz) + b^2(a + bz)^{\frac{1}{2}} J''_\eta(a + bz).$$

La dérivée seconde peut aussi se réécrire :

$$R''_{a,b,\eta}(z) = -\frac{1}{4}b^2(a + bz)^{-\frac{3}{2}} J_\eta(a + bz) + b^2(a + bz)^{-\frac{3}{2}} \left[(a + bz) J'_\eta(a + bz) + (a + bz)^2 J''_\eta(a + bz) \right],$$

de sorte que l'on puisse utiliser l'équation de Bessel³ pour substituer au crochet un terme en $J_\eta(a + bz)$:

$$R''_{a,b,\eta}(z) = -\frac{1}{4}b^2(a + bz)^{-\frac{3}{2}} J_\eta(a + bz) + b^2(a + bz)^{-\frac{3}{2}} \left[-((a + bz)^2 - \eta^2) J_\eta(a + bz) \right].$$

2. Equation de Riccati-Bessel : $z^2 y'' + [z^2 - n(n+1)]y = 0$, de solutions $S_n(z) = \sqrt{\pi z/2} J_{n+1/2}(z)$ et $C_n(z) = -\sqrt{\pi z/2} Y_{n+1/2}(z)$, voir [Abramowitz 1964]

3. Equation de Bessel : $z^2 y'' + zy' + (z^2 - \eta^2)y = 0$, de solutions $J_\eta(z)$ et $Y_\eta(z)$

Ensuite, l'expression peut se réarranger de manière à faire apparaître $R_{a,b,\eta}(z)$:

$$R''_{a,b,\eta}(z) = -b^2 \left[1 - \frac{\eta^2 - \frac{1}{4}}{(a + bz)^2} \right] R_{a,b,\eta}(z).$$

Enfin, nous concluons par une identification de coefficient. Nous cherchons pour quel triplet (a, b, η) nous avons l'égalité suivante :

$$b^2 - \frac{(\eta^2 - \frac{1}{4})}{(\frac{a}{b} + z)^2} = -\alpha^2 + \frac{\omega^2}{(c_0 + pz)^2}.$$

En posant naturellement $b = i\alpha$, il suit $a = i\alpha \frac{c_0}{p}$ et $1/4 - \eta^2 = \omega^2/p^2$ soit $\eta = (1/4 - \omega^2/p^2)^{\frac{1}{2}}$. Cela nous permet de conclure que l'espace des solutions générales de l'équation (A.6) est :

$$\text{Vect}\{\sqrt{X} J_\eta(X), \sqrt{X} Y_\eta(X)\} \quad \text{avec } X = i\alpha \left(\frac{c_0}{p} + z \right) \quad \text{et } \eta = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (\text{A.10})$$

La prise en compte de la condition limite va nous ramener à un espace des solutions de dimension 1. Notons $\tilde{J}(z)$ et $\tilde{Y}(z)$ les deux solutions de base. La solution générale va alors s'écrire : $\Phi_-(z) = A\tilde{J}(z) + B\tilde{Y}(z)$, où A et B sont les constantes d'intégration. Une fois l'expression introduite dans la condition au sol du problème (A.6), il suit : $B = -A(\tilde{J}'(0)/\tilde{Y}'(0))$.

Remarque : La racine carrée complexe intervient aussi ici via $(i\alpha)^{\frac{1}{2}}$. Cependant sa détermination n'est pas contrainte par la condition limite au sol : le rapport $\tilde{J}'(0)/\tilde{Y}'(0)$ reste inchangé quel que soit le feuillet de Riemann considéré. En définitive, le choix d'une des deux racines, où que se situe la coupure, ne change que le signe de l'expression finale. Pour le calcul en pratique, nous pouvons par exemple garder la détermination précédemment définie ($\arg(s) \in]\pi, 3\pi]$). Dans ce cas, le point de branchement est l'origine et la coupure se situe le long de l'axe des imaginaires purs positifs (dans le plan des valeurs propres α). Elle est donc confondue avec la coupure issue des choix faits pour Φ_+ .

Bilan des calculs

Domaine de validité	Solution
$z > z_H$	$\Phi_+(\alpha, z) \propto e^{Kz}$ avec $K = (\alpha^2 - k_\infty^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\Re(K) < 0$
$z < z_H$	$\Phi_-(\alpha, z) \propto \tilde{J}(z) - \frac{\tilde{J}'(0)}{\tilde{Y}'(0)} \tilde{Y}(z)$ où $\tilde{J}(z) = \sqrt{X} J_\eta(X)$ et $\tilde{Y}(z) = \sqrt{X} Y_\eta(X)$ $X = i\alpha \left(\frac{c_0}{p} + z \right)$ et $\eta = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{p^2}}$

Sur la base de ces résultats, nous pouvons exprimer entièrement notre déterminant de façon analytique (après réarrangement de l'expression) :

$$D(\alpha) = (i\alpha Z_H)^{\frac{1}{2}} e^{(\alpha^2 - k_\infty^2)^{\frac{1}{2}} z_H} \left[\left((\alpha^2 - k_\infty^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} Z_H^{-1} \right) \left(J_\eta(i\alpha Z_H) - D(\alpha) Y_\eta(i\alpha Z_H) \right) - i\alpha \left(J'_\eta(i\alpha Z_H) - D(\alpha) Y'_\eta(i\alpha Z_H) \right) \right], \quad (\text{A.11})$$

où nous avons introduit les notations supplémentaires :

$$Z_H = \frac{c_0}{p} + z_H$$

$$D(\alpha) = \tilde{J}'(0)/\tilde{Y}'(0) = \frac{\frac{1}{2}(\frac{c_0}{p})^{-\frac{1}{2}} J_\eta(i\alpha \frac{c_0}{p}) + i\alpha (\frac{c_0}{p})^{\frac{1}{2}} J'_\eta(i\alpha \frac{c_0}{p})}{\frac{1}{2}(\frac{c_0}{p})^{-\frac{1}{2}} Y_\eta(i\alpha \frac{c_0}{p}) + i\alpha (\frac{c_0}{p})^{\frac{1}{2}} Y'_\eta(i\alpha \frac{c_0}{p})}.$$

A.3 Application numérique

Parallèlement au calcul de cette formule analytique pour trouver les points d'annulation, nous avons lancé une recherche de valeur propre à l'aide de la méthode de collocation spectrale (voir le chapitre 2) sur des cas de profils C^1 approchant le cas analytique (figure A.2). Il est à noter que plus le profil se rapproche du cas analytique non C^1 , plus il sera nécessaire d'utiliser un grand nombre de points de discrétisation et donc plus le calcul sera coûteux.

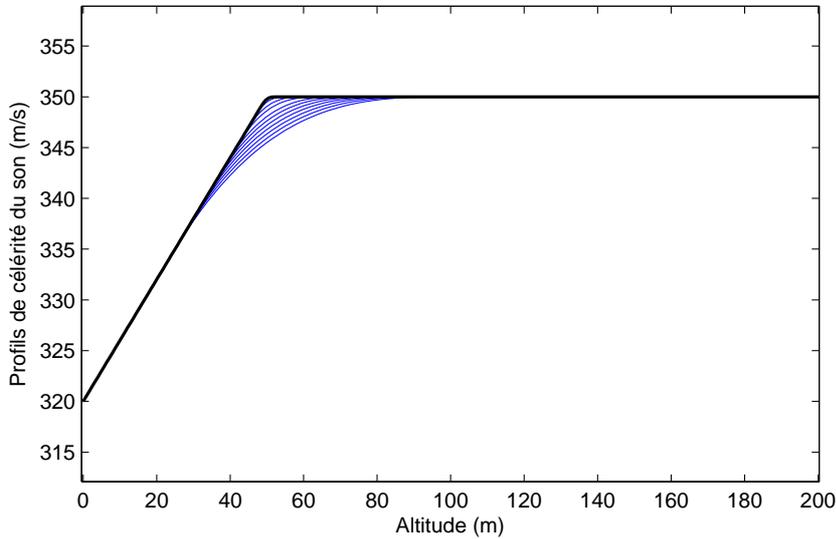


FIGURE A.2 – En noir le profil de célérité théorique et en bleu 11 profils C^1 approchant le cas analytique

La figure A.3 est un exemple de résultat obtenu. Le premier tracé représente les lignes de niveau de la partie réelle du déterminant analytique, tandis que le second

correspond au module. Sur les deux figures, les carrés noirs correspondent à une sous partie du spectre calculé par le code discrétisé sur un des profils C^1 , et le carré marqué en rouge est le premier mode sélectionné au delà du point de branchement k_∞ . Sur la partie réelle de la relation de dispersion apparaît de façon claire la branche de coupure, tandis qu'avec le module, on peut localiser les valeurs propres dans les creux.

