UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE N°:427
INFORMATIQUE DE PARIS-SUD

Laboratoire: Laboratoire de Recherche en Informatique

Thèse de doctorat

SYNTHÈSE EN FRANÇAIS

par

Chen WANG

Variants of Deterministic and Stochastic Nonlinear Optimization Problems

Date de soutenance: 31/10/2014

Composition du jury:

Directeur de thèse :	M. Abdel Lisser
Rapporteurs :	Mme. Janny Leung
	M. Alexandre Caminada
Examinateurs :	M. Sylvain Conchon
	M. Pablo Adasme

Les problèmes d'optimisation combinatoire consistent sous des contraintes bien déterminées à trouver la solution optimale parmi l'ensemble des solutions. Le modèle mathématique général peut s'écrire comme suit:

$$\begin{aligned} min \quad & f(x) \\ s.t. \quad & g(x) \leq 0 \\ & x \in D \end{aligned} \tag{1}$$

où x est la variable de décision, $f(x)$ est la fonction objective, $g(x)$ est la contrainteet, D est l'ensemble constitué d'un nombre fini de points.

Un problème d'optimisation combinatoire peut être représenté par trois paramètres (D, F, f). D est le domaine de définition des variables de décision. F représente la région réalisable: $F = \{x|x \in D, g(x) \leq 0\}$, et l'élément dans F est appelée une solution réalisable pour le problème d'optimisation combinatoire. f est la fonction objective et la solution réaliste x qui satisfait $f(x^*) = min\{f(x)|x \in F\}$ est appelée la solution optimale pour le problème.

La caractéristique de l'optimisation combinatoire est que la solution réalisable est défini dans unensemble fini. Par conséquent, à condition que les points finis soient déterminés un par un pour vérifier s'ils respectent les contraintes et comparer avec la valeur de la fonction objective, la solution optimale du problème doit exister et peut être obtenue. Car dans la vraie vie, la plupart des problèmes d'optimisation consiste à choisir la meilleure solution entièreparmi un nombre fini de solutions, puis de nombreux problèmes d'optimisation pratiques sont des problèmes d'optimisation combinatoire. Le problème d'optimisation combinatoire typique comprend : le problème de voyageur de commerce (TSP), le problème de planification (tels que flow-shop, job-shop), le problème de sac à dos, le problème d'emballage, le problème de coloriage de graphe, le problème de clustering, etc.

La définition des problèmes d'optimisation combinatoire montre que chaque problème peut avoirune solution optimale à l'aide de méthodes d'énumération. La méth-

ode d'énumération prend le temps nécessaire à trouver la solution optimale, et parfois les temps d'exécution peuvent être acceptés, mais ce n'est pas toujours le cas. Ainsi, l'analyse de l'algorithme d'énumération doit tenir compte de la complexité de l'espace et du temps d'exécution du problème.

La complexité d'un algorithme ou un problème est généralement exprimé par une fonction de la taille de problème qui vaut n. La complexité de temps est notée $T(n)$ et la complexité de l'espace est notée comme $S(n)$. Dans l'analyse et conception d'algorithmes, les opérations élémentaires pour résoudre le problème comme l'addition, la soustraction, la multiplication et la comparaison sont définies comme des opérations de base. Ainsi, le nombre d'opérations de base dans un algorithme est défini comme la complexité de temps des algorithmes, et l'unité de stockage des algorithmes au cours de l'exécution est la complexité de l'espace de l'algorithme.

Si la complexité d'un algorithme A est $T_A(n) = O(p(n))$ et $p(n)$ est la fonction polynôme de n, l'algorithme A est donc un algorithme polynomial. Cependant, pour beaucoup de problèmes, il n'y a pas d'algorithme polynomial pour les résoudre. Ces problèmes peuvent nécessiter des temps d'exécution exponentiels pour trouver la solution. Lorsque le problème est grand, le temps d'un tel problème est souvent non accepté.

C'est parce que certains problèmes importants en pratique d'optimisation combinatoire n'ont pas été résolus en temps polynomial pour trouver la solution optimale que les chercheurs essaient d'utiliser des méthodes appelées heuristiques qui peuvent ne pas être en mesure d'obtenir la solution optimale.

