HAL
open science

Influence du champ aléatoire et des interactions à longue portée sur le comportement critique du modèle d'Ising : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif

Maxime Baczyk

To cite this version:

Maxime Baczyk. Influence du champ aléatoire et des interactions à longue portée sur le comportement critique du modèle d'Ising : une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif. Autre [cond-mat.other]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2014. Français. NNT : 2014PA066105 . tel-01126838

HAL Id: tel-01126838

https://theses.hal.science/tel-01126838

Submitted on 6 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité Physique Théorique

ED107 : Ecole Doctorale de Physique de la Région Parisienne

Laboratoire de Physique Théorique de la Matiére Condensée

Présentée par :

Maxime Baczyk

Pour obtenir le grade de :

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la thèse :

Influence du champ aléatoire et des interactions à longue portée sur le comportement critique du modèle d'Ising, une approche par le groupe de renormalisation non perturbatif

Devant la commission d'examen composée de :

M Jean-Yves Fortin	Rapporteur
M Bertrand Berche	Examinateur
Mme Léonie Canet	Examinatrice
M Marco Picco	Président
M Silvio Franz	Examinateur
M Gilles Tarjus	Directeur de thèse
M Matthieu Tissier	Co-directeur de thèse (en tant qu'invité)
M Pierre Pujol	Rapporteur

à Svetlana Colombani

Résumé

Nous étudions l'influence du champ magnétique aléatoire et des interactions à longue portée sur le comportement critique du modèle d'Ising ; notre approche est basée sur une version non perturbative et fonctionnelle du groupe de renormalisation.

Les concepts du groupe de renormalisation non perturbatif sont tout d'abord introduits, puis illustrés dans le cadre simple d'une théorie classique d'un champ scalaire. Nous discutons ensuite les propriétés critiques de cette dernière en présence d'un champ magnétique aléatoire gelé qui traduit le désordre dans le système. Celui-ci est distribué comme un bruit blanc gaussien dans l'espace. Nous insistons principalement sur la propriété de réduction dimensionnelle qui prédit un comportement critique identique pour le modèle en champ aléatoire à d dimensions et le modèle pur (c'est à dire sans champ aléatoire) en dimension $d-2$. Bien que cette propriété soit démontrée à tous les ordres par la théorie de perturbation, on montre que celle-ci est brisée en dessous d'une dimension critique $d_{DR} \simeq 5.13$. La réduction dimensionnelle et sa brisure sont alors reliées aux caractéristiques d'échelle des grandes avalanches intervenant dans le système à température nulle.
Nous considérons, dans un second temps, une généralisation du modèle d'Ising dans laquelle l'interaction ferromagnétique décroit désormais à longue portée comme $r^{-(d+\sigma)}$ avec $\sigma > 0$ (d désigne toujours la dimension de l'espace). Dans un tel système, il est possible de travailler en dimension fixée (incluant la dimension $d = 1$) et de varier l'exposant σ afin de parcourir une gamme de comportements critiques similaire à celle obtenue entre les dimensions critiques inférieure et supérieure de la version à courte portée du modèle. Nous avons caractérisé la transition de phase dans le plan (σ, d), et notamment calculé les exposants critiques en fonction du paramètre σ pour les dimensions physiquement intéressantes $d = 1$, 2 et 3.
Finalement, on s'intéresse aussi à la théorie en présence d'un champ magnétique aléatoire dont les corrélations décroissent à grande distance comme $r^{-d+\rho}$ avec $\rho > -d$. Dans le cas particulier où $\rho = 2-\sigma$, on montre que la propriété de réduction dimensionnelle est vérifiée lorsque σ est suffisamment petit, mais brisée à grand σ (en dimension inférieure à d_{DR}). En particulier, concernant le modèle tridimensionnel, nos résultats prédisent une brisure de réduction dimensionnelle lorsque $\sigma > \sigma_{DR} \simeq 0.71$.

Table des matières

1 Introduction **1**

2 Introduction au groupe de renormalisation non perturbatif **5**
2.1 Introduction 5
2.2 Groupe de renormalisation à la Wetterich 7
2.2.1 Construction de l'action effective courante 8
2.2.2 Flot de l'action effective courante 12
2.2.3 Schémas d'approximation non perturbatifs 17
2.2.4 Dépendance des résultats sur le régulateur et optimisation 20
2.3 Etude de la théorie scalaire ϕ^4 22
2.3.1 Approximation du potentiel local 22
2.3.2 Développement en dérivées du champ $O(\partial^2)$ 31
2.4 Conclusion 38

A Notations et conventions **43**

B Fonctions seuil **45**

3 Le modèle d'Ising en champ aléatoire **47**
3.1 Introduction 47
3.2 Le modèle 48
3.2.1 Hamiltonien 48
3.2.2 Thermodynamique moyennée sur le désordre 50
3.2.3 Fonctions de corrélation 50
3.3 Propriétés générales 51
3.3.1 Dimension critique inférieure : argument de Imry-Ma 51
3.3.2 Champ moyen et dimension critique supérieure 52
3.3.3 Méthode des répliques 54
3.4 Résultats de la théorie de perturbation 55
3.4.1 Point fixe à température nulle 55
3.4.2 Paramètre dangereusement inessentiel et relations d'échelle 56

3.4.3 Propriété de réduction dimensionnelle . . . 57
3.5 Supersymétrie . . . 57
3.5.1 Dérivation de la théorie supersymétrique à température nulle . . . 58
3.5.2 Invariances dans le super-espace . . . 61
3.5.3 Conséquences de l'invariance sous les super-rotations . . . 63
3.6 Formalisme . . . 65
3.6.1 Insuffisances de la construction supersymétrique . . . 65
3.6.2 Sélectionner l'état fondamental . . . 66
3.6.3 Formalisme à plusieurs copies . . . 67
3.7 Approche par le groupe de renormalisation non perturbatif . . . 72
3.7.1 Le régulateur . . . 73
3.7.2 Flot de l'action effective courante . . . 74
3.7.3 Troncation minimale . . . 76
3.7.4 Quantités sans dimension . . . 78
3.7.5 Point fixe analytique et réduction dimensionnelle . . . 81
3.7.6 Brisure de réduction dimensionnelle pour $d < d_{DR}$ . . . 87
3.8 Conclusion . . . 89

4 Brisure de réduction dimensionnelle et avalanches 91
4.1 Introduction . . . 91
4.2 Etude du point fixe de réduction dimensionnelle . . . 91
4.2.1 Points fixes analytiques conjugués . . . 91
4.2.2 Perturbation singulière autour du point fixe analytique . . . 94
4.3 Etude du modèle en dimension 0 . . . 96
4.4 Rôle des Avalanches . . . 99
4.4.1 Notion d'avalanche . . . 100
4.4.2 Singularités induites par les avalanches . . . 101
4.4.3 Comportement d'échelle des avalanches dans la région critique . . . 102
4.4.4 Caractérisation de la brisure de réduction dimensionnelle . . . 103
4.4.5 Dimension fractale des avalanches . . . 104
4.5 Conclusion . . . 105

5 Influence des interactions à longue portée 107
5.1 Introduction . . . 107
5.2 Transitions de phase en dimension 1 . . . 108
5.2.1 Modèle d'Ising à courte portée . . . 109
5.2.2 Modèle de Dyson . . . 110
5.3 Comportement critique universel . . . 113
5.3.1 Théorie ϕ^4 en présence d'interactions à longue portée . . . 113
5.3.2 Champ moyen et dimension critique supérieure . . . 114
5.3.3 Controverses sur le régime intermédiaire $d/2 < \sigma < 2$ . . . 117

5.4 Approche par le groupe de renormalisation non perturbatif 120
5.4.1 Renormalisation triviale du terme non analytique 121
5.4.2 Equations de flot pour les fonctions U'_k et Z_k 122
5.4.3 Etude du régime LR 123
5.4.4 Transition entre les régimes LR et SR 131
5.5 Conclusion 134

C Fonctions seuil LR **139**

6 Modèle d'Ising en champ aléatoire à longue porté **141**
6.1 Introduction 141
6.2 Version longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire 142
6.2.1 Le modèle 142
6.2.2 Point fixe à température nulle 143
6.2.3 Champ moyen et dimension critique supérieure 144
6.2.4 Régime non trivial 147
6.3 Supersymétrie 148
6.3.1 Construction de la théorie supersymétrique 149
6.3.2 Comportement critique du modèle avec $\rho = 2 - \sigma$ 151
6.4 Formalisme et groupe de renormalisation non perturbatif 152
6.4.1 Action microscopique 153
6.4.2 Approche par l'action effective courante 154
6.4.3 Troncation minimale 154
6.4.4 Renormalisation triviale des termes non analytiques 155
6.4.5 Dimensions anormales fixées 156
6.4.6 Equations de flot pour les fonctions U_k, $Z_{SR,k}$ et V_k 157
6.4.7 Quantités sans dimension 157
6.5 Brisure de réduction dimensionnelle en dimension fixée 158
6.5.1 Résultats généraux 158
6.5.2 Résultats numériques en dimension $d = 3$ 162
6.6 Conclusion 166

7 Conclusion **167**

Chapitre 1

Introduction

L'étude des transitions de phase et des phénomènes critiques présente un grand intérêt et s'étend à de nombreux domaines de la physique. Ces phénomènes sont, en effet, très communs dans la nature. Une transition de phase est susceptible de se produire dans tout système présentant un nombre macroscopique de degrés de liberté en interaction ; celle-ci se traduit alors par un changement abrupt de l'état du système sous la variation d'un paramètre extérieur. Un exemple ordinaire de transition de phase est l'ébullition de l'eau : lorsque la température atteint 100 degrés Celsius (à la pression atmosphérique), l'eau passe subitement de l'état liquide à l'état gazeux. Dans un soucis de compréhension de ces phénomènes courants, les physiciens s'y intéressent depuis fort longtemps et, actuellement, ces recherches constituent encore une activité intense. Les transitions de phase et les phénomènes critiques interviennent dans nombre de domaines de la physique contemporaine allant de la cosmologie à la physique des particules, en passant bien évidemment par la physique du solide.

Une classe importante de transitions de phase correspond à ce que l'on appelle les transitions continues ou phénomènes critiques. Dans ce cas, le paramètre d'ordre ne présente pas de saut au point critique et la longueur de corrélation du système diverge. Cette divergence de la longueur de corrélation à la température critique est une caractéristique centrale de ce type de transition impliquant des conséquences remarquables. En effet, bien qu'un nombre infini de degrés de liberté interagissent ensemble au point critique et qu'il en découle une grande complexité technique pour étudier ce genre de problème, la divergence de la longueur de corrélation simplifie énormément la phénoménologie des transitions continues. Cette divergence témoigne de la disparition d'une échelle de longueur caractéristique dans le système ; ce dernier présente alors une invariance d'échelle. En conséquence, les grandeurs thermodynamiques sont non analytiques au point de transition et se comportent, en fonction des paramètres extérieurs, comme des lois de puissance à l'approche de ce point. De plus, les exposants qui définissent ces lois de puissance, appelés exposants critiques, sont

indépendants des détails microscopiques du système considéré. Autrement dit, des systèmes à priori très différents peuvent être caractérisés par les mêmes exposants critiques ; ceci est le phénomène d'universalité. Nous sommes ainsi conduits à regrouper les transitions de phase présentant les mêmes propriétés universelles dans des classes d'universalité. Chaque classe d'universalité, associée à une famille d'exposants critiques, est déterminée par un petit nombre de paramètres très généraux comme la dimension de l'espace, le schéma de brisure de symétrie de la transition et la portée des interactions.

Parmi ces classes d'universalité, les plus connues sont très certainement celles du modèle d'Ising. De part sa simplicité et ses nombreuses applications, ce modèle est, en effet, le plus célèbre de la physique statistique et a été le sujet de plusieurs milliers d'articles de recherche. C'est notamment le premier modèle ayant permis de décrire une transition de phase.

Les méthodes théoriques utilisées pour comprendre ces phénomènes collectifs que sont les transitions de phase, ainsi que pour déterminer leurs propriétés universelles, reposent sur les concepts de la physique statistique. La présence d'un nombre important de degrés de liberté en interaction, qui caractérise les phénomènes critiques, ne permet pas d'obtenir de solution exacte dans la plupart des cas ; c'est pourquoi il a fallu développer d'autres approches mathématiques. Forte de cette nécessité, la physique statistique s'est enrichie dans les années 70 d'une nouvelle méthode introduite par Kadanoff puis formalisée par Wilson où les fluctuations des degrés de liberté sont intégrées étape par étape. C'est la naissance du groupe de renormalisation. Dès lors, la compréhension des phénomènes critiques s'est largement accrue. Notamment, en combinant à la démarche du groupe de renormalisation des développements perturbatifs, il a été possible de déterminer très précisément les exposants critiques du modèle d'Ising et, par conséquent, de caractériser clairement ses différentes classes d'universalité.

Il serait cependant erroné de croire que le débat autour des transitions continues est clos et, actuellement, beaucoup de systèmes font toujours l'objet de recherche. Il existe effectivement des classes d'universalité aux propriétés encore indéterminées ; notons, par exemple, celles avec un schéma de brisure de symétrie complexe ou bien en présence d'interactions à longue portée. Cela concerne également les systèmes frustrés et les systèmes désordonnés comportant des impuretés, des inhomogénéités, etc. Ces derniers présentent une physique riche et parfois encore incomprise. Les méthodes perturbatives sont moins performantes que dans le cas simple du modèle d'Ising et, parfois, elles échouent même pour décrire les phénomènes en question.

Dans ce travail de thèse, nous nous intéressons particulièrement aux conséquences des interactions à longue portée et de la présence de désordre gelé dans le système (c'est à dire d'impureté n'ayant pas de dynamique sur les échelles de temps considérées) sur les propriétés

critiques universelles. Afin d'inclure ses deux effets, nous considérons des généralisations du modèle d'Ising.

Ainsi, nous étudions une extension du modèle d'Ising avec une interaction ferromagnétique non plus entre plus proches voisins sur le réseau, mais qui décroit désormais à longue portée selon une loi de puissance. Par rapport au cas standard à courte portée, cette version du modèle a peu été étudiée. Les calculs perturbatifs sont en effet beaucoup plus difficiles et n'ont pas été poussés à des ordres élevés. Il est, en outre, peu probable que les ordres supérieurs de ces développements soient calculés un jour. Notre intérêt porte également sur la limite entre les régimes à courte portée et à longue portée. Effectivement, lorsque les interactions décroissent suffisamment vite dans l'espace, on retrouve les propriétés universelles du modèle d'Ising habituel à courte portée. Cette limite entre les deux régimes est encore sujette à des controverses et fait l'objet d'articles de recherche récents. En outre, un avantage fort remarquable du modèle à longue portée est que la variation de l'exposant associé à la décroissance des interactions permet de changer continûment la classe d'universalité de la transition de phase. De cette manière, en variant cet exposant, on peut parcourir une large gamme de comportements critiques pour le système, tout en maintenant la dimension de l'espace fixée. Ceci constitue un réel atout aussi bien au niveau théorique (de par la possibilité de développer des approches à basse dimension) que pour les simulations (la dimension du réseau y est fixée alors que l'exposant associé aux interactions peut varier continûment).

Ce travail porte également sur une variante du modèle d'Ising dans laquelle du désordre intervient à travers un champ magnétique aléatoire gelé couplé linéairement au paramètre d'ordre. Dans ce cas, la théorie de perturbation fournit des résultats étonnants et intéressants. En particulier, elle prédit à tous les ordres la propriété de réduction dimensionnelle. Cette dernière stipule que le comportement critique du modèle d'Ising en présence du champ magnétique aléatoire à d dimensions est identique à celui du modèle d'Ising pur (c'est à dire sans désordre) en dimension $d-2$. Il a cependant été prouvé rigoureusement que cette propriété est fausse à basse dimension, cela mettant ainsi en évidence l'échec de la théorie de perturbation. Afin de comprendre ce mécanisme de brisure de réduction dimensionnelle, il est donc nécessaire d'aller au delà de l'approche perturbative. Nous verrons par la suite que les dimensions intervenant dans ce problème sont hautes et ne sont accessibles ni expérimentalement, ni par simulation. Il sera donc finalement utile de combiner des interactions à longue portée au modèle d'Ising en champ aléatoire afin de pouvoir travailler en dimension fixée et basse.

Afin de surmonter les difficultés de l'approche perturbative, nous étudions ces modèles en utilisant une version du groupe de renormalisation basée sur une équation exacte. Les concepts sur lesquels repose cette méthode sont très proches des idées du groupe de renormalisation de Kadanoff et de Wilson mais celle-ci a l'avantage de conduire à des schémas d'approximation non perturbatifs par rapport aux constantes de couplage. Il en découle

un cadre théorique simple et particulièrement adapté à l'étude des phénomènes critiques qui permet notamment de calculer les exposants critiques avec une bonne précision. Cette méthode est capable de tenir compte d'effets non perturbatifs difficilement observables dans les approches traditionnelles et offre, de plus, une connexion directe avec les différents résultats perturbatifs. Précisons déjà que cette méthode ne se limite pas au calcul des exposants critiques mais permet aussi d'obtenir des quantités non universelles et de déterminer le diagramme de phase du système.

Nous aborderons les concepts du groupe de renormalisation non perturbatif et illustrerons ces derniers dans le cadre simple du modèle d'Ising dans le chapitre 2. Le modèle d'Ising en champ aléatoire sera ensuite introduit et discuté au cours du chapitre 3 ; nous y présenterons notamment la résolution du problème de la réduction dimensionnelle obtenue récemment par Tarjus et Tissier en utilisant le groupe de renormalisation non perturbatif et fonctionnel. Le chapitre suivant est consacré à nos dernières avancées sur la brisure de réduction dimensionnelle et son lien avec les avalanches intervenant dans le système à température nulle. Les interactions à longue portée et leurs effets sur le comportement critique universel du modèle d'Ising sont ensuite étudiés au cours du chapitre 5. Le chapitre 6 porte finalement sur la généralisation à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire.

Chapitre 2

Introduction au groupe de renormalisation non perturbatif

2.1 Introduction

Nous introduisons dans ce chapitre les idées du groupe de renormalisation et, plus particulièrement, de son implémentation non perturbative. On considère donc un modèle de physique statistique dans le continu ; les degrés de liberté du système sont décrits par un champ $\phi(x)$ qui fluctue dans l'espace. Ce dernier peut, par exemple, représenter l'aimantation locale dans un système magnétique. Au niveau microscopique, l'action ou hamiltonien microscopique $\mathcal{S}[\phi] = \beta\mathcal{H}[\phi]$ précise les interactions entre les degrés de liberté ; la théorie s'accompagne également d'une coupure ultraviolette $\Lambda \sim 1/a$ lorsque le modèle est initialement défini sur un réseau. On souhaite calculer des valeurs moyennes et des fonctions de corrélation qui s'écrivent en termes d'intégrales fonctionnelles. En particulier, la fonction de partition du système s'exprime par :

$$\mathcal{Z} = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\mathcal{S}[\phi]} \tag{2.1}$$

Dans la seconde moitié des années 60, le concept de théorie effective permettant de décrire la physique à grande échelle, après avoir éliminé les fluctuations des degrés de liberté sur des courtes distances, prend son essor avec la décimation en blocs de spins de Kadanoff [Kad66]. Wilson formalise ensuite la notion de groupe de renormalisation [Wil71a, Wil71b] ; l'idée est alors de calculer d'une façon judicieuse la trace dans l'Eq. (2.1) en effectuant l'intégrale, non pas en une seule fois, mais par étapes. On introduit pour cela une échelle d'impulsion caractéristique k comprise entre 0 et Λ ; celle-ci marque la séparation entre les modes rapides du champ (c'est à dire les composantes $\phi(q)$ de la transformée de Fourier du champ telles que $|q| > k$) et ses modes lents (les $\phi(q)$ avec $|q| < k$). En intégrant dans la fonction de partition uniquement les modes rapides, qui ne contribuent qu'indirectement

à la physique de grande distance, on obtient une théorie effective pour les modes lents, caractérisée par une action effective. Les méthodes du groupe de renormalisation consistent à étudier l'évolution de cette action effective lorsque l'échelle k varie infinitésimalement ; cela est appelé une transformation du groupe de renormalisation. Le comportement critique du système est directement relié aux propriétés dynamiques de l'action effective (dédimensionnée) quand k tend vers 0. En particulier, un point fixe des transformations du groupe de renormalisation traduit l'invariance d'échelle, c'est à dire une longueur de corrélation infinie pour le système, et cela s'associe au point critique correspondant à une transition de phase continue. L'analyse des flots du groupe de renormalisation à proximité du point fixe permet notamment d'extraire les exposants critiques du modèle.

La plupart des approches du groupe de renormalisation sont basées sur la théorie de perturbation ; citons par exemple le fameux développement en $\epsilon = 4 - d$ exposé par Wilson et Fisher au début des années 70 [WF72]. Les observables sont alors développées autour de la théorie libre selon un petit paramètre ; cela permet de déterminer de manière systématique les propriétés physiques du système sous la forme d'un développement en série. Notons, cependant, que les séries obtenues sont en général non convergentes et nécessitent l'utilisation de techniques de resomation afin d'aboutir à des prédictions physiques.

Il existe également des formulations fonctionnelles non perturbatives du groupe de renormalisation. Il est, par exemple, possible de dériver une équation exacte pour l'évolution de l'action effective wilsonienne avec l'échelle k [WK74, Wil75] ; cette dernière est souvent appelée équation de Polchinski dans la littérature [Pol84]. Wegner et Houghton ont aussi établi une équation fonctionnelle exacte en implémentant les idées du groupe de renormalisation de Wilson [WH73]. Cependant, à part pour obtenir des preuves à tous les ordres de renormalisabilité de théories, ces équations non perturbatives ont peu été utilisées. Ces dernières rencontrent en effet plusieurs difficultés : les quantités considérées dans ces approches ne permettent pas de déterminer directement les propriétés thermodynamiques du système et les résultats obtenus sont, de plus, très difficilement contrôlables.

Le groupe de renormalisation fonctionnel a connu un renouveau au début des années 90 sous l'impulsion des travaux de Wetterich [Wet91, Wet93a, Wet93b, Wet93c]. L'idée est toujours celle de Wilson mais l'approche de Wetterich repose sur une nouvelle quantité dont l'interprétation physique est plus directe. Bien que formellement équivalente, cette formulation non pertubative et fonctionnelle du groupe de renormalisation surmonte les principaux problèmes rencontrés dans les approches de Wilson-Polchinski et de Wegner-Houghton. En particulier, les résultats sont beaucoup plus stables lorsque l'on procède à des approximations. Notons que des idées très proches se trouvent également dans les travaux de Parola et Reatto publiés quelques années plus tôt, et destinés principalement à la physique des liquides [PR84, Par86, PPR93a, PPR93b, PR95].

Le but de ce chapitre est de donner une introduction au groupe de renormalisation à la Wetterich. Les principaux concepts sont introduits dans la section qui suit ; nous illustrons ensuite ces derniers sur l'exemple de la théorie scalaire ϕ^4. Notons qu'un cours introductif au groupe de renormalisation non perturbatif ainsi qu'à ses relations avec les approches perturbatives est donné dans [Del12] (pour une revue plus complète, le lecteur intéressé pourra aussi consulter [BTW02]).

2.2 Groupe de renormalisation à la Wetterich

Tout comme dans le schéma wilsonien du groupe de renormalisation, nous considérons une impulsion caractéristique k comprise entre 0 et Λ. $k = \Lambda$ désigne l'échelle microscopique ; à cette échelle de haute énergie, la théorie est définie par son action $\mathcal{S}$. On souhaite diminuer k tout en intégrant au fur et à mesure les fluctuations des degrés de liberté sur des courtes distances, inférieures à k^{-1}, et finir par obtenir les propriétés physiques de grande échelle à la limite $k \to 0$.

L'idée est alors de construire une fonctionnelle Γ_k dépendant de l'échelle k qui va relier de façon continue les descriptions microscopique et macroscopique. Au niveau microscopique, aucune fluctuation ne sera prise en compte dans Γ_k et celle-ci sera égale à l'action $\mathcal{S}$. Au contraire, les fluctuations de toutes les échelles auront été intégrées à la limite $k = 0$ et l'on veut obtenir le potentiel de Gibbs du modèle Γ (en employant la terminologie des systèmes magnétiques).[i] Ce dernier permet, en effet, d'accéder aux quantités thermodynamiques comme l'aimantation ou la susceptibilité, ainsi qu'aux fonctions de corrélations du système. On a donc :

$$\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S} \tag{2.2a}$$

$$\Gamma_{k=0} = \Gamma \tag{2.2b}$$

Γ_k est appelée action effective courante ; celle-ci a été introduite par Wetterich au début des années 90 [Wet91, Wet93a, Wet93b, Wet93c]. Seuls les modes rapides du champ sont pris en compte et intégrés dans Γ_k ; k joue ainsi le rôle d'une coupure infrarouge pour l'action effective courante. Dans le régime de grande impulsion $|q| > k$, cette dernière peut être interprétée comme le potentiel de Gibbs d'un sous-système de taille finie k^{-d}.

i. Γ est obtenu par transformée de Legendre de l'énergie libre $\mathcal{W}[j] = \log \mathcal{Z}[j] = \log \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi]+j\cdot\phi}$, où $\mathcal{Z}[j] = \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi]+j\cdot\phi}$ est la fonction de partition du système en présence d'une source externe j :

$$\Gamma[\varphi] = j.\varphi - \mathcal{W}[j]$$

où le champ classique φ vérifie $\varphi(x) = \frac{\delta \mathcal{W}[j]}{\delta j(x)}$ et s'interprète comme l'aimantation du système. $\Gamma[\varphi]$ est la fonctionnelle génératrice des diagrammes dits "une particule irréductibles" (1PI) dans le cadre de la théorie quantique des champs et, est souvent appelée action effective.

L'évolution de l'action effective courante avec l'échelle k est finalement donnée par une équation différentielle exacte [Wet93b]. L'intégration de cette équation différentielle permet alors d'accéder aux propriétés thermodynamiques du système, contenues dans $\Gamma_{k=0}$, en partant d'une condition initiale $\Gamma_{k=\Lambda}$ qui définit les propriétés microscopiques. Cette résolution, où l'on prend au fur et à mesure en compte de plus en plus de degrés de liberté, décrit une transition vers la complexité. Comme nous le verrons ensuite, il est néanmoins nécessaire de procéder à des approximations pour réaliser cette intégration. Notons déjà que même lorsque k est non nul, Γ_k contient les propriétés thermodynamiques effectives à l'échelle k, c'est à dire pour un système de taille finie.

Nous nous attacherons dans un premier temps à construire l'action effective courante en s'assurant que les propriétés asymptotiques Eqs. (2.2a) et (2.2b) soient satisfaites. L'équation de flot exacte sera ensuite dérivée. Nous discuterons alors la structure et les conséquences de cette équation, ainsi que les différentes méthodes d'approximation utilisées en pratique pour l'intégrer. Nous exposerons finalement une procédure d'optimisation des résultats utile lorsqu'on souhaite extraire des quantités universelles, comme les exposants critiques du modèle par exemple.

Afin de fixer les idées et rendre l'exposé clair, nous nous plaçons dans le cadre simple de la théorie d'un champ bosonique scalaire réel ϕ dont l'action $\mathcal{S}$ est invariante par translation et rotation dans l'espace, ainsi que sous l'opération $\phi \mapsto -\phi$.[ii] Les principaux concepts restent les mêmes pour des théories plus élaborées.

2.2.1 Construction de l'action effective courante

On commence par construire l'action effective courante pour la théorie bosonique scalaire ϕ^4. Ce travail a été mené en majeure partie par Wetterich dans la série d'article [Wet91, Wet93a, Wet93b, Wet93c].

On cherche donc un moyen de découpler les modes lents, d'impulsion inférieure à k, afin que ceux-ci ne soient pas pris en compte dans le calcul de la fonction de partition. Une méthode simple est d'ajouter dans l'action de départ un terme de masse (i.e. quadratique dans les champs) qui dépend de l'impulsion :

$$\mathcal{S}_k[\phi] = \mathcal{S}[\phi] + \Delta\mathcal{S}_k[\phi] \tag{2.3}$$

avec :

$$\Delta\mathcal{S}_k[\phi] = \frac{1}{2}\phi.R_k.\phi = \frac{1}{2}\int_{x,y} R_k(x,y)\phi(x)\phi(y) = \frac{1}{2}\int_q R_k(q)\phi(q)\phi(-q), \tag{2.4}$$

ii. L'action $\mathcal{S}$ est invariante sous la symétrie $\mathbb{Z}_2 = O(1)$ du modèle d'Ising.

où $\int_x = \int d^d x$ et $\int_q = \int d^d q/(2\pi)^d$ dénotent respectivement des intégrales sur l'espace direct et sur l'espace réciproque (d étant la dimension). Les conventions de transformée de Fourier ainsi que les notations concernant les opérateurs sont précisées dans l'annexe A. Afin de préserver l'invariance par translation et rotation dans l'espace, les composantes $R_k(x, y)$ de l'opérateur R_k ne dépendent que de la distance $|x - y|$.[iii] Il en est de même pour sa transformée de Fourier $R_k(q) = R_k(q, -q)$; elle n'est fonction que de la norme $|q|$. Pour la théorie modifiée $\mathcal{S}_k$, la fonction de partition en présence d'une source externe j s'écrit :[iv]

$$\mathcal{Z}_k[j] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\mathcal{S}_k[\phi]+j\cdot\phi} \tag{2.5}$$

avec $j.\phi = \int_x j(x)\phi(x)$.

La fonction $R_k(q)$ est appelée fonction de régularisation infrarouge ou plus simplement régulateur infrarouge. C'est elle qui permet de réduire de façon effective les fluctuations des modes lents dans $\mathcal{Z}_k$, sans influencer celle des modes rapides. Elle doit satisfaire les conditions suivantes :

- Pour $k = \Lambda$, $R(q) \to \infty \; \forall q$. On donne ainsi une masse infinie à tous les modes, ce qui gèle entièrement leur propagation ; aucune fluctuation n'est alors prise en compte.

- Pour $k = 0$, la fonction R est identiquement nulle. Cela implique $\mathcal{Z}_{k=0} = \mathcal{Z}$; on retrouve la fonction de partition du modèle de départ où toutes les fluctuations ont été intégrées.

Plus précisément, pour $0 < k < \Lambda$, R_k est une fonction décroissante de $|q|$ et varie rapidement autour de $|q| = k$. Elle décroit alors plus vite que toute loi de puissance de $|q|$ et vérifie $R_k(|q| > k) \simeq 0$.[v] En conséquence, les modes rapides ne sont pas affectés par la présence du régulateur et sont intégrés exactement dans $\mathcal{Z}_k$. On impose d'autre part pour des raisons dimensionnelles $R_k(|q| \ll k) \simeq k^2$;[vi] cela procure une masse aux modes lents qui sont alors gelés et sans influence sur la physique de grande distance (leurs poids dans l'intégrale fonctionnelle de l'Eq. (2.5) est fortement réduit). Notons qu'on utilisera dans la suite par commodité $R_{k=\Lambda} = \Lambda^2$, qui n'est qu'une version approchée de $R_{k=\Lambda} \to \infty$ (nous reviendrons plus tard sur cette approximation). Un exemple typique de régulateur analytique est celui proposé par Wetterich [TW94], dont la forme est la suivante :

$$R_k(q) = \frac{q^2}{e^{q^2/k^2} - 1} \tag{2.6}$$

iii. L'ajout du terme quadratique $\Delta\mathcal{S}_k[\phi]$ préserve également la symétrie $\mathbb{Z}_2$ de l'action microscopique.

iv. La source s'interprète comme un champ magnétique extérieur.

v. Ce comportement pour R_k est bien en accord avec la condition $R_{k=0} = 0$.

vi. Lorsque nous prendrons en compte la renormalisation du champ Z_k dans la suite, il sera également nécessaire d'inclure ce préfacteur dans le régulateur tel que $R_k(|q| \ll k) \simeq Z_k k^2$.

Ce régulateur est représenté sur la Fig. 2.A. Il est également possible d'utiliser une fonction de régularisation plus brutale (non analytique), comme par exemple [Lit00] :

$$R_k(q) = (k^2 - q^2)\,\theta(k^2 - q^2) \tag{2.7}$$

où θ est la fonction de Heaviside, qui vaut 1 lorsque son argument est positif et 0 sinon.

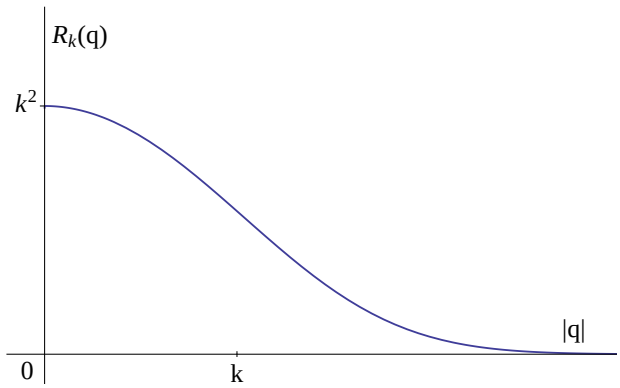

FIGURE 2.A – Forme typique de régulateur analytique utilisé dans l'approche du groupe de renormalisation par l'action effective courante (Eq. (2.6)).

Nous donnerons des détails sur le choix et l'optimisation de la fonction de régularisation par la suite ; concentrons nous, pour le moment, sur la construction de l'action effective courante. Le logarithme de $\mathcal{Z}_k$, c'est à dire l'énergie libre en mécanique statistique,

$$\mathcal{W}_k[j] = \log \mathcal{Z}_k[j], \tag{2.8}$$

permet de générer les fonctions de corrélations connexes (pour la théorie à l'échelle k). Le champ classique, qui correspond à la moyenne de ϕ calculée avec le poids de Boltzmann $\exp(-\mathcal{S}_k[\phi] + j.\phi)$, s'obtient en dérivant une fois $\mathcal{W}_k$ par rapport à la source :

$$\varphi(x) = \frac{\delta \mathcal{W}_k[j]}{\delta j(x)} = \mathcal{W}_k^{(1)}[j](x) \tag{2.9}$$

Les notations associées aux dérivées fonctionnelles sont également définies dans l'annexe A. φ s'interprète comme l'aimantation effective à l'échelle k (c'est également une fonctionnelle de j dépendant de k mais on écrira seulement φ pour alléger la notation). On introduit ensuite la transformée de Legendre de $\mathcal{W}_k$, c'est à dire le potentiel de Gibbs pour la théorie $\mathcal{S}_k$:

$$\tilde{\Gamma}_k[\varphi] = j.\varphi - \mathcal{W}_k[j] \tag{2.10}$$

où la variable φ vérifie l'Eq. (2.9). Cette action effective possède déjà le comportement souhaité lorsque $k = 0$: $R_{k=0} = 0$, donc $\mathcal{W}_{k=0} = \mathcal{W}$, et $\tilde{\Gamma}_{k=0} = \Gamma$. Il est cependant

nécessaire de travailler avec un potentiel de Gibbs modifié pour obtenir également le bon comportement dans la limite $k = \Lambda$. On définit finalement l'action effective courante en retranchant le terme de régularisation (évalué pour le champ classique) à $\tilde{\Gamma}_k$:

$$\begin{aligned} \Gamma_k[\varphi] &= \tilde{\Gamma}_k[\varphi] - \Delta\mathcal{S}_k[\varphi] \\ &= j.\varphi - \mathcal{W}_k[j] - \Delta\mathcal{S}_k[\varphi] \end{aligned} \tag{2.11}$$

Il est clair que cette modification ne change pas la limite en $k = 0$. Montrons maintenant que l'ajout de ce terme permet de retrouver le bon comportement pour $k = \Lambda$. Il est possible d'écrire une représentation du potentiel de Gibbs sous la forme d'une intégrale fonctionnelle faisant directement intervenir l'action microscopique. Pour l'action effective courante Γ_k, cette représentation est la suivante :

$$\begin{aligned} e^{-\Gamma_k[\varphi]} &= \mathcal{Z}_k[j]\, e^{\Delta\mathcal{S}_k[\varphi]-j.\varphi} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi]-\Delta\mathcal{S}_k[\phi-\varphi]+\Gamma_k^{(1)}[\varphi].(\phi-\varphi)} \\ &= \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi+\varphi]-\Delta\mathcal{S}_k[\phi]+\Gamma_k^{(1)}[\varphi].\phi} \end{aligned} \tag{2.12}$$

où l'on a utilisé la relation $j = \tilde{\Gamma}_k^{(1)}[\varphi] = \Gamma_k^{(1)}[\varphi] + R_k.\varphi$ [vii] ainsi qu'un changement de variable dans l'intégrale fonctionnelle pour passer de la deuxième à la troisième ligne. Lorsque la fonction R_k tend vers l'infini pour $k = \Lambda$, la seule contribution non nulle à l'intégrale ci-dessus vient en $\phi = 0$ (le terme $\exp(-\Delta\mathcal{S}_k[\phi]) = \exp(-\phi.R_k.\phi/2)$ joue le rôle d'un delta de Dirac fonctionnel $\delta(\phi)$). D'où la limite souhaitée :

$$e^{-\Gamma_{k=\Lambda}[\varphi]} = e^{-\mathcal{S}[\varphi]} \tag{2.13}$$

L'action effective courante définie dans l'Eq. (2.11) vérifie donc bien les conditions asymptotiques fondamentales Eqs. (2.2a) et (2.2b). [viii] Notons que notre approximation $R_{k=\Lambda} = \Lambda^2$, qui est une masse très grande mais finie, permet d'avoir seulement :

$$\Gamma_{k=\Lambda} \simeq \mathcal{S} \tag{2.14}$$

vii. C'est la relation inverse de l'Eq. (2.9) pour les variables conjuguées j et φ de la transformation de Legendre.

viii. La représentation intégrale dans l'Eq. (2.12) permet également de vérifier le bon comportement pour Γ_k lorsque $k = 0$; il vient alors :

$$e^{-\Gamma_{k=0}[\varphi]} \int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi+\varphi]+\Gamma_{k=0}^{(1)}[\varphi].\phi}$$

C'est la relation fonctionnelle typique entre un vrai potentiel de Gibbs et l'action microscopique, on retrouve ainsi $\Gamma_{k=0} = \Gamma$.

Puisque nous sommes intéressés par les phénomènes critiques et les propriétés universelles de grande échelle, indépendantes des détails microscopiques, nous nous contenterons de cette égalité approchée dans toute la suite. Au contraire, si l'on souhaitait déterminer les propriétés thermodynamiques non universelles du modèle comme la température critique par exemple, il serait nécessaire d'avoir l'égalité exacte entre $\Gamma_{k=\Lambda}$ et $\mathcal{S}$ [SW99]. [ix]

2.2.2 Flot de l'action effective courante

Après avoir défini l'action effective courante et démontré son bon comportement dans les deux limites $k = \Lambda$ et $k = 0$, attachons nous à écrire son équation de flot, c'est à dire l'équation qui donne son évolution lorsqu'on varie continûment l'échelle k. On introduit tout d'abord une échelle logarithmique constituant un paramètre additif pour les transformations du groupe de renormalisation : [x]

$$t = \log(k/\Lambda) \tag{2.15}$$

On appellera ce dernier "temps du groupe de renormalisation". Ce "temps" étant choisi négatif ici, la physique de grande distance s'obtient dans la limite $t \to -\infty$.

Dérivation de l'équation de flot exacte

Nous allons tout d'abord établir l'équation de flot pour l'énergie libre $\mathcal{W}_k$. Notons que lorsque la source j est considérée comme indépendante de l'échelle k (comme dans l'expression $\mathcal{W}_k[j]$), l'aimantation φ dépend quant à elle de k. Au contraire, il est possible de se placer à aimantation fixée (comme dans l'expression $\Gamma_k[\varphi]$) et c'est alors la source j qui va dépendre de k. On écrira dans la suite $\partial_{t\,|_j}$ pour une dérivation par rapport au temps du groupe de renormalisation à j fixé et $\partial_{t\,|_\varphi}$ pour une dérivée à φ fixé. On passera de l'une à l'autre avec :

$$\partial_{t\,|_j} = \partial_{t\,|_\varphi} + \partial_t \varphi_{|_j} . \frac{\delta}{\delta\varphi} \tag{2.16}$$

ix. On peut par exemple remplacer l'expression précédente du régulateur $R_k(q) = q^2/\big(\exp(q^2/k^2) - 1\big)$ par la suivante :

$$R_k(q) = q^2 \, \frac{1 + e^{-q^2/\Lambda^2} - e^{-q^2/k^2}}{e^{-q^2/\Lambda^2} - e^{-q^2/k^2}}$$

Cette fonction vérifie $R_{k=\Lambda} \to \infty$ et permet d'obtenir exactement $\Gamma_{k=\Lambda} = \mathcal{S}$. Notons que ces deux régulateurs ne diffèrent que pour des valeurs de k proches de Λ. Ce changement ne va donc modifier les flots du groupe de renormalisation qu'au début de l'intégration, mais conduira aux mêmes propriétés critiques lorsque $k \to 0$.

x. Le paramètre k est, quant à lui, multiplicatif pour les transformations du groupe de renormalisation.

En partant de la définition de $\mathcal{W}_k$, Eq. (2.8), on obtient :

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{W}_k[j]_{|_j} &= -\frac{1}{2\mathcal{Z}_k[j]} \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\mathcal{S}_k[\varphi]+j.\phi} \, \phi.\partial_t R_k.\phi \\ &= -\frac{1}{2\mathcal{Z}_k[j]} \int_{x,y} \partial_t R_k(x,y) \, \mathcal{Z}_k^{(2)}[j](x,y)\end{aligned} \tag{2.17}$$

Puis, à l'aide de la relation

$$\mathcal{W}_k^{(2)}[j](x,y) = \mathcal{Z}_k[j]^{-1} \mathcal{Z}_k^{(2)}[j](x,y) - \mathcal{W}_k^{(1)}[j](x)\mathcal{W}_k^{(1)}[j](y) \tag{2.18}$$

l'équation de flot pour l'énergie libre devient :

$$\partial_t \mathcal{W}_k[j]_{|_j} = -\frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(x,y) \Big(\mathcal{W}_k^{(2)}[j](x,y) + \mathcal{W}_k^{(1)}[j](x) \, \mathcal{W}_k^{(1)}[j](y) \Big) \tag{2.19}$$

Cette équation est très proche de l'équation exacte de Polchinski dérivée dans le cadre du groupe de renormalisation à la Wilson [WK74, Wil75, Pol84].

On peut désormais en déduire l'équation d'évolution pour l'action effective courante. On dérive alors sa définition (Eq. (2.11)) par rapport au temps t :

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k[\varphi]_{|_j} &= j.\partial_t \varphi_{|_j} - \partial_t \mathcal{W}_k[j]_{|_j} - \partial_t \varphi_{|_j}.R_k.\varphi - \frac{1}{2}\varphi.\partial_t R_k.\varphi \\ &= j.\partial_t \varphi_{|_j} - \partial_t \varphi_{|_j}.R_k.\varphi + \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(x,y) \, \mathcal{W}_k^{(2)}[j](x,y)\end{aligned} \tag{2.20}$$

Finalement, en considérant l'argument φ de Γ_k comme indépendant de k, nous aboutissons à :

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k[\varphi]_{|_\varphi} &= \partial_t \Gamma_k[\varphi]_{|_j} - \partial_t \varphi_{|_j}.\Gamma_k^{(1)}[\varphi] \\ &= \frac{1}{2} \int_{x,y} \partial_t R_k(x,y) \, \mathcal{W}_k^{(2)}[j](x,y)\end{aligned} \tag{2.21}$$

où l'on a utilisé la relation réciproque de l'Eq. (2.9) : $j = \tilde{\Gamma}_k^{(1)}[\varphi] = \Gamma_k^{(1)}[\varphi] + R_k.\varphi$. La dérivée seconde de $\mathcal{W}_k$ intervenant dans le membre de droite s'identifie à la fonction de corrélation connexe à deux points, c'est à dire au propagateur, pour la théorie $\mathcal{S}_k$ en présence de source.[xi] La dernière étape consiste à réécrire ce dernier uniquement en termes de Γ_k et R_k, afin d'obtenir une équation fermée sur Γ_k. Or, en langage matriciel, le propagateur est l'inverse de la dérivée seconde du potentiel de Gibbs :

$$\mathcal{W}_k^{(2)}[j] = \tilde{\Gamma}_k^{(2)}[\varphi]^{-1} = \big(\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k\big)^{-1} \tag{2.22}$$

xi. Nous avons précisément $\mathcal{W}_k^{(2)}[j](x,y) = \langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \varphi(x)\varphi(y)$ où $\langle \, . \, \rangle$ désigne la moyenne calculée avec le poids de Boltzmann $\exp(-\mathcal{S}_k[\phi] + j.\phi)$.

D'où la forme définitive de l'équation de flot pour l'action effective courante :

$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_k[\varphi]_{|\varphi} &= \frac{1}{2}\int_{x,y} \partial_t R_k(x,y)\left(\Gamma_k^{(2)}[\varphi]+R_k\right)^{-1}(x,y) \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{\,\partial_t R_k\left(\Gamma_k^{(2)}[\varphi]+R_k\right)^{-1}\}\end{aligned} \tag{2.23}$$

Il est également commode d'introduire un opérateur de dérivation par rapport au temps agissant uniquement sur la fonction de régularisation $\tilde{\partial}_t = (\partial_t R_k)\,\partial_{R_k}$. L'équation de flot exacte, Eq. (2.23), se réécrit :

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi]_{|\varphi} = \frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\mathrm{Tr}\log\{\,\Gamma_k^{(2)}[\varphi]+R_k\} \tag{2.24}$$

Cette équation de flot concise est à la base de tous les calculs effectués dans la suite. Elle est souvent appelée équation de Wetterich [Wet93b]. Il est important de noter que cette équation est exacte et qu'aucune approximation n'a été faite pour la dériver ; toutes les propriétés physiques du système peuvent donc, en principe, être déduites de celle-ci. Cependant, malgré son apparente simplicité, cette équation est une équation aux dérivées partielles, fonctionnelle et non linéaire ; on ne peut la résoudre de manière exacte dans la plupart des cas. En fait, son intérêt n'est pas tant qu'elle soit exacte (il n'est pas difficile de dériver des équations exactes qui ne servent à rien en pratique), mais qu'il est possible d'en obtenir des informations physiques pertinentes en utilisant des schémas d'approximation non perturbatifs par rapport aux constantes de couplage. Avant de détailler ces différentes méthodes d'approximation, nous discutons quelques propriétés remarquables de l'équation de Wetterich.

Propriétés du flot

Nous ré-exprimons la trace intervenant dans l'équation de Wetterich dans l'espace réciproque :

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] = \frac{1}{2}\int_q \partial_t R_k(q)(\Gamma_k^{(2)}[\varphi]+R_k)^{-1}(q,-q) \tag{2.25}$$

Cette équation d'évolution possède la structure d'une équation à une boucle (i.e. elle fait intervenir une intégrale sur une seule impulsion). Cela constitue un avantage de cette approche par rapport à la théorie de perturbation, dans laquelle les diagrammes à l boucles font intervenir l intégrales d-dimensionnelles. Nous avons donc établi une équation exacte

présentant une structure simple à une boucle.[xii] Puisque celle-ci est exacte, elle permet en principe de retrouver les résultats perturbatifs à plusieurs boucles [PW95].

Il est important de noter que, pour toute échelle k non nulle, l'intégrale en impulsion intervenant dans l'Eq. (2.25) converge à la fois dans l'ultraviolet et dans l'infrarouge. En effet, la fonction R_k décroit plus vite que toute loi de puissance de $|q|$ dans le régime de grande impulsion $|q| > k$. La présence du terme $\partial_t R_k(q)$ dans l'intégrale assure ainsi sa convergence dans l'ultraviolet. Dans le régime opposé lorsque $q \to 0$, le régulateur est non nul (pour $k \neq 0$) et celui-ci empêche l'inverse du propagateur $\Gamma_k^{(2)} + R_k$ de s'annuler. Le propagateur est donc fini à la limite $q \to 0$, d'où la convergence de l'intégrale de l'Eq. (2.25) dans l'infrarouge. En conclusion, quelle que soit l'échelle k non nulle, l'action effective courante et son flot sont analytiques.[xiii] Cela peut se comprendre de façon plus intuitive : Γ_k ressemble à un potentiel de Gibbs effectif pour un sous système de taille k^{-d}. Or, une transition de phase et des singularités dans les fonctions thermodynamiques ne peuvent exister dans un système de taille finie.

Il est cependant possible que Γ_k soit non analytique à la fin de l'intégration, en $k = 0$. C'est en particulier le cas pour une condition initiale critique associée à une transition de phase continue. Le propagateur présente alors le comportement singulier suivant à basse impulsion :

$$\mathcal{P}[\varphi](q, -q) = \Gamma_{k=0}^{(2)}[\varphi]^{-1}(q, -q) \underset{|q|\to 0}{\sim} |q|^{\eta-2} \tag{2.26}$$

où l'exposant critique η s'identifie à la dimension anormale du champ. Au point critique, la singularité va donc apparaître progressivement au cours du flot, au fur et à mesure que l'on diminue l'échelle k.

En pratique, nous aurons besoin des équations flot pour les dérivées fonctionnelles de l'action effective courante $\Gamma_k^{(n)}[\varphi](x_1, \cdots, x_n)$, appelées fonctions de vertex à n points. Celles-ci s'obtiennent aisément en dérivant l'équation de Wetterich par rapport au champ

xii. Il n'est d'ailleurs pas difficile de faire le lien entre l'équation de Wetterich et l'expression perturbative à une boucle pour le Potentiel de Gibbs. Pour l'action effective courante, cette dernière s'écrit :

$$\Gamma_k[\varphi] \simeq \mathcal{S}[\varphi] + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \log\{ \mathcal{S}^{(2)}[\varphi] + R_k \}$$

D'où le flot :

$$\partial_t \Gamma_k[\varphi] \simeq \frac{1}{2} \operatorname{Tr}\{ \partial_t R_k \left(\mathcal{S}^{(2)}[\varphi] + R_k \right)^{-1} \}$$

On passe donc du résultat perturbatif à une boucle à l'équation exacte en remplaçant $\mathcal{S}^{(2)}$ par $\Gamma_k^{(2)}$ dans l'expression ci-dessus.

xiii. Cela est vrai pour la théorie scalaire considérée ici. Dans le cas de théories en présence de désordre gelé que nous considérons dans la suite, d'autres formes de non analyticités peuvent apparaître pour $k \neq 0$ dans la théorie à température nulle.

classique φ. Avant d'établir ces équations, il est pratique d'introduire une notation pour le propagateur de la théorie modifiée $\mathcal{S}_k$:

$$\mathcal{P}_k[\varphi] = \left(\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k\right)^{-1} \tag{2.27}$$

Nous réécrivons alors le flot de Γ_k à l'aide de celui-ci :

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\varphi] &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{\,\partial_t R_k\,\mathcal{P}_k[\varphi]\,\} \\ &= \frac{1}{2}\,\tilde{\partial}_t\,\mathrm{Tr}\log\,\mathcal{P}_k[\varphi]^{-1} \end{aligned} \tag{2.28}$$

Puisque $\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\mathcal{P}_k[\varphi]\mathcal{P}_k[\varphi]^{-1}\right) = 0$, la dérivée fonctionnelle du propagateur par rapport à φ s'exprime par :

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{P}_k[\varphi]}{\delta\varphi(x)} &= -\mathcal{P}_k[\varphi]\,\frac{\delta\mathcal{P}_k[\varphi]^{-1}}{\delta\varphi(x)}\,\mathcal{P}_k[\varphi] \\ &= -\mathcal{P}_k[\varphi]\,\Gamma_k^{(3)}[\varphi](x)\,\mathcal{P}_k[\varphi] \end{aligned} \tag{2.29}$$

Nous pouvons désormais déduire des Eqs. (2.28) et (2.29) les équations d'évolution pour les fonctions de vertex :

$$\partial_t \Gamma_k^{(1)}[\varphi](x) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_k[\varphi]\,\Gamma_k^{(3)}[\varphi](x)\} \tag{2.30a}$$

$$\partial_t \Gamma_k^{(2)}[\varphi](x,y) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_k[\varphi]\,\Gamma_k^{(4)}[\varphi](x,y)\} - \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \mathrm{Tr}\{\mathcal{P}_k[\varphi]\,\Gamma_k^{(3)}[\varphi](x)\,\mathcal{P}_k[\varphi]\,\Gamma_k^{(3)}[\varphi](y)\} \tag{2.30b}$$

etc. Le champ φ peut être choisi dans ces équations comme uniforme dans l'espace. Il vient ainsi une hiérarchie d'équations de flot couplées non fermée ; d'une manière générale, le flot du vertex à n points fait intervenir les fonctions de vertex à $n+1$ et $n+2$ points. Toutes ces équations présentent évidemment la même structure à une boucle que l'équation de Wetterich. [xiv]

Notons finalement qu'il n'est pas difficile de généraliser les calculs exposés ci-dessus à des théories bosoniques plus complexes, où le champ possède des degrés de liberté internes associés à la représentation d'un groupe de symétrie. Les dérivées fonctionnelles par rapport au champ présentent, dans ce cas, des indices de groupe et les opérateurs comme $\Gamma_k^{(2)}[\varphi]$ (et R_k) agissent également dans l'espace interne. Les formes de l'équation de Wetterich faisant intervenir une trace de matrice, Eqs. (2.23) et (2.24), se généralisent alors directement, mais la trace porte désormais sur les coordonnées d'espace et sur les indices de groupe. Précisons aussi qu'il est possible de dériver une équation de flot exacte similaire pour des champs fermioniques [BTW02].

xiv. Il est possible d'utiliser une représentation diagrammatique des équations de flot Eq. (2.30) (voir par exemple [Del12]). Les diagrammes y intervenant sont alors tous à une boucle et une particule irréductibles.

2.2.3 Schémas d'approximation non perturbatifs

Comme nous l'avons déjà précisé, l'équation de flot exacte de Wetterich est une équation très compliquée et nous avons recours à des approximations pour l'intégrer en pratique. [xv] Ces approximations permettent de fermer la hiérarchie d'équations de flot dérivée pour les fonctions de vertex (Eq. (2.30)). Dans tous les cas, elles consistent à résoudre l'équation de Wetterich dans un espace de fonctions restreint ; nous projetons l'équation sur un sous-espace qui aura été préalablement choisi, afin d'en obtenir une forme plus simple. Concrètement, ce sous espace est fixé en procédant à un ansatz pour Γ_k ; on lui impose ainsi une forme prédéfinie au cours du flot, que l'on appelle troncation de l'action effective courante. La troncation choisie fait alors intervenir un certain nombre de fonctions (et non plus de fonctionnelles) dépendant de l'échelle k. Nous utilisons ensuite l'équation de Wetterich afin d'obtenir l'évolution de ces différentes fonctions au cours de la renormalisation, c'est à dire les fonctions beta. Ces dernières sont approchées car elles prennent uniquement en compte les fonctions ou constantes de couplage faisant partie de l'ansatz.

La qualité des résultats obtenus va, bien entendu, dépendre du choix de la troncation ; plus celle-ci sera riche, plus les résultats seront précis, mais plus les équations seront difficiles à résoudre. Il faut choisir la forme de Γ_k en conservant au mieux les informations pertinentes et susceptibles de décrire le phénomène physique qui nous intéresse.

Le principal avantage de cette approche réside dans le fait que la troncation de l'action effective courante est la seule approximation à laquelle nous procédons ; il n'y a pas de développement en série selon un petit paramètre traité comme une perturbation. Nous obtenons de cette manière des résultats approchés, mais non perturbatifs ; et cela, aussi bien pour les propriétés critiques du système que pour les quantités non universelles. En particulier, nous ne sommes pas limités aux voisinages des dimensions critiques supérieure et inférieure du modèle, comme dans l'approche perturbative.

Nous discutons dans la suite deux méthodes principales d'approximation ; alors que l'une consiste à développer l'action effective courante selon les dérivées spatiales du champ, l'autre s'appuie directement sur un développement de Γ_k en puissances du champ. Ces deux schémas peuvent finalement se combiner afin d'aboutir à des troncations très simples, mais pertinentes physiquement. Notons qu'il existe une troisième méthode d'approximation prometteuse proposée par Blaizot, Mendez-Galain et Wschebor en 2006 [BMGW06a, BMGW06b, BMGW06c] ; cette dernière n'est pas décrite dans l'exposé qui suit.

xv. Il existe néanmoins certains cas particuliers où cette équation peut être résolue exactement ; citons par exemple la théorie vectorielle $O(N)$ dans la limite $N \to \infty$ [TW94].

Développement en dérivées du champ

Nous présentons ici un premier schéma d'approximation qui consiste à développer formellement Γ_k dans le nombre de dérivées spatiales du champ, et à tronquer ce développement en ne conservant que les premiers termes. Cette méthode d'approximation, qui est une forme de développement en localité, est la plus couramment utilisée. Elle est à la base de notre étude exposée dans les chapitres suivants.

Commençons par expliquer la motivation pour ce type de développement. Puisque l'on souhaite étudier les phénomènes critiques, il est nécessaire de bien décrire la physique à grande distance, ou de façon équivalente à faible impulsion, quitte à négliger les propriétés de courte distance. Nous sommes effectivement intéressés par des quantités thermodynamiques uniformes (comme l'aimantation ou la susceptibilité) et donc obtenues à impulsion nulle, ainsi que par le comportement des fonctions de corrélation à faible impulsion. L'action effective courante est, de plus, régulière dans l'infrarouge lorsque k est non nul. En supposant que le champ classique φ varie peu dans l'espace, les arguments précédents justifient un développement de Γ_k selon les dérivées spatiales du champ (c'est à dire un développement en puissances de $|q|$ dans l'espace réciproque). Notons que dans ce schéma d'approximation, l'entière dépendance en φ de l'action effective courante est préservée à chaque ordre du développement en ∂_μ. Nous obtenons de cette manière des troncations dites fonctionnelles.

L'ordre le plus bas de ce développement est dit "approximation du potentiel local". La renormalisation du terme cinétique de l'action microscopique y est alors négligée et l'ansatz pour Γ_k est le suivant : [xvi]

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + U_k(\rho(x)) + O(\partial_\mu^2) \tag{2.31}$$

où $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ $(\mu = 1, \cdots, d)$ et la somme sur l'indice répété μ est sous entendue. On utilise également la variable $\rho = \varphi^2/2$ pour le champ ; l'Eq. (2.31) préserve donc la symétrie $\mathbb{Z}_2$ pour l'action effective courante. Il est important que la troncation choisie ne brise pas explicitement les symétries de l'action microscopique. La fonction $U_k(\rho)$ est appelée potentiel effectif courant ou potentiel renormalisé à l'échelle k. Les quantités thermodynamiques (aimantation, susceptibilité, etc.) et l'équation d'état du système sont déduites de $U_{k=0}$ à la fin de l'intégration du flot. Cette approximation est simple et permet déjà d'obtenir les propriétés qualitatives du flot à travers le potentiel renormalisé U_k ; nous étudions ces dernières dans la section 2.3.1. Notons que le défaut majeur de cette première troncation est l'absence de renormalisation du terme cinétique ; la dimension du champ est, par conséquent, égale à sa dimension canonique et l'exposant critique η est nul.

xvi. Il est évidemment nécessaire de garder au moins un terme en dérivée du champ dans l'action effective courante afin de coupler les différents points de l'espace.

L'ordre suivant du développement est le plus fréquemment utilisé ; il consiste à garder tous les termes d'ordre 2 en dérivée du champ dans Γ_k :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_k(\rho(x))\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + U_k(\rho(x)) + O(\partial_\mu^4) \tag{2.32}$$

Une fonction de renormalisation du champ $Z_k(\rho)$ est désormais présente devant le terme dérivatif. En prenant en compte la renormalisation du terme cinétique, les équations de flot vont être modifiées et décriront de façon plus satisfaisante la physique du problème que dans l'approximation du potentiel local. Cette troncation offre un bon compromis entre la précision des résultats obtenus et la difficulté pour résoudre les équations de flot. Les propriétés critiques de la théorie scalaire sont déterminées à l'aide de cette approximation dans la partie 2.3.2. On montrera alors qu'il est possible d'en déduire des résultats quantitatifs en calculant les exposants critiques du modèle. L'étude de la dépendance en k de la fonction Z_k permet notamment de déterminer la dimension anormale du champ η (voir Eq. (2.26)).

Développement en champs et troncations mixtes

Lorsqu'on souhaite préserver entièrement l'information sur la structure spatiale de la théorie et prendre en compte tout le régime d'impulsion, il est possible d'utiliser un second schéma d'approximation. Celui-ci consiste à développer l'action effective courante selon les puissances du champ :

$$\Gamma_k[\varphi] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{x_1 \cdots x_n} \Gamma_k^{(n)}[\varphi_0](x_1, \cdots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (\varphi(x_i) - \varphi_0) \tag{2.33}$$

où φ_0 est un champ constant autour duquel on développe. On tronque alors l'action effective courante en ne conservant que les premiers termes de ce développement. Cela revient à fermer explicitement la hiérarchie d'équations de flot pour les vertex $\Gamma_k^{(n)}$ dérivée dans le paragraphe 2.2.2 (Eq. (2.30)). Le choix de φ_0 est important ; en pratique, celui-ci est souvent pris nul ou égal au minimum du potentiel effectif courant. [xvii]

Une propriété remarquable de cette approche du groupe de renormalisation est la possibilité d'obtenir des résultats non triviaux dans le cadre de troncations très simples. En combinant les deux schémas d'approximation présentés ci-dessus, on peut développer en

xvii. En général, le fait de développer autour du minimum du potentiel renormalisé améliore la convergence des résultats avec l'ordre de la troncation [AMS+98, MT99]. Le minimum du potentiel effectif étant la valeur physique du paramètre d'ordre, il est préférable de bien décrire l'action effective courante au voisinage de celui-ci. Notons que dans ce cas, φ_0 dépend lui aussi de l'échelle k.

champs les fonctions qui apparaissent dans le développement en dérivées spatiales de Γ_k :

$$U_k(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_k^{(n)}(\rho_0)}{n!}(\rho - \rho_0)^n \tag{2.34a}$$

$$Z_k(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_k^{(n)}(\rho_0)}{n!}(\rho - \rho_0)^n \tag{2.34b}$$

La troncation de ces sommes à un nombre fini de termes est appelée troncation mixte de l'action effective courante. Les termes à prendre en compte peuvent être sélectionnés en fonction de leur dimension canonique. On travaille ainsi non plus avec des fonctions mais avec un nombre fini de constantes de couplage et les fonctions beta apparaissent simplement comme un système d'équations différentielles couplées. En choisissant de développer autour du minimum du potentiel renormalisé U_k, voici la troncation non triviale la plus simple :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + \frac{g_k}{2}(\rho(x) - \kappa_k)^2 \,, \tag{2.35}$$

et si l'on souhaite estimer la dimension anormale du champ :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{Z_k}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + \frac{g_k}{2}(\rho(x) - \kappa_k)^2 \tag{2.36}$$

Notons qu'une troncation aussi simple que l'Eq. (2.36) donne déjà des résultats qualitatifs et semi-quantitatifs non triviaux pour le régime critique du modèle vectoriel $O(N)$. Celle-ci permet en particulier de retrouver les résultats perturbatifs à une boucle aux voisinages des dimensions critiques supérieure et inférieure, ainsi qu'à grand nombre de composantes du champ $N \to \infty$ [Tis01, BTW02, Ess12].

2.2.4 Dépendance des résultats sur le régulateur et optimisation

Si nous pouvions résoudre l'équation de Wetterich de manière exacte, les résultats physiques obtenus seraient indépendants du choix de la fonction de régularisation R_k. Cependant, cette indépendance est brisée dès que l'action effective est tronquée, ce qui est toujours le cas en pratique. Pour une troncation donnée, les quantités physiques calculées dépendent du régulateur.[xviii] Bien qu'il n'existe pas de théorème rigoureux sur la convergence des résultats, il est raisonnable de penser que cette dépendance décroit lorsque l'ordre de la troncation augmente ; cela est confirmé par l'expérience.

Il vient donc la question importante concernant le choix du régulateur. Nous présentons ici le critère de sensibilité minimale [CDMV03b] ; celui-ci consiste à étudier la dépendance

xviii. Ce problème n'est pas spécifique au groupe de renormalisation non perturbatif ; même dans l'approche perturbative standard, les exposants critiques acquièrent une dépendance dans le schéma de régularisation utilisé à partir du calcul à deux boucles (voir par exemple [PV02]).

des quantités physiques avec le régulateur, et à choisir ce dernier là où ces quantités en dépendent le moins. Considérons une famille de régulateurs R_k^α dépendant du paramètre α (par exemple, $R_{k,\exp}^\alpha(q) = \alpha q^2/(\exp(q^2/k^2) - 1)$ ou bien $R_{k,\theta}^\alpha(q) = \alpha(k^2 - q^2)\theta(k^2 - q^2)$). Puisque le résultat exact (i.e. sans troncation) est indépendant de α, il est judicieux de choisir le régulateur là où les différentes quantités physiques dépendent le moins de α. Si $Q(\alpha)$ est une quantité physique (un exposant critique par exemple) calculée dans une troncation donnée, le principe de sensibilité minimale (PMS) s'exprime par :

$$\frac{dQ}{d\alpha}\Big|_{\alpha=\alpha_\star} = 0 \tag{2.37}$$

et la valeur optimale de Q est $Q(\alpha_\star)$. L'étude de la variation de $Q(\alpha_\star)$ en fonction de l'ordre de la troncation ou de la famille de régulateurs considérée constitue un bon moyen d'estimer l'erreur typique sur le résultat. Notons que ces considérations sont valables pour tous les schémas d'approximation discutés précédemment.

Canet et. al ont calculé l'exposant critique ν du modèle d'Ising en dimension 3 pour plusieurs ordres du développement en champs, et en utilisant les deux familles de régulateurs $R_{k,\exp}^\alpha$ et $R_{k,\theta}^\alpha$ [CDMV03b]. Nous présentons sur la Fig. 2.B leurs résultats en fonction du paramètre α. La courbe $\nu(\alpha)$ possède toujours un unique minimum et, lorsque le développement en champ a convergé, les valeurs du PMS $\nu(\alpha_\star)$ dans les deux familles de régulateurs diffèrent de moins de 5%.

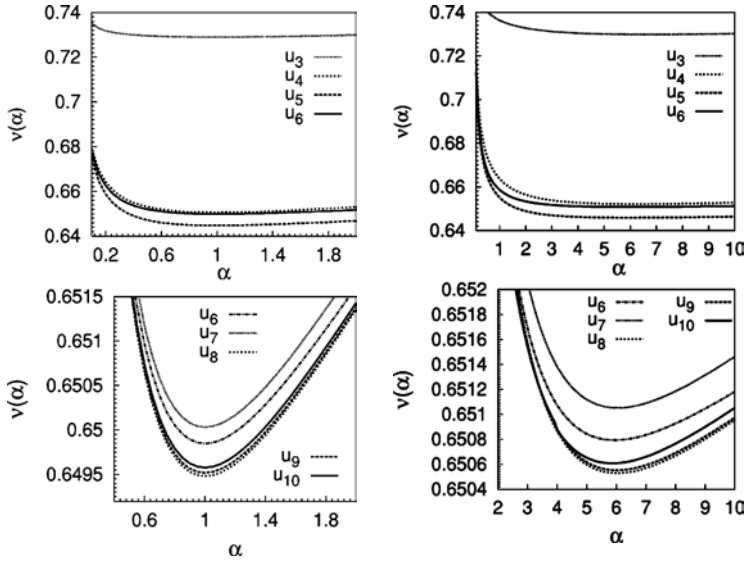

FIGURE 2.B – Exposant ν du modèle d'Ising en dimension 3 calculé pour plusieurs ordres du développement en champs, tiré de [CDMV03b]. ν est tracé en fonction du paramètre α du régulateur pour les deux familles $R^{\alpha}_{k,\theta}$ (à gauche) et $R^{\alpha}_{k,\mathrm{exp}}$ (à droite). Les résultats pour les ordres les plus élevés sont représentés sur les figures du dessous.

2.3 Etude de la théorie scalaire ϕ^4

Nous illustrons les concepts introduits précédemment dans le cadre de la théorie bosonique scalaire ϕ^4. On débute l'analyse en considérant l'ordre le plus bas du développement en dérivées du champ de l'action effective, c'est à dire l'approximation du potentiel local. Les propriétés du flot du potentiel renormalisé sont discutées en détail ; nous déterminons ensuite le point fixe associé aux propriétés critiques universelles du système en introduisant des quantités sans dimension. En particulier, nous montrons comment les exposants critiques sont obtenus. Afin de prendre en compte la renormalisation du champ, nous étudions dans un second temps l'ordre suivant du développement en dérivées. Les exposants critiques sont finalement calculés dans cette approximation pour les dimensions physiques 2 et 3.

2.3.1 Approximation du potentiel local

On traite l'ordre 0 du développement en dérivées du champ, dans lequel la renormalisation du terme cinétique de l'action microscopique est négligée. La troncation utilisée

est :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) + U_k(\rho(x)) \tag{2.38}$$

Rappelons que les relations d'échelle entre les différents exposants critiques ne laissent que deux exposants indépendants ; en général, nous chercherons à déterminer η et ν. Puisque la dimension anormale du champ η est nulle dans l'approximation considérée, il ne reste qu'un seul exposant à déterminer.

Evolution du potentiel renormalisé

Quelle que soit la troncation considérée, le potentiel effectif courant s'identifie à Γ_k évalué dans une configuration de champ uniforme dans l'espace (voir Eqs. (2.31) et (2.32)) :

$$U_k(\rho_0) = v^{-1}\Gamma_k[\varphi_0] \tag{2.39}$$

où $v = \int_x$ est le volume total et $\varphi_0(x) = \varphi_0$ désignera un champ uniforme quelconque dans toute la suite. Nous déduisons de l'équation de Wetterich et de l'Eq. (2.39) l'expression exacte du flot du potentiel effectif courant en champ uniforme :

$$\partial_t U_k(\rho_0) = \frac{1}{2v}\,\mathrm{Tr}\,\partial_t R_k\,\mathcal{P}_k[\varphi_0] \tag{2.40}$$

On rappelle que $\mathcal{P}_k[\varphi] = (\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k)^{-1}$ dénote le propagateur pour l'action modifiée $\mathcal{S}_k$. Les quantités thermodynamiques seront déduites du potentiel macroscopique $U_{k=0}$ obtenu en fin d'intégration. En particulier, en l'absence de champ magnétique extérieur, l'aimantation m du système (i.e. la valeur physique de φ_0) minimise le potentiel $U_{k=0}$.[xix]

$$\partial_{\varphi_0} U_{k=0}\,\big|_{\varphi_0=m} = 0 \tag{2.41}$$

Nous allons établir l'équation d'évolution du potentiel effectif courant U_k dans l'approximation du potentiel local. Cela revient à introduire dans le membre de droite de l'équation exacte, Eq. (2.40), l'expression approchée du propagateur issue de l'Eq. (2.38). Afin d'obtenir cette dernière, nous calculons la fonction de vertex à deux points dans l'approximation Eq. (2.38) :

$$\Gamma_k^{(2)}[\varphi_0](q,-q) = q^2 + U_k'(\rho_0) + 2\rho_0 U_k''(\rho_0) \tag{2.42}$$

xix. C'est une conséquence de la relation liée à la transformation de Legendre $j = \tilde{\Gamma}_k^{(1)}[\varphi] = \Gamma_k^{(1)}[\varphi] + R_k.\varphi$ (voir la section 2.2.1). Celle-ci donne effectivement $\Gamma_{k=0}^{(1)}[\varphi] = \Gamma^{(1)}[\varphi] = 0$ en l'absence de source.

D'où le propagateur :

$$\mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q) = \frac{1}{q^2 + R_k(q) + U_k'(\rho_0) + 2\rho_0 U_k''(\rho_0)} \tag{2.43}$$

et l'équation de flot pour le potentiel renormalisé [TW94] :

$$\partial_t U_k(\rho_0) = \frac{1}{2}\int_q \frac{\partial_t R_k(q)}{q^2 + R_k(q) + U_k'(\rho_0) + 2\rho_0 U_k''(\rho_0)} \tag{2.44}$$

L'approximation du potentiel local transforme donc l'équation exacte de Wetterich en une équation aux dérivées partielles non linéaire. Ce problème est encore trop compliqué pour en obtenir des solutions analytiques, d'autant plus qu'une intégrale apparaît explicitement dans le membre de droite. L'intégration numérique de cette équation n'est en revanche pas difficile à réaliser, une fois le régulateur et la condition initiale choisis.

L'équation aux dérivées partielles précédente se simplifie considérablement lorsqu'on utilise la fonction de régularisation de Litim donnée dans l'Eq. (2.7) [Lit00]. Il est, dans cas cas, possible de calculer l'intégrale analytiquement : [xx]

$$\partial_t U_k(\rho_0) = \frac{4v_d}{d}\left(\frac{k^{d+2}}{k^2 + U_k'(\rho_0) + 2\rho_0 U_k''(\rho_0)}\right) \tag{2.45}$$

avec $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$.

Afin de procéder à l'intégration numérique de l'Eq. (2.45), donnons nous une condition initiale microscopique $U_{k=\Lambda}$. Si le modèle est initialement défini sur un réseau, il est possible d'obtenir une forme exacte de cette condition initiale dans le continu en effectuant une transformation de Hubbard-Stratonovitch. Cependant, puisque l'universalité implique que les détails microscopiques n'influencent pas les propriétés critiques, nous choisissons un potentiel simple, à la Ginzburg-Landau : [xxi]

$$U_\Lambda(\rho_0) = \frac{g}{2}(\rho_0 - \kappa)^2 \tag{2.46}$$

On s'assure de l'existence d'un minimum non nul en prenant $\kappa > 0$. Ce minimum doit se rapprocher de l'origine lorsqu'on augmente la température i.e. $\kappa = \kappa(T)$ est une fonction

xx. L'intérêt de ce régulateur est tout de même limité ; celui-ci introduit en effet des non-analyticités dans le flot lorsqu'on étudie les ordres plus élevés du développement en dérivées. Il sera alors préférable d'utiliser une fonction de régularisation plus douce.

xxi. La transformation de Hubbard-Stratonovitch donne $U_\Lambda \propto \log\cosh\varphi_0$; cette condition initiale est dans la même classe d'universalité que le potentiel de Ginzburg-Landau donné par l'Eq. (2.46) (le schéma de brisure de symétrie est le même). Les quantités universelles qui caractérisent le comportement critique de ces deux modèles sont par conséquent les mêmes. En revanche, si l'on souhaitait déterminer les propriétés non universelles, il serait nécessaire d'utiliser la condition initiale exacte issue de la transformation de Hubbard-Stratonovitch.

décroissante de T. Au voisinage de la température critique T_c, $\kappa(T)$ est analytique et, au premier ordre, nous pourrons supposer :

$$\kappa - \kappa_c \propto T_c - T \tag{2.47}$$

Le couplage $g > 0$ est quant à lui fixé, considéré comme indépendant de la température. L'allure typique du potentiel microscopique U_Λ en fonction du champ est représentée en Fig. 2.C.

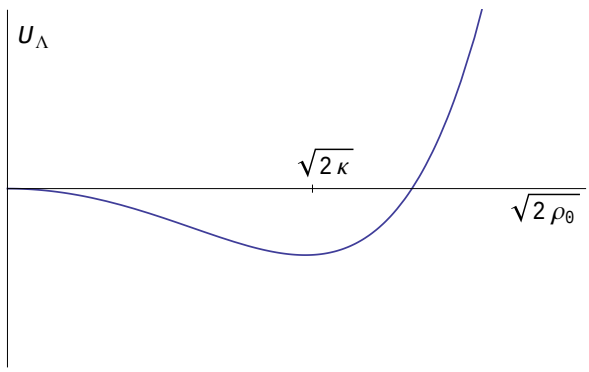

FIGURE 2.C – Potentiel microscopique U_Λ en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0} = |\varphi_0|$.

Dans l'approximation de champ moyen i.e. $U_{k=0} \simeq U_{k=\Lambda}$, [xxii] le point critique est donc $\kappa_c = 0$ et, pour $\kappa > 0$, le système se trouve dans sa phase de symétrie brisée avec une aimantation spontanée $|m| = \sqrt{2\kappa}$. En utilisant l'Eq. (2.47) et la définition de l'exposant critique β, nous obtenons la valeur $\beta = 1/2$. Puisque la dimension anormale du champ est nulle dans l'approximation considérée, on retrouve à l'aide des relations d'échelle [xxiii] tous les exposants de champ moyen : $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, $\delta = 3$ et, concernant le comportement critique de la fonction de corrélation $\eta = 0$ et $\nu = 1/2$. D'après le critère de Ginzburg, ces valeurs sont exactes en dimension supérieure ou égale à 4. En intégrant l'équation de flot, Eq. (2.45), nous pouvons calculer les corrections apportées par l'approxi-

xxii. L'approximation de champ moyen s'écrit de façon générale $\Gamma = \Gamma_{k=0} \simeq \mathcal{S}$.

xxiii. Nous rappelons que celles-ci s'expriment de la manière suivante pour $d \leqslant 4$:

$$\begin{aligned}
\alpha &= 2 - \nu d \\
\beta &= \frac{\nu}{2}(d - 2 + \eta) \\
\gamma &= \nu(2 - \eta) \\
\delta &= \frac{d + 2 - \eta}{d - 2 + \eta}
\end{aligned}$$

et ces relations sont modifiées par la substitution $d \mapsto 4$ en dimension supérieure à 4 (les exposants sont alors indépendants de la dimension et prennent leurs valeurs de champ moyen).

mation du potentiel local pour $d < 4$.[xxiv] Par exemple en étudiant la position du minimum du potentiel macroscopique $U_{k=0}$ en fonction de la condition initiale, nous en déduisons $m(\kappa)$, donc $m(T)$ et l'exposant β. Nous discutons par la suite des méthodes plus précises pour déterminer les exposants critiques en introduisant des quantités sans dimension.

Puisque le champ moyen consiste à négliger les fluctuations, il est entendu que la véritable aimantation macroscopique sera toujours plus faible que sa valeur de champ moyen. Autrement dit, le minimum du potentiel U_k décroît lorsqu'on diminue l'échelle k.

Selon la valeur du paramètre κ, deux comportements sont alors observés pour le flot du potentiel : lorsqu'on part d'un potentiel microscopique avec un minimum suffisamment proche de l'origine (i.e. à haute température), celui-ci va s'annuler en un temps fini du groupe de renormalisation. Le potentiel thermodynamique $U_{k=0}$ ne présente donc pas d'aimantation non nulle et le système se trouve dans sa phase désordonnée. Au contraire, si l'on choisit κ plus grand (i.e. à basse température), le minimum de U_k va également diminuer mais tend vers une valeur non nulle lorsque $k \to 0$. Il existe ainsi une aimantation macroscopique spontanée et le système est dans la phase ferromagnétique.

Nous montrons le flot du potentiel renormalisé dans les deux phases en Figs. 2.D et 2.E. Notons l'évolution de celui-ci dans la phase de symétrie brisée : au bout d'un certain temps, le minimum de U_k a atteint sa valeur asymptotique m et n'évolue plus ; la partie intérieure du potentiel ($|\varphi_0| < |m|$) s'aplatit alors, afin d'obtenir une fonction convexe à la limite $k = 0$ (voir Fig. 2.E). La convexité du potentiel thermodynamique, même dans la phase de symétrie brisée, est une propriété importante qui découle de l'Eq. (2.45).[xxv] Cette propriété n'est pas préservée dans la théorie de perturbation (il est alors nécessaire de prendre l'enveloppe convexe à la fin).

Il existe un point critique correspondant à la transition entre les deux situations précédentes : pour $\kappa = \kappa_c$, le minimum du potentiel tend vers 0 lorsque $k \to 0$ mais ne s'annule jamais pour $k \neq 0$. Au point critique, le minimum de U_k ne cesse donc d'évoluer et les fluctuations de toutes les échelles doivent être prises en compte pour que celui-ci s'annule. Il est possible d'obtenir κ_c en suivant le minimum à chaque intégration du flot, et en procédant par dichotomie sur la condition initiale κ. En effet, le modèle décrit une transition de phase du second ordre et il n'y a qu'un seul paramètre à ajuster pour se placer au point cri-

xxiv. La contrainte $\eta = 0$ de l'approximation du potentiel local ne permet évidemment pas d'obtenir des résultats quantitatifs à basse dimension, là où la dimension anormale du champ n'est pas négligeable. En particulier pour la dimension 2, la valeur exacte de η est connue grâce à la solution d'Onsager : $\eta = 1/4$. Il est alors nécessaire de prendre en compte la renormalisation du champ et d'utiliser les ordres suivants du développement en dérivées de l'action effective [Mor95, BTW02].

xxv. Le potentiel effectif $U_{k=0}$ est une fonction convexe du champ φ_0 puisqu'il est obtenu par une vraie transformée de Legendre de l'énergie libre $\mathcal{W}$, qui est elle même convexe.

tique. Notons que la valeur critique κ_c n'est pas universelle et dépend des autres paramètres microscopiques, de g en l'occurrence. Ainsi, en remplaçant l'Eq. (2.46) par une condition initiale exacte (i.e. obtenue par la transformation de Hubbard-Stratonovitch), nous pouvons déterminer le diagramme de phase du système et les quantités thermodynamiques non universelles (de façon néanmoins approchée, en raison de la troncation). [xxvi] En ce qui concerne les propriétés critiques universelles, nous détaillons les méthodes permettant d'obtenir ces dernières dans la suite du chapitre.

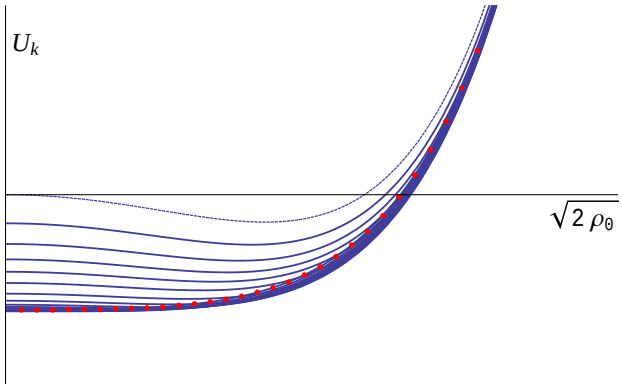

FIGURE 2.D – Flot du potentiel renormalisé dans la phase haute température. U_k est tracé en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0}$ pour différentes valeurs de k. La courbe bleue en pointillés correspond à la condition initiale alors que les points rouges représentent la forme asymptotique du potentiel obtenue après un temps long du groupe de renormalisation. Pour k suffisamment petit, le potentiel présente un unique minimum à l'origine.

xxvi. Précisons qu'il est également nécessaire de prendre en compte la géométrie du réseau pour déterminer les quantités non universelles.

