



**HAL**  
open science

# Dynamique et évolution de la graine terrestre

Marine Lasbleis

► **To cite this version:**

Marine Lasbleis. Dynamique et évolution de la graine terrestre. Sciences de la Terre. Ecole normale supérieure de lyon - ENS LYON, 2014. Français. NNT : 2014ENSL0962 . tel-01127083

**HAL Id: tel-01127083**

**<https://theses.hal.science/tel-01127083v1>**

Submitted on 6 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

**Docteur de l'Université de Lyon, délivré par l'École Normale Supérieure de Lyon**

**Discipline** : Sciences de la Terre

**Laboratoire** de Géologie de Lyon, Terre, Planètes, Environnements

**École Doctorale** Physique et Astrophysique de Lyon

présentée et soutenue publiquement le 4 décembre 2014

par Madame Marine LASBLEIS

---

Dynamique et évolution de la graine terrestre

---

Directeur de thèse : M. Stéphane LABROSSE

Devant la commission d'examen formée de :

M. Thierry ALBOUSSIÈRE, Université Claude Bernard – Lyon 1, examinateur

M. Julien AUBERT, Institut de Physique du Globe de Paris, rapporteur

M. Gael CHOBLET, Université de Nantes, rapporteur

M. Stéphane LABROSSE, École Normale Supérieure de Lyon, directeur de thèse

Mme Barbara ROMANOWICZ, Collège de France, University of California Berkeley, examinatrice





# PLAN GÉNÉRAL

---

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Dynamics induced by the Lorentz force in the growing inner core</b>	<b>41</b>
<b>3</b>	<b>Comparaison modèles et observations</b>	<b>87</b>
<b>4</b>	<b>Équilibres solide-liquide et écoulements biphasiques</b>	<b>129</b>
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>1</b>	<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
1.1	Observations sismologiques de la graine terrestre . . . . .	13
1.1.1	Méthodes d'observations . . . . .	14
1.1.2	Structure interne de la graine . . . . .	15
1.1.2.1	Saut de densité à l'ICB . . . . .	16
1.1.2.2	Anisotropie sismique . . . . .	17
1.1.2.3	Structure globale de la graine . . . . .	20
1.1.3	À la surface de la graine : anomalie dans le noyau externe . . . . .	21
1.2	Propriétés physiques et chimiques de la graine . . . . .	23
1.2.1	Composition chimique de la graine et du noyau . . . . .	23
1.2.2	Température de fusion du fer et de ses alliages à HP/HT . . . . .	24
1.2.3	Minéralogie du fer à HP/HT . . . . .	26
1.2.4	Conductivité thermique du fer à HT/HP . . . . .	27
1.2.5	Estimations de viscosité pour la graine terrestre . . . . .	28
1.3	Modèles géodynamiques . . . . .	31
1.3.1	Histoire thermique de la graine . . . . .	31
1.3.2	Mécanismes de déformation . . . . .	33
1.3.2.1	Convection thermique et/ou chimique . . . . .	33
1.3.2.2	Forçage extérieur dans le cas d'une stratification stable . . . . .	35
1.3.2.3	Bilan - mécanismes d'écoulement à grande échelle . . . . .	38
1.3.3	Mécanismes de cristallisation . . . . .	38
1.4	Bilan : connaissances actuelles de la graine . . . . .	40
1.5	Notations . . . . .	40
<b>2</b>	<b>Dynamics induced by the Lorentz force in the growing inner core</b>	<b>41</b>
2.1	Résumé . . . . .	43
2.2	Discussion sur les conditions aux limites . . . . .	44
2.3	Introduction . . . . .	51
2.4	Governing equations . . . . .	53
2.4.1	Effect of an imposed external magnetic field . . . . .	53
2.4.2	Conservation equations . . . . .	55
2.4.2.1	Conservation of mass, momentum and energy . . . . .	55
2.4.2.2	Growth of the inner core . . . . .	56
2.4.3	Dimensionless equations and parameters . . . . .	57
2.4.3.1	Definition of the dimensionless quantities . . . . .	57
2.4.3.2	Simplified growth of the inner core . . . . .	59
2.4.4	Boundary conditions . . . . .	63
2.4.5	Numerical modelling . . . . .	63
2.5	Flow description . . . . .	64
2.5.1	Neutral stratification . . . . .	64

2.5.2	Zero growth rate . . . . .	66
2.5.3	Growing inner core . . . . .	67
2.6	Scaling laws . . . . .	68
2.6.1	Balance between magnetic forcing and stratification . . . . .	68
2.6.2	Scaling laws in the strongly stratified regime . . . . .	69
2.6.2.1	Small $Pe$ limit . . . . .	70
2.6.2.2	Large $Pe$ limit . . . . .	71
2.6.2.3	Comparison with numerical results . . . . .	71
2.7	Strain rate produced by the flow . . . . .	74
2.8	Application to the inner core . . . . .	75
2.9	Conclusion . . . . .	78
2.10	Poloidal/toroidal decomposition . . . . .	79
2.10.1	Momentum equation using poloidal decomposition . . . . .	79
2.10.2	Poloidal decomposition of the boundary conditions . . . . .	80
2.11	Compositional stratification . . . . .	80
2.12	Analytic solution for neutral stratification . . . . .	81
2.13	Integration over time of the deformation . . . . .	83
2.13.1	General discussion . . . . .	83
2.13.2	Low $Pe$ - Thermal stratification . . . . .	84
2.13.3	Large $Pe$ - Compositional stratification . . . . .	86
<b>3</b>	<b>Comparaison modèles et observations</b>	<b>87</b>
3.1	Introduction . . . . .	89
3.2	Building a phase diagram for the Earth's inner core . . . . .	92
3.2.1	Introduction and rationale . . . . .	96
3.2.2	Thermal and compositional density stratification . . . . .	97
3.2.3	Phase change at the inner core boundary . . . . .	100
3.2.4	Dynamical regimes . . . . .	102
3.2.4.1	Heterogeneous inner core growth and topography relaxation	103
3.2.4.2	Lorentz force . . . . .	104
3.2.4.3	Joule heating . . . . .	106
3.2.4.4	Rayleigh-Bénard convection . . . . .	108
3.2.5	Regime diagram . . . . .	110
3.2.5.1	Thermal stratification . . . . .	111
3.2.5.2	Compositional stratification . . . . .	116
3.2.6	Discussion and conclusion . . . . .	117
3.2.7	Appendices . . . . .	118
3.2.7.1	Small $Pe$ limit – thermal stratification . . . . .	120
3.2.7.2	Large $Pe$ limit – compositional stratification . . . . .	122
3.3	Sharp Hemisphere Boundaries in a Translating Inner Core . . . . .	123

<b>4</b>	<b>Équilibres solide-liquide et écoulements biphasiques</b>	<b>129</b>
4.1	Équations biphasiques pour la dynamique de la graine . . . . .	131
4.1.1	Équilibre de phase - thermodynamique classique . . . . .	131
4.1.1.1	Phases pures . . . . .	131
4.1.1.2	Mélanges binaires et plus . . . . .	132
4.1.2	Mise en équations - théorie générale biphasique . . . . .	132
4.1.2.1	Notations . . . . .	135
4.1.2.2	Conservation de la masse . . . . .	136
4.1.2.3	Conservation de la quantité de mouvement . . . . .	137
4.1.2.4	Conservation de l'énergie . . . . .	138
4.1.2.5	Équation pour l'entropie . . . . .	139
4.1.2.6	Équation pour la température . . . . .	143
4.1.3	La graine : fluide biphasique et binaire . . . . .	144
4.1.4	Conclusion . . . . .	146
4.2	F-layer : formation et stabilité de neige de fer solide . . . . .	147
4.2.1	Context of the study . . . . .	147
4.2.2	Model of iron snow . . . . .	149
4.2.2.1	Velocity of particles in a density gradient . . . . .	150
4.2.2.2	Equation of state . . . . .	151
4.2.2.3	Conservation equations . . . . .	151
4.2.2.4	Horizontal layer . . . . .	153
4.2.2.5	Comparison with seismic data . . . . .	156
4.2.3	Results for an horizontal layer . . . . .	157
4.2.3.1	Parameter dependencies . . . . .	157
4.2.3.2	Porosity and density profile . . . . .	158
4.2.3.3	Estimation of the Stokes velocity . . . . .	164
4.2.4	Conclusion . . . . .	165
<b>5</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>167</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>



# 1

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

---

*[...] we must use the term “discovery” in a rather limited sense : it does not mean uncovering an immutable fact about nature, nor does it mean thinking up an idea that may later be accepted as correct. One cannot unambiguously separate the act of discovery from the act of justification in science ; moreover, justification is never final, since the arguments that seem adequate to establish a theory at one time may be found invalid or insufficient later. [...] So for our purposes, discovery simply means presenting a claim with arguments sufficient to convince the scientific community at the time ; originality lies in the success of persuasion, not in the conception of the claim.*

— Stephen G. Brush, Discovery of the Earth’s core, 1980

### Sommaire

---

<b>1.1 Observations sismologiques de la graine terrestre</b> . . . . .	<b>13</b>
1.1.1 Méthodes d’observations . . . . .	14
1.1.2 Structure interne de la graine . . . . .	15
1.1.2.1 Saut de densité à l’ICB . . . . .	16
1.1.2.2 Anisotropie sismique . . . . .	17
Généralités . . . . .	17
<i>Innermost inner core</i> . . . . .	18
Hétérogénéités latérales . . . . .	18
Super-rotation . . . . .	19
1.1.2.3 Structure globale de la graine . . . . .	20
1.1.3 À la surface de la graine : anomalie dans le noyau externe . . . . .	21
<b>1.2 Propriétés physiques et chimiques de la graine</b> . . . . .	<b>23</b>
1.2.1 Composition chimique de la graine et du noyau . . . . .	23
1.2.2 Température de fusion du fer et de ses alliages à HP/HT . . . . .	24
1.2.3 Minéralogie du fer à HP/HT . . . . .	26
1.2.4 Conductivité thermique du fer à HT/HP . . . . .	27
1.2.5 Estimations de viscosité pour la graine terrestre . . . . .	28
<b>1.3 Modèles géodynamiques</b> . . . . .	<b>31</b>
1.3.1 Histoire thermique de la graine . . . . .	31
1.3.2 Mécanismes de déformation . . . . .	33
1.3.2.1 Convection thermique et/ou chimique . . . . .	33
Instabilité thermique . . . . .	34



Instabilité compositionnelle . . . . .	35
1.3.2.2 Forçage extérieur dans le cas d'une stratification stable .	35
Forçage électromagnétique . . . . .	36
Hétérogénéités spatiales du taux de croissance . . . . .	37
1.3.2.3 Bilan - mécanismes d'écoulement à grande échelle . . . .	38
1.3.3 Mécanismes de cristallisation . . . . .	38
<b>1.4 Bilan : connaissances actuelles de la graine . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>1.5 Notations . . . . .</b>	<b>40</b>

---

---

Nous sommes capables d’envoyer des sondes spatiales pour observer la surface des planètes du système solaire ou d’astéroïdes, voire de sortir du système solaire, mais les moyens actuels pour sonder les profondeurs de notre planète la Terre sont limités et le resteront probablement (Stevenson, 2003).

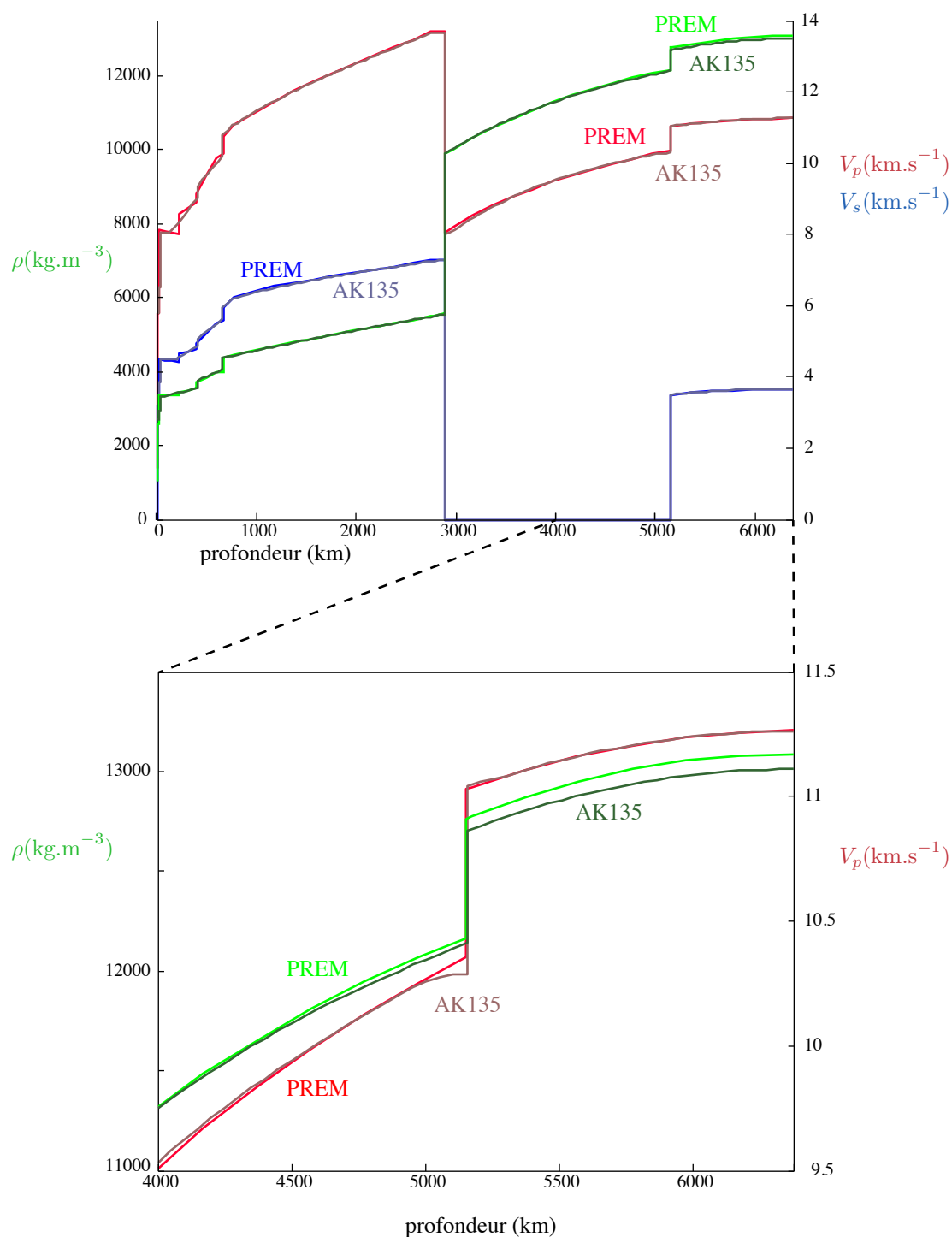
Nous avons, cependant, des indices indirects de l’activité interne de la Terre, que ce soit le volcanisme ou l’existence d’un champ magnétique. Des observations directes sont quant à elles impossibles à l’exception des observations sismologiques. Ces observations sismologiques ont permis de construire divers modèles élastiques globaux dont le plus connu et utilisé est PREM (Preliminary Reference Earth Model (Dziwowski & Anderson, 1981)). Ce modèle donne les variations de densité et vitesses sismiques avec la profondeur, de la surface au centre de la Terre (voir figure 1.1)

Le modèle PREM est représenté sur la figure 1.1. Pour l’objet de cette thèse, la graine, ce modèle représente notre connaissance de base de celle-ci : une structure sphérique située au centre de la Terre caractérisée par des fortes densités (de l’ordre de  $13000 \text{ kg.m}^{-3}$ ), et solide car les ondes de cisaillement s’y propagent. Complété par des arguments à la fois de géochimie globale de la Terre et de physique des matériaux, nous savons aussi que la graine est une sphère solide constituée d’un alliage de fer et nickel, qui cristallise lentement à partir du noyau liquide. Mais cet ordre 0 de la connaissance de la graine s’est révélé largement insuffisant ces dernières trente années, et de nombreux progrès dans la compréhension de la structure de la graine et sa dynamique ont été faits, que nous allons discuter dans cette partie. Les observations sismologiques sont d’autant plus difficiles que la graine se situe en plein centre de la Terre, et que chaque onde sismique qui l’échantillonne est aussi sensible aux hétérogénéités dans le manteau terrestre et le noyau liquide. De plus, peu d’observations autres que les observations sismologiques sont disponibles pour contraindre les propriétés physiques et mécaniques de la graine. Ces dernières trente années, cette structure de la graine s’est révélée trop simpliste, et de nombreux progrès dans la compréhension de la structure de la graine et sa dynamique ont été faits.

Pendant cette thèse, je me suis intéressée à cette structure si particulière et si inaccessible qu’est la graine, avec toujours en tête deux questions générales :

- quels mécanismes sont susceptibles d’expliquer les observations sismiques ?
- comment relier ces mécanismes à l’histoire thermique et chimique globale de la Terre et quelles contraintes obtient-on sur cette histoire ?

Dans cette introduction, je vais donner un aperçu de l’état actuel des connaissances (ou des lacunes) sur la graine terrestre. Les principales observations sismologiques seront discutées dans la section 1.1, où l’on donnera aussi au lecteur quelques clefs pour comprendre la difficulté de sonder l’intérieur de la Terre. La section 1.2 présente l’apport de la physique des matériaux à la compréhension de la structure du fer à haute pression et haute température. Finalement, nous discuterons des différents modèles géodynamiques dans la section 1.3.



**Figure 1.1** – Profils de densité et de vitesses sismiques (ondes de compression  $V_p$  et ondes de cisaillement  $V_s$ ), en fonction de la profondeur, pour deux modèles radiaux : PREM (couleurs vives) et AK135 (grisé).

## 1.1 Observations sismologiques de la graine terrestre

*A cynical layman might suspect at this point that seismologists had become an international cabal of diabolical scientists, eagerly anticipating the next horrible disaster so that their highly refined instruments could gain esoteric knowledge about the Earth's interior. Their image was not helped in this regard by Bullen's proposal, a few years earlier, that underground nuclear explosions should be set off in order to advance seismological research.*

— Stephen G. Brush, Discovery of the Earth's core, 1980

La graine est la partie solide située au centre de la Terre, au centre du noyau liquide. Inaccessible, son existence n'a été proposée qu'en 1936 par Inge Lehmann, suite à l'observation d'arrivées d'ondes sismiques là où l'existence du noyau liquide prévoyait une zone d'ombre (Lehmann, 1936). En effet, la vitesse de propagation des ondes sismiques de compression P chute brutalement à l'interface entre le manteau et le noyau, la CMB (*Core Mantle Boundary*). Les ondes transmises à la CMB sont alors déviées plus en profondeur. En considérant un noyau intégralement liquide de 2900km, la zone d'ombre attendue s'étend entre 104 et 140 degrés de distances épacentrales. Inge Lehmann a mis en évidence l'existence d'arrivées d'ondes sismiques dans cette zone qui peuvent s'expliquer via l'existence d'une interface supplémentaire située à une profondeur d'environ 5000km, l'ICB (*Inner Core Boundary*).

Une revue des travaux qui ont permis la détection du noyau liquide, puis de la graine ainsi qu'un historique des débats autour de leur état liquide et solide est donné par Brush (1980). La fluidité du noyau externe n'ayant été acquise qu'en 1926 (Jeffreys, 1926), la question de la rigidité de la graine a rapidement intéressé les géophysiciens. Francis Birch propose dès 1940 que la graine serait en fait simplement du fer solidifié, en se basant sur des estimations de la température de fusion du fer extrapolée jusqu'au centre de la Terre (Birch, 1940). Des arguments sismologiques viennent étayer cette hypothèse : Bullen conclut en 1946 que l'augmentation de la vitesse des ondes P à la frontière de la graine ne peut s'expliquer qu'avec un module de cisaillement  $\mu$  non nul, et donc une graine solide. L'observation des modes propres de la terre a permis dans les années 70 la confirmation sismologique de la solidité de la graine (Dziewoński & Gilbert, 1971). Mais jusque les années 2000 (Deuss et al., 2000; Cao et al., 2005; Wookey & Helffrich, 2008; Okal & Cansi, 1998), aucune observation convaincante directe d'onde S se propageant dans la graine n'avait été faite, exception faite de Julian et al. (1972), dont les résultats sont contradictoires avec les contraintes données par les modes propres.

Depuis les années 70, les données sismiques permettant de sonder la graine ont progressé à une vitesse fulgurante, et avec elles la compréhension que l'on a de sa structure. De la même façon, les progrès de la physique à haute pression ont permis de comprendre un peu mieux la structure et les propriétés physiques du fer et de ses alliages aux très hautes pressions et températures, via des expériences de laboratoire et des simulations numériques.

### 1.1.1 Méthodes d'observations

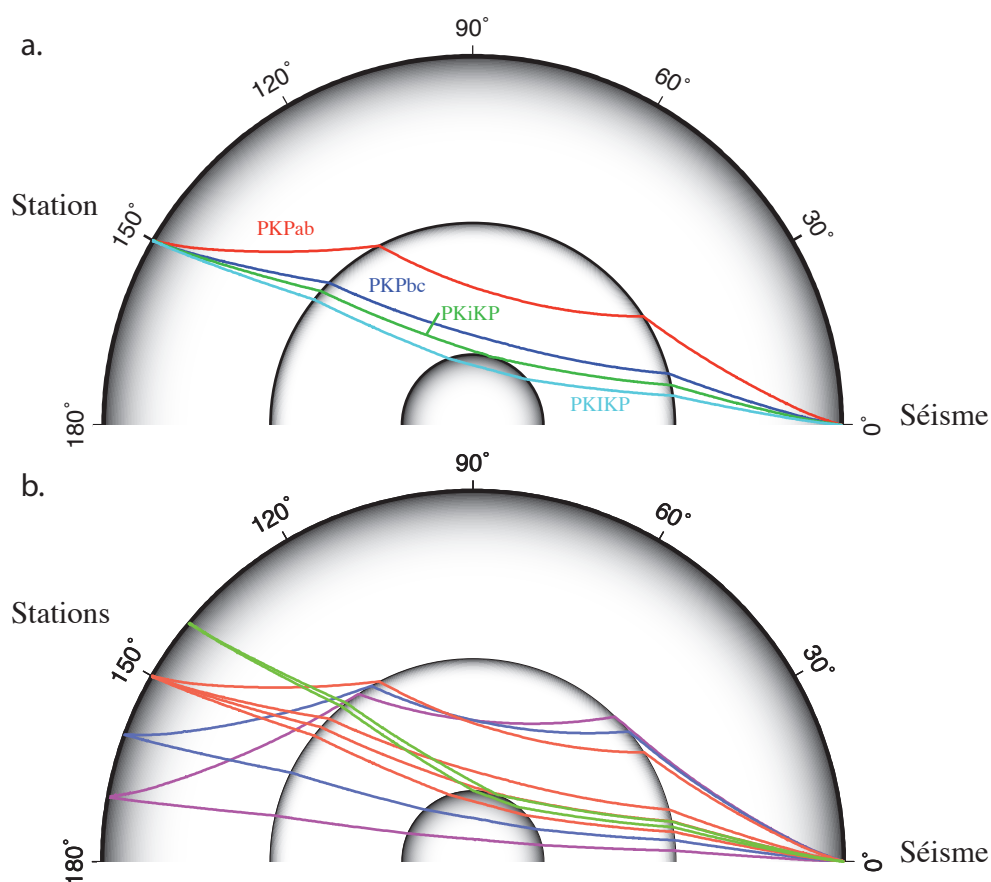
Les informations les plus directes sur la structure de la graine à grande échelle nous sont apportées par les études sismologiques. Je vais lister ici les méthodes d'études sismologiques disponibles pour l'étude de la graine, pour obtenir des informations sur les paramètres élastiques tels que les vitesses des ondes de compression P et de cisaillement S et la densité du milieu. Le lecteur est invité à se référer aux articles de revues récentes pour une description plus exhaustive des méthodes d'études et des outils ([Souriau, 2007](#); [Tkalčić & Kennett, 2008](#); [Deuss, 2014](#)).

Pour étudier la structure de la graine, les sismologues utilisent deux grands types de données sismiques : les ondes de volume à courte période (généralement entre 0.5 et 1.5 Hz) et les modes propres qui sont des observations à plus basse fréquence (moins de 10 mHz).

Les ondes de volume permettent de sonder des structures de petite échelle, donnant des informations sur les vitesses des ondes sismiques et l'atténuation, ainsi que sur la présence ou non de discontinuités. La couverture géographique est cependant inégale, les événements sismiques ainsi que les stations d'observations étant réparties non uniformément sur la surface. Les principales ondes d'intérêt sont répertoriées sur la figure 1.2 (panneau supérieur) : l'onde PKIKP traverse effectivement la graine, et les ondes traversant le noyau externe peuvent être utilisées comme point de comparaison pour calculer le différentiel de vitesse et corriger des hétérogénéités du manteau. Les phases PKIKP et les phases associées sont observables pour des séismes de magnitude supérieure à 5.5. La figure 1.2, panneau inférieur, présente les ondes détectables à la surface à différentes distances épacentrales. Pour étudier une zone de la graine en particulier, il faut donc pouvoir obtenir le couple séisme/station qui permette d'atteindre à la fois la latitude, la longitude et la profondeur voulue. De plus, les études de la surface de la graine sont a priori plus précises car la phase qui sert de correction (par exemple la PKiKP, voir figure 1.4) est plus proche de la PKIKP étudiée.

On peut aussi étudier l'onde PKJKP, qui est une onde de cisaillement qui existe théoriquement dans la partie solide de la graine, par conversion à la surface de la graine des ondes de compression. Cette étude est très compliquée, ces ondes présentant, quand elles sont détectées, des amplitudes faibles. Elles sont pourtant une preuve irréfutable que la graine est solide et ont été détectées de manière non équivoque depuis le début des années 2000 ([Okal & Cansi, 1998](#); [Deuss et al., 2000](#); [Cao et al., 2005](#); [Wookey & Helffrich, 2008](#)).

En étudiant les enregistrements sismiques sur des temps longs à la suite de séismes de forte magnitude, il est aussi possible d'extraire des informations à des fréquences beaucoup plus basses, fréquences d'excitation des modes propres de la Terre. Ces modes sont observés en appliquant une transformée de Fourier au sismogramme. On obtient ainsi des pics de résonance correspondant à chacun des modes propres de la Terre. La présence d'hétérogénéités élastiques et anélastiques ainsi que d'anisotropie sismique peut modifier la forme de ces pics. Certains de ces modes propres sont sensibles à la graine

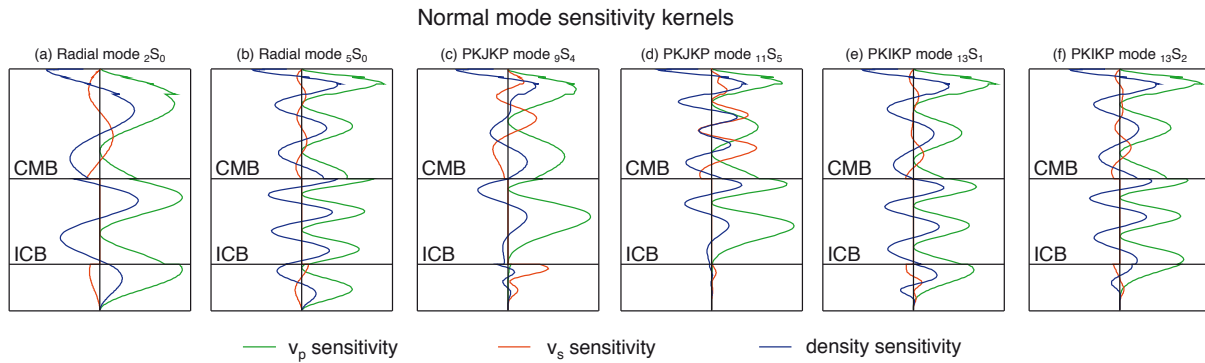


**Figure 1.2** – Trajets des ondes sismiques permettant de sonder la graine terrestre. (a) exemples de phases détectables à 150° de distance épacentrale et intéressantes pour l'étude de la graine. (b) phases détectables à 140°, 150°, 160° et 170° de distance épacentrales.

