



**HAL**  
open science

# Étude des Bords des Phases de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique

Paul Soulé

► **To cite this version:**

Paul Soulé. Étude des Bords des Phases de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire dans la Géométrie d'un Contact Ponctuel Quantique. Systèmes mésoscopiques et effet Hall quantique [cond-mat.mes-hall]. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112215 . tel-01126852

**HAL Id: tel-01126852**

**<https://theses.hal.science/tel-01126852>**

Submitted on 6 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



# Thèse de doctorat

UNIVERSITÉ PARIS 11 – ORSAY  
ÉCOLE DOCTORALE DE PHYSIQUE EN ÎLE DE FRANCE

Présentée par

**Paul Soulé**

Pour obtenir le titre de docteur en sciences  
Spécialité : Physique

---

BORDS DES PHASES DE L'EFFET HALL  
QUANTIQUE FRACTIONNAIRE DANS LA GÉOMÉTRIE  
D'UN CONTACT PONCTUEL QUANTIQUE

---

À soutenir le 19 Septembre 2014 devant la commission d'examen  
composée de

<b>M. Malte HENKEL</b>	Rapporteur
<b>M. Edmond ORIGNAC</b>	Rapporteur
<b>M. Steven H. SIMON</b>	Examineur
<b>M. Mark Oliver GOERBIG</b>	Examineur
<b>M. Thierry JOLICŒUR</b>	Directeur de thèse

---

---



---

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>L'effet Hall quantique fractionnaire et ses géométries d'étude</b>	<b>9</b>
2.1	Effet Hall à un corps . . . . .	10
2.1.1	Trajectoire cyclotron . . . . .	10
2.1.2	Niveaux de Landau . . . . .	11
2.1.3	Jauge Symétrique et orbitales circulaires . . . . .	13
2.1.4	Jauge de Landau et Cylindre . . . . .	16
2.1.5	Tore . . . . .	19
2.1.6	Sphère . . . . .	21
2.2	L'effet Hall fractionnaire, un problème à N corps fortement corrélés . . . . .	23
2.2.1	Effet Hall dans les gaz d'électrons à deux dimension . . . . .	23
2.2.2	L'effet Hall entier . . . . .	26
2.2.3	Modélisation des 2DEGs . . . . .	28
2.2.4	Fonction d'onde de Laughlin . . . . .	31
2.2.5	Pseudopotentiels de Haldane et interactions de cœur dur . . . . .	34
2.2.6	Excitations élémentaires neutres et de charge $e/q$ . . . . .	38
2.3	L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre . . . . .	40
2.3.1	Hamiltonien d'interaction dans le plus bas niveau de Landau . . . . .	41
2.3.2	Potentiel de confinement . . . . .	46
2.3.3	Fonction d'onde de Laughlin sur le cylindre . . . . .	49
2.3.4	Diagonalisations numériques exactes . . . . .	52
<b>3</b>	<b>États produit de matrice dans la limite du cylindre fin</b>	<b>55</b>
3.1	Limite Tao-Thouless . . . . .	57
3.2	Modèle tronqué . . . . .	60
3.2.1	Développement limité de $\tilde{\mathcal{H}}(\lambda)$ . . . . .	60
3.2.2	États fondamentaux exacts de $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$ . . . . .	63
3.2.3	Représentation en terme de Produits de Matrice (PM) . . . . .	65
3.2.4	Propriétés des états propres du modèle tronqué . . . . .	66
3.2.5	Quasi-électron et excitations collectives . . . . .	68
3.3	Gap du Hamiltonien de cœur dur et limites en orbitales . . . . .	69
3.3.1	Étude du gap du Hamiltonien de cœur dur. . . . .	69

3.3.2	Nature des états sans gap . . . . .	71
<b>4</b>	<b>États de bord d'une bande d'EHQF à <math>\nu = 1/q</math></b>	<b>75</b>
4.1	Introduction : Contacts Ponctuels Quantiques (QPC) et géométrie cylindrique . . . . .	75
4.2	Spectre des quasitrous et États de bord à $\nu = 1/q$ . . . . .	77
4.2.1	Espace des Quasi-trous dans la géométrie cylindrique . . . . .	77
4.2.2	Potentiel de confinement $u(x)$ . . . . .	82
4.2.3	Spectre des états de bord dans la géométrie cylindrique . . . . .	84
4.3	Liquide de Luttinger chiraux aux bords des phases $\nu = 1/q$ . . . . .	87
4.3.1	Théorie effective des états de bord à $\nu = 1/q$ . . . . .	87
4.3.2	Vérification microscopique dans la géométrie du disque . . . . .	92
4.4	Liquide de Luttinger aux bords d'une bande de Hall fractionnaire . . . . .	94
4.4.1	Théorie effective des excitations de bord. . . . .	94
4.4.2	Spectre d'un liquide de Luttinger non-chiral . . . . .	96
4.4.3	Mesure numérique du paramètre de Luttinger . . . . .	99
4.4.4	Recombinaison des bords . . . . .	101
<b>5</b>	<b>États de bord du Pfaffien à <math>\nu = 5/2</math></b>	<b>107</b>
5.1	$\nu = 5/2$ et la fonction d'onde de Moore-Read . . . . .	107
5.1.1	Le mystère de l'EHQF à $\nu = 5/2$ . . . . .	107
5.1.2	La fonction d'onde de Moore-Read et ses quasi-trous non-Abéliens . . . . .	110
5.2	Théorie effective aux bords du Pfaffien . . . . .	113
5.2.1	Théorie chirale d'un boson et d'un fermion de Majorana . . . . .	113
5.2.2	Théorie conforme Ising $\times U(1)$ aux bords dans la géométrie du cylindre . . . . .	116
5.3	Mesure numérique des dimensions conformes . . . . .	124
<b>6</b>	<b>Quantum Spin Hall phase in Graphene via adatoms deposition</b>	<b>129</b>
	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
	<b>Appendices</b>	<b>137</b>
<b>A</b>	<b>États propres du Hamiltonien tronqué</b>	<b>137</b>
A.1	État fondamental . . . . .	137
A.2	Espace des états d'énergie zéro . . . . .	138
A.3	Calcul de la distribution d'impulsion : $\langle \hat{n}_m \rangle$ . . . . .	139
	<b>Remerciements</b>	<b>141</b>

# INTRODUCTION

---

L'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF) découvert au début des années 80 est un thème de recherche majeur de la physique de la matière condensée. Son intérêt est fondamental et va bien au delà d'un simple effet complexe impliquant des interactions entre électrons. En effet, il met en jeu des quasi-particules de charge fractionnaire dont la statistique elle-même est fractionnaire. Ce phénomène remarquable nécessite par lui-même une extension de la mécanique quantique ordinaire. Dans sa formulation par l'intégrale de chemin il a été montré par [Laidlaw & DeWitt \(1971\)](#) puis par [Leinaas & Myrheim \(1977\)](#) que lorsque la dimension de l'espace est seulement deux alors l'échange de deux particules peut faire intervenir une phase *quelconque*, pas seulement  $\pm 1$  comme c'est le cas à trois dimensions et plus. C'est ce que l'on appelle désormais une statistique anyonique. Compris plus récemment encore, l'effet Hall quantique fractionnaire peut impliquer des statistiques quantiques plus générales dites non-Abéliennes où la phase d'échange devient une matrice agissant dans un espace d'états qui n'est plus unidimensionnel. La description de ce nouvel état de la matière nécessite l'introduction de nouveaux outils comme les théories de Chern-Simons qui décrivent la correspondance entre le volume et le bord de ces phases. L'étude de ce phénomène mobilise de nombreux domaines différents de la physique théorique : problème à N corps en interactions, théories des champs de Chern-Simons, théories des champs invariantes conformes à deux dimensions. L'EHQF fait aussi appel à des aspects mathématiques très riches : groupe des tresses pour le "braiding" des anyons, théories des polynômes symétriques de Jack, entropie ou spectre d'intrication de la matrice densité.

L'effet Hall quantique fractionnaire a été observé dans divers systèmes bidimensionnels. Au départ il s'agissait surtout de gaz d'électrons dans des hétérostructures ou puits quantiques à base de GaAs. Ont suivi de nombreux autres semi-conducteurs comme des puits quantiques de silicium, des hétérostructures Si/SiGe. Enfin plus récemment, l'EHQF a été observé dans le graphène. Ces nouveaux matériaux font intervenir un degré de liberté supplémentaire, la dégénérescence de vallée. Ceci conduit à une richesse encore plus grande des états fondamentaux du système ainsi que de leurs excitations, qui mettent en jeu des quasi-particules dites "skyrmions" où les degrés de liberté de spin ou de vallée sont intriqués avec la position spatiale. À nouveau ceci montre le lien avec d'autres domaines

de la physique fondamentale. En effet les Skyrmions ont été inventés comme solitons dans le cadre de la physique nucléaire dès le début des années 60 et ce sujet a connu son plein développement avec la description du proton comme skyrmion du champ des mésons  $\pi$  par E. Witten dans les années 80. L'une de leurs incarnations les plus frappantes se trouve précisément dans les ferromagnétiques de Hall.

Un unique électron sur une surface bidimensionnelle soumis à un champ magnétique possède un spectre très particulier, organisé en niveaux macroscopiquement dégénérés, les célèbres niveaux de Landau. Une infime interaction entre les électrons d'un tel système, lève alors cette dégénérescence d'une façon hautement non triviale. Aucun régime de faible interaction ne peut alors être traité aisément, ce qui fait de l'EHQF un des problèmes d'électrons fortement corrélés les plus difficiles. Face à cet obstacle, une approche simple et originale fut introduite par Laughlin (1983). Elle consiste à proposer des fonctions d'onde d'essai variationnelles pour décrire l'état fondamental ainsi que les premiers états excités du spectre des phases de Hall au remplissage des niveaux de Landau  $\nu = 1/m$ , avec  $m$  impair. À l'aide d'un raisonnement simple basé sur des considérations de symétries, Laughlin trouve une fonction d'onde remarquablement proche de l'état fondamental exact. Il déduit alors de leurs expressions une grande partie des propriétés étonnantes des phases de Hall fractionnaire, à savoir leur caractère liquide incompressible ainsi que la présence d'excitations de charges fractionnaires. Un effet Hall quantique a aussi pu être observé à de nombreuses autres fractions du remplissage des niveaux de Landau. Là encore, notre compréhension de ce phénomène est centrée autour de fonctions d'onde d'essai, comme les fonctions d'onde des fermions composites (Jain 2007) ou la fonction d'onde de Moore-Read (Moore & Read 1991).

L'outil numérique est alors un allié précieux pour l'étude de ces phases. Il permet à la fois de tester la pertinence des fonctions d'onde d'essai, mais aussi de déterminer les propriétés souvent difficilement calculables de ces dernières. L'effet Hall se prête par exemple très bien aux diagonalisations exactes. En effet, si le champ magnétique est suffisamment intense, on peut considérer que les électrons sont projetés dans un seul niveau de Landau. Or, le nombre d'orbitales dans un niveau de Landau est proportionnel à l'aire de l'échantillon. Ainsi, en prenant un domaine compact on obtient un problème de dimension finie qu'il est possible de diagonaliser pour un petit nombre d'électrons ( $N \lesssim 20$ ). Il est d'usage de placer les électrons sur une sphère, un tore ou un disque. Dans la géométrie de la sphère, on utilise la symétrie par rotation pour classer les états propres du problème à  $N$  corps et réduire la taille de l'espace à diagonaliser. Sur le tore, qui est équivalent à un domaine du plan avec des conditions périodiques dans les deux directions, on utilise les translations magnétiques. Une géométrie très simple, qui a cependant été très peu étudiée, est celle du cylindre, où une seule direction est périodique, tandis que l'autre est non bornée. L'espace de Hilbert est alors malheureusement de dimension infinie, et il faut le tronquer judicieusement. Dans leur travail pionnier, Rezayi & Haldane (1994) ont montré l'intérêt de cette configuration, et ont étudié les propriétés de la fonction d'onde de Laughlin dans cette géométrie. Une grande partie de mon travail de thèse a consisté en l'étude de l'EHQF sur le cylindre.

---

J'introduis dans le chapitre (2) les concepts fondamentaux de l'EHQF et présente le modèle sur le cylindre, fil conducteur de mon manuscrit. J'expose dans le chapitre (3) une étude menée à la limite du cylindre fin, dans le cas des fractions  $\nu = 1/m$  pour  $m = 2, 3$  (Soulé & Jolicœur 2012b). À très faible circonférence devant la longueur magnétique, la fonction d'onde de Laughlin ainsi que les états de bord associés s'écrivent comme de simples déterminants de Slater. La dynamique est alors décrite par un simple modèle électrostatique. À plus large circonférence, nous montrons que les états de Hall s'écrivent sous la forme d'états produits de matrice de dimension deux, qui sont intriqués contrairement aux déterminants de Slater. Ce modèle non trivial présente des similitudes importantes avec la physique de l'EHQF, comme la présence de quasi-trous de charge  $e/m$  dont l'algèbre est identique à celle des quasi-trous de la phase  $\nu = 1/m$ .

Dans le chapitre (4) j'utilise à nouveau la géométrie du cylindre, pour étudier la combinaison de deux bords chiraux de l'état  $\nu = 1/m$  (Soulé & Jolicœur 2012a). Placé dans un potentiel de confinement invariant par rotation autour de l'axe du cylindre, le liquide de Hall forme une bande aux bords de laquelle se propagent des excitations non gappées chirales. Je montre que la combinaison des deux modes de bords forme un liquide de Luttinger non chiral puis détermine le paramètre de Luttinger associé.

Le chapitre (5) est consacré à la fraction  $\nu = 5/2$  et plus spécialement à l'étude de la fonction d'onde d'essai dite "Pfaffien" introduite par Moore & Read (1991). J'élucide la structure du spectre des modes de bord non-chiraux associés, et montre qu'ils s'organisent en tours conformes (Soulé et al. 2013). Une méthode basée sur un algorithme Metropolis me permet alors de mesurer les dimensions d'échelle associées aux différentes tours.

Enfin j'ai eu l'opportunité d'effectuer un séjour de six mois à l'Université de Colombie Britannique (Vancouver) dans le groupe de M. Franz, où j'ai pu travailler sur les isolants topologiques à deux dimensions. J'ai repris une idée qui consiste à plonger une feuille de graphène dans une phase de Hall de spin quantique en la saupoudrant d'adatoms lourds. Dans le but de faciliter l'identification expérimentale d'une telle phase, j'ai étudié les propriétés spectrales du graphène en présence d'adatoms distribués aléatoirement. Je montre que le couplage spin-orbite induit par les adatoms lourds ouvre un gap spectral et génère un motif distinctif dans la densité locale d'états, aisément observable par spectroscopie à effet tunnel (Soulé & Franz 2014). Ces travaux sont présentés dans le chapitre (6).



# L'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE ET SES GÉOMÉTRIES D'ÉTUDE

---

Pour étudier la physique des gaz d'électrons bidimensionnels nous aurons besoin de plusieurs niveaux de modélisation. On aborde d'abord dans la section (2.1) le problème à un électron en présence d'un champ magnétique extérieur, c'est le problème dit "des niveaux de Landau". Ce problème est sensible à la géométrie dans laquelle il est défini. En plus du plan infini, il est utile de considérer des conditions aux limites périodiques c'est à dire la géométrie du tore. On peut aussi, et c'est le cœur du sujet de cette thèse, considérer le cas d'un cylindre qui possède nécessairement des bords. Enfin [Haldane \(1983\)](#) a introduit la géométrie de la sphère qui, bien que la plus éloignée de la réalité expérimentale, se trouve être riche d'enseignements. Strictement parlant la sphère nécessite un champ magnétique partout perpendiculaire à sa surface, produit donc par un monopole placé en son centre. Bien que non physique sa formulation mathématique est bien connue.

Après le problème à un corps, nous abordons le sujet des interactions entre électrons dans la section (2.2). Celles-ci sont en effet absolument nécessaires pour l'explication de l'EHQF. Pour être au plus proche de la réalité, il faudrait considérer une interaction de Coulomb en  $1/r$  entre électrons, et prendre en compte l'étendue de la fonction d'onde selon l'axe perpendiculaire au plan de l'échantillon. Divers modèles ont été proposés pour décrire cet effet. Dans ce travail nous ne les discuterons pas plus avant car nous chercherons à décrire des aspects généraux et fondamentaux au moyen de modèles simplifiés. De même nous raisonnerons toujours dans le cadre de l'approximation de champ magnétique intense, de sorte que les électrons soient projetés dans un seul niveau de Landau, même si cette approximation n'est pas toujours très bonne dans la réalité. On sait en fait que l'EHQF a lieu même dans ce cadre et que l'effet des autres niveaux de Landau peut être pris en compte de manière perturbative. Une simplification importante de la projection dans le plus bas niveau de Landau (LLL) apparaît dans l'écriture de l'Hamiltonien. En effet, il devient une somme de projecteurs sur tous les moments angulaires relatifs d'une paire de particules. Cette remarque due à [Haldane \(1983\)](#) montre que des interactions arbitraires

dans le LLL se paramétrisent au moyen d'un ensemble *discret* d'énergies caractéristiques, les pseudopotentiels.

Alors que le cas du disque et de la sphère est décrit en grand détail dans la littérature, ce n'est pas le cas de la géométrie du cylindre. Nous discutons dans la section (2.3) l'écriture des fonctions d'onde de Laughlin dans cette géométrie ainsi que l'expression de l'Hamiltonien de ce système.

## 2.1 Effet Hall à un corps

### 2.1.1 Trajectoire cyclotron

Afin d'avoir une approche intuitive du problème quantique d'une particule sous un champ magnétique, commençons par sa solution classique. Considérons un électron sans degré de liberté de spin, se déplaçant dans un plan  $xy$ , soumis à un champ magnétique perpendiculaire homogène et à un champ électrique homogène. Son équation du mouvement s'écrit :

$$m\mathbf{a} = q_e\mathbf{E} + q_e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} \quad (2.1)$$

et son Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q_e\mathbf{E}\mathbf{r} + q_e\mathbf{A}\mathbf{v} \quad (2.2)$$

où  $q_e = -e$  est la charge de l'électron ( $e > 0$ ) et  $\mathbf{A}$  est le potentiel vecteur tel que  $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} = B\hat{z}$ . On en déduit l'impulsion  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} - e\mathbf{A}$  ainsi que l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2}{2m} \quad (2.3)$$

Sans champ électrique, l'électron suit une orbite circulaire sur une fréquence indépendante des conditions initiales  $\omega_c = \frac{e|B|}{m}$ . On parle de "trajectoire cyclotron". Le rayon  $r_c$  de l'orbite ainsi que son centre  $\mathbf{R}$  dépendent, eux, des conditions initiales. On notera juste que le rayon cyclotron est donné par l'énergie cinétique  $E_c$  selon :

$$r_c^2 = \frac{2E_c}{m\omega_c^2} \quad (2.4)$$

Lorsqu'un champ électrique est présent, le mouvement circulaire se compose avec un mouvement de translation uniforme de vitesse de dérive :

$$v_d = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} \quad (2.5)$$

Les électrons ont donc sur une période cyclotron une vitesse moyenne  $v_d$  perpendiculaire aux champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ . Ils contribuent donc pour une densité électronique  $n$  à un courant :

$$\mathbf{j} = -nev_d = -ne\frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.6)$$

Le tenseur conductivité  $\sigma$  défini par  $j_\alpha = \sigma_{\alpha\beta} E_\beta$  n'a donc pas de composantes diagonales et ses composantes hors diagonale sont données par  $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = \frac{ne}{B}$ . Autrement dit, le tenseur résistivité a pour composantes  $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$  et  $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = \frac{B}{ne}$ . Ce courant transverse au champ électrique et au champ magnétique fut découvert par Edwin Herbert Hall en 1879 avant même la découverte de l'électron. Classiquement la résistance transverse, appelée résistance de Hall, varie linéairement avec  $B$  en première approximation, tout du moins de façon monotone et sans plateaux. L'apparition de plateaux dans l'expérience de Klaus von Klitzing en 1980 (Klitzing et al. 1980) (cf. section 2.2.1) est donc un effet quantique macroscopique.

### 2.1.2 Niveaux de Landau

Pour décrire la dynamique des électrons dans un gaz quasi 2D, nous commençons par considérer le problème quantique minimal d'un électron sur un plan soumis à un champ magnétique perpendiculaire homogène. Sa dynamique est décrite par le Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{(\mathbf{P} + e\mathbf{A})^2}{2m_e} = \frac{\boldsymbol{\pi}^2}{2m_e} \quad (2.7)$$

avec  $e = |e|$  la charge de l'électron en valeur absolue,  $\mathbf{P} = -i\hbar\nabla$  l'opérateur impulsion,  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur tel que  $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} = B\hat{z}$ , et  $\boldsymbol{\pi} = m\mathbf{v} = \mathbf{P} + e\mathbf{A}$  l'opérateur quantité de mouvement. L'opérateur impulsion  $\mathbf{P}$  ne commute pas avec le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  à cause de la dépendance spatiale de  $\mathbf{A}$ , donc ces opérateurs ne peuvent pas être diagonalisés simultanément. Les couples d'opérateurs canoniques  $(p_x, x)$  et  $(p_y, y)$  ne sont pas les plus appropriés pour résoudre ce problème. On peut alternativement utiliser l'opérateur quantité de mouvement  $\boldsymbol{\pi}$  dont les composantes suivent les relations de commutations :

$$[\pi_x, \pi_y] = -ie\hbar(\partial_x A_y - \partial_y A_x) = -i\hbar eB = -i\hbar^2/\ell^2 \quad (2.8)$$

où  $\ell = \sqrt{\hbar/eB}$  est la longueur magnétique (ou "rayon de Larmor") et où nous considérons, ici et dans tout le reste du manuscrit, que  $\mathbf{B} = B\hat{z}$  avec  $B \geq 0$ <sup>1</sup>. On reconnaît, à un facteur multiplicatif près, les relations de commutations entre variables canoniques. Ainsi, l'Hamiltonien  $\boldsymbol{\pi}^2/2m_e$  (eq. 2.7) a la même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique 1D. On définit donc les opérateurs de création et d'annihilation

$$a^\dagger = \frac{\ell}{\hbar\sqrt{2}} (\pi_x + i\pi_y) \quad (2.9)$$

$$a = \frac{\ell}{\hbar\sqrt{2}} (\pi_x - i\pi_y) \quad (2.10)$$

vérifiant

$$[a, a^\dagger] = 1. \quad (2.11)$$

---

<sup>1</sup>Les formules se généralisent à  $B < 0$  en prenant  $\ell$  imaginaire pure

Et on peut écrire le Hamiltonien (eq.2.7) sous la forme :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.12)$$

avec  $\omega_c = \frac{e|B|}{m_e}$  la pulsation cyclotron.  $a^\dagger a = \hat{n}$  a ses valeurs propres dans  $\mathbb{N}$  et les énergies possibles s'organisent par niveaux selon :

$$E_n = \hbar\omega_c \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.13)$$

Le spectre est donc séparé en niveaux, appelés "niveaux de Landau", en contraste avec le spectre continu d'une particule libre en  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ . Cet aspect du spectre est la pierre angulaire de l'effet Hall quantique et de sa physique si particulière.

La différence importante avec un oscillateur harmonique 1D est que chaque niveau d'énergie est infiniment dégénéré. Par exemple, le centre de l'orbite cyclotron :

$$\mathbf{R} = (X, Y) = \left( x - \frac{1}{eB}\pi_y, y + \frac{1}{eB}\pi_x \right) \quad (2.14)$$

commute avec  $\mathcal{H}$  et  $\pi$  et constitue donc un degré de liberté différent de  $\pi$ . Une fois encore, ses composantes forment une autre paire d'opérateurs canoniques

$$[X, Y] = i\ell^2 \quad (2.15)$$

et peuvent être exprimés au moyen d'opérateurs d'échelle :

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}\ell}(X + iY) \quad (2.16)$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}\ell}(X - iY) \quad (2.17)$$

$$[b, b^\dagger] = 1, \quad b^\dagger b = \hat{n} \quad (2.18)$$

L'ensemble des états propres de  $\mathcal{H}$  sont donc indexés par les deux nombres quantiques  $n, m \in \mathbb{N}$  et seront notés  $|n, m\rangle$ . Par analogie avec la mécanique classique, le rayon cyclotron est quantifié et varie entre les niveau de Landau selon  $r_c = \sqrt{\frac{2E_n}{m_e\omega_c^2}}$ . La position du centre de l'orbite cyclotron paramétrise l'ensemble des états au sein d'un niveau de Landau, mais est délocalisée d'après l'inégalité de Heisenberg  $\Delta X \Delta Y \geq \frac{\ell^2}{2}$  provenant de la relation de commutation (eq. 2.15).

Étant donné que  $\mathbf{B}$  n'apparaît pas directement dans le Hamiltonien (eq. 2.7) mais au travers du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$ , nous pouvons choisir un autre potentiel vecteur  $\mathbf{A}'$  tel que

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla\xi(r) \quad (2.19)$$

avec  $\xi$  une fonction régulière quelconque, et le problème physique reste inchangé. Lors d'une telle transformation de jauge, on peut vérifier aisément qu'un état propre  $\phi$  de  $\mathcal{H}$  devient un état propre  $\phi'$  de  $\mathcal{H}'$  pourvu que

$$\phi'(\mathbf{r}) = e^{-ie\xi(\mathbf{r})/\hbar}\phi(\mathbf{r}). \quad (2.20)$$

Quelle que soit la jauge choisie, toute observable physique reste inchangée. Cette propriété de symétrie s'appelle l'invariance de Jauge.

Pour calculer explicitement les états propres de  $\mathcal{H}$ , il est nécessaire de choisir une jauge. Nous calculons ces états propres ci-après dans deux jauges usuelles : la jauge symétrique et la jauge de Landau.

### 2.1.3 Jauge Symétrique et orbitales circulaires

Le choix  $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$  pour un champ  $\mathbf{B} = (0, 0, B)$  homogène est appelé la jauge symétrique. Elle a l'avantage d'être invariante par rotation autour du point O. Ainsi, notre Hamiltonien (eq. 2.7) commute avec le générateur des rotations dans le plan xy autour de O : le moment cinétique  $L_z = xp_y - yp_x$ . On peut voir cela par exemple en réécrivant après un peu de calcul :

$$L_z = \hbar(a^\dagger a - b^\dagger b). \quad (2.21)$$

avec les opérateurs  $a$  et  $b$  définis précédemment dans (eq. 2.9) et (eq. 2.16). De cette façon, un état  $|n, m\rangle$  est simultanément état propre de  $\mathcal{H}$  et  $L_z$  et a pour valeur propre respectivement  $\hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$  et  $\hbar(n - m)$ . L'expression des opérateurs de création et d'annihilation peut être simplifiée par le changement de variable :

$$z = \frac{x - iy}{\ell} \quad , \quad z^* = \frac{x + iy}{\ell}. \quad (2.22)$$

Avec

$$\partial_z = \frac{\ell}{2}\partial_x + i\frac{\ell}{2}\partial_y \quad , \quad \partial_{z^*} = \frac{\ell}{2}\partial_x - i\frac{\ell}{2}\partial_y \quad (2.23)$$

on obtient :

$$a = -i\sqrt{2}\left(\frac{z}{4} + \partial_{z^*}\right) \quad , \quad a^\dagger = i\sqrt{2}\left(\frac{z^*}{4} - \partial_z\right) \quad (2.24)$$

$$b = \sqrt{2}\left(\frac{z^*}{4} + \partial_z\right) \quad , \quad b^\dagger = \sqrt{2}\left(\frac{z}{4} - \partial_{z^*}\right). \quad (2.25)$$

L'état  $|00\rangle$  défini par les équations  $a|00\rangle = b|00\rangle = 0$  a alors pour fonction d'onde

$$\phi_{00}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\ell\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{zz^*}{4}}. \quad (2.26)$$

Les autres états propres sont obtenus par applications successives des opérateurs de création

$$|nm\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} \frac{b^{\dagger m}}{\sqrt{m!}} |00\rangle. \quad (2.27)$$

Pour calculer leur expression dans la base des  $\mathbf{r}$ , il est commode de réexprimer les opérateurs d'échelle de la façon suivante :

$$a = -i\sqrt{2}e^{-\frac{|z|^2}{4}} \partial_{z^*} e^{\frac{|z|^2}{4}}, \quad a^\dagger = i\sqrt{2}e^{-\frac{|z|^2}{4}} \left( \frac{z^*}{2} - \partial_z \right) e^{\frac{|z|^2}{4}} \quad (2.28)$$

$$b = \sqrt{2}e^{-\frac{|z|^2}{4}} \partial_z e^{\frac{|z|^2}{4}}, \quad b^\dagger = \sqrt{2}e^{-\frac{|z|^2}{4}} \left( \frac{z}{2} - \partial_{z^*} \right) e^{\frac{|z|^2}{4}} \quad (2.29)$$

où l'on précise qu'il s'agit bien de compositions d'opérateurs de sorte que par exemple  $\partial_z e^{\frac{|z|^2}{4}} = e^{\frac{|z|^2}{4}} \left( \frac{z^*}{2} + \partial_z \right)$ . Par applications successives de  $b^\dagger$  on trouve ainsi les états propres du plus bas niveau de Landau (ou "LLL" pour "Lowest Landau Level") :

$$\phi_{0m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\ell\sqrt{2\pi}2^m m!} z^m e^{-\frac{|z|^2}{4}}. \quad (2.30)$$

Le choix des orbitales du LLL, bien que naturel dans cette jauge, n'est pas unique puisque les niveaux de Landau sont (infiniment) dégénérés. Nous verrons dans la sous-section (2.1.4) une autre choix possible d'orbitales, dans une autre jauge également. Un état générique du plus bas niveau de Landau qui n'est pas nécessairement un état propre de  $L_z$  s'écrira donc :

$$\phi_{LLL}(\mathbf{r}) = f(z)e^{-\frac{|z|^2}{4}}. \quad (2.31)$$

avec  $f$  une fonction analytique de  $z$ . Cette formulation des états propres du LLL en terme de fonction analytique peut paraître innocente, mais elle est cependant à la base du raisonnement historique de Laughlin (Laughlin 1983) qui permet de deviner une fonction d'onde test pour l'état fondamental de l'Effet Hall Quantique Fractionnaire (EHQF).

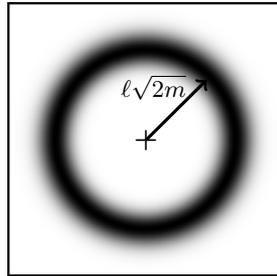


FIGURE 2.1 – Profil de densité de l'orbitale  $\phi_{n=0,m=15}(\mathbf{r})$  dans la jauge symétrique

Dans la figure (2.1) nous traçons le profil de densité d'un état propre (eq. 2.30) pour  $m = 15$ . On peut voir que le poids de cette fonction est réparti sur un anneau centré en O de rayon  $\ell\sqrt{2m}$  et de largeur caractéristique  $\ell$ . Un disque de rayon  $R$  contient

## 2.1 Effet Hall à un corps

donc  $\frac{R^2}{2\ell^2} + O(1)$  orbitales électroniques, soit un nombre d'orbitales par unité de surface  $\frac{1}{2\pi\ell^2} = \frac{e|B|}{h}$ . Autrement dit, il y a une orbitale électronique pour chaque quantum de flux magnétique  $\Phi_0 = \frac{h}{e}$  traversant la surface considérée. On peut également vérifier que la densité d'états électroniques reste  $\frac{1}{2\pi\ell^2}$  dans tous les niveaux de Landau.

Pour une densité électronique par unité de surface  $\rho$ , on appelle

$$\nu = 2\pi\ell^2\rho = \frac{\rho h}{e|B|} \quad (2.32)$$

le facteur de remplissage. Il représente le nombre de niveaux de Landau occupés pour des électrons sans interactions et une température nulle. Cette quantité est d'importance primordiale dans la physique de l'effet Hall quantique et permet de classifier ses différentes phases. En pratique, l'interaction entre électrons et le désordre induit un mélange entre les niveaux de Landau. Cela dit, l'effet Hall quantique apparaît à un champ magnétique très intense ( $B \approx 10T$  habituellement dans hétérojonctions GaAs – AlGaAs pour la phase principale à  $\nu = 1/3$ ), et il peut donc être judicieux de négliger le mélange entre niveaux et considérer les électrons projetés dans un seul niveau de Landau (cf. sec. 2.2.3).

Considérons maintenant une fonction d'onde  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$  de  $N$  électrons, sans degré de liberté de spin, dans le plus bas niveau de Landau. Elle se décompose en somme de déterminants de Slater sur les orbitales (eq. 2.31). En factorisant les termes exponentiels, une fonction d'onde à  $N$  particules dans le LLL prend la forme générale :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = P[z_1, z_2, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4}\sum |z_i|^2} \quad (2.33)$$

avec  $P[z_1, z_2, \dots, z_N]$  une fonction analytique entièrement antisymétrique à  $N$  variables. De la même manière,  $N$  particules bosoniques dans le plus bas niveau de Landau sont décrites par une fonction d'onde du type (eq. 2.33) avec  $P[z_1, z_2, \dots, z_N]$  un polynôme entièrement symétrique à  $N$  variables.

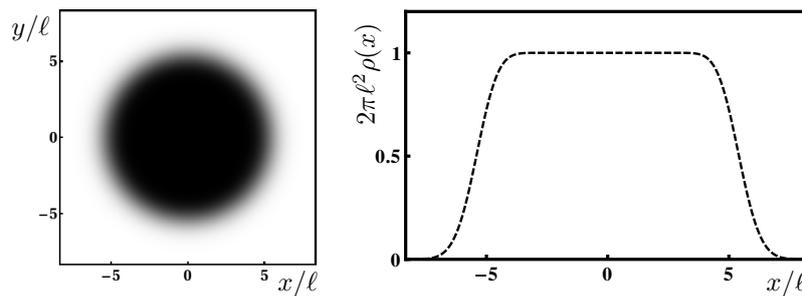


FIGURE 2.2 – Profil de densité  $|\Psi_N^{\nu=1}|^2$  pour  $N = 15$ . À gauche, graphe sur une échelle de gris dans le plan  $x - y$ . À droite, section du profil selon  $y = 0$

À titre d'exemple, considérons l'état quantique décrivant le plus bas niveau de Landau entièrement rempli. Le LLL est en toute rigueur de dimension infinie dans la géométrie du plan, il faut donc un nombre infini de particules pour le remplir. Cela dit on peut aussi

considérer un nombre fini de particules confinées autour de O. Ce confinement peut être induit par exemple par un faible potentiel externe de la forme  $V = kr^2$ . Les  $N$  électrons remplissent alors les orbitales à partir de  $m = 0$  :  $n_0 = n_1 = \dots = n_{N-1} = 1$  et  $n_{m \geq N} = 0$ . Écrit en terme de déterminant de Slater en première quantification, cela donne :

$$\Psi_N^{\nu=1} \propto \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_N^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2} \quad (2.34)$$

On reconnaît ici le bien connu déterminant de Vandermonde. Ce dernier se développe sous la forme :

$$\Psi_N^{\nu=1} \propto \prod_{1 \leq i < j \leq N} (z_i - z_j) e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2}. \quad (2.35)$$

Il est d'habitude dans la littérature de ne pas écrire le facteur omniprésent  $e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2}$  dans les expressions de fonctions d'onde, i.e. d'identifier  $\Psi = P e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2}$  avec son polynôme  $P$ , et de laisser sous-entendu le terme exponentiel. Nous essayerons, autant que possible, d'écrire systématiquement ce coefficient puisqu'il est différent dans les géométries du cylindre et du disque, même s'il peut nous arriver de l'oublier. Nous traçons figure (2.2) le profil de densité de  $\Psi_{15}^{\nu=1}$ . Cette fonction d'onde décrit une goutte à  $\nu = 1$  centrée en O de rayon approximatif  $\ell \sqrt{2(N-1)}$ . A son bord, elle décroît exponentiellement de  $\nu = 1$  à  $\nu = 0$  sur une distance caractéristique de l'ordre de  $\ell$ .

L'écriture des fonctions d'onde du LLL sous la forme eq. (2.33) s'obtient assez naturellement dans la jauge symétrique. La jauge de Landau, que nous présentons ci-après, a l'avantage d'être invariante par translation dans une des directions, ce qui est bien pratique pour imposer des conditions aux bords périodiques. On peut également écrire ses fonctions d'ondes sous une forme similaire à l'équation (2.33), mais après un changement de variable un peu moins évident.

### 2.1.4 Jauge de Landau et Cylindre

Dans la géométrie du plan on peut aussi prendre la jauge de Landau  $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$ , invariante par translation selon  $y$ . Dans ce cas, les composantes de la quantité de mouvement sont  $\pi_x = P_x$  et  $\pi_y = P_y + eBx$ , et le Hamiltonien (eq. 2.7) commute avec  $P_y$ . Il est donc commode de diagonaliser simultanément  $\mathcal{H}$  et  $P_y$ , plutôt que  $\mathcal{H}$  et  $\hat{m} = b^\dagger b$  comme dans la section précédente. Dans le secteur d'impulsion  $P_y = \hbar k_y$ , l'Hamiltonien est celui d'un oscillateur harmonique 1D, et les opérateurs d'échelle (eq. 2.9) s'écrivent :

$$a = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\ell \partial_x + \frac{1}{\ell} (x + \ell^2 k_y)) \quad (2.36)$$

$$a^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} (-\ell \partial_x + \frac{1}{\ell} (x + \ell^2 k_y)). \quad (2.37)$$

## 2.1 Effet Hall à un corps

Les états propres d'énergie  $\hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$  et d'impulsion  $k$  selon  $y$  s'écrivent :

$$\phi_{nk} = \frac{1}{\sqrt{n!2\pi2^n\sqrt{\pi}\ell}} H_n\left(\frac{x-x_k}{\ell}\right) e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-x_k)^2} e^{iky} \quad (2.38)$$

avec

$$x_k = -\ell^2 k \quad (2.39)$$

et  $H_n$  le polynôme d'Hermite de degré  $n$ . Dans le plus bas niveau de Landau, ces orbitales sont des Gaussiennes selon  $x$  centrées en  $x_k$  d'écart type  $\ell$ , et des ondes planes selon  $y$ . Soulignons qu'au sein d'un niveau de Landau, l'impulsion selon  $y$  et la position du centre de masse sur l'axe  $x$  sont liées par l'équation (2.39). De la même manière, le moment cinétique selon  $z$  et rayon moyen étaient interdépendants dans les orbitales de la jauge symétrique (eq. 2.30).

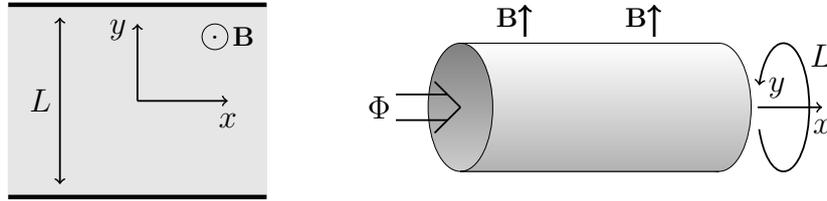


FIGURE 2.3 – Schéma du plan périodique sous un champ  $\mathbf{B}$  perpendiculaire et son équivalent cylindrique

Si on impose maintenant des conditions périodiques aux fonctions d'onde :

$$\phi(x, y + L) = \phi, \quad (2.40)$$

le problème devient équivalent à celui d'électrons se déplaçant à la surface d'un cylindre creux traversé par un champ magnétique perpendiculaire (cf. figure (2.3)). Les orbitales (eq. 2.38) sont compatibles avec cette condition de périodicité pourvu que le moment selon  $y$  soit quantifié :

$$k = k_m = \frac{2\pi}{L} m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.41)$$

Supposons pour l'instant qu'il n'existe pas de flux magnétique traversant l'intérieur du cylindre ( $\Phi = 0$ ). Le potentiel vecteur à la surface du cylindre s'écrit  $\mathbf{A} = (0, -Bz, 0)$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , soit toujours  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$  sur le plan périodique, et les orbitales dans le plus bas niveau de Landau s'écrivent

$$\phi_{0m} = \frac{1}{\sqrt{L\ell\sqrt{\pi}}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-x_m)^2} e^{ik_m y} \quad (2.42)$$

avec le facteur de normalisation approprié et

$$x_m = -\ell^2 k_m = -\ell^2 \frac{2\pi}{L} m, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (2.43)$$

Ainsi, dans le cas de conditions aux limites périodiques, aussi bien le moment cinétique selon  $y$  que le centre de masse des états selon  $x$  sont quantifiés. Deux orbitales successives sont donc espacées de  $\delta x = \frac{2\pi\ell^2}{L}$ .

Comme mentionné précédemment, il est possible de réécrire ces orbitales sous une expression analogue à celle des orbitales de la jauge symétrique (eq. 2.31) au moyen du changement de variable

$$Z = e^{\frac{2\pi}{L}(-x+iy)} \quad (2.44)$$

<sup>2</sup>de sorte que

$$\phi_{0m} = \frac{1}{\sqrt{L\ell}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}x_m^2} Z^m e^{-\frac{1}{2\ell^2}x^2}. \quad (2.45)$$

Soulignons cependant qu'une différence majeure avec l'expression des orbitales dans la jauge symétrique est que le coefficient de normalisation dépend ici de  $m$  et de  $L$ .

Une fonction d'onde à  $N$  particules peut se mettre sous une forme analogue à l'équation (2.33) :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = P[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2} \quad (2.46)$$

avec  $P$  un polynôme ou une série de Laurent antisymétrique s'il s'agit de fermions, symétrique pour des bosons. Notons que les variable  $Z_i$  apparaissent dans la géométrie du cylindre avec des puissances positives ou négatives, d'où l'appellation polynôme "de Laurent". Comme nous le verrons par la suite, une grande partie des fonctions d'onde test de l'effet Hall quantique fractionnaire s'écrivent sur le cylindre avec le même polynôme  $P$  que dans la géométrie du disque (eq. 2.33), après changement de variable  $z_i \rightarrow Z_i$  et modification du facteur exponentiel de confinement  $e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2} \rightarrow e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2}$ .

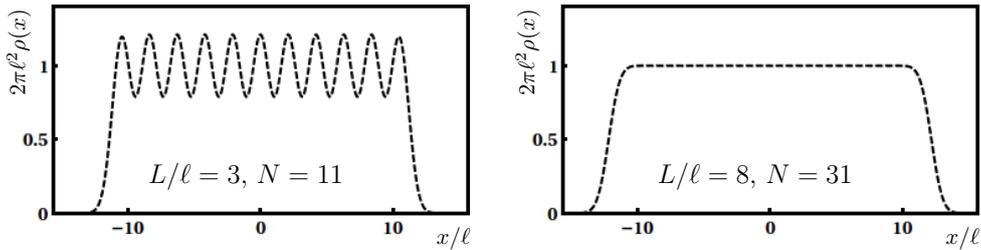


FIGURE 2.4 – Section selon  $y = 0$  du profil de densité de  $\Psi^{\nu=1}$  sur le cylindre. Cet état est une onde de densité de charge à faible  $L$ , et un liquide de densité homogène à large  $L$ .

Un état à  $\nu = 1$  peut être construit simplement en remplissant les orbitales entre  $m = m_G$  à  $m = m_D$  pour un nombre de fermions  $N = m_D - m_G + 1$ . C'est par exemple l'état fondamental de  $N$  fermions du LLL sans interactions confinés dans un potentiel parabolique de  $k(x - x_0)^2$  centré en  $x_0 = (x_{m_G} + x_{m_D})/2$ . Cet état s'écrit comme un

<sup>2</sup>Notons que l'équation 2.44 représente la transformation conforme du plan vers le cylindre.

unique déterminant de Slater. On peut ainsi factoriser les coefficients de normalisation  $e^{-\frac{1}{2\ell^2}x_m^2}$  identiques dans chaque lignes du déterminant et écrire

$$\Psi_N^{\nu=1} \propto \begin{vmatrix} Z_1^{m_G} & Z_2^{m_G} & \cdot & Z_N^{m_G} \\ Z_1^{m_G+1} & Z_2^{m_G+1} & \cdot & Z_N^{m_G+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Z_1^{m_D} & Z_2^{m_D} & \cdot & Z_N^{m_D} \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum_i x_i^2} \quad (2.47)$$

$$\propto \prod_i Z_i^{m_G} \prod_{i < j} (Z_i - Z_j) e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum_i x_i^2}. \quad (2.48)$$

Notons que le coefficient  $(\prod_i Z_i)^{m_G}$ , absent de l'équation (2.35) dans la jauge symétrique, indexe les positions possibles de cet état le long de l'axe du cylindre, ou de manière équivalente les impulsions totales selon  $y$  :  $K = \frac{2\pi}{L}(Nm_G + N(N-1)/2)$ .  $m_G$  est donc ici un paramètre libre, entier. Nous traçons figure (2.4) le profil de densité de l'état  $\Psi^{\nu=1}$  pour différentes valeurs de  $L$ . A faible  $L \lesssim \ell$ , cet état décrit une onde de densité de charge dont les oscillations sont séparées par  $\delta x$ . L'amplitude de ces oscillations de densité décroît exponentiellement avec  $L$  (comme  $e^{-L^2/(4\ell^2)}$ ) et devient homogène dans le volume (traduction française de "bulk") à grand  $L$ .

Enfin, considérons l'effet de l'introduction d'un flux magnétique  $\Phi$  à l'intérieur du tube cylindrique. Ce flux ne modifie pas le champ magnétique à la surface du cylindre mais agit pourtant sur le comportement des électrons à sa surface selon un effet Aharonov-Bohm bien particulier. En effet, le potentiel vecteur à la surface du cylindre généré par ce flux magnétique  $\Phi$  peut s'écrire  $\mathbf{A}_\Phi = (0, -\frac{\Phi}{L}, 0)$  puisque  $\Phi = \int dS(\nabla \wedge \mathbf{A}_\Phi) = \oint \mathbf{A}_\Phi \cdot d\mathbf{l}$ , ce qui donne un potentiel total  $\mathbf{A} = (0, B(x - \frac{\Phi}{BL}), 0)$ . L'introduction d'un flux  $\Phi$  a donc pour effet de translater les fonctions d'onde selon l'axe du cylindre de  $X = \frac{\Phi}{BL}$ .

Ceci étant, le champ  $\mathbf{A}_\Phi$  à la surface du cylindre peut être engendré par un tube de flux de section infinitésimale de potentiel vecteur  $\frac{\Phi}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta = \nabla(\frac{\Phi\theta}{2\pi})$  en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . Ce champ  $\mathbf{A}_\Phi$  peut alors être supprimé lors d'une transformation de jauge  $\mathbf{A}_\Phi = \nabla(\xi(\mathbf{r})) \rightarrow 0$  et  $\phi(\mathbf{r}) \rightarrow \phi'(\mathbf{r}) = e^{-ie\xi(\mathbf{r})/\hbar} \phi(\mathbf{r})$ , à condition que  $\phi'$  soit bien périodique en  $L$  (eq. 2.40). Cette dernière condition est uniquement vérifiée lorsque  $\Phi$  est un multiple entier du quantum de flux  $\frac{\hbar}{e} = \Phi_0$ . Le processus d'introduction adiabatique d'un quantum de flux  $\Phi_0$  au centre du cylindre, puis suppression de ce flux par changement de jauge, transforme les orbitales  $\Phi_m$  en  $\Phi_{m+1}$ , ou multiplie les fonctions d'onde à  $N$  particules (eq. 2.46) par  $U = \prod_i Z_i$ . Ce processus est utilisé dans les démonstrations historiques de Laughlin (Laughlin 1981, 1983) et nous y reviendrons un peu plus tard lors de l'étude des états de bord de l'EHF (chapitre 4).

### 2.1.5 Tore

Une autre géométrie utile, que nous présentons ici brièvement, est celle du tore, obtenue en imposant des conditions périodiques dans les deux directions  $x$  et  $y$ . Une complication vient du fait que l'opérateur de translation engendré par l'impulsion  $\mathbf{P}$  ne commute pas avec  $\mathcal{H}$  (eq. 2.7). Il n'y a donc pas d'états propres de  $\mathcal{H}$  vérifiant à la fois  $\phi(x + L_x, y) =$

$\phi(x, y)$  et  $\phi(x, y + L_y) = \phi(x, y)$  pour tout  $(x, y)$ . Il est cependant possible de définir des opérateurs de translation qui commutent avec  $\mathcal{H}$ , appelés opérateurs de translation magnétique, définis par :

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{-i\mathbf{a}\cdot\mathbf{\Gamma}/\hbar} \quad (2.49)$$

ayant pour générateur :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P} + e\mathbf{A} - e\mathbf{B} \wedge \mathbf{r}. \quad (2.50)$$

Dans la jauge de Landau  $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$  cela nous donne :

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{P} + eBy\mathbf{e}_x, \quad (2.51)$$

$$\mathcal{T}(\mathbf{a}) = e^{\mathbf{a}\cdot\nabla_{\mathbf{r}} + iya_x/\ell^2} \quad (2.52)$$

Mais  $[\Gamma_x, \Gamma_y] = -i\frac{\hbar^2}{\ell^2}$  et les opérateurs de translation magnétique ne commutent pas entre eux :  $T(\mathbf{a})T(\mathbf{b}) = T(\mathbf{b})T(\mathbf{a})e^{i\frac{\hbar^2}{\ell^2}(a_x b_y - a_y b_x)}$ .

Pour un tore de dimension  $(L_x, L_y)$  nous sommes intéressés par les opérateurs de translation  $t(L_x\mathbf{e}_x)$  et  $t(L_y\mathbf{e}_y)$ . Or ces derniers commutent uniquement si

$$L_x L_y = N_\phi 2\pi\ell^2, \quad N_\phi \in \mathbb{N}, \quad (2.53)$$

c'est à dire si la surface du tore est traversée par un nombre entier  $N_\phi$  de quantum de flux. Dans ces conditions, on peut imposer les relations de périodicité :

$$t(L_x\mathbf{e}_x)\phi = \phi \quad (2.54)$$

$$t(L_y\mathbf{e}_y)\phi = \phi. \quad (2.55)$$

Dans la jauge de Landau elle correspondent à :

$$.\phi(x + L_x, y) = e^{-iyL_x/\ell^2}\phi(x, y) \quad (2.56)$$

$$\phi(x, y + L_y) = \phi(x, y). \quad (2.57)$$

Les orbitales sur le tore sont donc des superpositions des orbitales sur le cylindre (eq. 2.42) données par :

$$\phi_m^{Tore}(x, y) \propto \sum_{p \in \mathbb{Z}} t(L_x\mathbf{e}_x)^p \phi_m^{Cyl}(x, y) \quad (2.58)$$

$$\propto \sum_{p \in \mathbb{Z}} \phi_{pN_\phi + m}^{Cyl}(x, y) \quad (2.59)$$

$$\propto \sum_{p \in \mathbb{Z}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x - x_{pN_\phi + m})^2} e^{ik_{pN_\phi + m}y}. \quad (2.60)$$

Il y a  $N_\phi$  orbitales indépendantes indexées par  $m$  modulo  $N_\phi$ . Cette géométrie a l'avantage d'être compacte, tout comme la sphère, et permet d'obtenir numériquement des états de l'effet Hall fractionnaire sans effets de bords. De plus, elle se distingue de la sphère par sa topologie de genre égal à 1 qui confère aux états de l'effet Hall une dégénérescence due à leur "ordre topologique intrinsèque", sur lequel nous reviendrons dans le chapitre suivant.

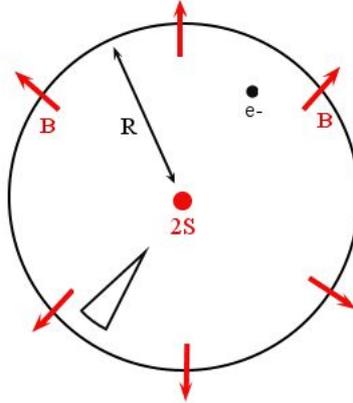


FIGURE 2.5 – Électron sur la sphère et monopole magnétique

### 2.1.6 Sphère

Étudions maintenant le système d'un seul électron sur une sphère soumis à un champ magnétique perpendiculaire (voir fig. 2.5). On considère donc un monopole magnétique situé au centre d'une sphère de rayon  $R$ . La quantification de Dirac impose alors que le flux du champ magnétique à travers la sphère ( $4\pi R^2 B$ ) soit un multiple entier du quantum de flux  $\phi_0 = \frac{h}{e}$  i.e. :

$$B = \frac{\hbar S}{eR^2} \quad (2.61)$$

avec  $S$  entier ou demi-entier. Le Hamiltonien du système s'écrit alors :

$$\mathcal{H} = \frac{[\mathbf{r} \wedge (\mathbf{P} + e\mathbf{A})]^2}{2mR^2} \quad (2.62)$$

On pose  $\boldsymbol{\Omega} = \frac{\mathbf{r}}{R}$  et  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{r} \wedge (\mathbf{P} + e\mathbf{A})$  dont les composantes vérifient les relations de commutation :  $[\Lambda_i, \Lambda_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}(\Lambda_k - S\Omega_k)$ .  $\boldsymbol{\Lambda}$  n'est donc pas un moment cinétique, mais il commute avec  $\mathcal{H} = \frac{\boldsymbol{\Lambda}^2}{2mR^2}$ . Le moment cinétique qui commute avec  $\mathcal{H}$  est :

$$\mathbf{L} = \boldsymbol{\Lambda} + \hbar S\boldsymbol{\Omega} \quad (2.63)$$

On peut vérifier que l'on a bien  $[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k$  et  $|\boldsymbol{\Lambda}|^2 = |\mathbf{L}|^2 - \hbar^2 S^2$ . L'Hamiltonien s'écrit donc  $\mathcal{H} = \frac{|\mathbf{L}|^2 - \hbar^2 S^2}{2mR^2}$ . La diagonalisation du Hamiltonien revient donc à diagonaliser  $|\mathbf{L}|^2$ . On utilise donc la base  $|S, l, m\rangle$  qui diagonalise simultanément  $\mathcal{H}$ ,  $|\mathbf{L}|^2$ , et  $L_z$  selon :

$$|\mathbf{L}|^2 |S, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |S, l, m\rangle \quad (2.64)$$

$$L_z |S, l, m\rangle = \hbar m |S, l, m\rangle \quad (2.65)$$

Les valeurs propres de  $\mathcal{H}$  sont positives donc  $l(l+1) \geq S^2$ , soit  $l \geq S$ . Conclusion :  $S \in \mathbb{N}/2$ ,  $l = S, S+1, \dots$ , et  $m = -l, -l+1, \dots, +l$ . On remarque que à la limite des

grands  $S$  (i.e. lorsque  $R$  tend vers l'infini), on retrouve les mêmes niveaux énergétiques que sur le plan :  $\epsilon_{S,l=S+n,m} = \frac{\hbar^2(S+n)(S+n+1)-\hbar^2S^2}{2mR^2} = \hbar\omega_c \frac{S(2n+1)+n(n+1)}{2S} \xrightarrow{S \rightarrow \infty} \hbar\omega_c(n + \frac{1}{2})$

Pour obtenir une expression explicite des fonctions d'ondes correspondant aux orbitales  $|S, l, m\rangle$ , nous devons faire un choix de jauge. Une des jauges pratiques est la jauge introduite par Haldane (Haldane 1983) :

$$\mathbf{A} = \frac{-\hbar S}{eR} \cot(\theta) \hat{\phi} \quad (2.66)$$

On a bien  $\nabla \wedge \mathbf{A} = \mathbf{B} = \frac{\hbar S}{eR^2} \hat{\Omega}$ , mais  $\mathbf{A}$  possède deux singularités au pôle nord et au pôle sud. Il est en fait impossible de choisir un potentiel vecteur qui ne possède pas de singularités sur la sphère dans le cas d'un monopole magnétique. En effet, supposons au contraire que l'on ait trouvé un  $\mathbf{A}$  exempt de singularités. Alors le long d'un chemin infinitésimal entourant le pôle sud (par exemple),  $\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = 0 = \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2S\phi_0$ . Il faut en fait, pour bien faire, définir deux potentiels vecteurs dont l'un recouvre, sans discontinuités, le pôle nord sur une partie (a) de la sphère et l'autre le pôle sud sur une partie (b). On définit les fonctions d'onde sur chacune des parties, et le passage d'une partie à l'autre se fait au moyen d'une fonction de transfert. Le détail de ces problèmes de jauge sont bien décrits dans l'article (Wu & Yang 1976). Nous ne considérons ici qu'un seul potentiel vecteur ayant deux discontinuités au pôle nord et au pôle sud. Ceci étant, les fonctions d'ondes a priori définies partout excepté au pôle nord et au pôle sud, ne posséderont pas de discontinuité.

On exprime alors  $\mathbf{L}$  en coordonnées sphériques :  $L_z = -i\hbar\partial_\phi$  et  $L_\pm = L_x \pm iL_y = \hbar e^{\pm i\phi} [\pm\partial_\theta + i \cot(\theta)\partial_\phi + \frac{S}{\sin(\theta)}]$ . On obtient, après un peu de calcul, l'expression des fonctions d'ondes  $Y_{S,l,m} = \langle \mathbf{r} | S, l, m \rangle$ , appelées orbitales sphériques monopolaires (voir Jain (2007) pour le détail du calcul) :

$$Y_{S,l,m} = N_{S,l,m} u^{S+m} v^{S-m} \sum_{s=0}^{l-m} (-1)^s \binom{l-S}{s} \binom{l+S}{l-m-s} (vv^*)^{l-S-s} (uu^*)^s \quad (2.67)$$

avec :  $u = \cos(\theta/2)e^{i\phi/2}$ ,  $v = \sin(\theta/2)e^{-i\phi/2}$ , et  $N_{S,l,m} = \left( \frac{(2l+1)(l-m)!(l+m)!}{4\pi(l-S)!(l+S)!} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Dans le plus bas niveau de Landau, elles s'expriment plus simplement :

$$Y_{S,S,m} = \left[ \frac{2S+1}{4\pi} \binom{2S}{S-m} \right]^{\frac{1}{2}} u^{S+m} v^{S-m} \quad (2.68)$$

Une fonction d'onde à un électron dans le plus bas niveau de Landau est donc, dans cette jauge, simplement un polynôme en  $u$  et  $v$  tel que pour tout monôme  $u^\alpha v^\beta$ ,  $\alpha + \beta = 2S$ .

Sur la sphère, la dégénérescence des niveaux de Landau est finie, donc il n'y a pas d'ambiguïté pour définir le facteur de remplissage. Le LLL (ou premier niveau de Landau) est dégénéré  $2S + 1$  fois, et le  $n$ ème niveau  $2(S + n - 1) + 1$  fois. Le nombre de quantum de flux qui traverse la sphère est  $2S$ . Donc, pour les grands  $S$ , le nombre d'orbitales dans le plus bas niveau de Landau est, de même que sur le plan, le nombre de quantum de flux traversant la surface. Le facteur de remplissage  $\nu$  est alors, à la limite des grands  $N$  :  $N/(2S)$ .

## 2.2 L'effet Hall fractionnaire, un problème à $N$ corps fortement corrélés

### 2.2.1 Effet Hall dans les gaz d'électrons à deux dimension

Les phases de Hall fractionnaire émergent dans les gaz d'électrons à deux dimensions traversés par un champ magnétique intense. A certains remplissages rationnels des niveaux de Landau, si le désordre et la température sont suffisamment faibles devant l'énergie d'interaction entre électrons, se forme un liquide quantique incompressible aux propriétés étonnantes.

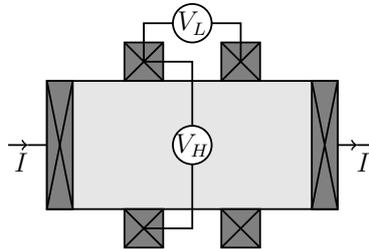


FIGURE 2.6 – Schéma du dispositif expérimental permettant de mesurer la résistance longitudinale et la résistance transverse (de Hall) dans les 2DEG.