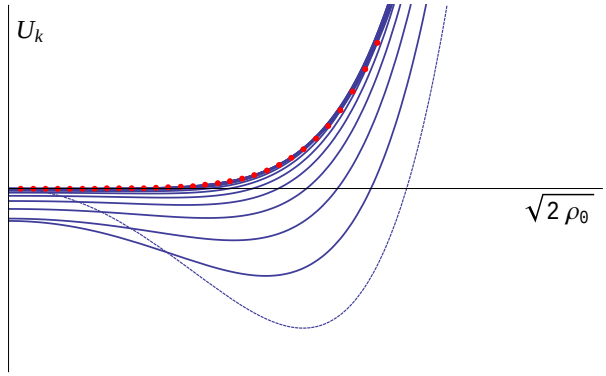

FIGURE 2.E – Flot du potentiel renormalisé dans la phase ordonnée. U_k est tracé en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0}$ pour différentes valeurs de k. La courbe bleue en pointillés correspond à la condition initiale alors que les points rouges représentent la forme asymptotique du potentiel obtenue après un temps long du groupe de renormalisation. Le maximum en 0 s'aplatit au fur et à mesure que k diminue de manière à obtenir un potentiel convexe à la limite $k = 0$ (et donc une fonction constante sur l'intervalle $[0, |m|]$).

Quantités dédimensionnées et point fixe du groupe de renormalisation

Nous expliquons comment déterminer un point fixe dans le flot du potentiel effectif courant. L'exposant critique ν associé à la longueur de corrélation est ensuite calculé en étudiant la stabilité de la solution de point fixe.

Afin d'obtenir un point fixe du groupe de renormalisation, qui traduira l'invariance d'échelle au point critique, il est nécessaire de s'affranchir de la partie du flot obtenue par analyse dimensionnelle. Au point critique $\kappa = \kappa_c$, l'approximation du potentiel local montre en effet qu'après un régime transitoire, le potentiel $U_k(0)$ se comporte en k^d et son minimum m_k en $k^{\frac{d-2}{2}}$. Ces lois de puissance de l'échelle k correspondent simplement aux dimensions canoniques des quantités considérées. Rappelons qu'on obtient ces dernières en supposant que l'action effective courante (dont la forme est donnée par l'Eq. (2.38)) soit sans dimension :

$$[\Gamma_k] = k^0 \quad \text{et} \quad [x] = k^{-1} \qquad \Rightarrow \qquad [\varphi] = k^{\frac{d-2}{2}} \quad \text{et} \quad [U_k] = k^d \tag{2.48}$$

Nous introduisons donc des quantités dédimensionnées par rapport à l'échelle k. Cela revient à mesurer toutes les longueurs dans l'unité naturelle k^{-1} au cours de la renormalisation

(celle-ci correspond à la maille du réseau effectif) :

$$\tilde{x} = kx \tag{2.49a}$$

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = k^{\frac{2-d}{2}}\varphi(x) \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\rho}(\tilde{x}) = k^{2-d}\rho(x) \tag{2.49b}$$

$$\tilde{u}_k(\tilde{\rho}(\tilde{x})) = k^{-d}U_k(\rho(x))) \tag{2.49c}$$

Au point critique, le potentiel sans dimension $\tilde{u}_k$ n'évolue plus pour une échelle k suffisamment petite ; il atteint alors un point fixe $\tilde{u}_*$:

$$\partial_t \tilde{u}_*(\tilde{\rho}_0)_{|\tilde{\rho}_0} = 0 \tag{2.50}$$

où $\tilde{\rho}_0$ désigne un champ dédimensionné uniforme quelconque et $\partial_{t\,|\tilde{\rho}_0}$ une dérivée par rapport au temps du groupe de renormalisation à $\tilde{\rho}_0$ fixé (et non à ρ_0 fixé, comme dans les équations de flot précédentes). L'invariance de $\tilde{u}_*$ lorsque k diminue exprime le fait qu'aucune échelle de longueur n'existe au point critique. Nous nous attachons par la suite à déterminer ce point fixe, et à en déduire les propriétés critiques universelles du système. [xxvii]

Dans le but de déterminer la solution de point fixe, Eq. (2.50), on calcule le flot du potentiel renormalisé sans dimension. Pour un régulateur quelconque, l'équation d'évolution de $\tilde{u}_k$ se déduit de l'Eq. (2.44) et de la relation suivante :

$$\begin{aligned} \partial_{t\,|\rho_0} &= \partial_{t\,|\tilde{\rho}_0} + \partial_t\tilde{\rho}_{0\,|\rho_0}\,\partial_{\tilde{\rho}_0} \\ &= \partial_{t\,|\tilde{\rho}_0} + (2-d)\,\tilde{\rho}_0\,\partial_{\tilde{\rho}_0} \end{aligned} \tag{2.51}$$

Celle-ci exprime le passage d'une dérivée par rapport au temps à ρ_0 fixé, à une dérivée à $\tilde{\rho}_0$ fixé. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_t\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0)_{|\tilde{\rho}_0} &= \partial_t\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0)_{|\rho_0} + (d-2)\,\tilde{\rho}_0\,\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) \\ &= -d\,\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0) + (d-2)\,\tilde{\rho}_0\,\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) + k^{-d}\,\partial_t U_k(\rho_0)_{|\rho_0} \\ &= -d\,\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0) + (d-2)\,\tilde{\rho}_0\,\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) + 2v_d\,l_0^d\big(\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}_k''(\tilde{\rho}_0)\big) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Les deux premiers termes de la dernière expression représentent la partie triviale du flot, simplement due au dédimensionnement (Eq. (2.49)). La fonction $l_0^d(w)$ qui intervient dans le terme non trivial est dite fonction seuil et définie telle que :

$$l_0^d(w) = \frac{k^{-d}}{4v_d}\int_q \frac{\partial_t R_k(q)}{q^2 + R_k(q) + k^2\,w} \tag{2.53}$$

Comme précédemment, l'intégrale en impulsion ci-dessus se calcule analytiquement lorsqu'on utilise le régulateur de l'Eq. (2.7). L'équation de flot pour le potentiel sans dimension s'écrit alors :

$$\partial_t\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0)_{|\tilde{\rho}_0} = -d\tilde{u}_k(\tilde{\rho}_0) + (d-2)\tilde{\rho}_0\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) + \frac{4v_d}{d}\left(\frac{1}{1+\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}_0) + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}_k''(\tilde{\rho}_0)}\right) \tag{2.54}$$

xxvii. La connaissance seule du point fixe ne permet d'accéder qu'aux quantités universelles.

Il sera plus pratique dans la suite de considérer directement la dérivée du potentiel dédimensionné. Nous dérivons l'équation précédente par rapport à $\tilde{\rho}_0$:

$$\partial_t \tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_0)_{|\tilde{\rho}_0} = -2\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_0) + (d-2)\tilde{\rho}_0 \tilde{u}''_k(\tilde{\rho}_0) - \frac{4v_d}{d}\left(\frac{3\tilde{u}''_k(\tilde{\rho}_0) + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}'''_k(\tilde{\rho}_0)}{\left(1+\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_0) + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k(\tilde{\rho}_0)\right)^2}\right) \tag{2.55}$$

Enfin, nous intégrons numériquement cette équation aux dérivées partielles avec la même condition initiale que précédemment, i.e. $\tilde{u}'_\Lambda(\tilde{\rho}_0) = \tilde{g}(\tilde{\rho}_0 - \tilde{\kappa})$.

On note κ_k et $\tilde{\kappa}_k$ les minima respectifs de U_k et $\tilde{u}_k$. Puisque dans la phase désordonnée, κ_k s'annule en un temps fini du groupe de renormalisation, il en est de même pour $\tilde{\kappa}_k$. Le comportement est différent dans la phase ferromagnétique où κ_k tend vers une valeur finie non nulle lorsque $k \to 0$. Compte tenu des définitions de l'Eq. (2.49), $\tilde{\kappa}_k$ diverge donc pour $k \to 0$ dans ce cas (en dimension $d > 2$). Au point critique séparant les deux situations précédentes, le minimum vérifie $\kappa_k \to 0$ et $\tilde{\kappa}_k \to \tilde{\kappa}_* \neq 0$ lorsque k tend vers 0.

Nous présentons sur la Fig. 2.F le flot du minimum $\tilde{\kappa}_k$ obtenu à partir de l'intégration numérique de l'Eq. (2.55), pour plusieurs conditions initiales $\tilde{\kappa}$. D'après la discussion précédente, la procédure de dichotomie sur le couplage $\tilde{\kappa}$ apparaît encore plus simplement dans les variables dédimensionnées. Si $\tilde{\kappa}_k$ diverge, le système se trouve dans la phase ferromagnétique et il est nécessaire de choisir une condition initiale $\tilde{\kappa}$ plus faible pour approcher le point critique. Au contraire, si $\tilde{\kappa}_k$ tend vers 0, le système est désordonné et il faut augmenter $\tilde{\kappa}$. Plus $\tilde{\kappa}$ est proche de $\tilde{\kappa}_c$, plus le potentiel s'approche de la solution de point fixe et y reste longtemps, avant de s'en écarter vers l'une des deux phases. En itérant numériquement les étapes de dichotomies, nous obtenons ainsi la valeur critique $\tilde{\kappa}_c$ et la fonction de point fixe $\tilde{u}'_*$.

L'exposant critique ν est déterminé par l'étude de la stabilité de la solution $\tilde{u}'_*$. Nous considérons alors une perturbation infinitésimale autour du point fixe telle que $\tilde{u}'_k = \tilde{u}'_* + \delta\tilde{u}'_k$. L'équation d'évolution pour la perturbation $\delta\tilde{u}'_k$ s'obtient au premier ordre en linéarisant le flot dans l'Eq. (2.55). Cela peut s'écrire formellement :

$$\partial_t \delta\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_0) = \int d\tilde{\rho}_1 \, L(\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1) \, \delta\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_1) \tag{2.56}$$

avec :

$$L(\tilde{\rho}_0, \tilde{\rho}_1) = \frac{\delta\partial_t \tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_0)}{\delta\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}_1)}\Big|_{\tilde{u}'_k = \tilde{u}'_*} \tag{2.57}$$

On peut résoudre l'Eq. (2.56) en cherchant numériquement les valeurs propres de l'opérateur L. Le point fixe physique possède une seule direction essentielle, ce qui se traduit par une unique valeur propre négative λ (avec notre convention $t = \log(k/\Lambda)$). L'exposant ν est finalement donné par $\nu = -\lambda^{-1}$. En particulier pour la dimension $d = 3$, on trouve de

cette manière $\nu = 0.6506$ [BTW02, Lit02, CDMV03b] ;[xxviii] on peut comparer cette valeur à celle obtenue par les simulations Monte Carlo $\nu = 0.6297(5)$ [Has01].

Comme nous l'avons déjà souligné, l'approximation du potentiel local impose cependant $\eta = 0$; on remédie à ce problème dans la section suivante en considérant l'ordre suivant du développement en dérivées du champ de l'action effective courante.

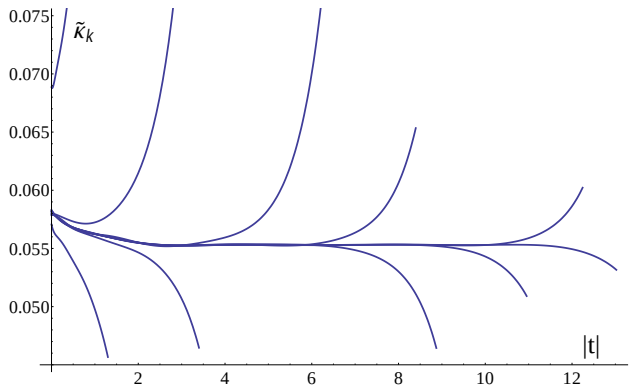

FIGURE 2.F – Procédure de dichotomie sur le couplage essentiel $\tilde{\kappa}$ associé à la transition (voir texte). Le flot de $\tilde{\kappa}_k$ est représenté pour différentes conditions initiales $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_\Lambda$. Lorsque le potentiel est très proche de sa valeur de point fixe $\tilde{u}_*$, le minimum $\tilde{\kappa}_k$ et plus généralement tous les couplages dédimensionnés deviennent indépendants de l'échelle k.

2.3.2 Développement en dérivées du champ $O(\partial^2)$

Nous considérons désormais le développement en dérivées du champ $O(\partial^2)$ de l'action effective courante, où l'on inclut la renormalisation du champ. Contrairement à l'approximation du potentiel local, cette troncation permet d'évaluer la dimension anormale du champ. Nous suivons les mêmes méthodes que précédemment pour dériver les fonctions beta associées aux quantités sans dimension et déterminer le point fixe. On calcule finalement les exposants critiques η et ν dans cette approximation pour les dimensions physiques 2 et 3.

Insistons sur l'importance de l'étude qui suit ; en plus de servir d'exemple et de montrer comment les propriétés critiques universelles sont obtenues dans une troncation relativement précise, les équations dérivées lors de cette discussion ainsi que les différents résultats seront ré-utilisés dans les chapitres suivants.

xxviii. Nous calculons une valeur plus précise de l'exposant ν du modèle d'Ising en dimension 3 dans la section suivante.

On rappelle tout d'abord l'expression de l'action effective courante pour la troncation considérée (voir section 2.2.3) :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_k(\rho(x)) \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) + U_k(\rho(x)) \tag{2.58}$$

Dérivation des équations de flot

On souhaite établir les équations de flot pour la dérivée du potentiel $U'_k(\rho_0)$ et la fonction de renormalisation du champ $Z_k(\rho_0)$ dans l'approximation Eq. (2.58). Comme pour la section précédente, $\rho_0 = \varphi_0^2/2$ désigne un champ uniforme quelconque. Nous commençons par écrire une définition générale des fonctions $U'_k(\rho_0)$ et $Z_k(\rho_0)$ à partir des dérivées fonctionnelles de l'action effective courante :

$$U'_k(\rho_0) = \varphi_0^{-1} \Gamma_k^{(1)}[\varphi_0](p=0) \tag{2.59}$$

$$Z_k(\rho_0) = \frac{d}{dp^2} \Gamma_k^{(2)}[\varphi_0](p,-p)\Big|_{p=0} \tag{2.60}$$

Les flots s'obtiennent ensuite en appliquant l'opérateur ∂_t à ces définitions.

$$\partial_t U'_k(\rho_0) = \varphi_0^{-1} \partial_t \Gamma_k^{(1)}[\varphi_0](p=0) \tag{2.61}$$

$$\partial_t Z_k(\rho_0) = \frac{d}{dp^2} \partial_t \Gamma_k^{(2)}[\varphi_0](p,-p)\Big|_{p=0} \tag{2.62}$$

Les équations d'évolution des fonctions de vertex à 1 et 2 points ont été établies dans l'Eq. (2.30). En utilisant leurs transformées de Fourier, on ré-exprime les Eqs. (2.61) et (2.62) comme :

$$\partial_t U'_k(\rho_0) = \frac{1}{2\varphi_0} \tilde{\partial}_t \int_q \Gamma_k^{(3)}[\varphi_0](q,-q,0)\, \mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q) \tag{2.63}$$

et :

$$\begin{aligned} \partial_t Z_k(\rho_0) = \frac{1}{2}\, \tilde{\partial}_t\, \frac{d}{dp^2} \Bigg(& \int_q \Gamma_k^{(4)}[\varphi_0](p,-p,q,-q)\, \mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q) \\ & - \int_q \Gamma_k^{(3)}[\varphi_0](p,q,-p-q)\, \mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q) \Gamma_k^{(3)}[\varphi_0](-p,-q,p+q)\, \mathcal{P}_k[\varphi_0](p+q,-p-q) \Bigg)\Bigg|_{p=0} \end{aligned} \tag{2.64}$$

Les deux équations ci-dessus sont exactes mais non fermées. L'approximation consiste alors à introduire dans les membres de droite de celles-ci les expressions des fonctions de vertex et du propagateur issues de l'Eq. (2.58) ; le système d'équations ainsi obtenu sera fermé.

On calcule, dans ce but, les dérivées fonctionnelles de l'action effective courante, Eq. (2.58), évaluées dans un champ uniforme. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :

$$\Gamma_k^{(n)}[\varphi_0](q_1, \cdots, q_n) = \partial_{\varphi_0}^n U_k(\rho_0) + \frac{1}{2}\partial_{\varphi_0}^{n-2} Z_k(\rho_0) \sum_{i=1}^n q_i^2 \tag{2.65}$$

Et le propagateur s'écrit donc :

$$\mathcal{P}_k[\varphi_0](q, -q) = \left(\Gamma_k^{(2)}[\varphi_0] + R_k\right)^{-1}(q, -q) = \frac{1}{Z_k(\rho_0)q^2 + R_k(q) + U_k'(\rho_0) + 2\rho_0 U_k''(\rho_0)} \tag{2.66}$$

Pour des raisons dimensionnelles, le régulateur R_k contient également un préfacteur associé à la renormalisation du champ. Par exemple, l'expression Eq. (2.6) pour la fonction de régularisation analytique de Wetterich est remplacée par la suivante :

$$R_k(q) = \frac{Z_{0k}\, q^2}{e^{q^2/k^2} - 1} \tag{2.67}$$

où Z_{0k} correspond à la fonction Z_k évaluée en un point particulier du champ : $Z_{0k} = Z_k(\rho_\star)$.[xxix] Nous utilisons plus précisément ici une forme développée pour $|q| \to 0$ du régulateur ci-dessus :

$$R_k(q) = \alpha\, Z_{0k} k^2 e^{-\frac{q^2}{k^2}} \left(1 + \frac{q^2}{2k^2} + \frac{q^4}{12k^4}\right) \tag{2.68}$$

et α est un paramètre d'optimisation (voir la partie 2.2.4).

Le flot du potentiel renormalisé dans l'approximation du développement en dérivées du champ $O(\partial_\mu^2)$ s'exprime finalement par :

$$\partial_t U_k'(\rho_0) = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_q \left(3U_k''(\rho_0) + 2\rho_0 U_k'''(\rho_0) + Z_k'(\rho_0)q^2\right) \mathcal{P}_k[\varphi_0](q, -q) \tag{2.69}$$

où le propagateur $\mathcal{P}_k$ vérifie l'Eq. (2.66). Lorsque $Z_k(\rho_0) = 1$, on retrouve bien la dérivée par rapport au champ ρ_0 de l'Eq. (2.44) établie dans l'approximation du potentiel local. Concernant la renormalisation du champ, il faut encore développer l'expression entre parenthèses intervenant dans l'Eq. (2.64) selon les puissances de l'impulsion p. Après avoir extrait

xxix. Les choix pertinents pour $\rho_\star$ sont $\rho_\star = 0$ ou bien $\rho_\star = \kappa_k$.

les termes en p^2 de ce développement, on aboutit à l'équation d'évolution suivante : [xxx]

(2.70)
$$\partial_t Z_k(\rho_0) = \frac{1}{d}\,\tilde{\partial}_t \int_q \Big(2\rho_0 \Big(3U_k''(\rho_0) + 2\rho_0 U_k'''(\rho_0) + Z_k'(\rho_0) q^2 \Big)^2 q^2 \big(\partial_{q^2}\mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q)\big)^2 + \frac{d}{2}\big(Z_k'(\rho_0) + 2\rho_0 Z_k''(\rho_0)\big)\mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q) - (2d+1)\rho_0 Z_k'(\rho_0)^2\, q^2\, \mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q)^2 - 2d\rho_0 Z_k'(\rho_0)\big(3U_k''(\rho_0) + 2\rho_0 U_k'''(\rho_0)\big)\mathcal{P}_k[\varphi_0](q,-q)^2 \Big)$$

On dédimensionne par la suite le potentiel et la renormalisation du champ afin de déterminer un point fixe dans les équations de flot précédentes.

Quantités sans dimension

Comme nous l'avons souligné dans l'étude de l'approximation du potentiel local, il est pratique de travailler avec des quantités renormalisées et dédimensionnées par rapport à l'échelle k. Celles-ci permettent notamment d'obtenir un point fixe dans les équations du groupe de renormalisation ; ce dernier donnant accès aux propriétés critiques universelles du système. En comparant avec les variables sans dimension introduites dans la section 2.3.1, on doit ici procéder à un dédimensionnement supplémentaire sur le champ du à la présence de la fonction Z_k. Les définitions de l'Eq. (2.49) sont alors modifiées en :

(2.71a) $$\tilde{x} = kx$$

(2.71b) $$\tilde{\varphi} = Z_{0k}^{\frac{1}{2}}\, k^{\frac{2-d}{2}}\varphi \quad \text{i.e.} \quad \tilde{\rho} = Z_{0k}\, k^{2-d}\rho$$

(2.71c) $$\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}) = Z_{0k}^{-1}\, k^{-2} U_k'(\rho)$$

$Z_{0k} = Z_k(\rho_\star)$ a été introduit dans l'Eq. (2.67) ($\rho_\star$ est une configuration homogène particulière du champ). A la température critique et lorsque k est petit, le paramètre Z_{0k} se comporte selon une loi de puissance universelle de l'échelle k :

(2.72) $$Z_{0k} \underset{k\to 0}{\sim} k^{-\eta}$$

xxx. Cette dernière s'obtient en effectuant plusieurs intégrations par parties, ainsi qu'en utilisant les relations ci-dessous :

$$\int_q f(q^2)\, q_\mu q_\nu = (\delta_{\mu\nu}/d) \int_q f(q^2)\, q^2,$$

$$\int_q f(q^2)\, p.q = 0,$$

$$\int_q f(q^2)\, (p.q)^2 = (p^2/d) \int_q f(q^2)\, q^2$$

où η est la dimension anormale du champ (voir Eq. (2.26)). On dédimensionne également la fonction de renormalisation du champ par :

$$\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) = Z_{0k}^{-1} Z_k(\rho) \tag{2.73}$$

Choisir $\rho_\star$ revient donc à fixer $\tilde{z}_k(\tilde{\rho}_\star) = 1$ au cours du flot ; on prendra par commodité $\rho_\star = 0$ dans la suite. Une dimension anormale courante est aussi introduite :

$$\eta_k = -\partial_t \log Z_{0k} \tag{2.74}$$

Cette dernière s'identifie à l'exposant critique η au point fixe des équations du groupe de renormalisation, c'est à dire lorsque $\partial_t \tilde{u}'_k = \partial_t \tilde{z}_k = 0$.

Compte tenu du nouveau dédimensionnement du champ ci-dessus, la relation Eq. (2.51) entre $\partial_{t\,|\rho_0}$ et $\partial_{t\,|\tilde{\rho}_0}$ s'écrit maintenant :

$$\begin{aligned} \partial_{t\,|\rho_0} &= \partial_{t\,|\tilde{\rho}_0} + \partial_t \tilde{\rho}_{0\,|\rho_0}\, \partial_{\tilde{\rho}_0} \\ &= \partial_{t\,|\tilde{\rho}_0} + (2 - d - \eta_k)\, \tilde{\rho}_0\, \partial_{\tilde{\rho}_0} \end{aligned} \tag{2.75}$$

En appliquant cette identité sur les définitions précédentes de $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k$, puis en utilisant les équations de flot dimensionnées, Eqs. (2.69) et (2.70), on obtient finalement les fonctions beta suivantes :

$$\begin{aligned} &\partial_t \tilde{u}'_k = (\eta_k - 2)\tilde{u}'_k + (d - 2 + \eta_k)\tilde{\rho}_0\, \tilde{u}''_k - 2v_d \Big(\\ &\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}_0 \tilde{u}'''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) + \tilde{z}'_k\, l_1^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big)\Big) \end{aligned} \tag{2.76}$$

(2.77)

$$\begin{aligned} &\partial_t \tilde{z}_k = \eta_k \tilde{z}_k + (d - 2 + \eta_k)\tilde{\rho}_0 \tilde{z}'_k - \frac{4v_d}{d}\Big(\\ &2\tilde{\rho}_0\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}'''_k\big)^2\, m_4^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) + 4\tilde{\rho}_0\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, m_4^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) \\ &+ 2\tilde{\rho}_0 \tilde{z}'^2_k\, m_4^{d+4}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) + \frac{d}{2}\big(\tilde{z}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{z}''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) \\ &- 2d\tilde{\rho}_0\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, l_2^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big) - (1 + 2d)\tilde{\rho}_0 \tilde{z}'^2_k\, l_2^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}_0\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k\big)\Big) \end{aligned}$$

On rappelle que $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$. Les fonctions $l_n^d(w, \eta, z)$ et $m_n^d(w, \eta, z)$ intervenant dans les parties non triviales des flots ci-dessus sont appelées fonctions seuil. Elles sont construites à partir du régulateur infrarouge ; leurs définitions sont données dans l'annexe B. Notons qu'elles décroissent rapidement avec leur premier argument w. Puisque celui-ci s'identifie toujours au carré de la masse renormalisée $w = \tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k$, cette décroissance assure le découplage des modes massifs qui ne contribuent donc pas au flot. Les fonctions

seuil ne sont pas polynomiales et les constantes de couplage apparaissent au dénominateur dans celles-ci ; les équations de flot sont non perturbatives pour cette raison.

Enfin, la condition $\tilde{z}_k(\rho_\star) = 1$ entraîne $\partial_t \tilde{z}_k(\rho_\star) = 0$ et permet d'exprimer η_k en fonction des autres constantes de couplage dans l'Eq. (2.77). Le choix $\rho_\star = 0$ simplifie considérablement cette expression :

$$\eta_k = 2v_d \tilde{z}'_k(0)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k(0), \eta_k, 1\big) \tag{2.78}$$

Cette équation est résolue en η_k puisque les fonctions seuil ont une dépendance affine en η_k (voir annexe B).

Intégration numérique du flot

En discrétisant le temps du groupe de renormalisation et le champ $\tilde{\rho}_0$, nous réalisons l'intégration numérique des équations aux dérivées partielles couplées, Eqs. (2.76) et (2.77). La dimension anormale courante η_k est calculée à chaque étape en temps à l'aide de l'Eq. (2.78). Nous initialisons le flot avec la même condition initiale que dans l'approximation du potentiel local, c'est à dire $\tilde{u}'_\Lambda(\tilde{\rho}_0) = \tilde{g}(\tilde{\rho}_0 - \tilde{\kappa})$ et $\tilde{z}_\Lambda = 1$. Pour $\tilde{g} > 0$ fixé, on procède par dichotomie sur le couplage essentiel $\tilde{\kappa}$ pour déterminer le point critique $\tilde{\kappa}_c < 0$ ainsi que les fonctions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$. Finalement, on déduit du point fixe la dimension anormale du champ $\eta = \eta_*$ et l'exposant ν associé à la longueur de corrélation (ce dernier s'obtient en diagonalisant la matrice de stabilité du point fixe, comme expliqué précédemment).

Nous illustrons nos résultats numériques pour les dimensions 2 et 3 sur les figures qui suivent. Les solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ y sont notamment tracées (Figs. 2.G et 2.I). Nous montrons également comment les exposants critiques évoluent lorsqu'on fait varier le paramètre α du régulateur (voir Eq. (2.68)) entre 1 et 6. Comme attendu, les courbes $\nu(\alpha)$ et $\eta(\alpha)$ présentent un unique extremum et, d'après le principe de sensibilité minimale, celui-ci correspond à la valeur optimale de l'exposant considéré (voir Figs. 2.H et 2.J).

Nous trouvons alors $\nu = 0.6281$ et $\eta = 0.0443$ en dimension 3 ; ces valeurs coïncident avec celles de Canet et al. calculées en combinant à l'approximation $O(\partial_\mu^2)$ un développement en champs à l'ordre φ^{10} [CDMV03b]. Canet et al. ont également poussé le développement en dérivées du champ de l'action effective courante à l'ordre ∂_μ^4 pour le modèle d'Ising en dimension 3 [CDMV03a] ; ils obtiennent les exposants suivants : $\nu = 0.632$ et $\eta = 0.033$. Notons que ces résultats sont en très bon accord avec le calcul perturbatif à sept boucles [GZJ98] : $\nu = 0.6301(13)$ et $\eta = 0.0335(25)$, ainsi qu'avec les simulations Monte Carlo [Has01] : $\nu = 0.6297(5)$ et $\eta = 0.0362(8)$.

En ce qui concerne la dimension $d = 2$, on obtient $\nu = 0.9461$ et $\eta = 0.2893$; ces valeurs peuvent être comparées à la solution exacte de Onsager : $\nu = 1$ et $\eta = 1/4$.

Notons que les variations des exposants avec le paramètre α sont beaucoup plus grandes en dimension 2 qu'en dimension 3 ; cela conduit donc à une erreur plus grande sur la valeur des exposants. [xxxi]

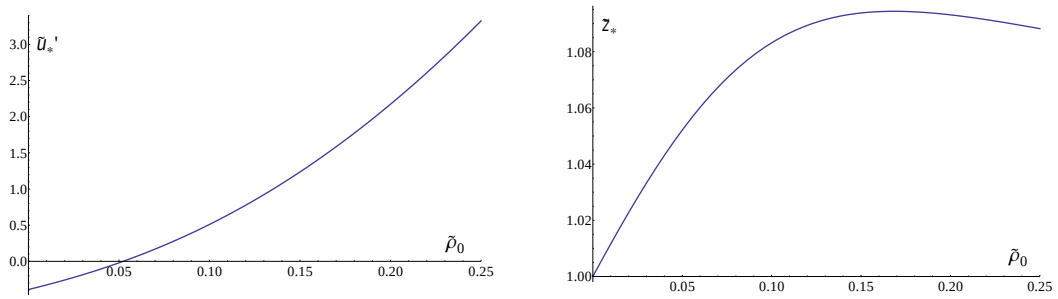

FIGURE 2.G – Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}_0$ pour la dimension $d = 3$. Nous avons utilisé le régulateur donné par l'Eq. (2.68) avec $\alpha = 2$.

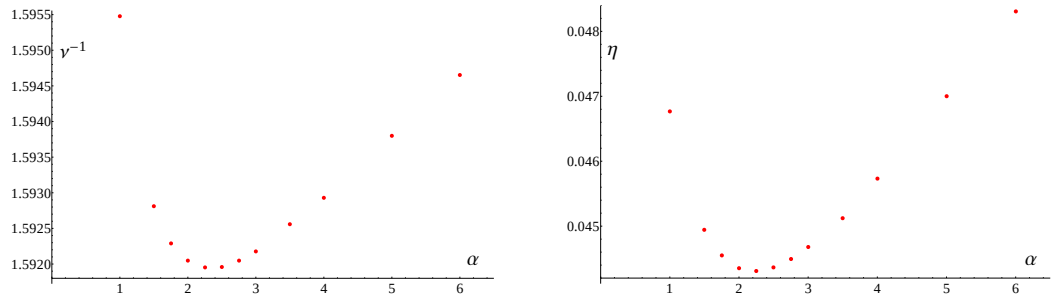

FIGURE 2.H – Illustration du principe de sensibilité minimale sur les exposants η et ν en dimension 3. Les exposants sont tracés en fonction du paramètre α du régulateur Eq. (2.68) ; nous obtenons les valeurs optimales $\nu^{-1}(\alpha_{PMS})$ et $\eta(\alpha_{PMS})$ au minimum de chacune des courbes (voir texte).

xxxi. Dans les chapitres suivants, nous estimerons l'erreur sur les exposants due à la dépendance avec le régulateur en faisant varier le paramètre α entre α_{PMS} et $2\,\alpha_{PMS}$.

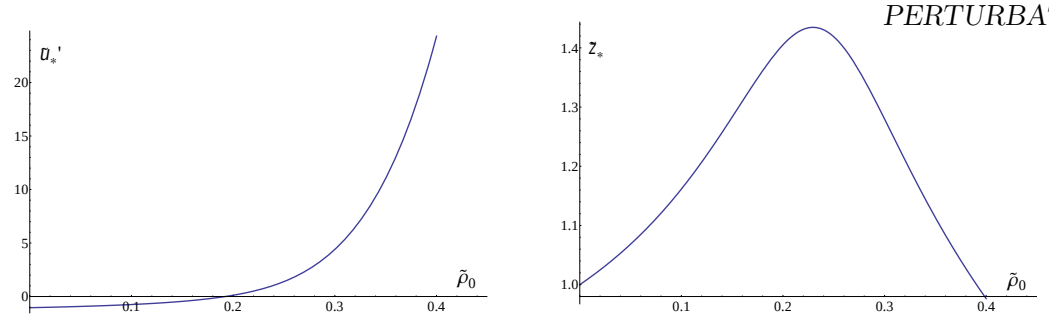

FIGURE 2.I – Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}_0$ pour la dimension $d = 2$. Nous avons utilisé le régulateur donné par l'Eq. (2.68) avec $\alpha = 2$.

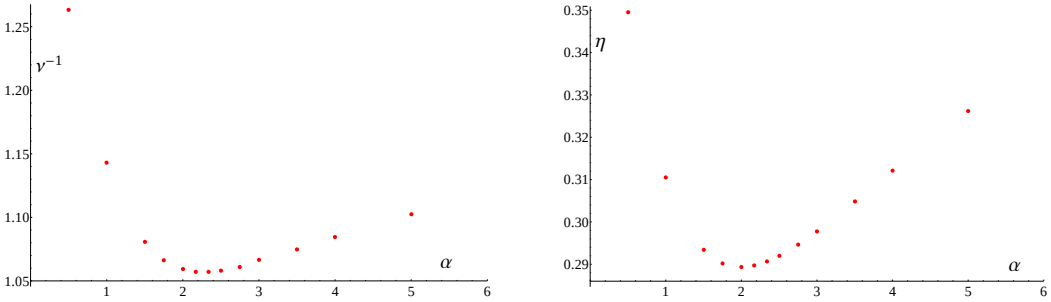

FIGURE 2.J – Illustration du principe de sensibilité minimale sur les exposants η et ν pour la dimension $d = 2$. Les exposants sont tracés en fonction du paramètre α du régulateur Eq. (2.68) ; nous obtenons les valeurs optimales $\nu^{-1}(\alpha_{PMS})$ et $\eta(\alpha_{PMS})$ au minimum de chacune des courbes (voir texte).

2.4 Conclusion

A travers l'étude de la théorie scalaire, nous avons souligné la puissance de l'approche du groupe de renormalisation par l'action effective courante. Les propriétés qualitatives et quantitatives du flot ont été déterminées et discutées à l'aide de troncations relativement simples ; nous avons notamment calculé les exposants critiques du modèle dans les régions non perturbatives $d = 2$ et $d = 3$. Nous tirons finalement quelques conclusions générales sur la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif.

Concernant le modèle vectoriel $O(N)$, les propriétés à une boucle de tous les développements perturbatifs (développements aux voisinages des dimensions critiques inférieure et supérieure, ainsi qu'à grand nombre de composantes du paramètre d'ordre) sont contenues dans des troncations très simples comme celle de l'Eq. (2.36) [Tis01, BTW02, Ess12]. Cette

propriété remarquable est unique et n'est partagée, à notre connaissance, par aucune autre approche. En plus de fournir cette connexion directe avec les différents résultats perturbatifs, le groupe de renormalisation à la Wetterich permet d'accéder aux propriétés critiques du système pour n'importe quelle dimension et n'importe quel nombre de composantes du paramètre d'ordre. De cette manière, il est possible de suivre le point fixe dans tout le plan (N, d). Plus particulièrement pour le modèle d'Ising tridimensionnel, le développement en dérivées du champ de l'action effective a été poussé jusqu'à l'ordre quatre et la précision des résultats obtenus pour les exposants critiques rivalise avec les meilleures estimations (simulations Monte Carlo, séries hautes températures, développements en ϵ, etc.) [CDMV03a]. Notons que le modèle XY en dimension 2 et la transition de Kosterlitz-Thouless [KT73, Kos74] sont également bien décrits par le groupe de renormalisation non perturbatif ; la méthode tient compte d'elle même des excitations topologiques non triviales telles que les configurations de vortex [GW95, GW01]. Un autre atout de cette approche du groupe de renormalisation est la possibilité de déterminer à la fois les quantités universelles et non universelles ; par exemple, la température critique de différents modèles a été calculée dans l'approximation du potentiel local et les résultats sont en très bon accord avec les simulations Monte Carlo [MD10].

Le groupe de renormalisation non pertubatif a été appliqué avec succès dans un très grand nombre de domaines, allant de la gravité quantique [Gra98, Reu98] à la physique statistique hors équilibre [CDDW04, CCDW10, CCDW11], en passant par les systèmes frustrés et désordonnés [DMT04, TT04a, TT06a, TT11a], la physique des membranes [KM09, EKM11] ou encore celle des atomes froids [DS07, Wet08]. Cette approche est désormais reconnue comme un moyen efficace pour surpasser les méthodes standard perturbatives et décrire correctement la physique là où ces dernières échouent.

Annexes

Annexe A

Notations et conventions

La dimension de l'espace physique sera toujours notée d et on considère un champ scalaire réel ϕ sur $\mathbb{R}^d$. $x = (x_\mu)$ désigne un vecteur dans l'espace (x_μ est la μ-ième composante de x, avec $\mu = 1, \cdots, d$) et $\phi(x)$ est la valeur du champ au point x. On définit la transformée de Fourier du champ par :

$$\phi(q) = \int d^d x \, \phi(x) \, e^{-iq_\mu x_\mu} \tag{A.1}$$

où $q = (q_\mu)$ dénote un vecteur dans l'espace réciproque et la somme sur l'indice répété μ est sous-entendue. On écrira d'une manière plus concise les intégrales sur l'espace direct et sur l'espace réciproque en utilisant les notations suivantes :

$$\int_x = \int d^d x \tag{A.2}$$

et :

$$\int_q = \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \tag{A.3}$$

La transformée de Fourier inverse du champ s'exprime donc comme :

$$\phi(x) = \int_q \phi(q) \, e^{iq_\mu x_\mu} \tag{A.4}$$

Plus généralement, la transformée de Fourier d'une fonction de plusieurs variables $f(x_1, \cdots, x_n)$ est définie par :

$$\tilde{f}(q_1, \cdots, q_n) = \int_{x_1, \cdots, x_n} f(x_1, \cdots, x_n) \, e^{-iq_{1\mu} x_{1\mu} - \cdots - iq_{n\mu} x_{n\mu}} \tag{A.5}$$

Lorsque $f(x_1, \cdots, x_n)$ est invariant par translation dans l'espace, on extrait le facteur de conservation de l'impulsion totale dans $\tilde{f}$ en considérant la quantité $f(q_1, \cdots, q_n)$ telle que :

$$\tilde{f}(q_1, \cdots, q_n) = (2\pi)^d \, \delta(q_1 + \cdots + q_n) \, f(q_1, \cdots, q_n) \tag{A.6}$$

On utilisera également les notations matricielles suivantes :

$$\phi.\chi = \int_x \phi(x)\chi(x) = \int_q \phi(q)\chi(-q) \tag{A.7}$$

et :

$$\phi.A.\chi = \int_{x,x'} \phi(x)A(x,x')\chi(x') = \int_{q,q'} \phi(q)\tilde{A}(-q,-q')\chi(q') \tag{A.8}$$

ϕ et χ sont des champs scalaires réels alors que A désigne un opérateur d'éléments de matrice $A(x,y)$. Lorsque $A(x,y)$ est invariant par translation dans l'espace (i.e. il ne dépend que de $x-y$), l'intégrale de l'Eq. (A.8) se ré-écrit donc :

$$\phi.A.\chi = \int_q \phi(q)A(q,-q)\chi(-q) \tag{A.9}$$

Finalement, les arguments des fonctionnelles seront écrits entre crochets ; par exemple, $F[\phi]$ est une fonctionnelle du champ ϕ. On notera alors les dérivées fonctionnelles de la manière suivante :

$$F^{(n)}[\phi](x_1, \cdots, x_n) = \frac{\delta^n F[\phi]}{\delta\phi(x_1)\cdots\delta\phi(x_n)} \tag{A.10}$$

Annexe B

Fonctions seuil

On introduit une impulsion et un régulateur sans dimension tels que :

$$y = q^2/k^2 \tag{B.1}$$

et :

$$s(y) = Z_{0k}^{-1} k^{-2} R_k(q) \tag{B.2}$$

Pour n et d entiers strictement positifs, les fonctions seuil $l_n^d(w,\eta,z)$ et $m_n^d(w,\eta,z)$ sont définies par :

$$l_n^d(w,\eta,z) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2-1} \frac{1}{(yz + s(y) + w)^n} \tag{B.3}$$

et :

$$m_n^d(w,\eta,z) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2} \frac{(z + s'(y))^2}{(yz + s(y) + w)^n} \tag{B.4}$$

où l'opérateur $\tilde{\partial}_t$ agit sur le régulateur dédimensionné comme $\tilde{\partial}_t s(y) = (2-\eta)s(y) - 2ys'(y)$.

Chapitre 3

Le modèle d'Ising en champ aléatoire

3.1 Introduction

Le modèle d'Ising est apparu dans les années 1920 sous l'impulsion des travaux de Lenz et de son doctorant Ising. C'est certainement le plus simple et le plus vieux modèle permettant de décrire un comportement collectif non trivial avec une brisure spontanée de symétrie. Celui-ci a énormément contribué au succès de la physique statistique dans la compréhension des transitions de phase et des phénomènes critiques.

Tel qu'il est initialement introduit, le modèle d'Ising est un modèle pur ; cela signifie qu'il ne présente ni impureté, ni lacune, etc. qui induiraient des inhomogénéités dans le système. En réalité, ces dernières sont malgré tout présentes et les échantillons physiques ne sont jamais parfaitement homogènes. Il est alors naturel de se poser la question de l'influence de ces impuretés sur les propriétés critiques du système.

En 1975, la version en champ aléatoire du modèle d'Ising est introduite par Imry et Ma [IM75]. Par rapport au modèle pur, le champ magnétique couplé aux spins n'est plus un paramètre extérieur fixé ; celui-ci est désormais une variable aléatoire représentant le désordre dans le système. Le modèle d'Ising en champ aléatoire est un archétype de système désordonné ; il est intensément étudié, aussi bien au niveau théorique qu'expérimental, depuis près de 40 ans. En particulier, la compréhension des propriétés critiques de grande distance du modèle représente un enjeu majeur pour la théorie des systèmes désordonnés.

Nous exposons dans ce chapitre une introduction au modèle d'Ising en champ aléatoire, principalement basée sur les méthodes de la théorie des champs. Plusieurs sujets tels que la dynamique du modèle, ou encore les propriétés d'interface, ne sont pas abordés ici ; nous renvoyons le lecteur intéressé à [Nat97] (pour des aspects expérimentaux, on pourra aussi consulter [Bel97]).

3.2 Le modèle

Nous présentons dans cette section le hamiltonien du modèle ainsi que les propriétés du champ aléatoire. On définit un paramètre d'ordre associé à la transition para-ferromagnétique, tout en soulignant l'intérêt des quantités thermodynamiques moyennées sur le désordre. Afin de caractériser l'influence, à la fois des fluctuations thermiques et des fluctuations du désordre, deux fonctions de corrélation sont introduites. On précise finalement le comportement de celles-ci dans le régime critique.

3.2.1 Hamiltonien

Le modèle décrit des spins d'Ising $S_i = \pm 1$ en interaction ferromagnétique sur un réseau, en présence d'un champ magnétique aléatoire gelé. Le hamiltonien associé est le suivant :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j - \sum_i h_i S_i \tag{3.1}$$

où $J > 0$ traduit l'interaction ferromagnétique qui tend à aligner les spins et $\langle i, j \rangle$ désigne les sites plus proches voisins sur le réseau. Contrairement au modèle d'Ising pur, le champ magnétique h_i n'est plus un paramètre extérieur fixé ; celui-ci est désormais une variable aléatoire représentant le désordre dans le système. On considère un désordre gelé, c'est à dire que les h_i sont des variables sans dynamique et que leur distribution de probabilité est indépendante des degrés de liberté S_i du système. L'ensemble $\{h_i\}$ est choisi comme un bruit blanc gaussien dans l'espace : sa mesure de probabilité s'écrit $\mathcal{D}\mu(\{h_i\}) = \prod_i \rho(h_i) dh_i$ avec :

$$\rho(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta}} e^{-\frac{h^2}{2\Delta}} \tag{3.2}$$

Δ est la variance de h ; c'est un paramètre extérieur qui traduit donc l'intensité du désordre dans le système. Nous noterons avec une barre les moyennes calculées avec cette loi de probabilité ; on a en particulier :

$$\overline{h_i} = 0 \tag{3.3a}$$

$$\overline{h_i h_j} = \Delta \delta_{ij} \tag{3.3b}$$

Et les moments du champ aléatoire d'ordre supérieur sont donnés par le théorème de Wick.

Il est clair que le terme aléatoire du hamiltonien $-\sum_i h_i S_i$ s'oppose à l'ordre ferromagnétique imposé par l'interaction d'échange (i.e. par le couplage ferromagnétique J). A l'inverse du modèle pur, il existe ainsi une compétition entre l'ordre et le désordre dans le système, même à température nulle. Puisque ce dernier est toujours désordonné dans le cas $\sqrt{\Delta} \gg J$, il doit exister une transition de phase pour $T = 0$ lorsqu'on augmente le

paramètre Δ. Par ailleurs, le modèle pur présente lui aussi une transition quand on varie la température (en dimension $d > 1$) ; on s'attend donc au diagramme de phase illustré sur la Fig. 3.A. La transition de phase sur l'axe horizontal $\Delta = 0$ appartient à la classe d'universalité du modèle d'Ising pur. Le reste de la courbe de transition est associé à une nouvelle classe d'universalité, que nous allons décrire dans ce chapitre. Précisons que le diagramme de phase ci-dessous n'est valable qu'en dimension strictement supérieure à 2 (voir section 3.3.1) [IM75].

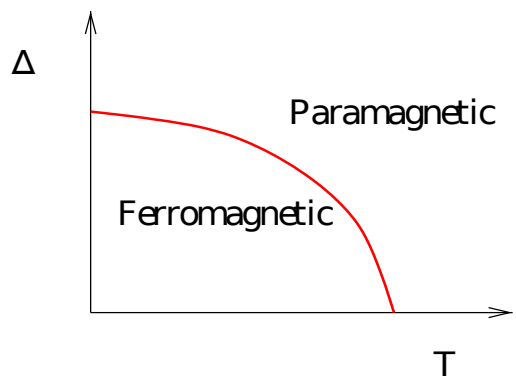

FIGURE 3.A – Diagramme de phase dans le plan (T, Δ) pour le modèle d'Ising en champ aléatoire, tiré de [Tis12].

Il est également possible d'utiliser un champ continu ϕ pour décrire les degrés de liberté du système en effectuant une transformation de Hubbard-Stratonovitch. On utilise alors le langage de la théorie des champs et étudions une théorie bosonique scalaire ϕ^4 couplée linéairement à une source aléatoire. [i] La version continue du hamiltonien, c'est à dire l'action microscopique, s'écrit :

$$\mathcal{S}[\phi, h] = \frac{1}{T}\int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + \frac{r}{2}\phi(x)^2 + \frac{g}{4!}\phi(x)^4 - h(x)\phi(x) \tag{3.4}$$

où le champ h est encore un bruit blanc de densité de probabilité gaussienne $\mathcal{D}\mu[h] = \mathcal{D}h\,\rho[h] = \mathcal{D}h\exp(-\frac{h\cdot h}{2\Delta_B})$. Nous avons introduit le paramètre T par convenance pour la suite de l'étude. On notera aussi $\mathcal{S}_B$ la partie pure de l'action :

$$\mathcal{S}_B[\phi] = \frac{1}{T}\int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + \frac{r}{2}\phi(x)^2 + \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{3.5}$$

i. Celle-ci est dans la même classe d'universalité que le modèle défini précédemment sur le réseau.

3.2.2 Thermodynamique moyennée sur le désordre

On s'intéresse à des quantités comme l'aimantation ou la susceptibilité qui s'auto-moyennent à la limite thermodynamique ; c'est à dire que leur valeur la plus probable s'identifie à leur moyenne pour $N \gg 1$. De plus, bien que la présence du champ aléatoire brise explicitement l'invariance par translation et rotation dans l'espace, cette dernière est rétablie quand on considère des moyennes sur le désordre.

On cherche donc à moyenner les quantités thermodynamiques par rapport au désordre. En particulier, le paramètre d'ordre peut se définir ainsi :

$$m = \overline{\langle \phi \rangle} \tag{3.6}$$

où $\langle . \rangle$ désigne la moyenne thermique (c'est à dire calculée avec le poids de Boltzmann $\exp(-\mathcal{S})$). Pour un désordre Δ suffisamment petit, on s'attend à trouver un point critique en $T_c = T_c(\Delta)$ séparant les phases ferromagnétique $m \neq 0$ et paramagnétique $m = 0$ (voir Fig. 3.A). Dans le régime critique, les différentes quantités thermodynamiques moyennées suivent des lois de puissance universelles ; les exposants critiques α, β, γ, δ et ν sont définis comme habituellement. Tel que précisé dans la suite, il est cependant nécessaire de prendre des précautions pour définir l'exposant critique η lié au comportement de la fonction de corrélation.

Pour une réalisation du désordre donnée, la fonction de partition du système s'écrit :

$$\mathcal{Z}[h] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{-\mathcal{S}[\phi,h]} \tag{3.7}$$

et d'une façon générale, on obtient les propriétés thermodynamiques du système moyennées sur le désordre en calculant la moyenne de l'énergie libre :

$$\mathcal{W} = \overline{\mathcal{W}[h]} = \overline{\log \mathcal{Z}[h]} \tag{3.8}$$

Cette dernière est effectivement une grandeur auto-moyennée à la limite thermodynamique (ce n'est pas le cas de la fonction de partition).

3.2.3 Fonctions de corrélation

On définit une première fonction de corrélation qui mesure, comme habituellement dans les modèles purs, l'influence des fluctuations thermiques. Celle-ci est alors moyennée sur le désordre :

$$\mathcal{P}_c(x,y) = \overline{\langle \phi(x)\phi(y) \rangle} - \overline{\langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle} \tag{3.9}$$

Il est possible d'introduire une autre fonction de corrélation, non plus sensible aux fluctuations thermiques, mais directement à celles du désordre :

$$\mathcal{P}_d(x,y) = \overline{\langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle} - \overline{\langle\phi(x)\rangle}\,\overline{\langle\phi(y)\rangle} \tag{3.10}$$

On appelle respectivement $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_d$ les fonctions de corrélation connectée et déconnectée.

Puisqu'il y a deux propagateurs, sensibles à deux types de fluctuations différents, il est également nécessaire d'introduire deux dimensions anormales. Au point critique de la transition, la longueur de corrélation ξ diverge et les propagateurs $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_d$ décroissent selon des lois de puissance singulières, caractérisées par les exposants η et $\bar{\eta}$. Plus précisément, dans la région critique, les fonctions de corrélations se comportent à grande distance comme :

$$\mathcal{P}_c(x,y) \sim \frac{T}{|x-y|^{d-2+\eta}}\, e^{-|x-y|/\xi} \tag{3.11a}$$

$$\mathcal{P}_d(x,y) \sim \frac{\Delta}{|x-y|^{d-4+\bar{\eta}}}\, e^{-|x-y|/\xi} \tag{3.11b}$$

Ces relations définissent les dimensions anormales η et $\bar{\eta}$.

3.3 Propriétés générales

Quelques propriétés générales du modèle d'Ising en champ aléatoire sont démontrées dans cette section. En particulier, nous discutons les dimensions critiques inférieure et supérieure du modèle, et mettons en évidence la prépondérance des fluctuations du désordre sur les fluctuations thermiques dans le régime critique. On présente également l'approche du modèle par la méthode des répliques.

3.3.1 Dimension critique inférieure : argument de Imry-Ma

La dimension critique inférieure (i.e. la dimension en dessous de laquelle le système n'exhibe pas de phase ordonnée non triviale) du modèle d'Ising pur est égale à 1. Puisque le terme aléatoire du hamiltonien s'oppose à l'ordre ferromagnétique, il est naturel de penser que cette dernière va augmenter dans le modèle en champ aléatoire. En 1975, Imry et Ma ont été les premiers à montrer qu'un désordre non nul, si petit soit-il, déstabilise l'ordre ferromagnétique en dimension $d < 2$ [IM75]. Au contraire, pour des dimensions strictement supérieures à 2, leur argument prévoit une phase ordonnée stable lorsque le désordre Δ est suffisamment petit. Nous nous attachons ici à reproduire cet argument.

On considère le modèle sur réseau à température nulle dans une configuration ordonnée, c'est à dire avec tous les spins pointant dans le même sens. On retourne alors les spins dans

un domaine hypercubique de taille L^d. L'interaction d'échange implique une augmentation de l'énergie de l'ordre de JL^{d-1}, ce qui correspond à l'énergie de surface du domaine. Le terme aléatoire provoque lui aussi une variation de l'énergie égale à $2\sum h_i$, où la somme porte sur tous les sites de la région renversée. Notons que cette dernière variation d'énergie est, elle même, une variable aléatoire de moyenne nulle et d'écart type $\sqrt{\Delta}L^{d/2}$. Celle-ci peut, en outre, être positive ou négative selon l'emplacement du bloc considéré. Il existe ainsi des domaines de taille L^d non rares pour lesquels cette variation d'énergie va être négative, et de l'ordre de $\sqrt{\Delta}L^{d/2}$. Pour ces derniers, la variation totale d'énergie est donc :

$$\Delta E \simeq JL^{d-1} - \sqrt{\Delta}L^{d/2} \tag{3.12}$$

En conséquence, quel que soit $\Delta \neq 0$, il est énergétiquement favorable de retourner de tels domaines macroscopiques $L \gg 1$, en dimension d strictement inférieure à 2. Autrement dit, la phase ordonnée est déstabilisée par tout désordre non nul. Au contraire, pour des dimensions $d > 2$, seuls des domaines de taille finie peuvent être retournés avec $\Delta E < 0$. Cela implique une phase ferromagnétique stable pour un désordre suffisamment petit.

Notons que la discussion précédente ne permet pas de dire s'il y a, ou non, une transition de phase en dimension 2. Il est nécessaire dans ce cas d'étudier plus en détail les propriétés de surface des domaines. Cependant, il existe des preuves rigoureuses de l'absence de phase ordonnée en dimension 2 [Bin83], ainsi que de sa présence en dimension 3 [Imb84, BK87, BK88]. En conclusion, la dimension critique inférieure du modèle d'Ising en champ aléatoire est égale à 2.

Cet argument se généralise au modèle $O(N)$ en champ aléatoire. La seule modification dans la discussion ci-dessus est le coût énergétique du retournement impliqué par le terme d'échange. Lorsque $N \geqslant 2$, celui-ci n'est plus de l'ordre de L^{d-1} mais L^{d-2}. En effet, les spins tournent d'un angle π à l'intérieur du domaine ; l'angle entre deux spins adjacents est donc à peu près π/L et cela implique une augmentation de l'énergie de l'ordre de $(\pi/L)^2$ pour ces derniers. En intégrant sur le volume du domaine, la variation de l'énergie est donc bien en L^{d-2}. Le même raisonnement que dans le cas $N = 1$ donne ensuite une dimension critique inférieure égale à 4. On peut en conclure naïvement qu'il n'existe pas de transition de phase dans le modèle $O(N \geqslant 2)$ en champ aléatoire pour les dimensions physiques intéressantes $d = 2$ et $d = 3$. En fait, une phase ordonnée non triviale sans aimantation spontanée peut tout de même exister en dimension $d < 4$ lorsque N est suffisamment petit [Fel00, Fel01, TT06b, Tis12].

3.3.2 Champ moyen et dimension critique supérieure

On souhaite déterminer les valeurs des exposants critiques dans l'approximation de champ moyen, où toutes les fluctuations sont négligées. Concernant les fonctions de corrélation, leur comportement universel en champ moyen est donné par le modèle gaussien

$g = 0$.[ii] L'énergie libre $\mathcal{W}[h]$ (Eq. (3.8)) se calcule analytiquement dans le cas gaussien ; on obtient la moyenne thermique du champ :

$$\langle \phi(x) \rangle = T\, \mathcal{W}^{(1)}[h](x) = \frac{1}{T} \int_y \mathcal{S}_B^{(2)\,-1}(x,y)\, h(y) \tag{3.13}$$

et le propagateur :

$$\langle \phi(x)\phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle = T^2\, \mathcal{W}^{(2)}[h](x,y) = \mathcal{S}_B^{(2)\,-1}(x,y) \tag{3.14}$$

où $\mathcal{S}_B^{(2)}$ est l'opérateur $T^{-1}\,(-\partial^2 + r)$. La fonction de corrélation de l'Eq. (3.14) ne dépend pas du champ aléatoire h ; sa moyenne est donc triviale et celle-ci s'identifie à $\mathcal{P}_c$. D'autre part, comme attendu dans le modèle gaussien, l'Eq. (3.13) montre que le paramètre d'ordre $\overline{\langle \phi \rangle}$ est nul. En transformée de Fourier, les deux relations précédentes se réécrivent :

$$\langle \phi(q) \rangle = \frac{h(-q)}{q^2 + r} \tag{3.15}$$

et :

$$\mathcal{P}_c(q) = \frac{T}{q^2 + r} \tag{3.16}$$

Le propagateur connecté est donc critique en $r = 0$. En comparant avec le comportement de l'Eq. (3.11), on obtient $\eta = 0$ et $\xi \sim r^{-1/2}$, c'est à dire $\nu = 1/2$. La fonction de corrélation associée aux fluctuations du désordre est aussi aisée à calculer :

$$\mathcal{P}_d(q) = v^{-1}\, \overline{\langle \phi(q) \rangle \langle \phi(-q) \rangle} = v^{-1}\, \frac{\overline{h(q)h(-q)}}{(q^2 + r)^2} = \frac{\Delta}{(q^2 + r)^2} \tag{3.17}$$

où $v = \int_x 1$ est le volume total.[iii] Au point critique $r = 0$, le propagateur déconnecté diverge à basse impulsion comme $1/q^4$ et, compte tenu de l'Eq. (3.11), on obtient également $\bar{\eta} = 0$. Ainsi, $\mathcal{P}_d$ décroit beaucoup plus lentement que $\mathcal{P}_c$ à grande distance ; les fluctuations du désordre dominent par rapport aux fluctuations thermiques.

Il est facile de montrer que les autres exposants prennent également leurs valeurs habituelles en champ moyen $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$, etc.

A basse dimension, les fluctuations ne peuvent être négligées et l'approximation de champ moyen n'est plus valable. On dérive ici le critère de Ginzburg afin de déterminer

ii. Au dessus de la dimension critique supérieure, le point critique est associé au point fixe gaussien dans le groupe de renormalisation.

iii. Nous avons utilisé la transformée de Fourier $\overline{h(q_1)h(q_2)} = \Delta(2\pi)^d \delta(q_1 + q_2)$ de la relation $\overline{h(x)h(y)} = \Delta\delta(x - y)$.

la dimension critique supérieure du modèle. Considérons alors un domaine de taille ξ^d qui caractérise les corrélations du système ; ce dernier étant supposé en phase ordonnée, et proche du point critique. On compare l'aimantation moyenne du domaine $M \simeq \xi^d m \simeq \xi^{d-\beta/\nu}$ à ses fluctuations. Ces dernières sont données par :

$$\begin{aligned} \Delta M^2 &= \int_{x\in\xi^d}\int_{y\in\xi^d} \overline{\langle\phi(x)\phi(y)\rangle} - \overline{\langle\phi(x)\rangle}\,\overline{\langle\phi(x)\rangle} \\ &= \int_{x\in\xi^d}\int_{y\in\xi^d} \mathcal{P}_c(x,y) + \mathcal{P}_d(x,y) \\ &\simeq \xi^d\big(\mathcal{P}_c(q=0) + \mathcal{P}_d(q=0)\big) \\ &\simeq T\,\xi^{d+2} + \Delta\,\xi^{d+4} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Nous avons utilisé les définitions de l'Eq. (3.11) ainsi que les valeurs $\eta = \bar{\eta} = 0$ données par le champ moyen. On remarque, là encore, que les fluctuations thermiques sont négligeables par rapport à celles du désordre dans la région critique. Avec $M \simeq \xi^{d-\beta/\nu} = \xi^{d-1}$ en champ moyen, on obtient finalement les fluctuations relatives d'aimantation :

$$\frac{\sqrt{\Delta M^2}}{M} \simeq \Delta\,\xi^{3-d/2} \tag{3.19}$$

L'approximation de champ moyen n'est certainement pas applicable dans le cas où ce rapport diverge au point critique, c'est à dire pour des dimensions strictement inférieures à 6. Au contraire, pour $d > 6$, les fluctuations du paramètre d'ordre sont sous-dominantes et peuvent être négligées ; la dimension critique supérieure du modèle d'Ising en champ aléatoire est donc 6.

3.3.3 Méthode des répliques

La moyenne de l'énergie libre sur le désordre (Eq. (3.8)) peut s'exprimer en utilisant la méthode des répliques :

$$\mathcal{W} = \overline{\log \mathcal{Z}[h]} = \lim_{n\to 0} \frac{\overline{\mathcal{Z}[h]^n} - 1}{n} \tag{3.20}$$

$\mathcal{Z}[h]^n$ correspond à la théorie de n répliques indépendantes du champ de départ. Nous avons supposé le désordre gaussien, la moyenne sur celui-ci se calcule alors analytiquement :

$$\overline{\mathcal{Z}[h]^n} = \int \mathcal{D}\mu[h] \int \prod_{a=1}^{n} \mathcal{D}\phi_a\, e^{-\sum_a \mathcal{S}[\phi_a,h]} = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_a\, e^{-\mathcal{S}_R[\{\phi_a\}]} \tag{3.21}$$

où $\mathcal{S}_R$ est une action des n champs ϕ_a, désormais couplés entre eux (a est l'indice de réplique et parcourt les entiers $1, \cdots, n$) :

$$\mathcal{S}_R[\{\phi\}] = \sum_a \mathcal{S}_B[\phi_a] - \frac{\Delta}{2T^2}\sum_{ab} \phi_a \cdot \phi_b \tag{3.22}$$

On se ramène ainsi à l'étude d'une théorie pure de n répliques couplées par un terme d'interaction proportionnel à la variance du désordre. Notons que l'on retrouve la partie pure de l'action $\mathcal{S}_B$ pour les termes d'interaction à une seule réplique.

Considérons $\mathcal{P}_{ab}(x,y)$ le propagateur associé à la théorie $\mathcal{S}_R$ (i.e. $\mathcal{P}_{ab}(x,y) = \{\phi_a(x)\phi_b(y)\} - \{\phi_a(x)\}\{\phi_b(y)\}$ où $\{.\}$ dénote la moyenne définie par la fonction de partition Eq. (3.21)). Dans l'approximation de champ moyen, ce dernier s'identifie à l'inverse de la dérivée seconde de l'action $\mathcal{S}_R$. On calcule facilement sa transformée de Fourier dans la phase paramagnétique :

$$\mathcal{P}_{ab}(q) = \frac{T}{q^2+r}\delta_{ab} + \frac{\Delta}{(q^2+r)(q^2+r-n\Delta_B/T)} = \frac{T}{q^2+r}\delta_{ab} + \frac{\Delta}{(q^2+r)^2} + O(n) \tag{3.23}$$

Les termes d'ordre n ne contribuent pas puisque la limite $n \to 0$ est prise à la fin du calcul. On obtient donc deux contributions distinctes pour le propagateur, et celles-ci s'identifient aux fonctions de corrélation initiales $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_d$ (on retrouve les exposants de champ moyen $\eta = \bar{\eta} = 0$ et $\nu = 1/2$).

3.4 Résultats de la théorie de perturbation

La théorie des champs $\mathcal{S}_R$ dérivée grâce à la méthode des répliques constitue un bon point de départ pour les études perturbatives au voisinage de la dimension critique supérieure ; ces dernières sont réalisées dans [AIM76, Gri76, You77]. Nous exposons dans cette partie les principaux résultats de l'approche perturbative sans les démontrer. Nous soulignons notamment la propriété de réduction dimensionnelle ; celle-ci prévoit un comportement critique universel identique pour le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension d et le modèle d'Ising pur en dimension $d-2$. On met ensuite en évidence les contradictions impliquées par ce résultat et la nécessité d'utiliser un formalisme non perturbatif.

3.4.1 Point fixe à température nulle

Afin d'obtenir un point fixe dans les équations du groupe de renormalisation, il est nécessaire d'introduire une température effective courante T_k dépendant de l'échelle caractéristique k. Celle-ci joue le même rôle, à l'échelle k, que le paramètre T introduit dans l'action microscopique (voir Eq. (3.4)). De plus, cette température effective s'annule lorsque $k \to 0$, quelle que soit la condition initiale T. On remarque plus précisément le comportement suivant :

$$T_k \sim k^\theta \tag{3.24}$$

où $\theta > 0$ est un exposant critique universel. Le point fixe associé à la transition est donc à température nulle ; c'est une propriété remarquable ayant d'importantes conséquences sur

le comportement critique du modèle.

Cela est cohérent avec le fait, déjà souligné dans l'approximation de champ moyen, que les fluctuations thermiques soient négligeables par rapport à celles du désordre. Puisque le point fixe est à température nulle, on peut directement imposer $T = 0$ dans l'action microscopique. L'utilisation de la méthode du col pour évaluer l'intégrale de l'Eq. (3.7) définissant $\mathcal{Z}[h]$ est alors justifiée. En d'autres termes, il n'est pas nécessaire de prendre en compte les fluctuations thermiques pour déterminer le comportement critique du modèle.

3.4.2 Paramètre dangereusement inessentiel et relations d'échelle

La température effective T_k est une variable dite dangereusement inessentielle [iv] [Fis75, Ami92]. Le terme dangereusement est utilisé car sa valeur nulle au point fixe a, néanmoins, d'importantes conséquences sur le comportement d'échelle des grandeurs thermodynamiques. [v] En particulier, la relation usuelle dite d'hyperscaling entre les exposants critiques

$$\alpha = 2 - \nu d \tag{3.25}$$

est remplacée par [Vil85a, Fis86b] :

$$\alpha = 2 - \nu(d - \theta) \tag{3.26}$$

Toutes les relations d'échelle entre les exposants critiques sont, en fait, modifiées de la même manière ; c'est à dire par un changement effectif de dimension $d \mapsto d-\theta$ [BM85]. Il est également possible de relier l'exposant θ aux dimensions anormales définies précédemment :

$$\theta = 2 + \eta - \bar{\eta} \tag{3.27}$$

Et l'approximation de champ moyen donne donc $\theta = 2$. Notons finalement qu'il existe une inégalité portant sur les dimensions anormales dont la preuve rigoureuse se trouve dans [SS85].

$$\eta \leqslant \bar{\eta} \leqslant 2\eta \tag{3.28}$$

En conclusion, on a, à priori, trois exposants critiques indépendants dans le modèle d'Ising en champ aléatoire (et non deux, comme dans le modèle pur) et les relations d'échelle sont modifiées par la substitution $d \mapsto d - \theta$.

iv. Inessentielle puisque celle-ci tend vers une constante lorsqu'on diminue l'échelle k.

v. Le plus simple exemple de terme dangereusement inessentiel est la constante de couplage g de la théorie ϕ^4 pure en dimension $d > 4$. Le couplage renormalisé sans dimension $\tilde{g}_k$ tend vers 0 et se comporte comme $\tilde{g}_k \sim k^{d-4}$. En conséquence, les relations d'échelle entre les exposants critiques deviennent indépendantes de la dimension et sont modifiées par la substitution $d \mapsto 4$. Cela est cohérent avec le fait que les exposants ne dépendent plus de la dimension lorsque $d > 4$.

3.4.3 Propriété de réduction dimensionnelle

Deux propriétés importantes ont été démontrées à tous les ordres de la théorie de perturbation. Premièrement, celle-ci prévoit toujours $\eta = \bar{\eta}$, c'est à dire un exposant critique θ égal à 2. Le second résultat, appelé réduction dimensionnelle, est très surprenant : les exposants critiques du modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension d sont identiques à ceux du modèle d'Ising pur en dimension $d-2$ [AIM76, You77].

La réduction dimensionnelle a été prouvée perturbativement à tous les ordres en utilisant les développements diagrammatiques. Les diagrammes de la théorie des répliques $\mathcal{S}_R$ qui dominent lorsque la température effective tend vers 0 ont même contribution que ceux de la théorie ϕ^4 pure en dimension $d-2$. La preuve ne donne cependant pas d'explication théorique simple qui permette de comprendre le phénomène.

Il est clair que cette propriété de réduction dimensionnelle n'est pas valable à basse dimension. En effet, puisque la dimension critique inférieure du modèle d'Ising pur est égale à 1, la réduction dimensionnelle prévoit une dimension critique inférieure de 3 pour le modèle en champ aléatoire. Or, comme déjà mentionné, il a été prouvé rigoureusement que la dimension critique inférieure du modèle d'Ising en champ aléatoire est 2 [Imb84, BK87, BK88]. On s'attend donc à une brisure de réduction dimensionnelle à basse dimension, dans une région non accessible perturbativement (i.e. pour des dimensions beaucoup plus basses que 6). De plus, puisque celle-ci est démontrée à tous les ordres en perturbation, il est légitime de penser que des effets non pertubatifs soient responsables de sa brisure.

3.5 Supersymétrie

Bien que la théorie de perturbation démontre la réduction dimensionnelle à tous les ordres par une identification des diagrammes de Feynman, elle n'apporte pas d'explication théorique simple pour ce phénomène. Cette dernière est finalement découverte par Parisi et Sourlas en 1979 [PS79] ; ils comprennent que la réduction dimensionnelle est une conséquence d'une symétrie du problème, celle-ci étant cachée dans l'approche standard par la méthode des répliques. On développe ici le formalisme de Parisi-Sourlas et l'on montre comment la réduction dimensionnelle en découle simplement.

En suivant la construction originale de Parisi et Sourlas, on commence par reformuler le problème à température nulle à l'aide d'une théorie faisant intervenir un super-champ. Les symétries de l'action obtenue, ainsi que leurs conséquences, sont ensuite discutées. La propriété de réduction dimensionnelle est finalement démontrée à partir de l'une de ces invariances.

3.5.1 Dérivation de la théorie supersymétrique à température nulle

On considère une action microscopique plus générale que celle introduite dans la section 3.2.1 :

$$\mathcal{S}[\phi, j, h] = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + U(\phi(x)) - (h(x) + j(x))\phi(x) \tag{3.29}$$

En plus du champ aléatoire h, le modèle est désormais couplé avec un champ magnétique extérieur fixé (non aléatoire) j. Le potentiel U n'est pas tronqué à l'ordre ϕ^4 comme précédemment et possède la symétrie $\mathbb{Z}_2$ du modèle d'Ising (i.e. il ne dépend que de ϕ^2). On note aussi $\mathcal{S}_B$ la partie pure et sans source de l'action.

$$\mathcal{S}_B[\phi] = \int_x \frac{1}{2}\partial_\mu\phi(x)\partial^\mu\phi(x) + U(\phi(x)) \tag{3.30}$$

Nous avons mis en évidence que les fluctuations thermiques étaient négligeables ; le comportement critique du modèle est directement déterminé à température nulle. On cherche donc l'état fondamental $\phi^\star$ en minimisant l'action microscopique.

$$\frac{\delta\mathcal{S}[\phi, j, h]}{\delta\phi(x)} = \mathcal{S}_B^{(1)}[\phi](x) - (h(x) + j(x)) = 0 \tag{3.31}$$

Il vient ainsi l'équation classique du mouvement. Celle-ci est dite équation différentielle stochastique : la solution $\phi^\star = \phi^\star[j, h]$ est une fonctionnelle aléatoire. On souhaite calculer la moyenne de l'état fondamental par rapport au désordre et, plus généralement, les moments de la forme suivante :

$$\overline{\phi^\star(x_1)\cdots\phi^\star(x_n)} \tag{3.32}$$

Dans leur travail original [PS79], Parisi et Sourlas cherchent à construire une théorie des champs qui permette d'obtenir ces quantités. On introduit pour cela une fonctionnelle génératrice :

$$\mathcal{Z}_A[j, \hat{j}] = \overline{\mathcal{Z}_B[j, \hat{j}, h]} = \overline{e^{\hat{j}.\phi^\star}} \tag{3.33}$$

La source j est initialement présente dans le modèle alors que $\hat{j}$ sert à générer les fonctions de corrélation. On vérifie en effet :

$$\left.\frac{\delta^n\mathcal{Z}_A}{\delta\hat{j}(x_1)\cdots\delta\hat{j}(x_n)}\right|_{\hat{j}=0} = \overline{\phi^\star(x_1)\cdots\phi^\star(x_n)} \tag{3.34}$$

On peut moyenner directement $\mathcal{Z}_B$ (et non son logarithme) pour établir la relation ci-dessus car $\mathcal{Z}_B[j, \hat{j} = 0, h] = 1$. En utilisant ensuite une version fonctionnelle du delta de Dirac, la fonction de partition se réécrit :

$$\mathcal{Z}_B[j, \hat{j}, h] = e^{\hat{j}.\phi^\star} = \int \mathcal{D}\phi\, \delta(\phi - \phi^\star)\, e^{\hat{j}.\phi} \tag{3.35}$$

On suppose que l'équation du mouvement, Eq. (3.31), possède une unique solution. Il est, dans ce cas, possible d'effectuer le changement de variable suivant dans la fonction delta : [vi]

$$\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},h] = \int \mathcal{D}\phi\, \delta(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi] - h - j)\, e^{\hat{j}.\phi}\, \det \mathcal{S}_B^{(2)}[\phi] \tag{3.36}$$

On a omis la valeur absolue sur le jacobien $\det \mathcal{S}_B^{(2)}$ car l'action $\mathcal{S}$ présente, par hypothèse, un unique extremum.

L'étape suivante consiste à réécrire $\mathcal{Z}_B$ sous la forme d'une intégrale fonctionnelle où le delta de Dirac et le déterminant n'apparaissent pas explicitement. Cela est possible grâce aux représentations intégrales de ces derniers. [vii] On a en particulier pour le delta de Dirac fonctionnel :

$$\delta(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi] - h - j) = \int \mathcal{D}\hat{\phi}\, e^{-\hat{\phi}.(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi]-h-j)} \tag{3.37}$$

où $\hat{\phi}$ est un champ bosonique imaginaire pur qu'on appelle champ de réponse. Quant au déterminant, celui-ci est généré par une intégrale gaussienne sur deux champs grassmanniens.

$$\det \mathcal{S}_B^{(2)}[\phi] = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{\bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi} \tag{3.38}$$

Les champs scalaires grassmanniens (i.e. fermioniques) ψ et $\bar{\psi}$ vérifient les relations d'anticommutation $\{\psi(x),\psi(y)\} = \{\psi(x),\bar{\psi}(y)\} = \{\bar{\psi}(x),\bar{\psi}(y)\} = 0$ et commutent avec toutes les variables bosoniques ($\{a,b\} = ab + ba$ est l'anticommutateur). La fonction de partition prend donc la forme :

$$\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},h] = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\hat{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{-\hat{\phi}.(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi]-h-j)+\hat{j}.\phi+\bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi} \tag{3.39}$$

vi. Le passage de l'Eq. (3.35) à l'Eq. (3.36) est du à la généralisation fonctionnelle de :

$$\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$$

où les x_i sont les zéros de la fonction f.

vii. On utilise les généralisations fonctionnelles des relations suivantes :

$$\delta(x-y) = \int_q e^{-iq_\mu(x^\mu - y^\mu)}$$

et :

$$\det A = \int \prod_{i=1}^{n} d\theta_i d\bar{\theta}_i\, e^{\sum_{ij}\bar{\theta}_i A_{ij}\theta_j}$$

où A est une matrice quelconque de taille $n \times n$ à coefficients complexes. Les θ_i et $\bar{\theta}_i$ sont des variables de Grassmann ; elles vérifient $\{\theta_i,\theta_j\} = \{\theta_i,\bar{\theta}_j\} = \{\bar{\theta}_i,\bar{\theta}_j\} = 0$ ($\{a,b\} = ab + ba$ désigne l'anticommutateur).

La contrainte $\phi = \phi^\star$ n'intervient plus explicitement dans cette intégrale et le désordre apparaît simplement, à travers le terme $\hat{\phi}.h$ dans l'exponentielle. Cela permet de calculer analytiquement la moyenne de $\mathcal{Z}_B$ sur le désordre gaussien. On ajoute également des sources grassmanniennes dans la fonctionnelle génératrice :

$$\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},K,\bar{K},h] = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\hat{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{-\hat{\phi}.(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi]-h-j)+\hat{j}.\phi+\bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi+\psi.\bar{K}+K.\bar{\psi}} \tag{3.40}$$

et enfin, on effectue la moyenne par rapport au champ aléatoire :

(3.41)

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_A[j,\hat{j},K,\bar{K}] &= \overline{\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},K,\bar{K},h]}\\ &= \int \mathcal{D}h\; e^{-\frac{h.h}{2\Delta_B}} \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\hat{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{-\hat{\phi}.(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi]-h-j)+\hat{j}.\phi+\bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi+\psi.\bar{K}+K.\bar{\psi}}\\ &= \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\hat{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{-\mathcal{S}_\star[\phi,\hat{\phi},\psi,\bar{\psi}]+j.\hat{\phi}+\hat{j}.\phi+\psi.\bar{K}+K.\bar{\psi}}\end{aligned}$$

avec :

$$\mathcal{S}_\star[\phi,\hat{\phi},\psi,\bar{\psi}] = \hat{\phi}.\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi] - \bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi - \frac{\Delta}{2}\hat{\phi}.\hat{\phi} \tag{3.42}$$

Pour finir, on ré-écrit l'action $\mathcal{S}_\star$ sous une forme plus compacte en introduisant un super-espace. On ajoute alors aux d dimensions euclidiennes deux coordonnées grassmanniennes θ et $\bar{\theta}$ telles que $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \theta\bar{\theta} + \bar{\theta}\theta = 0$ (le super-espace est la somme de $\mathbb{R}^d$ et du sous-espace de grassmann engendré par θ et $\bar{\theta}$). Un vecteur du super-espace est de la forme $\underline{x} = (x,\theta,\bar{\theta}) = (x_1,\cdots,x_d,\theta,\bar{\theta})$ et on utilise la mesure d'intégration suivante :

$$\int_{\underline{x}} = \int_x \int d\theta d\bar{\theta} = \int d^d x d\theta d\bar{\theta} \tag{3.43}$$

Considérons un champ bosonique $\Phi(\underline{x})$ sur le super-espace. En développant $\Phi(\underline{x})$ en puissances des variables grassmanniennes θ et $\bar{\theta}$, on obtient l'expression exacte :

$$\Phi(\underline{x}) = \alpha(x) + \beta(x)\theta + \gamma(x)\bar{\theta} + \delta(x)\theta\bar{\theta} \tag{3.44}$$

En effet, compte tenu des relations d'anticommutation, les ordres supérieurs du développement en θ et $\bar{\theta}$ sont nuls. Les quatre composantes α, β, γ et δ sont des champs sur $\mathbb{R}^d$. Puisque Φ est à caractère bosonique, α et δ le sont aussi alors que β et γ sont des champs grassmanniens. On définit finalement le super-champ $\Phi(\underline{x})$ tel que :

$$\Phi(\underline{x}) = \phi(x) + \bar{\psi}(x)\theta - \psi(x)\bar{\theta} - \hat{\phi}(x)\theta\bar{\theta} \tag{3.45}$$

Cela permet de réécrire très simplement l'action $\mathcal{S}_\star$:

$$\mathcal{S}_\star[\phi,\hat{\phi},\psi,\bar{\psi}] = \mathcal{S}_\star[\Phi] = \int_{\underline{x}} -\frac{1}{2}\Phi(\underline{x})\,\partial_\star^2\,\Phi(\underline{x}) + U(\Phi(\underline{x})) \tag{3.46}$$

avec :

$$\partial_\star^2 = \partial^2 + \Delta \partial_\theta \partial_{\bar\theta} \tag{3.47}$$

Il est remarquable d'aboutir à une forme aussi compacte pour $\mathcal{S}_\star$. Le potentiel U est le même que dans l'action de départ $\mathcal{S}_B$ et l'opérateur $\partial_\star^2$ s'interprète comme un super-laplacien. On obtient ainsi l'équivalent d'une théorie ϕ^4 dans le super-espace. Si l'on introduit également une super-source

$$\mathcal{J}(\underline{x}) = j(x) + \bar{K}(x)\theta - K(x)\bar\theta - \hat{j}(x)\theta\bar\theta \tag{3.48}$$

la fonction de partition s'exprime elle aussi plus simplement :

$$\mathcal{Z}_A[j, \hat{j}, K, \bar{K}] = \mathcal{Z}_A[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\Phi \; e^{-\mathcal{S}_\star[\Phi] + \mathcal{J}.\Phi} \tag{3.49}$$

où $\mathcal{J}.\Phi = \int_{\underline{x}} \mathcal{J}(\underline{x})\Phi(\underline{x})$ dénote maintenant une intégrale sur le super-espace.

Notons [.] les moyennes calculées avec la fonction de partition de l'Eq. (3.49) et relions ces dernières aux fonctions de corrélation $\mathcal{P}_c$ et $\mathcal{P}_d$. La relation, Eq. (3.34), se réécrit :

$$[\phi(x_1)\cdots\phi(x_n)] = \overline{\phi^\star(x_1)\cdots\phi^\star(x_n)} \tag{3.50}$$

Et donc, au point critique :

$$\mathcal{P}_d(x,y) = [\phi(x)\phi(y)] \tag{3.51}$$

L'expression de la fonction de partition $\mathcal{Z}_A$ montre que c'est désormais le champ de réponse $\hat\phi$ qui est linéairement couplé au champ magnétique j du modèle initial. On a en particulier :

$$\left.\frac{\delta^2 \mathcal{Z}_A}{\delta j(x)\delta\hat{j}(y)}\right|_{\mathcal{J}=0} = \left.\frac{\delta\overline{\phi^\star(y)}}{\delta j(x)}\right|_{\mathcal{J}=0} = [\hat\phi(x)\phi(y)] \tag{3.52}$$

Et, puisque les fluctuations thermiques ont été négligées i.e. $\langle\phi\rangle = \phi^\star$, cette fonction de corrélation s'identifie au propagateur connecté $\mathcal{P}_c$ (sans le facteur T). Notons que $[\hat\phi(x)\phi(y)]$ mesure la variation locale du paramètre d'ordre en y lorsqu'on varie le champ magnétique externe au point x, d'où l'appellation de champ de réponse pour $\hat\phi$.

3.5.2 Invariances dans le super-espace

Le principal intérêt de la formulation supersymétrique ci-dessus est de faire apparaître explicitement certaines symétries de l'action, non visibles dans la description initiale. Comme le montre l'Eq. (3.46), l'action $\mathcal{S}_\star$ est, en effet, invariante par translation dans le

super-espace, ainsi que sous les transformations qui préservent la norme associée au super-laplacien $\partial_\star^2$ (i.e. les isométries vectorielles du super-espace).

On définit plus précisément cette norme par l'introduction d'une métrique g. L'élément de longueur du super-espace est défini tel que :

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i dx^j \tag{3.53}$$

x^i désigne les coordonnées de $\underline{x}$ dans le super-espace (i.e. $i = \mu$, θ ou $\bar{\theta}$, μ étant l'indice associé aux coordonnées bosoniques habituelles). Le laplacien invariant pour cette métrique s'écrit donc :

$$\partial_g^2 = g^{ij}\, \partial_i \partial_j \tag{3.54}$$

Celui-ci s'identifie au super-laplacien $\partial_\star^2$ défini précédemment en choisissant la métrique comme :

$$g^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} \tag{3.55a}$$

$$g^{\theta\bar{\theta}} = -g^{\bar{\theta}\theta} = \frac{\Delta}{2} \tag{3.55b}$$

et tous les autres coefficients de g sont nuls. Finalement, la norme d'un vecteur du super-espace s'exprime donc par :

$$\underline{x}^2 = g_{ij}\, x^i x^j = x^2 + \frac{4}{\Delta}\theta\bar{\theta} \tag{3.56}$$

Et la distance entre deux points est définie telle que $d(\underline{x}_1, \underline{x}_2)^2 = (\underline{x}_1 - \underline{x}_2)^2$.