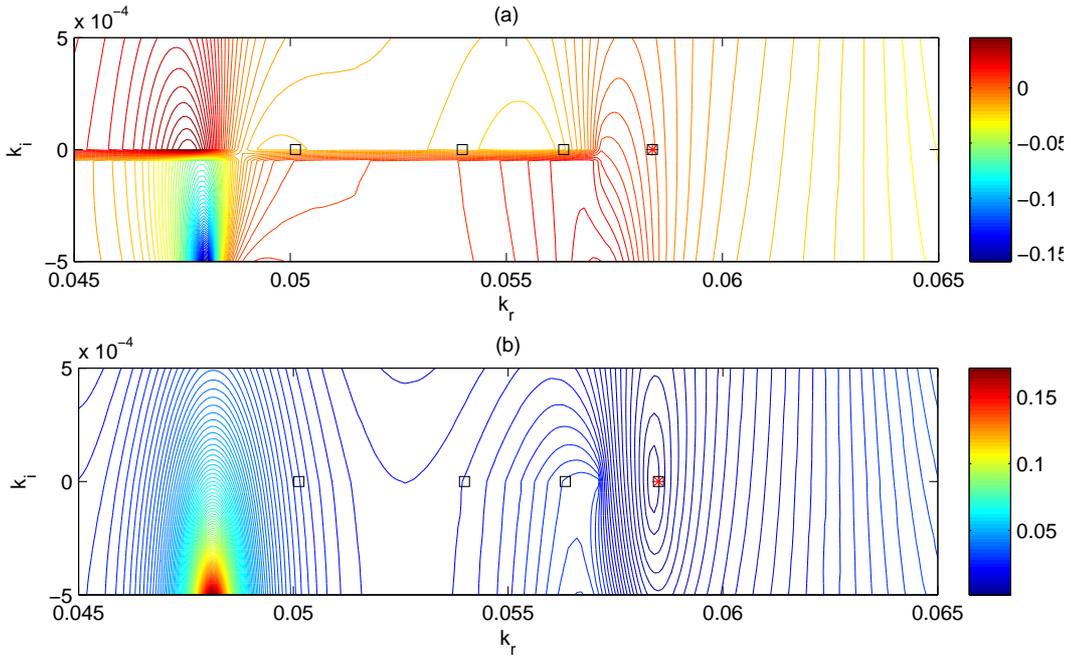


FIGURE A.3 – Lignes de niveau de la relation de dispersion pour (a) sa partie réelle, et (b) son module. Le spectre numérique est indiqué par les carrés noirs.

On constate que la valeur propre calculée avec le code de collocation spectrale est décalée par rapport au centre du creux du module du wronskien analytique. En comparant les différents écarts relatifs entre la prédiction analytique et les cas numériques approchants, nous pouvons avoir une idée de la façon dont notre code numérique converge vers le cas idéal. La figure A.4 représente cette convergence en bleu tandis que nous avons représenté en noir les écarts relatifs $|\frac{\delta\alpha}{\alpha}|$ attendus théoriquement en utilisant une formule issue de la perturbation du problème aux valeurs propres (voir le chapitre 3). Si la tendance reste cohérente avec les attentes théoriques, on note que les résultats pratiques ne sont pas tout à fait alignés avec l'origine, ce qui peut s'expliquer par le nombre limité de points de discrétisation utilisés. En effet, plus le profil utilisé se rapproche du cas analytique non C^1 , plus le nombre de points nécessaires tend vers l'infini.

Remarque : En pratique, l'étendue des calculs analytiques possibles s'avère limitée car dans la relation de dispersion interviennent des fonctions de Bessel d'ordre complexe qui posent problème. En effet, si on prend les ordres de grandeur corres-

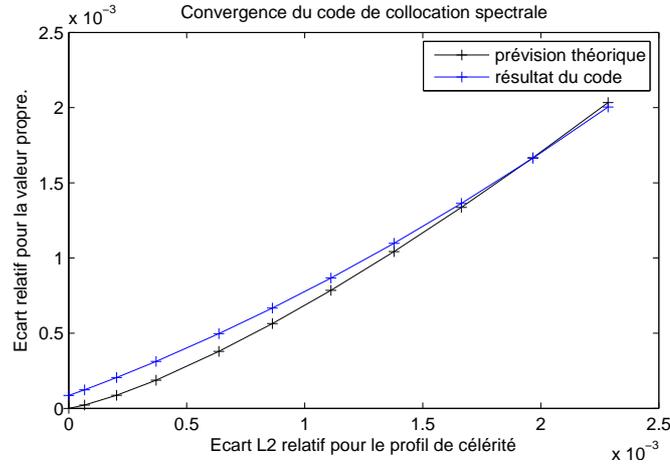


FIGURE A.4 – Convergence théorique et effective pour une valeur propre.

pendant à une couche limite atmosphérique, nous avons $p \sim 0,1$ (pente de la phase montante de la célérité) et $\omega \sim 10$, donc un ordre imaginaire pur pour les fonctions de Bessel : $\eta = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\omega^2}{p^2}} \sim 100i$.

Or le développement en série de la fonction de Bessel pour des η complexes et de grand module ne présente pas d'intérêt (des produits intermédiaires de calcul atteignent rapidement la limite machine). On doit alors utiliser des développements asymptotiques ([Abramowitz 1964]) et donc construire une solution approchée.

+

Méthode des éléments finis pour la propagation des infrasons

Nous présentons brièvement dans cette annexe l'emploi de la méthode des éléments finis pour simuler la propagation d'ondes infrasonores dans l'atmosphère. Nous introduisons d'abord quelques détails techniques et montrons la comparaison avec la méthode des modes normaux sur quelques exemples d'événement. Pour de plus amples informations sur la méthodologie, se référer à [Dergham 2013].

B.1 Equations

Comme dans le chapitre 2, nous supposons l'état atmosphérique connu et nous cherchons à simuler un signal infrasonore à une distance donnée d'une source de type explosion. Nous utilisons pour cela l'équation d'onde non-homogène :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \nabla^2 p = s, \quad (\text{B.1})$$

où $p(x, t)$ est la pression, x est la position dans l'espace, et $s(x, t)$ est un terme source qui simule l'effet d'une explosion. Nous nous plaçons en outre dans l'approximation de célérité effective : $c(x)$ intègre les effets du vent sur la vitesse locale du son. Le problème est supposé axisymétrique autour de la source et l'équation (B.1) est donc résolue dans un système de coordonnées cylindriques (r, z) .

Étant donné que le domaine numérique est nécessairement de taille finie, nous devons imposer des conditions aux limites absorbantes pour éviter des réflexions artificielles. Nous plaçons pour cela une PML (Perfectly Matched Layer) sur les bords du domaine. Cela consiste à simuler une couche absorbante dans le milieu de propagation qui empêchera toute réflexion sur ses interfaces. Un terme d'amortissement agissant sur la direction perpendiculaire à la couche PML est introduit dans l'équation d'onde et les variables d'espace r et z deviennent complexes dans cette région. Si x est une de ces variables, nous introduisons la coordonnée complexe \tilde{x} définie de la façon suivante :

$$\tilde{x} = x + \frac{\Gamma_x(x)}{i\omega}, \quad (\text{B.2})$$

où ω est la pulsation et Γ_x est un terme d'absorption acoustique. Nous introduisons en outre un profil amorti $\sigma_x = \Gamma'_x$ de sorte que l'équation d'onde ne soit pas affectée si $\sigma_x = 0$ alors que les ondes se propageant dans la direction x sont amorties dans

les zones où $\sigma_x > 0$. Ces modifications faites, nous obtenons :

$$\frac{r}{c^2} \left[\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + (\sigma_r + \sigma_z) \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma_r \sigma_z p \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + r \frac{\partial \phi}{\partial r} + \phi + r \frac{\partial \psi}{\partial z} + r s, \quad (\text{B.3})$$

où les variables $\phi(x, t)$ et $\psi(x, t)$ sont définies par

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\sigma_r \phi + (\sigma_z - \sigma_r) \frac{\partial p}{\partial r} \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\sigma_z \psi + (\sigma_r - \sigma_z) \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Enfin, nous supposons que le sol réfléchit parfaitement les ondes acoustiques. Il faut donc imposer $\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = 0$ où \mathbf{n} est la direction normale au sol. De plus, l'hypothèse d'axisymétrie entraîne que $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$ à $r = 0$. La figure B.1 montre le schéma du domaine de résolution numérique où σ_r and σ_z correspondent respectivement aux couches d'amortissement pour les directions r et z respectivement.

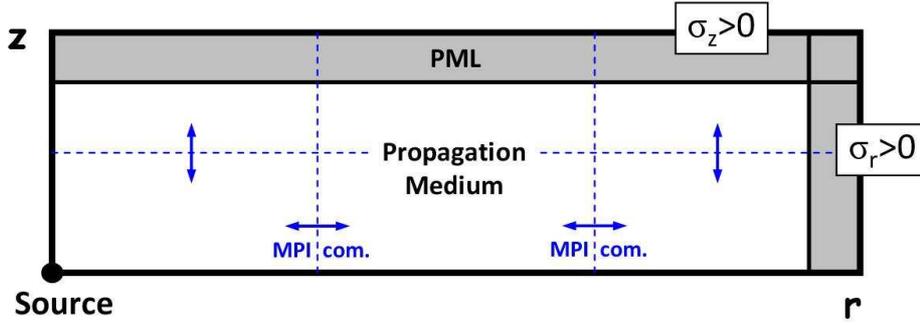


FIGURE B.1 – Schéma du domaine de calcul, avec les couches absorbantes (PML).

B.2 Méthode numérique

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode des éléments finis, les équations doivent être réécrites sous leur forme variationnelle et discrétisées sur une grille composée d'éléments triangulaires correspondant à une base de fonctions de Lagrange. Si l'on appelle p_h la solution $p(t)$ discrétisée et P_h le vecteur dont les éléments sont les coordonnées de p_h dans la base d'éléments finis, alors (B.3) devient :

$$\mathbf{M}_h \frac{d^2 P_h}{dt^2}(t) + \mathbf{\Sigma}_h \frac{d P_h}{dt}(t) + \mathbf{K}_h P_h(t) = S_h(t), \quad (\text{B.5})$$

où \mathbf{M}_h , $\mathbf{\Sigma}_h$, \mathbf{K}_h sont des matrices et S_h est un vecteur. Ces matrices sont creuses et sont construites à l'aide du logiciel FreeFem++ (<http://www.freefem.org/ff++/>).