Historiquement, c'est aux travers de mesures de conductivité dans des gaz d'électrons à deux dimensions (2DEG) de très grande mobilité que ces phases ont été découvertes. Ces mesures se sont intensément développées à la suite de la découverte de l'effet Hall quantique entier par K. von Klitzing en 1980 (Klitzing et al. 1980). L'expérience de ce dernier consiste à mesurer les résistances transverses  $R_H$  et longitudinales  $R_L$  de 2DEGs créées dans des MOSFET de Silicium traversés par un champ magnétique intense ( $\approx 10T$ ). Nous présentons figure (2.6) un schéma du dispositif de mesure et figure (2.7) les mesures de résistance obtenues. En faisant varier la densité électronique, il découvre que la résistance transverse (ou de Hall) s'arrête sur des plateaux aux valeurs  $h/(e^2N)$ ,  $N$  entier. De plus, en parallèle à la formation de ces plateaux, la résistance longitudinale (i.e. dans la direction de propagation du courant) s'annule lorsque la température  $T$  tend

vers zéro selon une loi d'Arrhenius

$$R_L \propto e^{-\frac{\Delta}{k_B T}}. \quad (2.69)$$

De façon surprenante, la valeur des plateaux de  $R_H$  est universelle en ce sens qu'elle est indépendante des paramètres du milieu tel que la masse effective des électrons, la constante diélectrique du semi-conducteur, de la forme ou de la quantité de désordre de l'échantillon.  $h/(e^2 N)$  peut ainsi être mesurée à une précision supérieure à  $10^{-10}$  fois sa valeur et fournit une résistance étalon depuis 1990 selon le comité de métrologie international.

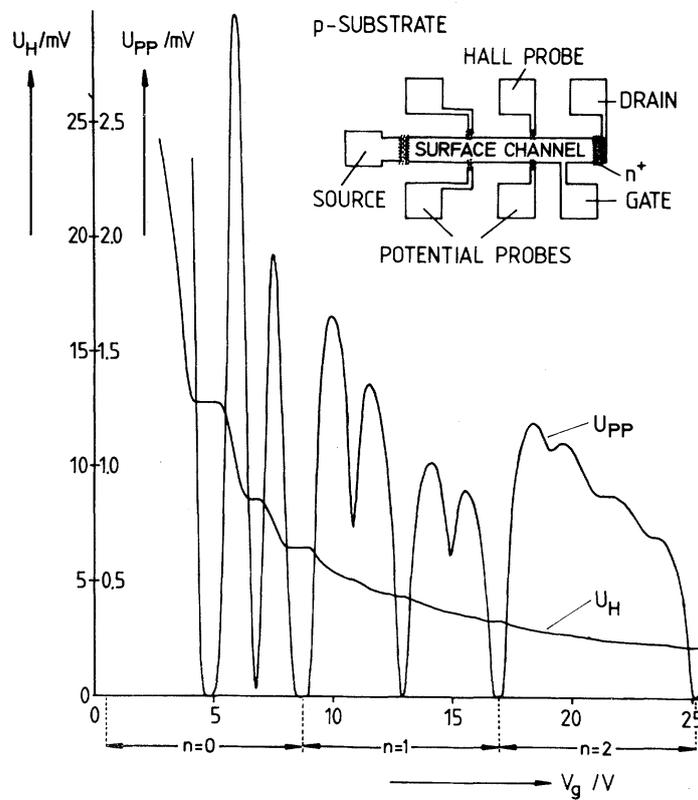


FIGURE 2.7 – Première observation de l'effet Hall quantique entier par Klitzing et al. (1980). En ordonnée sont tracées les tensions longitudinales et transverses mesurées dans le dispositif schématisé figure 2.6. En abscisse est donnée la tension de grille permettant de faire varier la densité électronique du gaz d'électron à deux dimensions. Ces mesures sont réalisées dans un MOSFET de Silicium pour un champ magnétique de 18 T, une température de 1.8 K et un courant constant de  $1 \mu\text{A}$ .

L'effet Hall quantique entier peut s'expliquer sans nécessairement faire appel aux interactions entre électrons. Comme nous le verrons dans la section suivante, deux éléments sont essentiels pour expliquer l'apparition de ces plateaux dans la résistante de Hall. Le premier est que le 2DEG est gappé pour des valeurs entières du remplissage  $\nu$  avec un

conductivité  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$  et  $\sigma_{yx} = -\sigma_{xy} = e^2 N/h$ . Le second est que le désordre localise tous trous ou électrons qui se forment dans le volume du fluide à remplissage légèrement différent de  $\nu = N$ , de sorte que la résistance de Hall s'arrête sur un plateau.

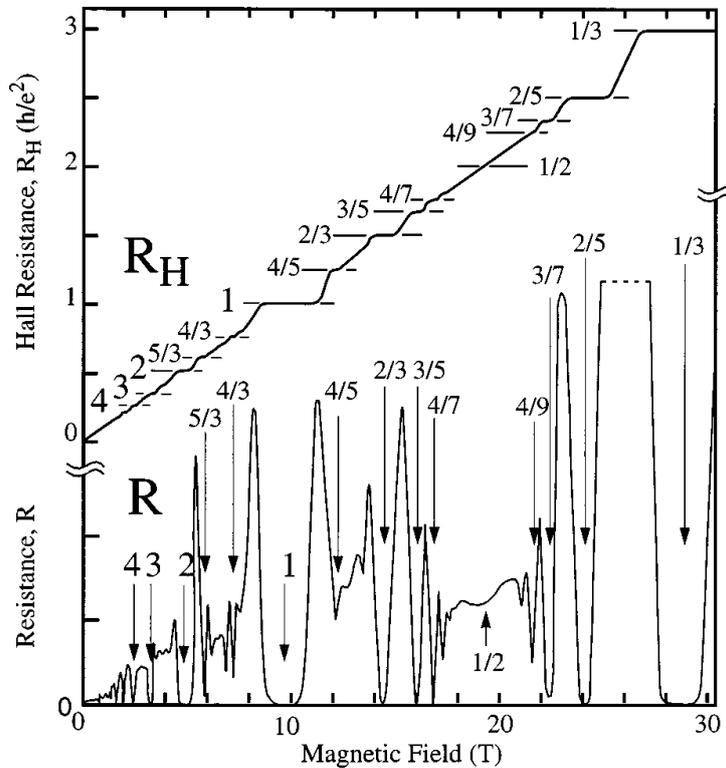


FIGURE 2.8 – Mesure de la résistance de Hall et de la résistance longitudinale dans une hétérojonction GaAs–AlGaAs. On observe de nombreux plateaux dans la résistance de Hall coïncidant avec une annulation de la résistance longitudinale. Graphé issu de (Stormer 1999).

Deux années plus tard, D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C. Gossard (Tsui et al. 1982) refont ces mesures à plus grand champ magnétique dans des 2DEG de plus grande mobilité réalisés dans des hétérojonctions GaAs et  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  de semi-conducteurs. Ils découvrent à la surprise générale que la résistance de Hall s'arrête sur d'autres plateaux  $h/(e^2 f)$  pour  $f = p/q$  rationnel, et que, comme précédemment, la résistance longitudinale s'annule à température nulle. Le premier plateau observé fut pour  $f = 1/3$ , mais en améliorant progressivement la mobilité des 2DEGS et en baissant la température, un grand nombre d'autres phases de Hall fractionnaire ont été mises en évidence. On décompte aujourd'hui plus de 50 phases pour  $f < 1$ .

Alors que la physique à un corps est suffisante pour expliquer les principes de l'effet Hall entier, ces plateaux pour  $f$  rationnel ne peuvent pas s'expliquer sans prendre en compte l'interaction entre électrons. En effet, à remplissage partiel des niveaux de Landau, la physique à un corps prédit soit une phase de Hall avec  $f$  entier, soit une phase compressible de résistance longitudinale non nulle. On en déduit qu'il est nécessaire que l'interaction

entre électrons ouvre un gap dans le 2DEG à certains remplissages  $\nu = p/q$  des niveaux de Landau. Comme dans le cas de l'effet Hall entier, c'est le désordre dans l'échantillon qui localise toute excitation au sein de ce fluide de sorte que la résistance de Hall stagne sur un plateau lorsque le remplissage varie légèrement autour de sa valeur  $\nu \approx p/q$ .

### 2.2.2 L'effet Hall entier

C'est d'abord Laughlin (1981) qui apporta un premier élément de compréhension de cet effet Hall quantique qui apparaît pour des valeurs entières de  $f$ . Par une expérience de pensée utilisant l'invariance de jauge dans une géométrie cylindrique, il expliqua l'apparition de plateaux dans la conductivité de Hall d'un échantillon de faible désordre au remplissage  $\nu$  proche d'un entier. Halperin (1982) développa ensuite le raisonnement de Laughlin dans le cas plus réaliste où l'échantillon possède des bords. Il comprit le rôle essentiel que jouent ces bords dans les mesures de conductivité. En effet, bien que le désordre localise les états dans le volume de l'échantillon, il expliqua que des états délocalisés le long des bords participaient au transport de charges, et étaient responsables des mesures de résistance de Hall et longitudinale. Enfin, notons aussi la contribution majeure de Büttiker (1988), qui étudia le cas multiterminal des expériences. Il comprit, entre autres, que l'absence de rétrodiffusion lors du transport chiral des électrons le long des bords était à la source de la quantification de Hall. Dans les échantillons étroits, ou suffisamment désordonnés, un rétrodiffusion d'un bord à l'autre peut en revanche apparaître, écartant alors la résistance de Hall de son plateau. Dans la suite nous exposerons brièvement un raisonnement proche de celui de Halperin (1982), pour expliquer l'apparition de ces plateaux dans la résistance de Hall. Ce raisonnement peut être retrouvé avec de plus amples détails dans les livres de Jain (2007) et Yoshioka (2002) notamment.

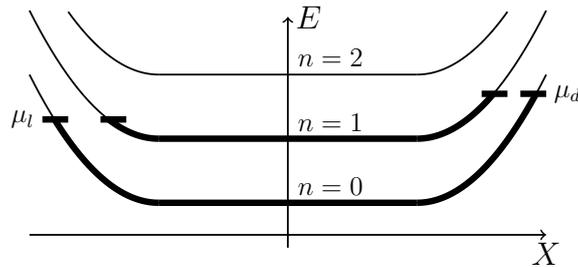


FIGURE 2.9 – Évolution des niveaux de Landau dans le potentiel de confinement au bord de l'échantillon. Le remplissage du volume est ici  $\nu = 2$  ( $\nu = 4$  si une dégénérescence de spin est considérée).

Supposons dans un premier temps qu'aucun désordre n'est présent dans l'échantillon et que le potentiel de confinement des bords est homogène dans la direction  $y$ . La dynamique d'un électron est alors donnée par l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (p_y + eBx)^2) + u(x) \quad (2.70)$$

dans la jauge de Landau  $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ . De façon analogue à la partie (2.1.4), grâce à l'invariance par translation selon  $y$ , les orbitales  $\varphi(x, y)$  se décomposent en  $\varphi(x, y) = \phi(x)e^{iky}$  avec  $\phi(x)$  solution de

$$\mathcal{H}_x \phi(x) = \mathcal{E}_n(X) \phi(x) \quad (2.71)$$

$$\mathcal{H}_x = \frac{1}{2m} (p_x^2 + (eB)^2(x - X)^2) + u(x) \quad (2.72)$$

avec  $X = -k\ell^2$  comme précédemment.

Calculons la vitesse moyenne d'un électron dans l'orbitale  $\phi$ . On a  $\hat{v}_x = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, x] = p_x/m$  et  $\hat{v}_y = \frac{i}{\hbar}[\mathcal{H}, y] = (p_y + eBx)/m$ , or

$$v_x = \langle \varphi | \hat{v}_x | \varphi \rangle \propto \langle \phi | [\mathcal{H}_x, x] | \phi \rangle = 0, \quad (2.73)$$

et

$$v_y = \langle \varphi | \hat{v}_y | \varphi \rangle \quad (2.74)$$

$$= \langle \phi | \frac{eB}{m} (x - X) | \phi \rangle \quad (2.75)$$

$$= \langle \phi | \frac{-1}{eB} \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial X} | \phi \rangle \quad (2.76)$$

$$= \frac{-1}{eB} \frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial X} \quad (2.77)$$

Dans le cas où  $u(x)$  varie sur une distance caractéristique bien plus grande que la longueur magnétique  $\ell$ , on peut montrer que  $\frac{\partial \mathcal{E}_n}{\partial X} = u'(X)$ . Comme le champ électrique  $\mathbf{E} = \nabla u/e$ , on retrouve alors le résultat classique (eq. 2.5)  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2}$ , et l'expression du tenseur conductivité associé :  $\sigma_{xx} = 0$  et  $\sigma_{yx} = e\rho_e/B$ .

Supposons maintenant que le niveau le Fermi soit compris entre deux niveaux de Landau de sorte que  $N$  niveaux soient entièrement remplis comme sur la figure (2.9). Calculons le courant total dans la direction  $y$  en présence d'une faible différence de potentiel  $V_H$  entre le bord droit et le bord gauche :

$$I_y = \int dx j_y \quad (2.78)$$

$$= -\frac{e}{L} \sum_{i=1}^{N_e} v_{iy} \quad (2.79)$$

$$= \frac{1}{LB} \sum_n \sum_{X=Xl_n}^{Xr_n} \frac{\partial E_n}{\partial X} \quad (2.80)$$

$$= \frac{e}{\hbar} N (\mu_r - \mu_l) \quad (2.81)$$

où  $\mu_l$  et  $\mu_r$  sont les potentiels électrochimiques gauche et droit tels que  $\mu_r - \mu_l = -eV_H$ . On obtient donc une résistance de Hall :

$$R_H = \frac{\hbar}{e^2 N} \quad (2.82)$$

Cela dit, dès que le facteur de remplissage  $\nu$  est dévié légèrement par rapport à sa valeur entière, des électrons ou trous peuplent les niveaux de Landau les plus proches de l'énergie de Fermi, contribuent à la conductivité, et  $R_H$  est modifiée. La présence de plateaux dans  $R_H$  lorsque  $\nu$  varie ne peut pas être expliquée dans ce contexte, et une prise en compte du désordre est nécessaire.

Lorsqu'on prend en compte un potentiel désordonné, la plupart des états se localisent spatialement. A la différence du problème sans champ magnétique, certains états restent cependant étendus spatialement. Les niveaux de Landau deviennent des bandes étalées en énergie, composées d'états étendus en leur centre et d'états localisés de part et d'autre. Les bandes d'états étendus sont alors séparées par un gap de mobilité par opposition à un gap spectral. Lorsque  $N - 1/2 < \nu < N + 1/2$ , le niveau de Fermi dans le volume du fluide est compris entre deux bandes d'états délocalisés et les états proches en énergie sont localisés. Cela dit, le niveau de Fermi est proche d'états délocalisés le long des bords de l'échantillon. Ces états transportent les électrons dans une direction unique donnée par la vitesse de dérive  $v_d = \mathbf{E} \wedge \mathbf{B}/B^2$ . Tant que le désordre n'est pas trop intense de sorte que les états de bord restent bien séparés de part et d'autre de l'échantillon, et tant que les états du volume sont localisés, aucune rétro-diffusion n'est possible pour les électrons en mouvement sur les bord. Cela implique que la résistance longitudinale  $R_L$  est nulle et que le potentiel chimique est uniforme le long du bord. Supposons maintenant que l'échantillon soit prolongé de part et d'autre par des portions idéales sans désordre, où  $R_H = h/(e^2N)$ . Le potentiel chimique étant conservé le long des bords, la différence de potentiel  $V_H$  l'est également. De plus, le courant total est conservé dans chaque portion de l'échantillon, donc la résistance de Hall  $R_H$  garde sa valeur  $h/(e^2N)$  dans l'échantillon désordonné. En faisant tendre la taille des portions sans désordre vers zéro, on trouve que la résistance de Hall est précisément  $h/(e^2N)$  pour  $N - 1/2 \lesssim \nu \lesssim N + 1/2$ .

### 2.2.3 Modélisation des 2DEGs

Comme mentionné précédemment, les 2DEGs sont généralement fabriqués à l'interface entre les deux isolants GaAs et  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ . En peuplant  $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$  de donneurs, des électrons sautent dans la bande de conduction de GaAs et restent confinés proches de l'interface. Ces électrons sont libres de se déplacer le long de l'interface, mais le degré de liberté dans la direction  $z$  est gelé, c'est à dire que le confinement dans la direction  $z$  est tel que seul le mode fondamental est accessible. De plus, ces électrons ont une longueur d'onde de l'ordre de 10nm, deux ordres de grandeur supérieure au pas du réseau cristallin. Le potentiel périodique est donc moyenné et n'a aucun effet sur le comportement des électrons, si ce n'est renormaliser la masse des électrons en une masse effective de bande. Il est en général seulement pertinent de considérer un milieu homogène chargé positivement permettant la neutralité globale du système, un potentiel de confinement dû aux bords de l'échantillon et éventuellement un potentiel désordonné dû aux impuretés dans le réseau cristallin.

La physique des électrons dans le gas 2D est a priori décrite par le Hamiltonien général :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} + V + g\mu_B B S_z \quad (2.83)$$

où  $H_0$  est la partie cinétique (2.7),  $V$  représente le potentiel extérieur de confinement et le fond neutralisant,  $g\mu_B B S_z$  est l'énergie de Zeeman des électrons, et  $\mathcal{H}_{int}$  décrit l'interaction de Coulomb entre les électrons :

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{i < j} \frac{e^2}{4\pi\epsilon|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2}. \quad (2.84)$$

Précisons que c'est bien un potentiel de Coulomb en  $\frac{1}{r}$  qui agit ici, et non en  $-\log(r)$ , car les électrons vivent dans un espace à trois dimension, bien que confinés dans un espace à quasi-deux dimensions.

Comme dans le cadre de l'effet Hall entier, les plateaux dans la conductivité de Hall à  $\nu = p/q$  s'expliquent par deux phénomènes distincts : la présence de phases gappées pour  $\nu = p/q$  en l'absence de désordre, puis la localisation des excitations élémentaires par le désordre. C'est pourquoi nous nous concentrerons dans ce manuscrit sur l'étude des phases de Hall fractionnaire en absence de désordre. Un faible désordre existe cependant dans l'échantillon, mais il est nécessaire qu'il soit plus faible que le gap des phases de Hall fractionnaire de l'ordre de  $U_C = e^2/(4\pi\epsilon\ell)$ , l'énergie de Coulomb entre les électrons, afin que l'on puisse observer la quantification par plateaux de  $R_H$ . Cela impose en pratique que les 2DEGs aient une mobilité supérieure à  $10 \text{ m}^2/\text{Vs}$  à champ magnétique nul.

De plus, l'effet Hall quantique fractionnaire ne s'observe dans GaAs que sous champ magnétique transverse très intense, de l'ordre de 10 Tesla. En effet, il est nécessaire d'atteindre un facteur de remplissage  $\nu = \rho_e 2\pi\ell^2$  de l'ordre de l'unité. Bien que la densité électronique dans les hétérojonctions soit très faible puisqu'elle varie entre  $10^{-15} \text{ m}^{-2}$  et  $10^{-17} \text{ m}^{-2}$  selon les conditions expérimentales, il est tout de même nécessaire que  $B$  soit supérieur à 5 Tesla pour atteindre les remplissage  $\nu < 1$ . Comparons alors les différentes échelles d'énergie. L'énergie cinétique est de l'ordre de  $\hbar\omega_c = \hbar eB/m$ , avec  $m \approx 0.067 m_e$  la masse effective des électrons dans GaAs, tandis que l'énergie de Coulomb  $U_C = e^2/(4\pi\epsilon\ell) = e^{2.5} B^{0.5}/(4\pi\epsilon\hbar^{0.5})$  avec  $\epsilon \approx 13\epsilon_0$ . Cela donne un ratio :

$$\frac{\hbar\omega_c}{U_C} \approx 0.4\sqrt{B[\text{T}]} \quad (2.85)$$

avec  $B$  exprimé en Tesla. Dans la limite d'un champ magnétique très intense, l'énergie cinétique domine l'énergie de Coulomb. Mais  $H_0$  est formé d'états propres macroscopiquement dégénérés. Ainsi, dès l'ordre zéro en  $U_C/(\hbar\omega_c)$ , l'interaction de Coulomb et  $V$  permettent de lever la dégénérescence de ces états. Dans le cadre de cette approximation, si on ne se concentre sur une échelle d'énergie de l'ordre de  $U_C$ , c'est à dire très inférieure à  $\hbar\omega_c$ , les électrons remplissent les orbitales de Landau depuis le bas, et tout saut d'un niveau à un autre est gelé. L'énergie cinétique est alors une simple constante. Seul le niveau de Landau à l'énergie de Fermi est partiellement rempli, et tous les niveaux inférieurs sont

pleins. Les électrons dans les niveaux remplis écrantent éventuellement l'interaction entre les électrons du niveau supérieur, mais peuvent être négligés sous cette approximation. Ainsi, si  $P$  est l'opérateur de projection dans le niveau de Landau partiellement occupé, la physique de l'effet Hall fractionnaire, dans le cadre de cette approximation dite de "champ magnétique intense", est décrite par :

$$\mathcal{H} = P(\mathcal{H}_{int} + V)P. \quad (2.86)$$

En pratique, l'approximation  $\hbar\omega_c \gg U_c$  n'est jamais vérifiée. Il y a toujours une part non négligeable de mélange entre les niveaux de Landau, d'autant plus élevé que le remplissage est faible. Cela dit, la physique qualitative des phases de Hall n'est généralement pas affectée tant que le mélange entre niveaux de Landau est suffisamment faible. Cela peut se voir d'un point de vue expérimental puisqu'en variant les paramètres comme la densité, la masse effective ou la permittivité, les fractions où apparaissent les plateaux de  $R_H$  ne sont pas modifiées.

Enfin, dans la limite de  $B$  infini, les électrons sont polarisés en spin. En effet, l'énergie de Zeeman  $E_Z = g\mu_B B = \frac{g}{2} \frac{m}{m_e} \hbar\omega_c$  est proportionnelle à  $B$ . Mais dans les hétérojonctions GaAs – AlGaAs, la masse  $m$  et le facteur de Landé  $g$  effectifs sont bien plus faibles que dans le vide :  $m \approx 0.067m_e$  et  $g \approx 0.44$ . Donc  $E_Z \approx \hbar\omega_c/68$  et  $E_Z > U_C$  n'est jamais vérifié dans les expériences. Pour autant, la plupart des phases de Hall, dont celles étudiées dans ce manuscrit, sont entièrement polarisées. Dans un souci de simplicité, nous oublierons donc le degré de liberté de spin dans le reste du manuscrit. En revanche, plus le facteur de remplissage est faible, plus le champ magnétique donc l'énergie Zeeman est faible. C'est pourquoi certaines phases de Hall à faible remplissage sont non-polarisées. C'est le cas par exemple du remplissage  $\nu = 8/5$ , où une phase non polarisée en spin a été identifiée grâce à des mesures de conductivité en champ magnétique incliné (Eisenstein et al. 1989).

L'effet Hall fractionnaire est un des problèmes les plus ardues de la matière condensée. En effet, il est exceptionnel qu'un problème physique après simplification dans la limite infinie d'une des échelles d'énergie ( $\hbar\omega_c/U_C \rightarrow \infty$  ici), soit aussi compliqué que eq. (2.86). Par exemple, le modèle simple du gaz de Fermi décrit après une prise en compte perturbative des interactions et du désordre un grand nombre de matériaux, rassemblés sous le nom de liquides de Fermi. Les supraconducteurs peuvent aussi être décrits d'après la théorie BCS en traitant les interactions perturbativement depuis un gaz de Fermi. Dans le cas de l'effet Hall fractionnaire, la limite d'une énergie cyclotron infinie ne simplifie que marginalement le problème et l'Hamiltonien (eq : 2.86) reste à deux corps, ce qui en fait un des problèmes les plus fortement corrélés de la matière condensée. La seule échelle d'énergie de (eq : 2.86) est  $U_C$  donc aucun paramètre ne peut être considéré comme petit. Trouver un état fondamental et un modèle à basse énergie proche, au sens de la théorie des perturbations, de chacune des phases de Hall observées expérimentalement est la tâche difficile des physiciens du domaine depuis 30 ans.

Face à la difficulté d'une approche analytique du problème, les méthodes numériques pour trouver les états propres de  $\mathcal{H}$  sont d'une aide précieuse. En fait, grâce à l'approximation de projection dans le niveau de Landau partiellement rempli (eq. 2.86), le nombre

d'orbitales électroniques disponibles sur une surface compacte est fini. L'espace de Hilbert des états à  $N$  électrons est alors fini, et les états propres de  $\mathcal{H}$  peuvent être obtenus par exemple par "simple" diagonalisation numérique exacte. La dimension de l'espace augmente exponentiellement avec  $N$  donc les diagonalisations numériques sont malheureusement rapidement limitées à  $N \lesssim 10 - 20$ , selon le modèle. Ces états propres sont bien loin de la limite thermodynamique et donnent donc rarement des résultats quantitatifs précis, mais de nombreuses propriétés physiques comme la présence d'un gap à certains remplissages ou la présence d'excitations de charge fractionnaire peuvent être mises en évidence. Les physiciens du domaine ont depuis toujours utilisé amplement cet outil, en commençant par Laughlin dans son article fondateur (Laughlin 1983).

### 2.2.4 Fonction d'onde de Laughlin

Un an après la découverte de Tsui Stormer et Gossard, Robert B. Laughlin explique dans un article révolutionnaire (Laughlin 1983) une grande partie de la physique de ces phases. Pour attaquer ce problème d'électrons fortement corrélés, il raisonne par approche variationnelle et propose un état approché de l'état fondamental de l'Hamiltonien (2.86) aux remplissages  $\nu = 1/q$ . Afin de minimiser l'énergie moyenne  $\langle \psi | H | \psi \rangle$ , il part pour cela de l'ansatz

$$\Psi = \prod_{i < j} g(z_i - z_j) e^{-\sum_i |z_i|^2/4} \quad (2.87)$$

pour la fonction d'onde du fondamental dans la jauge symétrique, compatible avec la forme générale des fonction d'onde dans les LLL (eq. 2.33). Cette forme est proche de la fonction d'onde introduite par Jastrow (1955) afin d'approximer avec succès les gaz de particules en forte interaction (sans champ magnétique). Or l'Hamiltonien (eq. 2.86) commute avec le moment cinétique total, sous réserve que le potentiel de confinement respecte l'invariance par rotation autour de O. Si on demande à ce que  $|\psi \rangle$  ait un moment cinétique total selon  $z$  défini donné par  $-s\hbar M$ , le polynôme  $P$  en facteur de la fonction d'onde (eq. 2.33) doit être de degré total homogène  $M$ . Cela implique que  $g$  est nécessairement un monôme, de degré impair pour respecter l'antisymétrie de  $P$ , et la célèbre fonction d'onde s'écrit pour  $q$  impair :

$$\Psi_q \propto \prod_{i < j} (z_i - z_j)^q e^{-\sum_i |z_i|^2/4}. \quad (2.88)$$

Cette fonction d'onde décrit un état au remplissage  $\nu = 1/q$ . En effet,  $|\Psi_q \rangle$  se décompose sur des orbitales allant de  $m = 0$  à  $m = q(N - 1)$  donc les  $N$  particules sont confinées dans un disque de rayon  $R = \ell \sqrt{2q(N - 1)} + O(1)$ . Le remplissage est alors la limite à grand  $N$  de  $2\pi\ell^2 N / (\pi R^2)$ , c'est à dire  $\nu = 1/q$ . Cela dit, la distribution de densité de cet état est hautement non triviale, et est difficilement calculable analytiquement. On peut en revanche la calculer numériquement grâce à un algorithme de type Monte Carlo pour un nombre fini de particules. Nous traçons figure (2.10 a) le profil de densité de la fonction d'onde de Laughlin 2.88 pour  $q = 3$  obtenue par cette méthode pour 40 particules. Ce

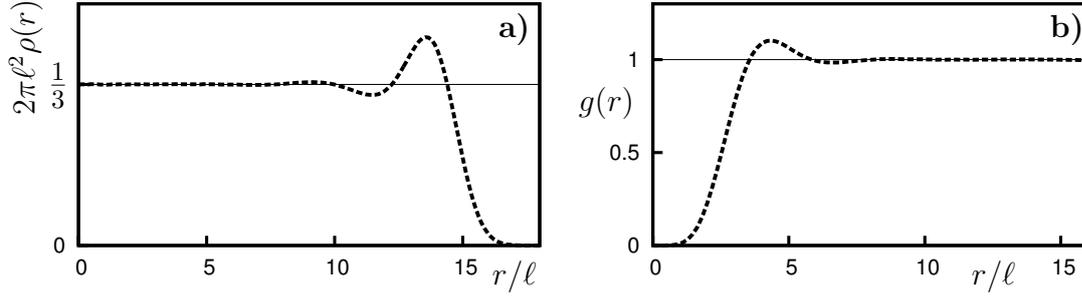


FIGURE 2.10 – a) : profil de densité de la fonction d'onde de Laughlin avec  $q = 3$  sur le disque pour  $N = 40$ . b) : fonction de corrélation densité-densité de la fonction d'onde de Laughlin avec  $q = 3$  dans son volume pour  $N = 100$ . Graphes obtenus par algorithme Monte Carlo.

profil est homogène égal à  $\rho_0 = 1/(2\pi\ell^2q)$  dans le volume. Au bord, il oscille sur quelques longueurs magnétiques puis s'annule de façon exponentielle. Plus précisément, on peut voir que cet état décrit un fluide, c'est à dire un état où il n'y a pas de corrélation à longue portée dans les positions entre particules. Cela est visible au travers de la fonction de corrélation de paire

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho_0 N} \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \rangle \quad (2.89)$$

proportionnelle à la probabilité de trouver deux particules à une distance  $\mathbf{r}$  l'une de l'autre. Il est judicieux de restreindre cette somme à des particules appartenant au volume du fluide, là où la densité est homogène égale à  $\rho_0$ , loin des effets de bord. Elle peut alors s'exprimer en terme de fonction de corrélation densité-densité  $g(\mathbf{r}) = \rho_0^{-2} \langle \hat{\rho}(\mathbf{r}) \hat{\rho}(0) \rangle$  pour  $r \neq 0$  et se calcule aisément par méthode Monte Carlo. On présente figure (2.10 b) le profil de  $g(\mathbf{r})$  obtenu pour 100 particules. Proche de  $r = 0$ ,  $g(r)$  s'annule rapidement en  $r^{2q}$ , ce qui traduit le fait que les particules s'éloignent suffisamment afin de minimiser leur énergie d'interaction. A grand  $r$ , le profil est plat, sans oscillations, et indique que la fonction 2.88 ne dispose pas d'ordre spatial à longue portée comme pourrait le faire un cristal de Wigner ou une onde de densité de charge.

Par sa démarche plus intuitive qu'analytique, Laughlin propose une excellente approximation du fondamental de l'Hamiltonien (eq.2.86) au facteur de remplissage  $\nu = 1/q$ . Le succès de cette fonction d'onde fut amplement vérifié par diverses approches. La preuve la plus directe et la plus convaincante est sans doute la comparaison entre la fonction d'onde de Laughlin (eq :2.88) et l'état fondamental de  $\mathcal{H}$  obtenu numériquement pour un faible nombre de particules. Comme mentionné précédemment, il est possible de diagonaliser numériquement  $\mathcal{H}$ , sur une surface compacte, pour un petit nombre de particules. Dès son article fondateur (Laughlin 1983), Laughlin montre que l'état fondamental  $|\Psi_{exact}\rangle$  de 3 ou 4 électrons en interaction de Coulomb, dans la géométrie du disque, possède un très bon recouvrement avec la fonction d'onde de Laughlin. Il trouve par exemple  $|\langle \Psi_3 | \Psi_{exact} \rangle| = 0.99946$  pour  $N = 3$  et  $|\langle \Psi_3 | \Psi_{exact} \rangle| = 0.979$  pour  $N = 4$ . Puis, de nom-

breux calculs de recouvrement ont soutenu l'ansatz de Laughlin. Par exemple, un calcul équivalent dans la géométrie sphérique (Haldane 1983, Fano et al. 1986) pour  $\nu = 1/3$  génère les recouvrements :

$N$	$ \langle \Psi_3   \Psi_{exact} \rangle $
4	0.99804
5	0.99906
6	0.99644
7	0.99636
8	0.99540
9	0.99406

spectaculairement proches de 1. Ces recouvrements décroissent lorsque le nombre de particules augmente, et tendent, de façon assez paradoxale, vers 0 à la limite d'un nombre de particules infini. Cela dit, étant donné que la dimension de l'espace de diagonalisation est gigantesque, la probabilité de tirer un vecteur au hasard et d'obtenir un recouvrement meilleur que ceux présentés est infime. Par exemple pour  $N = 9$  sur la sphère, la dimension du secteur diagonalisé vaut 45207, ce qui donne une probabilité  $\approx 10^{-43547}$  d'obtenir de façon aléatoire un vecteur de meilleur recouvrement. L'ampleur de ces recouvrements suggère donc que le fondamental de  $\mathcal{H}$  doit avoir une physique très similaire à celle de Laughlin, bien que ce dernier ne soit pas un état exact.

Il est assez remarquable que la fonction d'onde Laughlin, bien qu'obtenue par approche variationnelle, ne dispose d'aucun paramètre ajustable, tandis que la forme des interactions entre électrons n'est pas fixée a priori. En effet, le raisonnement de Laughlin n'utilise que la projection dans le plus bas niveau de Landau ainsi que les propriétés de symétrie, mais ne fait pas intervenir explicitement la forme du potentiel d'interaction en loi de Coulomb. En règle générale, quelle que soit la forme du potentiel d'interaction, pourvu qu'il soit "suffisamment" fort à courte portée, les recouvrements entre la fonction d'onde de Laughlin et les états exacts obtenus numériquement sont excellents. La forme précise du potentiel d'interaction nécessaire pour former un état fondamental proche de celui de Laughlin est mieux évaluée par l'intermédiaire des pseudopotentiels, que nous présenterons dans la section suivante (2.2.5) et qui furent introduits par Haldane (Haldane 1983). De plus, le fait qu'aucun paramètre ne puisse être ajusté donne un crédit supplémentaire à la fonction d'onde de Laughlin. Effectivement, on pourrait reprocher à une fonction d'onde variationnelle avec un grand nombre de paramètres ajustables d'avoir nécessairement de bons recouvrements dans une région de l'espace des paramètres, sans pour autant que cette fonction d'onde capture correctement la physique sous-jacente. Ici, il est clair que la fonction d'onde de Laughlin capture la majeure partie de la physique des phases à  $\nu = 1/q$ .

## 2.2.5 Pseudopotentiels de Haldane et interactions de cœur dur

F. D. M. Haldane dérivait en 1983 (Haldane 1983) une interaction de courte portée pour laquelle le fondamental de  $\mathcal{H}$  est précisément la fonction d'onde de Laughlin 2.88. Pour cela, il décompose toute interaction à deux corps isotrope  $V(|\mathbf{r}|)$  en une somme de ses projections sur les secteurs de moment relatifs  $-s\hbar m$  dans le LLL, appelés pseudopotentiels  $V_m$ . Comme nous allons voir ci-après, ce sont les pseudopotentiels pour  $m < q$ , de courte portée, qui génèrent la fonction d'onde de Laughlin en fondamental à  $\nu = 1/q$ . Les autres pseudopotentiels ( $V_{m \geq q}$ ) ne modifient, a priori, que marginalement le fondamental tant qu'ils restent plus faibles que ceux de plus faible portée. Ainsi, par ce raisonnement, Haldane fournit aussi une déduction de la fonction d'onde de Laughlin, sans faire appel à l'ansatz de type Jastrow (eq. 2.87).

### Problème à deux corps

Résolvons tout d'abord le problème à deux corps :

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{(\mathbf{p}_1 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_1))^2}{2m} + \frac{(\mathbf{p}_2 + e\mathbf{A}(\mathbf{r}_2))^2}{2m} + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (2.90)$$

On passe naturellement aux coordonnées relatives  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$  et aux coordonnées du centre de masse  $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$  qui permettent de réécrire  $\mathcal{H}^{(2)}$  en deux termes qui commutent :

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{4m}(\mathbf{P} + 2e\mathbf{A}(\mathbf{R}))^2 + \frac{1}{m}(\mathbf{p} + \frac{e}{2}\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + V(r), \quad (2.91)$$

où  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{P}$  sont respectivement l'impulsion relative et l'impulsion du centre de masse. Notons que pour obtenir l'équation ci-dessus, nous avons supposé que le potentiel vecteur  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  était linéaire en  $\mathbf{r}$ . Ceci est en effet le cas dans la jauge symétrique utilisée dans ce qui suit. À gauche, le Hamiltonien du centre de masse est identique à celui d'une particule libre de masse  $2m$ , de charge  $2e$ , d'énergie cyclotron  $\hbar 2e|B|/(2m) = \hbar\omega_c$  et de longueur magnétique  $\ell/\sqrt{2}$ . À droite, le Hamiltonien de la coordonnée relative est celui d'une particule de masse  $m/2$ , de charge  $e/2$ , d'énergie cyclotron  $\hbar(e/2)|B|/(M/2) = \hbar\omega_c$  et de longueur magnétique  $\sqrt{2}\ell$ , confiné dans un potentiel à symétrie centrale  $V(r)$ . Dans la jauge symétrique (sec. 2.1.3), les états propres de  $\mathcal{H}^{(2)}$  sont communs au moment cinétique relatif selon  $z$   $L_z^r = [\mathbf{r} \wedge \mathbf{p}]_z = -\hbar(z\frac{\partial}{\partial z} - \bar{z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}})$  et au moment cinétique du centre de masse  $L_z^c = [\mathbf{R} \wedge \mathbf{P}]_z = -\hbar(Z\frac{\partial}{\partial Z} - \bar{Z}\frac{\partial}{\partial \bar{Z}})$ , où on utilise les coordonnées complexes habituelles  $z = z_1 - z_2$  et  $Z = (z_1 + z_2)/2$ . Dans l'approximation de champ magnétique intense (sec. 2.2.3), les électrons sont projetés dans le LLL et aucun mélange entre niveaux dû à  $V(r)$  n'est considéré. Les états propres de  $\mathcal{H}^{(2)}$  dans le LLL de moment cinétique relatif  $-s\hbar m$  et de moment cinétique du c.d.m.  $-s\hbar M$  s'écrivent alors (eq : 2.30) :

$$\phi_{mM} \propto z^m Z^M e^{-\frac{|z|^2}{8}} e^{-\frac{|Z|^2}{2}}. \quad (2.92)$$

Dans le cas habituel où les particules sont des électrons,  $m$  doit être impair afin que  $\phi_{mM}$  soit antisymétrique par échange des particules 1 et 2. Dans le cas où les particules

sont bosoniques,  $m$  est pair. Ces états sont d'énergie  $\hbar\omega_c + V_m$ , où  $V_m$  est la composante diagonale de  $V(r)$  dans cette base :

$$\langle \phi_{mM} | V(r) | \phi_{m'M'} \rangle = \delta_{MM'} \delta_{mm'} V_m. \quad (2.93)$$

Ainsi, dans la limite du champ magnétique infini, seuls les paramètres  $V_m$ , appelés pseudopotentiels de Haldane, sont pertinents, et le profil complet de  $V(r)$  n'est pas nécessaire. Puisque  $\phi_{m0}$  est localisé principalement autour de  $r = 2\ell\sqrt{m}$ ,  $V_m$  représente grossièrement une moyenne de  $V(r)$  autour de  $r = 2\ell\sqrt{m}$ . A l'aide des opérateurs  $P_m^{12}$ , de projection sur l'espace de moment cinétique relatif  $-s\hbar m$ , le Hamiltonien à deux corps dans le LLL s'écrit de la façon compacte suivante :

$$\mathcal{H}^{(2)} = \sum_m V_m P_m^{12} \quad (2.94)$$

### Approche variationnelle à $N$ corps

Passons maintenant au problème à  $N$  particules interagissant au travers d'un potentiel à deux corps isotrope  $V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)$ . L'Hamiltonien du système s'écrit :

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{i < j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|). \quad (2.95)$$

L'énergie moyenne d'interaction d'un état  $|\Psi\rangle$  s'écrit :

$$\langle \Psi | \mathcal{H}_{int} | \Psi \rangle = \frac{1}{2} N(N-1) \langle \Psi | V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) | \Psi \rangle \quad (2.96)$$

$$= \frac{1}{2} N(N-1) \sum_m V_m \langle \Psi | P_m^{12} | \Psi \rangle, \quad (2.97)$$

en faisant usage de l'antisymétrie (symétrie dans le cas bosonique) de  $|\Psi\rangle$  par échange de deux particules. Dans cette équation,  $\langle \Psi | P_m^{12} | \Psi \rangle = |P_m^{12} |\Psi\rangle|^2$  représente la probabilité que deux particules données aient un moment cinétique relatif  $-\hbar m$ . On peut décomposer une fonction d'onde du LLL dans la jauge symétrique (cf. eq. 2.33) sur chaque secteur de moment cinétique relatif des particules 1 et 2 d'après :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = P[z_1, z_2, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2} \quad (2.98)$$

$$= \sum_m z^m Q_m[Z, z_3, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2} \quad (2.99)$$

avec  $z = z_1 - z_2$  et  $Z = (z_1 + z_2)/2$  définis comme précédemment. Autrement dit,  $P_m^{12} \Psi = z^m Q_m[Z, z_3, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2}$ . On remarque que pour la fonction d'onde de Laughlin  $\Psi_q$ ,  $(z_1 - z_2)^q$  peut être mis en facteur du polynôme  $P$ , donc  $P_m^{12} \Psi_q = 0$  pour tout  $m < q$ . Les pseudopotentiels  $V_m$  pour  $m < q$  ne contribuent donc pas à l'énergie moyenne de Laughlin.

### Modèle de cœur dur

Ainsi, pour une interaction de type cœur dur répulsive définie par

$$\begin{aligned} V_m &> 0, \quad \text{pour tout } m < q \\ V_m &= 0, \quad \text{pour tout } m \geq q, \end{aligned} \quad (2.100)$$

la fonction d'onde de Laughlin (2.88) est d'énergie nulle. Or ce Hamiltonien est positif, donc Laughlin fait partie de l'espace fondamental d'énergie zéro de  $\mathcal{H}$ . Réciproquement, un état fondamental  $|\Psi\rangle = P[z_1, z_2, \dots, z_N]e^{\dots}$  de cette interaction vérifie  $P_m^{12}|\Psi\rangle = 0, \forall m < q$ , donc  $(z_1 - z_2)^q$  peut être mis en facteur de  $P$ . Or  $P$  est antisymétrique (ou symétrique) donc  $(z_i - z_j)^q$  se met aussi en facteur de  $P$  pour tout  $(i, j)$ . Les états fondamentaux d'énergie zéro de l'Hamiltonien de cœur dur ci-dessus ont donc la forme générale :

$$\prod_{i < j} (z_i - z_j)^q Q[z_1, z_2, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4}\sum |z_i|^2} \quad (2.101)$$

où  $Q$  est un polynôme symétrique à  $N$  variables quelconques. Notons  $\mathcal{E}_0$  l'espace de ces états.

A ensemble  $\{V_m\}$  donné, on peut calculer un des potentiels d'interaction dont les pseudopotentiels dans le LLL sont les  $\{V_m\}$ . Une des représentations est donnée par la formule non triviale (voir (MacDonald 1994) pour une dérivation) dans l'espace de Fourier :

$$V(\mathbf{p}) = 2\ell^2 \sum_{m=0}^{+\infty} V_m L_m(p^2 \ell^2), \quad (2.102)$$

où  $L_m$  est le polynôme de Laguerre de degré  $m$ . On obtient par exemple, si  $V^m(r)$  est le potentiel de pseudopotentiels  $V_m = 1$  et  $V_{i \neq m} = 0$  :

$$V^0(\mathbf{r}) = 4\pi\ell^2 \delta^2(r) \quad (2.103)$$

$$V^1(\mathbf{r}) = 4\pi\ell^2 (\ell^2 \Delta_{\mathbf{r}} + 1) \delta^2(r) \quad (2.104)$$

où  $\Delta_{\mathbf{r}} = \partial_x^2 + \partial_y^2$  est le Laplacien.

Dans le cas du problème à  $N$  bosons, le modèle de cœur dur à  $q = 2$  est donc obtenu pour un potentiel d'interaction :

$$V(\mathbf{r}) = g_B \delta^2(r) \quad (2.105)$$

avec  $g_B > 0$ . La fonction d'onde  $\Psi_2$  (eq. 2.88) et son espace  $\mathcal{E}_0$  associé forment alors l'espace fondamental de l'Hamiltonien d'interaction dans la géométrie du disque. Notons que, bien que cette interaction soit issue d'un processus purement théorique, le potentiel d'interaction (2.105) représente fidèlement l'interaction entre deux atomes bosoniques ultra-froids avec  $g_B = \frac{4\pi\hbar^2 a_S}{m}$ , où  $a_S$  est la longueur de diffusion de type S. Cette physique pourrait être observée dans une expérience d'atomes froids en rotation, où la force de

Coriolis  $2m\mathbf{v} \wedge \boldsymbol{\Omega}$  aurait le même effet que la force de Lorentz  $-e\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$  (voir (Cooper 2008) pour une revue sur l'EFQF dans les gas de bose en rotation).

Le modèle de cœur dur à  $q = 3$  (pour des fermions) est lui décrit par une interaction :

$$V(\mathbf{r}) = g_F \Delta \delta^2(r) \quad (2.106)$$

avec  $g_F > 0$  et  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$  l'opérateur Laplacien.

### Laughlin, état fondamental du modèle de cœur dur le plus compact

Grâce à la symétrie par rotation autour de  $O$  dans la jauge symétrique, les états propres de  $\mathcal{H}$  peuvent être classés en fonction de leur moment cinétique total selon  $z : -\hbar M$ , avec  $M \in \mathbb{N}$ . Si  $\Psi = P[\{z_i\}] e^{-\sum |z_i|^2/4}$  est un état propre dans le secteur  $-\hbar M$ , son polynôme  $P$  est alors une somme de monômes  $z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_N^{\alpha_N}$  de degré homogène  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_N = M$ . Parmi les états d'énergie zéro du modèle de cœur dur (2.100) ( $\mathcal{E}_0$ ), celui de plus petit  $M$  est la fonction d'onde test de Laughlin (2.88), obtenu pour  $M = qN(N-1)/2 = M(N, q)$ . Or, si  $\Psi$  est un état de densité homogène  $\rho$  dans son volume et dont le bord ne s'étend que sur quelques longueurs magnétiques, on montre aisément que  $M = N^2/(4\pi\ell^2\rho)$  à la limite thermodynamique. En ce sens, la fonction d'onde de Laughlin est l'état fondamental du modèle de cœur dur le plus dense.

### Pseudopotentiels de l'interaction de Coulomb

Dans le cas d'un potentiel d'interaction générale, le raisonnement ci-dessus ne suffit plus pour trouver l'état fondamental exact. Il n'y a d'ailleurs pas, à notre connaissance, de dérivation analytique d'un état fondamental dans un des secteurs à  $M$  fixé dans le cas d'un potentiel avec  $V_m > 0$  pour tout  $m$ . Cela dit, la fonction d'onde de Laughlin reste, pour de nombreux potentiels répulsifs de forte amplitude à courte portée, une très bonne approximation de l'état fondamental dans le secteur  $M = M(N, q) = qN(N-1)/2$ . On peut en intuitiver la raison de la façon suivante.

Perturbons d'abord légèrement le modèle de cœur dur (eq. 2.100) en ajoutant une faible composante à longue portée de sorte que  $V_m > 0$  pour  $m < q$ , et  $0 < V_{m'} < V_m$  pour  $m < q$  et  $m' \geq q$ . Dans le secteur  $M = M(N, q) = qN(N-1)/2$ , c'est à dire à un remplissage  $\nu = 1/q$ , cherchons encore  $\Psi = P[\{z_i\}] e^{-\sum |z_i|^2/4}$  qui minimise (eq. 2.97) :  $\sum V_m |P_m^{12}|\Psi|^2$ . Les probabilités ou poids  $|P_m^{12}|\Psi|^2$  sont de somme égale à 1. La fonction d'onde de Laughlin 2.88 est le seul état, à  $M = M(N, q)$ , qui n'ait aucun poids  $|P_m^{12}|\Psi|^2$  pour  $m < q$ . Tout autre état  $\Psi$ , orthogonal à  $\Psi_q$ , a au moins un des poids  $|P_m^{12}|\Psi|^2$  strictement positif. L'énergie moyenne de  $\Psi_q$  est donc bien plus faible que celle de  $\Psi$  à priori, et l'état fondamental exact est donc proche de  $|\Psi_q\rangle$ .

Pour l'interaction de Coulomb,  $V(r) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon r}$ , plus proche des conditions expérimentales, on peut calculer les pseudopotentiels de Haldane depuis l'équation (2.93) et on trouve :

$$V_m = \frac{\sqrt{\pi} (2m-1)!!}{2} \frac{e^2}{2^m m! 4\pi\epsilon\ell}. \quad (2.107)$$

Soit, pour les premiers termes :

$m$	$V_m$
0	0.8862
1	0.4431
2	0.3323
3	0.2769
4	0.2423
5	0.2180

où on rappelle que dans le cas de particules fermioniques, seuls les termes avec  $m$  impair contribuent, tandis que seuls les termes pairs sont pris en compte dans le cas bosonique. On voit que  $V_1 \gg V_3, V_5$  est tout juste vérifié, donc dans l'espace des paramètres  $V_m$ , le Hamiltonien de Coulomb est proche de l'Hamiltonien de cœur dur avec  $q = 3$ . Cette observation donne une explication partielle (mais n'explique pas) des très bons recouvrements entre la fonction d'onde de Laughlin pour  $q = 3$  ( $\nu = 1/3$ ) et le fondamental exact calculé numériquement pour une interaction de Coulomb (cf. section 2.2.4). On peut d'ailleurs vérifier que en variant continûment les paramètres à longue portée  $V_m$  pour  $m \geq 3$ , ce recouvrement reste excellent, sans effectuer de saut, ce qui serait le signe d'une éventuelle transition de phase. A  $\nu = 1/5$ ,  $V_3$  est à peine plus grand que  $V_5$ , donc la condition  $V_1, V_3 \gg V_5, V_7, \dots$  ne s'applique pas. Pourtant, les simulations numériques montrent que la fonction d'onde de Laughlin à  $q = 5$  est une très bonne approximation du fondamental exact à  $\nu = 1/5$  pour une interaction de Coulomb (voir (Fano et al. 1986) par exemple). Cela dit, à partir de  $\nu \leq 1/7$ , expériences et calculs numériques (Lam & Girvin 1984) ont montré que l'état fondamental n'est plus décrit par un liquide de Laughlin, mais que les électrons préfèrent s'organiser selon une structure cristalline triangulaire, appelée cristal de Wigner. Ce cristal est analogue à la structure qu'adoptent les électrons en interaction forte sans champ magnétique afin de maximiser leur distances réciproques.

## 2.2.6 Excitations élémentaires neutres et de charge $e/q$

### Gap neutre dans le volume du liquide de Laughlin

Malheureusement, seuls les états fondamentaux d'énergie zéro du modèle de cœur dur peuvent être dérivés analytiquement par le raisonnement précédent. Il n'existe pas aujourd'hui de dérivation exacte des états propres orthogonaux à  $\mathcal{E}_0$  et de basse énergie, du modèle de cœur dur (eq. 2.100), sans même parler du cas du potentiel de Coulomb. Ceci étant, de nombreuses fonctions d'onde d'essai ont été proposées pour décrire les états propres de  $\mathcal{H}$

Les excitations de plus basse énergie à charge fixée sont appelées états magnétorotons après Girvin et al. (1986). Ils existent pour toute valeur du moment angulaire ou linéaire et sont toujours gappés. Il est possible d'en fabriquer une très bonne approximation au moyen de la méthode du "single mode" inspirée des travaux de Feynman sur les excitations collectives dans l'Helium superfluide. Ce mode de magnétoroton que nous rencontrerons

sur le cylindre peut aussi être décrit dans la théorie des fermions composites sous la forme d'un "exciton" où l'on promeut un fermion composite vers un pseudo niveau de Landau immédiatement supérieur. Pour de grandes valeurs du moment ce magnéto-rotor peut être considéré comme un état lié d'un quasi-électron et d'un quasi-trou de Laughlin (Kallin & Halperin 1984). Ce gap présent dans le volume du fluide est synonyme du caractère incompressible des liquides de Hall fractionnaire.

Comme mentionné précédemment, l'existence d'un gap dans le volume du fluide électronique, en l'absence de désordre, est essentielle pour expliquer la quantification de la résistance de Hall ainsi que l'annulation de la résistance longitudinale à  $T = 0$  des 2DEGs. Aux remplissages fractionnaires adéquats, créer une excitation dans le volume du fluide, i.e. éloignée de ses bords, requiert une énergie finie.

### Quasi-particules de charges fractionnaires

Au moyen d'un raisonnement électrodynamique utilisant l'incompressibilité ainsi que la quantification de la conductance, Laughlin a montré (Laughlin 1983) l'existence d'états de charges fractionnaires  $\pm e/q$  dans l'EHQF. Ces états s'obtiennent en ajoutant ou en enlevant un quantum de flux au système. Un quasi-trou est obtenu lors de l'addition tandis qu'on nomme quasi-électron l'état obtenu en enlevant un quantum de flux. Ces quasi-particules sont des objets avec une extension spatiale de l'ordre de la longueur magnétique. Laughlin a suggéré des fonctions d'onde d'essai dès son travail de départ. Sa formule pour les quasi-trous se trouve être exacte dans le cas du potentiel de cœur dur. Ce n'est pas le cas du quasi-électron. Il semble que la théorie des fermions composites donne une fonction d'onde d'essai du quasi-électron qui soit plus satisfaisante. Dans le cas du potentiel de cœur dur le quasi-électron possède une énergie propre non nulle gappée, c'est à dire qu'il faut fournir une énergie finie pour créer un quasi-électron au sein du liquide de Laughlin. Ce n'est pas le cas du quasi-trou qui est d'énergie nulle dans le modèle de cœur dur. Par contre ces deux types de quasi-particules sont gappées dans le cas de l'interaction de Coulomb.

En possession d'une fonction d'onde d'essai on peut calculer explicitement la charge de ces quasi-particules : elles sont fractionnaires. De même lors de l'opération d'échange de deux telles particules apparaît une phase non-triviale qui n'est pas  $\pm 1$ . Ce sont des anyons, particules qui ne sont ni bosons ni fermions. Ce phénomène remarquable est permis par la mécanique quantique en dimension d'espace égale à 2. Nous rencontrerons des statistiques encore plus exotiques dans le cas des excitations du Pfaffien où apparaît une statistique d'échange mettant en jeu des matrices qui ne commutent pas.

### États de bord et quasi-trous

Le modèle de cœur dur, sans potentiel de confinement, dispose d'un espace fondamental de dimension infinie  $\mathcal{E}_0$ , à condition de ne pas borner le moment angulaire du système. Parmi ceux-ci, l'état de moment angulaire minimal est la fonction d'onde de Laughlin. La contrainte imposée par le fait que deux électrons ne peuvent pas avoir de moment relatif

plus petit que  $q$  est préservée par un grand nombre d'opérations comme les translations, rotations, dilatations... Les états de  $\mathcal{E}_0$  contiennent à la fois les translations de la fonction d'onde de Laughlin, des modes de déformation de son bord, des quasi-trous de charge  $1/m$  dans son volume... Nous reviendrons sur la classification de ces états et leurs propriétés dans la section (4) dans la géométrie cylindrique.

La dégénérescence de l'espace fondamental de  $\mathcal{H}_{int}$  peut être levée si on ajoute un potentiel de confinement. Si on choisit un potentiel invariant par rotation autour de  $O$ , de la forme  $V_{ext} \propto r^2$  par exemple, et suffisamment faible de sorte que les états de  $\mathcal{E}_0$  ne soient pas mélangés avec les états orthogonaux à  $\mathcal{E}_0$ , la fonction d'onde de Laughlin (2.88) est alors l'unique état fondamental de  $\mathcal{H}$ . Dans la section (4), nous étudierons en détail la physique de ce modèle de cœur dur en présence d'un potentiel de confinement dans le cas de la géométrie cylindrique.

## 2.3 L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre

Il est intéressant d'étudier théoriquement les phases de Hall fractionnaire sur différentes géométries à deux dimensions afin d'envisager les divers aspects de ce problème de complexité redoutable. Dans son raisonnement, Laughlin (1983) considère que les électrons sont confinés sur le plan, dans un potentiel à symétrie centrale, de sorte que la goutte de Hall forme un disque de densité uniforme en son volume, et d'un bord circulaire. Afin d'étudier les propriétés du volume des phases de Hall, sans être encombré par la physique des bords, Haldane propose dans deux célèbres articles de placer les électrons à la surface d'une sphère (Haldane 1983) ou d'un tore (Haldane 1985). Puisque ces surfaces sont compactes et dénuées de bord, il est possible, en choisissant judicieusement le nombre de quanta de flux magnétique traversant la surface, d'obtenir un liquide de Hall invariant par translation (ou rotation sur la sphère). Les géométries du tore et de la sphère sont ainsi bien plus pratiques que celles disposant de conditions aux limites ouvertes pour étudier les propriétés du volume des phases de Hall fractionnaire telles que la taille du gap des excitations, la nature des excitations du volume, les fonctions de corrélations du volume, l'intrication . . . .

Cela dit, comme nous avons déjà pu le voir précédemment, la physique aux bords de ces liquides est d'importance primordiale. En effet, en l'absence de désordre, ou pour un désordre d'amplitude bien inférieure au gap dans le volume de liquides de Hall, les seules excitations de basse énergie sont localisées le long de bords. Cela a pour conséquence, par exemple, que le transport des charges, à basse température, s'effectue le long des bords de l'échantillon, comme dans le cas de l'effet Hall quantique entier (cf. sec. 2.2.2). Selon la phase dans laquelle se trouve le liquide de Hall fractionnaire, diverses théories unidimensionnelles sont supposées décrire la physique effective des bords. Comme nous le verrons en détail dans la section 4, les phases de Laughlin à  $\nu = 1/m$ , les mieux comprises aujourd'hui, sont décrites à leurs bords par un liquide de Luttinger chiral (Wen 1990). Les états hiérarchiques, à  $\nu = p/q$ , sont censés être décrits par plusieurs modes chiraux bosoniques plus ou moins couplés selon l'amplitude du désordre ou la forme du potentiel

de confinement. D'autres particules exotiques sont supposées apparaître aux bords des phases de Hall, notamment au remplissage  $\nu = 5/2$  (cf. chap. 5) où les bords du liquide seraient décrits par un mode bosonique couplé à un fermion de Majorana (Moore & Read 1991).

De nombreux procédés expérimentaux permettent d'ailleurs de sonder la physique des excitations de bord. L'existence de liquides de Luttinger chiraux le long des bords des phases de Hall fractionnaire a pu être validée grâce à des mesures de caractéristiques de courant tunnel dans des Contacts Ponctuels Quantiques (QPC) ou dans des jonctions FQH-Metal (Chang 2003). La mesure du bruit de grenaille (*shot noise* en anglais) lors du passage par effet tunnel de quasiparticules au travers de la constriction d'un QPC, a quant à elle, permis de confirmer que la charge élémentaire des excitations à  $\nu = 1/m$  était bien une fraction  $e/m$  de la charge de l'électron (de Picciotto et al. 1997, Saminadayar et al. 1997). Des mesures locales de thermométrie ont aussi, par exemple, permis récemment de détecter des modes neutres se propageant à contre-courant des modes chargés dans la phase  $\nu = 2/3$  (Venkatachalam et al. 2012).

Au cours de ma thèse, j'ai principalement étudié les propriétés des bords de liquides de Hall, à partir d'une approche microscopique. Dans la géométrie du disque, utilisée par Laughlin, une goutte de Hall dispose d'un bord circulaire, et les modes de déformation du bord peuvent y être étudiés. Ces modes apparaissent à un moment cinétique  $M$  supérieur à celui de Laughlin ( $M(N, q)$ ). Cela dit, cette géométrie n'est pas adaptée si on veut étudier le transfert des charges par effet tunnel au travers du liquide de Hall pour la simple raison que la distance au travers de la goutte ne peut être variée à un nombre de particules et remplissage donné. Il est donc préférable de faire en sorte que la goutte de Hall forme une bande dont la largeur peut être variée à notre gré. Cette disposition est le plus facilement réalisée en se plaçant dans la géométrie du cylindre, lorsque les électrons sont placés sur un plan périodique dans la direction  $y$  (cf. sec. 2.1.4). Nous présentons, dans la suite de cette partie (2.3), plusieurs points fondamentaux dans cette géométrie ainsi que le calcul des projections d'Hamiltoniens utiles sur les orbitales 2.42.