En plus de la symétrie du modèle d'Ising $\Phi \mapsto -\Phi$, l'action $\mathcal{S}_\star$ est invariante sous les isométries affines pour la distance ci-dessus, i.e. sous le super-groupe de Poincaré contenant les translations et les rotations dans le super-espace. Les rotations forment le sous groupe ortho-symplectique $Osp(2, d)$ et sont de type suivant [FK76] :

- Les rotations habituelles dans les directions bosoniques constituant le sous groupe orthogonal $O(d)$, et générées par le tenseur antisymétrique $L_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$. Celles-ci agissent de la même manière sur les quatre composantes ϕ, $\hat{\phi}$, ϕ et $\bar{\psi}$ du champ, et ne les mélangent pas.

- Les rotations dans le sous espace de Grassmann correspondant au sous groupe symplectique $Sp(2)$. Les générateurs infinitésimaux du groupe sont $\theta\partial_{\bar{\theta}}$, $\bar{\theta}\partial_\theta$ et $\bar{\theta}\partial_{\bar{\theta}} - \theta\partial_\theta$. Ces transformations n'agissent que sur les composantes fermioniques du champ Φ.

- Les super-rotations qui agissent à la fois sur les variables bosoniques et fermioniques. Ces dernières sont générées par $D_\mu = x_\mu \partial_\theta - \frac{2}{\Delta}\bar{\theta}\partial_\mu$ et $\bar{D}_\mu = x_\mu \partial_{\bar{\theta}} + \frac{2}{\Delta}\theta\partial_\mu$. Elles mélangent les composantes bosoniques et fermioniques du champ, et sont appelées supersymétries pour cette raison. [viii]

Et le super-groupe de Poincaré est formé en ajoutant les translations :

- Les translations habituelles dans les directions bosoniques, générées par ∂_μ.

- Les translations dans le sous espace de Grassmann générées par ∂_θ et $\partial_{\bar{\theta}}$. Celles-ci sont également des supersymétries (i.e. mélangent les composantes bosoniques et fermioniques de Φ).

3.5.3 Conséquences de l'invariance sous les super-rotations

L'invariance de la théorie $\mathcal{S}_\star$ sous les super-rotations a d'importantes conséquences sur le comportement critique du modèle. Elle permet en particulier de démontrer de manière simple et exacte deux résultats remarquables établis dans l'approche perturbative, à savoir, la relation $\eta = \bar{\eta}$ et la propriété de réduction dimensionnelle (voir section 3.4).

Egalité des dimensions anormales

Concernant l'égalité des deux dimensions anormales η et $\bar{\eta}$, celle-ci est une simple conséquence de l'invariance de la fonction de corrélation $[\Phi(\underline{x})\Phi(\underline{y})]$ par super-rotation. En effet, en écrivant $[\Phi(\underline{x})\Phi(0)] = C(\underline{x}^2)$ et en développant les deux membres selon les variables grassmanniennes θ et $\bar{\theta}$, on obtient par identification :

$$[\phi(x)\phi(0)] = C(x^2) \tag{3.57a}$$

$$[\hat{\phi}(x)\phi(0)] = -\frac{4}{\Delta_B}C'(x^2) \tag{3.57b}$$

$$[\psi(x)\phi(0)] = [\bar{\psi}(x)\phi(0)] = 0 \tag{3.57c}$$

Puisque les Eqs. (3.57a) et (3.57b) s'identifient respectivement à $\mathcal{P}_d$ et $\mathcal{P}_c$ au point critique, les lois de puissance données dans l'Eq. (3.11) vérifient nécessairement $\eta = \bar{\eta}$. La supersymétrie implique donc toujours $\theta = 2$, comme dans l'approximation de champ moyen, et la fonction de réponse est complètement déterminée par le propagateur déconnecté.

viii. Notons que ces supersymétries sont radicalement différentes des supersymétries généralement considérées en physique des particules. En effet, les générateurs de ces symétries transforment un boson de spin 0 en un fermion de spin 0. Ce dernier viole le théorème spin-statistique et ne peut donc être associé à une particule physique d'une théorie minkowskienne.

Preuves de la réduction dimensionnelle

La propriété de réduction dimensionnelle découle elle aussi simplement de l'invariance sous les super-rotations de la théorie $\mathcal{S}_\star$. De façon intuitive, l'opération d'intégration est égale à la dérivation pour les variables grassmanniennes et celles-ci jouent en quelque sorte le rôle de dimensions négatives dans la mesure d'intégration [PS79]. Il n'est effectivement pas difficile d'établir la relation suivante :

$$\int_{\underline{x}} f(\underline{x}^2) = \frac{4\pi}{\Delta} \int d^{d-2}y\, f(y^2) \tag{3.58}$$

où f est une fonction quelconque (dérivable) et y désigne un vecteur dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^{d-2}$. Ainsi, lorsqu'on intègre dans le super-espace une fonction ne dépendant que de la norme, il vient un résultat proportionnel à la même intégrale sur un espace euclidien de dimension $d-2$. La théorie explicitement invariante sous les super-rotations (Eq. (3.46)) et la relation ci-dessus permettent de comprendre l'origine de la réduction dimensionnelle.

Il sera pratique pour la suite de considérer des coordonnées dans l'espace réciproque aussi bien pour les composantes euclidiennes que grassmanniennes. On définit alors la transformée de Fourier du super-champ.

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{q}) &= \int_{\underline{x}} \Phi(\underline{x})\, e^{-iq.x}\, e^{i(\theta\bar{\eta}-\bar{\theta}\eta)} \\ &= \hat{\phi}(q) + i\bar{\eta}\,\psi(q) + i\,\bar{\psi}(q)\eta + \bar{\eta}\eta\,\phi(q)\end{aligned} \tag{3.59}$$

$\underline{q} = (q, \eta, \bar{\eta})$ désigne un vecteur du super-espace réciproque ; η et $\bar{\eta}$ s'interprètent comme des impulsions grassmanniennes. La transformation inverse de l'Eq. (3.59) s'exprime par :

$$\Phi(\underline{x}) = \int_{\underline{q}} \Phi(\underline{q})\, e^{iq.x}\, e^{-i(\theta\bar{\eta}-\bar{\theta}\eta)} \tag{3.60}$$

et nous avons également posé $\int_{\underline{q}} = \int_q \int d\eta d\bar{\eta}$. L'impulsion se comporte comme un vecteur covariant et la norme au carré d'une super-impulsion s'écrit donc :

$$\underline{q}^2 = g^{ij} q_i q_j = q^2 + \Delta\eta\bar{\eta} \tag{3.61}$$

Il vient la relation analogue à l'Eq. (3.58) dans l'espace réciproque :

$$\int_{\underline{q}} f(\underline{q}^2) = \frac{\Delta}{4\pi} \int \frac{d^{d-2}p}{(2\pi)^{d-2}} f(p^2) \tag{3.62}$$

Il est possible d'énoncer des règles de Feynman pour la théorie du super-champ (Eq. (3.46)) directement dans le super-espace. Les diagrammes sont alors formellement les mêmes que ceux de la théorie ϕ^4 standard mais font intervenir des intégrales sur des super-impulsions. Puisque l'action de l'Eq.(3.46) est invariante sous les super-rotations, l'intégrale à calculer pour un diagramme à l boucles est de la forme $\int_{\underline{q}_1,\cdots,\underline{q}_l} f(\underline{q}_1^2,\cdots,\underline{q}_l^2)$. En utilisant l'Eq. (3.62), sa contribution est donc proportionnelle au même diagramme dans la théorie ϕ^4 pure en dimension $d-2$. Cela constitue une preuve perturbative de la réduction dimensionnelle à tous les ordres.

Notons qu'il existe également des preuves non perturbatives de la réduction dimensionnelle à partir de la supersymétrie [Car83, KP83, KLP84, Tis12]. L'une d'entre elles consiste à introduire une fonction de partition $\mathcal{Z}_\lambda[j]$; lorsque λ varie, cette dernière interpole entre la fonction de partition supersymétrique décrite précédemment et celle du modèle pur en dimension $d-2$. La conclusion vient alors en montrant que les fonctions de corrélation calculées avec $\mathcal{Z}_\lambda$ ne dépendent pas du paramètre λ.

3.6 Formalisme

La propriété de réduction dimensionnelle est démontrée par la théorie de perturbation ainsi que par la formulation supersymétrique. Cependant, tel que déjà précisé, cette propriété est fausse à basse dimension puisque le modèle présente une transition de phase en dimension 3 [Imb84, BK87, BK88]. On souligne ici les insuffisances de la construction supersymétrique ; en particulier, certaines singularités susceptibles d'influencer le comportement critique ne sont pas prises en compte dans le formalisme de Parisi-Sourlas. Nous présentons ensuite une approche surmontant ces difficultés ; celle-ci a été développée récemment par Tarjus et Tissier dans [TT11b, TT12a, TT12b].

3.6.1 Insuffisances de la construction supersymétrique

Il est clair que la construction supersymétrique de la section 3.5.1 n'est pas valable s'il existe plusieurs solutions à l'équation stochastique (Eq. (3.31)), autrement dit, si l'action $\mathcal{S}$ possède plusieurs extrema. Le passage de l'Eq. (3.35) à l'Eq. (3.36) pour la fonction de partition $\mathcal{Z}_B$ n'est alors pas justifié. Alors que seul l'état fondamental est sélectionné dans l'Eq. (3.35), l'intégrale de l'Eq. (3.36) somme sur tous les extrema. Cette dernière peut effectivement se réécrire :

$$\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},h] = \int \mathcal{D}\phi \left(\sum_i s(i)\delta(\phi-\phi_i)\right) e^{\hat{j}.\phi} = \sum_i s(i)\, e^{\hat{j}.\phi_i} \tag{3.63}$$

où les ϕ_i sont les solutions distinctes de l'équation différentielle stochastique. Le facteur $s(i)$ vaut ± 1 en fonction du nombre pair ou impair de directions instables de l'extremum

en question. Lorsque la source $\hat{j}$ est nulle, $\mathcal{Z}_B$ n'est plus égal à 1 comme sous l'hypothèse d'une solution unique. On obtient effectivement $\mathcal{Z}_B[j, \hat{j} = 0, h] = \sum_i s(i)$.

Un autre problème concerne les avalanches intervenant dans le système à température nulle ; ces dernières correspondent à des discontinuités du paramètre d'ordre lorsqu'on varie la source externe. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la construction supersymétrique originale et peut, en outre, influencer les propriétés physiques du système [TBT13]. Nous montrons dans le chapitre suivant qu'en présence d'avalanches, le propagateur déconnecté généralisé pour deux copies du système couplées à des sources différentes possède un comportement singulier en fonction des sources. Plus précisément, la transformée de Fourier de la fonction de corrélation :

$$\overline{\phi^\star[j_1, h]\, \phi^\star[j_2, h]} - \overline{\phi^\star[j_1, h]}\, \overline{\phi^\star[j_2, h]} \tag{3.64}$$

présente, à impulsion nulle, une non analyticité en $|j_1 - j_2|$ lorsque $j_2 \to j_1$ (les sources j_1 et j_2 sont choisies uniformes pour chacune des deux copies). Il est connu que ce type de singularité est fondamental pour comprendre la physique de nombreux systèmes désordonnés [Fis86a, BF93, BBM96, CGLD00, LDWC02, LDWC04, LDW09, LD10]. Nous revenons en détail sur les avalanches dans le chapitre suivant ; on montrera alors que celles-ci représentent la raison physique de la brisure de réduction dimensionnelle dans le modèle d'Ising en champ aléatoire.

3.6.2 Sélectionner l'état fondamental

On présente ici une extension du formalisme de Parisi-Sourlas permettant de résoudre le premier problème, c'est à dire de sélectionner uniquement l'état fondamental dans la fonction de partition [TT12a].

Une méthode simple est d'introduire un facteur de poids supplémentaire dans $\mathcal{Z}_B$ qui favorise la solution minimisant l'action. On remplace alors la fonction de partition de l'Eq. (3.63) par la suivante :

$$\mathcal{Z}_{B,\beta}[j, \hat{j}, h] = \sum_i s(i)\, e^{-\beta \mathcal{S}[\phi_i, j, h] + \hat{j}.\phi_i} \tag{3.65}$$

où β^{-1} est une température auxiliaire. Lorsque celle-ci tend vers 0, seul l'état fondamental contribue à la somme ci-dessus. [ix]

Il est intéressant de répéter la construction supersymétrique de la section 3.5.1 à partir de cette nouvelle fonction de partition. Après avoir représenté le delta de Dirac fonctionnel

ix. Plus précisément, dès que β^{-1} est inférieur au gap en énergie séparant l'état fondamental du premier état excité, la somme dans l'Eq. (3.65) est dominée par l'état fondamental.

et le déterminant à l'aide du champ de réponse et des deux champs grassmanniens, il vient :
(3.66)

$$\mathcal{Z}_{B,\beta}[j,\hat{j},K,\bar{K},h] = \int \mathcal{D}\phi\mathcal{D}\hat{\phi}\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\; e^{-\beta\mathcal{S}[\phi,j,h]-\hat{\phi}.(\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi]-h-j)+\hat{j}.\phi+\bar{\psi}.\mathcal{S}_B^{(2)}[\phi].\psi+\psi.\bar{K}+K.\bar{\psi}}$$

En utilisant le champ Φ et la source $\mathcal{J}$ définis dans le formalisme du super-espace, on réécrit l'argument de l'exponentielle tel que :

$$\mathcal{Z}_{B,\beta}[j,\hat{j},K,\bar{K},h] = \mathcal{Z}_{B,\beta}[\mathcal{J},h] = \int \mathcal{D}\Phi\; e^{-\mathcal{S}_{\star,\beta}[\Phi,h]+\mathcal{J}.\Phi} \tag{3.67}$$

avec :

$$\mathcal{S}_{\star,\beta}[\Phi,h] = \int_x \int_{\underline{\theta}} -\frac{1}{2}\Phi(\underline{x})\,\partial^2\,\Phi(\underline{x}) + U(\Phi(\underline{x})) - h(x)\Phi(\underline{x}) \tag{3.68}$$

et :

$$\mathcal{J}.\Phi = \int_x \int_{\underline{\theta}} \mathcal{J}(\underline{x})\Phi(\underline{x}) \tag{3.69}$$

La mesure d'intégration sur le super-espace n'est pas triviale comme précédemment ; l'intégrale sur les variables de Grassmann implique désormais un polynôme en θ et $\bar{\theta}$:

$$\int_{\underline{\theta}} = \int d\theta d\bar{\theta}\,(1+\beta\bar{\theta}\theta) = \int d\theta d\bar{\theta}\,\sqrt{g} \tag{3.70}$$

$\sqrt{g}$ peut s'interpréter comme la mesure d'un espace courbe dans les directions grassmanniennes.

Contrairement au formalisme original, la fonction de partition $\mathcal{Z}_{B,\beta}$ n'est pas égale à 1 lorsque la source $\hat{j}$ est nulle. En ce sens, la simplicité de la construction de Parisi-Sourlas est perdue ; il n'est plus possible de moyenner directement la fonction de partition pour générer les fonctions de corrélation $\overline{\phi^\star(x_1)\cdots\phi^\star(x_n)}$. On obtient en effet :

$$\left.\frac{\delta^n\overline{\mathcal{Z}_{B,\beta}}}{\delta\hat{j}(x_1)\cdots\delta\hat{j}(x_n)}\right|_{\hat{j}=K=\bar{K}=0} = \sum_i s(i)\;\overline{\phi_i(x_1)\cdots\phi_i(x_n)e^{-\beta\mathcal{S}[\phi_i,j,h]}} \tag{3.71}$$

et cela n'a pas de sens physique, même dans la limite $\beta^{-1}\to 0$.

3.6.3 Formalisme à plusieurs copies

On ne peut moyenner directement la fonction de partition $\mathcal{Z}_{B,\beta}$ pour générer les fonctions de corrélation. On se concentre donc, comme habituellement, sur son logarithme :

$$\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J},h] = \log\mathcal{Z}_{B,\beta}[\mathcal{J},h] \tag{3.72}$$

L'énergie libre $\mathcal{W}_\beta$ est une fonctionnelle aléatoire. Celle-ci peut être définie à partir de sa distribution de probabilité, ou bien par la donnée de ses cumulants : [x]

$$\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J},h]} \tag{3.73a}$$

$$\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_1,h]\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_2,h]} - \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_1,h]}\,\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_2,h]} \tag{3.73b}$$

etc. Travailler avec ces derniers est avantageux puisqu'ils font uniquement intervenir des moyennes sur le désordre ; l'invariance par translation et rotation dans l'espace euclidien est rétablie. [xi]

On présente ici un formalisme basé sur les cumulants. On veille à ce que celui-ci surmonte la seconde difficulté de la construction originale de Parisi-Sourlas, c'est à dire qu'il prenne en compte les avalanches [TT12a]. Lorsque ces dernières sont présentes, les fonctions de corrélation pour plusieurs copies du système couplées à des sources différentes possèdent une dépendance singulière par rapport aux sources [TBT13]. Ainsi, pour observer ces singularités, il est nécessaire de conserver l'entière dépendance fonctionnelle des cumulants et de les étudier pour des sources quelconques, non nécessairement égales. On utilise, dans ce but, une version modifiée de l'approche par la méthode des répliques en brisant explicitement la symétrie entre les répliques. On calcule alors la moyenne de la fonction de partition associée à n copies indépendantes du système, dans la même réalisation du désordre, mais couplées à des super-sources différentes $\mathcal{J}_1,\cdots,\mathcal{J}_n$:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_\beta[\{\mathcal{J}\}] &= \overline{\prod_{a=1}^{n}\mathcal{Z}_{B,\beta}[\mathcal{J}_a,h]}\\ &= \int\mathcal{D}\mu[h]\int\prod_a\mathcal{D}\Phi_a e^{-\sum_a\left(\mathcal{S}_{\star,\beta}[\Phi_a,h]-\mathcal{J}_a.\Phi_a\right)}\\ &= \int\prod_a\mathcal{D}\Phi_a e^{-\mathcal{S}_{R,\beta}[\{\Phi\}]+\sum_a\mathcal{J}_a.\Phi_a}\end{aligned} \tag{3.74}$$

où l'action à plusieurs copies s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{R,\beta}[\{\Phi\}] = &\sum_a\int_x\int_{\underline{\theta}}-\frac{1}{2}\Phi_a(\underline{x})\,\partial^2\,\Phi_a(\underline{x})+U(\Phi_a(\underline{x}))\\ &-\frac{\Delta}{2}\sum_{a_1a_2}\int_x\int_{\underline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2}\Phi_{a_1}(x,\theta_1,\bar{\theta}_1)\Phi_{a_2}(x,\theta_2,\bar{\theta}_2)\end{aligned} \tag{3.75}$$

Par opposition avec la construction supersymétrique originale, les variables bosoniques et grassmanniennes n'apparaissent pas sur un pied d'égalité par cette nouvelle approche.

x. A condition évidemment que ceux-ci existent.
xi. Celle-ci est brisée par le champ aléatoire $h = h(x)$.

Dans le formalisme de Parisi-Sourlas, le désordre intervenait dans l'action à travers des dérivées par rapport aux coordonnées grassmanniennes ; cela permettant d'introduire un super-laplacien. Ici, le terme équivalent associé au désordre est représenté par l'interaction à deux répliques, et fait intervenir une intégrale sur quatre variables de Grassmann. Notons, de plus, que l'action microscopique $\mathcal{S}_{R,\beta}$ ne contient aucune dérivée par rapport aux coordonnées grassmanniennes.

Cumulants de l'énergie libre

Afin d'établir le lien entre les différentes observables physiques et la fonction de partition $\mathcal{Z}_\beta$, on introduit $\mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}] = \log \mathcal{Z}_\beta[\{\mathcal{J}\}]$ et on réécrit l'Eq. (3.74) comme :

(3.76)
$$\begin{aligned} e^{\mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}]} &= \overline{\exp\Big(\sum_a \mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_a, h]\Big)} \\ &= \overline{1 + \sum_a \mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_a, h] + \frac{1}{2}\sum_{a_1 a_2} \mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_1}, h]\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_2}, h] + \cdots} \\ &= \exp\Big(\sum_a \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_a, h]} + \frac{1}{2}\sum_{a_1 a_2}\big(\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_1}, h]\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_2}, h]} - \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_1}, h]}\,\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_{a_2}, h]}\big) + \cdots\Big) \end{aligned}$$

L'argument de l'exponentielle dans la dernière ligne génère les cumulants de l'énergie libre. Ainsi, $\mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}]$ s'exprime sous la forme d'un développement en sommes de répliques indépendantes :

$$\mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}] = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \sum_{a_1 \cdots a_p} \mathcal{W}_{\beta,p}[\mathcal{J}_{a_1}, \cdots, \mathcal{J}_{a_p}] \tag{3.77}$$

et $\mathcal{W}_{\beta,p}$ s'identifie au p-ième cumulant de l'énergie libre avec des sources différentes sur chaque copie :

$$\mathcal{W}_{\beta,1}[\mathcal{J}] = \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}, h]} \tag{3.78a}$$

$$\mathcal{W}_{\beta,2}[\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2] = \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_1, h]\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_2, h]} - \overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_1, h]}\,\overline{\mathcal{W}_\beta[\mathcal{J}_2, h]} \tag{3.78b}$$

etc. Le premier cumulant contient les propriétés thermodynamiques du système moyennées sur le désordre. En particulier, la dérivée de celui-ci par rapport à la source $\hat{j}$ s'exprime donc par :

$$\left.\frac{\delta \mathcal{W}_{\beta,1}}{\delta \hat{j}(x)}\right|_{\hat{j}=K=\bar{K}=0} = \overline{\frac{\sum_i s(i)\phi_i(x)e^{-\beta\mathcal{S}[\phi_i,j,h]}}{\sum_i s(i)e^{-\beta\mathcal{S}[\phi_i,j,h]}}} \tag{3.79}$$

où l'on a utilisé la définition de l'Eq. (3.65). Si le paramètre β est choisi suffisamment grand, cette somme est dominée par la contribution de l'état fondamental. On obtient de

cette manière :

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\delta \mathcal{W}_{\beta,1}}{\delta \hat{j}(x)}\bigg|_{\hat{j}=K=\bar{K}=0} = \overline{\phi^\star(x)} \tag{3.80}$$

Ce qui correspond bien au paramètre d'ordre défini dans le problème initial. En appliquant le même raisonnement au second cumulant, on peut également établir :

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\delta^2 \mathcal{W}_{\beta,2}[\mathcal{J}_1,\mathcal{J}_2]}{\delta \hat{j}_1(x)\delta \hat{j}_2(x)}\bigg|_{\hat{j}=K=\bar{K}=0} = \overline{\phi^\star(x)\phi^\star(y)} - \overline{\phi^\star(x)}\,\overline{\phi^\star(y)} \tag{3.81}$$

Nous retrouvons ainsi le propagateur déconnecté $\mathcal{P}_d$ introduit dans le chapitre précédent. En présence d'avalanches, c'est précisément cette dérivée seconde qui comporte une singularité lorsque les sources tendent vers une même valeur. L'étude du terme à deux répliques $\mathcal{W}_{\beta,2}$ est donc nécessaire pour prendre en compte l'effet des avalanches, et expliquer la brisure de la réduction dimensionnelle.

Action effective

On souhaite étudier la théorie $\mathcal{S}_{R,\beta}$ d'une façon non perturbative en utilisant l'approche du groupe de renormalisation par l'action effective courante. Puisque cette dernière repose sur la transformée de Legendre de l'énergie libre, on s'attache à définir celle-ci dans le super-espace, puis à en déduire certaines de ses propriétés.

En raison de la mesure courbée couplant les champs aux sources dans l'intégrale fonctionnelle de l'Eq. (3.74), [xii] la moyenne du super-champ s'exprime par :

$$\Phi_a(\underline{x}) = g(\theta,\bar{\theta})^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta \mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}]}{\delta \mathcal{J}_a(\underline{x})} \tag{3.82}$$

Afin de ne pas surcharger les notations, nous écrivons également Φ pour la moyenne du champ fondamental. La transformée de Legendre de l'énergie libre est définie telle que :

$$\Gamma_\beta[\{\Phi\}] = \sum_a \mathcal{J}_a.\Phi_a - \mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}] \tag{3.83}$$

où Φ vérifie l'Eq. (3.82). Comme habituellement, la source s'obtient en dérivant l'action effective :

$$\mathcal{J}_a(\underline{x}) = g(\theta,\bar{\theta})^{-\frac{1}{2}} \frac{\delta \Gamma_\beta[\{\Phi\}]}{\delta \Phi_a(\underline{x})} \tag{3.84}$$

xii. On rappelle que $\sum_a \mathcal{J}_a.\Phi_a = \sum_a \int_x \int d\theta d\bar{\theta}\,(1+\beta\bar{\theta}\theta)\mathcal{J}_a(\underline{x})\Phi_a(\underline{x})$.

A l'aide des relations précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\delta\Phi_{a_1}(\underline{x}_1)}{\delta\Phi_{a_2}(\underline{x}_2)} &= \delta_{a_1a_2}\delta(\underline{x}_1-\underline{x}_2)\\ &= \sum_{a_3}\int_{x_3}\int d\theta_3 d\bar{\theta}_3\,\frac{\delta\Phi_{a_1}(\underline{x}_1)}{\delta\mathcal{J}_{a_3}(\underline{x}_3)}\,\frac{\delta\mathcal{J}_{a_3}(\underline{x}_3)}{\delta\Phi_{a_2}(\underline{x}_2)}\\ &= \sum_{a_3}\int_{x_3}\int_{\underline{\theta}_3} g(\theta_1,\bar{\theta}_1)^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta^2\mathcal{W}_\beta[\{\mathcal{J}\}]}{\delta\mathcal{J}_{a_1}(\underline{x}_1)\delta\mathcal{J}_{a_3}(\underline{x}_3)}\,g(\theta_3,\bar{\theta}_3)^{-1}\frac{\delta^2\Gamma_\beta[\{\Phi\}]}{\delta\Phi_{a_3}(\underline{x}_3)\delta\Phi_{a_2}(\underline{x}_2)}\end{aligned} \tag{3.85}$$

La fonction $\delta(\underline{x}_1-\underline{x}_2)=\delta(x_1-x_2)\delta(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)\delta(\theta_1-\theta_2)=\delta(x_1-x_2)(\bar{\theta}_1-\bar{\theta}_2)(\theta_1-\theta_2)$ généralise le delta de Dirac dans le super-espace ; elle vérifie $\int_x\int d\theta d\bar{\theta}\, f(\underline{x})\delta(\underline{x}-\underline{x}')=f(\underline{x}')$. En conséquence, le propagateur $\mathcal{W}_\beta^{(2)}$ s'identifie comme habituellement à l'opérateur inverse du vertex à deux points $\Gamma_\beta^{(2)}$.

A la manière de l'énergie libre, le potentiel de Gibbs peut se développer en sommes de répliques indépendantes :

$$\Gamma_\beta[\{\Phi\}]=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\sum_{a_1\cdots a_p}\Gamma_{\beta,p}[\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_p}] \tag{3.86}$$

où $\Gamma_{\beta,p}$ est complètement symétrique sous les permutations de ses p arguments, et indépendant du nombre total de copies n. Le signe -1 devant les sommes sur un nombre pair de répliques est choisi par convenance. Il est possible de relier les $\Gamma_{\beta,p}$ aux $\mathcal{W}_{\beta,p}$ en remplaçant $\mathcal{J}_a$ par son expression, Eq. (3.84), dans la définition de l'action effective (Eq. (3.83)). En développant ensuite les deux membres de cette dernière en sommes de répliques, et en identifiant les termes faisant intervenir le même nombre de sommes, on obtient pour les deux premiers cumulants :

$$\Gamma_{\beta,1}[\Phi]=\mathcal{J}_1[\Phi].\Phi-\mathcal{W}_{\beta,1}[\mathcal{J}_1[\Phi]] \tag{3.87a}$$

$$\Gamma_{\beta,2}[\Phi_1,\Phi_2]=\mathcal{W}_{\beta,2}[\mathcal{J}_1[\Phi_1],\mathcal{J}_1[\Phi_2]] \tag{3.87b}$$

où la source $\mathcal{J}_1[\Phi]$ est définie telle que :

$$\mathcal{J}_1[\Phi](\underline{x})=g(\theta,\bar{\theta})^{-\frac{1}{2}}\frac{\delta\Gamma_{\beta,1}}{\delta\Phi(\underline{x})} \tag{3.88}$$

Ainsi, $\Gamma_{\beta,1}$ s'identifie à la transformée de Legendre de $\mathcal{W}_{\beta,1}$. En particulier, l'opérateur $\Gamma_{\beta,1}^{(2)}$ correspond à l'inverse du propagateur connecté $\mathcal{W}_{\beta,1}^{(2)}$. Concernant le terme à deux répliques, puisque $\Gamma_{\beta,2}$ est directement relié à $\mathcal{W}_{\beta,2}$, la présence des avalanches se traduit également par un comportement singulier de $\Gamma_{\beta,2}$ lorsque $\Phi_2\to\Phi_1$. Plus précisément, cette

non analyticité doit se manifester dans la fonction de vertex $\Gamma^{(1,1)}_{\beta,2}$, celle-ci étant reliée au propagateur déconnecté (voir Eq. (3.81)) par :

$$\Gamma^{(1,1)}_{\beta,2}[\Phi_1,\Phi_2] = \Gamma^{(2)}_{\beta,1}[\Phi_1]\,\mathcal{W}^{(1,1)}_{\beta,2}[\mathcal{J}_1[\Phi_1],\mathcal{J}_1[\Phi_2]]\,\Gamma^{(2)}_{\beta,1}[\Phi_2] \tag{3.89}$$

Dans la limite $\beta^{-1} \to 0$ où l'état fondamental domine, l'action effective présente une propriété formelle dite d'ultra-localité grassmannienne [TT12a, Tis12]. Les termes intervenant dans son développement en sommes de répliques libres prennent alors la forme suivante :

$$\Gamma_{\beta,p}[\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_p}] = \int_{\underline{\theta}_1}\cdots\int_{\underline{\theta}_p}\Gamma_p[\Phi_{a_1}(\theta_1,\bar{\theta}_1),\cdots,\Phi_{a_p}(\theta_p,\bar{\theta}_p)] \tag{3.90}$$

où la densité Γ_p qui apparaît dans le membre de droite est appelée partie ultra-locale de $\Gamma_{\beta,p}$. Celle-ci ne contient pas de dérivée par rapport aux coordonnées grassmanniennes et ne dépend de ces dernières qu'à travers les super-champs. Les parties ultra-locales sont, de plus, indépendantes de la température auxiliaire β^{-1}. Elles font intervenir une intégrale sur l'espace euclidien et sont donc encore des fonctionnelles des super-champs.

3.7 Approche par le groupe de renormalisation non perturbatif

On a développé dans la section précédente un formalisme permettant de sélectionner l'état fondamental du système, et de prendre en compte l'effet des avalanches. La réduction des contributions des états métastables à la fonction de partition est réalisée par l'introduction d'une température auxiliaire β^{-1}. Plus formellement, cette modification revient à travailler dans un super-espace courbé dans des directions grassmanniennes. Il est, en outre, nécessaire de préserver l'entière dépendance fonctionnelle des cumulants du désordre afin de ne pas perdre la trace des avalanches. Cela s'avère possible en considérant plusieurs copies du système désordonné couplées à des sources différentes. On étudie la théorie $\mathcal{S}_{R,\beta}$ finalement obtenue (Eq. (3.75)) pour un nombre arbitraire de répliques, en utilisant l'approche du groupe de renormalisation par l'action effective courante.

On commence par préciser la forme de la fonction de régularisation et définir l'action effective courante dans le super-espace courbe. En développant cette dernière en sommes de répliques non contraintes, tout comme l'énergie libre et le potentiel de Gibbs, on obtiendra les équations de flot exactes pour les deux premiers cumulants du désordre renormalisés. Nous discutons ensuite la troncation fonctionnelle minimale permettant de déterminer les propriétés critiques du modèle sans briser explicitement les symétries de l'action. A l'aide des équations de flot dérivées dans cette approximation, on caractérise finalement le point

fixe associé au comportement critique universel du modèle ; en particulier, un lien direct est établi entre les propriétés d'analyticité de ce dernier et la réduction dimensionnelle. Un des principaux résultats de l'étude qui suit est la brisure de réduction dimensionnelle en dessous d'une dimension critique $d_{DR} \simeq 5.13$ [TT11b, TT12b].

3.7.1 Le régulateur

L'intégration progressive des fluctuations lorsque l'on diminue l'échelle k se fait par l'ajout d'un terme de régularisation à l'action microscopique.

$$\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] = \mathcal{S}_{R,\beta}[\{\Phi\}] + \Delta\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] \tag{3.91}$$

avec :

$$\Delta\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] = \frac{1}{2}\sum_{a_1 a_2}\int_{x_1\,x_2}\int_{\underline{\theta}_1\underline{\theta}_2} \Phi_{a_1}(\underline{x}_1)\, R_k(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)_{a_1 a_2}\, \Phi_{a_2}(\underline{x}_2) \tag{3.92}$$

Avant de discuter la forme de la régularisation $\Delta\mathcal{S}_{k,\beta}$, nous écrivons également la fonction de partition modifiée à l'échelle k.

$$\mathcal{Z}_{k,\beta}[\{\mathcal{J}\}] = \int \prod_a \mathcal{D}\Phi_a e^{-\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] + \sum_a \mathcal{J}_a.\Phi_a} \tag{3.93}$$

Le régulateur est, comme d'habitude, quadratique dans les super-champs et permet de supprimer la contribution des modes lents dans $\mathcal{Z}_{k,\beta}$. Afin de préserver la forme et les symétries de l'action microscopique $\mathcal{S}_{R,\beta}$,[xiii] on choisit ce dernier tel que [TT12a, Tis12] :

$$R_k(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)_{a_1 a_2} = \delta_{a_1 a_2}\delta(\bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2)\delta(\theta_1 - \theta_2) g(\theta_1, \bar{\theta}_1)^{-\frac{1}{2}} \hat{R}_k(|x_1 - x_2|) + \tilde{R}_k(|x_1 - x_2|) \tag{3.94}$$

Les fonctions $\hat{R}$ et $\tilde{R}$ s'annulent lorsque $k = 0$; toutes les fluctuations sont alors prises en compte dans la fonction de partition et cela permet d'obtenir $\Gamma_{k=0,\beta} = \Gamma_\beta$ (Γ_β est le potentiel de Gibbs introduit dans l'Eq. (3.83) et l'action effective courante $\Gamma_{k,\beta}$ est définie ci-après). Dans l'autre limite, en $k = \Lambda$, il suffit d'imposer $\hat{R}(q) \to \infty\, \forall q$ et $\tilde{R}$ bornée pour geler tous les modes et retrouver la seconde condition asymptotique $\Gamma_{k=\Lambda,\beta} = \mathcal{S}_{R,\beta}$.

Lorsque $\beta = 0$, l'action microscopique est invariante sous les super-rotations si les sources sont prises uniformes dans le sous espace de Grassmann (c'est à dire $\hat{j}_a = \bar{K}_a = K_a = 0$) pour toutes les répliques sauf une. On retrouve en effet, dans ce cas, la construction supersymétrique originale de Parisi-Sourlas. On impose au terme de régularisation d'être

xiii. Les symétries du super-espace courbe ainsi que les conséquences de l'ultra-localité grassmannienne de l'action $\mathcal{S}_{R,\beta}$ sont discutées dans [Tis12].

invariant sous ces mêmes conditions. Cela se traduit alors par une relation supplémentaire entre les fonctions $\hat{R}_k$ et $\tilde{R}_k$ [TT11b, TT12a].

$$\tilde{R}_k(q) = -\Delta\, \partial_{q^2} \hat{R}_k(q) \tag{3.95}$$

Celle-ci doit être vérifiée afin de ne pas briser explicitement l'invariance sous les super-rotations au cours du flot.

3.7.2 Flot de l'action effective courante

On définit l'action effective courante de la façon habituelle comme la transformée de Legendre modifiée de l'énergie libre $\mathcal{W}_{k,\beta} = \log \mathcal{Z}_{k,\beta}$ (voir chapitre 2).

$$\Gamma_{k,\beta}[\{\Phi\}] = \sum_a \mathcal{J}_a.\Phi_a - \mathcal{W}_{k,\beta}[\{\mathcal{J}\}] - \Delta\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] \tag{3.96}$$

où Φ est la moyenne du champ fondamental calculée avec la fonction de partition $\mathcal{Z}_{k,\beta}$. Les manipulations effectuées dans le second chapitre afin d'établir l'équation de flot exacte pour Γ_k se généralisent facilement. En tenant compte de la courbure du super-espace, l'équation de Wetterich s'écrit :

(3.97)
$$\begin{aligned}\partial_t \Gamma_{k,\beta}[\{\Phi\}] &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\{\partial_t R_k\, \mathcal{P}_{k,\beta}[\{\Phi\}]\} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{a_1 a_2}\int_{x_1 x_2}\int_{\underline{\theta}_1\underline{\theta}_2} g(\theta_1,\bar{\theta}_1)^{-\frac{1}{2}} g(\theta_2,\bar{\theta}_2)^{-\frac{1}{2}}\, \partial_t R_k(\underline{x}_1,\underline{x}_2)_{a_1 a_2}\, \mathcal{P}_{k,\beta}[\{\Phi\}](\underline{x}_1,\underline{x}_2)_{a_1 a_2}\end{aligned}$$

où l'on a introduit $\mathcal{P}_{k,\beta}$ le propagateur de la théorie $\mathcal{S}_{k,\beta}$, c'est à dire l'inverse de l'opérateur $(\Gamma^{(2)}_{k,\beta} + R_k)$.

(3.98)
$$\begin{aligned}&\sum_{a_3}\int_{x_3}\int_{\underline{\theta}_3} g(\theta_1,\bar{\theta}_1)^{-\frac{1}{2}}\, \mathcal{P}_{k,\beta}[\{\Phi\}](\underline{x}_1,\underline{x}_3)_{a_1 a_3}\, g(\theta_3,\bar{\theta}_3)^{-1}\left(\frac{\delta^2\Gamma_{k,\beta}[\{\Phi\}]}{\delta\Phi_{a_3}(\underline{x}_3)\delta\Phi_{a_2}(\underline{x}_2)} + R_k(\underline{x}_3,\underline{x}_2)_{a_3 a_2}\right) \\ &= \delta_{a_1 a_2}\delta(\underline{x}_1 - \underline{x}_2)\end{aligned}$$

Tout comme l'énergie libre et le potentiel de Gibbs, on développe l'action effective courante en sommes de répliques indépendantes.

$$\Gamma_{k,\beta}[\{\Phi\}] = \sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\sum_{a_1\cdots a_p}\Gamma_{k,\beta,p}[\Phi_{a_1},\cdots,\Phi_{a_p}] \tag{3.99}$$

Les $\Gamma_{k,\beta,p}$ s'interprètent comme les cumulants du désordre renormalisé à l'échelle k. Ce développement en sommes de répliques, combiné à l'équation de Wetterich, génère une

hiérarchie d'équations de flot exactes pour les cumulants $\Gamma_{k,\beta,p}$. Sans rentrer dans les détails techniques permettant d'établir ces équations de flot,[xiv] faisons quelques remarques à propos de celles-ci. Insistons premièrement sur le fait que les cumulants sont des fonctionnelles des super-champs ; ces derniers contiennent donc l'information complète sur les fonctions de corrélation une particule irréductibles. En particulier, le premier cumulant donne accès à la thermodynamique du système moyennée sur le désordre. Notons, de plus, que le système d'équations de flot obtenu n'est pas fermé ; le flot du p-ième cumulant fait intervenir le cumulant d'ordre $p+1$. Précisons enfin qu'établir le flot $\partial_t\Gamma_{k,\beta,p}[\Phi_1,\cdots,\Phi_p]$ nécessite l'introduction d'au moins p copies du système. On suppose donc un nombre arbitrairement grand de répliques.

La hiérarchie d'équations de flot $\{\partial_t\Gamma_{k,\beta,p}\}_{p\geqslant 1}$ se simplifie en imposant la propriété d'ultra-localité grassmannienne à l'action effective courante (au sens de l'Eq. (3.90)). Les équations d'évolution portent alors sur les parties ultra-locales des cumulants du désordre renormalisés Γ_{kp} et ne dépendent plus du paramètre β. On évalue finalement ces dernières dans une configuration physique des super-champs, c'est à dire en les choisissant uniformes dans le sous espace de Grassmann $\Phi_a(\underline{x}) = \varphi(x)$. On utilise par la suite les équations de flot dérivées de cette façon pour les deux premiers cumulants. Afin d'écrire celles-ci, on introduit les propagateurs à une et deux répliques :

$$P_{k1}[\varphi] = \big(\Gamma^{(2)}_{k1}[\varphi] + \hat{R}_k\big)^{-1} \tag{3.100}$$

et :

$$P_{k2}[\varphi_1,\varphi_2] = P_{k1}[\varphi_1]\big(\Gamma^{(1,1)}_{k2}[\varphi_1,\varphi_2] - \tilde{R}_k\big)P_{k1}[\varphi_2] \tag{3.101}$$

Les équations de flot exactes des deux premiers cumulants renormalisés dans l'hypothèse d'ultra-localité grassmannienne sont les suivantes [TT12a] :

$$\partial_t\Gamma_{k1}[\varphi] = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int_{x\,y} P_{k1}[\varphi](x,y)\left(\Gamma^{(11)}_{k2}[\varphi,\varphi](x,y) - \tilde{R}_k(x,y)\right) \tag{3.102}$$

et :

(3.103)

$$\begin{aligned}\partial_t\Gamma_{k2}[\varphi_1,\varphi_2] = \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int_{x\,y}\Bigg(&-P_{k1}[\varphi_1](x,y)\,\Gamma^{(101)}_{k3}[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_1](x,y)\\ &+P_{k2}[\varphi_1,\varphi_1](x,y)\,\Gamma^{(20)}_{k2}[\varphi_1,\varphi_2](x,y) + \frac{1}{2}P_{k2}[\varphi_1,\varphi_2](x,y)\left(\Gamma^{(11)}_{k2}[\varphi_1,\varphi_2](x,y) - \tilde{R}_k(x,y)\right)\\ &+perm(12)\Bigg)\end{aligned}$$

où $\tilde{\partial}_t = \partial_t\hat{R}_k\partial_{\hat{R}_k} + \partial_t\tilde{R}_k\partial_{\tilde{R}_k}$ agit uniquement sur les fonctions de régularisation et $perm(12)$ dénote les termes obtenus en permutant les champs φ_1 et φ_2.

xiv. Ceux-ci se trouvent dans [TT12a].

3.7.3 Troncation minimale

On considère le cas où β est suffisamment grand pour que seul l'état fondamental soit pris en compte dans la fonction de partition. L'action effective courante présente alors la propriété d'ultra-localité grassmannienne. Il est clair que la hiérarchie d'équations de flot $\{\partial_t \Gamma_{kp}\}_{p\geqslant 1}$ obtenue pour les parties ultra-locales ne peut être résolue exactement ; il est nécessaire de procéder à des approximations. On discute ici une méthode d'approximation non perturbative et fonctionnelle, tout en étant compatible avec la supersymétrie.

Une procédure naturelle pour fermer les équations de flot est de tronquer $\Gamma_{k,\beta}$ dans son développement en sommes de répliques indépendantes, Eq. (3.99), en imposant que tous les termes soient nuls à partir d'un certain rang. Cela revient à développer le désordre renormalisé selon ses cumulants. Nous avons précisé que les avalanches induisent un comportement singulier dans le terme à deux répliques du Potentiel de Gibbs. Afin de prendre en compte ces dernières, le terme à deux champs de l'action effective courante doit donc être préservé dans la troncation, sans être développé selon les puissances des champs. On est ainsi conduit à considérer une troncation fonctionnelle contenant au moins Γ_{k1} et Γ_{k2}. On ferme alors les équations de flot en imposant $\Gamma_{kp} = 0$ pour tout $p \geqslant 3$; de cette manière, le désordre est toujours considéré comme gaussien au cours du flot.

On combine ensuite à cette approximation un ansatz fonctionnel pour Γ_{k1} et Γ_{k2} en utilisant le développement en dérivées du champ. Nous avons mis en évidence dans le chapitre 2 que celui-ci est particulièrement adapté à l'étude du comportement critique à grande distance. Notons que l'on ne peut utiliser l'approximation du potentiel local pour Γ_{k1}. En effet, lorsque la théorie est invariante sous les super-rotations, les identités de Ward-Takahashi associées imposent une relation entre Γ_{k1} et Γ_{k2}. En champ uniforme, celle-ci s'exprime par [TT11b, TT12a] :

$$\Gamma^{(11)}_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q) = \Delta\partial_{q^2}\Gamma^{(2)}_{k1}[\varphi](q,-q) \tag{3.104}$$

Dans l'approximation du potentiel local pour Γ_{k1}, on obtient donc $\Gamma^{(11)}_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q) = \Delta$. Cette dernière égalité est bien trop restrictive pour décrire la physique du modèle d'Ising en champ aléatoire. On est donc amené à considérer au moins l'ordre suivant du développement en dérivées du champ pour tronquer Γ_{k1}.

Finalement, la troncation minimale permettant d'étudier la physique à longue distance du modèle sans briser explicitement la supersymétrie est la suivante :

$$\Gamma_{k1}[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_k(\varphi(x))\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + U_k(\varphi(x)) \tag{3.105a}$$

$$\Gamma_{k2}[\varphi_1,\varphi_2] = \int_x V_k(\varphi_1(x),\varphi_2(x)) \tag{3.105b}$$

et tous les cumulants d'ordre supérieur sont nuls $\Gamma_{kp} = 0\,\forall p \geqslant 3$. On a utilisé le développement en dérivées du champ $O(\partial_\mu^2)$ pour Γ_{k1}, et l'approximation du potentiel local pour Γ_{k2}. Le potentiel renormalisé U_k contient les propriétés thermodynamiques du système et la fonction Z_k représente la renormalisation du champ. En champ uniforme, la quantité $\Delta_k(\varphi_1, \varphi_2) = V_k^{(11)}(\varphi_1, \varphi_2)$ s'interprète, quant à elle, comme le second cumulant du désordre renormalisé à l'échelle k. La relation de l'Eq. (3.104) exprimant l'invariance sous les super-rotations se ré-écrit dans cette approximation :

$$\Delta_k(\varphi, \varphi) = \Delta Z_k(\varphi) \tag{3.106}$$

On imposera $Z_\Lambda(\varphi) = 1$, $U_\Lambda(\varphi) = U(\varphi)$ et $V_\Lambda(\varphi_1, \varphi_1) = \Delta\varphi_1\varphi_2$ en condition initiale du flot, de sorte que $\Gamma_{\Lambda,\beta} = \mathcal{S}_{R,\beta}$.

Comme habituellement, on établit les équations de flot approchées pour les fonctions U_k, Z_k et V_k prises dans une configuration homogène des champs en insérant la troncation précédente dans les équations exactes Eqs. (3.102) et (3.103). Les propagateurs renormalisés à un et deux champs définis précédemment s'écrivent en transformée de Fourier :

$$P_{k1}[\varphi](q, -q) = \frac{1}{Z_k(\varphi)q^2 + U_k''(\varphi) + \hat{R}_k(q)} \tag{3.107}$$

et :

$$P_{k2}[\varphi_1, \varphi_2](q, -q) = P_{k1}[\varphi_1](q, -q)\Big(\Delta_k(\varphi_1, \varphi_2) - \tilde{R}_k(q)\Big)P_{k1}[\varphi_2](q, -q) \tag{3.108}$$

φ et φ_i avec $i = 1, 2$ désignent des champs uniformes dans l'espace ; cela est valable pour toute la suite. L'équation d'évolution du potentiel effectif courant dans la troncation minimale s'écrit finalement :

$$\partial_t U_k(\varphi) = \frac{1}{v}\,\partial_t \Gamma_{k1}[\varphi] = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_q \left(V_k^{(1,1)}(\varphi, \varphi) - \tilde{R}_k(q)\right) P_{k1}[\varphi](q, -q) \tag{3.109}$$

où $v = \int_x 1$ est le volume total du système. Concernant la renormalisation du champ, on

obtient :

(3.110)

$$\partial_t Z_k(\varphi) = \frac{d}{dp^2}\partial_t \Gamma^{(2)}_{k1}[\varphi](p,-p)\Big|_{p=0} = \tilde{\partial}_t \int_q \Bigg(\frac{1}{2} Z''_k(\varphi) P_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q)$$
$$+ \big(V_k^{(2,1)}(\varphi,\varphi) + V_k^{(1,2)}(\varphi,\varphi)\big)\big(U'''_k(\varphi) + q^2 Z'_k(\varphi)\big) P_{k1}[\varphi](q,-q)\big(\partial_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q) + \frac{2q^2}{d}\partial^2_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q)\big)$$
$$+ \big(V_k^{(2,1)}(\varphi,\varphi) + V_k^{(1,2)}(\varphi,\varphi)\big) Z'_k(\varphi) P_{k1}[\varphi](q,-q)\big(P_{k1}[\varphi](q,-q) + \frac{2q^2}{d}\partial_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q)\big)$$
$$- \big(U'''_k(\varphi) + q^2 Z'_k(\varphi)\big)^2 P_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q)\big(\partial_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q) + \frac{2q^2}{d}\partial^2_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q)\big)$$
$$- 2Z'_k(\varphi)\big(U'''_k(\varphi) + q^2 Z'_k(\varphi)\big) P_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q)\big(P_{k1}[\varphi](q,-q) + \frac{2q^2}{d}\partial_{q^2} P_{k1}[\varphi](q,-q)\big)$$
$$- \frac{q^2}{d} Z'_k(\varphi)^2 P_{k2}[\varphi,\varphi](q,-q) P_{k1}[\varphi](q,-q)\Bigg)$$

et pour la fonction à deux répliques V_k :

(3.111)

$$\partial_t V_k(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{1}{v}\,\partial_t \Gamma_{k2}[\varphi_1,\varphi_2]$$
$$= \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_q \Big(V_k^{(2,0)}(\varphi_1,\varphi_2) P_{k2}[\varphi_1,\varphi_1](q,-q) + \frac{1}{2}\big(V_k^{(1,1)}(\varphi_1,\varphi_2) - \tilde{R}_k(q)\big) P_{k2}[\varphi_1,\varphi_2](q,-q) + perm(12)\Big)$$

On rappelle qu'il est nécessaire d'imposer une relation entre les régulateurs $\hat{R}_k$ et $\tilde{R}_k$ intervenant dans les Eqs. (3.109), (3.110) et (3.111) afin de ne pas briser explicitement les identités de Ward-Takahashi associées à l'invariance par super-rotation. On prendra ici :

$$\tilde{R}_k(q) = -\frac{\Delta_{0k}}{Z_{0k}}\,\partial_{q^2}\hat{R}_k(q) \tag{3.112}$$

avec $Z_{0k} = Z_k(0)$ et $\Delta_{0k} = \Delta_k(0,0)$. Lorsque l'action effective courante est invariante sous les super-rotations, l'identité de l'Eq. (3.106) implique $\Delta_{0k}/Z_{0k} = \Delta$ et la relation ci-dessus s'identifie donc à celle de l'Eq. (3.95).

3.7.4 Quantités sans dimension

On introduit des variables sans dimension adaptées afin de déterminer un point fixe du groupe de renormalisation. On dérive ensuite les fonctions beta pour ces nouvelles quantités.

Dans le but d'obtenir un point fixe décrivant les propriétés universelles du système au voisinage de son point critique, les équations du groupe de renormalisation doivent porter

sur des quantités dé-dimensionnées. Comme nous l'avons abordé dans la section 3.4, le point fixe associé à la transition du modèle d'Ising en champ aléatoire a la particularité d'être à température nulle. Cela confère un comportement d'échelle inhabituel aux différentes grandeurs physiques ; plus précisément, on s'attend aux lois de puissance suivantes au point critique [Vil85a, Fis86b, TT04b] :

$$Z_k \sim k^{-\eta}, \qquad \varphi \sim Z_k^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{d-2}{2}} T_k^{-\frac{1}{2}} \sim k^{\frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta})}, \qquad U_k \sim k^d T_k^{-1} \sim k^{d-\theta}, \tag{3.113}$$

où $T_k \sim k^\theta$ est une température renormalisée et $\theta = 2+\eta-\bar{\eta}$. Ainsi, la dimension du champ est modifiée par rapport à sa valeur standard $(d-2+\eta)/2$ en :

$$d_\phi = \frac{1}{2}(d-\theta-2+\eta) = \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}) \tag{3.114}$$

La dimension d'échelle du potentiel à deux répliques V_k est également changée par la présence de la température effective :

$$V_k \sim k^d T_k^{-2} \sim k^{d-2\theta} \tag{3.115}$$

et le second cumulant du désordre renormalisé se comporte donc comme $\Delta_k \sim k^{\bar{\eta}-2\eta}$.

On considère alors les paramètres $Z_{0k} = Z_k(0)$ pour la renormalisation du champ et $\Delta_{0k} = \Delta_k(0,0)$ pour l'intensité du désordre renormalisé ; des exposants courants (i.e. k-dépendants) η_k et $\bar{\eta}_k$ sont déduits de ces derniers par :

$$\eta_k = -\partial_t \log Z_{0k} \tag{3.116a}$$

$$\bar{\eta}_k = \partial_t \log \Delta_{0k} + 2\eta_k \tag{3.116b}$$

Au point fixe du groupe de renormalisation, ceux-ci s'identifient aux dimensions anormales η et $\bar{\eta}$. La température renormalisée peut se définir comme $T_k \propto Z_{0k}k^2/\Delta_{0k}$ et l'on procède finalement au dédimensionnement adapté qui suit :

$$\tilde{\varphi} = Z_{0k}\Delta_{0k}^{-\frac{1}{2}} k^{2-\frac{d}{2}} \varphi \tag{3.117a}$$

$$\tilde{u}'_k(\tilde{\varphi}) = \Delta_{0k}^{-\frac{1}{2}} k^{-\frac{d}{2}} U'_k(\varphi) \tag{3.117b}$$

$$\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = Z_{0k}^{-1} Z_k(\varphi) \tag{3.117c}$$

$$\tilde{v}_k^{(1,1)}(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = \Delta_{0k}^{-1} V_k^{(1,1)}(\varphi_1, \varphi_2) \tag{3.117d}$$

avec $\tilde{z}_k(0) = \tilde{v}_k^{(1,1)}(0,0) = 1$ par construction.

Il est aisé d'établir les fonctions beta pour $\tilde{u}'_k$, $\tilde{z}_k$ et $\tilde{v}_k^{(11)}$ à partir des définitions des Eqs. (3.116), (3.117) et des équations de flot dimensionnées Eqs. (3.109), (3.110) et (3.111) (les

deux régulateurs sont reliés à l'aide de l'Eq. (3.112)). Afin d'écrire ces équations, on dédimensionne également la variable d'impulsion, le régulateur et le propagateur à un champ.

$$y = q^2/k^2 \tag{3.118a}$$

$$s(y) = k^{-2} Z_{0k}^{-1} \hat{R}_k(q) \tag{3.118b}$$

$$p_k(y,\tilde{\varphi}) = k^2 Z_{0k} P_{k1}[\varphi](q,-q) = \frac{1}{y\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) + s(y) + \tilde{u}_k''(\tilde{\varphi})} \tag{3.118c}$$

On pose aussi pour la fonction à deux champs :

$$\delta_k(\tilde{\varphi},\delta\tilde{\varphi}) = \tilde{v}_k^{(1,1)}(\tilde{\varphi}_1,\tilde{\varphi}_2) \tag{3.119}$$

avec $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2)/2$ et $\delta\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)/2$.

Les équations d'évolution des fonctions $\tilde{u}_k'$ et $\tilde{z}_k$ prennent les formes suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{u}_k'(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2}(2\eta_k - \bar{\eta}_k - d)\tilde{u}_k'(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}_k)\tilde{\varphi}\tilde{u}_k''(\tilde{\varphi}) \\ &- v_d \tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Big(\big(\delta_k(\tilde{\varphi},0) + s'(y)\big)p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \delta_k^{(1,0)}(\tilde{\varphi},0)\, p_k(y,\tilde{\varphi})\Big)\end{aligned} \tag{3.120}$$

et :

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = \eta_k \tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) &+ \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}_k)\tilde{\varphi}\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi}) + v_d\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Big(\\ &\tilde{z}_k''(\tilde{\varphi})\big(\delta_k(\tilde{\varphi},0) + s'(y)\big)p_k(y,\tilde{\varphi})^2 \\ &+ 2\delta_k^{(1,0)}(\tilde{\varphi},0)\big(\tilde{u}_k'''(\tilde{\varphi}) + y\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})\big)p_k(y,\tilde{\varphi})\big(p_k^{(1,0)}(y,\tilde{\varphi}) + \frac{2y}{d}p_k^{(2,0)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\ &+ 2\delta_k^{(1,0)}(\tilde{\varphi},0)\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})\big(p_k(y,\tilde{\varphi}) + \frac{2y}{d}p_k^{(1,0)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\ &- 2\big(\delta_k(\tilde{\varphi},0) + s'(y)\big)\big(\tilde{u}_k'''(\tilde{\varphi}) + y\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})\big)^2 p_k(y,\tilde{\varphi})^2\big(p_k^{(1,0)}(y,\tilde{\varphi}) + \frac{2y}{d}p_k^{(2,0)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\ &- 4\big(\delta_k(\tilde{\varphi},0) + s'(y)\big)\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})\big(\tilde{u}_k'''(\tilde{\varphi}) + y\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})\big)p_k(y,\tilde{\varphi})^2\big(p_k(y,\tilde{\varphi}) + \frac{2y}{d}p_k^{(1,0)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\ &- \frac{2y}{d}\big(\delta_k(\tilde{\varphi},0) + s'(y)\big)\tilde{z}_k'(\tilde{\varphi})^2 p_k(y,\tilde{\varphi})^3\Big)\end{aligned} \tag{3.121}$$

où $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(d/2)$. Notons que l'opérateur $\tilde{\partial}_t$ agit comme $\tilde{\partial}_t s'(y) = (\bar{\eta}_k - 2\eta_k)s'(y) - 2ys''(y)$ sur la dérivée du régulateur $s'(y)$ apparaissant explicitement dans ces équations (qui provient de $\tilde{R}_k$), et comme $\tilde{\partial}_t s(y) = (2-\eta_k)s(y) - 2ys'(y)$ lorsque le régulateur intervient implicitement à travers le propagateur $p_k(y,\tilde{\varphi})$.

La fonction beta du terme à deux champs δ_k s'exprime quant à elle par :

(3.122)

$$\begin{aligned}
&\partial_t\delta_k(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi) = (2\eta_k-\bar\eta_k)\delta_k(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi) + \frac{1}{2}(d-4+\bar\eta_k)\big(\tilde\varphi\,\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta\tilde\varphi\,\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\\
&+ v_d\tilde\partial_t\int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Bigg(\big(\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\big(\delta_k(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+s'(y)\big)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)p_k^{(0,1)}(y,\tilde\varphi-\delta\tilde\varphi)\\
&+\big(\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\big(\delta_k(\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi,0)+s'(y)\big)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)p_k^{(0,1)}(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)\\
&+\frac{1}{2}\big(\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi,0)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)^2\\
&+\frac{1}{4}\big(\delta_k^{(2,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+2\delta_k^{(1,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta_k^{(0,2)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\big(\delta_k(\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi,0)+s'(y)\big)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)^2\\
&+\frac{1}{2}\big(\delta_k(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+s'(y)\big)^2p_k^{(0,1)}(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)p_k^{(0,1)}(y,\tilde\varphi-\delta\tilde\varphi)\\
&+\frac{1}{4}\big(\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\big(\delta_k^{(1,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)-\delta_k^{(0,1)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)p_k(y,\tilde\varphi-\delta\tilde\varphi)\\
&+\frac{1}{4}\big(\delta_k^{(2,0)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)-\delta_k^{(0,2)}(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)\big)\big(\delta_k(\tilde\varphi,\delta\tilde\varphi)+s'(y)\big)p_k(y,\tilde\varphi+\delta\tilde\varphi)p_k(y,\tilde\varphi-\delta\tilde\varphi)\\
&+ sym(\delta\tilde\varphi,-\delta\tilde\varphi)\Bigg)
\end{aligned}$$

$sym(\delta\tilde\varphi,-\delta\tilde\varphi)$ désigne les termes obtenus en remplaçant $\delta\tilde\varphi$ par $-\delta\tilde\varphi$ dans la partie entre parenthèses du membre de droite.

Précisons pour finir que les expressions des dimensions anormales courantes η_k et $\bar\eta_k$ sont extraites des Eqs. (3.121) et (3.122) en utilisant $\partial_t\tilde z_k(0)=\partial_t\delta_k(0,0)=0$. On discute dans la suite les points fixes du groupe de renormalisation, c'est à dire les solutions $(\tilde u'_*,\tilde z_*,\delta_*)$ qui annulent les fonctions beta ci-dessus.

3.7.5 Point fixe analytique et réduction dimensionnelle

On montre ici qu'un point fixe δ_* suffisamment régulier dans la variable $\delta\tilde\varphi$ implique nécessairement la propriété de réduction dimensionnelle. Les résultats numériques prédisent, de plus, qu'un tel point fixe analytique existe si et seulement si $d>d_{DR}\simeq 5.13$.

Le second cumulant du désordre renormalisé sans dimension δ_k constitue l'objet central de l'étude. Par invariance sous la permutation des répliques $\varphi_1\leftrightarrow\varphi_2$, la fonction δ_k est paire dans sa seconde variable $\delta\tilde\varphi$. D'après les relations des Eqs. (3.81) et (3.89), celle-ci possède, de plus, une dépendance singulière en $\delta\tilde\varphi$ lorsque des avalanches sont présentes. On néglige dans un premier temps l'effet de ces dernières et l'on suppose la fonction δ_k suffisamment analytique pour pouvoir la développer au second ordre dans la direction de

$\delta\tilde{\varphi}$:

$$\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2}\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{3.123}$$

On déduit ensuite de l'Eq. (3.122) les équations de flot pour les amplitudes $\delta_{k,0}$ et $\delta_{k,2}$:

$$\begin{aligned}
\partial_t\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) = {} & (2\eta_k - \bar{\eta}_k)\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}_k)\tilde{\varphi}\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi}) \\
& + v_d\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Bigg(\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)^2 p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + 4\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) \\
& + \frac{3}{2}\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})^2 p_k(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + \big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)\delta''_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})^2\Bigg)
\end{aligned} \tag{3.124}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) = {} & (d-4+2\eta_k)\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}_k)\tilde{\varphi}\delta'_{k,2}(\tilde{\varphi}) + v_d\tilde{\partial}_t\int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Bigg(\\
& \Bigg(4\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})p_k^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) + 5\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})^2 p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + p_k(y,\tilde{\varphi})\big(2\delta''_{k,0}(\tilde{\varphi})\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) + 7\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})^2 p_k^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) \\
& + 4\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})\big(2\delta''_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k^{(0,3)}(y,\tilde{\varphi})\big)\big) \\
& - 2\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)^2\big(p_k^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi})^2 - p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})p_k^{(0,3)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\
& + \frac{1}{2}\big(\delta''_{k,0}(\tilde{\varphi})^2 + 2\delta^{(3)}_{k,0}(\tilde{\varphi})\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})\big)p_k(y,\tilde{\varphi})^2\Bigg) \\
& + 3\,\delta_{k,2}(\tilde{\varphi})\Bigg(4\delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + 4\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + \delta''_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})^2\Bigg) \\
& + \delta'_{k,2}(\tilde{\varphi})\Bigg(4p_k(y,\tilde{\varphi})\big(2\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \delta'_{k,0}(\tilde{\varphi})p_k(y,\tilde{\varphi})\big)\Bigg) \\
& + \delta''_{k,2}(\tilde{\varphi})\big(\delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)p_k(y,\tilde{\varphi})^2 - \frac{3}{2}\delta_{k,2}(\tilde{\varphi})^2 p_k(y,\tilde{\varphi})^2\Bigg)
\end{aligned} \tag{3.125}$$

D'une façon générale, lorsque δ_k est supposé analytique, les équations de flot ont une structure triangulaire. Le flot de $\delta_{k,0}$ est en effet indépendant de $\delta_{k,2}, \delta_{k,4}, \cdots$, les flots de $\delta_{k,0}$ et $\delta_{k,2}$ ne dépendent pas de $\delta_{k,4}, \delta_{k,6}, \cdots$, et ainsi de suite. En particulier, le système d'équations

$\{\partial_t \tilde{u}'_k, \partial_t \tilde{z}_k, \partial_t \delta_{k,0}\}$ est donc fermé. Ainsi, dans l'hypothèse d'analyticité de l'Eq. (3.123), le flot des fonctions prises pour des copies identiques $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ se découple de l'entière dépendance de δ_k dans la direction $\delta\tilde{\varphi}$. Nous montrons par la suite que si un tel point fixe suffisamment régulier existe, il implique la propriété de réduction dimensionnelle pour le comportement critique du modèle.

Toujours sous l'hypothèse de l'Eq. (3.123), les équations de flot précédentes entraînent une propriété remarquable ; si les fonctions $\tilde{z}_k$ et $\delta_{k,0}$ sont égales à un instant t, alors elles le restent au cours du flot [TT12b].

$$\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = \delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) \quad \Rightarrow \quad \eta_k = \bar{\eta}_k \quad \text{et} \quad \partial_t \tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = \partial_t \delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) \tag{3.126}$$

Et c'est bien le cas en condition initiale puisque $\tilde{z}_\Lambda = \delta_{\Lambda,0} = 1$. Le point fixe vérifie donc nécessairement :

$$\tilde{z}_* = \delta_{*,0} \quad \text{et} \quad \eta = \bar{\eta} \tag{3.127}$$

On réécrit alors les fonctions beta pour $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k$ en remplaçant $\delta_{k,0}$ par $\tilde{z}_k$ (et $\bar{\eta}_k$ par η_k).

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{u}'_k(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2}(\eta_k - d)\tilde{u}'_k(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d - 4 + \eta_k)\tilde{\varphi}\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}) \\ &- 2v_{d-2}\Big(\frac{1}{4\pi}\Big)\Big(\tilde{u}'''_k(\tilde{\varphi}) l_1^{d-2}\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) + \tilde{z}'_k(\tilde{\varphi}) l_1^d\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big)\Big) \end{aligned} \tag{3.128}$$

$$\begin{aligned} &\partial_t \tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = \eta_k \tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d - 4 + \eta_k)\tilde{\varphi}\tilde{z}'_k(\tilde{\varphi}) - \frac{4v_{d-2}}{d-2}\Big(\frac{1}{4\pi}\Big)\Big(\\ &\tilde{u}'''^2_k(\tilde{\varphi})\, m_4^{d-2}\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) + 2\tilde{u}'''_k(\tilde{\varphi})\tilde{z}'_k(\tilde{\varphi})\, m_4^d\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) \\ &+ \tilde{z}'^2_k(\tilde{\varphi})\, m_4^{d+2}\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) + (\frac{d-2}{2})\tilde{z}''_k(\tilde{\varphi})\, l_1^{d-2}\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) \\ &+ (2-d)\tilde{z}'_k(\tilde{\varphi})\tilde{u}'''_k\, l_2^{d-2}\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big) - \frac{1}{2}(2d-3)\tilde{z}'^2_k(\tilde{\varphi})\, l_2^d\big(\tilde{u}''_k(\tilde{\varphi}), \eta_k, \tilde{z}_k(\tilde{\varphi})\big)\Big) \end{aligned} \tag{3.129}$$

Les fonctions seuil $l_n^d(w, \eta, z)$ et $m_n^d(w, \eta, z)$ ont été introduites dans le second chapitre (leurs définitions sont données en annexe). On retrouve ainsi les équations de flot du modèle d'Ising pur en dimension $d - 2$ dans l'approximation du développement en dérivées $O(\partial_\mu^2)$, à un facteur $1/4\pi$ près (voir la section 2.3.2, et plus précisément les Eqs. (2.76) et (2.77)). Ce dernier facteur est sans conséquence et peut être absorbé dans une redéfinition du champ et du potentiel. On aboutit donc à la propriété de réduction dimensionnelle : le comportement critique du modèle et tous les exposants associés en dimension d sont les mêmes que ceux du modèle d'Ising pur en dimension $d - 2$.

$$\eta = \bar{\eta} = \eta_{DR} \tag{3.130a}$$

$$\nu = \nu_{DR} \tag{3.130b}$$

η_{DR} et ν_{DR} correspondent respectivement aux exposants critiques η et ν du modèle d'Ising pur en dimension $d-2$. En conséquence, tant que la fonction δ_k est suffisamment régulière en $\delta\tilde{\varphi}=0$ au cours du flot (i.e. vérifie l'Eq. (3.123)), la réduction dimensionnelle s'applique.

Comme détaillé dans le chapitre 2, on peut intégrer numériquement les équations aux dérivées partielles couplées, Eqs. (3.128) et (3.129) pour en déduire le point fixe $\tilde{u}'_*$, $\tilde{z}_* = \delta_{*,0}$ ainsi que les exposants critiques associés η_{DR} et ν_{DR}. Le point fixe physique, c'est à dire instable dans une seule direction, est trivial en dimension $d \geqslant 6$: c'est le point fixe gaussien $\tilde{u}'_* = 0$ et $\tilde{z}_* = 1$ vérifiant $\eta_{DR} = 0$ et $\nu_{DR} = 1/2$.

Par cohérence avec l'hypothèse de l'Eq. (3.123), $\delta_k^{(0,2)}(\tilde{\varphi},0) = \delta_{k,2}(\tilde{\varphi})$ doit être fini au point fixe. Afin de déterminer $\delta_{*,2}$, on reprend l'équation de flot Eq. (3.125) en substituant les fonctions $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k = \delta_{k,0}$ par les valeurs de point fixe précédemment trouvées :

(3.131)

$$
\begin{aligned}
\partial_t \delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) = {} & (d-4+2\eta_{DR})\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4+\eta_{DR})\tilde{\varphi}\delta'_{k,2}(\tilde{\varphi}) + v_d \tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \Bigg(\\
& \Bigg(4\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi})\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) p_*^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) + 5\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi})^2 p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + p_*(y,\tilde{\varphi})\big(2\tilde{z}''_*(\tilde{\varphi})\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) + 7\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi})^2 p_*^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi}) \\
& + 4\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi})\big(2\tilde{z}''_*(\tilde{\varphi}) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,3)}(y,\tilde{\varphi})\big)\big) \\
& - 2\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big)^2 \big(p_*^{(0,2)}(y,\tilde{\varphi})^2 - p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) p_*^{(0,3)}(y,\tilde{\varphi})\big) \\
& + \frac{1}{2}\big(\tilde{z}''_*(\tilde{\varphi})^2 + 2\tilde{z}_*^{(3)}(\tilde{\varphi})\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi})\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Bigg) \\
& + 3\,\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) \Bigg(4\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + 4\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 \\
& + \tilde{z}''_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Bigg) \\
& + \delta'_{k,2}(\tilde{\varphi}) \Bigg(4p_*(y,\tilde{\varphi})\big(2\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi})\big) \Bigg) \\
& + \delta''_{k,2}(\tilde{\varphi})\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 - \frac{3}{2}\delta_{k,2}(\tilde{\varphi})^2 p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

avec $p_*(y,\tilde{\varphi}) = (y\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s(y) + \tilde{u}''_*(\tilde{\varphi}))^{-1}$. $\delta_{*,2}$ est obtenu en intégrant numériquement l'équation de flot ci-dessus. Puisque le point fixe est instable dans une seule direction, celui-ci est atteint dans l'Eq. (3.131) quelle que soit la condition initiale $\delta_{\Lambda,2}$. Précisons que la solution est triviale en dimension supérieure à 6 ; le point fixe gaussien donne effectivement $\delta_{*,2} = 0$.

On présente sur la Fig. 3.B le flot du couplage $\delta_{k,2}(0)$ obtenu par intégration numérique de l'Eq. (3.131) pour différentes dimensions, la condition initiale étant $\delta_{\Lambda,2} = 0$. Selon la valeur de la dimension, deux comportements très différents sont observés. Alors que le flot atteint un point fixe fini $\delta_{2,*}$ lorsque $d > d_{DR} \simeq 5.13$, la fonction $\delta_{k,2}$ diverge en un temps fini du groupe de renormalisation en dimension plus basse que d_{DR}. Le point fixe analytique discuté précédemment existe donc si et seulement si $d > d_{DR}$. Le temps de divergence de $\delta_{k,2}$ est également représenté sur la Fig. 3.B pour $d < d_{DR}$. Ce dernier, appelé temps de Larkin, correspond à l'échelle à laquelle apparaît une singularité dans la fonction δ_k. Le temps de Larkin est tracé en fonction de la dimension sur la Fig. 3.C ; il diverge lorsque $d \to d_{DR}^-$ et se comporte comme $(d_{DR} - d)^{-1}$. Le point fixe fini $\delta_{2,*}$ obtenu en dimension supérieure à d_{DR} est, quant à lui, illustré en Fig. 3.D. Notons que celui-ci varie avec la dimension comme $\sqrt{d - d_{DR}}$ (et s'annule quand $d \geqslant 6$).

Nous avons utilisé le régulateur $s(y) = \alpha \exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$ avec $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. Le choix $\alpha = 2$ correspond à peu près à la valeur du PMS (voir chapitre 2) et l'on trouve dans ce cas $d_{DR} = 5.1295$. On compare cette dernière valeur avec celle obtenue pour $\alpha = 1$ afin d'évaluer l'erreur sur d_{DR} due à la dépendance des résultats avec le régulateur ; on estime finalement $d_{DR} = 5.13 \pm 0.02$.

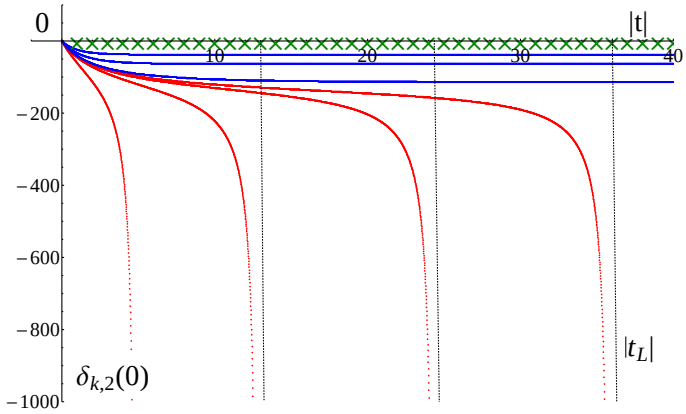

FIGURE 3.B – Flots du couplage $\delta_{k,2}(0)$ pour différentes dimensions (obtenus par intégration numérique de l'Eq. (3.131)), en partant de la condition initiale $\delta_{\Lambda,2} = 0$. Les courbes du haut, en bleu, correspondent au cas $d > d_{DR} = 5.1295$ avec $d = 5.3$, 5.2, 5.135 (de haut en bas) ; $\delta_{k,2}(0)$ atteint alors un point fixe fini $\delta_{*,2}(0)$. Les courbes du dessous, en rouge, représentent le cas $d < d_{DR}$ avec $d = 5$, 5.1, 5.12, 5.125 (de gauche à droite) ; les flots divergent tous à une échelle finie du groupe de renormalisation $|t_L| = -\log k_L/\Lambda$. Ce temps de divergence est illustré par une ligne verticale en pointillés pour les trois courbes les plus à droite. Les croix vertes correspondent, quant à elles, au flot de $\delta_{k,2}(0)$ en dimension $d \geqslant 6$; on a toujours $\delta_{k,2}(0) = 0$. Le régulateur utilisé est $s(y) = \alpha \exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$ avec $\alpha = 2$.

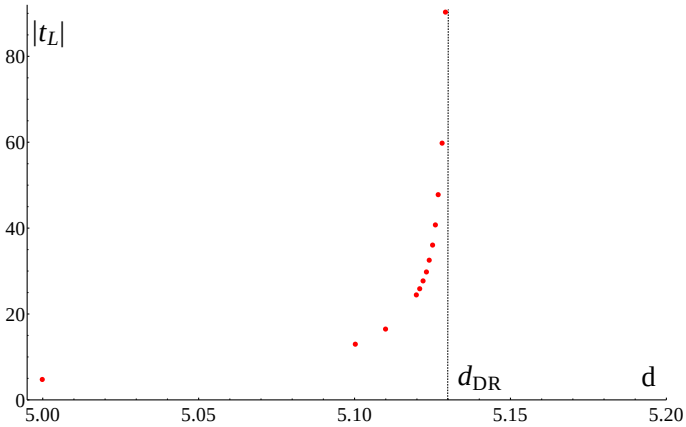

FIGURE 3.C – Divergence du temps de Larkin $|t_L|$ lorsque $d \to d_{DR}^-$. Le temps de Larkin est représenté en fonction de la dimension pour $d < d_{DR}$; notons que celui-ci est bien décrit par une simple loi de puissance $t_L(d) \propto (d_{DR} - d)^{-1}$.

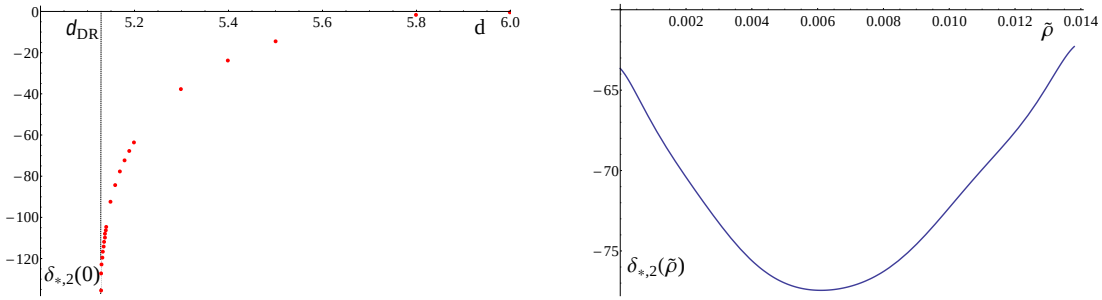

FIGURE 3.D – Solution de point fixe $\delta_{*,2}$ obtenue en dimension supérieure à d_{DR}. A gauche, la valeur du point fixe $\delta_{*,2}(0)$ est représentée en fonction de la dimension ; celle-ci se comporte comme $\delta_{*,2}(0) \simeq \alpha + \beta\sqrt{d - d_{DR}}$. Nous avons tracé sur la droite toute la fonction $\delta_{*,2}$ pour $d = 5.2$ (la variable est $\tilde{\rho} = \tilde{\varphi}^2/2$). Comme pour les figures précédentes, le régulateur utilisé est $s(y) = 2\exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$.

3.7.6 Brisure de réduction dimensionnelle pour $d < d_{DR}$

On présente dans cette partie un résultat essentiel de l'étude des équations de flot, Eqs. (3.120), (3.121) et (3.122), dans le cas $d < d_{DR} \simeq 5.1$: le point fixe δ_* présente alors une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$ et la réduction dimensionnelle est brisée [TT11b, TT12b]. En particulier, les dimensions anormales η et $\bar{\eta}$ ne sont plus égales et diffèrent de la valeur de réduction dimensionnelle η_{DR}.

Il n'existe pas de point fixe analytique en dimension inférieure à d_{DR} (au sens de l'Eq. (3.123)) ; d'après la discussion précédente, δ_* est alors de la forme $\delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_{*,0}(\tilde{\varphi}) + |\delta\tilde{\varphi}|^\alpha \delta_{*,\alpha}(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^\alpha)$ avec $0 < \alpha < 2$. On ne peut développer δ_k en puissances de $\delta\tilde{\varphi}$ et résoudre les équations de flot nécessite de garder l'entière dépendance de la fonction $\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi})$ dans ses deux variables. Bien que l'intégration numérique des flots soit plus difficile, celle-ci a été réalisée par Tarjus et Tissier [TT11b, TT12b]. Ils montrent que la fonction δ_k génère un comportement non analytique en $|\delta\tilde{\varphi}|$ précisément au temps de Larkin t_L déterminé dans l'approximation Eq. (3.123) (i.e. en intégrant l'Eq. (3.131)). Cela est illustré sur la Fig. 3.E ; on y présente l'apparition de la singularité linéaire au cours du flot dans la fonction $\delta_k(0, \delta\tilde{\varphi})$ en dimension 4. Pour $d < d_{DR}$, on peut vérifier numériquement que le point fixe est de la forme suivante :

$$\delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_{*,0}(\tilde{\varphi}) + |\delta\tilde{\varphi}|\delta_{*,1}(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}) \tag{3.132}$$

avec $\delta_{*,1} < 0$. La présence de la singularité au cours du flot implique $\partial_t \tilde{z}_k \neq \partial_t \delta_{k,0}$ et les deux fonctions se mettent alors à différer. En conséquence, la solution est caractérisée par $\tilde{z}_* \neq \delta_{*,0}$ et les dimensions anormales η et $\bar{\eta}$ ne sont pas égales (θ est strictement inférieur à 2 et dépend de d). De plus, les fonctions beta pour $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k$ ne sont plus identiques à celles

du modèle pur en dimension $d-2$; la réduction dimensionnelle est ainsi brisée.

On montre en Fig. 3.F les valeurs des dimensions anormales obtenues pour d entre 3 et 6. Alors que l'exposant $\eta = \bar{\eta} = \eta_{DR}$ peut être déterminé en développant δ_k dans la direction de $\delta\tilde{\varphi}$ en dimension supérieure à d_{DR} (voir l'approximation Eq. (3.123)), l'entière dépendance de δ_k dans ses deux variables doit être considérée dans la région $d < d_{DR}$. Le point fixe est très difficile à déterminer lorsque $d \to d_{DR}^-$;[xv] cela explique l'absence de valeur pour η et $\bar{\eta}$ dans cette région. Notons que la différence entre les deux dimensions anormales n'est clairement pas négligeable à basse dimension ; on obtient $\eta = 0.24(1)$, $\bar{\eta} = 0.40(2)$ en dimension 4 et $\eta = 0.57(2)$, $\bar{\eta} = 1.08(2)$ pour la dimension $d = 3$. Ces résultats sont en accord avec les autres estimations des exposants obtenues par simulation numérique [MF02, Har02].

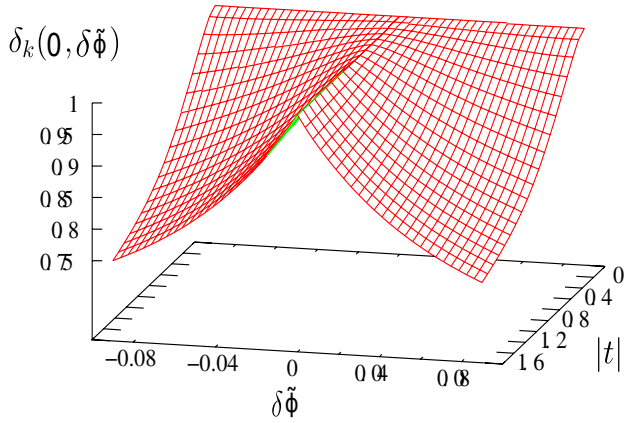

FIGURE 3.E – Flot du second cumulant du désordre renormalisé sans dimension $\delta_k(\tilde{\varphi} = 0, \delta\tilde{\varphi})$ pour une condition initiale proche du point critique en dimension $d = 4 < d_{DR}$, tiré de [TT11b]. Une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$ apparaît en un temps fini du groupe de renormalisation $|t_L| = \log(\Lambda/k_L)$. Par construction, l'égalité $\delta_k(0,0) = 1$ est toujours vérifiée au cours du flot.

xv. Au voisinage de d_{DR}, plusieurs points fixes sont proches dans l'espace des constantes de couplage et cela rend les flots du groupe de renormalisation très lents.