L'inversion de la matrice de masse \mathbf{M}_h à chaque pas de temps rend la procédure coûteuse. Afin de simplifier cette étape, nous utilisons une procédure de *Mass*

Lumping et un schéma explicite en temps. La méthode de Mass Lumping repose sur l'utilisation de formules de quadrature pour l'évaluation numérique des intégrales sur chaque triangle de sorte que \mathbf{M}_h devienne diagonale [Cohen 2001].

Nous utilisons des éléments finis de Lagrange *P2-bulle* (P2B), qui sont des éléments finis de degré 2 qui rendent la méthode stable et précise au troisième ordre. Il faut noter que les dérivées premières et secondes en temps interviennent dans l'équation (B.5). La solution discrète P_h est incrémentée en temps en utilisant la technique MET (Modified Equation Technique), [Shubin 1987]. Le système impose une condition de stabilité $CFL = \frac{c\delta t}{\delta x} < 1$ où δx est la distance minimale entre deux noeuds et δt est le pas de temps.

Le principal coût CPU provient des produits matrice-vecteur (il n'y a plus besoin d'inverser des matrices avec le Mass Lumping). Le code est parallélisé avec la librairie MPI et le domaine est décomposé en blocs de tailles égales, comme indiqué sur la figure B.1. Chaque produit matrice-vecteur est donc effectué et stocké localement dans chacun de ces blocs pour qu'ensuite les échanges de résultats aux interfaces permettent la résolution globale.

B.3 Comparaisons avec les modes normaux

Les figures B.2 et B.3 montrent la superposition des résultats du code de collocation spectrale pour les modes normaux (chapitre 2) et du code éléments finis respectivement pour l'événement Fukushima (Japon, 12 mars 2011) et l'expérience Sayarim 2011 (Israël, 26 janvier 2011). Ces comparaisons montrent un bon accord entre les deux méthodes de simulation.

Pour l'explosion du réacteur de Fukushima, nous montrons les signaux calculés à la station I30JP, située à 243 km de la source, pour des profils ECMWF de célérité effective de différente résolution, selon que l'on choisisse des profils ERA-Interim ou 91-niveaux. Les figures B.2(a),(b),(c) et (d) correspondent à des profils de célérité sans variation horizontale ($c = c(z)$) tandis que les figures B.2(e) et (f) montrent le cas d'une variation horizontale ($c = c(r, z)$). La lente variation du milieu de propagation s'intègre trivialement avec les éléments finis, mais nécessite d'adopter l'approximation adiabatique pour les modes normaux (chapitre 2).

S'agissant du test de calibration Sayarim 2011, nous montrons les signaux calculés aux stations IN1, IN2 et IN3, situées respectivement à 308 km, 330 km et 363 km de la source, et pour les profils de célérités effective issus des données du centre européen ECMWF 91-niveaux, et pour les profils issus des données américaines G2S (figure B.3).

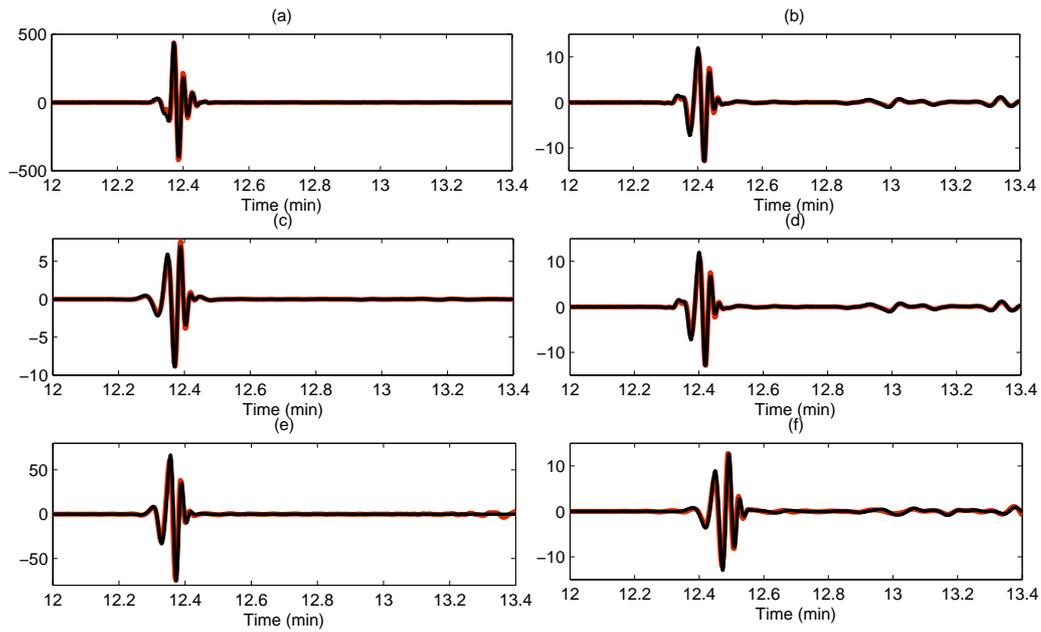


FIGURE B.2 – Signaux infrasonores calculés à la station I30JP pour l'événement Fukushima, pour différents profils ECMWF de célérité effective c . En rouge, le résultat avec la méthode des modes normaux, et en noir, avec la méthode des éléments finis. (a) Profil ERA-Interim à Fukushima. (b) Profil 91-niveaux à Fukushima. (c) Profil ERA-Interim à la station I30JP ($r = 243$ km). (d) Profil 91-niveaux à la station I30JP. (e) Profil ERA-Interim lentement variable entre Fukushima et I30JP. (f) Profil 91-niveaux lentement variable entre Fukushima et I30JP.

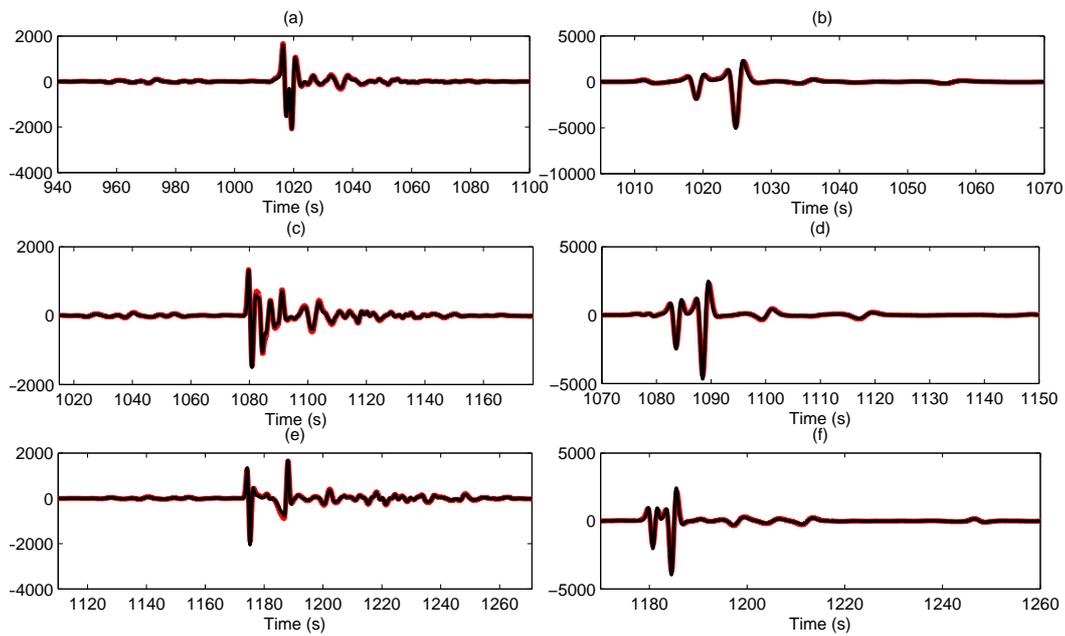


FIGURE B.3 – Signaux infrasonores calculés pour l'événement Sayarim 2011. En rouge, le résultat avec la méthode des modes normaux, et en noir, avec la méthode des éléments finis. (a) Signal à la station IN1, pour le profil ECMWF. (b) Signal à la station IN1, pour le profil G2S. (c) Signal à la station IN2, pour le profil ECMWF. (d) Signal à la station IN2, pour le profil G2S. (e) Signal à la station IN3, pour le profil ECMWF. (f) Signal à la station IN3, pour le profil G2S.

+

Lecture qualitative des matrices de sensibilité

Nous avons dans le chapitre 3 décrit une procédure pour construire la matrice Σ qui permet d'obtenir la sensibilité d'un signal acoustique à toute perturbation atmosphérique exprimée sur une base d'ondelettes. Si le choix d'une base d'ondelette permet de réduire la dimension du problème et donc de faciliter la décomposition en valeurs singulières de Σ (se référer au chapitre 3), il peut être utile à la compréhension des mécanismes en jeu d'exprimer cet opérateur de sensibilité dans la base canonique des altitudes z . En effet, la visualisation directe de cet opérateur jacobien permet de voir les altitudes et échelles en jeu, et les parties du signal infrason qui dépendent de ces structures.