(voir figure 1.3). Cette figure présente les noyaux de sensibilité de six modes propres. Ces noyaux donnent la sensibilité d'un mode à la structure élastique à une profondeur donnée. On constate que ces modes sont sensibles à la fois au manteau, au noyau et à la graine. En extrayant l'information contenue dans d'autres modes sensibles uniquement au manteau et/ou au manteau et au noyau liquide, on peut alors obtenir des informations sur les vitesses sismiques et la densité dans la graine. Ces modes propres ont différentes sensibilités en profondeur, et on peut par exemple étudier la partie superficielle de la graine (Irving & Deuss, 2011b).

### 1.1.2 Structure interne de la graine

Un premier aperçu de la structure radiale de la graine est donnée par les modèles radiaux de type PREM (Dziewoński & Anderson, 1981), AK135 (Kennett et al., 1995), PREM2 (Song & Helmberger, 1995), qui utilisent des ensembles de données et de modèles *a priori* différents. Les deux premiers sont présentés sur la figure 1.1. Le premier panneau montre



**Figure 1.3** – Noyau de sensibilité de six modes propres permettant d’étudier la graine, modifié de Irving & Deuss (2011b).

les profils de densités et vitesses sismiques pour la Terre dans son ensemble, et le panneau inférieur les profils de densité et de vitesse des ondes  $P$  pour la noyau uniquement.

Les variations de densité et de vitesse d’onde sismique sont contrôlées principalement par l’augmentation de pression et température dans le noyau. Par construction, le modèle PREM n’autorise pas de structure petite échelles dans le noyau (il est construit à partir de données longues périodes et de modes propres), alors que le modèle AK135 utilise des données d’ondes de volume courtes périodes. Des différences entre les deux modèles sont visibles, entre autres, dans la partie inférieure du noyau liquide, que l’on traitera dans la sous-section 1.1.3, et aussi pour la valeur exacte de la densité : PREM donne une densité à l’ICB, côté graine, de l’ordre de  $12800 \text{ kg.m}^{-3}$  et AK135 une valeur une centaine de kilogrammes par mètres cubes plus faible.

La densité dans la graine, selon PREM, varie donc entre  $12800 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $13100 \text{ kg.m}^{-3}$  et les vitesses des ondes de compression varient entre  $11 \text{ km.s}^{-1}$  et  $11.3 \text{ km.s}^{-1}$ .

### 1.1.2.1 Saut de densité à l’ICB

Une des premières questions concerne l’état de la frontière de la graine et le saut de densité à l’ICB. Connaître la valeur exacte du saut de densité à l’ICB, c’est donner des contraintes fortes sur la chimie du noyau externe et de la graine, et *in fine* la dynamique de la graine.

La position exacte de l’ICB est *a priori* considérée comme acquise : depuis la profondeur initiale d’environ 5000 km donnée par Inge Lehman (Lehmann, 1936), les modèles globaux obtiennent des profondeurs de l’ordre de 5150 km (5149,5 km pour PREM (Dziewoński & Anderson, 1981) et 5153.5 km pour AK135 (Kennett et al., 1995)). Cela correspond à une graine de rayon 1221 km. On citera simplement la publication récente de Wit et al. (2014) qui donne une estimation différente de la profondeur de l’ICB, 10 km plus profond que les modèles précédents. La valeur exacte de la profondeur de l’ICB peut avoir des répercussions sur le calcul des résidus de temps de trajets sismiques, mais ne joue pas sur la dynamique globale de la graine qui nous intéresse dans ce travail.

Pour obtenir la valeur du saut de densité à l'ICB, deux types de données sismologiques sont utilisées : les modes propres utilisés par exemple dans les modèles globaux (par ex.  $600 \text{ kg.m}^{-3}$  dans [Dziewoński & Anderson, 1981](#)) (voir figure 1.1) ; et la mesure du ratio d'amplitude des phases PKiKP (se réfléchissant à l'ICB) et PcP (se réfléchissant à la CMB). Cette dernière méthode est a priori moins robuste car basé sur très peu de mesures. [Shearer & Masters \(1990\)](#) ont étudié 4900 sismogrammes et n'ont obtenu que deux mesures avec des arrivées claires des deux phases. Ils obtiennent alors une valeur maximale du saut de densité de  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , basée justement sur les non-observations. [Cao & Romanowicz \(2004\)](#) obtiennent cinq signaux clairs, et une quinzaine de signaux possibles, et en déduisent un saut de densité de  $850 \text{ kg.m}^{-3}$ , similaire au calcul de [Masters & Gubbins \(2003\)](#) de  $820 \text{ kg.m}^{-3}$  à partir d'observations de modes propres. La valeur de l'ordre de  $820\text{-}850 \text{ kg.m}^{-3}$  obtenue par des études sur les modes propres et sur les ondes de volume, est robuste et sera utilisée dans la suite de ce travail pour décrire les conditions aux limites à la surface de la graine.

### 1.1.2.2 Anisotropie sismique

Depuis la première observation de la présence d'hétérogénéité dans la graine ([Poupinet et al., 1983](#)), interprétée ensuite comme une anisotropie sismique dans la graine ([Woodhouse JH, 1986](#); [Morelli et al., 1986](#)), de nombreuses autres études ont cherché à en étudier l'amplitude exacte ainsi que les variations latérales et en profondeur.

**Généralités** On parle d'anisotropie sismique car on observe que les ondes traversant la graine dans la direction polaire voyagent quelques secondes plus vite que les ondes la traversant dans la direction équatoriale. Pour donner une valeur plus précise de l'anisotropie sismique, [Creager \(1999\)](#) propose de modéliser les perturbations de vitesse  $\delta t/t$  en fonction de l'angle  $\zeta$ , angle entre l'axe de rotation de la Terre et la direction du rai de la phase PKiKP, comme

$$\frac{\delta t}{t} = a + b \cos^2 \zeta + c \cos^4 \zeta; \quad (1.1)$$

avec  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois paramètres à déterminer. Les angles  $\zeta$  plus petits que  $35^\circ$  sont dits polaires, et les angles plus grands que  $35^\circ$  sont dits équatoriaux. Les résidus de temps de trajets  $\delta t$  sont calculés par rapport à un modèle global (AK135 pour [Creager \(1999\)](#) par exemple) ou par rapport à une phase de référence qui n'échantillonne pas la graine (PKiKP, PKP(AB) ou PKP(BC)). Si une onde est détectée plus tôt que ce qui est prévu par le modèle ou la phase de référence, on obtiendra un résidu plus grand. L'anisotropie sismique mesurée est ensuite la somme de deux coefficients :  $b + c$ , en pourcents.

La figure 1.4 présente les mesures de [Irving & Deuss \(2011a\)](#); [Waszek & Deuss \(2011\)](#) de résidu de temps de trajets sismiques en comparant le temps d'arrivée de l'onde PKiKP aux ondes PKiKP (pour les profondeurs les plus faibles), PKPbc et PKPab (pour les



profondeurs supérieures à 100km). Ces données sont bien représentées par les modèles actuels : une couche isotrope en surface, dont l'épaisseur varie entre 50-80 km (Song & Helmberger, 1995; Garcia, 2002; Waszek & Deuss, 2011) et 100-250 km (Su & Dziewoński, 1995; Song & Helmberger, 1998; Sun & Song, 2008b); une anisotropie forte en profondeur, de l'ordre de 3 à 4% (Creager, 1999; Garcia & Souriau, 2000; Irving & Deuss, 2011a).

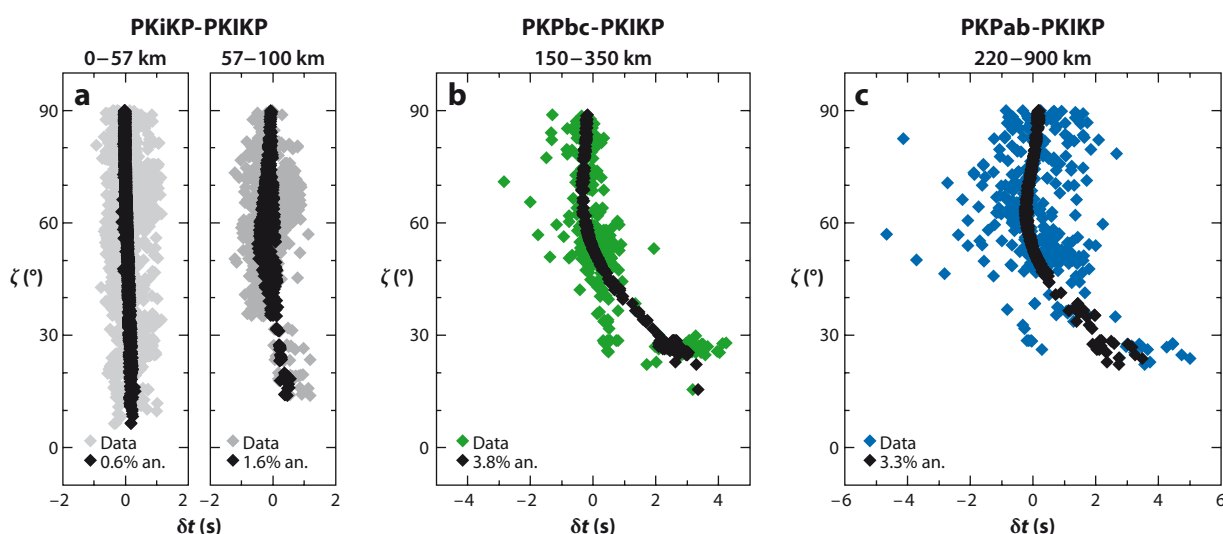
Ces observations d'anisotropie basées sur les études d'onde de volume sont corroborées par les études de modes propres. Cependant, les valeurs d'anisotropie trouvées à partir des modes propres sont légèrement inférieures, de l'ordre de 1,7 à 3,3% (Woodhouse JH, 1986; Durek & Romanowicz, 1999; Irving & Deuss, 2011b).

Plusieurs études ont cherché à expliquer la forte anisotropie par des hétérogénéités dans le manteau inférieur et le noyau. Bréger et al. (2000a,b); Ishii et al. (2002); Romanowicz et al. (2003) ont montré qu'une partie de l'anomalie de vitesse peut être expliquée par des hétérogénéités dans le manteau profond, et Romanowicz & Bréger (2000); Romanowicz et al. (2003) ont étudié les effets d'anomalies liés au cylindre tangent du noyau externe. La possibilité d'hétérogénéités aussi fortes (1% pour Romanowicz et al. (2003)) localisées dans le cylindre tangent pose de nombreux problèmes du point de vue géodynamique, car la convection vigoureuse et la faible viscosité dans le noyau externe ne permettent à priori pas de maintenir ce type d'hétérogénéités.

**Innermost inner core** Certains auteurs ont aussi pu observer en profondeur une variation des propriétés élastiques de la graine, associée à l'existence d'un *innermost inner core*, une graine dans la graine. Cette variation a été observée pour l'anisotropie des vitesses sismiques à partir des rais PKIKP (Ishii & Dziewoński, 2002; Cao & Romanowicz, 2007; Sun & Song, 2008a), pour les modes propres (Beghein & Trampert, 2003) et pour les propriétés d'atténuation (Cormier & Stroujkova, 2005). Pour autant, aucune réflexion à la surface de cette couche n'a été détectée (Cormier & Stroujkova, 2005; Garcia et al., 2006). Une étude récente montre même que les données peuvent aussi bien s'expliquer par des hétérogénéités latérales (Lythgoe et al., 2014) que par la présence d'un centre de la graine aux propriétés différentes.

**Hétérogénéités latérales** En étudiant en détail les résidus de temps de parcours sismiques, les ondes de volume ont aussi permis de mettre en évidence l'existence d'hétérogénéités latérales fortes dans la graine isotrope (la première centaine de kilomètres) et anisotrope (au delà de 200km). Les premières études avaient proposé que l'axe de symétrie de l'anisotropie globale soit légèrement penché par rapport à l'axe de rotation de la Terre (par ex. Shearer et al., 1988; Su & Dziewoński, 1995). Les études récentes privilégient l'hypothèse d'une variation latérale pour expliquer les observations, et au premier ordre une dichotomie entre deux hémisphères, communément appelés Est et Ouest (mais légèrement décentrées par rapport aux hémisphères Est et Ouest à la surface de la terre).

La figure 1.5 montre l'évolution du résidu de temps de trajet sismique entre les phases PKIKP et PKiKP en fonction de la longitude et de la profondeur de la PKIKP tel que

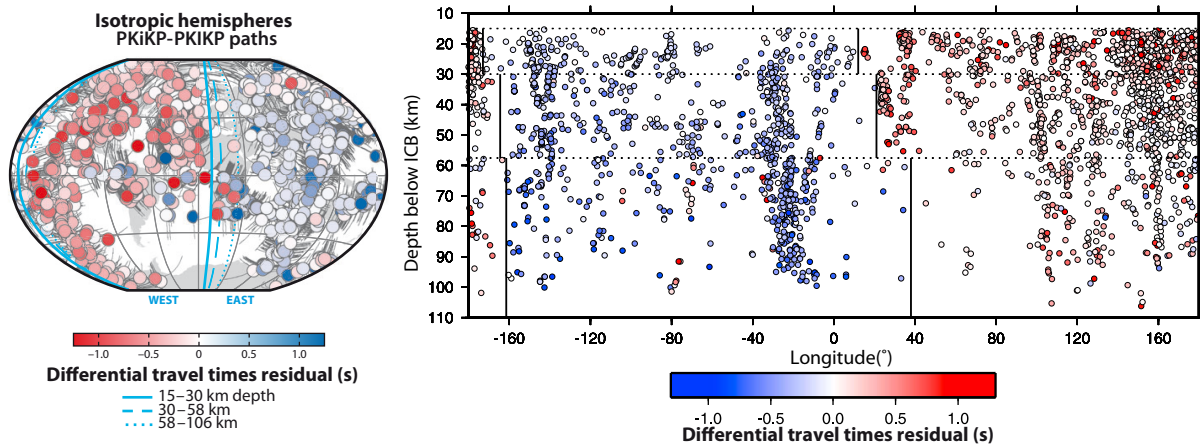


**Figure 1.4** – Observation de l’anisotropie sismique par mesure de différence de temps de trajets entre plusieurs ondes de volume : (a) PKiKP-PKIKP pour les profondeurs faibles ( $<100$  km) ; (b) PKPbc-PKIKP et (c) PKPab-PKIKP pour la graine plus profonde. Les observations en dessous de 57 km montrent une couche superficielle isotrope (anisotropie de 0.6%), tandis que au dessus, l’anisotropie est plus forte (jusque 3.8% d’anisotropie pour les observations de PKPbc-PKIKP entre 150 et 350 km de profondeur). Figure tirée de [Deuss \(2014\)](#)

présenté par [Waszek & Deuss \(2011\)](#), pour la couche supérieure isotrope de la graine. On voit alors que l’hémisphère dit Est présente un résidu plus grand que l’hémisphère dit Ouest, ce qui signifie que les ondes y voyagent plus rapidement. On voit aussi que les frontières entre les deux hémisphères sont nettes et évoluent en profondeur, les frontières évoluant légèrement vers l’est en profondeur. Ces observations sont faites à partir de la comparaison des phases PKIKP-PKiKP, qui présentent une bonne couverture spatiale de la graine, et sont donc relativement robustes ([Garcia, 2002](#); [Waszek & Deuss, 2011](#)).

Plus en profondeur, dans la graine anisotrope, de telles variations latérales ont aussi été observées, à la fois par études des ondes de volume et des modes propres ([Tanaka & Hamaguchi, 1997](#); [Deuss et al., 2010](#)). L’hémisphère Est est très anisotrope ( $> 5\%$ ), tandis que l’hémisphère Ouest est faiblement anisotrope ( $< 0.7\%$ ) (voir [Tanaka & Hamaguchi, 1997](#); [Creager, 1999](#); [Irving & Deuss, 2011a](#)). Même si ces auteurs obtiennent des estimations similaires de l’anisotropie, il reste une grande incertitude sur la position exacte de la frontière entre les deux hémisphères. Ceci est notamment du à l’échantillonnage spatial des données qui est mauvais pour les profondeurs supérieures à 100km.

**Super-rotation** La variation de la position longitudinale de la frontière entre les deux hémisphères dans la couche isotrope pourrait faire penser à une rotation de la graine par rapport à un forçage extérieur qui causerait l’existence de la dichotomie. Cette hypothèse est à relier à toutes les études de super rotation de la graine. En effet, certains modèles de géodynamo prévoient des vitesses de super rotation de la graine, c’est à dire que la vitesse de rotation de la graine soit sensiblement différente de la vitesse de rotation du manteau, et ce malgré le couplage gravitationnel lié aux hétérogénéités mantelliques



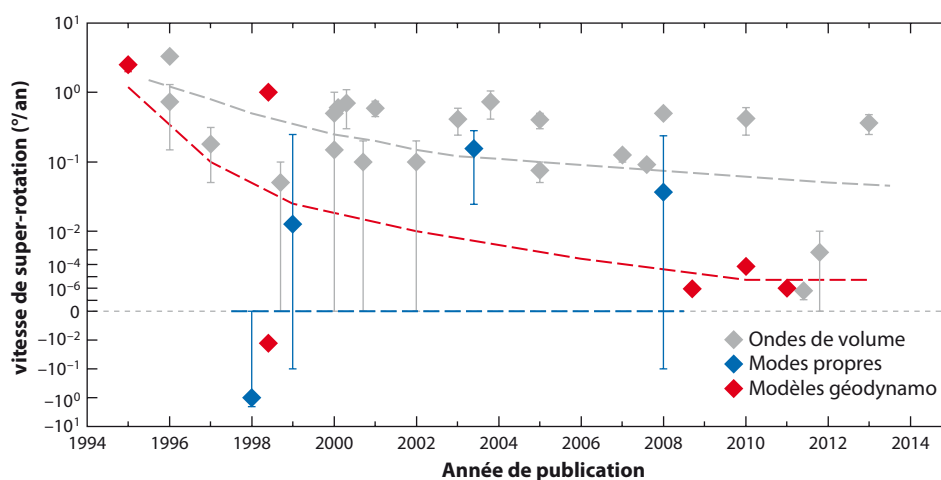
**Figure 1.5** – Résidu de temps de trajets sismiques entre PKiKP et PKiKP, projetés sur la carte du monde pour montrer la répartition en longitude et latitude et en fonction de la longitude et de la profondeur en dessous de l'ICB pour la dépendance en profondeur. Figure modifiée de Waszek & Deuss (2011) et Deuss (2014) (données de Waszek & Deuss (2011))

(Glatzmaier & Roberts, 1995; Aubert & Dumberry, 2010). Avec l'augmentation du nombre de données sismiques dans le temps, il est maintenant possible de comparer certains résultats avec leur équivalent il y a dix ans et ainsi de confirmer si la graine a subi une rotation différentielle par rapport au manteau. De nombreuses études ont été menées, donnant des taux de super rotation élevés ( $1-3^\circ$  par an, voir par ex. Song & Richards, 1996; Su et al., 1996) ou très faibles ( $<0.5^\circ$  par an Song & Poupinet, 2007; Tkalčić et al., 2013) voir nuls (Souriau, 1998; Souriau & Poupinet, 2000; Mäkinen & Deuss, 2011). Deuss (2014) a proposé une représentation intéressante de ces résultats (figure 1.6), en fonction de la date de publication et non pas d'un paramètre des modèles : avec les publications considérées, le taux de super rotation de la graine décroît exponentiellement avec la date de publication. Il est donc raisonnable de considérer que la super rotation est faible ou inexistante.

### 1.1.2.3 Structure globale de la graine

Finalement, la figure 1.7 fait la synthèse des principales observations sismiques pour l'intérieur de la graine :

- anisotropie globale, avec des vitesses sismiques plus grandes pour les trajets dans le plan polaire que pour les trajets équatoriaux ;
- couche supérieure isotrope, jusqu'une profondeur d'environ une centaine de kilomètres ;
- l'existence possible d'un *innermost inner core* ;
- la dichotomie hémisphérique, visible autant dans la couche isotrope (vitesses plus faibles à l'ouest) que en profondeur (anisotropie plus forte à l'ouest), et donc la



**Figure 1.6** – Valeurs des vitesses de super rotation publiées pour la graine en fonction de l’année de publication, tirée de [Deuss \(2014\)](#).

frontière varie légèrement avec la profondeur.

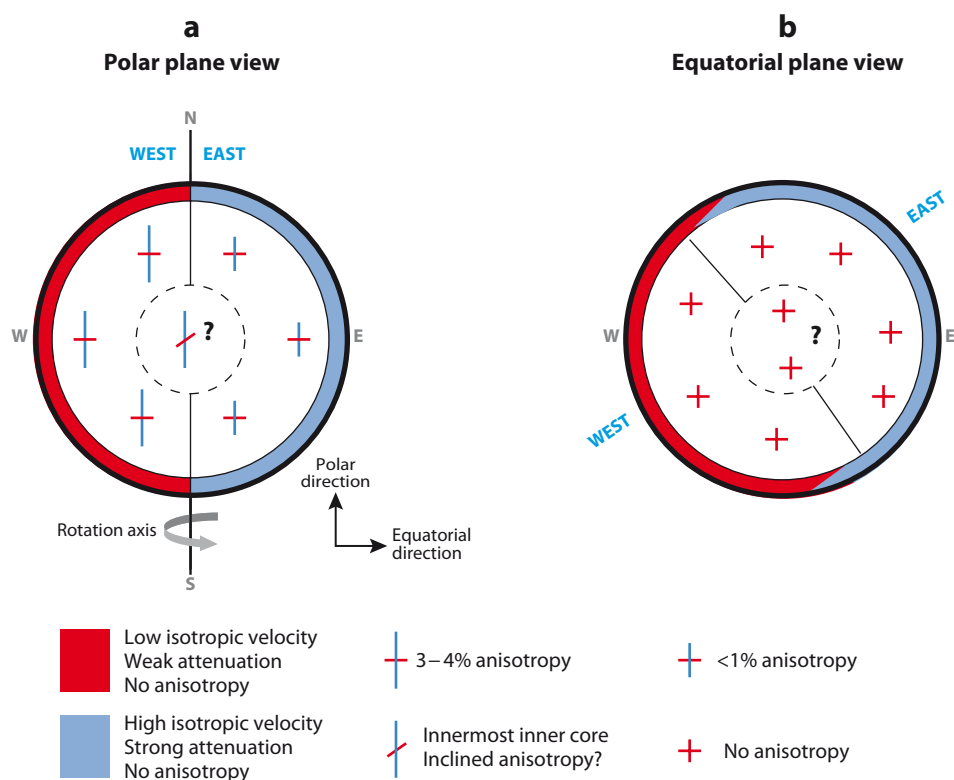
Certaines de ces observations sont remises en question (*innermost inner core*), mais la structure anisotropique et la dichotomie hémisphériques sont deux observations très robustes. Sans chercher à rentrer dans un débat sur la valeur exacte de l’anisotropie sismique, je vais essayer dans ce travail de proposer une dynamique de la graine à partir de cette contrainte forte : l’existence d’une anisotropie sismique détectable. Sur ce thème, le lecteur est invité à se référer aux chapitres 2 et 3.

### 1.1.3 À la surface de la graine : anomalie dans le noyau externe

Le modèle PREM de [Dziewoński & Anderson \(1981\)](#) montre un noyau externe parfaitement mélangé, comme on peut le voir sur le panneau inférieur de la figure 1.1, en cohérence avec une convection vigoureuse dans le noyau externe : la composition chimique est a priori parfaitement mélangée, et la température est proche du profil adiabatique, sauf pour les fines couches limites thermiques et chimiques.

Pourtant, des modèles plus récents ont montré, dans le noyau liquide au niveau de la graine, des différences significatives avec le modèles PREM. Dans ces études, les auteurs ont mis en évidence une couche de l’ordre de la centaine de kilomètres d’épaisseur dans laquelle les vitesses des ondes P sont réduites par rapport au modèle PREM ([Souriau & Poupinet, 1991](#); [Song & Helmberger, 1992, 1995](#); [Kennett et al., 1995](#); [Yu, 2005](#); [Cormier et al., 2011](#)). Un exemple de modèle est donné avec le modèle AK135, sur la figure 1.1. Cette réduction de la vitesse des ondes de compression semble indiquer une couche appauvrie en éléments légers, donc une couche stable à la surface de la graine, dans le noyau ([Braginsky, 1963](#); [Gubbins et al., 2008](#)).

L’existence d’une telle couche pose problème. En effet, la vision la plus simple, avec une cristallisation à la surface de la graine, donne un relarguage d’éléments légers à la



**Figure 1.7** – Schématisation des observations actuelles d’anisotropie sismique et d’atténuation sismique de la graine terrestre. Figure d’après [Deuss \(2014\)](#).

surface de la graine et donc un enrichissement du noyau externe au contact avec le noyau solide. Plusieurs modèles ont été proposés pour expliquer l’existence d’une telle couche, et nous reviendrons dessus dans la section [4.2](#).

## 1.2 Propriétés physiques et chimiques de la graine

*Though argument continues concerning the amount and nature of alloying elements, there remains little ground for doubting that both inner and outer cores consist mainly of iron.*

— Birch, The Melting Relations of Iron and Temperatures in the Earth's Core, 1972

### 1.2.1 Composition chimique de la graine et du noyau

Les estimations de la composition du noyau terrestre dans son ensemble proviennent d'études qui relient observations sismologiques (contraste de densité à l'ICB, valeur de densité), modèles de formation de la Terre et modèles de composition globale de la Terre.

Birch (1961) confirme l'hypothèse initiale d'un noyau fait majoritairement de fer à partir de l'étude de vitesses du son en fonction de la densité, et rejette l'idée d'un noyau fait de silicates sous forme métallique. Les densités obtenues pour le fer pur sont par contre supérieures à celles du noyau pour la même vitesse du son, et Birch (1961) propose que le noyau soit fait en partie de fer, mais avec aussi une fraction d'éléments plus légers non déterminés. Birch (1964) confirme ces mesures, et propose même que la réduction de 10% à l'ICB par rapport aux mesures de densité du fer par des expériences de choc soit due à la présence de silicium, soufre ou oxygène.

Les modèles de composition globale de la Terre actuels proposent que le noyau est fait majoritairement de fer, avec une fraction de nickel (non discernable du fer du point de vue de la majeure partie de ses propriétés chimiques) et des éléments légers (McDonough & Sun, 1995). Poirier (1994a) propose l'oxygène, le silicium, le soufre, l'hydrogène et le carbone comme candidats potentiels d'éléments légers dans le noyau, en se basant sur des contraintes géochimiques et métallurgiques : (1) l'élément léger doit être suffisamment abondant dans la composition *bulk* de la Terre<sup>a</sup> ; (2) l'élément léger doit partitionner à relative basse pression car le noyau se serait formé tôt pendant l'accrétion ; (3) l'élément doit rester soluble dans le fer aux pressions du noyau ; (4) une partie au moins des candidats éléments légers doivent fractionner lors de la cristallisation, pour permettre la convection solutale du noyau externe. Actuellement, les trois candidats les plus étudiés sont le soufre, l'oxygène et le silicium (Vočadlo, 2007).

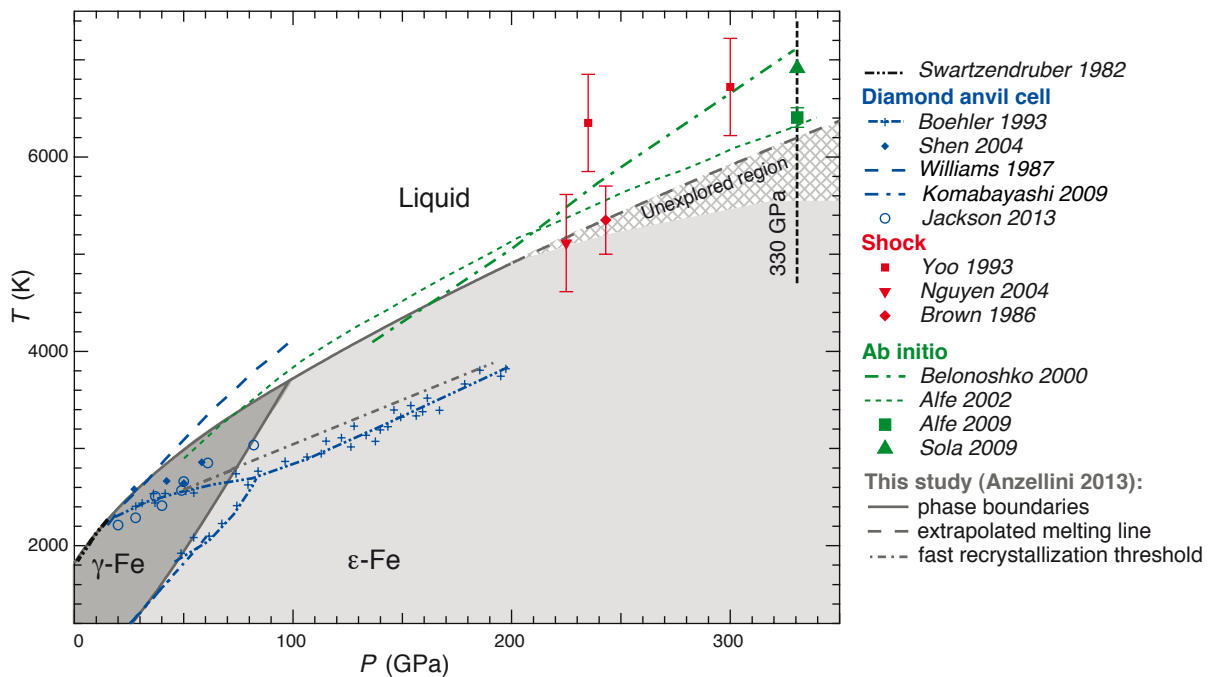
À partir des données de saut de densité à l'ICB (Masters & Gubbins, 2003), les éléments légers formeraient 5-10% du noyau externe et 2-3% de la graine.