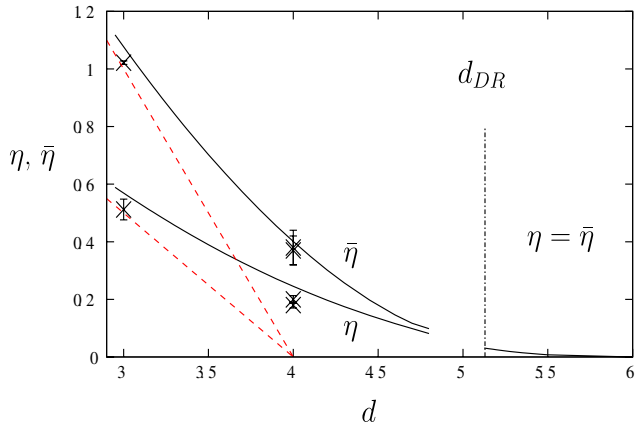

FIGURE 3.F – Dimensions anormales η et $\bar{\eta}$ en fonction de la dimension, tiré de [TT11b]. La réduction dimensionnelle est prédite en dimension supérieure à $d_{DR} \simeq 5.13$. Les croix correspondent aux résultats des simulations [MF02, Har02] et les lignes rouges en pointillés représentent les bornes inférieures sur η et $\bar{\eta}$ (voir [TT12b]). Il est numériquement difficile d'accéder à la région juste en dessous d_{DR}.

3.8 Conclusion

Nous avons donné une introduction au modèle d'Ising en champ aléatoire. La physique critique du modèle est contrôlée par un point fixe à température nulle et cela confère un comportement d'échelle inhabituel aux différentes grandeurs physiques. La propriété remarquable de réduction dimensionnelle est notamment prédite exactement par la théorie de perturbation, ainsi que par la supersymétrie. Ces dernières approches sont néanmoins insuffisantes puisqu'elles ne permettent pas de comprendre sa brisure à basse dimension, pourtant prouvée rigoureusement. Nous avons ensuite présenté un formalisme qui fournit une description complète et cohérente de la propriété de réduction dimensionnelle et de sa brisure. En particulier, Il a été montré que cette dernière est due à l'apparition d'une non analyticité dans le potentiel à deux répliques associé au second cumulant du désordre. La méthode permet de calculer la dimension d_{DR} en dessous de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée, ainsi que les exposants critiques du modèle ; notons que ces derniers sont en très bon accord avec les estimations des simulations numériques [MF02, Har02]. Sur un aspect plus théorique, il a été possible de prendre en compte toutes les symétries du système et, par conséquent, de ne pas briser explicitement la réduction dimensionnelle en introduisant une extension du formalisme de Parisi-Sourlas. Cette nouvelle approche tient compte de deux ingrédients fondamentaux : la présence de nombreux états métastables et les avalanches.

Chapitre 4

Brisure de réduction dimensionnelle et avalanches

4.1 Introduction

En utilisant une approche non perturbative et fonctionnelle du groupe de renormalisation, Tarjus et Tissier ont récemment proposé une résolution du problème de la réduction dimensionnelle dans le modèle d'Ising en champ aléatoire [TT04b, TT06b, TT08a, TT08b, TT11b, TT12a, TT12b]. Nous avons travaillé tous les trois à l'étude du point fixe associé à la propriété de réduction dimensionnelle, ainsi qu'à établir le lien entre sa brisure et la présence d'avalanches dans le système à température nulle [TBT13]. Le but de ce chapitre est de présenter les principaux résultats issus de cette collaboration.

On caractérise tout d'abord, dans la section 4.2, le point fixe analytique prédisant la réduction dimensionnelle ; nous étudions sa stabilité ainsi que le mécanisme entraînant sa disparition en dimension $d = d_{DR}$. La section suivante est consacrée à l'étude du modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0. Sur cet exemple simple, nous soulignons l'importance des états métastables et des avalanches concernant les propriétés critiques du système. On discute plus généralement le phénomène d'avalanche et son lien avec la brisure de réduction dimensionnelle dans la partie 4.4.

4.2 Etude du point fixe de réduction dimensionnelle

4.2.1 Points fixes analytiques conjugués

Le point fixe analytique $\delta_{*,2}$ se comporte comme $\sqrt{d - d_{DR}}$ et disparaît en dimension inférieure à d_{DR}. Cela peut s'expliquer par la présence d'un second point fixe régulier pour $d > d_{DR}$ s'annihilant avec le premier précisément en $d = d_{DR}$. Nous vérifions ce scénario à

partir des équations de flot dérivées dans le cadre de la troncation minimale.

On cherche une seconde solution de point fixe dans l'approximation analytique (Eq. (3.123)) caractérisée par les mêmes fonctions $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_* = \delta_{*,0}$ (associées à la réduction dimensionnelle), mais avec une solution $\delta_{*,2}$ différente pour l'équation $\partial_t \delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) = 0$ (i.e. pour l'Eq. (3.131) avec le membre de gauche égal à 0). Cette dernière peut se déterminer analytiquement en dimension $d \geqslant 6$ grâce à la solution gaussienne $\tilde{u}'_* = 0$ et $\tilde{z}_* = 1$. L'Eq. (3.131) évaluée au point fixe gaussien s'écrit alors simplement :

$$0 = (d-4)\delta_{*,2}(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4)\tilde{\varphi}\delta'_{*,2}(\tilde{\varphi}) + \frac{v_d}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \frac{\Big(2\delta''_{*,2}(\tilde{\varphi})(1+s'(y)) - 3\delta_{*,2}(\tilde{\varphi})^2\Big)}{\big(y+s(y)\big)^2} \tag{4.1}$$

En plus de la solution nulle, il existe bien un second point fixe homogène $\delta^{inst}_{*,2}(\tilde{\varphi}) = \delta^{inst}_{*,2} = (4-d)/(3v_d l^d_2(0,0,1))$ (la fonction seuil $l^d_2(w,\eta,z)$ est définie dans l'annexe B).

Il n'est pas difficile de montrer que cette nouvelle solution est instable dans plusieurs directions.[i] On perturbe pour cela le point fixe régulier dans la direction de $\delta_{k,2}$:

$$\begin{aligned} \delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) &= \delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2} g_k(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \\ &= \delta_{*,0}(\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2}\delta_{*,2}(\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2} g_k(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

On insère l'Eq. (4.2) dans la fonction beta de δ_k (Eq. (3.122)) et on linéarise le flot autour du point fixe. Après y avoir ensuite extrait les termes en $\delta\tilde{\varphi}^2$, on dérive l'équation de flot linéaire pour l'amplitude de la perturbation g_k. Cette dernière prend la forme d'une équation aux valeurs propres lorsqu'on cherche des solutions stationnaires $g_k = k^\vartheta g_\vartheta$. Au point fixe gaussien (i.e. pour $d \geqslant 6$), il vient :

$$\vartheta g_\vartheta(\tilde{\varphi}) = (d-4)g_\vartheta(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4)\tilde{\varphi}g'_\vartheta(\tilde{\varphi}) + v_d\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \frac{\Big(g''_\vartheta(\tilde{\varphi})(1+s'(y)) - 3g_\vartheta(\tilde{\varphi})\delta_{*,2}(\tilde{\varphi})\Big)}{\big(y+s(y)\big)^2} \tag{4.3}$$

En considérant un vecteur propre indépendant du champ $g_\vartheta(\tilde{\varphi}) = g_\vartheta$, on obtient $\vartheta = d-4 > 0$ pour la solution nulle ($\vartheta = 2$ en dimension 6) et $\vartheta = 4-d < 0$ pour $\delta^{inst}_{*,2}$ ($\vartheta = -2$ en dimension 6). En conclusion, le second point fixe analytique est instable dans la direction de δ_2 ; autrement dit, le couplage $\delta_{\Lambda,2}$ est un paramètre essentiel qu'il est nécessaire d'ajuster pour atteindre le point fixe en question.

Nous avons déterminé le point fixe instable $\delta^{inst}_{*,2}(\tilde{\varphi})$ pour $d < 6$ en intégrant numériquement l'Eq. (3.131), et en procédant par dichotomie sur le couplage essentiel $\delta_{\Lambda,2}(0)$ de la condition initiale. La fonction $\delta^{inst}_{*,2}$ est tracée en Fig. 4.A pour la dimension $d = 5.2$. Comme

i. C'est un point multicritique avec plus d'une direction instable.

attendu, on vérifie que les deux points fixes coïncident et s'annihilent en dimension $d = d_{DR}$; cela est illustré sur la Fig. 4.B. Précisons que les résultats numériques représentés sur les Figs. 4.A et 4.B ont été obtenus en utilisant le régulateur $s(y) = \exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$ (i.e. $\alpha = 1$) pour lequel $d_{DR} = 5.1502$.

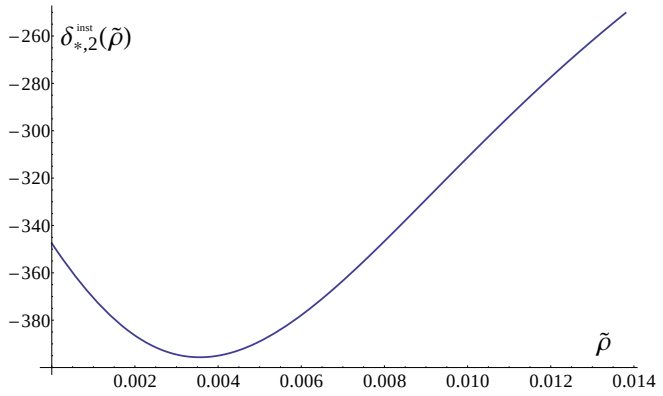

FIGURE 4.A – Solution de point fixe instable $\delta^{inst}_{*,2}$ en fonction du champ $\tilde{\rho} = \tilde{\varphi}^2/2$ pour la dimension $d = 5.2$.

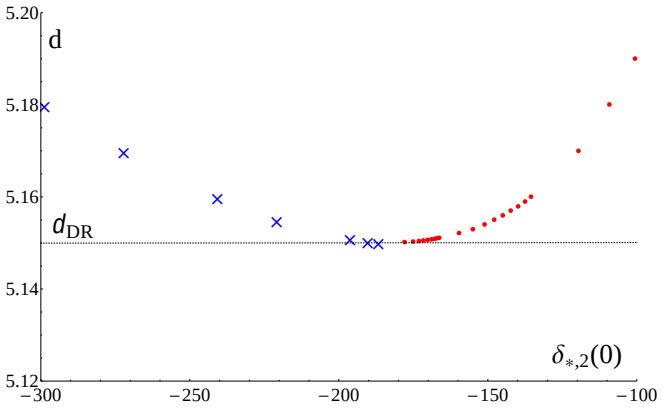

FIGURE 4.B – Annihilation des points fixes analytiques en dimension $d = d_{DR}$. d est tracé en fonction du point fixe $\delta_{*,2}(0)$; les croix bleues représentent la solution instable $\delta^{inst}_{*,2}$ et les points rouges la solution stable. Celles-ci se rejoignent en dimension $d = d_{DR}$ et il n'existe plus de point fixe analytique lorsque $d < d_{DR}$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$.

4.2.2 Perturbation singulière autour du point fixe analytique

Nous étudions la stabilité des points fixes analytiques par rapport à une perturbation singulière en $|\delta\tilde{\varphi}|$.

On se place toujours en dimension supérieure à d_{DR}, là où le point fixe est régulier (i.e. ne comporte pas singularité linéaire) et prédit la réduction dimensionnelle.

$$\delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_{*,0}(\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2}\delta_{*,2}(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{4.4}$$

On considère la solution physique stable ; toute condition initiale analytique mène au point fixe une fois que l'unique paramètre essentiel associé à la transition est ajusté. On souhaite étudier plus en détail la stabilité du point fixe en prenant en compte également des conditions initiales non analytiques. Autrement dit, nous voulons savoir si la solution est stable sous une perturbation présentant une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$. On pose alors :

$$\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) + |\delta\tilde{\varphi}| f_k(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{4.5}$$

et l'on cherche une fonction propre $f_k = k^\lambda f_\lambda$. On remplace δ_k par l'expression ci-dessus dans la fonction beta de l'Eq. (3.122) ; au premier ordre en la perturbation et toujours en développant autour de $\delta\tilde{\varphi} = 0$, il vient l'équation aux valeurs propres pour l'amplitude de la singularité :

$$\begin{aligned}
\lambda f_\lambda(\tilde{\varphi}) = {} & \frac{1}{2}(d-4+3\eta_{DR}) f_\lambda(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4+\eta_{DR})\tilde{\varphi} f'_\lambda(\tilde{\varphi}) \\
& + v_d \tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \Bigg(f_\lambda(\tilde{\varphi}) \Big(6\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) \\
& + 6\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 + \frac{3}{2}\big(\tilde{z}''_*(\tilde{\varphi}) - \delta_{*,2}(\tilde{\varphi})\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Big) \\
& + 3 f'_\lambda(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) \Big(2\big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) \Big) \\
& + f''_\lambda(\tilde{\varphi}) \big(\tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Bigg)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

La valeur propre λ peut être calculée exactement au point fixe gaussien, pour $d \geqslant 6$. Dans ce cas, l'équation précédente se ré-écrit plus simplement :

$$\lambda f_\lambda(\tilde{\varphi}) = \frac{1}{2}(d-4) f_\lambda(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-4)\tilde{\varphi} f'_\lambda(\tilde{\varphi}) + \frac{v_d}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \frac{\Big(2 f''_\lambda(\tilde{\varphi})(1+s'(y)) - 3 f_\lambda(\tilde{\varphi}) \delta_{*,2}(\tilde{\varphi})\Big)}{\big(y+s(y)\big)^2} \tag{4.7}$$

En cherchant une solution constante $f_\lambda(\tilde{\varphi}) = f_\lambda$, on obtient $\lambda = (d-4)/2$ pour la solution stable $\delta_{*,2} = 0$ ($\lambda = 1$ en dimension 6).

En dimension inférieure à 6, nous déterminons λ en résolvant numériquement l'Eq. (4.6) avec la solution de point fixe $(\tilde{u}'_*, \tilde{z}_* = \delta_{*,0}, \delta_{*,2})$ trouvée dans la section 3.7.5. La plus petite valeur propre solution de l'Eq. (4.6) est tracée en fonction de la dimension sur la Fig. 4.C. Celle-ci décroit quand d diminue mais reste néanmoins toujours positive ; On a en particulier $\lambda(d_{DR}) \simeq 0.01$ lorsque le point fixe analytique disparaît. Soulignons également le comportement de la valeur propre en racine de la dimension : $\lambda = \lambda(d_{DR}) + a\sqrt{d - d_{DR}}$ avec $\lambda(d_{DR}) > 0$ (voir Fig. 4.C). Les résultats exposés ci-dessous pour λ ont été obtenus en prenant $\alpha = 1$ pour le paramètre d'optimisation du régulateur ; nous avons vérifié que les conclusions étaient identiques pour le choix $\alpha = 2$.

En conclusion, le point fixe analytique associé à la réduction dimensionnelle est toujours stable sous une perturbation singulière. Lorsque l'on diminue la dimension, ce dernier disparaît légèrement avant que la perturbation devienne essentielle.

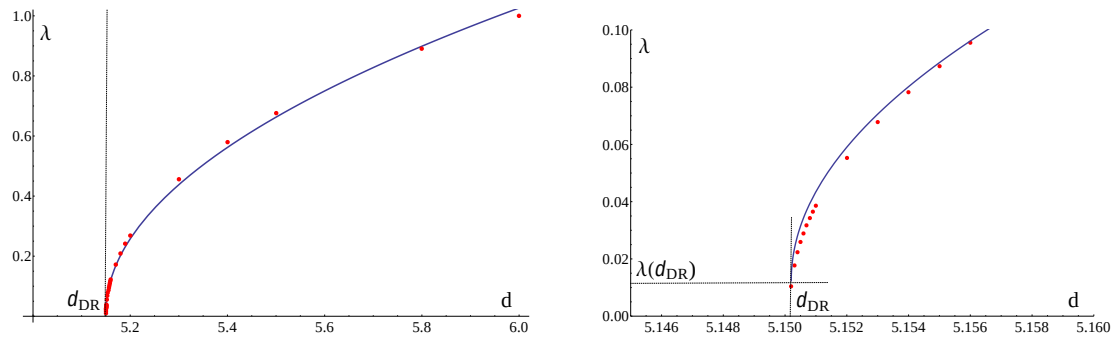

FIGURE 4.C – Valeur propre associée à une perturbation singulière autour du point fixe analytique de réduction dimensionnelle. La plus petite valeur propre solution de l'Eq. (4.6) est représentée en fonction de la dimension d. Les points rouges correspondent aux résultats numériques ; ceux-ci sont bien décrits par loi $\lambda(d) = \lambda(d_{DR}) + a\sqrt{d - d_{DR}}$ tracée en bleu, avec $d_{DR} = 5.1502$, $\lambda(d_{DR}) = 0.012$ et $a = 1.099$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$.

On recommence finalement le calcul de la valeur propre en perturbant cette fois-ci le second point fixe analytique conjugué.

En dimension supérieure à 6, la solution instable $\delta_{*,2}^{inst} = (4-d)/(3v_d l_2^d(0,0,1))$ précédemment obtenue donne $\lambda = (4-d)/2$ dans l'Eq. (4.7) (en cherchant une fonction propre indépendante du champ), et donc $\lambda = -1$ en dimension 6. Ainsi, alors que le point fixe physique est une seule fois instable, le second point fixe analytique conjugué est, quant-à lui, trois fois instable, dans les directions de $\tilde{u}'_\Lambda$, $\delta_{\Lambda,2}$ et de la singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$.

Nous avons déterminé numériquement $\delta_{*,2}^{inst}$ pour $d_{DR} < d < 6$ dans la section 4.2.1 ;

comme avec la solution stable, on calcule λ pour le second point fixe $(\tilde{u}'_*, \tilde{z}_* = \delta_{*,0}, \delta^{inst}_{*,2})$ en étudiant l'équation aux valeurs propres Eq. (4.6). Nos résultats numériques concernant les deux points fixes conjugués sont finalement résumés sur la Fig. 4.D.

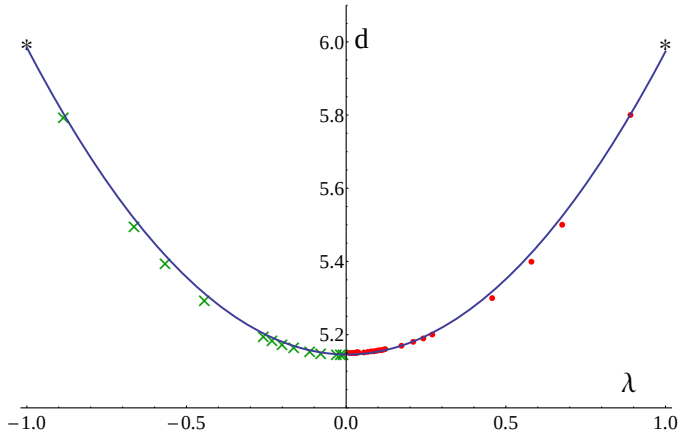

FIGURE 4.D – Valeur propre λ associée à une perturbation singulière autour des deux points fixes analytiques conjugués. La dimension d est tracée en fonction de λ. Les résultats numériques sont notés par des points rouges et des croix vertes ; ils correspondent respectivement aux points fixes stable et instable. Les étoiles en dimension $d = 6$ représentent les résultats analytiques pour la solution gaussienne. L'ensemble de ces valeurs est bien décrit par la parabole $d(\lambda) = 5.1459 - 0.0055\lambda + 0.8333\lambda^2$ (courbe bleue).

4.3 Etude du modèle en dimension 0

Afin de comprendre l'influence des états métastables sur les propriétés du système, on traite le cas élémentaire de la dimension $d = 0$. On étudie le modèle pour un seul site avec un degré de liberté $\phi \in \mathbb{R}$. L'action microscopique est la suivante :

$$\mathcal{S}(\phi, j, h) = \frac{r}{2}\phi^2 + \frac{g}{4!}\phi^4 - (j + h)\phi \tag{4.8}$$

Le degré de liberté interagit avec lui-même via un potentiel en ϕ^4 ; il est également couplé linéairement au champ aléatoire h ainsi qu'à une source extérieure fixée j. On se place à température nulle et l'on minimise l'action $\mathcal{S}$; l'équation stochastique (voir Eq. (3.31)) prend ici une forme simple :

$$\phi(r + \frac{g}{6}\phi^2) = j + h \tag{4.9}$$

On considère le cas $r < 0$ dans lequel il peut exister plusieurs solutions à l'équation ci-dessus, selon la valeur de $j + h$. En particulier lorsque $|j + h| < J_0 = (2|r|/3)(2|r|/g)^{1/2}$,

l'action possède trois extrema distincs ; ceux-ci correspondent plus précisément à un minimum positif ϕ_+, un minimum négatif ϕ_- et un maximum $\phi_\ddagger$ entre les deux. Il est intéressant d'étudier cette situation où un état métastable est présent en plus du fondamental.

L'action $\mathcal{S}$ est tracée en fonction du champ ϕ pour différentes valeurs de $j+h$ sur la Fig. 4.E. Quand on augmente $j+h$ en partant de 0, l'état fondamental $\phi^\star = \phi_+$ s'éloigne de l'origine alors que l'état métastable ϕ_- s'en rapproche. $\phi^\star$ et $j+h$ sont toujours de même signe et la condition $\phi^2 > \phi_0^2 = 6|r|/g$ permet donc de sélectionner la bonne solution. Nous avons également représenté en Fig. 4.E l'allure de l'état fondamental en fonction de $j+h$; ce dernier saute de ϕ_- à ϕ_+ en $j+h=0$ avec une discontinuité de $2\phi_0$. Ce saut du paramètre d'ordre lorsqu'on varie la source externe correspond à ce qui est appelé une avalanche. Ce phénomène n'est pas pris en compte dans la construction supersymétrique originale de Parisi-Sourlas et peut, en outre, influencer les propriétés physiques du système.

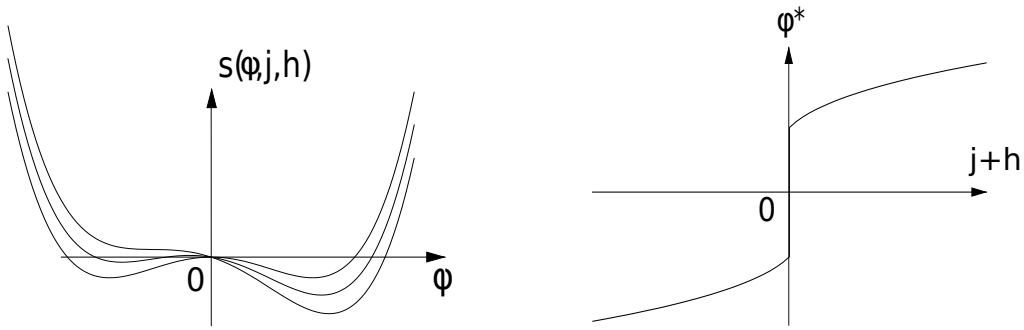

FIGURE 4.E – Illustration du phénomène d'avalanche dans le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0, tirée de [TBT13]. L'action est tracée en fonction du champ ϕ pour différentes valeurs de $j+h>0$ sur la gauche. A droite, on a représenté l'état fondamental $\phi^\star$ en fonction de la source $j+h$; ce dernier est discontinu en $j+h=0$.

On commence par ré-examiner le formalisme supersymétrique en dimension $d=0$. Après avoir moyenné sur le champ aléatoire, la fonction de partition de l'Eq. (3.41) s'exprime par :

$$\mathcal{Z}_A(j,\hat{j}) = \int d\phi\, d\hat{\phi}\, e^{-\hat{\phi}(r\phi+\frac{g}{6}\phi^3)+\frac{\Delta}{2}\hat{\phi}^2+j\hat{\phi}+\hat{j}\phi}\,(r+\frac{g}{2}\phi^2) \tag{4.10}$$

Le facteur $(r+(g/2)\phi^2)$ provient de l'intégration sur les champs grassmanniens (i.e. il correspond au jacobien issu du changement de variable dans la fonction delta). La fonction

de corrélation déconnectée à source nulle s'écrit donc :

$$\begin{aligned}\overline{\phi^{\star 2}} &= \int d\phi\, d\hat{\phi}\, \phi^2\, e^{-\hat{\phi}(r\phi+\frac{g}{6}\phi^3)+\frac{\Delta}{2}\hat{\phi}^2}\, (r+\frac{g}{2}\phi^2) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \int d\phi\, \phi^2\, e^{\frac{1}{2\Delta}(r\phi+\frac{g}{6}\phi^3)^2}\, (r+\frac{g}{2}\phi^2) \\ &= \int d\phi\, F(\phi, r, g, \Delta)\end{aligned} \tag{4.11}$$

Notons que cette quantité est parfaitement analytique en r. D'après la discussion du paragraphe 3.6.1, ce calcul n'est pas valable puisqu'il prend en compte tous les extrema de l'action. Il est cependant facile de modifier légèrement le formalisme pour sélectionner uniquement l'état fondamental. Il suffit en effet de rajouter une fonction de Heaviside $\theta(r+(g/6)\phi^2)$ dans l'intégrale de la fonction de partition. Les mêmes manipulations donnent alors :

$$\begin{aligned}\overline{\phi^{\star 2}} &= \sqrt{\frac{2\pi}{\Delta}} \int d\phi\, \theta(r+(g/6)\phi^2)\phi^2\, e^{\frac{1}{2\Delta}(r\phi+\frac{g}{6}\phi^3)^2}\, (r+\frac{g}{2}\phi^2) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi\, F(\phi, r, g, \Delta) - \int_{-\sqrt{6|r|/g}}^{\sqrt{6|r|/g}} d\phi\, F(\phi, r, g, \Delta)\end{aligned} \tag{4.12}$$

Le premier terme est régulier et s'identifie à la fonction de corrélation obtenue dans le formalisme supersymétrique original. La seconde contribution est, quant à elle, non analytique en r ; son développement vient en $r^{5/2}$. Ainsi, en tenant compte de tous les extrema de l'action et non uniquement de l'état fondamental, la construction originale de Parisi-Sourlas perd la trace de ce comportement singulier [Par84]. Ce dernier est du à l'exclusion d'un intervalle en ϕ dans l'intégrale ci-dessus et doit être relié au phénomène d'avalanche décrit précédemment.

Afin de caractériser la présence des avalanches, on introduit l'observable suivante :

$$\mathcal{P}_d(j_1, j_2) = \overline{\phi^\star(j_1, h)\, \phi^\star(j_2, h)} - \overline{\phi^\star(j_1, h)}\, \overline{\phi^\star(j_2, h)} \tag{4.13}$$

Celle-ci mesure les corrélations des aimantations entre deux copies du système dans une même réalisation du désordre mais couplées à des sources différentes j_1 et j_2. Cette définition peut être étendue à une dimension quelconque et généralise le propagateur déconnecté $\mathcal{P}_d$ pour des sources non nécessairement égales (à température nulle). Nous supposons tout de même ces dernières proches l'une de l'autre ; on pose $j_1 = j - \delta j$ et $j_2 = j + \delta j$. Il existe alors un petit intervalle de valeurs pour le champ aléatoire $j_1 < h < j_2$ dans lequel les aimantations des deux copies sont de signes opposés. Cela entraîne une contribution négative pour le premier terme de l'Eq. (4.13) ; cette dernière est proportionnelle à $|\delta j|\, \rho(j)$ ainsi qu'au saut du paramètre d'ordre (ρ désigne la densité de probabilité du champ aléatoire,

donnée dans l'Eq. (3.2)). On obtient plus précisément :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_d(j-\delta j, j+\delta j) - \mathcal{P}_d(j,j) &= \overline{\phi^\star(j-\delta j,h)\,\phi^\star(j+\delta j,h)} - \overline{\phi^\star(j,h)^2} + O(\delta j^2) \\ &= -4\phi_0^2\,|\delta j|\,\rho(j) + O(\delta j^2)\end{aligned} \tag{4.14}$$

Un point essentiel est que les avalanches sont responsables du comportement non analytique en $|j_2 - j_1|$ lorsque $j_2 \to j_1$ dans la fonction de corrélation ci-dessus ; ce dernier est représenté sur la Fig. 4.F. On montre dans la section suivante que les avalanches représentent la raison physique de la brisure de réduction dimensionnelle.

Précisons enfin que, dans la construction supersymétrique originale, l'état fondamental est remplacé par $\phi_+ + \phi_- - \phi_\ddagger$ quand les trois solutions coexistent. De cette manière, $\phi^\star$ est une fonction continue de la source ; les avalanches ne sont pas prises en compte et l'on peut vérifier que la différence de l'Eq. (4.14) ne contient pas de terme linéaire en $|\delta j|$ [TT12a].

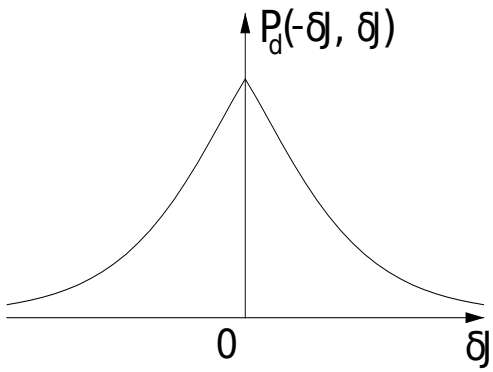

FIGURE 4.F – Illustration du phénomène d'avalanche dans le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0, tirée de [TBT13]. Le propagateur déconnecté $\mathcal{P}_d(-\delta j, \delta j)$ est tracé en fonction de δj. Notons la singularité linéaire en $\delta j = 0$; celle-ci n'est pas prise en compte dans le formalisme supersymétrique.

4.4 Rôle des Avalanches

La brisure de réduction dimensionnelle est directement reliée à l'apparition d'une non analyticité en $|\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1|$ dans le second cumulant du désordre effectif sans dimension δ_k. Cette singularité linéaire s'interprète physiquement comme la conséquence des avalanches apparaissant dans le système à température nulle (voir la section précédente sur modèle en dimension 0, ainsi que les Eqs. (3.81) et (3.89)). [ii] Cependant, les avalanches sont toujours présentes et celles-ci doivent intervenir sur des échelles suffisamment grandes afin de

ii. Nous revenons d'une manière plus générale sur ce point dans la section 4.4.2.

modifier le comportement critique et briser la réduction dimensionnelle. C'est en particulier le cas en dimension inférieure à d_{DR} ; la singularité induite par les avalanches subsiste alors dans les quantités dédimensionnées au point fixe du groupe de renormalisation. En revanche, pour $d > d_{DR}$, l'amplitude de la non analyticité est sous dominante et l'on peut négliger l'effet des avalanches.

Après avoir introduit le concept d'avalanche et démontré d'une façon générale que celles-ci génèrent une singularité linéaire dans les fonctions de corrélations généralisées pour des sources différentes, on relie l'amplitude de cette non analyticité aux caractéristiques d'échelle des avalanches au point critique. On en déduit alors une condition nécessaire et suffisante sur ces dernières pour que la réduction dimensionnelle soit brisée [TBT13]. En établissant le lien avec notre approche du groupe de renormalisation, on calcule finalement la dimension fractale des plus grandes avalanches typiques dans le régime critique.

4.4.1 Notion d'avalanche

Une avalanche correspond à un changement discontinu de la configuration physique du système (i.e. l'aimantation, pour un système magnétique) lorsqu'on varie continûment une source extérieure [FGOV00, DM03, WM05, LMW09]. Il est possible que des avalanches macroscopiques, c'est à dire qui traduisent le retournement d'un nombre macroscopique de spins, influencent les propriétés critiques du système. Dans un modèle désordonné à température nulle, l'aimantation s'identifie à l'état fondamental et il n'est pas surprenant que celui-ci soit une fonction discontinue de la source externe. Nous avons remarqué que cela était déjà le cas pour le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0.

On considère le modèle d'Ising en champ aléatoire à température nulle, en présence d'une source externe uniforme j. Pour une réalisation du désordre donnée, la configuration physique qui décrit les propriétés du système est l'état fondamental $\phi^\star = \phi^\star[j,h]$. Supposons que ce dernier présente une discontinuité en $j = j_0$. On définit alors la taille de l'avalanche comme l'intégrale sur l'espace du saut du paramètre d'ordre :

$$\begin{aligned} S_0 &= \int_x \overline{\phi^\star[j_0^+,h](x) - \phi^\star[j_0^-,h](x)} \\ &= v\left(m[j_0^+,h] - m[j_0^-,h]\right) \end{aligned} \tag{4.15}$$

où l'on a introduit le volume total du système $v = \int_x 1$ et la moyenne spatiale de l'aimantation $m[j,h] = v^{-1}\int_x \phi^\star[j,h](x)$.

Il est possible de caractériser la distribution moyenne des avalanches par leur densité $\varrho(S,j)$. Celle-ci est définie telle que $\varrho(S,j)dSdj$ soit la moyenne sur le désordre du nombre d'avalanches de taille comprise entre S et $S+dS$, pour une source entre j et $j+dj$. Ainsi, lorsque la source varie de j_1 à j_2, le changement du paramètre d'ordre est la somme de deux

contributions. La première est régulière et provient de la variation continue de l'aimantation avec la source, alors que la seconde concerne les discontinuités liées aux avalanches entre j_1 et j_2. En conséquence, les moments de la différence $m[j_2,h]-m[j_1,h]$ sont donnés par :

$$\overline{(m[j_2,h]-m[j_1,h])^p} = v^{-p}\int_{j_1}^{j_2} dj \int_{S_{min}}^{\infty} dS\, S^p \varrho(S,j) + reg \tag{4.16}$$

reg représente la contribution régulière au changement d'aimantation et S_{min} désigne une coupure microscopique sur la taille des avalanches.

4.4.2 Singularités induites par les avalanches

Puisque les moments pairs sont symétriques dans l'échange des sources j_1 et j_2, le premier terme de l'Eq. (4.16) apporte une singularité linéaire en $|j_2-j_1|$ lorsque $j_2 \to j_1$:

$$\overline{(m[j_2,h]-m[j_1,h])^{2p}} = |j_2-j_1| v^{-2p}\int_{S_{min}}^{\infty} dS\, S^{2p} \varrho(S,j) + O((j_2-j_1)^2) \tag{4.17}$$

avec $j=(j_1+j_2)/2$. Les autres termes sont réguliers ou contiennent des singularités plus faibles que $|j_2-j_1|$; ils sont dans tous les cas d'ordre $(j_2-j_1)^2$.

Comme nous l'avons déjà montré en dimension 0, la singularité linéaire en $|j_2-j_1|$ apparaissant dans l'Eq. (4.17) est également ressentie dans le propagateur déconnecté, celui-ci étant généralisé pour deux copies du système dans la même réalisation du désordre, mais couplées à des sources différentes. Nous rappelons la définition de ce dernier à température nulle :

$$\mathcal{P}_d[j_1,j_2](x,y) = \overline{\phi^\star[j_1,h](x)\,\phi^\star[j_2,h](y)} - \overline{\phi^\star[j_1,h](x)}\;\overline{\phi^\star[j_2,h](y)} \tag{4.18}$$

A impulsion nulle, la transformée de Fourier de $\mathcal{P}_d$ est directement reliée au second moment de l'écart d'aimantation $m[j_2,h]-m[j_1,h]$. [iii]

$$\mathcal{P}_d[j_1,j_2](q=0) = v\Big(\overline{m[j_1,h]m[j_2,h]} - \overline{m[j_1,h]}\;\overline{m[j_2,h]}\Big) \tag{4.19}$$

Cette quantité est effectivement singulière lorsque $j_2 \to j_1$; en utilisant l'Eq. (4.17), il vient :

$$\mathcal{P}_d[j-\delta j, j+\delta j](q=0) - \mathcal{P}_d[j,j](q=0) = -|\delta j| v^{-1}\int_{S_{min}}^{\infty} dS S^2 \varrho(S,j) + O(\delta j^2) \tag{4.20}$$

On retrouve ainsi d'une façon générale la propriété importante déjà rencontrée précédemment : les avalanches induisent une singularité linéaire en fonction des sources dans le propagateur déconnecté à température nulle. Cela est vrai quelle que soit l'échelle à laquelle interviennent ces avalanches, et même en dehors du régime critique.

iii. Plus précisément, $\mathcal{P}_d[j_1,j_2](q=0)$ donne le second cumulant de la fonctionnelle aléatoire $m[j,h]$.

4.4.3 Comportement d'échelle des avalanches dans la région critique

Au point critique du système, la longueur de corrélation diverge et des avalanches apparaissent à toutes les échelles. Afin de relier les caractéristiques d'échelle des avalanches à l'amplitude de la singularité linéaire induite par celles-ci, on considère un système de taille finie (mais grande) $v = L^d$ à température nulle. On suppose, de plus, que ce dernier est au "point critique", c'est à dire que la longueur de corrélation et l'échelle typique des plus grandes avalanches sont de l'ordre de la taille de système.

Dans ce cas, la densité de probabilité d'avoir une avalanche de taille S (pour j donné) peut s'écrire sous la forme d'échelle suivante [DS96, PRV03, PRV04, LD09, MG11] :

$$D_L(S,j) = S^{-\tau} D(\frac{S}{S_L}, |j - j_c| S^{\psi}) \tag{4.21}$$

S_L est la taille de la plus grande avalanche "critique" dans le système fini, et $j = j_c$ la condition de criticalité. On a bien entendu $j_c = 0$ dans le modèle d'Ising en champ aléatoire en raison de la symétrie $\mathbb{Z}_2$. Notons que S_L agit comme une coupure macroscopique sur la taille des avalanches ; lorsque $S/S_L \gtrsim 1$, la densité D_L décroit exponentiellement. S_L se comporte comme L^{d_f} avec la taille du système, où l'exposant d_f correspond à la dimension fractale des avalanches. La densité de probabilité est normalisée $\int_{S_{min}}^{\infty} dS D_L(S,j) = 1$ et les moments de la taille des avalanches vérifient $\langle S^p \rangle = \int_{S_{min}}^{\infty} dS S^p D_L(S,j)$. L'exposant τ qui intervient dans l'Eq. (4.21) est généralement compris entre 1 et 2, et sa valeur de champ moyen est $\tau = 3/2$ [DS96]. Ainsi, le facteur de normalisation de la densité est dominé par les avalanches microscopiques, alors que les moments $\langle S^p \rangle$ avec $p \geqslant 1$ sont influencés par les plus grandes avalanches. Ces derniers se comportent effectivement comme $S_L^{p+1-\tau} \sim L^{d_f(p+1-\tau)}$ lorsque la taille du système diverge. Précisons enfin que la densité de probabilité est reliée à la distribution ϱ des avalanches par $\varrho_L(S,j) = D_L(S,j) \int_{S_{min}}^{\infty} dS \varrho_L(S,j) = D_L(S,j) \varrho_{0L}(j)$.

La susceptibilité magnétique usuelle $\chi_c(j) = \partial_j \overline{m[j,h]}$ s'identifie à la transformée de Fourier à impulsion nulle du propagateur connecté $\mathcal{P}_c$ défini dans le chapitre précédent (sans le facteur T) ; on l'appelle pour cette raison susceptibilité connectée. On exprime cette dernière à l'aide de l'Eq. (4.16) pour $p = 1$:

$$\chi_c(j) = \chi_{c,reg}(j) + L^{-d} \int_{S_{min}}^{\infty} dS S \varrho_L(S,j) \tag{4.22}$$

où $\chi_{c,reg}$ dénote la contribution régulière à la susceptibilité, c'est à dire sans la présence d'avalanche. D'après le comportement à grande distance de la fonction de corrélation connectée (voir Eq. (3.11), χ_c diverge comme $L^{2-\eta}$ au point critique. On fait l'hypothèse naturelle que les avalanches contribuent autant ou plus que le terme régulier $\chi_{c,reg}$ à la susceptibilité totale dans la région critique. En évaluant les Eqs. (4.22) et (4.21) en $j = j_c$,

il vient alors la relation suivante :

$$\rho_0(j_c)\, L^{-d+d_f(2-\tau)} \sim L^{2-\eta} \tag{4.23}$$

En conséquence, il est possible de réécrire l'Eq. (4.17) comme :

$$\overline{(m[j_2,h]-m[j_1,h])^{2p}} \sim |j_2-j_1|\, L^{2-\eta-(2p-1)(d-d_f)} + O((j_2-j_1)^2) \tag{4.24}$$

où les sources j_1 et j_2 sont proches de j_c. La singularité linéaire dans le propagateur déconnecté à impulsion nulle prend, quant à elle, la forme suivante :

$$\mathcal{P}_d[j_c-\delta j, j_c+\delta j](q=0) - \mathcal{P}_d[j_c,j_c](q=0) \sim -|\delta j| L^{2-\eta+d_f} + O(\delta j^2) \tag{4.25}$$

L'amplitude du terme non analytique en $|\delta j|$ diverge donc avec la taille du système au point critique. [iv]

On peut finalement montrer à l'aide de l'Eq. (4.25) que le second cumulant du désordre renormalisé en champ uniforme $\Delta_L(\varphi_1,\varphi_2)$ [v] présente lui aussi une singularité linéaire en $|\varphi_2-\varphi_1|$ lorsque $\varphi_2 \to \varphi_1$. Plus précisément, en utilisant l'Eq. (4.25) ainsi que la relation entre les fonctions de Green et les fonctions une particule irréductibles (voir Eq. (3.89)), il est possible d'établir [TBT13] :

$$\Delta_L(\varphi_c-\delta\varphi,\varphi_c+\delta\varphi) - \Delta_L(\varphi_c,\varphi_c) \sim -|\delta\varphi| L^{d_f-2(2-\eta)} + O(\delta\varphi^2) \tag{4.26}$$

φ_c correspond à la valeur de l'aimantation au point critique.

4.4.4 Caractérisation de la brisure de réduction dimensionnelle

Le lien entre les quantités calculées à travers le groupe de renormalisation et celles discutées dans le système de taille finie s'établit par la correspondance $k \leftrightarrow 1/L$. De cette manière, puisque l'aimantation et le second cumulant du désordre renormalisé à l'échelle k se comportent tels que $\varphi \sim k^{d_\phi} = k^{(d-4+\bar{\eta})/2}$ et $\Delta_k \sim k^{\bar{\eta}-2\eta}$ (voir la section 3.7.4), on peut réécrire l'Eq. (4.26) sous une forme dédimensionnée en divisant respectivement $\delta\varphi$ et Δ_L par les dimensions d'échelle L^{-d_ϕ} et $L^{2\eta-\bar{\eta}}$. On obtient alors directement l'amplitude sans dimension de la singularité linéaire ; celle-ci varie avec la taille du système comme :

$$L^{d_f-2(2-\eta)+\bar{\eta}-2\eta-d_\phi} = L^{d_f-\frac{1}{2}(d+4-\bar{\eta})} = L^{d_f-(d-d_\phi)} \tag{4.27}$$

Le point fixe du groupe de renormalisation ne comportant pas de non analyticité plus forte que le terme en $|\delta\varphi|$, la quantité de l'Eq. (4.27) ne peut diverger dans la limite $L \gg 1$.

iv. Rappelons que le propagateur $\mathcal{P}_d$ diverge lui même comme $L^{4-\bar{\eta}}$ au point critique (voir Eq. (3.11)).

v. $\Delta_L(\varphi_1,\varphi_2)$ est la fonction de corrélation une particule irréductible associée à la fonction de Green $\mathcal{P}_{d,L}$ (à impulsion nulle).

Autrement dit, l'inégalité $d_f \leqslant d - d_\phi$ est toujours satisfaite. Ainsi, la singularité linéaire persiste dans les quantités sans dimension à la limite $L \gg 1$ (c'est à dire au point fixe) si et seulement si $d_f = d - d_\phi$. Dans le cas où $d_f < d - d_\phi$, la singularité est sous-dominante et celle-ci n'affecte pas le comportement critique ni les exposants associés.

En conclusion, la réduction dimensionnelle est brisée si la dimension fractale des plus grandes avalanches typiques au point critique satisfait la condition [TBT13] :

$$d_f = d - d_\phi \tag{4.28}$$

On a montré que cela s'applique en dimension plus basse que d_{DR} ; on peut alors déduire $d_f = (d + 4 - \bar{\eta})/2$ des valeurs de $\bar{\eta}$ présentées sur la figure 3.F. En revanche, la propriété de réduction dimensionnelle est valable si :

$$d_f < d - d_\phi \tag{4.29}$$

et cela malgré la présence des avalanches et de la singularité linéaire dans le second cumulant dimensionné du désordre effectif à température nulle. Cette seconde situation correspond à $d > d_{DR}$; nous expliquons dans la suite comment déterminer la dimension fractale des avalanches d_f dans ce cas.

Notons que, dans le régime de champ moyen pour $d \geqslant 6$, l'exposant d_f a été calculé et vaut $d_f = 4$ [DS96, LW09, LDWC04]. Comme $\bar{\eta} = 0$, on a $d - d_\phi = (d+4)/2 \geqslant 5$ et la relation de l'Eq. (4.29) est donc vérifiée. Au contraire, à la dimension critique inférieure $d = 2$, les avalanches sont compactes et d_f est égal à la dimension spatiale (voir [PDS99]). Puisque la dimension du champ est nulle, on retrouve bien l'égalité de l'Eq. (4.28) : $d - d_\phi = d = d_f$.

4.4.5 Dimension fractale des avalanches

En dimension supérieure à d_{DR}, la réduction dimensionnelle est valable et, d'après la discussion qui précède, la dimension fractale des plus grandes avalanches typiques vérifie $d_f < d - d_\phi$. La différence $d - d_\phi - d_f > 0$ peut être ré-interprétée et calculée à travers notre approche du groupe de renormalisation. En effet, lorsqu'on perturbe le point fixe analytique avec une fonction présentant une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$, l'amplitude de la perturbation doit tendre vers 0 pour $k \to 0$ de la façon suivante :

$$\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_*(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) + k^\lambda |\delta\tilde{\varphi}| f_\lambda(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{4.30}$$

avec, d'après le comportement donné par l'Eq. (4.27) pour l'amplitude sans dimension de la singularité , $\lambda = d - d_\phi - d_f > 0$.

Le calcul de la valeur propre λ a été réalisé dans la section 4.2.2 et nous pouvons en déduire l'exposant d_f. Ce dernier est tracé en fonction de la dimension sur la Fig. 4.G. Rappelons également la valeur $\lambda = (d-4)/2$ déterminée exactement en dimension $d \geqslant 6$; puisque la dimension du champ vaut également $d_\phi = (d-4)/2$ au point fixe gaussien, on retrouve le résultat pour la dimension fractale des avalanches dans la limite de champ moyen : $d_f = 4$ pour tout $d \geqslant 6$ [DS96, LW09, LDWC04].

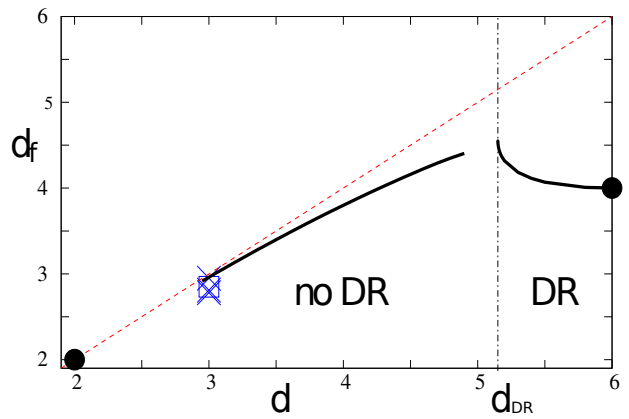

FIGURE 4.G – Dimension fractale des plus grandes avalanches typiques en fonction de la dimension pour le modèle d'Ising en champ aléatoire au point critique, tiré de [TBT13]. d_f est déduit des résultats sur les dimensions anormales et la valeur propre λ présentés en Figs. 3.F et 4.C ; on a tracé $d_f = d - d_\phi = (d + 4 - \bar{\eta})/2$ dans la région $d < d_{DR}$ où la réduction dimensionnelle est brisée, et $d_f = d - d_\phi - \lambda = (d + 4 - \eta_{DR})/2 - \lambda$ pour $d > d_{DR}$. Les croix et les carrés bleus correspondent aux estimations numériques de d_f pour le comportement critique du modèle d'Ising en champ aléatoire hors équilibre [PDS99, PRV03, PRV04, LD09] et à l'équilibre [LD09]. Les deux points représentent les valeurs connues aux dimensions critiques inférieure et supérieure (voir section 4.4.4) ; la ligne en pointillés rouge désigne quant à elle la borne supérieure $d_f \leqslant d$. La résolution numérique des équations de flot devient très difficile dans les régions $d \to d_{DR}^-$ et $d \lesssim 2.9$, d'où l'absence de résultat pour ces valeurs de la dimension.

4.5 Conclusion

Nous avons relié la brisure de réduction dimensionnelle aux caractéristiques d'échelle des avalanches. Alors que la réduction dimensionnelle est une propriété formelle qui identifie le comportement critique d'un système désordonné en dimension d à celui du modèle pur en dimension $d-2$, les avalanches sont des évènements de grande échelle qui interviennent

lorsque la configuration physique du système varie en fonction d'une source externe. Cela fournit une explication physique au phénomène ; au point critique, les avalanches doivent intervenir sur des échelles suffisamment grandes pour que la singularité soit dominante et brise la réduction dimensionnelle.

Ce travail sur le modèle d'Ising en champ aléatoire peut être généralisé en introduisant des interactions à longue portée dans le système [BTTS13]. Cette extension est intéressante car l'exposant σ qui gouverne la décroissance des interactions joue un rôle similaire à celui d'une dimension. En travaillant en dimension fixée et en variant σ, le système peut parcourir une gamme de comportements critiques allant du champ moyen jusqu'aux grandes fluctuations du paramètre d'ordre. Cela est pratique pour les simulations puisque la dimension du réseau y est fixée, alors que l'exposant σ peut, quant à lui, varier continûment. Nous étudions dans les chapitres suivants l'influence des interactions et des corrélations du désordre à longue portée sur le comportement critique du modèle d'Ising en champ aléatoire. Le but est d'aboutir à une version à longue portée du modèle qui présente une brisure de réduction dimensionnelle en faisant varier l'exposant σ, tout en gardant la dimension fixée (et basse).

Chapitre 5

Influence des interactions à longue portée

5.1 Introduction

Les interactions qui décroissent à longue portée dans l'espace sont très fréquentes dans la nature. Celles-ci interviennent à toutes les échelles, allant de l'interaction électromagnétique au niveau microscopique jusqu'à la force de gravitation dans les grandes structures astrophysiques. On s'intéresse à des systèmes dans lesquels le potentiel d'interaction à deux corps décroit algébriquement avec la distance relative r ; il se comporte typiquement à grande distance comme $V(r) \sim 1/r^{d+\sigma}$, où d désigne la dimension de l'espace et $\sigma > -d$ est un exposant qui définit la loi de puissance. D'une façon générale, lorsqu'on étudie les propriétés dynamiques et thermodynamiques de tels systèmes, il est possible de distinguer deux grandes classes d'interactions à longue portée selon la valeur du paramètre σ. Quand σ est négatif, les interactions décroissent lentement dans l'espace et leurs effets sont très prononcés dans les propriétés thermodynamiques du système. Par exemple, l'énergie n'est plus une grandeur additive (i.e. elle n'est pas proportionnelle au volume) et les ensembles microcanonique, canonique et grand canonique ne sont pas équivalents à la limite thermodynamique [Ant62, LBW68, Thi70, HT71, LB99, PT06]. Il n'est, d'ailleurs, pas possible de définir une limite thermodynamique en maintenant constants les différents paramètres intensifs du système. D'un point de vue dynamique, le cas $\sigma < 0$ est caractérisé par la présence d'états quasi-stationnaires qui empêchent le système de relaxer à l'équilibre [AR95, LRR98, LRR99, Yam03, MRS05]. Nous considérons dans ce chapitre la situation opposée $\sigma > 0$ où les interactions à longue portée décroissent suffisamment vite pour ne pas impliquer d'effets drastiques dans les propriétés dynamiques et thermodynamiques du système. [i] En particulier, l'état d'équilibre existe et l'énergie est additive ; il est alors pos-

i. Notons que si l'interaction décroit plus vite qu'une loi de puissance, on retrouve les propriétés des systèmes où l'interaction se fait à courte portée, c'est à dire entre les plus proches voisins sur le réseau.

sible d'appliquer le formalisme habituel de la mécanique statistique pour étudier ce type de systèmes. Les interactions de longue portée telles que $\sigma > 0$ sont tout de même très intéressantes car elles modifient la nature des transitions de phase et leurs propriétés universelles. Par rapport au modèle à courte portée, le diagramme de phase du système est plus riche et de nouvelles classes d'universalité dépendant continûment du paramètre σ apparaissent. L'exposant σ joue, en effet, un rôle similaire à celui d'une dimension ; il est possible de travailler en dimension d fixée et de varier σ afin de parcourir une large gamme de comportements critiques pour le système. Cela inclut le cas unidimensionnel dans lequel il peut exister une transition de phase, à la différence des modèles avec des interactions à courte portée. Ainsi, les modèles en présence d'interactions à longue portée sont d'un grand intérêt pour étudier l'influence de la dimension dans la physique des phénomènes critiques, et cela aussi bien au niveau théorique que pour les simulations numériques (de part l'avantage de pouvoir travailler en dimension fixée et basse). En plus de cet intérêt académique fondamental, les interactions à longue portée avec $\sigma > 0$ possèdent de nombreuses réalisations physiques allant de la force de Van der Waals [Dan01, DR01] à l'effet Kondo dans les métaux [AY69, YA70], en passant par des applications en neurosciences théoriques [Ami92, JHKC03, Opp03], ou encore à la propagation des épidémies avec les vols de Levy [BR91, XBR93, HH99]. Notons que des modèles classiques de spins avec des interactions à longue portée, en $1/r^d \cos(kr + \phi)$, sont également apparus naturellement dans l'étude des verres de spins (interaction RKKY) [For82].

Le but de ce chapitre est de décrire l'influence des interactions à longue portée, en $1/r^{d+\sigma}$ avec $\sigma > 0$, sur le comportement critique du modèle d'Ising. Les deux premières sections constituent une introduction au modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée ; nous déterminons ensuite les propriétés critiques universelles du modèle en appliquant la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif. Des revues générales sur les systèmes en présence d'interactions à longue portée, incluant le cas $\sigma < 0$ non traité ici, se trouvent dans [DRAW02, Cam08, Muk10].

5.2 Transitions de phase en dimension 1

Il est bien connu que le modèle d'Ising unidimensionnel standard, dans lequel l'interaction ferromagnétique n'a lieu qu'entre les plus proches voisins le long de la chaîne, ne présente pas de transition de phase. Pour toute température non nulle, le système se trouve dans la phase désordonnée. Ce résultat à une dimension est généralisé pour tout type d'interaction, à condition que celle-ci soit de portée finie.

On explique ici comment les interactions à longue portée modifient ce comportement et permettent l'existence d'une phase ordonnée non triviale dans une chaîne de spins d'Ising. On souligne en particulier un point important : la transition de phase obtenue dans le mod-

èle unidimensionnel appartient à une nouvelle classe d'universalité qui dépend continûment du paramètre de décroissance des interactions.

On utilise dans un premier temps un argument physique simple pour comprendre l'absence de transition de phase dans le modèle d'Ising à courte portée en dimension 1. Une chaîne de spins dont l'interaction ferromagnétique décroit à longue portée en $|i-j|^{-1-\sigma}$ ($\sigma > 0$) est ensuite introduite. On montre que son comportement est radicalement différent lorsque $0 < \sigma \leqslant 1$ et qu'il existe, dans ce cas, une transition de phase. On discute également quelques propriétés concernant le comportement critique du modèle dans cette région.

5.2.1 Modèle d'Ising à courte portée

On commence par rappeler le hamiltonien pour une chaîne de N spins d'Ising $S_i = \pm 1$ avec une interaction ferromagnétique entre plus proches voisins.

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i=1}^{N-1} S_i S_{i+1} \tag{5.1}$$

Le couplage $J > 0$ tend à aligner les spins.

L'instabilité de l'ordre ferromagnétique lorsque la température est non nulle peut être comprise simplement en utilisant un argument développé il y a plus de 70 ans par Peierls et Landau [Pei23, Pei35, Lan37, LL69]. On s'attache dans un premier temps à reproduire cette discussion sur le modèle à courte portée.

On considère l'état fondamental du système, c'est à dire une configuration où tous les spins pointent dans le même sens, et l'on renverse un segment de n spins. Le coût énergétique associé à cette excitation est indépendant de la taille du segment retourné et vaut $4J$. A température non nulle, ce renversement est favorable pour le système si et seulement si ce dernier implique une diminution de son énergie libre. Puisque le segment retourné peut être placé en tout point de la chaîne, l'entropie de l'excitation étudiée est de l'ordre de $\log N$ (nous supposons N grand devant n). D'où la variation de l'énergie libre du système :

$$\Delta F = 4J - T \log N \tag{5.2}$$

Ainsi, pour toute température non nulle, cette variation est négative lorsque N est suffisamment grand. A la limite thermodynamique, ce renversement est donc favorable pour le système ; des excitations de taille n arbitrairement grande sont alors générées et l'ordre ferromagnétique est détruit. On en conclut que la phase ordonnée n'est pas un état d'équilibre pour le système à température finie.

Notons que l'absence de transition de phase en dimension 1 se démontre également de façon rigoureuse par la matrice de transfert du modèle [Bel70, Nin76] ; et cela est généralisable quel que soit le modèle, du moment que les interactions sont de portée finie.

L'argument précédent ne peut s'appliquer en dimension $d > 1$ pour laquelle le modèle d'Ising présente une transition de phase. En effet, lorsque la dimension est strictement supérieure à 1, le coût énergétique de l'excitation n'est plus indépendant de la taille du domaine retourné. Pour le renversement d'une région hypercubique de taille L^d, l'augmentation de l'énergie est alors de l'ordre de JL^{d-1} (ce qui correspond à l'énergie de surface du domaine considéré). De cette manière, renverser de larges domaines devient très coûteux énergétiquement ; puisque l'entropie est toujours en $\log N$, l'ordre ferromagnétique peut être maintenu pour une température suffisamment basse.

5.2.2 Modèle de Dyson

Une variante du modèle d'Ising où l'interaction ferromagnétique n'est plus de portée finie mais décroit désormais comme une loi de puissance avec la distance a été introduite à la fin des années 60. Des premiers résultats rigoureux sur le cas unidimensionnel sont notamment dus à Ruelle, Kac, Thompson et Dyson [Rue68, KT69, Dys69a, Dys69b]. Ceux-ci ont montré que le modèle pouvait alors exhiber une transition de phase en dimension 1 selon la loi de puissance considérée. Le hamiltonien introduit par Dyson est le suivant :

$$\mathcal{H} = -J \sum_{i<j} \frac{S_i S_j}{|i-j|^{1+\sigma}} \tag{5.3}$$

où $i, j \in \{1, \cdots, N\}$. L'exposant $\sigma > 0$ caractérise la décroissance à longue portée de l'interaction d'échange entre les spins.

Il est intéressant de répéter la discussion menée dans le cadre du modèle à courte portée sur le nouvel hamiltonien de l'Eq. (5.3) ; cela permet, en effet, de comprendre l'existence d'une transition de phase [Muk10].

On considère donc une configuration ordonnée où tous les spins sont dans le même sens, et l'on retourne un segment de n spins consécutifs le long de la chaîne. Le coût énergétique de l'excitation s'exprime maintenant par :

$$\begin{aligned} \Delta E &= 2J \sum_{i=l}^{l+n-1} \left(\sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{(i-j)^{1+\sigma}} + \sum_{j=l+n}^{N} \frac{1}{(j-i)^{1+\sigma}} \right) \\ &\simeq 2J \int_l^{l+n-1} dx \left(\int_1^{l-1} \frac{dy}{(x-y)^{1+\sigma}} + \int_{l+n}^{N} \frac{dy}{(y-x)^{1+\sigma}} \right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

où l est la position du premier spin renversé. En supposant $\sigma > 0$ et $\sigma \neq 1$, on obtient le terme dominant à la limite thermodynamique $N \gg 1$:

$$\Delta E \simeq \frac{4J}{\sigma(1-\sigma)}\left(n^{1-\sigma} - 1\right) \tag{5.5}$$

Ainsi, lorsque $0 < \sigma < 1$, l'énergie d'excitation dépend de la taille du domaine renversé comme $n^{1-\sigma}$ et il est couteux de retourner de larges régions. On trouve donc, dans ce cas, un comportement similaire au modèle d'Ising à courte portée en dimension $d > 1$; la phase ordonnée doit être stable à suffisamment basse température. En revanche, pour $\sigma > 1$, le coût énergétique de l'excitation est borné et tend vers $4J/(\sigma(\sigma-1))$ quand le domaine renversé est grand $n \gg 1$. Puisque la variation d'entropie est toujours de l'ordre de $\log N$, on en déduit comme dans le modèle à courte portée que la phase ferromagnétique n'existe pas à $T \neq 0$.

Dyson a prouvé de façon rigoureuse le résultat précédent ; le modèle présente une transition lorsque $0 < \sigma < 1$ alors que la phase ordonnée est absente pour $\sigma > 1$ [Dys69a, Dys69b].

La cas limite $\sigma = 1$ joue un rôle particulier et possède des applications physiques. Il a été établi par Anderson et Yuval que le hamiltonien de l'Eq. (5.3) tel que $\sigma = 1$ était essentiel pour décrire l'effet Kondo dans les métaux [AY69, YA70]. En utilisant la représentation par l'intégrale de chemin en temps imaginaire, le problème de Kondo le plus simple d'un spin 1/2 est en effet équivalent à une chaîne classique d'Ising avec une interaction en $|i-j|^{-2}$.

En étudiant une configuration d'aimantation par site m dans le modèle avec $\sigma = 1$, on peut montrer que l'énergie d'excitation associée au renversement de n spins consécutifs est indépendante de n au premier ordre, et se comporte comme l'entropie, c'est à dire en $\log N$. Thouless a calculé la variation de l'énergie libre dans ce cas [Tho69].

$$\Delta F = 2Jm^2 \log N - (T/2)\log N \tag{5.6}$$

En conséquence, s'il existe une phase ferromagnétique non triviale, l'aimantation m vérifie nécessairement l'inégalité qui suit :

$$4Jm^2 \geqslant T \tag{5.7}$$

Lorsqu'on augmente la température, le paramètre d'ordre ne peut donc atteindre 0 de la manière usuelle d'une transition de phase continue. La fonction $m(T)$ présente alors un saut, et celui-ci se traduit par un exposant critique β nul. Ce résultat, également prédit par Anderson et Yuval dans leur description de l'effet Kondo, a été vérifié numériquement [AYH70, NB70, AY71]. Il existe une transition en $\sigma = 1$ avec une discontinuité finie de l'aimantation à la température critique.

En fait, le comportement critique pour $\sigma = 1$ ressemble beaucoup à la transition de Kosterlitz-Thouless dans le modèle XY à courte portée en deux dimensions (excepté que, dans cette dernière, l'aimantation est nulle quelle que soit la température) [KT73, Kos74]. Le cas $\sigma = 1$ joue en quelque sorte le même rôle que la dimension critique inférieure dans le modèle à courte portée [Kos76]. En particulier, l'exposant ν diverge lorsque σ tend vers 1. Kosterlitz a calculé à l'aide du groupe de renormalisation les exposants critiques du modèle au premier ordre au voisinage de $\sigma = 1$; il obtient :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2(1-\sigma)}} + O(1) \tag{5.8}$$

et concernant la dimension anormale du champ :

$$\eta = 2 - \sigma + O((1-\sigma)^2) \tag{5.9}$$

On montre dans la suite du chapitre que la relation $\eta = 2 - \sigma$ est en fait vérifiée à tous les ordres en $1 - \sigma$.

Il apparaît ainsi une nouvelle classe d'universalité pour la transition quand $0 < \sigma \leqslant 1$, et le comportement critique universel du modèle dépend alors continûment du paramètre σ.

Nous mettrons également en évidence par la suite qu'il existe une seconde valeur critique $\sigma = 1/2$ en dessous de laquelle la transition est de type champ moyen [LB97, Mon98]. En effet, lorsque σ est suffisamment petit, les interactions à longue portée décroissent lentement et tendent à supprimer les fluctuations, cela justifiant l'approximation de champ moyen. Précisons que le comportement critique du système dans le régime $0 < \sigma < 1/2$ est classique mais déjà non trivial, dans le sens où les exposants de champ moyen sont σ-dépendants (voir section 5.3.2). La limite $\sigma = 1/2$ s'interprète comme l'équivalent de la dimension critique supérieure dans le modèle à courte portée, et les fluctuations ne peuvent être négligées dans la région $1/2 < \sigma \leqslant 1$.

Nous avons donc souligné la possibilité d'étudier des transitions de phase dans un espace physique unidimensionnel en introduisant des interactions à longue portée. De plus, ces interactions font apparaître de nouvelles classes d'universalité qui dépendent du paramètre de décroissance σ. Il est alors possible de travailler en dimension fixée et de varier σ afin de modifier les exposants du modèle. En particulier en dimension 1, changer continûment σ entre 1/2 et 1 permet de parcourir une gamme de comportements critiques similaire à celle obtenue entre les dimensions critiques inférieure et supérieure du modèle à courte portée. On peut ainsi interpréter σ comme une dimension effective supplémentaire du modèle à longue portée. Cela sera particulièrement utile dans le chapitre suivant où nous étudions la propriété de réduction dimensionnelle dans une version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire à trois dimensions. Lorsque la réduction dimensionnelle sera valable, on retrouvera donc le comportement critique du modèle unidimensionnel pur discuté ici.

5.3 Comportement critique universel

On discute d'une manière plus générale le comportement critique universel du modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée. On considère le modèle en dimension d quelconque et les interactions décroissent comme $|x_i - x_j|^{-d-\sigma}$ avec la distance entre les spins ($\sigma > 0$).

Depuis le premier travail de Joyce en 1966 sur le modèle sphérique, il est connu que les interactions de ce type modifient les propriétés universelles du système lorsque σ est suffisamment petit [Joy66]. En particulier, les exposants critiques dépendent du paramètre σ [FMN72]. Nous avons remarqué que cela était le cas à basse dimension, où une transition de phase peut apparaître. Il est alors possible de travailler en dimension fixée et de varier continûment σ afin de parcourir une large gamme de comportements critiques différents ; ce qui est d'une grande utilité pour la théorie des transitions de phase.

Après avoir précisément défini la théorie de champ associée au modèle, on détermine les propriétés critiques dans les régimes $0 < \sigma \leqslant d/2$ et $\sigma > 2$. Dans la première région $0 < \sigma \leqslant d/2$, le système critique présente un comportement de type champ moyen où les fluctuations peuvent être négligées. Par ailleurs, lorsque σ est supérieur à 2, les interactions à longue portée décroissent rapidement et sont sous dominantes ; on retrouve alors le comportement critique du modèle d'Ising à courte portée. Nous exposons finalement les résultats de la théorie de perturbation ainsi que des simulations numériques concernant le régime intermédiaire $d/2 < \sigma < 2$.

5.3.1 Théorie ϕ^4 en présence d'interactions à longue portée

On souhaite déterminer les propriétés critiques universelles du modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée. Il est pour cela pratique de travailler directement avec la version continue de la théorie, celle-ci appartenant à la même classe d'universalité que le modèle défini sur réseau. On considère donc une théorie bosonique scalaire ϕ^4 dont l'action microscopique est la suivante :

$$\mathcal{S}_B[\phi] = -\frac{1}{2}\int_{x,\,x'} \lambda(|x-x'|)\phi(x)\phi(x') + \int_x \frac{r}{2}\phi(x)^2 + \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{5.10}$$

Le premier terme représente la contribution des interactions de longue portée à l'énergie du système ; la fonction $\lambda(|x-x'|)$ se comporte comme $|x-x'|^{-d-\sigma}$ à grande distance $|x-x'| \gg a$ (a est le pas du réseau sur lequel est initialement défini le modèle). Comme précédemment, on étudie le cas d'interactions faiblement à longue portée avec $\sigma > 0$.

En transformée de Fourier, la fonction λ se développe à petite impulsion comme :

$$\lambda(q) = \lambda(0) - Z_{LR}(q^2)^{\frac{\sigma}{2}} - Zq^2 + \cdots \tag{5.11}$$

La présence du terme non analytique en q^σ est la conséquence de la décroissance à longue portée de la fonction λ. Notons que des corrections logarithmiques interviennent dans le développement ci-dessus lorsque σ est entier ;[ii] on néglige ces dernières pour la suite de l'étude.

De manière analogue au développement en dérivées du champ utilisé pour tronquer l'action effective, on peut omettre les termes d'ordre supérieur en q dans l'Eq. (5.11). Ceux-ci sont, en effet, sous dominants puisque l'on s'intéresse à la physique de grande distance, c'est à dire au régime de faible impulsion $|q| \to 0$. On ré-exprime alors l'action $\mathcal{S}_B$ à l'aide de l'Eq. (5.11) :

$$\mathcal{S}_B[\phi] = \int_q \frac{1}{2}\phi(q)(Zq^2 + Z_{\mathrm{LR}}q^\sigma + \tau)\phi(-q) + \int_x \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{5.12}$$

où l'on a posé $\tau = r - \lambda(0)$. Le terme habituel en q^2 résulte des interactions à courte portée qui sont toujours présentes dans le système. Nous montrons effectivement dans la suite que ce terme est automatiquement généré au cours du flot du groupe de renormalisation. Même si l'on part d'une action microscopique telle que $Z = 0$, l'interaction de courte portée en q^2 apparaît au cours du flot et entre en compétition avec le terme à longue portée [Sak73]. Il vient d'ores et déjà un premier résultat important : lorsque σ est supérieur à 2, le terme d'interaction à longue portée est dominé par le terme en q^2 et peut donc être négligé. En conséquence, le comportement critique à grande distance du modèle s'identifie à celui de la théorie ϕ^4 standard à courte portée dès que $\sigma > 2$. On se concentre donc dans la suite sur le régime non trivial $\sigma < 2$.

Il est possible de ré-écrire la densité hamiltonienne dans l'espace direct en utilisant un laplacien fractionnaire défini par $(-\partial^2)^{\frac{\alpha}{2}}\phi(x) = \int_q |q|^\alpha \phi(q) e^{iq\cdot x}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. L'action de l'Eq. (5.12) prend alors la forme :

$$\mathcal{S}_B[\phi] = \int_x \frac{1}{2}\phi(x)\big(-Z\partial^2 + Z_{LR}(-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}} + \tau\big)\phi(x) + \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{5.13}$$

Et, sans perdre de généralité, nous poserons $Z_{LR} = 1$.

5.3.2 Champ moyen et dimension critique supérieure

On discute l'approximation de champ moyen ainsi que la dimension critique supérieure du modèle dans le régime $\sigma < 2$.

ii. Par exemple, lorsque $\sigma = 2$, nous obtenons un terme en $q^2 \log q$.

Approximation de champ moyen

On s'attache dans un premier temps à déterminer les propriétés critiques universelles du modèle dans l'approximation de champ moyen, c'est à dire lorsque toutes les fluctuations sont négligées. Cette approximation s'écrit de manière générale $\Gamma \simeq \mathcal{S}_B$ (Γ est le potentiel de Gibbs du modèle) et le propagateur s'identifie donc à l'inverse de la dérivée seconde de l'action $\mathcal{S}_B$. La transformée de Fourier de ce dernier dans la phase paramagnétique s'établit aisément :

$$\mathcal{P}(q,-q) = \frac{1}{q^\sigma + Zq^2 + \tau} \tag{5.14}$$

Le propagateur est donc critique en $\tau = 0$. Puisque celui-ci se comporte comme $q^{\eta-2}g(q\xi)$ où $\xi \sim \tau^{-\nu}$ est la longueur de corrélation, on obtient les exposants critiques suivants :

$$\eta = 2 - \sigma \tag{5.15a}$$

$$\nu = 1/\sigma \tag{5.15b}$$

Les exposants dépendent donc continûment de σ (et coïncident avec leurs valeurs de champ moyen à courte portée pour $\sigma \geqslant 2$) ; on a ainsi accès à une nouvelle classe d'universalité σ-dépendante dans le régime $0 < \sigma < 2$.[iii] Concernant les quantités thermodynamiques uniformes, on retrouve les exposants habituels $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, $\gamma = 1$ et $\delta = 3$ à l'aide de l'équation classique du mouvement.[iv]

Dimension critique supérieure

Par rapport au modèle à courte portée, la décroissance à longue portée des interactions favorise l'ordre dans le système et entraîne une diminution des fluctuations. On s'attend donc à ce que l'approximation de champ moyen, qui consiste justement à négliger ces dernières, soit valable sur une gamme de dimensions plus large que dans le cas standard.[v]

Afin de déterminer la dimension critique supérieure du modèle, on dérive le critère de Ginzburg en présence d'interactions à longue portée [Muk10]. Ce dernier consiste à comparer le paramètre d'ordre à ses fluctuations dans un volume ξ^d ; l'approximation du champ moyen étant valable seulement si les fluctuations sont négligeables dans la région

iii. Nous rappelons que les valeurs des exposants critiques obtenues grâce au champ moyen correspondent au point fixe gaussien dans le cadre du groupe de renormalisation. Comme nous le verrons par la suite, il existe ici un point fixe gaussien "à longue portée" associé au terme en q^σ en plus du point fixe gaussien habituel en q^2 ; ces deux points fixes échangent précisément leur stabilité en $\sigma = 2$.

iv. En présence d'un champ magnétique extérieur, l'équation classique du mouvement s'écrit $\mathcal{S}_B^{(1)}[\varphi](x) = j(x)$ où $\varphi = \langle\phi\rangle$ dénote l'aimantation du système et j la source externe.

v. Dans le cas du modèle à courte portée, les exposants de champ moyen sont exacts en dimension $d \geqslant 4$.

critique. Le système est supposé dans sa phase ordonnée et l'aimantation moyenne du domaine ξ^d vaut :

$$M \simeq \xi^d m \simeq \xi^{d-\beta/\nu} \tag{5.16}$$

où m est le paramètre d'ordre local. Les fluctuations d'aimantation dans la région considérée s'expriment quant à elles par :

$$\Delta M^2 = \int_{x\in\xi^d}\int_{y\in\xi^d} \langle\phi(x)\phi(y)\rangle - \langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle \simeq \xi^d \mathcal{P}(q=0) \simeq \xi^{d+\gamma/\nu} \tag{5.17}$$

Puis, en utilisant les valeurs de champ moyen des exposants critiques, il vient :

$$\frac{\sqrt{\Delta M^2}}{M} \simeq \xi^{\sigma-d/2} \tag{5.18}$$

L'approximation de champ moyen n'est pas cohérente lorsque ce rapport diverge au point critique $\xi \gg a$; on en déduit la dimension critique supérieure du modèle :

$$d_{up} = 2\sigma \tag{5.19}$$

Le champ moyen s'applique si et seulement si $d \geqslant d_{up}$ et, comme attendu, il apparaît un abaissement de la dimension critique supérieure dans le régime à longue portée $\sigma < 2$. Précisons que l'on peut obtenir la dimension critique supérieure du modèle encore plus simplement en effectuant une analyse dimensionnelle sur le couplage en ϕ^4 dans l'action de l'Eq. (5.13). [vi]

De façon équivalente, nous pouvons travailler en dimension d fixée et il existe un premier régime $0 < \sigma < \min(d/2, 2)$ dans lequel le comportement critique universel du modèle est de type champ moyen. Nous avons montré d'autre part que l'on retrouve la classe d'universalité du modèle à courte portée lorsque $\sigma > 2$. Bien que ces résultats soient cohérents avec le modèle unidimensionnel étudié précédemment, le régime à courte portée apparaît plus précisément dans ce cas dès que $\sigma > 1$. Nous discutons le comportement critique universel du modèle dans la région intermédiaire $d/2 < \sigma < 2$ et la transition entre les régimes LR (Long-Range) et SR (Short-Range) dans le paragraphe qui suit.

Notons que les résultats précédents concernant les régimes $\sigma \leqslant d/2$ et $\sigma > 2$ se généralisent sans difficulté au modèle vectoriel $O(N)$ [FMN72].

vi. Nous utilisons dans ce cas la dimension d'échelle du champ $d_\phi = (d-2+\eta)/2$ où la dimension anormale "canonique" η vérifie l'Eq. (5.15a).

5.3.3 Controverses sur le régime intermédiaire $d/2 < \sigma < 2$

On s'intéresse aux propriétés critiques du modèle en fonction du paramètre de décroissance σ pour une dimension physique $d < 4$. Alors que les prédictions sur le comportement universel pour $0 < \sigma \leqslant d/2$ et $\sigma > 2$ sont communément acceptées [AF88], la région intermédiaire $d/2 < \sigma < 2$ est, quant à elle, largement débattue depuis les quarante dernières années. En particulier, la limite entre les régimes LR et SR est encore sujette à des controverses et constitue l'objet d'articles de recherche récents [Pic12, BPR13]. Connaître précisément cette limite représente toujours un grand intérêt pour la théorie des phénomènes critiques et la détermination des classes d'universalité.

Plusieurs résultats théoriques sur la région non triviale $d/2 < \sigma < 2$ ont été obtenus à l'aide du groupe de renormalisation perturbatif depuis le début des années 70 [FMN72, Sak73, Yam77, vE82, GT83, BPR13]. Bien que toutes ces études soient basées sur le développement en ϵ au voisinage de la dimension critique supérieure, celles-ci fournissent des conclusions variées. Nous présentons ici les principaux résultats issus de la théorie de perturbation.

Fisher, Ma et Nickel ont d'abord calculé les corrections aux exposants à deux boucles en $\epsilon = 2\sigma - d > 0$ pour le modèle vectoriel $O(N)$ en présence d'interactions à longue portée [FMN72]. Concernant l'exposant associé à la longueur de corrélation, ils trouvent :

$$\nu^{-1} = \sigma - \left(\frac{N+2}{N+8}\right)\epsilon - \frac{(N+2)(7N+20)}{(N+8)^3}\mathcal{A}(\sigma)\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \tag{5.20}$$

où $\mathcal{A}(\sigma) = \psi(1) - 2\psi(\sigma/2) + \psi(\sigma)$, ψ étant la fonction digamma, c'est à dire la dérivée logarithmique de la fonction gamma. Comme attendu, l'exposant ν diffère de la valeur de champ moyen σ^{-1} dès que $\sigma > d/2$. Pour la dimension anormale du champ, Fisher et al obtiennent cependant :

$$\eta = 2 - \sigma + O(\epsilon^3) \tag{5.21}$$

et conjecturent que cela est vérifié à tous les ordres en perturbation : dans tout le régime LR, l'exposant η reste fixé à sa valeur de champ moyen $\eta = 2 - \sigma$. [vii] Fisher et al confirment également la conclusion de l'analyse dimensionnelle naïve de la section 5.3.1 ; ils prévoient des interactions à longue portée essentielles pour tout $\sigma < 2$ et une transition vers le régime SR précisément en $\sigma = 2$.

Soulignons que les prédictions de Fisher et al ne capturent pas le cas unidimensionnel, dans lequel la transition entre les régimes LR et SR a lieu en $\sigma = 1$, et non en $\sigma = 2$.

vii. Les autres approches perturbatives du modèle vectoriel, c'est à dire les développements au voisinage de la dimension critique inférieure ainsi qu'à grand nombre de composantes du champ, apportent la même conclusion quant à la dimension anormale : on trouve toujours $\eta = 2 - \sigma$ dans le régime LR [Ma73, BZJG76].

De plus, si l'on note η_{SR} la dimension anormale du champ dans le modèle à courte portée correspondant, leurs résultats impliquent l'existence d'un intervalle $2 - \eta_{SR} < \sigma < 2$ sur lequel l'exposant η du modèle est inférieur à la valeur de courte portée η_{SR}. En conséquence, la dimension anormale du champ n'est pas continue en fonction de σ et présente un saut pour $\sigma = 2$. Malgré que ce phénomène remarquable ne soit pas interdit par les arguments thermodynamiques,[viii] celui-ci a beaucoup attiré d'attention ces dernières décennies et de nombreux travaux ont ré-examiné le scénario associé dans le groupe de renormalisation.

Au sein du formalisme du groupe de renormalisation, la question du changement de régime se réduit à étudier la compétition entre les deux points fixes associés respectivement aux comportements universels LR et SR. En prenant en compte des termes d'ordre supérieur dans le calcul perturbatif, Sak suggère peu après Fisher que la transition entre les régimes n'a pas lieu en $\sigma = 2$, mais en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. De cette manière, tous les exposants apparaissent comme des fonctions continues de σ à l'ordre ϵ^2 du développement perturbatif et la discontinuité en $\sigma = 2$ est effacée [Sak73]. Comme dans le premier scénario de Fisher, le terme à longue portée n'est pas renormalisé et, par conséquent, la dimension anormale du champ reste fixée à sa valeur de champ moyen dans tout le régime LR.[ix] Cette dernière vérifie donc :

$$\eta = \max(2 - \sigma, \eta_{SR}) \tag{5.22}$$

Notons que ce résultat avait déjà été conjecturé par Stell dans [Ste70], celui-ci soulignant que le point fixe le plus stable est celui dont la dimension anormale est la plus grande.

Le diagramme 5.A représente, dans le plan (σ, d), les différents régimes prédits par Sak pour le comportement universel du modèle d'Ising. Insistons sur deux points : d'une part, le résultat de Sak englobe la dimension 1 pour laquelle $\eta_{SR} = 1$. D'autre part, à la différence du cas unidimensionnel, il existe une transition de phase pour $d > 1$ quel que soit $\sigma > 0$.

viii. Ces derniers requièrent seulement $\eta \leqslant 2 + \sigma$.
ix. Nous revenons en détail sur ce point dans le paragraphe 5.4.1.

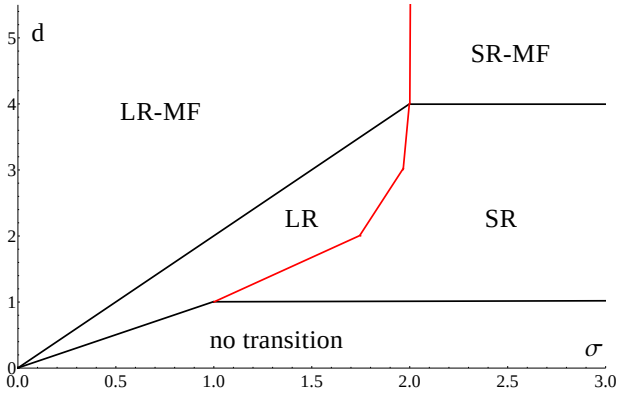

FIGURE 5.A – Diagramme de phase dans le plan (σ, d) pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée. Les lignes noires représentent les dimensions critiques supérieure et inférieure du modèle en fonction de σ ; la courbe rouge correspond, quant à elle, à la transition entre les régimes LR et SR, en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. Les zones notées LR-MF et SR-MF désignent les régimes LR et SR de champ moyen.