L'algorithme exact permet d'obtenir la solution optimale pour les problèmes, mais son temps de calcul peut être inacceptable. En particulier dans les applications d'ingénierie, le temps de calcul est unindicateur important de la faisabilité de l'algorithme. Par conséquent, les algorithmes exacts ne peuvent résoudre que les problèmes de relativement petite taille avec un temps de calcul raisonnable. Afin d'équilibrer la relation entre les coûts de calcul et de la qualité des résultats, les algorithmes heuristiques ont commencé à être utilisés pour résoudre des problèmes d'optimisation combinatoire.

Cependant, la plupart des heuristiques proposées pour les problèmes d'optimisation combinatoire étaient spécifiques et dédiés à un problème donné. Par conséquent, des techniques plus générales ont été proposées, appelées métaheuristiques. Puisqueles métaheuristiques ne s'appuient pas surla structure de l'information des problèmes, elles peuvent être appliquées à de nombreux types de problèmes d'optimisation combinatoire.

En résumé, une métaheuristique est une technique plus générale que l'heuristique. Une métaheuristique peut trouver une solution suffisamment bonne par rapport à la solution optimale pour le problème d'optimisation avec moins d'hypothèses contraignantes. Par conséquent, les métaheuristiques ont été mises au point rapidement et sont largement utilisées. Les algorithmes classiques de métaheuristiques les plus utilisées comprennent : le recuit simulé (SA), la recherche tabou (TS), la recherche à voisinage variable (VNS), les algorithmes génétiques (AG), la recherche scatter(SS)...

L'algorithme de recherche à voisinage variable est une métaheuristique récente qui comprend une structurede voisinage dynamique. Cet algorithme est plus général et donne plus de liberté, qui peut être conçu sous diverses formes pour résoudre des problèmes particuliers.

L'idée fondamentale de VNS consiste à systématiquement modifier la structure de voisinage pour élargir la zone de recherche dans le processus de recherche et obtenir une solution optimale locale; puis basé sur cet optimum local, trouver une autre solution optimale locale en changeant la structure de voisinage afin d'élargir l'espace de recherche. Étant donné que la recherche à voisinage variable est souvent utilisée, elleconstitue l'un des axesimportants de recherche dans le domaine des métaheuristiques.

L'idée de VNS est simple et facile à mettre en œuvre, et la structure de l'algorithme est indépendante du problème. VNS est donc plus approprié pour la résolution de toutes sortes de problème d'optimisation. En outre, VNS peut être inclus dans d'algorithmes d'optimisation. Un grand nombre d'expériences et applications pratiques montre que cette recherche à voisinage variable et ses variantes sont en mesure de trouver une bonne solution proche de la solution optimaledans un temps de cal-

culraisonnable.

En raison de l'efficacité du VNS, nous avons appliqué cet algorithme pour résoudre nos problèmes d'optimisation. Notre thèse commence par un problème d'optimisation combinatoire déterministe : le problème de minimisation de largeur de bande (MBM-P). Ce problème est bien connu et consiste à trouver une permutation des lignes et des colonnes d'une matrice clairsemée afin de garder les éléments non nuls dans une bande qui soit le proche possible de la diagonale principale. Le problème de minimisation de largeur de bande peut aussi être modélisé à l'aide de graphe qui consiste à trouver un étiquetage f qui minimise la largeur de bande.

Le problème de minimisation de largeur de bande de matrices a son origine dans les années 1950 lorsque les ingénieurs ont d'abord analysé les cadres en acier par ordinateurs : lorsque toutes les entrées non nulles sont dans une étroite bande autour de la diagonale principale, les opérations telles que l'inversion d'une matrice et le calcul de déterminants sont plus faciles à faire. Pendant ce temps, le problème de largeur de bande est aussi étudié en 1962 à Jet Propulsion Laboratory qui cherche à minimiser les erreurs maximales absolues des codes de 6 bits représentées par des différences entre les arêtes d'un hypercube.

L'application principale du problème de minimisation de largeur de bande est de résoudre des systèmes linéaires de grande taille. L'élimination gaussienne peut être effectuée en $O(nb^2)$ sur des matrices de dimension n et de largeur de bande b, qui est plus rapide que l'algorithme classique qui nécessite $O(n^3)$ lorsque b est plus petit que n. En outre, le problème de minimisation de largeur de bande a un large éventail d'autres applications, par exemple, le stockage de données, la conception VLSI, la sécurisation des réseaux, les industries électromagnétiques, l'économie des médias hypertextes, les méthodes d'éléments finis, les systèmes de transmission d'énergie à grande échelle, la conception de circuits numériques.