L'expression (3.14), dans la section 3.2.1 du chapitre 3 donne la formule pour calculer $\hat{S}(z, \omega, r)$ à l'aide des paires propres $(k_j(\omega), \psi_j(\omega, z))$. Le sens de cette quantité est que si la célérité effective $c_0(z)$ est perturbée de la façon suivante :

$$c(z; \varepsilon) = c_0(z)(1 + \varepsilon\delta(z)), \quad (\text{C.1})$$

alors la sensibilité du signal (sa dérivée selon le paramètre ε) se déduit directement :

$$\partial_\varepsilon \hat{p}(\omega, r; \varepsilon) = \int_0^\infty \hat{S}(z, \omega, r) \delta(z) dz. \quad (\text{C.2})$$

En pratique, pour une discrétisation (z_1, z_2, \dots, z_N) des altitudes et une discrétisation $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M)$ des fréquences, nous construisons la matrice $(N \times M)$ $\hat{\mathbf{S}}$ dont les éléments sont :

$$\hat{s}_{ij} = \hat{S}(z_i, \omega_j, r). \quad (\text{C.3})$$

Pour avoir une lecture temporelle plutôt que fréquentielle, il faut alors effectuer une transformée inverse de Fourier sur chacune des lignes (algorithme FFT) pour obtenir les éléments $s_{ij} = S(z_i, t_j, r)$ et effectuer la convolution de ces lignes avec $(s(t_1), s(t_2), \dots, s(t_M))$ si $s(t)$ modélise l'effet de la source. La matrice \mathbf{S} ainsi obtenue est la version discrète de $S(z, t, r)$ définie par :

$$\partial_\varepsilon p(t, r; \varepsilon) = \int_0^\infty S(z, t, r) \delta(z) dz. \quad (\text{C.4})$$

Les figures C.1(b) et C.2(b) représentent la sensibilité $S(z, t, r)$ en valeur absolue (calculée en construisant la matrice \mathbf{S}) respectivement pour la station I30JP

(explosion à Fukushima, voir les chapitres 3 et 4) et pour la station IN3 (expérience Sayarim 2011, voir le chapitre 5). Le tracé pour le cas Fukushima permet visuellement de relier la première arrivée (à 12.4 min, figure C.1(c)) au guide troposphérique en basse altitude (figure C.1(a)) et les arrivées de faible amplitude entre 14 et 14.5 min apparaissent directement sensibles aux perturbations du guide stratosphérique, autour de 40 km d'altitude.

On observe sur la figure C.2(b) que deux échelles différentes organisent l'arrivée stratosphérique dans le signal à la station IN3 pour l'expérience Sayarim 2011. En effet, le maximum de célérité du son au-dessus de 50 km d'altitude (figure C.1(a)) est responsable du premier pic dans le signal, tandis que le guide secondaire à 40 km d'altitude est responsable du train d'arrivées qui suit le premier pic. On comprend qu'une perturbation stratosphérique pourra *activer* l'un ou l'autre, ou bien les deux mécanismes de sensibilité du signal, selon sa localisation et son étendue. Cette figure permet aussi d'exhiber le rôle du guide troposphérique constitué par le courant-jet à 10 km d'altitude. En effet, même si la vitesse effective du son à 10 km est inférieure à celle au sol, on constate sur C.2(b) qu'une perturbation ciblée à 10 km aura un impact sur le signal, au niveau des structures autour de 1180 s.

Cette représentation permet de comprendre les dépendances du signal aux différentes structures atmosphériques et donc de prédire qualitativement les effets d'une perturbation donnée.

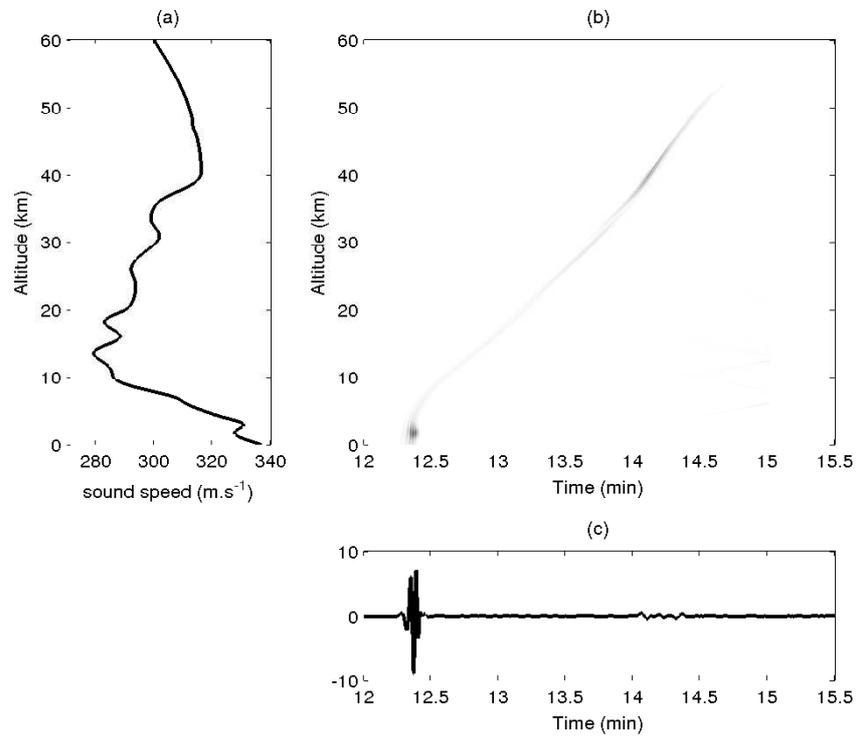


FIGURE C.1 – (a) Profil de célérité effective ECMWF ERA-Interim à la station I30JP (12/03/2011). (b) Sensibilité $|S(z, t, r)|$ pour $r = 243$ km. (c) Signal calculé avec le profil (a) à la station I30JP ($r = 243$ km).

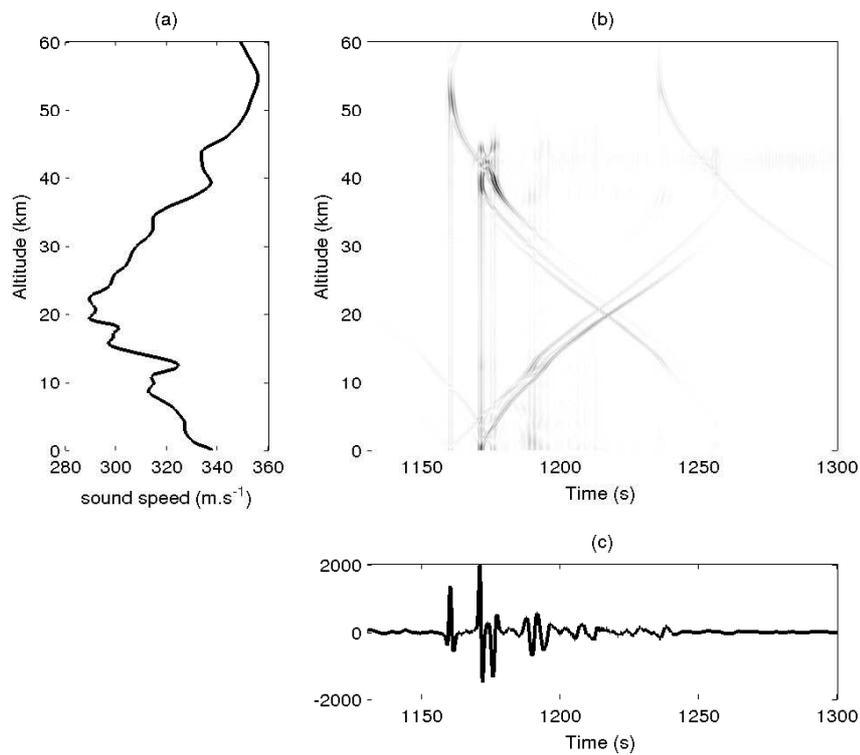


FIGURE C.2 – (a) Profil de célérité effective ECMWF 91-niveaux à Sayarim, Israël (26/01/2011). (b) Sensibilité $|S(z, t, r)|$ pour $r = 363$ km. (c) Signal calculé avec le profil (a) à la station IN3 ($r = 363$ km).

+

Caractérisation asymptotique du spectre dans le plan complexe

Nous précisons dans cette annexe comment nous pouvons déduire la localisation des courbes sur lesquelles se projettent les valeurs propres complexes k de l'équation d'onde à partir des structures du profil atmosphérique, à l'aide de l'hypothèse de haute fréquence (voir le chapitre 4). Nous supposons en effet que la pulsation ω_r et le nombre d'onde k_r sont suffisamment grands comparés aux variations de célérité effective $c'(z)$ de sorte que l'on puisse appliquer la théorie WKB.

Nous introduisons un petit paramètre $\varepsilon \ll 1$ et l'équation d'onde peut s'écrire :

$$\varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} f(z) = Q(z) f(z), \quad (\text{D.1})$$

avec

$$Q(z) = \tilde{k}^2 - \frac{\tilde{\omega}^2}{c^2(z)},$$

où $\tilde{k} = \varepsilon k$ et $\tilde{\omega} = \varepsilon \omega$. En limitant le développement à l'ordre 1, l'approche classique ([Bender 1999]) amène à considérer les deux solutions indépendantes :

$$\Phi_+(z) = Q^{-1/4}(z) e^{\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z Q^{1/2}(z') dz'}, \quad (\text{D.2})$$

et

$$\Phi_-(z) = Q^{-1/4}(z) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{z_0}^z Q^{1/2}(z') dz'}. \quad (\text{D.3})$$

Nous recherchons donc une solution de la forme $f = A\Phi_+ + B\Phi_-$, où A et B sont des constantes d'intégration qui dépendent des conditions aux limites et de z_0 .