L'analyse de Sak est cependant critiquée par d'autres approches perturbatives du groupe de renormalisation. En particulier, van Enter montre que la brisure spontanée de la symétrie $O(N)$ du modèle vectoriel tridimensionnel SR avec $N \geqslant 2$ est déstabilisée par une perturbation LR pour tout $\sigma < 2$ [vE82]. Une seconde objection sérieuse est soulevée par Gusmao et Theumann ; ceux-ci trouvent que le développement à deux boucles en $\epsilon = 2\sigma - d$ du modèle LR est stable sous une perturbation SR si et seulement si $0 < \sigma < 2$ [GT83]. Ces travaux sont donc en faveur du premier scénario de Fisher et justifient une discontinuité dans les exposants critiques en $\sigma = 2$. Précisons également que d'autres analyses des versions LR et SR des développements perturbatifs prévoient une dimension anormale du champ régulière (dérivable) en fonction de σ [Yam77, Yam80, BPR13], ce qui constitue une différence qualitative avec les résultats de Fisher et de Sak. [x]

Tous ces travaux sont basés sur le groupe de renormalisation perturbatif et le développement en ϵ ; il est alors nécessaire de comparer les différentes prédictions avec celles obtenues par d'autres méthodes. On termine finalement cette discussion en notant que des simulations numériques intéressantes du modèle d'Ising LR en dimension 2 ont été réalisées depuis les années 2000. Luijten et Blote ont d'abord confirmé la prédiction de Sak en mesurant la dimension anormale du champ ; ces derniers obtiennent en effet un résultat en accord avec $\eta = \max(2 - \sigma, 1/4)$ et une transition entre les régimes longue portée et courte portée en $\sigma = 2 - \eta_{SR} = 7/4$ [LB02]. Cependant, un algorithme de simulation plus puissant développé récemment par Picco a mis en évidence une déviation par rapport au comportement con-

x. Dans le scénario de Sak, la dimension anormale du champ est continue mais n'est pas dérivable en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$.

jecturé par Sak. Bien que ces dernières mesures valident l'absence de discontinuité dans l'exposant η, la transition entre les deux régimes semble se faire de façon continue et les interactions à longue portée paraissent dominer le comportement critique jusqu'à $\sigma = 2$ [Pic12, BPR13].

5.4 Approche par le groupe de renormalisation non perturbatif

Par rapport au modèle d'Ising à courte portée, la version LR du modèle a relativement peu été étudiée. Par exemple, alors que le développement perturbatif au voisinage de la dimension critique supérieure est actuellement poussé à sept boucles dans le cas SR, le calcul des exposants critiques dans le régime à longue portée est beaucoup plus difficile et n'a été réalisé qu'à deux boucles ; il est peu probable que les ordres supérieurs soient calculés dans un futur proche. De plus, comme nous venons de le souligner, toutes les études théoriques du modèle LR sont perturbatives et le comportement critique dans le régime intermédiaire reste encore controversé. Cela justifie notre motivation pour une approche non pertubative de la théorie en présence d'interactions à longue portée. Notons que ce travail constitue la première étude de systèmes en présence d'interactions à longue portée dans le cadre du groupe de renormalisation non perturbatif.

On étudie donc les propriétés critiques universelles de la théorie $\mathcal{S}_B$ définie dans l'Eq. (5.13) à l'aide du groupe de renormalisation non perturbatif. Plus précisément, on considère le développement en dérivées du champ $O(\partial_\mu^2)$ de l'action effective courante (voir la section 2.3.2) et on y ajoute le terme non analytique en ∂^σ provenant des interactions à longue portée.

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_k(\rho(x))\, \partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) + \frac{1}{2} Z_{LR,k}(\rho(x))\, \varphi(x) (-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi(x) + U_k(\rho(x)) \tag{5.23}$$

avec $\rho = \varphi^2/2$. En plus du potentiel effectif courant U_k et de la renormalisation du champ habituelle Z_k, une seconde fonction de renormalisation du champ $Z_{LR,k}$ apparaît devant le terme associé aux interactions à longue portée. On souhaite établir les équations d'évolution pour ces trois fonctions dans la troncation Eq. (5.23). L'action microscopique $\mathcal{S}_B$ est retrouvée en condition initiale du flot en imposant $Z_\Lambda(\rho) = Z$, $Z_{LR,\Lambda}(\rho) = 1$ et $U_\Lambda(\rho) = \tau\rho + (g/6)\rho^2$.

Nous mettons, dans un premier temps, en évidence que le terme d'interaction à longue portée n'est pas renormalisé ; la relation $\eta = 2-\sigma$ dans le régime LR en est une conséquence directe. Après avoir ensuite dérivé les équations de flot pour les fonctions intervenant dans l'ansatz ci-dessus, on caractérise le comportement critique du modèle dans la région LR non triviale. En particulier, les exposants critiques sont calculés en fonction du paramètre σ.

Nous examinons finalement la transition entre les régimes LR et SR dans l'approximation de l'Eq. (5.23).

5.4.1 Renormalisation triviale du terme non analytique

On montre ici que le terme non analytique de l'action décrivant les interactions à longue portée n'est pas renormalisé. En conséquence, la dimension anormale du champ est fixée $\eta = 2 - \sigma$ dans tout le régime LR.

En raison du terme associé aux décroissances à longue portée, les dérivées fonctionnelles de l'action effective courante sont singulières dans leur dépendance en moment lorsqu'elles sont évaluées en champ uniforme. En particulier, la fonction de vertex à deux points a la forme suivante :

$$\Gamma_k^{(2)}[\varphi](p,-p) = U_k'(\rho) + 2\rho U_k''(\rho) + Y_k(\rho)p^\sigma + Z_k(\rho)p^2 + o(p^2) \tag{5.24}$$

où ρ désigne un champ uniforme et l'on a posé $Y_k(\rho) = Z_{LR,k}(\rho) + 2\rho Z_{LR,k}'(\rho)$. L'équation d'évolution de la fonction Y_k s'établit en extrayant cette dépendance non analytique dans le flot du vertex à deux points : [xi]

(5.25)

$$\begin{aligned}\partial_t\Gamma_k^{(2)}[\varphi](p,-p) &= \partial_t U_k'(\rho) + 2\rho\partial_t U_k''(\rho) + \partial_t Y_k(\rho)p^\sigma + \partial_t Z_k(\rho)p^2 + o(p^2)\\ &= \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\Bigg(\int_q \Gamma_k^{(4)}[\varphi](p,-p,q,-q)\,\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)\\ &\quad - \int_q \Gamma_k^{(3)}[\varphi](p,q,-p-q)\,\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)\Gamma_k^{(3)}[\varphi](-p,-q,p+q)\,\mathcal{P}_k[\varphi](p+q,-p-q)\Bigg)\end{aligned}$$

avec $\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q) = (\Gamma_k^{(2)}[\varphi] + R_k)^{-1}(q,-q)$ pour le propagateur renormalisé à l'échelle k. L'expression approchée du flot de Y_k vient en évaluant le dernier membre de l'équation ci-dessus à l'aide de la troncation Eq. (5.23), puis en y extrayant les termes en p^σ. Ce calcul aboutit sur un premier résultat important ; on obtient en effet une renormalisation triviale pour le préfacteur Y_k :

$$\partial_t Y_k(\rho) = \alpha_k(\rho)\,Y_k'(\rho) + \beta_k(\rho)\,Y_k'(\rho)^2 + \gamma_k(\rho)\,Y_k''(\rho) \tag{5.26}$$

où les coefficients α_k, β_k et γ_k ne dépendent que des fonctions $U_k'(\rho)$, $Z_k(\rho)$ et de leurs dérivées. Ainsi, si $Z_{LR,k}$ est indépendant du champ ρ (et donc Y_k aussi) alors son flot est nul $\partial_t Z_{LR,k} = \partial_t Y_k = 0$. Lorsque le préfacteur $Z_{LR,k}$ ne dépend pas du champ, la singularité associée aux longues portées intervient uniquement dans le propagateur $\mathcal{P}_k$, et non dans les fonctions de vertex $\Gamma_k^{(3)}$, $\Gamma_k^{(4)}$, etc. De cette manière, le flot de $\Gamma_k^{(2)}$ reste suffisamment analytique et ne développe pas de singularité en p^σ. En conclusion, puisque $Z_{LR,k}$ est

xi. L'équation de flot exacte du vertex à deux points est dérivée dans le chapitre 2.

indépendant du champ en condition initiale $k = \Lambda$, le terme à longue portée n'est pas renormalisé. [xii]

$$Z_{LR,k}(\rho) = 1 \tag{5.27}$$

On peut donc travailler avec la troncation simplifiée suivante :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_k(\rho(x))\, \partial_\mu \varphi(x) \partial^\mu \varphi(x) + \frac{1}{2}\, \varphi(x)(-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}} \varphi(x) + U_k(\rho(x)) \tag{5.28}$$

Et le propagateur en champ uniforme s'écrit :

$$\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q) = \frac{1}{q^\sigma + Z_k(\rho) q^2 + R_k(q) + U_k'(\rho) + 2\rho U_k''(\rho)} \tag{5.29}$$

Puisque $\mathcal{P}_{k=0}(q,-q)$ se comporte comme $q^{\eta-2}$ au point critique, l'Eq. (5.29) impose $\eta = 2-\sigma$ dans tout le régime où le caractère à longue portée des interactions domine, c'est à dire pour σ petit. [xiii] La valeur fixée de la dimension anormale à $2-\sigma$, même en dehors de la région où le champ moyen s'applique, apparaît ainsi comme une conséquence directe de l'absence de renormalisation du terme singulier de l'action effective courante.

5.4.2 Equations de flot pour les fonctions U_k' et Z_k

On établit facilement les équations d'évolution des fonctions $U_k'(\rho)$ et $Z_k(\rho)$ (en champ uniforme) dans l'approximation de l'Eq. (5.28). Rappelons tout d'abord les expressions exactes des flots de ces deux fonctions :

$$\partial_t U_k'(\rho) = \varphi^{-1} \partial_t \Gamma_k^{(1)}[\varphi](p=0) \tag{5.30}$$

$$\partial_t Z_k(\rho) = \frac{d}{dp^2} \partial_t \Gamma_k^{(2)}[\varphi](p,-p)\Big|_{p=0} \tag{5.31}$$

où les membres de droite sont écrits explicitement dans les Eqs. (2.63) et (2.64). Après avoir évalué ces derniers à l'aide de l'Eq. (5.28), on obtient formellement les mêmes expressions que dans le modèle à courte portée (voir Eqs. (2.69) et (2.70)) :

$$\partial_t U_k'(\rho) = \frac{1}{2} \tilde{\partial}_t \int_q \Big(3U_k''(\rho) + 2\rho U_k'''(\rho) + Z_k'(\rho) q^2 \Big)\, \mathcal{P}_k[\varphi](q,-q) \tag{5.32}$$

xii. Cela constitue une différence fondamentale avec les fonctions U_k et Z_k. Même si l'on part d'une condition initiale indépendante du champ pour U_k et Z_k, une fonction de ρ est automatiquement générée au cours du flot du groupe de normalisation.

xiii. Plus précisément, on a toujours $\eta = 2-\sigma$ jusqu'à la transition avec le régime à courte portée. Nous donnons par la suite des arguments en faveur de la conjecture de Sak, c'est à dire que le changement de régime a lieu en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ [Sak73].

$$\begin{aligned}\partial_t Z_k(\rho) = \frac{1}{d}\tilde{\partial}_t \int_q \Bigg(& 2\rho\Big(3U_k''(\rho) + 2\rho U_k'''(\rho) + Z_k'(\rho)q^2\Big)^2 q^2\big(\partial_{q^2}\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)\big)^2 \\ & + \frac{d}{2}\big(Z_k'(\rho) + 2\rho Z_k''(\rho)\big)\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q) - (2d+1)\rho Z_k'(\rho)^2\, q^2\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)^2 \\ & - 2d\rho Z_k'(\rho)\big(3U_k''(\rho) + 2\rho U_k'''(\rho)\big)\mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)^2\Bigg)\end{aligned} \tag{5.33}$$

Mais le propagateur $\mathcal{P}_k$ est désormais non-analytique en impulsion et vérifie l'Eq. (5.29).

5.4.3 Etude du régime LR

On s'intéresse au régime où les interactions à longue portée sont dominantes, c'est à dire lorsque σ est petit. Puisque le terme d'interaction à longue portée n'est pas renormalisé, on peut utiliser l'approximation de l'Eq. (5.28) et la dimension anormale du champ est fixée $\eta = 2 - \sigma$.

On introduit tout d'abord des quantités sans dimension adaptées afin de déterminer un point fixe dans le régime LR. On montre ensuite analytiquement que notre approximation contient le résultat perturbatif à une boucle au voisinage de la dimension critique supérieure. Nous exposons finalement les résultats numériques dans la région non perturbative. En particulier, ces derniers sont en accord avec la conjecture de Sak : ils prédisent une transition vers le régime SR en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, et non en $\sigma = 2$ [Sak73].

Quantités sans dimension

Par analyse dimensionnelle sur l'action effective courante de l'Eq. (5.28), la dimension d'échelle du champ vaut $d_\phi = (d-\sigma)/2$; on procède donc au dédimensionnement suivant :

$$\tilde{\rho} = k^{\sigma-d}\rho \tag{5.34a}$$

$$\tilde{u}_k'(\tilde{\rho}) = k^{-\sigma}U_k'(\rho) \tag{5.34b}$$

$$\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) = k^{2-\sigma}Z_k(\rho) \tag{5.34c}$$

Notons que ce changement de variable est le même que dans la version à courte portée du modèle (voir Eqs. (2.71) et (2.73)) avec la substitution $Z_{0k} \to k^{\sigma-2}$ (la dimension anormale courante est fixée $\eta_k = 2 - \sigma$). On introduit également un régulateur sans dimension tel que :

$$s(y) = k^{-\sigma}R_k(q) = \alpha\, e^{-y}(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12}) \tag{5.35}$$

où $y = q^2/k^2$ est l'impulsion dédimensionnée et α un paramètre d'optimisation.

Comme habituellement, on dérive ensuite les fonctions beta en appliquant l'opérateur ∂_t sur les définitions de l'Eq. (5.34) (puis en utilisant les expressions des flots Eqs. (5.32) et (5.33)).

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{u}'_k &= -\sigma \tilde{u}'_k + (d-\sigma)\tilde{\rho}\,\tilde{u}''_k - 2v_d\Big(\\ &\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big) + \tilde{z}'_k\, l_1^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{z}_k &= (2-\sigma)\tilde{z}_k + (d-\sigma)\tilde{\rho}\tilde{z}'_k - \frac{4v_d}{d}\Big(\\ &2\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)^2\, m_4^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big) + 4\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, m_4^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big)\\ &+ 2\tilde{\rho}\tilde{z}'^2_k\, m_4^{d+4}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big) + \frac{d}{2}\big(\tilde{z}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{z}''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big)\\ &- 2d\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, l_2^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big) - (1+2d)\tilde{\rho}\tilde{z}'^2_k\, l_2^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \tilde{z}_k\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.37}$$

avec $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$. Les fonctions $l_n^d(w,z)$ et $m_n^d(w,z)$ représentent les variantes longue portée des fonctions seuil ; elles sont précisément définies dans l'annexe C. Celles-ci sont dédimensionnées avec $\eta_k = 2-\sigma$ et font intervenir le propagateur sans dimension non analytique $\tilde{p}_k(y,\tilde{\varphi}) = (y^{\sigma/2} + y\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) + s(y) + \tilde{u}'_k(\tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k(\tilde{\rho}))^{-1} = k^\sigma \mathcal{P}_k[\varphi](q,-q)$. On remarque, là encore, que l'on aboutit formellement aux mêmes fonctions beta que dans la version à courte portée du modèle (Eqs. (2.76) et (2.77)) avec le nouveau propagateur non analytique et la substitution $\eta_k \to 2-\sigma$.

Développement au voisinage de la dimension critique supérieure

Avant d'intégrer numériquement les Eqs. (5.36) et (5.37) dans une région non perturbative, on montre de manière analytique que le résultat perturbatif à une boucle au voisinage de la dimension critique supérieure est retrouvé par notre approche.

On considère pour cela une troncation simple en développant en champs l'action effective courante de l'Eq. (5.28) autour du minimum du potentiel :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_x \frac{1}{2} Z_{0k}\, \partial_\mu\varphi(x)\partial^\mu\varphi(x) + \frac{1}{2}\,\varphi(x)(-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi(x) + \frac{g_k}{2}(\rho(x)-\kappa_k)^2 \tag{5.38}$$

Les trois constantes de couplage peuvent être définies à partir des fonctions $U_k(\rho)$ et $Z_k(\rho)$ déjà introduites :

$$U'_k(\kappa_k) = 0 \tag{5.39a}$$

$$g_k = U''_k(\kappa_k) \tag{5.39b}$$

$$Z_{0k} = Z_k(\kappa_k) \tag{5.39c}$$

Comme d'habitude, on travaille avec des couplages sans dimension :

$$\tilde{\kappa}_k = k^{\sigma-d}\kappa_k \tag{5.40a}$$

$$\tilde{g}_k = k^{d-2\sigma} g_k \tag{5.40b}$$

$$\tilde{z}_{0k} = k^{2-\sigma} Z_{0k} \tag{5.40c}$$

Il est aisé d'établir les fonctions beta pour $\tilde{\kappa}_k$, $\tilde{g}_k$ et $\tilde{z}_{0k}$ dans la troncation Eq. (5.38) en développant autour du minimum du potentiel les équations générales, Eqs. (5.36) et (5.37) ; [xiv] on trouve :

$$\partial_t \tilde{\kappa}_k = (\sigma - d)\tilde{\kappa}_k + 6 v_d \, l_1^d(2\tilde{g}_k\tilde{\kappa}_k, \tilde{z}_{0k}) \tag{5.41a}$$

$$\partial_t \tilde{g}_k = (d - 2\sigma)\tilde{g}_k + 18 v_d \tilde{g}_k^2 \, l_2^d(2\tilde{g}_k\tilde{\kappa}_k, \tilde{z}_{0k}) \tag{5.41b}$$

$$\partial_t \tilde{z}_{0k} = (2 - \sigma)\tilde{z}_{0k} - (72 v_d/d)\tilde{g}_k^2\tilde{\kappa}_k \, m_4^d(2\tilde{g}_k\tilde{\kappa}_k, \tilde{z}_{0k}) \tag{5.41c}$$

où l'on a utilisé $\partial_w l_1^d(w,z) = -l_2^d(w,z)$ pour écrire le flot de $\tilde{g}_k$.

On se place au voisinage de la dimension critique supérieure, en dimension $d = 2\sigma - \epsilon$, et l'on cherche un point fixe non trivial avec $\tilde{g}_* \neq 0$ dans les équations de flot précédentes. En développant les équations de point fixe [xv] à l'ordre dominant en ϵ, il vient :

$$\tilde{\kappa}_* = \frac{6\, v_{2\sigma} l_1^{2\sigma}(0,0)}{\sigma} + O(\epsilon) \tag{5.42a}$$

$$\tilde{g}_* = \frac{\epsilon}{18\, v_{2\sigma}} + O(\epsilon^2) \tag{5.42b}$$

$$\tilde{z}_{0*} = \frac{2 l_1^{2\sigma}(0,0) m_4^{2\sigma}(0,0)}{3\sigma^2(2-\sigma)}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \tag{5.42c}$$

L'identité $l_2^{2\sigma}(0,0) = 1$ (indépendamment du régulateur) a été utilisée. Ainsi, comme dans le modèle à courte portée, la constante de couplage $\tilde{g}_*$ est universelle à l'ordre ϵ. Notons, de plus, que le couplage inessentiel $\tilde{z}_0$ associé aux interactions à courte portée atteint, quant à lui, un point fixe non nul d'ordre ϵ^2. Dans le régime LR non trivial $\epsilon > 0$, le terme en ∂^2 de l'action effective est donc toujours généré au cours du flot, même si l'on part d'une condition initiale telle que $\tilde{z}_{0\Lambda} = 0$ [Sak73].

La matrice de stabilité du point fixe est triangulaire à l'ordre ϵ et ses valeurs propres s'identifient par conséquent à ses coefficients diagonaux. On calcule ces derniers au premier

xiv. On prend uniquement en compte les trois constantes de couplage appartenant à la troncation Eq. (5.38) afin de fermer les équations de flot.

xv. C'est à dire les fonctions beta de l'Eq. (5.41) avec le membre de gauche égal à 0.

ordre en ϵ :

$$\partial_{\tilde{\kappa}_k}\partial_t\tilde{\kappa}_k\big|_* = -\sigma + \frac{\epsilon}{3} + O(\epsilon^2) \tag{5.43a}$$

$$\partial_{\tilde{g}_k}\partial_t\tilde{g}_k\big|_* = \epsilon + O(\epsilon^2) \tag{5.43b}$$

$$\partial_{\tilde{z}_{0k}}\partial_t\tilde{z}_{0k}\big|_* = 2 - \sigma + O(\epsilon^2) \tag{5.43c}$$

L'unique valeur propre négative est donnée par l'Eq. (5.43a) et celle-ci correspond à $-\nu^{-1}$. On retrouve bien la correction perturbative à une boucle sur l'exposant ν (voir Eq. (5.20)) [FMN72] :

$$\nu = \frac{1}{\sigma} + \frac{\epsilon}{3\sigma^2} + O(\epsilon^2) \tag{5.44}$$

Compte tenu du dédimensionnement de l'Eq. (5.40), le point fixe vérifie nécessairement $\eta = 2 - \sigma$. Précisons pour finir que la solution Eq. (5.42) devient instable lorsque $\epsilon < 0$; [xvi] la physique est, dans ce cas, gouvernée par le point fixe gaussien tel que $\tilde{g}_* = \tilde{z}_{0*} = 0$ et $\nu = \sigma^{-1}$.

Intégration numérique des flots

On intègre numériquement les fonctions beta des Eqs. (5.36) et (5.37) afin de déterminer un point fixe physique [xvii] dans la région $\sigma > d/2$ (en dimension $d < 4$). [xviii] On procède comme dans la version à courte portée du modèle (voir la section 2.3.2) en initialisant le flot avec la condition initiale $\tilde{u}'_\Lambda(\tilde{\rho}) = \tilde{\tau} + (\tilde{g}/3)\tilde{\rho}$ et $\tilde{z}_\Lambda = 0$, puis en effectuant une dichotomie sur le couplage essentiel $\tilde{\tau}$. [xix] Le point fixe obtenu vérifie par construction $\eta = 2 - \sigma$; on diagonalise la matrice de stabilité autour de ce dernier afin de déterminer l'exposant ν et la valeur propre λ associée à la première direction stable. [xx] On présente nos résultats pour la dimension physique $d = 2$ sur les Figs. 5.B, 5.C, 5.D, 5.E.

xvi. La matrice de stabilité du point fixe possède alors deux valeurs propres négatives.

xvii. C'est à dire un point fixe avec une unique direction instable (i.e. décrivant une transition de phase du second ordre).

xviii. Le cas $0 < \sigma \leqslant d/2$ possède une solution triviale : le point fixe physique des Eqs. (5.36) et (5.37) est alors le point fixe gaussien tel que $\tilde{u}'_* = 0$ et $\tilde{z}_* = 0$. Comme nous l'avons vu dans la section 5.3.2, ce dernier est caractérisé par les exposants $\nu = \sigma^{-1}$ et $\eta = 2 - \sigma$. Cela peut également être vérifié dans le cadre du développement en $\epsilon = 2\sigma - d$ effectué précédemment, avec $\epsilon \leqslant 0$.

xix. Le point fixe est atteint quelle que soit la condition initiale $\tilde{z}_\Lambda$, on peut donc choisir $\tilde{z}_\Lambda = 0$ par simplicité.

xx. Avec la convention du temps négatif, une direction stable correspond à une valeur propre positive. On calcule l'unique valeur propre négative $\lambda = -\nu^{-1}$ de la matrice de stabilité du point fixe, ainsi que la plus petite de ses valeurs propres positives.

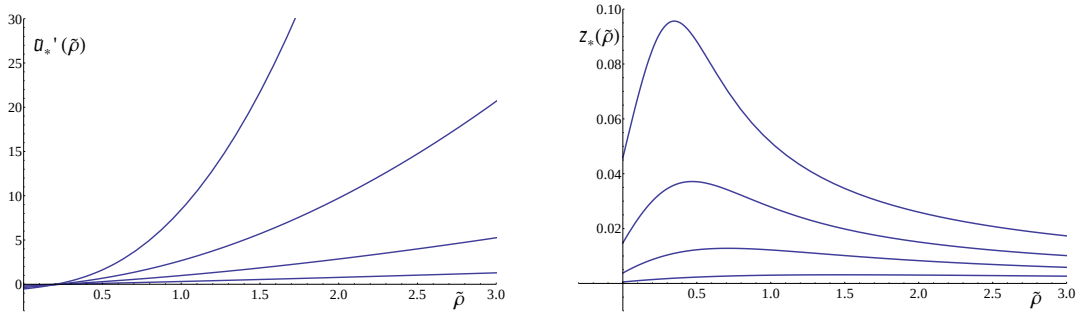

FIGURE 5.B – Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}$ en dimension $d = 2$ pour différentes valeurs de σ. De haut en bas, les courbes correspondent à $\sigma = 1.4$, 1.3, 1.2, 1.1 ; le régulateur (voir Eq. (5.35)) est choisi tel que $\alpha = 2$.

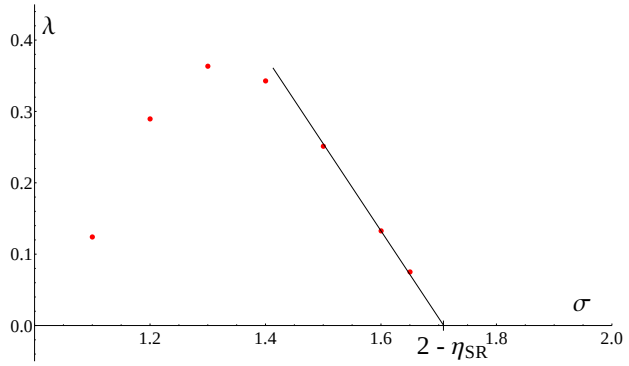

FIGURE 5.C – Plus petite valeur propre positive de la matrice de stabilité du point fixe en fonction de σ pour la dimension $d = 2$. La droite extrapole les résultats à grand σ ; notons que la valeur propre change de signe en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, où $\eta_{SR} \simeq 0.29$ a été calculé au chapitre 2. Le point fixe est donc instable et non physique dans la région $\sigma > 2 - \eta_{SR}$. Pour chaque valeur de σ, nous avons optimisé le paramètre α du régulateur en considérant le PMS sur la valeur propre négative (i.e. sur l'exposant ν).

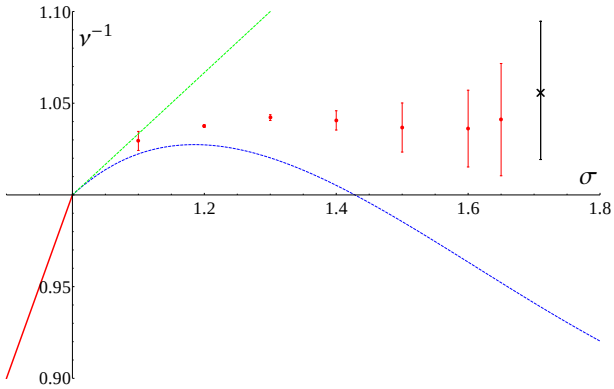

FIGURE 5.D – Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 2. La solution de champ moyen $\nu = 1/\sigma$, tracée en rouge, est exacte pour $\sigma \leqslant 1$; les courbes en pointillés verte et bleue correspondent respectivement aux résultats perturbatifs à une et deux boucles [FMN72]. Les points rouges représentent nos résultats numériques ; l'erreur sur ces derniers est estimée en faisant varier le paramètre α du régulateur autour de la valeur donnée par le PMS. La croix noire placée en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ correspond à l'exposant $1/\nu$ du modèle SR calculé au chapitre 2.

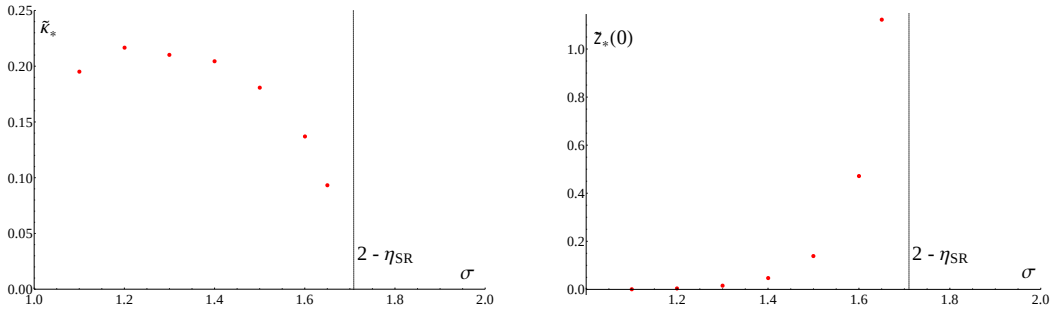

FIGURE 5.E – Minimum du potentiel $\tilde{\kappa}_*$ et renormalisation du champ $\tilde{z}_*(0)$ au point fixe en fonction de σ pour la dimension $d = 2$. Notons que $\tilde{\kappa}_*$ s'annule alors que $\tilde{z}_*$ diverge lorsque $\sigma \to 2 - \eta_{SR}$.

On trouve de cette manière un point fixe stable vérifiant $\eta = 2 - \sigma$ si et seulement si $\sigma < 2 - \eta_{SR}$, où η_{SR} est l'exposant η de la version à courte portée du modèle. [xxi] On montre en effet que la plus petite valeur propre positive de la matrice de stabilité s'annule précisément en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ (voir Fig. 5.C). Par extrapolation de ces résultats, le point fixe

xxi. Par cohérence avec notre troncation, η_{SR} s'identifie plus précisément ici à l'exposant η calculé dans le cadre du développement en dérivées du champ $O(\partial_\mu^2)$ de l'action effective pour le modèle SR (voir section 2.3.2).

devient deux fois instable pour $\sigma > 2 - \eta_{SR}$ et ne décrit donc plus la physique critique qui nous intéresse.[xxii] Cela est donc en accord avec la prédiction de Sak [Sak73] et les simulations de Luijten et Blote [LB02] ; le régime à longue portée est stable si et seulement si $0 < \sigma < 2 - \eta_{SR}$.

La solution gaussienne $\tilde{u}'_* = \tilde{z}_* = 0$ telle que $\nu = \sigma^{-1}$ est retrouvée lorsque $\sigma \leqslant d/2$ puis apparaît le régime intermédiaire avec une transition de phase non triviale pour $d/2 < \sigma < 2 - \eta_{SR}$. Comme attendu, l'exposant ν diffère de σ^{-1} dans ce dernier et sa valeur en fonction de σ est représentée sur la Fig. 5.D. Notons que le point fixe est très difficile à obtenir lorsque σ approche la valeur $2 - \eta_{SR}$ (nous avons extrapolé nos résultats dans cette limite). Comme on le discute par la suite, cela est du à la présence d'un second point fixe[xxiii] proche du premier dans l'espace des constantes de couplage ; les flots du groupe de renormalisation sont alors très lents à l'approche de ceux-ci.

Nous montrons également sur la Fig. 5.E le minimum du potentiel au point fixe et la renormalisation du champ $\tilde{z}_*(0)$ en fonction de l'exposant σ. Le minimum $\tilde{\kappa}_*$ tend vers 0 alors que la renormalisation du champ diverge lorsque $\sigma \to 2 - \eta_{SR}$. Le point fixe est ainsi projeté à l'infini et le dédimensionnement effectué dans l'Eq. (5.34) ne permet pas de décrire la physique pour $\sigma \geqslant 2 - \eta_{SR}$.

On aboutit aussi aux mêmes conclusions pour les autres dimensions physiques i.e. $d = 1$ et $d = 3$ (avec $\eta_{SR} = 1$ pour la dimension 1). Nos résultats numériques concernant l'exposant critique ν sont illustrés sur les Figs. 5.F et 5.G.

Notre étude apporte ainsi les premiers résultats théoriques non pertubatifs concernant le régime critique non trivial où les interactions à longue portée dominent. De plus, contrairement à la version courte portée du modèle, le développement pertubatif au voisinage de la dimension critique supérieure n'a été poussé qu'à deux boucles, et il est peu probable que les ordres supérieurs soient calculés dans les prochaines années. Soulignons enfin que notre approximation (Eq. (5.23)) vérifie la conjecture de Sak ; les résultats sont en accord avec un changement de régime en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ et non en $\sigma = 2$.

xxii. On détermine le point fixe stable dans la région $\sigma > 2 - \eta_{SR}$ dans la section 5.4.4.
xxiii. Ce second point fixe caractérise le comportement universel du modèle à courte portée.

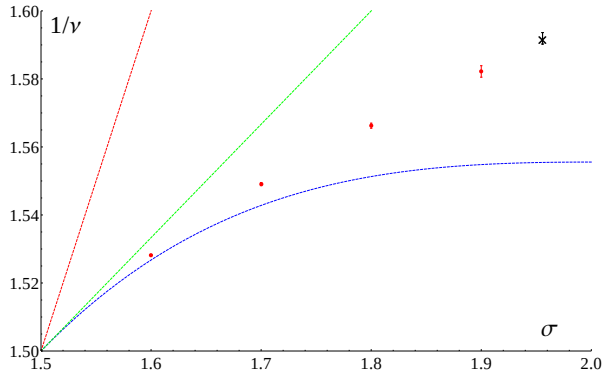

FIGURE 5.F – Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 3. Les courbes en pointillés rouge, verte et bleue correspondent respectivement aux résultats du champ moyen, à une boucle et à deux boucles [FMN72]. Les points rouges représentent nos résultats numériques ; la croix noire, en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, désigne, quant à elle, la valeur de $1/\nu$ dans le cas SR (calculée au chapitre 2).

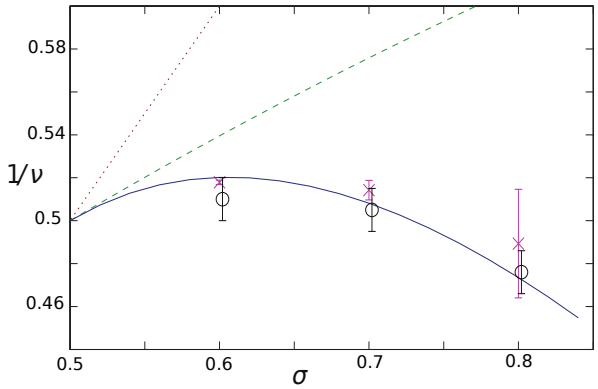

FIGURE 5.G – Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 1, tiré de [BTTS13]. Les courbes rouge, verte et bleue représentent respectivement les résultats du champ moyen, à une boucle et à deux boucles [FMN72]. Les croix dénotent nos résultats numériques et les cercles sont les prédictions des simulations sur réseau [BHL02].

5.4.4 Transition entre les régimes LR et SR

Nous vérifions à l'aide des équations de flot précédentes que la valeur $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ correspond bien à la limite où les interactions à longue portée deviennent négligeables, et que le comportement critique universel du modèle à courte portée apparaît dès que $\sigma > 2-\eta_{SR}$. Autrement dit, la physique est gouvernée par un second point fixe indépendant de σ lorsque $\sigma > 2-\eta_{SR}$, ce dernier étant associé aux propriétés universelles de la version SR du modèle. On s'assure que cela est bien le cas dans la troncation Eq. (5.28), et que les deux points fixes échangent précisément leur stabilité en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. Comme déjà remarqué dans la théorie de perturbation, les exposants apparaissent alors comme des fonctions continues de σ et, en particulier, la dimension anormale du champ satisfait l'Eq. (5.22) [Sak73].

Dimension anormale non fixée

Comme nous l'avons noté précédemment, les quantités sans dimension introduites dans l'Eq. (5.34) ne permettent pas d'obtenir de point fixe physique lorsque $\sigma \geqslant 2 - \eta_{SR}$. Pour étudier ce régime, on effectue un dédimensionnement plus général sans fixer la dimension anormale courante.

$$\tilde{\rho} = Z_{0k}\, k^{2-d} \rho \tag{5.45a}$$

$$\tilde{u}'_k(\tilde{\rho}) = Z_{0k}^{-1}\, k^{-2} U'_k(\rho) \tag{5.45b}$$

$$\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) = Z_{0k}^{-1}\, Z_k(\rho) \tag{5.45c}$$

avec $Z_{0k} = Z_k(\rho = 0)$ et donc $\tilde{z}_k(0) = 1$ par construction. C'est précisément le même dédimensionnement que dans la version SR du modèle (voir la section 2.3.2) et la dimension anormale courante est définie comme habituellement :

$$\eta_k = -\partial_t \log Z_{0k} \tag{5.46}$$

L'action effective courante de l'Eq. (5.28) se ré-écrit à l'aide des nouvelles quantités sans dimension :

$$\Gamma_k[\varphi] = \int_{\tilde{x}} \frac{1}{2}\tilde{z}_k(\tilde{\rho}(\tilde{x}))\, \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \tilde{\partial}^\mu \tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \frac{1}{2}\tilde{\omega}_k\, \tilde{\varphi}(\tilde{x})(-\tilde{\partial}^2)^{\frac{\sigma}{2}}\, \tilde{\varphi}(\tilde{x}) + \tilde{u}_k(\tilde{\rho}(\tilde{x})) \tag{5.47}$$

où $\tilde{x} = kx$, $\tilde{\partial}_\mu = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_\mu}$ et le couplage $\tilde{\omega}_k$ devant le terme d'interaction à longue portée est défini tel que :

$$\tilde{\omega}_k = Z_{0k}^{-1}\, k^{\sigma-2} \tag{5.48}$$

La fonction de régularisation est également dédimensionnée comme :

$$s(y) = Z_{0k}^{-1}\, k^{-2} R_k(q) = \alpha\, e^{-y}(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12}) \tag{5.49}$$

On établit ensuite les fonctions beta pour les constantes de couplage $\tilde{\omega}_k$, $\tilde{u}'_k(\tilde{\rho})$ et $\tilde{z}_k(\tilde{\rho})$ en utilisant les équations de flot dimensionnées, Eqs. (5.32) et (5.33), ainsi que les définitions précédentes.

$$\partial_t \tilde{\omega}_k = (\sigma - 2 + \eta_k)\tilde{\omega}_k \tag{5.50}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \tilde{u}'_k &= (\eta_k - 2)\tilde{u}'_k + (d - 2 + \eta_k)\tilde{\rho}\,\tilde{u}''_k - 2v_d\Big(\\ &\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) - 2v_d \tilde{z}'_k\, l_1^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big)\Big)\end{aligned} \tag{5.51}$$

(5.52)

$$\begin{aligned}&\partial_t \tilde{z}_k = \eta_k \tilde{z}_k + (d - 2 + \eta_k)\tilde{\rho}\tilde{z}'_k - \frac{4v_d}{d}\Big(\\ &2\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)^2\, m_4^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) + 4\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, m_4^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) \\ &+ 2\tilde{\rho}\tilde{z}'^2_k\, m_4^{d+4}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) + \frac{d}{2}\big(\tilde{z}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{z}''_k\big)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) \\ &- 2d\tilde{\rho}\big(3\tilde{u}''_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}'''_k\big)\tilde{z}'_k\, l_2^d\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big) - (1 + 2d)\tilde{\rho}\tilde{z}'^2_k\, l_2^{d+2}\big(\tilde{u}'_k + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k, \eta_k, \tilde{z}_k, \tilde{\omega}_k\big)\Big)\end{aligned}$$

Les fonctions $l_n^d(w, \eta, z, \omega)$ et $m_n^d(w, \eta, z, \omega)$ définies dans l'annexe C dénotent une généralisation des fonctions seuil. La dimension anormale courante n'est pas fixée dans celles-ci ; elles sont construites à partir du régulateur, Eq. (5.49), et du nouveau propagateur non analytique sans dimension $\tilde{p}_k(y, \tilde{\varphi}) = (\tilde{\omega}_k y^{\sigma/2} + y\tilde{z}_k(\tilde{\rho}) + s(y) + \tilde{u}'_k(\tilde{\rho}) + 2\tilde{\rho}\tilde{u}''_k(\tilde{\rho}))^{-1} = Z_{0k}k^2\mathcal{P}_k[\varphi](q, -q)$ ($\mathcal{P}_k$ est donné dans l'Eq. (5.29)). Notons que les fonctions beta pour $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k$ sont formellement les mêmes que dans la version SR du modèle (voir Eqs. (2.76) et (2.77)).

On exprime finalement la dimension anormale courante dans l'Eq. (5.52) grâce à la condition $\tilde{z}_k(0) = 1$:

$$\eta_k = 2v_d \tilde{z}'_k(0)\, l_1^d\big(\tilde{u}'_k(0), \eta_k, 1, \tilde{\omega}_k\big) \tag{5.53}$$

Echange de stabilité des points fixes

Les points fixes $(\tilde{u}'_*, \tilde{z}_*, \tilde{\omega}_*)$ des fonctions beta ci-dessus vérifient nécessairement $\tilde{\omega}_* = 0$ ou $\eta = 2 - \sigma$ (d'après l'Eq. (5.50)). La première condition correspond au point fixe SR indépendant de σ ; lorsque $\tilde{\omega}_* = 0$, les équations de point fixe $\partial_t \tilde{u}'_*(\tilde{\varphi}) = \partial_t \tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) = 0$ ne

dépendent effectivement plus de σ et s'identifient à celles du modèle SR. Ces équations ont été résolues numériquement pour les dimensions 2 et 3 dans le second chapitre. Il est clair que la seconde condition $\eta = 2 - \sigma$ s'associe au point fixe LR déterminé précédemment dans l'autre dé-dimensionnement. Plus précisément, si l'on note $\hat{\rho}$, $\hat{u}'_k$, $\hat{z}_k$ les quantités dédimensionnées comme dans l'Eq. (5.34) (et toujours $\tilde{\rho}$, $\tilde{u}'_k$, $\tilde{z}_k$ les variables définies dans l'Eq. (5.45)), le nouveau point fixe $(\tilde{u}'_*, \tilde{z}_*, \tilde{\omega}_*)$ vérifiant $\eta = 2 - \sigma$ se déduit aisément de la solution $(\hat{u}'_*, \hat{z}_*)$ déterminée dans la section 5.4.3 pour $\sigma > d/2$: [xxiv]

$$\tilde{\rho} = \tilde{\omega}_*^{-1} \hat{\rho} \tag{5.54a}$$

$$\tilde{u}'_*(\tilde{\rho}) = \tilde{\omega}_* \hat{u}'_*(\hat{\rho}) \tag{5.54b}$$

$$\tilde{z}_*(\tilde{\rho}) = \tilde{\omega}_* \hat{z}_*(\hat{\rho}) \tag{5.54c}$$

$$\tilde{s}(y) = \tilde{\omega}_* \hat{s}(y) \tag{5.54d}$$

$\tilde{s}(y)$ et $\hat{s}(y)$ correspondent au régulateur $s(y)$ utilisé dans chacun des dédimensionnements. La valeur $\tilde{\omega}_*$ est finalement obtenue grâce à la condition $\tilde{z}_k(0) = 1$, impliquant $\tilde{\omega}_* = \hat{z}_*(0)^{-1}$. Comme nous l'avons vérifié numériquement dans la partie 5.4.3, cette quantité tend vers 0 lorsque σ approche $2 - \eta_{SR}$ (voir Fig. 5.E). Il a, en outre, été mis en évidence que le point fixe en question devenait instable lorsque $\sigma > 2 - \eta_{SR}$ (voir Fig. 5.C).

Compte tenu de l'Eq. (5.50), le point fixe SR est, quant à lui, stable dans la direction associée au terme d'interaction à longue portée si et seulement si $\sigma > 2 - \eta_{SR}$. En effet, dans l'approximation considérée, la valeur propre associée à une perturbation LR autour du point fixe SR vaut exactement $\lambda = \sigma - 2 + \eta_{SR}$.

En conséquence, les points fixes LR et SR des fonctions beta des Eqs. (5.50), (5.51), (5.52) coïncident et échangent leur stabilité en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. Nous illustrons cela sur la Fig. 5.H ; la plus petite valeur propre positive de la matrice de stabilité du point fixe physique (i.e. une seule fois instable) est tracée en fonction de σ pour la dimension $d = 2$. On présente également, pour cette même dimension, les exposants critiques du modèle comme des fonctions continues de σ en Fig. 5.I.

xxiv. $(\hat{u}'_*, \hat{z}_*)$ est la solution de point fixe des Eqs. (5.36) et (5.37).

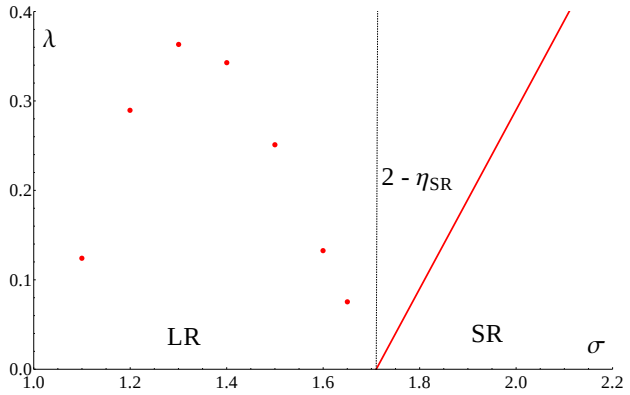

FIGURE 5.H – Echange de stabilité des points fixes LR et SR en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, pour la dimension $d = 2$. La plus petite valeur propre positive λ de la matrice de stabilité du point fixe physique est tracée en fonction de σ ; notons que celle-ci s'annule en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, ce qui traduit le changement de stabilité des points fixes. λ a été déterminé numériquement dans le régime LR (voir Fig. 5.C) et vaut exactement $\lambda = \sigma - 2 + \eta_{SR}$ au point fixe SR (pour $\sigma > 2 - \eta_{SR}$).

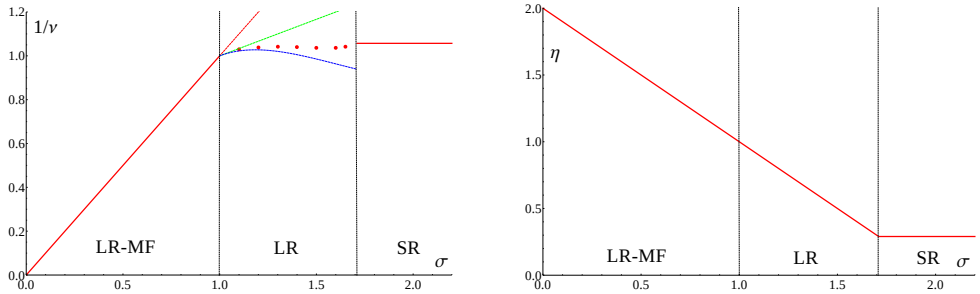

FIGURE 5.I – Exposants critiques $1/\nu$ et η en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 2. Notons que les exposants apparaissent comme des fonctions continues de σ ; en particulier, la dimension anormale du champ vérifie l'Eq. (5.22).

5.5 Conclusion

Nous avons discuté les propriétés critiques universelles du modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée. Notre approche par le groupe de renormalisation non perturbatif permet de calculer les exposants critiques du modèle et de décrire la transition entre les régimes LR et SR. Les résultats obtenus sont cohérents avec la conjecture de Sak et constituent les premières prédictions théoriques non perturbatives concernant le régime

LR non classique. Notons que la méthode est facilement généralisable au modèle $O(N)$ en présence d'interactions à longue portée ; celle-ci permet donc de déterminer les propriétés critiques universelles du modèle quelles que soient les valeurs des paramètres N, d et σ. Cette analyse détaillée du modèle pur est un bon point de départ et une base fiable pour l'étude de la version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire réalisée dans le chapitre suivant.

Annexes

Annexe C

Fonctions seuil LR

On introduit une impulsion et un régulateur sans dimension tels que :

$$y = q^2/k^2 \tag{C.1}$$

et :

$$s(y) = k^{-\sigma} R_k(q) \tag{C.2}$$

Pour n et d entiers strictement positifs, les fonctions seuil $l_n^d(w,z)$ et $m_n^d(w,z)$ sont définies par :

$$l_n^d(w,z) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2-1} \frac{1}{(y^{\sigma/2} + yz + s(y) + w)^n} \tag{C.3}$$

et :

$$m_n^d(w,z) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2} \frac{(\frac{\sigma}{2}\, y^{\sigma/2-1} + z + s'(y))^2}{(y^{\sigma/2} + yz + s(y) + w)^n} \tag{C.4}$$

où l'opérateur $\tilde{\partial}_t$ agit sur le régulateur dédimensionné comme $\tilde{\partial}_t s(y) = \sigma s(y) - 2ys'(y)$.

On utilise également une généralisation des fonctions seuil où le régulateur est dédimensionné comme dans le cas SR :

$$s(y) = Z_{0k}^{-1} k^{-2} R_k(q) \tag{C.5}$$

Les fonctions seuil $l_n^d(w,\eta,z,\omega)$ et $m_n^d(w,\eta,z,\omega)$ sont alors définies par :

$$l_n^d(w,\eta,z,\omega) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2-1} \frac{1}{(\omega y^{\sigma/2} + yz + s(y) + w)^n} \tag{C.6}$$

et :

$$m_n^d(w,\eta,z,\omega) = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{d/2} \frac{(\omega\frac{\sigma}{2}\, y^{\sigma/2-1} + z + s'(y))^2}{(\omega y^{\sigma/2} + yz + s(y) + w)^n} \tag{C.7}$$

où l'opérateur $\tilde{\partial}_t$ agit sur le régulateur dédimensionné comme $\tilde{\partial}_t s(y) = (2-\eta)s(y) - 2ys'(y)$. Avec les définitions précédentes et celles de l'annexe B, on a $l_n^d(w, 2-\sigma, z, 1) = l_n^d(w,z)$, $l_n^d(w,\eta,z,0) = l_n^d(w,\eta,z)$ et de même pour les fonctions m_n^d.

Chapitre 6

Modèle d'Ising en champ aléatoire à longue porté

6.1 Introduction

Nous avons présenté dans les chapitres 3 et 4 une méthode basée sur le groupe de renormalisation non perturbatif et fonctionnel qui fournit une description complète et cohérente de la brisure de réduction dimensionnelle dans le modèle d'Ising en champ aléatoire [TT11b, TT12a, TT12b]. Cette approche théorique prévoit une brisure de réduction dimensionnelle en dessous d'une dimension critique $d_{DR} \simeq 5.13$; elle permet également de calculer les exposants critiques du modèle. Bien que les prédictions concernant ces derniers en dimension 3 et 4 soient en très bon accord avec les simulations numériques [MF02, Har02], il n'est pas possible d'accéder directement à la physique du modèle au voisinage de la dimension d_{DR} par simulation (et inutile de mentionner les expériences). On propose dans ce chapitre un moyen de contourner ce problème en étudiant la brisure de réduction dimensionnelle dans un système tridimensionnel. Cela s'avère possible en considérant une généralisation du modèle d'Ising en champ aléatoire avec des interactions et des corrélations du désordre à longue portée [BTTS13]. Comme mis en évidence dans le chapitre précédent, les interactions à longue portée permettent, en effet, de travailler en dimension fixée et basse ; une large gamme de comportements critiques est alors accessible pour le système en faisant varier l'exposant associé à la loi de décroissance des interactions. Tel que détaillé par la suite, il est aussi nécessaire d'introduire un champ aléatoire corrélé sur des longues distances afin de produire une supersymétrie à température nulle et, par conséquent, de générer la propriété de réduction dimensionnelle. Le problème est finalement étudié en étendant l'approche par le groupe de renormalisation non perturbatif et fonctionnel développée dans le cas du modèle à courte portée. Notre principal résultat théorique est l'existence d'une valeur critique non triviale de l'exposant associé à la décroissance des interactions au delà de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée. Ce résultat apporte ainsi un moyen de tester nos pré-

dictions sur la brisure de réduction dimensionnelle dans une dimension physiquement et techniquement accessible $d = 3$.

On définit tout d'abord la version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire ; son comportement critique ainsi que la construction supersymétrique sont discutés dans les sections 6.2 et 6.3. Le formalisme développé dans le chapitre 3 afin d'étudier le modèle à courte portée (voir sections 3.6 et 3.7) est ensuite généralisé dans la partie 6.4. Nous exposons finalement nos résultats sur la brisure de réduction dimensionnelle en dimension fixée dans la section 6.5.

6.2 Version longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire

On considère une version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire ; les interactions et les corrélations du désordre décroissent désormais à grande distance selon des lois de puissance. A la manière du modèle à courte portée, le point fixe décrivant le comportement critique universel du système est à température nulle [Bra86]. Après avoir brièvement rappelé les propriétés critiques associées à un tel point fixe, on détermine le comportement de champ moyen ainsi que la dimension critique supérieure du modèle. Quatre régimes critiques différents sont alors identifiés selon les valeurs des lois de puissance caractérisant les décroissances à longue portée. On discute finalement le domaine non classique où la transition n'est pas de type champ moyen.

6.2.1 Le modèle

On généralise le modèle d'Ising en champ aléatoire discuté dans les chapitres 3 et 4 en introduisant à la fois des interactions à longue portée, et un champ aléatoire corrélé sur des grandes distances. L'action microscopique aléatoire considérée est la suivante :

$$\mathcal{S}[\phi, h] = \frac{1}{T}\big(\mathcal{S}_B[\phi] - h \cdot \phi\big) \tag{6.1}$$

La température T est explicitement introduite ici par convenance. On définit la partie pure du hamiltonien $\mathcal{S}_B$ telle que :

$$\mathcal{S}_B[\phi] = -\frac{1}{2}\int_{x,\,x'} \lambda(|x-x'|)\phi(x)\phi(x') + \int_x \frac{r}{2}\phi(x)^2 + \frac{g}{4!}\phi(x)^4 \tag{6.2}$$

Comme dans le chapitre précédent, l'interaction $\lambda(|x-x'|)$ décroit selon une loi de puissance $|x-x'|^{-d-\sigma}$ à grande distance, avec $\sigma > 0$. Le comportement critique universel de la théorie pure a été étudié en détail au cours du chapitre 5. Le champ aléatoire h est, quant à lui,

décrit par une distribution gaussienne de moyenne nulle comme dans le cas du modèle standard à courte portée.

$$\mathcal{D}\mu[h] = \mathcal{D}h\,\rho[h] = \mathcal{D}h\,e^{-\frac{1}{2}h\cdot\mathcal{C}.h} \tag{6.3}$$

où $\mathcal{C}$ est un opérateur de coefficients $\mathcal{C}(x,x') = \mathcal{C}(|x-x'|)$. Cependant, par opposition avec la version courte portée du modèle, le bruit en des points différents de l'espace n'est plus indépendant : on impose que ses corrélations $\overline{h(x)h(x')} = \mathcal{C}^{-1}(x-x') = \Delta(x-x')$ se comportent comme $|x-x'|^{\rho-d}$ lorsque $|x-x'| \gg a$, avec $\rho < d$ (a est le pas du réseau sur lequel est initialement défini le modèle).

Pour résumer, on a introduit deux exposants $\sigma > 0$ et $\rho < d$ permettant de contrôler les décroissances à longue portée des interactions d'échange et des corrélations du champ aléatoire.

$$\lambda(|x-x'|) \sim |x-x'|^{-d-\sigma} \tag{6.4a}$$

$$\Delta(|x-x'|) \sim |x-x'|^{\rho-d} \tag{6.4b}$$

A petite impulsion, les transformées de Fourier des fonctions λ et Δ se comportent alors comme :

$$\lambda(q) = \lambda(0) - Z_{LR}\,(q^2)^{\frac{\sigma}{2}} - Z_{SR}\,q^2 + \dots \tag{6.5a}$$

$$\Delta(q) = \Delta_{LR}\,(q^2)^{-\frac{\rho}{2}} + \Delta_{SR} + \dots \tag{6.5b}$$

et on néglige les termes d'ordre supérieur en q dans ces expressions (on s'intéresse au régime de basse impulsion $|q| \to 0$). On retrouve ainsi la version à courte portée du modèle d'Ising en champ aléatoire quand $Z_{LR} = \Delta_{LR} = 0$. De la même manière, lorsque σ est supérieur à 2 et ρ négatif, les termes à longue portée sont sous dominants et le comportement critique doit être celui de la théorie standard à courte portée. [i]

6.2.2 Point fixe à température nulle

Comme dans le modèle d'Ising en champ aléatoire ordinaire à courte portée, le point fixe décrivant les propriétés critiques universelles du système à la transition de phase est à température nulle [Bra86]. En effet, le paramètre T intervenant dans l'action de l'Eq. (6.1) est

i. Nous avons discuté plus précisément la transition entre les régimes longue portée et courte portée dans le cadre de la théorie pure $\mathcal{S}_B$ au chapitre 5. Des arguments ont été donnés en faveur d'une transition non pas en $\sigma = 2$, mais en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ (η_{SR} étant la valeur de la dimension anormale dans le modèle pur à courte portée) [Sak73]. On présente en section 6.2.4 des résultats similaires concernant le système désordonné.

renormalisé et s'annule au cours du flot du groupe de renormalisation comme $T_k \sim k^\theta$, où $\theta > 0$ est un exposant critique. Ce comportement d'échelle inhabituel confère à priori trois exposants critiques indépendants au modèle au lieu de deux ; il implique également une modification des relations d'échelle usuelles par la substitution $d \mapsto d-\theta$ [BM85, Vil85b, Fis86c].

En particulier, le propagateur complet possède, dans ce cas, deux contributions distinctes :

$$\overline{\langle\phi(x)\phi(y)\rangle} - \overline{\langle\phi(x)\rangle}\,\overline{\langle\phi(y)\rangle} \sim \left(\frac{T}{|x-y|^{d-2+\eta}} + \frac{\Delta}{|x-y|^{d-4+\bar{\eta}}}\right) e^{-|x-y|/\xi} \tag{6.6}$$

Δ dénote ici Δ_{SR} ou bien Δ_{LR} selon la valeur de ρ, et ξ est la longueur de corrélation. Le premier terme s'annule linéairement avec la température et s'identifie à la fonction de corrélation connectée $\mathcal{P}_c$:

$$\mathcal{P}_c(x,y) = \overline{\langle\phi(x)\phi(y)\rangle} - \overline{\langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle} \sim \frac{T}{|x-y|^{d-2+\eta}}\, e^{-|x-y|/\xi} \tag{6.7}$$

La seconde contribution, non nulle pour $T = 0$, mesure directement l'influence des fluctuations du désordre ; comme dans le chapitre 3, on l'appelle propagateur déconnecté.

$$\mathcal{P}_d(x,y) = \overline{\langle\phi(x)\rangle\langle\phi(y)\rangle} - \overline{\langle\phi(x)\rangle}\,\overline{\langle\phi(y)\rangle} \sim \frac{\Delta}{|x-y|^{d-4+\bar{\eta}}}\, e^{-|x-y|/\xi} \tag{6.8}$$

On rappelle finalement que les dimensions anormales η et $\bar{\eta}$ qui caractérisent ces décroissances singulières sont reliées à l'exposant critique θ par :

$$\theta = 2 + \eta - \bar{\eta} \tag{6.9}$$

6.2.3 Champ moyen et dimension critique supérieure

On détermine les exposants de champ moyen ainsi que la dimension critique supérieure du modèle en fonction des paramètres σ et ρ.

On commence pour cela par dériver la théorie des répliques associée au modèle d'Ising en champ aléatoire à longue portée. En suivant la méthode présentée dans la partie 3.3.3, on calcule analytiquement la moyenne de la fonction de partition élevée à la puissance n.

$$\overline{\mathcal{Z}[h]^n} = \overline{\left(\int \mathcal{D}\phi\, e^{-\mathcal{S}[\phi,h]}\right)^n} = \overline{\int \prod_{a=1}^{n} \mathcal{D}\phi_a\, e^{-\sum_a \mathcal{S}[\phi_a,h]}} = \int \prod_a \mathcal{D}\phi_a\, e^{-\mathcal{S}_R[\{\phi_a\}]} \tag{6.10}$$

On aboutit ainsi à une action pure $\mathcal{S}_R$ qui couple les n répliques ϕ_a :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_R[\{\phi\}] &= \frac{1}{T}\sum_a \mathcal{S}_B[\phi_a] - \frac{1}{2T^2}\sum_{a_1 a_2}\int_q \phi_{a_1}(q)\left(\Delta_{SR} + \Delta_{LR}\,(q^2)^{-\frac{\rho}{2}}\right)\phi_{a_2}(-q) \\ &= \frac{1}{T}\sum_a \mathcal{S}_B[\phi_a] - \frac{1}{4T^2}\sum_{a_1 a_2}\int_x \left(\phi_{a_1}(x)\left(\Delta_{SR} + \Delta_{LR}(-\partial^2)^{-\frac{\rho}{2}}\right)\phi_{a_2}(x) + perm(12)\right)\end{aligned} \tag{6.11}$$

et $perm(12)$ désigne les termes obtenus en permutant les champs ϕ_{a_1} et ϕ_{a_2}. On a utilisé le développement de l'Eq. (6.5) pour écrire explicitement le terme à deux champs, et celui-ci est ré-exprimé dans l'espace direct à l'aide d'un laplacien fractionnaire (ce dernier est défini dans la section 5.3.1).

Les propriétés critiques universelles de la théorie $\mathcal{S}_R$ se déduisent aisément dans l'approximation de champ moyen. Par exemple, lorsqu'on néglige les fluctuations, le propagateur s'identifie simplement à l'inverse de la dérivée seconde de l'action Eq. (6.11). A l'aide des expressions dans l'Eq. (6.5), on obtient la transformée de Fourier suivante en champ nul :

$$\mathcal{S}_R^{(2)}(q,-q)_{a_1a_2} = \Big(Z_{SR}\, q^2 + Z_{LR}\, q^\sigma + \tau\Big)\delta_{a_1a_2} - \Big(\Delta_{SR} + \Delta_{LR}\, q^{-\rho}\Big) \tag{6.12}$$

avec $\tau = r - \lambda(0)$. En effectuant l'inversion dans l'espace des répliques, on aboutit au propagateur :

$$\mathcal{P}(q,-q)_{a_1a_2} = \frac{T}{\big(Z_{SR}q^2 + Z_{LR}\, q^\sigma + \tau\big)}\delta_{a_1a_2} + \frac{\big(\Delta_{SR} + \Delta_{LR}\, q^{-\rho}\big)}{\big(Z_{SR}\, q^2 + Z_{LR}\, q^\sigma + \tau\big)^2} + O(n) \tag{6.13}$$

Les termes d'ordre n ne sont pas retenus puisqu'ils ne contribuent pas à la limite $n \to 0$. On retrouve ainsi la forme de l'Eq. (6.6) avec les deux contributions distinctes associées aux fluctuations thermiques et aux fluctuations du désordre. Le propagateur est critique en $\tau = 0$ et, selon les valeurs des exposants de décroissance σ et ρ, il apparaît quatre régimes différents pour le comportement universel du système. Bray a été le premier à fournir une description unifiée des modèles en champ aléatoire, où les décroissances à longue portée peuvent avoir lieu aussi bien dans les interactions que dans les corrélations du désordre [Bra86]. On utilise sa terminologie pour désigner les différents régimes.

- Le régime SR (Short-Range) quand $\sigma > 2$ et $\rho < 0$. Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section 6.2.1, le comportement critique du modèle à courte portée est retrouvé dans ce cas. L'expression de l'Eq. (6.13) pour le propagateur en champ moyen correspond bien aux exposants habituels $\eta = \bar{\eta} = 0$ et $\nu = 1/2$.

- Le régime LRE (Long-Range Exchange) avec $\sigma < 2$ et $\rho < 0$. Les interactions sont dominées par les effets à longue portée alors que la décroissance à grande distance des corrélations du désordre peut être négligée. En examinant les termes en impulsion qui prédominent dans le comportement donné par l'Eq. (6.13), il vient des exposants différents du cas à courte portée : $\eta = 2 - \sigma$, $\bar{\eta} = 4 - 2\sigma$ et $\nu = 1/\sigma$.

- Le régime LRF (Long-Range Field correlations) pour $\sigma > 2$ et $\rho > 0$. A l'inverse du régime LRE, les interactions d'échange à grande distance sont négligeables alors que les corrélations de longue portée du champ aléatoire prédominent. On obtient

là encore une nouvelle classe d'universalité pour les exposants du modèle : $\eta = 0$, $\bar{\eta} = -\rho$ et $\nu = 1/2$.

- Le régime LREF (Long-Range Exchange and Field correlations) avec $\sigma < 2$ et $\rho > 0$. Dans cette dernière situation, les effets de longue portée dominent à la fois les interactions et les corrélations du désordre. Les exposants critiques qui la caractérisent sont les suivants : $\eta = 2 - \sigma$, $\bar{\eta} = 4 - \rho - 2\sigma$ et $\nu = 1/\sigma$.

Les autres exposants α, β, etc. s'obtiennent aisément en utilisant l'équation classique du mouvement ; quel que soit le régime, ces derniers prennent leurs valeurs habituelles $\alpha = 0$, $\beta = 1/2$, etc.

Comme dans les chapitres précédents, la connaissance des exposants de champ moyen permet de discuter la dimension critique supérieure du modèle. On reprend le calcul du critère de Ginzburg effectué dans la section 3.3.2 (Eqs. (3.18) et (3.19)) sans fixer les valeurs des exposants. Les fluctuations relatives de l'aimantation dans une région ordonnée de taille ξ^d s'écrivent alors :

$$\frac{\Delta M^2}{M^2} \sim T\xi^{2-d-\eta+2\beta/\nu} + \Delta\xi^{4-d-\bar{\eta}+2\beta/\nu} \tag{6.14}$$

Ce rapport ne peut diverger au point critique lorsque le champ moyen s'applique ; on en déduit la dimension critique supérieure d_{up} dans chacun des régimes précédents à l'aide des valeurs des exposants.

$$d_{up,SR} = 6 \tag{6.15a}$$

$$d_{up,LRE} = 3\sigma \tag{6.15b}$$

$$d_{up,LRF} = 6 + \rho \tag{6.15c}$$

$$d_{up,LREF} = 3\sigma + \rho \tag{6.15d}$$

D'où l'expression générale suivante pour d_{up} :

$$d_{up} = 3\min(2, \sigma) + \max(0, \rho) \tag{6.16}$$

On vérifie également que le terme associé au désordre est toujours dominant dans l'Eq. (6.14) quand $\xi \gg a$. Soulignons à nouveau que les quatre régimes critiques sont décrits par quatre points fixes à température nulle ; les fluctuations thermiques sont parfaitement négligeables par rapport à celles du désordre dans la région critique.

6.2.4 Régime non trivial

Concernant la théorie pure, nos résultats sont en accord avec la conjecture de Sak [Sak73] ; ils prédisent un changement de régime non pas en $\sigma = 2$, mais en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. Tous les exposants apparaissent ainsi comme des fonctions continues de σ. De plus, le terme d'interaction à longue portée n'est pas renormalisé et la dimension anormale du champ est, par conséquent, fixée $\eta = 2 - \sigma$ dans tout le régime LR.

En se basant sur la théorie des répliques et les concepts du groupe de renormalisation, Bray a généralisé la description de Sak au modèle désordonné [Bra86]. Les résultats de Bray sont précisément les suivants :

- Une perturbation LRE est essentielle pour le point fixe SR si et seulement si $\sigma < 2 - \eta_{SR}$; et dans ce cas, la relation $\eta = 2 - \sigma$ est toujours vérifiée.

- Une perturbation LRF est essentielle pour le point fixe SR si et seulement si $\rho > 2\eta_{SR} - \bar{\eta}_{SR}$; et dans ce cas, la relation $\bar{\eta} = 2\eta - \rho$ est toujours vérifiée.

La dimension critique inférieure du modèle d_{low} est également calculée en fonction des paramètres σ et ρ dans [Bra86].

$$d_{low} = 2\min(1, \sigma) + \max(0, \rho) \tag{6.17}$$

On résume ci-après les informations à propos du comportement critique (hors champ moyen) du modèle dans les quatre régimes.

- Le régime SR correspond à la région $\sigma > 2 - \eta_{SR}$ et $\rho < 2\eta_{SR} - \bar{\eta}_{SR}$. La dimension critique supérieure du modèle est $d_{up} = 6$; on a également montré au chapitre 3 que $d_{low} = 2$.

- Le régime LRE vérifie $\sigma < 2 - \eta_{SR}$ et $\rho < 2\eta_{LRE} - \bar{\eta}_{LRE}$. Comme dans la théorie pure, les interactions à longue portée sont essentielles et impliquent la relation $\eta = \eta_{LRE} = 2 - \sigma$. Les dimensions critiques inférieure et supérieure s'identifient respectivement à 2σ et 3σ.

- Le régime LRF vérifie $\sigma > 2 - \eta_{LRF}$ et $\rho > 2\eta_{SR} - \bar{\eta}_{SR}$. Les corrélations du champ aléatoire à longue portée sont essentielles et la relation $\bar{\eta}_{LRF} = 2\eta_{LRF} - \rho$ est toujours vérifiée. Les dimensions critiques inférieure et supérieure du modèle sont alors $2 + \rho$ et $6 + \rho$.

- Le dernier régime LREF correspond à la situation $\sigma < 2-\eta_{LRF}$ et $\rho > 2\eta_{LRE}-\bar{\eta}_{LRE}$. Les décroissances de grande distance sont essentielles à la fois pour les interactions et les corrélations du désordre. Puisque les termes à longue portée ne sont pas renormalisés, les deux dimensions anormales sont fixées $\eta_{LREF} = 2-\sigma$ et $\bar{\eta}_{LREF} = 2\eta_{LREF} - \rho = 4 - 2\sigma - \rho$. Ce régime est donc plus contraint que les précédents ; l'exposant critique θ associé à la température vaut toujours $\sigma + \rho$ et il ne reste qu'un seul exposant indépendant à déterminer (ν par exemple). Les dimensions critiques inférieure et supérieure du modèle LREF sont $d_{low} = 2\sigma + \rho$ et $d_{up} = 3\sigma + \rho$.

Notons que les quatre régions ont un point commun pour $\sigma = 2 - \eta_{SR} = 2 - \eta_{LRF}$ et $\rho = 2\eta_{SR} - \bar{\eta}_{SR} = 2\eta_{LRE} - \bar{\eta}_{LRE}$.

Pour les régimes LRE et LRF, l'exposant θ à la dimension critique supérieure vaut respectivement σ et $2 + \rho$. Ces deux derniers modèles ont été étudiés perturbativement au second ordre en $\epsilon = d_{up} - d$ par Young puis Kardar et al [You77, KMT83]. Ceux-ci aboutissent à des conclusions similaires : l'exposant θ n'est pas fixé et les changements effectifs de dimension $d \to d-\sigma$ (cas LRE) et $d \to d-2-\rho$ (cas LRF) ne sont plus valables au second ordre du développement en ϵ. En conséquence, il n'existe pas de correspondance entre les exposants du modèle désordonné en dimension d et ceux du modèle pur dans une dimension effective différente. Rappelons cependant que le développement en $\epsilon = 6 - d$ donne $\theta = 2$ et la propriété de réduction dimensionnelle à tous les ordres dans le régime SR [AIM76, You77]. On s'attache dans la suite à construire une version à longue portée du modèle qui présente la propriété de réduction dimensionnelle. Puisque cette dernière est comprise comme une conséquence de l'invariance sous les super-rotations, on commence par discuter la formulation supersymétrique de la théorie à température nulle.

6.3 Supersymétrie

Dans le but d'étudier la propriété de réduction dimensionnelle, on cherche à construire une théorie supersymétrique à partir de l'équation stochastique obtenue à température nulle [PS79]. Le principal résultat de la discussion qui suit est la nécessité d'imposer la relation $\rho = 2 - \sigma$ entre les exposants de décroissance, afin que les composantes à longue portée soient invariantes sous les super-rotations [BTTS13]. On discute ensuite les différents régimes pour le comportement critique du modèle avec $\rho = 2 - \sigma$. L'étude de l'éventuelle brisure de réduction dimensionnelle en dimension fixée lorsqu'on varie le paramètre σ dans le régime LREF non classique est alors justifiée.

6.3.1 Construction de la théorie supersymétrique

Puisque le comportement critique du modèle est contrôlé par un point fixe à température nulle, la configuration essentielle pour décrire le système est l'état fondamental $\phi^\star$. Ce dernier est solution de l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\mathcal{S}_B^{(1)}[\phi](x) = \big(- Z_{SR}\,\partial^2 + Z_{LR}\,(-\partial^2)^{\sigma/2}\big)\phi(x) + U'(\phi(x)) = h(x) + j(x) \tag{6.18}$$

où le potentiel microscopique U vérifie $U(\phi) = (\tau/2)\phi^2 + (g/4!)\phi^4$ (avec les notations de la section précédente $\tau = r - \lambda(0)$) et j est une source extérieure non aléatoire.

On étend la construction supersymétrique de Parisi-Sourlas [PS79] discutée dans le chapitre 3 au cas du modèle à longue portée. On introduit pour cela une fonctionnelle qui génère les moments de l'état fondamental $\phi^\star$.

$$\mathcal{Z}_A[j,\hat{j}] = \overline{\mathcal{Z}_B[j,\hat{j},h]} = \overline{e^{\hat{j}.\phi^\star}} \tag{6.19}$$

Si l'on suppose que l'équation stochastique, Eq. (6.18), admet une unique solution, les méthodes standard de la théorie des champs (détaillées dans la section 3.5.1) permettent de réécrire $\mathcal{Z}_A$ comme la fonction de partition pour la théorie d'un super-champ $\Phi(\underline{x}) = \phi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\theta + \bar{\theta}\theta\hat{\phi}(x)$. On rappelle que θ et $\bar{\theta}$ désignent des coordonnées grassmanniennes et $\underline{x} = (x,\theta,\bar{\theta})$ un vecteur du super-espace. [ii] $\hat{\phi}$ est un champ bosonique imaginaire pur alors que ψ et $\bar{\psi}$ dénotent des champs scalaires fermioniques. On obtient alors pour la fonction de partition de l'Eq. (6.19) :

$$\mathcal{Z}_A[j,\hat{j},K,\bar{K}] = \mathcal{Z}_A[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\Phi\; e^{-\mathcal{S}_\star[\Phi]+\mathcal{J}.\Phi} \tag{6.20}$$

où le champ est couplé à la super-source $\mathcal{J}$ par $\mathcal{J}.\Phi = \int_{\underline{x}} \mathcal{J}(\underline{x})\Phi(\underline{x}) = \int_x \int d\theta d\bar{\theta}\, \mathcal{J}(\underline{x})\Phi(\underline{x})$ et l'action $\mathcal{S}_\star$ prend la forme [BTTS13] :

$$\mathcal{S}_\star[\Phi] = \int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\,\Big(Z_{SR}\,q^2 + Z_{LR}\,q^\sigma - \bar{\eta}\eta\big(\Delta_{LR}\,q^{-\rho} + \Delta_{SR}\big)\Big)\Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \;+ \int_{\underline{x}} U(\Phi(\underline{x})) \tag{6.21}$$

Le premier terme est écrit à l'aide de la transformée de Fourier du super-champ $\Phi(\underline{q})$; [iii] $\underline{q} = (q,\eta,\bar{\eta})$ désigne un vecteur dans le super-espace réciproque (i.e. η et $\bar{\eta}$ s'interprètent

ii. Le super-espace est la somme de l'espace euclidien à d dimensions et du sous espace de Grassmann engendré par θ et $\bar{\theta}$.

iii. On rappelle que la transformée de Fourier du champ Φ est définie comme :

$$\begin{aligned}\Phi(\underline{q}) &= \int_{\underline{x}} \Phi(\underline{x})\, e^{-iq.x}\, e^{i(\theta\bar{\eta}-\bar{\theta}\eta)} \\ &= \hat{\phi}(q) + i\bar{\eta}\,\psi(q) + i\,\bar{\psi}(q)\eta + \bar{\eta}\eta\,\phi(q)\end{aligned}$$

comme des impulsions grassmanniennes) et $\int_{\underline{q}} = \int_q \int d\eta d\bar{\eta}$.

Les fonctions de corrélation du problème initial pour le champ ϕ sont obtenues en évaluant les dérivées fonctionnelles de $\mathcal{Z}_A$ par rapport à la source $\hat{j}$ en $\hat{j} = K = \bar{K} = 0$.

Concernant le modèle SR avec $Z_{LR} = \Delta_{LR} = 0$, on a montré que le terme d'interaction pouvait se combiner avec la contribution du désordre pour former un super-laplacien, cela en introduisant une métrique appropriée. Plus précisément, la norme dans le super-espace a été définie telle que $\underline{x}^2 = g_{ij}x^i x^j = x^2 + C\theta\bar{\theta}$. On discute la valeur du paramètre C dans la suite en généralisant la construction au modèle à longue portée.

Le laplacien invariant dans l'espace direct et la norme d'une super-impulsion $\underline{q}$ s'écrivent respectivement $\partial_\star^2 = g^{ij}\partial_i\partial_j = \partial^2 + (4/C)\partial_\theta\partial_{\bar{\theta}}$ et $\underline{q}^2 = g^{ij}q_i q_j = q^2 + (4/C)\eta\bar{\eta}$. On peut alors exprimer les composantes à courte portée de l'action Eq. (6.21) d'une façon explicitement supersymétrique :

$$\int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\left(Z_{SR}\, q^2 - \bar{\eta}\eta\Delta_{SR}\right)\Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) = \int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\, Z_{SR}\, \underline{q}^2\, \Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \tag{6.22}$$

et l'on a choisi $C = 4Z_{SR}/\Delta_{SR}$. De la même manière, on souhaite combiner les termes de décroissance à longue portée de l'action $\mathcal{S}_\star$ dans une puissance de la super-norme $\underline{q}^2$.

$$\begin{aligned} &\int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\left(Z_{LR}q^\sigma - \bar{\eta}\eta\Delta_{LR}q^{-\rho}\right)\Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \\ &= \int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\, Z_{LR}(\underline{q}^2)^\alpha\, \Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \\ &= \int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\, Z_{LR}\left(q^{2\alpha} + \frac{4\alpha}{C}\eta\bar{\eta}\, q^{2\alpha-2}\right)\, \Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \end{aligned} \tag{6.23}$$

En procédant par identification, on aboutit à une condition nécessaire et suffisante pour que les termes à longue portée soient supersymétriques : $\rho = 2 - \sigma$. Le facteur C doit alors être pris tel que $C = 2\sigma Z_{LR}/\Delta_{LR}$.

Finalement, la théorie définie par l'Eq. (6.21) est invariante sous les super-rotations à condition que les parties à longue portée et à courte portée de l'action préservent la même norme. Autrement dit, le facteur C doit être le même dans les deux cas. On obtient de cette façon une relation entre les différentes composantes des interactions et des corrélations du désordre.

En conclusion, il est possible de construire une théorie des champs supersymétrique à

partir du modèle considéré dans la section 6.2 à condition que [BTTS13] : [iv]

$$\rho = 2 - \sigma \tag{6.24a}$$

$$\Delta_{SR} = (2\Delta_{LR} Z_{SR})/(\sigma Z_{LR}) \tag{6.24b}$$

L'action $\mathcal{S}_\star$ est, dans ce cas, explicitement invariante sous les super-rotations :

$$\mathcal{S}_\star[\Phi] = \int_{\underline{q}} \frac{1}{2}\Phi(q,\eta,\bar{\eta})\left(Z_{SR}\,\underline{q}^2 + Z_{LR}\,\underline{q}^\sigma\right)\Phi(-q,\eta,\bar{\eta}) \; + \int_{\underline{x}} U(\Phi(\underline{x})) \tag{6.25}$$

Il apparaît donc une formulation en terme de super-champ de la théorie ϕ^4 pure en présence d'interactions à longue portée discutée dans le chapitre 5 (voir Eq. (5.12)). Sans perdre de généralité, nous étudierons le modèle avec $Z_{LR} = 1$ dans la suite. [v]

Comme dans la version à courte portée du modèle, l'action ci-dessus est symétrique sous les transformations du super-groupe de Poincaré, c'est à dire sous les rotations et les translations dans le super-espace. En particulier, l'invariance sous les super-rotations (associée au sous groupe $OSp(2,d)$) a d'importantes conséquences ; celle-ci implique en effet la relation $\eta = \bar{\eta}$ ainsi que la propriété de réduction dimensionnelle [Car83, KP83, KLP84]. Le comportement critique universel de la théorie supersymétrique donnée par l'Eq. (6.25) à d dimensions est identique à celui du modèle d'Ising pur en présence d'interactions à longue portée en dimension $d-2$. Soulignons que ce dernier résultat est exact ; tant que la théorie du super-champ décrit correctement le modèle de départ, la réduction dimensionnelle s'applique. Cependant, on a mis en évidence que la construction de Parisi-Sourlas n'est plus valable dès que l'équation stochastique possède plusieurs solutions (voir chapitre 3) [Par84]. On étend dans la section 6.4 le formalisme développé au chapitre 3 afin d'étudier l'éventuelle brisure de réduction dimensionnelle dans le modèle à longue portée satisfaisant les conditions de l'Eq. (6.24).

Notons finalement que la condition supersymétrique $\rho = 2 - \sigma$ assure l'absence de réduction dimensionnelle dans cas LRE et LRF, comme cela avait déjà été remarqué à travers la théorie de perturbation [You77, KMT83]. Il est nécessaire de considérer à la fois des interactions et des corrélations du désordre à longue portée, l'un des exposants de décroissance étant fixé en fonction de l'autre.

6.3.2 Comportement critique du modèle avec $\rho = 2 - \sigma$

On travaille en dimension $d < 6$ fixée et on varie l'exposant σ associé aux décroissances à longue portée. En se basant sur les conclusions de Bray, on distingue alors différents

iv. L'Eq. (6.24b) peut être généralisée lorsqu'on tient compte des termes d'ordre supérieur en impulsion dans les développements de l'Eq. (6.5).

v. Lorsque Z_{LR} est non nul, celui-ci peut être fixé à 1 par une simple redéfinition des champs et des moments.

régimes pour le comportement critique du modèle tel que $\rho = 2 - \sigma$.

Remarquons tout d'abord que la dimension 2 n'est pas intéressante ; le modèle n'y décrit pas de transition de phase pour $\sigma > 0$. En revanche, il apparaît une transition de phase quelle que soit la valeur de $\sigma > 0$ lorsque la dimension est supérieure à 3. On note en particulier trois régimes :

- Pour $0 < \sigma < d/2 - 1$, la transition de phase est de type champ moyen dans le régime LREF où les décroissances à longue portée dominent. Les exposants du modèle prennent les valeurs classiques $\eta = \bar{\eta} = 2-\sigma$, $\nu = \sigma^{-1}$ et la propriété de réduction dimensionnelle est trivialement vérifiée. En effet, les exposants obtenus coïncident bien avec ceux du modèle pur en dimension $d - 2$ pour la même valeur de σ. [vi]

- Il vient ensuite le régime LREF non classique lorsque $d/2-1 < \sigma < \min(2-\eta_{LRF}, 2+\bar{\eta}_{LRE} - 2\eta_{LRE})$. Les deux dimensions anormales sont toujours fixées $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$ mais l'exposant ν n'est plus trivial. Soulignons que l'on a également $\theta = 2$ dans ce second régime, tout comme dans le modèle SR lorsque la réduction dimensionnelle s'applique.