En raison de la large gamme d'applications, le problème de minimisation de largeur de bande a suscité un vif intérêt dans l'élaboration d'algorithmes pour résoudre des problèmes pratiques depuis des années 1960. Parce que le problème de minimisation de largeur de bande a été prouvé être NP-complet, même si le graphe d'entrée est un

arbre dont le degré maximal est 3, donc sauf pour les cas les plus simples, plusieurs algorithmes heuristiques ont été proposés dans la littérature pour essayer de trouver des solutions de bonne qualité dans des temps de calcul raisonnable.

Au cours des dernières décennies, beaucoup d'articles axés sur l'utilisation de métaheuristiques pour résoudre le problème de minimisation de complexe de largeur de bande ont été publiés, par exemple la recherche Tabou, l'algorithme glouton de recherche randomisée, les algorithmes génétiques, le recuit simulé.

Dans cette thèse, l'idée de base pour l'application de métaheuristiques pour le problème de minimisation de largeur de bande consiste à transformer le problème de minimisation de largeur de bande de matrice en un problème de graphe, et appliquer la recherche de voisinage variable (VNS) pour le résoudre. En combinant la recherche locale améliorée avec la version de base de VNS et la définition des paramètres qui influent sur le changement de voisinage, les résultats de nos tests montrent que notre VNS est en compétitif par rapport à l'état de l'art du point de vue de la qualité des résultats, et aussi bien pour les petites que pour les grandes instances, notre VNS surpasse l'état de l'art du point de vue temps de calcul.

La deuxiéme partie de nos travaux de thèse porte sur les problèmes d'allocation de ressources dans des systèmes OFDMA où nous avons étudié deux modèles : celui de l'accès multiple par répartition orthogonale en fréquence qui est une technologie clé dans la communication mobile de quatrième génération (4G) et qui repose sur la technologie OFDM. Les problèmes d'allocation de ressources OFDMA peuvent être généralement divisés en problèmes de taux adaptative (RA) et en problèmes de marge adaptative (MA). Le problème de la RA est de maximiser le débit du système sous contraintes d'énergie du système, et le problème de MA permet de minimiser la perte de puissance du système soumise à la contrainte de débit.

Le premier modèle vise à maximiser la capacité totale des canaux de largeur de bande d'un réseau de liaison montante OFDMA-TDMA soumis à des contraintes d'énergie des systèmes utilisateurs et des sous-porteuses. OFDMA et TDMA sont deux régimes de transmissions multi-porteuses sans fil actuellement incorporés dans les technologies modernes comme le Wifi et le Wimax. Dans un réseau OFDMA,

l'accès multiple est réalisé en affectant des sous-ensembles différents de sous-porteuses (sous-canaux) à différents utilisateurs et en même temps maintenir les fréquences orthogonales entre les sous-porteuses. En théorie, cela signifie que les interférences entre les sous-porteuses sont complétement réduites ce qui permet des transmissions de débits simultanés de données depuis/vers plusieurs utilisateurs de/vers la station de base (BS).

Le sens de la transmission de la BS vers les utilisateurs est connu comme un processus de liaison descendante, alors que le contraire est connu comme un processus de liaison montante. Le schéma de transmission de TDMA, quant à elle, a la propriété de planification des utilisateurs dans le temps en attribuant tous les capacités du canal de largeur de bande à un seul utilisateur dans une plage horaire donnée afin de transmettre des signaux. Bien que, ces schémas de transmission fonctionnent différemment, l'objectif dans les deux entités est presque le même, c'est-à-dire, de faire une utilisation efficace d'allocation des ressources de la capacité de transmission et de largeur de bande du réseau.

A notre connaissance, les schémas de transmission joints OFDMA-TDMA n'ont pas été étudiés jusqu'à présent. En outre, le modèle proposé est plus adapté pour des applications en temps différé où les signaux peuvent être transmis à différentes plages horaires sans restrictions supplémentaires. Ensuite, nous proposons un simple VNS basée sur une approche métaheuristique pour calculer des bornes de bonne qualité pour notre problème d'optimisation hybride OFDMA-TDMA. À cette fin, nous répartissons aléatoirement l'ensemble des utilisateurs en sous-ensembles disjoints T à chaque itération de l'algorithme VNS.