---

a. par exemple en regardant la composition chondritique comme McDonough & Sun (1995) , et l'élément ne doit pas avoir été volatilisé par la chaleur d'accrétion.

### 1.2.2 Température de fusion du fer et de ses alliages à HP/HT

La connaissance de la température de fusion de l'alliage du noyau externe est importante pour estimer le profil de température dans la Terre et dans le noyau, car c'est un point d'ancrage *absolu* et non relatif pour le profil de température du noyau. Malheureusement, obtenir une estimation de la température du fer pur aux pressions et températures de l'ICB est déjà difficile, et l'imprécision sur la composition exacte du noyau externe, ainsi que la nécessité de la connaissance du diagramme binaire (ou ternaire) de l'alliage fer et éléments légers compliquent encore le problème.

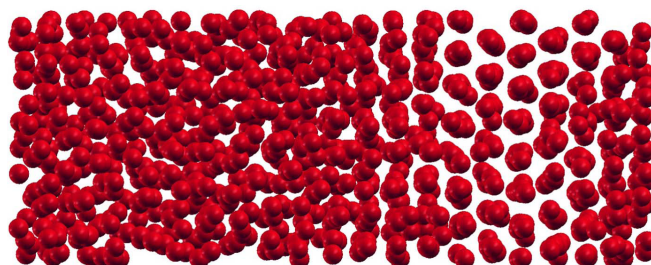


**Figure 1.8** – Diagramme de phase du fer jusqu'à haute pression (350 GPa) et haute température (7000 K). Figure modifiée de [Anzellini et al. \(2013\)](#) pour faire apparaître les références bibliographiques.

La figure 1.8 répertorie une partie des données publiées pour la température de fusion du fer et les phases du fer à haute pression. Les méthodes de mesure sont soit expérimentales (expériences de choc, qui donnent des points uniques et de grandes incertitudes sur la température, et expériences en enclumes à diamant) soit théoriques, basées sur les calculs ab initio. Les mesures de chocs présentent des variations importantes et des incertitudes de l'ordre du millier de degrés Kelvin, tandis que les modèles théoriques proposent des valeurs avec des incertitudes faibles. [Alfè \(2009\)](#) donne une température de fusion du fer à 330 GPa à  $6370 \pm 100$  K en étudiant la coexistence des deux phases solides et liquides. Cette méthode est beaucoup plus coûteuse au point de vue numérique mais vraisemblablement plus précise. Un exemple de résultat de simulation est visible sur la figure 1.9, où 980 atomes ont été utilisés. Ces travaux sont cohérents avec les précédents ([Alfè et al., 2002b,a](#)),

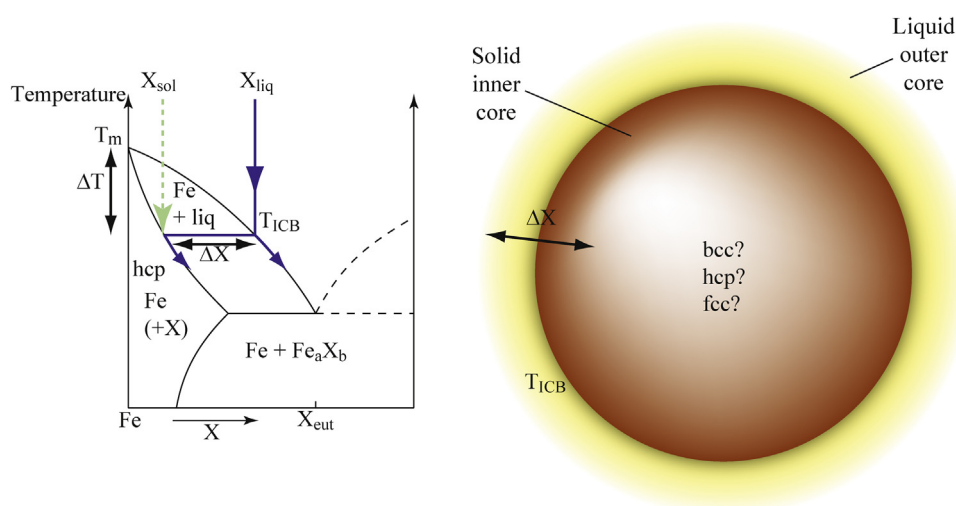


mais contredisent [Laio et al. \(2000\)](#) et [Belonoshko et al. \(2000\)](#), qui ont défini l'énergie libre différemment. Les mesures de température de fusion à partir d'expériences en enclumes à diamant récentes ( $6230 \pm 500$  K, [Anzellini et al., 2013](#)) confirment ces mesures.



**Figure 1.9** – Instantané d'une simulation de dynamique moléculaire de type DFT montrant le solide (à droite) et le liquide qui coexistent. Figure de [Alfè \(2009\)](#).

Le noyau liquide n'est pas constitué uniquement de fer, et l'existence d'éléments légers modifie la température de fusion de l'alliage. Le diagramme de phase de l'alliage de fer à haute pression peut expliquer certaines propriétés de la frontière de la graine. Pour l'alliage Fe-X, où X est un élément léger, on peut représenter le diagramme de phase comme sur la figure 1.10, c'est à dire comme un diagramme de phase d'un fluide binaire présentant un point eutectique, et en se plaçant du côté Fe de l'eutectique. La connaissance de la dépression de température  $\Delta T$  et de la variation de composition  $\Delta X$  permet d'estimer la température de fusion de la surface de la graine, et donc le point d'ancrage de la température dans le noyau externe et dans la graine. La dépendance en pression est *a priori* connue si l'on connaît la dépendance en pression de la température de fusion du fer pur.



**Figure 1.10** – Diagramme de phase schématique pour l'alliage  $Fe - X$ , à une pression donnée. Figure de [Morard et al. \(2014\)](#)

[Morard et al. \(2014\)](#) passent en revue les différentes données pour la dépression en température liée à l'oxygène, au soufre et au silicium à des pressions de 135 GPa, c'est



à dire au niveau de la CMB. À partir d'une température de fusion du fer pur à 4200 K (Anzellini et al., 2013), la chute de température de fusion est de 1150 K, 550 K et 450 K pour respectivement Fe-FeS (Fe-Fe<sub>3</sub>S à l'eutectique, 12wt% S, Kamada et al., 2012), Fe-FeO (12wt% O, Morard et al., 2014), et Fe-Si (16wt% Si, Fischer et al., 2012).

Selon la composition exacte du noyau, la température de fusion sera plus ou moins basse, avec un effet plus fort lié au silicium. La valeur généralement utilisée est une chute de température d'environ 1000 K, c'est à dire une température à l'ICB d'environ 5300 K.

### 1.2.3 Minéralogie du fer à HP/HT

Pour estimer l'anisotropie du fer à haute pression et haute température, il nous faut connaître sous quelle forme se trouve le fer (ou son alliage) à la pression et température de la graine. Cette question est liée à la question de la température de fusion et du solidus : quel est le diagramme de phase du fer à haute pression ? Et de la même façon que dans le paragraphe précédent, les expériences permettent difficilement d'atteindre ces pressions et température, et la composition exacte n'est pas connue.

Plusieurs structures cristallographiques ont été proposées pour le fer à haute pression, mais la discussion se focalise sur deux structures en particulier : Tateno et al. (2010) ont mis en évidence du fer sous forme hcp-Fe (*hexagonal-closed-packed*) dans des expériences dans une enclume à diamant jusque 377 GPa et 5700 K, alors que les calculs *ab initio* proposaient une structure de type bcc-Fe (*body-centred-cubic*) (Vočadlo et al., 2003; Belonoshko et al., 2003). La phase bcc-Fe est considérée comme plus stable à haute pression et température, mais les calculs de type *ab initio* ne sont peut être pas aptes à déterminer si la phase est plus stable que hcp-Fe si les énergies des deux phases sont trop proches. Des études proposent aussi la stabilisation de la phase bcc-Fe avec l'ajout d'éléments légers dans l'alliage (Côté et al., 2008).

Les cristaux de type hcp sont susceptibles d'être anisotropes, mais la valeur exacte de l'anisotropie est encore sujette à débat. Stixrude & Cohen (1995) ont proposé un axe *c* plus rapide que l'axe *a*, mais Steinle-Neumann et al. (2001) ont calculé l'anisotropie à haute température et haute pression, et à des températures élevées non considérées précédemment, l'anisotropie s'inverse.

La structure des cristaux dans la graine et leur propriétés élastiques sont toujours sujets à discussion dans la communauté. On peut quand même noter que, pour l'instant, les modèles de propriétés élastiques pour la graine peinent à obtenir plus d'une dizaine de pourcents d'anisotropie pour un cristal unique, c'est à dire avant même de parler de moyenne sur un agrégat. En effet, la mesure des propriétés élastiques d'un cristal ne reflète pas forcément les propriétés d'un polycristal. Dans un agrégat quelconque, les cristaux ne sont *a priori* pas orientés, et l'anisotropie sismique globale est nulle même si les cristaux eux même sont fortement anisotropes. Pour orienter les cristaux dans le polycristal et permettre une anisotropie non nulle, deux grandes familles de mécanismes sont possibles :

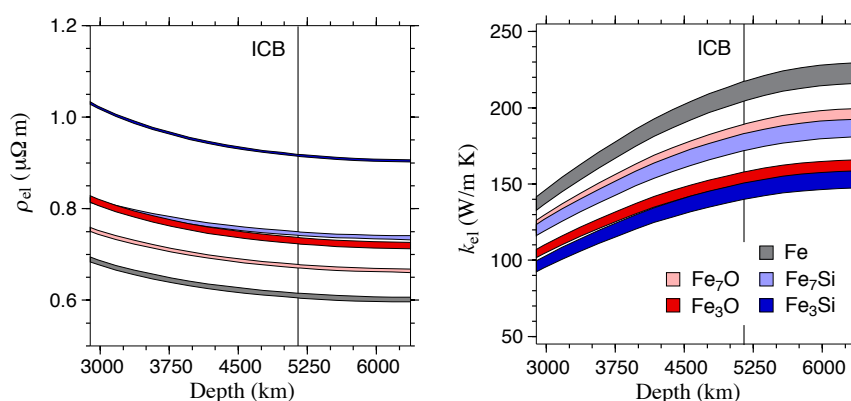
soit une orientation préférentielle pendant la cristallisation, soit une déformation du milieu qui, en faisant jouer des systèmes de glissement à l'échelle du grain oriente le grain dans l'agrégat. Dans les deux cas, l'anisotropie totale moyenne du polycristal est inférieure à l'anisotropie du monocristal, de l'ordre de 10% au maximum de l'anisotropie du cristal seul.

### 1.2.4 Conductivité thermique du fer à HT/HP

De récents travaux menés par plusieurs groupes de chercheurs ont revu la valeur habituellement utilisée pour la conductivité thermique du fer et de ses alliages à haute pression. Les valeurs conventionnelles utilisées jusqu'alors,  $29\text{-}79\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  à l'ICB, avaient été obtenus par [Stacey & Anderson \(2001\)](#) et [Stacey & Loper \(2007\)](#), extrapolant les mesures de résistivité électriques dans des expériences de choc.

Dans les métaux, le transport de la chaleur et du courant sont tous les deux liés à la mobilité des électrons, et la conductivité thermique  $k$  et la résistivité électrique  $\rho$  sont liées par la loi de Wiedemann-Franz  $k = LT/\rho$ , avec  $L$  le nombre de Lorentz et  $T$  la température absolue. Cette équation ne donne que la contribution électronique de la conductivité thermique, et donc qu'une estimation basse de la valeur réelle, mais les autres mécanismes de transport sont considérés négligeables car moins efficaces.

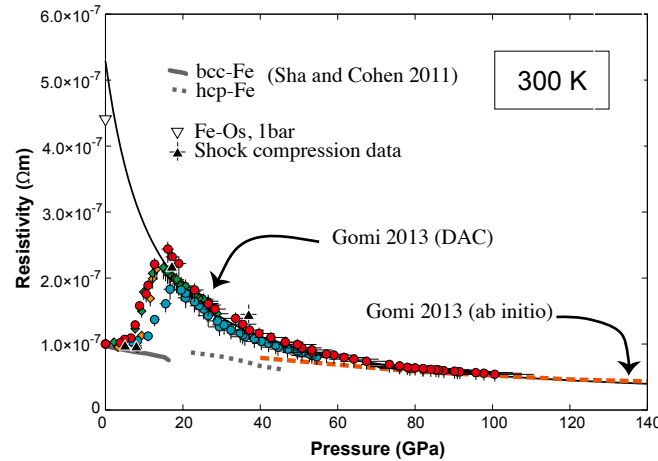
[Pozzo et al. \(2012\)](#); [de Koker & Steinle-Neumann \(2012\)](#); [Pozzo et al. \(2014\)](#) ont utilisé des méthodes ab initio pour calculer les valeurs de la résistivité électronique du fer liquide et de ses alliages à haute pression, sans passer par des extrapolations. Leurs calculs sont en accord avec les résultats d'expériences à plus basse pression, mais démontrent que l'extrapolation initiale de [Stacey & Anderson \(2001\)](#) n'était pas valide : les mesures donnent des résistivités de l'ordre de  $1.55 \times 10^6 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ , et des conductivité thermiques à l'ICB de l'ordre de  $250\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , pour le fer pur (voir figure 1.11, soit trois fois la valeur de [Stacey & Anderson \(2001\)](#)).



**Figure 1.11** – Résistivité électrique  $\rho$  et thermique  $k$  jusqu'aux pressions de la graine, pour le fer pur et différents alliages de fer. Figure de [de Koker & Steinle-Neumann \(2012\)](#).

Ces calculs théoriques ont été confirmées expérimentalement par [Gomi et al. \(2013\)](#), qui

ont mesuré sous cellule à enclume de diamant la résistivité électrique du fer à température ambiante et jusque 100 GPa. Leur travail est original car il prend en compte un effet jusqu'alors négligé dans les extrapolations de résistivité électrique à haute pression : l'effet de saturation de la résistivité des métaux, un phénomène pourtant connu en métallurgie. À haute résistivité, les lois habituelles ne sont plus valides et la résistivité des alliages de fer sature à une valeur universelle de  $\rho_{sat} = 1.68 \times 10^{-6} \Omega.m$ . En calculant la résistivité comme  $1/\rho_{tot} = 1/\rho_{ideal} + 1/\rho_{sat}$ , ils obtiennent des valeurs de résistivité proches de celles proposées par les études théoriques, et une conductivité de  $148 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  à l'ICB en prenant en compte le silicium comme seul élément léger du noyau. En fonction des éléments légers pris en compte, ils obtiennent à l'ICB, des conductivité entre  $148 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (22,5% silicium) et  $220 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (19.4% soufre). Le travail de [Gomi et al. \(2013\)](#) est d'autant plus intéressant qu'il propose aussi une étude ab initio du fer solide à haute pression, dont les résultats confirment les mesures expérimentales et l'extrapolation à haute pression, comme on le voit sur la figure 1.12.



**Figure 1.12** – Résultats expérimentaux et numériques de [Gomi et al. \(2013\)](#) de la résistivité électrique du fer à haute pression et  $T = 300 \text{ K}$ , et comparaison avec les résultats précédents.

Du point de vue de la géodynamique, ces nouvelles estimations sont très importantes. Elles modifient les valeurs de flux de chaleur dans le noyau externe, et donc jouent sur les modèles de géodynamo et sur les bilan thermiques globaux, ainsi que le profil de température de la graine en augmentant l'efficacité de la diffusion.

### 1.2.5 Estimations de viscosité pour la graine terrestre

Aucune estimation de la viscosité de la graine ne semble encore dominer dans la littérature. Basées sur les mécanismes de fluage dominants dans la graine ([Yoshida et al., 1996](#); [Van Orman, 2004](#); [Reaman et al., 2011](#)), sur des mesures expérimentales ([Gleason & Mao, 2013](#)) ou sur des observations extérieures, comme les variations de la longueur du jour ([Mound & Buffett, 2006](#)), les nutations ([Koot & Dumberry, 2011](#)) ou les observations

sismiques de super-rotation de la graine (Buffett, 1997), les estimations publiées s'étalent de  $10^{11}$  à  $10^{21}$  Pa.s.

La graine étant située au centre du noyau liquide, les interactions entre celle-ci et le manteau sont *a priori* limitées et filtrées par le noyau (Aubert et al., 2008). Cependant le couplage gravitationnel est susceptible de jouer sur sa dynamique, et en particulier les variations latérales de densité dans le manteau devraient jouer un rôle sur la forme globale de la graine. L'existence (ou non) de la super rotation de la graine peut alors être une contrainte forte pour estimer certains paramètres physiques de la graine, et en particulier la viscosité. La première estimation de la viscosité de la graine par Buffett (1997) se base sur la déformation de la graine en surface liée à l'ajustement de la forme de la graine en super-rotation à la distribution hétérogène de masse dans le manteau pour prédire une estimation de la viscosité de la surface de la graine. Deux scénarios sont envisagés, une viscosité basse ( $< 10^{16}$  Pa.s) qui permet un temps de relaxation visqueux suffisamment faible pour que la topographie relaxe à la topographie d'équilibre presque instantanément, ou au contraire une viscosité élevée ( $> 10^{20}$  Pa.s) qui inhibe toute relaxation et empêche le verrouillage gravitationnel. Ces contraintes dépendent de la vitesse de super rotation, considérée alors de  $-0.017$  rad.yr $^{-1}$  et estimée plusieurs ordres de grandeur plus faible à présent. À partir d'observations de variation de la longueur du jour, Mound & Buffett (2006) calculent que la graine doit avoir une viscosité au moins égale à  $10^{17}$  Pa.s pour expliquer la période de  $5.8 \pm 0.8$  années par le développement d'un mode gravitationnel de la graine. Koot & Dumberry (2011) obtiennent une viscosité de l'ordre de  $10^{14}$  Pa.s en utilisant comme contraintes les observations de nutation (oscillation de l'axe de rotation de la Terre autour de sa position d'équilibre), en considérant à la fois le couplage électromagnétique et la déformation visqueuse de la graine pour expliquer les fréquences et l'amortissement observé.

Du point de vue de la physique des matériaux, le résultat dépend du type de fluage considéré. Le fluage, qui est une déformation plastique résultante d'un champ de contraintes inhomogènes, est fonction à la fois de la structure du matériau, de la diffusion des défauts dans le matériau, de la température et de la contrainte exercée. Deux mécanismes globaux peuvent être considérés, selon que le fluage est contrôlé par la diffusion (qui n'oriente alors pas les cristaux) ou par les dislocations (pouvant alors mener à une orientation des cristaux). Les études expérimentales ont pu montrer que d'une façon générale, pour des contraintes faibles ou intermédiaires et des températures proches de la température de fusion, le taux de déformation peut s'écrire (Van Orman, 2004)

$$\dot{\epsilon} = A \frac{DGb}{kT} \left(\frac{b}{d}\right)^p \left(\frac{\sigma}{G}\right)^n, \quad (1.2)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion,  $G$  le module de cisaillement,  $b$  le vecteur de Burgers,  $k$  la constante de Boltzmann,  $d$  la taille des grains,  $\sigma$  la contrainte cisailante, et  $p$ ,  $n$ ,  $A$  des constantes sans dimension dépendantes du type de fluage considéré. Tout le travail pour obtenir la viscosité de la graine consistant donc à obtenir les exposants des lois de puissance et ensuite les différents paramètres de la graine. En particulier, la taille des

grains pourra être déterminante pour obtenir une estimation fiable de la viscosité.

Yoshida et al. (1996) proposent un fluage de type Nabarro-Herring, compatible avec les températures proches du point de fusion, et qui donne un taux de fluage plus élevé que pour un fluage en loi de puissance pour des tailles de grains plus petits que 6 m. La viscosité obtenue est de l'ordre de  $10^{21}$  Pa.s. Van Orman (2004), prenant comme processus de déformation le fluage de type Harper-Dorn, obtient lui une viscosité de l'ordre de  $10^{11}$  Pa.s pour l'écoulement de fer à haute pression, haute température, sous l'effet de contraintes faibles et pour des grains plus grands que la dizaine de microns. Pour Reaman et al. (2011) le fluage de type Harper-Dorn est valable uniquement pour les matériaux très purs avec une concentration des dislocations extrêmement faible, et ne peut donc pas être utilisé pour déterminer la viscosité de la graine. À partir de calculs des propriétés de fluage, les auteurs montrent que le mécanisme de déformation doit être isotrope et contrôlé par diffusion en surface, lié à une taille de grains petite, et de type *dislocation creep* en profondeur, rendant possible le développement de LPO (Lattice Preferred Orientation) et donnant une viscosité de l'ordre de  $10^{20-22}$  Pa.s.

Gleason & Mao (2013) ont mesuré à des pressions comparables à celles du noyau terrestre (jusque 210 GPa) les vitesses d'ondes cisailantes à travers leurs échantillons pour obtenir une mesure du module de cisaillement et son évolution avec la pression. Les viscosités déduites de ces extrapolations sont de l'ordre de  $10^{15-18}$  Pa.s.

## 1.3 Modèles géodynamiques

Pour expliquer les observations sismiques, de nombreux modèles géodynamiques ont été proposés depuis l'observation initiale de [Poupinet et al. \(1983\)](#). L'anisotropie sismique est associée à une orientation préférentielle moyenne des grains. On peut classer ces modèles en deux grands types, pas forcément incompatibles :

- texturation de cristallisation ;
- texturation de déformation.

Dans le premier cas, les grains sont orientés lors de la cristallisation, par effet thermique ou sous l'effet d'un champ extérieur. Nous verrons les différents mécanismes possibles dans la section [1.3.3](#).

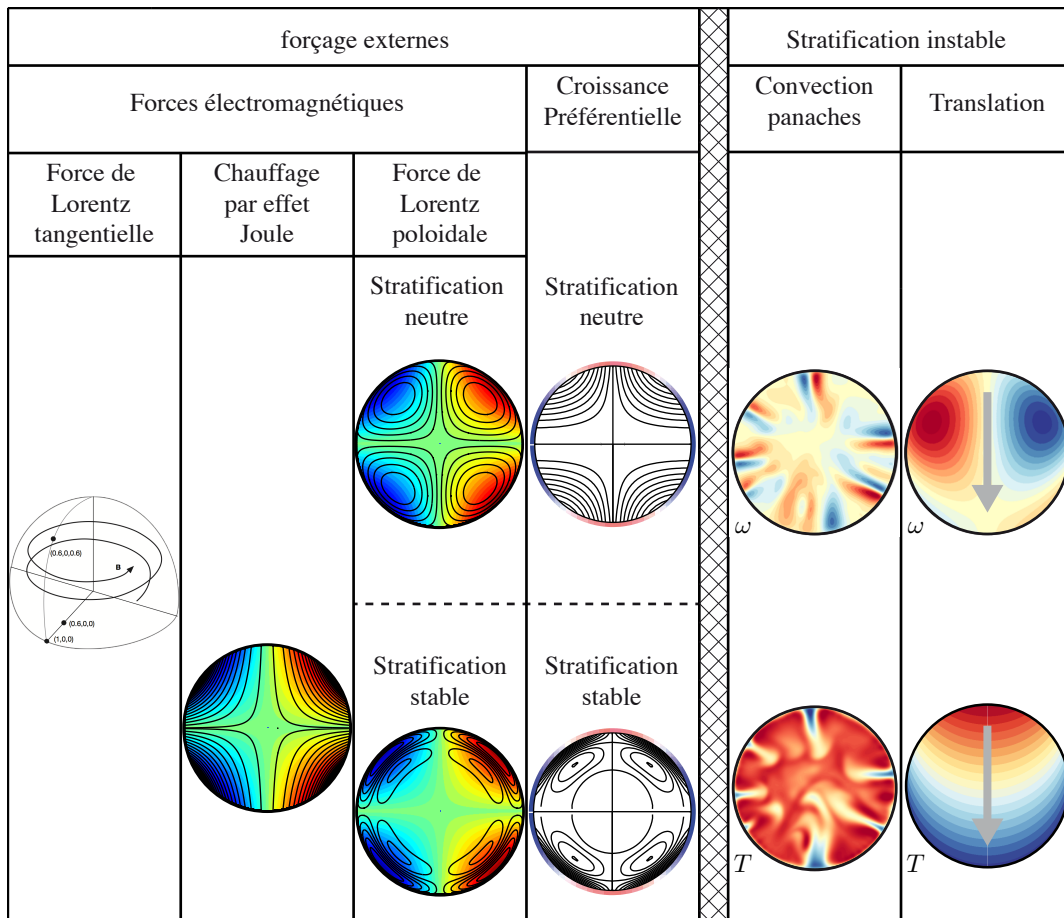
Dans le second cas, le milieu est soumis à une déformation, liée à un écoulement global, qui induit une orientation des grains en faisant jouer les dislocations le long de plans préférentiels des cristaux. Cette déformation peut s'ajouter à une texture préexistante issue de la cristallisation. Les principaux modèles d'écoulement globaux dans la graine sont présentés dans la section [1.3.2](#). Dans ce travail de thèse, j'ai développé deux points autour de ce mécanisme de texturation : j'ai étudié un mécanisme en particulier, le forçage lié à la force de Lorentz (voir chapitre [2](#)) et j'ai développé une méthode pour comparer les différents mécanismes de déformation de la graine (voir chapitre [3](#)). La figure [1.13](#) répertorie les principaux types d'écoulement et de forçages considérés dans ce travail.

### 1.3.1 Histoire thermique de la graine

Dans un premier temps, pour obtenir des contraintes sur la géodynamo, plusieurs auteurs se sont intéressés au bilan thermique global du noyau, et se sont, par extension, intéressés à l'histoire thermique et chimique de la graine ([Buffett et al., 1992, 1996](#); [Labrosse et al., 2001](#); [Labrosse, 2014](#)). La croissance de la graine, et donc en particulier son âge, sont des contraintes intéressantes pour la géodynamo. En effet, cela détermine à partir de quand la force de flottabilité liée au relarguage des éléments légers intervient pour forcer la convection.

Pour calculer cela, les différents auteurs calculent le bilan énergétique du noyau entier, qui donne l'équilibre entre le flux sortant à la CMB et les sources d'énergie dans le noyau. Les sources d'énergie dans le noyau sont diverses : le refroidissement séculaire, la chaleur latente libérée par la cristallisation de la graine, l'énergie gravitationnelle liée à la cristallisation et à la redistribution des éléments légers, et la chaleur radioactive. Le calcul exact du flux sortant à la CMB demande une connaissance parfaite et inaccessible de l'histoire du manteau et du noyau, mais peut être obtenu grossièrement avec des modèles paramétrés.

[Buffett et al. \(1992\)](#) ont proposé un premier calcul analytique pour la croissance de la



**Figure 1.13** – Bilan des différentes dynamiques publiées pour la graine. À gauche les forçages externes (Buffett & Wenk, 2001; Takehiro, 2010; Karato, 1999; Yoshida et al., 1996; Deguen et al., 2011) et à droite les deux principaux types de convection pour la graine (Buffett, 2009; Cottaar & Buffett, 2012; Alboussière et al., 2010; Deguen & Cardin, 2011; Deguen et al., 2013). Pour les forçages externes, les couleurs correspondent à l’amplitude du forçage (champ magnétique et variation horizontale du taux de croissance) et les lignes aux lignes de champ de l’écoulement. Pour la convection, les champ de vorticité  $\omega$  et de température  $T$  sont donnés, ainsi que la direction de la translation.

graine et obtiennent au premier ordre une croissance en racine carrée du temps du type :

$$r_{icb}/r_{oc} = \left[ \mathcal{M}^{-1} \int_0^t Q(\tau) d\tau \right]^{1/2}, \quad (1.3)$$

avec  $r_{oc}$  le rayon du noyau,  $\mathcal{M}$  la quantité de chaleur nécessaire à extraire pour solidifier tout le noyau. Buffett et al. (1996) ont affiné le modèle, mais donnent la même forme au premier ordre : une croissance en racine carrée du temps pour peu que les flux de chaleur et le transport de chaleur dans le noyau externe soit constants.