- Pour $\sigma > 2+\bar{\eta}_{SR}-2\eta_{SR}$, toutes les décroissances de longue portée sont négligeables et le comportement critique s'identifie à celui de la version SR du modèle. En particulier, la réduction dimensionnelle est brisée lorsque $d < d_{DR}$. [vii]

Ainsi, en dimension $d < d_{DR} \simeq 5.13$, la propriété de réduction dimensionnelle est satisfaite pour le premier régime lorsque σ est suffisamment petit, mais brisée à grand σ dans le régime SR. Cela justifie donc notre intérêt pour le régime intermédiaire ; il doit apparaître une brisure de réduction dimensionnelle dans ce dernier. Nous montrons dans la section 6.5 qu'il existe effectivement une valeur critique de σ dans le régime LREF au delà de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée. En particulier, la relation $\eta = \bar{\eta}$ du modèle LREF ne constitue pas une condition suffisante pour obtenir la réduction dimensionnelle, à la différence du cas SR. En effet, l'exposant ν diffère de sa valeur de réduction dimensionnelle quand cette dernière est brisée, et cela bien que $\eta = \bar{\eta}$.

6.4 Formalisme et groupe de renormalisation non perturbatif

On généralise l'approche développée dans le chapitre 3 afin d'étudier la brisure de réduction dimensionnelle dans la version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire.

vi. On rappelle que, concernant le modèle pur en dimension $d < 4$, les exposants vérifient $\eta = 2 - \sigma$ et $\nu = \sigma^{-1}$ dès que $\sigma < d/2$.

vii. d_{DR} est la dimension en dessous de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée dans le modèle SR ; on a estimé $d_{DR} \simeq 5.13$ dans le chapitre 3. En dimension $d < d_{DR}$, les dimensions anormales η_{SR} et $\bar{\eta}_{SR}$ cessent d'être égales.

Celle-ci repose sur une extension de la construction de Parisi-Sourlas combinée à un formalisme où plusieurs répliques du système sont couplées à des sources différentes [TT12a]. On utilise ensuite la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif en procédant à une troncation fonctionnelle et compatible avec la supersymétrie [TT12b]. On vérifie que cette approximation est en accord avec les prédictions de Bray concernant le régime LREF du modèle. On introduit finalement des quantités sans dimension adaptées afin de déterminer un point fixe dans les équations de flot du groupe de renormalisation.

6.4.1 Action microscopique

On étend le formalisme adapté pour l'étude du modèle d'Ising en champ aléatoire présenté dans le chapitre 3 à la version longue portée. Comme expliqué en détail dans la section 3.6, on introduit d'abord une température auxiliaire β^{-1} dans la fonction de partition de l'Eq. (6.19) afin de sélectionner uniquement l'état fondamental. On reformule ensuite la théorie en terme d'un super-champ dans un super-espace en utilisant la construction de Parisi-Sourlas. Il est finalement possible d'obtenir les cumulants de l'énergie libre pour des sources quelconques en considérant n copies du système dans une même réalisation du désordre, mais couplées à des sources différentes [TT12a]. Après avoir effectué la moyenne sur le champ aléatoire, on aboutit à la fonctionnelle génératrice suivante [BTTS13] :

$$\mathcal{Z}_\beta[\{\mathcal{J}\}] = \int \prod_a \mathcal{D}\Phi_a \, e^{-\mathcal{S}_{R,\beta}[\{\Phi\}] + \sum_a \int_x \int_{\underline{\theta}} \mathcal{J}_a(\underline{x})\Phi_a(\underline{x})} \tag{6.26}$$

et l'on rappelle que la mesure d'intégration est désormais β-dépendante $\int_{\underline{\theta}} = \int d\theta d\bar{\theta}(1 + \beta\bar{\theta}\theta)$. La théorie $\mathcal{S}_{R,\beta}$ des n super-champs présente également les composantes à longue portée des interactions et des corrélations du désordre :

(6.27)

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{R,\beta}[\{\Phi\}] = &\sum_a \int_x \int_{\underline{\theta}} \frac{1}{2}\Phi_a(\underline{x}) \Big(- Z_{SR}\,\partial^2 + (-\partial^2)^{\sigma/2}\Big)\,\Phi_a(\underline{x}) + U(\Phi_a(\underline{x})) \\ &- \frac{1}{4}\sum_{a_1 a_2} \int_x \int_{\underline{\theta}_1\,\underline{\theta}_2} \Big(\Phi_{a_1}(x,\theta_1,\bar{\theta}_1)\Big(\Delta_{SR} + \Delta_{LR}(-\partial^2)^{-\rho/2}\Big)\Phi_{a_2}(x,\theta_2,\bar{\theta}_2) + perm(12)\Big)\end{aligned}$$

Nous avons posé $Z_{LR} = 1$ et $perm(12)$ dénote les termes obtenus en permutant les champs Φ_{a_1} et Φ_{a_2}.

L'action de l'Eq. (6.27) est ultra-locale dans les variables de Grassmann : les densités intervenant dans l'expression ci-dessus ne contiennent pas de dérivée par rapport aux coordonnées grassmanniennes et ne dépendent de ces dernières qu'à travers les super-champs. Soulignons, de plus, que l'on retrouve la construction supersymétrique originale pour $\beta = 0$

lorsque la théorie est restreinte à une seule copie $n = 1$. D'après la discussion du paragraphe 6.3.1, on impose alors les conditions suivantes :

$$\rho = 2 - \sigma \tag{6.28a}$$

$$\Delta_{SR} = (2\Delta_{LR} Z_{SR})/\sigma \tag{6.28b}$$

Ces dernières assurent que la théorie est invariante sous les super-rotations dans le cas $\beta = 0$ et $n = 1$.

6.4.2 Approche par l'action effective courante

On souhaite étudier les propriétés critiques universelles de la théorie des super-champs décrite ci-dessus par le groupe de renormalisation non perturbatif. L'action effective courante est construite comme dans la section 3.7 ; on rappelle en particulier la forme du terme de régularisation :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{S}_{k,\beta}[\{\Phi\}] = \frac{1}{2}\sum_a \int_{x_1 x_2} \int_{\underline{\theta}} \Phi_a(x_1,\theta,\bar{\theta})\hat{R}_k(|x_1 - x_2|)\Phi_a(x_2,\theta,\bar{\theta}) \\ + \frac{1}{2}\sum_{a_1 a_2} \int_{\underline{x}_1 \underline{x}_2} \Phi_a(\underline{x}_1)\tilde{R}_k(|x_1 - x_2|)\Phi_a(\underline{x}_2)\end{aligned} \tag{6.29}$$

Afin de ne pas briser explicitement l'invariance sous les super-rotations obtenue quand $\beta = 0$ et $n = 1$, les régulateurs $\hat{R}_k$ et $\tilde{R}_k$ sont reliés par [BTTS13] :

$$\tilde{R}_k(q) = -(2\Delta_{LR}/\sigma)\,\partial_{q^2}\hat{R}_k(q) \tag{6.30}$$

On reviendra sur la forme de la fonction $\hat{R}_k$ dans la suite.

L'action effective courante est précisément définie dans la partie 3.7.2. En utilisant son développement en somme de répliques libres et l'hypothèse d'ultra-localité grassmannienne, on peut établir les equations de flot exactes pour les parties ultra-locales $\Gamma_{k1}[\varphi]$, $\Gamma_{k2}[\varphi_1, \varphi_2]$, etc. [viii] Les deux premières sont données explicitement dans les Eqs. (3.102) et (3.103).

6.4.3 Troncation minimale

On a discuté la troncation fonctionnelle minimale compatible avec la supersymétrie pour le modèle SR dans le paragraphe 3.7.3. En généralisant ces considérations en présence des décroissances à longue portée, on travaille dans l'approximation suivante pour les parties ultra-locales de l'action effective courante :

$$\Gamma_{k1}[\varphi] = \int_x \left(\frac{1}{2}Z_{SR,k}(\varphi(x))\,\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x) + \frac{1}{2}Z_{LR,k}(\varphi(x))\,\varphi(x)(-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}}\varphi(x) + U_k(\varphi(x))\right) \tag{6.31}$$

viii. $\varphi(x)$ représente une configuration physique du super-champ $\Phi(\underline{x})$; ce dernier est choisi uniforme dans le sous-espace de Grassmann.

$$\Gamma_{k2}[\varphi_1,\varphi_2] = \int_x \Big(\frac{1}{2}\Delta_{LR,k}(\varphi_1(x),\varphi_2(x))\Big(\varphi_1(x)(-\partial^2)^{\frac{\sigma}{2}-1}\varphi_2(x) + perm(12)\Big) + V_k(\varphi_1(x),\varphi_2(x))\Big) \tag{6.32}$$

Et l'on impose que tous les cumulants d'ordre supérieur soient nuls : $\Gamma_{kp} = 0$ pour tout $p \geqslant 3$. On va donc obtenir cinq équations de flot couplées pour :

- Le potentiel effectif $U_k(\varphi)$ qui contient les propriétés thermodynamiques du système.
- Les deux renormalisations du champ $Z_{SR,k}(\varphi)$ et $Z_{LR,k}(\varphi)$.
- Les intensités des parties locale et à longue portée du second cumulant renormalisé du champ aléatoire $\Delta_{SR,k}(\varphi_1,\varphi_2) = V_k^{(1,1)}(\varphi_1,\varphi_2)$ et $\Delta_{LR,k}(\varphi_1,\varphi_2)$.

En condition initiale du flot $k = \Lambda$, l'action effective courante est égale à l'action microscopique de l'Eq. (6.27) en choisissant $U_\Lambda(\varphi) = U(\varphi) = (\tau/2)\varphi^2 + (g/4!)\varphi^4$, $Z_{SR,\Lambda}(\varphi) = Z_{SR}$, $Z_{LR,\Lambda}(\varphi) = 1$, $\Delta_{LR,\Lambda}(\varphi_1,\varphi_2) = \Delta_{LR}$ et $V_\Lambda(\varphi_1,\varphi_2) = (2\Delta_{LR}Z_{SR}/\sigma)\varphi_1\varphi_2$.

6.4.4 Renormalisation triviale des termes non analytiques

Notons qu'en l'absence de désordre $\Delta_{SR,k} = \Delta_{LR,k} = 0$, on retrouve la troncation utilisée dans le chapitre 5 pour étudier le modèle pur en présence d'interactions à longue portée (voir Eq. (5.23)). Comme dans cette dernière, les dérivées fonctionnelles de l'action effective évaluées en champ uniforme sont singulières en moment, et cela même en dehors de la région critique. En particulier, $\Gamma_{k1}^{(2)}[\varphi](q,-q)$ vient avec un terme non analytique en q^σ et $\Gamma_{k2}^{(1,1)}[\varphi_1,\varphi_2](q,-q)$ en $q^{\sigma-2}$. On dérive les équations d'évolution des préfacteurs correspondants $Z_{LR,k}(\varphi)$ et $\Delta_{LR,k}(\varphi_1,\varphi_2)$ pour des champs uniformes en extrayant cette dépendance singulière des flots de $\Gamma_{k1}^{(2)}$ et $\Gamma_{k2}^{(1,1)}$.

$$\partial_t\Gamma_{k1}^{(2)}[\varphi](q,-q) = \partial_t U_k''(\varphi) + q^\sigma\,\partial_t\big(Z_{LR,k}(\varphi) + \varphi Z_{LR,k}'(\varphi)\big) + q^2\,\partial_t Z_{SR,k}(\varphi) + \cdots \tag{6.33}$$

$$\partial_t\Gamma_{k2}^{(11)}[\varphi_1,\varphi_2](q,-q) = q^{\sigma-2}\,\partial_t\Big(\Delta_{LR,k}(\varphi_1,\varphi_2) + \frac{1}{2}\big(\varphi_1\Delta_{LR,k}^{(1,0)}(\varphi_1,\varphi_2) + \varphi_2\Delta_{LR,k}^{(0,1)}(\varphi_1,\varphi_2)\big)\Big) + \partial_t\Delta_{SR,k}(\varphi_1,\varphi_2) + \cdots \tag{6.34}$$

A la manière du modèle pur, après avoir évalué ces équations dans la troncation Eqs. (6.31)-(6.32), on trouve que les composantes à longue portée ne sont pas renormalisées. Plus précisément, si $Z_{LR,k}(\varphi) = Z_{LR,k}$ est indépendant du champ alors son flot est nul

$\partial_t Z_{LR,k} = 0$, et de même pour $\Delta_{LR,k}$ s'il ne dépend pas des champs φ_1 et φ_2. Puisque la condition initiale vérifie $Z_{LR,\Lambda}(\varphi) = 1$ et $\Delta_{LR,\Lambda}(\varphi_1, \varphi_2) = \Delta_{LR}$, les termes non analytiques de l'action effective associés aux décroissances à longue portée n'évoluent pas au cours du flot.

$$Z_{LR,k}(\varphi) = 1 \tag{6.35a}$$

$$\Delta_{LR,k}(\varphi_a, \varphi_b) = \Delta_{LR} \tag{6.35b}$$

6.4.5 Dimensions anormales fixées

Il est utile pour la suite d'introduire les propagateurs à une et deux répliques :

$$P_{k1}[\varphi] = \big(\Gamma_{k1}[\varphi] + \hat{R}_k\big)^{-1} \tag{6.36}$$

$$P_{k2}[\varphi_1, \varphi_2] = P_{k1}[\varphi_1]\big(\Gamma_{k2}^{(1,1)}[\varphi_1, \varphi_2] - \tilde{R}_k\big)P_{k1}[\varphi_2] \tag{6.37}$$

On rappelle que le premier cumulant Γ_{k1} contient les propriétés thermodynamiques du système moyennées sur le désordre ; en particulier, la fonction de corrélation connectée de l'Eq. (6.7) s'identifie au propagateur renormalisé à un champ P_{k1} pour $k \to 0$. D'autre part, le terme à deux champs caractérise les corrélations du désordre et le propagateur déconnecté de l'Eq. (6.8) correspond à $P_{k2}[\varphi_1, \varphi_2]$ dans la limite où $\varphi_2 \to \varphi_1$ et $k \to 0$.

On établit aisément la transformée de Fourier de P_{k1} en champ uniforme dans la troncation Eqs. (6.31)-(6.32) avec la prescription de l'Eq. (6.35) :

$$P_{k1}[\varphi](q, -q) = \frac{1}{q^\sigma + Z_{SR,k}(\varphi)q^2 + U_k''(\varphi) + \hat{R}_k(q)} \tag{6.38}$$

Et pour le propagateur à deux champs :

$$P_{k2}[\varphi_1, \varphi_2](q, -q) = P_{k1}[\varphi_1](q, -q)\Big(\Delta_{LR}q^{\sigma-2} + \Delta_{SR,k}(\varphi_1, \varphi_2) - \tilde{R}_k(q)\Big)P_{k1}[\varphi_2](q, -q) \tag{6.39}$$

Dans le régime LREF du modèle lorsque σ est petit, les Eqs. (6.38) et (6.39) impliquent :

$$P_{k\to 0,1}[\varphi](q, -q) \sim q^{-\sigma} \sim \mathcal{P}_c(q, -q) \tag{6.40a}$$

$$P_{k\to 0,2}[\varphi, \varphi](q, -q) \sim q^{-\sigma-2} \sim \mathcal{P}_d(q, -q) \tag{6.40b}$$

En comparant avec les Eqs. (6.7) et (6.8), il vient $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$. Notre troncation est donc en accord avec les conclusions de Sak et Bray [Sak73, Bra86] ; puisque les termes à longue portée ne sont pas renormalisés, les deux dimensions anormales sont fixées dans tout le régime LREF. A la différence du modèle SR, nous allons montrer que la relation $\theta = 2$ n'est cependant pas suffisante pour impliquer la propriété de réduction dimensionnelle.

6.4.6 Equations de flot pour les fonctions U_k, $Z_{SR,k}$ et V_k

On dérive ensuite les équations de flot pour les trois fonctions restantes U_k, $Z_{SR,k}$ et V_k dans la troncation Eqs. (6.31)-(6.32) vérifiant l'Eq. (6.35). Il suffit pour cela d'évaluer les équations exactes, Eqs. (3.102) et (3.103), dans l'approximation considérée. On obtient formellement les mêmes équations que dans la version SR du modèle (voir Eqs. (3.109), (3.110) et (3.111)) avec la correspondance suivante :

(6.41)
$$P_{k1}[\varphi](q,-q) = \frac{1}{Z_k(\varphi)q^2 + U_k''(\varphi) + \hat{R}_k(q)} \quad \mapsto \quad \frac{1}{q^\sigma + Z_{SR,k}(\varphi)q^2 + U_k''(\varphi) + \hat{R}_k(q)}$$

et :

$$\left(V_k^{(1,1)}(\varphi_1,\varphi_2) - \tilde{R}_k(q^2)\right) \quad \mapsto \quad \left(\Delta_{LR}\, q^{\sigma-2} + V_k^{(1,1)}(\varphi_1,\varphi_2) - \tilde{R}_k(q^2)\right) \tag{6.42}$$

6.4.7 Quantités sans dimension

On procède à un dédimensionnement adapté afin d'obtenir un point fixe à température nulle (voir section 6.2.2) dans les équations de flots précédentes. Puisque les composantes à longue portée ne sont pas renormalisées, on peut reprendre le changement de variable effectué dans la version SR du modèle en fixant les dimensions anormales courantes à $2-\sigma$. Plus précisément, on considère l'Eq. (3.117) avec la substitution $Z_{0k} \to k^{\sigma-2}$ et $\Delta_{0k} \to (\frac{2}{\sigma}\Delta_{LR})\, k^{\sigma-2}$.

$$\tilde{\varphi} = (\frac{2}{\sigma}\Delta_{LR})^{-1/2}\, k^{(\sigma-d+2)/2}\varphi \tag{6.43a}$$

$$\tilde{u}_k'(\tilde{\varphi}) = (\frac{2}{\sigma}\Delta_{LR})^{-1/2}\, k^{(2-d-\sigma)/2}U_k(\varphi) \tag{6.43b}$$

$$\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) = k^{2-\sigma}Z_{SR,k}(\varphi) \tag{6.43c}$$

$$\tilde{v}_k^{(1,1)}(\tilde{\varphi}_a,\tilde{\varphi}_b) = (\frac{2}{\sigma}\Delta_{LR})^{-1}k^{2-\sigma}V_k^{(1,1)}(\varphi_a,\varphi_b) \tag{6.43d}$$

Ces nouvelles variables sont appropriées pour décrire le régime LREF du modèle ; le point fixe vérifie par construction $\eta = \bar{\eta} = 2-\sigma$.

On introduit également le régulateur et le propagateur à une réplique sans dimension :

$$s(y) = k^{-\sigma}\hat{R}_k(q) = \alpha\, e^{-y}(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{12}) \tag{6.44}$$

$$p_k(y,\tilde{\varphi}) = k^\sigma P_{k1}[\varphi](q,-q) = \frac{1}{y^{\sigma/2} + y\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) + s(y) + \tilde{u}_k''(\tilde{\varphi})} \tag{6.45}$$

où $y = q^2/k^2$ et α est un paramètre d'optimisation. On rappelle que la seconde fonction de régularisation $\tilde{R}_k$ est déduite de $\hat{R}_k$ par l'Eq. (6.30). Comme pour le modèle à courte portée, on pose aussi $\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \tilde{v}_k^{(1,1)}(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)$ avec $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2)/2$ et $\delta\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2)/2$ pour le second cumulant du désordre renormalisé sans dimension.

Il n'est pas difficile d'établir les fonctions beta pour les constantes de couplages $\tilde{u}'_k$, $\tilde{z}_k$ et δ_k à l'aide des équations de flot dimensionnées et des définitions précédentes. On aboutit là encore aux mêmes équations que dans la version SR du modèle (voir Eqs. (3.120), (3.121) et (3.122)) avec $\eta_k = \bar{\eta}_k = 2 - \sigma$ et les règles de substitution suivantes :

$$p_k(y, \tilde{\varphi}) = \frac{1}{y\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) + s(y) + \tilde{u}''_k(\tilde{\varphi})} \quad \mapsto \quad \frac{1}{y^{\sigma/2} + y\tilde{z}_k(\tilde{\varphi}) + s(y) + \tilde{u}''_k(\tilde{\varphi})} \tag{6.46}$$

et :

$$\Big(\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) + s'(y)\Big) \quad \mapsto \quad \Big((\sigma/2)y^{\sigma/2-1} + \delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) + s'(y)\Big) \tag{6.47}$$

6.5 Brisure de réduction dimensionnelle en dimension fixée

Nous exposons les principaux résultats de ce travail concernant la brisure de réduction dimensionnelle dans la version à longue portée du modèle d'Ising en champ aléatoire (avec $\rho = 2 - \sigma$). En particulier pour le cas physique tridimensionnel, nous déterminons la valeur critique σ_{DR} du paramètre σ au delà de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée. Quelques propriétés générales valables en dimension quelconque sont d'abord discutées ; nous présentons ensuite nos résultats numériques en dimension 3.

6.5.1 Résultats généraux

Comme dans le modèle à courte portée, on considère l'approximation analytique dans laquelle δ_k ne développe pas de singularité linéaire au cours du flot.

$$\delta_k(\tilde{\varphi}, \delta\tilde{\varphi}) = \delta_{k,0}(\tilde{\varphi}) + \frac{\delta\tilde{\varphi}^2}{2}\delta_{k,2}(\tilde{\varphi}) + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{6.48}$$

On peut alors vérifier que les fonctions beta pour $\tilde{z}_k$ et $\delta_{k,0}$ sont égales si $\tilde{z}_k = \delta_{k,0}$ (voir Eq. (3.126)), et cette dernière égalité est bien satisfaite en condition initiale $k = \Lambda$. En conséquence, on a toujours $\tilde{z}_k = \delta_{k,0}$ et les équations de flot pour les fonctions $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k$ prédisent la réduction dimensionnelle, c'est à dire qu'elles s'identifient à celles du modèle pur avec des interactions à longue portée en dimension $d - 2$ (pour le même ordre du

développement en dérivées de l'action effective).[ix] L'approximation de l'Eq. (6.48) prévoit donc la réduction dimensionnelle avec les exposants critiques suivants pour le régime LREF du modèle :

$$\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma \tag{6.49a}$$

$$\nu = \nu_{DR} \tag{6.49b}$$

où ν_{DR} est l'exposant ν du modèle d'Ising pur en présence d'interactions à longue portée en dimension $d-2$. La solution de point fixe $\tilde{u}'_*$, $\tilde{z}_* = \delta_{*,0}$ et l'exposant ν_{DR} ont été déterminés numériquement dans le chapitre 5 pour les dimensions $d-2$ =1, 2 et 3. Notons que la solution gaussienne $\tilde{u}'_* = \tilde{z}_* = 0$ telle que $\nu_{DR} = 1/\sigma$ est stable lorsque $\sigma \leqslant d/2 - 1$.

D'après l'étude détaillée du cas SR, il est établit que la réduction dimensionnelle est brisée lorsqu'une singularité linéaire est générée dans δ_k au cours du flot [TT11b, TT12b]. Cette non analyticité apparaît en un temps fini du groupe de renormalisation qui correspond précisément au temps à partir duquel la fonction $\delta_{k,2}$ diverge dans l'approximation de l'Eq. (6.48). Au contraire, si $\delta_{k,2}$ atteint un point fixe fini lorsque $k \to 0$, alors l'hypothèse d'analyticité de l'Eq. (6.48) est cohérente et la réduction dimensionnelle s'applique.

On souhaite donc intégrer le flot de $\delta_{k,2}$ dans l'approximation Eq. (6.48) afin de vérifier si ce dernier reste fini. L'équation d'évolution pour $\delta_{k,2}$ s'établit en développant celle de δ_k autour de $\delta\tilde{\varphi} = 0$, et en utilisant l'Eq. (6.48). En fixant les fonctions $\tilde{u}'_k$ et $\tilde{z}_k = \delta_{k,0}$ à leurs valeurs de point fixe trouvées précédemment (associées à la réduction dimensionnelle), le

ix. Ces équations ont été établies au chapitre 5 (voir Eqs. (5.36) et (5.37)).

flot de $\delta_{k,2}$ prend la forme suivante :

(6.50)

$$
\begin{aligned}
\partial_t \delta_{k,2}(\tilde\varphi) = {} & (d-2\sigma)\delta_{k,2}(\tilde\varphi) + \frac{1}{2}(d-2-\sigma)\tilde\varphi\delta'_{k,2}(\tilde\varphi) + v_d\tilde\partial_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\Bigg(\\
& \Bigg(4\tilde z'_*(\tilde\varphi)\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi)p_*^{(0,2)}(y,\tilde\varphi) + 5\tilde z'_*(\tilde\varphi)^2 p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi)^2 \\
& + p_*(y,\tilde\varphi)\big(2\tilde z''_*(\tilde\varphi)\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*^{(0,2)}(y,\tilde\varphi) + 7\tilde z'_*(\tilde\varphi)^2 p_*^{(0,2)}(y,\tilde\varphi) \\
& + 4\tilde z'_*(\tilde\varphi)\big(2\tilde z''_*(\tilde\varphi)p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi) + \big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*^{(0,3)}(y,\tilde\varphi)\big)\big) \\
& - 2\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)^2\big(p_*^{(0,2)}(y,\tilde\varphi)^2 - p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi)p_*^{(0,3)}(y,\tilde\varphi)\big) \\
& + \frac{1}{2}\big(\tilde z''_*(\tilde\varphi)^2 + 2\tilde z_*^{(3)}(\tilde\varphi)\tilde z'_*(\tilde\varphi)\big)p_*(y,\tilde\varphi)^2\Bigg) \\
& + 3\,\delta_{k,2}(\tilde\varphi)\Bigg(4\tilde z'_*(\tilde\varphi)p_*(y,\tilde\varphi)p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi) + 4\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi)^2 \\
& + \tilde z''_*(\tilde\varphi)p_*(y,\tilde\varphi)^2\Bigg) \\
& + \delta'_{k,2}(\tilde\varphi)\Bigg(4p_*(y,\tilde\varphi)\big(2\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*^{(0,1)}(y,\tilde\varphi) + \tilde z'_*(\tilde\varphi)p_*(y,\tilde\varphi)\big)\Bigg) \\
& + \delta''_{k,2}(\tilde\varphi)\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde z_*(\tilde\varphi) + s'(y)\big)p_*(y,\tilde\varphi)^2 - \frac{3}{2}\delta_{k,2}(\tilde\varphi)^2 p_*(y,\tilde\varphi)^2\Bigg)
\end{aligned}
$$

$p_*(y,\tilde\varphi) = (y^{\sigma/2} + y\tilde z_*(\tilde\varphi) + s(y) + \tilde u''_*(\tilde\varphi))^{-1}$ est le propagateur à un champ sans dimension au point fixe. Précisons également que l'opérateur $\tilde\partial_t$ agit comme $\tilde\partial_t s(y) = \sigma s(y) - 2ys'(y)$ sur le régulateur dédimensionné.

L'équation de point fixe pour $\delta_{*,2}$ est obtenue en annulant le membre de gauche de l'Eq. (6.50). Cette dernière se simplifie au point fixe gaussien $\tilde u'_* = \tilde z_* = 0$ lorsque $\sigma \leqslant d/2 - 1$:

(6.51)

$$
\begin{aligned}
0 = {} & (d-2\sigma)\delta_{*,2}(\tilde\varphi) + \frac{1}{2}(d-2-\sigma)\tilde\varphi\delta'_{*,2}(\tilde\varphi) \\
& + \frac{v_d}{2}\tilde\partial_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1}\frac{\Big(2\delta''_{*,2}(\tilde\varphi)\big((\sigma/2)y^{\frac{\sigma}{2}-1} + s'(y)\big) - 3\delta_{*,2}(\tilde\varphi)^2\Big)}{\big(y^{\frac{\sigma}{2}} + s(y)\big)^2}
\end{aligned}
$$

On trouve deux solutions constantes $\delta_{*,2} = 0$ et $\delta_{*,2}^{inst} = (2\sigma - d)/(3v_d l_2^d(0,0))$ qui correspondent respectivement aux points fixes stable et instable.[x] La fonction seuil à longue portée

x. Nous avons discuté les points fixes analytiques conjugués pour le cas SR dans la section 4.2.1.

$l_2^d(w,z)$ est définie dans l'annexe C.

L'intégration de l'équation générale, Eq. (6.50), dans la région non triviale $\sigma > d/2-1$ permet de déterminer les points fixes analytiques stable et instable, ainsi que l'endroit précis où ceux-ci disparaissent. Nous exposons nos résultats numériques pour le cas $d=3$ dans la section suivante.

On étudie également la stabilité des points fixes analytiques par rapport à une perturbation présentant une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$.

$$\delta_k(\tilde{\varphi},\delta\tilde{\varphi}) = \delta_*(\tilde{\varphi},\delta\tilde{\varphi}) + |\delta\tilde{\varphi}| f_\lambda(\tilde{\varphi}) k^\lambda + o(\delta\tilde{\varphi}^2) \tag{6.52}$$

Au premier ordre dans la perturbation, on déduit du flot de δ_k l'équation aux valeurs propres pour l'amplitude f_λ :

$$\begin{aligned}
\lambda f_\lambda(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2}(d+2-3\sigma) f_\lambda(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-2-\sigma)\tilde{\varphi} f'_\lambda(\tilde{\varphi}) \\
&+ v_d \tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \Bigg(f_\lambda(\tilde{\varphi}) \Big(6\tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) \\
&+ 6\big((\sigma/2) y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi})^2 + \frac{3}{2}\big(\tilde{z}''_*(\tilde{\varphi}) - \delta_{*,2}(\tilde{\varphi})\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Big) \\
&+ 3 f'_\lambda(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) \Big(2\big((\sigma/2) y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*^{(0,1)}(y,\tilde{\varphi}) + \tilde{z}'_*(\tilde{\varphi}) p_*(y,\tilde{\varphi}) \Big) \\
&+ f''_\lambda(\tilde{\varphi}) \big((\sigma/2) y^{\frac{\sigma}{2}-1} + \tilde{z}_*(\tilde{\varphi}) + s'(y)\big) p_*(y,\tilde{\varphi})^2 \Bigg)
\end{aligned} \tag{6.53}$$

La valeur propre λ est calculée exactement au point fixe gaussien quand $\sigma \leqslant d/2-1$; l'équation précédente se ré-écrit alors plus simplement :

$$\begin{aligned}
\lambda f_\lambda(\tilde{\varphi}) &= \frac{1}{2}(d+2-3\sigma) f_\lambda(\tilde{\varphi}) + \frac{1}{2}(d-2-\sigma)\tilde{\varphi} f'_\lambda(\tilde{\varphi}) \\
&+ \frac{v_d}{2} \tilde{\partial}_t \int_0^\infty dy\, y^{\frac{d}{2}-1} \frac{\Big(2 f''_\lambda(\tilde{\varphi}) \big((\sigma/2) y^{\frac{\sigma}{2}-1} + s'(y)\big) - 3 f_\lambda(\tilde{\varphi}) \delta_{*,2}(\tilde{\varphi}) \Big)}{\big(y^{\frac{\sigma}{2}} + s(y) \big)^2}
\end{aligned} \tag{6.54}$$

En cherchant une fonction propre indépendante du champ $f_\lambda(\tilde{\varphi}) = f_\lambda$, il vient $\lambda = (d+2-3\sigma)/2$ pour la solution stable $\delta_{*,2} = 0$, et $\lambda = (2-d+\sigma)/2$ pour le point fixe instable $\delta_{*,2}^{inst} = (2\sigma - d)/(3 v_d l_2^d(0,0))$. La valeur propre est donc toujours supérieure à 1 au point fixe gaussien stable, et toujours négative au point fixe gaussien instable.

Rappelons, pour terminer, que la validité de la réduction dimensionnelle est directement reliée aux propriétés d'échelle des grandes avalanches intervenant dans le système

à température nulle (voir la section 4.4) [TBT13]. Les avalanches sont en effet la raison physique de l'apparition de la non analyticité dans le second cumulant du désordre renormalisé. La réduction dimensionnelle est alors brisée lorsque la contribution des avalanches est essentielle au point fixe. Au contraire, celle-ci reste valable quand l'effet des avalanches est sous-dominant dans les quantités sans dimension. Concernant le premier cas, la dimension fractale des plus grandes avalanches typiques au point critique est égale à $d_f = d - d_\phi = (d + 2 + \sigma)/2$.[xi] D'autre part, lorsque la réduction dimensionnelle s'applique i.e. quand $\delta_{k,2}$ atteint un point fixe fini à la limite $k \to 0$, l'exposant d_f vérifie $d_f = d - d_\phi - \lambda = (d + 2 + \sigma)/2 - \lambda$ où $\lambda > 0$ est la valeur propre définie ci-dessus (pour le point fixe stable). On peut d'ores et déjà en déduire la dimension fractale des avalanches dans le régime de champ moyen $\sigma \leqslant d/2 - 1$; la valeur $\lambda = (d + 2 - 3\sigma)/2$ déterminée précédemment donne $d_f = 2\sigma$.

6.5.2 Résultats numériques en dimension $d = 3$

On se concentre sur la dimension physique $d = 3$ et on considère le modèle tel que $0 < \sigma < 1$. D'après la discussion du paragraphe 6.3.2, ce dernier est toujours dans le régime LREF et le point critique vérifie $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$.

Le principal résultat de cette étude théorique est l'existence d'une valeur critique $\sigma_{DR} = 0.71 \pm 0.03$ au dessus de laquelle la réduction dimensionnelle est brisée. En effet, alors que le couplage $\delta_{k,2}$ atteint un point fixe fini lorsque $\sigma < \sigma_{DR}$, $\delta_{k,2}$ diverge à une échelle finie k_L quand $\sigma > \sigma_{DR}$. Cela est illustré sur la Fig. 6.A ; on y présente, pour différentes valeurs de σ, le flot de $\delta_{k,2}$ obtenu par intégration numérique de l'Eq. (6.50) en partant de la condition initiale $\delta_{\Lambda,2} = 0$. On a aussi tracé en Fig. 6.B le temps de Larkin $|t_L| = \log(\Lambda/k_L)$ en fonction du paramètre σ ; notons que ce dernier diverge quand $\sigma \to \sigma_{DR}^+$. Comme montré en Fig. 6.A, on vérifie que la physique est gouvernée par le point fixe gaussien $\delta_{*,2} = 0$ dans le régime de champ moyen $\sigma \leqslant 1/2$.

xi. d_ϕ est la dimension d'échelle du champ ; celle-ci vaut $d_\phi = (d + 4 - \bar{\eta})/2 = (d - 2 - \sigma)/2$ dans le régime LREF du modèle.

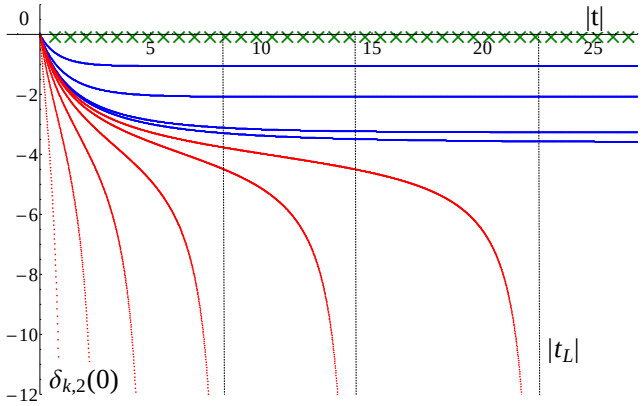

FIGURE 6.A – Flots du couplage $\delta_{k,2}(0)$ pour différentes valeurs de σ dans le modèle d'Ising en champ aléatoire à longue portée en dimension 3, tiré de [BTTS13]. On a intégré numériquement l'Eq. (6.50) en partant de la condition initiale $\delta_{\Lambda,2} = 0$. Les courbes du haut, en bleu, correspondent au cas $\sigma < \sigma_{DR} = 0.7115$ avec $\sigma = 0.675, 0.7, 0.71, 0.711$ (de haut en bas) ; $\delta_{k,2}(0)$ atteint alors un point fixe fini $\delta_{*,2}(0)$. Les courbes du dessous, en rouge, représentent le cas $\sigma > \sigma_{DR}$ avec $\sigma = 0.8, 0.75, 0.73, 0.72, 0.715, 0.713$ (de gauche à droite) ; les flots divergent tous à une échelle finie du groupe de renormalisation $|t_L| = -\log k_L/\Lambda$. Ce temps de divergence est illustré par une ligne verticale en pointillés pour les trois courbes les plus à droite. Les croix vertes correspondent, quant à elles, au flot de $\delta_{k,2}(0)$ lorsque $\sigma \leqslant 1/2$; on a toujours $\delta_{k,2}(0) = 0$. Le paramètre α du régulateur (voir Eq. (6.44)) est égal à 2.

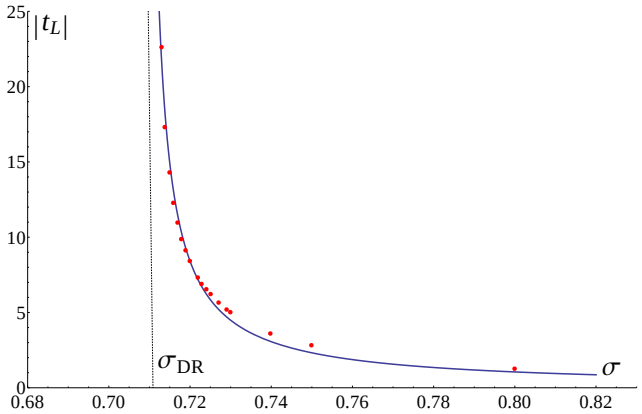

FIGURE 6.B – Divergence du temps de Larkin $|t_L|$ lorsque $\sigma \to \sigma_{DR}^+$, tiré de [BTTS13]. Le temps de Larkin est représenté en fonction de σ ; notons que celui-ci est bien décrit par une simple loi de puissance $t_L(d) \propto (\sigma - \sigma_{DR})^{-1}$.

Ainsi, lorsque $0 < \sigma < \sigma_{DR}$, la réduction dimensionnelle est valable et prédit $\nu = \nu_{DR}$; cet exposant a été calculé au chapitre 5 (voir Fig. 5.G). En revanche, quand σ est supérieur à σ_{DR}, la réduction dimensionnelle est brisée bien que l'on ait toujours $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$ (comme dans le modèle pur). En particulier, l'exposant ν diffère dans ce cas de la valeur ν_{DR} ; la singularité linéaire au point fixe apporte, en effet, des contributions supplémentaires à l'exposant ν non présentes dans le cas de réduction dimensionnelle.

On a déterminé numériquement les deux points fixes analytiques conjugués $\delta_{*,2}$ et $\delta_{*,2}^{inst}$ pour $\sigma < \sigma_{DR}$; on vérifie que ces derniers s'annihilent précisément en $\sigma = \sigma_{DR}$ (voir Fig. 6.C). On présente également les résultats concernant la valeur propre λ associée à une perturbation singulière autour des deux points fixes réguliers sur la Fig. 6.D. A la manière du modèle SR, le point fixe physique de réduction dimensionnelle est toujours stable sous une perturbation non analytique et disparaît avec $\lambda(\sigma_{DR}) > 0$ (voir Fig. 6.D). On en déduit finalement la dimension fractale des plus grandes avalanches typiques au point critique pour σ variant entre 0 et 1 ; d_f est tracé en fonction de σ sur la Fig. 6.E.

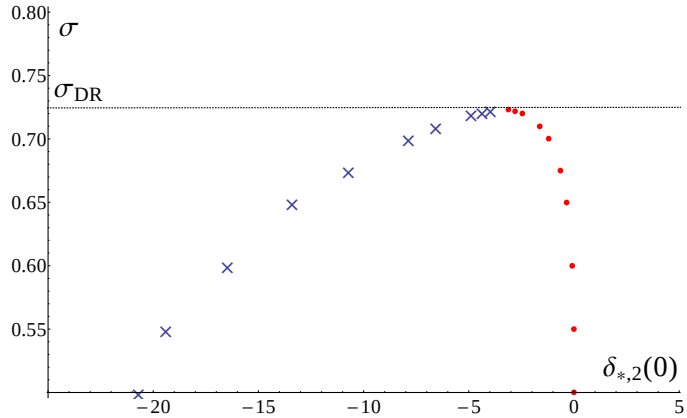

FIGURE 6.C – Annihilation des points fixes analytiques conjugués en $\sigma = \sigma_{DR}$. σ est tracé en fonction du point fixe $\delta_{*,2}(0)$; les croix bleues représentent la solution instable $\delta_{*,2}^{inst}$ et les points rouges la solution stable. Celles-ci se rejoignent en $\sigma = \sigma_{DR}$ et il n'existe plus de point fixe analytique lorsque $\sigma > \sigma_{DR}$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$ ($\sigma_{DR} = 0.7235$ dans ce cas).

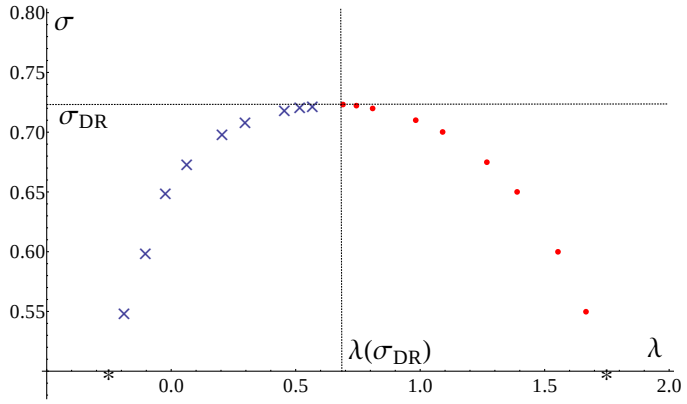

FIGURE 6.D – Valeur propre λ associée à une perturbation singulière autour des deux points fixes analytiques conjugués. σ est tracé en fonction de λ. Les points rouges et les croix bleues correspondent respectivement aux solutions stable et instable. Les étoiles en $\sigma = 0.5$ représentent les résultats exacts au point fixe gaussien. Le point fixe physique est toujours stable sous une perturbation singulière et l'on a $\lambda(\sigma_{DR}) \simeq 0.69$.

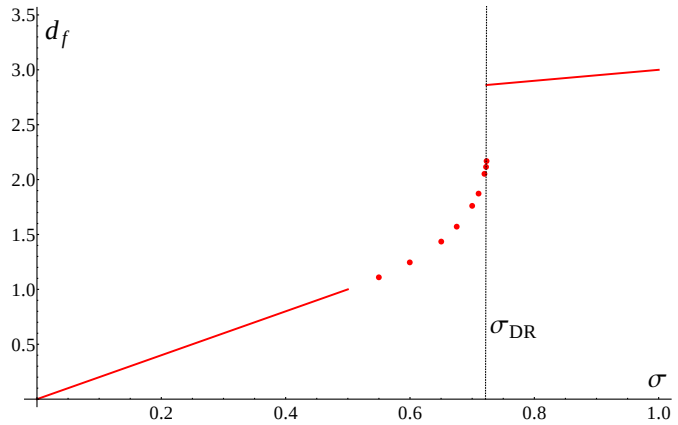

FIGURE 6.E – Dimension fractale des plus grandes avalanches typiques au point critique du modèle d'Ising en champ aléatoire à longue portée en dimension 3. d_f est égal à $(5+\sigma)/2-\lambda$ lorsque la réduction dimensionnelle s'applique, i.e. pour $\sigma < \sigma_{DR}$. En particulier dans la région de champ moyen $\sigma < 1/2$, on trouve exactement $d_f = 2\sigma$. D'autre part, d_f vaut $(5+\sigma)/2$ quand la réduction dimensionnelle est brisée, c'est à dire pour $\sigma > \sigma_{DR}$. Notons la discontinuité de d_f en $\sigma = \sigma_{DR}$ due à la valeur non nulle de $\lambda(\sigma_{DR})$.

6.6 Conclusion

Nous concluons finalement ce chapitre en insistant sur l'importance des simulations numériques qui représentent, en effet, la principale motivation de ce travail. Celles-ci sont basées sur la version sur réseau du modèle ; pour N spins d'Ising $S_i = \pm 1$ disposés aux nœuds d'un réseau, le hamiltonien considéré est alors le suivant :

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} J_{ij} S_i S_j - \sum_{i=1}^{N} h_i S_i \tag{6.55}$$

Le terme d'interaction $J_{ij} = J(|x_i - x_j|)$ se comporte à grande distance comme $|x_i - x_j|^{-d-\sigma}$. Le champ aléatoire est, quant à lui, un bruit gaussien de moyenne nulle et corrélé à longue portée tel que $\overline{h_i h_j} = \Delta(|x_i - x_j|) \sim |x_i - x_j|^{2-d-\sigma}$. Afin que la théorie soit invariante sous les super-rotations, il est également nécessaire d'imposer la relation qui suit entre les interactions et les corrélations du désordre :

$$\frac{d}{dr}\Delta(r) = -CrJ(r) \tag{6.56}$$

où le paramètre C traduit l'intensité relative du désordre par rapport aux interactions. La relation ci-dessus est l'équivalent des identités de Ward-Takahashi pour la version sur réseau du modèle. Il existe de puissants algorithmes qui permettent une détermination exacte de l'état fondamental du système avec des temps de calcul raisonnables [APR85, Ogi86]. Sur un réseau cubique, ceux-ci permettent alors d'étudier des systèmes de grande taille et, par conséquent, de procéder à une analyse en taille finie efficace dans le but de déterminer le comportement critique du modèle à température nulle [FGOV00, MF02, Har02, DM03, WM05, LD09]. Il est possible d'étendre ces algorithmes afin de décrire des interactions à longue portée [FV01], ainsi que du désordre corrélé sur des longues distances [AH11]. Une étude systématique du modèle en fonction du paramètre σ permettrait donc de fournir la première vérification indépendante de nos prédictions théoriques concernant la réduction dimensionnelle et sa brisure.

Chapitre 7

Conclusion

Le travail présenté dans ce manuscrit est consacré à l'étude de deux effets différents influant sur le comportement critique universel du modèle d'Ising. Nous nous sommes intéressés d'une part aux propriétés du modèle en présence d'un champ magnétique aléatoire gelé couplé linéairement au paramètre d'ordre. D'autre part, nous avons également discuté l'influence des interactions à longue portée. Ces deux généralisations du modèle d'Ising ont finalement été combinées en considérant à la fois des interactions à longue portée et un champ aléatoire corrélé sur des longues distances. Tout au long de cette étude théorique, notre principal outil a été le groupe de renormalisation non perturbatif et fonctionnel.

Concernant le modèle d'Ising en champ aléatoire à courte portée, nous avons contribué à la compréhension du phénomène de brisure de réduction dimensionnelle. Notre approche fournit, en effet, une image globale de la propriété de réduction dimensionnelle et de sa brisure. Cette dernière est reliée à l'apparition d'une non analyticité dans le potentiel à deux répliques associé au second cumulant du désordre. Ce comportement singulier est lui même interprété comme la conséquence des avalanches intervenant dans le système à température nulle. La brisure de réduction dimensionnelle a lieu à condition que les avalanches se produisent sur des échelles suffisamment grandes ; c'est en particulier le cas en dimension inférieure à $d_{DR} \simeq 5.13$.

Concernant les interactions à longue portée, le groupe de renormalisation non perturbatif nous a permis de calculer les exposants critiques du modèle et de décrire la transition entre les régimes à longue portée et à courte portée. Il s'agit là d'une toute première approche des interactions à longue portée dans le cadre du groupe de renormalisation non perturbatif. Nous avons, par là même, enrichi la méthode et cela peut servir de base pour d'autres études incluant des interactions à longue portée.

Dans le cas du modèle d'Ising en champ aléatoire, comme dans le cas des interactions à

longue portée, la méthode du groupe de renormalisation non perturbatif permet d'obtenir une description précise du comportement critique du modèle et ouvre la voie pour aller au delà de la théorie de perturbation.

Finalement, en combinant ces deux effets dans un modèle tridimensionnel, il a été possible de proposer un moyen de vérifier nos prédictions théoriques concernant la brisure de réduction dimensionnelle par simulation. Cet objectif constituerait la première vérification indépendante de nos résultats et permettrait d'asseoir plus encore la théorie.

Table des figures

2.A Forme typique de régulateur analytique utilisé dans l'approche du groupe de renormalisation par l'action effective courante (Eq. (2.6)). 10

2.B Exposant ν du modèle d'Ising en dimension 3 calculé pour plusieurs ordres du développement en champs, tiré de [CDMV03b]. ν est tracé en fonction du paramètre α du régulateur pour les deux familles $R^{\alpha}_{k,\theta}$ (à gauche) et $R^{\alpha}_{k,\exp}$ (à droite). Les résultats pour les ordres les plus élevés sont représentés sur les figures du dessous. 22

2.C Potentiel microscopique U_Λ en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0} = |\varphi_0|$. 25

2.D Flot du potentiel renormalisé dans la phase haute température. U_k est tracé en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0}$ pour différentes valeurs de k. La courbe bleue en pointillés correspond à la condition initiale alors que les points rouges représentent la forme asymptotique du potentiel obtenue après un temps long du groupe de renormalisation. Pour k suffisamment petit, le potentiel présente un unique minimum à l'origine. 27

2.E Flot du potentiel renormalisé dans la phase ordonnée. U_k est tracé en fonction du champ $\sqrt{2\rho_0}$ pour différentes valeurs de k. La courbe bleue en pointillés correspond à la condition initiale alors que les points rouges représentent la forme asymptotique du potentiel obtenue après un temps long du groupe de renormalisation. Le maximum en 0 s'aplatit au fur et à mesure que k diminue de manière à obtenir un potentiel convexe à la limite $k = 0$ (et donc une fonction constante sur l'intervalle $[0, |m|]$). 28

2.F Procédure de dichotomie sur le couplage essentiel $\tilde{\kappa}$ associé à la transition (voir texte). Le flot de $\tilde{\kappa}_k$ est représenté pour différentes conditions initiales $\tilde{\kappa} = \tilde{\kappa}_\Lambda$. Lorsque le potentiel est très proche de sa valeur de point fixe $\tilde{u}_*$, le minimum $\tilde{\kappa}_k$ et plus généralement tous les couplages dédimensionnés deviennent indépendants de l'échelle k. 31

2.G Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}_0$ pour la dimension $d = 3$. Nous avons utilisé le régulateur donné par l'Eq. (2.68) avec $\alpha = 2$. . . 37

2.H Illustration du principe de sensibilité minimale sur les exposants η et ν en dimension 3. Les exposants sont tracés en fonction du paramètre α du régulateur Eq. (2.68) ; nous obtenons les valeurs optimales $\nu^{-1}(\alpha_{PMS})$ et $\eta(\alpha_{PMS})$ au minimum de chacune des courbes (voir texte). 37

2.I Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}_0$ pour la dimension $d = 2$. Nous avons utilisé le régulateur donné par l'Eq. (2.68) avec $\alpha = 2$. . . 38

2.J Illustration du principe de sensibilité minimale sur les exposants η et ν pour la dimension $d = 2$. Les exposants sont tracés en fonction du paramètre α du régulateur Eq. (2.68) ; nous obtenons les valeurs optimales $\nu^{-1}(\alpha_{PMS})$ et $\eta(\alpha_{PMS})$ au minimum de chacune des courbes (voir texte). 38

3.A Diagramme de phase dans le plan (T, Δ) pour le modèle d'Ising en champ aléatoire, tiré de [Tis12]. 49

3.B Flots du couplage $\delta_{k,2}(0)$ pour différentes dimensions (obtenus par intégration numérique de l'Eq. (3.131)), en partant de la condition initiale $\delta_{\Lambda,2} = 0$. Les courbes du haut, en bleu, correspondent au cas $d > d_{DR} = 5.1295$ avec $d = 5.3$, 5.2, 5.135 (de haut en bas) ; $\delta_{k,2}(0)$ atteint alors un point fixe fini $\delta_{*,2}(0)$. Les courbes du dessous, en rouge, représentent le cas $d < d_{DR}$ avec $d = 5$, 5.1, 5.12, 5.125 (de gauche à droite) ; les flots divergent tous à une échelle finie du groupe de renormalisation $|t_L| = -\log k_L/\Lambda$. Ce temps de divergence est illustré par une ligne verticale en pointillés pour les trois courbes les plus à droite. Les croix vertes correspondent, quant à elles, au flot de $\delta_{k,2}(0)$ en dimension $d \geqslant 6$; on a toujours $\delta_{k,2}(0) = 0$. Le régulateur utilisé est $s(y) = \alpha \exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$ avec $\alpha = 2$. 86

3.C Divergence du temps de Larkin $|t_L|$ lorsque $d \to d_{DR}^-$. Le temps de Larkin est représenté en fonction de la dimension pour $d < d_{DR}$; notons que celui-ci est bien décrit par une simple loi de puissance $t_L(d) \propto (d_{DR} - d)^{-1}$. 86

3.D Solution de point fixe $\delta_{*,2}$ obtenue en dimension supérieure à d_{DR}. A gauche, la valeur du point fixe $\delta_{*,2}(0)$ est représentée en fonction de la dimension ; celle-ci se comporte comme $\delta_{*,2}(0) \simeq \alpha + \beta\sqrt{d - d_{DR}}$. Nous avons tracé sur la droite toute la fonction $\delta_{*,2}$ pour $d = 5.2$ (la variable est $\tilde{\rho} = \tilde{\varphi}^2/2$). Comme pour les figures précédentes, le régulateur utilisé est $s(y) = 2\exp(-y)(1 + y/2 + y^2/12)$. 87

3.E Flot du second cumulant du désordre renormalisé sans dimension $\delta_k(\tilde{\varphi} = 0, \delta\tilde{\varphi})$ pour une condition initiale proche du point critique en dimension $d = 4 < d_{DR}$, tiré de [TT11b]. Une singularité linéaire en $|\delta\tilde{\varphi}|$ apparaît en un temps fini du groupe de renormalisation $|t_L| = \log(\Lambda/k_L)$. Par construction, l'égalité $\delta_k(0, 0) = 1$ est toujours vérifiée au cours du flot. 88

3.F Dimensions anormales η et $\bar{\eta}$ en fonction de la dimension, tiré de [TT11b]. La réduction dimensionnelle est prédite en dimension supérieure à $d_{DR} \simeq 5.13$. Les croix correspondent aux résultats des simulations [MF02, Har02] et les lignes rouges en pointillés représentent les bornes inférieures sur η et $\bar{\eta}$ (voir [TT12b]). Il est numériquement difficile d'accéder à la région juste en dessous d_{DR}. 89

4.A Solution de point fixe instable $\delta_{*,2}^{inst}$ en fonction du champ $\tilde{\rho} = \tilde{\varphi}^2/2$ pour la dimension $d = 5.2$. 93

4.B Annihilation des points fixes analytiques en dimension $d = d_{DR}$. d est tracé en fonction du point fixe $\delta_{*,2}(0)$; les croix bleues représentent la solution instable $\delta_{*,2}^{inst}$ et les points rouges la solution stable. Celles-ci se rejoignent en dimension $d = d_{DR}$ et il n'existe plus de point fixe analytique lorsque $d < d_{DR}$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$. 93

4.C Valeur propre associée à une perturbation singulière autour du point fixe analytique de réduction dimensionnelle. La plus petite valeur propre solution de l'Eq. (4.6) est représentée en fonction de la dimension d. Les points rouges correspondent aux résultats numériques ; ceux-ci sont bien décrits par loi $\lambda(d) = \lambda(d_{DR}) + a\sqrt{d - d_{DR}}$ tracée en bleu, avec $d_{DR} = 5.1502$, $\lambda(d_{DR}) = 0.012$ et $a = 1.099$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$. 95

4.D Valeur propre λ associée à une perturbation singulière autour des deux points fixes analytiques conjugués. La dimension d est tracée en fonction de λ. Les résultats numériques sont notés par des points rouges et des croix vertes ; ils correspondent respectivement aux points fixes stable et instable. Les étoiles en dimension $d = 6$ représentent les résultats analytiques pour la solution gaussienne. L'ensemble de ces valeurs est bien décrit par la parabole $d(\lambda) = 5.1459 - 0.0055\lambda + 0.8333\lambda^2$ (courbe bleue). 96

4.E Illustration du phénomène d'avalanche dans le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0, tirée de [TBT13]. L'action est tracée en fonction du champ ϕ pour différentes valeurs de $j + h > 0$ sur la gauche. A droite, on a représenté l'état fondamental $\phi^\star$ en fonction de la source $j + h$; ce dernier est discontinu en $j + h = 0$. 97

4.F Illustration du phénomène d'avalanche dans le modèle d'Ising en champ aléatoire en dimension 0, tirée de [TBT13]. Le propagateur déconnecté $\mathcal{P}_d(-\delta j, \delta j)$ est tracé en fonction de δj. Notons la singularité linéaire en $\delta j = 0$; celle-ci n'est pas prise en compte dans le formalisme supersymétrique. 99

4.G Dimension fractale des plus grandes avalanches typiques en fonction de la dimension pour le modèle d'Ising en champ aléatoire au point critique, tiré de [TBT13]. d_f est déduit des résultats sur les dimensions anormales et la valeur propre λ présentés en Figs. 3.F et 4.C ; on a tracé $d_f = d - d_\phi = (d + 4 - \bar{\eta})/2$ dans la région $d < d_{DR}$ où la réduction dimensionnelle est brisée, et $d_f = d - d_\phi - \lambda = (d + 4 - \eta_{DR})/2 - \lambda$ pour $d > d_{DR}$. Les croix et les carrés bleus correspondent aux estimations numériques de d_f pour le comportement critique du modèle d'Ising en champ aléatoire hors équilibre [PDS99, PRV03, PRV04, LD09] et à l'équilibre [LD09]. Les deux points représentent les valeurs connues aux dimensions critiques inférieure et supérieure (voir section 4.4.4) ; la ligne en pointillés rouge désigne quant à elle la borne supérieure $d_f \leqslant d$. La résolution numérique des équations de flot devient très difficile dans les régions $d \to d_{DR}^-$ et $d \lesssim 2.9$, d'où l'absence de résultat pour ces valeurs de la dimension. 105

5.A Diagramme de phase dans le plan (σ, d) pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée. Les lignes noires représentent les dimensions critiques supérieure et inférieure du modèle en fonction de σ ; la courbe rouge correspond, quant à elle, à la transition entre les régimes LR et SR, en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$. Les zones notées LR-MF et SR-MF désignent les régimes LR et SR de champ moyen. 119

5.B Solutions de point fixe $\tilde{u}'_*$ et $\tilde{z}_*$ en fonction du champ $\tilde{\rho}$ en dimension $d = 2$ pour différentes valeurs de σ. De haut en bas, les courbes correspondent à $\sigma = 1.4$, 1.3, 1.2, 1.1 ; le régulateur (voir Eq. (5.35)) est choisi tel que $\alpha = 2$. 127

5.C Plus petite valeur propre positive de la matrice de stabilité du point fixe en fonction de σ pour la dimension $d = 2$. La droite extrapole les résultats à grand σ ; notons que la valeur propre change de signe en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, où $\eta_{SR} \simeq 0.29$ a été calculé au chapitre 2. Le point fixe est donc instable et non physique dans la région $\sigma > 2 - \eta_{SR}$. Pour chaque valeur de σ, nous avons optimisé le paramètre α du régulateur en considérant le PMS sur la valeur propre négative (i.e. sur l'exposant ν). 127

5.D Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 2. La solution de champ moyen $\nu = 1/\sigma$, tracée en rouge, est exacte pour $\sigma \leqslant 1$; les courbes en pointillés verte et bleue correspondent respectivement aux résultats perturbatifs à une et deux boucles [FMN72]. Les points rouges représentent nos résultats numériques ; l'erreur sur ces derniers est estimée en faisant varier le paramètre α du régulateur autour de la valeur donnée par le PMS. La croix noire placée en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$ correspond à l'exposant $1/\nu$ du modèle SR calculé au chapitre 2. 128

5.E Minimum du potentiel $\tilde{\kappa}_*$ et renormalisation du champ $\tilde{z}_*(0)$ au point fixe en fonction de σ pour la dimension $d = 2$. Notons que $\tilde{\kappa}_*$ s'annule alors que $\tilde{z}_*$ diverge lorsque $\sigma \to 2 - \eta_{SR}$. 128
5.F Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 3. Les courbes en pointillés rouge, verte et bleue correspondent respectivement aux résultats du champ moyen, à une boucle et à deux boucles [FMN72]. Les points rouges représentent nos résultats numériques ; la croix noire, en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, désigne, quant à elle, la valeur de $1/\nu$ dans le cas SR (calculée au chapitre 2). 130
5.G Exposant critique $1/\nu$ en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 1, tiré de [BTTS13]. Les courbes rouge, verte et bleue représentent respectivement les résultats du champ moyen, à une boucle et à deux boucles [FMN72]. Les croix dénotent nos résultats numériques et les cercles sont les prédictions des simulations sur réseau [BHL02]. 130
5.H Echange de stabilité des points fixes LR et SR en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, pour la dimension $d = 2$. La plus petite valeur propre positive λ de la matrice de stabilité du point fixe physique est tracée en fonction de σ ; notons que celle-ci s'annule en $\sigma = 2 - \eta_{SR}$, ce qui traduit le changement de stabilité des points fixes. λ a été déterminé numériquement dans le régime LR (voir Fig. 5.C) et vaut exactement $\lambda = \sigma - 2 + \eta_{SR}$ au point fixe SR (pour $\sigma > 2 - \eta_{SR}$). 134
5.I Exposants critiques $1/\nu$ et η en fonction de σ pour le modèle d'Ising en présence d'interactions à longue portée en dimension 2. Notons que les exposants apparaissent comme des fonctions continues de σ ; en particulier, la dimension anormale du champ vérifie l'Eq. (5.22). 134

6.A Flots du couplage $\delta_{k,2}(0)$ pour différentes valeurs de σ dans le modèle d'Ising en champ aléatoire à longue portée en dimension 3, tiré de [BTTS13]. On a intégré numériquement l'Eq. (6.50) en partant de la condition initiale $\delta_{\Lambda,2} = 0$. Les courbes du haut, en bleu, correspondent au cas $\sigma < \sigma_{DR} = 0.7115$ avec $\sigma = 0.675, 0.7, 0.71, 0.711$ (de haut en bas) ; $\delta_{k,2}(0)$ atteint alors un point fixe fini $\delta_{*,2}(0)$. Les courbes du dessous, en rouge, représentent le cas $\sigma > \sigma_{DR}$ avec $\sigma = 0.8, 0.75, 0.73, 0.72, 0.715, 0.713$ (de gauche à droite) ; les flots divergent tous à une échelle finie du groupe de renormalisation $|t_L| = -\log k_L/\Lambda$. Ce temps de divergence est illustré par une ligne verticale en pointillés pour les trois courbes les plus à droite. Les croix vertes correspondent, quant à elles, au flot de $\delta_{k,2}(0)$ lorsque $\sigma \leqslant 1/2$; on a toujours $\delta_{k,2}(0) = 0$. Le paramètre α du régulateur (voir Eq. (6.44)) est égal à 2. . . 163
6.B Divergence du temps de Larkin $|t_L|$ lorsque $\sigma \to \sigma_{DR}^+$, tiré de [BTTS13]. Le temps de Larkin est représenté en fonction de σ ; notons que celui-ci est bien décrit par une simple loi de puissance $t_L(d) \propto (\sigma - \sigma_{DR})^{-1}$. 163

6.C Annihilation des points fixes analytiques conjugués en $\sigma = \sigma_{DR}$. σ est tracé en fonction du point fixe $\delta_{*,2}(0)$; les croix bleues représentent la solution instable $\delta_{*,2}^{inst}$ et les points rouges la solution stable. Celles-ci se rejoignent en $\sigma = \sigma_{DR}$ et il n'existe plus de point fixe analytique lorsque $\sigma > \sigma_{DR}$. Le paramètre d'optimisation du régulateur est choisi tel que $\alpha = 1$ ($\sigma_{DR} = 0.7235$ dans ce cas). 164

6.D Valeur propre λ associée à une perturbation singulière autour des deux points fixes analytiques conjugués. σ est tracé en fonction de λ. Les points rouges et les croix bleues correspondent respectivement aux solutions stable et instable. Les étoiles en $\sigma = 0.5$ représentent les résultats exacts au point fixe gaussien. Le point fixe physique est toujours stable sous une perturbation singulière et l'on a $\lambda(\sigma_{DR}) \simeq 0.69$. 165

6.E Dimension fractale des plus grandes avalanches typiques au point critique du modèle d'Ising en champ aléatoire à longue portée en dimension 3. d_f est égal à $(5+\sigma)/2 - \lambda$ lorsque la réduction dimensionnelle s'applique, i.e. pour $\sigma < \sigma_{DR}$. En particulier dans la région de champ moyen $\sigma < 1/2$, on trouve exactement $d_f = 2\sigma$. D'autre part, d_f vaut $(5+\sigma)/2$ quand la réduction dimensionnelle est brisée, c'est à dire pour $\sigma > \sigma_{DR}$. Notons la discontinuité de d_f en $\sigma = \sigma_{DR}$ due à la valeur non nulle de $\lambda(\sigma_{DR})$. 165

Bibliographie

[AF88] Michael Aizenman and Roberto Fernandez. Critical exponents for long-range interactions. *Letters in Mathematical Physics*, 16(1) :39–49, 1988.

[AH11] Björn Ahrens and Alexander K. Hartmann. Critical behavior of the random-field ising magnet with long-range correlated disorder. *Phys. Rev. B*, 84 :144202, Oct 2011.

[AIM76] Amnon Aharony, Yoseph Imry, and Shang-keng Ma. Lowering of Dimensionality in Phase Transitions with Random Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 37 :1364–1367, Nov 1976.

[Ami92] Daniel J Amit. *Modeling brain function : The world of attractor neural networks*. Cambridge University Press, 1992.

[AMS+98] Ken-Ichi Aoki, Keiichi Morikawa, Wataru Souma, Jun-Ichi Sumi, and Haruhiko Terao. Rapidly Converging Truncation Scheme of the Exact Renormalization Group. *Progress of Theoretical Physics*, 99(3) :451–466, 1998.

[Ant62] V. A. Antonov. Most probable phase distribution in spherical star systems and conditions for its existence. *Vest. Leningrad Univ.*, 7 :135, 1962.

[APR85] Angles d'Auriac, J.C., Preissmann, M., and Rammal, R. The random field ising model : algorithmic complexity and phase transition. *J. Physique Lett.*, 46(5) :173–180, 1985.

[AR95] Mickael Antoni and Stefano Ruffo. Clustering and relaxation in hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E*, 52 :2361–2374, Sep 1995.

[AY69] P. W. Anderson and G. Yuval. Exact results in the kondo problem : Equivalence to a classical one-dimensional coulomb gas. *Phys. Rev. Lett.*, 23 :89–92, Jul 1969.

[AY71] P W Anderson and G Yuval. Some numerical results on the kondo problem and the inverse square one-dimensional ising model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 4(5) :607, 1971.

[AYH70] P. W. Anderson, G. Yuval, and D. R. Hamann. Exact results in the kondo problem. ii. scaling theory, qualitatively correct solution, and some new results

on one-dimensional classical statistical models. *Phys. Rev. B*, 1 :4464–4473, Jun 1970.

[BBM96] Balents, Leon, Bouchaud, Jean-Philippe, and Mézard, Marc. The large scale energy landscape of randomly pinned objects. *J. Phys. I France*, 6(8) :1007–1020, 1996.

[Bel70] R. Bellman. *Introduction to Matrix Analysis*. New York : McGraw-Hill, 1970.

[Bel97] D. P. Bellanger. *Spin glasses and random fields*. 1997.

[BF93] Leon Balents and Daniel S. Fisher. Large- N expansion of (4-ϵ)-dimensional oriented manifolds in random media. *Phys. Rev. B*, 48 :5949–5963, Sep 1993.

[BHL02] H.W.J. Blote, J.R. Heringa, and E. Luijten. Cluster monte carlo : Extending the range. *Computer Physics Communications*, 147(1-2) :58–63, 2002.

[Bin83] K. Binder. Random-field induced interface widths in Ising systems. *Zeitschrift für Physik B Condensed Matter*, 50(4) :343–352, 1983.

[BK87] J. Bricmont and A. Kupiainen. Lower critical dimension for the random-field Ising model. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :1829–1832, Oct 1987.

[BK88] J. Bricmont and A. Kupiainen. Phase transition in the 3d random field Ising model. *Comm. Math. Phys.*, 116(4) :539–572, 1988.

[BM85] A J Bray and M A Moore. Scaling theory of the random-field Ising model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 18(28) :L927, 1985.

[BMGW06a] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolás Wschebor. A new method to solve the non-perturbative renormalization group equations. *Physics Letters B*, 632(4) :571–578, 2006.

[BMGW06b] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolás Wschebor. Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n-point functions. I. *Phys. Rev. E*, 74 :051116, Nov 2006.

[BMGW06c] Jean-Paul Blaizot, Ramón Méndez-Galain, and Nicolás Wschebor. Nonperturbative renormalization group and momentum dependence of n-point functions. II. *Phys. Rev. E*, 74 :051117, Nov 2006.

[BPR13] T. Blanchard, M. Picco, and M. A. Rajabpour. Influence of long-range interactions on the critical behavior of the ising model. *EPL*, 101(56003), March 2013.

[BR91] Birger Bergersen and Zoltán Rácz. Dynamical generation of long-range interactions : Random levy flights in the kinetic ising and spherical models. *Phys. Rev. Lett.*, 67 :3047–3050, Nov 1991.

[Bra86] A. J. Bray. Long-range random-field modes : Scaling theory and 1/n expansion. *J. Phys. C : Solid State Phys*, 19 :6225–6239, 1986.

[BTTS13] Maxime Baczyk, Matthieu Tissier, Gilles Tarjus, and Yoshinori Sakamoto. Dimensional reduction and its breakdown in the three-dimensional long-range random-field ising model. *Phys. Rev. B*, 88 :014204, Jul 2013.

[BTW02] Jürgen Berges, Nikolaos Tetradis, and Christof Wetterich. Non-perturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *Physics Reports*, 363(4) :223–386, 2002.

[BZJG76] E Brezin, J Zinn-Justin, and J C Le Guillou. Critical properties near σ dimensions for long-range interactions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 9(9) :L119, 1976.

[Cam08] Alessandro Campa. The study of the equilibrium and of the dynamical properties of long-range interacting systems. *AIP Conference Proceedings*, 970(1) :3–21, 2008.

[Car83] John L. Cardy. Nonperturbative effects in a scalar supersymmetric theory. *Physics Letters B*, 125(6) :470–472, 1983.

[CCDW10] Léonie Canet, Hugues Chaté, Bertrand Delamotte, and Nicolás Wschebor. Nonperturbative renormalization group for the kardar-parisi-zhang equation. *Phys. Rev. Lett.*, 104 :150601, Apr 2010.

[CCDW11] Léonie Canet, Hugues Chaté, Bertrand Delamotte, and Nicolás Wschebor. Nonperturbative renormalization group for the kardar-parisi-zhang equation : General framework and first applications. *Phys. Rev. E*, 84 :061128, Dec 2011.

[CDDW04] Léonie Canet, Bertrand Delamotte, Olivier Deloubrière, and Nicolas Wschebor. Nonperturbative renormalization-group study of reaction-diffusion processes. *Phys. Rev. Lett.*, 92 :195703, May 2004.

[CDMV03a] Léonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. Nonperturbative renormalization group approach to the ising model : A derivative expansion at order ∂^4. *Phys. Rev. B*, 68 :064421, Aug 2003.

[CDMV03b] Léonie Canet, Bertrand Delamotte, Dominique Mouhanna, and Julien Vidal. Optimization of the derivative expansion in the nonperturbative renormalization group. *Phys. Rev. D*, 67 :065004, Mar 2003.

[CGLD00] Pascal Chauve, Thierry Giamarchi, and Pierre Le Doussal. Creep and depinning in disordered media. *Phys. Rev. B*, 62 :6241–6267, Sep 2000.

[Dan01] D. Dantchev. Two-point correlation function in systems with van der waals type interaction. *The European Physical Journal B*, 23(2) :211–219, 2001.

[Del12] B. Delamotte. An Introduction to the Nonperturbative Renormalization Group. In J. Polonyi and A. Schwenk, editors, *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, volume 852 of *Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag*, page 49, 2012.

[DM03] I. Dukovski and J. Machta. Ground-state numerical study of the three-dimensional random-field Ising model. *Phys. Rev. B*, 67 :014413, Jan 2003.

[DMT04] B. Delamotte, D. Mouhanna, and M. Tissier. Nonperturbative renormalization-group approach to frustrated magnets. *Phys. Rev. B*, 69 :134413, Apr 2004.

[DR01] D. Dantchev and J. Rudnick. Subleading long-range interactions and violations of finite size scaling. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 21(2) :251–268, 2001.

[DRAW02] T. Dauxois, S. Ruffo, E. Arimondo, and M. Wilkens. *Dynamics and Thermodynamics of Systems with Long-Range Interactions*. 2002.

[DS96] Karin Dahmen and James P. Sethna. Hysteresis, avalanches, and disorder-induced critical scaling : A renormalization-group approach. *Phys. Rev. B*, 53 :14872–14905, Jun 1996.

[DS07] N. Dupuis and K. Sengupta. Non-perturbative renormalization group approach to zero-temperature bose systems. *EPL (Europhysics Letters)*, 80(5) :50007, 2007.

[Dys69a] F. J. Dyson. Existence of a Phase-Transition in a One Dimensional Ising Ferromagnet. *Commun. math. Phys.*, 12 :91–107, 1969.

[Dys69b] F. J. Dyson. Non-existence of a phase-transition in a one dimensional ising ferromagnet. *Commun. math. Phys.*, 12 :212–215, 1969.

[EKM11] K. Essafi, J.-P. Kownacki, and D. Mouhanna. Crumpled-to-tubule transition in anisotropic polymerized membranes : Beyond the μ expansion. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :128102, Mar 2011.

[Ess12] K. Essafi. *Non-perturbative Renormalization Group Approach to Polymerized Membranes*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2012.

[Fel00] D. E. Feldman. Quasi-long-range order in the random anisotropy Heisenberg model : Functional renormalization group in $4-\epsilon$ dimensions. *Phys. Rev. B*, 61 :382–390, Jan 2000.

[Fel01] D. E. Feldman. Quasi-Long Range Order in Glass States of Impure Liquid Crystals, Magnets, and Superconductors. *International Journal of Modern Physics B*, 15(22) :2945–2976, 2001.

[FGOV00] Carlos Frontera, Jurgen Goicoechea, Jordi Ortin, and Eduard Vives. Efficient Algorithm for Finding Ground-States in the Random Field Ising Model with an External Field. *Journal of Computational Physics*, 160(1) :117–125, 2000.

[Fis75] M. E. Fisher. Renormalization Group in Critical Phenomena and Quantum Field Theory. Temple University, 1975.

[Fis86a] Daniel S. Fisher. Interface Fluctuations in Disordered Systems : $5-\epsilon$ Expansion and Failure of Dimensional Reduction. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1964–1967, May 1986.

[Fis86b] Daniel S. Fisher. Scaling and critical slowing down in random-field Ising systems. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :416–419, Feb 1986.

[Fis86c] Daniel S. Fisher. Scaling and critical slowing down in random-field Ising systems. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :416–419, Feb 1986.

[FK76] Peter G. O. Freund and Irving Kaplansky. Simple supersymmetries. *Journal of Mathematical Physics*, 17(2) :228–231, 1976.

[FMN72] M. E. Fisher, S. K. Ma, and B.G. Nickel. Critical Exponents for Long-Range Interactions. *Physical Review Letters*, 29(14) :917–920, 1972.

[For82] Peter J. Ford. Spin glasses. *Contemporary Physics*, 23(2) :141–168, 1982.

[FV01] Carlos Frontera and Eduard Vives. An algorithm for finding the first excited state in the random-field ising model. *Journal of Computational Physics*, 168(1) :219 – 226, 2001.

[Gra98] L. N. Granda. Nonperturbative renormalization group for einstein gravity with matter. *EPL (Europhysics Letters)*, 42(5) :487, 1998.

[Gri76] G. Grinstein. Ferromagnetic Phase Transitions in Random Fields : The Breakdown of Scaling Laws. *Phys. Rev. Lett.*, 37 :944–947, Oct 1976.

[GT83] M. A. Gusmao and W. K. Theumann. Validity of the long-range expansion in the n-vector model. *Physical Review B*, 28(11) :6545–6547, December 1983.

[GW95] M. Gräter and C. Wetterich. Kosterlitz-thouless phase transition in the two dimensional linear σ model. *Phys. Rev. Lett.*, 75 :378–381, Jul 1995.

[GW01] G. v. Gersdorff and C. Wetterich. Nonperturbative renormalization flow and essential scaling for the kosterlitz-thouless transition. *Phys. Rev. B*, 64 :054513, Jul 2001.

[GZJ98] R Guida and J Zinn-Justin. Critical exponents of the N -vector model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(40) :8103, 1998.

[Har02] Alexander K. Hartmann. Critical exponents of four-dimensional random-field Ising systems. *Phys. Rev. B*, 65 :174427, May 2002.

[Has01] M. Hasenbusch. Monte carlo studies of the three-dimensional Ising model in equilibrium. *International Journal of Modern Physics C*, 12(07) :911–1009, 2001.

[HH99] H. Hinrichsen and M. Howard. A model for anomalous directed percolation. *The European Physical Journal B - Condensed Matter and Complex Systems*, 7(4) :635–643, 1999.

[HT71] P Hertel and W Thirring. A soluble model for a system with negative specific heat. *Annals of Physics*, 63(2) :520 – 533, 1971.

[IM75] Yoseph Imry and Shang-keng Ma. Random-Field Instability of the Ordered State of Continuous Symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 35 :1399–1401, Nov 1975.

[Imb84] John Z. Imbrie. Lower Critical Dimension of the Random-Field Ising Model. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :1747–1750, Oct 1984.

[JHKC03] Daun Jeong, H. Hong, Beom Jun Kim, and M. Y. Choi. Phase transition in the ising model on a small-world network with distance-dependent interactions. *Phys. Rev. E*, 68 :027101, Aug 2003.

[Joy66] G. S. Joyce. Spherical model with long-range ferromagnetic interactions. *Phys. Rev.*, 146(1) :349–358, june 1966.

[Kad66] L. P. Kadanoff. Scaling laws for ising models near t_c. *Physics*, 2 :263, 1966.

[KLP84] Abel Klein, LawrenceJ. Landau, and J.Fernando Perez. Supersymmetry and the Parisi-Sourlas dimensional reduction : A rigorous proof. *Communications in Mathematical Physics*, 94(4) :459–482, 1984.

[KM09] J.-P. Kownacki and D. Mouhanna. Crumpling transition and flat phase of polymerized phantom membranes. *Phys. Rev. E*, 79 :040101, Apr 2009.

[KMT83] Mehran Kardar, Bruce McClain, and Cyrus Taylor. Dimensional reduction with correlated random fields. A superspace renormalization-group calculation. *Phys. Rev. B*, 27 :5875–5878, May 1983.

[Kos74] J M Kosterlitz. The critical properties of the two-dimensional xy model. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 7(6) :1046, 1974.

[Kos76] J. M. Kosterlitz. Phase Transitions in Long-Range Ferromagnets Chains. *Physical Review Letters*, 37(23) :1577–1580, 1976.

[KP83] Abel Klein and J. Fernando Perez. Supersymmetry and dimensional reduction : A non-perturbative proof. *Physics Letters B*, 125(6) :473–475, 1983.

[KT69] M. Kac and C. J. Thompson. Critical behavior of several lattice models with long-range interactions. *Journal of mathematical physics*, 10(8) :1373–1386, august 1969.

[KT73] J M Kosterlitz and D J Thouless. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 6(7) :1181, 1973.

[Lan37] L. D. Landau. *Phys. Z. Sowjet.*, 11(26), 1937.

[LB97] Erik Luijten and Henk W. J. Blöte. Classical critical behavior of spin models with long-range interactions. *Phys. Rev. B*, 56 :8945–8958, Oct 1997.

[LB99] D. Lynden-Bell. Negative specific heat in astronomy, physics and chemistry. *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications*, 263(1-4) :293–304, 1999.

[LB02] E. Luijten and H. W. J. Blote. Boundary between Long-Range and Short-Range Critical Behavior in Systems with Algebraic Interactions. *Physical Review Letters*, 89(2), July 2002.

[LBW68] D. Lynden-Bell and R. Wood. The gravo-thermal catastrophe in isothermal spheres and the onset of red-giant structure for stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 138 :495, 1968.

[LD09] Yang Liu and Karin A. Dahmen. Unexpected universality in static and dynamic avalanches. *Phys. Rev. E*, 79 :061124, Jun 2009.

[LD10] Pierre Le Doussal. Exact results and open questions in first principle functional rg. *Annals of Physics*, 325(1) :49 – 150, 2010.

[LDW09] Pierre Le Doussal and Kay Jörg Wiese. Size distributions of shocks and static avalanches from the functional renormalization group. *Phys. Rev. E*, 79 :051106, May 2009.

[LDWC02] Pierre Le Doussal, Kay Jörg Wiese, and Pascal Chauve. Two-loop functional renormalization group theory of the depinning transition. *Phys. Rev. B*, 66 :174201, Nov 2002.

[LDWC04] Pierre Le Doussal, Kay Jörg Wiese, and Pascal Chauve. Functional renormalization group and the field theory of disordered elastic systems. *Phys. Rev. E*, 69 :026112, Feb 2004.

[Lit00] Daniel F. Litim. Optimisation of the exact renormalisation group. *Physics Letters B*, 486(1–2) :92–99, 2000.

[Lit02] Daniel F. Litim. Critical exponents from optimised renormalisation group flows. *Nuclear Physics B*, 631(1–2) :128–158, 2002.

[LL69] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Course of theoretical physics : Statistical Physics*, volume 5. 1969.

[LMW09] Pierre Le Doussal, A. Alan Middleton, and Kay Jörg Wiese. Statistics of static avalanches in a random pinning landscape. *Phys. Rev. E*, 79 :050101, May 2009.

[LRR98] Vito Latora, Andrea Rapisarda, and Stefano Ruffo. Lyapunov instability and finite size effects in a system with long-range forces. *Phys. Rev. Lett.*, 80 :692–695, Jan 1998.

[LRR99] Vito Latora, Andrea Rapisarda, and Stefano Ruffo. Superdiffusion and out-of-equilibrium chaotic dynamics with many degrees of freedoms. *Phys. Rev. Lett.*, 83 :2104–2107, Sep 1999.

[LW09] Pierre Le Doussal and Kay Jörg Wiese. Driven particle in a random landscape : Disorder correlator, avalanche distribution, and extreme value statistics of records. *Phys. Rev. E*, 79 :051105, May 2009.

[Ma73] Shang-keng Ma. Critical exponents above T_c to $o(1/n)$. *Phys. Rev. A*, 7 :2172–2187, Jun 1973.

[MD10] T. Machado and N. Dupuis. From local to critical fluctuations in lattice models : A nonperturbative renormalization-group approach. *Phys. Rev. E*, 82 :041128, Oct 2010.