### 2.3.1 Hamiltonien d'interaction dans le plus bas niveau de Landau

Nous considérons donc que les électrons se déplacent sur un cylindre de circonférence  $L$  et utilisons la jauge de Landau  $\mathbf{A} = B(0, x, 0)$ . Nous considérons, dans le cas général, un potentiel d'interaction  $V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$  ainsi qu'un potentiel extérieur de confinement  $u = u(x)$  homogène dans la direction  $y$ , auquel la section suivante (2.3.2) est consacrée. Dans le cadre des approximations de la partie (2.2.3), l'Hamiltonien général qui nous intéresse s'écrit :

$$\mathcal{H} = P_{LLL} (\mathcal{H}_{int} + \mathcal{U}) P_{LLL} \quad (2.108)$$

avec

$$\mathcal{H}_{int} = \sum_{i < j=1}^N V(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \quad (2.109)$$

$$\mathcal{U} = \sum_{i=1}^N u(x_i) \quad (2.110)$$

Pour être bien défini sur le cylindre, le potentiel d'interaction doit vérifier les conditions périodiques

$$V(x, y + L) = V(x, y). \quad (2.111)$$

Notons que pour satisfaire cette condition de périodicité, le potentiel  $V(\mathbf{r})$  ne peut être isotrope alors qu'il l'est dans le cas du plan. C'est uniquement dans la limite où la circonférence  $L$  tend vers l'infini, que l'on doit retrouver l'invariance par rotation de  $\mathbf{r}$ , pour  $r \ll L$ . Afin de convertir une interaction  $\tilde{V}(r)$  isotrope du plan vers un potentiel compatible avec l'équation (2.111), plusieurs choix sont possibles :

1.  $V(\mathbf{r}) = \tilde{V}(d(\mathbf{r}))$ , où  $d(\mathbf{r})$  est la distance minimale entre O et les répliques de  $\mathbf{r}$  modulo  $L\hat{\mathbf{y}}$ . C'est à dire que  $d(\mathbf{r}) = (x, y + pL)$ , avec  $y + pL \in ] -L/2, L/2[$ .
2. On pourrait aussi prendre  $d(\mathbf{r})$  : la distance de la corde entre les deux points sur le cylindre. Ce choix plus compliqué pour les calculs est équivalent au premier à la limite  $L \rightarrow \infty$ , lorsque la courbure tend vers 0. Dans la géométrie de la sphère, c'est aussi la longueur de la corde qui est généralement choisie par simplicité.
3. On pourrait aussi considérer  $V(\mathbf{r}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} \tilde{V}(\sqrt{x^2 + (y + pL)^2})$ , c'est à dire que toute paire de particules interagit entre elles ainsi qu'avec toutes leurs répliques obtenues par translations successives de  $L\hat{\mathbf{y}}$ .

Ceci étant, dans le cas d'interactions locales de type cœur dur (cf. sec. 2.2.5), que nous utiliserons exclusivement dans la suite du manuscrit, les versions 1. et 3. sont équivalentes. Notons cependant que le dernier choix introduit des divergences dans le cas de l'interaction de Coulomb  $\tilde{V}(r) \propto 1/r$ , qu'il faut supprimer par un cut-off à longue distance.

Même si, comme l'a montré Laughlin, écrire les fonctions d'onde en première quantification peut être très fructueux, dans le but de diagonaliser  $\mathcal{H}$  numériquement et pour une formulation plus lisible, il est utile de réécrire le Hamiltonien (2.108) en seconde quantification dans l'espace de Fock généré par les orbitales du LLL définies dans la partie (2.1.4) :

$$\phi_{0m} = \frac{1}{\sqrt{L\ell}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x-x_m)^2} e^{ik_my} \quad (2.112)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L\ell}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2\ell^2}x_m^2} Z^m e^{-\frac{1}{2\ell^2}x^2}. \quad (2.113)$$

### 2.3 L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre

---

Soit  $a_m$  et  $a_m^\dagger$  les opérateurs de création et d'annihilation usuels, bosoniques ou fermioniques selon le cas considéré, l'Hamiltonien d'interaction s'écrit dans le LLL :

$$P_{LLL}\mathcal{H}_{int}P_{LLL} = \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4} A_{m_1, m_2, m_3, m_4} a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger a_{m_3} a_{m_4} \quad (2.114)$$

où l'élément de matrice est donné par :

$$A_{1234} = \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' \phi_{m_1}^*(\mathbf{r}) \phi_{m_2}^*(\mathbf{r}') V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \phi_{m_3}(\mathbf{r}') \phi_{m_4}(\mathbf{r}) \quad (2.115)$$

où ici et dans la suite,  $A_{1234}$  est une abréviation pour l'écriture plus lourde  $A_{m_1, m_2, m_3, m_4}$ .

Le potentiel d'interaction  $V$  est L-périodique dans la direction  $y$ . On peut donc le décomposer en mode de Fourier dans la direction  $y$  et prendre sa transformée de Fourier selon  $x$  :

$$V_m(q_x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-L/2}^{L/2} V(x, y) e^{iq_x x} e^{i\frac{2\pi}{L} m y} \quad (2.116)$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi L} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_x \sum_m V_m(q_x) e^{-iq_x x} e^{-i\frac{2\pi}{L} m y} \quad (2.117)$$

Cela permet de réécrire les éléments de matrice (eq. 2.115) après quelques lignes de calcul sous la forme :

$$A_{1234} = \frac{1}{2\pi L} \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} e^{-\frac{1}{2\ell^2}(x_{m_1}-x_{m_4})^2} \times \int dq_x V_{m_4-m_1}(q_x) e^{-1/2q_x^2 \ell^2 - iq_x(x_{m_1}-x_{m_3})} \quad (2.118)$$

#### Symétries de $\mathcal{H}$

Avant de calculer les éléments de matrice pour les interactions qui nous intéressent, analysons les symétries de  $\mathcal{H}$  dans le cas général. Tout d'abord, le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  est invariant par translation de toutes les particules dans la direction  $y$  donc commute avec l'opérateur d'impulsion totale selon  $y$   $P_y = \sum_j -i\hbar\partial_{y_j}$ . L'impulsion selon  $y$  d'une particule dans l'orbitale  $\phi_m$  (2.112) est  $\hbar k_m = \hbar\frac{2\pi}{L}m$ . L'opérateur d'impulsion totale selon  $y$  s'écrit donc  $P_y = \hbar\frac{2\pi}{L}\hat{M}$  avec :

$$\hat{M} = \sum_m m \hat{n}_m \quad (2.119)$$

Le fait que  $\mathcal{H}$  commute avec  $M$ , ou que l'impulsion selon  $y$  soit conservée, impose que :

$$A_{m_1, m_2, m_3, m_4} = \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} A_{m_1, m_2, m_3, m_4}. \quad (2.120)$$

Notons  $|\{n_i\}\rangle = |\dots, n_{-1}, n_0, n_1, \dots\rangle$  les états de la base de Fock sur les orbitales  $\phi_m$ , i.e. les déterminants (ou permanent dans le cas bosonique) de Slater sur ces orbitales. On peut diagonaliser  $\mathcal{H}$  et  $M$  simultanément, donc on peut diagonaliser  $\mathcal{H}$  dans chaque sous-espace formé des états  $|\{n_m\}\rangle$  tels que  $\sum_m m n_m$  est constant égal à  $M \in \mathbb{Z}$ . Comme nous avons vu dans la section 2.1.4, les fonctions d'onde s'écrivent

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = P[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2} \quad (2.121)$$

où  $P$  est une série de Laurent à  $N$  variables, i.e. :

$$P[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} a_{\{m_i\}} Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \dots Z_N^{m_N} \quad (2.122)$$

avec  $m_i$  positif ou négatif, à la différence des fonctions d'onde sur le disque. Nos états propres sont donc constitués de séries de Laurent homogènes, dont le degré total est  $M$ .

En l'absence de potentiel de confinement  $u(x)$ ,  $\mathcal{H}$  est aussi invariant par translation dans la direction  $x$ . Mais, si on revient momentanément au problème à un corps, c'est l'opérateur de translations magnétiques (cf. sec. 2.1.5) dans la direction  $x$ ,  $t(X\hat{x}) = e^{X\partial_x + iyX/\ell^2}$ , qui commute avec  $\mathcal{H}_0$ . Or, il est nécessaire que cette translation préserve la périodicité des fonctions d'onde sur le cylindre  $\phi(x, y + L) = \phi(x, y)$ . Donc seules les translations de  $X = p\delta_x = p2\pi\ell^2/L, p \in \mathbb{Z}$ , commutent avec  $\mathcal{H}_0$  et préservent le LLL a fortiori. En pratique :

$$t^p \phi_m = \phi_{m+p} \quad (2.123)$$

où on note plus simplement  $t \equiv t(\delta_x \hat{x})$ . L'opération de translation globale de  $\delta_x$  est donnée par :

$$T \equiv \prod_{i=1}^N t_i \quad (2.124)$$

Il agit sur les opérateurs d'échelle de la façon suivante :

$$T^p a_m T^{-p} = a_{m+p} \quad (2.125)$$

$$T^p a_m^\dagger T^{-p} = a_{m+p}^\dagger \quad (2.126)$$

$T$  commute avec  $\mathcal{H}_0$  ainsi qu'avec  $\mathcal{H}_{int}$ , on pourrait donc penser diagonaliser simultanément  $\mathcal{H}$  et  $T$ . Mais,  $T$  ne commute pas avec  $M$  et :

$$[M, T^p] = pNT^p \quad (2.127)$$

Ainsi, on peut choisir une base d'états propres de l'opérateur de translation selon  $y$ , ou une base d'états propres de l'opérateur de translation selon  $x$ , mais pas des deux simultanément. Il est plus commode d'utiliser les états propres de  $M$ , notamment puisque ses valeurs propres sont discrètes et que  $M$  est conservé par l'ajout d'un potentiel  $u(x)$ . Si on veut considérer un potentiel homogène le long de l'axe du cylindre  $u(y)$ , c'est à l'inverse  $T$  qui est conservé donc utile. La condition  $[\mathcal{H}, T^p] = 0$  implique que :

$$A_{m_1+p, m_2+p, m_3+p, m_4+p} = A_{m_1, m_2, m_3, m_4}. \quad (2.128)$$

### 2.3 L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre

---

Cette condition combinée avec l'équation (2.120) implique que

$$A_{m_1, m_2, m_3, m_4} = \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} C_{m_1-m_4, m_2-m_4} \quad (2.129)$$

La forme générale du Hamiltonien d'interaction dans le LLL est donc, après simplification par étude des symétries :

$$P_{\text{LLL}} \mathcal{H}_{\text{int}} P_{\text{LLL}} = \sum_{m, c, d = -\infty}^{+\infty} C_{c, d} a_{m+c}^\dagger a_{m+d}^\dagger a_{m+c+d} a_m \quad (2.130)$$

Cette forme correspond bien à celle trouvée en (eq. 2.118), avec  $m = m_4, c = m_1 - m_4$ , et  $d = m_2 - m_4$ .

Enfin,  $\mathcal{H}$  est aussi symétrique par inversion des directions spatiales :

$$P : \phi(x, y) \rightarrow \phi(-x, -y) \quad (2.131)$$

Cette symétrie transforme  $\phi_m$  en  $\phi_{-m}$  et se traduit sur les éléments de matrice par  $C_{-c, -d} = C_{c, d}$ .

Notons aussi que dans le cas de fermions, par anticommutation entre opérateurs de création ou d'annihilation, on peut ne garder que la partie antisymétrique par échange ( $1 \leftrightarrow 2$ ) et ( $3 \leftrightarrow 4$ ) des éléments de matrice, de sorte que  $C_{d, c} = -C_{c, d}$  (signe + dans le cas bosonique).

#### Éléments de matrice du modèle hard core fermionique

Durant ma thèse, j'ai principalement étudié le problème de cœur dur  $V^1$  (cf. 2.100) dont l'interaction dans le plan s'écrit (eq. 2.106) :

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = g_F \Delta \delta^2(\mathbf{r}), \quad (2.132)$$

et dont la transformée de Fourier sur le cylindre vaut :

$$V_m(q_x) = -g_F (q_x^2 + (\frac{2\pi}{L}m)^2) \quad (2.133)$$

Après quelques lignes de calculs à partir de la formule (2.118), on trouve :

$$A_{1234} = \frac{g_F 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}}}{\ell L^3} \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} ((m_2-m_4)^2 - (m_1-m_4)^2) e^{-\frac{1}{2\ell^2}((x_{m_1}-x_{m_4})^2 + (x_{m_2}-x_{m_4})^2)} \quad (2.134)$$

Ce qui permet d'écrire simplement le Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_F = \frac{g_F 2^{\frac{1}{2}} \pi^{\frac{3}{2}}}{\ell L^3} \sum_{m, c, d} (d^2 - c^2) \lambda^{c^2+d^2} a_{m+c}^\dagger a_{m+d}^\dagger a_{m+c+d} a_m \quad (2.135)$$

où  $\lambda$  est le coefficient :

$$\lambda = e^{-\frac{2\pi^2 \ell^2}{L^2}} \quad (2.136)$$

## Éléments de matrice du modèle hard core bosonique

Nous avons étudié en parallèle les modèles de cœur dur fermioniques et bosoniques (cf. 2.100). Dans le cas de bosons en interaction selon le potentiel de cœur dur  $V^0$  (eq. 2.105) :

$$\tilde{V}(\mathbf{r}) = g_B \delta^2(\mathbf{r}). \quad (2.137)$$

Sa transformée de Fourier est constante égale à  $g_B$  et on trouve à partir de l'équation (2.118) que les éléments de matrice sont :

$$A_{1234} = \frac{g_B}{2\sqrt{2\pi\ell L}} \delta_{m_1+m_2, m_3+m_4} e^{-\frac{1}{2\ell^2}((x_{m_1}-x_{m_4})^2+(x_{m_2}-x_{m_4})^2)}. \quad (2.138)$$

Cela correspond à un Hamiltonien de la forme :

$$\mathcal{H}_B = \frac{g_B}{2\sqrt{2\pi\ell L}} \sum_{m,c,d} \lambda^{c^2+d^2} a_{m+c}^\dagger a_{m+d}^\dagger a_{m+c+d} a_m \quad (2.139)$$

où  $\lambda$  est toujours donné par :

$$\lambda = e^{-\frac{2\pi^2\ell^2}{L^2}} \quad (2.140)$$

## 2.3.2 Potentiel de confinement

### Potentiel de confinement

Puisque l'on considère des conditions aux limites ouvertes, et un nombre de particules fini, il est nécessaire de confiner notre liquide quantique afin que les électrons ne s'en aillent pas à l'infini. Pour que l'état fondamental soit stabilisé dans un liquide de Hall, il faut contrebalancer l'énergie d'interaction, qui tend à écarter les électrons les uns des autres, avec l'énergie potentielle d'un potentiel croissant à grande distance  $u(\mathbf{r})$ . Ce potentiel peut représenter le potentiel apparent des électrons proches du bord de l'échantillon. Il est alors très abrupt et sa largeur caractéristique s'étend sur quelques longueurs magnétiques seulement. Ce potentiel peut aussi représenter un potentiel électrostatique introduit par des grilles au dessous de l'échantillon, comme c'est le cas dans les réalisations expérimentales de Contacts Ponctuels Quantiques (QPC) (voir sec. 4.1).

Dans le cas d'une interaction de cœur dur, la portée de la répulsion est finie, et tout liquide dont le remplissage est  $\nu \leq 1/q$  en tout point est de même énergie d'interaction, égale à 0. En absence d'un potentiel de confinement, il existe un espace fondamental d'énergie zéro infiniment dégénéré :  $\mathcal{E}_0$  (cf. 2.101). Le potentiel  $u(\mathbf{r})$  permet donc de lever cette dégénérescence et de stabiliser l'état fondamental dans un liquide de Hall situé au fond du potentiel. Si on perturbe  $\mathcal{H}_{int}$  avec un potentiel de suffisamment faible amplitude, la dégénérescence de  $\mathcal{E}_0$  est levée, sans pour autant mélanger  $\mathcal{E}_0$  avec des états d'énergie au dessus du gap de Hall à  $\nu = 1/q$ . L'état fondamental est alors la fonction d'onde de Laughlin à  $\nu = 1/q$ , sous une forme donnée par le fond du potentiel de confinement. Nous

### 2.3 L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre

---

nous placerons dans cette configuration dans notre étude des états de bord à  $\nu = 1/3$  et  $\nu = 5/2$  dans les chapitres (4) et (5).

Notre étude dans la géométrie du cylindre se marie bien avec un potentiel  $u = u(x)$  qui préserve l'invariance par translation selon  $y$ . Ainsi,  $\mathcal{H}$  conserve  $\hat{M} = \sum m \hat{n}_m$ , et nos états propres peuvent toujours être classés selon leur moment cinétique total selon  $y$  :  $\hbar \frac{2\pi}{L} M$ . Par contre, ce potentiel brise l'invariance par translation selon  $x$ ,  $\hat{T}^p$  (cf. sec. 2.3.1). Mais puisque  $\hat{T}^p$  ne commute pas avec  $\hat{M}$ ,  $T^p$  ne peut de toute façon être utilisé pour diagonaliser simultanément  $\hat{M}$  et  $\mathcal{H}$ , donc briser cette invariance est peu coûteux.

J'ai, pendant ma thèse, majoritairement étudié l'effet d'un potentiel confinant quadratique :

$$u(x) = \kappa x^2, \quad (2.141)$$

même si une autre forme de potentiel aurait très bien pu être utilisée dans nos études. Ses éléments de matrice se calculent aisément et :

$$U = \sum_m \kappa \left[ \left( \frac{2\pi\ell^2}{L} \right)^2 m^2 + \frac{\ell^2}{2} \right] \hat{n}_m \quad (2.142)$$

ce qui peut être réduit, à une constante près à l'expression :

$$\boxed{U = \sum_m \beta m^2 \hat{n}_m} \quad (2.143)$$

Un des avantages très particuliers du potentiel quadratique est la propriété suivante : si  $\Psi$  est état propre de  $\mathcal{H}$  à  $N$  particules, de moment  $\hbar \frac{2\pi}{L} M$  et d'énergie  $E$ , alors  $T^p \Psi$  est aussi un état propre de  $\mathcal{H}$  d'énergie

$$E' = E + \beta(2pM + p^2N). \quad (2.144)$$

Cela se montre en considérant tout d'abord :

$$T^{-p} U T^p = \sum_m \beta m^2 \hat{n}_{m-p} \quad (2.145)$$

$$= \sum_m \beta (m+p)^2 \hat{n}_m \quad (2.146)$$

$$= U + 2p\beta \hat{M} + \beta p^2 \hat{N}. \quad (2.147)$$

On a donc :  $[\mathcal{H}, T^p] = [U, T^p] = T^p \beta (2p\hat{M} + p^2\hat{N})$ , soit le résultat voulu en appliquant  $\Psi$  à cette dernière égalité.  $T$  augmente  $M$  de  $N$  unités, donc on peut déduire tous les états du spectre de  $\mathcal{H}$  à partir de celui à  $M$  compris entre  $M = 0$  et  $M = N - 1$  par simple translation  $T^p$ .

### Troncature de l'espace de Hilbert

Un problème majeur de cette géométrie, dans la jauge de Landau, est que après réduction de l'espace de diagonalisation par étude des symétries du problème, cet espace est toujours de dimension infinie. En effet, comme expliqué précédemment, nous devons diagonaliser  $\mathcal{H}$  au sein de l'espace des fonctions d'onde à impulsion  $\hbar\frac{2\pi}{L}M$  donnée. Cet espace à  $M$  fixé est formé des fonctions d'onde (eq. 2.46) :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \sum_{m_1, m_2, \dots, m_N} C_{\{m_i\}} Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \dots Z_N^{m_N} e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2} \quad (2.148)$$

tel que,

$$m_1 + m_2 + \dots + m_N = M \quad , \quad m_i \in \mathbb{Z}. \quad (2.149)$$

La différence fondamentale avec la géométrie du disque est que les puissances de ce polynôme ne sont pas bornées inférieurement dans le plus bas niveau de Landau. Notons qu'ici, les puissances négatives de  $Z$  ne posent pas de problème de normalisabilité des fonctions d'onde car  $Z = e^{\frac{2\pi}{L}(-x+iy)}$  ne s'annule que lorsque  $x$  tend vers l'infini. Ainsi, cet espace est de dimension infinie, tandis que l'espace de moment cinétique donné dans la géométrie du disque est de dimension finie. Afin de pouvoir diagonaliser numériquement ce Hamiltonien, il faut impérativement considérer un espace de dimension finie.

Dans cette optique, nous considérons simplement que les indices des orbitales sont bornés entre deux valeurs :

$$G < m_i < D. \quad (2.150)$$

Cela revient à considérer un potentiel extérieur  $\hat{U} = \sum U_m \hat{n}_m$  tel que

$$\begin{aligned} U_m &= 0 \quad , \quad \text{pour } G \leq m \leq D \\ U_m &= +\infty \quad , \quad \text{sinon.} \end{aligned} \quad (2.151)$$

Ce choix de troncature est usuel dans la géométrie du cylindre, et est fait notamment dans l'article (Yoshioka 1993).

Puisque  $m$  est proportionnel à l'impulsion selon  $y$ ,  $\hbar 2\pi m/L$ , mais aussi la position du centre de masse de chaque orbitale,  $-\hbar 2\pi \ell^2 m/L$ , cette troncature des orbitales est semblable à l'introduction de bords durs dans l'espace réel aux positions  $-\hbar 2\pi \ell^2 G/L$  et  $-\hbar 2\pi \ell^2 D/L$ . Ce n'est cependant pas équivalent au système d'électrons confinés entre deux bords durs :  $V(x) = 0$  pour  $x_D \leq x \leq x_G$  et  $V(x) = +\infty$  sinon, dont les orbitales à un corps sont bien compliquées. Nous parlerons donc de limites quasi-dures, ou simplement limites du système, et n'utiliserons le mot "bord" que pour parler des bords de nos liquides de Hall. Nous noterons  $\tilde{\mathcal{H}}$  ce Hamiltonien diagonalisé numériquement :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4=G}^D A_{m_1, m_2, m_3, m_4} a_{m_1}^\dagger a_{m_2}^\dagger a_{m_3} a_{m_4} \\ &+ \sum_{m=G}^D V_m a_m^\dagger a_m \end{aligned} \quad (2.152)$$

Il n'y a pas de potentiel  $V(x)$  qui puisse produire ce potentiel ( $V_m = 0$  pour  $G \leq m \leq D$  et  $V_m = +\infty$ ). Cette troncature modifie le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  (eq. 2.108) d'une manière assez contrôlée. L'idée est que tant que les bords du système sont suffisamment éloignés des bords des états, de sorte que leur occupation moyenne  $\langle \hat{n}_m \rangle$  soit quasi-nulle proche des limites  $G$  et  $D$ , l'effet de cette troncature est minime. Nous verrons dans la partie (4) que tous états de  $\mathcal{E}_0$  d'énergie nulle contenus entre les orbitales  $G$  et  $D$ , sont des états exacts du Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}$  avec limites en orbitales. Ceci nous permet d'étudier les états de bord des problèmes de cœur-dur sans encombres. Par contre, dès que l'on considère des états d'énergie non nulle, des artefacts peuvent apparaître. Nous avons notamment découvert que certains états d'énergie non nulle de  $\tilde{H}$  sont non-gappés, et viennent perturber le spectre de  $\tilde{\mathcal{H}}$  au dessus de l'énergie nulle, alors qu'ils ne sont pas états propres de l'Hamiltonien  $\mathcal{H}$  (voir partie (3.3)).

Nous noterons

$$N_\phi \equiv D - L + 1 \quad (2.153)$$

le nombre d'orbitales utilisé dans notre base de Fock. C'est aussi, à plus ou moins un près, le nombre de quantum de flux magnétique traversant notre système, d'où la notation  $N_\phi$ .

### 2.3.3 Fonction d'onde de Laughlin sur le cylindre

À ma connaissance, la fonction d'onde de Laughlin a pour la première fois été écrite sur le cylindre par Thouless (1984). Elle s'écrit simplement

$$\Psi_q \propto \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\sum_i x_i^2 / (2\ell^2)}. \quad (2.154)$$

Rezayi & Haldane (1994) ont étudié certaines de ses propriétés, notamment sa distribution en impulsion, et montré qu'elle étaient cohérentes avec la théorie de Wen des bords des phases de Hall à  $\nu = 1/q$ .

Le fait que cette fonction d'onde soit l'équivalent sur le cylindre de la fonction d'onde de Laughlin du disque (eq. 2.88) peut sembler naturel puisque le même polynôme  $P$  est utilisé dans les deux fonctions d'onde, mais la preuve rigoureuse est moins triviale. En effet, on ne peut utiliser ni le raisonnement de Laughlin, ni celui d'Haldane puisque le potentiel d'interaction  $V(\mathbf{r})$  n'est pas invariant par rotation autour de 0 dans la géométrie du cylindre.

#### Démonstration

Pas de démarche simple amenant à la fonction d'onde (2.154) n'est disponible dans la littérature à ma connaissance. Nous donnons ici un raisonnement possible qui permet de trouver cette fonction d'onde à partir du Hamiltonien de cœur dur de Haldane.

Déterminons quels sont les états propres du modèle de cœur dur dans la géométrie du cylindre d'énergie zéro. Sur le plan, dans la jauge symétrique, ces états s'écrivent

(eq. 2.101) :

$$\prod_{i<j} (z_i - z_j)^q Q[z_1, z_2, \dots, z_N] e^{-\frac{1}{4} \sum |z_i|^2}. \quad (2.155)$$

Notons l'espace de ces états  $\mathcal{E}_0^{plan}$ . Toute fonction d'onde de cette espace s'annule avec une puissance supérieur ou égale à  $q$  lorsque deux particules se rapprochent. Plus précisément, soit  $\Psi$  dans  $\mathcal{E}_0^{plan}$ , soit  $\{\mathbf{r}_i\}$  une configuration de position des particules donnée et soit un couple  $(i, j)$  de particules. Soit  $\alpha$  l'exposant tel que :

$$|\Psi| \longrightarrow |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^\alpha, \quad \text{quand } r_j \rightarrow r_i. \quad (2.156)$$

Pour tout état de  $\mathcal{E}_0^{plan}$ , quelle que soit la configuration  $\{\mathbf{r}_i\}$ ,

$$\alpha \geq q. \quad (2.157)$$

Réciproquement, soit  $\Psi = P[z_1, z_2, \dots, z_N] e^{-\sum |z_i|^2/4}$  un état tel que pour toute configuration, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $\alpha \geq q$ .  $P$ , en tant que polynôme de  $z_j$ , a un zéro en  $z_i$  d'ordre supérieur ou égal à  $q$ . Donc  $(z_i - z_j)^q$  divise  $P$ . Par symétrie,  $\prod_{i<j} (z_i - z_j)^q$  divise  $P$ . Et donc  $\Psi$  est dans  $\mathcal{E}_0$ . Cette règle d'annulation (2.157) définit donc les état de  $\mathcal{E}_0^{plan}$ .

Soit maintenant  $\Psi^{cyl} = P[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] e^{-\sum x_i^2/(2\ell^2)}$  un état d'énergie zéro du modèle de cœur dur sur le cylindre. Modulo un changement de phase dû au passage de la jauge de Landau à la jauge symétrique,  $\Psi^{cyl}$  est aussi dans  $\mathcal{E}_0$  puisqu'il s'annule sur l'interaction de cœur dur définie sur le plan. Donc  $\Psi^{cyl}$  vérifie la condition d'annulation (2.157). Or  $|Z_i - Z_j| \sim a|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  quand  $r_j \rightarrow r_i$ . Donc  $\Psi^{cyl}$  est divisible par  $\prod_{i<j} (Z_i - Z_j)^q$ .

L'ensemble des états propres  $\Psi$  du modèle de cœur dur d'énergie zéro s'écrit donc :

$$\Psi = \prod_{i<j} (Z_i - Z_j)^q Q[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2}. \quad (2.158)$$

où  $Q$  est un polynôme de Laurent, i.e. dont les puissances sont dans  $\mathbb{Z}$ , complètement symétrique à  $N$  variables. Notons également  $\mathcal{E}_0$  l'espace de ces états puisqu'il n'y aura pas de confusion possible avec les états (eq.2.101) dans la suite. La fonction d'onde (2.154) est donc l'état de  $\mathcal{E}_0$  de moment  $M = N(N - 1)/2$  le plus dense. C'est donc bien la généralisation de la fonction d'onde de Laughlin à la géométrie du cylindre.

### Translations de la fonction d'onde de Laughlin

Il existe, en fait, une infinité d'états propres de  $M$ , dans l'espace  $\mathcal{E}_0$ , aussi denses que la fonction d'onde de Laughlin (2.154). En effet, notre Hamiltonien, sans potentiel extérieur, est invariant par translation magnétique  $T$  d'une distance  $\delta_x = 2\pi\ell^2/L$  dans la direction  $x$  (cf. sec. 2.3.1). L'espace  $\mathcal{E}_0$  est donc stable par application de  $T^p$ ,  $p \in \mathbb{Z}$ . Or  $T^p = \prod_i t_i^p$  avec  $t_i^p \phi_m(\mathbf{r}_i) = \phi_{m+p}(\mathbf{r}_i) = \lambda^{2mp+p^2} Z_i^p \phi_m(\mathbf{r}_i)$ , donc

$$T^p = \lambda^{2pM+p^2} \prod_i Z_i^p. \quad (2.159)$$

En particulier, les translations de la fonction d'onde de Laughlin le long de l'axe s'écrivent :

$$T^G \Psi_q \propto \prod_i Z_i^G \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\sum_i x_i^2 / (2\ell^2)} \quad (2.160)$$

avec  $G$  un entier relatif. Une telle fonction d'onde de Laughlin est contenue entre les orbitales  $G$  et  $D = G + q(N - 1)$  et s'étend donc sur

$$N_\phi(N) = q(N - 1) + 1 \quad (2.161)$$

orbitales. Cette fonction d'onde a donc un remplissage moyen

$$\nu = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{N_\phi(N)} = \frac{1}{q}, \quad (2.162)$$

qui est bien égal à celui obtenu pour la fonction d'onde de Laughlin dans la géométrie du disque (eq. 2.88)

### Fonction d'onde de Laughlin et limites quasi-dures

$\mathcal{E}_0$  est l'espace d'énergie zéro de  $\mathcal{H}$ , mais nous diagonalisons numériquement le Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}$  muni de limites en orbitales. Qu'en est-il des états propres de  $\tilde{\mathcal{H}}$ ? Il se trouve qu'heureusement, les états d'énergie zéro de  $\mathcal{H}$  et  $\tilde{\mathcal{H}}$  sont les mêmes. Plus précisément, si on considère le Hamiltonien avec limites en  $G$  et  $D$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}$ , et un état de  $\mathcal{E}_0$  n'ayant aucune composante sur les orbitales  $\Phi_m$  au delà des limites  $G$  et  $D$  :

$$\Psi = | \overset{G-1}{\downarrow} \dots 00 \rangle \otimes \tilde{\Psi} \otimes | \overset{D+1}{\downarrow} 00 \dots \rangle. \quad (2.163)$$

Alors  $\tilde{\Psi}$  est un état d'énergie zéro de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Ceci vient du fait que l'on peut considérer que

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \hat{U} \quad (2.164)$$

avec le potentiel extérieur  $\hat{U} = \sum U_m \hat{n}_m$  donné par  $U_m = 0$  pour  $G \leq m \leq D$  et  $U_m = +\infty$  sinon.  $\mathcal{H}$  et  $\hat{U}$  sont positifs dont  $\tilde{\mathcal{H}}$  l'est aussi. Tout état de  $\mathcal{E}_0$  compris entre les orbitales  $G$  et  $D$  annule donc  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{V}$  donc  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Réciproquement, tout état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}$  d'énergie zéro est aussi état propre de  $\mathcal{H}$  pour les mêmes raisons. Ainsi, l'Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}$ , muni de limites  $G$  et  $D$ , dispose de  $\Psi_q$  parmi ses états propres d'énergie zéro pourvu que :

$$G \leq 0 \quad \text{et} \quad D \geq q(N - 1) \quad (2.165)$$

Cette remarque n'a l'air de rien, mais elle garantit que nos diagonalisations numériques nous permettent bien d'obtenir les états de bord (i.e. les états de  $\mathcal{E}_0$ ) de la fonction d'onde de Laughlin, sans avoir à nous soucier de l'effet des limites. Cette remarque n'est plus vraie lorsqu'on monte en énergie. Les états propres de  $\tilde{\mathcal{H}}$  d'énergie non nulle ne sont pas les états propres de  $\mathcal{H}$  en général, et l'effet des limites sur les orbitales  $G$  et  $D$  ne peut être négligé comme nous le verrons dans la section (3.3).

### 2.3.4 Diagonalisations numériques exactes

Dans les chapitres suivants, nous utiliserons fréquemment des algorithmes de diagonalisation numérique exacte afin de calculer le spectre de nos Hamiltoniens. Nous détaillons ici quelques points techniques qu'il nous paraît important de mentionner.

#### Construction de l'espace de Fock

Afin de diagonaliser les Hamiltoniens du type  $\tilde{\mathcal{H}}$  (cf. eq. 2.152) nous implémentons directement la matrice de ces derniers dans la base de Fock

$$|n_G, n_{G+1}, \dots, n_D\rangle \quad (2.166)$$

où  $n_m$  ( $G \leq m \leq D$ ) est un nombre entier non négatif dans le cas des bosons et est 0 ou 1 dans le cas fermionique. Afin de générer l'ensemble de ces états, sans utiliser inutilement une grande quantité mémoire, nous utilisons l'astuce classique qui consiste à coder ces configurations sur un seul entier. En effet, pour le cas fermionique, une telle configuration peut être codée simplement dans l'écriture binaire d'un entier, où "0" code pour inoccupé et "1" pour occupé. Si l'entier en question a une taille de 16 octets, par exemple, on peut alors coder ces états sur un maximum de 128 orbitales. Dans le cas bosonique, on peut coder l'état  $|\{n_m\}\rangle$  sur l'entier  $I$  de façon univoque avec l'écriture suivante. Dans l'écriture binaire de  $I$ , les nombre de "0" qui apparaissent avant le premier "1" donnent le nombre de particules dans l'orbitale  $n_G$ . Le nombre de "0" entre le premier "1" et le deuxième donnent le nombre de particules dans l'orbitale  $n_{G+1}$ . Et ainsi de suite. C'est à dire que l'on code  $|\{n_m\}\rangle$  sur l'entier  $I$  selon :

$$I = \underbrace{00 \dots 0}_n 1 \underbrace{00 \dots 0}_n 1 \dots 1 \underbrace{00 \dots 0}_n. \quad (2.167)$$

Ainsi, dans le cas bosonique, une configuration à  $N_b$  particules et  $N_\phi = D - G + 1$  orbitales sera codée sur  $N_\phi + N_b - 1$  bits. En utilisant des entiers de 16 octets (i.e. 128 bits), la limitation en taille fixée par ce codage est alors bien supérieure à celle imposée par le temps de calcul ou la mémoire utilisée dans nos algorithmes.

#### Dimension des espaces diagonalisés

Comme déjà mentionné dans la section 2.3.1, les Hamiltoniens du type  $\tilde{\mathcal{H}}$  (cf. eq. 2.152) que nous cherchons à diagonaliser commutent avec le moment cinétique total selon  $y$ ,  $M = \sum m a_m^\dagger a_m$ .  $\tilde{\mathcal{H}}$  est donc diagonal par blocs, où chaque bloc est indexé par les différentes valeurs de  $M$ . Il est donc essentiel de diagonaliser chaque bloc séparément pour gagner temps et espace de calcul. Pour ce faire, nous générons pour chaque valeur de  $M$ , l'espace des configurations de Fock  $|\{n_m\}\rangle$  vérifiant  $\sum m n_m = M$ .

Dans le cas fermionique, notons  $m_i$ , avec  $i = 1..N_f$ , l'indice des orbitales occupées de la configuration  $|\{n_m\}\rangle$ , ordonnées dans l'ordre croissant, i.e. :

$$G \leq m_1 < m_2 < \dots < m_{N_f} \leq D. \quad (2.168)$$

### 2.3 L'effet Hall quantique fractionnaire sur le cylindre

---

Si on translate ces indices selon  $p_i = m_i - G + 1$ , alors :

$$1 \leq v_1 < v_2 < \dots < v_{N_f} \leq N_\phi \quad (2.169)$$

$$\sum_{i=1}^{N_f} v_i = M - N_f(G - 1) \quad (2.170)$$

La dimension de l'espace de Fock fermionique à  $M$  donné sur  $N_\phi$  orbitales est donc donnée par le nombre de partitions de l'entier  $M - N_f(G - 1)$  en  $N_f$  entiers distincts bornés par  $N_\phi$ . En général, nous serons amenés à diagonaliser l'Hamiltonien à facteur de remplissage fixé. Lorsque le nombre de particules est augmenté, le nombre d'orbitales doit donc augmenter linéairement, augmentant de façon exponentielle la taille du système. Nous serons donc rapidement limité en taille.

Considérons par exemple le cas où le nombre d'orbitales  $N_\phi$  est précisément celui sur lequel s'étend la fonction d'onde de Laughlin à  $\nu = 1/3$ , c'est à dire tel que  $N_\phi = 3N_f - 2$ . Ce cas sera par exemple étudié dans la figure 3.2 du chapitre 3. Alors, la plus grande dimension entre les secteurs de différents moments cinétiques  $M$ , est approximativement égale à :

$N_f$	Dim.
4	18
5	73
6	$3 \times 10^2$
7	$2 \times 10^3$
8	$9 \times 10^3$
9	$5 \times 10^4$
10	$2 \times 10^5$
11	$1 \times 10^6$
12	$7 \times 10^6$
13	$4 \times 10^7$
14	$3 \times 10^8$

Dans le cas de  $N_b$  bosons, notons toujours  $m_i$  ( $i = 1..N_b$ ) l'indice des orbitales occupées. Si  $p_i = m_i - G + 1$ , alors on a :

$$\sum_{i=1}^{N_b} p_i = M - N_b(G - 1) \quad (2.171)$$

$$1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_{N_b} \leq N_\phi. \quad (2.172)$$

Cela signifie que la dimension de l'espace de Fock bosonique à  $N_b$  particules dans  $N_\phi$  orbitales et d'impulsion totale  $M$ , est donnée par le nombre de partitions de l'entier  $M - N_b(G - 1)$  en  $N_b$  entiers, possiblement égaux, bornés par  $N_\phi$ .

### Algorithme de Lanczos

Dans chacun des sous-espaces d'impulsion  $M$  donnée, la matrice représentant notre Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}$  (eq. 2.152) est généralement une matrice "creuse", c'est à dire une matrice dont la plupart des éléments sont nuls. En effet, l'élément de matrice entre deux configurations de Fock  $|\{n_m\}\rangle$  et  $|\{n'_m\}\rangle$  ne peut être non nul que si l'une de ces configurations est descendante de l'autre par une opération de squeeze (cf. sec. 3.1). Il est alors important d'utiliser cette propriété afin de gagner temps et espace de calcul. On implémente donc notre matrice  $H$  sur trois tableaux `Input`, `Output`, et `Coeff` de taille égale au nombre d'éléments non nuls de  $H$ . Si  $p$  est un indice parcourant ces tableaux, le coefficient  $H_{\text{Input}(p),\text{Output}(p)}$  est stocké dans `Coeff(p)`. Seuls les éléments non nuls de  $H$  sont stockés, les autres éléments étant implicitement nuls.

De plus, en général, seule une petite partie du spectre de l'Hamiltonien nous intéresse. En effet, dans les expériences numériques de l'EHQF, on étudie généralement seulement l'état fondamental ainsi que quelques excitations des basses énergie. L'algorithme dit de "Lanczos" est alors particulièrement approprié. Il permet de calculer de façon efficace quelques valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice creuse hermitienne.

Donnons brièvement quelques idées sur lesquelles repose cet algorithme. Soit  $H$  la matrice hermitienne représentant notre Hamiltonien de dimension  $n \times n$ , et  $v_1$  un vecteur de norme 1 quelconque. On note  $K_m$  le sous-espace engendré par  $v_1, Hv_1, H^2v_1, \dots, H^{m-1}v_1$  appelé sous-espace de Krylov. L'objectif de cette algorithme est de projeter la matrice  $H$  sur un sous-espace de Krylov de dimension réduite  $m \ll n$ . On peut alors montrer que la matrice de dimension  $m \times m$  obtenue après projection a alors un spectre proche des valeurs propres extrémales de  $H$ . Pour les valeurs propres les plus extrêmes, la convergence est rapide, et généralement un choix de  $m \ll n$  suffit bien que les deux spectres ne coïncident rigoureusement que lorsque  $m = n$ . De plus, l'algorithme de Lanczos construit une base orthonormale  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  de  $K_m$  dans laquelle la projection de  $H$  est tridiagonale. De cette manière, la matrice tridiagonale  $T$  de petite dimension  $m \times m$  obtenue peut alors être diagonalisée efficacement avec un simple algorithme QR par exemple.

Plusieurs difficultés apparaissent quant à la réalisation pratique de cet algorithme. Bien que analytiquement exact, l'algorithme proposé par Lanczos en 1950 souffre d'instabilités numérique importante. Un des problèmes majeurs est que les erreurs numériques détruisent l'orthogonalité de la base  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ , donnant in fine des résultats de piètre qualité. De plus, lorsqu'une valeur propre de  $H$  est dégénérée, l'algorithme de Lanczos ne trouve qu'un seul vecteur propre représentant. Différents raffinements ont donc été développés, ce qui rend son implémentation compliquée. C'est pourquoi, nous avons préféré utiliser une librairie externe, *ARPACK*, qui utilise la "méthode de Lanczos implicitement redémarrée".

## ÉTATS PRODUIT DE MATRICE DANS LA LIMITE DU CYLINDRE FIN

---

Comme nous l'avons vu précédemment, les phases de l'effet Hall fractionnaire apparaissent à certains remplissages  $\nu = \frac{p}{q}$  bien précis. Ainsi, à nombre de particules  $N$  fixé, la surface occupée par notre phase de Hall est fixée. Outre changer la forme des interactions, il peut être très intéressant de changer la géométrie dans laquelle vivent les électrons. Il est même possible dans la géométrie du cylindre, tout comme dans celle du tore, de faire varier le paramètre géométrique de la circonférence  $L/\ell$ , en restant à remplissage et nombre de particules fixes. Plusieurs questions se posent alors : Quelle est la physique des 2DEG dans une géométrie où  $L$  est faible devant la longueur magnétique  $\ell$  ? Apparaît-il une transition de phase ? Si non, quel lien la physique à faible  $L$  et celle à la limite thermodynamique ont-elles ?

Pour une interaction de cœur dur, l'état de Laughlin reste état fondamental quel que soit  $L$ , comme nous l'avons montré dans la section (2.3.3). Rezayi et Haldane ont montré dans leur article [Rezayi & Haldane \(1994\)](#) que la fonction d'onde de Laughlin sur le cylindre passe continûment d'un état d'onde de densité de charge à faible  $L/\ell$ , à un liquide incompressible à plus grand  $L$ . Le phénomène est analogue au cas de la goutte de Hall à  $\nu = 1$  comme nous avons vu dans la partie (2.1.4). Le recouvrement entre les orbitales  $\phi_m$  tend vers zéro lorsque  $L \rightarrow 0$ , et la fonction d'onde de Laughlin tend vers un cristal unidimensionnel où une orbitale sur  $q$  est remplie, les autres étant vides. [Rezayi & Haldane \(1994\)](#) précisent que cet état, où une orbitale du LLL sur  $q$  serait remplie dans la jauge de Landau, avait été proposé initialement par Tao et Thouless [Tao & Thouless \(1983\)](#) pour décrire les phases de Hall Fractionnaire avant d'être détrôné par la fonction d'onde de Laughlin. C'est pourquoi la limite du cylindre ou du tore fin est communément appelée la limite Tao-Thouless.

On peut voir notre Hamiltonien sur le cylindre comme un Hamiltonien à une dimension où les particules seraient disposées sur une chaîne d'orbitales indexées par  $m$ . On peut alors dire que l'état de Laughlin à  $L_0$  est adiabatiquement connecté à l'état Tao-Thouless lorsque  $L$  varie de 0 à  $L_0$ . De ce fait, Laughlin à  $L_0$  et l'état Tao-Thouless ont

de nombreuses propriétés en communs, ce qui a fait l'objet de nombreux articles [Bergholtz & Karlhede \(2006\)](#), [Bergholtz et al. \(2007\)](#), [Bergholtz & Karlhede \(2008\)](#). Plus généralement, il est possible d'obtenir des états adiabatiquement connectés aux états de  $\mathcal{E}_0$ , c'est à dire les états de quasi-trous, en introduisant simplement des orbitales vides au milieu d'une configuration de type Tao-Thouless. Les états Tao-Thouless fournissent une piètre approximation de l'état de Laughlin et de ses états de bord à une grande circonférence, mais ce qui en fait leur intérêt sont leurs propriétés qu'ils partagent avec les phases de Hall. Par exemple les excitations élémentaires de l'état TT ont des charges fractionnaires  $e/q$  tout comme celles des liquides de Hall fractionnaire. De plus, ces excitations ont la même dégénérescence dans les deux cas. Nous verrons même, par exemple, dans le chapitre (5), que certaines caractéristiques de la théorie conforme décrivant le bord des phases à  $\nu = 5/2$  peuvent être décrites simplement dans la limite Tao-Thouless.

Le Hamiltonien  $\mathcal{H}$  du problème de cœur dur fermionique (2.135) ou bosonique (2.139), outre un facteur dépendant de  $L$ , se décompose en puissances de  $\lambda = \exp[-2\pi^2\ell^2/L^2]$  :

$$\mathcal{H} \propto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{H}^{(n)} \quad (3.1)$$

On note que  $\lambda \rightarrow 0$  lorsque  $L \rightarrow 0$  et  $\lambda \rightarrow 1$  lorsque  $L \rightarrow +\infty$ . Comme nous le verrons dans la suite du chapitre, les deux premiers termes non nuls de cette décomposition forment un Hamiltonien diagonal dans la base de Fock sur les orbitales  $\phi_m$ . Les états propres de basse énergie du Hamiltonien correspondant aux deux premiers termes seulement ne sont rien d'autre que les états Tao-Thouless. Dans notre premier article [Soulé & Jolicoeur \(2012b\)](#), nous avons étudié le Hamiltonien composé des quatre premiers termes non nuls de cette décomposition. L'idée n'est pas vraiment d'étudier une meilleure approximation que l'Hamiltonien Tao-Thouless pour la physique de Hall, mais plutôt de trouver un modèle plus corrélé que Tao-Thouless qui ait un grand nombre de propriétés similaires aux phases de Hall. Ce Hamiltonien possède des termes non diagonaux dans la base de Fock, et est hautement non trivial.

Il est cependant possible d'obtenir une expression exacte de nombreux états propres de basse énergie de ce Hamiltonien, tronqué au quatrième ordre non nul. L'expression de ces états est très intrigante. Ils s'écrivent tout d'abord aisément en seconde quantification, tandis que la fonction de Laughlin et ses états de bord s'écrivent mieux en première quantification. Cela nous permet de calculer relativement facilement toute sorte de fonctions de corrélation. De plus, tous ces états propres du Hamiltonien tronqué pour lesquels nous avons trouvé une expression exacte se mettent sous la forme  $\hat{S}|\text{root}\rangle$ , où  $|\text{root}\rangle$  est la configuration Tao-Thouless à laquelle l'état est relié adiabatiquement, et  $S$  est une série d'opérations de "squeeze" qui rapproche les particules tout en conservant le moment cinétique total. Cette forme est aussi vraie pour les états de Hall comme nous le verrons. Enfin, nos états peuvent aussi s'écrire astucieusement en terme de Produits de Matrices (PM) de dimension 2. Il a d'ailleurs été montré peu de temps après notre article que les états de Hall test sur le cylindre, tels que la fonction d'onde de Laughlin ou l'état de Moore-Read, s'écrivent eux aussi comme des états Produits de Matrices dont

la dimension auxiliaire reste petite tant que la circonférence  $L$  l'est aussi [Zaletel & Mong \(2012\)](#).

### 3.1 Limite Tao-Thouless

La fonction d'onde de Laughlin sur le cylindre (eq.2.154),

$$\Psi_q \propto \prod_{i<j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\sum_i x_i^2/(2\ell^2)}, \quad (3.2)$$

est un état propre d'énergie zéro du modèle de cœur dur quelle que soit la circonférence  $L$  (cf.sec.2.3.3). Elle reste donc un des états fondamentaux, et aucune transition de phase apparaît lorsque  $L$  décroît (s'il est possible de parler de "transition de phase" alors que  $L$  est finie). L'expression ci-dessus ne laisse pas apparaître la dépendance de  $L$  de la fonction d'onde de Laughlin. Pour cela, décomposons-la sur la base de Fock sur les orbitales  $\phi_m$ . Soit  $C_{\{m_i\}}$  les coefficients du polynôme de Laughlin :

$$\prod_{i<j} (Z_i - Z_j)^q = \sum_{\{m_i\}} C_{\{m_i\}} Z_1^{m_1} Z_2^{m_2} \dots Z_N^{m_N} \quad (3.3)$$

Si  $n_m$  est le nombre d'occupation de l'orbitale  $m$ , la base de Fock se décompose sur les orbitales  $\phi_m$  selon :

$$|\{n_m\}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N! \dots n_0! n_1! \dots}} \sum_{P \in S_N} \phi_{m_1}(Z_{P_1}) \phi_{m_2}(Z_{P_2}) \dots \phi_{m_N}(Z_{P_N}) \quad (3.4)$$

$$= (L\ell\sqrt{\pi})^{-\frac{N}{2}} \frac{1}{\sqrt{N! \dots n_0! n_1! \dots}} \lambda^{\sum_i m_i^2} e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum_i x_i^2} \sum_{P \in S_N} Z_{P_1}^{m_1} Z_{P_2}^{m_2} \dots Z_{P_N}^{m_N}, \quad (3.5)$$

dans le cas bosonique. On obtient la décomposition de la fonction d'onde de Laughlin sur la base de Fock :

$$\Psi_q \propto \sum_{\{n_m\}} C_{\{m_i\}} \lambda^{-\sum_i m_i^2} (\dots n_0! n_1! \dots)^{\frac{1}{2}} |\{n_m\}\rangle \quad (3.6)$$

dans le cas bosonique, et avec  $n_m = 1$  dans le cas fermionique. Ainsi, lorsque  $L \rightarrow 0$ , ou de manière équivalente lorsque  $\lambda \rightarrow 0$ , les configuration de Fock qui dominent dans la fonction d'onde de Laughlin sont celles de plus grand  $V = \sum_i m_i^2 = \sum_m m^2 n_m$ .

Pour comprendre quelle configuration domine, introduisons la notion de squeeze, qui nous sera aussi utile dans la suite du manuscrit. On appelle "squeeze" les opérateurs suivants :

$$\hat{S}_{m,d_1,d_2} = a_{m+d_1}^\dagger a_{m+d_2}^\dagger a_{m+d_1+d_2} a_m \quad (3.7)$$

avec  $d_1 d_2 > 0$ . Après une opération de squeeze  $\hat{S}_{m,d_1,d_2}$ , la variance  $V = \sum_i m_i^2 = \sum_m m^2 n_m$  d'une configuration est diminuée de  $-2d_1 d_2$ . Or on peut voir directement depuis l'expression sous forme polynomiale que les configurations sur lesquelles se décompose

la fonction d'onde de Laughlin peuvent être obtenues depuis la configuration racine :

$$|TT\rangle = |..0 \underbrace{10..0}_{q \text{ terms}} \underbrace{10..0}_{q \text{ terms}} 1.. \underbrace{10..0}_{q \text{ terms}} 10.. \rangle \quad (3.8)$$

par applications successives d'opérations de squeeze (Rezayi & Haldane 1994). La configuration de plus grande variance  $V = \sum_i m_i^2$  est donc la configuration racine ci-dessus  $|TT\rangle$  qui n'est autre que la fonction d'onde Tao-Thouless (Tao & Thouless 1983) décrite dans l'introduction de cette partie. La fonction d'onde de Laughlin tend donc, lorsque  $L \rightarrow 0$  vers la fonction d'onde  $|TT\rangle$ .

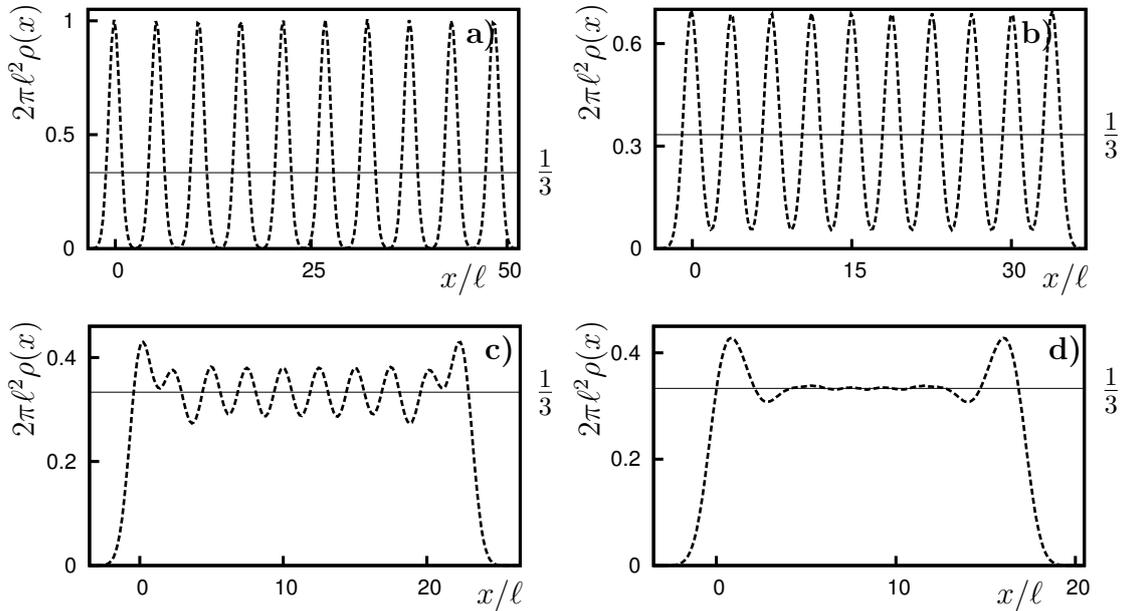


FIGURE 3.1 – Densité de la fonction d'onde de Laughlin le long de l'axe du cylindre. Pour  $N = 10$  et **a)**  $L = 3.5\ell$ , **b)**  $L = 5\ell$ , **c)**  $L = 7.5\ell$  et **d)**  $L = 10\ell$

Sur la figure (3.1) nous traçons le profil de densité de la fonction d'onde de Laughlin sur le cylindre pour plusieurs valeurs de circonférence  $L$ . Pour une circonférence suffisamment large,  $L \gtrsim 10\ell$ , le profil de densité est homogène dans le volume, et s'annule sur les deux côtés du cylindre en formant une bosse caractéristique. Ceci est similaire à ce qui peut être observer dans la géométrie du disque (cf. fig. 2.10) pour un nombre suffisant de particules. Puis, pour de plus faibles circonférences, une onde de densité apparaît, et s'amplifie au fur et à mesure que la circonférence diminue. Ceci reflète le fait que plus la circonférence est faible, plus le poids de la configuration Tao-Thouless (eq. 3.8) domine celui des autres configurations obtenues après opérations de squeeze.

À la limite Tao-Thouless, c'est en fait l'ensemble de l'Hamiltonien de cœur dur qui tend vers une limite simple, diagonale sur la base de Fock. Comme dit précédemment, on peut décomposer les Hamiltoniens de cœur dur (2.135) ((2.139)) pour les fermions (resp.

pour les bosons) en puissances de  $\lambda$  :

$$\mathcal{H} \propto \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mathcal{H}^{(n)} \quad (3.9)$$

avec un facteur de proportionnalité dépendant de  $L$ . Dans le cas du Hamiltonien fermionique (2.135) on trouve pour les deux premiers termes non nuls :

$$\mathcal{H}_F \propto \sum_m \lambda \hat{n}_{m+1} \hat{n}_m + 4\lambda^4 \hat{n}_{m+2} \hat{n}_m + \dots \quad (3.10)$$

Pour le Hamiltonien bosonique (2.139), les deux premiers termes non nuls sont :

$$\mathcal{H}_B \propto \sum_m \lambda (\hat{n}_m - 1) \hat{n}_m + 4\lambda^4 \hat{n}_{m+1} \hat{n}_m + \dots \quad (3.11)$$

Les deux Hamiltoniens sont diagonaux dans la base de Fock  $|\{n_m\}\rangle$ . Son espace fondamental est d'énergie zéro et est formé, dans le cas fermionique ( $q = 3$ ), des configurations telles que pour tout  $m$ ,

$$n_m + n_{m+1} + n_{m+2} \leq 1 \quad (3.12)$$

De même, dans le cas bosonique ( $q = 2$ ), pour tout  $m$ ,  $n_m + n_{m+1} \leq 1$ . Pour construire l'ensemble des états fondamentaux, il suffit donc d'introduire des "0" à l'intérieur de la configuration  $|TT\rangle$ . Le reste des états d'énergie non nulle sont les configurations de Fock qui ne vérifient pas la condition ci-dessus.

La limite Tao-Thouless est donc décrite par un Hamiltonien classique sur site de répulsion électrostatique, et il paraît peu vraisemblable que sa physique ait à voir avec celle des liquides quantiques de Hall fractionnaire. Pourtant, on retrouve certaines propriétés essentielles des phases de Hall fractionnaire dans les états Tao-Thouless. Tout d'abord, la charge élémentaire des excitations au dessus du fondamental est  $e/q$ . En effet, considérons ce Hamiltonien diagonal dans un faible potentiel de confinement, de sorte que l'état Tao-Thouless soit le seul état fondamental. La densité par orbitales moyenne de l'état Tao-Thouless est  $1/q$ . On peut faire une excitation élémentaire en introduisant un zéro dans la configuration  $|TT\rangle$ . Ceci induit un défaut de densité  $1/q$ . De même, on peut créer une excitation d'énergie  $4\lambda^4$  en supprimant un "0" de la configuration  $|TT\rangle$ . Cela crée une excitation de charge  $-e/q$ . On retrouve un analogue trivial des charges fractionnaires des quasi-trous et quasi-électrons de l'effet Hall. De plus, on peut voir que l'espace des quasi-trous de Hall et l'espace des quasi-trous TT sont de même dimension. En effet le calcul de la configuration racine, dominante à la limite Tao-Thouless, permet de construire une correspondance une pour une entre la base des états de bord de Hall,  $m_{\{mi\}} \Psi_q$  avec  $m_{\{mi\}}$  un monôme symétrique

$$m_{\{mi\}} = \sum_{P \in S^N} Z_{P_1}^{m_1} \dots Z_{P_N}^{m_N}, \quad (3.13)$$

et les configurations d'énergie zéro du modèle TT qui vérifient la règle (3.12). Par exemple,

$$\sum_i Z_i \Psi_q \lim_{L \rightarrow 0} | \underbrace{..010..0}_{q \text{ termes}} 1.. \underbrace{10..0}_{q} \underbrace{10..0}_{q} \overset{\downarrow}{\mathbf{0}} 10.. \rangle, \quad (3.14)$$

$$\sum_i Z_i^2 \Psi_q \lim_{L \rightarrow 0} | \underbrace{..010..0}_{q} 1.. \underbrace{10..0}_{q} \underbrace{10..0}_{q} \overset{\downarrow \downarrow}{\mathbf{00}} 10.. \rangle \quad (3.15)$$

et

$$\sum_{i \neq j} Z_i Z_j \Psi_q \lim_{L \rightarrow 0} | \underbrace{..010..0}_{q} 1.. \underbrace{10..0}_{q} \overset{\downarrow}{\mathbf{0}} \underbrace{10..0}_{q} \overset{\downarrow}{\mathbf{0}} 10.. \rangle \quad (3.16)$$

sont liés adiabatiquement. La dimension de l'espace des quasi-trous de Hall ou des quasi-trous TT est donnée par les partitions d'un entier comme nous le verrons dans le chapitre (4). Or, cette dégénérescence des états de quasi-trous de Laughlin est d'importance primordiale puisqu'elle est une des preuves que le bord d'un état de Hall à  $\nu = 1/q$  est décrit par un champ bosonique chiral, comme l'a découvert Wen [Wen \(1990\)](#) dans les années 1990 (cf. chap.4). Le fait de retrouver ces dégénérescences à la limite Tao-Thouless est assez intrigant. Nous verrons d'ailleurs que cette correspondance univoque entre les états de bords de Hall et ceux de la limite TT est aussi vérifiée pour les états de bord Pfaffien de Moore-Read (cf. chap. 5) qui possèdent pourtant une structure bien plus complexe.