Dans ce cas, nous devons résoudre T sous-problèmes d'optimisation en nombres entiers (ILP), un pour chaque sous-ensemble d'utilisateurs affectés à l'intervalle de temps $t \in \mathcal{T} = \{1, ..., T\}$. Notons qu'en principe chaque sous-problème pouvait être résolu de façon séquentielle ou en parallèle à l'aide de n'importe quelle procédure algorithmique. Comme dans notre cas, chaque sous-problème est formulé comme un problème ILP, jusqu'à maintenant, nous avons résolu plutôt sa relaxation linéaire (LP) pour calculer des bornes. En fait, c'est un aspect important dans notre ap-

proche VNS étant donné que les bornes des relaxations LP des sous-problèmes sont de bonne qualité. Étant donné que chaque utilisateur doit être affecté par la BS à un seul intervalle de temps $t \in \mathcal{T}$, la solution finale du problème peut être facilement reconstruite pour le problème d'origine à partir des solutions de chaque intervalle de temps $t \in \mathcal{T}$. La décomposition du problème nous permet d'appliquer la procédure VNS de manière efficace et aussi calculer facilement les bornes inférieures de bonne qualité. Nos résultats numériques montrentla qualité des bornes obtenues par l'algorithme proposé, par exemple, moins de 2% de saut de dualité dans la plupart des cas. En outre, les bornes ont été obtenues à un coût de calcul très faible.

Le second modèle est un modèle stochastique d'affectation de ressources pour la liaison montante multicellulaire OFDMA dans les réseaux sans fil. Nous pouvons avoir un système OFDMA consistant en une ou plusieurs BSs entourés par plusieurs utilisateurs mobiles au sein d'une zone de transmission radiale donnée. Le premier modèle est connu sous le nom de réseau OFDMA unicellulaires alors que le dernier est un réseau OFDMA multicellulaire. Le dernier modèle est de loin le plus complexe puis qu'il s'agit de l'interférence générée entre les différents utilisateurs. L'interférence entre les BSs est également possible lorsque leurs transmissions radiales se chevauchent. Le phénomène d'interférence est principalement causé par le fait que différents utilisateurs et BSs utilisent les mêmes bandes de fréquences soit pour des transmissions de liaison ascendante ou descendante.

Le deuxième modèle proposé maximise le rapport signal sur bruit (SINR) généré par un réseau OFDMA multicellulaire sous contraintes d'énergie des utilisateurs et d'affectationdes sous-porteuses. Le SINR est défini comme le rapport entre la puissance d'un signal sur la somme des puissances causées par d'autres signaux parasites, plus la valeur absolue du bruit blanc gaussien (AWGN). Maximiser SINR est pertinent dans un réseau OFDMA multicellulaire car il permet de sélectionner les meilleures sous-porteuses pour différents utilisateurs tout en exploitant simultanément la diversité multi-utilisateurs.

Dans notre thèse, nous avons transformé le modèle stochastique proposé en un problème d'optimisation non linéaire binaire déterministe équivalent ayant des termes

quadratiques et des contraintes de second ordre. Enfin, nous avons utilisé le modèle déterministe pour déduire un programme linéaire mixte équivalent. Cela permet de calculer des solutions optimales et bornes supérieures directement à l'aide de la relaxation linéaire (LP). Puisque le problème est NP-difficile, nous avons proposé une procédure métaheuristique simple basée sur VNS pour obtenir des solutions quasi-optimales. Nos résultats numériques indiquent que VNS fournit des solutions proches de l'optimale pour la plupart des cas étudiés. En outre, il fournit des solutions réalisables meilleures que celles de CPLEX pour les instances de grande taille. Enfin, ces solutions sont obtenues à un coût significativement moins important.