Labrosse et al. (2001) reprennent la même approche pour calculer l’âge de la graine et surtout les incertitudes liées à certains paramètres physiques peu connus. Pour cela, ils prennent en compte un modèle autoconsistant comme Labrosse et al. (1997), où la



température dans le noyau et donc les flux de chaleur dépendent eux même du bilan thermique global.

Tous ces modèles donnent des âges de la graine de l'ordre du milliard d'année, avec des estimations entre 2.5 Gyrs et 0.5 Gyrs. Le principal problème de ces études vient de la ré-estimation récente de la valeur de la conductivité thermique du noyau. Les modèles prennent en compte une valeur de conductivité de l'ordre de quelques dizaines de  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , alors que les valeurs actuelles sont au minimum trois fois plus élevées, ce qui modifie la valeur du flux de chaleur conduit le long du gradient adiabatique. Les modèles présentés ici doivent donc être réévalués avec cette nouvelle estimation de la diffusivité thermique. Dans les modèles que nous allons étudier, l'âge de la graine est considérée comme une inconnue du problème, avec des valeurs typiques de l'ordre de 0.5-1.5 Gyrs.

Il existe une donnée supplémentaire parfois utilisée pour contraindre l'âge de la graine : les observations paléomagnétiques. En considérant un modèle simplifié de la géodynamo, une partie des forces de flottabilité nécessaire pour l'existence de la géodynamo est fournie par le relargage d'éléments légers à la surface de la graine du à la cristallisation. L'existence de la graine est donc un élément important, parfois considéré comme nécessaire à la dynamo terrestre. Si la graine était indispensable à la dynamo terrestre, alors les données paléomagnétiques devraient donc nous donner une limite basse de l'âge de la graine. Mais les données remontent à plus de trois milliards d'années (Tauxe & Yamazaki, 2007), ce qui n'est pas raisonnable comme limite basse. La convection purement thermique était donc probablement suffisante avant l'apparition de la graine. L'étude des paléointensités pourrait par contre être intéressante s'il était possible de voir, dans les données, un marqueur de l'apparition de la graine et donc un changement dans la dynamique du noyau externe.

### 1.3.2 Mécanismes de déformation

#### 1.3.2.1 Convection thermique et/ou chimique

Une des questions fondamentales pour la dynamique de la graine est celle de la convection : la graine convecte-t-elle ou non ? A-t-elle convecté ?

La graine est un objet très particulier, une boule de fer à très haute pression et température, autogravitante, très loin de n'importe quel objet physique que l'on peut étudier en laboratoire. Il faut donc se tourner soit vers des études expérimentales avec des matériaux analogues, en laissant de côté la géométrie de l'objet dans son ensemble, ou utiliser des méthodes numériques et analytiques.

De nombreuses études ont été faites sur la possibilité de convection thermique, chimique ou thermo-chimique dans la graine (Jeanloz & Wenk, 1988; Weber & Machel, 1992; Buffett, 2009; Deguen & Cardin, 2011; Cottaar & Buffett, 2012; Deguen et al., 2013; Mizzon & Monnereau, 2013). D'une manière générale, la possibilité de la convection dépend



de la stratification en densité du profil de référence, et les cas chimiques et thermiques sont traités différemment.

**Instabilité thermique** Pour le cas thermique, on considère que le profil de densité est lié au profil de température, et pour que la graine soit thermiquement instable, le profil de température doit être super adiabatique. En pratique, cela correspond à une diffusion peu efficace par rapport à la baisse de température de l'adiabat qui sert de condition aux limites à la surface de la graine. Pour savoir si le profil est stable ou instable, il suffit donc, comme premier critère grossier, de calculer le signe de

$$S = \kappa_T \nabla^2 T_{\text{ad}} - \frac{dT_{\text{ad}}}{dt}, \quad (1.4)$$

qui compare le refroidissement extérieur  $dT_{\text{ad}}/dt < 0$  et la diffusion thermique  $\kappa_T \nabla^2 T_{\text{ad}} > 0$ , avec  $T_{\text{ad}}$  la température adiabatique et  $\kappa_T$  la conductivité thermique (Deguen & Cardin, 2011). Si la diffusion est forte,  $S$  sera positif et le profil de densité sera stable, tandis que si la diffusion est faible, le profil de densité sera instable. Deguen & Cardin (2011) obtiennent pour  $S$  des valeurs de l'ordre de  $100 \text{ K.Gyrs}^{-1}$  pour une diffusivité thermique de  $36 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$  et un âge de la graine de 600 millions d'années.

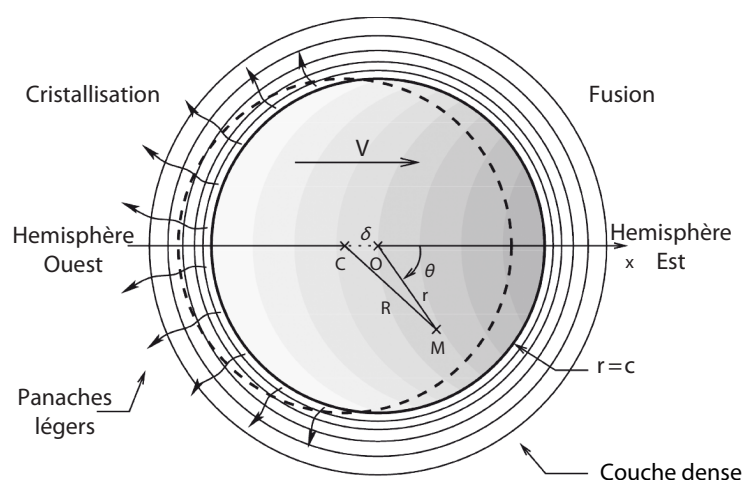
Mais ce critère n'est pas suffisant pour déterminer à la fois si une convection a lieu et la forme exacte de cette convection. Deguen et al. (2013); Mizzon & Monnereau (2013) ont récemment mis en évidence que la forme de la convection dépend du nombre de Rayleigh, caractérisant la stratification, et des conditions aux limites mécaniques.

Comme prédit par Alboussière et al. (2010), quand la surface de la graine est considérée comme parfaitement perméable, c'est à dire que la moindre formation de topographie sera compensée par une cristallisation ou fusion instantanée, et que le profil de densité est instable, alors la graine est instable vis à vis d'une instabilité dite de translation, et ce quelque soit le nombre de Rayleigh. La forme de l'instabilité est présentée sur la figure 1.14.

Lorsque les conditions aux limites mécaniques sont à flux nul, avec une vitesse radiale nulle à la surface de la graine, l'instabilité de convection qui se développe est classique, avec la formation de panaches (Deguen & Cardin, 2011) et une convection en volume à la condition que le nombre de Rayleigh soit supérieur au nombre de Rayleigh critique.

Deguen et al. (2013); Mizzon & Monnereau (2013) ont étudié la transition entre ces deux modes, et montré que le critère principal pour la graine est la viscosité.

La translation est prometteuse pour expliquer les observations sismiques de variations hémisphériques de l'atténuation. Pour autant, il reste un problème fondamental : les instabilités étaient envisageables pour la dynamique de la graine tant que le temps caractéristique de la diffusion pour la graine était considéré du même ordre de grandeur que l'âge de la graine, de l'ordre du milliard d'années. Les nouvelles estimations de la conductivité thermique du fer et de ses alliages à très hautes pressions et très hautes températures, au minimum trois fois plus élevées et jusque environ  $250 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ , modifient drastiquement les estimations du temps caractéristique de la diffusion : pour



**Figure 1.14** – Instabilité de translation, figure modifiée de [Alboussière et al. \(2010\)](#).

avoir une graine instable thermiquement, la graine devrait avoir un âge de l'ordre de la centaine de millions d'années.

**Instabilité compositionnelle** Les critères et géométries de la convection liés à une instabilité de densité d'origine compositionnelle sont a priori semblables à ceux calculés pour la convection thermique. Plusieurs auteurs ont étudié le profil théorique de la densité lié à des variations radiales de composition.

La composition qui cristallise à l'ICB est liée à deux paramètres : à la composition du noyau externe, ou au moins à la composition du liquide en équilibre à l'ICB, et au coefficient de partage. La graine cristallisant un alliage moins concentré en éléments légers, la concentration globale du noyau liquide en éléments légers augmente donc avec la croissance de la graine, et a un effet stabilisant pour la composition de la graine. Deux leviers sont donc possibles pour proposer un profil compositionnel instable : une forte dépendance du coefficient de partage avec la pression ([Gubbins et al., 2013](#); [Labrosse, 2014](#)) ou alors une composition du liquide qui cristallise différente de celle du noyau liquide moyen, par exemple écrantée par la F-layer ([Deguen et al., 2013](#)).

Pour autant, [Labrosse \(2014\)](#) indique que, même en jouant sur les coefficients de partage, l'effet destabilisant de la composition sur les forces de flottabilité dans ce cas là est trop faible par rapport à l'effet stabilisant du profil sous adiabatique de température pour des valeurs raisonnables de la conductivité thermique.

### 1.3.2.2 Forçage extérieur dans le cas d'une stratification stable

La graine interagit avec son environnement, le noyau externe, le manteau, via des couplages mécaniques, thermiques, électromagnétiques et gravitationnels. En présence de convection, ces couplages sont considérés comme négligeables car les écoulements associés sont lents par rapport à l'écoulement de convection. Au contraire, quand la stratification en

densité est stable, ce sont ces couplages qui ont été étudiés pour proposer des écoulements à grande échelle dans la graine.

Dans cette section, je vais me concentrer sur les forçages liés au noyau externe : forçages électromagnétiques (Karato, 1999, 2000; Buffett & Bloxham, 2000; Buffett & Wenk, 2001; Takehiro, 2010) et variations latérales dues à l'écoulement dans le noyau liquide (Yoshida et al., 1996; Deguen et al., 2011; Lincot et al., 2014).

**Forçage électromagnétique** Plusieurs travaux proposent que l'existence du champ magnétique à l'extérieur de la graine est susceptible d'induire un écoulement dans la graine. L'effet du champ magnétique est double : il induit une force supplémentaire, la force de Lorentz  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ , liée au courant  $\mathbf{J}$  et au champ magnétique  $\mathbf{B}$ , et aussi une source supplémentaire d'énergie, le chauffage Joule  $Q_J \propto |\nabla \times \mathbf{B}|^2$ .

Pour modéliser ces effets, différents auteurs ont cherché à simplifier la forme du champ magnétique, pour obtenir des formes analytiques ou semi-analytiques de l'écoulement et estimer au premier ordre l'écoulement dans la graine. Pour expliquer l'anisotropie globale, à symétrie cylindrique, Karato (1999) utilise un champ magnétique purement toroidal, et calcule l'effet des premières harmoniques sphériques. En utilisant les conditions aux limites sur la pression dues au champ magnétique, il obtient un écoulement global avec des vitesses caractéristiques de l'ordre de  $10^{-9} - 10^{-7} \text{m.s}^{-1}$ <sup>b</sup>, soit deux ordres de grandeur au dessus de la vitesse de croissance de la graine. Buffett & Bloxham (2000) recommencent la même étude, mais en considérant que la stratification en densité est forte, et obtiennent que, dans ce cas, l'écoulement est confiné en surface et tend vers zero. Pour définir le critère à partir duquel la stratification est forte, ils comparent la force de Lorentz avec la force de flottabilité créée par une déformation des lignes d'isovaleurs de la densité, et obtiennent une distorsion de la forme

$$h = \frac{|B|^2}{\mu \rho' g L}, \quad (1.5)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique,  $g$  l'accélération de la gravité,  $L$  une longueur caractéristique (prise par exemple comme le rayon de la graine) et  $\rho'$  la dérivée radiale de la densité. Dans le cas de la graine,  $\rho'$  est déduite de l'origine de la stratification, et une stratification thermique raisonnable<sup>c</sup> avec une variation de température sur l'ensemble de la graine de quelques dizaines de Kelvins, donne  $h$  de l'ordre de la dizaine de mètres.  $h$  étant petit devant le rayon de la graine, la déformation des lignes d'isodensité attendue est faible, et ils obtiennent un écoulement confiné en surface, incompatible avec les observations. Le confinement de l'écoulement ne dépend pas de la viscosité, donc c'est une information très robuste de la dynamique induite par la force de Lorentz. Lasbleis et al. (submitted) revisitent ce problème en proposant une nouvelle approche pour les conditions aux limites de la graine et en prenant en compte la vitesse de croissance de la graine (voir chapitre 2).

b. valeur de vitesse qui dépend fortement de la valeur de viscosité : ici prise pour  $\eta = 10^{15-17} \text{Pa.s}$

c. Buffett & Bloxham (2000) utilise  $\Delta T = 30 \text{K}$  (Buffett, 2000a), ce qui correspond dans le modèle de Deguen et al. (2011) à  $S = \Delta T 6\kappa / r_{ic}^2 \approx 40 \text{K.Gyrs}^{-1}$ .

Buffett & Wenk (2001) proposent ensuite que, si le champ toroidal seul ne peut induire d'écoulement à cause de la stratification, la force de Lorentz associée à un champ magnétique plus complexe, qui prend en compte une composante verticale  $B_z$  du champ, est en partie tangentielle à la surface de la graine. La partie tangentielle de la force de Lorentz n'est pas modifiée par la stratification, stable ou instable, mais est par contre susceptible d'induire un taux de déformation non nul dans la graine. Pour des valeurs de viscosité faibles ( $10^{14-16}$  Pa.s), ils obtiennent une déformation de l'ordre de 40% sur des temps de 1 à 100 millions d'années. Les taux de déformation de ce modèle sont très grands, mais deux problèmes apparaissent : la dépendance en viscosité  $\eta^{-1}$ , qui demande des viscosités faibles pour obtenir une déformation observable ; la géométrie de l'écoulement, qui confine ici aussi la déformation en surface, avec une dépendance en  $r^3$  du rayon. Deguen (2012) a montré que bien que ce forçage ne présente pas, en instantané, une géométrie appropriée pour expliquer l'anisotropie sismique, il est possible d'obtenir une déformation en profondeur lorsque l'on accumule la déformation au cours de la croissance de la graine.

Le chauffage par effet Joule a été négligé par les auteurs précédents, car l'effet de la force de Lorentz est plus direct et donc plus susceptible d'induire un écoulement fort. Dans le cas du noyau externe, effet Joule et force de Lorentz sont étroitement liés, car le champ magnétique est une des variables du problème, déformée par l'écoulement, et non pas une donnée. Ici, le champ magnétique n'est pas déformé par l'écoulement car le nombre de Reynolds magnétique est de l'ordre de  $10^{-4}$ <sup>d</sup>, et les deux problèmes, chauffage par effet Joule et force de Lorentz, sont découplés. Takehiro (2010) a calculé l'écoulement lié à la partie hétérogène du chauffage par effet Joule pour un champ magnétique purement toroidal à la surface de la graine. L'écoulement obtenu a des vitesses typiques de l'ordre de  $10^{-11} - 10^{-9}$  m.s<sup>-1</sup><sup>e</sup>.

**Hétérogénéités spatiales du taux de croissance** La graine croît en cristallisant à partir du noyau liquide. Étant donné les vitesses caractéristiques de l'écoulement dans le noyau liquide ( $\approx 10^{-4}$  m.s<sup>-1</sup>), le temps caractéristique de l'évolution du noyau externe est largement plus faible que celui pour la graine, et le noyau externe est souvent considéré comme parfaitement homogène du point de vue de la graine. Pourtant, Yoshida et al. (1996) proposent une croissance préférentielle à l'équateur : la convection dans le noyau est sensible à la rotation de la Terre, et s'organise au moins pour les grandes échelles en colonnes dites géostrophiques ; le transport de chaleur est alors privilégié dans le plan de l'équateur, et induit une croissance préférentielle au niveau de l'équateur. En réponse à la topographie ainsi formée, la graine se déforme, à une vitesse caractéristique similaire à celle obtenue pour un rebond post-glaciaire. Ce mécanisme induit un écoulement en volume, susceptible d'expliquer les observations d'anisotropie sismique, mais avec un taux de déformation faible.

d.  $Re_m = Ur_{ic}/\lambda$ ,  $\lambda \approx 1\text{m.s}^{-2}$  la diffusivité magnétique et  $U \approx 10^{-10}$  m.s<sup>-s</sup> une vitesse caractéristique de l'écoulement.

e. avec  $\eta = 10^{17}$  Pa.s et un champ magnétique fort à l'ICB (10 mT).

Deguen et al. (2011) reprennent ce mécanisme, mais rajoutent un ingrédient essentiel à la graine : la stratification stable. En effet, ce mécanisme est susceptible d'être important pour une stratification stable, et celle-ci est susceptible d'inhiber les mouvements radiaux comme discuté dans le cas de la force de Lorentz (Buffett & Bloxham, 2000). Ils obtiennent un écoulement confiné en surface, qui présente des taux de déformation forts ( $1.5 \times 10^{-2} \text{ Myrs}^{-1}$  pour  $\eta = 10^{18} \text{ Pa.s}$ )

### 1.3.2.3 Bilan - mécanismes d'écoulement à grande échelle

Beaucoup de mécanismes et d'écoulements ont été proposés pour d'expliquer les observations d'anisotropie sismique de la graine, que ce soit l'anisotropie sismique globale de 3% ou la dichotomie. De toute cette zoologie, aucun mécanisme ne semble prendre le pas sur les autres, du fait en partie de la trop grande incertitude sur les paramètres physiques de la graine (citons entre autres la viscosité, l'âge de la graine, les constantes élastiques, les valeurs des forçages, etc.) et aucune étude globale n'avait encore été proposée. Lasbleis & Deguen (In review) proposent une comparaison globale et quantitative de ces mécanismes, développée ici dans le chapitre 3.

### 1.3.3 Mécanismes de cristallisation

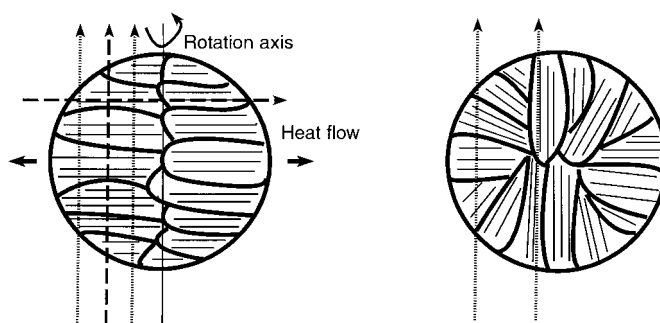
La frontière de la graine, l'ICB, est définie comme la limite entre le noyau liquide et le noyau solide. Les longueurs d'onde des ondes sismiques qui échantillonnent la graine sont telles que peu d'information à petite échelle sont disponibles.

En métallurgie, la cristallisation d'un métal liquide est très bien contrainte et connue. Lors de la cristallisation d'un alliage, une zone dite de *supercooling*, de surfusion, existe au niveau du front de cristallisation, correspondant à du liquide de température inférieure à la température de cristallisation globale du système. Cette zone surfondue n'est pas stable dans la pratique, et les métallurgistes observent soit la formation de dendrites et d'un *mush*, soit la formation de petites particules solides et d'un *slurry*. Pour comprendre les termes de *mush* et *slurry*, qui n'ont pas de traduction française qui leur rende hommage, on peut reprendre l'analogie des boulettes de viande et du fromage suisse : dans les deux cas, le système admet la coexistence entre solide et liquide, mais l'interconnectivité du solide ou du liquide ne sont pas similaires ; pour le *mush*, le solide au moins est interconnecté, tandis qu'il ne l'est pas dans le *slurry*.

Depuis Loper & Roberts (1981) et Fearn et al. (1981), de nombreuses études ont suivi pour étudier la stabilité du front de cristallisation à l'ICB. On citera entre autres Deguen et al. (2007) et Alexandrov & Malygin (2011) qui ont récemment revu ces instabilités morphologiques en prenant en compte la convection dans le noyau externe. Toutes ces études concluent à l'existence d'une instabilité morphologique à la surface de la graine, de laquelle découle l'existence de dendrites à l'ICB. De l'étude de ces dendrites, les auteurs en

ont déduit la taille typique de grains formés à l'ICB, qui serait proportionnelle à l'espace interdendritique typique. [Deguen et al. \(2007\)](#) obtient des tailles de grains de l'ordre du millimètre au centimètre, plusieurs ordres de grandeur plus petits que les estimations précédentes de [Bergman \(1998\)](#), qui ne prenait pas en compte la convection dans le mush ni dans le noyau.

L'orientation des dendrites et des cristaux lors de la solidification a aussi été étudiée expérimentalement, principalement à basse pression. [Bergman \(1997\)](#) a proposé que, comme les dendrites s'alignent expérimentalement préférentiellement parallèlement au flux de chaleur, c'était aussi le cas dans la graine. Pour un flux de chaleur avec une symétrie cylindrique, comme c'est proposé en prenant en compte l'orientation de la convection dans le noyau externe, les cristaux dans la graine pourraient être orientés préférentiellement dans le plan horizontal, comme le montre la figure 1.15. Ce modèle très simple repose sur le fait que le flux de chaleur est globalement perpendiculaire à l'axe de rotation de la graine et de symétrie cylindrique, et ce surtout à l'échelle de la cristallisation des dendrites, c'est à dire à petite échelle. Pourtant, autant le flux de chaleur global peut avoir la symétrie attendue, autant il est plus probable, que à l'échelle des dendrites, le flux de chaleur soit de symétrie globalement radiale et avec des fluctuations.



**Figure 1.15** – Orientation des cristaux dans la graine proposée par [Bergman \(1997\)](#). À gauche, coupe méridionale, à droite, coupe équatoriale.

Un autre mécanisme de texture lors de la solidification a été proposé par [Karato \(1993\)](#). Les cristaux sous forme hcp (hexagonal close-packed) sont des cristaux anisotropes, aussi bien pour la vitesse des ondes sismiques que pour la susceptibilité paramagnétique. L'amplitude de l'anisotropie de susceptibilité paramagnétique, considérée comme proche de celle d'autres métaux de transition avec un nombre pair d'électrons sur la couche  $d$  ( $\alpha$ -Ti, Hf, Zr), décroît à mesure que l'on approche de la température de fusion. Considérant que la différence de température de fusion est grande entre la graine et le noyau liquide, riche en éléments légers, [Karato \(1993\)](#) obtient une anisotropie de susceptibilité paramagnétique de l'ordre de  $10^{-4}$  unités SI, assez pour permettre l'orientation de cristaux de taille supérieures à la dizaine de micromètres à la surface de la graine lors de la cristallisation.

## 1.4 Bilan : connaissances actuelles de la graine

---

Finalement, nous avons d'une part des observations sismologiques surprenantes, montrant une structure de la graine complexe, et de l'autre une zoologie de mécanismes proposés pour expliquer cette structure. Pour relier les deux, les propriétés physiques de l'alliage que forme la graine sont encore discutées et pour la plupart bien mal connues.

Dans ce travail de thèse, l'idée est d'apporter un peu de clarté à toute cette zoologie de modèles : lesquels sont compatibles ou incompatibles ? comment les comparer ? comment comparer ensuite les modèles sismologiques<sup>f</sup> ? Dans ce travail, je propose aussi de commencer l'investigation sur la dynamique induite par la co-existence du solide et du liquide à la surface de la graine, via la dynamique biphasique.

## 1.5 Notations

---

Les grandeurs vectorielles et tensorielles sont notées en gras pour les différencier des grandeurs scalaires (sauf quand on précise que la grandeur peut avoir n'importe quel ordre tensoriel) :  $v$  pour une des composantes de la vitesse, et  $\boldsymbol{v}$  pour la vitesse vectorielle.

---

f. On peut même élargir le problème : comment faire discuter entre eux sismologues et géodynamiciens ? Tout le monde parle anglais, mais entre rayon/profondeur, projection sur la sphère /coupe méridionale, les usages sont différents et parfois des incompréhensions existent.



# 2

## DYNAMICS INDUCED BY THE LORENTZ FORCE IN THE GROWING INNER CORE

---

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Résumé</b>	<b>43</b>
<b>2.2</b>	<b>Discussion sur les conditions aux limites</b>	<b>44</b>
<b>2.3</b>	<b>Introduction</b>	<b>51</b>
<b>2.4</b>	<b>Governing equations</b>	<b>53</b>
2.4.1	Effect of an imposed external magnetic field	53
2.4.2	Conservation equations	55
2.4.2.1	Conservation of mass, momentum and energy	55
2.4.2.2	Growth of the inner core	56
2.4.3	Dimensionless equations and parameters	57
2.4.3.1	Definition of the dimensionless quantities	57
2.4.3.2	Simplified growth of the inner core	59
2.4.4	Boundary conditions	63
2.4.5	Numerical modelling	63
<b>2.5</b>	<b>Flow description</b>	<b>64</b>
2.5.1	Neutral stratification	64
2.5.2	Zero growth rate	66
2.5.3	Growing inner core	67
<b>2.6</b>	<b>Scaling laws</b>	<b>68</b>
2.6.1	Balance between magnetic forcing and stratification	68
2.6.2	Scaling laws in the strongly stratified regime	69
2.6.2.1	Small $Pe$ limit	70
2.6.2.2	Large $Pe$ limit	71
2.6.2.3	Comparison with numerical results	71
<b>2.7</b>	<b>Strain rate produced by the flow</b>	<b>74</b>
<b>2.8</b>	<b>Application to the inner core</b>	<b>75</b>
<b>2.9</b>	<b>Conclusion</b>	<b>78</b>
<b>2.10</b>	<b>Poloidal/toroidal decomposition</b>	<b>79</b>
2.10.1	Momentum equation using poloidal decomposition	79
2.10.2	Poloidal decomposition of the boundary conditions	80
<b>2.11</b>	<b>Compositional stratification</b>	<b>80</b>



<b>2.12 Analytic solution for neutral stratification</b> . . . . .	<b>81</b>
<b>2.13 Integration over time of the deformation</b> . . . . .	<b>83</b>
2.13.1 General discussion . . . . .	83
2.13.2 Low Pe - Thermal stratification . . . . .	84
2.13.3 Large Pe - Compositional stratification . . . . .	86

---

## 2.1 Résumé

*Le travail qui suit a été soumis pour publication à *Geophysical Journal International*, en collaboration avec Stéphane Labrosse, Renaud Deguen (LGL, ENS de Lyon, Université Lyon 1, Lyon) et Philippe Cardin (ISTerre, Université Joseph Fourier, Grenoble).*

La cristallisation de la graine est le moteur principal de la dynamo terrestre : en cristallisant, les éléments légers présents dans l'alliage qui constitue le noyau externe se partitionnent et sont préférentiellement concentrés dans le liquide, enrichissant le liquide en éléments légers. Cette source de flottabilité est considérée comme fondamentale pour induire une convection suffisamment vigoureuse pour l'effet dynamo et la production du champ magnétique terrestre.

La formation de la graine est donc liée à l'existence du champ magnétique terrestre. Réciproquement, on peut s'intéresser aux effets de ce champ magnétique sur la graine en elle-même. La graine est constituée d'un alliage de fer solide, sensible aux forces électromagnétiques et donc à l'existence d'un champ magnétique extérieur, mais les mouvements issus de ce forçage toutefois sont trop lents pour maintenir un quelconque effet dynamo.

Cette hypothèse a été proposée dès 1999 par Shun-Ichiro Karato, qui obtient un écoulement à symétrie cylindrique, compatible avec les observations d'anisotropie sismique, en forçant une pression magnétique à l'ICB (Karato, 1999). En réponse directe à ce travail, Buffett & Bloxham (2000) ont montré que la géométrie et la vitesse de l'écoulement sont en fait très différents dès que l'on considère une stratification thermique raisonnable car les mouvements radiaux sont inhibés.