Nous nous plaçons ici dans le cadre où la pulsation ω a une petite partie imaginaire (que l'on fixe), et donc le nombre d'onde k possède aussi une petite partie imaginaire. Ce faisant, la fonction $Q(z)$ est proche de l'axe réel et la solution générale possède clairement deux comportements distincts : elle est dominée par une exponentielle réelle là où $\Re(Q(z)) > 0$ et par une exponentielle complexe oscillante là où $\Re(Q(z)) < 0$. Entre ces deux types de zone, au voisinage d'une racine z^* de $\Re(Q(z))$, le développement asymptotique n'est plus valide. Néanmoins, un développement au premier ordre de Q pour $|z - z^*| \ll 1$ transforme (D.1) en équation d'Airy $d^2/dZ^2 f = Zf$ au moyen du changement de variable $Z = (\varepsilon Q'(z^*))^{-2/3} (Q(z^*) + Q'(z^*)(z - z^*))$. La solution dans cette zone intermédiaire est donc une combinaison linéaire de $\text{Ai}(Z)$ and $\text{Bi}(Z)$.

Le raccord asymptotique ([Bender 1999]) entre ces différents types de solutions fournit des formules de passage qui permettent de lier les constantes d'intégration A^+ et B^+ (là où $\Re(Q(z)) > 0$) à A^- et B^- (dans la zone d'oscillation). Le fait d'introduire une petite partie imaginaire entraîne que ces formules de passage sont perturbées, et nous obtenons au final les *matrices de passage* suivantes :

$$\mathbf{P}_+^-(z^*) = \begin{bmatrix} \frac{i}{2} & e^{\psi(z^*)} \\ \frac{1}{2}e^{-\psi(z^*)} & i \end{bmatrix}, \quad (\text{D.4})$$

et

$$\mathbf{P}_-^+(z^*) = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}e^{\psi(z^*)} \\ e^{-\psi(z^*)} & -i \end{bmatrix}, \quad (\text{D.5})$$

où $\psi(z^*) = \frac{4}{3\varepsilon}Q^{3/2}(z^*)/Q'(z^*)$. Si $X^+ = [A^+, B^+]^T$ représente les constantes d'intégration dans (D.2) par rapport à z^* où $\Re(Q(z)) > 0$, et $X^- = [A^-, B^-]^T$ correspond aux constantes dans la zone d'oscillation, alors $X^- = \mathbf{P}_+^- X^+$ et $X^+ = \mathbf{P}_-^+ X^-$.

En outre, nous pouvons aussi calculer les matrices qui relient les constantes d'intégration de la solution quand celle-ci est exprimée par rapport à z_1 aux constantes de la solution exprimée par rapport à z_2 , quand z_1 et z_2 sont des zéros consécutifs de $\Re(Q)$: $X(z_2) = \mathbf{J}(z_1, z_2)X(z_1)$, avec

$$\mathbf{J}(z_1, z_2) = \begin{bmatrix} e^{-\phi(z_1, z_2)} & 0 \\ 0 & e^{\phi(z_1, z_2)} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.6})$$

où $\phi(z_1, z_2) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{z_2}^{z_1} Q^{1/2}(z') dz'$.

Nous pouvons donc relier directement les constantes d'intégration de la limite supérieure du domaine (à haute altitude) aux constantes de la solution au sol. En effet, si l'on considère $z_1 > z_2 > \dots > z_N$ la suite décroissante des racines simples¹ de $\Re(Q)$ dans le domaine considéré, X_g correspondant à la solution au sol, et X_u correspondant à la solution en haut du domaine, alors nous pouvons construire une unique matrice de passage de la façon suivante

$$\mathbf{M} = \mathbf{P}_-^+(z_N)\mathbf{J}(z_{N-1}, z_N)\mathbf{P}_+^-(z_{N-1}) \cdots \mathbf{J}(z_2, z_3)\mathbf{P}_-^+(z_2)\mathbf{J}(z_1, z_2)\mathbf{P}_+^-(z_1), \quad (\text{D.7})$$

de sorte que $X_g = \mathbf{M}X_u$. La figure D.1 illustre schématiquement la procédure sur des cas simples. L'expression (D.7) et ce qui suit correspond au cas où $\Re(Q) > 0$ pour $z > z_1$ et $z < z_N$ (figure D.1(a)).

Il faut noter que dans le cas d'une zone où $\Re(Q) > 0$, entre deux racines z_j et z_{j+1} suffisamment éloignées l'une de l'autre, la matrice $\mathbf{J}(z_j, z_{j+1})$ voit l'un des éléments de sa diagonale devenir négligeable, et donc :

$$\mathbf{J}(z_j, z_{j+1}) \approx e^{\phi(z_j, z_{j+1})} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{D.8})$$

1. Nous nous limitons ici aux cas de racines simples, et ne traitons pas le cas des points tournants doubles. Les solutions au voisinage des points doubles sont des fonction cylindriques parabolique, voir [Abramowitz 1964].

oscille ($\Re(Q) < 0$) :

$$\mathbf{R}(z_j, z_{j+1}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} (e^{-\phi} + e^{\phi - \psi_j + \psi_{j+1}}) & \frac{i}{2} (e^{\phi + \psi_{j+1}} - e^{-\phi + \psi_j}) \\ \frac{i}{2} (e^{-\phi - \psi_{j+1}} - e^{\phi - \psi_j}) & (e^{-\phi + \psi_j - \psi_{j+1}} + e^{\phi}) \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

où $\phi = \phi(z_j, z_{j+1})$, $\psi_j = \psi(z_j)$, and $\psi_{j+1} = \psi(z_{j+1})$.

Les conditions aux limites homogènes impliquent que $X_u \sim [0, 1]^T$ et $X_g \sim [1, 0]^T$. Et ces conditions entraînent que $M_{22} = 0$ nécessairement. Si l'on appelle \mathcal{P} l'ensemble des paires ordonnées de racines consécutives qui encadrent une zone où $\Re(Q) > 0$ et \mathcal{N} l'ensemble des paires ordonnées de racines pour les zones où $\Re(Q) < 0$, la condition $M_{22} = 0$ peut s'écrire :

$$\exp \left(\sum_{p \in \mathcal{P}} \phi(p_1, p_2) \right) \prod_{q \in \mathcal{N}} \{ \exp(-\phi(q_1, q_2) + \psi(q_1) - \psi(q_2)) + \exp(\phi(q_1, q_2)) \} = 0. \quad (\text{D.10})$$

Cette expression se trouve en utilisant l'approximation (D.8) et l'expression (D.9). Il apparaît qu'au moins un facteur dans le produit (D.10) doit être nul pour qu'il y ait une solution non nulle au problème. C'est-à-dire que pour une fréquence ω donnée, il faut qu'il ait une paire q de \mathcal{N} et un nombre d'onde k qui vérifie $\exp(-\phi(q_1, q_2) + \psi(q_1) - \psi(q_2)) + \exp(\phi(q_1, q_2)) = 0$. Cette dernière condition peut être réécrite :

$$\exp(-\phi(q_1, q_2) + \psi(q_1) - \psi(q_2)) = \exp(\phi(q_1, q_2) + i(2n + 1)\pi), \quad (\text{D.11})$$

où n est un entier.

Une condition nécessaire mais pas suffisante peut être tirée de (D.11). En effet, l'égalité entre les modules ne requiert que $\Re(\phi(q_1, q_2)) = \Re(\psi(q_1) - \psi(q_2))/2$. Autrement dit, la structure dans le plan complexe (k_r, k_i) où se situent les valeurs propres est définie par l'équation suivante, pour chaque paire q dans \mathcal{N} :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_{q_2}^{q_1} \Im \left((-Q(z))^{1/2} \right) dz = \frac{2}{3\varepsilon} \Re \left(\frac{Q^{3/2}(q_1)}{Q'(q_1)} - \frac{Q^{3/2}(q_2)}{Q'(q_2)} \right) + O(\varepsilon). \quad (\text{D.12})$$

Dans le cas où $\Re(Q) < 0$ au sol (cas présenté sur la figure D.1(c)), la démarche reste similaire. Nous modifions \mathbf{M} pour obtenir les constantes d'intégration exprimées par rapport à $z = 0$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} e^{-\phi(z_N, 0)} & 0 \\ 0 & e^{\phi(z_N, 0)} \end{bmatrix} \mathbf{P}_+^-(z_N) \mathbf{J}(z_{N-1}, z_N) \mathbf{P}_-^+(z_{N-1}) \cdots \mathbf{J}(z_2, z_3) \mathbf{P}_-^+(z_2) \mathbf{J}(z_1, z_2) \mathbf{P}_+^-(z_1),$$

où $\phi(z_N, 0) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{z_N} Q^{1/2}(z') dz'$. Une condition de réflexion totale au sol implique que $X_g = \mathbf{M} X_u \sim [1, -1]^T$, c'est-à-dire $M_{12} = M_{22}$. En suivant la même démarche que précédemment, on obtient une équation supplémentaire aux équations décrites par (D.12) :

$$\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{z_N} \Im \left((-Q(z))^{1/2} \right) dz = \frac{2}{3\varepsilon} \Re \left(\frac{Q^{3/2}(z_N)}{Q'(z_N)} \right) + O(\varepsilon). \quad (\text{D.13})$$

En pratique, pour chaque k_r allant de ω_r/c_{\max} à ω_r/c_{\min} , il faut rechercher les zones où la solution oscille, et pour chacune de ces zones, il faut trouver le k_i pour lequel (D.12) ou (D.13) sont satisfaites. Cela peut s'effectuer très efficacement au moyen d'un simple algorithme de Newton par exemple.