[MF02] A. Alan Middleton and Daniel S. Fisher. Three-dimensional random-field Ising magnet : Interfaces, scaling, and the nature of states. *Phys. Rev. B*, 65 :134411, Mar 2002.

[MG11] Cécile Monthus and Thomas Garel. Random field Ising model : statistical properties of low-energy excitations and equilibrium avalanches. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(07) :P07010, 2011.

[Mon98] James L Monroe. One-dimensional ising models with long-range interactions. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 31(49) :9809, 1998.

[Mor95] Tim R. Morris. The renormalization group and two dimensional multicritical effective scalar field theory. *Physics Letters B*, 345(2) :139–148, 1995.

[MRS05] D. Mukamel, S. Ruffo, and N. Schreiber. Breaking of ergodicity and long relaxation times in systems with long-range interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :240604, Dec 2005.

[MT99] Tim R. Morris and John F. Tighe. Convergence of derivative expansions of the renormalization group. *Journal of High Energy Physics*, 1999(08) :007, 1999.

[Muk10] D. Mukamel. Notes on Statistical Mechanics of Systems with Long-Range Interactions. In T. Dauxois, S. Ruffo, and L. F. Cugliandolo, editors, *Les Houches 2008 Session XC*, New York, 2010. Oxford University Press.

[Nat97] T. Nattermann. *Spin glasses and random fields.* 1997.

[NB70] J F Nagle and J C Bonner. Numerical studies of the ising chain with long-range ferromagnetic interactions. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 3(2) :352, 1970.

[Nin76] F Ninio. A simple proof of the perron-frobenius theorem for positive symmetric matrices. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 9(8) :1281, 1976.

[Ogi86] Andrew T. Ogielski. Integer optimization and zero-temperature fixed point in ising random-field systems. *Phys. Rev. Lett.*, 57 :1251–1254, Sep 1986.

[Opp03] Jonathan Oppenheim. Thermodynamics with long-range interactions : From ising models to black holes. *Phys. Rev. E*, 68 :016108, Jul 2003.

[Par84] G. Parisi. Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics. page 195, 1984.

[Par86] A Parola. A smooth cut-off formulation of the hierarchical reference theory of fluids. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 19(26) :5071, 1986.

[PDS99] Olga Perković, Karin A. Dahmen, and James P. Sethna. Disorder-induced critical phenomena in hysteresis : Numerical scaling in three and higher dimensions. *Phys. Rev. B*, 59 :6106–6119, Mar 1999.

[Pei23] R. E. Peierls. *Helv. Phys. Acta.*, 7 :81, 1923.

[Pei35] R. E. Peierls. *Ann. Inst. Poincare*, 5 :177, 1935.

[Pic12] M. Picco. Critical Behavior of the Ising model with long range interactions. *arXiv :1207.1018*, 2012.

[Pol84] Joseph Polchinski. Renormalization and effective lagrangians. *Nuclear Physics B*, 231(2) :269–295, 1984.

[PPR93a] A. Parola, D. Pini, and L. Reatto. First-order phase transitions, the maxwell construction, and the momentum-space renormalization group. *Phys. Rev. E*, 48 :3321–3332, Nov 1993.

[PPR93b] D. Pini, A. Parola, and L. Reatto. Hierarchical reference theory of fluids : Application to three-dimensional ising model. *Journal of Statistical Physics*, 72(5-6) :1179–1201, 1993.

[PR84] A. Parola and L. Reatto. Liquid-state theory for critical phenomena. *Phys. Rev. Lett.*, 53 :2417–2420, Dec 1984.

[PR95] Alberto Parola and Luciano Reatto. Liquid state theories and critical phenomena. *Advances in Physics*, 44(3) :211–298, 1995.

[PRV03] F. J. Pérez-Reche and Eduard Vives. Finite-size scaling analysis of the avalanches in the three-dimensional Gaussian random-field Ising model with metastable dynamics. *Phys. Rev. B*, 67 :134421, Apr 2003.

[PRV04] Francisco J. Pérez-Reche and Eduard Vives. Spanning avalanches in the three-dimensional Gaussian random-field Ising model with metastable dynamics : Field dependence and geometrical properties. *Phys. Rev. B*, 70 :214422, Dec 2004.

[PS79] G. Parisi and N. Sourlas. Random Magnetic Fields, Supersymmetry, and Negative Dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 43 :744–745, Sep 1979.

[PT06] Harald A. Posch and Walter Thirring. Thermodynamic instability of a confined gas. *Phys. Rev. E*, 74 :051103, Nov 2006.

[PV02] Andrea Pelissetto and Ettore Vicari. Critical phenomena and renormalization-group theory. *Physics Reports*, 368(6) :549–727, 2002.

[PW95] T Papenbrock and C Wetterich. Two-loop results from improved one loop computations. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 65(3) :519–535, 1995.

[Reu98] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev. D*, 57 :971–985, Jan 1998.

[Rue68] D. Ruelle. *Commun. Math. Phys.*, 9 :267, 1968.

[Sak73] J. Sak. Recursion Relations and Fixed Points for Ferromagnets with Long-Range Interactions. *Physical Review B*, 8(1) :281–285, 1973.

[SS85] Moshe Schwartz and A. Soffer. Exact Inequality for Random Systems : Application to Random Fields. *Phys. Rev. Lett.*, 55 :2499–2501, Nov 1985.

[Ste70] G. Stell. Extension pf the ornstein-zernike theory of the critical region. 2. *Phys. Rev. B*, 1(5) :2265–2270, 1970.

[SW99] S Seide and Christof Wetterich. Equation of state near the endpoint of the critical line. *Nuclear Physics B*, 562(3) :524–546, 1999.

[TBT13] Gilles Tarjus, Maxime Baczyk, and Matthieu Tissier. Avalanches and Dimensional Reduction Breakdown in the Critical Behavior of Disordered Systems. *Phys. Rev. Lett.*, 110 :135703, Mar 2013.

[Thi70] W. Thirring. Systems with negative specific heat. *Zeitschrift fÃ$\frac{1}{4}$r Physik*, 235(4) :339–352, 1970.

[Tho69] D. J. Thouless. Long-range order in one-dimensional ising systems. *Physical Review*, 187(2) :732–733, November 1969.

[Tis01] M. Tissier. *Une approche non-perturbative de systèmes frustrés et de systèmes désordonnés*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 2001.

[Tis12] M. Tissier. Extremization problems in field theory, from disordered systems to Yang-Mills theories. 2012.

[TT04a] Gilles Tarjus and Matthieu Tissier. Nonperturbative functional renormalization group for random-field models : The way out of dimensional reduction. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :267008, Dec 2004.

[TT04b] Gilles Tarjus and Matthieu Tissier. Nonperturbative Functional Renormalization Group for Random-Field Models : The Way Out of Dimensional Reduction. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :267008, Dec 2004.

[TT06a] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Unified Picture of Ferromagnetism, Quasi-Long-Range Order, and Criticality in Random-Field Models. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :087202, Mar 2006.

[TT06b] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Unified Picture of Ferromagnetism, Quasi-Long-Range Order, and Criticality in Random-Field Models. *Phys. Rev. Lett.*, 96 :087202, Mar 2006.

[TT08a] Gilles Tarjus and Matthieu Tissier. Nonperturbative functional renormalization group for random field models and related disordered systems. i. effective average action formalism. *Phys. Rev. B*, 78 :024203, Jul 2008.

[TT08b] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Nonperturbative functional renormalization group for random field models and related disordered systems. ii. results for the random field $o(n)$ model. *Phys. Rev. B*, 78 :024204, Jul 2008.

[TT11a] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Supersymmetry and Its Spontaneous Breaking in the Random Field Ising Model. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :041601, Jul 2011.

[TT11b] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Supersymmetry and Its Spontaneous Breaking in the Random Field Ising Model. *Phys. Rev. Lett.*, 107 :041601, Jul 2011.

[TT12a] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Nonperturbative functional renormalization group for random field models and related disordered systems. III. Superfield formalism and ground-state dominance. *Phys. Rev. B*, 85 :104202, Mar 2012.

[TT12b] Matthieu Tissier and Gilles Tarjus. Nonperturbative functional renormalization group for random field models and related disordered systems. IV. Supersymmetry and its spontaneous breaking. *Phys. Rev. B*, 85 :104203, Mar 2012.

[TW94] N. Tetradis and C. Wetterich. Critical exponents from the effective average action. *Nuclear Physics B*, 422(3) :541–592, 1994.

[vE82] A. C. D. van Enter. Instability of phase diagrams for a class of "irrelevant" perturbations. *Physical Review B*, 26(3) :1336–1338, August 1982.

[Vil85a] J. Villain. Equilibrium critical properties of random field systems : new conjectures. *J. Phys. France*, 46(11) :1843–1852, 1985.

[Vil85b] J. Villain. Equilibrium critical properties of random field systems : new conjectures. *J. Phys. France*, 46(11) :1843–1852, 1985.

[Wet91] Christof Wetterich. Average action and the renormalization group equations. *Nuclear Physics B*, 352(3) :529–584, 1991.

[Wet93a] C Wetterich. Improvement of the average action. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 60(3) :461–469, 1993.

[Wet93b] Christof Wetterich. Exact evolution equation for the effective potential. *Physics Letters B*, 301(1) :90–94, 1993.

[Wet93c] Christof Wetterich. The Average action for scalar fields near phase transitions. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 57(3) :451–469, 1993.

[Wet08] C. Wetterich. Functional renormalization for quantum phase transitions with nonrelativistic bosons. *Phys. Rev. B*, 77 :064504, Feb 2008.

[WF72] Kenneth G. Wilson and Michael E. Fisher. Critical exponents in 3.99 dimensions. *Phys. Rev. Lett.*, 28 :240–243, Jan 1972.

[WH73] Franz J. Wegner and Anthony Houghton. Renormalization group equation for critical phenomena. *Phys. Rev. A*, 8 :401–412, Jul 1973.

[Wil71a] Kenneth G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. i. renormalization group and the kadanoff scaling picture. *Phys. Rev. B*, 4 :3174–3183, Nov 1971.

[Wil71b] Kenneth G. Wilson. Renormalization group and critical phenomena. ii. phase-space cell analysis of critical behavior. *Phys. Rev. B*, 4 :3184–3205, Nov 1971.

[Wil75] Kenneth G. Wilson. The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem. *Rev. Mod. Phys.*, 47 :773–840, Oct 1975.

[WK74] Kenneth G. Wilson and J. Kogut. The renormalization group and the ϵ expansion. *Physics Reports*, 12(2) :75–199, 1974.

[WM05] Yong Wu and Jonathan Machta. Ground States and Thermal States of the Random Field Ising Model. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :137208, Sep 2005.

[XBR93] Huang-Jian Xu, Birger Bergersen, and Zoltán Rácz. Long-range interactions generated by random lévy flights : Spin-flip and spin-exchange kinetic ising model in two dimensions. *Phys. Rev. E*, 47 :1520–1524, Mar 1993.

[YA70] G. Yuval and P. W. Anderson. Exact results for the kondo problem : One-body theory and extension to finite temperature. *Phys. Rev. B*, 1 :1522–1528, Feb 1970.

[Yam77] Yoshitake Yamazaki. Critical exponent η of isotropic spin systems with long and short-range interactions. *Physics Letters A*, 61(4) :207 – 210, 1977.

[Yam80] Y. Yamazaki. Critical behaviour of isotropic spin systems with long- and short-range interactions. *Il Nuovo Cimento A*, 55(1) :59–77, 1980.

[Yam03] Yoshiyuki Y. Yamaguchi. Relaxation and diffusion in a globally coupled hamiltonian system. *Phys. Rev. E*, 68 :066210, Dec 2003.

[You77] A P Young. On the lowering of dimensionality in phase transitions with random fields. *Journal of Physics C : Solid State Physics*, 10(9) :L257, 1977.

Publications

Avalanches and Dimensional Reduction Breakdown in the Critical Behavior of Disordered Systems

Gilles Tarjus,* Maxime Baczyk,† and Matthieu Tissier‡

LPTMC, CNRS-UMR 7600, Université Pierre et Marie Curie, Boîte 121, 4 Place Jussieu, 75252 Paris Cédex 05, France

(Received 23 October 2012; published 26 March 2013)

We investigate the connection between a formal property of the critical behavior of several disordered systems, known as "dimensional reduction," and the presence in these systems at zero temperature of collective events known as "avalanches." Avalanches generically produce nonanalyticities in the functional dependence of the cumulants of the renormalized disorder. We show that this leads to a breakdown of the dimensional reduction predictions if and only if the fractal dimension characterizing the scaling properties of the avalanches is exactly equal to the difference between the dimension of space and the scaling dimension of the primary field. This is proven by combining scaling theory and the functional renormalization group. We therefore clarify the puzzle of why dimensional reduction remains valid in random field systems above a nontrivial dimension (but fails below), always applies to the statistics of branched polymer, and is always wrong in elastic models of interfaces in a random environment.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.110.135703 PACS numbers: 64.70.Q−, 11.10.Hi, 75.40.Cx

In the theory of disordered systems, "dimensional reduction" (DR) is the property shared by several models that the long-distance physics in the presence of quenched disorder in some spatial dimension d is the same as that of the pure model with no disorder in a reduced spatial dimension $d-2$. In the known examples where it has been found through perturbation theory, i.e., the random field Ising model (RFIM) [1], elastic manifolds in a random environment [2] (abbreviated below as RM), the random field (RF) and random anisotropy (RA) $O(N)$ models [1,3], and the statistics of dilute branched polymers (BP) [4], it entails two conditions: (1) that the long-distance physics is controlled by a zero-temperature fixed point, so that it can be equally described from the solution (s) of a stochastic field equation at zero temperature ($T=0$), and (2) that an underlying supersymmetry emerges in the field-theoretical treatment of the stochastic equation [5–7]. DR, however, is known to be wrong in the RF and RA models in low enough dimension (a rigorous proof [8] exists for the RFIM in $d=2$ and 3) and the RM model [2]. On the other hand, it is proven to be right for the BP case in all dimensions below the upper critical one [9].

We have recently shown that the breakdown of DR and the spontaneous breaking of the underlying supersymmetry take place below a nontrivial critical dimension [10] in the RF $O(N)$ model: This dimension is close to 5 for the Ising ($N=1$) version and decreases continuously as N increases until it reaches 4 when N approaches 18 (the upper critical dimension is equal to 6 for random field systems) [12–14]. Describing this phenomenon requires a renormalization group (RG) approach that is *functional*, as the origin of the DR breakdown is the appearance of a nonanalytic dependence of the renormalized cumulants of the RF (a linear "cusp") in the dimensionless fields, and *non-perturbative*, as it takes place away from regimes where some form of perturbation analysis is possible (except for the $O(N)$ model when d is close to the lower critical dimension [12,14]). A similar conclusion was previously reached for the RM case, but there the DR predictions fail for all dimensions at and below the upper critical dimension and can be already assessed through a functional but perturbative RG [15–17].

The existence of a cusp in the cumulants of the renormalized disorder can be assigned to the presence of collective events known as "avalanches." In any typical sample of a disordered model, the ground state, which is the relevant configuration that describes the equilibrium properties of the system at $T=0$, abruptly changes for specific (sample-dependent) values of the external source; such a change is precisely an avalanche [18–24]. The same phenomenon is observed, still at $T=0$, when the system is driven by the external source without being allowed to equilibrate. The corresponding avalanches then take place out of equilibrium, between two metastable states of the system [23,25–28]. The fact that abrupt changes corresponding to discontinuous variations of the magnetization (in the language of magnetic systems) are found at $T=0$ should actually come as no surprise. In disordered systems, this can take place even in zero-dimensional models [14]. The central question, which we address in this Letter, is then the following: Under which conditions can avalanches influence the long-distance properties of a given disordered system and lead to a breakdown of DR?

Consider a disordered system of linear size L at $T=0$ in which avalanches are present. We use the language of magnetic systems and characterize configurations by the local magnetization. All considerations, however, apply equally well to configurations described by a continuous field, in or out of equilibrium, and to nonmagnetic systems. We also focus on situations in which the local order

 © 2013 American Physical Society

parameter (the "magnetization") is linearly coupled to the external source J, which for simplicity is taken as uniform in space. The avalanches can then be characterized by their size S (the overall change in the *total* magnetization) whose distribution is described by a density $\rho_L(S, J)$.

The magnetization $m_L(J; \mathbf{h})$ is the spatial average of the local order-parameter field for a given sample characterized by the disorder realization $\mathbf{h}$. Its change between two values of the external source J_1 and J_2 (with, say, $J_2 > J_1$) is the sum of two contributions: A first one comes from the smooth changes in the configuration, and another one comes from the avalanches that take place between J_1 and J_2. As a consequence of the latter, the even moments of the difference $[m_L(J_1; \mathbf{h}) - m_L(J_2; \mathbf{h})]$, which are symmetric in the exchange of J_1 and J_2, display a linear cusp when $J_2 \to J_1$:

$$\overline{[m_L(J_2; \mathbf{h}) - m_L(J_1; \mathbf{h})]^{2p}} = |J_2 - J_1| L^{-2pd} \int_{S_{\min}}^{\infty} dS S^{2p} \rho_L(S, J) + O([J_2 - J_1]^2), \tag{1}$$

where $S_{\min}$ is a microscopic lower cutoff and the overline denotes the average over the quenched disorder.

It is easily realized that the nth moment is obtained by considering disorder averages over n copies of the *same* sample, with each copy coupled to a distinct external source $J_a, a = 1, \ldots, n$. For instance, the second moment is expressible in terms of a two-point Green's function at zero momentum $\tilde{G}_L(q = 0; J_1, J_2) = L^d[\overline{m_L(J_1; \mathbf{h}) m_L(J_2; \mathbf{h})} - \overline{m_L(J_1; \mathbf{h})}\,\overline{m_L(J_2; \mathbf{h})}]$, which is an extension to generic sources $J_1 \neq J_2$ of what is usually called the "disconnected" two-point function in the theory of disordered systems. One-particle irreducible (1PI) correlation functions (or proper vertices) [29] associated with the above Green's functions can be introduced along the same lines. From Eq. (1), with $p = 1$, one immediately derives that, for instance, the two-point Green's function $\tilde{G}_L(q = 0; J_1 = J - \delta J, J_2 = J + \delta J)$ has a nonanalytic dependence as $\delta J \to 0$, with the amplitude of the linear cusp related to the second moment of the avalanches. This can be transposed to the associated 1PI vertices and can be generalized to higher orders as well.

Avalanches, therefore, always induce a linear cusp in the functional dependence of the correlation functions associated with the cumulants of the renormalized disorder at $T = 0$. However, we are interested in situations where avalanches occur on all scales, as found for instance in the RFIM at criticality, in the rough phase or at the depinning transition of a RM, etc.

At large scale, when the correlation length and the extent of the largest typical avalanches have reached the system size L, one expects that the avalanche size distribution can be written in a scaling form [23,24,28,30]:

$$\rho_L(S, J) = \rho_{0,L}(J) S^{-\tau} \mathcal{D}\left(\frac{S}{S_L}, |J - J_c| S^{\psi}\right), \tag{2}$$

where $S_L \sim L^{d_f}$ is the size of the largest typical "critical" avalanches (see Ref. [28] for a careful discussion) which acts as a cutoff for $\mathcal{D}$ that decays exponentially for $S/S_L \gtrsim 1$. The critical conditions correspond to $J = J_c$ (for the RFIM at equilibrium, one has $J_c = 0$ due to the Z_2 symmetry, and, for the RM, there is no condition on J, as the whole phase is critical), and $\rho_{0,L}(J)$ is an overall factor such that $\rho_L(S)/\rho_{0,L}$ is normalized. This factor can be evaluated by considering the so-called "connected" susceptibility $\chi_{c,L}(J)$, which is the standard magnetic susceptibility divided by the temperature and which is obtained by deriving m_L with respect to J. $\chi_{c,L}(J)$ can be expressed as

$$\chi_{c,L}(J) = \chi_{c,L}^{\text{smooth}}(J) + \frac{1}{L^d} \int_{S_{\min}}^{\infty} dS S \rho_L(S, J). \tag{3}$$

For $J = J_c$, $\chi_{c,L}$ goes as $L^{2-\eta}$. Under the natural assumption that the contribution from the avalanches is at least of the order of the smooth one, by using Eqs. (2) and (3) and the fact that the first moment of the avalanches is dominated by large avalanches (which is true when $1 < \tau < 2$, a condition usually fulfilled), one then obtains that $\rho_{0,L}(J_c) L^{-d+(2-\tau)d_f} \sim L^{2-\eta}$. As a result, Eq. (1) leads to $\overline{[m_L(J_2; \mathbf{h}) - m_L(J_1; \mathbf{h})]^{2p}} \sim |J_2 - J_1| L^{2-\eta-(2p-1)(d-d_f)}$. The linear cusp in $\tilde{G}_L(q = 0; J - \delta J, J + \delta J)$ when $\delta J \to 0$ is then found as

$$\tilde{G}_L(q = 0; J_c - \delta J, J_c + \delta J) - \tilde{G}_L(q = 0; J_c, J_c) \sim |\delta J| L^{d_f + 2 - \eta}. \tag{4}$$

The amplitude of the cusp therefore diverges as $L \to \infty$. [One should, however, keep in mind that the whole function $\tilde{G}_L(q = 0)$ itself diverges as $L^{4-\bar{\eta}}$ at criticality.] From Eq. (4), it is easily derived that the associated 1PI correlation function $\Delta_L(q = 0; m_1, m_2)$, which is the second cumulant of the renormalized disorder, also has a cusp in $|m_2 - m_1|$ as $m_2 \to m_1$. Indeed, after introducing $m_1 = m_c - \delta m$ and $m_2 = m_c + \delta m$, where $\delta m \to 0$ and m_c corresponds to the value of the average magnetizationat criticality, and using the relation between Green's functions and 1PI functions [29] as well as $\delta m = \overline{m_L(J_c + \delta J; \mathbf{h})} - \overline{m_L(J_c - \delta J; \mathbf{h})} \simeq \delta J \chi_{c,L}(J_c)$ when $\delta J \to 0$, we derive

$$\Delta_L(q = 0; m_c - \delta m, m_c + \delta m) - \Delta_L(q = 0; m_c, m_c) \simeq \chi_{c,L}(J_c)^{-2}[\tilde{G}_L(q = 0; J_c - \delta J, J_c + \delta J) - \tilde{G}_L(q = 0; J_c, J_c)] \sim |\delta m| L^{d_f - 2(2-\eta)}. \tag{5}$$

As already stressed, the functional RG (FRG) is a powerful and necessary framework to describe the critical behavior of the disordered systems of interest. Within such an approach, which is a version of Wilson's continuous RG [31–34], the fluctuations are progressively taken into

account by introducing an infrared cutoff that enforces the decoupling of the low- and high-momentum modes at a running scale k. Flow equations then describe the evolution as one decreases k, and for $k = 0$ all fluctuations are included. Contrary to the standard RG that considers only a few coupling constants, the FRG accounts for an infinity of couplings through the flow of full functions. Here, one ends up with flow equations for the moments of the renormalized disorder. For instance, an equation is obtained for the second cumulant of the renormalized random field or random force $\Delta_k(q = 0; \phi_1, \phi_2)$ [12–17], which is the quantity already considered in the previous sections, with ϕ and k playing here the same role as the local magnetization m and the inverse system size $1/L$.

In order to reach the fixed point that controls the long-distance behavior under study, one must introduce scaling dimensions and convert the quantities appearing in the RG flow equations from "dimensionful" to "dimensionless." For the cases of interest, we have stressed that the fixed point is at *zero temperature*. Temperature is then a dangerously irrelevant variable, and an associated exponent $\theta > 0$ is introduced through an appropriate definition of a renormalized temperature T_k [12–17,35]: $T_k \sim k^\theta$. Near the zero-temperature fixed point, the dimension d_ϕ of the field ϕ is modified from its standard value of $(d - 2 + \eta)/2$, with η the anomalous dimension, by a term involving the temperature exponent: $d_\phi = (d - 2 + \eta - \theta)/2 = (d - 4 + \bar{\eta})/2$, where we have also introduced the additional anomalous dimension $\bar{\eta}$ through the relation $\theta = 2 + \eta - \bar{\eta}$. Similarly, the second cumulant Δ_k has the scaling dimension of a two-point 1PI vertex $2 - \eta$, modified by the temperature exponent, i.e., $2 - \eta - \theta = -2\eta + \bar{\eta}$; it can be put in dimensionless form as $\Delta_k(q = 0; \phi_1, \phi_2) \sim k^{-(2\eta - \bar{\eta})} \delta_k(0; \varphi_1, \varphi_2)$, where φ is the dimensionless field.

DR corresponds to $\theta = 2$ ($\bar{\eta} = \eta$) and to all other exponents equal to their value in the system without disorder in dimension $d - 2$. The main outcome of the FRG studies is that DR breakdown is related to the presence of a cusp in the functional dependence of the dimensionless second cumulant of the renormalized random field or force $\delta_k(0; \varphi_1, \varphi_2)$ in the vicinity of the $T = 0$ fixed point [12–17]. More concretely, after introducing $\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)/2$ and $\delta\varphi = (\varphi_2 - \varphi_1)/2$, the "cuspy" behavior that changes the critical exponents from their DR prediction is of the form [13,14]

$$\delta_*(0; \varphi - \delta\varphi, \varphi + \delta\varphi) = \delta_{*,0}(\varphi) + \delta_{*,a}(\varphi)|\delta\varphi| + O(\delta\varphi^2), \tag{6}$$

when $\delta\varphi \to 0$, with $\delta_{*,a} < 0$; the star indicates the fixed-point value at $k = 0$. As a result of a nonzero $\delta_{*,a}$, the exponent θ takes a nontrivial d-dependent value <2 and η and $\bar{\eta}$ differ from the dimensional reduction values, with $\bar{\eta} \neq \eta$.

The connection between the quantities computed through the FRG and those previously discussed is made by associating the infrared cutoff k with $1/L$ [34]. Equation (5) can then be expressed in a dimensionless form by dividing the cumulant Δ_L and the magnetization δm by their scaling dimensions $L^{2\eta - \bar{\eta}}$ and $L^{-(d-4+\bar{\eta})/2}$, respectively. We immediately obtain that the amplitude of the linear cusp in dimensionless form scales as

$$L^{d_f - 2(2-\eta) - (2\eta - \bar{\eta}) - (d-4+\bar{\eta})/2} = L^{d_f - (d+4-\bar{\eta})/2}, \tag{7}$$

which can also be rewritten as $L^{d_f - (d - d_\phi)}$. By comparison with Eq. (6), one therefore finds that the cusp persists in the dimensionless quantities when $L \to \infty$, i.e., at the fixed point, *if and only if* $d_f = d - d_\phi$. If $d_f < d - d_\phi$, the cusp is only subdominant and does not affect the leading critical behavior and the associated exponents. (Note that the condition $d_f > d - d_\phi$ is not compatible with the result of the FRG studies, in which proper renormalized theories have always been found with no stronger nonanalyticities than the linear cusp.)

We conclude from the above derivation that DR breaks down *iff* $d_f = d - d_\phi$. On the other hand, DR remains valid if $d_f < d - d_\phi$, despite the presence of the avalanches and of a cusp in the dimensionful cumulants of the effective disorder at $T = 0$. In the latter case, the difference $(d - d_\phi - d_f)$ can be reinterpreted and computed in the FRG: When perturbing the "cuspless" fixed-point value of the dimensionless cumulant with a function that itself displays a linear cusp, the amplitude of the cuspy perturbation should go to zero as $k \to 0$ so that

$$\delta_k(0; \varphi - \delta\varphi, \varphi + \delta\varphi) \simeq \delta_*(0; \varphi - \delta\varphi, \varphi + \delta\varphi) + k^\lambda f_\lambda(\varphi, \delta\varphi), \tag{8}$$

with $\lambda = (d - d_\phi) - d_f > 0$ and $f_\lambda(\varphi, \delta\varphi) \simeq |\delta\varphi| f_\lambda(\varphi)$ when $\delta\varphi \to 0$. The fractal dimension d_f can then be obtained from an investigation of the irrelevant directions associated with nonanalytic eigenfunctions around the fixed point. This is what we have done by solving the nonperturbative FRG equations derived in Ref. [14] for a function δ_k of the form given in Eq. (8) (see the Supplemental Material [36]).

We are now in a position to discuss the consequences of the above conditions for several systems in which DR is predicted by standard perturbation theory. Consider first the mean-field limit. The exponents τ and d_f in Eq. (2) can easily be derived for fully connected models [30], and one finds $\tau = 3/2$ and $d_f = 4$ [37]. At the upper critical dimension $d_{\rm uc}$, the anomalous dimension $\bar{\eta} = 0$ so that $d_\phi = (d_{\rm uc} - 4)/2$. One should thus compare $d_f = 4$ and $d - d_\phi = d_{\rm uc}/2 + 2$. For RF and RA models (we include here models with N-component fields which we expect to behave in a similar manner as that of the single-component one), $d_{\rm uc} = 6$ so that DR should apply.

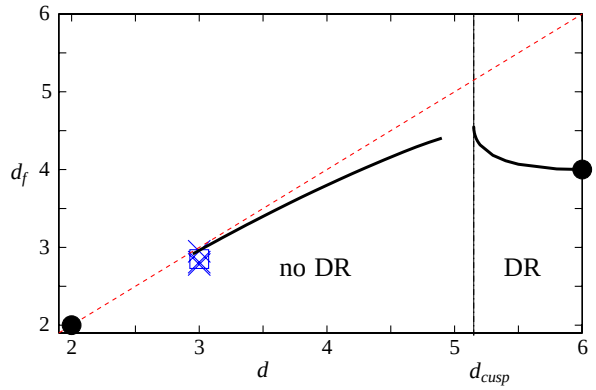

FIG. 1 (color online). Theoretical prediction for the avalanche fractal dimension d_f versus d for the equilibrium RFIM. Filled circles indicate the known values at $d_{\rm lc}$ and $d_{\rm uc}$; The crosses and square are the numerical estimates for the out-of-equilibrium [23,27,28] and equilibrium [23] behaviors in $d = 3$, respectively. The dashed line is the upper bound ($d_f \leq d$). The numerical resolution of the FRG flow equations becomes extremely difficult in low dimension, typically for $d \lesssim 2.9$, and when approaching $d_{\rm DR} \simeq d_{\rm cusp} \simeq 5.1$ from below, so that we have no results there.

The same is true for the BP statistics for which $d_{\rm uc} = 8$ [39]. On the other hand, for the RM case, $d_{\rm uc} = 4$: A failure of DR is then expected, possibly only in logarithmic corrections at $d = d_{\rm uc}$ but more severe as one lowers the dimension.

Below $d_{\rm uc}$, there must be a nonzero range of dimensions for which the DR predictions correctly describe the critical behavior of the RF, RA, and BP models but likely not that of the RM one. Actually, the latter has been studied in great detail through the perturbative FRG in $d = 4 - \epsilon$ [19,25,38]. It was found that d_f is equal to $d + \zeta$, where ζ is the exponent describing the roughness of the interface (for a single-component displacement field). As the dimension d_ϕ of the field is itself equal to $-\zeta$, it follows that the equality $d_f = d - d_\phi$ is always verified and that DR never applies, as indeed found by direct computation of the critical exponents within the FRG or in computer simulations. This conclusion is valid for the pinned phase, in equilibrium, and for the depinning threshold in the driven case.

For the RFIM at equilibrium, we have shown through a nonperturbative FRG that DR breaks down below a nontrivial dimension $d_{\rm cusp} \simeq 5.1$ [10,13,14]. According to the above conditions, the avalanche exponent d_f should then be equal to $d - d_\phi = (d + 4 - \bar{\eta})/2$ below $d_{\rm cusp}$ and to $(d + 4 - \bar{\eta})/2 - \lambda$, where λ is the eigenvalue associated with the irrelevant cuspy directions around the cuspless fixed point, above $d_{\rm cusp}$. In Fig. 1, we plot the theoretical prediction for d_f based on the above relations and on the computation of d_ϕ and λ from the solution of the nonperturbative FRG flow equations [14] (see the Supplemental Material [36]). At the lower critical dimension, $d_{\rm lc} = 2$, one expects the avalanches to be compact even at criticality, with therefore $d_f = d = 2$ (see also Ref. [27]). As $d_\phi = 0$, one then finds that $d_f = d - d_\phi$, as predicted.

Finally, for the BP statistics, so long as DR applies, $\bar{\eta} = 2\eta$ and is negative. In consequence, $d - d_\phi = d + 4 - \bar{\eta} > d + 4$. As the fractal dimension d_f should also be less than the dimension of the embedding space, one can see that $d_f \leq d < (d + 4)/2$ when $d \lesssim 4$. We therefore conclude that DR applies, at least, when $d \leq 4$ and in the vicinity of the upper critical dimension $d_{\rm uc} = 8$ (see above); the existence of an intermediate range of dimensions characterized by DR breakdown is highly unlikely. This is of course in agreement with the known exact results [9].

To summarize, we have related the breakdown of DR to the scaling characteristics of avalanches and clarified that the intriguing result of why DR fails below a nontrivial dimension for the RFIM is always broken for random elastic manifolds but applies to the branched-polymer problem. Already, in this latter example, the present results and formalism go beyond the realm of disordered systems. They may also be useful in other quite different contexts, such as turbulence, structural glasses, hysteresis in a variety of materials, socioeconomic phenomena, or non-Abelian gauge theories.

*tarjus@lptmc.jussieu.fr
†baczyk@lptmc.jussieu.fr
‡tissier@lptmc.jussieu.fr

[1] A. Aharony, Y. Imry, and S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **37**, 1364 (1976); G. Grinstein, Phys. Rev. Lett. **37**, 944 (1976); A. P. Young, J. Phys. C **10**, L257 (1977).
[2] K. B. Efetov and A. I. Larkin, Sov. Phys. JETP **45**, 1236 (1977).
[3] D. S. Fisher, Phys. Rev. B **31**, 7233 (1985).
[4] We include the BP problem in the list of disordered systems by an abuse of language, as the equivalence comes from the $n \to 0$ limit which is common to the field-theoretical description of self-avoiding polymer chains and to the replica theory of disordered systems. DR then leads to the Yang-Lee edge singularity in dimension $d - 2$ [5].
[5] G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **46**, 871 (1981).
[6] G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
[7] K. J. Wiese, J. Phys. Condens. Matter **17**, S1889 (2005).
[8] J. Z. Imbrie, Phys. Rev. Lett. **53**, 1747 (1984); J. Bricmont and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **59**, 1829 (1987).
[9] D. C. Brydges and J. Z. Imbrie, J. Stat. Phys. **110**, 503 (2003); Ann. Math. **158**, 1019 (2003).
[10] Actually, the two phenomena take place at two very close but distinct critical dimensions $d_{\rm DR}$ and $d_{\rm cusp}$, with $d_{\rm DR} \lesssim d_{\rm cusp}$; the former represents the point at which supersymmetry is spontaneously broken along the flow and the DR fixed point vanishes, and the latter is where the DR fixed point becomes unstable to a nonanalytic perturbation. For

the RFIM, the two are numerically almost indistinguishable, and, for the RF $O(N)$ model, one finds $N_{\mathrm{DR}} = 18$ and $N_{\mathrm{cusp}} = 18.393$ when approaching $d = 4$ [11].

[11] G. Tarjus, M. Baczyk, and M. Tissier (to be published).
[12] G. Tarjus and M. Tissier, Phys. Rev. Lett. **93**, 267008 (2004); Phys. Rev. B **78**, 024203 (2008).
[13] M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett. **96**, 087202 (2006); Phys. Rev. B **78**, 024204 (2008).
[14] M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett. **107**, 041601 (2011); Phys. Rev. B **85**, 104202 (2012); **85**, 104203 (2012).
[15] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 1964 (1986).
[16] O. Narayan and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 11 520 (1992).
[17] P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve, Phys. Rev. B **66**, 174201 (2002); Phys. Rev. E **69**, 026112 (2004); P. Le Doussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 051106 (2009).
[18] A. A. Middleton, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, Phys. Rev. Lett. **98**, 155701 (2007).
[19] P. Le Doussal, A. A. Middleton, and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 050101 (2009).
[20] L. Balents, J.-P. Bouchaud, and M. Mezard, J. Phys. I (France) **6**, 1007 (1996).
[21] C. Frontera, J. Goicoechea, J. Ortin, and E. Vives, J. Comput. Phys. **160**, 117 (2000).
[22] I. Dukovski and J. Machta, Phys. Rev. B **67**, 014413 (2003); Y. Wu and J. Machta, Phys. Rev. Lett. **95**, 137208 (2005); Phys. Rev. B **74**, 064418 (2006).
[23] Y. Liu and K. A. Dahmen, Phys. Rev. E **76**, 031106 (2007); **79**, 061124 (2009).
[24] C. Monthus and T. Garel, J. Stat. Mech. 07 (2011) P07010.
[25] A. Rosso, P. Le Doussal, and K. J. Wiese, Phys. Rev. B **75**, 220201 (2007); **80**, 144204 (2009).
[26] S. Zapperi, P. Cizeau, G. Durin, and H. E. Stanley, Phys. Rev. B **58**, 6353 (1998).
[27] O. Perković, K. A. Dahmen, and J. P. Sethna, Phys. Rev. B **59**, 6106 (1999); J. P. Sethna, K. A. Dahmen, and C. R. Myers, Nature (London) **410**, 242 (2001).
[28] F. J. Perez-Reche and E. Vives, Phys. Rev. B **67**, 134421 (2003); **70**, 214422 (2004).
[29] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford University Press, New York, 1989).
[30] K. A. Dahmen and J. P. Sethna, Phys. Rev. B **53**, 14 872 (1996).
[31] K. G. Wilson and J. Kogut, Phys. Rep. **12**, 77 (1974).
[32] F. J. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).
[33] J. Polchinski, Nucl. Phys. **B231**, 269 (1984).
[34] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993); J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).
[35] J. Villain, Phys. Rev. Lett. **52**, 1543 (1984); D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 416 (1986).
[36] See Supplemental Material at http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.110.135703 for a summary of the nonperturbative FRG for the RFIM and the analysis of the stability of the dimensional-reduction fixed point.
[37] These values have also been recovered for the RM model from a field-theoretical treatment [38].
[38] P. Le Doussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 051105 (2009); **79**, 051106 (2009); **85**, 061102 (2012).
[39] T. C. Lubensky and J. Isaacson, Phys. Rev. Lett. **41**, 829 (1978); Phys. Rev. A **20**, 2130 (1979).

Dimensional reduction and its breakdown in the three-dimensional long-range random-field Ising model

Maxime Baczyk,[*] Matthieu Tissier,[†] and Gilles Tarjus[‡]
LPTMC, CNRS-UMR 7600, Université Pierre et Marie Curie, boîte 121, 4 Pl. Jussieu, 75252 Paris cédex 05, France

Yoshinori Sakamoto[§]
Laboratory of Physics, College of Science and Technology, Nihon University, 7-24-1, Narashino-dai, Funabashi-city, Chiba, 274-8501, Japan
(Received 11 March 2013; published 22 July 2013)

We investigate dimensional reduction, the property that the critical behavior of a system in the presence of quenched disorder in dimension d is the same as that of its pure counterpart in $d-2$, and its breakdown in the case of the random-field Ising model in which both the interactions and the correlations of the disorder are long ranged, i.e., power-law decaying. To some extent the power-law exponents play the role of spatial dimension in a short-range model, which allows us to probe the theoretically predicted existence of a nontrivial critical value separating a region where dimensional reduction holds from one where it is broken, while still considering the physical dimension $d=3$. By extending our recently developed approach based on a nonperturbative functional renormalization group combined with a supersymmetric formalism, we find that such a critical value indeed exists, provided one chooses a specific relation between the decay exponents of the interactions and of the disorder correlations. This transition from dimensional reduction to its breakdown should therefore be observable in simulations and numerical analyses, if not experimentally.

DOI: 10.1103/PhysRevB.88.014204 PACS number(s): 11.10.Hi, 75.40.Cx

I. INTRODUCTION

The random-field Ising model (RFIM) is a prototypical example of a system in which the presence of quenched disorder has a drastic effect on the collective behavior.[1,2] While long-range ferromagnetic order is still observed above a critical dimension, as in the pure Ising model, the properties of the associated critical point are strongly modified by the random field. In a renormalization group (RG) setting, the temperature is irrelevant at the fixed point, and the long-distance physics is therefore dominated by disorder-induced, sample-to-sample fluctuations rather than by thermal fluctuations.[3,4] This leads to anomalous scaling relations due to the existence of an additional critical exponent associated with temperature, a shift of the lower and upper critical dimensions, a very slow spatial decay of the correlation functions at criticality, and a very strong slowing down of the dynamics close to the critical point that can be described in terms of an unconventional activated dynamic scaling.[2,4,5]

One of the puzzles about the critical behavior of the RFIM was the property of *dimensional reduction*, according to which the behavior in the presence of a random field is the same as that of the pure system in two dimensions less. This property, found to all orders in conventional perturbation theory[6–8] and also nonperturbatively derived as a consequence of an underlying supersymmetry of the model at zero temperature,[9–11] was proven to be wrong in $d=3$.[12,13] From the supersymmetric approach, it was understood that the failure was related to the presence of metastable states, i.e., of multiple extrema of the bare action (microscopic hamiltonian) in the region of interest.[14] However, no further progress had been made.

We found a resolution of the dimensional-reduction puzzle by means of a *nonperturbative functional RG* (NP-FRG) approach, showing that, as in the simpler case of a pinned interface in a random environment where a perturbative FRG analysis is sufficient,[15–21] the breakdown of dimensional reduction is related to the appearance of a singularity in the functional dependence of the cumulants of the renormalized disorder, with, however, the singularity becoming too weak to cause a failure of dimensional reduction above a nontrivial critical dimension $d \simeq 5.1$.[22,23] More recently, we also showed that the dimensional reduction breakdown is related to a spontaneous breaking of the underlying supersymmetry along the RG flow[24–26] and that it is physically associated with the large-scale properties of the avalanches characterizing the behavior of the system at zero temperature.[28]

Whereas the whole description obtained through the NP-FRG is consistent and leads to predictions, e.g., for the critical exponents in $d=3$ and 4, that are in good agreement with computer simulations and ground-state numerical studies, directly accessing the properties of the RFIM at and around the critical dimension of 5.1 is not feasible by computer studies (not to mention experiments!). The goal of the present work is to provide a way to get around this problem and to allow for a direct study of a three-dimensional system. To this end, we consider a RFIM with long-range interactions and long-range correlations of the random field. The interest in long-range models has a long history and comes from the fact that the presence of long-range, power-law decaying, interactions decreases the lower critical dimension of a model and that varying the exponent of the power law in a fixed dimension allows one to find a spectrum of critical behavior that goes from mean field for truly long-range interactions to the absence of transition for short-range decay while spanning a continuous range of nonclassical behavior in between. In some sense, changing the exponent of the power law at fixed dimension is like changing the dimension in a short-range model.

To study dimensional reduction and its breakdown, one must introduce not only long-range interactions but also long-range correlations of the random field. As will be explained in more detail below, this is the only way to produce

 ©2013 American Physical Society

a supersymmetry in the field theory at zero temperature and therefore to possibly generate a dimensional reduction property. In addition, the exponents characterizing the decay of the interactions and of the disorder correlations have to be related in a specific manner. The problem can then be tackled through an extension of the NP-FRG approach combined with the supersymmetric formalism, which we have previously developed for the short-range RFIM.[24–26] The main outcome of the theory is that there is a nontrivial critical value of the power exponent describing the spatial decay of the interactions that separate a domain where dimensional reduction is valid (for longer-range interactions) from a domain where it is not (for shorter-range interactions). This opens the way to a direct check of the transition between the presence and the absence of dimensional reduction in the critical behavior of the RFIM in the physically and technically accessible dimension $d = 3$.

II. LONG-RANGE MODEL AND SUPERSYMMETRY

The model that we investigate is the field-theoretical version of the RFIM with long-range interactions and disorder correlations, with bare action (Hamiltonian)

$$\begin{aligned} S[\varphi;h] &= S_B[\varphi] - \int_x h(x)\varphi(x) \\ &= -\frac{1}{2}\int_x\int_y \lambda(x-y)\varphi(x)\varphi(y) \\ &\quad + \int_x \left[\frac{r}{2}\varphi(x)^2 + \frac{u}{4!}\varphi(x)^4 - h(x)\varphi(x)\right], \end{aligned} \tag{1}$$

where $\int_x \equiv \int d^d x$ and the interaction goes as $\lambda(x-y) \sim |x-y|^{-(d+\sigma)}$ when $|x-y| \gg 1$, with $\sigma > 0$, $h(x)$ is a random source (a random magnetic field) that is taken with a Gaussian distribution characterized by a zero mean and a variance $\overline{h(x)h(y)} = \Delta(x-y) \sim |x-y|^{-(d-\rho)}$ when $|x-y| >> 1$. For $\sigma \geqslant 2$, one obviously recovers a model with short-range interactions and a similar reasoning applies for $\rho \leqslant 0$.

Let us repeat the steps of the Parisi-Sourlas supersymmetric construction.[9] The critical behavior being controlled by a zero-temperature fixed point,[3,4] one can focus on the ground-state configuration, which is a solution of the stochastic field equation

$$\frac{\delta S[\varphi;h]}{\delta\varphi(x)} = J(x), \tag{2}$$

where J is an external source (a magnetic field) conjugate to the φ field. When the solution is unique, which is precisely the crux of the problem and will be addressed later on, the equilibrium (Green's) correlation functions of the φ field are obtained from the generating functional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_h[\hat{J},J] &= \int \mathcal{D}\varphi\, \delta\left(\frac{\delta S_B[\varphi]}{\delta\varphi} - h - J\right) \left|\det \frac{\delta^2 S_B[\varphi]}{\delta\varphi\delta\varphi}\right| \\ &\quad \times \exp\int_x \hat{J}(x)\varphi(x). \end{aligned} \tag{3}$$

Because of the assumed uniqueness of the solution, the absolute value of the determinant present in the right-hand side can be dropped and the functional can be built through standard field-theoretical techniques.[29] One introduces an auxiliary bosonic "response" field $\hat{\varphi}(x)$ to exponentiate the delta functional and two auxiliary fermionic "ghost" fields $\psi(x)$ and $\bar{\psi}(x)$ to exponentiate the determinant. In the resulting form, the average of the Gaussian random field can be explicitly performed and one obtains

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\hat{J},J,\bar{K},K] &= \overline{\mathcal{Z}_h[\hat{J},J,\bar{K},K]} \\ &= \int \mathcal{D}\varphi\mathcal{D}\hat{\varphi}\mathcal{D}\psi D\bar{\psi} \exp\Big\{-S_{ss}[\varphi,\hat{\varphi},\psi,\bar{\psi}], \\ &\quad + \int_x [\hat{J}(x)\varphi(x) + \psi(x)\bar{K}(x) \\ &\quad + K(x)\bar{\psi}(x) + J(x)\hat{\varphi}(x)]\Big\}, \end{aligned} \tag{4}$$

where two fermionic sources, $\bar{K}(x)$ and $K(x)$, linearly coupled to the ghost fields have been introduced and

$$\begin{aligned} S_{ss} &= \int_x \hat{\varphi}(x)\frac{\delta S_B[\varphi]}{\delta\varphi(x)} - \int_x\int_y \bar{\psi}(x)\frac{\delta^2 S_B[\varphi]}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)}\psi(y) \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_x\int_y \hat{\varphi}(x)\Delta(x-y)\hat{\varphi}(y). \end{aligned} \tag{5}$$

The φ-field connected correlation functions of the original problem are obtained from functional derivatives of $W[\hat{J},J,\bar{K},K] = \ln \mathcal{Z}[\hat{J},J,\bar{K},K]$ with respect to $\hat{J}$ that are further evaluated for $K = \hat{K} = \hat{J} = 0$.

The next step of the construction is to introduce a "superspace" by adding to the d-dimensional Euclidean space with coordinates $x = \{x^\mu\}$ two anticommuting Grassmann coordinates $\theta,\bar{\theta}$ (satisfying $\theta^2 = \bar{\theta}^2 = \theta\bar{\theta} + \bar{\theta}\theta = 0$),[29] so that the original field and the auxiliary fields can be grouped in a single "superfield" $\Phi(\underline{x}) = \varphi(x) + \bar{\theta}\psi(x) + \bar{\psi}(x)\theta + \bar{\theta}\theta\hat{\varphi}(x)$, where $\underline{x} = (x,\theta,\bar{\theta})$ denotes the coordinates in superspace. A similar procedure applies to the sources that can be grouped in a single "supersource" $\mathcal{J}(\underline{x})$. At this stage, we leave unspecified the metric of the superspace. By using the properties of the Grassmann variables, Eq. (4) can then be rewritten in the following compact form:

$$\mathcal{Z}[\mathcal{J}] = \int \mathcal{D}\Phi \exp\left[-S_{ss}[\Phi] + \int_{\underline{x}} \mathcal{J}(\underline{x})\Phi(\underline{x})\right], \tag{6}$$

where

$$\begin{aligned} S_{ss}[\Phi] &= \int_{\underline{x}}\left[\frac{r}{2}\Phi(\underline{x})^2 + \frac{u}{4!}\Phi(\underline{x})^4\right] + \frac{1}{2}\int_x\int_y\int_{\underline{\theta}} \Phi(x,\underline{\theta}) \\ &\quad \times [-\lambda(x-y) - \Delta(x-y)\partial_\theta\partial_{\bar{\theta}}]\Phi(y,\underline{\theta}) \end{aligned} \tag{7}$$

and $\int_{\underline{\theta}} \equiv \iint d\theta d\bar{\theta}$ and $\int_{\underline{x}} \equiv \int_x \int_{\underline{\theta}}$.

To describe the long-distance physics, one needs information only about the low-momentum behavior of the Fourier transform of the long-range functions, $\tilde{\lambda}(q)$ and $\tilde{\Delta}(q)$, namely,

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(q) &= \tilde{\lambda}(0) - Z_{\rm LR}\,(q^2)^{\frac{\sigma}{2}} - Z\,q^2 + \cdots, \\ \tilde{\Delta}(q) &= \Delta_{\rm LR}\,(q^2)^{-\frac{\rho}{2}} + \Delta + \cdots, \end{aligned} \tag{8}$$

where the higher-order terms in q^2 indicated by the ellipses have been dropped as irrelevant. The above expressions have their counterpart in real space in terms of fractional derivatives.

For the short-range model, with $Z_{\rm LR} = \Delta_{\rm LR} = 0$, terms in the interaction and in the disorder correlation can be

combined to form a "super-Laplacian" in superspace with an appropriately chosen metric.[9] To find the conditions under which this can be generalized to the long-range case, it proves more convenient to work in Fourier space for both the Euclidean and the Grassmann variables. After introducing $\underline{\eta},\bar{\eta}$ as the Grassmann "momenta" conjugate to the coordinates $\theta,\bar{\theta}$ (a standard definition of the Fourier transform in Grassmann space is used[29]), we rewrite the action $S_{ss}[\Phi]$ in Eq. (7) as

$$S_{ss}[\Phi] = \int_{\underline{x}} U_B[\Phi(\underline{x})] + \frac{1}{2}\int_q \int_{\underline{\eta}} \Phi(-q,\underline{\eta})\big\{Z_{\rm LR}\,(q^2)^{\frac{\sigma}{2}} + Zq^2 - \bar{\eta}\eta\big[\Delta_{\rm LR}\,(q^2)^{-\frac{\rho}{2}} + \Delta\big]\big\}\Phi(q,\underline{\eta}), \tag{9}$$

where $\int_q \equiv \int d^dq/(2\pi)^d$, $\underline{\eta} \equiv \{\eta,\bar{\eta}\}$, $\int_{\underline{\eta}} \equiv \iint d\eta d\bar{\eta}$, and $U_B(\Phi) = (\tau/2)\Phi^2 + (u/4!)\Phi^4$ with $\tau = r - \tilde{\lambda}(0)$.

Assume now an extension of the short-range case with a "supermetric" $d\underline{x}^2 = dx^\mu dx^\mu + Cd\theta d\bar{\theta}$, with C an unknown parameter to be determined, and the associated "super-Laplacian" $\Delta_{ss} = \partial_\mu\partial_\mu + (4/C)\partial_\theta\partial_{\bar{\theta}}$. The squared norm of a "supermomentum" $\underline{q} = \{q,\underline{\eta}\}$ is then given by $\underline{q}^2 = q^2 + (4/C)\eta\bar{\eta}$. It is now straightforward to check that the long-range components of the interaction, $Z_{\rm LR}\,(q^2)^{\sigma/2}$, and of the disorder correlation, $\Delta_{\rm LR}\,(q^2)^{-\rho/2}$, can be combined as a power of $\underline{q}^2$ if and only if

$$\rho = 2 - \sigma \tag{10}$$

and if the parameter C of the supermetric is chosen appropriately. Then,

$$Z_{\rm LR}\,(\underline{q}^2)^{\frac{\sigma}{2}} = Z_{\rm LR}\,(q^2)^{\frac{\sigma}{2}}\left[1 + \eta\bar{\eta}\,\frac{4\sigma}{2C}\,(q^2)^{-1}\right] = Z_{\rm LR}\,(q^2)^{\frac{\sigma}{2}} - \bar{\eta}\eta\,\frac{4\sigma\,Z_{\rm LR}}{2C}\,(q^2)^{-\frac{\rho}{2}}, \tag{11}$$

which corresponds to the long-range term in the action if one chooses $C = 2\sigma Z_{\rm LR}/\Delta_{\rm LR}$.

If one also considers the short-range contributions to the interaction and the disorder correlation, an additional condition is required, that relates Z and Δ as

$$\Delta = \left(\frac{2\,\Delta_{\rm LR}}{\sigma\,Z_{\rm LR}}\right) Z\,, \tag{12}$$

and this can be generalized to include higher powers in momenta (see the conclusion). Under the above conditions, the action $S_{ss}[\Phi]$ can now be reexpressed as

$$S_{ss}[\Phi] = \int_{\underline{x}} U_B[\Phi(\underline{x})] + \frac{1}{2}\int_q \int_{\underline{\eta}} \Phi(-q,\underline{\eta}) \times \big[Z_{\rm LR}\,(\underline{q}^2)^{\frac{\sigma}{2}} + Z\underline{q}^2\big]\Phi(q,\underline{\eta}), \tag{13}$$

which is the generalization to superspace and superfield of a φ^4 action in Euclidean space with long-range interaction and no disorder. (Note that when $Z_{\rm LR}$ and Z are different from zero, they can simply be set to 1 by a simple rescaling of the fields and momenta.)

As in the short-range case, the above action is invariant under a large group of both bosonic and fermionic symmetries (the latter symmetries mixing bosonic and fermionic fields).[25] Of special importance is the supersymmetry associated with the orthosymplectic group OSp(2,d)[30] that contains the "super-rotations" that preserve the metric of the superspace. As a result of the latter, it can be shown, both perturbatively[9] and nonperturbatively,[10,11] that the superfield theory with action $S_{ss}[\Phi]$ for a Euclidean dimension d reduces to the simple field theory with action $S_{ss}[\varphi]$ in dimension $d-2$. If the superfield theory indeed correctly describes the critical behavior of the long-range RFIM this proves the dimensional-reduction property. One knows, however, that the Parisi-Sourlas construction breaks down when there are multiple solutions of the stochastic field equation.[14,31] This problem was previously resolved by two of us for the short-range RFIM,[25,26] and we extend the proposed formalism to the long-range case below.

Before presenting the nonperturbative functional RG used to describe the long-distance physics, we recall a few known predictions of the critical behavior of the long range. We need to first introduce a few definitions. As alluded to in Introduction, the critical behavior of the RFIM, be it short or long range, is controlled by a zero-temperature fixed point. The renormalized temperature is therefore irrelevant and characterized by a critical exponent $\theta > 0$. As a result, the spatial decay of the correlations at criticality are described by two "anomalous" dimensions instead of one. The "connected" pair correlation (Green's) function behaves as[2]

$$\overline{\langle\varphi(x)\varphi(y)\rangle - \langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(y)\rangle} \sim \frac{T}{|x-y|^{d-2+\eta}}, \tag{14}$$

whereas the "disconnected" one, which survives at zero temperature, behaves as

$$\overline{\langle\varphi(x)\rangle\langle\varphi(y)\rangle} \sim \frac{1}{|x-y|^{d-4+\bar{\eta}}} \tag{15}$$

with $2\eta \geqslant \bar{\eta} \geqslant \eta$ and $\theta = 2 + \eta - \bar{\eta}$.

Consider now the long-range RFIM in $d = 3$ with $\rho = 2 - \sigma$, which represents the case of interest in the present study. From the results of Ref. 32, one expects several regimes for the critical behavior of the model according to the value of the exponent σ: (i) for $\sigma < 1/2$, a mean-field regime with classical exponents; $\sigma = 1/2$ therefore plays the role of an upper critical dimension. (ii) For $1/2 < \sigma < 1$, a long-range regime with the anomalous dimensions fixed to $\bar{\eta} = \eta = 2 - \sigma$, but nontrivial values of the other critical exponents. (This regime corresponds to the long-range exchange and random-field correlation regime in Bray's terminology.[32]) (iii) For $\sigma > 1$, no phase transition; $\sigma = 1$ therefore plays the role of a lower critical dimension.

Contrary to the generic case studied by Bray, there are no other regimes, in particular no short-range regime, with the specific conditions $\rho = 2 - \sigma$, $d = 3$. Dimensional reduction implies that the critical behavior of the model is the same as that of the pure, long-range interaction Ising model in $d = 1$. For this latter system, one also expects that the "upper critical" value of σ is 1/2 and that the "lower critical" one is 1, with no short-range regime. Note finally that the long-range RFIM in $d = 2$ is not interesting for the present investigation, as, when the underlying super-rotational invariance is satisfied, there is no range of σ for which it displays a nonclassical (non-mean-field) critical behavior.

III. NP-FRG FOR THE LONG-RANGE MODEL

The theoretical approach that we use for investigating the critical behavior of the long-range RFIM relies on the NP-FRG formalism previously developed for the short-range RFIM.[24–26] It combines four main ingredients: (1) *a replica or multicopy formalism* in which the permutational symmetry among replicas is explicitly broken by introducing linear sources acting independently on each copy of the original system. Using expansions in the number of unconstrained (or "free") replica sums then gives us access to the cumulants of the renormalized disorder with their full functional dependence, which allows for the emergence of a nonanalytic behavior in the field arguments.[22,23,25]

(2) *An extension of the Parisi-Sourlas superfield construction in the presence of metastable states.* We introduce a weighting factor $\exp(-\beta S)$, involving an auxiliary temperature β^{-1}, to the solutions of the stochastic field equation (2) when constructing the generating functional $\mathcal{Z}$. When β^{-1} approaches 0, only the ground state, i.e., the state with minimum energy or bare action, contributes to the functional, as desired.

(3) *An exact functional RG formalism.* It is a version of Wilson's continuous RG in which one follows the evolution of the "effective average action," which is the generating functional of the *one*-particle irreducible (1PI) correlation functions. The flow with a running infrared (IR) scale k, from the bare action at the microscopic scale ($k = \Lambda$) to the full effective action at macroscopic scale ($k = 0$), is governed by an exact RG equation.[33,34]

(4) *A nonperturbative supersymmetry-compatible approximation scheme for the effective average action.* It involves truncations in the "derivative expansion," i.e., the expansion in the number of spatial derivatives of the fundamental fields, and in the "expansion in the number of free replica sums," i.e., the cumulant expansion, and leads to a closed set of coupled NP-FRG equations that can be solved numerically. Note that the derivative expansion is generalized here to account for the long-range nature of the interactions and disorder correlations.

Steps (1) and (2) above lead, via the usual field-theoretical techniques[29] and an extension of the derivation in Sec. II, to a superfield theory for an arbitrary number n of copies in a curved superspace. The generating functional that generalizes Eq. (6) is then expressed as

$$\mathcal{Z}^{(\beta)}[\{\mathcal{J}_a\}] = \int \prod_{a=1}^{n} \mathcal{D}\Phi_a \exp\left[-S^{(\beta)}[\{\Phi_a\}] + \sum_{a=1}^{n} \int_{\underline{x}} \mathcal{J}_a(\underline{x})\Phi_a(\underline{x})\right], \tag{16}$$

and the multicopy action is given by

$$\begin{aligned} S^{(\beta)}[\{\Phi_a\}] &= \sum_a \int_{\underline{x}} \Big\{ \frac{1}{2}\Phi_a(\underline{x})[Z_{\rm LR}\,(-\partial^2)^{\sigma/2} - Z\,\partial^2]\Phi_a(\underline{x}) \\ &\quad + U_B[\Phi_a(\underline{x})]\Big\} - \sum_{a,b} \frac{1}{2}\int_x \int_{\underline{\theta}_1\underline{\theta}_2} \{\Phi_a(x,\underline{\theta}_1) \\ &\quad \times [\Delta_{\rm LR}\,(-\partial^2)^{-1+\sigma/2} - \Delta\,\partial^2]\Phi_b(x,\underline{\theta}_2) + \text{perm}(12)\}, \end{aligned} \tag{17}$$

where perm (12) denotes the expression obtained by permuting ϕ_1 and ϕ_2 and where $(-\partial^2)^\alpha$ with α a real number is a symbolic notation describing a fractional Laplacian in Euclidean space; its Fourier transform generates a term in $(q^2)^\alpha$ (and for $\alpha = 1$, one recovers the standard Laplacian). In the above equations, we have introduced a superspace whose two-dimensional Grassmannian subspace is curved, with the curvature proportional to β. For instance, the integral over Grassmannian subspace is defined as $\int_{\underline{\theta}} \equiv \int\int(1 + \beta\bar{\theta}\theta)d\theta d\bar{\theta}$.[25] As discussed in detail in Ref. 25, the action in Eq. (17) is still invariant under a large group of symmetries and supersymmetries.

We have applied the NP-FRG formalism to this superfield theory [step (3) above]. This proceeds by first introducing an infrared (IR) regulator that enforces a progressive account of the fluctuations to the bare action,

$$\begin{aligned} \Delta S_k^{(\beta)} &= \frac{1}{2}\sum_a \int_{x_1x_2}\int_{\underline{\theta}} \Phi_a(x_1,\underline{\theta})\widehat{R}_k(|x_1 - x_2|)\Phi_a(x_2,\underline{\theta}) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{a,b}\int_{\underline{x}_1\underline{x}_2} \Phi_a(\underline{x}_1)\widetilde{R}_k(|x_1 - x_2|)\Phi_b(\underline{x}_2), \end{aligned} \tag{18}$$

with two IR cutoff functions $\widehat{R}_k$ and $\widetilde{R}_k$ suppressing the integration over modes with momentum $|q| \ll k$ (but not for those with $|q| \gg k$)[22,34] in the modified k-dependent generating functional

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_k^{(\beta)}[\{\mathcal{J}_a\}] &= \int \prod_{a=1}^{n} \mathcal{D}\Phi_a \exp\Bigg[-S^{(\beta)}[\{\Phi_a\}] \\ &\quad + \sum_{a=1}^{n}\int_{\underline{x}} \mathcal{J}_a(\underline{x})\Phi_a(\underline{x}) - \Delta S_k^{(\beta)}[\{\Phi_a\}]\Bigg]. \end{aligned} \tag{19}$$

We have chosen the two IR cutoff functions to be related through

$$\widetilde{R}_k(q^2) = -\left(\frac{2\,\Delta_{\rm LR}}{\sigma\,Z_{\rm LR}}\right)\partial_{q^2}\widehat{R}_k(q^2). \tag{20}$$

The above relation and the form of the regulator ensure that all symmetries and supersymmetries of the theory are satisfied. This includes the super-rotational invariance found (only) when the theory is restricted to a *single* copy and to an infinite auxiliary temperature, $\beta = 0$.[25] A specific form for the cutoff function $\widehat{R}_k$ will be given below.

We next introduce the effective average action,[33,34] which is obtained from $\log \mathcal{Z}_k^{(\beta)}$ through a (modified) Legendre transform:

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(\beta)}[\{\Phi_a\}] &= -\ln \mathcal{Z}_k^{(\beta)}[\{\mathcal{J}_a\}] \\ &\quad + \sum_a \int_{\underline{x}} \Phi_a(\underline{x})\mathcal{J}_a(\underline{x}) - \Delta S_k^{(\beta)}[\{\Phi_a\}]. \end{aligned} \tag{21}$$

As already mentioned, it is the generating functional of the 1PI correlation functions,[29] and it is the central quantity of our NP-FRG approach. Its dependence on the IR cutoff k is governed by an exact renormalization-group equation (ERGE),[34]

$$\partial_t \Gamma_k^{(\beta)}[\{\Phi_a\}] = \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}\big(\partial_t \mathcal{R}_k\, \mathcal{P}_k^{(\beta)}[\{\Phi_a\}]\big), \tag{22}$$

where $t = \ln(k/\Lambda)$ and the trace involves summing over copy indices and integrating over superspace; the modified propagator $\mathcal{P}^{(\beta)}_{k,ab}(\underline{x}_1,\underline{x}_2)$ is the (operator) inverse of $([\Gamma^{(\beta)}_k]^{(2)} + \mathcal{R}_k)$, where $[\Gamma^{(\beta)}_k]^{(2)}[\{\Phi_a\}]$ is the second functional derivative of the effective average action with respect to the superfields $\Phi_a(\underline{x})$.

The effective average action can be expanded in increasing number of unrestricted sums over copies, which generates an analog of a cumulant expansion for the renormalized disorder (more details are found in Refs. 22 and 25):

$$\Gamma^{(\beta)}_k[\{\Phi_a\}] = \sum_a \Gamma^{(\beta)}_{k1}[\Phi_a] - \frac{1}{2}\sum_{a,b}\Gamma^{(\beta)}_{k2}[\Phi_a,\Phi_b] + \cdots, \tag{23}$$

where (with a pinch of salt, see Refs. 22 and 25), $\Gamma^{(\beta)}_{kp}$ the pth cumulant of the renormalized disorder at the scale k. Such expansions in increasing number of free sums over copies lead to systematic algebraic manipulations that allow one to derive a hierarchy of coupled ERGE's for the cumulants of the renormalized disorder from the ERGE for $\Gamma^{(\beta)}_k[\{\Phi_a\}]$, Eq. (22).

In Refs. 25 and 26, we showed that the ground-state dominance when $\beta \to \infty$ comes with a formal property of the random generating functional, which was termed "Grassmannian ultralocality." This property is also asymptotically found for finite β when $k \to 0$ (after going to dimensionless quantities, i.e., at the fixed point). When it is satisfied, the ERGE's for the cumulants simplify. They only involve "ultralocal" parts of the cumulants, e.g.,

$$\begin{aligned}\Gamma^{(\beta)}_{k1}[\Phi] &= \int_{\underline{\theta}} \Gamma_{k1}[\Phi(\underline{\theta})],\\ \Gamma^{(\beta)}_{k2}[\Phi_1,\Phi_2] &= \int_{\underline{\theta}_1}\int_{\underline{\theta}_2} \Gamma_{k2}[\Phi_1(\underline{\theta}_1),\Phi_2(\underline{\theta}_2)],\end{aligned} \tag{24}$$

etc., where, in the right-hand sides, $\Gamma_{k1}, \Gamma_{k2}, \cdots$, only depend on the superfields at the explicitly displayed "local" Grassmannian coordinates (on the other hand, the dependence on the Euclidean coordinates, which is left implicit, still involves derivatives). $\Gamma_{k1}, \Gamma_{k2}, \cdots$, are then shown to be independent of the auxiliary temperature β^{-1}, and the corresponding ERGE's can be further evaluated for physical fields $\Phi_a(\underline{x}) = \phi_a(x)$, i.e., for superfields that are uniform in the Grassmann subspace.[25] For instance, one obtains

$$\partial_t\Gamma_{k1}[\phi_1] = -\frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int_{x_2x_3}\widehat{P}_{k;x_2x_3}[\phi_1]\big(\Gamma^{(11)}_{k2;x_2,x_3}[\phi_1,\phi_1] - \widetilde{R}_{k;x_2x_3}\big) \tag{25}$$

and

$$\begin{aligned}&\partial_t\Gamma_{k2}[\phi_1,\phi_2]\\ &= \frac{1}{2}\tilde{\partial}_t\int_{x_3x_4}\Big\{-\widehat{P}_{k;x_3x_4}[\phi_1]\,\Gamma^{(101)}_{k3;x_3,.,x_4}[\phi_1,\phi_2,\phi_1]\\ &\quad + \widetilde{P}_{k;x_3x_4}[\phi_1,\phi_1]\,\Gamma^{(20)}_{k2;x_3x_4,.}[\phi_1,\phi_2] + \frac{1}{2}\widetilde{P}_{k;x_3x_4}[\phi_1,\phi_2]\\ &\quad \times\big(\Gamma^{(11)}_{k2;x_3,x_4}[\phi_1,\phi_2] - \widetilde{R}_{k;x_3x_4}\big) + \mathrm{perm}(12)\Big\},\end{aligned} \tag{26}$$

where $\tilde{\partial}_t$ is a short-hand notation to indicate a derivative acting only on the cutoff functions (i.e., $\tilde{\partial}_k \equiv \partial_k\widehat{R}_k\,\delta/\delta\widehat{R}_k + \partial_k\widetilde{R}_k\,\delta/\delta\widetilde{R}_k$) and superscripts indicate functional differentiation with respect to the field arguments. The propagators $\widehat{P}_k$ and $\widetilde{P}_k$ are defined as

$$\widehat{P}_k[\phi] = \big(\Gamma^{(2)}_{k,1}[\phi] + \widehat{R}_k\big)^{-1} \tag{27}$$

and

$$\widetilde{P}_k[\phi_1,\phi_2] = \widehat{P}_k[\phi_1]\big(\Gamma^{(11)}_{k,2}[\phi_1,\phi_2] - \widetilde{R}_k\big)\widehat{P}_k[\phi_2]. \tag{28}$$

Finally, we use the fact that the continuous symmetries and supersymmetries of the theory lead to Ward-Takahashi identities[24,25] at each running scale k. Important ones are those associated with super-rotational invariance when the multicopy theory is restricted to a one-copy theory by an appropriate choice of the sources and the auxiliary temperature has dropped from the formalism.[25] In particular, one then has for uniform field configurations,

$$\Gamma^{(11)}_{k2}(q^2;\phi,\phi) = \left(\frac{2\,\Delta_{\mathrm{LR}}}{\sigma\,Z_{\mathrm{LR}}}\right)\partial_{q^2}\Gamma^{(2)}_{k2}(q^2;\phi). \tag{29}$$

Note that the relation in Eq. (20) between the two IR cutoff functions is precisely of the same form. So long as the super-rotational invariance is not spontaneously broken and Eq. (29) remains valid, the ERGE for the first cumulant Γ_{k1} can be closed thanks to the above Ward-Takahashi identities [see Eq. (25)]. It exactly reduces to that for the effective average action in the pure model in dimension $(d-2)$, which entails the dimensional-reduction property.[24,25]

IV. SUPERSYMMETRY-COMPATIBLE APPROXIMATION SCHEME

To actually solve the ERGE's describing the critical behavior of the long-range RFIM [see Eqs. (25) and (26)], we use the supersymmetry-compatible nonperturbative approximation scheme that we have already introduced in previous work.[24,25] It combines a truncation in the derivative expansion, which approximate the long-distance behavior of the 1PI vertices, and a truncation in the expansion in cumulants of the renormalized disorder, while ensuring that the Ward-Takahashi identities associated with the supersymmetry are not explicitly violated. In the present case, the derivative expansion must be generalized to account for the long-range spatial decay of the interactions and the disorder correlations. The minimal truncation then reads

$$\begin{aligned}\Gamma_{k1}[\phi] = \int_x\Big\{&U_k[\phi(x)] + \frac{1}{2}Z_{\mathrm{LR},k}[\phi(x)]\phi(x)(-\partial^2)^{\sigma/2}\phi(x)\\ &+ \frac{1}{2}Z_k[\phi(x)][\partial_\mu\phi(x)]^2\Big\},\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}&\Gamma_{k2}[\phi_1,\phi_2]\\ &= \int_x\Big\{\frac{1}{2}\Delta_{\mathrm{LR},k}[\phi_1(x),\phi_2(x)]\big[\phi_1(x)(-\partial^2)^{-1+\sigma/2}\phi_2(x)\\ &\quad + \phi_2(x)(-\partial^2)^{-1+\sigma/2}\phi_1(x)\big] + V_k[\phi_1(x),\phi_2(x)]\Big\},\end{aligned} \tag{31}$$

with the higher-order cumulants set to zero.

Inserted in the ERGE's for the cumulants, Eqs. (25) and (26), the above ansatz provides five coupled flow equations for the 1-copy potential $U_k(\phi)$ that describes the thermodynamics of the system, the two field-renormalization functions $Z_k(\phi)$

and $Z_{\mathrm{LR},k}(\phi)$, the 2-copy potential $V_k(\phi_1,\phi_2)$ [from which one obtains the local part of second cumulant of the renormalized random field $\Delta_k(\phi_1,\phi_2) = \partial_{\phi_1}\partial_{\phi_2}V_k(\phi_1,\phi_2)$] and the strength of the long-range component of the second cumulant of the random field $\Delta_{\mathrm{LR},k}(\phi_1,\phi_2)$.

The NP-FRG flow equations are supplemented by an initial condition at the microscopic (UV) scale $k = \Lambda$. It is given by the bare action that can be recast as

$$\Gamma_{\Lambda 1}[\phi] = \int_x \left\{ U_B[\phi(x)] + \frac{1}{2}\phi(x)(-\partial^2)^{\sigma/2}\phi(x) + \frac{Z}{2}[\partial_\mu\phi(x)]^2 \right\}, \tag{32}$$

where, without loss of generality, we have set $Z_{\mathrm{LR}} = 1$, and

$$\Gamma_{\Lambda 2}[\phi_1,\phi_2] = \int_x \left\{ \frac{\Delta_{\mathrm{LR}}}{2}[\phi_1(x)(-\partial^2)^{-1+\sigma/2}\phi_2(x) + \phi_2(x)(-\partial^2)^{-1+\sigma/2}\phi_1(x)] + \Delta\phi_1(x)\phi_2(x) \right\} \tag{33}$$

with $\Delta_{\mathrm{LR}} > 0$. To ensure that supersymmetry is not violated by the initial action, we choose $\Delta = (2/\sigma)Z\Delta_{\mathrm{LR}}$, see Eq. (12). (This normalization is only a matter of convenience and we have checked that starting from some other condition, the RG flow restores the supersymmetry.)

The first observation is that due to the long-range nature of the interaction and disorder correlation, characterized by a nontrivial exponent σ, the propagators $\widehat{P}_k[\phi]$ and $\widetilde{P}_k[\phi_1,\phi_2]$ appearing in the flow equations have a nonanalytic momentum dependence, even away from criticality. By introducing the above ansatz, Eqs. (30) and (31), in Eqs. (27) and (28), one finds for uniform field configurations,

$$(\widehat{P}_k[\phi])_{qq'} = \delta(q+q')\widehat{P}_k(q^2;\phi) \tag{34}$$

and

$$\begin{aligned}(\widetilde{P}_k[\phi_1,\phi_2])_{qq'} &= \delta(q+q')\big\{(q^2)^{-1+\frac{\sigma}{2}}\big[\Delta_{\mathrm{LR},k}(\phi_1,\phi_2) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\phi_1\partial\phi_1 + \phi_2\partial\phi_2)\Delta_{\mathrm{LR},k}(\phi_1,\phi_2)\big] \\ &\quad + \Delta_k(\phi_1,\phi_2) - \widetilde{R}_k(q^2)\big\}\widehat{P}_k(q^2;\phi_1)\widehat{P}_k(q^2;\phi_2), \end{aligned} \tag{35}$$

with

$$\widehat{P}_k(q^2;\phi) = \frac{1}{\partial_\phi[\phi Z_{\mathrm{LR},k}(\phi)](q^2)^{\sigma/2} + Z_k(\phi)q^2 + U_k''(\phi) + \widehat{R}_k(q^2)}. \tag{36}$$

The RG flow of $Z_{\mathrm{LR},k}$ and $\Delta_{\mathrm{LR},k}$ is obtained by extracting from the ERGE of the relevant two-point 1PI vertex, $\Gamma_{k,1}^{(2)}$ for the former and $\Gamma_{k,2}^{(11)}$ for the latter, that part which has the proper singular momentum dependence (when evaluated for uniform fields). One finds as a result that the flow of the two functions $Z_{\mathrm{LR},k}$ and $\Delta_{\mathrm{LR},k}$ involves field derivatives of themselves in such a way that if $Z_{\mathrm{LR},k}$ and $\Delta_{\mathrm{LR},k}$ are independent of the fields at the UV scale, which is indeed the case here [see Eqs. (32) and (33)], $Z_{\mathrm{LR},k}$ and $\Delta_{\mathrm{LR},k}$ do not flow and remain equal to their bare values. This is in line with the conclusions of Ref. 32.

In the present three-dimensional case, any crossover to short-range behavior could only occur for $\sigma > 1$: indeed, the latter behavior is predicted for $\sigma > 2 - \eta_{\mathrm{SR}}$ and/or $\sigma > 2 - 2\eta_{\mathrm{SR}} + \bar{\eta}_{\mathrm{SR}}$,[32] which, in the present random-field system where $\eta_{\mathrm{SR}} \approx 2\eta_{\mathrm{SR}} - \bar{\eta}_{\mathrm{SR}} \approx 0.5$ in $d = 3$,[2,25] only takes place in the region where no phase transition is observed anyhow. The whole σ range of interest, i.e., $1/2 < \sigma < 1$ (see Introduction), is therefore in the long-range regime characterized by fixed anomalous dimensions given by $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$. The latter result can be easily understood by considering the propagators in Eqs. (34)–(36). When $k \to 0$ at the critical point, $\widehat{P}_{k\to 0}(q^2;\phi)$ reduces to the connected pair correlation function in Eq. (14), while $\widetilde{P}_{k\to 0}(q^2;\phi,\phi)$ reduces to the disconnected pair correlation function in Eq. (15). The low-momentum behavior in Eqs. (34)–(36) is dominated by the singular terms, which are both in $(q^2)^{-\sigma/2}$. Comparison with the definitions of the anomalous dimensions in Eqs. (14) and (15) then directly provides the result.

To cast the NP-FRG flow equations in a dimensionless form that allows one to describe the long-distance physics associated with the critical point, one must introduce scaling dimensions that account for the fact that the fixed point is at "zero temperature." Near such a fixed point, the renormalized temperature is irrelevant and characterized by an exponent $\theta > 0$, and one has the following scaling dimensions (see also Sec. II):

$$Z_k \sim k^{-\eta}, \quad \phi_a \sim k^{\frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta})}, \quad U_k \sim k^{d-\theta}, \quad V_k \sim k^{d-2\theta}, \tag{37}$$

so that the local component of the second cumulant of the renormalized random field Δ_k scales as $k^{-(2\eta-\bar{\eta})}$. As discussed above, $\eta = \bar{\eta} = 2 - \sigma$, so that $\theta = 2$, in the long-range regime considered here (with $1/2 < \sigma < 1$ in $d = 3$). Note that, in contrast with the short-range RFIM, the equality of η and $\bar{\eta}$ and a fixed value of the temperature exponent $\theta = 2$ do *not* necessarily mean that dimensional reduction is obeyed.

Recalling that the long-range functions are *not* renormalized and using lower-case letters, $u_k, v_k, \delta_k, \varphi$, to denote the dimensionless counterparts of U_k, V_k, Δ_k, ϕ, the dimensionless form of the flow equations can be symbolically written as

$$\begin{aligned}\partial_t u_k'(\varphi) &= \beta_{u'}(\varphi), \quad \partial_t z_k(\varphi) = \beta_z(\varphi), \\ \partial_t \delta_k(\varphi_1,\varphi_2) &= \beta_\delta(\varphi_1,\varphi_2),\end{aligned} \tag{38}$$

where a prime denotes a derivative with respect to the argument. The β functions themselves depend on u_k', z_k, δ_k and their derivatives. They are obtained from the expressions for the short-range RFIM given in Ref. 26 after the following replacements:

$$\begin{aligned} z_k(\varphi)y + u_k''(\varphi) + s(y) &\to y^{\sigma/2} + z_k(\varphi)y + u_k''(\varphi) + s(y), \\ \delta_k(\varphi_1,\varphi_2) + s'(y) &\to \frac{\sigma}{2}y^{-1+\sigma/2} + \delta_k(\varphi_1,\varphi_2) + s'(y), \end{aligned} \tag{39}$$

where $y = q^2/k^2$ is the rescaled squared momentum and $s(y)$ is the dimensionless form of the IR cutoff function that is

introduced through

$$\widehat{R}_k(q^2) = k^\sigma s(q^2/k^2),$$
$$\widetilde{R}_k(q^2) = -\frac{2}{\sigma}\Delta_{\rm LR}\partial_{q^2}\widehat{R}_k(q^2) = -\frac{2}{\sigma}\Delta_{\rm LR}\, s'(q^2/k^2). \tag{40}$$

Note that even if one chooses an initial condition where the short-range components of the interaction and the disorder correlation are zero, $Z = \Delta = 0$ [which still satisfies Eq. (12)], these components are generated along the RG flow.

As the chosen ansatz for the renormalized cumulants and for the IR cutoff functions do not *explicitly* violate the Ward-Takahashi identities associated with super-rotational invariance, we find the same property as in the short-range RFIM:[25] so long as the local piece of the cumulant of the renormalized random field $\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)$ is well enough behaved when $\varphi_2 \to \varphi_1$, i.e., does not develop a cusp in $|\varphi_2 - \varphi_1|$, super-rotational invariance is not *spontaneously* broken along the RG flow. One then exactly finds that $\delta_k(\varphi,\varphi) = z_k(\varphi)$ and that the flows of $z_k(\varphi)$ and $u'_k(\varphi)$ are identical to those obtained in the NP-FRG treatment of the pure model with long-range interactions in dimension $d-2$. Two situations may be encountered. Either this remains true down to the $k \to 0$ limit, and the fixed point describes a critical behavior with dimensional reduction, or a cusp appears at a specific scale $k_L > 0$ along the flow and dimensional reduction must be broken. The associated RG time $t_L = \ln k_L/\Lambda$ is often referred to as the "Larkin" time.

V. RESULTS IN THE THREE-DIMENSIONAL CASE AND DISCUSSION

The main goal of this work is to investigate in the three-dimensional long-range RFIM the existence of a critical value $\sigma_{\rm DR}$ separating a region of parameter σ where dimensional reduction holds from a region where it does not. We have thus looked for the signature of the appearance of a cusp along the RG flow, which corresponds to the disappearance of the dimensional-reduction fixed point. To this end, we have studied the second derivative of $\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)$ with respect to φ_1 and φ_2 when evaluated in the limit $\varphi_2 \to \varphi_1$:

$$\delta_{k,2}(\varphi) = -\partial_{\varphi_1}\partial_{\varphi_2}\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)\big|_{\varphi_1=\varphi_2=\varphi}. \tag{41}$$

In the absence of a cusp, $\delta_{k,2}(\varphi)$ is finite whereas it blows up when a cusp first appears.