Ce forçage magnétique est un forçage externe qui induit un écoulement très faible. Karato (1999) propose que la déformation induite oriente les cristaux de hcp-Fe, créant une texture et une anisotropie visible par les observations sismiques. Deux hypothèses fortes doivent être faites : le forçage doit être appliqué sur un temps long ; mais surtout, aucun autre écoulement de grande échelle ne doit venir perturber l'écoulement induit. En particulier, toute texturation induite par un tel forçage serait *a priori* effacée par des instabilités de convection. D'une manière générale, le forçage électromagnétique ne peut jouer de rôle que dans le cas où la graine possède une stratification en densité stable. Dans ce cas, Buffett & Bloxham (2000) ont montré que l'écoulement prévu par Karato (1999) est négligeable car les mouvements radiaux sont inhibés par la stratification.

Dans ce travail, nous proposons un modèle complet des mouvements induits par les forces électromagnétiques sur une graine stratifiée stable, en discutant entre autres les conditions aux limites mécaniques et en prenant en compte la croissance de la graine.

Dans les modèles précédents, la frontière de la graine est considérée comme complètement perméable. Cela signifie que si cette frontière est perturbée par l'écoulement, le matériau va instantanément fondre (s'il a été déplacé à un rayon plus grand que celui de la graine) ou cristalliser (à l'inverse). Le changement de phase amortit instantanément toute modification d'altitude de l'ICB, pour conserver une frontière sphérique. Dans

le cas d'un changement de phase infiniment long, une perturbation de la frontière sera contrebalancée par un écoulement de subsurface, dont le temps caractéristique sera contrôlé par le temps visqueux. [Deguen et al. \(2013\)](#) ont développé des conditions aux limites qui permettent de comparer ces deux effets, avec un nombre sans dimension appelé  $\mathcal{P}$  rapportant le temps caractéristique de changement de phase au temps caractéristique de rétablissement visqueux de la topographie. Dans ce cadre, j'ai développé ici une étude analytique pour estimer quelles conditions aux limites étaient adéquates. En étudiant une stratification neutre, les équations sont solvables analytiquement, ce qui permet de discuter ces conditions aux limites dans la section 2.2. Pour des conditions aux limites perméables, l'écoulement obtenu est très proche de celui prédit par [Karato \(1999\)](#). L'écoulement obtenu est d'autant plus vigoureux que le rapport force magnétique sur force visqueuse est grand, mais les vitesses sont peu dépendantes du nombre sans dimension qui définit les conditions aux limites. Par contre, pour obtenir un écoulement dont les vitesses sont similaires à la vitesse de croissance de la graine, les forces visqueuses doivent être petites. En terme dimensionné, cela correspond à une viscosité de moins de  $10^{16}$  Pa.s. La viscosité étant le paramètre le moins contraint de notre étude, des valeurs de viscosité aussi faibles correspondent presque automatiquement à des conditions aux limites parfaitement imperméables. Contrairement aux études précédentes, cette étude se focalise donc sur des conditions aux limites imperméables.

De plus, nous élargissons l'étude en incluant la croissance de la graine : nous nous intéressons à la déformation sur l'histoire globale de la graine. La croissance peut donc jouer à la fois sur la dynamique globale, en rajoutant un terme artificiel d'advection lié à la frontière mouvante, et sur la façon dont la déformation s'accumule sur l'ensemble de l'histoire de la graine.

Le travail soumis à publication scientifique est retranscrit ici dans son intégralité en anglais, à partir de la section 2.3, mais je souhaiterais dans un premier temps détailler mon travail sur les conditions aux limites, dans la section 2.2.

## 2.2 Discussion sur les conditions aux limites

Les travaux récents sur la translation ([Alboussière et al., 2010](#); [Monnereau et al., 2010](#); [Mizzon & Monnereau, 2013](#); [Deguen et al., 2013](#)) ont montré que la dynamique de la graine pouvait être peu instinctive. Pour peu que le changement de phase solide-liquide soit infiniment rapide à l'ICB (correspondant à des conditions aux limites complètement perméables), l'instabilité de convection se développe sous forme d'une translation et non de panaches de convection ([Alboussière et al., 2010](#); [Monnereau et al., 2010](#)). Les travaux récents de [Mizzon & Monnereau \(2013\)](#); [Deguen et al. \(2013\)](#) étudient les conditions pour laquelle la translation est dominante par rapport à la convection classique dans une sphère imperméable. Le critère classique de démarrage de la convection dans une sphère pleine refroidie par la frontière externe est la valeur du nombre de Rayleigh critique  $Ra_c = 1545.6$  ([Chandrasekhar, 1961](#)). Pour étudier des conditions aux limites variables, [Deguen et al. \(2013\)](#) définissent un paramètre de changement de phase qui compare le

temps caractéristique de changement de phase  $\tau_\phi$  avec le temps de relaxation visqueux, comparable à un mécanisme de rebond post-glaçiaire. Le paramètre  $\mathcal{P}$  s'écrit alors

$$\mathcal{P} = \frac{\tau_\phi \Delta \rho g_{\text{icb}} r_{\text{ic}}}{\eta}, \quad (2.1)$$

avec  $\Delta \rho$  la variation de densité entre le solide et le liquide à l'ICB,  $g_{\text{icb}}$  et  $r_{\text{ic}}$  l'accélération de la gravité à l'ICB et le rayon de la graine, et  $\eta$  la viscosité à proximité de la surface de la graine. On peut alors paramétriser la réaction de l'interface à une modification légère de topographie : si  $\mathcal{P}$  est grand, alors l'interface est dite imperméable (la relaxation d'une perturbation se fera par un écoulement visqueux sous l'interface, de la même manière que pour un rebond post-glaçiaire) ; au contraire, si  $\mathcal{P}$  est petit, la relaxation visqueuse est trop lente et la variation de topographie s'effacera par fusion ou cristallisation. La valeur limite exacte de  $\mathcal{P}$  dépend *a priori* du problème considéré, car elle dépend de la perturbation en topographie, en particulier de sa longueur d'onde.

Pour le cas des instabilités de convection,  $\mathcal{P}$  modifie le nombre de Rayleigh critique à partir duquel le système est dit instable. Mizzon & Monnereau (2013); Deguen et al. (2013) obtiennent une forme du Rayleigh critique de type  $Ra_c = 87 \times 1545 \mathcal{P} / (1545 + 87 \mathcal{P})$  (voir figure 2.1) et des champ de vitesse radiale sous la surface comme visible sur la figure 2.2.

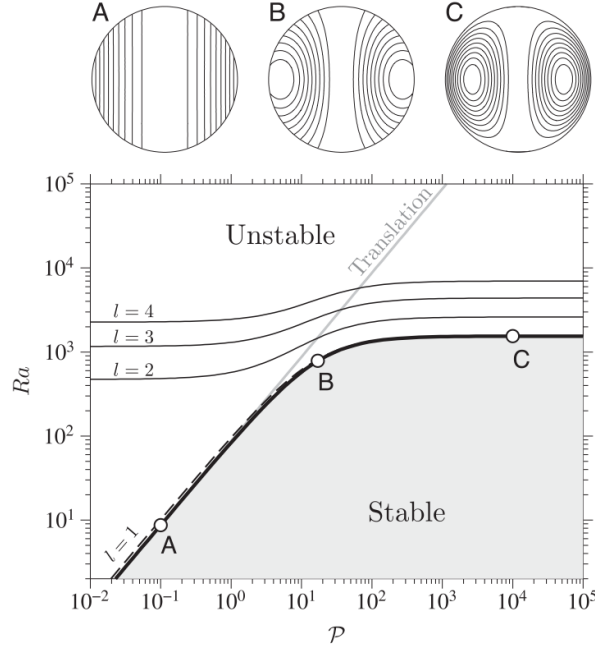
Dans le cas de forçages extérieurs à la graine, la pertinence des conditions aux limites n'est souvent pas discutée. Karato (1999); Buffett & Bloxham (2000); Takehiro (2010) utilisent, presque par défaut, un changement de phase instantané à l'ICB. Buffett & Bloxham (2000) discutent de l'intérêt d'un équilibre thermodynamique à l'ICB, mais concluent que toute perturbation de l'ICB sera compensée par fusion ou cristallisation. Pourtant, ces auteurs prennent en compte des viscosités bien plus faibles que celles qui, pour la convection au moins, seraient responsables d'une convection de type panaches.

Pour étudier l'effet des conditions aux limites dans le cas d'un forçage par la force de Lorentz, je me suis concentrée sur un cas simple et calculable analytiquement : la stratification neutre. Les équations de conservation du moment et de conservation de l'énergie sont découplées, et on peut calculer analytiquement le champ de vitesse résultant.

Le calcul exact est détaillé dans la section 2.12. On résout l'équation

$$\mathbf{0} = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + M(t) \mathbf{f}_L, \quad (2.2)$$

avec  $\mathbf{f}_L$  la partie non potentielle de la force de Lorentz. Cette équation correspond à une forme non-dimensionnelle de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, avec  $u$  le champ de vitesse,  $p$  la pression (incluant entre autres la pression magnétique) et  $M(t)$  un nombre sans dimension que l'on appelle nombre de Hartmann effectif, qui compare l'intensité de la force de Lorentz avec les forces visqueuses. Pour ne pas avoir à calculer la pression, on appliquera une première fois un rotationnel à cette équation. Notre problème est en fait plus simple qu'il n'y paraît : un écoulement à viscosité constante forcé par des anomalies de densité et un forçage purement poloidal sera lui même poloidal si les conditions



**Figure 2.1** – Diagramme de stabilité pour la convection dans une sphère avec changement de phase possible à la frontière extérieure. La ligne noire correspond à la destabilisation de la première harmonique, et les schémas au dessus aux lignes de l'écoulement aux trois points indiqués. Figure de [Deguen et al. \(2013\)](#)

aux limites ont une vorticité verticale nulle, ce qui est le cas ici. En choisissant une forme simple pour le champ magnétique,  $\mathbf{B} = B_0 r^2 / r_{ic}^2 \sin \theta \mathbf{e}_\phi$ , la force de Lorentz obtenue est purement toroidale ( $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{f}_L = 0$ ). On peut alors résoudre notre problème en considérant la vitesse sous la forme  $\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (P r \mathbf{e}_r)$  et en résolvant l'équation 2.2 à laquelle on applique  $\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla)$ . La force de Lorentz utilisée donne un forçage simple dans ce cas, sous forme d'une seule harmonique sphérique  $\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla \mathbf{f}_L) = -16 B_0^2 / \sqrt{5} r^2 / r_{ic}^2 Y_2^0$ . En décomposant de même le scalaire  $P$  en harmoniques sphériques  $P = p_l^m(r) Y_l^m$ , l'équation à résoudre est simplement

$$D_2^2 p_2^0 + \frac{8}{3\sqrt{5}} M r^2 = 0. \quad (2.3)$$

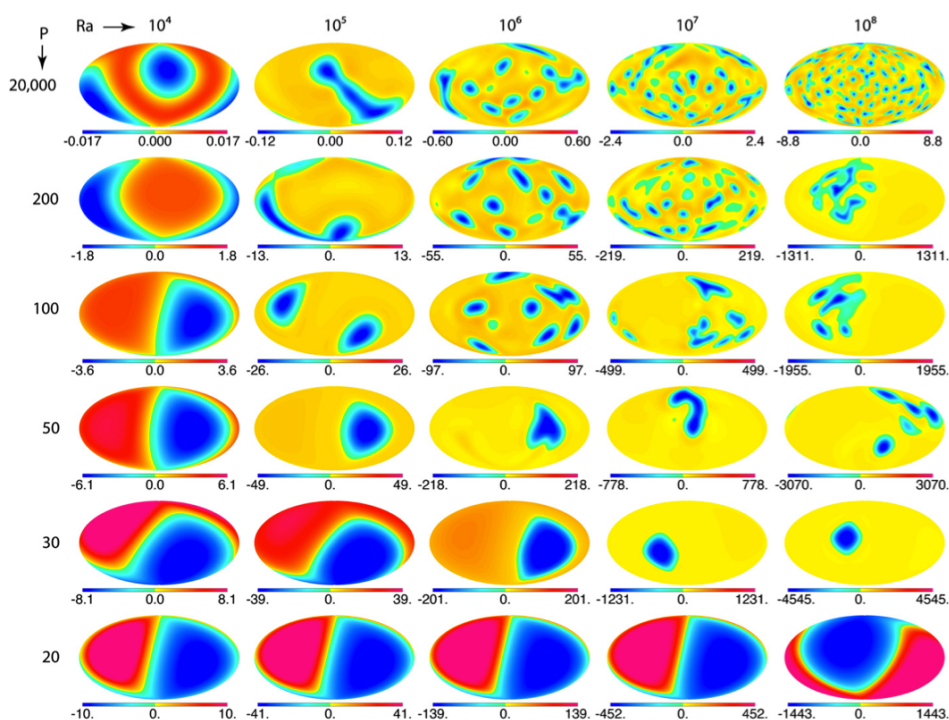
La mise en place des conditions aux limites correspondantes aux scalaires  $p_l^m$  est décrite dans [Deguen et al. \(2013\)](#). Les conditions aux limites sont rappelées aux équations 2.68 à 2.70, qui correspondent respectivement à la continuité des contraintes tangentielles (qui sont toutes les deux nulles) et normale (qui dépend du paramètre  $\mathcal{P}$ ).

La continuité de la contrainte normale s'écrit à l'ICB

$$-\mathcal{P}(t)(u_r - \dot{r}_{ic}) - 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + p' = 0, \quad (2.4)$$

avec  $u_r$  la composante radiale de la vitesse  $\mathbf{u}$ .

Dans le cas  $\mathcal{P} = 0$ , cela correspond simplement à  $\sigma_{rr}(r = r_{ic}) = 0$ . À l'inverse, pour



**Figure 2.2** – Évolution du champ de vitesse radiale à la surface de la graine en fonction du paramètre de changement de phase  $\mathcal{P}$  et du nombre de Rayleigh  $Ra$ . Figure de [Mizzon & Monnereau \(2013\)](#)

$\mathcal{P} \rightarrow \infty$ , cela correspond à  $u_r = \dot{r}_{ic}$ , la vitesse radiale à l'ICB est fixée par la vitesse de croissance. Le paramètre  $\mathcal{P}$  permet de pondérer l'un ou l'autre phénomène. En terme de  $p_i^m$ , les conditions aux limites obtenues s'écrivent finalement comme les équations (2.71) et (2.72).

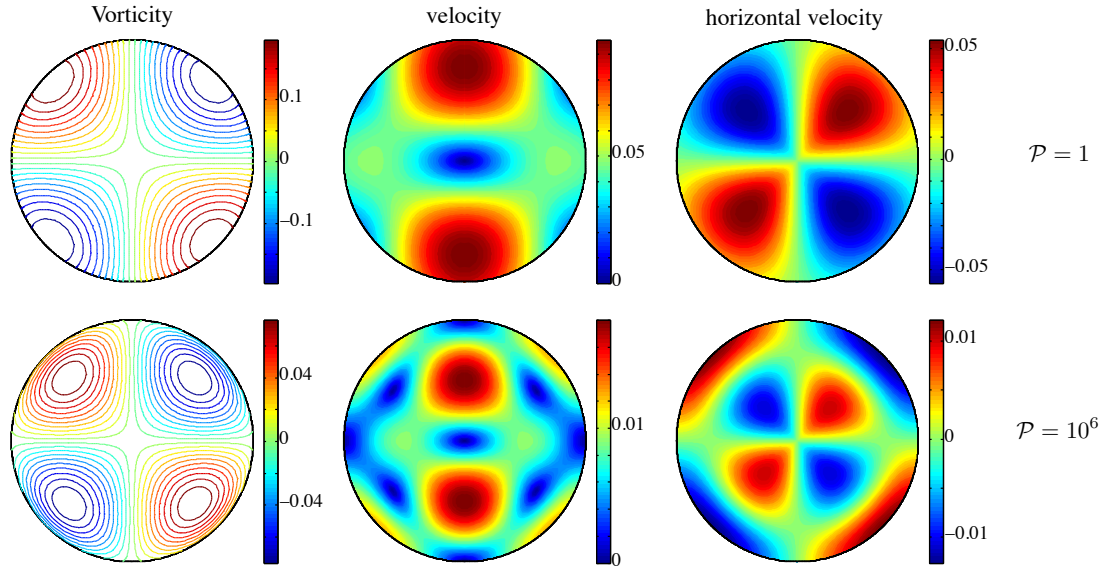
L'équation (2.3) se résoud ensuite en considérant comme solution une somme de fonctions polynomiales donc les coefficients sont calculés avec les conditions aux limites. Le scalaire  $p_2^0$  solution est donné par l'équation 2.81, ce qui nous permet de calculer le champ de vitesse en tout point de la sphère en fonction du paramètre  $\mathcal{P}$  et du paramètre  $M$ .

Pour petit et grand  $\mathcal{P}$  les écoulements prédits sont sensiblement différents, comme on le voit sur la figure 2.3. Dans les deux cas, les écoulements ont une symétrie cylindrique qui nous permet de ne montrer qu'une coupe méridionale selon l'axe Nord-Sud pour représenter l'écoulement. L'écoulement obtenu est linéairement dépendant en  $M$ .

Pour estimer la déformation induite par l'écoulement calculé, on peut calculer la vitesse moyenne dans la sphère ou la vitesse maximale horizontale. Ces deux résultats sont donnés dans le premier panneau de la figure 2.6.

On voit sur ces figures que pour une amplitude de forçage donnée (une valeur de  $M$ ), la géométrie de l'écoulement est très différente si les conditions aux limites sont perméables ( $\mathcal{P} = 1$ ) ou imperméables ( $\mathcal{P} = 10^6$ ), mais les valeurs des vitesses sont assez proches. La vitesse moyenne  $V_{RMS}$  a un profil presque plat en fonction de  $\mathcal{P}$ , avec deux plateaux correspondant aux valeurs limites pour très grand et très petit paramètre de changement de





**Figure 2.3** – Vorticité, valeur absolue de la norme de la vitesse et vitesse horizontale pour  $Ra = 0$ ,  $M = 1$  et  $\mathcal{P} = 1$  (première ligne) et  $\mathcal{P} = 10^6$  (seconde ligne).

phase espacés seulement d'un ordre de grandeur, et un décrochement franc aux alentours de  $\mathcal{P} = 10$  pour passer d'une valeur à l'autre. La vitesse maximale horizontale ( $u_\theta$ ), qui nous intéresse pour permettre une comparaison avec les calculs avec stratification que l'on fait par la suite, a un profil presque similaire, avec un brutal changement de pente à  $\mathcal{P} = 10^2$ . Pour comprendre ce changement de pente, il faut regarder le champ de vitesse horizontale sur la figure 2.4 : à faible  $\mathcal{P}$ , la vitesse horizontale est maximale à la base de la cellule, mais lorsque les lignes de champ bouclent sur elles mêmes, la vitesse maximale horizontale se trouve finalement sur le haut de la cellule. La pente change donc en réponse à la fermeture effective des lignes de courant, au même titre que la transition brutale entre les deux plateaux à petit et grand  $\mathcal{P}$ .

À partir de cette étude analytique, nous sommes donc capables de déterminer à partir de quel nombre  $\mathcal{P}$  les conditions aux limites à utiliser sont de type perméable ou imperméable. On utilisera dans la suite  $\mathcal{P} = 10$  comme valeur critique.

Le nombre de changement de phase  $\mathcal{P}$  défini à l'équation 2.1 dépend principalement du temps caractéristique de changement de phase  $\tau_\phi$  et de la viscosité  $\eta$ , les autres paramètres étant connus. Le changement de phase est limité par la vitesse à laquelle la chaleur latente produite lors du changement de phase est extraite par la convection dans le noyau liquide. [Deguen et al. \(2013\)](#) le définit comme

$$\tau_\phi = \frac{\rho_s L}{\rho_l^2 C_{pl} (m_p - m_{ad}) g_{icb} u'}, \quad (2.5)$$

avec  $u'$  la vitesse typique de convection dans le noyau liquide,  $L$  la chaleur latente de fusion,  $\rho_l$  et  $C_{pl}$  la densité et la capacité calorifique du noyau liquide et  $(m_p - m_{ad})$  la différence entre la pente de Clapeyron et le gradient adiabatique. En utilisant une vitesse

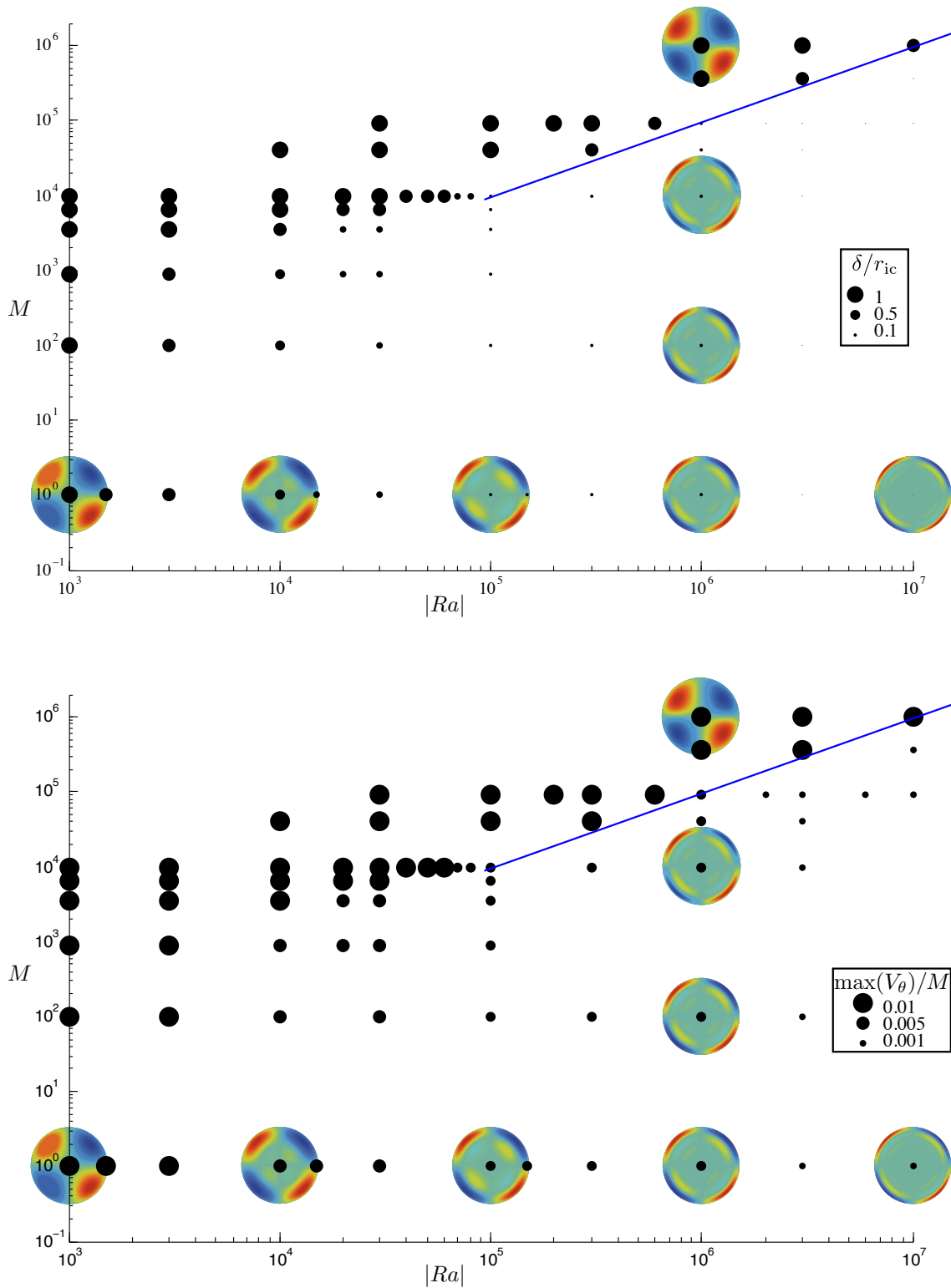
de convection de l'ordre de la dizaine de millimètres par seconde dans le noyau liquide, ce temps caractéristique est de l'ordre du millier d'années.

On peut alors exprimer les valeurs de vitesse en terme dimensionné en fonction de la viscosité. La vitesse dépendant du nombre  $\mathcal{P}$  mais aussi du forçage  $M$ , qui est inversement proportionnel à la viscosité, il y a une double dépendance en viscosité. On obtient alors la courbe tracée sur le panneau inférieur de la figure 2.6. Finalement, la vitesse (ici la vitesse moyenne RMS) est, au premier ordre, proportionnelle à  $\eta^{-1}$ . Pour obtenir l'amplitude des vitesses du même ordre de grandeur que la vitesse de croissance de la graine ( $10^{-11}$  m.s<sup>-1</sup>), la viscosité doit être au moins inférieure à  $10^{16}$  Pa.s. Et ces viscosités correspondent aussi à des conditions aux limites de type imperméables, car on obtient alors  $\mathcal{P}$  de l'ordre de  $10^4$ .

Finalement, les conditions aux limites appropriées à notre problème sont des conditions aux limites imperméables, ce qui est très différent de celles utilisées précédemment pour le même problème (Karato, 1999; Buffett & Bloxham, 2000; Takehiro, 2010).

Shin-Ichi Takehiro a récemment revu ses travaux précédents sur le chauffage par effet Joule, en intégrant aussi la possibilité de conditions aux limites variables. En faisant varier la vitesse de convection dans le noyau externe (ce qui revient donc à faire varier  $\tau_\phi$  et  $\mathcal{P}$ ), il obtient une géométrie de l'écoulement différente dans la graine, liée aussi à la perméabilité de la frontière de la graine. Ce travail n'a pas encore été publié mais présenté à la conférence du SEDI en août 2014.





**Figure 2.4** – Épaisseur de la couche supérieure (panneau supérieur) et vitesse maximale horizontale (panneau inférieur), en fonction de la stratification ( $|Ra|$ ) et du champ magnétique ( $M$ ). Les champs de vorticité correspondant   certains points sont superposés pour permettre de visualiser la forme du champ de vitesse.

## 2.3 Introduction

The existence of structures within the inner core was first discovered by [Poupinet et al. \(1983\)](#) who discussed the possibility of lateral heterogeneity from seismic observations. These observations were then attributed to the existence of seismic anisotropy ([Morelli et al., 1986](#); [Woodhouse et al., 1986](#)), with P waves travelling faster in the north-south direction than in the equatorial plane. Since then, more complexities have been discovered in the inner core: a slight tilt in the fast axis of the anisotropy, radial variations of the anisotropy with a nearly isotropic upper layer, hemispherical variations of the thickness of the upper isotropic layer, an innermost inner core with different properties in anisotropy or attenuation, and anisotropic attenuation (See [Souriau et al., 2003](#); [Tkalčić & Kennett, 2008](#); [Deguen, 2012](#); [Deuss, 2014](#), for reviews, and references therein).

The seismic anisotropy can be explained either by liquid inclusions elongated in some specific 2direction (shape preferred orientation, SPO) ([Singh et al., 2000](#)) or by the alignment of the Fe crystals forming the inner core (lattice preferred orientation, LPO). In the case of LPO, the orientation is acquired either during crystallization (*e.g.* [Karato, 1993](#); [Bergman, 1997](#)) or by texturing during deformation of the inner core. Several mechanisms have been proposed to provide the deformation needed for texturing: solid state convection ([Jeanloz & Wenk, 1988](#); [Weber & Machetel, 1992](#); [Buffett, 2009](#); [Deguen & Cardin, 2011](#); [Cottaar & Buffett, 2012](#); [Deguen et al., 2013](#)), or deformation induced by external forcing, due to adjustment following preferential growth at the equator ([Yoshida et al., 1996, 1999](#); [Deguen & Cardin, 2009](#)), or Lorentz force ([Karato, 1999](#); [Buffett & Bloxham, 2000](#); [Buffett & Wenk, 2001](#)). So far, few attempts have been made to systematically explore these models and evaluate their efficacy to explain the observations.

Thermal convection in the inner core is possible if its cooling rate, related to its growth rate, or radiogenic heating rate is large enough to maintain a temperature gradient steeper than the isentropic one. In other word, the heat loss of the inner core must be larger than what would be conducted down the isentrope. However, the thermal conductivity of the core has been recently reevaluated to values larger than  $90 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  at the core mantle boundary and in excess of  $150 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  in the inner core ([de Koker & Steinle-Neumann, 2012](#); [Pozzo et al., 2012](#); [Gomi et al., 2013](#); [Pozzo et al., 2014](#)), and this makes thermal convection in the inner core quite unlikely ([Yukutake, 1998](#); [Deguen & Cardin, 2011](#); [Deguen et al., 2013](#); [Labrosse, 2014](#)). Inner core translation, that has been proposed to explain some of the seismic features of the inner core ([Monnereau et al., 2010](#)), results from a convection instability ([Alboussière et al., 2010](#); [Deguen et al., 2013](#); [Mizzon & Monnereau, 2013](#)) and is therefore also difficult to sustain.