## 3.2 Modèle tronqué

### 3.2.1 Développement limité de $\tilde{\mathcal{H}}(\lambda)$

Un des travaux que nous avons faits est d'étudier la limite de  $\mathcal{H}$  lorsque  $L \rightarrow 0$  dans un état intermédiaire entre la physique de Hall et la limite TT triviale [Soulé & Jolicoeur \(2012b\)](#). Pour cela, l'idée était simplement d'étudier une troncature de l'Hamiltonien de cœur dur à un ordre en  $\lambda$  supérieur à celui de la limite Tao-Thouless. Les états propres du Hamiltonien tronqué sont de bonnes approximations des états de Hall dans la limite des petits  $L$ . Plus la troncature est éloignée, meilleure est l'approximation. Même si ceci est un moyen un peu laborieux pour obtenir des états propres approchés des fonctions d'onde de l'effet Hall fractionnaire, ces états peuvent posséder des propriétés communes aux états de l'effet Hall fractionnaire. Le problème est que ces Hamiltoniens tronqués, bien que disposant de moins de termes que l'Hamiltonien complet, ne sont pas simples pour autant. Pourtant, si on garde seulement les quatre premiers termes non nuls, nous allons voir qu'il est possible de trouver de nombreux états de basse énergie, et que leur structure est très similaire aux états de l'effet Hall fractionnaire.

Si on note  $\tilde{\mathcal{H}}_{F/B}^n$  le Hamiltonien tronqué jusqu'à l'ordre  $n$  en  $\lambda$ , muni de limites quasi-dures en  $G$  et  $D$  (c.f. sec. 2.3.2), on obtient à partir des Hamiltoniens de cœur dur (eq. 2.135) et (eq. 2.139), les Hamiltoniens fermioniques et bosoniques tronqués en ne

préservant que les quatre premiers termes non nuls :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_F^9 = & \sum_{m=G}^{D-1} \lambda \hat{n}_{m+1} \hat{n}_m + 4\lambda^4 \sum_{m=G}^{D-2} \hat{n}_{m+2} \hat{n}_m + 9\lambda^9 \sum_{m=G}^{D-3} \hat{n}_{m+3} \hat{n}_m \\ & + 3\lambda^5 \sum_{m=L}^{D-3} (c_m c_{m+1}^\dagger c_{m+2}^\dagger c_{m+3} + c_{m+3}^\dagger c_{m+2} c_{m+1} c_m^\dagger) \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_B^4 = & \sum_{m=G}^D (\hat{n}_m - 1) \hat{n}_m + 4\lambda \sum_{m=G}^{D-1} \hat{n}_{m+1} \hat{n}_m + 4\lambda^4 \sum_{m=G}^{D-2} \hat{n}_{m+2} \hat{n}_m \\ & + 2\lambda^2 \sum_{m=G}^{D-2} \left( b_{m+2}^\dagger b_m^\dagger (b_{m+1})^2 + (b_{m+1}^\dagger)^2 b_{m+2} b_m \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le dernier terme de ces Hamiltoniens est non diagonal dans la base de Fock, ces Hamiltoniens sont donc non triviaux, à la différence des Hamiltoniens dans la limite Tao-Thouless (3.10) et (3.11). Rappelons ici que les limites  $G$  et  $D$  sont des paramètres libres de notre problème, fixant la position des limites quasi-dures (cf. sec. 2.3.2).

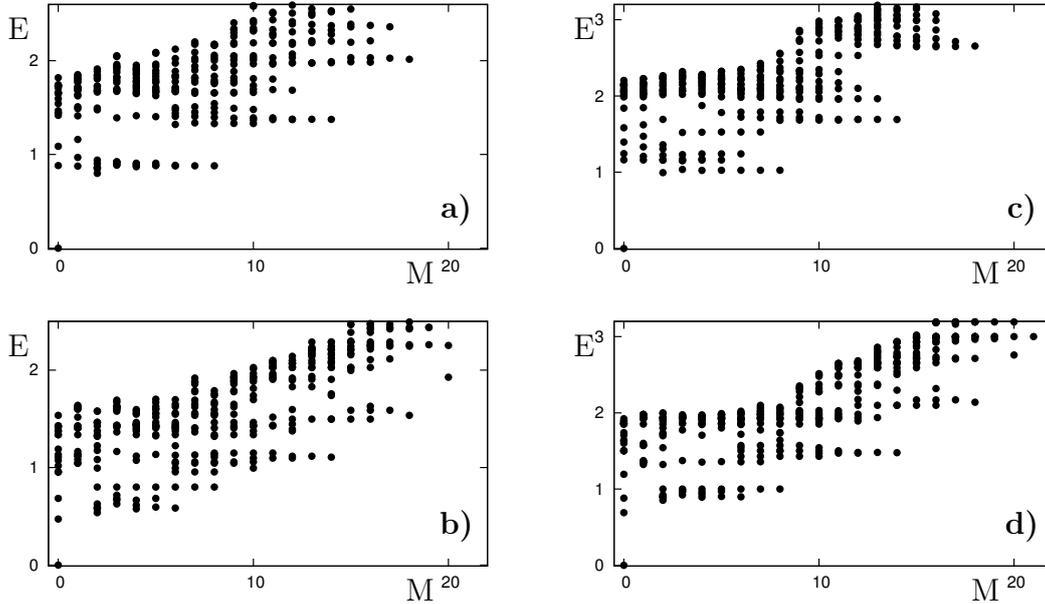


FIGURE 3.2 – Spectres des Hamiltoniens de cœur dur et des Hamiltoniens tronqués au quatrième ordre non nul en  $\lambda$  pour  $N = 8$  particules et  $N_\phi = q(N - 1) + 1$ . En a) spectre du Hamiltonien complet fermionique ( $q = 3$ )  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ , en b) celui du Hamiltonien tronqué fermionique  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$ . En c) on utilise le Hamiltonien complet bosonique ( $q = 2$ )  $\tilde{\mathcal{H}}_B$ , et en d) le Hamiltonien tronqué bosonique  $\tilde{\mathcal{H}}_B^4$ . Seul les 20 plus basses énergies sont calculées au moyen d'un algorithme de Lanczos (cf. sec. 2.3.4).

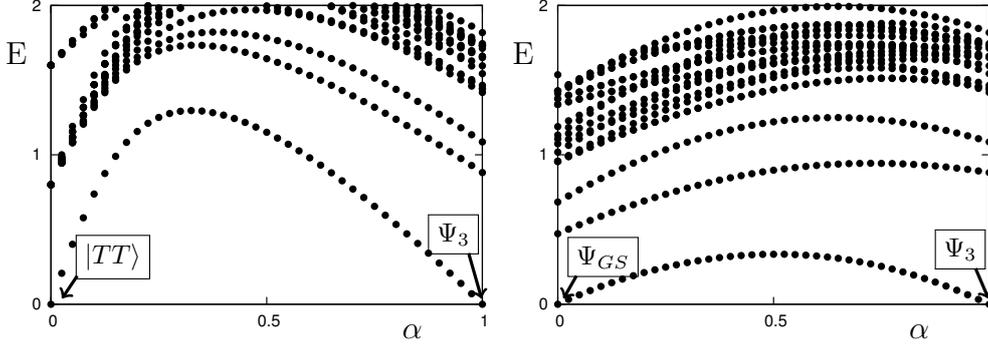


FIGURE 3.3 – A gauche : évolution du spectre lors de la transformation adiabatique entre le Hamiltonien Tao-Thouless et le Hamiltonien de cœur dur selon  $\alpha\tilde{\mathcal{H}}_F^4 + (1 - \alpha)\tilde{\mathcal{H}}_F$ . A droite : transformation adiabatique entre le Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  et le Hamiltonien de cœur dur selon  $\alpha\tilde{\mathcal{H}}_F^9 + (1 - \alpha)\tilde{\mathcal{H}}_F$ . Les spectres sont obtenus pour  $N = 8$  et  $\lambda = 0.8$  ( $L \approx 10$ ).

Au moyen d'un algorithme de Lanczos, présenté dans la section (2.3.4), nous avons calculé le spectre de ces Hamiltonien en faisant varier le nombre de particules  $N$ , le nombre d'orbitales  $N_\phi = D - G + 1$ , et la circonférence  $L$ . Nous présentons par exemple figure (3.2), les spectres de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  et de  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ , pour un nombre d'orbitales  $N_\phi = N_\phi(N) \equiv 3(N - 1) + 1$  tel que Laughlin soit l'unique état fondamental de  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ , et pour  $\lambda = 0.8$  c'est à dire  $L \approx 10\ell$ . Ces spectres sont qualitativement très similaires. Tout d'abord on remarque que  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  est positif et possède un état d'énergie zero, noté  $\Psi_{GS}$ , comme  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ . Dans le cas de  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ , cet état d'énergie zéro est la fonction d'onde de Laughlin  $\Psi_3$  (eq. 2.154). En observant le spectre de  $\alpha\tilde{\mathcal{H}}_F^9 + (1 - \alpha)\tilde{\mathcal{H}}_F$  pour différentes valeurs de  $\alpha$  entre 0 et 1, on voit figure (3.3) que l'on peut passer adiabatiquement de l'état  $\Psi_{GS}$  à l'état de Laughlin  $\Psi_3$ . Il n'y a donc pas de transitions de phase quantique entre le modèle  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_F$ . On peut également faire cette remarque dans le cas de la fonction d'onde Tao-Thouless qui est elle aussi liée adiabatiquement à  $\Psi_3$  (cf. figure 3.3).

Si on écrit la décomposition du fondamental de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  dans la base de Fock, un schéma simple semble se dégager. De plus, pour tout nombre d'orbitales supérieur à  $N_\phi(N) = 3N - 2$ , et toute circonférence  $L$ , on observe grâce aux diagonalisations numériques que le Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  est positif et possède un espace d'énergie zéro. Cela nous a incité à essayer d'extraire la forme exacte du fondamental pour  $N_\phi = N_\phi(N) \equiv 3(N - 1) + 1$  et de tous les états d'énergie zéro à un nombre d'orbitales supérieur.

La positivité de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  peut se voir en réécrivant ce Hamiltonien en somme de termes positifs :

$$\tilde{\mathcal{H}}_F^9 = \lambda \sum_{m=G}^{D-3} C_m^\dagger C_m + 4\lambda^4 \sum_{m=G}^{D-2} \hat{n}_{m+2} \hat{n}_m \quad (3.19)$$

$$+ \lambda \hat{n}_G \hat{n}_{G+1} + \lambda \hat{n}_{D-1} \hat{n}_D \quad (3.20)$$

avec :

$$C_m = c_{m+1}c_{m+2} + 3\lambda^4 c_{m+3}c_m. \quad (3.21)$$

Les deux derniers termes du Hamiltonien sont dûs aux limites en  $G$  et  $D$ . Le Hamiltonien tronqué à l'ordre 9, sans limites à gauche ou à droite, est obtenu en faisant  $D \rightarrow +\infty$  et  $G \rightarrow -\infty$ .

### 3.2.2 États fondamentaux exacts de $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$

À un nombre d'orbitales  $N_\phi = N_\phi(N) \equiv 3N - 2$ ,  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  possède un fondamental unique d'énergie zéro, lié adiabatiquement à la fonction d'onde de Laughlin (cf. figure 3.3). Cet état doit annuler chacun des termes de la décomposition de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  en somme de termes positifs. À l'aide de l'expression dans la base de Fock de l'état fondamental de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  pour  $N_\phi = N_\phi(N) \equiv 3(N - 1) + 1$  obtenue numériquement pour différentes tailles, nous avons deviné que ce fondamental s'écrit sous la forme :

$$\boxed{|\Psi_{GS}\rangle \propto \prod_p (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001001..1001\rangle} \quad (3.22)$$

où

$$\hat{S}_m \equiv c_{m+1}^\dagger c_{m+2}^\dagger c_{m+3} c_m (\equiv S_{m,1,2}) \quad (3.23)$$

est un opérateur de squeeze défini en (eq.3.7). Pour mieux comprendre la façon dont fonctionne cet opérateur, écrivons cet état fondamental pour un petit nombre de particules :

$$|\Psi_{GS,N=2}\rangle \propto |1001\rangle + 3\lambda^4 |\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\rangle \quad (3.24)$$

$$|\Psi_{GS,N=3}\rangle \propto |1001001\rangle + 3\lambda^4 |\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\rangle + 3\lambda^4 |1000\hat{1}\hat{1}\hat{0}\rangle \quad (3.25)$$

$$|\Psi_{GS,N=4}\rangle \propto |1001001001\rangle \quad (3.26)$$

$$+ 3\lambda^4 |\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\rangle + 3\lambda^4 |1000\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\rangle + 3\lambda^4 |1001000\hat{1}\hat{1}\hat{0}\rangle + 9\lambda^8 |\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\hat{0}\hat{0}\hat{1}\hat{1}\hat{0}\rangle$$

Les flèches ci-dessus représentent les excitations particules-trous des squeezees  $\hat{S}_m$  à opérer sur l'état TT (3.8) pour obtenir la configuration considérée. La démonstration que cet état est un état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  avec une énergie nulle est un peu laborieuse et est donc laissée en appendice (A.1).

La fonction d'onde de Laughlin se décompose uniquement sur certaines configurations de l'espace de Fock : celles obtenues à partir de la configuration Tao-Thouless (eq. 3.8), ou configuration "racine", par applications successives des opérateurs de squeeze  $S_{m,d_1,d_2}$  (eq. 3.7). Cette propriété peut se voir directement à partir de l'écriture de Laughlin en première quantification, et peut être reliée au fait que  $\prod_{i<j} (z_i - z_j)^q$  est un polynôme de

Jack [Bernevig & Haldane \(2008\)](#). A la limite de très faible circonférence, Laughlin tend vers l'état Tao-Thouless, qui lui est un simple déterminant de Slater. Par contre, l'état (eq. 3.22), se décompose sur toute une classe de configurations obtenue par opérations de squeeze  $S_{m,1,2}$  sur la configuration racine (eq. 3.8). Il est étonnant qu'une telle propriété perdure dans les états propres du Hamiltonien tronqué, et la raison sous-jacente ne nous est pas claire.

Lorsque on augmente le nombre d'orbitales disponibles, i.e.  $N_\phi > N_\phi(N) = 3(N - 1) + 1$ , l'espace fondamental d'énergie zéro de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  devient dégénéré. On peut construire simplement ces états, à partir de la propriété suivante démontrée en appendice A.2. Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux états fondamentaux de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  à  $N_1$  et  $N_2$  particules respectivement, et  $N_{\phi_1}$  et  $N_{\phi_2}$  orbitales respectivement, alors, en introduisant suffisamment de zéros entre les deux états, l'état

$$\Psi = \Phi_1 \otimes \underbrace{| \underbrace{0..0}_{p \text{ termes}} \rangle}_{p \text{ termes}} \otimes \Phi_2 \quad , \quad p \geq 3 \quad (3.27)$$

est un état propre d'énergie zéro de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  pour  $N_1 + N_2$  particules et  $N_\phi = N_{\phi_1} + N_{\phi_2} + p$  orbitales. Par exemple, l'état :

$$\Psi \propto \left( \prod_{p < q} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001..\rangle \right) \otimes |000\rangle \otimes \left( \prod_{p > q} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p+1}) |1001..\rangle \right) \quad (3.28)$$

est d'énergie zéro. De façon plus commode, comme démontré en appendice (A.2), on peut réécrire l'ensemble des états propres de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  d'énergie zéro comme :

$$\boxed{\Psi \propto \prod_m (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_m) |\text{root}\rangle} \quad (3.29)$$

avec  $|\text{root}\rangle = |\{n_m\}\rangle$  est une configuration d'états de bord Tao-Thouless telle que :

$$n_m + n_{m+1} + n_{m+2} \leq 1 \quad (3.30)$$

pour tout m.

Les quasi-trous du modèle tronqué, tout comme ceux du modèle de cœur dur ou ceux du modèle Tao-Thouless, ont une charge moyenne  $e/3$ . Cela peut se voir en imaginant un état  $\Psi_{GS}$  à la limite thermodynamique. Créer un quasi-trou au centre peut se faire en introduisant un 0 au centre de la configuration racine, ce qui, à grande distance du trou, revient à décaler la partie droite (ou la partie gauche) de l'état d'une orbitale. Comme l'état  $\Psi_{GS}$  est de charge moyenne  $-e/3$  par orbitales (1 électron toutes les 3 orbitales), la charge intégrée sur une large distance autour du quasi-trou est  $e/3$ .

L'équation (3.29) décrit un isomorphisme entre les états de quasi-trous Tao-Thouless et les états de quasi-trous du modèle tronqué. La dimension de l'espace des quasi-trous du modèle TT ( $\tilde{\mathcal{H}}_F^4$ ), du modèle tronqué ( $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$ ) et du modèle complet de cœur dur ( $\tilde{\mathcal{H}}_F$ ) est

donc la même. Pour  $N$  fermions et un nombre d'orbitales  $N_\phi = N_\phi(N) + n$ , la dimension de l'espace de ces trois modèles est celle de  $n$  bosons dans  $N + 1$  orbitales, soit :

$$\text{Dim}(N, N_\phi = N_\phi(N) + n) = \binom{N + n}{n}. \quad (3.31)$$

### 3.2.3 Représentation en terme de Produits de Matrice (PM)

Une dernière représentation de ces fonctions d'onde peut être réalisée à l'aide de Produits de Matrices (PM). L'idée d'écrire ces fonctions sous forme de PMs provient d'un travail indépendant [Nakamura et al. \(2012\)](#), publié simultanément au notre, sur le même problème dans la géométrie du tore. Cette représentation en terme de produits de matrices est plus pratique que (3.29) pour calculer les fonctions de corrélations. La représentation d'états quantiques en terme de PM existe depuis longtemps et est notamment utile pour décrire les états "Valence Bond" dans les chaînes de spin 1 [Fannes et al. \(1992\)](#). Fin 2012, M. P. Zaletel et R. S. K. Mong [Zaletel & Mong \(2012\)](#) ont montré qu'une grande partie des fonctions d'onde test de l'effet Hall (la fonction de Laughlin, Moore-Read, ou Read-Rezayi) peuvent être écrites comme des états PM ([Zaletel & Mong 2012](#)). Le problème est que l'espace auxiliaire doit être de dimension infinie, mais dans la géométrie du cylindre, plus la circonférence est faible, plus on peut réduire la dimension de l'espace auxiliaire et obtenir une très bonne approximation de ces états de Hall.

Si deux états  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  s'étendent sur un nombre d'orbitales fini  $N_{\phi_1}$  et  $N_{\phi_2}$ , on peut prendre le produit tensoriel  $\Phi_1 \otimes \Phi_2$  pour construire un état sur  $N_{\phi_1} + N_{\phi_2}$  orbitales. Par exemple,  $|100\rangle \otimes |100\rangle = |100100\rangle$ . Soit  $[g]_{\alpha,\beta}$  et  $[h]_{\alpha,\beta}$  deux matrices dont les éléments sont des états sur  $N_{\phi_1}$  et  $N_{\phi_2}$  orbitales respectivement. On peut définir la matrice produit  $gh$  dont les éléments sont des états à  $N_{\phi_1} + N_{\phi_2}$  orbitales, en utilisant le produit tensoriel sur les éléments de chacune des matrices ( $[gh]_{\alpha,\beta} = \sum_\delta [g]_{\alpha,\delta} \otimes [h]_{\delta,\beta}$ ). Dans ce formalisme, nous définissons :

$$g = \begin{bmatrix} |100\rangle & 3\lambda^4|011\rangle \\ |000\rangle & 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

On peut alors écrire :

$$|\Psi_{GS}\rangle \propto \left[ \underbrace{gg \dots g}_N \right]_{1,1}. \quad (3.33)$$

L'espace sur lequel évolue l'indice  $\alpha = 1, 2$  est un espace auxiliaire qui ne correspond à aucun objet physique. Dans notre cas, on peut dire que  $\alpha$  évolue sur l'espace des liens entre deux cellules de 3 orbitales successives.  $\alpha = 1$  signifie qu'aucun squeeze n'est appliqué entre ces deux cellules,  $\alpha = 2$  signifie qu'on applique un squeeze  $S_{3p}$  entre ces deux cellules. La démonstration de cette forme peut se faire par récurrence. Sous cette forme, deux 0 supplémentaires sont ajoutés à droite de l'état  $|\Psi_{GS}\rangle$  de l'équation (3.22), ce qui en fait en toute rigueur un état propre pour  $N_\phi \geq N_\phi(N) + 2$ .

Les quasi-trous peuvent s'écrire en intercalant dans le produit de matrices  $g$ , des

matrices  $o$  à une orbitale :

$$o = \begin{bmatrix} |0\rangle & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.2.4 Propriétés des états propres du modèle tronqué

Nous avons essayé de comprendre quelles étaient les propriétés communes ou non entre la fonction d'onde  $\Psi_{GS}$  et la fonction d'onde  $\Psi_3$ .

#### Crossover cristal-liquide

Par un calcul détaillé en annexe (A.3), on peut obtenir l'expression du nombre moyen de particules dans l'orbitale  $m = 3p+r$  placée dans le volume de l'état, à la limite  $N \rightarrow +\infty$  :

$$n_{3p}^{Bulk} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p \approx N/2}} \langle \Psi_{GS} | \hat{n}_{3p} | \Psi_{GS} \rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + 36\lambda^8}} \quad (3.35)$$

$$n_{3p+r}^{Bulk} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ p \approx N/2}} \langle \Psi_{GS} | \hat{n}_{3p+r} | \Psi_{GS} \rangle = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 36\lambda^8}} \right) \quad (3.36)$$

avec  $r = 1, 2$  et  $t = 3\lambda^4$ . Comme on aurait pu s'en douter, le nombre d'occupation moyen de l'état  $|\Psi_{GS}\rangle$  est 3-périodique dans son volume. Or la densité moyenne est, dans le volume :

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_m |\phi_m(\mathbf{r})|^2 n_m^{Bulk} = \frac{1}{L\ell\sqrt{\pi}} \sum_m e^{-\frac{1}{\ell^2}(x-x_m)^2} n_m^{Bulk}. \quad (3.37)$$

Les orbitales sont espacées de  $\delta_x = \frac{2\pi\ell}{L}$ , et  $\rho$  est donc la convolution du nombre d'occupation moyen avec une gaussienne d'écart type  $\frac{\ell}{2}$ . Donc à la limite des petits  $L$ ,  $\rho$  décrit des oscillations de période  $3\delta_x$ , tandis qu'à grand  $L$ , les oscillations s'aplatissent et le profil de densité devient homogène est égal celui d'un liquide à  $\nu = 1/3$  :

$$\rho^{Bulk}(\mathbf{r}) = \frac{1}{3} \frac{1}{2\pi\ell^2} \quad (3.38)$$

Le phénomène est donc similaire au cas des fonctions d'onde de Laughlin ou de Tao-Thouless.

On peut aussi voir, par un calcul similaire mais plus laborieux (il ne sera pas détaillé ici), que dans le volume, à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$ ,  $p \approx N/2$  puis  $L \rightarrow \infty$ ), la fonction de corrélation de paires :

$$g(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho N} \sum_{i \neq j} \langle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i + \mathbf{r}_j) \rangle = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\ell^2}}. \quad (3.39)$$

Le fait que  $g(\mathbf{r})$  ne présente pas d'oscillations à grand  $r$  signifie, qu'à la limite thermodynamique, cet état décrit un fluide. Comme dans le cas de la fonction d'onde de Laughlin ou de la fonction d'onde Tao-Thouless, nous avons donc un crossover entre une phase d'onde de densité de charge à faible  $L$  et une phase liquide à grand  $L$ .

### Propagateur le long des bords

Une des caractéristiques essentielles de la fonction d'onde de Laughlin, énoncée par X.G. Wen [Wen \(1990\)](#), est que le propagateur le long du bord suit, à la limite thermodynamique et à grande distance, la loi de puissance :

$$\langle \Psi_q | T \left[ \hat{\Psi}^\dagger(x_e, y, t) \hat{\Psi}(x_e, 0, 0) \right] | \Psi_q \rangle \propto \frac{1}{(y - vt)^q}. \quad (3.40)$$

où  $x_e$  est une position proche du bord de la goutte de Laughlin. Comme nous le verrons dans le chapitre (4), cette propriété s'explique par le fait que la physique effective le long du bord d'une goutte de Hall à  $\nu = 1/q$  est décrite par un liquide de Luttinger chiral de paramètre  $g = 1/q$ . En particulier, le propagateur à temps égaux décroît en  $y^{-q}$  à grande distance comme l'a démontré Wen directement depuis l'expression de la fonction d'onde Laughlin sur le disque [Wen \(1992\)](#). Nous avons donc cherché à calculer le propagateur le long du bord de notre fonction d'onde  $|\Psi_{GS}\rangle$ .

Puisque  $M = \sum m_i$  est un bon nombre quantique, le propagateur à temps égaux le long du bord s'écrit simplement en fonction de  $n_m$  :

$$\mathcal{G}(y) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x_e, y) \hat{\Psi}(x_e, 0) \rangle \quad (3.41)$$

$$= \frac{1}{L\ell\sqrt{\pi}} \sum_m e^{-\frac{1}{\ell^2}(x_e - x_m)^2} e^{-i\frac{2\pi}{L}my} n_m \quad (3.42)$$

Le nombre d'occupation moyen,  $n_{3p+r}$  avec  $r = 0, 1, 2$ , vaut à proximité du bord gauche, i.e. pour  $N \rightarrow \infty$  et  $p$  fini :

$$n_{3p+r}^{Edge} = n_{3p+r}^{Bulk} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \sqrt{1 + 36\lambda^8}}{1 + \sqrt{1 + 36\lambda^8}} \right)^p \right] \quad (3.43)$$

Le terme de droite décroît exponentiellement sur une distance caractéristique de l'ordre  $1/L$ . Sa contribution au propagateur est donc négligeable lorsque  $L \rightarrow \infty$  et seul le terme  $n_{3p+r}^{Bulk}$  contribue. On trouve à la limite thermodynamique, i.e.  $N \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$  :

$$\mathcal{G}(y) = \frac{1}{L\sqrt{\pi}} \sum_{p=0}^{+\infty} e^{-(2\pi\ell 3p/L)^2} e^{-i2\pi 3py/L} \quad (3.44)$$

$$= \frac{1}{12\pi} e^{-\frac{y^2}{4\ell}} \text{Erfc} \left( i \frac{y}{2\ell} \right) \quad (3.45)$$

où Erfc est la fonction d'erreur complémentaire. En utilisant le développement asymptotique de la fonction Erfc, on obtient à grand  $y$  :

$$\mathcal{G}(y) \propto \frac{1}{y} \quad (3.46)$$

Ce résultat est le même que pour un état Tao-Thouless, et a le même exposant asymptotique que le propagateur des fermions libres à une dimension. Cela signifie que le modèle tronqué ne peut pas être décrit par un liquide de Luttinger chiral le long du bord. Cet état tronqué ne capture donc pas toute la physique à la limite thermodynamique qu'est supposé avoir un liquide de Hall.

### 3.2.5 Quasi-électron et excitations collectives

Outre les états d'énergie zéro donnés par la formule (3.29) et associés aux états de bord du modèle de cœur dur, on peut obtenir d'autres états propres exacts d'énergie non nulle du Hamiltonien tronqué (eq. 3.19). À un nombre d'orbitales  $N_\phi = 3N - 3$ , un de ces états est donné par

$$|\Psi_{QE}\rangle \propto \prod_p (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |110001..1001\rangle, \quad (3.47)$$

Pour les mêmes raisons que  $\Psi_{GS}$ , cet état s'annule sur chacun des termes  $C_m^\dagger C_m$  et  $\hat{n}_{m+2}\hat{n}_m$  de l'Hamiltonien (3.19). De plus c'est un état propre du terme limite  $\lambda\hat{n}_G\hat{n}_{G+1}$  de valeur propre  $\lambda$ . Il est donc état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$ . Notons par contre que l'état  $\Psi_{QE}$  (eq. 3.47) n'est pas état propre du Hamiltonien  $\mathcal{H}_F^9$  sans limites en  $G$  et  $D$  sur les orbitales.

Cet état est obtenu pour un quantum de flux (ou une orbitale) de moins que l'état de Laughlin. C'est donc un candidat pour décrire le quasi-électron de Laughlin. Si l'on transforme adiabatiquement le Hamiltonien tronqué en celui de cœur dur, cet état est connecté adiabatiquement à un état propre du modèle de cœur dur qui dispose d'un bon recouvrement avec l'état quasi-électron issu de la théorie des fermion composites. Cela dit, comme nous verrons dans la section (3.3), cet état a une énergie qui tend vers zéro à la limite thermodynamique quand la circonférence ainsi que le nombre de particules tend vers l'infini. Ce comportement est lié à une pathologie introduite par nos limites  $G$  et  $D$  de l'espace des moments. Il est probable que cette pathologie provienne du fait que ce quasi-électron se mélange avec les états de bord du système à grand rayon du cylindre (cf. sec. 3.3).

Pour un nombre d'orbitales  $N_\phi = 3N - 2$ , il est possible de construire un état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  en introduisant un zéro dans la configuration racine de  $\Psi_{QE}$ . Ces états s'écrivent donc

$$|\Psi_{MR}\rangle \propto \prod_p (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |110001..1001\overset{\downarrow}{0}\rangle, \quad (3.48)$$

où la position du zéro fléché indique la position du "0" introduit, et peut être déplacée librement au sein de la configuration racine. Ces états s'expriment comme la combinaison du quasi-électron ci-dessus et d'un quasi-trou, et sont obtenus au même nombre de quantum de flux que Laughlin. Ils sont donc des équivalents des excitations collectives neutres au dessus de l'état de Laughlin, aussi appelé mode magnétoroton (cf. section. 2.2.6). Cela dit, ils souffrent de la même pathologie que le quasi-électron ci-dessus et ne sont pas gappés à la limite thermodynamique. Pour cette même raison, il est difficile d'identifier une branche d'états bien séparée du reste du spectre, constituant l'ensemble du mode magnétoroton, à l'inverse de ce qu'on peut observer dans les géométries compactes de la sphère ou du tore (Girvin et al. 1986, Jain 2007, p.177). Les états (3.48) pour lesquels nous avons trouvé une expression analytique ne constituent qu'une partie des excitations de l'ensemble du mode magnétoroton, et correspondent aux excitations pour lesquelles le quasi-électron est localisé sur la limite droite (ou gauche) du cylindre. Ceci étant, nous n'avons pas pu clairement identifier, par nos calculs numériques, les autres états du mode

magnétoroton dans notre géométrie cylindrique, que ce soit pour le modèle complet ou le modèle tronqué.

### 3.3 Gap du Hamiltonien de cœur dur et limites en orbitales

Dans cette section assez indépendante du reste du chapitre, nous étudions le gap de notre modèle de cœur dur, projeté sur un nombre fini d'orbitales. Il est important de rappeler que nous n'avons pas trouvé le moyen de diagonaliser le modèle de cœur dur "complet" sur le cylindre, puisque l'espace de Hilbert dans chaque secteur d'impulsion  $M$  est de dimension infinie. Comme nous avons vu dans la section (2.3.2), nous avons donc projeté notre Hamiltonien sur un nombre fini d'orbitales, mimant ainsi la présence de bords durs de part et d'autre du cylindre. Nous notons cet Hamiltonien projeté  $\tilde{\mathcal{H}}$  pour le différencier du Hamiltonien complet  $\mathcal{H}$ . **Attention**, nous parlons ici de l'Hamiltonien projeté  $\tilde{\mathcal{H}}$ , qui ne soit pas être confondu avec l'Hamiltonien tronqué  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  étudié dans la section précédente. Dans  $\tilde{\mathcal{H}}$ , tous les ordre du développement de Taylor du Hamiltonien lorsque  $\lambda \rightarrow 0$  sont considérés.

#### 3.3.1 Étude du gap du Hamiltonien de cœur dur.

L'Hamiltonien complet  $\mathcal{H}$  dispose d'un espace fondamental d'énergie zéro,  $\mathcal{E}_0$ , infiniment dégénéré constitué de la fonction d'onde de Laughlin et des ses états de bord. Les autres états propres du système sont d'énergie strictement positive. Si  $\Delta$  est l'énergie strictement positive la plus basse, tout semble indiquer que cette énergie tend vers une valeur non nulle à la limite thermodynamique. En effet, le modèle de cœur dur sur le plan dans la jauge symétrique peut être diagonalisé dans chaque sous-espace de moment cinétique total donné, qui est lui de dimension finie. L'évolution à taille finie de ce  $\Delta$  semble indiquer clairement qu'il reste supérieur à un certain gap à la limite thermodynamique (voir par exemple (Regnault & Jolicœur 2004) une étude du modèle de cœur dur bosonique). C'est cette propriété qui conduit au caractère incompressible du liquide de Laughlin. Ce critère doit nécessairement rester vrai dans notre plan périodique, pourvu que  $L$  soit suffisamment grand.

Ceci étant, nous avons compris que l'Hamiltonien projeté ne possédait pas de propriété similaire à cause de la présence de limites sur les orbitales disponibles.

Considérons donc le Hamiltonien  $\tilde{\mathcal{H}}$  à  $N$  particules projeté dans  $N_\phi$  orbitales. Si le nombre d'orbitales est suffisamment grand pour contenir la fonction d'onde de Laughlin, i.e. si  $N_\phi \geq q(N - 1) + 1$ , cet Hamiltonien dispose d'un espace propre dégénéré d'énergie zéro composé des états propres d'énergie zéro de l'Hamiltonien complet  $\mathcal{H}$  contenu dans  $N_\phi$  orbitales (cf. sec. 2.3.3). Considérons par exemple le cas où  $N_\phi = q(N - 1) + 1$ , où la fonction d'onde de Laughlin est le fondamental unique de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Les états de bord, produits de la fonction d'onde de Laughlin avec un polynôme symétrique, ne sont pas contenus sur

$q(N - 1) + 1$  orbitales et ne peuvent donc pas être états propres de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Les autres états propres de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , d'énergie strictement positive, se décomposent eux sur le même nombre d'orbitales que la fonction d'onde de Laughlin, et sont donc au même remplissage moyen. Par conséquent, on pourrait penser qu'ils sont bien décrits par les excitations neutres du liquide de Laughlin, connues sous le nom d'excitations collectives. Ces dernières sont formées, au plus bas du spectre, de la branche magnétoroton de [Girvin et al. \(1986\)](#) (cf. sec. 2.2.6), et ont la propriété d'être gappées pour toute valeur du moment cinétique. Nous avons donc été surpris de voir que l'énergie du premier état excité  $\Delta(N, L)$  n'était en fait pas gappée dans notre système.

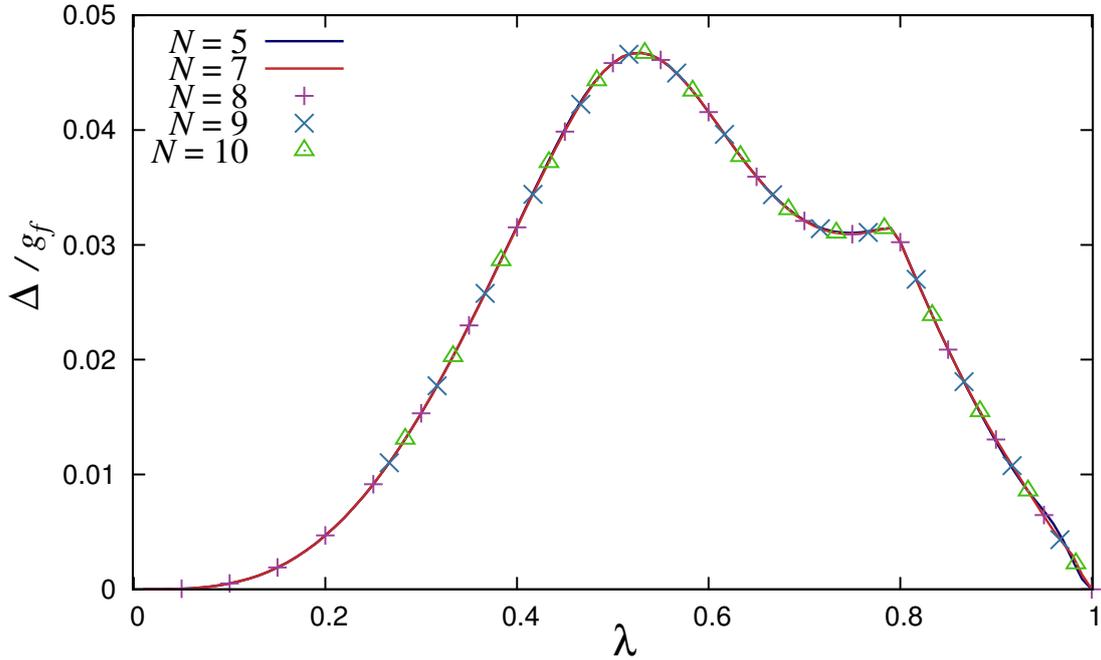


FIGURE 3.4 – Énergie de la première excitation  $\Delta(N, L)$  en unités de  $g_F$  en fonction  $\lambda = \exp(-2\pi^2/L^2)$ . Nous considérons  $N_\phi = 3(N - 1) + 1$  orbitales de telles sorte que la fonction d'onde de Laughlin soit l'unique état fondamental. Nous calculons le “gap” entre l'état fondamental à  $M = 0$  et l'état excité le plus bas parmi toutes les impulsions. Les valeurs sont indiquées par une ligne continue pour  $N = 5, 7$  et par des symboles pour  $N = 8 - 10$ . On observe un plateau pour  $\lambda \approx 0.6 - 0.8$  d'une valeur proche de celle attendue pour le gap du volume à  $\nu = 1/3$  du modèle de cœur dur.

Nous présentons sur le graphe (3.4) l'énergie  $\Delta(N, L)$  du premier état excité de  $\tilde{\mathcal{H}}$  dans la situation considérée ci-dessus, c'est à dire pour un nombre d'orbitales précisément égal à celui de la fonction d'onde de Laughlin ( $N_\phi = q(N - 1) + 1$ ). Pour  $N = 5$  à  $N = 10$ , on présente la valeur de cette énergie en fonction de notre paramètre habituel  $\lambda = \exp(-2\pi^2/L^2)$ . Il saute aux yeux que, malgré nos données limitées, ce “gap”  $\Delta(N, L)$  converge à grand  $N$  vers une courbe  $\delta(L)$  proche du tracé pour  $N = 10$ . À faible circonférence  $L$ , i.e. pour  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $\Delta(N, L)$  est donnée par la limite Tao-Thouless de l'Hamiltonien

de cœur dur (eq. 3.10) et vaut  $16g_F\sqrt{2\pi^3}\lambda^4/\ell L^3$ <sup>1</sup>. Dans cette limite,  $\Delta(N, L)$  est donc indépendant de  $N$ . Ce “gap”  $\delta(L)$  semble atteindre un plateau dans l’intervalle  $\lambda \approx 0.6 - 0.8$ . Le plateau est à  $\approx 0.03g_F$ , ce qui est proche de l’estimation actuelle du gap du volume du modèle de cœur dur  $\approx 0.033g_F = 0.41V_1$ . Cela dit, ce plateau ne survit pas à la limite thermodynamique qui est obtenue lorsque  $N \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$  et que la largeur de la goutte  $W \propto N/L \rightarrow \infty$ . Au delà d’une valeur  $\lambda_{crit} \approx 0.8$ , un autre régime apparaît et la courbe  $\delta(L)$  tend vers zéro quand  $L \rightarrow +\infty$ . Cela signifie que des excitations d’énergie nulle apparaissent à la limite thermodynamique.

### 3.3.2 Nature des états sans gap

Plaçons-nous toujours dans la situation où  $N_\phi = q(N - 1) + 1$ , lorsque la fonction d’onde de Laughlin est l’unique état fondamental du système. Un exemple de spectre obtenu dans une telle situation peut être observé dans la figure (3.2 a).

Dans un premier temps, nous avons tenté de décrire les excitations élémentaires au dessus de la fonction d’onde de Laughlin comme des excitations collectives. La théorie des fermions composites (Jain 2007) décrit les excitations collectives élémentaires par la promotion d’un fermion composite vers un pseudo niveau de Landau immédiatement supérieur. Cette théorie propose des fonctions d’onde d’essai pour décrire ces excitations. Nous avons calculé ces fonctions d’onde dans la géométrie du cylindre et mesuré leurs recouvrements avec les états propres exacts. Même si une étude plus poussée est nécessaire, la conclusion générale est que ces fonctions d’onde décrivent correctement les excitations, i.e. possèdent des recouvrements de plus de 90% pour  $N = 6$  avec les états exacts, pour  $\lambda \approx 0.6 - 0.8$ . Mais pour une circonférence plus élevée, une partie de ces excitations collectives descendent en énergie et deviennent les états non gappés observés ci-dessus.

Nous pensons que les premières excitations au dessus de l’état de Laughlin sont des excitations de bord qui ne s’écriraient plus comme le simple produit de la fonction d’onde de Laughlin par un polynôme symétrique, mais qui auraient une expression et une énergie modifiée par la présence de la limite quasi-dure. Plus précisément, supposons que la fonction d’onde de Laughlin :

$$\Psi_q = \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\sum_i x_i^2/2\ell^2} \quad (3.49)$$

soit l’unique état fondamental de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Cela correspond à prendre des limites  $G = 0$  et  $D = q(N - 1)$ . L’état

$$T\Psi_q = \prod_i Z_i \Psi_q \quad (3.50)$$

est un état propre d’énergie zéro de  $\mathcal{H}$  mais n’est pas un état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}$  puisqu’il se développe sur des orbitales allant de 1 à  $q(N - 1) + 1 = D + 1$ . Dans le développement

---

<sup>1</sup>Attention, un facteur  $4g_F\sqrt{2\pi^3}/\ell L^3$  relie l’Hamiltonien (3.10) et la limite TT de l’Hamiltonien de cœur dur (2.135)

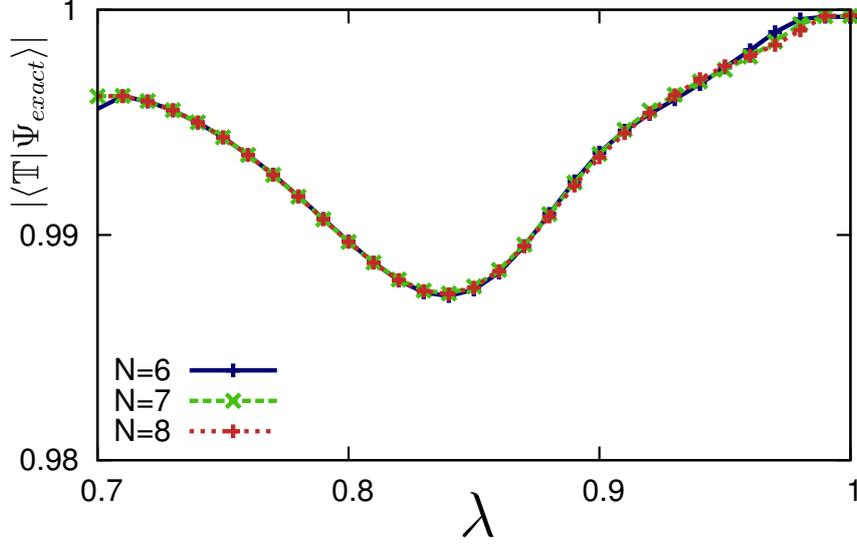


FIGURE 3.5 – Recouvrement entre l’état de bord projeté  $\mathbb{T}$  (3.51) et l’état fondamental dans le secteur  $M = N$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , dans le cas fermionique ( $q = 3$ ).

de cet état  $T\Psi_q$  dans la base de Fock  $\{|n_i\rangle\}$ , l’orbitale  $D + 1$  peut être occupée ou non. L’état fondamental en  $M = N$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ , d’énergie strictement positive mais non gappé à la limite thermodynamique, est en fait très proche de l’état obtenu à partir de  $T\Psi_q$  en ne “gardant” que la partie où l’orbitale  $D + 1$  est inoccupée. En pratique, si on note  $P_{n_{D+1}=0}$  l’opérateur de projection orthogonale sur l’état inoccupé de l’orbitale  $D + 1$ , on introduit l’état

$$|\mathbb{T}\rangle = cP_{n_{D+1}=0}|T\Psi_q\rangle \quad (3.51)$$

où  $c$  est la constante de normalisation. On peut alors calculer son recouvrement avec l’état fondamental exact en  $M = N$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Nous présentons sur la figure (3.5) la valeur de ce recouvrement pour  $N = 6 - 8$  dans l’intervalle  $\lambda = 0.7 - 1.0$  dans le cas fermionique ( $q = 3$ ). Ce recouvrement est excellent, supérieur à 0.98 dans cet intervalle de  $\lambda$ . De plus, ce recouvrement ne dépend que très peu de  $N$ , et il semblerait qu’il reste  $> 0.98$  à la limite thermodynamique. Cela confirme que l’état  $|\mathbb{T}\rangle$  est très proche de l’état fondamental exact dans le secteur  $M = N$  de  $\tilde{\mathcal{H}}$ .

Plus simplement, on peut dire que l’état propre exact non gappé est très proche à la limite thermodynamique de l’état de bord  $T\Psi_q$ . En effet, l’occupation moyenne l’orbitale  $D + 1$  de l’état  $T\Psi_q$  tend vers zéro à la limite thermodynamique. Plus précisément, on sait (Rezayi & Haldane 1994) que la distribution d’impulsion  $n(k) \sim (k - k_F)^2$  lorsque  $k$  est proche du moment au bord de la goutte  $k_F$ . Cela signifie que  $n_{D+2-i} \sim ai^2/L^2$  à la limite thermodynamique. L’occupation moyenne de l’orbitale  $D + 1$  décroît donc en  $L^2$  et tend vers zéro à la limite thermodynamique. Cela signifie que l’état  $\mathbb{T}$  tend vers l’état  $T\Psi_q$  à la limite thermodynamique. Nous traçons donc sur la figure (3.6) le recouvrement entre l’état propre obtenu par diagonalisation numérique exacte et l’état  $T\Psi_q$  pour  $N = 6 - 8$  fermions ( $q = 3$ ) et  $\lambda = 0.7 - 1.0$ . On remarque tout d’abord que le recouvrement varie

faiblement en fonction de  $N$  et notamment qu'il ne semble pas diminuer lorsque  $N$  croît. De plus, lorsque  $\lambda \rightarrow 1$  (i.e.  $L \rightarrow \infty$ ), ce recouvrement dépasse la valeur 0.99.

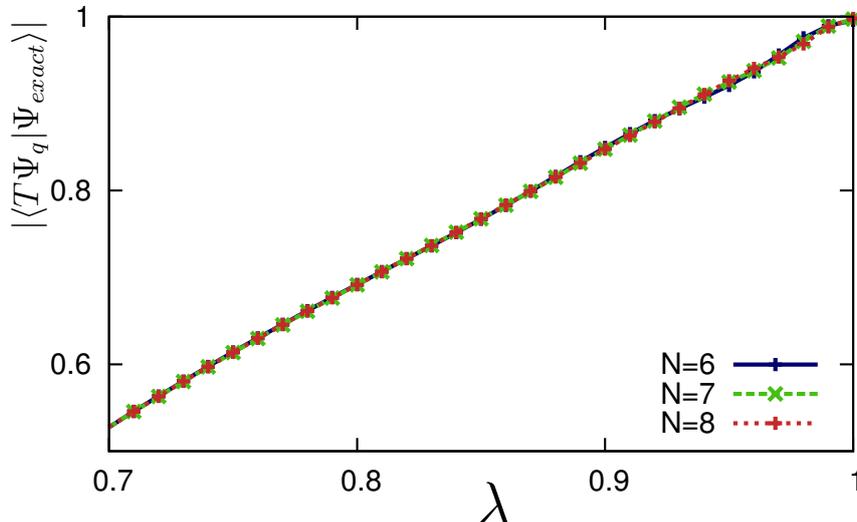


FIGURE 3.6 – Recouvrement entre l'état de bord non-projeté  $T\Psi_q$  (3.50) et l'état fondamental dans le secteur  $M = N$  de  $\tilde{H}$  dans le cas fermionique ( $q = 3$ ).

Cette procédure peut aussi être appliqués à d'autres états  $\Psi_e$ , dans l'espace fondamental de  $\mathcal{H}$ . On trouve en règle générale d'excellents recouvrements ( $> 0.98$ ) entre les états exacts et des états de la forme :

$$|\mathbb{T}'\rangle = P_{n_{D+1}=0}|\Psi_e\rangle. \quad (3.52)$$

Nous trouvons aussi de très bons recouvrements entre les états exacts et  $\Psi_e$  lorsque  $\lambda \rightarrow 1$ .

Même si nous ne sommes pas sûr d'avoir compris pleinement ce phénomène, il semblerait que malgré les limites  $D$  et  $G$  imposées sur les orbitales, des excitations de bord persistent et viennent peupler les états d'énergie non nulle et non gappés de  $\tilde{\mathcal{H}}$ . Ces états se mélangent avec les excitations collectives de la goutte de Laughlin d'une façon qui nous est encore mal comprise. Ceci complique l'étude des excitations collectives dans cette géométrie. Il faudrait donc, dans l'idéal, s'affranchir de ces conditions aux limites. Une solution alternative serait d'utiliser de simples conditions aux limites périodiques dans la direction  $x$  et de revenir ainsi à l'étude dans la géométrie du tore. En ajoutant un potentiel invariant par translation dans la direction  $y$  et confinant dans la direction  $x$ , on devrait pouvoir obtenir un goutte de Hall de forme cylindrique et retrouver notre cas étudié ici, sans être gêné par le problème des limites  $G$  et  $D$ .

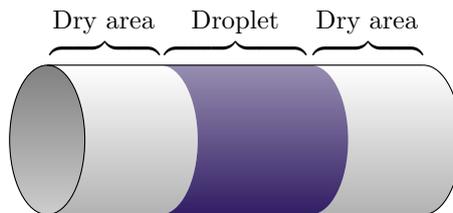


# ÉTATS DE BORD D'UNE BANDE D'EHQF À $\nu = 1/q$

---

## 4.1 Introduction : Contacts Ponctuels Quantiques (QPC) et géométrie cylindrique

Les bords des phases de Hall fractionnaire contiennent des excitations sans gap, dont la physique, très riche, est intimement liée à la phase de Hall qu'elles entourent. Pour les phases les mieux comprises aujourd'hui, à  $\nu = 1/q$ , ces excitations peuvent être considérées comme des déformations du fluide incompressible, et se propagent de manière chirale c'est à dire en sens unique donné par la direction du champ magnétique. Plus précisément, comme nous le verrons dans la section 4.3, A. H. MacDonald ([MacDonald 1990](#)) et X. G. Wen ([Wen 1990, 1992, 1995](#)) ont développé dans les années 90 un formalisme décrivant les bords des gouttes à  $\nu = 1/q$  par un liquide de Luttinger chirale. Pour d'autres phases, comme les phases de fermions composites de Jain à  $\nu = \frac{n}{2np \pm 1}$ , on suppose que les bords sont décrits par plusieurs liquides de Luttinger chiraux, dont le couplage dépend à la fois de l'interaction, du désordre de l'échantillon, ou de la forme du potentiel de confinement. Il faut souligner qu'à l'heure actuelle le détail de cette interprétation n'est pas clair. D'autres théories effectives plus exotiques peuvent vivre sur les bords de certaines phases de Hall. À  $\nu = 5/2$  par exemple, on pense aujourd'hui que certaines excitations neutres au bord du fluide sont décrites par des célèbres fermions de Majorana. Nous montrerons que c'est bien le cas dans un modèle hard-core dans le chapitre (5).



Le modèle d'EHQF dans la géométrie du cylindre, sur lequel j'ai principalement axé

mon étude durant ma thèse, permet de former une bande de liquide de Hall périodique, de longueur  $L$ , comme schématisé sur la figure ci-dessus. Cette configuration peut être obtenue si, en plus de l'interaction entre électrons, on ajoute un potentiel de confinement convexe le long de l'axe du cylindre. Un tel potentiel brise l'invariance par translation seulement le long de l'axe, mais la symétrie de révolution du cylindre reste intacte. Par conséquent, le moment cinétique total autour de l'axe est conservé, et il est donc toujours possible de classer les états propres en fonction du moment, même en présence de ce potentiel. C'est l'intérêt de cette géométrie. La goutte de Hall a alors deux bords, le long desquels se propagent les excitations sans gap de notre liquide incompressible. Les chiralités des modes de bord sont opposées. Comme nous allons le voir, ce système constitue un cadre idéal pour l'étude des états de bord des phases de Hall quantique fractionnaire. Notons que l'on s'attend à ce que les modes de bord interagissent peu entre eux dès que la distance entre les bords dépasse quelques longueurs magnétiques.

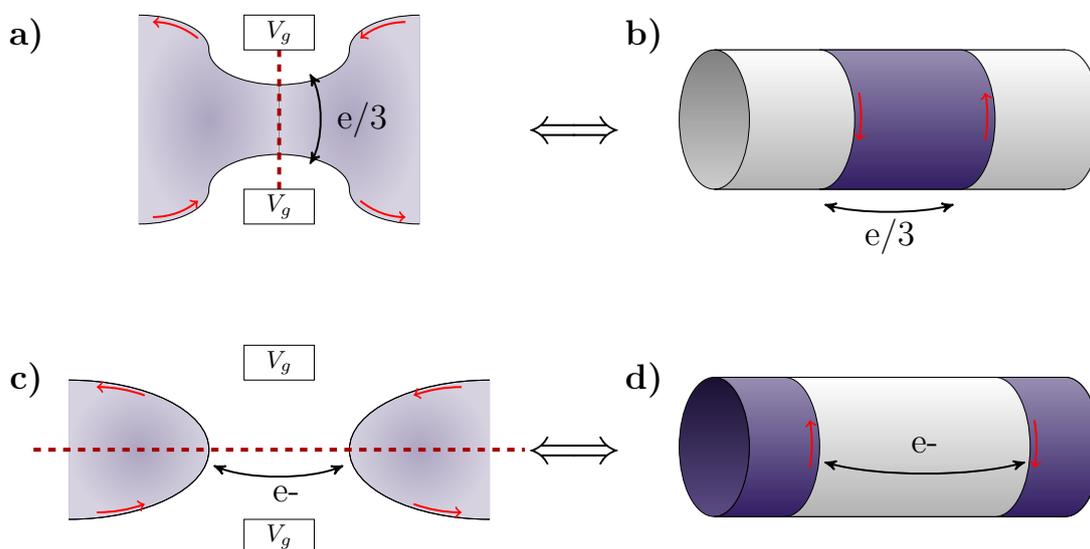


FIGURE 4.1 – a) : contact ponctuel quantique permettant le tunneling de quasi-particules. b) : configuration correspondante sur le cylindre obtenue avec un potentiel de confinement convexe. c) : configuration “Pinch Off” d’un contact ponctuel quantique n’autorisant que le tunneling d’électrons. d) Transfert d’électrons par effet tunnel retrouvé sur le cylindre avec un potentiel de confinement concave qui scinde la gouttelette en deux.

On peut donner une interprétation plus physique à notre problème. Dans les échantillons réels de gaz bidimensionnels on a des états contre-propageants entre des bords opposés de l'échantillon. Une des façons de sonder le système expérimentalement est de créer une constriction au moyen d'une grille électrostatique dans laquelle on rapproche deux bords. Il peut y avoir alors des phénomènes de tunneling de quasi-particules à travers le volume de l'échantillon pourvu que la constriction soit suffisamment étroite. Nous obtenons une situation analogue dans notre géométrie cylindrique, lorsque le potentiel extérieur est convexe (voir le haut de la figure 4.1). Si maintenant le potentiel de grille

est suffisamment intense pour séparer la gouttelette en deux parties, ce que les expérimentateurs appellent le “pinch-off”, ce sont cette fois des électrons, plutôt que des quasi-particules, qui peuvent être transférés d’un bord à l’autre par effet tunnel. Nous pouvons reproduire une telle configuration sur le cylindre en ajoutant un potentiel concave qui provoque la fission de la gouttelette de Hall en deux parties qui vont se distribuer dans les creux du potentiel à un corps (voir le bas de la figure 4.1).

Cette géométrie du QPC dans la configuration de tunneling de quasi-particules a été utilisée pour des mesures de bruit qui ont établi le caractère fractionnaire de la charge (de Picciotto et al. 1997, Saminadayar et al. 1997). Il est aussi possible de mesurer la caractéristique courant-tension qui est sensible aux corrélations de type liquide de Luttinger des états de bord (Milliken et al. 1996, Turley et al. 1998, Ando et al. 1998, etc.). Enfin le QPC est la brique de base de nombreuses expériences dont les interféromètres qui devraient permettre de mesurer la statistique anyonique des quasi-particules (de C. Chamon et al. 1997, Stern & Halperin 2006, Bonderson et al. 2006, Willett et al. 2010, 2013, etc.).

Dans la suite du chapitre, nous montrons que les modes contre-propageants sur chacun des bords d’une même gouttelette à  $\nu = 1/q$  se combinent pour former un liquide de Luttinger non-chiral. À partir du spectre des états de bord, nous estimons le paramètre de Luttinger et montrons qu’il est égal à  $1/q$  à la limite thermodynamique. Cette valeur est cohérente avec la théorie des bords des phases de Hall fractionnaire développée par X. G. Wen dans les années 90.

## 4.2 Spectre des quasitrous et États de bord à $\nu = 1/q$

### 4.2.1 Espace des Quasi-trous dans la géométrie cylindrique

Revenons à notre modèle de cœur dur. Il possède un espace propre d’énergie zéro  $\mathcal{E}_0$  infiniment dégénéré (sec. 2.3.3) :

$$\Psi = Q[Z_1, Z_2, \dots, Z_N] \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2}. \quad (4.1)$$

où  $Q$  est un polynôme de Laurent symétrique à  $N$  variables. Une base de cet espace peut être formée à l’aide de monômes symétriques :

$$Q = m_\alpha = \sum_{P \in \mathcal{S}_N} Z_{P_1}^{\alpha_1} Z_{P_2}^{\alpha_2} \dots Z_{P_N}^{\alpha_N}. \quad (4.2)$$

Chaque élément de cette base est un état propre de l’impulsion  $\hat{M}$  de valeur propre  $M = qN(N-1)/2 + \sum_i \alpha_i$ .

### Dimension à $N_\phi$ donné

Considérons des limites en  $G$  et  $D$  laissant la place pour  $N_\phi = D - G + 1 = N_\phi(N) + \Delta_\phi$  orbitales. La fonction d'onde de Laughlin collée sur le bord gauche s'écrit :

$$\prod_i Z_i^G \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum x_i^2} \quad (4.3)$$

Les autres états de  $\mathcal{E}_0$  contenus dans ces limites sont obtenus par multiplication par un monôme symétrique  $m_{\{\alpha\}}$ , avec  $0 \leq \alpha_i \leq \Delta_\phi$ . Cela revient à placer  $N$  bosons dans  $\Delta_\phi + 1$  orbitales. En notant  $\beta_i = \alpha_i + (i - 1)$ , nous avons :  $0 \leq \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_N \leq \Delta_\phi + N - 1$ . Cela signifie que cet espace est de même dimension que celui de  $N$  fermions dans  $\Delta_\phi + N$  orbitales, soit simplement :

$$\text{Dim}(N, N_\phi = N_\phi(N) + \Delta_\phi) = \binom{N + \Delta_\phi}{\Delta_\phi}. \quad (4.4)$$

Notons que l'on retrouve la dégénérescence de  $\mathcal{E}_0$  à la limite Tao-Thouless (eq. 3.31).