Bibliographie

- [Abramowitz 1964] Abramowitz et Stegun. Handbook of mathematical functions. Dover Publications, 1964. (Cité en pages 53, 87, 110, 130, 134 et 150.)
- [Akervik 2007] E. Akervik, J. Hoepffner, U. Ehrenstein et D. S. Henningson. *Optimal growth, model reduction and control in a separated boundary-layer flow using global eigenmodes*. J. Fluid Mech., vol. 579, pages 305–314, 2007. (Cité en page 85.)
- [Antoulas 2001] A. C. Antoulas, D. C. Sorensen et S. Gugercin. *A survey of model reduction methods for large-scale systems*. Contemp. Math., vol. 280, pages 193–219, 2001. (Cité en pages 14, 84 et 108.)
- [Assink 2013] J. Assink, R. Waxler, W. G. Frazier et J. Lonzaga. *The estimation of upper atmospheric wind model updates from infrasound data*. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, vol. 118(19), pages 10707–10724, 2013. (Cité en pages 12 et 108.)
- [Attenborough 1988] K. Attenborough. *Review of ground effect on outdoor sound propagation from continuous broadband sources*. Applied Acoustics, vol. 24, pages 289–319, 1988. (Cité en pages 7 et 21.)
- [Au 2001] S.-K. Au et J. L. Beck. *Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation*. Probabilistic Engineering Mechanics, vol. 16(4), pages 263–277, 2001. (Cité en page 12.)
- [Bai 2002] Zhaojun Bai. *Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems*. Applied Numerical Mathematics, vol. 43, pages 9–44, 2002. (Cité en pages 85 et 115.)
- [Barbagallo 2011] A. Barbagallo, D. Sipp et P. J. Schmid. *Input-output measures for model reduction and closed-loop control : application to global modes*. J. Fluid Mech., vol. 685, pages 23–53, 2011. (Cité en page 84.)
- [Bass 1995] H. E. Bass, L. C. Sutherland, A. J. Zuckerwar, D. T. Blackstock et D. M. Hester. *Atmospheric absorption of sound : further developments*. J. Acoust. Soc Am., vol. 97, pages 660–683, 1995. (Cité en page 7.)
- [Beattie 2001] C. Beattie, M. Embree et J. Rossi. *Convergence of restarted Krylov subspaces to invariant subspaces*. SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol. 25, pages 1074–1100, 2001. (Cité en pages 97 et 115.)
- [Bender 1999] Bender et Orszag. Advanced mathematical methods for scientists and engineers i : asymptotic methods and perturbation theory. Springer, 1999. (Cité en pages 23, 26, 44, 94, 100, 103, 115, 149 et 150.)
- [Bergmann 1946] P.G. Bergmann. *The wave equation in a medium with a variable index of refraction*. J. Acoust. Am., vol. 17(4), pages 329–333, 1946. (Cité en page 19.)

- [Bertin 2012] M. Bertin, Millet C., D. Bouche et J.-Ch. Robinet. *The role of atmospheric uncertainties on long range propagation of infrasounds*. In AIAA Paper 2012-3346, 2012. (Cité en page 86.)
- [Bertin 2014] M. Bertin, C. Millet, D. Bouche et J.-Ch. Robinet. *A low-order reduced model for the long range propagation of infrasounds in the atmosphere*. J. of the Acoustical Soc. of Am. (Under consideration for publication), 2014. (Cité en pages 107, 108, 110, 111 et 115.)
- [Bottaro 2003] A. Bottaro, P. Corbett et P. Luchini. *The effect of base flow variation on flow stability*. J. Fluid Mech., vol. 476, pages 293–302, 2003. (Cité en page 52.)
- [Bridges 1984] T. J. Bridges et P. J. Morris. *Differential eigenvalue problems in which the parameter appears nonlinearly*. J. of Computational Physics, vol. 55, pages 437–460, 1984. (Cité en page 88.)
- [Campus 2009] P. Campus et D.R. Christie. *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, chapitre *Worldwide observations of infrasonic waves*, pages 185–234. Springer, 2009. (Cité en page 6.)
- [Candelier 2011] J. Candelier, S. Le Dizès et C. Millet. *Shear instability in a stratified fluid when shear and stratification are not aligned*. J. Fluid Mech., vol. 685, pages 191–201, 2011. (Cité en pages 88 et 111.)
- [Candelier 2012] J. Candelier, S. Le Dizès et C. Millet. *Inviscid instability of a stably stratified compressible boundary layer on an inclined surface*. J. Fluid Mech., vol. 694, pages 489–499, 2012. (Cité en pages 88 et 111.)
- [Canuto 2006] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quaterton et T.A. Zang. *Spectral methods, fundamentals in single domains*. Springer (collec. Scientific Computation), 2006. (Cité en pages 30 et 31.)
- [Cérou 2012] F. Cérou, P. DelMoral et A. Guyader. *Sequential Monte Carlo for rare event estimation*. Statistics and Computing, vol. 22(3), pages 795–808, 2012. (Cité en page 12.)
- [Chunchuzov 2011] I. P. Chunchuzov, S. N. Kulichkov, O. E. Popov, R. Waxler et J. Assink. *Infrasound scattering from atmospheric anisotropic inhomogeneities*. Izv., Atmos. and Ocean. Phys., vol. 47(5), pages 589–607, 2011. (Cité en pages 83 et 107.)
- [Cohen 2001] G. Cohen, P. Joly, J. E. Roberts et N. Tordjman. *Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation*. SIAM J. Numer. Anal., vol. 38(6), pages 2047–2078, 2001. (Cité en page 139.)
- [Daigle 1987] G. A. Daigle et M. R. Stinson. *Impedance of grass-covered ground at low frequencies measured using a phase difference technique*. J. Acoust. Soc. Am., vol. 81, pages 62–68, 1987. (Cité en page 21.)
- [Daubechies 1988] I. Daubechies. *Orthonormal bases of compactly supported wavelets*. Comm. Pure Appl. Math., vol. 41, pages 909–996, 1988. (Cité en pages 56 et 93.)

- [Delany 1977] M. E. Delany. *Sound propagation in the atmosphere : a historical review*. *Acustica*, vol. 38, pages 201–223, 1977. (Cit  en page 7.)
- [Delville 1999] J. Delville, L. Ukeiley, L. Cordier, J. P. Bonnet et M. Glauser. *Examination of large-scale structures in a turbulent plane mixing layer. Part 1. Proper orthogonal decomposition*. *J. Fluid Mech.*, vol. 391, pages 91–122, 1999. (Cit  en pages 14 et 84.)
- [Dergham 2013] G. Dergham et C. Millet. *Range-dependent propagation modeling of infrasound in complex atmospheres*. In AIAA-2013-3209, 2013. (Cit  en pages 45, 107 et 137.)
- [Drob 2003] D. P. Drob, J. M. Picone et M. Garc s. *Global morphology of infrasound propagation*. *J. of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 108, page 4680, 2003. (Cit  en page 10.)
- [Drob 2008] D. P. Drob, J. T. Emmert, G. Crowley, J. M. Picone, G. G. Shepherd, W. Skinner, P. Hays, R. J. Niciejewski, M. Larsen, C. Y. She, J. W. Meriwether, G. Hernandez, M. J. Jarvis, D. P. Sipler, C. A. Tepley, M. S. O’Brien, J. R. Bowman, Q. Wu, Y. Murayama, S. Kawamura, I. M. Reid et R. A. Vincent. *An empirical model of the Earth’s horizontal wind fields : HWM07*. *J. of Geophysical Research*, vol. 113, page A12304, 2008. (Cit  en page 83.)
- [Drob 2010] D. P. Drob, M. Garc s, M. Hedlin et N. Brachet. *The Temporal Morphology of Infrasound Propagation*. *Pure and Applied Geophysics*, vol. 167(4-5), pages 437–453, 2010. (Cit  en page 10.)
- [Drob 2013] D. P. Drob, D. Broutman, M. A. Hedlin, N. W. Winslow et R. G. Gibson. *A method for specifying atmospheric gravity wavefields for long-range infrasound propagation calculations*. *J. of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 118, pages 1–11, 2013. (Cit  en pages 11, 50, 83 et 108.)
- [Eckhaus 1973] W. Eckhaus. *Matched asymptotic expansions and singular perturbations*. American Elsevier Publishing Company, 1973. (Cit  en page 114.)
- [Farrell 1982] B. F. Farrell. *The Initial Growth of Disturbances in a Baroclinic Flow*. *J. Atmos. Sci.*, vol. 39, pages 1663–1686, 1982. (Cit  en page 27.)
- [Farrell 1984] B. F. Farrell. *Modal and Non-Modal Baroclinic Waves*. *J. Atmos. Sci.*, vol. 41(4), pages 668–673, 1984. (Cit  en page 27.)
- [Fee 2013] D. Fee, R. Waxler, J. Assink, Y. Gitterman, J. Given, J. Coyne, P. Mialle, M. Garc s, D. Drob, D. Kleinert, R. Hofstetter et P. Grenard. *Overview of the 2009 and 2011 Sayarim Infrasound Calibration Experiments*. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 118, pages 1–22, 2013. (Cit  en pages 108, 109, 114 et 117.)
- [Frankignoul 2011] Claude Frankignoul, Nadine Chouaib et Zhengyu Liu. *Estimating the Observed Atmospheric Response to SST Anomalies : Maximum Covariance Analysis, Generalized Equilibrium Feedback Assessment, and Maximum Response Estimation*. *J. Climate*, vol. 24, pages 2523–2539, 2011. (Cit  en page 71.)