Compositional convection is possible if the partition coefficient of light elements at the inner core boundary (ICB) decreases with time ([Deguen & Cardin, 2011](#); [Gubbins et al., 2013](#)) or if some sort of compositional stratification develops in the outer core ([Alboussière et al., 2010](#); [Buffett, 2000b](#); [Gubbins & Davies, 2013](#); [Deguen et al., 2013](#)) so that the concentration of the liquid that crystallizes decreases with time. However,

the combination of both thermal and compositional buoyancy does not argue in favor of convection in the inner core (Labrosse, 2014).

The strong thermal stability of the inner core resulting from its high thermal conductivity (Labrosse, 2014) is a barrier to any vertical motion and other forcing mechanisms need to work against it. This situation has already been considered in the case of deformation induced by preferential growth in the equatorial belt (Deguen & Cardin, 2009), and has been shown to produce a layered structure. Deguen et al. (2011) and Lincot et al. (2014) evaluated the predictions of anisotropy from this model and found that although it is able to produce significant deformation, it is difficult to explain the strength and geometry of the anisotropy observed in the inner core.

In this paper, we consider an other major external forcing that was proposed, Maxwell stress. This scenario was first proposed by Karato (1999) who considered the action of this force assuming the inner core to be neutrally buoyant throughout. This situation is rather unlikely and, as discussed above, we expect the inner core to be stably stratified. Buffett & Bloxham (2000) have shown that in this case the flow is confined in a thin layer at the top of the inner core, similar to the case discussed above for a flow driven by preferential growth at the equator. However, as discussed by Buffett & Wenk (2001), the growth of the inner core gradually buries the deformed iron and this scenario could explain a texture in the whole inner core. All these previous studies considered a fixed inner core size and infinitely fast phase change at the ICB. The moving boundary brings an additional advection term in the balance which can influence the dynamics. In the context of inner core convection Alboussière et al. (2010) and Deguen et al. (2013) proposed a boundary condition at the ICB that allows for a continuous variation from a perfectly permeable situation, that was considered in the previous studies, to an impermeable one when the timescale for phase change is large compared to that for viscous adjustment of the topography.

In this paper, we compute the dynamics of a growing inner core subject to electromagnetic forcing and include the effects of a stable stratification, of the growth of the inner core, and different types of boundary conditions. We propose a systematic study of the dynamics induced by a poloidal Lorentz force in the inner core and develop scaling laws to estimate the strain rate of the flow.

In Section 2.4, we develop a set of equations taking into account the Lorentz force and a buoyancy force from either thermal or compositional origin. Analytical and numerical results are presented in Section 2.5, scaling laws for the maximum velocity and strain rate are developed in Sections 2.6 and 2.7 and compared to numerical solutions. In Section 2.8, we apply our results to predict the instantaneous strain rates and cumulative strain in the Earth's inner core due to the Lorentz force.

## 2.4 Governing equations

### 2.4.1 Effect of an imposed external magnetic field

Produced by dynamo effect in the liquid outer core, the magnetic field extends up to the surface of the Earth, but also in the center-most part of the core. Considering for example a flow velocity of the order of the growth rate of the inner core gives a magnetic Reynolds number, comparing flux-freezing and diffusion of the magnetic field, of the inner core of about  $10^{-5}$ . This shows that the magnetic field in the inner core is only maintained by diffusion from its boundary. Although the motions induced by a given magnetic field in the solid inner core are too slow to induce additional magnetic field, the flow deforms and textures the media and the obtained strain could explain some of the features detected by seismologists.

Two dynamical effects need to be taken into account: the Lorentz force and Joule heating. The Lorentz force acts directly on the momentum conservation, while Joule heating is part of the energy budget and modifies the temperature distribution, inducing flows through the buoyancy forces.

In this paper, we will discuss in details the effect of the Lorentz force in the case of a purely toroidal magnetic field with a simple mathematical form. The effect of Joule heating in the case of a non growing inner core was studied previously by [Takehiro \(2010\)](#) and will not be taken into account here.

The poloidal magnetic field intensity at the core mantle boundary (CMB) can be inferred from surface observations of the field at the Earth's surface, but both poloidal and toroidal components are poorly known at greater depth. The root mean square (RMS) strength of the field at the ICB has been estimated using numerical simulations around a few milliteslas (e.g. [Glatzmaier & Roberts, 1996](#); [Christensen & Aubert, 2006](#)). It can be also constrained by physical observations: for example, [Koot & Dumberry \(2013\)](#) give an upper bound of 9-16mT for the RMS field at the ICB by looking at the dissipation in the electromagnetic coupling, while [Gillet et al. \(2010\)](#) suggests 2-3mT from the observations of fast toroidal oscillations in the core. [Buffett \(2010\)](#) obtains similar values from measurements of tidal dissipation.

Numerical simulations also predict a strong azimuthal component  $B_\phi$  at the vicinity of the inner core, possibly one order of magnitude higher than the vertical component  $B_z$  ([Glatzmaier & Roberts, 1996](#)), though this depends on the magnitude of inner core differential rotation. [Buffett & Wenk \(2001\)](#) have considered the effect of the azimuthal component of the Lorentz force resulting from the combination of the  $B_z$  and  $B_\phi$  components of the magnetic field. We will focus here on the effect of the azimuthal component of the magnetic field, for which the associated Lorentz force is poloidal. The flow calculated by [Buffett & Wenk \(2001\)](#) is decoupled from the flow induced by the azimuthal component of the magnetic field, and thus the total flow can be obtained by simply summing the two

results.

One of the most intriguing feature of the magnetic field on Earth is the existence of reversals. However, since the Lorentz force depends quadratically on the magnetic field, its direction is not modified by a reversal of the field. For simplicity, we will consider that the magnetic field was constant with time during the life of the inner core.

The magnetic field inside the inner core is calculated by diffusing the field existing at the ICB. The magnetic Reynolds number for the inner core being very small,  $\mathbf{B}$  is not advected by the flow. Because the seismic observation of anisotropy is of large scale, and also because low-order toroidal component penetrates deeper inside the inner core, only the lowest order of the azimuthal component of the magnetic field is taken into account, following the work of Karato (1999) and Buffett & Bloxham (2000).

We consider a purely toroidal axi-symmetric field of degree two in the vicinity of the ICB of the form  $\mathbf{B}|_{ICB} = B_0 \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\phi$  (Buffett & Bloxham, 2000). Solving  $\nabla^2 \mathbf{B} = 0$ , the field inside the inner core is

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{r^2}{r_{ic}^2} \cos \theta \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.6)$$

in spherical coordinates, which is associated to a magnetic current  $\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$ , where  $r_{ic}$  is the radius of the inner core and  $\mu_0$  is the magnetic permeability.

The Lorentz force is a volume force given by  $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ . With the magnetic field as defined in Eq. (2.6), the Lorentz force can be decomposed as the sum of the gradient of a magnetic pressure and a non-potential part as  $\mathbf{F}_L = -\nabla P_m + \mathbf{f}_L$ , which is a unique Helmholtz decomposition for  $\nabla \cdot \mathbf{f}_L = 0$ . We find that  $P_m$  and  $\mathbf{f}_L$  are given by

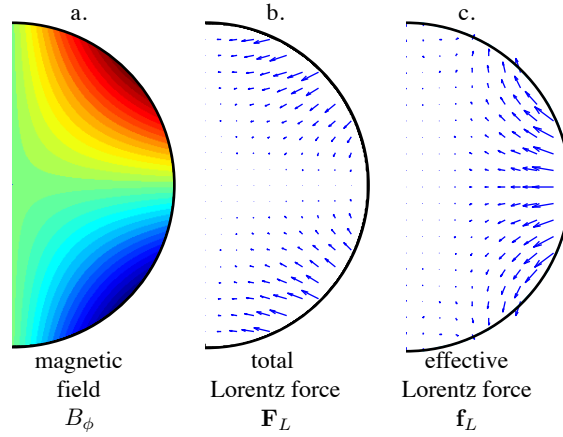
$$P_m = \frac{1}{7} \frac{B_0^2}{\mu_0} \frac{r^4}{r_{ic}^4} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{1}{5} \right) \quad (2.7)$$

and

$$\mathbf{f}_L = \frac{B_0^2}{\mu_0 r_{ic}} \frac{r^3}{r_{ic}^3} \left[ \left( 3 \cos^4 \theta - \frac{15}{7} \cos^2 \theta + \frac{4}{35} \right) \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \theta \left( \frac{4}{7} - 3 \cos^2 \theta \right) \mathbf{e}_\theta \right]. \quad (2.8)$$

The potential part of the Lorentz force will only promote a new equilibrium state but no persisting flow. We are thus only interested in the non potential part of the Lorentz force, shown in Fig. 2.5. Eq. (2.8) provides a characteristic scale for the force as  $B_0^2/\mu_0 r_{ic}$ .

Karato (1999) considered the flow induced by Maxwell stress by applying a given normal stress on the inner core boundary. This is different from our study, where, as in Buffett & Bloxham (2000), we consider a volumetric forcing, as shown on Fig. 2.5, and not a forcing on the surface of the inner core.



**Figure 2.5:** Meridional cross sections showing the intensity of the magnetic field (a), the Lorentz force  $\mathbf{F}_L$  (b) and the non-potential part of the Lorentz force  $\mathbf{f}_L$  as defined in equation (2.8) (c).

## 2.4.2 Conservation equations

### 2.4.2.1 Conservation of mass, momentum and energy

We consider the dynamics of an incompressible fluid in a spherical domain, with a newtonian rheology of uniform viscosity  $\eta$ , neglecting inertia. Volume forces considered here are the buoyancy forces, with density variations due to temperature or compositional variations, and the Lorentz force as defined above.

The equations of continuity and conservation of momentum are written as

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p' + \Delta \rho \mathbf{g} + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_L, \quad (2.10)$$

with  $\mathbf{u}$  the velocity,  $p'$  the dynamic pressure that also includes the magnetic pressure,  $\Delta \rho$  the density difference compared to the reference density profile,  $\mathbf{g} = g_{ic} r / r_{ic} \mathbf{e}_r$  the acceleration of gravity.

The density of the alloy depends on both the temperature  $T$  and the light element concentration in the solid  $c$ . We define a potential temperature as  $\Theta = T - T_s(r, t)$ , with  $T_s(r, t)$  the isentropic temperature anchored at the ICB, and introduce the composition difference compared to the composition at the inner core boundary as  $C = c - c_{ic}^s(r, t)$ . In this paper, we will consider separately the effects of composition and temperature, but both can induce a density stratification, which is quantified through a variation of density  $\Delta \rho$  which is either  $\rho_s \alpha_T \Theta$  or  $\rho_s \alpha_C C$ , with  $\rho_s$  the reference density,  $\alpha_T$  and  $\alpha_C$  the

coefficients of thermal and compositional expansion, respectively. Because both quantities are solutions of similar equations, we will use here in a general way a quantity  $\chi$  which is either the potential temperature  $\Theta$  or composition  $C$ , which will be scaled using the typical density variation  $\Delta\rho_\chi$  across the inner core. In this paper, quantities that applied for both case will have no subscript, whereas we will use  $T$  for quantities referring to the thermal stratification, and  $C$  for compositional stratification.

The momentum conservation (2.10) is thus written as

$$\mathbf{0} = -\nabla p' + \alpha\rho_s\chi g_{ic} \frac{r}{r_{ic}} \mathbf{e}_r + \eta\nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f}_L, \quad (2.11)$$

The equations for the evolution of the potential temperature (energy conservation) and of light element concentration (solute conservation) have a common form, which will be written as

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \chi = \kappa\nabla^2 \chi + S(t), \quad (2.12)$$

where  $\kappa$  is the diffusivity of either heat ( $\kappa_T$ ) or composition ( $\kappa_C$ ) and  $S$  the source term corresponding to the secular variation corresponding to time dependence and diffusion of the reference state, for either heat ( $S_T$ ) or composition ( $S_C$ ):

$$S_T(t) = \kappa_T\nabla^2 T_s - \frac{\partial T_s}{\partial t} \quad (2.13)$$

and

$$S_C(t) = -\frac{\partial c_{ic}^s}{\partial t}. \quad (2.14)$$

As discussed in [Deguen & Cardin \(2011\)](#), when the source term  $S(t)$  is negative, the inner core is stably stratified and no convective instability can develop. In this paper, we will focus on this case, with either source term  $S_T(t)$  or  $S_C(t)$  negative.

#### 2.4.2.2 Growth of the inner core

---

To take into account the growth of the inner core, we use a front fixing approach to solve the moving boundary problem ([Crank, 1984](#)) by scaling lengths with the inner core radius  $r_{ic}(t)$  at every time step. We define a new coordinates system with  $r' = r/r_{ic}(t)$ . This modifies slightly the spatial derivatives by bringing a factor  $1/r_{ic}(t)$  to radial derivatives, but also adds a radial advection term in the equations where the time derivative is present, with  $\dot{r}_{ic}(t) = u_{ic}(t)$  the instantaneous growth rate of the inner core. In the new coordinates system, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{r'} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_r + r' \frac{u_{ic}(t)}{r_{ic}(t)} \frac{\partial}{\partial r'} \Big|_t \quad (2.15)$$

and Eq. x(2.12) becomes

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{1}{r_{ic}(t)} (\mathbf{u} - r' u_{ic}(t) \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \chi = \frac{\kappa}{r_{ic}^2(t)} \nabla^2 \chi + S(t), \quad (2.16)$$

where  $\cdot \nabla$  and  $\nabla^2$  are now spatial derivative operators in the new coordinates system  $(r', \theta, \phi)$ , with  $\phi$  and  $\theta$  the colatitude and longitude.

### 2.4.3 Dimensionless equations and parameters

#### 2.4.3.1 Definition of the dimensionless quantities

The set of equations (2.9), (2.11), (2.12) is now made dimensionless, using  $r_{ic}(t)$ , the age of the inner core  $\tau_{ic}$ ,  $\kappa/r_{ic}(t)$ ,  $\eta\kappa/r_{ic}^2(t)$  and  $\Delta\rho_\chi$  as characteristic scales for length, time, velocities, pressure and density variations. The quantity  $\chi$  is thus scaled by  $\Delta\rho_\chi/\alpha\rho_s$ . The characteristic velocity scale is defined with the diffusion time scale to fit both growing and non-growing inner core cases, while we could have used growth rate only for growing inner core cases. The quantity  $S(t)$  is made dimensionless using  $r_{ic}^2\alpha\rho_s/\kappa\Delta\rho$ . Using the same symbols for the dimensionless quantities (including using now  $r$  for the dimensionless radius  $r'$  defined in the last subsection), we obtain

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.17)$$

$$\mathbf{0} = -\nabla p' + Ra(t) \chi r \mathbf{e}_r + \nabla^2 \mathbf{u} + M(t) \mathbf{f}_L, \quad (2.18)$$

$$\xi(t) \frac{\partial \chi}{\partial t} = -(\mathbf{u} - Pe(t) r \mathbf{e}_r) \cdot \nabla \chi + \nabla^2 \chi + S(t) - \chi \xi \frac{\dot{\Delta\rho}_\chi}{\Delta\rho_\chi}, \quad (2.19)$$



with four dimensionless parameters defined as

$$Ra(t) = \frac{\Delta\rho_\chi g_{ic} r_{ic}^3(t)}{\eta\kappa}, \quad (2.20)$$

$$M(t) = \frac{B_0^2 r_{ic}^2(t)}{\mu_0 \eta \kappa}, \quad (2.21)$$

$$\xi(t) = \frac{r_{ic}^2(t)}{\kappa \tau_{ic}}, \quad (2.22)$$

$$Pe(t) = \frac{u_{ic} r_{ic}(t)}{\kappa}. \quad (2.23)$$

The last term in Eq. (2.19) derives from the evolution in time of the scale for  $\chi$ ,  $\Delta\rho/\alpha\rho_s$ .

$\xi(t)$  and  $Pe(t)$  characterize the growth of the inner core. The Péclet number  $Pe(t)$  compares the apparent advection due to the moving boundary and the diffusion. A large Péclet number thus corresponds to a fast growth rate compared to the diffusion rate.  $M(t)$  is an effective Hartmann number, which quantifies the Lorentz force over the viscous one, using thermal diffusivity in the velocity scale. This effective Hartmann number is related to the Hartmann number defined in magnetohydrodynamics (Roberts, 2007)  $Ha = Br/\mu_0\eta\lambda$  as  $M = Ha^2 \lambda/\kappa$ , with  $\lambda$  the magnetic diffusivity.

In the case of a non-growing inner core,  $Pe = 0$ ,  $\dot{S}(t) = 0$  and the relevant timescale is no longer  $\tau_{ic}$  but the diffusive time scale, which gives  $\xi = 1$ . This approach allows us to treat both non-growing and growing cases with the same set of dimensionless parameters.

$Ra(t)$  defined in equation (2.20) is the Rayleigh number that characterizes the stratification, and is negative since  $\Delta\rho$  is negative for a stable stratification. The definition of the density stratification has to be carefully considered. The Rayleigh number  $Ra(t)$  based on the actual density stratification of the inner core  $\Delta\rho$  influencing the dynamics is an output of our numerical simulations, since it depends on the efficiency of diffusion. There are two possible end-member cases depending on whether the stratification is controlled by the diffusion time scale (as for thermal stratification) or the growth time scale (as for compositional stratification). For a small diffusion time scale, the value of the density maximum, in the center, is predicted to be  $\Delta\rho_\chi = \alpha_\chi \rho_s S(t) r_{ic}^2(t) / 6\kappa$ . If the Péclet number is large, diffusion is negligible and the density profile is rather given by  $\Delta\rho_\chi = \alpha_\chi \rho_s \int_0^t S(\tau) d\tau$ . In our numerical simulations, we use an input parameter defined with the strong-diffusion end member. For low Péclet values, the output Rayleigh number tends toward the input parameter, whereas for large Péclet values they are different. For a constant  $S(t)$ , the two extreme values of Rayleigh are  $Ra_{Pe \ll 1} = Ra_{Pe \gg 1} Pe$ . For figures presenting results at different Péclet numbers, we use the input Rayleigh  $Ra_i$  as a control parameter (see Figs. 2.9, 2.10, 2.11 and 2.13).

To develop scaling laws, the dynamic pressure is removed from the momentum equation by taking the curl of Eq. (2.18) as

$$\mathbf{0} = -Ra(t) \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi + M(t) \nabla \times \mathbf{f}_L + \nabla^2 \boldsymbol{\omega}, \quad (2.24)$$

with  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$  the vorticity.

To solve numerically the momentum equation (2.18), the velocity field is decomposed into poloidal and toroidal components. The complete treatment of this equation and the expression of the Lorentz force in term of poloidal and toroidal decomposition is described in appendix 2.10.

### 2.4.3.2 Simplified growth of the inner core

Following Deguen & Cardin (2011), a realistic scenario for the inner core thermal evolution can be obtained by developing the core thermal history to obtain the source term  $S_T(t)$  and the radius  $r_{ic}(t)$  through the energy balance as defined in Labrosse (2003). This approach is sensitive to several parameters of the whole system and does not allow us to focus on the effect of the magnetic field. To focus on the effect of the Lorentz forces on the dynamics, we choose a simpler growth scenario, by assuming that the inner core radius increases as the square root of time (Buffett et al., 1992). Using  $r_{ic}(t) = r_{ic}(\tau_{ic})\sqrt{t/\tau_{ic}}$  with  $r_{ic}(\tau_{ic})$  the present radius of the inner core, the growth rate is thus  $u_{ic}(t) = r_{ic}(\tau_{ic})/2\sqrt{\tau_{ic}t}$ .

This leads to simplification of the parameters for the growing inner core,

$$Ra(t) = Ra_0 \frac{\Delta\rho_\chi(t)}{\Delta\rho_0} t^2, \quad (2.25)$$

$$M(t) = M_0 t, \quad (2.26)$$

$$\xi(t) = 2Pe_0 t, \quad (2.27)$$

$$Pe(t) = Pe_0, \quad (2.28)$$

where the subscript 0 corresponds to values for the present inner core.

The Péclet number  $Pe(t)$  is constant with time and equal to  $Pe_0$  while the parameter  $\xi$  is proportional to  $Pe_0$ . We are left with only three independent dimensionless parameters: the Rayleigh number  $Ra_0$  characterizes the thermal stratification, the effective Hartman number  $M_0$  the strength of the magnetic field, and the Péclet number  $Pe_0$  the advection from the growth of the inner core compared to the diffusive velocity scale.

The evolution of the Rayleigh number with time is linked to the evolution of the typical density variation  $\Delta\rho_\chi$ , which is a function of  $S(t)$ .

The source term for thermal stratification  $S_T(t)$  defined in Eq. (2.13) can also be written as (Deguen & Cardin, 2011)

$$S_T(t) \propto \left[ \left( \frac{dT_s}{dT_{ad}} - 1 \right) r_{ic}(t)u_{ic}(t) - 3\kappa_T \right], \quad (2.29)$$

where  $\frac{dT_s}{dT_{ad}}$  is the ratio of the Clapeyron slope to the adiabat gradient.

With  $r_{ic}(t) \propto \sqrt{t}$ ,  $r_{ic}(t)u_{ic}(t)$  is constant with time, and so is  $S_T(t)$ . The thermal

Rayleigh number, valid for low Péclet number, is thus written as

$$Ra_T(t) = Ra_{T0} t^3. \quad (2.30)$$

To develop  $S_C(t)$  from Eq. (2.14), we compute the compositional composition at the top of the inner core by considering a simple model where the bulk composition of the liquid is uniform and the partition coefficient is constant. Appendix 2.11 presents the complete development to obtain

$$\begin{aligned} c_{icb}^s(t) &= kc_0^l \left( 1 - \left( \frac{r_{ic}(t)}{r_c} \right)^3 \right)^{k-1} \\ &= kc_0^l + o \left( \left( \frac{r_{ic}(t)}{r_c} \right)^3 \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

and

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}_{icb}^s(t)}{c_{icb}^s(t)} &= 3(k-1) \frac{r_{ic}^2(t)}{r_{ic}^3(t) - r_c^3} \dot{r}_{ic}(t) \\ &= 3(k-1) \frac{\dot{r}_{ic}(t)}{r_c} \frac{r_{ic}^2(t)}{r_c^2} + o \left( \left( \frac{r_{ic}(t)}{r_c} \right)^3 \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

where  $\dot{r}_{ic}(t)$  is the time derivative of  $r_{ic}$ , and  $r_c$  the radius of the outer core.

Neglecting the  $o((r_{ic}(t)/r_c)^3)$  terms (as if the outer core was an infinite reservoir of light elements), we obtain  $\dot{c}_{icb}^s(t)/c_{icb}^s(t) \propto \sqrt{t}$ . The compositional Rayleigh number, valid for large Péclet values, can thus be written as

$$Ra_C(t) = Ra_{C0} t^{7/2}. \quad (2.33)$$

**Table 2.1:** Typical values for the parameters used in the text, and typical range of values when useful.

Parameter	Symbol	Typical value	Typical range
Magnetic field	$B_0$	$3 \times 10^{-3} \text{ T}$	$10^{-1} - 10^{-3} \text{ T}$
Thermal diffusivity <sup>c</sup>	$\kappa$	$1.7 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}$	$0.33 - 2.7 \times 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}$
Chemical diffusivity <sup>a</sup>	$\kappa_\chi$	$10^{-10} \text{ m}^2.\text{s}$	$10^{-10} - 10^{-12} \text{ m}^2.\text{s}$
Viscosity	$\eta$	$10^{16} \text{ Pa.s}$	$10^{12} - 10^{21} \text{ Pa.s}$
Age of IC	$\tau_{ic}$	0.5 Gyrs	0.2 – 1.5 Gyrs
Density stratification (thermal case) <sup>d</sup>	$\Delta\rho_T$	$6 \text{ kg.m}^{-3}$	$0.5 - 25 \text{ kg.m}^{-3}$
Density stratification (compositional case) <sup>e</sup>	$\Delta\rho_C$	$5 \text{ kg.m}^{-3}$	$1 - 10 \text{ kg.m}^{-3}$
Phase change timescale	$\tau_\phi$	$10^3 \text{ yrs}$	$10^2\text{-}10^4 \text{ yrs}$
Inner core radius <sup>b</sup>	$r_{ic}(\tau_{ic})$	1221 km	
Acceleration of gravity	$g_{ic}$	$4.4 \text{ m.s}^{-2}$	
Density of the solid phase <sup>b</sup>	$\rho_s$	$12800 \text{ kg.m}^{-3}$	
Density difference at the ICB	$\delta\rho_{ic}$	$600 \text{ kg.m}^{-3}$	
Thermal expansivity	$\alpha$	$10^{-5} \text{ K}^{-1}$	
Permeability	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$	

<sup>a</sup> from [Gubbins et al. \(2013\)](#)

<sup>b</sup> from PREM [Dziewoński & Anderson \(1981\)](#)

<sup>c</sup> obtained using  $k = 163 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $Cp = 750 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ . ([Pozzo et al., 2012](#); [Gomi et al., 2013](#))

<sup>d</sup> assuming  $S = 10 - 1000 \text{ K.Gyrs}^{-1}$  ([Deguen & Cardin, 2011](#))

<sup>e</sup>from [Deguen & Cardin \(2011\)](#)

**Table 2.2:** Typical values of the dimensionless parameters discussed in the text for the present inner core, using typical values from table 2.1.

Dimensionless parameter	Symbol	Thermal	Compositional
Rayleigh number	$Ra$	$\frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times (-2.8 \times 10^8)$	$\frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times (-8 \times 10^{12})$
effective Hartmann number	$M$	$\left(\frac{B_0}{3 \times 10^{-3} \text{ T}}\right)^2 \frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times 63$	$\left(\frac{B_0}{3 \times 10^{-3} \text{ T}}\right)^2 \frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times 1.07 \times 10^7$
Péclet number	$Pe$	2.8	$4.7 \times 10^5$
Phase change number	$\mathcal{P}$	$\frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times 10^4$	$\frac{10^{16} \text{ Pa}\cdot\text{s}}{\eta} \times 10^4$

See the definitions of the dimensionless parameters in the text.

### 2.4.4 Boundary conditions

The Earth's inner core boundary is defined by the coexistence of solid and liquid iron, at the temperature of the liquidus for the given pressure and composition. By construction, the potential temperature  $\Theta$  and relative concentration  $C$  are both 0 at the ICB :  $\Theta(r_{ic}(t)) = C(r_{ic}(t)) = 0$ . The mechanical boundary conditions are tangential stress-free conditions and continuity of the normal stress at the inner core boundary.

When allowing for phase change at the ICB, the condition of continuity of the normal stress is written as

$$-\mathcal{P}(t)(u_r - \dot{r}_{ic}) - 2\frac{\partial u_r}{\partial r} + p' = 0 \quad (2.34)$$

in dimensionless form. The parameter  $\mathcal{P}(t)$  was introduced by [Deguen et al. \(2013\)](#) to characterize the phase change as the ratio between the phase change timescale  $\tau_\phi$  and the viscous relaxation timescale  $\tau_\eta = \eta/(\delta\rho g_{icb}r_{ic})$

$$\mathcal{P}(t) = \frac{\tau_\phi \delta\rho g_{icb} r_{ic}}{\eta}. \quad (2.35)$$

The limit  $\mathcal{P} \rightarrow 0$  corresponds to perfectly permeable boundary conditions where the phase change occurs instantaneously, and  $\mathcal{P} \rightarrow \infty$  corresponds to perfectly impermeable boundary conditions with no phase change allowed at the boundary.

With  $r_{ic}(t) \propto \sqrt{t}$ , the parameter  $\mathcal{P}(t)$  is expressed using the current value  $\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}(t = \tau_{ic})$  as

$$\mathcal{P}(t) = \mathcal{P}_0 t. \quad (2.36)$$

### 2.4.5 Numerical modelling

The code is an extension of the one used in [Deguen et al. \(2013\)](#), adding the effect of the magnetic forcing as in Eq. (2.11). The system of equations derived in appendix 2.10 in term of poloidal/toroidal decomposition is solved in axisymmetric geometry, using a spherical harmonic expansion for the horizontal dependence and a finite difference scheme in the radial direction. The nonlinear part of the advection term in the temperature (or composition) equation is evaluated in the physical space at each time step. A semi-implicit Crank-Nicholson scheme is implemented for the time evolution of the linear terms and an Adams-Bashforth procedure is used for the nonlinear advection term in the heat equation.