### Quasi-trous

En s'inspirant de l'état proposé par Laughlin pour former un quasi-trou sur le disque, il est possible de créer un quasi-trou sur le cylindre à la position  $\mathbf{R} = (X, Y)$  donné par  $W = e^{\frac{2\pi}{L}(-X+iY)}$  en agissant avec l'opérateur

$$\mathcal{O}_{h+}(W) = \prod_i (Z_i - W) \quad (4.5)$$

ou

$$\mathcal{O}_{h-}(W) = \prod_i (Z_i^{-1} - W^{-1}) \quad (4.6)$$

sur la fonction d'onde de Laughlin  $\Psi_q$ . Lorsque  $\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$|Z_i^\pm - W^\pm| \sim \frac{2\pi}{L} |W^\pm| |\mathbf{r}_i - \mathbf{R}| \quad (4.7)$$

donc l'amplitude de la fonction d'onde s'annule proche de  $\mathbf{R}$  selon  $|\mathbf{r}_i - \mathbf{R}|$ . Ces fonctions sont dans l'espace propre  $\mathcal{E}_0$ , puisque  $\mathcal{O}_{h+}(W)$  et  $\mathcal{O}_{h-}(W)$  sont des polynômes (de Laurent) symétriques. Elles sont d'ailleurs les fonctions génératrices des polynômes symétriques élémentaires

$$e_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq N} Z_{i_1} Z_{i_2} \dots Z_{i_n} = \frac{1}{n!(N-n)!} m_{\underbrace{11\dots 1}_n 0\dots 0} \text{ pour } n \geq 0, \quad (4.8)$$

$$e_n = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{|n|} \leq N} Z_{i_1}^{-1} Z_{i_2}^{-1} \dots Z_{i_{|n|}}^{-1} = \frac{1}{|n|!(N-|n|)!} m_{\underbrace{-1\dots -1}_{|n|} 0\dots 0} \text{ pour } n < 0, \quad (4.9)$$

c'est à dire que :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{h_+}(W) &= \sum_{n=0}^N e_n (-W)^{N-n}, \\ \mathcal{O}_{h_-}(W) &= \sum_{n=0}^N e_{-n} (-W)^{n-N}.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Plusieurs quasi-trous peuvent être créés en appliquant plusieurs facteurs  $\mathcal{O}_{h_{\pm}}(W)$  sur Laughlin. L'espace des quasi-trous génère alors l'espace  $\mathcal{E}_0$  tout entier, puisque les polynômes symétriques élémentaires sont des générateurs algébriques de l'espace des polynômes symétriques. On appelle donc l'espace  $\mathcal{E}_0$  l'espace des quasi-trous.

Tout comme dans le cas du disque (cf. sec. 2.2.6), un quasi-trou porte une charge  $e/q$ . On peut voir que la charge d'un quasi-trou est  $e/q$  en considérant l'ajout de  $q$  quasi-trous à la position  $\mathbf{R}$ . Cela est décrit par la fonction d'onde :

$$(\mathcal{O}_{qh_+}(W))^q \Psi_q^{(N)}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_i (Z_i - W)^q \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\frac{1}{2\ell^2} \sum_i x_i^2}\tag{4.11}$$

$$= (-1)^q \Psi_q^{(N+1)}(\mathbf{R}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)\tag{4.12}$$

En d'autres termes :

$$\mathcal{O}_{h_+}(W)^q |\Psi_q^{(N)}\rangle = \hat{\Psi}(\mathbf{R}) |\Psi_q^{(N+1)}\rangle\tag{4.13}$$

où  $\hat{\Psi}(\mathbf{R})$  est l'opérateur d'annihilation à la position  $\mathbf{R}$ . Cela signifie que ajouter  $q$  quasi-trous à la position  $\mathbf{R}$  revient à retirer un électron à la position  $\mathbf{R}$  de l'état de Laughlin  $\Psi_q^{(N+1)}$  à  $N + 1$  particules. Puisque  $\Psi_q^{(N+1)}$  est de densité uniforme dans son volume, et que  $\hat{\Psi}(\mathbf{R}) |\Psi_q^{(N+1)}\rangle$  crée un défaut de charge  $+e$ , cela implique que un quasi-trou placé dans le volume de la goutte est de charge  $e/q$ .

La charge totale du liquide de Laughlin reste  $-eN$  en présence d'un quasi-trou. Sur la figure (4.2), nous représentons la différence entre la densité de la fonction d'onde  $\mathcal{O}_{h_+}(W)\Psi_q$  (ou  $\mathcal{O}_{h_-}(W)\Psi_q$ ) avec la densité de  $\Psi_q$ . Nous voyons que le défaut de charge  $e/q$  dans le volume est accompagné d'une accumulation de charge  $-e/q$  sur un des bords de la goutte. Pour  $x_i \ll X$ ,  $|Z_i| \gg |W|$  et  $\mathcal{O}_{h_+}(W) \approx \prod_i Z_i \propto T$ , donc  $\mathcal{O}_{h_+}(W)$  décale la goutte de Laughlin d'une orbitale à gauche du quasi-trou. Tandis que pour  $x_i \gg X$ ,  $|Z_i| \ll |W|$  et  $\mathcal{O}_{h_-}(W) \approx \prod_i Z_i^{-1} \propto T^{-1}$  donc  $\mathcal{O}_{h_-}(W)$  décale la goutte de Laughlin d'une orbitale à droite du quasi-trou.

Dans le cas mieux connu du disque, un quasi-trou placé au centre de la goutte de Laughlin est décrit par la fonction d'onde :

$$\prod_i z_i \prod_{i < j} (z_i - z_j)^q e^{-\sum_i |z_i|^2/4}.\tag{4.14}$$

De façon similaire à ce qui se passe dans le cas du cylindre, le terme  $\prod_i z_i$  crée un défaut de charge  $e/q$  au centre de la goutte. De plus, l'opérateur produit par  $\prod_i z_i$  agit sur l'espace

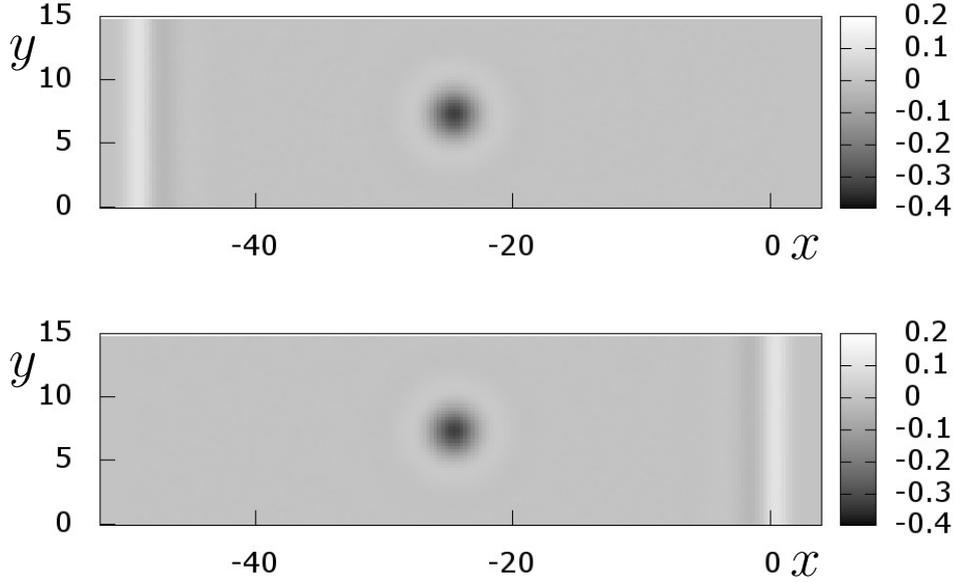


FIGURE 4.2 – Différences entre les densités de  $\mathcal{O}_{h+}(W)\Psi_q$  (en haut) et de  $\mathcal{O}_{h-}(W)\Psi_q$  (en bas) avec la densité de la fonction d'onde Laughlin  $\Psi_q$ . Ces données sont obtenues par méthode Monte-Carlo pour  $N = 40$  fermions,  $L = 15$  et  $q = 3$ .

des fonctions d'onde du disque comme l'opérateur qui incrémente le moment cinétique des orbitales d'une unité ( $m \rightarrow m + 1$ ). Par conséquent on peut dire que le défaut de charge  $e/q$  au centre de la goutte est compensé par une accumulation de charge  $-e/q$  au bord du disque.

### États de bord

Selon la position du quasi-trou,  $\mathcal{O}_{h+}(W)^q|\Psi_q^{(N)}\rangle$  peut décrire une excitation du volume ou une excitation de bord. Figure (4.3), nous présentons les profils de densité d'un quasi-trou placé dans le volume du cylindre, et d'un quasi-trou placé proche du bord gauche. Dans le premier cas, comme attendu, un défaut de densité apparaît dans le volume du fluide autour de  $\mathbf{R}$ . Dans le second cas, le quasi-trou proche du bord gauche crée une oscillation de densité sur le bord gauche. Un quasi-trou placé en  $R = (X, Y)$  décrit donc une perturbation localisée sur les bord de la goutte lorsque  $|X|$  est très grand devant la taille de la goutte. Pour  $X \rightarrow \infty$  l'excitation est localisée sur le bord droit, tandis que pour  $X \rightarrow -\infty$  elle est localisée sur le bord gauche.

On obtient le développement de Taylor de  $\mathcal{O}_{h+}(W)$  lorsque  $X \rightarrow +\infty$  et  $X \rightarrow -\infty$  d'après l'équation (4.10) :

$$\mathcal{O}_{h+}(W) = (-W)^N + e_1(-W)^{N-1} + e_2(-W)^{N-2} + \dots \quad \text{lorsque } X \rightarrow -\infty \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{h+}(W) &= e_N + e_{N-1}(-W) + e_{N-2}(-W)^2 + \dots \\ &= e_N (1 + e_{-1}(-W) + e_{-2}(-W)^2 + \dots) \quad \text{lorsque } X \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (4.16)$$

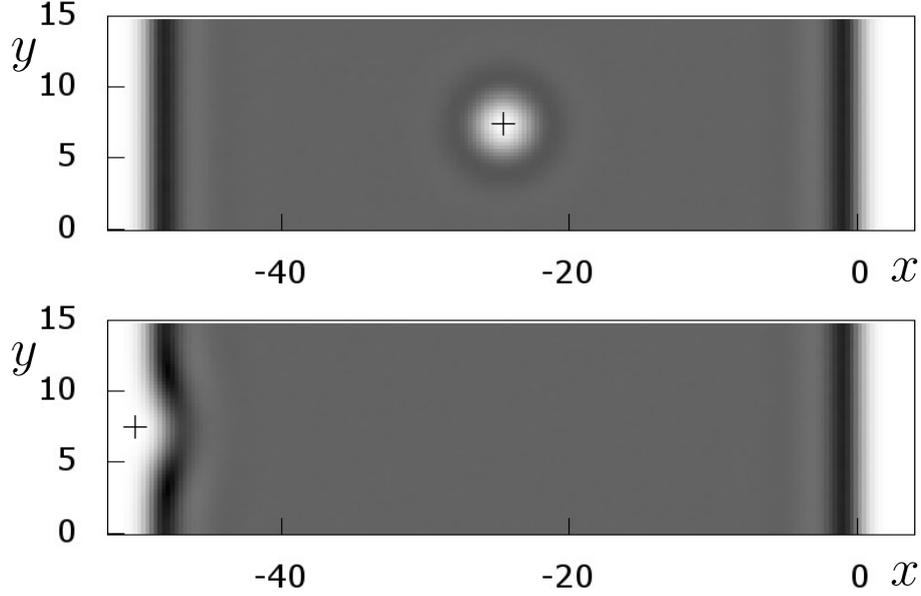


FIGURE 4.3 – Densité de  $\mathcal{O}_{qh+}(W)\Psi_3$  tracée sur une échelle de gris. En haut, le quasi-trou est placé dans le volume de  $\Psi_3$  et sa position est indiquée par une croix sur la figure. En bas, il est placé proche du bord de la goutte. Ces données sont obtenues par méthode Monte-Carlo pour  $N = 40$  et  $L = 15$ .

où on a utilisé que  $e_{N-n} = e_{Ne-n}$ . Ainsi, modulo les translation globales  $T^p \propto \prod_i Z_i^p$ , les excitations de bord de la fonction d’onde de Laughlin sont générées par les polynômes symétriques élémentaires :

$$e_i, \quad 0 < i \ll N, \quad \text{pour le bord gauche} \quad (4.17)$$

$$e_i, \quad -N \ll i < 0, \quad \text{pour le bord droit.} \quad (4.18)$$

Bien souvent dans la littérature tout état de  $\mathcal{E}_0$  est appelé état de bord, même s’il n’est pas, à proprement parler, localisé sur les bords de la goutte de Hall. Nous ferons de même dans la suite du manuscrit.

Figure (4.6 a), nous présentons un exemple de spectre obtenu par diagonalisation exacte en l’absence de potentiel de confinement pour  $N = 6$  et  $N_\phi = 26 = N_\phi(N) + 10$ . Ici, nous prenons un nombre d’orbitales  $N_\phi > N_\phi(N) = 3(N - 1) + 1$  de sorte que des excitations de bord d’énergie zéro puissent apparaître. L’espace  $\mathcal{E}_0$  est alors dégénéré et on peut vérifier que sa dégénérescence est bien donnée par  $\binom{N+N_\phi-N_\phi(N)}{N}$  (cf eq. 4.4). Plus haut en énergie, vivent d’autres états, que nous avons brièvement analysés dans la section (3.3). Notons  $\Delta = \Delta(N, L)$  le niveaux d’énergie strictement positif le plus petit. Comme nous l’avons déjà mentionné, de façon peut-être contre intuitive, cette énergie est différente du gap de Hall, et tend vers zéro à la limite thermodynamique (cf. sec. 3.3). Cependant ce “gap” ne se ferme qu’à la limite thermodynamique, et il est possible de considérer à  $N, L$  fixé une échelle d’énergie inférieure à  $\Delta$ .

## 4.2.2 Potentiel de confinement $u(x)$

Dans le cas d'un modèle de cœur dur pur, tous les états de  $\mathcal{E}_0$  ont la même énergie, ce qui correspond à un cas un peu dégénéré où il est possible de dilater notre fluide de Hall sans coût énergétique. Nous avons souhaité nous intéresser à la dynamique des états de bord, qui devient accessible si on considère en plus de l'interaction de cœur dur, un potentiel de confinement  $u(x)$ .

### Potentiel de confinement et interaction de Coulomb.

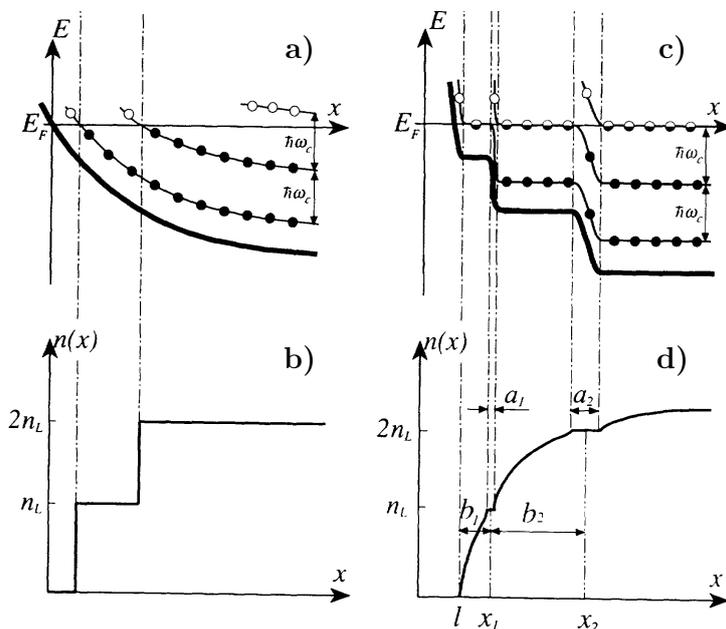


FIGURE 4.4 – Évolution des niveaux de Landau et de la densité proche du bord d'un 2DEG dans un potentiel de confinement variant doucement. En a) et b), aucun potentiel de Coulomb issu du liquide n'est pris en compte. En c) et d), un potentiel électrostatique créé par le fluide est considéré. Cette figure est issue de (Chklovskii et al. 1992).

L'ajout d'un potentiel extérieur  $u(x)$  peut rendre le problème extrêmement complexe. Dans le cas réaliste où les électrons interagissent avec la loi de Coulomb à longue portée, la compétition entre l'énergie de confinement et l'énergie d'interaction peut mener à des structures très complexes à l'approche du bord du liquide de Hall. L'étude de la stabilité des phases en fonction de la forme du potentiel de confinement est un sujet à part entière qui va au delà du sujet de ce manuscrit. Mentionnons tout de même deux phénomènes possibles.

Déjà dans le contexte de l'effet Hall entier, un potentiel de confinement variant sur une distance caractéristique bien plus grande que  $l$  fait apparaître alternativement des bandes de phases incompressibles à  $\nu = n$  et des bandes de phases compressibles (Chklovskii

et al. 1992). Sur la figure (4.4 a) est présentée schématiquement la forme que prennent les niveaux de Landau dans un potentiel variant sur une échelle caractéristique très grande devant  $\ell$ . Lorsque aucune interaction de Coulomb n'est prise en compte, de larges bandes de liquide incompressible à  $\nu = n$  sont juxtaposées (cf. fig. 4.4 b). Si une interaction de Coulomb est prise en compte (traité dans un contexte de champ moyen), le potentiel électrostatique, composé à la fois du potentiel de confinement extérieur et du potentiel créé par le fluide, prend une forme de marches d'escaliers (cf. fig. 4.4 c). Les phases incompressibles se retrouvent alors limitées à de fines bandes, et sont séparées par de larges bandes de liquide compressible (cf. fig. 4.4 d). Dans cette étude, aucun gap n'est supposé pour des remplissages fractionnaires et l'interaction de Coulomb est traitée classiquement. Cela dit, il est supposé qu'un phénomène analogue se produit pour les phases de Hall fractionnaire, et qu'elles apparaissent sous la forme de bandes étroites séparées par des phases compressibles à remplissage intermédiaire.

Un autre phénomène, connu sous le nom de “reconstruction des bords” (“edge reconstruction” en anglais), est aussi censé apparaître au bord des phases de Hall fractionnaire (Chamon & Wen 1994, Wan et al. 2003). Par un effet de compétition subtil entre énergie de confinement et énergie d'interaction de Coulomb, le liquide peut gagner en énergie à avoir une oscillation de densité à l'approche du bord. Figure (4.5), nous présentons les profils de densités de l'état fondamental sur le disque dans le cas d'une interaction de Coulomb obtenus par diagonalisations exactes (Wan et al. 2003). Ils confinent les électrons grâce au potentiel électrostatique créé par un fond neutralisant homogène situé à une distance  $d$  de l'échantillon. Plus la distance  $d$  est grande, plus le gradient du potentiel de confinement à proximité du bord est faible. On voit qu'un puits dans la densité se creuse du liquide proche du bord, et que la taille de trou est d'autant plus grande que le potentiel de confinement est doux.

Dans notre cas, nous avons fait l'approximation d'une interaction à courte portée de type cœur dur, donc la physique est a priori différente. Cela dit, comme nous avons vu dans quelques diagonalisations numériques, un potentiel de confinement de grande amplitude, de forme parabolique par exemple, peut créer un état fondamental de densité fortement in-homogène, et compliquer énormément notre étude. Nous avons cherché à nous prémunir de telles phases, et c'est pourquoi nous avons utilisé un potentiel de confinement infinitésimal.

### Potentiel infinitésimal

Nous avons donc étudié un cas simplifié où le fluide de Hall reste à un remplissage  $\nu = 1/3$  jusqu'à son bord. Ceci est possible en choisissant simplement un potentiel de confinement de très faible amplitude devant  $\Delta$ . De cette façon,  $U = P_{LLL} \sum_i u(x_i) P_{LLL}$  lève la dégénérescence de  $\mathcal{E}_0$  et, à l'ordre zéro dans la perturbation  $U$ , les états propres de  $\mathcal{H}_{int} + U$  d'énergie proche de zéro sont les états propres de la restriction de  $U$  à l'espace  $\mathcal{E}_0$ . Pour un potentiel  $u(x)$ , l'état fondamental est alors un état de  $\mathcal{E}_0$ , état propre de  $\hat{M}$ , minimisant l'énergie  $\int d\mathbf{r} u(x) \rho(\mathbf{r})$ . Dans le cas où  $u(x)$  est un potentiel de confinement (convexe), l'état fondamental n'est autre que l'état de Laughlin (2.154) modulo une translation selon

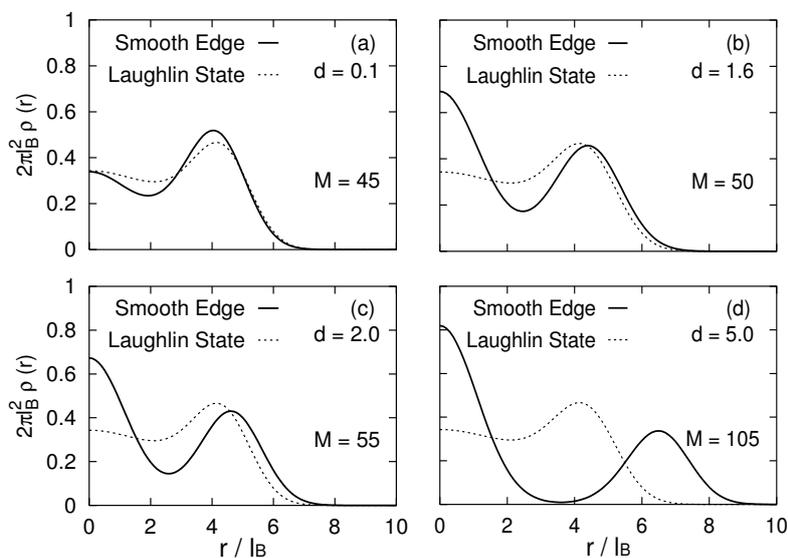


FIGURE 4.5 – Densités électroniques de l'état fondamental d'un système avec interaction de Coulomb et potentiel de confinement dans la géométrie du disque. Les profils de densités sont comparés avec celui de l'état de Laughlin. Plus  $d$  est grand, plus le potentiel de confinement  $u(r)$  varie lentement avec  $r$ . Cette figure est issue de l'article (Wan et al. 2003).

$x$  par  $T^p$ . Ce résultat est assez intuitif puisque  $\Psi_3$  est le plus dense des états propres de  $\hat{M}$  appartenant à  $\mathcal{E}_0$ , et nous l'avons vérifié sur plusieurs diagonalisations numérique. Notons que le potentiel de confinement est considéré petit tant que l'énergie fondamentale est très faible devant  $\Delta$ . Cela correspond, pour un potentiel parabolique  $U = \beta \sum_m m^2 \hat{n}_m$  (cf. sec. 2.3.2), à la condition :

$$\beta \ll \frac{4}{3} \frac{\Delta}{N^3}. \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Spectre des états de bord dans la géométrie cylindrique

Sur la figure (4.6 b) nous présentons un spectre type du modèle de cœur dur dans un faible potentiel de confinement parabolique  $\beta \sum_m m^2 \hat{n}_m$  (cf. sec. 2.3.2). Au bas du spectre, i.e. pour des énergies plus faibles que  $\Delta$ , se trouve le spectre sans gap des états de bord de Laughlin à  $\nu = 1/3$ . Ce spectre, que nous traçons dans un grossissement figure (4.6 c), sera l'objet de notre étude dans la suite de ce chapitre.

Ce spectre est délimité en bas par une série d'arches concaves placées sur une enveloppe parabolique. Sur la figure (4.7), nous traçons un gros plan de ces arches sur lesquelles nous plaçons une série d'annotations. Tout d'abord, comme nous l'avons déjà mentionné, l'état fondamental est décrit par la fonction d'onde de Laughlin à  $\nu = 1/3$  translatée selon  $x$  de façon à minimiser l'énergie moyenne. Il faut pour cela que l'abscisse de son centre de masse coïncide avec le fond du potentiel  $u(x) \propto x^2$ , c'est à dire zéro. Le fondamental

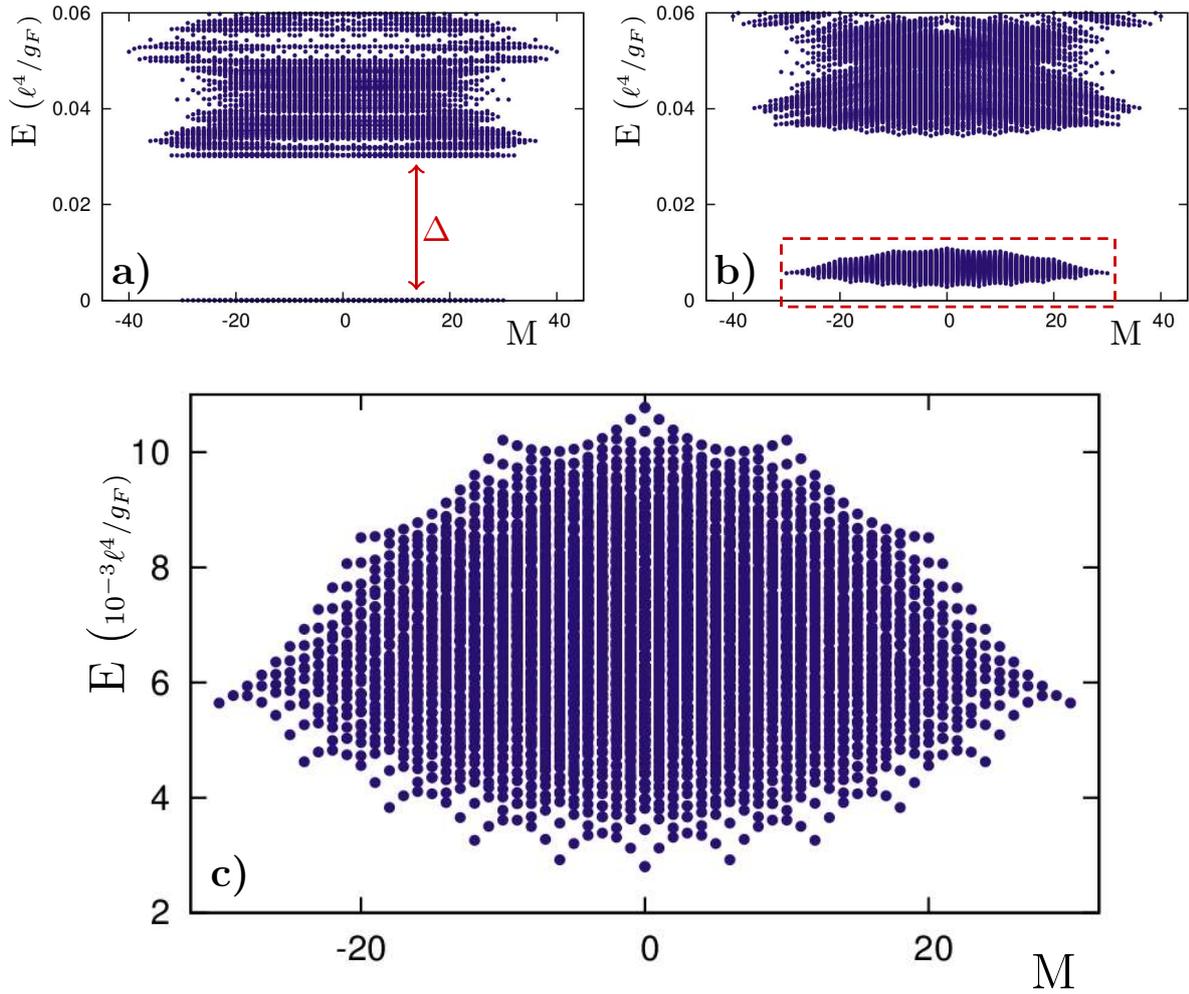


FIGURE 4.6 – Spectre du modèle de cœur dur dans la géométrie du cylindre pour  $N = 6$  particules et  $N_\phi = 26 = N_\phi(N) + 10$  orbitales et  $\lambda = 0.8$  ( $L \approx 10$ ). En a), aucun potentiel de confinement n'est ajouté. En b) et c) un potentiel parabolique confinant avec  $\beta \ll \Delta/N^3$  est appliqué.

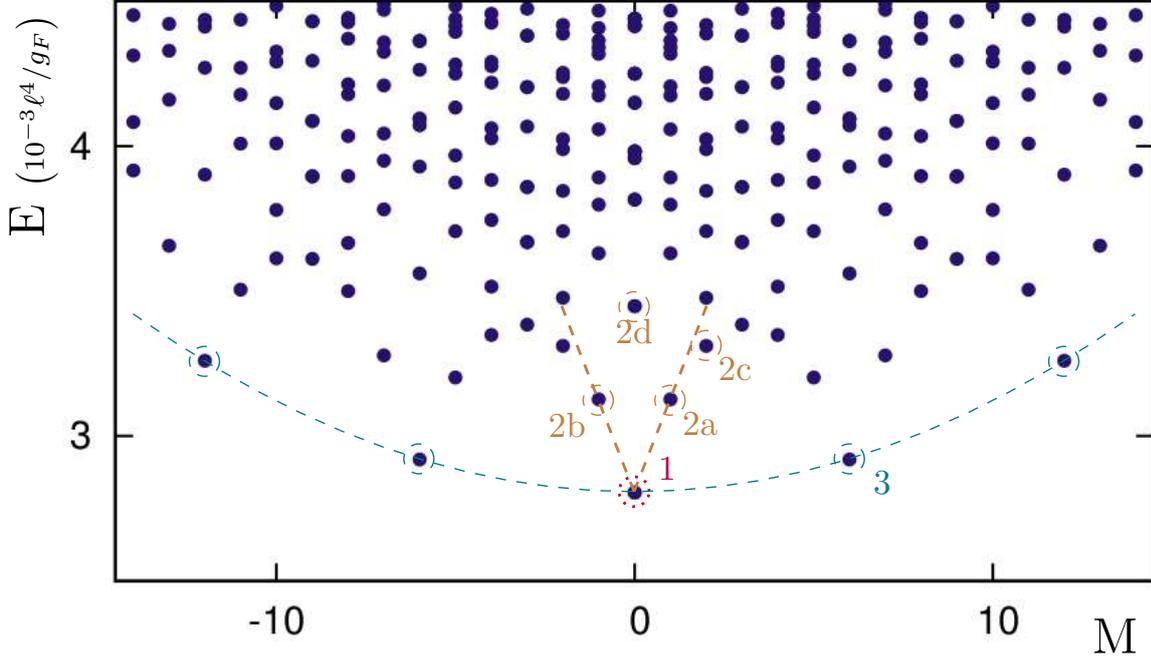


FIGURE 4.7 – Spectre des bords pour  $N = 6$  particules et  $\lambda = 0.8$  (i.e.  $L \approx 10$ ). En 1 est entouré l'état de Laughlin. En 2a-d sont indiqués les excitations localisées sur les bord du liquide (voir texte pour l'expression des fonctions d'onde). En 3 sont indiqués les translations de l'état de Laughlin  $T^p\Psi_q$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , correspondant aussi à un transfert de  $p$  quasi-particules de charge  $e/3$  d'un bord à l'autre du cylindre. Ce sont les états fondamentaux des secteurs d'impulsion  $M = pN$  avec  $N = 6$  ici.

s'écrit donc :

$$\Psi_q \propto \prod_i Z_i^{-\frac{3}{2}(N-1)} \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^q e^{-\sum_i x_i^2 / (2\ell^2)}. \quad (4.20)$$

Au dessus de ce fondamental, le spectre prend la forme d'un  $V$ , indiqué en marron sur la figure (4.7). Les états à l'intérieur de ce  $V$ , pour  $|M| \ll N$ , sont des excitations localisées sur les bords de l'état de Laughlin, générés par les polynômes symétriques élémentaires  $e_i$ , avec  $0 < |i| \ll N$ . L'état numéroté 2a est par exemple l'excitation de bord à  $M = 1$  de plus basse énergie, et peut a priori être la superposition des états  $e_1\Psi_q, e_{-1}e_2\Psi_q, e_{-1}e_1^2\Psi_q$ , etc ... Cela dit, l'état le plus dense parmi ceux-ci est  $e_1\Psi_q$ , et on peut vérifier grâce à nos diagonalisations numériques que c'est bien l'état indiqué en 2a. L'état 2b est de la même façon égal à  $e_{-1}\Psi_q$  et décrit une excitation localisée sur le bord gauche du cylindre. L'état 2c est, lui, une combinaison linéaire entre l'état  $e_2\Psi_q$  et  $e_1^2\Psi_q$ , et son complémentaire orthogonal est situé au dessus. Enfin, l'état 2d décrit à la fois une excitation du bord gauche et du bord droit, et est donné par la fonction d'onde  $e_{-1}e_1\Psi_q$ .

Enfin, une série d'états peuvent être obtenus par simple translation de l'état de Laughlin fondamental  $T^p\Psi_q$ . En effet, puisque le potentiel extérieur est parabolique, comme dé-

### 4.3 Liquide de Luttinger chiraux aux bords des phases $\nu = 1/q$

---

montré dans la section (2.3.2), les états  $T^p\Psi_q$  sont des états propres de  $\mathcal{H}_{int} + U$  d'énergie

$$E = E_0 + \beta p^2 N, \quad (4.21)$$

où  $E_0$  est l'énergie fondamentale. Ces états apparaissent dans les secteurs d'impulsion :

$$M = M_0 + pN \quad (4.22)$$

En toute rigueur, notre démonstration n'est valable que pour un système infini, sans limites  $G$  et  $D$ . Cela dit, tant que  $T^p\Psi_q$  est compris dans les limites  $G$  et  $D$ , cet état reste extrêmement proche de l'état correspondant obtenu par diagonalisation numérique exacte. Ces états se situent aux extrémités des arches concaves, et sont indiqués par des cercles pointillés bleus sur la figure (4.7). On peut donner à ces états une interprétation en terme d'excitations de bord. En effet, plaçons-nous à la limite  $N \rightarrow +\infty$ , et prenons comme référence l'état  $\Psi_q$  à  $N_0$  particules. Puisque le nombre d'occupations moyen dans le volume de Laughlin est  $n_m^{Bulk} = 1/3$ , et que l'opérateur  $T$  décale rigidement la fonction d'onde  $\Psi_q$  d'une orbitale vers la droite, on peut considérer que l'état  $T\Psi_q$  dispose d'une charge  $-e/3$  sur son bord droit, et d'une charge  $e/3$  sur son bord gauche. Ainsi,  $T^p$  transfère des quasi-particules de charge  $e/3$  d'un bord à l'autre de la goutte de Hall.

Le bas de ce spectre, muni de cette structure formée d'arches tombant tous les  $\Delta M = N$ , est caractéristique d'un liquide de Luttinger de taille finie comme nous allons le voir ci-après. Ceci est en parfaite adéquation avec la théorie développée par Wen dans le début des années 90. En effet, Wen y prédit que le bord d'un liquide de Hall à  $\nu = 1/q$  est décrit par un liquide de Luttinger chiral. C'est la combinaison des excitations sur les bords droit et gauche de la goutte qui forme ici un liquide de Luttinger non-chiral.

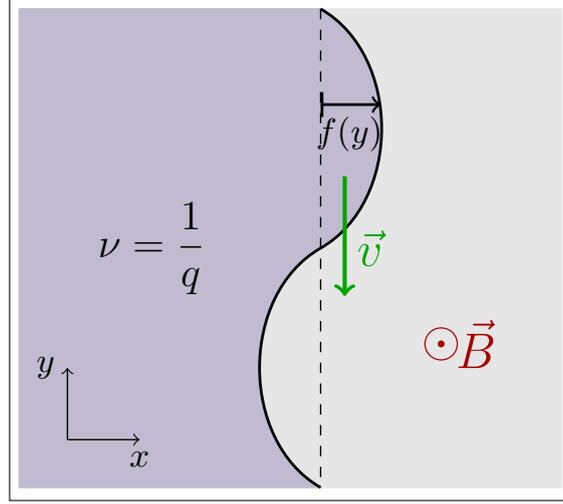
## 4.3 Liquide de Luttinger chiraux aux bords des phases $\nu = 1/q$

### 4.3.1 Théorie effective des états de bord à $\nu = 1/q$

Nous nous plaçons donc dans le cas idéal où le liquide de Hall est incompressible jusqu'à son bord. Les seules excitations sans gap sont alors localisées sur le bord et forment une phase quasi unidimensionnelle de largeur de l'ordre de  $\ell$ . A dimension supérieure à 2, les liquides électroniques sont généralement très bien décrits pas la théorie des liquides de Fermi développée par Landau. Ce n'est pas le cas des système d'électrons à une dimension qui forment, eux, des états connus sous le nom de liquides de Tomonaga-Luttinger. Les électrons au bord des phases de Hall fractionnaire forment eux des phases à une dimension, dont les excitations se déplacent en sens unique donné par la vitesse de dérive des électrons  $\mathbf{E} \wedge B/B^2$ , appelés liquide de Tomonaga-Luttinger chiraux.

Nous présentons ici en quelques lignes cette théorie développée principalement par X.G. Wen dans le début des années 90. Initialement, Wen présenta des arguments basés sur l'invariance de jauge de l'action effective Wen (1991). Nous présentons plutôt ici un

raisonnement plus intuitif construit à partir des équations hydrodynamiques d'un liquide incompressible [Wen \(1992\)](#).



Cherchons dans un premier temps les équations hydrodynamiques décrivant les oscillations du bord d'un liquide de Hall idéalisé, de densité homogène  $n_0 = \nu/(2\pi\ell^2)$ . Supposons que le fluide occupe l'espace  $x < f(y)$ , où  $f(y)$  est le déplacement du bord lors d'une déformation, et notons  $\rho(y) = n_0 f(y)$  la densité linéique d'une telle fluctuation. Supposons que l'oscillation est suffisamment faible pour linéariser le potentiel de confinement aux environs du bord  $u(x) = x \frac{du}{dx}$ , comme si un champ électrique homogène  $E_x = \frac{1}{e} \frac{du}{dx}$  y était appliqué. Le fluide se trouve dans un état de Hall où les électrons se déplacent collectivement à une vitesse de dérive  $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{E} \wedge \mathbf{B}}{B^2} = -v \hat{y}$  avec  $v = \frac{1}{eB} \frac{du}{dx}$ . L'équation de continuité  $\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \frac{\partial -vn(\mathbf{r}, t)}{\partial y} = 0$  implique alors, après intégration selon  $x$ , l'équation d'onde chirale pour la densité :

$$\frac{\partial \rho(y, t)}{\partial t} - v \frac{\partial \rho(y, t)}{\partial y} = 0. \quad (4.23)$$

Cette dynamique se traduit sur les modes de Fourier

$$\rho_k = \int_0^L dy \rho(y) e^{-iky} \quad (4.24)$$

par

$$\dot{\rho}_k = ivk \rho_k \quad (4.25)$$

D'un autre côté, l'énergie potentielle totale d'une déformation est donnée par :

$$E = \int_0^L dy \int dx (n(\mathbf{r}, t) - n_0(\mathbf{r}, t)) u(x) = \frac{1}{2n_0} \frac{du}{dx} \int dy \rho(y, t)^2 \quad (4.26)$$

$$= \frac{\pi \hbar v}{\nu L} \left( N^2 + 2 \sum_{k>0} \rho_k \rho_{-k} \right) \quad (4.27)$$

où  $N = \rho_0$  est le nombre d'électrons accumulés sur le bord du système.

L'Hamiltonien de ce système est donné par l'énergie potentielle  $E$  à condition d'identifier les variables canoniques  $(q_k, p_k)$  afin que l'équation du mouvement (4.25) soit équivalente aux équations de Hamilton :

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad , \quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}. \quad (4.28)$$

Ceci peut être réalisé en associant pour  $k > 0$ ,  $q_k = \rho_k$  et  $p_k = \frac{-i\hbar}{\nu L k} \rho_{-k}$ . On peut alors quantifier la théorie en utilisant les règles de commutation canoniques

$$[q_k, p_{k'}] = i\hbar \delta_{k,k'} \quad (4.29)$$

qui impliquent pour les modes de Fourier de la densité :

$$[\rho_k, \rho_{k'}] = -\frac{\nu k L}{2\pi} \delta_{k,-k'}. \quad (4.30)$$

Ces relations de commutation sont connues sous le nom d'algèbre de Kac-Moody. On peut alors former des opérateurs

$$b_k = \left( \frac{2\pi}{\nu L k} \right)^{1/2} \rho_{-k} \quad , \quad b_k^\dagger = \left( \frac{2\pi}{\nu L k} \right)^{1/2} \rho_k \quad (4.31)$$

qui obéissent alors aux règles de commutation bosoniques

$$[b_k, b_{k'}] = [b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \quad , \quad [b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (4.32)$$

de sorte que le Hamiltonien s'écrive :

$$\mathcal{H}_{\chi LL} = \frac{\pi \hbar v}{\nu L} \hat{N}^2 + \hbar v \sum_{k>0} k b_k^\dagger b_k. \quad (4.33)$$

Sous cette forme, l'état fondamental est donc un vide bosonique sur lequel s'annulent les opérateurs  $b_k$  et les états excités forment un gaz de bosons indépendants. L'Hamiltonien (4.33) est celui d'un boson chiral sans masse, et forme une théorie conforme bien connue de charge centrale  $c = 1$ .

Afin de compléter la théorie et pouvoir calculer les fonctions de corrélation le long du bord du fluide, il est nécessaire d'exprimer les opérateurs de création et d'annihilation fermioniques, projetés sur l'espace des états de bord, en fonction des opérateurs de densité  $\rho_k$ . En s'inspirant de la méthode de bosonisation développée pour étudier les systèmes électroniques à une dimension conventionnels, Wen propose que l'opérateur d'annihilation projeté s'écrive

$$\Psi(y) \propto e^{ik_F y + \phi(y)} \quad (4.34)$$

où  $k_F$  est l'impulsion de l'orbitale située au bord de la goutte, et où

$$\phi(y) = i \frac{2\pi}{\nu L} y \hat{N} + \frac{2\pi}{\nu L} \sum_k \frac{e^{-\alpha k/2}}{k} (e^{iky} \rho_k - e^{-iky} \rho_{-k}). \quad (4.35)$$

où  $\alpha$  est nombre infiniment petit introduisant un "cut-off" en énergie. Dans le cas où  $\nu = 1/q$  avec  $q$  impair, on peut vérifier qu'un tel opérateur vérifie bien les relation d'anticommutation  $\{\Psi(y), \Psi(y')\} = 0$  ainsi que les relations de commutation voulues avec l'opérateur densité :  $[\rho_k, \Psi(y)] = -e^{-ikx} \Psi(y)$ .

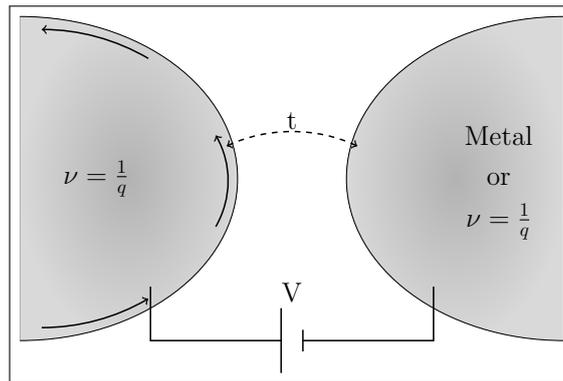
Le mode zéro du champ  $\phi$  est là pour rendre compte de la modification du niveau de Fermi lorsque des particules sont ajoutées au bord. Il se trouve que pour que l'opérateur  $\Psi$  soit L-périodique, il n'est pas nécessaire que les valeurs propres de  $\hat{N}$ , le nombre de charges électroniques ajoutées au bord, soient des nombres entiers (Geller et al. 1996). Pour  $\nu = 1/q$ , ces valeurs propres prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{Z}/q$ , c'est à dire que  $N = N_q/q$  où  $N_q$  est le nombre de quasi-particules de charges  $-e/q$  ajoutées au bord.

Il est alors possible, grâce aux outils usuels de bosonization, de calculer diverses fonctions de corrélation sur le bord. Un résultat essentiel est alors que le propagateur le long du bord décroît en loi de puissance selon

$$G(y, t) = \langle 0 | T \Psi(y, t) \Psi(0, 0) | 0 \rangle \quad (4.36)$$

$$\propto e^{ik_F x} \left( \frac{\theta(t)}{(x - vt + i\alpha)^{1/\nu}} + \frac{\theta(-t)}{(x - vt - i\alpha)^{1/\nu}} \right) \quad (4.37)$$

Notons que pour un bord de Hall entier à  $\nu = 1$ , on retrouve le propagateur des fermions libres, et la dynamique est de type liquide de Fermi, bien qu'elle soit chirale. Pour  $\nu = 1/q$  avec  $q > 1$ , ce propagateur décroît en loi de puissance, ce qui est la caractéristique principale du comportement d'un liquide de Luttinger.



Une conséquence fondamentale de la théorie de Wen et de l'exposant non trivial du propagateur se reflète dans les caractéristiques tunnel des bord des phases de Hall. Il est possible de placer le bord d'une phase de Hall à  $\nu = 1/q$  à proximité d'un métal ou d'une phase similaire à  $\nu = 1/q$ , de façon à créer un couplage tunnel entre les deux côtés. A

partir de l'expression du propagateur (4.36) on montre que le courant tunnel est donné par

$$I \propto V^q \quad (4.38)$$

dans le cas d'une jonction FQH-Metal et

$$I \propto V^{2q-1} \quad (4.39)$$

dans le cas d'une jonction FQH-FQH.

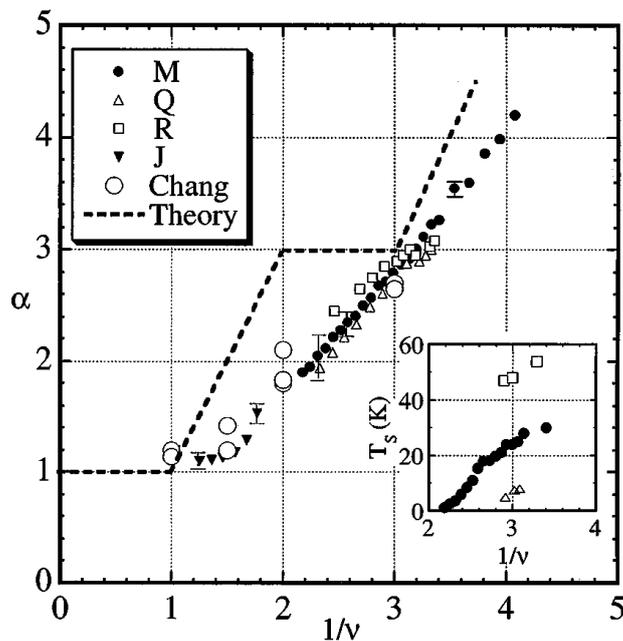


FIGURE 4.8 – Mesure de l'exposant  $\alpha$  présent dans la caractéristique tunnel  $I = V^\alpha$  en fonction de  $1/\nu$ . Figure issue de [Grayson et al. \(1998\)](#).

Il est possible de réaliser expérimentalement de telles configurations, en mesurant par exemple le courant tunnel au travers d'un contact ponctuel quantique séparant en deux un liquide à  $\nu = 1/q$ . Nous présentons figure (4.8) une série de mesures de l'exposant tunnel  $\alpha$  définies par  $I = V^\alpha$ . Ces mesures sont effectuées dans le cas d'une géométrie Metal-FQH créée au moyen d'un échantillon *GaAs - AlGaAs* dont un des bords a été fendu puis connecté à un métal au travers d'une barrière tunnel ([Grayson et al. 1998](#)). Les auteurs y mesurent une caractéristique tunnel de la forme  $I = V^\alpha$  sur une très large plage de valeurs, ce qui reflète le comportement caractéristique du liquide de Luttinger. Pour  $\nu = 1/3$ , les auteurs mesurent un exposant  $\alpha$  proche de 2.7, au lieu de l'exposant théorique égal à 3. Il semblerait en fait qu'un exposant un peu inférieur à 3 soit systématiquement mesuré expérimentalement, et que cet exposant dépende du désordre de l'échantillon utilisé. Or, d'après la théorie de Wen, l'exposant tunnel devrait avoir un caractère universel, au sens où il ne devrait dépendre ni de la forme des interactions, ni du désordre, tant que

la phase  $\nu = 1/3$  est stabilisée. A titre de comparaison, le plateau dans la résistance de Hall à  $\nu = 1/3$  peut être mesuré environ égal à  $h3/e^2$  à plus de  $10^{-5}$  près dans les meilleurs échantillons. La question du caractère universel ou non de l'exposant  $\alpha$  est en débat aujourd'hui (Jolad & Jain 2009, Mandal & Jain 2001), et le problème de sa mesure expérimentale imprécise pourrait par exemple provenir de la reconstruction du bord (Wan et al. 2003). A des remplissages  $\nu > 1/3$ , les mesures de la figure (4.8) ne sont pas en accord avec les théories existantes, et la compréhension de la physique des bords des états hiérarchiques, par exemple à  $\nu = 2/5$ , reste un problème largement ouvert.

### 4.3.2 Vérification microscopique dans la géométrie du disque

Plusieurs éléments provenant de l'approche microscopique de l'effet Hall sont en accord avec la théorie macroscopique de Wen.

Dans la géométrie du disque, nous avons vu que, dans le cas d'une interaction de cœur dur, les états de bord sont obtenus par multiplication de la fonction d'onde de Laughlin par les polynômes symétriques (cf. eq. 2.101). Autrement dit, une base des états de bord peut être obtenue par application des polynômes symétriques élémentaires  $e_n$ , avec  $n > 1$ , sur la fonction d'onde de Laughlin. Si on note  $M(N) = qN(N-1)/2$  le moment cinétique total de la fonction d'onde de Laughlin (en unités de  $-\hbar$ ), dénombrons la dimension de l'espace des états de bord à  $M = M(N) + \Delta M$ . Aucun état de bord n'existe à  $\Delta M < 0$  comme l'impose le caractère incompressible du liquide de Laughlin. À  $\Delta M = 0$  (respectivement  $\Delta M = 1$ ), l'espace des états de bord est de dimension 1, représenté par la fonction d'onde de Laughlin  $\Psi_q$  (respectivement par la fonction d'onde  $e_1\Psi_q$ ). Pour  $\Delta M = 2$ , l'espace est de dimension 2 et généré par les états  $e_2\Psi_q$  et  $e_1^2\Psi_q$ . À un  $\Delta M$  général, l'espace des états est généré par les monômes symétriques  $m_\alpha = \sum_{P \in \mathcal{S}_N} z_{P_1}^{\alpha_1} z_{P_2}^{\alpha_2} \dots z_{P_N}^{\alpha_N}$  de degré homogène égal à  $\Delta M$  (i.e.  $\sum_i \alpha_i = \Delta M$ ). Tant que  $\Delta M \leq N$ , la dimension de l'espace des états de bord sur le disque, est donc donnée par le nombre de partitions de l'entier  $\Delta M$ . Nous notons dans le tableau 4.1 la dégénérescence de ces états de bord pour les premières valeurs du moment angulaire.

$\Delta M$	0	1	2	3	4	5	6
Dim.	1	1	2	3	5	7	11

TABLE 4.1 – Dimension de l'espace des états de bord sur le disque en fonction du moment cinétique  $M = M(N) + \Delta M$ .

Ces dégénérescences sont en accord avec la description de Wen des bords par un champ bosonique chiral. En effet, si  $L$  est le périmètre de la goutte de Laughlin,  $2\pi\Delta M/L$  représente l'impulsion des états le long du bord. Or d'après la théorie macroscopique de Wen, les états de bord sont générés par les opérateurs  $\rho_k$  d'impulsion  $k = 2\pi\Delta M/L > 0$ . On peut voir facilement que l'on retrouve alors les mêmes dégénérescences que celles des polynômes symétriques. Par exemple, dans le secteur  $\Delta M = 0$ , seul le vide bosonique  $|0\rangle$ ,

identifié à l'état de Laughlin  $\Psi_q$ , est présent. Pour  $\Delta M = 1$ , l'excitation  $\rho_{\frac{2\pi}{L}}|0\rangle$  est le seul représentant, tandis que l'espace  $\Delta M = 2$  est généré par les états  $\rho_{\frac{2\pi}{L}2}|0\rangle$  et  $\rho_{\frac{2\pi}{L}}^2|0\rangle$ . En calculant le produit scalaire dans l'espace des états de bord, Wen a montré (Wen 1992) plus précisément que l'on pouvait identifier à la limite thermodynamique :

$$s_n = (2\pi)^{-n} L^{n+\frac{1}{2}} \rho_k \quad (4.40)$$

où  $k = 2\pi n/L$  et où les  $s_n = \sum_i z_i^n$ .

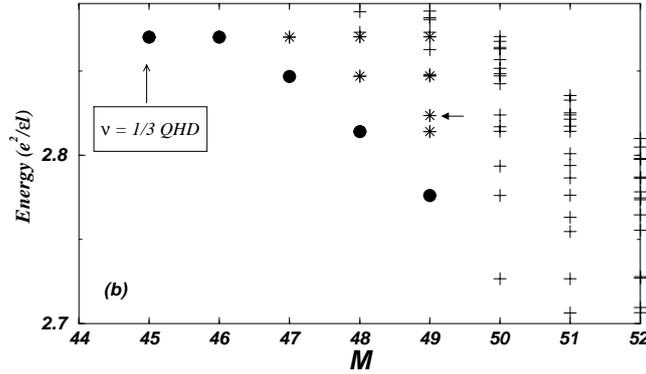


FIGURE 4.9 – Spectre dans la géométrie du disque pour  $N = 6$  électrons en interaction de Coulomb. Quelques états de bord de faible impulsion sont indiqués par des points et des astérisques. Leurs dégénérescences sont compatibles avec le boson chiral (cf. tab. 4.1). Figure issue de Palacios & MacDonald (1996).

Palacios & MacDonald (1996) ont montré que l'on retrouve ces dégénérescences dans le spectre d'électrons en interaction de Coulomb sur le disque. Nous présentons figure 4.9 le spectre qu'ils obtiennent pour six électrons dans la géométrie du disque. On peut y voir une bande d'états commençant à partir de l'état de densité  $\nu = 1/3$ , et qui se prolonge à moment cinétique supérieur avec une dégénérescence  $1, 1, 2, \dots$ , avant que les états du gappés du volume viennent se mélanger au spectre à cause des effets de taille finie. Ce spectre est en fait obtenu sans potentiel de confinement, ce qui signifie que l'état de densité  $\nu = 1/3$  n'est pas l'état fondamental global, mais seulement l'état fondamental à  $M = M(N) = qN(N-1)/2$ . Dans un système avec potentiel de confinement il peut être beaucoup plus difficile de distinguer ces dégénérescences (Wan et al. 2003, Jolad et al. 2010).

D'un autre côté, l'expression de Wen (eq. 4.35) qui exprime un champ fermionique en fonction des opérateurs densité est moins bien établie. Dans le cas de l'interaction de cœur dur, Palacios & MacDonald (1996) ont montré que cette expression était cohérente avec les résultats numériques. Par contre, dans un système plus réaliste, avec interaction de Coulomb et potentiel de confinement, il semblerait que la formule (4.35) soit plus discutable (Jolad et al. 2007, Jolad & Jain 2009).

L'exposant du propagateur (eq. 4.36) est aussi une quantité essentielle puisqu'elle peut être mesurée dans la caractéristique tunnel. Grâce à une analogie avec la physique des

plasmas classique, Wen (1992) a montré que le propagateur à temps égaux le long du bord de l'état de Laughlin  $\Psi_q$  décroissait en  $G(y, t = 0) \propto 1/y^q$ , confirmant partiellement l'expression (eq. 4.36). Cet exposant est par contre, dans le cas d'interactions non idéales, difficile à estimer numériquement puisque sa mesure nécessite des systèmes de très grande taille. Jolad et al. (2010) ont cependant mesuré cet exposant, dans un modèle avec interaction de Coulomb, mais après simplification drastique de l'espace de Hilbert, et ont trouvé un exposant très proche de  $q$ , la valeur théorique. Notons aussi l'article récent de Varjas et al. (2013), où les auteurs ont calculé cet exposant dans le cas d'une interaction de courte portée non triviale, grâce à une méthode DRMG développée récemment (Zaletel & Mong 2012). Les auteurs y mesurent, une fois encore, un exposant extrêmement proche de sa valeur théorique.

## 4.4 Liquide de Luttinger aux bords d'une bande de Hall fractionnaire

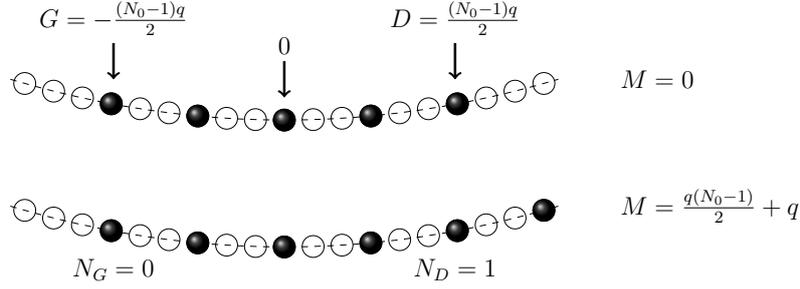
### 4.4.1 Théorie effective des excitations de bord.

Revenons à notre configuration en bandes du liquide de Hall fractionnaire. Sur chacun des bords se propagent les modes phonons décrits dans la section (4.3.1). On peut supposer que si la distance entre les deux bords est suffisamment grande devant la longueur de corrélation du volume, aucun couplage s'effectue entre les deux modes bosoniques. Dans ce cas, le Hamiltonien effectif est la somme des Hamiltoniens décrivant les excitations de chacun des bords (cf. eq. 4.33). Puisque notre système dispose de la symétrie  $x \leftrightarrow -x$ , la vitesse de chacun des modes est la même en norme sur les bords gauche et droit, mais de sens opposés. Plus précisément, d'après l'approche hydrodynamique de la section (4.3.1), la vitesse de propagation du mode bosonique est donnée par la dérivée du potentiel de confinement dans la direction transverse au bord :  $\mathbf{v} = -\frac{1}{eB} \frac{du}{dx} \hat{\mathbf{y}}$ . Cette vitesse est en général renormalisée par les interactions, mais dans le cas d'interactions de cœur dur, avec potentiel de confinement infinitésimal, nous verrons qu'aucune renormalisation ne se produit. On s'attend donc à un Hamiltonien effectif de basse énergie de la forme :

$$\mathcal{H}_{edges} = \frac{\pi \hbar v}{\nu L} (N_G^2 + N_D^2) + \hbar v \sum_{k \neq 0} |k| b_k^\dagger b_k. \quad (4.41)$$

où  $N_G$  (resp.  $N_D$ ) représente le nombre charges électroniques sur le bord gauche (resp. droit).