- [Franks 1997] S. W. Franks et Beven K. J. *Bayesian estimation of uncertainty in land surface-atmosphere flux predictions*. Journal of Geophysical Research : Atmospheres, vol. 102, pages 23991–23999, 1997. (Cité en page 12.)
- [Furrer 2007] R. Furrer, S. R. Sain, D. Nychka et G. A. Meehl. *Multivariate Bayesian analysis of atmosphere-ocean general circulation models*. Environmental and Ecological Statistics, vol. 14(3), pages 249–266, 2007. (Cité en page 12.)
- [Galletti 2004] B. Galletti, C. H. Bruneau, L. Zannetti et Iollo A. *Low-order modeling of laminar flow regimes past a confined square cylinder*. J. Fluid Mech., vol. 503, pages 161–170, 2004. (Cité en pages 14 et 84.)
- [Gill 1982] Adrian E. Gill. Atmosphere-ocean dynamics (international geophysics series, volume 30). Elsevier Scientific Publishing Company, 1982. (Cité en page 6.)
- [Givens 1953] J.W. Givens. *A method of computing eigenvalues and eigenvectors suggested by classical results on symmetric matrices*. U.S. Nat. Bur. Standards App. Math., vol. 29, pages 117–122, 1953. (Cité en pages 36 et 37.)
- [Gossard 1975] E.E. Gossard et W.H. Hooke. Waves in the atmosphere, atmospheric infrasound and gravity waves - their generation and propagation. Elsevier Scientific Publishing Company, 1975. (Cité en pages 6 et 22.)
- [Guyadier 2011] A. Guyadier, N. Hengartner et E. Matzner-Lober. *Simulation and Estimation of Extreme Quantiles and Extreme Probabilities*. Applied Mathematics and Optimization, vol. 64(2), pages 171–196, 2011. (Cité en page 12.)
- [Haddon 1984] R. A. W. Haddon. *Computation of synthetic seismograms in layered Earth models using leaking modes*. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 74, pages 1225–1248, 1984. (Cité en page 27.)
- [Haddon 1986] R. A. W. Haddon. *Exact evaluation of the response of a layered elastic medium to an explosive point source using leaking Modes*. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 76, pages 1755–1775, 1986. (Cité en page 27.)
- [Hay 2009] A. Hay et D. Borggaard J. T. and Pelletier. *Local improvements to reduced-order models using sensitivity analysis of the proper orthogonal decomposition*. J. Fluid Mech., vol. 629, pages 41–42, 2009. (Cité en page 84.)
- [Haynes 2013] C. P. Haynes et C. Millet. *A sensitivity analysis of meteoric infrasound*. Journal of Geophysical Research : Planets, vol. 118, pages 2073–2082, 2013. (Cité en pages 13, 72 et 113.)
- [Hedin 1996] A. E. Hedin, E. L. Fleming, A. H. Manson, F. J. Schmidlin, S. K. Avery, R. R. Clark, S. J. Franke, G. J. Fraser, T. Tsuda, F. Vial et R. A. Vincent. *Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere*. J. Atmos. Terr. Phys., vol. 58, pages 1421–1447, 1996. (Cité en pages 50, 83 et 86.)
- [Hedlin 2012] M. A. H. Hedlin, C. D. de Groot-Hedlin et D. Drob. *A study of infrasound propagation using dense seismic network recordings of surface ex-*

- plosions*. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 102, pages 1927–1937, 2012. (Cit  en pages 83 et 107.)
- [Herbert 1997] T. Herbert. *Parabolized stability equations*. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 29, pages 245–283, 1997. (Cit  en page 44.)
- [Holmes 1998] P. Holmes, J. L. Lumley et G. Berkooz. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry. Cambridge University Press, 1998. (Cit  en page 107.)
- [Huerre 1985] P. Huerre et P.A. Monkewitz. *Absolute and convective instabilities in free shear layers*. J. Fluid Mech., vol. 159, pages 151–168, 1985. (Cit  en page 22.)
- [Huerre 1990] P. Huerre et P.A. Monkewitz. *Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows*. Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 22, pages 473–537, 1990. (Cit  en page 27.)
- [Huerre 2000] P. Huerre. Perspective in fluid dynamics, chapitre chapter 4, Open Shear Flows Instabilities. Cambridge : University Press, 2000. (Cit  en pages 41 et 88.)
- [Jensen 1994] F. B. Jensen, W. A. Kuperman, M. B. Porter et H. Schmidt. Computational ocean acoustics. AIP Press, 1994. (Cit  en pages 22, 43, 87 et 110.)
- [Jeong 2010] S. Jeong, D. Ono et A. Hashimoto. *Sonic Boom Analysis under Conditions of Atmospheric Uncertainty Using Polynomial Chaos*. Transactions of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences, vol. 56(3), pages 129–136, 2010. (Cit  en page 12.)
- [Jung 2010] T. Jung, G. Balsamo, P. Bechtold, A.C.M. Beljaars, M. Kohler, M.J. Miller, J.-J. Morcrette, A. Orr, M.J. Rodwell et A.M. Tompkins. *The ECMWF model climate : recent progress through improved physical parametrizations*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, vol. 136(650), pages 1145–1160, 2010. (Cit  en pages 10 et 50.)
- [Kato 1995] T. Kato. Perturbation theory for linear operators. Springer, 1995. (Cit  en pages 51, 90 et 108.)
- [Kennett 1991] B. L. N. Kennett et E. R. Engdahl. *Traveltimes for global earthquake location and phase identifications*. Geophys. J. Int., vol. 105, pages 429–465, 1991. (Cit  en page 9.)
- [Kiureghian 1991] A. Kiureghian et M. Stefano. *Efficient Algorithm for Second-Order Reliability Analysis*. J. Eng. Mech., vol. 117(12), pages 2904–2923, 1991. (Cit  en page 12.)
- [Kraichnan 1961] R. H. Kraichnan. *Dynamics of nonlinear stochastic systems*. J. Mathematical Phys., vol. 2, pages 124–148, 1961. (Cit  en page 108.)
- [Kulichkov 2013] S. N. Kulichkov, I. P. Chunchuzov et O. I. Popov. *Simulating the influence of an atmospheric fine inhomogeneous structure on long-range propagation of pulsed acoustic signals*. Izv., Atmos. and Ocean. Phys., vol. 46(1), pages 60–68, 2013. (Cit  en pages 83 et 107.)

- [Le Dizès 2007] S. Le Dizès et C. Millet. *Acoustic near field of a transonic instability wave packet*. J. Fluid Mech., vol. 557, pages 1–23, 2007. (Cité en page 27.)
- [Lehoucq 2001] R. B. Lehoucq. *Implicitly Restarted Arnoldi Methods and Subspace Iteration*. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, vol. 23(2), pages 551–562, 2001. (Cité en pages 40 et 97.)
- [LePage 2006] K.D. LePage. *Estimation of Acoustic Propagation Uncertainty Through Polynomial Chaos Expansions*. In Information Fusion, 2006 9th International Conference on, pages 1–5, 2006. (Cité en page 12.)
- [Malik 1990] M.R. Malik. *Numerical methods for hypersonic boundary layer stability*. J. Comp. Phys., vol. 86, pages 376–413, 1990. (Cité en pages 32 et 33.)
- [Mallat 1989] S.G. Mallat. *A theory for multiresolution signal decomposition : the wavelet representation*. Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on, vol. 11, pages 674–693, 1989. (Cité en pages 55 et 91.)
- [Marschall 1969] S. A. Marschall. *An approximate method for reducing the order of a linear system*. International J. of Control, vol. 10(6), pages 642–648, 1969. (Cité en page 111.)
- [Meerbergen 2000] K. Meerbergen et R. Morgan. *Templates for the solution of algebraic eigenvalue problems : a practical guide*, chapitre 11.2.3 Arnoldi Method with Inexact Cayley Transform, pages 342–343. SIAM, Philadelphia, 2000. (Cité en pages 40 et 97.)
- [Meyer 1992] Yves Meyer. *Ondelettes et algorithmes concurrents*. Actualités Scientifiques et Industrielles, 1992. (Cité en page 55.)
- [Mezic 2013] I. Mezic. *Analysis of fluid flows via spectral properties of the Koopman operator*. Annu. Rev. Fluid Mech., vol. 45, pages 357–378, 2013. (Cité en pages 107 et 125.)
- [Millet 2007] C. Millet, J. C. Robinet et C. Roblin. *On using computational aeroacoustics for long-range propagation of infrasounds in realistic atmospheres*. Geophysical Research Letters, vol. 34, page L14814, 2007. (Cité en page 85.)
- [Millet 2011] C. Millet. *Instability waves in stratified media*. Online PDF, 2011. sin-web.paris.ensam.fr/IMG/pdf/Lecture1.pdf. (Cité en page 22.)
- [Minasny 2011] B. Minasny, J. A. Vrugt et A. B. McBratney. *Confronting uncertainty in model-based geostatistics using Markov Chain Monte Carlo simulation*. Geoderma, vol. 163(3-4), pages 150–162, 2011. (Cité en page 13.)
- [Molteni 1996] F. Molteni, R. Buizza, T.N. Palmer et T. Petroliaigis. *The ECMWF Ensemble Prediction System : Methodology and validation*. Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, vol. 122, pages 73–119, 1996. (Cité en pages 10 et 50.)
- [North 1982] G. R. North, T. L. Bell et R. F. Cahalan. *Sampling errors in the estimation of empirical orthogonal functions*. Monthly We, vol. 110, pages 699–706, 1982. (Cité en pages 50 et 60.)