The boundary conditions are the same as in [Deguen et al. \(2013\)](#), but for most of the runs we use  $\mathcal{P} = 10^6$ , which correspond to impermeable boundary conditions as discussed in section 2.4.4.

When keeping the inner core radius constant, the code is run until a steady state is reached. Otherwise, the code is run from  $t = 0.01$  to  $t = 1$ .

## 2.5 Flow description

### 2.5.1 Neutral stratification

In this subsection, we investigate the effect of the boundary conditions on the geometry and strength of the flow by solving analytically the set of equations for neutral stratification. The analytic solution for neutral stratification is also used to benchmark the code for  $Ra = 0$ .

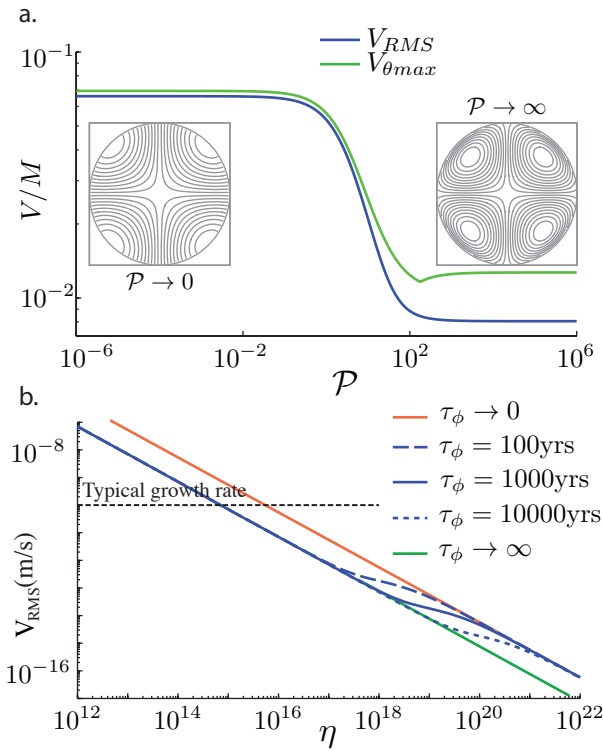
In the case of neutral stratification, with  $Ra = 0$ , the equations for the temperature or composition perturbation (2.19) and momentum conservation (2.24) are no longer coupled. The diffusivity is no longer relevant and the problem does not depend to the Péclet number.

Eq. (2.24) is thus solved in appendix 2.12 using the boundary conditions presented in the previous section. The obtained solution is plotted in Fig. 2.6, showing dimensionless maximum horizontal velocity and root mean square velocity as function of the phase change number  $\mathcal{P}$ , as well as streamlines corresponding to two extrem cases,  $\mathcal{P} = 0$  and  $\mathcal{P} \rightarrow \infty$ .

In the limit  $\mathcal{P} \ll 1$ , corresponding to permeable boundary conditions, the streamlines of the flow cross the ICB, which indicates significant melting and freezing at the ICB. In contrast, the streamlines in the limit  $\mathcal{P} \gg 1$  are closed lines which do not cross the ICB, which indicates negligible melting or freezing at the ICB.

The velocity is linearly dependent on the effective Hartmann number  $M$  whereas the  $\mathcal{P}$  dependence is more complex. The velocities reaches two asymptotic values for low and large  $\mathcal{P}$  values, separated by a sharp kink. The discontinuity in the derivative of the maximum horizontal velocity slightly above  $\mathcal{P} \sim 10^2$  corresponds to a change of the spatial position of the maximum, when the streamlines become closed and the maximal horizontal velocity is obtained in the top of the cell and no longer at its bottom. The change of behavior of the boundary from permeable to impermeable induces a significant decrease of the strength of the flow, since the velocity magnitude in the  $\mathcal{P} \gg 1$  regime is one order of magnitude smaller than when permeable boundary conditions ( $\mathcal{P} \ll 1$ ) are assumed.

Fig. 2.6.b shows the maximum of the velocity, now given in  $\text{m.s}^{-1}$ , as a function of the viscosity, using typical values of the parameters given in Table 2.1 and five different values for the characteristic time of phase change  $\tau_\phi$ , from zero to infinite. Changing this time translates the position of the transition between the two regimes of flow, the viscosity value corresponding to the transition being proportional to  $\tau_\phi$ , but does not change the general trend of the curve, which is a linear decrease of the velocity magnitude in log-log



**Figure 2.6:** Analytic solution for  $Ra = 0$ . (a) Evolution of the dimensionless velocity as a function of the phase change number  $\mathcal{P}$ , with streamlines for  $\mathcal{P} \rightarrow 0$  (left) and  $\mathcal{P} \rightarrow \infty$  (right). The RMS velocity and the maximum of the horizontal velocity are plotted. (b) Evolution of the RMS velocity as a function of  $\eta$ , with velocity in  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Except for the viscosity and the phase change time scale  $\tau_\phi$ , the parameters used for definition of  $\mathcal{P}$  and  $M$  are given in Table 2.1. The kink in the curves corresponds to the change in regime between large  $\mathcal{P}$  (low viscosity) and low  $\mathcal{P}$  (large viscosity), and the corresponding viscosity value is a function of the phase change timescale  $\tau_\phi$ .

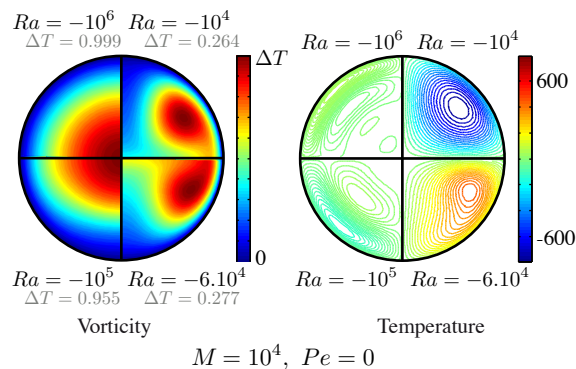
space, except for the kink between the two regimes. For typical values of the phase change timescale between 100 years to 10000 years, the kink between the two regimes occurs at a viscosity in the range  $10^{17} - 10^{21}$  Pa.s. With  $\eta > 10^{17}$  Pa.s, the maximum velocity is found to be smaller than  $10^{-13}$   $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ , more than two orders of magnitude smaller than the inner core growth rate. Because this is too small to induce significant texturing at large scales, we will focus on low viscosity cases, for which the relevant boundary conditions are impermeable boundary conditions.

This gives boundary conditions very different from previous works, where perfectly permeable boundary conditions were assumed (Karato, 1999; Buffett & Bloxham, 2000). In particular, this implies that the velocity estimated by (Karato, 1999) was overestimated by one order of magnitude.

From Eq. (2.36), the parameter  $\mathcal{P}$  varies linearly with time, which means that  $\mathcal{P}$  must have been small early in inner core's history.

However, this is true for a very short time, when the inner core radius was very small, of the order  $r_{ic}(\tau_{ic})/\mathcal{P}_0^{1/2}$ , and this episode is unlikely to have observable consequences in





**Figure 2.7:** Snapshots of the vorticity and temperature fields for  $M = 10^4$  and a constant inner core radius, for four different values of the Rayleigh number (from top right, going clockwise:  $Ra = -10^4$ ,  $-6 \times 10^4$ ,  $-10^5$ ,  $-10^6$ ). When the stratification is large enough ( $Ra = -10^6$ ), the flow is confined at the top of the inner core and the temperature field has a spherical symmetry. When the stratification is weak ( $Ra = -10^4$ ), the flow is similar to the one in Fig. 2.6 for  $Ra = 0$  and the temperature is almost uniform. Scale for the vorticity is  $\kappa_T/r_{ic}^2$  and for the temperature  $Sr_{ic}^2/6\kappa_T$ . For  $u_{ic} = 0$ ,  $Sr_{ic}^2/6\kappa_T$  reduces to  $T_s(0) - T_s(r_{ic})$ .

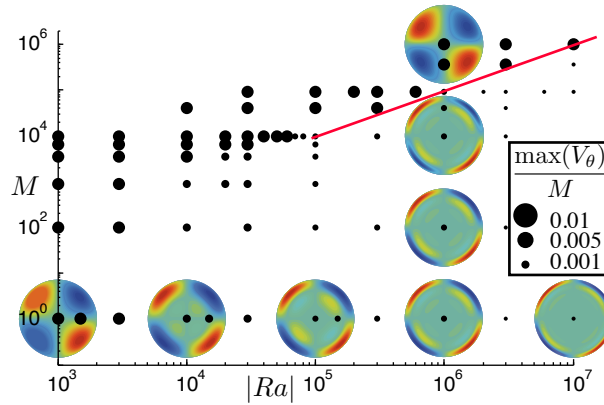
the present structure of the inner core.

### 2.5.2 Zero growth rate

We first investigate the effect of the Lorentz force without taking into account the secular growth of the inner core ( $Pe = 0$ ). Fig. 2.7 shows the vorticity and temperature fields obtained for different values of the Rayleigh number, at a given effective Hartmann number  $M = 10^2$  for a thermally stratified inner core.

When the Rayleigh number is small, the vorticity field is organized in two symmetric tores wrapped around the N-S axis. The stratification is too weak to alter the flow induced by the Lorentz force and the temperature field is advected and mixed by the flow. The velocity field is the exact same one as calculated analytically for  $Ra = 0$  (see subsection 2.5.1 and appendix 2.12).

However, when the Rayleigh number is larger, the flow is altered by the stratification and is confined in an uppermost layer and the amplitude of the flow is lower than expected for a neutral stratification. The temperature field is strongly stratified and the perturbations due to radial advection are small. Buffett & Bloxham (2000) previously discussed the inhibition of the flow due to a stratification in density, but in this case we obtain a non-zero flow that may deform the inner core. The flow obtained here is similar to the one caused by differential inner core growth with a stable stratification, as found in Deguen et al. (2011), with a notable difference: we impose a large  $\mathcal{P}$  implying a near zero radial flow  $v_r$ , whereas Deguen et al. (2011) impose a given  $v_r$  as the driving force. The confinement of the flow in a thin layer is likely to concentrate the deformation and thus we expect to have a higher strain rate for a highly stratified inner core, but a different spatial repartition of



**Figure 2.8:** Maximum velocity in the upper vorticity layer, for a zero growth rate. The velocity is scaled by the diffusion velocity  $\kappa/r_{ic}$ . The maximum size of the dots corresponds to the value for  $Ra = 0$  computed analytically. For some values of  $(M, |Ra|)$ , the vorticity field is plotted in the meridional cross section. The red line with a slope of 1 shows the limit between the two regimes.

the deformation.

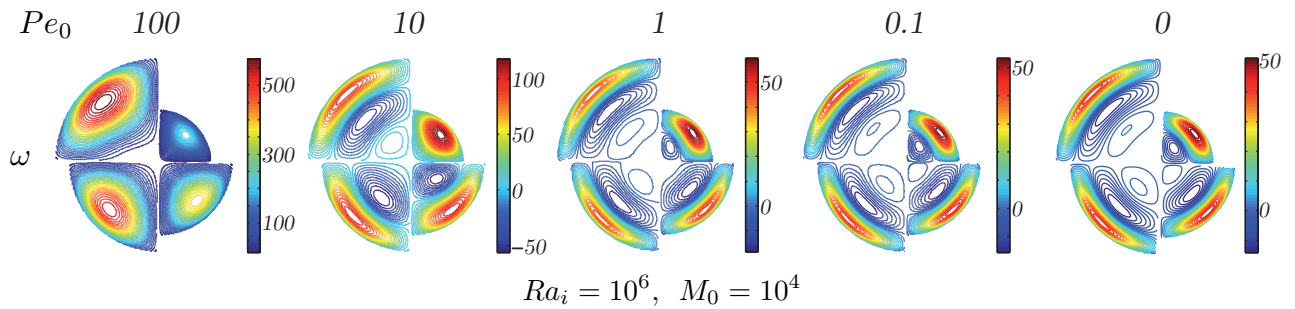
To explore the parameter space in terms of Rayleigh and effective Hartmann numbers, we computed runs with Rayleigh numbers from  $-10^3$  to  $-10^7$  and effective Hartman number from  $10^0$  to  $10^6$ . The maximum velocity is plotted in Fig. 2.8 as a proxy to determine the regime. The largest velocity coincide with velocities computed for neutral stratification. The vorticity field corresponding to some of the points in the regime diagram are also plotted in Fig. 2.8.

Two main domains are distinguished, separated by a line of slope 1 that will be discussed later. In the upper left part of the diagram (large effective Hartmann number, low Rayleigh number), the whole inner core is in motion and the flow is very similar to the analytical solution for a neutral stratification in terms of amplitude and geometry. In the lower right part, the flow is confined in an uppermost layer which thickness depends on the Rayleigh number only and which velocity is orders of magnitude lower than for neutral stratification.

### 2.5.3 Growing inner core

To investigate the effect of inner core growth, we compute several runs with a given set of parameters  $(Ra_0, M_0, Pe_0)$ , with the time  $t$  between  $t = 0.01$  and  $t = 1$ . Unlike in subsections 2.5.1 and 2.5.2, the dimensionless numbers evolve with time, as described by Eqs (2.25) to (2.28).

Fig. 2.9 shows the evolution of the vorticity field during four runs, for the same Rayleigh and effective Hartman numbers,  $|Ra_0| = 10^6$ ,  $M_0 = 10^4$ , and different values of the Péclet number, which corresponds to increasing diffusivity from left to right. For each run four time steps are presented, from top-right and going clockwise.



**Figure 2.9:** Snapshots of the vorticity field for four runs, with dimensionless parameters at  $t = 1$ :  $M_0 = 10^4$ ,  $Ra_{Pe \ll 1} = -10^6$ , and  $Pe_0 = 100, 10, 1, 0.1$  and  $0$  (from left to right). Each run corresponds to one panel, with four time steps represented :  $t = 0.25, 0.50, 0.75$  and  $1$  dimensionless time, from top-right and going clockwise. On the far right, corresponding runs with adequate radius for  $Pe = 0$ . See Fig. 2.13 for strain rates of corresponding runs.

We see on Fig. 2.9 that the larger the Péclet number is, the larger the thickness of the upper layer is. The transition between the two regimes of strong and weak stratification is shifted toward larger Rayleigh numbers. The strength of the flow is also different for large and low Peclet number. For low Péclet number ( $Pe_0 \leq 1$  in the cases presented here), the maximum of vorticity decreases with time, implying that the deformation in the uppermost layer also decreases with time. For large Péclet number ( $Pe_0 = 100$ ), the flow becomes stronger with time and the maximum of the deformation occurs at the end of the simulation.

## 2.6 Scaling laws

In this section, we determine scaling laws for the thickness of the uppermost vorticity layer and the maximum velocity in the layer from the set of equations developed in section 2.4. First, we will discuss the transition between the strongly stratified and weakly stratified regimes discussed in Fig. 2.8. We will then focus on the strongly stratified regime and estimate the deformation in the uppermost layer. Thermal and compositional stratification are discussed separately. The flow in the weakly stratified regime is given by the analytical model discussed in section 2.5.1 and appendix 2.12 for neutral stratification.

### 2.6.1 Balance between magnetic forcing and stratification

We start here by discussing the transition between the strongly-stratified and weakly-stratified regimes.

To define the transition between the weakly and strongly stratified regimes, each term of the vorticity equation is estimated. The quantity  $\chi$  is splitted in two terms,  $\chi = \bar{\chi}(r, t) + \chi'(r, \theta, t)$ , with  $\bar{\chi}$  the reference radial profile corresponding to  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

The vorticity equation writes

$$\mathbf{0} = Ra \frac{\partial \chi'}{\partial \theta} \mathbf{e}_\phi + M \nabla \times \mathbf{f}_L + \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.37)$$

In the vorticity equation, the three terms must balance if the effect of stratification is important. Starting from a state with no perturbations,  $\chi' = 0$ , the flow velocity is initially set by a balance between the Lorentz force and the viscosity force. Isosurfaces of  $\chi$  are deformed by the resulting flow, and the buoyancy force increases and would eventually balance the magnetic force if the stratification is strong enough. In this case, further radial motion is prevented and the flow tends to be localized in a vorticity layer below the ICB, as found in our numerical simulations. Denoting by  $\delta$  the thickness of the vorticity layer and  $u$  and  $w$  the typical vertical and horizontal velocity, respectively, the vorticity is  $\omega \sim u/\delta$ . We therefore have, from Eq. (2.37),

$$|Ra|\chi' \sim M \sim \frac{u}{\delta^3}. \quad (2.38)$$

The perturbation  $\chi'$  thus scales as

$$\chi' \sim \frac{M}{|Ra|} \quad (2.39)$$

if the stratification is strong enough for the induced buoyancy forces to balance the Lorentz force.

The effect of the stratification is negligible if the buoyancy forces, which are  $\sim |Ra|\chi'$ , cannot balance the Lorentz force, which is  $\sim M$ .  $\chi'$  is necessarily smaller than  $|\bar{\chi}(r_{ic}) - \bar{\chi}(0)|$ , which by construction is equal to 1, and the effect of the stratification would therefore be negligible if  $M \gg |Ra|$ . This is consistent with the boundary between the two regimes found from our numerical calculations, as shown in Fig. 2.8, as well as with the results of [Buffett & Bloxham \(2000\)](#) who found that the Lorentz force can displace isodensity surfaces by  $\sim r_{ic}M/|Ra|$ . This estimate is valid for both a growing or non-growing inner core.

### 2.6.2 Scaling laws in the strongly stratified regime

The reference profile  $\bar{\chi}$  is solution of

$$\xi \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{\chi} + Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \bar{\chi} + S(t) - \xi \frac{\Delta \rho_\chi}{\Delta \rho_\chi} \bar{\chi}. \quad (2.40)$$

Subtracting Eqs (2.40) to (2.19), and assuming that  $\chi' \ll \bar{\chi}$ , we obtain an equation for  $\chi'$

$$\underbrace{\xi \frac{\partial \chi'}{\partial t}}_{\sim \xi \chi'} = \underbrace{\nabla^2 \chi'}_{\sim \chi' / \delta^2} - \underbrace{u \frac{\partial \chi'}{\partial \theta}}_{\sim u \chi'} - \underbrace{w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r}}_{\sim w \bar{\chi} \sim w} + \underbrace{Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \chi'}_{\sim Pe \chi' / \delta} - \underbrace{\xi \frac{\Delta \rho}{\Delta \rho}}_{\sim Pe \chi'} \chi', \quad (2.41)$$

where each terms have been estimated.

Three terms depends on the growth rate:  $\xi \partial \chi' / \partial t$ ,  $Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \chi'$  and  $\xi \Delta \rho / \Delta \rho \chi'$ . With our assumption of  $r_{ic} \sim \sqrt{t}$ , we have  $\xi = 2Pet$  and thus  $\xi \lesssim Pe$ . Thus, the largest term among the growth rate-dependent terms is  $Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \chi' \sim Pe \chi' / \delta$ .

Comparing the effect of the diffusion term, which is  $\sim \chi' / \delta^2$ , with the inner core growth term, which is  $\sim Pe \chi' / \delta$ , we find that the effect of the inner core growth is negligible if

$$Pe \ll \frac{1}{\delta}. \quad (2.42)$$

This suggest the existence of two different regimes depending on whether  $Pe$  is small or large. We develop below scaling laws for these two cases.

### 2.6.2.1 Small $Pe$ limit

Neglecting the growth terms, we have

$$0 = \underbrace{\nabla^2 \chi'}_{\sim \chi' / \delta^2} - \underbrace{u \frac{\partial \chi'}{\partial \theta}}_{\sim u \chi'} - \underbrace{w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r}}_{\sim w \bar{\chi}}. \quad (2.43)$$

The conservation of mass implies that  $u \sim w / \delta$ , and with  $\chi' \sim M / |Ra|$ , we obtain

$$0 = \underbrace{\nabla^2 \chi'}_{\sim \frac{M}{Ra \delta^2}} - \underbrace{u \frac{\partial \chi'}{\partial \theta}}_{\sim u \frac{M}{Ra}} - \underbrace{w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r}}_{\sim u \delta}. \quad (2.44)$$

We now assume that the horizontal advection term is small compared to the vertical advection term, which requires that  $\delta \gg M / |Ra|$ . Balancing the advection and diffusion terms, we obtain

$$\frac{M}{|Ra| \delta^2} \sim u \delta. \quad (2.45)$$

Combining this expression with the relation  $u / \delta^3 \sim M$  obtained from the vorticity equation (Eq. (2.38)), we have

$$\delta \sim |Ra|^{-1/6}, \quad (2.46)$$

$$u \sim M |Ra|^{-1/2}. \quad (2.47)$$

**2.6.2.2** Large  $Pe$  limit

In this limit, the diffusion time is larger than the age of the inner core, which allows us to neglect the diffusion term. Keeping only the largest growth rate-dependent term, and using Eq. (2.38), we have

$$0 = - \underbrace{u \frac{\partial \chi'}{\partial \theta}}_{u \chi'} - \underbrace{w \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r}}_{u \delta} + \underbrace{Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \chi'}_{\frac{Pe M}{\delta Ra}}. \quad (2.48)$$

Assuming again that the horizontal advection term is small compared to the vertical advection term, the main balance is between the second and third terms, which gives

$$u \delta \sim \frac{Pe M}{\delta |Ra|}. \quad (2.49)$$

Combined with  $u \delta \sim M \delta^4$  from Eq. (2.38), we find that the thickness and maximum velocity of the upper layer are

$$\delta \sim \left( \frac{Pe}{|Ra|} \right)^{1/5}, \quad (2.50)$$

$$u \sim M \left( \frac{Pe}{|Ra|} \right)^{3/5}. \quad (2.51)$$

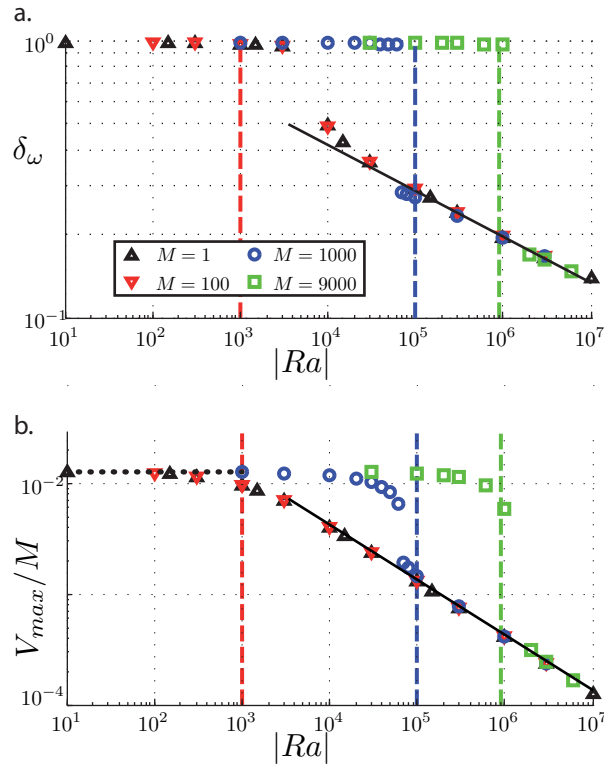
These equations are valid during the whole growth of the inner core, and all the parameters are evolving with the radius. With  $r_{ic} \propto \sqrt{t}$  and  $M$ ,  $Ra$  and  $Pe$  given by Eqs. (2.26), (2.30) and (2.28), we obtain for the thermal case

$$\delta \sim \left( \frac{Pe_0}{|Ra_0| t^3} \right)^{1/5}. \quad (2.52)$$

Two conditions have to be fulfilled in the numerical simulations to check the validity of the assumptions we have made before. First, we must have  $Pe \gg 1/\delta$ , which is  $Pe \gg Ra^{1/6}$  using Eq. (2.50). Also, we have assumed that the upper layer is thin ( $\delta \ll 1$ , we will choose  $\delta < 0.2$ ) and that the horizontal advection is small compared to the vertical one.

**2.6.2.3** Comparison with numerical results

Fig. 2.10 shows results from numerical simulations with a constant inner core radius, corresponding to the small Péclet number limit. When  $|Ra|/M \ll 1$  we obtain the same flow geometry and amplitude than predicted by our analytical model for  $Ra = 0$ . When  $|Ra|/M \gg 10$  and the thickness of the upper layer is smaller than 0.2, the points align

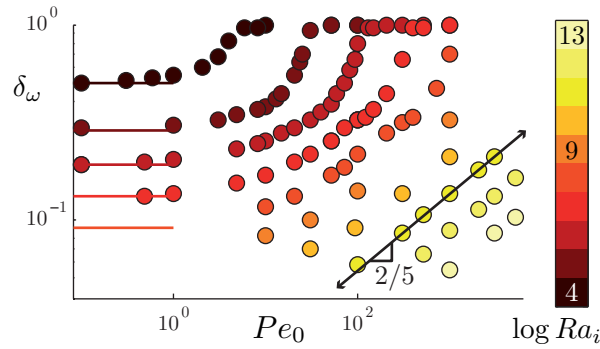


**Figure 2.10:** Numerical results for a zero growth rate. Evolution of the thickness of the uppermost vorticity layer (a) and maximum horizontal velocity (b) with the absolute value of the Rayleigh number  $|Ra|$ . Colors correspond to different Hartmann numbers, and dotted lines to the corresponding  $|Ra| = 10M$  line. The velocity has been scaled with the effective Hartman number and the extreme value for low  $|Ra|$  is the one calculated without stratification (black horizontal dotted line)

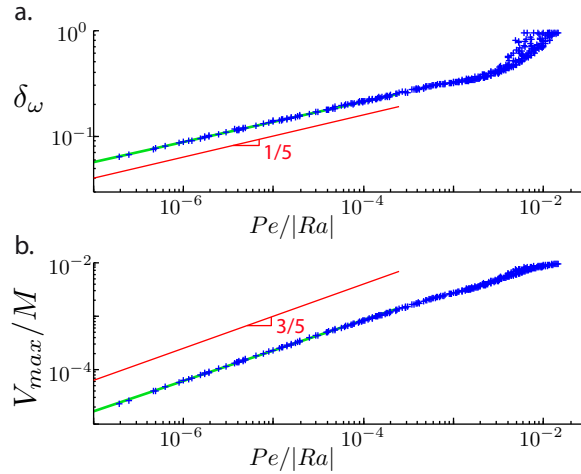
on a straight line in log-log scale, with slopes close to the predictions of Eqs. (2.46) and (2.47), for both the thickness of the uppermost vorticity layer and the maximum horizontal velocity.

At a given magnetic forcing, starting in the low stratification regime, increasing the stratification will first decrease the velocity, and a second layer develops at a higher absolute value of the Rayleigh number only, as seen on Fig. 2.10. To form an upper layer, the system develops a second circulation. If the space available is not big enough to have a full counter circulation, then no layer can develop and there is a delay for the predicted Rayleigh number for which the thickness is smaller than one. This is also true when going from two to three layers and so on, although it is attenuated. Sizes of the layers overshoot the predicted values before being completely formed, when the values for the velocities do not shown such overshooting.

Figs. 2.11 shows the evolution of the thickness of the layer when increasing the Péclet number. For  $Pe_0 \ll 1$ , the thickness depends on the value of the Rayleigh number only and fits the predicted value for the low Péclet regime, from Eq. (2.46). For  $Pe_0 \gg 1$ , the thickness of the layer is a function of both the Rayleigh number and the Péclet number, as predicted by Eq. (2.50). For this figure, the stratification is thermal, and we use the



**Figure 2.11:** Thickness of the uppermost vorticity layer as a function of the Péclet number  $Pe_0$  for different values of  $|Ra_{Pe \ll 1}|$ , at  $t = 1$  and  $M = 1$ . Results for a zero growth rate is indicated with colored lines for each values of  $|Ra_{Pe \ll 1}|$ .



**Figure 2.12:** Thickness of the uppermost vorticity layer (a) and maximum velocity (b) as functions of  $Pe/|Ra|$ . 50 runs are plotted, with  $|Ra_0|$  from  $3 \times 10^3$  to  $10^{10}$  and  $Pe_0$  from 13 to 5000, with 10 time steps for each runs, and filtered by  $Pe_0 \gg 1/\delta$ . Solid green lines are the best fit for  $\delta < 0.25$ , which is  $\delta = 1.24 (Pe/|Ra|)^{0.192 \pm 0.04}$  and  $V_{max} = 0.143 M (Pe/|Ra|)^{0.56 \pm 0.09}$ . The red lines are expected scaling laws developed in subsection 2.6.2.2.

definition of the Rayleigh number for  $Pe_0 \ll 1$ , which is  $Ra_{Pe \ll 1} = Ra_{Pe \gg 1} Pe_0$  for  $S(t)$  constant. Using this definition, the thickness  $\delta$  is  $\propto (Ra_{Pe \ll 1}/Pe_0^2)^{-1/5}$ .