Exprimons aussi l'impulsion totale dans une telle représentation. Pour cela, il est utile de représenter l'état de Laughlin par sa configuration racine comme représenté figure ci dessus, i.e. par l'état Tao-Thouless qui lui est adiabatiquement connecté (cf. sec. 3.1). Partons de l'état fondamental à  $N_0$  particules, compris entre les orbitales  $L = -q(N_0 - 1)/2$  et  $D = q(N_0 - 1)/2$ . Un mode bosonique  $n_k$  porte simplement une impulsion  $k$ . De plus, rajouter  $N_D$  électrons sur le bord droit ajoute une impulsion  $\Delta M = N_D q(N_0 -$



$1)/2 + N_D(N_D + 1)q/2$ . De même, rajouter  $N_G$  électrons sur le bord gauche ajoute une impulsion  $\Delta M = -N_G q(N_0 - 1)/2 - N_G(N_G + 1)q/2$ . L'impulsion totale est donc donnée par l'opérateur :

$$M = \frac{L}{2\pi} \sum_{k \neq 0} k n_k + (N_D - N_G) \frac{q(N_0 - 1)}{2} + (N_D(N_D + 1) - N_G(N_G + 1)) \frac{q}{2} \quad (4.42)$$

$$= \frac{L}{2\pi} \sum_{k \neq 0} k n_k + J_e(N_0 + N) \frac{q}{2} \quad (4.43)$$

où nous sommes passés aux combinaisons symétriques et antisymétriques des charges localisées sur le bord :

$$N = N_D + N_G \quad , \quad J_e = N_D - N_G. \quad (4.44)$$

Pour l'instant nous n'avons pas mentionné quelles étaient les valeurs propres des opérateurs de charge sur les bords :  $(N_D, N_G)$  ou  $(N, J_e)$ . Dans la section 4.3.1, nous avons vu que  $N_D$  pouvait a priori avoir des valeurs propres rationnelles de sorte que  $N_D = N_{qD}/q$ , où  $N_{qD} \in \mathbb{Z}$  représente le nombre de charges  $-e/q$  accumulées sur le bord droit. De même pour  $N_G = N_{qG}/q$  avec  $N_{qG} \in \mathbb{Z}$ . Cela dit,  $N_e + N$  est le nombre total de charges de notre liquide électronique, et est donc restreint à des valeurs entières. Notons alors

$$J_q = qJ_e = N_{qD} - N_{qG} \quad (4.45)$$

le déséquilibre de charges  $-e/q$  entre les deux bords.  $J_q$  obéit à une règle de sélection telle que si  $q$  est pair,  $J_q$  prend des valeurs paires uniquement, mais si  $q$  est impair,  $J_q$  et  $N$  sont de même parité. Cela peut être résumé sous la forme :

$$(-1)^{J_q} = (-1)^{qN} \quad (4.46)$$

Finalement, on peut réécrire le Hamiltonien 4.41 avec les nombres quantiques  $N$  et  $J_q$  de sorte que :

$$\mathcal{H}_{edges} = \hbar v \sum_{k \neq 0} |k| b_k^\dagger b_k + \frac{\pi \hbar v}{2L} \left( qN^2 + \frac{1}{q} J_q^2 \right), \quad (4.47)$$

$$M = \frac{L}{2\pi} \sum_{k \neq 0} k b_k^\dagger b_k + J_q(N_0 + N)/2. \quad (4.48)$$

Mis sous cette forme, on reconnaît le Hamiltonien d'un liquide de Luttinger de taille finie écrit avec les modes zéro par [Haldane \(1981\)](#)

$$\mathcal{H}_{LL} = \hbar v \sum_{k \neq 0} |k| b_k^\dagger b_k + \frac{\pi \hbar}{2L} (v_N N^2 + v_J J^2), \quad (4.49)$$

$$P = \sum_{k \neq 0} k b_k^\dagger b_k + \left( k_F + \frac{\pi N}{L} \right) J, \quad (4.50)$$

où  $v, v_J$  et  $v_N$  sont respectivement les vitesses du son, de courant et de charge, et où  $k_F = \pi N_0/L$ . D'après la théorie de Haldane, ces vitesses sont liées par les relations

$$v_J = gv \quad (4.51)$$

$$v_N = v/g \quad (4.52)$$

où  $g$  est le dénommé "paramètre de Luttinger", qui détermine la loi de puissance caractérisant le comportement asymptotique des fonctions de corrélation. En comparant les modes zéros des deux modèles, nous voyons que dans le cas de l'effet Hall à  $\nu = 1/q$ , le paramètre de Luttinger est donné par :

$$\boxed{g = 1/q} \quad (4.53)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous vérifions tout d'abord que le bas du spectre obtenu dans la géométrie du cylindre, et les dégénérescences de chaque niveau énergétique, sont bien cohérents avec l'Hamiltonien effectif (eq. 4.47). Puis, nous mesurons au moyen de diagonalisations exactes ce paramètre de Luttinger, pour les phases de Hall fractionnaire  $\nu = 1/q$ , et vérifions précisément qu'il est bien égal à  $1/q$ . Cette mesure du paramètre de Luttinger au travers des modes zéro de l'Hamiltonien effectif (eq. 4.47) constitue une vérification de la théorie de Wen, alternative à la mesure de l'exposant asymptotique des fonctions de corrélation, et bien plus efficace puisque aisément accessible par diagonalisation numérique exacte. Enfin, nous étudions brièvement ce qu'il advient du liquide de Luttinger lorsque les deux bords se rapprochent et qu'un couplage entre eux apparaît. Nous montrons notamment que dans le cas limite où les deux bords fusionnent, et où le liquide de Hall ne forme plus qu'un fin cerceau, le problème devient équivalent à un modèle de fermions en interaction à une dimension de type Tonks-Girardeau.

#### 4.4.2 Spectre d'un liquide de Luttinger non-chiral

Nous représentons sur la figure (4.10) le spectre d'un liquide de Luttinger, donné par l'Hamiltonien (4.49), dans le secteur de charge nulle à  $N = 0$ . Dans le secteur  $J = N = 0$  nous notons les dégénérescences de chaque niveau énergétique pour les plus basses énergies. Elles sont données par la combinaison des deux modes chiraux contre-propageant  $\hbar v \sum_{k \neq 0} |k| b_k^\dagger b_k$ . Le spectre de ce secteur est ensuite reproduit autour des impulsions

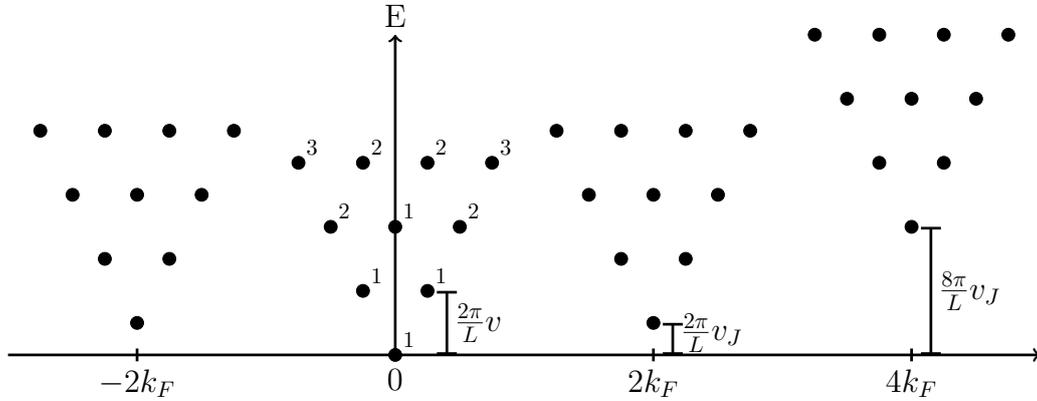


FIGURE 4.10 – Spectre d'un liquide de Luttinger (eq. 4.49) dans le secteur de charge zéro ( $N = 0$ ). Les secteurs à  $J = -2, 0, 2, 4$  sont représentés. Chacun est situé au dessus d'un état extrémal de moment  $k_F J$  et d'énergie  $\frac{\pi \hbar}{2L} v_J J^2$ . Seules les dégénérescences du secteur  $J = N = 0$  sont indiquées, celles des autres secteurs étant similaires.

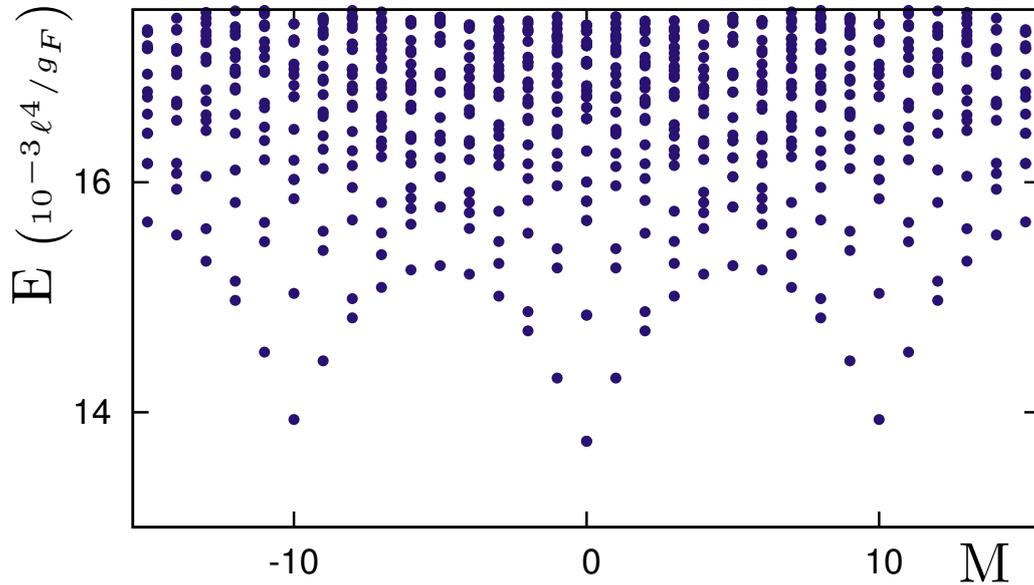


FIGURE 4.11 – Spectre des états de bord dans la géométrie du cylindre obtenu pour  $N = 10$  électrons en interaction de cœur dur. On reconnaît la structure en arches d'un liquide Luttinger (cf. fig. 4.10), et on retrouve les mêmes dégénérescences au bas de chacune des tours.

$k = Jk_F$ , avec  $J$  pair et  $k_F = \frac{\pi}{L}N_e$ , et décalé énergétiquement le long d'une parabole donnée par le mode zéro du Hamiltonien (4.49) :  $\frac{\pi\hbar}{2L}v_JJ^2$ .

A titre de comparaison, nous présentons figure (4.11) le bas du spectre des états de bord obtenu pour  $N_0 = 10$  sur le cylindre. La similarité entre les deux spectres saute aux yeux. On retrouve dans le secteur  $J_q = N = 0$  les mêmes dégénérescences que dans le spectre du Liquide de Luttinger (4.10), du moins pour les trois premiers niveaux énergétiques.

Tout comme dans le cas du disque (sec. 4.3.2), ces dégénérescences se comprennent aussi d'un point de vue microscopique. En effet, comme nous avons vu dans les sections (4.2.1) et (4.2.3), les états de bord sur le cylindre sont générés par application des polynômes symétriques élémentaires  $e_n$  sur la fonction d'onde de Laughlin  $\Psi_q$ . Ces opérateurs créent des excitations localisées sur le bord droit pour  $0 < n \ll N$  et sur le bord gauche pour  $-N \ll n < 0$ . Or, tant que les excitations sont localisées proche des bords, on peut considérer le potentiel de confinement comme linéaire au voisinage de chacun des bords. Si on note  $u(x) = u_0 + (x - x_D)\frac{du(x_D)}{dx} = u_0 + (x - x_D)eBv$  le potentiel à proximité du bord droit, et  $u(x) = u_0 - (x - x_G)eBv$ , le potentiel à proximité du bord gauche, le potentiel total en seconde quantification s'exprime :

$$U = u_0(\hat{N}_D + \hat{N}_G) + \hbar v \frac{2\pi}{L}(\hat{M}_D - \hat{M}_G) \quad (4.54)$$

où  $N_D$  et  $N_G$  représentent le nombre de particules sur le bord droit et gauche, et où  $\hat{M}_D = \sum(m - D)\hat{n}_m$  et  $\hat{M}_G = \sum(m - G)\hat{n}_m$  représentent les opérateurs impulsion sur les bords droit et gauche. Ainsi, multiplier un état de bord par  $e_n$ , avec  $0 < |n| \leq N$ , augmente l'impulsion totale ou le degré total du polynôme de

$$\Delta M = n \quad (4.55)$$

et augmente l'énergie de

$$\Delta E = \hbar v \frac{2\pi}{L}|n|. \quad (4.56)$$

La tour du secteur  $N = J_q = 0$  peut alors être construite à partir de l'état fondamental  $\Psi_q$ , en le multipliant par les polynômes  $e_n$  et en itérant ce processus.

De plus, on peut observer dans le bas du spectre des états de bord (fig. 4.11) des répliques de la tour  $J = N = 0$ , centrées autour de l'impulsion  $M = pN$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Ces tours d'états correspondent aux secteurs  $J$  pair et  $N = 0$  du liquide de Luttinger (eq. 4.49). Du point de vue de la physique d'un liquide de Luttinger, on passe de la tour ( $J = 0, N = 0$ ) à la tour ( $J, N = 0$ ) en créant  $J/2$  excitations particule-trou d'une branche à l'autre. Du point de vue de l'EHQF, cela correspond à transférer  $J/2$  quasi-particules d'un bord à l'autre du liquide. Dans notre cas, puisque nous utilisons un potentiel parabolique  $U = \sum_m \beta m^2 n_m$ , les états de la tour ( $J, N = 0$ ) s'obtiennent simplement à partir des états de la tour ( $J = 0, N = 0$ ) par application de l'opérateur de translation selon  $x$   $T^{J/2}$  (cf. sec. 2.3.2). En particulier, les états extrémaux, i.e. les états fondamentaux de chaque secteur ( $J, N = 0$ ), sont les translations de la fonction d'onde de Laughlin dans le fondamental. L'énergie de l'état extrémal du secteur ( $J, N = 0$ ) est alors donnée par

$$E_{NJ/2} = E_0 + \beta(J/2)^2 N. \quad (4.57)$$

### 4.4.3 Mesure numérique du paramètre de Luttinger

Nous avons vu plus haut que le bas du spectre des états de bord (cf. fig. 4.11) s'identifie à celui d'un liquide de Luttinger non-chiral (cf. eq. 4.49) dans la limite des grands  $N$ . A priori, le modèle de Luttinger (Haldane 1981) possède deux paramètres libres, variant selon les systèmes : la vitesse du son  $v$  et le paramètre de Luttinger  $g$  défini par

$$v_J/v = v/v_N \equiv g. \quad (4.58)$$

Ce paramètre  $g$  est une constante de couplage qui détermine la loi de puissance caractérisant le comportement asymptotique des fonctions de corrélation. Dans les systèmes de fermions unidimensionnels, cette constante de couplage est égale à 1 si les électrons n'interagissent pas ou interagissent seulement au sein d'une même branche proche du niveau de Fermi. En revanche, les interactions entre électrons des branches droite et gauche renormalisent ce paramètre vers une valeur non triviale, de sorte que le liquide ne soit plus décrit par un liquide de Fermi. Dans le cas des fluides de Hall à  $\nu = 1/q$ , la théorie de Wen impose, comme nous avons vu dans la section (4.4.1), que ce paramètre prenne une valeur universelle  $g = 1/q$ . Nous avons donc vérifié cette propriété à partir du spectre des états de bord calculé par diagonalisations exactes.

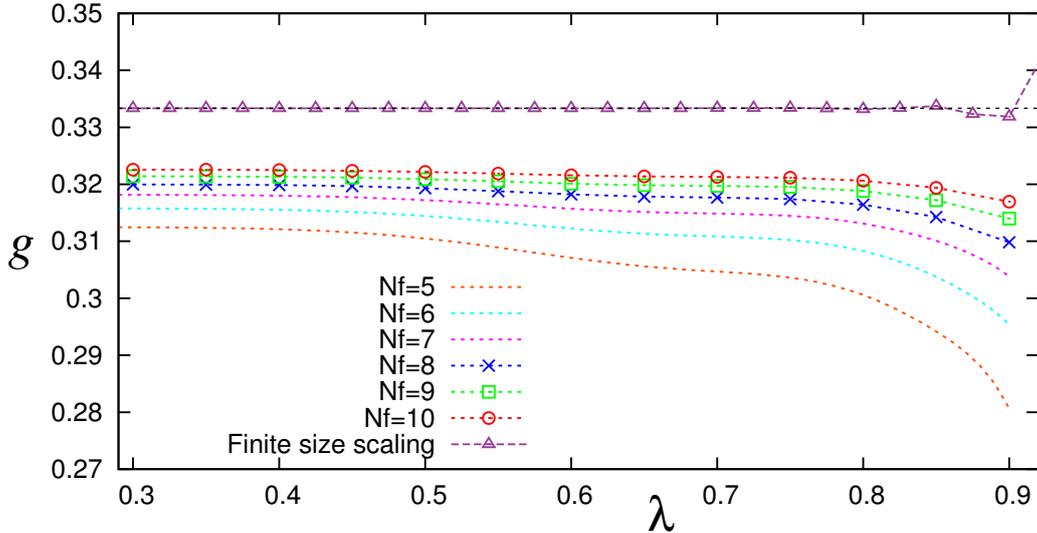


FIGURE 4.12 – Estimations du paramètre de Luttinger  $g$  en fonction de  $\lambda = \exp(-2\pi^2 \ell^2 / L^2)$  pour le modèle fermionique à  $\nu = 1/3$ . Les calculs sont réalisés pour  $N = 5 - 10$  électrons et pour 6 orbitales additionnelles (i.e.  $N_\phi = 3N - 2 + 6$ ). D'après la théorie de Wen, on s'attend à une valeur asymptotique  $g = 1/3$ . La valeur estimée pour  $N = 10$  s'approche de  $1/3$  à moins de 5% près pour  $\lambda < 0.9$  (i.e.  $L \lesssim 14\ell$ ). En prenant en compte les effets de taille finie (cf. eq. 4.66), on trouve moins de 1% d'écart par rapport à la valeur théorique.

Le paramètre  $g$  se retrouve dans les modes zéros du Hamiltonien du liquide de Luttinger (eq. 4.49). Notons  $E_M$  l'énergie de l'état fondamental dans le secteur d'impulsion

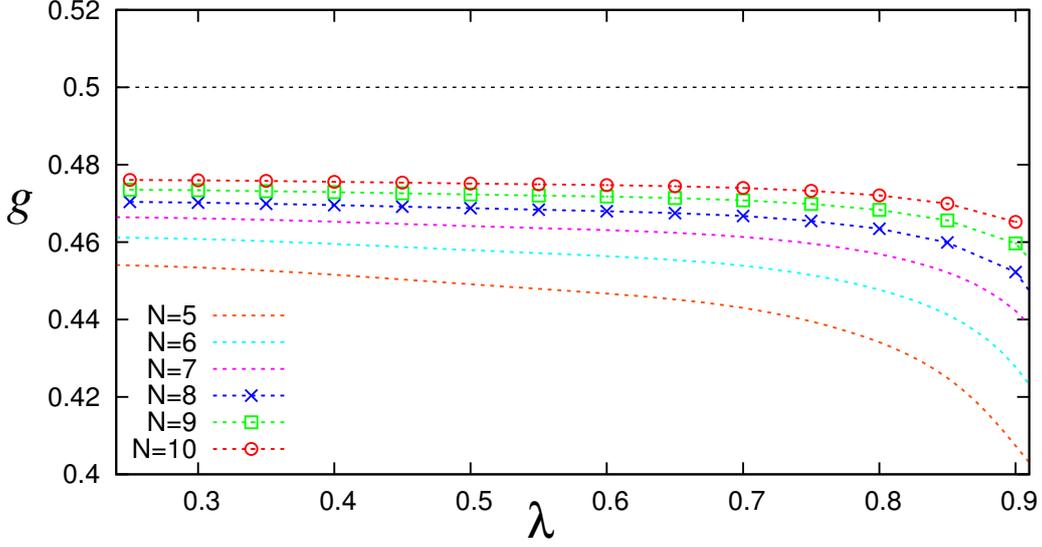


FIGURE 4.13 – Paramètre de Luttinger dans le cas bosonique à  $\nu = 1/2$ , obtenu d'après la même procédure que dans le cas fermionique. Ici encore, les calculs sont réalisés pour  $N = 5 - 10$  bosons et pour 6 orbitales additionnelles (i.e.  $N_\phi = 2N - 1 + 6$ ). Moins de 6% d'écart avec la valeur théorique  $g = 1/2$  est estimé pour  $N = 10$  bosons et pour  $\lambda < 0.9$  (i.e.  $L \lesssim 14\ell$ ).

$\hbar \frac{2\pi}{L} M$ . À la limite des grand  $N$ , les vitesses du son et de courant,  $v$  et  $v_J$ , peuvent être évaluées au moyen des énergies :

$$E_1 - E_0 = \hbar \frac{2\pi}{L} v \quad (4.59)$$

$$E_N - E_0 = \hbar \frac{2\pi}{L} v_J. \quad (4.60)$$

On peut donc estimer le paramètre de Luttinger  $g$  par le quotient  $(E_N - E_0)/(E_1 - E_0)$  calculé pour le plus grand nombre de particules possible. Nous traçons sur les figures (4.12) et (4.13) le ratio  $(E_N - E_0)/(E_1 - E_0)$  calculé pour des systèmes allant de  $N = 5$  à  $N = 10$  particules en fonction de  $\lambda = \exp[-2\pi^2\ell^2/L^2]$ . Les données de la figure (4.12) sont calculées pour notre modèle fermionique dont le fondamental est l'état de Laughlin à  $\nu = 1/3$ , et les données de la figure (4.13) sont calculées pour notre modèle bosonique à  $\nu = 1/2$ . Plus la taille du système est grande, plus ce ratio se rapproche de sa valeur théorique  $1/q$ . À notre plus grande taille,  $N = 10$  électrons, ce ratio approche  $1/3$  à 0.01 près pour une large plage de circonférence  $L$ . Des déviations du ratio  $(E_N - E_0)/(E_1 - E_0)$  par rapport à la valeur  $1/q$  apparaissent à grande circonférence. En effet, à nombre de particules fixé, la distance entre les bords est inversement proportionnelle à  $L$ . À grand  $L$ , le fluide forme alors un anneau fin et un couplage entre les deux bords apparaît, ce qui renormalise les vitesses et le coefficient  $g$ . Nous reviendrons sur cette limite dans la section suivante (4.4.4).

Dans la limite inverse, à petite circonférence  $L$ , le ratio  $(E_N - E_0)/(E_1 - E_0)$  ne semble pas s'écarter de la valeur  $1/3$  à la limite  $N \rightarrow +\infty$ . On peut en fait montrer

ceci analytiquement en calculant les énergies des fonctions d'onde Tao-Thouless (sec. 3.1). Dans la limite Tao-Thouless, l'espace des états de bord est formé des configurations  $\{|n_i\rangle\}$  qui possèdent strictement moins de deux particules sur  $q$  orbitales consécutives. Puisque  $U = \beta \sum_m m^2 n_m$  est diagonal dans la base de Fock, les états  $\{|n_i\rangle\}$  vérifiant la condition ci-dessus sont donc les états propres du spectre des états de bord à la limite Tao-Thouless. Les états fondamentaux dans chacun des secteurs qui nous intéressent sont alors :

$$|..0\overset{-q(N-1)/2}{\downarrow}1001..100100\overset{q(N-1)/2}{\downarrow}10.. \rangle, \quad \text{pour } M = 0 \quad (4.61)$$

$$|..01001..100100\hat{0}1.. \rangle, \quad \text{pour } M = 1 \quad (4.62)$$

$$|..\hat{0}0\hat{1}00..\hat{0}1\hat{0}0\hat{1}00\hat{1}.. \rangle, \quad \text{pour } M = N. \quad (4.63)$$

Dans cette limite, les différences en énergie entre les états ci dessus sont donc

$$E_1 - E_0 = \beta (q(N - 1) + 1) \quad (4.64)$$

$$E_N - E_0 = \beta N \quad (4.65)$$

ce qui nous donne bien un paramètre  $g = \lim(E_N - E_0)/(E_1 - E_0) = 1/q$ .

Fort de cet exemple à la limite Tao-Thouless, il est naturel de supposer que la différence  $E_1 - E_0$  se comporte, à  $L$  fixé et dans la limite des grands  $N$ , selon

$$E_1 - E_0 = aN + b + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (4.66)$$

si l'on prend en compte les effets de taille finie. Afin d'obtenir une meilleur estimation de  $g$ , nous estimons donc les coefficients  $a$  et  $b$  à partir de  $E_1 - E_0$  mesuré pour les deux plus grandes tailles possibles ( $N = 9$  et  $N = 10$  ici). De plus, d'après l'équation (4.57) la différence d'énergie  $E_N - E_0$  est elle toujours égale à  $\beta N$ , nous estimons alors le paramètre  $g$  par  $g = \beta/a$ . On peut voir que la courbe obtenue par cette estimation, représentée avec des triangles sur la figure (4.12), reste extrêmement proche de  $1/3$  jusqu'à  $\lambda \lesssim 0.9$  (i.e.  $L \lesssim 14$ ).

#### 4.4.4 Recombinaison des bords

On peut observer dans les graphes (4.12) et (4.13) des déviations du paramètre de Luttinger par rapport à sa valeur fixée par l'EHQF lorsque  $\lambda \rightarrow 1$  (i.e.  $L \rightarrow +\infty$ ). En effet, la distance séparant les deux bords de la goutte,  $W$ , de l'ordre de  $q(N - 1)2\pi/L$ , décroît lorsque la circonférence croît à nombre de particules fixé. Lorsque cette distance devient de l'ordre de quelques longueurs magnétiques, on s'attend à ce qu'un couplage apparaisse entre les bords, et que le paramètre de Luttinger soit renormalisé. Une étude de la physique des bords dans une fine bande de Hall, lorsqu'un couplage faible entre les bords apparaît, serait très intéressante, mais nous n'avons pas eu le temps de nous y atteler. Mentionnons cependant à ce propos le travail récent de [Varjas et al. \(2013\)](#), qui étudient ce couplage

grâce à une méthode DMRG pour des systèmes de taille infinie. Nous nous sommes intéressés au cas limite où  $L = +\infty$ , lorsque la séparation entre les bords disparaît. Le système devient alors quasi-unidimensionnel, et le Hamiltonien devient particulièrement simple, que ce soit dans le cas fermionique ou bosonique.

Dans le cas bosonique, notre Hamiltonien de cœur dur (2.139) s'écrit dans la limite  $L \rightarrow +\infty$  (ou  $\lambda \rightarrow 1$ ) :

$$\mathcal{H}_B^{L=\infty} = \frac{g_B}{2\sqrt{2\pi\ell}L} \sum_{m,c,d} a_{m+c}^\dagger a_{m+d}^\dagger a_{m+c+d} a_m. \quad (4.67)$$

Nous considérons toujours que nos particules sont confinées par un faible potentiel parabolique  $\beta \sum_m m^2 a_m^\dagger a_m$ . Tant que nous n'imposons pas de restriction particulière sur les moments disponibles, nous pouvons opérer une transformation de Fourier sur ce Hamiltonien au moyen de

$$\Phi_y = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_m e^{i\frac{2\pi}{L}my} a_m, \quad (4.68)$$

l'opérateur d'annihilation bosonique à la coordonnée  $y$  sur l'anneau de longueur  $L \rightarrow +\infty$ . Notre Hamiltonien s'écrit alors sous une forme plus simple :

$$\mathcal{H}_B^{L=\infty} = \frac{g_B}{2\sqrt{2\pi\ell}} \int_0^L dy \Phi^\dagger(y) \Phi^\dagger(y) \Phi(y) \Phi(y) \quad (4.69)$$

$$U = -\frac{\beta L}{(2\pi)^2} \int_0^L dy \Phi^\dagger(y) \frac{d^2}{dy^2} \Phi(y) \quad (4.70)$$

Ce modèle est donc proportionnel au Hamiltonien du gaz unidimensionnel de Lieb-Liniger (Lieb & Liniger 1963) qui s'écrit en première quantification sous la forme :

$$\mathcal{H}_{LL} = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + c \sum_{i<j=1}^N \delta(x_i - x_j) \quad (4.71)$$

Puisque nous considérons toujours un potentiel parabolique très faible devant l'énergie d'interaction, nous nous plaçons dans la limite dite de Tonks  $c \rightarrow \infty$ . Ce problème de bosons unidimensionnels en interaction ponctuelle impénétrable fut diagonalisé par Girardeau (1960) par un procédé appelé "fermionisation". Les fonctions propres  $\Psi_B$  de ce modèle s'obtiennent des états propres  $\Psi_F$  du modèle des fermions libres à travers l'équation :

$$\Psi_B(x_1, \dots, x_N) = \Psi_F(x_1, \dots, x_N) \prod_{i<j} \text{sgn}(x_i - x_j). \quad (4.72)$$

De plus, l'énergie de ces états  $\Psi_B$  est alors identique à celle des états de fermions libres  $\Psi_F$ . Ainsi, le spectre de notre problème devient celui des fermions libres unidimensionnels lorsque  $\lambda = 1$ , et donc le paramètre de Luttinger tend vers 1.

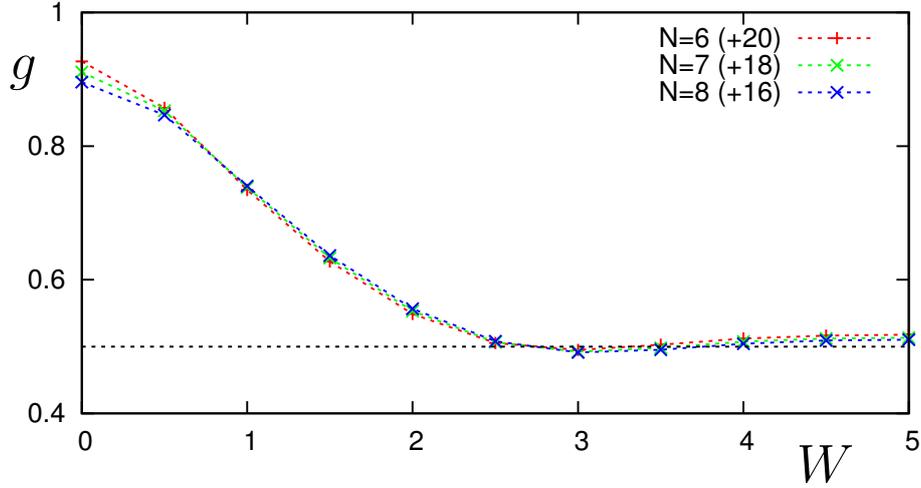


FIGURE 4.14 – Estimation du paramètre de Luttinger dans le cas bosonique à  $\nu = 1/2$  en fonction de la séparation des deux bords  $W = 2\pi q(N - 1)/L$ . Les calculs sont réalisés pour  $N = 6 - 8$  bosons, dans  $N_\phi = N_\phi(N) + \Delta N_\phi$  orbitales, où  $\Delta N_\phi$  est indiqué entre parenthèses. Le coefficient de Luttinger subit une renormalisation alors que les bords se rapprochent. La valeur limite  $g = 1$  en  $W = 0$  n'est pas obtenue faute d'un nombre suffisant d'orbitales.

Nous traçons sur la figure (4.14) notre estimation du paramètre de Luttinger pour une largeur  $W = \frac{2\pi}{L}q(N - 1)$  de la goutte comprise entre 0 et  $5\ell$ . Tant que  $W \gtrsim 3\ell$ , peu de déviation par rapport à la valeur  $g = 1/2$  est visible. Puis, le paramètre de Luttinger augmente alors que les bords se rapprochent, avant de saturer à une valeur un peu inférieure à 1 pour  $\lambda = 1$ . Cette tendance du paramètre de Luttinger à croître lorsque  $W \rightarrow 0$  est en accord avec la dérivation analytique ci-dessus. Il est cependant difficile d'obtenir une estimation numérique précise en  $\lambda = 1$  à cause, sans doute, de notre limitation sur le nombre d'orbitales disponible. On remarque d'ailleurs que notre estimation de  $g$  en  $W = 0$  décroît avec  $N$ . Ceci est un artifice dû au fait que les données sont obtenues pour un nombre d'orbitales supplémentaires  $\Delta N_\phi$  décroissant avec  $N$ .

A la limite  $L \rightarrow \infty$ , l'état fondamental de notre modèle d'EHQF  $\Psi_{GS}$  dévie donc de l'état de Laughlin. Il s'exprime alors comme la valeur absolue du déterminant de Slater représentant l'état fondamental des fermions libres (Girardeau 1960)

$$\Psi_{GS}^{L=\infty} = |\Psi_F| \quad (4.73)$$

D'un autre côté, si on supprime le potentiel de confinement et qu'on se limite à un nombre d'orbitales  $N_\phi = N_\phi(N) = q(N - 1) + 1$  contenant exactement la fonction d'onde Laughlin, cette dernière demeure l'état fondamental de notre système jusqu'à  $L = \infty$ . Dans l'espace réel, cette fonction d'onde s'écrit alors (Rezayi & Haldane 1994),

$$\Psi_q^{L=\infty} = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^q e^{-\sum x_i^2 / 2\ell^2} \quad (4.74)$$

avec  $z_i = -x_i + iy_i$  avec nos conventions. On peut notamment distinguer ces états par leur

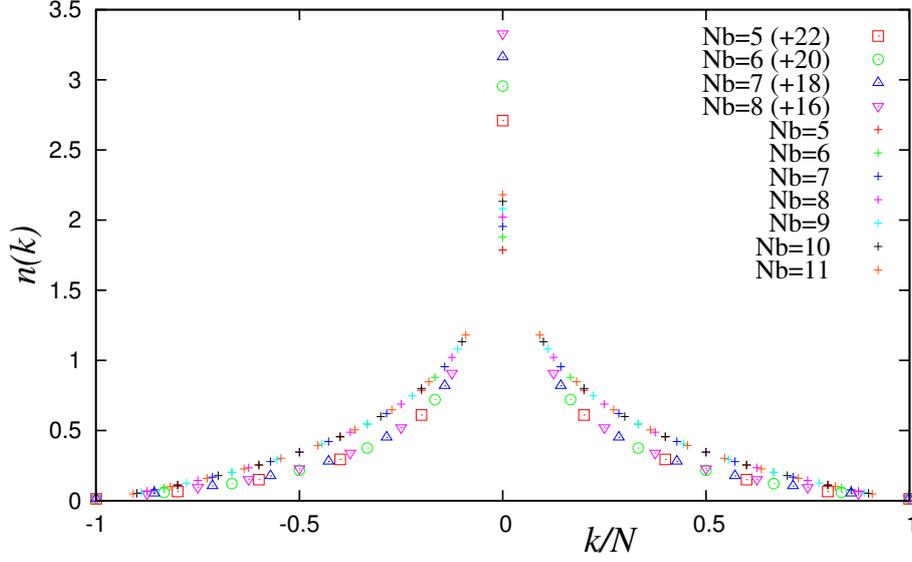


FIGURE 4.15 – Nombre d’occupation bosonique  $n(k) = \langle a_k^\dagger a_k \rangle$  dans la limite  $L \rightarrow \infty$ . Pour  $N = 5 - 11$ , on choisit un nombre d’orbitales égal à  $N_\phi(N) = 3N - 2$ , de sorte que l’état fondamental soit la fonction d’onde de Laughlin.  $n(k)$  possède alors d’une singularité logarithmique en  $k = 0$ . Un nombre maximal d’orbitales est ajouté pour  $N = 5 - 8$ , et leur nombre est indiqué entre parenthèses. On observe alors un crossover vers un gaz de Tonks-Girardeau disposant d’une singularité  $k^{-1/2}$  en  $k = 0$ .

nombre d’occupations moyen  $n(k) = \langle a_k^\dagger a_k \rangle$ . Nous traçons sur la figure 4.15 la distribution des impulsions  $n(k)$  de l’état fondamental obtenu pour plusieurs tailles, dans chacune des deux configurations décrites précédemment :

- avec potentiel de confinement et un nombre maximal d’orbitales (de fondamental  $|\Psi_F\rangle$ )
- sans potentiel de confinement et avec  $N_\phi = N_\phi(N) = 2N - 1$  orbitales (de fondamental  $\Psi_q^{L=\infty}$ ).

Bien que aucune expression analytique de  $n(k)$  ne soit connue à notre connaissance, nous savons (Lenard 1964) que pour  $|\Psi_F\rangle$ ,  $n(k)$  développe une singularité en  $k = 0$  sous la forme  $n(k) \equiv k^{-1/2}$ . Notons que cette singularité remplace la condensation de Bose qui est impossible à une dimension. En revanche, pour  $\Psi_2^{L=\infty}$ , comme noté par Rezayi & Haldane (1994), la distribution de l’impulsion développe une singularité logarithmique en  $k = 0$ , et donc moins prononcée que dans le cas du gaz de Tonks-Girardeau. Nous pouvons observer cette distinction qualitative dans la discontinuité en  $k = 0$  sur la figure (4.15), même si nos données ne permettent pas une étude quantitative de la loi d’échelle.

On peut également reformuler notre Hamiltonien fermionique (eq. 2.135) dans la limite  $L \rightarrow \infty$  au moyen de l’opérateur d’annihilation fermionique (4.68). On obtient après

quelques lignes de calcul

$$\mathcal{H}_F^{L=\infty} = \frac{g_F L^2}{\sqrt{2\pi\ell}} \int dy \frac{d\Psi^\dagger}{dy} \Psi^\dagger \Psi \frac{d\Psi}{dy}. \quad (4.75)$$

Avec le terme cinétique (4.70), l'Hamiltonien complet en première quantification est alors proportionnel à

$$-\sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + c_F \sum_{i<j=1}^N \delta'(y_i - y_j) \left( \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y_j} \right) \quad (4.76)$$

Ce modèle, dans la limite  $c_F \rightarrow +\infty$  qui est la nôtre, est connu sous le nom de ‘Tonks-Girardeau fermionique’ (Girardeau et al. 2004). A notre connaissance, aucune expression analytique d'état fondamental n'existe dans la littérature. Nous présentons sur la figure (4.16) la distribution en impulsion  $n(k)$  de l'état fondamental obtenu en  $\lambda = 1$ . Tout comme dans le cas bosonique, nous traçons également la distribution en impulsion de l'état de Laughlin  $\Psi_3^{L=\infty}$ . Une différence notable apparaît au niveau de Fermi, i.e. en  $k = k_F = \frac{2\pi}{L} \frac{N}{2}$ . L'état de Laughlin se comporte en  $n(k) \equiv |k - k_F|^{2/3} \text{sgn}(k - k_F)$  au niveau de Fermi (Yang et al. 1996), et dispose d'une discontinuité seulement dans sa dérivée. Par contre, notre état fondamental développe une discontinuité au niveau de Fermi similaire à celle d'un liquide de Fermi.

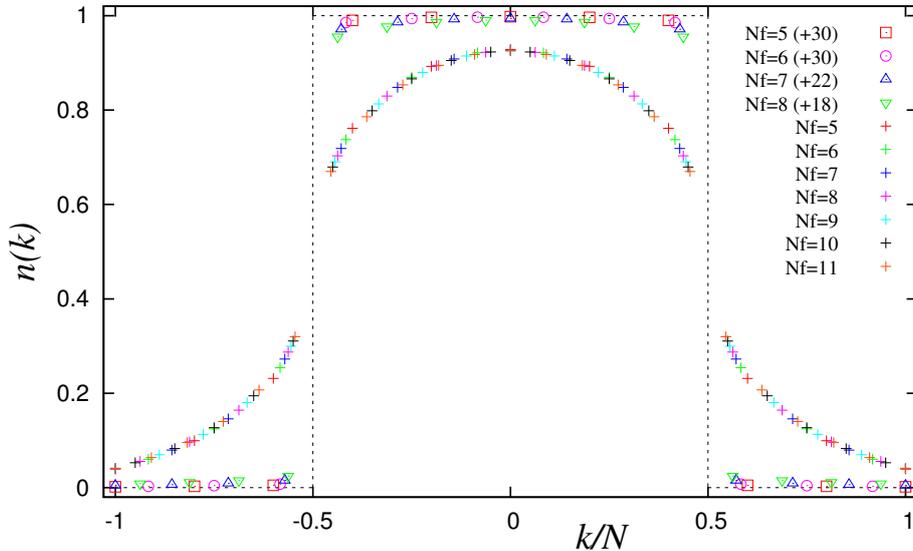


FIGURE 4.16 – Nombre d’occupation  $n(k) = \langle a_k^\dagger a_k \rangle$  de l’état fondamental fermionique pour une séparation nulle des bords, avec et sans orbitales supplémentaires. Des croix sont utilisées dans le cas où  $N_\phi = N_\phi(N)$ , c’est à dire sans orbitales supplémentaires, pour  $N = 5 - 11$ . On retrouve alors le profil de Calogero-Sutherland (Rezayi & Haldane 1994) avec une singularité en  $k = k_F$ . Des orbitales supplémentaires sont ajoutées pour  $N = 5 - 8$  et leur nombre est donné entre parenthèses. La singularité en  $k = k_f$  est alors remplacée par une discontinuité similaire à un liquide de Fermi.



# ÉTATS DE BORD DU PFAFFIEN À $\nu = 5/2$

---

Dans cette section je présente une étude que nous avons réalisée sur les états de bord du Pfaffien de [Moore & Read \(1991\)](#). La fonction d'onde de Moore-Read permet de décrire la phase de Hall apparaissant dans le second niveau de Landau à  $\nu = 5/2$ . Elle forme, avec l'ensemble de ses états de bord, l'espace fondamental d'un Hamiltonien de cœur dur à trois corps. Par une méthode semblable à celle utilisée dans le cas de Laughlin, nous obtenons le spectre des modes de bord non chiraux issu de la combinaison de deux bords. Nous montrons qu'il est formé des tours conformes du modèle Ising  $\times U(1)$ . Par une méthode basée sur un algorithme Métropolis, nous estimons les dimensions conformes des champs primaires et vérifions qu'elles sont cohérentes avec la théorie. Ces travaux ont fait l'objet de l'article ([Soulé et al. 2013](#)).

## 5.1 $\nu = 5/2$ et la fonction d'onde de Moore-Read

### 5.1.1 Le mystère de l'EHQF à $\nu = 5/2$

Dans le foulée de la découverte de l'EHQF par [Tsui et al. \(1982\)](#) à  $\nu = 1/3$ , de nombreux plateaux dans la résistance de Hall à d'autres remplissages ont été mesurés dans des échantillons de grande mobilité. Pour des remplissages  $\nu < 1/2$  par exemple, l'ensemble des fractions observées dans les hétérojonctions GaAs-AlGaAs, font partie de la série  $n/(2np+1)$ , bien décrite par la théorie des fermions composites de Jain ([Jain 2007](#)). Pour des remplissages partiels du premier niveau de Landau, i.e. pour  $0 < \nu < 2$ , l'ensemble des fractions observées ont toutes un dénominateur impair. Dans le cadre de la théorie des fermions composites, cette propriété est directement liée au principe de Pauli, et ne peut donc pas être transgressée a priori.

Pour des remplissages partiels du second niveau de Landau,  $2 < \nu < 4$ , on peut supposer en première brutale approximation (cf. sec. [2.2.3](#)) que le champ magnétique est suffisamment intense de sorte que l'énergie cyclotron  $\hbar\omega_c$  soit bien plus grande que l'énergie de Coulomb et qu'il n'y ait pas de sauts entre niveaux de Landau. Le premier niveau de Landau est alors considéré inerte, et l'interaction est alors projetée dans le

second niveau de Landau. Cette interaction peut alors être écrite sur la base des orbitales du LLL après une modification de la forme des interactions. Puisque l'EHQF est robuste par une modification minimale du potentiel d'interaction, on s'attend à retrouver les mêmes phases dans le second niveau de Landau que celles observées dans le premier. On observe effectivement aux remplissages  $\nu = 7/3 = 2 + 1/3$  et  $\nu = 8/3 = 2 + 2/3$  des plateaux dans la résistance de Hall. La phase à  $\nu = 7/3 = 2 + 1/3$  peut être interprétée comme une simple phase de Laughlin à  $\nu = 1/3$  dans le second niveau de Landau, au dessus du liquide inerte à  $\nu = 2$ . La phase à  $\nu = 8/3 = 2 + 2/3$  est, elle, le conjugué particule-trou de la fonction d'onde de Laughlin, de remplissage  $\nu = 2/3$ , placé au dessus du liquide  $\nu = 2$ .

Ceci étant, en 1987, [Willett et al. \(1987\)](#) ont mesuré un effet Hall au remplissage  $\nu = 5/2 = 2 + 1/2$ . Cette découverte a tout de suite intrigué la communauté puisque cette phase au remplissage de dénominateur pair ne peut s'expliquer au moyen de la théorie des états hiérarchiques ni de celle des fermions composites. A titre de comparaison, au remplissage correspondant dans le plus bas niveau de Landau,  $\nu = 1/2$ , aucun effet Hall quantique n'est observé dans les hétérojonctions. On sait depuis [Halperin et al. \(1993\)](#) qu'il apparaît à  $\nu = 1/2$  plutôt un liquide de Fermi de fermions composites. Cette phase à  $\nu = 5/2$  a donc suscité une grande effervescence dans le domaine.

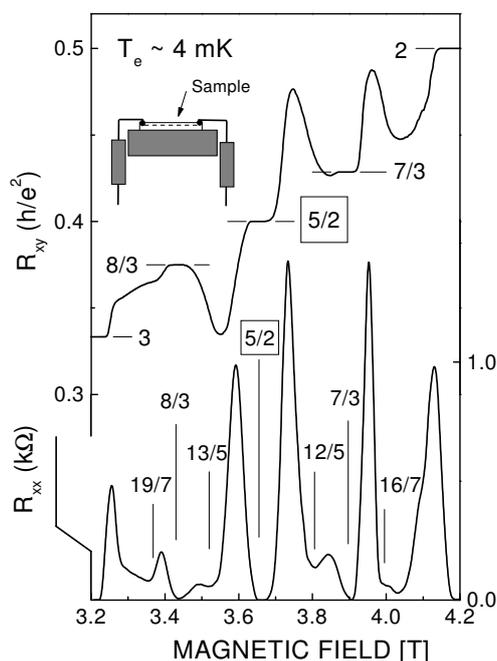


FIGURE 5.1 – Mesures de la résistance de Hall et de la résistance longitudinale pour des remplissages partiels du second niveau de Landau. En plus des plateaux attendus à  $\nu = 7/3$  et  $\nu = 8/3$ , apparaît distinctement le mystérieux plateau à  $\nu = 5/2$ . Cette figure est issue de [Pan et al. \(1999\)](#).

Tout d'abord, une question est de savoir si l'état à  $\nu = 5/2$  est polarisé en spin ou non.

En effet, comme nous avons vu dans la section 2.2.3, dans les conditions expérimentales, le ratio de l'énergie Zeemann  $E_Z$  sur l'énergie de Coulomb  $U_C$  évolue approximativement comme  $E_Z/U_C \approx \sqrt{B[T]}/200$ , où  $B[T]$  est la valeur du champ magnétique en Tesla. Ce ratio est d'autant plus faible que le champ magnétique est petit. Or, le facteur de remplissage  $\nu = \rho_e h/(eB)$  est inversement proportionnel au champ magnétique et la fraction  $\nu = 5/2$  s'observe à moins de 5 Tesla. Pour ce remplissage, on s'attend donc à ce que l'approximation de champ magnétique intense soit peu réaliste, et le degré de liberté de spin doit a priori être pris en compte. Une première fonction d'onde variationnelle singulet de spin fut proposée par [Haldane & Rezayi \(1988\)](#). Cela dit, à l'aide de diagonalisations numériques exactes, [Morf \(1998\)](#) montra que le système semble se placer plutôt dans un état entièrement polarisé en spin. Ce résultat, confirmé par des mesures expérimentales en champ magnétique incliné, fait consensus aujourd'hui, même s'il n'est pas entièrement établi. Par exemple, il semblerait qu'un état de Hall fractionnaire non-polarisé en spin apparaît pour des faibles densités électroniques à  $\nu = 5/2$  ([Pan et al. 2014](#)).

La proposition qui fait consensus pour décrire l'EHQF à  $\nu = 5/2$  est venue de [Moore & Read \(1991\)](#). Ces derniers suggèrent dans leur article une fonction d'onde variationnelle pour décrire l'état fondamental à  $\nu = 5/2$ . Dans la géométrie du disque, elle s'écrit sous la forme :

$$\Psi^{MR} = \text{Pf} \left( \frac{1}{z_i - z_j} \right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 e^{-\frac{1}{4} \sum_i |z_i|^2}. \quad (5.1)$$

Ici, Pf représente le "Pfaffien" (du nom de son inventeur Johann Friederich Pfaff) d'une matrice antisymétrique de taille  $N \times N$  avec  $N$  pair :

$$\text{Pf}(M) = \frac{1}{2^{N/2} (N/2)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{N/2} M_{\sigma(2i-1), \sigma(2i)} \quad (5.2)$$

$$\propto A(M_{12} M_{34} \dots M_{N-1, N}), \quad (5.3)$$

où  $A$  représente l'opérateur d'anti-symétrisation. Cette fonction d'onde s'étend sur des orbitales allant de  $m = 0$  à  $m = 2N - 3 = N_{\phi} - 1$ , et correspond donc à un remplissage du LLL  $\nu = \lim N_{\phi}/N = 1/2$ . Elle décrit bien un état à  $\nu = 5/2$  à condition de la transposer sur les orbitales du second niveau de Landau et de remplir complètement le LLL.

Cette fonction d'onde peut être interprétée comme un appariement en ondes P de fermions composites. En effet, la fonction d'onde de Bardeen-Cooper-Schrieffer décrivant des électrons complètement polarisés s'écrit :

$$\Psi_{BCS} = A[\phi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \phi(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4) \dots \phi(\mathbf{r}_{N-1} - \mathbf{r}_N)]. \quad (5.4)$$

Ainsi le facteur  $\text{Pf}(1/(z_i - z_j))$  représente un appariement en ondes P d'électrons. Dans le cadre de la théorie des fermions composites ([Jain 2007](#)), le facteur  $\prod_{i < j} (z_i - z_j)^2$  représente, lui, l'attachement de deux quantum de flux à chaque électron. C'est en ce sens que la fonction d'onde de Moore-Read forme un appariement en ondes P de fermions composites.

Plusieurs travaux numériques ([Morf 1998](#), [Rezayi & Haldane 2000](#)) (pour ne citer qu'eux) sont venus soutenir la proposition de Moore et Read. Dans le tableau (5.1), nous

N	8	10	14	16
Recouvrement	0.87	0.84	0.69	0.78

TABLE 5.1 – Recouvrements entre la fonction d’onde de Moore-Read (eq. 5.1) et l’état fondamental sur la sphère avec interaction de Coulomb. Le mélange entre les niveaux de Landau est négligé. Données issues de Scarola et al. (2002).

écrivons la valeur du recouvrement entre la fonction d’onde de Moore-Read et l’état fondamental obtenu sur la sphère avec interaction de Coulomb, sans prendre en compte le mélange des niveaux de Landau. Même si ces recouvrements sont corrects, ils demeurent bien moins bons que ceux obtenus pour la fonction d’onde de Laughlin à  $\nu = 1/3$  (cf. tab.2.2.4). Rezayi & Haldane (2000) ont montré que ces recouvrements pouvaient être grandement améliorés en utilisant, au lieu de  $\Psi^{MR}$ , la symétrisation particule-trou de  $\Psi^{MR}$ . La question de savoir si la fonction d’onde  $\Psi_{MR}$  caractérise bien l’état à  $\nu = 5/2$  est toujours débattue. Comme déjà mentionné, au remplissage  $\nu = 5/2$  l’approximation de champ magnétique intense est difficilement justifiable et il faudrait, pour bien faire, prendre en compte le mélange entre niveaux de Landau. Mais, le calcul des pseudo-potentiels de Haldane prenant en compte de façon perturbative le mélange entre niveaux de Landau, n’a été achevé que récemment grâce au tour de force de Peterson & Nayak (2013) et Sodemann & MacDonald (2013).

### 5.1.2 La fonction d’onde de Moore-Read et ses quasi-trous non-Abéliens

Alors que la démarche originale de Laughlin était basée sur des arguments de symétrie et sur un ansatz de type Jastrow, l’approche de Moore et Read est très différente et est basée sur une série d’arguments de théorie effective des champs. Tout d’abord, on part du fait que l’EHQF aux fractions  $n/(2n \pm 1)$  implique l’attachement de deux tubes de flux sur chaque électron d’après l’idée au cœur de la construction des fermions composites. Ces deux tubes de flux donnent naissance à un décalage du champ magnétique subi par les électrons :

$$B_{\text{eff}} = B - 2\rho\phi_0 \quad (5.5)$$

où  $\rho$  est la densité et  $\phi_0$  le quantum de flux. Ce décalage permet d’expliquer l’EHQF en termes d’un effet Hall quantique entier pour les fermions habillés de deux tubes de flux subissant  $B_{\text{eff}}$ . Cette construction rend compte des séries de fractions  $n/(2n \pm 1)$  les plus visibles dans les expériences. Elle peut être étendue de diverses manières, par exemple en changeant le nombre de tubes de flux attachés. Comment rendre compte de ce phénomène si nous voulons écrire une théorie effective ? Cet attachement est reproduit par un terme dit de Chern-Simons dans une théorie effective de type Ginzburg-Landau :

$$\frac{m}{2\pi} \epsilon_{\mu\nu\rho} A_\mu \partial_\nu A_\rho \quad (5.6)$$

ou  $m$  est le nombre de tubes de flux. Ce type de terme est un invariant de Lorentz avec le plus petit nombre possible de dérivées. Il n'est permis qu'en  $2 + 1$  dimensions à cause de l'apparition du tenseur totalement antisymétrique  $\epsilon$ . Si on ajoute un tel terme de Chern-Simons à une action alors il a exactement l'effet de lier  $m$  quanta de flux à chaque particule. On s'attend de manière générale à ce que la théorie effective contienne un tel terme, mais qu'elle soit, bien sûr, beaucoup plus compliquée. Mais un tel terme considéré isolément recrée le braiding des anyons correctement. On peut donc considérer que l'essentiel de l'EHQF va se retrouver dans une théorie où sont conservés seulement le ou les termes de Chern-Simons. C'est ce que l'on appelle une théorie des champs topologique. De telles théories ont été étudiées en grand détail dans les années 1980 et nous connaissons le résultat majeur suivant : la fonction d'onde du fondamental d'une théorie de Chern-Simons à  $2 + 1$  dimensions peut être vue comme la fonction de partition d'un modèle dit de Wess-Zumino-Witten en  $2 + 0$  dimensions. Le modèle de Wess-Zumino-Witten en  $2 + 0$  dimensions est une théorie critique invariante conforme. Ce raisonnement heuristique suggère que des théories des champs conformes en 2 dimensions peuvent servir à créer des fonctions d'onde candidates à modéliser des liquides de Hall fractionnaire. De plus amples détails sur le lien précis entre les théories de Chern Simons et l'EHQF peuvent être relevés dans la large revue de [Nayak et al. \(2008\)](#).

Montrons tout d'abord cette construction en action sur le cas de la fonction d'onde de Laughlin. On prend comme théorie conforme un champ scalaire libre de masse nulle  $\phi$ . Son propagateur est donné par :

$$\langle \phi(z)\phi(w) \rangle = -\ln(z - w) \quad (5.7)$$

Nous définissons alors la fonction d'onde comme une fonction de corrélation de cette théorie au moyen d'exponentielles de champs de bosons :

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \langle e^{i\phi(z_1)/\sqrt{\nu}} \dots e^{i\phi(z_N)/\sqrt{\nu}} e^{\mathcal{O}_{bc}} \rangle \quad (5.8)$$

où  $\mathcal{O}_{bc} = -i \int d^2z \rho \phi(z)/\sqrt{\nu}$ . Le dernier facteur est ajouté pour assurer la neutralité au sens du gaz de Coulomb et obtenir ainsi une fonction de corrélation non nulle. Cette fonction de corrélation peut se calculer au moyen d'une intégrale Gaussienne avec le résultat :

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu}. \quad (5.9)$$

Pourvu que l'on choisisse  $\nu = 1/m$ , on fabrique bien la fonction d'onde de Laughlin.

Les quasi-trous peuvent également être obtenus dans ce formalisme avec un opérateur de vertex approprié :

$$\Psi_{qh}(w; z_1, \dots, z_N) = \langle e^{i\phi(w)\sqrt{\nu}} e^{i\phi(z_1)/\sqrt{\nu}} \dots e^{i\phi(z_N)/\sqrt{\nu}} e^{\mathcal{O}_{bc}} \rangle \quad (5.10)$$

$$= \prod_i (w - z_i) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^{1/\nu} \quad (5.11)$$

Maintenant Moore et Read proposent de bâtir une théorie sur une théorie conforme plus riche qui comprend toujours un boson de masse nulle mais également la théorie critique du modèle d'Ising qui peut être représentée par une théorie d'un fermion de Majorana sans masse. Ils définissent alors le Pfaffien :

$$\Psi_{MR} = \langle \psi(z_1) \dots \psi(z_n) \rangle \times \psi_{Laughlin}(z_1, \dots, z_N) \quad (5.12)$$

Comme le fermion de Majorana est libre, sa fonction de corrélation se calcule par le théorème de Wick avec le résultat :

$$\Psi_{MR} = \text{Pf} \left( \frac{1}{z_i - z_j} \right) \psi_{Laughlin}(z_1, \dots, z_N). \quad (5.13)$$

Pour avoir une fonction d'onde antisymétrique il faut alors choisir la partie Laughlin avec un exposant pair. Le cas le plus simple est  $m = 2$  qui conduit alors à un facteur de remplissage égal à  $1/2$ .

Dans la même logique que le raisonnement de [Haldane \(1983\)](#), Moore et Read ont proposé un Hamiltonien pour lequel cette fonction d'onde soit un état propre exact. Cet Hamiltonien est celui d'une interaction à trois corps et s'écrit dans le cas  $m = 2$  qui nous intéresse :

$$\mathcal{H}_3 = - \sum_{i < j < k} S_{ijk} \Delta_i^2 \Delta_j \delta^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \delta^2(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k). \quad (5.14)$$

où  $\delta^2(\mathbf{r}) = \delta(x)\delta(y)$  et où  $\Delta_i = \partial_{x_i}^2 + \partial_{y_i}^2$  est le Laplacien. Cette interaction peut sembler encore plus farfelue que l'interaction de cœur dur à deux corps dans le cas de Laughlin. Elle est justifiée simplement par le fait qu'elle donne la bonne fonction d'onde ainsi que l'espace des quasi-trous ci-dessous. L'hypothèse est que l'état réel à  $\nu = 5/2$  soit dans la même classe d'universalité, avec les mêmes quasi-particules, que le Pfaffien et ses quasi-trous, états propres de l'Hamiltonien (5.14). Notons que le mélange entre niveaux de Landau fait intervenir de façon perturbative des interactions à trois corps dans le second niveau de Landau ([Peterson & Nayak 2013](#), [Sodemann & MacDonald 2013](#)), ce qui peut légitimer l'usage de tels Hamiltoniens de cœur dur. Nous utiliserons dans ce qui suit cet Hamiltonien dans nos diagonalisations numériques exactes, ainsi qu'un potentiel de confinement parabolique.