The flow of $\delta_{k,2}(\varphi)$ is simply obtained from the one for $\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)$ [see Eq. (38)] by using Eq. (41) and assuming that

$$\delta_k(\varphi_1,\varphi_2) = \delta_{k,0}(\varphi) + (1/2)\delta_{k,2}(\varphi)(\varphi_1-\varphi_2)^2 + \cdots, \tag{42}$$

with $\varphi = (1/2)(\varphi_1+\varphi_2)$, when $\varphi_2 \to \varphi_1$. The associated beta function only depends on z_k, u'_k, $\delta_{k,0}$, $\delta_{k,2}$ and their (field) derivatives. In this case, as already mentioned, $\delta_{k,0}(\varphi) = z_k(\varphi)$ and the flows of z_k and u'_k are the same as in the pure system in dimension $d-2$ (with $d=3$ here) at the same level of the derivative expansion.

We have therefore solved the two coupled partial differential equations for z_k and u'_k numerically in $d=1$, for a range of σ between 1/2 and 1, and we have taken the result as an input to solve the partial differential equation for $\delta_{k,2}(\varphi)$. For the reduced cutoff function $s(y)$, we have used, as in our previous work,[23,26] $s(y) = a(1+y/2+y^2/12)\exp(-y)$,

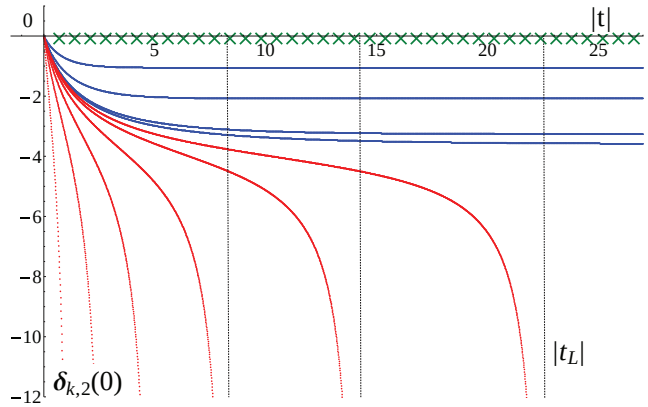

FIG. 1. (Color online) NP-FRG flow of $\delta_{k,2}(\varphi=0)$ in the three-dimensional long-range RFIM. The initial conditions at $k=\Lambda$ (i.e., $t=0$) for $u'_k(\varphi)$ and $z_k(\varphi) = \delta_{k,0}(\varphi)$ are taken as equal to the solution at the fixed point. The upper (color online blue) curves correspond to $\sigma < \sigma_{\rm DR} \approx 0.71$, $\sigma = 0.675, 0.7, 0.71, 0.711$ from top to bottom; $\delta_{k,2}(0)$ tends to a finite fixed-point value. The lower (color online red) curves correspond to $\sigma > \sigma_{\rm DR}$, $\sigma = 0.8, 0.75, 0.73, 0.72, 0.715, 0.713$ from left to right; they all display a divergence at a finite RG scale $|t_L|$ (which is indicated for the three rightmost curves by a vertical dashed line). The crosses (color online green) represent the flow for $\sigma < 1/2$, $\delta_{k,2}(0)$ remains 0 at all times. The value of the parameter a of the cutoff function is equal to 2.

where the parameter a has been optimized via stability considerations[35–37] and has been varied to provide an estimated error bar on our results (in practice, stable results are obtained for a wide range of a, between 1.5 and 6).

The outcome of our theoretical investigation is that dimensional reduction between the RFIM with long-range interactions and disorder correlations in $d=3$ and the pure model with long-range interactions in $d=1$ is valid for $\sigma < \sigma_{\rm DR}$ and breaks down for $\sigma > \sigma_{\rm DR}$, with a critical value $\sigma_{\rm DR} \approx 0.71 \pm 0.03$. Indeed, and as illustrated in Fig. 1, $\delta_{k,2}(\varphi)$ stays finite down to $k \to 0$ below $\sigma_{\rm DR}$ whereas it diverges at a finite scale above $\sigma_{\rm DR}$. We also display in Fig. 2 the "Larkin" scale at which $\delta_{k,2}(\varphi=0) \to \infty$, which is seen to

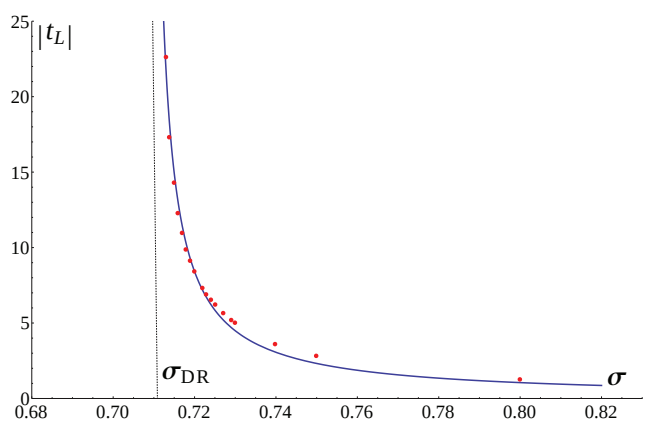

FIG. 2. (Color online) Divergence of the "Larkin" RG time $|t_L|$ when $\sigma \to \sigma_{\rm DR}^+$. The line is a simple power law in $(\sigma_{\rm DR}-\sigma)^{-1}$. (Note that an RG time of 23 is enormous and corresponds to an observation length scale 10^{10} times the microscopic one).

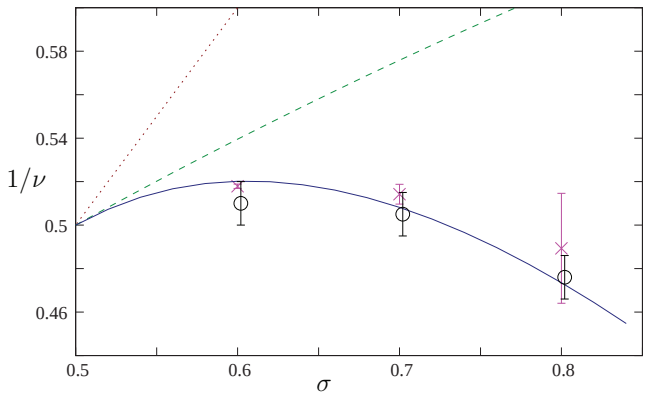

FIG. 3. (Color online) Inverse of the critical exponent ν as a function of the parameter σ for the long range pure Ising model in $d = 1$ and, by dimensional reduction, for the long-range RFIM in $d = 3$ when $\sigma < \sigma_{\rm DR} \approx 0.71$. The dotted (color online red), dashed (color online green) and full (color online blue) lines correspond to the mean-field, one-loop and two-loop results, respectively. The open circles are the results of lattice simulations of Ref. 27 and the crosses correspond to the present NP-FRG computation.

diverge when $\sigma \to \sigma_{\rm DR}^{+}$. In the mean-field regime, $\sigma < 1/2$, the critical physics is governed by the Gaussian fixed point at which $\delta_{k,2}(\varphi) = 0$, as illustrated also in Fig. 1.

In the regime $\sigma < \sigma_{\rm DR}$, the correlation-length critical exponent ν for the RFIM is related to that of the pure Ising model by the $d \to d - 2$ dimensional reduction. We can compute this exponent by linearizing the flow around the fixed point and diagonalizing the associated stability matrix. The exponent ν is minus the inverse of the eigenvalue associated with the relevant direction around the fixed point (which is negative with our sign conventions). Our determination of ν and its error bar relies on the principle of minimal sensitivity.[36] We display in Fig. 3 our numerical results for the long-range pure Ising model in $d = 1$, which compare well with the lattice simulations of Ref. 27. (For $\sigma < \sigma_{\rm DR} \approx 0.71$, the exponent is also that of the 3d RFIM.) We stress that dimensional reduction breaks down above $\sigma_{\rm DR}$ despite the fact that $\overline{\eta} = \eta = 2 - \sigma$ (as in the pure model) and $\theta = 2$. In this case indeed, the exponent ν differs from its value in the pure long-range system in two dimensions less. We have not explicitly computed ν for $\sigma > \sigma_{\rm DR}$, as it requires the resolution of the full set of coupled differential equations, including a function $\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)$ depending on two fields and displaying a cusp in $|\varphi_1 - \varphi_2|$, which represents a much harder numerical task that we postpone to future investigation. However, one can show that the dimensional reduction fixed point disappears in the presence of a cusp and that the exponent ν in the presence of a cusp has additional contributions not present in the dimensional reduction case: $\nu_{\rm RFIM}(d) \neq \nu_{\rm Ising}(d-2)$.

According to our recent work, the validity of dimensional reduction in disordered systems controlled by a zero-temperature fixed point is related to the scaling properties of the large avalanches observed in the evolution of the ground state under changes of the external source.[28] Avalanches are the physical source of the appearance of a nonanalyticity in the cumulants of the renormalized disorder. Dimensional reduction is broken when the avalanche contributions are relevant at the fixed point and is valid when avalanches lead to subdominant effects. In the former case ($\sigma > \sigma_{\rm DR}$), the scaling dimension d_f of the largest typical system-spanning avalanches at criticality is equal to $(d + 4 - \overline{\eta})/2$, i.e., to $(5 + \sigma)/2$ in the present study; on the other hand, for $\sigma < \sigma_{\rm DR}$, $d_f = (5 + \sigma)/2 - \lambda$, where $\lambda > 0$ is the eigenvalue associated with a "cuspy" perturbation to the cuspless dimensional-reduction fixed point.[28] The eigenvalue λ increases as σ decreases. It is easily derived that $\lambda = (5 - \sigma)/2$ around the Gaussian fixed point (for $\sigma \leqslant 1/2$), so that $d_f = 1$ for $\sigma = 1/2$ [while $(5 + \sigma)/2 = 2.75$].

Finally, we conclude this presentation by stressing the relevance to computer studies, either simulations or exact ground-state determinations, which represents the main motivation of this work. In such studies, one considers a lattice, "hard-spin" version of the RFIM, which has the following Hamiltonian in the long-range case:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} J_{ij} S_i S_j - \sum_{i=1}^{N} h_i S_i, \tag{43}$$

where $S_i = \pm 1$, the interaction term $J_{ij} \equiv J(|x_i - x_j|)$ goes as $|x_i - x_j|^{-(d+\sigma)}$ at large distance, and the random fields h_i are Gaussian distributed with zero mean and long-range correlator $\overline{h_i h_j} = \Delta(|x_i - x_j|) \sim |x_i - x_j|^{-(d-2+\sigma)}$. To ensure that the corresponding generating functional satisfies super-rotational invariance, the following relation, which is a variant of the Ward-Takahashi equation in Eq. (29), should hold:

$$\frac{d}{dr}\Delta(r) = -C\, r\, J(r), \tag{44}$$

where C parametrizes the relative strength of the disorder compared to the interactions. Then, powerful algorithms exist to determine the exact ground state of a sample in a computer time that scales only as a power of the system size.[38,39] This allows one to investigate large systems and to perform efficient finite-size analyses of the critical behavior at zero temperature.[40–44] The algorithms can be extended to describe long-range correlated disorder[46] and long-range interactions,[45] and for the cubic lattice, large system sizes should be attainable. A systematic study of the model as a function of the parameter σ could therefore provide the first direct independent check of our theoretical predictions concerning dimensional reduction and its breakdown.

*baczyk@lptmc.jussieu.fr
†tissier@lptmc.jussieu.fr
‡tarjus@lptmc.jussieu.fr
§yossi@phys.ge.cst.nihon-u.ac.jp

[1]Y. Imry and S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **35**, 1399 (1975).
[2]For a review, see T. Nattermann, *Spin Glasses and Random Fields* (World scientific, Singapore, 1998), p. 277.
[3]J. Villain, Phys. Rev. Lett. **52**, 1543 (1984).
[4]D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 416 (1986).
[5]D. S. Fisher, J. Appl. Phys. **61**, 3672 (1987).

[6]A. Aharony, Y. Imry, and S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **37**, 1364 (1976).
[7]G. Grinstein, Phys. Rev. Lett. **37**, 944 (1976).
[8]A. P. Young, J. Phys. C **10**, L257 (1977).
[9]G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
[10]J. Cardy, Phys. Lett. B **125**, 470 (1983)
[11]A. Klein and J. F. Perez, Phys. Lett. B **125**, 473 (1983); A. Klein, L. J. Landau, and J. F. Perez, Commun. Math. Phys. **94**, 459 (1984).
[12]J. Z. Imbrie, Phys. Rev. Lett. **53**, 1747 (1984).
[13]J. Bricmont and A. Kupiainen, Phys. Rev. Lett. **59**, 1829 (1987).
[14]G. Parisi, in *Proceedings of Les Houches 1982*, Session XXXIX, edited by J. B. Zuber and R. Stora (North Holland, Amsterdam, 1984), p. 473.
[15]D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 1964 (1986); L. Balents and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **48**, 5949 (1993).
[16]O. Narayan and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 11520 (1992); **48**, 7030 (1993).
[17]L. Balents, J. P. Bouchaud, and M. Mézard, J. Phys. I **6**, 1007 (1996).
[18]P. Chauve, T. Giamarchi and P. Le Doussal, Europhys. Lett. **44**, 110 (1998).
[19]P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve, Phys. Rev. B **66**, 174201 (2002); Phys. Rev. E **69**, 026112 (2004).
[20]P. Le Doussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 051106 (2009).
[21]P. LeDoussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **85**, 061102 (2012).
[22]G. Tarjus and M. Tissier, Phys. Rev. Lett **93**, 267008 (2004); Phys. Rev. B **78**, 024203 (2008).
[23]M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett **96**, 087202 (2006); Phys. Rev. B **78**, 024204 (2008).
[24]M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett. **107**, 041601 (2011).
[25]M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. B **85**, 104202 (2012).
[26]M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. B **85**, 104203 (2012).
[27]H. W. J. Blöte, J. R. Heringa, and E. Luijten, Comput. Phys. Commun. **147**, 58 (2002).
[28]G. Tarjus, M. Baczyk, and M. Tissier, Phys. Rev. Lett. **110**, 135703 (2013).
[29]J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, 3rd ed. (Oxford University Press, New York, 1989).
[30]P. G. O. Freund and I. Kaplansky, J. Math. Phys. **17**, 228 (1976).
[31]G. Parisi and N. Sourlas, Nucl. Phys. B **206**, 321 (1982).
[32]A. J. Bray, J. Phys. C: Solid State Phys. **19**, 6225 (1986).
[33]C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
[34]J. Berges, N. Tetradis, and C. Wetterich, Phys. Rep. **363**, 223 (2002).
[35]D. F. Litim, Phys. Lett. B **486**, 92 (2000); Int. J. Mod. Phys. A **16**, 2081 (2001); Nucl. Phys. B **631**, 128 (2002).
[36]L. Canet, B. Delamotte, D. Mouhanna, and J. Vidal, Phys. Rev. D **67**, 065004 (2003).
[37]J. M. Pawlowski, Ann. Phys. **322**, 2831 (2007).
[38]J. C. A. d'Auriac, M. Preissmann, and R. Rammal, J. Phys. Lett. **46**, L173 (1985).
[39]A. T. Ogielski, Phys. Rev. Lett. **57**, 1251 (1986).
[40]A. A. Middleton and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **65**, 134411 (2002); A. A. Middleton, arXiv:cond-mat/0208182.
[41]A. K. Hartmann and U. Nowak, Eur. Phys. J. B **7**, 105 (1999); A. K. Hartmann, Phys. Rev. B **65**, 174427 (2002).
[42]C. Frontera, J. Goicoechea, J. Ortin, and E. Vives, J. Comput. Phys. **160**, 117 (2000).
[43]I. Dukovski and J. Machta, Phys. Rev. B **67**, 014413 (2003); Y. Wu and J. Machta, Phys. Rev. Lett. **95**, 137208 (2005).
[44]Y. Liu and K. A. Dahmen, Phys. Rev. E **76**, 031106 (2007).
[45]C. Frontera and E. Vives, J. Comput. Phys. **168**, 219 (2001).
[46]B. Ahrens and A. K. Hartmann, Phys. Rev. B **84**, 144202 (2011).

Fixed points and their stability in the functional renormalization group of random field models

Maxime Baczyk,* Gilles Tarjus,† and Matthieu Tissier‡
LPTMC, CNRS-UMR 7600, Université Pierre et Marie Curie, boîte 121, 4 Pl. Jussieu, 75252 Paris cédex 05, France

Ivan Balog§
LPTMC, CNRS-UMR 7600, Université Pierre et Marie Curie, boîte 121, 4 Pl. Jussieu, 75252 Paris cédex 05, France and Institute of Physics, P.O.Box 304, Bijenička cesta 46, HR-10001 Zagreb, Croatia

(Dated: December 24, 2013)

arXiv:1312.6375v1 [cond-mat.dis-nn] 22 Dec 2013

We consider the zero-temperature fixed points controlling the critical behavior of the d-dimensional random-field Ising, and more generally $O(N)$, models. We clarify the nature of these fixed points and their stability in the region of the (N, d) plane where one passes from a critical behavior satisfying the $d \to d-2$ dimensional reduction to one where it breaks down due to the appearance of strong enough nonanalyticities in the functional dependence of the cumulants of the renormalized disorder. We unveil an intricate and unusual behavior.

PACS numbers: 11.10.Hi, 75.40.Cx

I. INTRODUCTION

In a recent series of papers,[1–5] we have shown how the critical behavior of the d-dimensional random-field Ising, and more generally $O(N)$, models can be fully described through the functional renormalization group (FRG). We have in particular stressed that the solution to many puzzles associated with this critical behavior lies in the existence of a transition between a region satisfying the $d \to d-2$ dimensional reduction, *i.e.* where the critical behavior of the random-field system is identical to that of the corresponding pure model in two dimensions less,[6–9] and one where dimensional reduction is broken.

The above transition takes place at a nontrivial location in the (N, d) plane, in contrast for instance with the case of an interface in a random environment where dimensional reduction is always wrong below the upper critical dimension.[10–13] For the random-field $O(N)$ model [RF$O(N)$M], the zero-temperature fixed point associated with dimensional reduction disappears below a line $d_{\rm DR}(N)$ that is close to 5.1 when $N = 1$ and decreases as N increases, reaching $d = 4$, the lower critical dimension for ferromagnetism in the presence of a continuous $O(N)$ symmetry, when $N = 18$.[2,4] Below this line, the zero-temperature fixed point controlling the critical behavior is characterized by strong enough nonanalyticities in the functional dependence of the cumulants of the renormalized disorder. The latter take the form of a linear "cusp" in the cumulants of the renormalized random field. Physically, this results from the presence of large-scale collective events known as "avalanches" (whose fractal dimension is then equal to the fractal dimension of the total magnetization at criticality)[14]. Formally, this leads to a failure of the Ward-Takahashi identities associated with the underlying supersymmetry of the model[9] and to a breaking of the latter.[4]

In this paper, we take a closer look at the transition from the regime controlled by the dimensional-reduction fixed point to that controlled by the "cuspy" fixed point. Although this takes place in an unphysical region in systems with short-range interactions and disorder correlations (but could nonetheless be studied in $d = 3$ when one allows for long-range interactions and disorder correlations as we have recently pointed out[5]), the issue is important to underpin the whole FRG-based description.

A first question is whether one can find, within the FRG, operators that become relevant as dimensional reduction breaks down. To this end we have studied in more detail the stability of the "cuspless" fixed point associated with dimensional reduction to a "cuspy" perturbation, *i.e.* a perturbation displaying a linear cusp in the cumulants of the renormalized random field, when $d \geq d_{DR}$. Quite surprisingly, we find two different mechanisms for the appearance and disappearance of the stable (critical) fixed point, depending on the value of N (or d).

For N sufficiently large, the cuspless fixed point becomes unstable with respect to a cuspy perturbation, and this occurs at a nontrivial dimension $d_{\rm cusp}(N)$ that is close to, but different from, $d_{\rm DR}(N)$. As a result, there is a range of dimensions $d_{\rm DR}(N) < d < d_{\rm cusp}(N)$ [or, alternatively, of number of components, $N_{\rm DR}(d) < N < N_{\rm cusp}(d)$] for which models described by a cuspless initial condition flow at criticality to the cuspless fixed point associated with dimensional reduction whereas models already described by a cuspy initial condition flow to a cuspy fixed point for which dimensional reduction fails. In an enlarged space of functions including those with a linear cusp, only the latter fixed point is fully stable (except for the usual relevant direction needed to tune the critical-point condition).

For a threshold value $N_{\rm x}$, and correspondingly a threshold dimension $d_{\rm x} = d_{DR}(N_{\rm x}) = d_{\rm cusp}(N_{\rm x})$, the two critical lines $d_{DR}(N)$ and $d_{\rm cusp}(N)$ meet: see Fig. 1. For $N < N_{\rm x}$ and $d > d_{\rm x}$, the cuspless fixed point that governs

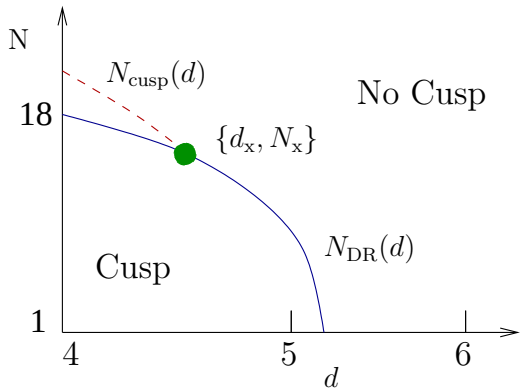

FIG. 1: Schematic phase diagram of the RF$O(N)$M in the (N, d) plane. The full line is $N_{DR}(d)$, where the cuspless fixed points present for $N > N_{DR}(d)$ disappear, and the dashed line is $N_{\rm cusp}(d)$, where the cuspless critical fixed point becomes unstable to a cuspy perturbation. The two lines meet at $N_{\rm x} \simeq 14$ and $d_{\rm x} \simeq 4.4$ (estimated from a 2-loop perturbative FRG in $d = 4 + \epsilon$). To the right of the threshold point, the cuspless critical fixed point disappears at $N_{DR}(d)$ when it is still stable with respect to a cuspy perturbation. A stable cuspy fixed point then appears continuously but through a boundary-layer mechanism.

the critical physics remains stable under cuspy perturbations down to $d = d_{\rm DR}(N)$, at which point it disappears. A cuspy fixed point then emerges continuously from the cuspless one, through a boundary-layer mechanism.

We derive the above results by a combination of approaches. We investigate the RF$O(N)$M near its lower critical dimension, in $d = 4+\epsilon$, through the perturbative FRG in section II. In section III, we illustrate the mechanisms for the appearance of cuspy fixed points and the disappearance of cuspless ones in a toy model inspired from the beta function of the RF$O(N)$M. We finally address the short- and long-range versions of the random-field Ising model (RFIM) through the nonperturbative FRG in section IV.

II. THE RFO(N)M IN $d = 4 + \epsilon$

The long-distance physics of the RF$O(N)$M is described by the following Hamiltonian or bare action,

$$S[\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{h}] = \int_x \left\{ \frac{1}{2}|\partial\boldsymbol{\varphi}(x)|^2 + \frac{\tau}{2}|\boldsymbol{\varphi}(x)|^2 + \frac{u}{4!}(|\boldsymbol{\varphi}(x)|^2)^2 - \mathbf{h}(x).\boldsymbol{\varphi}(x) \right\}, \tag{1}$$

where $\int_x \equiv \int d^dx$, $\boldsymbol{\varphi}(x)$ is an N component field, and $\mathbf{h}(x)$ is a random source (a random magnetic field in the language of magnetic systems) with zero mean and a variance $\overline{h^\mu(x)h^\nu(y)} = \delta_{\mu\nu}\,\Delta_B(x-y)$, where $\mu, \nu = 1, \cdots, N$ and an overline denotes an average over the random field. For the usual short-range model, the function $\Delta_B(x-y)$ can be taken as $\Delta_B\,\delta(x-y)$. In section IV, we will consider a version with both long-ranged disorder correlations $\Delta_B(x-y) \sim |x-y|^{-(d-\rho)}$ and long-ranged interactions leading to a kinetic term with a fractional laplacian in place of the standard $|\partial\boldsymbol{\varphi}(x)|^2$ term above.[5]

Near the lower critical dimension for ferromagnetism ($d = 4$), the critical behavior of the RF$O(N)$M is captured by a nonlinear-sigma model that in turn can be studied through a perturbative but functional RG. The resulting FRG flow equations have been obtained to one[2,3,15,16] and two loops.[3,17] The central quantity is the renormalized second cumulant of the random field $\Delta_k(z)$ [noted $R'_k(z)$ in previous work], where k is the running infrared cutoff and z is the cosine of the angle between fields in two different replicas of the system.[2,3] A linear cusp in this parametrization corresponds to a term in $\sqrt{1-z}$ as $z \to 1$. We then use the terminolgy "cuspy" to describe a function with this behavior and "cuspless" if the function and its first derivative, $\Delta(1)$ and $\Delta'(1)$, in $z = 1$ are finite.

For completeness we recall the FRG equation for $\Delta_k(z)$ at one-loop, in $d = 4 + \epsilon$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\epsilon}\partial_t\Delta_k(z) = \Delta_k(z) - \Big\{&(N-3)\Delta_k(1)\Delta_k(z) + z\Delta_k(z)^2 \\ &+ (N-3+4z^2)\Delta_k(z)\Delta'_k(z) - (N+1)z\Delta_k(1)\Delta'_k(z) \\ &- z(1-z^2)\Delta_k(z)\Delta''_k(z) + (1-z^2)\Delta_k(1)\Delta''_k(z) - \\ &3z(1-z^2)\Delta'_k(z)^2 + (1-z^2)^2\Delta'_k(z)\Delta''_k(z)\Big\}\end{aligned} \tag{2}$$

where we have rescaled Δ_k by $8\pi^2\epsilon$. The RG "time" t is defined such that the long-distance physics is recovered when $t \to +\infty$, *i.e.* $t = \log(\Lambda/k)$ with Λ the microscopic or ultraviolet scale. The two anomalous dimensions η and $\bar{\eta}$ characterizing the spatial dependence of the correlation functions at criticality in random-field systems are expressed in terms of $\Delta(1)$ at the fixed point:

$$\eta = \epsilon\Delta_\star(1) \tag{3}$$

$$\bar{\eta} = \epsilon\big[-1 + (N-1)\Delta_\star(1)\big]\,. \tag{4}$$

For sufficiently large N, the critical behavior is controlled by a fixed point at which $\Delta_*(z)$ has only a "subcusp", with a leading nonanalytic behavior in $(1-z)^{\alpha_*(N)}$ and $\alpha_*(N) > 1$, which implies that $\Delta_k(1)$ and $\Delta'_k(1)$ remain finite during the flow. A direct calculation shows that, under this hypothesis, the evolution of $\Delta_k(1)$ only depends on $\Delta_k(1)$ and that of $\Delta'_k(1)$ only depends on $\Delta_k(1)$ and $\Delta'_k(1)$. At the corresponding cuspless fixed point, one has[3,15]

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_*(1)}{\epsilon} &= \frac{1}{N-2} \\ \frac{\Delta'_*(1)}{\epsilon} &= \frac{(N-8) - \sqrt{(N-2)(N-8)}}{2(N-2)(N+7)}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

The square root in the expression of $\Delta'_*(1)$ implies that this fixed point exists only for $N > N_{\rm DR} = 18$.

The determination of $\alpha_*(N)$ is obtained as follows. Suppose that the function $\Delta_k(z)$ has a leading singularity in α with $\alpha > 1$: $\Delta(z) = \Delta_k(1) - \Delta'_k(1)(1-z) + \cdots + a_k(1-z)^\alpha + \cdots$. One can easily show that the flow of a_k is linear in a_k and that it depends on $\Delta_k(1)$ and $\Delta'_k(1)$ only:

$$\frac{1}{\epsilon}\partial_t a_k = a_k\, \Lambda_{\alpha+1}(\Delta_k(1), \Delta'_k(1)) \tag{6}$$

with[3]

$$\begin{aligned}\Lambda_p(\Delta(1), \Delta'(1)) =& 1 - \Delta(1)\big[N(2-p) + 2p^2 + p - 4\big] \\ & - \Delta'(1)p(6p + N - 5)\,.\end{aligned} \tag{7}$$

The only way to have a nonvanishing amplitude for a subcusp with exponent α_* is that

$$\Lambda_{\alpha_*+1}(\Delta_\star(1), \Delta'_\star(1)) = 0. \tag{8}$$

By using the fixed-point solution given in Eq. (5) we then obtain an explicit expression for $\alpha_*(N)$, which we do not reproduce here. It is found that $\alpha_*(N)$ decreases as N decreases until it reaches $\alpha_*(N = 18) = 3/2$.[2,3] Below $N = 18 = N_{\rm DR}$, the only nontrivial fixed points have a linear cusp, with $\alpha_*(N) = 1/2$.

The eigenvalues describing the stability of the cuspless fixed point under consideration are obtained by linearizing the FRG flow equations around this fixed point. In our previous work we found that for $N \geq 18$ the cuspless fixed point described by Eq. (5) is stable with respect to cuspless perturbations, except of course for the relevant direction [here, $\Delta(1)$] that must be fine-tuned to reach the critical point. Starting from a cuspless initial condition for $\Delta_{k=\Lambda}(z)$ at the ultraviolet scale, one ends up after fine-tuning the relevant parameter $\Delta(1)$ at a cuspless fixed point, and the critical exponents are given by the dimensional-reduction predictions. However, at the time, we did not systematically investigate the stability of the cuspless fixed point with respect to a *cuspy* perturbation. This had been done by Sakamoto et al.[18] in the large N limit in an expansion in $1/N$, at one- and two-loop orders. The outcome was that the cuspless fixed point is then stable to all perturbations, with and without a cuspy functional behavior.

We are primarily interested in the eigenvalue $\lambda(N)$ associated with a cuspy eigenfunction $f_N(z)$. It coincides with $\Lambda_{3/2}$ obtained from Eqs. (7, 8) and reads:

$$\frac{\lambda(N)}{\epsilon} = \frac{1}{4(N+7)}\left(3(N+4)\sqrt{\frac{N-18}{N-2}} - N + 8\right) \tag{9}$$

where a positive value means an irrelevant direction. One checks that the result of Ref. [18] is recovered in the large N limit: $\lambda(N)/\epsilon = 1/2 - 9/(2N) - 57/(2N^2) + O(1/N^3)$. We have plotted the eigenvalue $\lambda(N)$ in Fig. 2. It decreases as N decreases, reaches zero when $N = N_{\rm cusp} = 2(4 + 3\sqrt{3}) \simeq 18.3923\cdots$ and then changes sign. (Its value in $N = 18$ is equal to $-1/10$.) The cuspless fixed point therefore becomes unstable with respect to a cuspy perturbation at a value of N which is slightly larger than the value $N_{\rm DR} = 18$ below which cuspless fixed points no longer exist.

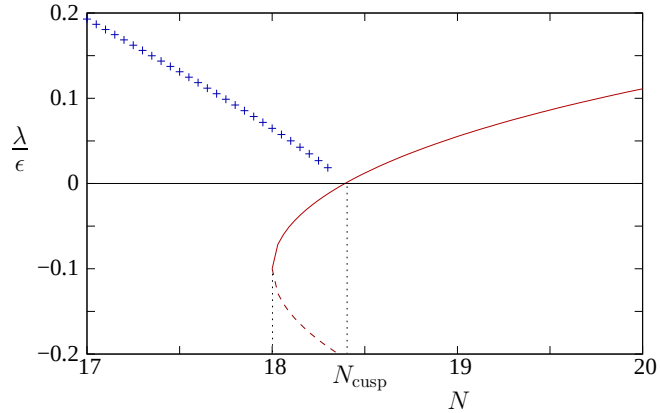

FIG. 2: RF$O(N)$M at one-loop order in $d = 4+\epsilon$: Eigenvalue $\lambda(N)/\epsilon$ associated with a cuspy perturbation around different fixed points. The full curve corresponds to the cuspless critical fixed point associated with dimensional reduction [Eq. (9)], the dashed line corresponds to the unstable conjugate cuspless fixed point [Eq. (10)], and the crosses correspond to the cuspy fixed point.

We have repeated the analysis for the other cuspless fixed point that is somehow conjugate to the critical one described above but has one more (cuspless) relevant direction.[3,15] It is characterized by $\Delta_*(1) = \epsilon/(N-2)$ and $\Delta'_*(1) = \epsilon[(N-8) + \sqrt{(N-2)(N-8)}]/[2(N-2)(N+7)]$. The two cuspless fixed point merge and disappear when $N = N_{\rm DR} = 18$. The eigenvalue associated with a cuspy perturbation around this unstable cuspless fixed point is now given by

$$\frac{\lambda(N)}{\epsilon} = \frac{1}{4(N+7)}\left[-3(N+4)\sqrt{\frac{N-18}{N-2}} - N + 8\right]. \tag{10}$$

A cuspy perturbation is therefore a relevant direction from $N \to \infty$, where it behaves as $-1 + 12/N - 24/N^2 + O(1/N^3)$, down to $N_{\rm DR}$. This is also displayed in Fig. 2.

The destabilization of the cuspless critical (*i.e.* stable) fixed point at $N_{\rm cusp}$ occurs in a standard way. We find by a numerical integration of the beta function that there exists a third fixed point, characterized by a cuspy functional form, which coincides with the cuspless critical fixed point for $N = N_{\rm cusp}$ and is stable for $N < N_{\rm cusp}$. The second smallest eigenvalue for this cuspy fixed point is also shown in Fig. 2. The general scenario for the exchange of stability of the fixed points is therefore quite common and appears in many other situations, such as for instance the destabilization of the $O(N)$ Wilson-Fisher fixed point upon adding anisotropic interactions.[19] We give in Fig. 3 a schematic description of the RG flows to illustrate the evolution of the different fixed points.

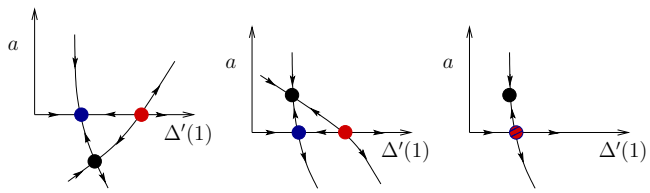

FIG. 3: Schematic flow for the RFO(N) model in the plane $(\Delta'(1), a)$ where a represents the amplitude of the cusp. The blue and red points represent the stable and unstable analytic fixed points and the black point represents the cuspy fixed point. Left: for $N > N_{\rm cusp}$; middle: $N_{\rm DR} < N < N_{\rm cusp}$; right: $N = N_{DR}$. In the presence of a cusp ($a \neq 0$), $\Delta'(1)$ should be interpreted as (minus) the coefficient of the linear term in $(1-z)$ when $z \to 1$.

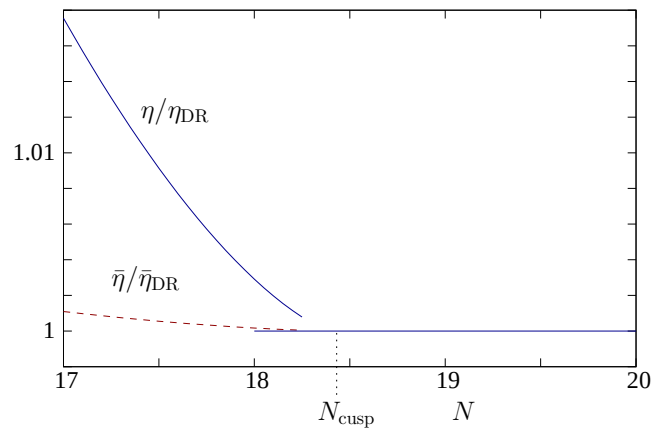

FIG. 4: Anomalous dimensions η (full line) and $\bar{\eta}$ (dashed line), normalized by their dimensional-reduction value $\epsilon/(N-2)$, as a function of N. For $N > N_{\rm cusp}$, the stable fixed point leads to dimensional reduction. For $N_{\rm DR} < N < N_{\rm cusp}$ we find a cuspless (unstable) fixed point which leads to dimensional reduction and a cuspy (stable) one associated with a breakdown of the dimensional reduction. For $N < N_{\rm DR}$, only the cuspy fixed point with dimensional-reduction breakdown remains.

The previous discussion makes it clear that there is a small domain $N_{\rm DR} < N < N_{\rm cusp}$ where the critical behavior is described by the dimensional-reduction property if the initial condition of the flow is cuspless, but where it is governed by a cuspy fixed point and a breakdown of dimensional reduction otherwise. One should keep in mind that the FRG framework considered here starts with a coarse-grained Landau-Ginzburg description of the system at the microscopic (ultraviolet) scale: see Eq. (1). As long as there exists only one fixed point and that we limit our investigation to the critical physics, the detailed properties of the microscopic system are irrelevant. However, in the small region between $N_{\rm DR}$ and $N_{\rm cusp}$, the situation is more intricate. A discussion of the $d = 0$ (1-site) problem[4] shows that the presence of a cusp at the microscopic level, which is associated with avalanches, is most probably the rule rather than the exception at $T = 0$. This implies that physical systems at $T = 0$ are likely to always flow to the cuspy fixed point when $N < N_{\rm cusp}$.[20]

Once the cuspy fixed-point solution is (numerically) obtained, we can derive the critical exponents, in particular the two anomalous dimensions η and $\bar{\eta}$. We focus here on the vicinity of $N_{\rm cusp}$, which was not considered previously. We display in Fig. 4 the two anomalous dimensions normalized by their dimensional-reduction expression $\eta_{\rm DR} = \bar{\eta}_{\rm DR} = \epsilon/(N-2)$. The numerical determination of the fixed-point solution near $N_{\rm cusp}$ is difficult because of the presence of several fixed points which are close one to another, and we were not able to determine the cuspy fixed point with sufficient accuracy near $N_{\rm cusp}$. It is however clear numerically that for N slightly larger than $N_{\rm DR}$ there exists indeed two fixed points, with different anomalous dimensions.

We now discuss the behavior of the eigenfunction associated with the cuspy perturbation around the cuspless fixed point. From the work of Sakamoto et al.,[18] one knows that the physical eigenfunction $f_N(z)$ with a cusp is a linear combination of two solutions of the eigenvalue equation, $f_N^{(-)}(z)$ and $f_N^{(+)}(z)$, the former having a cusp when $z \to 1$, *i.e.* $f_N^{(-)}(z) \simeq \sqrt{1-z}\,[1 + O(1-z)]$, and the latter one having only a subcusp, *i.e.* $f_N^{(+)}(z) \simeq (1-z)^{\alpha_+(N)}[1 + O(1-z)]$. Both functions, $f_N^{(-)}(z)$ and $f_N^{(+)}(z)$, individually diverge in $z = -1$ and are therefore not acceptable eigenfunctions. It is however possible to choose the coefficients of the linear combination so that the divergence in $z = -1$ of the two functions cancel. By continuity, we expect that this mechanism, which has been checked to order $1/N^2$, still applies as one decreases N.

One should therefore find two eigenfunctions, one with a cusp and one with a subcusp in $(1-z)^{\alpha_+(N)}$, to ensure that a linear combination of the two has a proper behavior in $z = -1$. The expression for $\alpha_+(N)$ is obtained by imposing

$$\Lambda_{\alpha_+ + 1}(\Delta_\star(1), \Delta'_\star(1)) = \lambda(N)/\epsilon\,, \tag{11}$$

where $\Lambda_{\alpha_+ + 1}$ is obtained from Eq. (7). We thus get

$$\alpha_+(N) = \frac{1}{4}\left(N - 10 + \sqrt{(N-2)(N-18)}\right)\,. \tag{12}$$

We show in Fig. 5 the behavior of α_+ and α_* as a function of N. We observe that α_+ is smaller than α_* for large N (where α_+ and α_* behave as $N/2-5+\mathcal{O}(1/N)$ and $N/2-9/2+\mathcal{O}(1/N)$, respectively). For smaller values of N, α_+ becomes larger than α_* (in particular $\alpha_*(N=18) = 3/2$ and $\alpha_+(N=18) = 2$). The two curves cross exactly at $N_{\rm cusp}$. This is not a surprise since for $N = N_{\rm cusp}$, $\lambda = 0$, which implies that the conditions in Eqs. (11) and (8) are degenerate.

The same analysis can be carried out at the two-loop order. To do so, we have used the FRG equations derived in Ref. [3]. We can then obtain the eigenvalue $\lambda(N)$ at

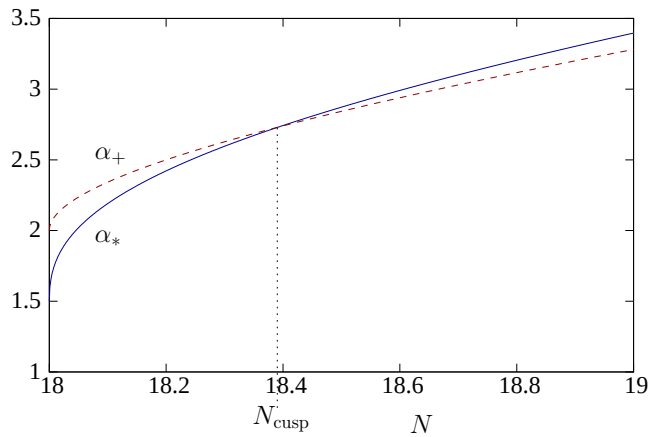

FIG. 5: Behavior of the leading singularity $\alpha_*(N)$ of the cuspless critical fixed point (solid line) and of the sub-leading singularity $\alpha_+(N)$ of the cuspy eigenfunction around this fixed point (dashed line).

order $\epsilon = d - 4$, which allows us to determine $N_{\rm cusp}$ at first order in ϵ:

$$N_{\rm cusp}(d) = 2(4 + 3\sqrt{3}) - 3\frac{(2 + 3\sqrt{3})}{2}\epsilon\,. \qquad (13)$$

When compared to the result for $N_{\rm DR}$, $N_{\rm DR}(d) = 18 - \frac{49}{5}\epsilon$,[3] it can be seen that the absolute value of the slope (with ϵ or d) is larger for $N_{\rm cusp}(d)$ than for $N_{\rm DR}(d)$. By extrapolating the results, we therefore find that the two lines meet for $d = d_{\rm x} \simeq 4.4$ and $N = N_{\rm x} \simeq 14$. For the RFIM, where $N = 1$ and $d_{\rm DR} \simeq 5.1$, one should thus expect another scenario for the destabilization of the dimensional-reduction fixed point than the one found near $d = 4$. Indeed, for $d > 4.4$, the cuspless critical fixed point disappears for $N_{\rm DR}$ when it is still stable with respect to a cuspy perturbation.

We would like to emphasize again that the annihilation and disappearance of a pair of fixed points, with a square-root behavior of a coupling constant like in Eq. (5), is a rather common phenomenon in field theories, when several marginal operators are compatible with the symmetries of the problem. This situation is encountered in the Potts model,[21,22] in superconductors,[23,24] in Josephson junction arrays,[25] in He_3,[26,27] in smectic liquid crystals,[28] in electroweak phase transitions[29,30] and in frustrated magnets.[31] In all of these cases, the two fixed points meet and annihilate at some critical dimension. Beyond this dimension, the fixed-point characteristics acquire an imaginary part and are no longer of physical relevance. In the absence of a stable fixed point, the RG flow typically leads the system toward a region where the potential is unbounded from below because of operators of higher orders (ϕ^6 terms for instance). This is in general interpreted as signaling the occurrence of a first-order transition.

This is however *not* what we find in the numerical analysis of the FRG flow equations for the RFIM. The typical situation is that there does exist a fixed point beyond the line where the two cuspless fixed points annihilate. In the next section, we present a toy model which we use to illustrate how a cuspy fixed point can emerge continuously from the annihilation of two cuspless fixed points. This unusual situation is made possible because we are renormalizing a full function, while in the situations previously mentioned, only a finite number of coupling constants are considered.

III. TOY MODEL

We treat here a partial differential equation which is a generalization of the 1-loop flow equation of the RF$O(N)$M in Eq. (2). We consider a function $\Delta(z)$ where $z \in [-1, 1]$. The evolution under the RG flow is given by the following equation:

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta_k(z) =& \Delta_k(z) - \Delta_k(z)\Delta_k'(z) - (\Delta_k(z) - z\Delta_k'(z))\Delta_k(1) \\ &+ B\big[\Delta_k(1) - z\Delta_k(z)\big]\big[\Delta_k(z) + z\Delta_k'(z)\big] + \\ &\frac{A}{2}(1 - z^2)\Delta_k'(z)\big[2z\Delta_k'(z) - (1 - z^2)\Delta_k''(z)\big]\,.\end{aligned} \qquad (14)$$

The beta function depends on two parameters, A and B, which replace the two parameters d and N of the RF$O(N)$M.

We start our study of the toy model by a determination of the region of parameters where cuspless fixed points exist. Assuming for now that the function Δ_k is sufficiently regular, (*i.e.*, that the first derivative is finite in $z = 1$), we get the following flow equations:

$$\partial_t \Delta_k(1) = \Delta_k(1)\big[1 - \Delta_k(1)\big] \qquad (15)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \Delta_k'(1) =& - B\big[\Delta_k(1) + \Delta_k'(1)\big]^2 \\ &+ \Delta_k'(1)\big[1 - (1 + 2A)\Delta_k'(1)\big]\,.\end{aligned} \qquad (16)$$

Note that one has the property of the RF$O(N)$M that the flow of $\Delta_k(1)$ depends on $\Delta_k(1)$ only and that the flow of $\Delta_k'(1)$ depends on $\Delta_k(1)$ and $\Delta_k'(1)$ only. The "critical" fixed-point solution of interest is $\Delta_\star(1) = 1$, which is once unstable in the direction $\Delta(1)$ (the associated eigenvalue is negative). The beta function for $\Delta'(1)$, which is a polynomial in $\Delta'(1)$, admits a real fixed-point solution for

$$B \leq B_{\rm DR}(A) = \frac{1}{8(1 + A)}\,. \qquad (17)$$

If this condition is fulfilled, the solution reads

$$\Delta_\star'(1) = \frac{1 - 2B - \sqrt{1 - 8B(1 + A)}}{2(1 + 2A + B)}\,. \qquad (18)$$

There is also a conjugate fixed point, with a plus sign in front of the square root, which has at least two unstable directions and is therefore not associated with a critical point.

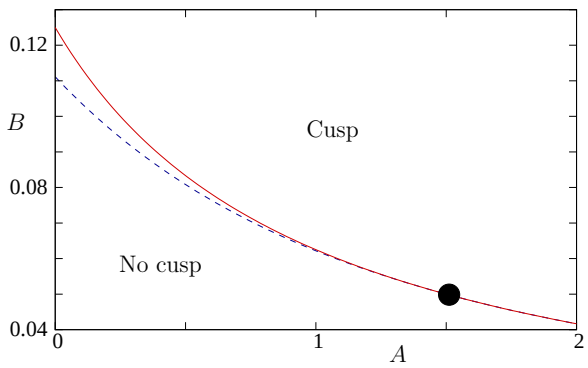

FIG. 6: Toy model phase diagram in the (A, B) plane. The curve $B_{\rm DR}(A)$ (full red line) is the boundary at which the cuspless fixed points present below it merge and annihilate. The curve $B_{\rm cusp}(A)$ (dashed blue line) is where the cuspless critical fixed point becomes unstable to a cuspy perturbation. The black point at $(A_{\rm x} = 3/2, B_{\rm x} = 1/20)$ is the intersection between the two curves. To the left of this point, when B is increased, the cuspless fixed point first exchanges stability with a cuspy fixed point for $B = B_{\rm cusp}$, before it disappears at $B = B_{\rm DR}$. To the right of this point, the cuspless critical fixed point is stable up to $B = B_{\rm DR}$. Between the two lines, the cuspless critical fixed point exists but is unstable with respect to a cuspy perturbation. Note the similarity with Fig. 1, except that the regions with or without cusp are not located in the same place.

We now consider the vicinity of the cuspless critical fixed point and derive the eigenvalue Λ_{p+1} associated with a perturbation whose functional form near $z = 1$ starts with $\sim (1-z)^p$. A simple calculation leads to

$$\begin{aligned}\Lambda_{p+1} =& 1 + \Delta_\star(1)[p - 1 - B(p+1)] \\ &- \Delta'_\star(1)(p+1)[1 + 2Ap + B]\,.\end{aligned} \tag{19}$$

The eigenvalue $\lambda = \Lambda_{3/2}$ is of particular interest because it is associated with the cuspy direction. In the region $B < B_{\rm DR}$ where the cuspless critical fixed point exists we find that the cuspy direction is a relevant perturbation around the latter for $B_{\rm cusp}(A) < B < B_{\rm DR}(A)$ and $A < A_{\rm x} = 3/2$, with

$$B_{\rm cusp}(A) = \frac{-16 - 21A - 9A^2 + (4+3A)\sqrt{25 + 18A + 9A^2}}{36(1+A)}\,. \tag{20}$$

Observe that $B_{\rm cusp}(A = A_{\rm x} = 3/2) = B_{\rm DR}(A = A_{\rm x} = 3/2) = 1/20$ and that the eigenvalue λ is then equal to zero, which means that, for this particular value of A, the cusp is marginal when the cuspless fixed point vanishes. We summarize these findings in Fig. 6.

Another way of presenting the results is to evaluate λ along the curve $B = B_{\rm DR}(A)$. We then find

$$\lambda(A, B_{\rm DR}(A)) = \frac{-3 + 2A}{4(3+4A)}\,. \tag{21}$$

For $A < A_{\rm x} = 3/2$, the cuspy direction is already relevant when $B = B_{\rm DR}(A)$. This is the typical situation encountered close to $d = 4$ in the RF$O(N)$M at one-loop order. On the contrary, for $A > A_{\rm x} = 3/2$, the cuspy direction is still irrelevant when the cuspless fixed points annihilate for $B = B_{\rm DR}(A)$, which is the typical situation for the RFIM close to $d = 5.1$.

We now study how a cuspy fixed point can appear when the cuspless fixed points annihilate and disappear. We focus on the immediate vicinity of $B_{\rm DR}$ and define, for a given A, $B = B_{\rm DR}(A) + \epsilon'$. We anticipate that the cusp should appear in a boundary layer around $z = 1$ that shrinks to zero as ϵ' goes to zero. We therefore make the following ansatz:

$$\Delta_k(z) = 1 - \epsilon f_k\left(\sqrt{\frac{1-z}{\epsilon}}\right)\,, \tag{22}$$

where $\epsilon \to 0$ when $\epsilon' \to 0$. After inserting this expression in the flow equation, Eq. (14), and expanding at leading order in ϵ, we get

$$\begin{aligned}\partial_t f_k(y) = -\frac{1}{16(1+A)}\Big\{&\frac{9+8A}{y} f'_k(y)[f_k(y) - f_k(0)] \\ &+ 2y^2 + 2f_k(y) + (7+8A)[2f_k(0) - y f'_k(y)] \\ &+ 4A(1+A) f'_k(y)[f'_k(y) + y f''_k(y)]\Big\}\end{aligned} \tag{23}$$

where $y = \sqrt{(1-z)/\epsilon}$. Note that ϵ' which measures the distance to $B_{\rm DR}$ does not appear in this equation. This means that, at least at this level, we are unable to relate the typical size of the boundary layer to the distance to $B_{\rm DR}$. We simply assume here that both tend to zero simultaneously.

We are interested in the fixed-point solution of the above flow equation. For $y \gg 1$, *i.e.* outside the boundary layer, the fixed-point function behaves as

$$f_\star(y) \sim_{y\gg 1} \frac{y^2}{3+4A}\,. \tag{24}$$

When inserted in Eq. (22) this leads to $\Delta_*(z) = 1 - (1-z)/(3+4A)$, which coincides with the expansion near $z = 1$ of the cuspless fixed point in $B = B_{\rm DR}(A) = 1/[8(1+A)]$ [see Eq. (18)], *i.e.* for $\epsilon' = 0$.

Expanding now Eq. (23) for small y (inside the boundary layer, where $y \ll 1$), we find that the flow equation of $f_k^{(p)}(0)$ depends only on the $p+1$ first derivatives at the origin. We can therefore solve iteratively the fixed-point solution and express the derivatives of $f_*(y)$ at the origin as a function of one unknown, $f_\star(0)$. We find in particular that

$$\frac{f'_\star(0)^2}{f_\star(0)} = -\frac{16(1+A)}{(3+2A)^2} \tag{25}$$

$$f''_\star(0) = \frac{2(5+8A)}{3(9+16A+8A^2)}\,. \tag{26}$$

This allows us to make predictions for the behavior of the original function. When $1 - z \to 0$ (inside the boundary

layer), we expand $\Delta_\star(z)$ as

$$\Delta_\star(z) = \Delta_\star(1) - a_\star\sqrt{1-z} + \Delta_{\star,1}(1-z) + \cdots \quad (27)$$

$\Delta_{\star,1}$ should not be interpreted here as the first derivative of $\Delta_\star(z)$ in $z=1$ because of the singular dependence in $\sqrt{1-z}$. We then derive that

$$\frac{a_\star^2}{1-\Delta_\star(1)} = \frac{f_\star'(0)^2}{f_\star(0)} = -\frac{16(1+A)}{(3+2A)^2} \quad (28)$$

$$\Delta_{\star,1} = \frac{f_\star''(0)}{2} = \frac{5+8A}{3(9+16A+8A^2)}\,. \quad (29)$$

A direct comparison of Eq. (29), which is valid when $B \to B_{\rm DR}(A)^+$, with the result for $B = B_{\rm DR}(A)$, obtained from Eq. (18) with $B = B_{\rm DR}(A) = 1/[8(1+A)]$ or from the outer boundary-layer solution described above, shows that $\Delta_{\star,1}$ is in general discontinuous for $B = B_{\rm DR}$, except in $A = 3/2$ where $\Delta_{\star,1}|_{B_{\rm DR}^+} = \Delta_{\star,1}|_{B_{\rm DR}} = 1/9$. On the contrary, $\Delta_\star(1)$ is always continuous in $B_{\rm DR}$ and so is the amplitude of the cusp $a_\star$ that continuously goes to zero as $B \to B_{\rm DR}$. As a consequence, the critical exponents that depend only on $\Delta_\star(1)$ and on the amplitude of the cusp, which is the case of the exponent ν of the correlation length and of the anomalous dimensions,[3] are continuous. On the other hand, eigenvalues that depend on $\Delta_{\star,1}$ are not: this is the case for instance of the eigenvalue λ associated with a cuspy perturbation. Although $\Delta_\star(z)$ is a continuous function of B at fixed z when B increases from $B_{\rm DR}$, some properties of the fixed point may be discontinuous, which is a very unusual situation in the RG of critical phenomena.

We have checked by a direct numerical integration of the flow equation in Eq. (14) that the behaviors predicted above are indeed observed. This is illustrated for $A = 8 > A_{\rm x}$: Fig. 7 for $\Delta_{\star,1}$ and Fig. 8 for the eigenvalue λ.

Finally, in the particular case $A = 0$, we have been able to solve analytically the fixed-point equation in Eq. (24). There is a unique family of solutions parametrized by $f_*(0)$. It can be expressed in terms of the Lambert function $W(x)$ (solution of $W \exp W = x$):

$$f_*(y) = \frac{y^2}{3} + f_*(0)\left\{-1 + 2\exp\left[1 + W\left(-\frac{2y^2+9f_*(0)}{9ef_*(0)}\right)\right]\right\}. \quad (30)$$

It is easily checked that the above solution satisfies the limiting behaviors described above when $y \to \infty$ and $y \to 0$. Note that this case corresponds to the region where $A < A_{\rm x}$ and that the above cuspy fixed point which emerges from the merged cuspless ones is unstable. Another cuspy fixed is present and is stable for $B > B_{\rm cusp}$ [here, $B_{\rm cusp}(A=0) = 1/9$]. The generic situation is that there are two cuspy fixed points above $B_{\rm DR}$, one stable and one unstable, one that appears through a boundary-layer mechanism at $B_{\rm DR}$ and one that is already present below $B_{\rm DR}$.

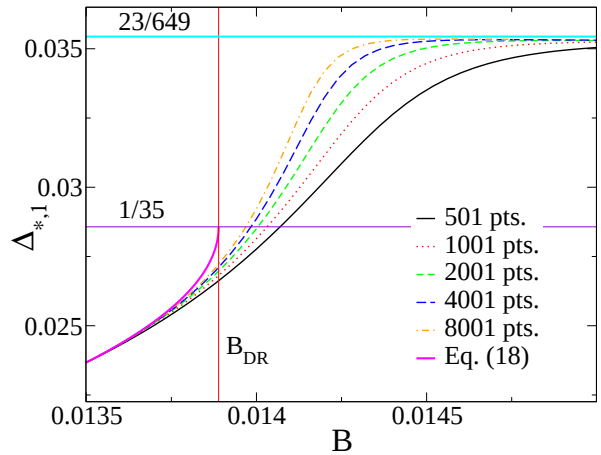

FIG. 7: $\Delta_{\star,1}$ as a function of B for $A = 8$. For $B < B_{\rm DR}(A = 8) = 1/72$, the numerical solution approaches the predicted result in the absence of a cusp, 1/35, when finer meshes (larger number of points) are considered. For B approaching 1/72 from above, the numerical solution tend to 23/649, which is the solution extracted from the analysis of the boundary layer, see Eq. (29).

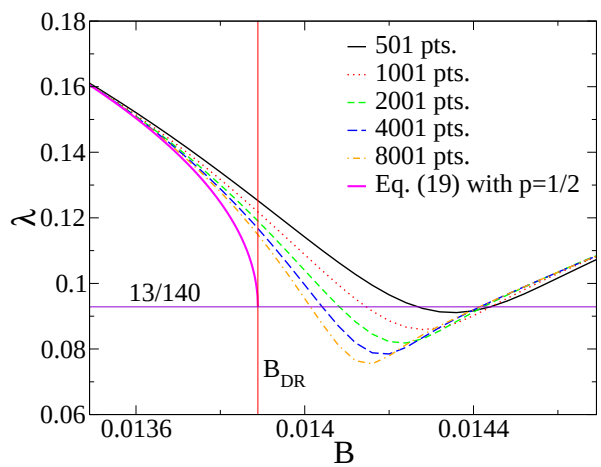

FIG. 8: Eigenvalue λ of the cuspy direction around the stable fixed point as a function of B around $B_{\rm DR}$ for $A = 8$. For $B < B_{\rm DR}$, the numerical results tend to the exact analytical solution. For larger B, the numerical solution clearly tends to a lower value for finer meshes (larger number of points). This indicates that the eigenvalue λ is discontinuous at $B_{\rm DR}$.

IV. THE SHORT- AND LONG-RANGE RFIM

We have next investigated the d-dimensional RFIM ($N = 1$). In this case however, a nonperturbative FRG (NP-FRG) is required.[1,2,4] The central quantity is now the dimensionless cumulant of the renormalized random field $\delta_k(\varphi_1, \varphi_2)$. It follows an FRG equation that is coupled to other functions describing the flow of the disorder-averaged effective action (the latter is described in a derivative expansion[1,4]). The flow equations can be sym-

bolically written as

$$\begin{aligned} -\partial_t u'_k(\varphi) &= \beta_{u'}(\varphi), \\ -\partial_t z_k(\varphi) &= \beta_z(\varphi), \\ -\partial_t \delta_k(\varphi_1,\varphi_2) &= \beta_\delta(\varphi_1,\varphi_2), \end{aligned} \tag{31}$$

where as before $t = \log(\Lambda/k)$; $u_k(\varphi)$ is the dimensionless effective average potential (*i.e.*, the local component of the disorder-averaged effective action) and $z_k(\varphi)$ is the dimensionless function describing the renormalization of the field. The beta functions themselves depend on u'_k, z_k, δ_k and on their derivatives. Their expressions are given in Ref. [4] and are not reproduced here.

We consider first the usual short-range RFIM in which both the interactions and the random-field correlations are short-ranged [see Eq. (1) and below]. Fixed points are studied by setting the left-hand sides of the equations in Eq. (31) to zero. The zero-temperature fixed point controlling the critical behavior has been determined in a previous investigation:[4] above a dimension $d_{\rm DR}$ close to 5.1, there exists a cuspless fixed point that can be reached when starting from a regular, cuspless, initial condition. The presence or absence of a cusp now refers to the dependence of $\delta_k(\varphi_1,\varphi_2)$ on the field difference $\varphi_2-\varphi_1$. For its description, it turns out to be more convenient to change variable from φ_1 and φ_2 to $\varphi = (\varphi_1+\varphi_2)/2$ and $y = (\varphi_1-\varphi_2)/2$. The putative cusp is now in the variable y. For $d > d_{\rm DR}$, the (critical) cuspless fixed point, which is characterized in the limit $y \to 0$ by

$$\delta_*(\varphi,y) = \delta_{*,0}(\varphi) + \frac{1}{2}\delta_{*,2}(\varphi)y^2 + \mathcal{O}(|y|^3)\,, \tag{32}$$

is stable with respect to cuspless perturbations, except of course for the relevant direction that corresponds to a fine-tuning to the critical point. As already stressed, such a fixed point corresponds to the $d \to d-2$ dimensional reduction.

We have also investigated the stability of the cuspless, dimensional-reduction, fixed point with respect to a cuspy perturbation. We have followed the procedure described above for the RF$O(N)$M near $d = 4$. We search for a physical eigenfunction $f(\varphi,y)$ with a linear cusp in y that is a linear combination of two solutions of the associated eigenvalue equation, $f^{(-)}(\varphi,y)$ and $f^{(+)}(\varphi,y)$, the former having a cusp when $y \to 0$, *i.e.* $f^{(-)}(\varphi,y) \simeq |y|[f_-(\varphi)+O(y^2)]$, and the latter having a subcusp only, *i.e.* $f^{(+)}(\varphi,y)) \simeq |y|^{\alpha_+(d)}[f_+(\varphi)+O(y^2)]$ with $\alpha_+(d)$ odd or noninteger. The linear combination should ensure that all divergences are cancelled and that the physical eigenfunction is defined for all values of y.

The corresponding eigenvalue λ can then be determined by considering the vicinity of the fixed point with $\delta_k(\varphi,y) \simeq \delta_*(\varphi,y) + k^\lambda f(\varphi,y)$ and $f(\varphi,y) \simeq |y| f_-(\varphi)$ when $y \to 0$. By linearizing the flow equation for δ_k around δ_*, fixing $u'_k(\varphi)$ and $z_k(\varphi)$ to their fixed-point values, and expanding around $y = 0$, it is easy to derive that $f_-(\varphi)$ satisfies the following eigenvalue equation:

$$\begin{aligned} &\lambda f_-(\varphi) = \frac{1}{2}(d-4+3\eta)f_-(\varphi) + \frac{1}{2}(d-4+\eta)\varphi f'_-(\varphi) + \\ &v_d\,\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dx\, x^{\frac{d}{2}-1}\Big\{\frac{3}{2}f_-(\varphi)\Big(4z'_*(\varphi)p_*(x,\varphi)p_*^{(0,1)}(x,\varphi) + \\ &4[z_*(\varphi)+s'(x)]p_*^{(0,1)}(x,\varphi)^2 + [z''_*(\varphi)-\delta_{*,2}(\varphi)]p_*(x,\varphi)^2\Big) \\ &+ 3f'_-(\varphi)p_*(x,\varphi)\Big(2[z_*(\varphi)+s'(x)]p_*^{(0,1)}(x,\varphi) + \\ &z'_*(\varphi)p_*(x,\varphi)\Big) + f''_-(\varphi)[z_*(\varphi)+s'(x)]p_*(x,\varphi)^2\Big\}\,, \end{aligned} \tag{33}$$

where $v_d^{-1} = 2^{d+1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)$, partial derivatives are denoted by superscripts in parentheses, and x is the square of the dimensionless momentum; $p_*(x,\varphi) = [xz_*(\varphi) + s(x) + u''_*(\varphi)]^{-1}$ is the (dimensionless) "propagator", *i.e.* the so-called "connected" 2-point correlation function, and $s(x)$ is a (dimensionless) cutoff function. (Choices of appropriate functional forms for $s(x)$ are discussed in Ref. [4].) Finally, $\widetilde{\partial}_t$ is an operator acting only on the cutoff function $s(x)$ (appearing explicitly or through the dimensionless propagator) with $\widetilde{\partial}_t s(x) \equiv (2-\eta)s(x) - 2xs'(x)$. In deriving the above equation, we have used the fact that $\bar{\eta} = \eta$ and $\delta_{*,0}(\varphi) = z_*(\varphi)$, which are properties of the cuspless, dimensional-reduction, fixed point resulting from the underlying supersymmetry.[4]

An equation for the fixed-point function $\delta_{*,2}(\varphi)$ that appears in Eq. (33) can be also derived by inserting the expansion in powers of y of $\delta_*(\varphi,y)$ [see Eq. (32)] in the corresponding beta function in Eq. (31). The algebra is straightforward but cumbersome and leads to:

$$\begin{aligned} &0 = (d-4+2\eta_*)\delta_{*,2}(\varphi) + \frac{1}{2}(d-4+\bar{\eta}_*)\varphi\delta'_{*,2}(\varphi) + \\ &v_d\tilde{\partial}_t \int_0^\infty dx\, x^{\frac{d}{2}-1}\Big\{\Big(4\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)\tilde{p}_*^{(0,2)}(x,\varphi)z'_*(\varphi)\big[z_*(\varphi) \\ &+ s'(x)\big] + 5\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)^2 z'_*(\varphi)^2 + \tilde{p}_*(x,\varphi)\big(2\tilde{p}_*^{(0,2)}(x,\varphi)\times \\ &z''_*(\varphi)\big[z_*(\varphi)+s'(x)\big] + 7\tilde{p}_*^{(0,2)}(x,\varphi)z'_*(\varphi)^2 + \\ &4z'_*(\varphi)\big(2z''_*(\varphi)\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi) + \tilde{p}_*^{(0,3)}(x,\varphi)\big[\delta_{*,0}(\varphi)+s'(x)\big]\big)\Big) \\ &- 2\big[\tilde{p}_*^{(0,2)}(x,\varphi)^2 - \tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)\tilde{p}_k^{(0,3)}(x,\varphi)\big]\big[z_*(\varphi)+s'(x)\big]^2 \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{p}_*(x,\varphi)^2\big[z''_*(\varphi)^2 + 2z_*^{(3)}(\varphi)z'_*(\varphi)\big] + 3\,\delta_{*,2}(\varphi)\times \\ &\Big(4\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)\tilde{p}_*(x,\varphi)z'_*(\varphi) + 4\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)^2\big[z_*(\varphi)+s'(x)\big] \\ &+ \tilde{p}_*(x,\varphi)^2 z''_*(\varphi)\Big) + \delta'_{*,2}(\varphi)\Big(4\tilde{p}_*(x,\varphi)\big(2\tilde{p}_*^{(0,1)}(x,\varphi)\times \\ &\big[z_*(\varphi)+s'(x)\big] + \tilde{p}_*(x,\varphi)z'_*(\varphi)\big)\Big) + \delta''_{*,2}(\varphi)\tilde{p}_*(x,\varphi)^2\times \\ &\big[z_*(\varphi)+s'(x)\big] - \frac{3}{2}\delta_{*,2}(\varphi)^2\tilde{p}_*(x,\varphi)^2\Big\}\,, \end{aligned} \tag{34}$$

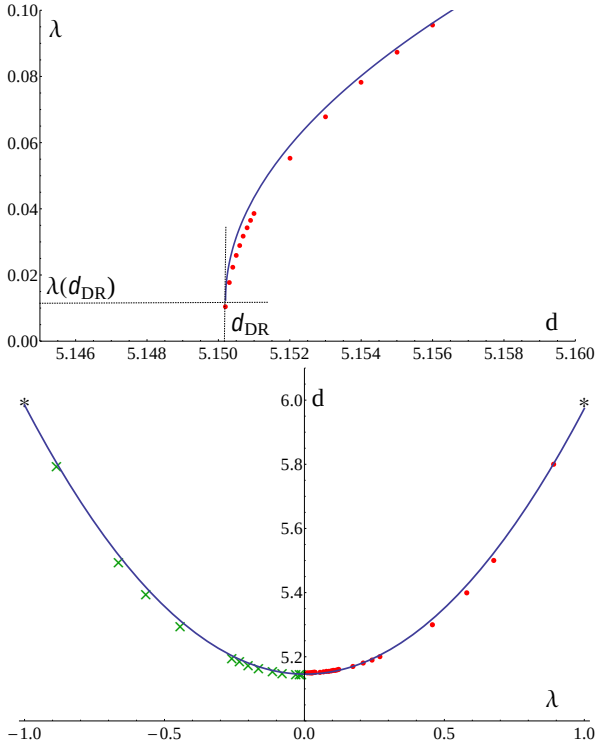

FIG. 9: Short-range RFIM within the NP-FRG. Top figure: Variation with d of the eigenvalue λ associated with a cuspy perturbation around the stable cuspless fixed points when $d \geq d_{\rm DR} \simeq 5.1$. The dots (color online red) are obtained from the NP-FRG flow equations. The (color online blue) curve is a fit described in the text. At the dimension $d_{\rm DR}$, the eigenvalue is small but strictly positive. Bottom figure: Eigenvalue λ of the cuspy perturbation around the stable cuspless fixed point (red points) and the unstable cuspless fixed point (green crosses). The black stars correspond to the exact values (-1 and +1) obtained in $d = 6$.

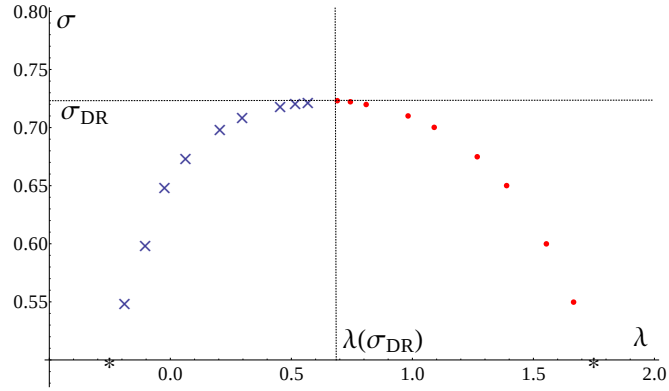

FIG. 10: RFIM with long-ranged interactions and disorder correlation in $d = 3$ within the NP-FRG. Variation of the eigenvalue λ associated with a cuspy perturbation around the stable cuspless fixed point (red dots) and around the unstable cuspless fixed point (blue crosses). Note that $\lambda(\sigma_{\rm DR}) \simeq 0.7$ is unambiguously strictly positive. The black stars correspond to the exact solutions (-1/4 and 7/4) at $\sigma = 1/2$.

where we have used that $\delta_{*,0}(\varphi) = z_*(\varphi)$. From the knowledge of $u'_*(\varphi)$ and $z_*(\varphi)$, which are obtained from two coupled equations (see Ref. [4]), we first solve the equation for $\delta_{*,2}(\varphi)$ and then use the input to solve Eq. (33). All partial differential equations are numerically integrated on a one-dimensional grid by discretizing the field φ.

The resulting eigenvalue $\lambda(d)$ is plotted in Fig. 9. Note that λ can be calculated exactly at the Gaussian fixed point that controls the critical behavior at and above the upper critical dimension $d = 6$, and one finds $\lambda = 1$ with an associated eigenfunction $f(\varphi, y) = |y|$. As seen in the figure, λ is small but strictly positive when $d = d_{\rm DR}$, in agreement with the phase diagram displayed in Fig. 1.

We have also checked that there is an additional solution $f^{(+)}(\varphi, y)$ that is associated with the same eigenvalue λ and whose dependence on y starts with a subcusp when $y \to 0$. In addition, we have repeated the analysis for the cuspless unstable fixed point that is conjugate to the above critical one: it is characterized by the same $u'_*(\varphi)$ and $z_*(\varphi) = \delta_{*,0}(\varphi)$ but corresponds to another solution $\delta_{*,2}(\varphi)$ of Eq. (34). The eigenvalue associated with a cuspy perturbation around this fixed point is plotted in the bottom panel of Fig. 9 and it merges with that for the other fixed point for $d = d_{\rm DR}$. The cuspy eigenvalues for both cuspless fixed points have a square root behavior, as shown in the figure. We can fit these curves by a parabola, $d(\lambda) = 5.1503 - 0.0199\lambda + 0.8279\lambda^2$. We observe that $\lambda(d_{\rm DR})$ is slightly positive, as already mentioned, and that a cuspy perturbation around the *unstable* cuspless fixed point is marginal in a dimension slightly larger than $d_{\rm DR}$. From the results of the preceding sections, this indicates that, in the case of the short-range RFIM, the breaking of dimensional reduction is associated with the appearance of a cuspy fixed point through a boundary layer. However, since $\lambda(d_{\rm DR})$ is very small, we expect that the unusual features that signals the presence of a boundary-layer mechanism [in particular the discontinuity of the coefficient $\delta_{*,2}(\varphi)$ of the term in $y^2/2$ of the small y expansion of $\delta_*(\varphi, y)$] to be almost unobservable.

Consequently, we have also investigated the RFIM in the presence of both long-range interactions, which decay in space as $|x - y|^{-(d+\sigma)}$, and long-range correlations of the random field that vary as $|x - y|^{-(d-\rho)}$. We have recently shown that for a specific choice of the exponents characterizing these long-range spatial dependences, namely $\rho = 2 - \sigma$, a supersymmetry can still be present in the associated superfield theory.[5] This supersymmetry leads to a $d \to d - 2$ dimensional-reduction property. The corresponding cuspless fixed point exists below a critical value $\sigma_{\rm DR}$, which in $d = 3$ is found between 0.71 and 0.72 depending on the precise choice of the dimensionless cutoff function $s(x)$, and disappears above. (In this case, the analogs of the lower and upper critical dimensions are a critical value $\sigma = 1$ above which there is no transition and a critical value $\sigma = 1/2$ below which the exponents are described by mean-field theory.)

In this long-range model, we have repeated the analysis of a cuspy perturbation around the stable and unstable cuspless fixed points. For the stable (critical) fixed point the eigenvalue λ decreases from 7/4 for $\sigma = 1/2$ to ~ 0.7 for $\sigma_{\rm DR}$. The eigenvalue of the cuspy perturbation around the unstable fixed point increases from -1/4 for $\sigma = 1/2$ to 0.7 for $\sigma_{\rm DR}$ and passes through zero for $\sigma \simeq 0.66$. This is displayed in Fig. 10. In this case, the eigenvalue associated with the cuspy perturbation is unambiguously strictly positive when the two cuspless fixed points coalesce, as seen in Fig. 10, and the cuspy perturbation aound the unstable fixed point becomes marginal for $\sigma_{\rm cusp} \simeq 0.65$, which is significantly different from $\sigma_{\rm DR}$. We therefore expect a cuspy fixed point to appear through a boundary layer for $\sigma > \sigma_{\rm DR}$ with a sizable discontinuity in $\delta_{*,2}(\varphi)$ in $\sigma_{\rm DR}$. (Note that $\delta_{*,2}(\varphi)$ is obtained as the second derivative of $\delta_*(\varphi, y)$ with respect to y in $y = 0$ only in the absence of a cusp.)

To complement the above study of the stability of the cuspless fixed points above $\sigma_{\rm DR}$, we have integrated the flow equations [see eqs. (31)] without expanding in the y-direction. We focus on the long-range model. We find strong evidence for the occurrence of a boundary-layer mechanism for the appearance of a stable cuspy fixed point above $\sigma_{\rm DR}$. This is illustrated in Fig. 11 where we plot $\delta_{*,2}(\varphi)$ for two different values of φ as a function of σ around $\sigma_{\rm DR}$. It can be seen that a discontinuity builds up as the mesh size is decreased, very much as in the toy model (see in particular Fig. 7).

V. CONCLUSION

We have analyzed the mechanism by which the dimensional-reduction result breaks down in the RF$O(N)$M by following the appearance, disappearance, and change of stability of the (zero-temperature) fixed points. We have combined the perturbative FRG results near $d = 4$, at one and two loops, the nonperturbative FRG results, in particular for the short- and long-range RFIM, and a toy model. Dimensional reduction for the critical behavior of the model is associated with a cuspless fixed point and breaking of dimensional reduction with a cuspy fixed point. (We recall that the cuspless or cuspy character refers to the functional dependence of the dimensionless second cumulant of the renormalized random field[1–5] and is physically associated with the subdominant or dominant role of the avalanches in the correlation functions.[14])

The outcome of our study is an intricate scenario which is illustrated in the (N, d) phase diagram of Fig. 1. There are two different regimes separated by a threshold point whose estimated location is $(d_{\rm x} \simeq 4.4, N_{\rm x} \simeq 14)$. For smaller d and larger N, the cuspless fixed point that leads to dimensional reduction is destabilized by a cuspy fixed point for some $N = N_{\rm cusp}(d)$. This is a rather usual phenomenon, where two fixed points exchange their stability by crossing. For larger d and smaller N, the critical cuspless fixed point annihilates with an unstable cuspless fixed point for some $N = N_{\rm DR}(d)$. A new, cuspy, fixed point then emerges from these merged fixed points through a boundary-layer mechanism. This unusual phenomenon has some specific signatures in derivatives of the cumulants of the renormalized random field. These signatures appear too small to be detected in the standard short-range RFIM but can be numerically seen in the RFIM in the presence of long-ranged interactions and disorder correlations.

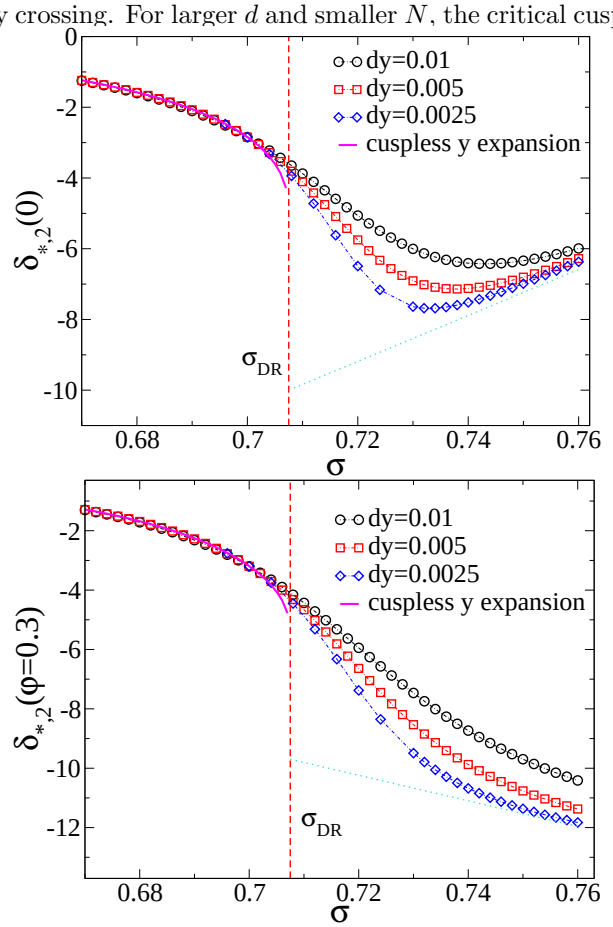

FIG. 11: NP-FRG fixed-point solutions for the long-range RFIM in $d = 3$. The coefficient $\delta_{*,2}(\varphi)$ of the $y^2/2$ term in the small y expansion of $\delta_*(\varphi, y)$ evaluated in $\varphi = 0$ (top panel) and in $\varphi = 0.3$ (bottom panel) as a function of σ around $\sigma_{\rm DR} \simeq 0.71$. When finer meshes (smaller dy) are considered, this quantity builds up a discontinuity, typical of the behavior expected from a boundary-layer mechanism.

VI. ACKNOWLEDGEMENT

I. Balog thanks Campus France for financial support.

* Electronic address: baczyk@lptmc.jussieu.fr
† Electronic address: tarjus@lptmc.jussieu.fr
‡ Electronic address: tissier@lptmc.jussieu.fr
§ Electronic address: balog@ifs.hr

[1] G. Tarjus and M. Tissier, Phys. Rev. Lett. **93**, 267008 (2004); Phys. Rev. B **78**, 024203 (2008).
[2] M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett. **96**, 087202 (2006); ; Phys. Rev. B **78**, 024204 (2008).
[3] M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. B **74**, 214419 (2006).
[4] M. Tissier and G. Tarjus, Phys. Rev. Lett. **107**, 041601 (2011); Phys. Rev. B **85**, 104202 (2012); *ibid* **85**, 104203 (2012).
[5] M. Baczyk, M. Tissier, G. Tarjus, and Y. Sakamoto, arXiv:1303.2053 (2013).
[6] A. Aharony, Y. Imry, and S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **37**, 1364 (1976).
[7] G. Grinstein, Phys. Rev. Lett. **37**, 944 (1976).
[8] A. P. Young, J. Phys. C **10**, L257 (1977).
[9] G. Parisi and N. Sourlas, Phys. Rev. Lett. **43**, 744 (1979).
[10] D. S. Fisher, Phys. Rev. Lett. **56**, 1964 (1986).
[11] O. Narayan and D. S. Fisher, Phys. Rev. B **46**, 11520 (1992); Phys. Rev. B **46**, 11520 (1993).
[12] P. Le Doussal, K. J. Wiese, and P. Chauve, Phys. Rev. B **66**, 174201 (2002); Phys. Rev. E **69**, 026112 (2004).
[13] P. Le Doussal and K. J. Wiese, Phys. Rev. E **79**, 051106 (2009).
[14] G. Tarjus, M. Baczyk, and M. Tissier, arXiv:1209.3161, to appear in Phys. Rev. Lett. (2013).
[15] D. S. Fisher, Phys. Rev. B **31**, 7233 (1985).
[16] D. E. Feldman, Int. J. Mod. Phys. B **15**, 2945 (2001).
[17] P. Ledoussal and K.J. Wiese, Phys. Rev. Lett. **96**, 197202 (2006).
[18] Y. Sakamoto, H. Mukaida, and C. Itoi, Phys. Rev. B **74**, 064402 (2006).
[19] G. Grinstein and A. Luther, Phys. Rev. B, **13**, 1329 (1976).
[20] On the other hand, when studying the critical behavior at finite temperature, the initial condition is cuspless as avalanches are rounded at all nonzero temperatures. In this case one should also include the flow of the renormalized temperature which is associated with the presence of a thermal boundary layer as one approaches the zero-temperature fixed point. Whether or not the system then flows to the cuspless fixed point when $d_{\rm cusp} > d > d_{\rm DR}(N)$ is unclear to us (but of limited physical consequence anyhow).
[21] D.J. Amit, J. Phys. A **9**, 1441 (1976).
[22] R.G. Priest and T.C. Lubensky, Phys. Rev. B **13**, 4159 (1976).
[23] T.C. Lubensky, B.I. Halperin, and S.K. Ma, Phys. Rev. Lett. **32**, 292 (1974).
[24] C. Dasgupta and B.I. Halperin, Phys. Rev. Lett. **47**, 1556 (1981).
[25] S. Teitel and C. Jayaprakash, Phys. Rev. B **27**, 598 (1983).
[26] D.R.T. Jones, A. Love, and M.A. Moore, J. Phys. C **9**, 743 (1976).
[27] D. Bailin, A. Love, and M.A. Moore, J. Phys. C **10**, 1159 (1977).
[28] B.I. Halperin and T.C. Lubenski, Solid State Commun. **14**, 997 (1974).
[29] I.D. Lawrie and C. Athorne, J. Phys. A **16**, L587 (1983).
[30] J. March-Russel, Phys. Lett. B **296**, 364 (1992).
[31] Magnetic Systems with Competing Interactions, edited by H. T. Diep World Scientific, Singapore, 1994