Plusieurs problèmes de systèmes OFDMA ou dans bien d'autres sujets d'allocation des ressources peuvent être modélisés comme des problèmes d'optimisation hiérarchie par exemple les problèmes d'optimisation à bi-niveaux. Ainsi, nous avons aussi étudié les problèmes d'optimisation stochastique bi-niveaux en utilisant l'optimisation robuste qui permet de prendre en compte l'incertitude. La programmation bi-niveaux (BP) est un cadre d'optimisation hiérarchique. Elle consiste à optimiser la fonction objective sous un ensemble de contraintes où un autre problème d'optimisation est incorporé. Le problème de premier niveau est dénommé le problème du leader tandis que celui du deuxième niveauest appelé problème du suiveur. Formellement, un problème BP peut être écrit comme suit

$$\begin{aligned} \min_{\{x \in X, y\}} \quad & F(x,y) \\ \text{s.t.} \quad & G(x,y) \leq 0 \\ & \min_{\{y\}} f(x,y) \\ & s.t. \quad g(x,y) \leq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

où $x \in R^{n_1}$, $y \in R^{n_2}$, $F : R^{n_1} \times R^{n_2} \to R$ et $f : R^{n_1} \times R^{n_2} \to R$ sont respectivement les variables de décision, la fonction objectif pour la partie supérieure et inférieure. Les fonctions $G : R^{n_1} \times R^{n_2} \to R^{m_1}$ et $g : R^{n_1} \times R^{n_2} \to R^{m_2}$ dénotent les contraintes des niveaux supérieur et inférieur. L'objectif est de trouver une solution optimale

telle que le leader et le suiveur minimisent leurs fonctions objectives respectives sous leurs contraintes couplantes respectives. Les applications de BP comprennent les problèmes de transport, de conception du réseau, de gestion et de planification entre autres. Il a été démontré que ces problèmes sont fortement NP-difficiles même pour le cas le plus simple où toutes les fonctions impliquées sont affines.

A notre connaissance, les approches d'optimisation robuste n'ont pas encore été étudiées dans la littérature pour la programmation bi-niveaux. La programmation stochastique (SP) ainsi que l'optimisation robuste (RO) sont des techniques d'optimisation bien connues pour résoudre les problèmes mathématiques impliquant l'incertitude dans les paramètres d'entrée. Dans la SP, on considère généralement que les distributions de probabilité sont connus et discrètes ou qu'elles peuvent être évaluées. Il y a deux approches de scénario bien connu en SP : le modèle de recours et l'approche utilisant les contraintes probabilistes.

A l'opposé de la SP, le cadre de l'optimisation robuste suppose que les paramètres d'entrée aléatoires se situent dans un ensemble convexe d'incertitude et que les solutions robustes doivent être réalisables pour toutes les réalisations possibles des paramètres d'entrée. Ainsi, l'optimisation est faitedu pire cas des paramètres d'entrée. En contrepartie, nous obtenons des solutions robustes qui sont protégées contre les fluctuations indésirables dans les paramètres d'entrée. Dans ce cas, la fonction objective fournit des solutions plus conservatrices.

Nous proposons un modèle d'optimisation distributionnellement robuste pour un problème stochastique bi-niveaux quadratique en variables binaires avec une fonction d'espérance mathématique dans la fonction objectif et des contraintes de sac à dos probabilistes dans le problème du leader. À cette fin, nous transformons tout d'abord le problème stochastique en un problème déterministe équivalent. Par la suite, nous appliquons une approche nouvelle et simple d'optimisation robuste pour déduire une formulation robuste pour notre problème stochastique bi-niveaux. Ce dernier permet d'optimiser la fonction objective sur l'ensemble de toutes les distributions possibles des paramètres d'entrée aléatoires. Ainsi, nous avons déduit des formulations linéaires à variables mixtes à l'aide de deux méthodes de linéarisation.

Enfin, nous avons comparé les solutions optimales de ce modèle pour mesurer le niveau de conservatisme du modèle robuste proposé. Des résultats numériques préliminaires sont donnés. Nos résultats montrent que des solutions légèrement conservatrices sont obtenues pour le cas où le nombre de variables binaires dans le problème de niveau supérieur est supérieur au nombre de variables dans le problème du suiveur.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons étudié de nouvelles adaptations de méthodes métaheuristiques notamment celle de voisinage variable. Nous avons résolu grâce à cette méthode de nombreux problèmes d'optimisation non-linéaires déterministes et stochastiques en variables binaires. Nos travaux permettront des poursuivre dans cette direction pour résoudre davantage de problèmes réels avec prise en compte de l'incertitude et de grande taille.