Comme dans le cas de l'état de Laughlin, on s'attend à pouvoir créer des quasi-trous de charge  $e/2$  au moyen de l'opérateur de vertex précédent  $\exp(i\sqrt{\nu}\phi(w))$ . Mais en fait ce n'est pas la seule possibilité. Moore et Read ont montré qu'il est aussi possible de "casser une paire" dans l'état Pfaffien pour créer un nouveau type de quasi-trou de charge  $e/4$ . Ces objets se construisent au moyen d'un opérateur plus compliqué impliquant une partie opérateur de vertex agissant sur le boson qui transporte les degrés de liberté de charge mais aussi le champ  $\sigma$  de la CFT d'Ising, c'est à dire le champ correspondant au spin du modèle d'Ising :

$$\mathcal{O}_{qh}(w) = \sigma(w) e^{\frac{i}{2}\sqrt{\nu}\phi(w)} \quad (5.15)$$

Ces quasi-trous apparaissent en paires et la fonction d'onde pour deux tels objets est alors :

$$\Psi_{2qh} = \langle \sigma(w_1) e^{\frac{i}{2}\sqrt{\nu}\phi(w_1)} \sigma(w_2) e^{\frac{i}{2}\sqrt{\nu}\phi(w_2)} \psi(z_1) \dots \psi(z_N) e^{i\phi(z_1)/\sqrt{\nu}} \dots e^{i\phi(z_N)/\sqrt{\nu}} \mathcal{O}_{bck} \rangle \quad (5.16)$$

Cette fonction de corrélation peut être calculée explicitement :

$$\Psi_{2qh} = \text{Pf} \left[ \frac{(w_1 - z_i)(w_2 - z_j) + (1 \leftrightarrow 2)}{z_i - z_j} \right] \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \quad (5.17)$$

Le cas de quatre quasi-trous de charges  $e/4$  est beaucoup plus intéressant. En effet il met en jeu la fonction de corrélation  $\langle \sigma\sigma\sigma\sigma \rangle$  qui n'est pas simplement un produit de facteurs. En fait c'est une combinaison linéaire de deux facteurs produits. En réalité les états à 4 quasi-trous forment un espace vectoriel de dimension deux. Plus généralement si on a  $2n$  quasi-trous la dimension va être  $2^{n-1}$  comme l'on montré [Nayak & Wilczek \(1996\)](#).

$$\Psi_{4qh}^{(1,\psi)} = \frac{(w_{13}w_{24})^{1/4}}{(1 \pm \sqrt{x})^{1/2}} \left[ \Psi_{(13)(24)} \pm \sqrt{x} \Psi_{(14)(23)} \right], \quad (5.18)$$

avec  $x = \frac{w_{14}w_{23}}{w_{13}w_{24}}$  et  $w_{ij} = w_i - w_j$ . Les deux états  $\Psi_{(13)(24)}$  et  $\Psi_{(14)(23)}$  sont donnés par :

$$\Psi_{(13)(24)} = \text{Pf} \left[ \frac{(w_1 - z_i)(w_3 - z_i)(w_2 - z_j)(w_4 - z_j) + (i \leftrightarrow j)}{z_i - z_j} \right] \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \quad (5.19)$$

$$\Psi_{(14)(23)} = \text{Pf} \left[ \frac{(w_1 - z_i)(w_4 - z_i)(w_2 - z_j)(w_3 - z_j) + (i \leftrightarrow j)}{z_i - z_j} \right] \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \quad (5.20)$$

Si on est dans l'état  $\Psi_{4qh}^{(1)}$  alors faire tourner 1 autour de 2 ou 3 autour de 4 conduit juste à un facteur de phase multiplicatif. Par contre si on fait tourner 3 autour de 2 alors on aboutit à l'autre état  $\Psi_{4qh}^{(\psi)}$ , ceci à cause des coupures non-triviales dans le plan complexe des différentes racines carrées qui apparaissent dans les formules ci-dessus. Ce mélange d'états par braiding est la source de la statistique non-Abélienne des quasi-trous du Pfaffien.

Pour  $2n$  quasitrous la fonction d'onde est de la forme :

$$\Psi_{2n-gh} = \langle \sigma(w_1) \dots \sigma(w_{2n}) \psi(z_1) \dots \psi(z_N) \rangle \prod_{p < q} (w_p - w_q)^{1/4} \prod_{i,p} (z_i - w_p)^{1/2} \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2, \quad (5.21)$$

où la fonction de corrélation des opérateurs  $\sigma$  appartient à un espace de dimension  $2^{n-1}$ .

## 5.2 Théorie effective aux bords du Pfaffien

### 5.2.1 Théorie chirale d'un boson et d'un fermion de Majorana

Comme dans le cas de Laughlin (cf.sec.4.2.1), les quasi-trous génèrent les modes d'excitations sans gap au bord du liquide de Hall. C'est ce qu'on appelle la correspondance

volume-bord. Les degrés de liberté sans gap sont donc exactement ceux qui se déduisent de la CFT bidimensionnelle dans la construction de Moore et Read. Ceci implique que le Pfaffien a des modes de bord donnés par un boson chiral pour la charge et un fermion de Majorana neutre. Le mode bosonique est attendu par l'argumentaire général de Wen. Du point de vue des fonctions d'onde, ces modes bosoniques s'obtiennent en multipliant la fonction d'onde du Pfaffien par tout polynôme symétrique, comme nous l'avons vu dans le cas de Laughlin. La théorie de bord s'écrit alors comme une théorie locale des champs avec une action égale à :

$$S_{edge} = \frac{m}{4\pi} \int d^2x (\partial_t + v_c \partial_x) \phi \partial_x \phi, + i \int d^2x \psi (\partial_t + v_n \partial_x) \psi, \quad (5.22)$$

où nous avons introduit un boson chiral et un fermion de Majorana-Weyl avec éventuellement des vitesses différentes. La nouveauté du Pfaffien réside dans ces modes de fermions. Une expression microscopique des modes de bord fermioniques dans la géométrie du disque a été proposée par [Milovanović & Read \(1996\)](#) :

$$\Psi_{n_1, \dots, n_F} = \mathcal{A} \left[ z_1^{n_1} \dots z_F^{n_F} \frac{1}{z_{F+1} - z_{F+2}} \dots \frac{1}{z_{N-1} - z_N} \right] \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2 \quad (5.23)$$

où  $\mathcal{A}$  signifie que l'on doit anti-symétriser l'expression sur tous les indices, où  $N$  est le nombre de particules (électrons ici) et où  $F$  est le nombre de fermions de Majorana-Weyl contenu dans l'excitation. Dans cette formule les nombres d'occupations  $n_1, \dots, n_F$  sont positifs et tous distincts. On voit aussi que  $N - F$  doit être pair alors que le nombre d'électrons peut être pair ou impair, contrairement à la définition de base du Pfaffien. Pour faire contact avec la théorie libre du Majorana notons que le moment angulaire de l'état est donné par :

$$\Delta M = \sum_i \left( n_i + \frac{1}{2} \right), \quad (5.24)$$

en prenant comme référence le moment angulaire du Pfaffien. Ceci implique que les moments des fermions doivent être pris demi-entiers. Si l'on écrit l'opérateur de champ sous forme de Fourier :

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n e^{ik(x+v_n t)}, \quad (5.25)$$

alors pour avoir  $k$  égal à un demi-entier il faut imposer des conditions aux limites anti-périodiques le long du bord du système :  $\psi(x + L) = -\psi(x)$ . Le secteur anti-périodique d'un fermion de Majorana est appelé le secteur Neveu-Schwarz (NS).

Là dessus, on peut créer des modes d'excitation bosoniques ou des quasi-particules de charge  $e/2$  en multipliant cette fonction d'onde par des polynômes symétriques arbitraires. Les conditions aux limites du fermion de Majorana sont donc insensibles à la présence de quasi-particules de charge  $e/2$  dans le volume. La seule contrainte est sur la parité du nombre de fermions. Si  $N$  est pair alors on ne peut avoir qu'un nombre pair de Majoranas tandis que si  $N$  est impair alors on a un nombre impair de Majoranas.

Si maintenant on place au centre du système un quasi-trou non-Abélien de charge  $e/4$ , c'est à dire si on fait  $w_1 = 0$  et  $w_2 \rightarrow \infty$  dans la formule (5.17), on obtient le Pfaffien dit "twisté" :

$$\Psi^{Twisted} = \text{Pf}\left(\frac{z_i + z_j}{z_i - z_j}\right) \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m. \quad (5.26)$$

Les modes de bord fermioniques à son bord s'écrivent alors (Milovanović & Read 1996) :

$$\Psi_{n_1, \dots, n_F} = \mathcal{A} \left[ z_1^{n_1} \dots z_F^{n_F} \frac{z_{F+1} + z_{F+2}}{z_{F+1} - z_{F+2}} \dots \frac{z_{N-1} + z_N}{z_{N-1} - z_N} \right] \prod_{i < j} (z_i - z_j)^2. \quad (5.27)$$

Cette fois le moment angulaire additionnel est donné par :

$$\Delta M = \sum_i n_i, \quad (5.28)$$

ce qui veut dire que les fermions ont maintenant un moment entier en unités de  $2\pi/L$ . Ceci est obtenu en imposant des conditions aux limites périodiques  $\psi(x + L) = +\psi(x)$ . C'est le secteur de Ramond (R). Nous voyons donc que la présence de quasi-trous non-Abéliens change les conditions aux limites des fermions. Dans la CFT du modèle d'Ising ce rôle est tenu par l'opérateur  $\sigma$ .

Il est maintenant facile de compter les dégénérescences des modes de bord dans la géométrie du disque pour les premières valeurs d'impulsion totale. Dans ce cas de figure, il n'y a qu'une seule chiralité et il suffit de peupler la relation de dispersion linéaire des fermions et de compter les différentes possibilités. Pour compter ces dégénérescences, on peut aussi utiliser les caractères de l'algèbre de Virasoro comme nous le verrons dans la sous-section suivante. Les nombres correspondants aux trois possibilités sont donnés dans le tableau (5.2). Nous y trouvons le secteur NS pour F pair, NS pour F impair et enfin le secteur R qui donne les mêmes nombres pour les cas F pair ou impair. Le cas du disque sans quasi-trou de charge  $e/4$  dans le volume a été étudié par Wen (1993), mais il n'a pas étudié le secteur Ramond (R), caractéristique de la statistique non-Abélienne. Pour introduire un quasi-trou non-Abélien il faut par exemple ajouter un potentiel extérieur localisé en  $w$  ce qui permet alors d'accéder au secteur R. Mais stabiliser un quasi-trou de charge  $e/4$  n'est pas si évident, et il faut ajuster finement la forme du potentiel extérieur (Tóke et al. 2007).

Enfin, en plus des modes de fermions nous trouvons le mode de charge. Ceci enrichit les dégénérescences des états de bord d'une manière aisément calculable. Les résultats sont donnés dans la partie basse de la table 5.2. Strictement parlant ces nombres supposent que les vitesses sont les mêmes pour les deux types d'excitation. Ceci est vrai pour l'interaction de cœur dur et un potentiel parabolique comme nous le verrons dans la suite. Ce n'est certainement pas vrai dans le cas de l'interaction de Coulomb. Divers travaux sur le disque (Wan et al. 2006, 2008) ont montré qu'en général les vitesses des modes neutres et des modes chargés ne sont pas les mêmes.

$\Delta M$	0 1 2 3 4 5 6 7 8	
$I$	1 0 1 1 2 2 3 3 5	NS pair
$\psi$	1 1 1 1 2 2 3 4 5	NS impair
$\sigma, \mu$	1 1 1 2 2 3 4 5 6	R pair/impair

$\Delta M$	0 1 2 3 4 5 6 7 8	
$\phi + I$	1 1 3 5 10 16 28	NS pair
$\phi + \psi$	1 2 4 7 13 21 35	NS impair
$\phi + \sigma, \mu$	1 2 4 8 14 24 40	R pair/impair

TABLE 5.2 – Comptage des états dans la géométrie chirale du disque. Dans la partie haute du tableau, nous indiquons le nombre d'états dans les différents secteurs de la CFT du modèle d'Ising en fonction du moment cinétique croissant. Dans la partie basse nous incluons les excitations bosoniques en supposant que les vitesses des bosons et des fermions sont identiques.

## 5.2.2 Théorie conforme Ising $\times U(1)$ aux bords dans la géométrie du cylindre

### Tours conformes du modèles Ising $\times U(1)$

Dans la géométrie du cylindre, nous avons affaire à deux bords distincts avec des modes d'excitation qui sont contre-propageants donc impliquant maintenant les deux chiralités. Ce cas est très intéressant car c'est celui qui est le plus proche de la réalité expérimentale. La théorie effective de bord est simplement donnée par la somme des deux théories libres de l'action (5.22). La structure des états du spectre est maintenant ce que l'on appelle une "tour conforme" liée à la représentation de l'algèbre de Virasoro. Nous présentons quelques éléments de théorie des champs conformes qui permettent d'avoir une représentation précise de la structure des états.

Une théorie des champs invariante conforme bidimensionnelle donne naissance à une algèbre de dimension infinie appelée algèbre de Virasoro. Elle s'obtient en écrivant le tenseur d'énergie impulsion sous forme d'un développement en modes :

$$T(z) = \sum_n L_n z^{-n-2}, \quad (5.29)$$

ou les modes  $L_n$  sont eux-même des opérateurs. De manière très générale, ils satisfont :

$$[L_n, L_m] = (n - m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2 - 1)\delta_{n+m,0}, \quad (5.30)$$

qui est l'algèbre de Virasoro de charge centrale  $c$ . Ce paramètre  $c$  à un rôle central et est intimement lié à la classe d'universalité à laquelle le modèle considéré appartient. Il mesure par exemple la variation d'énergie de l'état fondamental due aux effets de taille finie. Dans cette formule  $n, m$  sont des entiers positifs ou négatifs. De la même manière la

partie anti-analytique du tenseur d'énergie-impulsion permet de définir des modes  $\bar{L}_n$  qui satisfont la même algèbre. Cette algèbre admet des représentations de dimension infinie qui ont été étudiées notamment par Kac, Rocha et Caridi. Cette structure des représentations décrit les états de bord de l'EHQF comme nous allons le voir. Nous énonçons sans démonstration quelques résultats de la théorie de ces représentations. Pour de plus ample détails, avec notamment la construction précise des tours conformes du modèle d'Ising, voir (Henkel 1999). Les opérateurs de la théorie des champs peuvent être classés selon leurs propriétés sous les transformations conformes dans le plan complexe. Certains d'entre eux dits "primaires" ont une loi homogène simple. Au moyen d'un champ primaire  $\phi$  de dimension d'échelle  $h$  nous créons un état :

$$|h\rangle = \phi(0)|0\rangle \quad (5.31)$$

Cet état satisfait alors :

$$L_0|h\rangle = h|h\rangle, \quad L_n|h\rangle = 0, \quad n > 0. \quad (5.32)$$

Comme il est annulé par tous les générateurs d'indice positif on l'appelle le plus haut poids. On peut agir non-trivialement sur cet état avec tous les autres générateurs, on fabrique alors les descendants :

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|h\rangle, \quad n_i > 0 \quad (5.33)$$

Tous ces états ne sont en général pas indépendants et c'est un problème non-trivial que de trouver le nombre exact d'états. Ces descendants demeurent des états propres du générateur  $L_0$  :

$$L_0 L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|h\rangle = \left( h + \sum_i n_i \right) L_{-n_1} \dots L_{-n_k}|h\rangle \quad (5.34)$$

L'Hamiltonien du système,  $\mathcal{H}$ , ainsi que l'impulsion totale,  $\mathcal{P}$ , s'expriment en fonction des modes  $L_n$  et  $\bar{L}_n$  (qui dérivent du tenseur d'énergie impulsion de la théorie) selon :

$$\mathcal{H} = \frac{2\pi v}{L}(L_0 + \bar{L}_0) - \frac{\pi v}{6L}c, \quad (5.35)$$

$$\mathcal{P} = \frac{2\pi}{L}(L_0 - \bar{L}_0) \quad (5.36)$$

où  $c$  est la charge centrale. Pour une théorie non-chirale ceci implique que pour chaque opérateur primaire  $\Phi_{h,\bar{h}}$  on va fabriquer une famille de descendants :

$$L_{-n_1} \dots L_{-n_k} \bar{L}_{-\bar{n}_1} \dots \bar{L}_{-\bar{n}_k} \Phi_{h,\bar{h}}|0\rangle \quad (5.37)$$

qui vont avoir des énergies et des impulsions données par :

$$E = E_0 + \frac{2\pi v}{L}(h + \bar{h} + \sum_i n_i + \sum_i \bar{n}_i), \quad (5.38)$$

$$P = P_0 + \frac{2\pi}{L}(h - \bar{h} + \sum_i n_i - \sum_i \bar{n}_i), \quad (5.39)$$

$\phi + I + \epsilon$	1 3 11 28 69 152	NS pair
$\phi + \psi_{L,R}$	2 6 18 44 104 222	NS impair
$\phi + \sigma, \mu$	1 4 12 32 76 168	R pair/impair

TABLE 5.3 – Comptage des états dans la géométrie non-chirale du cylindre. Ici on donne le nombre d'états sur un niveau donné en sommant sur tous les moments possibles. Les tours d'états présentées dans la figure 5.3 contiennent toute la structure algébrique.

Ici  $E_0$  et  $P_0$  sont l'énergie et l'impulsion dans le secteur de l'opérateur  $\Phi_{h,\bar{h}}$ . Cette structure très particulière est appelée une tour conforme. Dans la CFT du modèle d'Ising les opérateurs primaires qui apparaissent sont l'identité présente pour toute théorie, les fermions  $\psi_{L,R}$  des deux chiralités, l'opérateur énergie  $\epsilon = i\psi_L\psi_R$  et enfin l'opérateur  $\sigma$  qui change les conditions au bord des fermions. Dans le cas de l'identité les dimensions d'échelle sont  $h = \bar{h} = 0$ , pour l'opérateur énergie on a  $h = \bar{h} = 1/2$ . Le secteur des Majoranas a  $h = 1/2$  et  $\bar{h} = 0$  pour  $\Psi_R$  ou  $h = 0$  et  $\bar{h} = 1/2$  pour  $\Psi_L$ . Enfin le secteur du champ  $\sigma$  a les dimensions  $h = \bar{h} = 1/16$ . Le comptage des états des tours conformes peut être obtenu à la main en remplissant des niveaux fermioniques. Il est aussi commode d'utiliser des fonctions génératrices appelées caractères de l'algèbre. De manière générale on définit les caractères de l'algèbre de Virasoro par :

$$\chi_h(q) = q^{h-c/24} \sum_{n=0}^{\infty} d_h(n)q^n, \quad (5.40)$$

où  $d_h(n)$  est le nombre d'états linéairement indépendants au niveau  $n$ . Autrement dit, dans la géométrie du disque, le nombre d'états dans chaque tour conforme d'impulsion  $\Delta P = \frac{2\pi}{L}n$  par rapport à l'état fondamental est égal à  $d_h(n)$ . Dans ce qui suit, nous oublierons le coefficient  $q^{-c/24}$ , qui est nécessaire pour l'invariance modulaire des caractères, mais n'intervient pas dans le comptage des états. Dans le cas du modèle d'Ising les caractères sont donnés par les formules suivantes (Milovanović & Read 1996) :

$$\begin{aligned} \chi_0(q) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{n+1/2}) + \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1/2}) \right], \\ \chi_{1/2}(q) &= \frac{1}{2} \left[ \prod_{n=0}^{\infty} (1 + q^{n+1/2}) - \prod_{n=0}^{\infty} (1 - q^{n+1/2}) \right], \\ \chi_{1/16}(q) &= q^{1/16} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^n). \end{aligned} \quad (5.41)$$

Le caractère  $\chi_0$  correspond au secteur de l'identité,  $\chi_{1/2}$  correspond au fermion de Majorana et  $\chi_{1/16}$  au secteur  $\sigma$ .

Dans la géométrie du cylindre nous avons maintenant à traiter les modes chiraux et anti-chiraux. Pour compter les états il suffit d'introduire des caractères "conjugués" avec

une variable  $\bar{q} : \chi_0(\bar{q}), \chi_{1/2}(\bar{q}), \chi_{1/16}(\bar{q})$ . Le degré total en  $q$  et  $\bar{q}$  nous donne alors le niveau en énergie de l'état dans la tour conforme tandis que l'impulsion totale correspond au degré en  $q$  moins le degré en  $\bar{q}$ . Pour obtenir le comptage des états de bord du Pfaffien il faut aussi prendre en compte le boson avec son caractère

$$\chi_B(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n}. \quad (5.42)$$

Le secteur de l'identité+énergie a alors comme caractère total  $\chi_B(q)\chi_B(\bar{q})(\chi_0(q)\chi_0(\bar{q}) + \chi_{1/2}(q)\chi_{1/2}(\bar{q}))$ . Le secteur du fermion de Majorana est décrit par  $\chi_B(q)\chi_B(\bar{q})(\chi_0(q)\chi_{1/2}(\bar{q}) + \chi_0(\bar{q})\chi_{1/2}(q))$  et le secteur du  $\sigma$  est obtenu via  $\chi_B(q)\chi_B(\bar{q})\chi_{1/16}(q)\chi_{1/16}(\bar{q})$ . En développant calculant les premiers termes du développement de ces caractères, on trouve les dégénérescences de chaque niveaux d'énergie que nous présentons dans le tableau 5.3. On peut aussi en extraire le spectre de  $\mathcal{H}$  et  $\mathcal{P}$  dans chacun des secteurs. Pour le secteur  $1 + \epsilon$  par exemple, les premiers termes du caractère correspondant sont :

$$\begin{aligned} & 1 + \\ & q + q^{\frac{1}{2}} \bar{q}^{\frac{1}{2}} + \bar{q} + \\ & 3q^2 + 2q^{\frac{3}{2}} \bar{q}^{\frac{1}{2}} + qp + 2q^{\frac{1}{2}} \bar{q}^{\frac{3}{2}} + 3\bar{q}^2 + \\ & 5q^3 + 4q^{\frac{5}{2}} \bar{q}^{\frac{1}{2}} + 3q^2 \bar{q} + 4q^{\frac{3}{2}} \bar{q}^{\frac{3}{2}} + 3q \bar{q}^2 + 4q^{\frac{1}{2}} \bar{q}^{\frac{5}{2}} + 5\bar{q}^3 + \dots \end{aligned} \quad (5.43)$$

On en déduit que le spectre de la tour de l'identité et de la densité d'énergie a la structure suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} & \cdot \\ & 5 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ & & 3 & 2 & 1 & 2 & 3 & \\ & & & 1 & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & & & \end{array}$$

où les énergie augmentent de  $\frac{2\pi}{L}v$  pour chaque niveau de bas en haut, et les impulsions augmentent  $\frac{2\pi}{L}$  entre chaque colonne de gauche à droite. Nous rappelons que ceci n'est valable que dans le cas particulier où la vitesse des modes bosoniques est égale à la vitesse des modes fermioniques ( $v_c = v_n = v$ ). Nous retrouverons ces tours conformes dans la figure 5.3.

### Spectre des états de bord de la fonction d'onde de Moore-Read

Nous montrons maintenant comment observer ces tours conformes dans les états de bord du Pfaffien. Nous procédons comme dans le cas du liquide de Laughlin "principal". Nous calculons le spectre d'électrons dans le LLL interagissant selon le potentiel de cœur dur à trois corps (5.14). Ce spectre dispose d'un espace fondamental infiniment dégénéré qui constitue les états de bord de la fonction d'onde de Moore-Read sur le cylindre. Ces états

de bord, ou états d'énergie zéro, s'écrivent de la même manière que dans la géométrie du disque (eq. 5.23 et 5.23), moyennant la substitution habituelle

$$z_i \rightarrow Z_i = e^{\frac{2\pi}{L}(-x_i + iy_i)} \quad (5.44)$$

$$e^{-\frac{1}{4}\sum_i |z_i|^2} \rightarrow e^{-\frac{1}{2\ell^2}\sum_i x_i^2} \quad (5.45)$$

où on remarque que l'équation (5.44) est la transformation conforme du plan vers le cylindre.

Tout comme dans le cas de Laughlin (cf. sec. 2.3.3), ceci peut se comprendre au travers de la règle d'annulation qui caractérise les états d'énergie zéro du modèle de cœur dur. En effet, soit  $\Psi = f(z_1, \dots, z_N) e^{-\frac{1}{4}\sum_i |z_i|^2}$  un état propre d'énergie zéro du modèle de cœur dur à trois corps (5.14) sur le disque. On peut montrer (Milovanović & Read 1996) que nécessairement, pour tout triplet de particules  $(i, j, k)$ , le polynôme  $f$  est la somme de termes de la forme :

$$(z_i - z_j)^{\alpha_{ij}} (z_j - z_k)^{\alpha_{jk}} (z_k - z_i)^{\alpha_{ki}} g \quad (5.46)$$

où  $g$  est un polynôme en  $z_i$  qui ne contient pas de facteurs  $(z_i - z_j)$ ,  $(z_j - z_k)$  ou  $(z_k - z_i)$ , et où :

$$(\alpha_{ij} \geq 2 \text{ et } \alpha_{jk} \geq 2) \quad (5.47)$$

$$\text{ou } (\alpha_{jk} \geq 2 \text{ et } \alpha_{ki} \geq 2) \quad (5.48)$$

$$\text{ou } (\alpha_{ij} \geq 2 \text{ et } \alpha_{ki} \geq 2). \quad (5.49)$$

Cette règle d'annulation doit aussi être respectée par les états d'énergie zéro du modèle de cœur dur sur le plan périodisé. Or  $|Z_i - Z_j| \sim a|z_i - z_j|$  lorsque  $z_i \rightarrow z_j$ . Donc les fonctions d'onde des états de bord sur le cylindre sont identiques aux fonctions d'onde sur le plan, moyennant la règle de passage (5.44).

La fonction d'onde du Pfaffien (eq. 5.1) est contenue dans  $2N - 2$  orbitales. Nous ajoutons donc des orbitales supplémentaires, qui permettent des mouvements du liquide le long des bords. Nous introduisons ensuite un potentiel parabolique qui donne une vitesse aux modes de bord (sans potentiel de confinement, ils sont tous exactement dégénérés pour le modèle de cœur dur). Ici encore, nous nous plaçons dans le cas où le potentiel est suffisamment faible pour ne pas coupler les états gappés du volume avec les modes de bord (cf. sec. 4.2.2). Le spectre typique que l'on observe numériquement est montré dans la figure (5.2). Dans la partie haute nous présentons le cas de  $N = 12$  électrons et  $N = 11$  électrons dans la partie basse. Il y a des minimum locaux de l'énergie qui sont très bien marqués. Ils sont visiblement en bas d'une structure très particulière d'états excités que nous identifions aux tours conformes du modèle Ising  $\times U(1)$ .

Nous discutons d'abord le cas des  $N$  pairs. Pour  $M = \pm N, \pm 2N, \dots$  les états fondamentaux locaux sont juste des translations globales du fondamental à  $M = 0$ . Cette propriété provient du caractère parabolique du potentiel de confinement comme montré dans la section (2.3.2). Dans le langage de l'EHQF on passe d'un état  $M = M_0$  à son successeur  $M = M_0 + N$  en faisant passer un quantum de flux à travers le cylindre. Puisque le

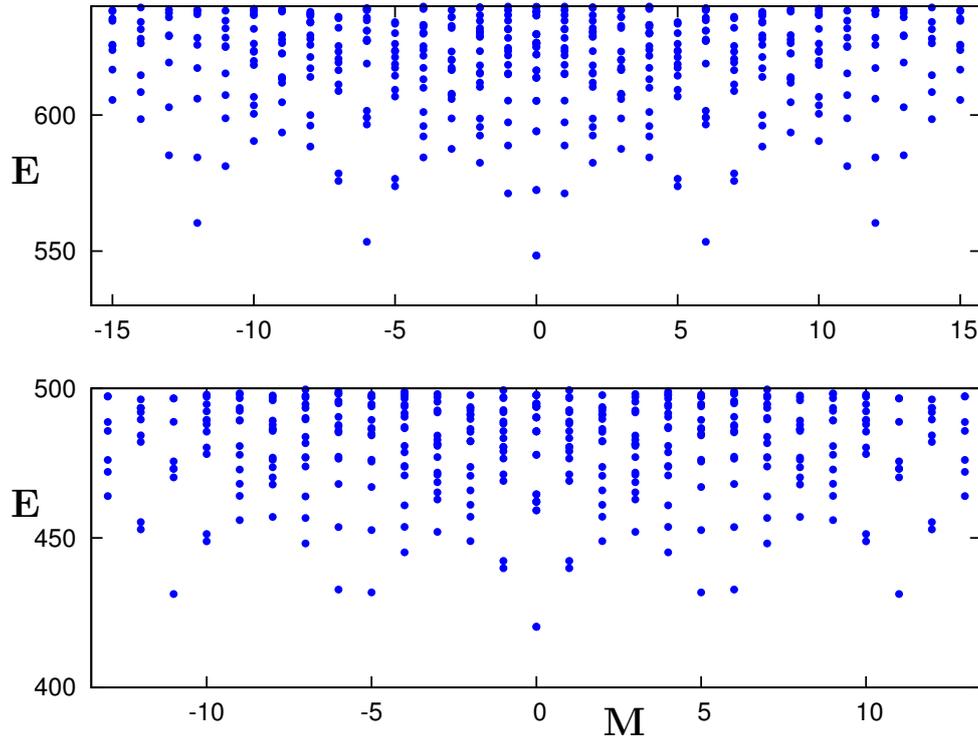


FIGURE 5.2 – En haut : Spectre des excitations de bord du Pfaffien pour un nombre pair de particules ( $N_e = 12$ ). En  $M = 0$  se situe l'état fondamental global, au dessus duquel est générée la tour identité plus énergie du modèle d'Ising combinée avec les excitations de charge. Cette structure se répète pour  $M = \pm N_e, \pm 2N_e, \dots$ . Cela ne comprend que la moitié des tours. Pour  $M = \pm N_e/2, \pm 3N_e/2, \dots$  on trouve la structure de la tour  $\sigma$  avec les modes de charge additionnels. Ceci est cohérent à condition que les vitesses  $v_n$  et  $v_c$  soient environ égales. En bas : cas impair avec  $N_e = 11$ . L'état fondamental global est maintenant le Pfaffien Twisté (5.58), au dessus duquel est généré la tour d'états  $\mu$ , identique à la tour  $\sigma$ . À côté de celle-ci on distingue la tour du Majorana et son état fondamental doublement dégénéré caractéristique. Les énergies sont en unités de  $\beta$ .

liquide est au remplissage  $\nu = 1/2$ , ceci est aussi équivalent à transférer d'un bord à l'autre du cylindre une charge  $e/2$ . On observe également une autre famille d'états fondamentaux locaux qui sont situés exactement au milieu des arches précédentes en  $M = N/2 + pN$ . Ces états sont dus à l'existence de quasi-trous de charge  $e/4$ . En effet, changer le moment de  $\Delta M = \pm N/2$ , correspond à translater rigidement la goutte d'une demi orbitale, ou à transférer une charge  $e/4$  à travers le volume du cylindre. Cette opération crée un changement de secteur dans le langage de la CFT du modèle d'Ising. Ceci est dû au fait que l'opérateur de transfert d'une quasi-particule est  $\sigma e^{i\phi/2}$  où le champ  $\sigma$  est responsable du changement de conditions au bord pour les fermions et l'opérateur de vertex gère la charge  $e/4$ . Les tours d'états sont donc alternativement dans les secteurs NS, R, NS, R, ... Au dessus des états extrémaux en  $M = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ , formés du Pfaffien de Moore-Read et de ses translations, nous trouvons les excitations du boson de charge ainsi que la tour

conforme identité et énergie. Après un décalage de moment  $\Delta M = \pm N/2$  nous trouvons la tour d'état associée au champ  $\sigma$  avec toujours les modes bosoniques.

Dans le cas  $N$  impair, au moins un fermion est nécessairement non-apparié. Le secteur NS, des conditions anti-périodiques, engendre la tour conforme du fermion de Majorana. Ensuite avec un moment additionnel  $\Delta M = \pm N/2$ , on transfère une quasi-particule non-Abélienne et nous trouvons dans le secteur du champ  $\mu$ , identique au secteur du champ  $\sigma$  du cas  $N$  pair.

Ce schéma rend parfaitement compte de nos observations par diagonalisation exacte. Dans la figure (5.2) en haut on observe bien deux tours distinctes apparaissant de façon alternée. Par exemple, celle qui apparaît à  $M = 0$  possède un état excité triplet avec des moments  $M = 0, \pm 1$  tandis que les deux tours voisines de type  $\sigma$  ont deux doublets comme états excités avec  $M = \pm 1$ . Dans la partie basse pour  $N$  impair nous trouvons un fondamental à  $M = 0$  qui est maintenant identique au secteur  $\sigma$  du cas pair. De chaque côté, on trouve les tours associées aux Majoranas avec un fondamental quasiment deux fois dégénéré.

Ces tours sont agrandies dans la partie gauche de la figure (5.3). Deux ou trois niveaux énergétiques semblent cohérent avec la CFT (cf. tab. 5.3), mais il est difficile de s'en assurer à cause de notre limitations à un faible nombre de particules. Cependant, à la limite Tao-Thouless, du cylindre fin, le Hamiltonien de cœur dur (eq. 5.14) devient un simple Hamiltonien diagonal sur la base de Fock, pour lequel il est aisé de calculer le spectre à des tailles macroscopiques. Assez étonnamment, on retrouve alors la même structure en arches dans le spectre que dans le cas 2D, et les tours sont présentées dans la partie gauche de la figure (5.3). Nous y indiquons la dégénérescence de chaque état en regard du spectre. L'accord avec les dégénérescences dues à la CFT (tab. 5.3) est parfait aussi loin que nous puissions tester. Notons que cette correspondance demande l'égalité des vitesses des bosons et des fermions  $v_c = v_n$  de la théorie effective dans notre cas avec interaction de cœur dur. Il n'y a pas de raison connue pour laquelle ceci devrait être vrai si l'on modifie l'interaction. Dans une étude sur le disque, avec interaction de Coulomb et potentiel de confinement du fond neutralisant, Wan et al. (2006) et Wan et al. (2008) ont d'ailleurs estimé une vitesse fermionique d'au moins un ordre de grandeur plus faible que la vitesse du mode bosonique.

Bien que le spectre à la limite TT présente les dégénérescences données par la CFT dans chaque tour conforme, il ne permet pas d'accéder aux dimensions d'échelle des champs primaires. Ces dernières ne sont a priori accessibles que dans la limite thermodynamique qui demandent à la fois un grand nombre de particules et un grand rayon du cylindre.

Pour observer les bonnes dimensions d'échelles il est donc nécessaire de s'affranchir des limites dues aux diagonalisations numériques exactes. Nous avons pour cela, estimé les énergies des états de bord du Pfaffien donnés par les équations (5.23) et (5.27), au moyen d'un algorithme Monte Carlo.

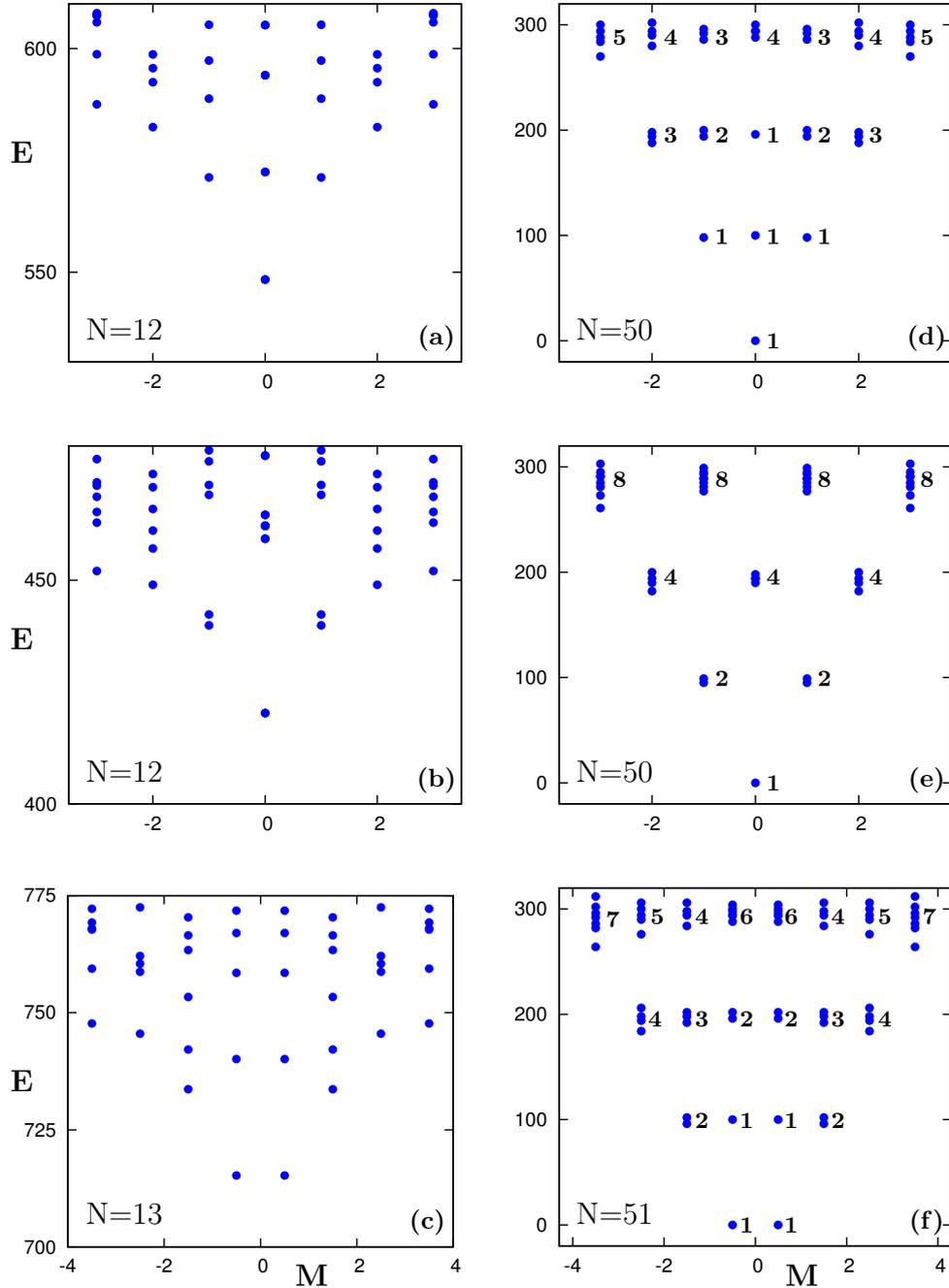


FIGURE 5.3 – Identification des tours conformes dans régime de Hall fractionnaire pour un cylindre large ( $L \approx 10\ell$ ) (à gauche) et dans la limite Tao-Thouless (à droite). La tour identité+énergie est présentée en (a) et (d), la tour  $\sigma$  en (b) et (e), et la tour Majorana en (c) et (f). Quand la circonférence du cylindre devient petite, à la limite TT, on peut calculer le spectre pour de très grandes tailles, et on aperçoit alors très distinctement ces tours conformes. À la limite TT, on retrouve précisément les dégénérescences du tableau 5.3. Les énergies sont en unités de  $\beta$ .

### 5.3 Mesure numérique des dimensions conformes

En plus des vitesses des modes bosonique et fermionique, les dimensions d'échelle donnée par la construction de la CFT  $\text{Ising} \times U(1)$  apparaissent dans le spectre à la limite thermodynamique. Nous avons souhaité vérifier, par des mesures numériques, que les dimensions observées correspondaient bien aux valeurs théoriques. Comme dans le cas de Laughlin, il est possible d'estimer le paramètre de Luttinger  $g$  du boson qui est également dans le langage de la CFT le rayon de compactification. Mais interviennent également les dimensions d'échelle des opérateurs primaires de la partie Ising.

Examinons tout d'abord le cas  $N$  pair. L'état Pfaffien "parfait" (eq. 5.1) est alors le fondamental au centre du système. C'est l'état de plus basse énergie dans la figure (5.2 a). Notons maintenant  $E_n(M)$  le  $n$ -ième niveau d'énergie avec le moment  $M$ . Pour estimer les vitesses  $v_c$  et  $v_n$  nous pouvons utiliser les formules suivantes :

$$E_1(1) - E_1(0) = \frac{2\pi}{L} v_c, \quad (5.50)$$

$$E_2(0) - E_1(0) = \frac{2\pi}{L} v_n. \quad (5.51)$$

En effet, les deux états les plus bas en  $M = \pm 1$  sont des modes de bosons de charge tandis que le deuxième état à  $K = 0$  est le premier état excité dans la tour de l'opérateur énergie, soit donc une paire de fermions de Majorana. Toutes les tours successives peuvent être indexées par le nombre quantique de courant  $J = n_L - n_R$  comme dans le cas du liquide de Laughlin. Ce  $J$  compte les transferts successifs de quasi-particules de charge  $e/4$  à travers le volume avec  $J = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$ . Les états fondamentaux de chaque tour ont un moment donné par  $M = JN/4$  et leurs énergies augmentent avec le paramètre de Luttinger comme dans le cas du liquide de Laughlin, mais un coût énergétique doit aussi être payé pour changer les conditions aux limites entre les deux secteurs NS et R. Ce coût est caractérisé par la dimension d'échelle du champ  $\sigma : h + \bar{h} = 1/8$ . L'invariance conforme à la limite thermodynamique nous dicte la forme des changements d'énergie :

$$E_1\left(\frac{1}{4}JN\right) - E_1(0) = \frac{\pi}{2L} v_c g \left(\frac{J}{2}\right)^2 + \delta_{J/2, \text{odd}} \frac{2\pi}{L} v_n (\bar{h}_\sigma + h_\sigma), \quad (5.52)$$

où le delta de Kronecker est 1 si  $J/2$  est impair, zéro sinon. Ainsi, à la limite thermodynamique, on retrouve le paramètre de Luttinger, ou le rayon de compactification du boson, dans la différence d'énergie :

$$E_1(N) - E_1(0) = \frac{2\pi}{L} v_c g. \quad (5.53)$$

Et la dimension d'échelle du champ  $\sigma$  peut être estimée au moyen de :

$$E_1(N/2) - E_1(0) = \frac{\pi}{2L} v_c g + \frac{2\pi}{L} v_n (\bar{h}_\sigma + h_\sigma). \quad (5.54)$$

De plus, il est possible de simplifier l'estimation de  $g$  puisque nous utilisons un potentiel parabolique  $U = \beta \sum_m m^2 n_m$ . En effet, d'après la formule (2.144), les énergies des

translations du Pfaffien sont placées sur une parabole et on a

$$E_1(N) - E_1(0) = \beta N. \quad (5.55)$$

Cette équation, combinée avec l'équation (5.53) permet de réduire la mesure de  $g$  à l'estimation de la vitesse du mode chargé.

Nous avons d'abord essayé de mesurer les vitesses  $v_c$  et  $v_n$  ainsi que les dimensions d'échelle au moyen de diagonalisations exactes jusqu'à  $N = 14$  particules. Si on fixe le rayon  $L$  du cylindre ainsi que la force  $\beta$  du potentiel alors les deux vitesses se comportent comme  $N$  à grand nombre de particules puisque la pente du potentiel au bord de la gouttelette augmente linéairement. On suppose donc une loi du type  $v = \alpha N + \gamma + O(1/N)$ , qui est vraie à la limite TT comme on peut le vérifier facilement. Pour mesurer le terme dominant, nous vérifions d'abord la linéarité puis extrayons la pente avec les deux points des plus grands systèmes. On trouve que ces deux vitesses sont approximativement égales  $v_c \approx v_n$  pour des rayons  $L \lesssim 15$ , avant que l'interaction entre les bords de la goutte ne renormalise les vitesses. À partir de la vitesse de charge nous mesurons le paramètre de Luttinger et trouvons une valeur  $g \approx 1/8$  pour tous les rayons  $0 \leq L \lesssim 15$ . C'est exactement la valeur attendue. Malheureusement, les faibles tailles accessibles par diagonalisation numérique ne permettent pas d'obtenir de bonnes estimations des dimensions d'échelle plus intéressantes des champs  $\sigma$  et  $\psi$ .

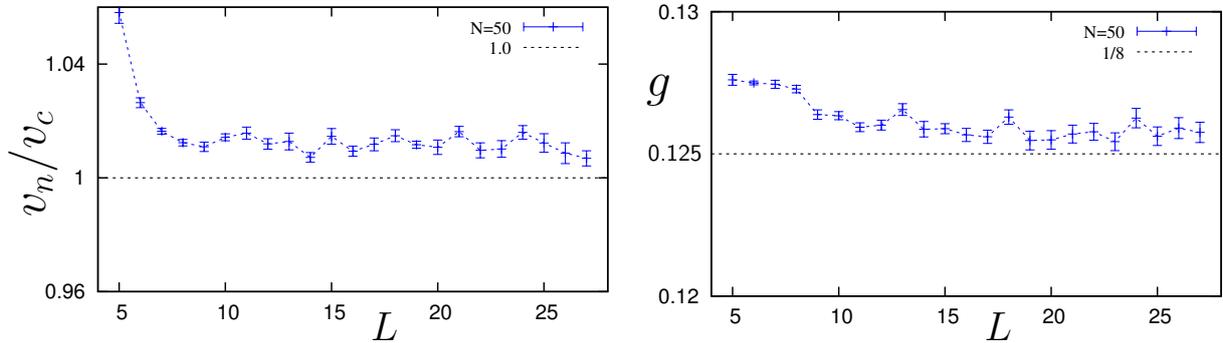


FIGURE 5.4 – À gauche : le ratio des vitesses de Bose et de Fermi mesuré à l'aide d'une procédure Monte-Carlo en fonction de la circonférence du cylindre  $L$  pour  $N_e = 50$  particules. Ceci prouve l'égalité des vitesses à la limite thermodynamique, comme nous l'avions supposé dans l'interprétation des tours conformes. Nous indiquons les intervalles de confiance avec une largeur de deux écarts-type. À droite : Mesures du paramètre de Luttinger en fonction de la partie bosonique des modes de bord à l'aide de la même méthode. Les résultats sont en accord avec la valeur théorique  $g = 1/8$  à la limite thermodynamique ( $N \rightarrow \infty$  et  $L \rightarrow \infty$ ).

Afin de remédier aux limitations en taille des diagonalisations numériques, nous avons plutôt utilisé une méthode qui consiste à évaluer les valeurs moyennes du potentiel de confinement dans une fonction d'onde exactement connue  $E_{exact} = \langle \Psi_{exact} | \sum_i u(x_i) | \Psi_{exact} \rangle$ . En effet, comme expliqué dans la section (4.2.2), nous considérons un potentiel de confinement arbitrairement faible, de sorte que l'Hamiltonien des états de bord soit la projection

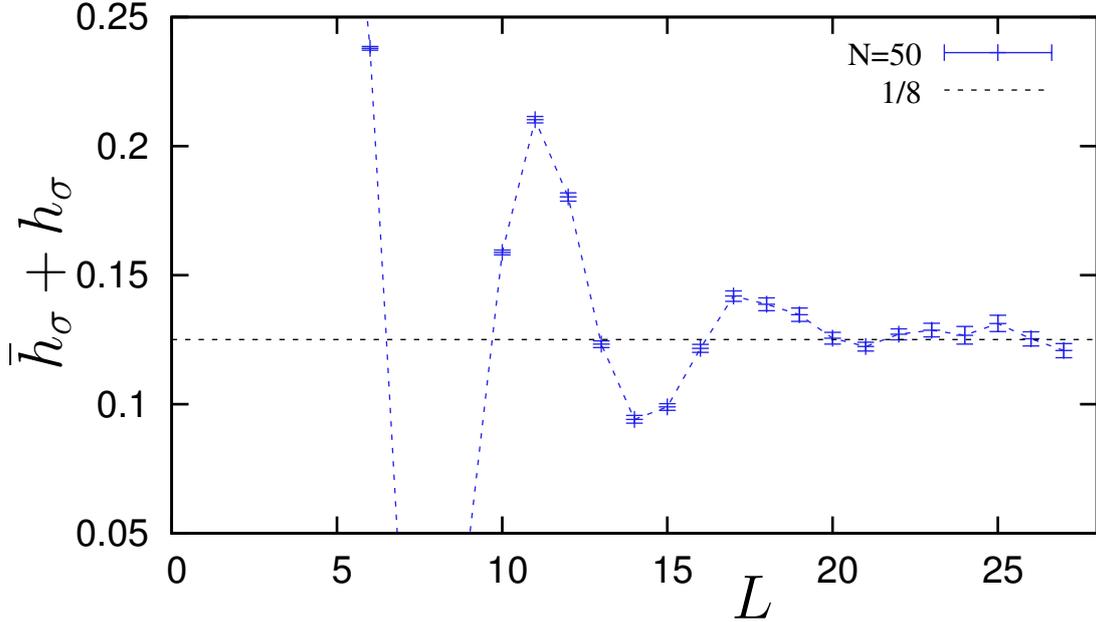


FIGURE 5.5 – Dimension d’échelle du champ  $\sigma$  calculée à partir des énergies des états extrémaux (eq : 5.52). Elle converge vers la valeur attendue  $1/8$ . Notons que cette convergence n’est réalisée qu’à grand  $L$  (pour  $N = 50$ ), une région inaccessible au moyen de diagonalisations numériques exactes.

du potentiel de confinement dans l’espace d’énergie zéro du modèle de cœur dur. Or nous connaissons l’expression exacte des fonctions d’onde d’énergie zéro du modèle de cœur dur, données par les formules (5.23) et (5.27). On peut donc en déduire l’expression des fonctions d’onde propres de notre modèle avec potentiel de confinement. Avec la formule analytique de la fonction d’onde il suffit alors d’utiliser une simple méthode de Métropolis pour obtenir une estimation Monte-Carlo des valeurs moyennes du potentiel de confinement.

Par exemple, le minimum absolu du spectre pour  $N$  pair est le Pfaffien “non-twisté” dont nous connaissons l’expression sur le cylindre (eq. 5.1). Il suffit donc calculer  $E_1(0) = \langle \Psi_{MR} | \sum_i u(x_i) | \Psi_{MR} \rangle$ . Typiquement pour  $N = 50$  particules il faut  $O(10^9)$  pas Monte-Carlo pour mesurer l’énergie avec une précision relative de  $10^{-5}$ . Toutes les énergies nécessaires se calculent de la même manière. Regardons l’énergie  $E_1(1)$  : d’après la discussion précédente, il s’agit d’une excitation avec un boson de moment  $M = +1$  localisée du côté disons droit de l’état de Moore-Read. Sa fonction d’onde dans le langage des coordonnées est donc :

$$b_1^{R\dagger} \Psi_{MR}(Z_i) \propto \left\{ \sum_i Z_i \right\} \Psi_{MR}(Z_i). \quad (5.56)$$

Si l’on crée une paire de fermions de Majorana de moments  $\pm 1/2$  à chacun des bords de

la gouttelette on obtient l'état suivant :

$$\Psi_{-1/2,+1/2} = \mathcal{A} \left( Z_1^{-1} Z_2^0 \frac{1}{Z_3 - Z_4} \cdots \frac{1}{Z_{N-1} - Z_N} \right) \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^m. \quad (5.57)$$

Son énergie est alors  $E_2(0)$ . En bas de la tour du  $\sigma$  nous attendons le Pfaffien "twisté" :

$$\Psi^{Twisted} = \text{Pf} \left( \frac{Z_i + Z_j}{Z_i - Z_j} \right) \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^m. \quad (5.58)$$

son énergie moyenne est alors  $E_1(N/2)$ . Avec la mesure de ces quantités,  $E_1(0), E_1(1), E_2(0)$  et  $E_1(N/2)$ , nous pouvons estimer via les équations (5.50,5.51,5.53,5.55,5.54) les vitesses  $v_c, v_n$ , le paramètre de Luttinger  $g$ , ainsi que la dimension d'échelle du  $\sigma$ . Les énergies sont évaluées avec environ  $5 \times 10^9$  pas Monte-Carlo et les erreurs statistiques sont calculées par une méthode de "binning". Les figures (5.4,5.5) présentent les résultats des mesures pour 50 particules et une circonférence allant jusqu'à  $30\ell$ . Nous confirmons l'égalité des vitesses  $v_c \approx v_n$  avec une erreur de 3 pour 100 environ. Cette erreur vient à la fois des fluctuations statistiques du processus Monte-Carlo ainsi que des corrections au comportement en fonction de  $N$ . Le paramètre de Luttinger est, lui, bien proche de  $1/8$  comme nous l'avons mentionné par l'approche directe. Enfin, notre estimation de la dimension d'échelle de l'opérateur  $\sigma$ , tend bien vers  $1/8$  à la limite des grands  $L$ . Ceci constitue un test important et non-trivial de la construction par CFT et de l'identification des tours conformes que nous avons proposé.

Il nous reste encore à mesurer les dimensions d'échelle des fermions en utilisant des systèmes avec  $N$  impairs. Dans ce cas de figure, il y a au moins un fermion de Majorana non apparié. Dans le secteur twisté, l'état fondamental s'écrit alors, modulo une translation le long de l'axe :

$$\Psi^{odd, Twisted} = \mathcal{A} \left( Z_1^0 \frac{Z_2 + Z_3}{Z_2 - Z_3} \cdots \frac{Z_{N-1} + Z_N}{Z_{N-1} - Z_N} \right) \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^m. \quad (5.59)$$

C'est l'état fondamental de la tour  $\mu$ , identique à la tour  $\sigma$ . Dans le secteur non-twisté, qui forme la tour du Majorana, deux états fondamentaux sont possibles, et s'écrivent modulo une translation le long de l'axe :

$$\Psi_{\pm 1/2} = \mathcal{A} \left( Z_1^{(\pm 1 - 1)/2} \frac{1}{Z_2 - Z_3} \cdots \frac{1}{Z_{N-1} - Z_N} \right) \prod_{i < j} (Z_i - Z_j)^m. \quad (5.60)$$

Choisissons, comme sur la figure (5.2), le centre du potentiel de confinement de sorte que ce soit l'état Twisté (5.59) l'état fondamental global du système pour  $N_e$  impair. À limite thermodynamique, la différence d'énergie entre ces deux états est alors donnée par

$$E((N \pm 1)/2) - E(0) = \frac{\pi}{2L} v_c g + \frac{2\pi}{L} v_n (h_\psi + \bar{h}_\psi - h_\sigma - \bar{h}_\sigma) \quad (5.61)$$

À l'aide des estimations des différents paramètres obtenues pour  $N_e$  pair, nous obtenons à partir des énergies des états (5.59) et (5.60) et de la formule (5.61) une dimension d'échelle  $h_\psi + \bar{h}_\psi = 0.50(3)$  pour  $L = 25$  et  $N = 51$  en excellent accord avec la valeur attendue  $1/2$ .



# QUANTUM SPIN HALL PHASE IN GRAPHENE VIA ADATOMS DEPOSITION

---

In this chapter I am going to describe the research project I have been working on at UBC (Vancouver) in the group of Marcel Franz, where I spent six months thanks to an Erasmus Mundus scholarship, the “Transatlantic partnership for Excellence in Engineering”. There I have been working in the field of topological insulators, a theme mostly unrelated with my Ph. D. project at LPTMS, France. In the following, I am going to give a rapid introduction to this project, highlighting the general framework we dealt with, whose results are explained in our - attached at the end of the chapter - article ([Soulé & Franz 2014](#)).

Topological insulators are a class of two- and three-dimensional non-magnetic solids having a strong spin-orbit coupling. The main bi-dimensional example is the quantum spin hall state. This phase can be described as the sum of two integer quantum hall state, for both spin up and spin down electrons, with opposite chiralities; they then own an insulating bulk and helical conducting edges. A perturbation with a nonmagnetic disorder does not create any backscattering nor localization. This phenomenon is similar to what happens in the quantum Hall effect, where disorder does not induce backscattering of the edge states. In the case of quantum spin Hall states, nowadays it is understood that edges are topologically protected by time-reversal symmetry.

Many practical applications of the peculiar behavior of those edge states have been fancied, in particular in the field of spintronics or quantum computing. On one hand, in 2007, evidences of the first two dimensional topological insulator have been found in HgTe quantum wells. On the other hand, these materials have many disadvantages: their preparation is quite complicated, the insulating bulk is got only for temperatures below a few Kelvin, and the sample must be gated in order to remove extra charges. Due to all these cons, it is very unlikely for these materials to be used in future industrial applications. Though, no better 2D topological insulating materials have been found yet, despite the high stakes and a great effort by the whole community.

In 2011, Marcel Franz and collaborators published a proposal to induce a topological insulating phase in graphene via adatoms deposition ([Weeks et al. 2011](#)). Their idea

consists of sprinkling a graphene sheet with heavy atoms in order to enhance the spin orbit coupling within the graphene sheet itself. They found via heavy numerical computations that Indium ( $Z=49$ ) or Thallium ( $Z=81$ ) adatoms were good candidates for this task. With only 6% of those elements randomly distributed upon the graphene sheet, the topological insulating gap should be about 10 times larger than in HgTe quantum wells and then easily observable in experiments.

Some transport measurements have been performed in the group of J. Folk (UBC) on graphene with Indium adatoms in order to check whether the conductivity is quantized, a property which would characterise the topological phase. This quantization has not been observed yet, though. Another proposed way to test the existence of the topological phase is to perform experiments with a Scanning Tunneling Microscope (STM). This well-known experimental device is able to measure the tunneling current from a metallic tip to the surface of the sample with a resolution in space up to a tenth of angstroms. Through the measurement of the tunneling characteristic over a large area, a full map of the local density of states can be obtained. The spatial Fourier transform of the obtained signal shows indeed peculiar features of the pristine material, averaging the random noise coming from impurities. This technique has been very successful in the field of High Tc Superconductors and could in our case be used to identify the topological insulating regime, although the presence of bulk impurities and adatoms. In order to assist Sarah Burke's group (UBC) experiments, we tried to answer to the following question: what is in such a system the specific signal of the topological insulating phase, observable through a Fourier Transform Scanning Tunneling Spectroscopy (FT-STs) experiment?

In their article, [Weeks et al. \(2011\)](#) present conductivity measurements for realistic parameters showing a mobility gap in the bulk of the sample; however, they say nothing about any spectral gap in the bulk. There could be localized states at low energies which would not affect the transport. Such localized states, if present, would however show in various spectroscopies (such as ARPES or FT-STs) making the identification of the topological phase potentially difficult using these techniques.

Both from an analytical and numerical approach, we explain that a full spectral gap appears in the presence of randomly distributed adatoms. This is of key importance for the analysis of spectroscopic experiments in this system. We also identify unique signatures in the FT-STs signal coming from spin-orbit induced spectral gap that can be employed in experimental detection of this phase.

## Quasiparticle spectroscopy as a probe of the topological phase in graphene with heavy adatoms

Paul Soulé<sup>1,2</sup> and M. Franz<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique Théorique et Modèles statistiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France*

<sup>2</sup>*Department of Physics and Astronomy, University of British Columbia, Vancouver, British Columbia, Canada V6T 1Z1*

<sup>3</sup>*Quantum Matter Institute, University of British Columbia, Vancouver, British Columbia, Canada V6T 1Z4*

(Received 26 February 2014; revised manuscript received 11 May 2014; published 27 May 2014)

Electrons in graphene with heavy adatoms (such as In or Tl) have been predicted to form a 2D topological insulator phase with a substantial spectral gap potentially suitable for future practical applications. In order to facilitate the ongoing experimental efforts to identify this phase we perform a theoretical study of its spectral properties in a model graphene system with randomly distributed adatoms. Our extensive modeling shows that random heavy adatoms produce a full spectral gap (as opposed to a mobility gap) accompanied by distinctive quasiparticle interference patterns observable by means of Fourier-transform scanning tunneling spectroscopy.

DOI: [10.1103/PhysRevB.89.201410](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.89.201410)

PACS number(s): 73.43.-f, 72.25.Hg, 73.20.-r, 85.75.-d

Despite their pivotal role in the “topological revolution” that transpired in condensed matter physics in recent years [1–4] 2D topological insulators (TIs) have thus far largely failed to deliver on their promise to become a test bed for fundamental new concepts and a platform for exciting practical applications. The reason behind this lies in the lack of widely available 2D TI materials. The existing known 2D TIs include HgTe/CdTe quantum wells [5] and InAs/GaSb quantum wells [6], which however require specialized fabrication techniques and have not, thus far, caught on as convenient and widely available platforms for broad experimentation. This is in contrast to 3D TIs [4] where dozens of confirmed materials exist and the prototype Bi<sub>2</sub>Se<sub>3</sub>, Bi<sub>2</sub>Te<sub>3</sub> materials are straightforward to grow and widely available.

The historically first and conceptually simplest 2D TI system is based on the Kane-Mele model [7] for graphene with spin-orbit coupling (SOC). Although the intrinsic SOC strength is too small to bring about this phase in pristine graphene it has been suggested that the effect can be amplified manifold by depositing a dilute concentration of certain heavy adatoms. Specifically, graphene with a modest ~6% concentration of In and Tl adatoms is predicted to form a TI with an estimated gap of 7 and 21 meV, respectively [8]. These adatoms’ outer electrons are in *p* shells and in essence act as local sources of strong SOC for low-energy Dirac electrons in graphene. Potentially much larger gaps can be achieved by using transition metal elements with active *d* orbitals such as Ir and Os, although the detailed microscopic mechanism is somewhat different here [9].