- [North 1984] G. R. North. *Empirical Orthogonal Functions and Normal Modes*. American Meteorological Society, vol. 41, pages 879–887, 1984. (Cité en pages 49 et 124.)
- [Pedlosky 1964] J. Pedlosky. *An initial value problem in the theory of baroclinic instability*. Tellus, vol. 16(1), pages 12–17, 1964. (Cité en page 27.)
- [Pekeris 1948] C.L. Pekeris. *Theory of propagation of explosive sound in shallow water*. Geol. Soc. Amer. Mem., vol. 27, pages 1–116, 1948. (Cité en page 22.)
- [Pierce 1965] A. D. Pierce. *Extension of the Method of Normal Modes to Sound Propagation in an Almost Stratified Medium*. J. Acoust. Soc. Am., vol. 37, pages 19–27, 1965. (Cité en pages 43 et 88.)
- [Rind 1978] D. H. Rind. *Investigation of the lower thermosphere results of ten years of continuous observations with natural infrasound*. J. of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, vol. 40, pages 1199–1209, 1978. (Cité en page 107.)
- [Romanowicz 2003] B. Romanowicz. *Global mantle tomography : progress status in the past 10 years*. Annual Review of Earth and Planetary Sciences, vol. 31, pages 303–328, 2003. (Cité en page 8.)
- [Rowley 2005] C. W. Rowley. *Model reduction for fluids using balanced proper orthogonal decomposition*. Int. J. on Bifurcation and Chaos, vol. 15(3), pages 997–1013, 2005. (Cité en pages 12, 14 et 84.)
- [Salimbahrami 2006] B. Salimbahrami et B. Lohmann. *Order reduction of large scale second-order systems using Krylov subspace methods*. Linear Algebra and its Applications, vol. 415, pages 385–405, 2006. (Cité en pages 85 et 108.)
- [Schmid 2010] P. J. Schmid et J. L. Sesterhenn. *Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data*. Journal of Fluid Mechanics, vol. 656(1), pages 5–28, 2010. (Cité en page 125.)
- [Shubin 1987] G. R. Shubin et J. B. Bell. *A modified equation approach to constructing fourth-order methods for acoustic wave propagation*. SIAM J. Sci. Statist. Comput., vol. 8(2), pages 135–151, 1987. (Cité en page 139.)
- [Sobol 1999] I. M. Sobol et Levitan Y. L. *On the use of variance reducing multipliers in Monte Carlo computations of a global sensitivity index*. Computer Physics Communications, vol. 117(1-2), pages 52–61, 1999. (Cité en page 13.)
- [Sokolikhina 2006] E.V. Sokolikhina, E. K. Semenov et N. N. Sokolikhina. *The atmospheric circulation on the synoptic scale during the Southern Oscillation events culmination phase of the El-Nino (1997-1998)*. Advances in Geosciences, vol. 6, pages 17–21, 2006. (Cité en page 71.)
- [Srinivasan Puri 2009] E. Srinivasan Puri, D. Morrey, A. J. Bell, J. F. Durudola, E. B. Rudnyi et J. G. Korvink. *Reduced order fully coupled structural acoustic analysis via implicit moment matching*. Applied Mathematical Modelling, vol. 33, pages 4097–4119, 2009. (Cité en page 85.)
- [Stickler 1980] D. C. Stickler et E. Ammicht. *Uniform asymptotic evaluation of the continuous spectrum contribution for the Pekeris model*. J. Acoust. Soc Am., vol. 67, pages 2018–2024, 1980. (Cité en page 27.)

- [Stoer 2002] J. Stoer et R. Bulirsch. Introduction to numerical analysis. Springer, 2002. (Cit  en page 36.)
- [Sutherland 2004] L. C. Sutherland et H. E. Bass. *Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km*. J. Acoust. Soc Am., vol. 115, pages 1012–1032, 2004. (Cit  en page 7.)
- [Thacker 2012] W.C. Thacker, A. Srinivasan, M. Iskandarani, O.M. Knio et M. Le Haff. *Propagating boundary uncertainties using polynomial expansions*. Ocean Modelling, vol. 43-44, pages 52–53, 2012. (Cit  en page 12.)
- [Tomassini 2007] L. Tomassini, P. Reichert, R. Knutti, T. F. Stocker et M. E. Borsuk. *Robust Bayesian Uncertainty Analysis of Climate System Properties Using Markov Chain Monte Carlo Methods*. J. Climate, vol. 20, pages 1239–1254, 2007. (Cit  en page 13.)
- [Trefethen 1997] Lloyd N. Trefethen. Numerical linear algebra. SIAM (Philadelphia, PA), 1997. (Cit  en pages 51, 90 et 108.)
- [Truchetet 1998] Fr d ric Truchetet. Ondlettes pour le signal num rique. ic2 traitement du signal, 1998. (Cit  en page 55.)
- [Uhlenbeck 1930] G. E. Uhlenbeck et L. S. Ornstein. *On the Theory of Brownian Motion*. Phys. Rev., vol. 36, pages 823–841, 1930. (Cit  en page 110.)
- [Watkins 2007] David S. Watkins. The matrix eigenvalue problem : Gr and krylov subspace methods. SIAM, 2007. (Cit  en pages 39, 85 et 97.)
- [Waxler 2002] R. Waxler. *A vertical eigenfunction expansion for the propagation of sound in a downward-refracting atmosphere over a complex impedance plane*. J. Acoust. Soc Am., vol. 112, pages 2540–2552, 2002. (Cit  en pages 7, 21, 27, 29, 84 et 87.)
- [Waxler 2003] R. Waxler. *On the use of modal expansions to model broadband propagation in the nighttime boundary layer and other downward refracting atmospheres over lossy ground planes*. J. Acoust. Soc Am., vol. 113, page 2313, 2003. (Cit  en pages 27, 87 et 127.)
- [Waxler 2004] R. Waxler. *Modal expansions for sound propagation in the nocturnal boundary layer*. J. Acoust. Soc Am., vol. 115(4), pages 1437–1448, 2004. (Cit  en pages 7 et 127.)
- [Waxler 2008] R. Waxler, K.E. Gilbert et C.L. Talmadge. *A theoretical treatment of the long range propagation of impulsive signals under strongly ducted nocturnal conditions*. J. Acoust. Soc Am., vol. 112, page 2742, 2008. (Cit  en page 84.)
- [Wilks 2011] Daniel S. Wilks. Statistical methods in the atmospheric sciences (international geophysics series, volume 100). Elsevier Scientific Publishing Company, 2011. (Cit  en page 12.)

Résumé : La perturbation d'un système peut donner lieu à de la propagation d'onde. Une façon classique d'appréhender ce phénomène est de rechercher les modes propres de vibration du milieu. Mathématiquement, trouver ces modes consiste à rechercher les valeurs et fonctions propres de l'opérateur de propagation. Cependant, d'un point de vue numérique, l'opération peut s'avérer coûteuse car les matrices peuvent avoir de très grandes tailles. En outre, dans la plupart des applications, des incertitudes sont inévitablement associées à notre modèle. Cela est d'autant plus contraignant que certaines échelles du milieu peuvent avoir une influence majeure sur l'onde. La question se pose alors de savoir s'il faut attribuer d'importantes ressources de calcul pour une simulation dont la précision du résultat n'est pas assurée.

Nous proposons dans cette thèse une démarche qui permet à la fois de mieux comprendre l'influence des incertitudes sur la propagation et de réduire considérablement les coûts de calcul pour la propagation des infrasons dans l'atmosphère. L'idée principale est que tous les modes n'ont pas la même importance et souvent, seule une poignée d'entre eux suffit à décrire le phénomène sans perte notable de précision. Ces modes s'avèrent être ceux qui sont les plus sensibles aux perturbations atmosphériques. Plus précisément, l'analyse de sensibilité permet d'identifier les structures de l'atmosphère les plus influentes, les groupes de modes qui leur sont associés et les parties du signal infrasonore qui leur correspondent. Ces groupes de modes peuvent être spécifiquement ciblés dans un calcul de spectre au moyen de techniques de projection sur des sous-espace de Krylov, ce qui implique un gain important en coût de calcul. Cette méthode de réduction de modèle peut être appliquée dans un cadre statistique et l'estimation de l'espérance et de la variance du résultat s'effectue là aussi sans perte notable de précision et avec un coût réduit. Nous illustrons notamment cette méthode avec l'étude du cas de l'explosion du réacteur de Fukushima (Japon), le 12 mars 2011, pour lequel une onde infrasonore a été détectée 240 km plus au sud, et avec les expériences de calibration Sayarim 2009 et 2011 (Israël) où l'explosion de quelques charges a donné lieu à des détections infrasonores sur de multiples stations de mesures, proches comme très éloignées.

Mots clés : infrasons, atmosphère, perturbations, réduction de modèle, modes normaux, propagation d'incertitudes