Although conceptually simple and straightforward to implement, the proposal to generate a 2D TI from graphene with adatoms has not yet been experimentally realized. Transport experiments [10] on graphene flakes with very small concentrations of In (<0.02%) have confirmed the predicted doping dependence (each In adatom donates ~1 electron) but were unable to confirm the transition into the topological state which one expects only at higher adatom densities. Preliminary scanning tunneling microscopy [11] (STM) studies of TI on graphene grown on SiC substrate indicated the “hollow” adsorption site (in the middle of the hexagonal plaquette) as predicted but could not resolve the spectral gap characteristic of a 2D TI. Angle resolved photoemission [12] (ARPES) on similar samples observed the effect of doping as well as

increased line broadening, but again failed to discern any clear signature of an excitation gap.

In order to assist the ongoing experimental efforts aimed at identifying the 2D topological phase in graphene with adatoms we undertake here a program of theoretical modeling of its spectral properties in the experimentally relevant regime of *randomly distributed* adatoms. Aside from detailed predictions that we develop for STM and ARPES our study yields two important qualitative insights. First, we find that SOC generated by randomly distributed heavy adatoms produces a *full spectral gap* (as opposed to a mobility gap). This feature was not apparent from the original transport calculations in the disordered regime [8,9,13] although more recent work [14] indicated that this might be the case. Second, we identify unique signatures of the SOC observable by Fourier-transform scanning tunneling spectroscopy (FT-STs). These take the form of quasiparticle scattering patterns that are prohibited by symmetries in graphene with ordinary potential scatterers [15]. Our results thus identify ARPES in combination with FT-STs as ideal tools for observing the topological phase in graphene with heavy adatoms.

In this study we focus on the simpler and physically more transparent model appropriate for In and Tl adatoms [8] defined by the lattice Hamiltonian  $H = H_t + \sum_I \delta H_I$  with

$$H_t = -t \sum_{\langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle} (c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}'} + \text{H.c.}) + \sum_{\mathbf{r}} w_{\mathbf{r}} c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

$$\delta H_I = -\delta\mu \sum_{\mathbf{r} \in I} c_{\mathbf{r}}^\dagger c_{\mathbf{r}} + \lambda_{\text{so}} \sum_{\langle \langle \mathbf{r}\mathbf{r}' \rangle \rangle \in I} (i v_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} c_{\mathbf{r}}^\dagger s^z c_{\mathbf{r}'} + \text{H.c.}).$$

Here  $H_t$  describes the usual nearest-neighbor electron hopping on the graphene honeycomb lattice with  $t \simeq 2.7$  eV and  $w_{\mathbf{r}}$  denoting weak random disorder (unrelated to adatoms) coming from the substrate or other sources.  $\mathbf{r}$  denotes the lattice site and the electron spin is treated implicitly (i.e., we view  $c_{\mathbf{r}}$  as a two-component spinor;  $s^z$  is the Pauli matrix). In the second line  $I$  labels the random plaquettes occupied by adatoms. The first term in  $\delta H_I$  describes the chemical potential that screens charge from the adatoms, while the second term captures the local intrinsic spin-orbit coupling induced by electrons hopping from graphene to an adatom and back. We neglect the Rashba coupling, which has been shown unimportant [8]. In addition,  $v_{\mathbf{r}\mathbf{r}'} = +1$  for hops clockwise around the plaquette

and  $-1$  counterclockwise. Realistic parameters for TI adatoms are  $\lambda_{so} = 0.02t$  and  $\delta\mu = 0.1t$ .

According to the previous work [8,14] we expect the SOC induced by In and Tl adatoms to open a gap in the electron excitation spectrum at the Dirac point. It is thus useful to start our discussion by considering the effective low-energy theory obtained by projecting Hamiltonian (1) to the vicinity of the two Dirac momenta  $\pm\mathbf{K} = \pm(4\pi/3\sqrt{3}a, 0)$  with  $a$  the separation between nearest carbon atoms. The low-energy Hamiltonian reads  $H^{\text{eff}} = \int d^2r \psi^\dagger(\mathbf{r})(h_0 + h')\psi(\mathbf{r})$  with

$$\begin{aligned} h_0 &= -i\hbar v(\tau^z \sigma^x \partial_x + \sigma^y \partial_y), \\ h' &= \sum_j (-3\delta\mu + \Lambda_{so} \tau^z \sigma^z s^z) S_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Here  $\tau$  and  $\sigma$  are Pauli matrices acting in the valley and sublattice space, respectively,  $v$  represents the Fermi velocity,  $\Lambda_{so} = 3\sqrt{3}\lambda_{so}$ ,  $S_0$  is the area of the unit cell, and  $\mathbf{R}_j$  denotes the random adatom positions. The 8-component spinor  $\psi(\mathbf{r})$  describes the low-energy electron field in combined valley, sublattice, and spin space. For simplicity we neglect the substrate disorder here but we come back to it later. Upon Fourier transforming the Hamiltonian takes the standard form of a disorder problem [16],

$$H^{\text{eff}} = \sum_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}}^\dagger h_{\mathbf{k}} \psi_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\dagger \rho_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{q}} \psi_{\mathbf{k}}, \quad (3)$$

with  $h_{\mathbf{k}} = v(\tau^z \sigma^x k_x + \sigma^y k_y)$ ,  $\rho_{\mathbf{q}} = \sum_j e^{-i\mathbf{R}_j \cdot \mathbf{q}}$ , and  $U_{\mathbf{q}} = (-3\delta\mu + \Lambda_{so} \tau^z \sigma^z s^z) S_0 / S$  and  $S$  the area of the system.

We are interested in the disorder-averaged electron propagator

$$g(\mathbf{k}, \omega) = [g_0(\mathbf{k}, \omega)^{-1} - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)]^{-1}, \quad (4)$$

where  $g_0(\mathbf{k}, \omega) = (\omega + i\delta - h_{\mathbf{k}})^{-1}$  is the propagator of the clean system with  $\delta = 0^+$  while  $\Sigma(\mathbf{k}, \omega)$  represents the disorder self-energy. For weak disorder we can evaluate the latter using the standard Born series, which corresponds to the expansion in powers of  $U_{\mathbf{q}}$ . To first order we obtain simply [16]

$$\Sigma^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = N_I U_{\mathbf{q}=0} = n_I (-3\delta\mu + \Lambda_{so} \tau^z \sigma^z s^z), \quad (5)$$

where  $N_I$  is the total number of impurities (adatoms) and  $n_I = N_I(S_0/S)$  is their number density. The key point to notice here is that while the scalar term  $-3\delta\mu$  in  $\Sigma^{(1)}$  merely shifts the overall chemical potential the SOC term opens up a spectral gap at the Dirac point with the amplitude  $\Delta_{so} = n_I \Lambda_{so}$ . Therefore, the first-order Born correction, which is often neglected as unimportant for scalar disorder potential, leads to an important qualitative change in the spectral properties of the system. Furthermore, to this order the effective disorder averaged Hamiltonian  $h_{\mathbf{k}}^{(1)} = h_{\mathbf{k}} + \Sigma^{(1)}(\mathbf{k}, 0)$  is identical to the Kane-Mele model [7] and describes a  $Z_2$  topological insulator with bulk gap and protected gapless edge states.

The second-order Born expansion gives

$$\begin{aligned} \Sigma^{(2)}(\mathbf{k}, \omega) &= N_I \sum_{\mathbf{q}} U_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} g_0(\mathbf{q}, \omega) U_{\mathbf{q}-\mathbf{k}} \\ &= n_I \left( \frac{3\delta\mu - \Lambda_{so} \tau^z \sigma^z s^z}{\Lambda} \right)^2 \frac{\omega}{4\pi} \left\{ \ln \frac{\omega^2}{\Lambda^2} - i\pi \text{sgn}(\omega) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $\Lambda = v/\sqrt{S_0} \simeq t$  is the high-energy cutoff for Dirac fermions. For the relevant frequencies  $\omega \simeq \Delta_{so}$  we observe that  $\Sigma^{(2)}$  represents a small correction to  $\Sigma^{(1)}$  as long as  $n_I(\delta\mu/\Lambda)^2, n_I(\Lambda_{so}/\Lambda)^2 \ll 1$ , which we expect to be always true. Higher terms in the Born expansion will be down by additional powers of these small parameters and can therefore be neglected. We conclude on this basis that random distribution of heavy adatoms will indeed open a gap  $\Delta_{so} \simeq n_I \Lambda_{so}$  in the spectrum of Dirac fermions. In addition, the disorder induces quasiparticle lifetime broadening  $\Gamma = \text{Im}\Sigma$  already apparent in Eq. (6). We expect the disordered system to remain in the topological phase as long as  $\Gamma \lesssim \Delta_{so}$  and the chemical potential stays inside the gap.

The gap predicted to exist in graphene with randomly distributed heavy adatoms should be directly observable by various spectroscopies such as ARPES and STS and in transport measurements. Such observation alone would provide a strong support for the notion of the topological phase but would not constitute a definitive proof. Detection of quantized edge transport would provide definitive evidence but is complicated by the need to position the chemical inside the gap. As a plausible alternative to transport measurements we study here quasiparticle interference patterns, observable by FT-STs, which we show contain unique signatures of the SOC origin of the spectral gap.

An FT-STs experiment [17,18] probes the local density of states,  $n(\mathbf{r}, \omega)$ , at a large number of real-space locations  $\mathbf{r}$  on the sample surface. The spatial Fourier transform of this signal  $n(\mathbf{q}, \omega)$ , referred to as FT-LDOS, can be related to the full electron propagator  $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$  as

$$n(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \Im \int d^2r e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{q}} \text{Tr}[G(\mathbf{r}, \mathbf{r}; \omega)]. \quad (7)$$

Here the trace is taken over spin and orbital quantum numbers and  $\Im$  denotes the strength of the branch cut across the real frequency axis  $\Im f(\omega) \equiv [f(\omega + i\delta) - f(\omega - i\delta)]/2i$ . In the limit of weak random potential, the interesting  $\mathbf{q}$ -dependent part of the FT-STs signal can be expressed in a simple factorized form [19],

$$\delta n(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \rho_{\mathbf{q}} \Im[\Lambda(\mathbf{q}, \omega)], \quad (8)$$

$$\Lambda(\mathbf{q}, \omega) = \sum_{\mathbf{k}} \text{Tr}[G_0(\mathbf{k}, \omega) U_{\mathbf{q}} G_0(\mathbf{k} - \mathbf{q}, \omega)], \quad (9)$$

where  $G_0(\mathbf{k}, \omega)$  is the electron propagator in the absence of disorder. Since  $\rho_{\mathbf{q}}$  is the Fourier transform of a random potential one expects it to be a featureless function of  $\mathbf{q}$ .  $\Lambda(\mathbf{q}, \omega)$ , on the other hand, represents the response of the underlying *clean* system and contains, in general, prominent features as a function of  $\mathbf{q}$  that can be used to study its properties.

Compared to the standard theoretical treatment [19] of FT-LDOS where disorder can be neatly separated from the underlying “clean” system our problem exhibits a slight difficulty in that adatoms provide both the source of disorder and of the spectral gap that we would like to probe. To address this complication we follow a two-pronged strategy. First, we use an analytical approach in which we focus on the low-energy theory (2) and take the first-order disorder-averaged Hamiltonian  $h_{\mathbf{k}}^{(1)}$  to describe the underlying clean system. We then assume

that residual disorder, not contained in the first-order Born approximation, plus any disorder not related to adatoms (e.g., substrate) is sufficiently weak and permits the use of Eq. (8) to calculate the interference pattern. Second, to confirm the validity of this approximate analytical treatment, we consider the full lattice Hamiltonian (1) with realistic parameters. We perform exact numerical diagonalizations on finite clusters for specific random adatom configurations and compute FT-STs response with no approximations directly from Eq. (7).

The analytical approach consists of evaluating the momentum sum in Eq. (9) with  $G_0(\mathbf{k}, \omega) = [\omega + i\delta - h_{\mathbf{k}}^{(1)}]^{-1}$  in the low-energy approximation. If  $|q| \ll a^{-1}$  only scattering within the same valley contributes to the sum, whereas scattering from one valley to another appears for  $\mathbf{q}$  close to the corners of the Brillouin zone. To calculate  $\Lambda^{\tau\tau'}(\mathbf{q}, \omega)$  we use the unperturbed one-particle Green's function  $G_0(\mathbf{k}, \omega) = (\omega + i\delta - h_{\mathbf{k}} - \Delta_{\text{so}}\tau\sigma^z s^z)^{-1}$  where we have subsumed the shift  $-n_f 3\delta\mu$  into the bulk chemical potential and  $\tau = \pm 1$  is the valley index. We assume here for simplicity that the disorder potential is nonmagnetic and slowly varying on the lattice spacing scale such that  $U_{\mathbf{q}} = u_0 \mathbb{1}$  in Eq. (9).

For the intravalley term, switching to Matsubara frequencies  $i\omega_n$ , we obtain

$$\Lambda^{++}(\mathbf{q}, i\omega_n) = 8 \sum_{\mathbf{k}} \frac{(i\omega_n)^2 + \Delta_{\text{so}}^2 + v^2 \mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{q})}{D}, \quad (10)$$

$$D = (\omega_n^2 + \Delta_{\text{so}}^2 + v^2 \mathbf{k}^2)(\omega_n^2 + \Delta_{\text{so}}^2 + v^2 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2).$$

Integrals of this type can be computed in a similar way as for pristine graphene [20] by means of Feynman parametrization [21,22]. We find

$$\Lambda^{++} = \frac{2S}{\pi v^2} \left[ \ln \left( \frac{\Lambda^2}{\omega_n^2 + \Delta_{\text{so}}^2} \right) + 2g(z) - \frac{8\Delta_{\text{so}}^2}{v^2 q^2} f(z) \right], \quad (11)$$

where  $z = 4[(i\omega_n)^2 - \Delta_{\text{so}}^2]/v^2 q^2$  and we defined functions  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}} \arctan(\frac{1}{\sqrt{z-1}})$  and  $g(z) = (z-1)f(z)$ . We emphasize that  $f(z)$  has a singularity at  $z=1$  whereas  $g(z)$  does not. Therefore, in the absence of SOC, the FT-LDOS has no singularities in the intravalley response [20,23]. However, the term proportional to  $\Delta_{\text{so}}^2$  is singular when  $z=1$  or equivalently when  $\varepsilon(q/2) = \omega$ , where  $\varepsilon(k) = \pm\sqrt{v^2 k^2 + \Delta_{\text{so}}^2}$  is the dispersion relation of  $h^{(1)}$ . Those singularities arise from elastic backscattering terms in the sum (9) when  $\mathbf{q} = 2\mathbf{k}$  and  $\omega = \varepsilon(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{q})$ . Pseudospin chirality conservation prohibits this intravalley backscattering in pristine graphene because incoming and outgoing quasiparticles have an opposite pseudospin direction [15,24]. In the presence of the SOC mass term  $\Delta_{\text{so}}$ , however, the chirality conservation is broken and intravalley backscattering close to the gapped region is allowed.

The intervalley component for  $|\mathbf{q} - \mathbf{K}| \ll a^{-1}$  is obtained from Eq. (9) using  $\tau = +1$  and  $\tau' = -1$  for the left and right  $G_0$  term, respectively. We find

$$\Lambda^{+-}(\mathbf{q}, i\omega_n) = \frac{S}{\pi v^2} \left[ 2 \frac{q_x^2}{q^2} [1 - zf(z)] - 1 \right]. \quad (12)$$

Here, the surface  $z=1$  is singular even without SOC, but the amplitude is angle dependent. Singularities arise from

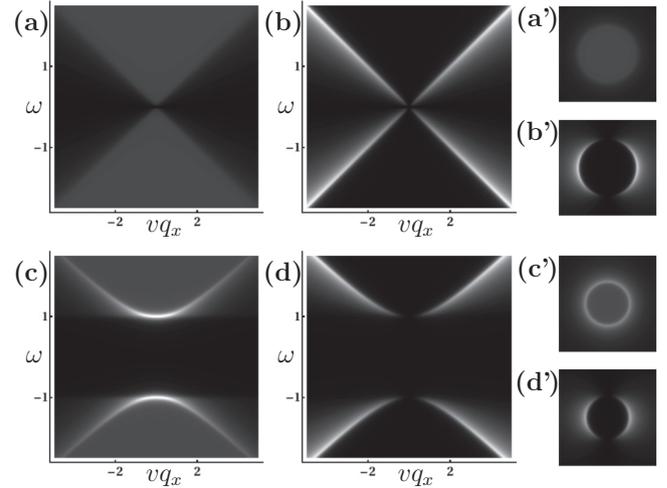


FIG. 1. Gray-scale plots of  $|\Im[\Lambda^{\tau\tau'}(\mathbf{q}, \omega)]$  from Eqs. (11) and (12). Top panels (a) and (b) show the intravalley and intervalley  $\omega$ - $q_x$  maps for pristine graphene ( $\Delta_{\text{so}} = 0$ ). Bottom panels (c) and (d) represent the same maps for  $\Delta_{\text{so}} = 1$ . Panels (a'), (b'), (c'), and (d') display transverse sections in the  $q_x$ - $q_y$  plane of the corresponding plots for  $\omega = 1.5$ . We use one gray scale for all intravalley features, and another one for intervalley plots.

scattering of quasiparticles from one valley to the other, but here the overlap of incoming and outgoing quasiparticles' pseudospins depends on  $\mathbf{q}$  direction.

In Fig. 1 we plot the FT-STs signal  $|\Im[\Lambda^{\tau\tau'}]|$  based on Eqs. (11) and (12). Without SOC, the intravalley signal is nonsingular and barely visible whereas a linear dispersion with slope  $v/2$  appears in the intervalley signal. When the SOC is present, we see a qualitative change in the maps. Now a parabolic dispersion is clearly visible both in the intravalley and the intervalley FT-LDOS with a gap  $2\Delta_{\text{so}}$  separating the two bands. We have also computed numerically  $\Lambda(\mathbf{q}, i\omega)$  from Eq. (9) away from the low-energy approximation of  $h_0$ , and checked that the characteristic features described above remain unchanged as long as  $\Delta_{\text{so}} \lesssim t$ . Finally, a rapidly oscillating disorder potential might have different amplitudes on  $A$  and  $B$  sublattices such that  $U_{\mathbf{q}} = u_0 \mathbb{1} + \alpha_{\mathbf{q}} \sigma^z$  in Eq. (9). One can check, however, that the  $\sigma^z$  term does not contribute to the intravalley response and affects only the amplitude of the singularities in the intervalley term, in such a way that our above statements remain true.

Even though our computations above were performed for an averaged adatom distribution, we believe that the characteristic signal of the topological phase can be observed in FT-STs experiments. In order to support this claim, we carried out exact numerical simulations based on the lattice model of Eq. (1) for specific disorder configurations. These computations have the advantage of not relying on the weak-disorder or low-energy approximations. In addition, no average over disorder configurations is performed before computing the FT-STs signal, just like in real experiments. The FT-LDOS is evaluated from Eq. (7) which can be manipulated into the more convenient expression

$$n(\mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{\pi} \Im \sum_i \frac{|\Psi_i(\mathbf{r})|^2}{\omega + i\delta - E_i}. \quad (13)$$

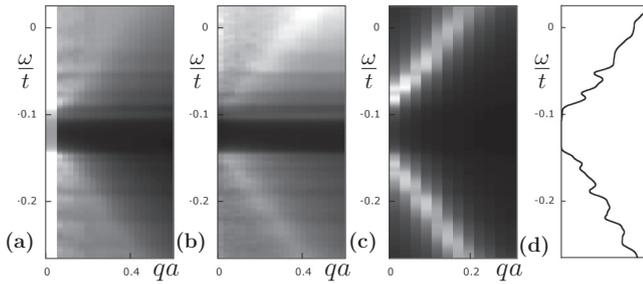


FIG. 2. Numerical computation of  $|n(\mathbf{q}, \omega)|$  for the lattice model of Eq. (1) on a  $80 \times 80$  periodic cluster with  $\lambda_{\text{so}} = 0.04t$  and  $\delta\mu = 0.2t$ . Panels (a) and (b) show closeups of the intravalley and intervalley FT-LDOS, respectively. Panel (c) represents the spectral function  $A(\mathbf{q}, \omega)$  and (d) the total density of states  $n(\omega)$ .

where  $\Psi_i(\mathbf{r})$  and  $E_i$  are the eigenvectors and eigenvalues of our one-body Hamiltonian (1) computed by means of exact numerical diagonalization. In Fig. 2, we present our results computed on clusters of  $80 \times 80$  unit cells for parameters  $\lambda_{\text{so}} = 0.04t$  and  $\delta\mu = 0.2t$ , close to realistic values. We consider here an adatom coverage of  $n_I = 0.2$  and an uncorrelated random potential  $w_r \in [-0.04t, 0.04t]$ . The latter has in fact little effect because it remains much smaller than the disorder induced by adatoms whose variance is about  $3n_I\delta\mu^2$ . In order to achieve better resolution, we show the FT-LDOS and the spectral function signal as angular averages over circular regions around the  $\mathbf{q} = 0$  or  $\mathbf{q} = \mathbf{K}$  points. In addition, we average each quantity over 10 independent realizations of disorder.

Figures 2(a) and 2(b) show a clear energy gap in the intra- and intervalley components of FT-LDOS. This gap is

somewhat smaller than  $2\Delta_{\text{so}} = 6\sqrt{3}n_I\lambda_{\text{so}} \approx 0.083t$  obtained in our approximate analytical calculation, but remains open for each of our ten disorder configurations. Moreover, this gap also appears in the spectral function and in the total density of states. This indicates that a random distribution of adatoms on the graphene sheet not only opens a mobility gap as demonstrated by Weeks and coworkers [8], but produces a full spectral gap observable through ARPES and FT-STES experiments. One can also perceive the parabolic electron dispersion in the most intense regions of FT-LDOS plots, even if the strong disorder of the  $\delta\mu$  term and finite-size effects broaden the singularity to some extent. The gap does not close when we vary continuously the disorder strength  $w_r$  from zero to its final value and vary the adatom concentration from  $n_I = 1.0$  to its value  $n_I = 0.2$ . This demonstrates that the system is in the same topological phase as the Kane-Mele model [7] and that the spectral gap has topological origin.

In conclusion, our approximate analytical and exact numerical calculations based on the graphene/adatom model Eq. (1) provide strong evidence for substantial SOC-induced spectral gap opening at the Dirac points in the physically relevant regime of randomly distributed adatoms. Such a gap should be observable in various spectroscopies such as ARPES and STS. In addition, Fourier transform STS should be able to discern unique patterns characteristic of SOC (Fig. 1) in the intravalley channel where the signal in pristine graphene is absent due to symmetry considerations.

The authors are indebted to C. Ast, S. A. Burke, A. Damascelli, J. A. Folk, J. E. Hoffman, A. Khademi, and B. M. Ludbrook for insightful discussions. This work was supported by NSERC and CifAR. P.S. thanks the Erasmus Mundus program TEE which made this collaboration possible.

- 
- [1] J. E. Moore, *Nature (London)* **464**, 194 (2010).  
 [2] M. Z. Hasan and C. L. Kane, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 3045 (2010).  
 [3] X.-L. Qi and S.-C. Zhang, *Rev. Mod. Phys.* **83**, 1057 (2011).  
 [4] *Topological Insulators*, edited by M. Franz and L. Molenkamp (Elsevier, Oxford, England, 2013).  
 [5] M. König, S. Wiedmann, C. Brune, A. Roth, H. Buhmann, L. W. Molenkamp, X.-L. Qi, and S.-C. Zhang, *Science* **318**, 766 (2007).  
 [6] I. Knez, R.-R. Du, and G. Sullivan, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 136603 (2011).  
 [7] C. L. Kane and E. J. Mele, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 226801 (2005).  
 [8] C. Weeks, J. Hu, J. Alicea, M. Franz, and R. Wu, *Phys. Rev. X* **1**, 021001 (2011).  
 [9] J. Hu, J. Alicea, R. Wu, and M. Franz, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 266801 (2012).  
 [10] A. Khademi and J. Folk (unpublished).  
 [11] A. Macdonald and S. A. Burke (unpublished).  
 [12] B. M. Ludbrook and A. Damascelli (unpublished).  
 [13] O. Shevtsov, P. Carmier, C. Groth, X. Waintal, and D. Carpentier, *Phys. Rev. B* **85**, 245441 (2012).  
 [14] H. Jiang, Z. Qiao, H. Liu, J. Shi, and Q. Niu, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 116803 (2012).  
 [15] N. H. Shon and T. Ando, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 2421 (1998).  
 [16] See, e.g., *Green's Functions for Solid State Physicists*, S. Doniach and E. H. Sondheimer (Imperial College Press, Reading, MA, 1998).  
 [17] M. F. Crommie, C. P. Lutz, and D. M. Eigler, *Nature (London)* **363**, 524 (1993).  
 [18] J. Lee, K. Fujita, A. R. Schmidt, C. K. Kim, H. Eisaki, S. Uchida, and J. C. Davis, *Science* **325**, 1099 (2009), and references therein.  
 [19] L. Capriotti, D. J. Scalapino, and R. D. Sedgewick, *Phys. Rev. B* **68**, 014508 (2003).  
 [20] T. Pereg-Barnea and A. H. MacDonald, *Phys. Rev. B* **78**, 014201 (2008).  
 [21] See, e.g., M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1995).  
 [22] T. Pereg-Barnea and M. Franz, *Phys. Rev. B* **68**, 180506(R) (2003); *Int. J. Mod. Phys. B* **19**, 731 (2005).  
 [23] C. Bena, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 076601 (2008); *Phys. Rev. B* **79**, 125427 (2009).  
 [24] P. Mallet, I. Brihuega, S. Bose, M. M. Ugeda, J. M. Gómez-Rodríguez, K. Kern, and J. Y. Veillen, *Phys. Rev. B* **86**, 045444 (2012).

---

# Conclusion

---

Mon travail de thèse m’a permis d’étudier divers aspects de la physique de l’EHQF dans la géométrie cylindrique. L’intérêt majeur de cette géométrie est de former une bande de liquide de Hall et d’obtenir une théorie de bord non-chirale par combinaison de deux bords séparés spatialement. Dans le cas du Pfaffien de Moore et Read, cette construction permet de faire apparaître une structure en tours conformes des états de bord. On accède alors naturellement à tous les secteurs de la théorie conforme sous-jacente, notamment au secteur dit “non-abélien” du champ  $\sigma$ . On peut alors mesurer le paramètre de Luttinger ainsi que les dimensions conformes des champs primaires associés. Un aspect délicat de cette géométrie est l’apparition d’excitations neutres sans gap due vraisemblablement à la coupure opérée dans l’espace des orbitales. Il est par conséquent difficile d’extrapoler le gap du volume à la limite thermodynamique. De nombreuses questions demeurent en suspens et mériteraient d’être approfondies. J’en cite quelques-unes qui me paraissent abordables aisément ou d’intérêt majeur.

Tout d’abord, dans la lignée de l’étude du Pfaffien, il serait possible d’étudier d’autres phases non-abéliennes : les parafermions  $Z_3$  de [Read & Rezayi \(1999\)](#). Ces états sont des généralisations du Pfaffien et sont eux aussi des solutions exactes d’un Hamiltonien de cœur dur à  $k$ -corps. Ce sont de bons candidats pour décrire les phases de l’EHQF aux remplissages  $\nu = 2 + 3/5$  et  $\nu = 2 + 2/5$ .

Il pourrait aussi être intéressant de chercher une alternative à la troncation que nous effectuons sur les orbitales. On pourrait par exemple utiliser la géométrie du tore et ajouter un potentiel invariant par translation dans l’une des directions. On perd alors une translation magnétique mais on élimine probablement les états sans gap “parasites” qui apparaissent sur le cylindre.

En considérant toujours le potentiel de cœur dur, si on augmente progressivement la force du potentiel de confinement depuis l’état de Laughlin, et qu’on ajuste judicieusement la forme de ce potentiel, on devrait pouvoir stabiliser un état incompressible avec  $\nu = 2/5$ . On doit alors observer l’apparition au bord de deux bosons couplés. Il n’est cependant pas évident que ces états soient bien visibles en dessous du gap du volume.

Enfin, je me suis limité dans cette thèse aux potentiels de cœur dur pour lesquels la fonction d’onde de Laughlin ou le Pfaffien sont des états propres exacts. Il serait judicieux de traiter le cas réaliste du potentiel de Coulomb. Sa mise en œuvre n’est pas immédiate. En effet, pour empêcher les charges de s’accumuler aux extrémités du cylindre, il faut ajouter un fond neutralisant dont la forme doit être ajustée intelligemment. Les études publiées sur le cas du disque montrent que cet ajustement n’est pas simple. Ce n’est

certainement pas plus simple sur le cylindre, qui possède en sus l'altération due à la troncation sur l'espace des orbitales. L'étude du Pfaffien avec le potentiel de Coulomb serait bien évidemment très intéressante. Une question serait de savoir si le secteur non-Abélien apparaît.

# ÉTATS PROPRES DU HAMILTONIEN TRONQUÉ

---

## A.1 État fondamental

Nous montrons ici, que l'état

$$|\Psi_{GS}\rangle = \prod_p (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001001..1001\rangle \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\hat{S}_m \equiv c_{m+1}^\dagger c_{m+2}^\dagger c_{m+3} c_m \quad (\text{A.2})$$

est état propre d'énergie zéro de l'Hamiltonien :

$$\tilde{\mathcal{H}}_F^0 = \lambda \sum_{m=G}^{D-3} C_m^\dagger C_m + 4\lambda^4 \sum_{m=G}^{D-2} \hat{n}_{m+2} \hat{n}_m \quad (\text{A.3})$$

$$+ \lambda \hat{n}_G \hat{n}_{G+1} + \lambda \hat{n}_{D-1} \hat{n}_D \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$C_m = c_{m+1} c_{m+2} + 3\lambda^4 c_{m+3} c_m. \quad (\text{A.5})$$

Puisque chacun des termes de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^0$  est positif, montrons que cet état annule chacun des ces termes. Tout d'abord, aucune configuration de  $|\Psi_{GS}\rangle$  ne contient deux particules à une distance de 2 orbitales, donc

$$\hat{n}_{m+2} \hat{n}_m |\Psi_{GS}\rangle = 0 \quad , \quad \text{pour tout } m \quad (\text{A.6})$$

De plus, aux bords, pour toute configuration  $|\{n_m\}\rangle$  contenue dans la décomposition de  $|\Psi_{GS}\rangle$ , soit  $n_G = 1$  et  $n_{G+1} = 0$  soit l'inverse ( $n_G = 0$  et  $n_{G+1} = 1$ ). Donc  $|\Psi_{GS}\rangle$  annule le terme de bord :

$$\hat{n}_G \hat{n}_{G+1} |\Psi_{GS}\rangle = 0 \quad , \quad \hat{n}_D \hat{n}_{D-1} |\Psi_{GS}\rangle = 0 \quad (\text{A.7})$$

Si  $\{|n_m\rangle\}$  est une configuration quelconque contenue dans la décomposition de  $|\Psi_{GS}\rangle$ , elle prend une des forme suivante au voisinage de  $m = 3p$  :

$$|\overset{3p}{\downarrow}00100..\rangle, \quad |..\overset{3p}{\downarrow}11000..\rangle, \quad |..\overset{3p}{\downarrow}00011..\rangle \quad (\text{A.8})$$

Donc  $C_{3p-1}|\Psi_{GS}\rangle = (c_{3p}c_{3p+1} + 3\lambda^4 c_{3p+2}c_{3p-1})|\Psi_{GS}\rangle = 0$  puisque dans aucun des cas on a  $n_{3p}n_{3p+1} > 0$  ou  $n_{3p-1}n_{3p+2} > 0$ . De même,  $C_{3p-2}|\Psi_{GS}\rangle = 0$  pour tout  $p$ .

Enfin, montrons que  $C_{3p}|\Psi_{GS}\rangle = 0$  pour tout  $p$ . Tout d'abord,  $[\hat{S}_{3p}, \hat{S}_{3q}] = [\hat{S}_{3p}, C_{3q}] = 0$  si  $|q - p| \geq 1$ . Donc :

$$C_{3p}|\Psi_{GS}\rangle = \prod_{q \neq p} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3q}) C_{3p} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001..1001\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Or

$$(1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001..1001\rangle = |\overset{3p-1}{\downarrow}1001001001..\rangle + 3\lambda^4 |\overset{3p-1}{\downarrow}1000\overset{\curvearrowright}{1}\overset{\curvearrowright}{1}0001..\rangle \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} C_{3p} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_{3p}) |1001..1001\rangle &= 3\lambda^4 |\overset{3p-1}{\downarrow}1000000001..\rangle - 3\lambda^4 |\overset{3p-1}{\downarrow}1000000001..\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

C'est à dire que  $C_{3p}|\Psi_{GS}\rangle = 0$  pour tout  $p$ .

Nous avons donc montré en ces quelques lignes que  $|\Psi_{GS}\rangle$  est un état propre de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  d'énergie zéro.

## A.2 Espace des états d'énergie zéro

Construisons ici l'ensemble des états d'énergie zéro de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  étendus sur un nombre quelconque d'orbitales. D'après la remarque de la section (2.3.3) qui s'applique aussi à  $\mathcal{H}^9$  et  $\tilde{\mathcal{H}}^9$  puisqu'ils sont positifs, tout état propre d'énergie zéro de  $\tilde{\mathcal{H}}_F^9$  (disposant de limites en  $G$  et  $D$ ) est aussi un état propre d'énergie zéro de  $\mathcal{H}_F^9$  (dépourvu de limites). Oublions donc ici le tilde dans les notation et notons indifféremment  $\Psi$  un état sur l'espace de Hilbert aux limites  $G$  et  $D$ , et  $\Psi$  un état étendu sur  $D - G + 1$  orbitales au sein de l'espace complet (sans limites).

Si  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  sont deux états d'énergie zéro de  $\mathcal{H}_F^9$  à  $N_1$  et  $N_2$  particules étendus sur  $N_{\phi_1}$  et  $N_{\phi_2}$  orbitales respectivement. L'état

$$\Psi = \Phi_1 \otimes \underbrace{|0..0\rangle}_{p \text{ termes}} \otimes \Phi_2, \quad p \geq 3 \quad (\text{A.12})$$

est un état propre de  $\mathcal{H}_F^9$  à  $N_1 + N_2$  particules et étendu sur  $N_{\phi_1} + N_{\phi_2} + p$  orbitales. En effet, les opérateurs  $\hat{n}_{m+2}\hat{n}_m$  et  $C_m$  agissent sur une distance 3, donc  $\mathcal{H}_F^9 \Psi = \mathcal{H}_F^9 [\Phi_1] \otimes |0..0\rangle \otimes \Phi_2 + \Phi_1 \otimes |0..0\rangle \otimes \mathcal{H}_F^9 [\Phi_2] = 0$ .

### A.3 Calcul de la distribution d'impulsion : $\langle \hat{n}_m \rangle$

---

D'après les spectres numériques, il semblerait que la famille d'états ainsi construite génère tous les états propres d'énergie zéro de  $\mathcal{H}_F^9$ , mais je n'ai pas de preuve de ceci.

Il est commode de réécrire tous ces états sous une même forme. Tout d'abord, on peut réécrire

$$|\Psi_{GS}\rangle = \prod_m (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_m) |1001001..1001\rangle. \quad (\text{A.13})$$

En effet, les termes  $S_{3p-1}$  et  $S_{3p-2}$  sont muets dans cette expression. Ceci peut se voir par récurrence sur  $p$  décroissant. Supposons que  $S_{3q-1}$  et  $S_{3q-2}$  soient muets pour tout  $q \geq p$ . Soit  $\Psi = \prod_{q \geq p} (1 + 3\lambda^4 \hat{S}_m) |1001001..1001\rangle$ . Toute configuration  $\{|n_m\rangle\}$  contenue dans la décomposition de  $\Psi$ , vaut au voisinage de  $m = 3p$  :

$$|..00\overset{3p}{\downarrow}100.. \rangle, \quad \text{ou} \quad |..000\overset{3p}{\downarrow}11.. \rangle \quad (\text{A.14})$$

Donc  $S_{3q-1} = c_{3q}^\dagger c_{3q+1}^\dagger c_{3q+2} c_{3q-1}$  s'annule sur  $\Psi$ , ainsi que  $S_{3q-2} = c_{3q-1}^\dagger c_{3q}^\dagger c_{3q+1} c_{3q-2}$ . L'initialisation est triviale sur le bord droit de l'état.

### A.3 Calcul de la distribution d'impulsion : $\langle \hat{n}_m \rangle$

Nous calculons ici le nombre d'occupation moyen, ou la distribution d'impulsion, de l'état  $|\Psi_{GS}\rangle$ . Nous utilisons pour cela l'expression en terme de Produits de Matrice (MP) de la fonction d'onde  $|\Psi_{GS}\rangle$  (3.33) qui se réécrit :

$$\Psi_{GS} = A g_{1\alpha} g_{\alpha\beta} \dots g_{\gamma 1} \quad (\text{A.15})$$

$\Psi_{GS}$  est pris normalisé à 1 donc

$$\langle \Psi_{GS} | \Psi_{GS} \rangle = A^2 (g_{1\alpha}^\dagger g_{1\alpha}) (g_{\alpha\beta}^\dagger g_{\alpha\beta}) \dots (g_{\gamma 1}^\dagger g_{\gamma 1}) = A^2 [G^N]_{11} \quad (\text{A.16})$$

où

$$G = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = 9\lambda^8 \quad (\text{A.17})$$

Soit  $\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4t}}{2}$  et  $\beta = \frac{1-\sqrt{1+4t}}{2}$  les deux valeurs propres de  $G$ , on écrit

$$G = PDP^{-1} \quad (\text{A.18})$$

avec :

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

Ainsi,

$$G^k = PD^k P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^{k+1} - \beta^{k+1} & \alpha\beta^{k+1} - \beta\alpha^{k+1} \\ \alpha^k - \beta^k & \alpha\beta^k - \beta\alpha^k \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

et donc

$$A^2 = \frac{1}{[G^N]_{11}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha^{N+1} - \beta^{N+1}}. \quad (\text{A.21})$$

Pour calculer la distribution en impulsion on remarque que  $\hat{n}_{3p+r}$  n'agit que sur le  $(p+1)$ -ième terme dans la représentation A.15 de  $|\Psi_{GS}\rangle$ . Nous prenons comme convention que les orbitales de  $|\Psi_{GS}\rangle$  vont de 0 à  $3N-1$ . On peut donc écrire :

$$\langle \Psi_{GS} | \hat{n}_{3p} | \Psi_{GS} \rangle = A^2 \underbrace{(g_{1\alpha}^\dagger g_{1\alpha}) \cdots (g_{\beta\delta}^\dagger g_{\beta\delta})}_{p \text{ termes}} (g_{\delta\gamma}^\dagger \hat{n}_{3p} g_{\delta\gamma}) \cdots \underbrace{(g_{\epsilon 1}^\dagger g_{\epsilon 1})}_{N-p-1 \text{ termes}} \quad (\text{A.22})$$

$$= A^2 [G^p N G^{N-p-1}]_{11} \quad (\text{A.23})$$

et

$$\langle \Psi_{GS} | \hat{n}_{3p} | \Psi_{GS} \rangle = A^2 [G^p M G^{N-p-1}]_{11} \quad (\text{A.24})$$

pour  $r = 1, 2$  avec :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

On obtient alors :

$$n_{3p} = \langle \hat{n}_{3p} \rangle = \frac{(\alpha^{p+1} - \beta^{p+1})(\alpha^{N-p} - \beta^{N-p})}{(\alpha - \beta)(\alpha^{N+1} - \beta^{N+1})} \quad (\text{A.26})$$

$$n_{3p+r} = \langle \hat{n}_{3p+r} \rangle = \frac{t(\alpha^{p+1} - \beta^{p+1})(\alpha^{N-p-1} - \beta^{N-p-1})}{(\alpha - \beta)(\alpha^{N+1} - \beta^{N+1})} \quad (\text{A.27})$$

Le nombre d'occupation moyen dans le volume de l'état est obtenu en faisant  $N \rightarrow \infty$ ,  $p \rightarrow \infty$  et  $N-p \rightarrow \infty$  :

$$n_{3p}^{Bulk} = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \quad (\text{A.28})$$

$$n_{3p+r}^{Bulk} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \right) \quad (\text{A.29})$$

Le nombre d'occupation proche du bord gauche est obtenu en faisant  $N \rightarrow \infty$  mais en gardant  $p$  fini. On obtient :

$$n_{3p+r}^{Edge} = n_{3p+r}^{Bulk} \left[ 1 - \left( \frac{1 - \sqrt{1+4t}}{1 + \sqrt{1+4t}} \right)^{p+1} \right] \quad (\text{A.30})$$

---

---

# Remerciements

---

Je voudrais profiter de ces quelques lignes pour remercier tous ceux avec qui j'ai partagé ces belles années de doctorat.

Je voudrais tout d'abord remercier chaleureusement Thierry pour son encadrement exemplaire tout au long de ma thèse et pour ces moments formidables passés à explorer ensemble les méandres de l'effet Hall. Merci d'avoir été toujours disponible pour répondre à mes questionnements physiques ou métaphysiques, et de m'avoir soutenu sans faille pendant les moments plus difficiles.

I am also grateful to Marcel for the very warm welcome I received at the University of British Columbia and within the group. Thank you for all the science I learn among your team, and for this beautiful collaboration carried out in such a limited time.

Je tenais à remercier Philippe pour toutes ces discussions scientifiques endiablées du vendredi matin.

I would like to express my gratitude to all the jury members for their benevolent participation to my thesis defence and for the interest they show for my work. Thank you very much Malte and Edmond for looking over my manuscript with care and for the precise comments. Thank you Steve Simon for the enlightened commentaries and for coming to Orsay-Ville RER B despite the Air France strike. Thank you to President Mark for reviewing thoroughly my thesis and for all the fruitful discussions we had all through those years.

Je remercie également tous les membres du LPTMS, en particulier Claudine, Géraldine et Vincent, de contribuer à cette atmosphère sympathique et chaleureuse qui règne au laboratoire. Merci à tous les chercheurs du LPTMS et d'ailleurs avec lesquels j'ai eu la chance de discuter de science ou autre. Merci aussi à Nicolas Regnault pour les conseils d'initiation au milieu de l'effet Hall quantique fractionnaire.

Cette thèse aurait difficilement vu le jour sans l'encouragement et la tendresse de mon amour, Cécilia. Merci de tout mon cœur de rendre ma vie si heureuse et douce chaque jour.

Je remercie aussi tendrement mes parents de m'avoir donné le goût aux sciences et à la recherche. Cette thèse aurait été truffée de fautes d'orthographe si Véronique n'était pas venue à la rescousse sur la dernière ligne droite, un grand merci du petit neveu.

Un bon gros hug à Stéphane, qui m'a accueilli dans sa belle maisonnée sur la 28ème, et qui m'a fait découvrir BC et ses Vancouverites à bord de son mythique char. Merci aussi à tonton Pierrot, Caroline, Luc, Éloi, et Noé de m'avoir si bien accueilli dans leurs

petit coin de paradis en bordure de Pacifique.

J'en profite également pour remercier les potes du labo, qui ont égailé mes dures journées de labeur. À commencer par ces énergumènes d'Arthur et Simon qui n'ont cessé de m'en-grainer à aller taper le carton ou à d'autres frivolités pendant que la science avançait. Une grande embrassade à mon camarade Pilou, partenaire de poses clopes adoré. Merci aussi à Silvia et son caractère al dente ainsi qu'à tous les autres jeunes physiciens du LPTMS.

Un grand merci à Nico, autre mordu des 2DEGs et génialissime partenaire bibli. Enfin, je voudrais témoigner ma sincère staiverie aux crabes et chien-loups qui rodent à mes côté depuis mon plus jeune âge.

---

# Bibliographie

---

- Ando, M., Endo, A., Katsumoto, S. & Iye, Y. (1998), ‘Conduction through point contacts in fractional quantum hall liquid’, *Physica B : Condensed Matter* **249–251**(0), 426 – 429.
- Bergholtz, E. J., Hansson, T. H., Hermanns, M. & Karlhede, A. (2007), ‘Microscopic theory of the quantum hall hierarchy’, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 256803.
- Bergholtz, E. J. & Karlhede, A. (2006), ‘‘one-dimensional’’ theory of the quantum hall system’, *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment* **2006**(04), L04001.
- Bergholtz, E. J. & Karlhede, A. (2008), ‘Quantum hall system in tao-thouless limit’, *Phys. Rev. B* **77**, 155308.
- Bernevig, B. A. & Haldane, F. D. M. (2008), ‘Model fractional quantum hall states and jack polynomials’, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 246802.
- Bonderson, P., Kitaev, A. & Shtengel, K. (2006), ‘Detecting non-abelian statistics in the  $\nu=5/2$  fractional quantum hall state’, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016803.
- Büttiker, M. (1988), ‘Absence of backscattering in the quantum hall effect in multiprobe conductors’, *Phys. Rev. B* **38**, 9375–9389.
- Chamon, C. d. C. & Wen, X. G. (1994), ‘Sharp and smooth boundaries of quantum hall liquids’, *Phys. Rev. B* **49**, 8227–8241.
- Chang, A. M. (2003), ‘Chiral luttinger liquids at the fractional quantum hall edge’, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1449–1505.
- Chklovskii, D. B., Shklovskii, B. I. & Glazman, L. I. (1992), ‘Electrostatics of edge channels’, *Phys. Rev. B* **46**, 4026–4034.
- Cooper, N. (2008), ‘Rapidly rotating atomic gases’, *Advances in Physics* **57**(6), 539–616.
- de C. Chamon, C., Freed, D. E., Kivelson, S. A., Sondhi, S. L. & Wen, X. G. (1997), ‘Two point-contact interferometer for quantum hall systems’, *Phys. Rev. B* **55**, 2331–2343.
- de Picciotto, R., Reznikov, M., Heiblum, M., Umansky, V., Bunin, G. & Mahalu, D. (1997), ‘Direct observation of a fractional charge’, *Nature* **389**, 162–164.

- Eisenstein, J. P., Stormer, H. L., Pfeiffer, L. & West, K. W. (1989), ‘Evidence for a phase transition in the fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1540–1543.
- Fannes, M., Nachtergaele, B. & Werner, R. (1992), ‘Finitely correlated states on quantum spin chains’, *Communications in Mathematical Physics* **144**(3), 443–490.
- Fano, G., Ortolani, F. & Colombo, E. (1986), ‘Configuration-interaction calculations on the fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. B* **34**(4), 2670–2680.
- Geller, M. R., Loss, D. & Kirczenow, G. (1996), ‘Mesoscopic effects in the fractional quantum hall regime : Chiral luttinger liquid versus fermi liquid’, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 5110–5113.
- Girardeau, M. (1960), ‘Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension’, *Journal of Mathematical Physics* **1**(6), 516–523.
- Girardeau, M., Nguyen, H. & Olshanii, M. (2004), ‘Effective interactions, fermi–bose duality, and ground states of ultracold atomic vapors in tight de broglie waveguides’, *Optics Communications* **243**(1–6), 3–22.
- Girvin, S. M., MacDonald, A. H. & Platzman, P. M. (1986), ‘Magneto-roton theory of collective excitations in the fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. B* **33**, 2481–2494.
- Grayson, M., Tsui, D. C., Pfeiffer, L. N., West, K. W. & Chang, A. M. (1998), ‘Continuum of chiral luttinger liquids at the fractional quantum hall edge’, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1062–1065.
- Haldane, F. D. M. (1981), ‘luttinger liquid theory’ of one-dimensional quantum fluids. i. properties of the luttinger model and their extension to the general 1d interacting spinless fermi gas’, *Journal of Physics C : Solid State Physics* **14**(19), 2585.
- Haldane, F. D. M. (1983), ‘Fractional quantization of the hall effect : A hierarchy of incompressible quantum fluid states’, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 605–608.
- Haldane, F. D. M. (1985), ‘Many-particle translational symmetries of two-dimensional electrons at rational landau-level filling’, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 2095–2098.
- Haldane, F. D. M. & Rezayi, E. H. (1988), ‘Spin-singlet wave function for the half-integral quantum hall effect’, *Phys. Rev. Lett.* **60**, 956–959.
- Halperin, B. I. (1982), ‘Quantized hall conductance, current-carrying edge states, and the existence of extended states in a two-dimensional disordered potential’, *Phys. Rev. B* **25**, 2185–2190.  
URL: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.25.2185>
- Halperin, B. I., Lee, P. A. & Read, N. (1993), ‘Theory of the half-filled landau level’, *Phys. Rev. B* **47**, 7312–7343.

- Henkel, M. (1999), *Conformal Invariance and Critical Phenomena*, Texts and monographs in physics, Springer.
- Jain, J. K. (2007), *Composite Fermions*, Cambridge University Press.
- Jastrow, R. (1955), ‘Many-body problem with strong forces’, *Phys. Rev.* **98**, 1479–1484.
- Jolad, S., Chang, C.-C. & Jain, J. K. (2007), ‘Electron operator at the edge of the 1/3 fractional quantum hall liquid’, *Phys. Rev. B* **75**, 165306.
- Jolad, S. & Jain, J. K. (2009), ‘Testing the topological nature of the fractional quantum hall edge’, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 116801.
- Jolad, S., Sen, D. & Jain, J. K. (2010), ‘Fractional quantum hall edge : Effect of nonlinear dispersion and edge roton’, *Phys. Rev. B* **82**, 075315.
- Kallin, C. & Halperin, B. I. (1984), ‘Excitations from a filled landau level in the two-dimensional electron gas’, *Phys. Rev. B* **30**, 5655–5668.
- Klitzing, K. v., Dorda, G. & Pepper, M. (1980), ‘New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized hall resistance’, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494–497.
- Laidlaw, M. G. G. & DeWitt, C. M. (1971), ‘Feynman functional integrals for systems of indistinguishable particles’, *Phys. Rev. D* **3**, 1375–1378.
- Lam, P. K. & Girvin, S. M. (1984), ‘Liquid-solid transition and the fractional quantum-hall effect’, *Phys. Rev. B* **30**, 473–475.
- Laughlin, R. B. (1981), ‘Quantized hall conductivity in two dimensions’, *Phys. Rev. B* **23**, 5632–5633.
- Laughlin, R. B. (1983), ‘Anomalous quantum hall effect : An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations’, *Phys. Rev. Lett.* **50**(18), 1395–1398.
- Leinaas, J. M. & Myrheim, J. (1977), ‘On the theory of identical particles’, *Il Nuovo Cimento B Series 11* **37**(1), 1–23.
- Lenard, A. (1964), ‘Momentum distribution in the ground state of the one-dimensional system of impenetrable bosons’, *Journal of Mathematical Physics* **5**(7), 930–943.
- Lieb, E. H. & Liniger, W. (1963), ‘Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state’, *Phys. Rev.* **130**, 1605–1616.
- MacDonald, A. H. (1990), ‘Edge states in the fractional-quantum-hall-effect regime’, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 220–223.

- MacDonald, A. H. (1994), ‘Introduction to the physics of the quantum hall regime’, *arXiv preprint cond-mat/9410047*.
- Mandal, S. S. & Jain, J. (2001), ‘How universal is the fractional-quantum-hall edge luttinger liquid?’, *Solid State Communications* **118**(10), 503 – 507.
- Milliken, F., Umbach, C. & Webb, R. (1996), ‘Indications of a luttinger liquid in the fractional quantum hall regime’, *Solid State Communications* **97**(4), 309 – 313.
- Milovanović, M. & Read, N. (1996), ‘Edge excitations of paired fractional quantum hall states’, *Phys. Rev. B* **53**, 13559–13582.
- Moore, G. & Read, N. (1991), ‘Nonabelions in the fractional quantum hall effect’, *Nuclear Physics B* **360**(2–3), 362 – 396.
- Morf, R. H. (1998), ‘Transition from quantum hall to compressible states in the second landau level : New light on the  $\nu=5/2$  enigma’, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 1505–1508.
- Nakamura, M., Wang, Z.-Y. & Bergholtz, E. J. (2012), ‘Exactly solvable fermion chain describing a  $\nu=1/3$  fractional quantum hall state’, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 016401.
- Nayak, C., Simon, S. H., Stern, A., Freedman, M. & Das Sarma, S. (2008), ‘Non-abelian anyons and topological quantum computation’, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1083–1159.
- Nayak, C. & Wilczek, F. (1996), ‘2n-quasihole states realize 2n-1-dimensional spinor braiding statistics in paired quantum hall states’, *Nuclear Physics B* **479**(3), 529 – 553.
- Palacios, J. J. & MacDonald, A. H. (1996), ‘Numerical tests of the chiral luttinger liquid theory for fractional hall edges’, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 118–121.
- Pan, W., Serafin, A., Xia, J. S., Yin, L., Sullivan, N. S., Baldwin, K. W., West, K. W., Pfeiffer, L. N. & Tsui, D. C. (2014), ‘Competing quantum hall phases in the second landau level in the low-density limit’, *Phys. Rev. B* **89**, 241302.
- Pan, W., Xia, J.-S., Shvarts, V., Adams, D. E., Stormer, H. L., Tsui, D. C., Pfeiffer, L. N., Baldwin, K. W. & West, K. W. (1999), ‘Exact quantization of the even-denominator fractional quantum hall state at  $\nu = 5/2$  landau level filling factor’, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3530–3533.
- Peterson, M. R. & Nayak, C. (2013), ‘More realistic hamiltonians for the fractional quantum hall regime in gaas and graphene’, *Phys. Rev. B* **87**, 245129.
- Read, N. & Rezayi, E. (1999), ‘Beyond paired quantum hall states : Parafermions and incompressible states in the first excited landau level’, *Phys. Rev. B* **59**, 8084–8092.  
**URL:** <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.59.8084>

- Regnault, N. & Jolicoeur, T. (2004), ‘Quantum hall fractions for spinless bosons’, *Phys. Rev. B* **69**, 235309.
- Rezayi, E. H. & Haldane, F. D. M. (1994), ‘Laughlin state on stretched and squeezed cylinders and edge excitations in the quantum hall effect’, *Phys. Rev. B* **50**, 17199–17207.
- Rezayi, E. H. & Haldane, F. D. M. (2000), ‘Incompressible paired hall state, stripe order, and the composite fermion liquid phase in half-filled landau levels’, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4685–4688.
- Saminadayar, L., Glattli, D. C., Jin, Y. & Etienne, B. (1997), ‘Observation of the  $e/3$  fractionally charged laughlin quasiparticle’, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2526–2529.
- Scarola, V. W., Jain, J. K. & Rezayi, E. H. (2002), ‘Possible pairing-induced even-denominator fractional quantum hall effect in the lowest landau level’, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 216804.
- Sodemann, I. & MacDonald, A. H. (2013), ‘Landau level mixing and the fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. B* **87**, 245425.
- Soulé, P. & Franz, M. (2014), ‘Quasiparticle spectroscopy as a probe of the topological phase in graphene with heavy adatoms’, *Phys. Rev. B* **89**, 201410.
- Soulé, P. & Jolicoeur, T. (2012*a*), ‘Edge properties of principal fractional quantum hall states in the cylinder geometry’, *Phys. Rev. B* **86**, 115214.
- Soulé, P. & Jolicoeur, T. (2012*b*), ‘Exact wave functions for excitations of the  $\nu = 1/3$  fractional quantum hall state from a model hamiltonian’, *Phys. Rev. B* **85**, 155116.
- Soulé, P., Jolicoeur, T. & Lecheminant, P. (2013), ‘Many-body study of a quantum point contact in the fractional quantum hall regime at  $\nu = 5/2$ ’, *Phys. Rev. B* **88**, 235107.
- Stern, A. & Halperin, B. I. (2006), ‘Proposed experiments to probe the non-abelian  $\nu=5/2$  quantum hall state’, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 016802.
- Stormer, H. L. (1999), ‘Nobel lecture : The fractional quantum hall effect’, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 875–889.
- Tao, R. & Thouless, D. J. (1983), ‘Fractional quantization of hall conductance’, *Phys. Rev. B* **28**, 1142–1144.
- Thouless, D. (1984), ‘Theory of the quantized hall effect’, *Surface Science* **142**(1–3), 147 – 154.
- Tóke, C., Regnault, N. & Jain, J. K. (2007), ‘Nature of excitations of the  $\frac{5}{2}$  fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 036806.

- Tsui, D. C., Stormer, H. L. & Gossard, A. C. (1982), ‘Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit’, *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559–1562.
- Turley, P., Druist, D., Gwinn, E., Maranowski, K., Campmann, K. & Gossard, A. (1998), ‘Tunneling through point contacts in the quantum hall effect’, *Physica B : Condensed Matter* **249–251**(0), 410 – 414.
- Varjas, D., Zaletel, M. P. & Moore, J. E. (2013), ‘Chiral luttinger liquids and a generalized luttinger theorem in fractional quantum hall edges via finite-entanglement scaling’, *Phys. Rev. B* **88**, 155314.
- Venkatachalam, V., Hart, S., Pfeiffer, L., West, K. & Yacoby, A. (2012), ‘Local thermometry of neutral modes on the quantum hall edge’, *Nat. Phys.* **8**, 676–681.
- Wan, X., Hu, Z.-X., Rezayi, E. H. & Yang, K. (2008), ‘Fractional quantum hall effect at  $\nu = 5/2$  : Ground states, non-abelian quasiholes, and edge modes in a microscopic model’, *Phys. Rev. B* **77**, 165316.
- Wan, X., Rezayi, E. H. & Yang, K. (2003), ‘Edge reconstruction in the fractional quantum hall regime’, *Phys. Rev. B* **68**, 125307.
- Wan, X., Yang, K. & Rezayi, E. H. (2006), ‘Edge excitations and non-abelian statistics in the moore-read state : A numerical study in the presence of coulomb interaction and edge confinement’, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 256804.
- Weeks, C., Hu, J., Alicea, J., Franz, M. & Wu, R. (2011), ‘Engineering a robust quantum spin hall state in graphene via adatom deposition’, *Phys. Rev. X* **1**, 021001.
- Wen, X. G. (1990), ‘Chiral luttinger liquid and the edge excitations in the fractional quantum hall states’, *Phys. Rev. B* **41**, 12838–12844.
- Wen, X. G. (1991), ‘Gapless boundary excitations in the quantum hall states and in the chiral spin states’, *Phys. Rev. B* **43**, 11025–11036.
- Wen, X.-G. (1992), ‘Theory of the edge states in fractional quantum hall effects’, *International Journal of Modern Physics B* **06**(10), 1711–1762.
- Wen, X.-G. (1993), ‘Topological order and edge structure of  $\nu = 1/2$  quantum hall state’, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 355–358.
- Wen, X.-G. (1995), ‘Topological orders and edge excitations in fractional quantum hall states’, *Advances in Physics* **44**(5), 405–473.
- Willett, R., Eisenstein, J. P., Störmer, H. L., Tsui, D. C., Gossard, A. C. & English, J. H. (1987), ‘Observation of an even-denominator quantum number in the fractional quantum hall effect’, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 1776–1779.

- Willett, R. L., Nayak, C., Shtengel, K., Pfeiffer, L. N. & West, K. W. (2013), ‘Magnetic-field-tuned aharonov-bohm oscillations and evidence for non-abelian anyons at  $\nu=5/2$ ’, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 186401.
- Willett, R. L., Pfeiffer, L. N. & West, K. W. (2010), ‘Alternation and interchange of  $e/4$  and  $e/2$  period interference oscillations consistent with filling factor  $5/2$  non-abelian quasiparticles’, *Phys. Rev. B* **82**, 205301.
- Wu, T. T. & Yang, C. N. (1976), ‘Dirac monopole without strings : Monopole harmonics’, *Nuclear Physics B* **107**(3), 365–380.
- Yang, S., Mitra, S., Fisher, M. & MacDonald, A. (1996), ‘Momentum distribution function of a narrow hall bar in the fqhe regime’, *J. Korean Phys. Soc.* **29**, S10.
- Yoshioka, D. (1993), ‘Fractional quantum hall states in narrow channels’, *Journal of the Physical Society of Japan* **62**(3), 839–842.
- Yoshioka, D. (2002), *The Quantum Hall Effect*, Springer.
- Zaletel, M. P. & Mong, R. S. K. (2012), ‘Exact matrix product states for quantum hall wave functions’, *Phys. Rev. B* **86**, 245305.