Fig. 2.11 illustrates the transition between large and small Péclet regimes. The thickness of the upper layer is plotted as a function of the Péclet number, for Rayleigh numbers from  $-10^4$  to  $-10^{13}$ . For  $Pe_0 \ll 1$ , numerical results agree with the scaling laws from subsection 2.6.2.1, plotted as horizontal solid colored lines. For  $Pe_0 \gg 1$  and  $\delta \ll 1$ , the data points from runs at the same Rayleigh number seem to align on slopes  $2/5$ , whereas when  $\delta > 0.2$ , the behavior is different and the thickness of the layer reaches 1 when increasing  $Pe_0$ .

Fig. 2.12 shows the vorticity layer thickness and maximum velocity as functions of  $Pe/|Ra|$ , in log-log scale, for runs in the large Péclet limit. The thickness of the upper layer and the maximum velocity align on slopes close to the  $1/5$  and  $3/5$  slopes predicted



in subsection 2.6.2.2.

Figs 2.11 and 2.12 have been computed with  $M = 1$  to simplify the representation. We have checked that, as long as the condition  $|Ra| \gg M$  is verified, the geometry of the flow does not depend on  $M$  and the velocity is proportional to  $M$ .

## 2.7 Strain rate produced by the flow

Fig. 2.13 shows the von Mises equivalent strain rate (Wenk et al., 2000; Deguen et al., 2011) for the runs corresponding to Fig. 2.9, highlighting regions of high deformation. The von Mises equivalent strain rate is the second invariant of the strain rate tensor, measuring the power dissipated by deformation (Tome et al., 1984; Wenk et al., 2000; Tackley, 2000). Comparing Figs 2.9 and 2.13, we see that the deformation and vorticity fields have a similar geometry when the flow is organized in several layers, whereas the location of the regions of high deformation and high vorticity differ when the effect of stratification is small and the flow is organized in one cell only. In this case, which is similar to Karato (1999), the maximum deformation is at the edges of the cells, whereas for a large stratification, the strain is confined in the uppermost layer. In the strongly stratified regime, the deformation can be predicted from the scaling laws discussed in section 2.6.2, as  $\dot{\varepsilon} \sim u/\delta$ .

In the small  $Pe$  number case, relevant for the Earth's inner core with a thermal stratification, using the scaling laws (2.46) and (2.47) for the velocity and shear layer thickness gives

$$\dot{\varepsilon} \sim \frac{u}{\delta} = M|Ra|^{-1/3} \frac{\kappa}{r_{ic}(t)^2}. \quad (2.53)$$

In the large  $Pe$  number case, relevant for the Earth's inner core with a compositional stratification, using the scaling laws (2.50) and (2.51) for the velocity and shear layer thickness gives

$$\dot{\varepsilon} \sim \frac{u}{\delta} = M \left( \frac{|Ra|}{Pe} \right)^{-2/5} \frac{\kappa}{r_{ic}(t)^2}. \quad (2.54)$$

These scaling laws give upper bounds for the actual strain rate in the inner core. They are valid only in the uppermost layer and only at one given time of its history. The quantity  $1/\dot{\varepsilon}$  is the time needed to deform the layer with a cumulated strain  $\sim 1$ .

To estimate the cumulated deformation in the inner core, we assume that the strain rate  $\dot{\varepsilon}$  is applied only on the uppermost layer of thickness  $\delta$ . The simplest is to assume that both  $\dot{\varepsilon}$  and  $\delta$  are evolving slowly with time. Assuming that the strain rate  $\dot{\varepsilon}(t)$  is given by  $u/\delta$  within the shear layer of thickness  $\delta$  and is negligible elsewhere, the cumulated deformation is

$$\varepsilon \sim \frac{\dot{\varepsilon}\delta}{u_{ic}} \sim \frac{u}{Pe}, \quad (2.55)$$

with  $u$  the dimensionless maximum horizontal velocity. The deformation is given at first order by the ratio between the horizontal velocity induced by the Lorentz force and the growth rate of the inner core.

This is a good approximation for radii close to the radius of the inner core, but it overestimates the strain close to the center of the inner core by several orders of magnitude. Estimating the strain by integrating over time a rectangular function of value  $\dot{\epsilon}$  between  $r_{ic} - \delta$  and  $r_{ic}$  gives more realistic values for the strain close to the center. Analytic solutions are discussed in appendix 2.13.

## 2.8 Application to the inner core

To determine in which regime is the inner core, the first step is to estimate the ratio  $|Ra|/M$ , which is

$$\frac{|Ra|}{M} = \frac{\Delta\rho g_{ic} r_{ic} \mu_0}{B_0^2} = \frac{\Delta\rho}{1 \text{ kg.m}^{-3}} \left( \frac{3 \text{ mT}}{B_0} \right)^2 7.5 \times 10^5. \quad (2.56)$$

Notice that this does not depend on the viscosity. Plausible dimensionless numbers for the Earth's inner core are obtained from typical values given in Table 2.1 and summarized in Table 2.2. The density stratification is  $\Delta\rho \sim 1 \text{ kg.m}^{-3}$  irrespectively of the nature of the stratification (Deguen & Cardin, 2011; Labrosse, 2014). Varying the parameters within their uncertainty range can change the ratio  $|Ra|/M$  by an order of magnitude at most. The ratio  $|Ra|/M$  is thus unlikely to be smaller than 1 for either thermal or compositional stratification. The inner core is strongly stratified compared to magnetic forcing.

If the stratification is of thermal origin, the Péclet number is on the order of 1 ( $Pe_0 = 2.8$ ). Fig. 2.11 shows that the low Péclet number scaling laws still agree reasonably well with the numerical results for Péclet numbers around 1; the low Péclet number scaling laws can therefore be used to predict the flow geometry and strength in the thermal stratification case. If the stratification is of compositional origin, the Péclet number is large ( $Pe_0 \sim 10^5$ ) and thus the large Péclet limit scaling laws apply.

Estimates of the thickness of the upper layer, maximum velocity in this layer and expected strain rate are given in Table 2.3, using values of parameters of Tables 2.1 and 2.2. Because the viscosity is poorly known, we express these estimates as functions of the viscosity. For the present inner core, the layer that is subjected to a flow due to Lorentz forcing is expected to be 93 km and 60 km thick in case of, respectively, thermal and compositional stratification, for a viscosity of  $10^{16}$  Pa.s. The velocity in this layer is expected to be several orders of magnitude lower than the growth rate, and instantaneous deformation due to this flow is really small: the typical timescale for the deformation is of order  $10^2$  Gyrs for both cases, for  $\eta = 10^{16}$  Pa.s. These values are obtained for the present inner core, which means it is the deformation time scale for the present uppermost layer. The deformation  $\epsilon \sim u/Pe$  is inversely proportional to the radius, and thus the strain is higher in depth: at  $r = 0.5 r_{ic}$ , the strain is multiplied by 2 for thermal stratification, and

by 4.6 for compositional stratification.

As can be seen in Eqs. (2.53) and (2.54), the strain rate in the shear layer is a decreasing function of the stratification strength. This is the opposite of what Deguen et al. (2011) found in the case of a flow forced by heterogeneous inner core growth (Yoshida et al., 1996). The flow geometry is similar to what has been found here if the inner core is stably stratified, with a shear layer below the ICB in which deformation is localized, but, contrary to the Lorentz force case, the strength of the flow and strain rate increase with the strength of the stratification. This difference is due to the fact that in the heterogeneous inner core growth case, the velocity is imposed by the boundary conditions at the ICB, and therefore does not decrease when the stratification strength is increased. In contrast, the velocity in the shear layer produced by the Lorentz force depends on a balance between the Lorentz force and the viscous forces, and decreases with increasing stratification strength.

Using the scaling laws we have developed earlier (Eqs. (2.53), (2.54) and (2.55)), the cumulated strain below the shear layer is given by

$$\varepsilon_T \sim 5.6 \times 10^{-4} \left( \frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta} \right)^{1/2}, \quad (2.57)$$

and

$$\varepsilon_C \sim 2.4 \times 10^{-4} \left( \frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta} \right)^{2/5}. \quad (2.58)$$

This shows that a viscosity lower than  $10^{10}$  Pa.s is required if one wants a deformation larger than about 1 in the top of the inner core. Such a low viscosity seems unrealistic and this model suggests that no detectable anisotropy would be produced in the bulk of the inner core.

Using the method in appendix 2.13 to compute the strain in depth, the deformation is two orders of magnitude stronger in the center of the inner core than at the edge. This means a non-negligible strain for viscosity lower than  $10^{12}$  Pa.s.

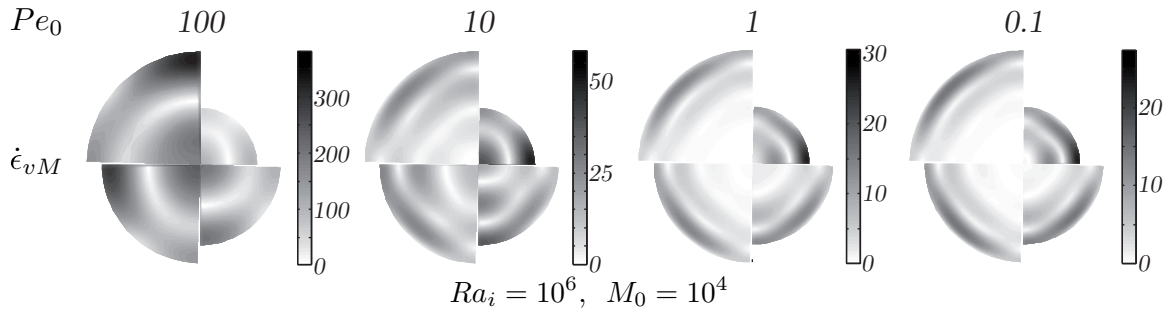
The uppermost layer has a different behavior because it did not have enough time to deform. This could stand for an isotropic layer at the top of the inner core, as observed by seismic studies. We expect this layer to be of the order of one hundred kilometers for thermal or compositional stratification.

**Table 2.3:** Estimates of thickness, maximal horizontal velocity and strain rate of the upper layer for thermal stratification (low  $Pe$ ) and compositional stratification (large  $Pe$ ).

	Thermal stratification, low Péclet	Compositional stratification, large Péclet
Thickness $\delta$	$\left(\frac{\eta}{10^{16} \text{ Pa.s}}\right)^{1/6} \times 94 \text{ km}$	$\left(\frac{\eta}{10^{16} \text{ Pa.s}}\right)^{1/5} \times 60 \text{ km}$
Maximal horizontal velocity <sup>a</sup> $u$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{1/2} \times 2.2 \times 10^{-14} \text{ m.s}^{-1}$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{2/5} \times 0.9 \times 10^{-14} \text{ m.s}^{-1}$
Instantaneous strain rate <sup>b</sup> $\dot{\varepsilon}$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{2/3} \times 7.4 \times 10^{-12} \text{ yrs}^{-1}$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{3/5} \times 4.8 \times 10^{-12} \text{ yrs}^{-1}$
Strain $\varepsilon = u/Pe$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{1/2} \frac{r_{\text{ic}}}{r} \times 5.6 \times 10^{-4}$	$\left(\frac{10^{16} \text{ Pa.s}}{\eta}\right)^{2/5} \left(\frac{r_{\text{ic}}}{r}\right)^{11/5} \times 2.4 \times 10^{-4}$

<sup>a</sup> this value has to be compared with a typical value for the growth rate:  $u_{\text{ic}}(\tau_{\text{ic}}) \approx 10^{-11} \text{ m.s}^{-1}$ .

<sup>b</sup> at  $t = \tau_{\text{ic}}$ .



**Figure 2.13:** Snapshots of the von Mises equivalent strain rate for  $Ra_0 = -10^6$ ,  $M_0 = 10^4$  and four different Péclet number  $Pe = 100, 10, 1, 0.1$ . Each panel corresponds (starting from top-left and going clockwise) to 0.25, 0.5, 0.75 and 1 non-dimensional time. See Fig. 2.9 for plots of the vorticity field of corresponding runs.

## 2.9 Conclusion

Following previous works (Karato, 1999; Buffett & Wenk, 2001), we have developed a complete model for evaluating the deformation induced by the Lorentz force in a stratified inner core, investigating the effect of boundary conditions and neutral and strong stratification in the case of thermal or compositional stratification.

Calculating the flow for neutral stratification with different mechanical boundary conditions, we show that, for this particular problem of dynamics induced by the Lorentz force and unlike previous studies, the relevant boundary conditions are of impermeable type, with no radial flow at the ICB.

If the inner core has a stable density stratification, then we find that the stratification strongly alters the flow induced by the poloidal component of the Lorentz force. The deformation is concentrated in a thin layer at the top of the inner core, which thickness does not depend on the magnetic field strength, but varies strongly with both the density stratification and the Péclet number, which characterizes the growth rate compared to the diffusion velocity.

However, in this regime, the deformation rate is predicted to be too small for producing significant LPO in most of the inner core, unless the inner core viscosity is smaller than  $10^{10} - 10^{12}$  Pa.s. The cumulated deformation is two orders of magnitude stronger close to the center of the inner core, but remains smaller than 1 if the inner core viscosity is larger than  $10^{12}$  Pa.s.

## 2.10 Poloidal/toroidal decomposition

### 2.10.1 Momentum equation using poloidal decomposition

Following Ricard & Vigny (1989) and Ribe (2007), a flow induced by internal density anomalies in a constant viscosity fluid is purely poloidal in a spherical shell, if the surface boundary conditions also have a zero vertical vorticity. Considering also that the external forcing by the Lorentz force is purely poloidal ( $\mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{F}_L = 0$ ), no toroidal flow is expected in our problem. The velocity field can thus be written by introducing the scalar  $P$  defined such that

$$\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (P\mathbf{r}), \quad (2.59)$$

where  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  is the position vector.

Applying  $\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla \times)$  to Eq. (2.18), we obtain that

$$0 = Ra(t)L^2\Theta - (\nabla^2)^2L^2P + M(t)\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_L), \quad (2.60)$$

where  $L^2$  is the operator defined by

$$L^2 = -\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \quad (2.61)$$

The last term of Eq. (2.60) is computed from the Lorentz force defined in Eq. (2.8) and gives

$$\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}_L) = 8r^2(1 - 3\cos^2\theta) = -\frac{16}{\sqrt{5}}r^2Y_2^0, \quad (2.62)$$

where  $Y_2^0 = \frac{\sqrt{5}}{2}(3\cos^2\theta - 1)$ .

Eq. (2.60) becomes

$$0 = Ra(t)L^2\Theta - (\nabla^2)^2L^2P - M(t)\frac{16}{\sqrt{5}}r^2Y_2^0. \quad (2.63)$$

When expanding the two scalar field  $\Theta$  and  $P$  with spherical harmonics  $Y_l^m(\theta, \phi)$  that satisfy  $L^2Y_l^m = l(l+1)Y_l^m$ , we defined new variables  $t_l^m$  and  $p_l^m$  by

$$\Theta = t_l^m(r)Y_l^m, \quad (2.64)$$

$$P = p_l^m(r)Y_l^m, \quad l \geq 1. \quad (2.65)$$

Eq. (2.63) is eventually written as

$$D_l^2 p_l^m + \frac{16}{\sqrt{5}l(l+1)} M(t) r^2 \delta_{2l} \delta_{0m} - Ra(t) t_l^m = 0, \quad l \geq 1, \quad (2.66)$$

where  $\delta$  is the Kronecker symbol and  $D_l$  is the second order differential operator defined by

$$D_l = \frac{d}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (2.67)$$

### 2.10.2 Poloidal decomposition of the boundary conditions

From [Deguen et al. \(2013\)](#), the boundary conditions at  $r = 1$  are written as

$$\tau_{r\theta} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = 0, \quad (2.68)$$

$$\tau_{r\phi} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} \right] = 0, \quad (2.69)$$

$$-\mathcal{P}(t)(u_r - \dot{r}_{ic}) - 2 \frac{\partial u_r}{\partial r} + p' = 0. \quad (2.70)$$

$\mathcal{P}(t)$  is the dimensionless parameter that characterizes the resistance to phase change as defined in Eq. (2.35).

In term of poloidal decomposition of the velocity field, the set of equations for the boundary conditions at  $r = 1$  is modified as

$$\frac{d^2 p_l^m}{dr^2} + [l(l+1) - 2] \frac{p_l^m}{r^2} = 0, \quad l \geq 1, \quad (2.71)$$

$$r \frac{d^3 p_l^m}{dr^3} - 3l(l+1) \frac{1}{r} \frac{dp_l^m}{dr} = \left[ l(l+1) \mathcal{P}(t) - \frac{6}{r^2} \right] p_l^m, \quad l \geq 1. \quad (2.72)$$

## 2.11 Compositional stratification

The source term  $S_c$  of the conservation of light elements is directly the evolution of the concentration of light elements in the solid that freezes at the inner core boundary  $\dot{c}_{ic}^s(t)$ . Following [Gubbins et al. \(2013\)](#) and [Labrosse \(2014\)](#), this term depends both on the evolution of the concentration in the liquid outer core, which increases when the inner core grows because the solid incorporates less light elements, and on the evolution of the partition coefficient between solid and liquid.

In this paper, we will focus on the simplest case for which the partition coefficient

does not depend on temperature nor concentration. Thus, the concentration in the solid is increasing with the radius of the inner core, as the concentration in the liquid increases. This will promote a stably stratified inner core, whereas Gubbins et al. (2013) and Labrosse (2014) focused on the potentially destabilizing effects of variations of the partition coefficient.

To compute the light element concentration, we note  $M_c = M_{ic} + M_{oc}$  the total mass of the Earth's core. When increasing the inner core mass by  $dM_{ic}$ , the mass of the outer core light elements decreases by  $d(c^l M_{oc}) = -c_{ic}^s dM_{ic}$ . The total mass of the Earth's core is constant, which gives  $dM_{oc} = -dM_{ic}$  and

$$\frac{d c^l}{c^l} = (k - 1) \frac{d M_{oc}}{M_{oc}}, \quad (2.73)$$

where  $k$  is the partition coefficient defined as  $k = c_{ic}^s / c^l$ .

Eq. (2.73) can be integrated with the assumption of a constant partition coefficient. Integration between  $(c_0^l, M_c)$  and  $(c^l, M_{oc})$ , corresponding to before the inner core formation and any time after, this gives

$$c^l(t) = c_0^l \left( \frac{M_{oc}}{M_c} \right)^{k-1}. \quad (2.74)$$

When ignoring radial density variations, the ratio  $M_{oc}/M_c$  is simply  $1 - (r_{ic}/r_c)^3$ . The light element concentration at the inner core boundary is thus directly obtained from the liquid concentration as

$$c_{ic}^s(t) = k c_0^l \left( 1 - \left( \frac{r_{ic}(t)}{r_c} \right)^3 \right)^{k-1}. \quad (2.75)$$

The source term  $S_c$  is finally written as

$$S_c(t) = 3k(k-1)c_0^l \left( 1 - \left( \frac{r_{ic}(t)}{r_c} \right)^3 \right)^{k-2} \frac{r_{ic}^2}{r_c^3} \frac{d r_{ic}}{d t}. \quad (2.76)$$

Considering the simplest growth scenario with  $r_{ic}(t) = r_{ic}(\tau_{ic})\sqrt{t/\tau_{ic}}$ , the source term  $S_c$  varies at first order as  $\sqrt{t/\tau_{ic}}$ .

## 2.12 Analytic solution for neutral stratification

We solve Eq. (2.66) for a neutral stratification,  $Ra = 0$ , with the boundary conditions (2.71) and (2.72) described in section (2.10.2).



Equation (2.66) is thus written as

$$D_l^2 p_l^m + \frac{16}{\sqrt{5}l(l+1)} M r^2 \delta_{2l} \delta_{0m} = 0, \quad (2.77)$$

and can be solve analytically.

Except for  $(l = 2, m = 0)$ ,  $p_l^m = 0$  is solution of the Eq. (2.77) and verifies the boundary conditions (2.71) and (2.72).

For  $(l = 2, m = 0)$ , we have

$$D_l^2 p_2^0 + \frac{8}{3\sqrt{5}} M r^2 = 0, \quad (2.78)$$

and for  $r = 1$

$$\frac{d^2 p_2^0}{dr^2} + 4 \frac{p_2^0}{r^2} = 0, \quad (2.79)$$

$$r \frac{d^3 p_2^0}{dr^3} - 18 \frac{1}{r} \frac{dp_2^0}{dr} = \left[ \mathcal{P}(t) - \frac{1}{r^2} \right] 6p_2^0. \quad (2.80)$$

Eq. (2.78) is solved considering a sum of polynomial functions, and adding the boundary conditions (2.79) and (2.80), we obtain the coefficient  $p_2^0$  as

$$p_2^0(r) = \frac{M}{3^3 7 \sqrt{5}} \left( -r^6 + \frac{14}{5} r^4 - \frac{9}{5} r^2 + \frac{204}{5} \frac{r^4}{19 + 5P} - \frac{544}{5} \frac{r^2}{19 + 5P} \right). \quad (2.81)$$

From the coefficients  $p_l^m$ , the vertical and horizontal velocities are

$$u_r = \sum_{l,m} l(l+1) \frac{p_l^m}{r} Y_l^m, \quad (2.82)$$

$$u_\theta = \sum_{l,m} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r p_l^m) \frac{\partial}{\partial \theta} Y_l^m, \quad (2.83)$$

with  $Y_l^m$  the surface spherical harmonics.

The root mean square velocity ( $V_{rms}$ ) of the system is defined as

$$V_{rms}^2 = \frac{3}{4\pi} \int_0^{2\phi} \int_0^\pi \int_0^1 (u_r^2 + u_\theta^2) \sin \theta r^2 dr d\theta d\phi. \quad (2.84)$$

From Eq. (2.83) and (2.84), we obtain the maximum absolute value of the horizontal velocity and the RMS velocity that are shown on Fig. 2.6. Both graphs have a sigmoid shape, and thus we are mostly interested in the extreme values for each velocity, which are given in Table 2.4.

**Table 2.4:** Extreme values for RMS velocity and maximum of the absolute value of the horizontal velocity for two extrem values of  $\mathcal{P}$ . Velocities are proportional to  $M$  and thus only the value  $v/M$  is given.

	$\mathcal{P} \rightarrow 0$	$\mathcal{P} \rightarrow \infty$
$V_{rms}/M$	0.06609	0.00805
$\max  u_\theta(r, \theta) /M$	0.06944	0.01270

## 2.13 Integration over time of the deformation

### 2.13.1 General discussion

In general, the texturation mechanism is a nonlinear process, but an upper bound of the total deformation of a given material can be inferred by considering that the strain adds up linearly. The material is deformed by a strain rate  $\dot{\varepsilon}$  on the time needed to grow of a thickness  $\delta$ , and so

$$\varepsilon(r(t)) = \dot{\varepsilon}(t) \frac{\delta(t)}{u_{ic}(t)} = \frac{u}{Pe}, \quad (2.85)$$

with  $Pe = u_{ic} r_{ic} / \kappa$ .

This equation leads to simple forms at the low and large Péclet limits, with  $\varepsilon \propto t^{-1/2}$  for thermal stratification and low Péclet, and  $\varepsilon \propto t^{-11/10}$  for compositional stratification and large Péclet. The estimations for thermal and compositional stratification are realistic close to the surface of the inner core (see Table 2.3), but largely higher than 1 in the center, which means that we need another way to estimate this deformation. Nevertheless, it is interesting to notice that this magnetic forcing is expected to be several orders of magnitude more efficient when the inner core was younger.

The total deformation of a given material during a time  $\tau$  can be inferred more precisely by  $\int_0^\tau \dot{\varepsilon}(t) dt$ .

Using dimensionless quantities described in the main sections except for the length scale  $r_{ic}(\tau_{ic})$ , the deformation of a stratified sphere subject to a magnetic forcing is

$$\varepsilon(r) = \int_0^1 \dot{\varepsilon}(r, t) dt, \quad (2.86)$$

with  $\dot{\varepsilon}$  the strain rate function that will be described by a rectangular function as

$$\dot{\varepsilon}(r, t) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_{vM}(t) \frac{\kappa}{r_{ic}^2(t)} & \text{if } r_{ic}(t)(1 - \delta) < r < r_{ic}(t) \\ 0 & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (2.87)$$

The estimations of  $\dot{\varepsilon}_{vM}$  depend on the scaling laws defined in section 2.7, and also on

the time dependence of the parameters we have defined.

Because  $r_{ic}(t)(1 - \delta) < r_{ic}(t) \forall t$ , integrating over time the function defined by (2.87) is equivalent to integrate it between  $t_{min}(r)$  and  $t_{max}(r)$ , where  $t_{min}$  and  $t_{max}$  are defined by  $r_{ic}(t_{max})(1 - \delta) = r$  and  $r_{ic}(t_{min}) = r$ ,

$$\varepsilon(r) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} \dot{\varepsilon}_{vM}(t) \frac{\kappa}{r_{ic}^2(t)} dt. \quad (2.88)$$

### 2.13.2 Low Pe - Thermal stratification

In the low Péclet limit, the dimensionless thickness, maximal horizontal velocity and strain rate of the uppermost layer are given by

$$\delta \sim |Ra|^{-1/6}, \quad (2.89)$$

$$u \sim M |Ra|^{-1/2}, \quad (2.90)$$

$$\dot{\varepsilon} \sim M |Ra|^{-1/3}. \quad (2.91)$$

In dimensional form,  $\delta$  appends to be a constant with time for thermal stratification

$$\delta = 1.9643 r_{ic}(\tau_{ic}) |Ra_0|^{-1/6}. \quad (2.92)$$

Thus,  $t_{min}$  and  $t_{max}$  are easy to defined as

$$t_{min}(r) = \tau_{ic} \left( \frac{r}{r_{ic}(\tau_{ic})} \right)^2, \quad (2.93)$$

$$t_{max}(r) = \tau_{ic} \left( \frac{r + \delta}{r_{ic}(\tau_{ic})} \right)^2, \quad (2.94)$$

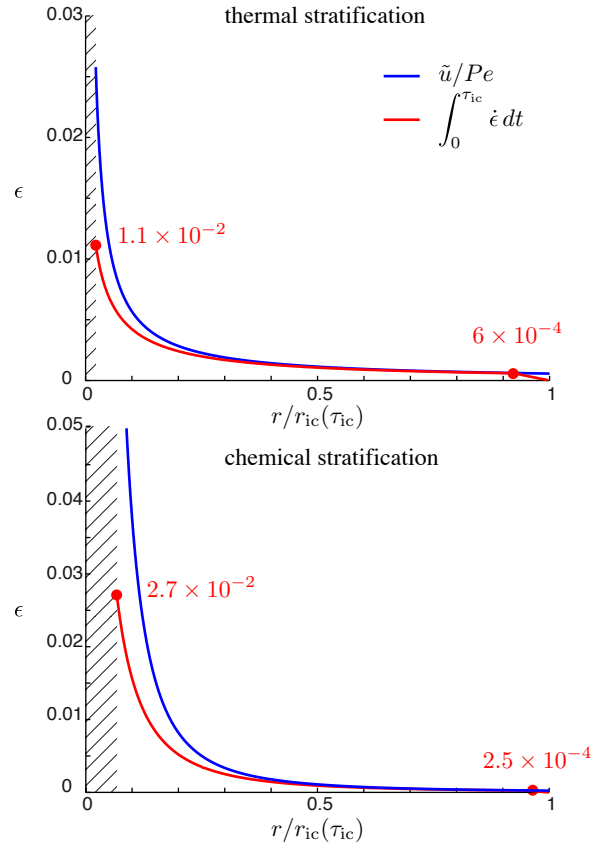
except for time close to  $\tau_{ic}$  because the media has not enough time to be deformed, and  $t_{max} = \tau_{ic}$ . For small radius, the limit will be defined by  $\delta = 1$ , which is here  $|Ra|(t) = M(t)$ , about 28km for typical values of the parameters.

For thermal stratification and time dependence as defined previously, the instantaneous deformation is

$$\dot{\varepsilon}(t) \frac{\kappa}{r_{ic}(t)} = 0.2148 M_0 |Ra_0|^{-1/3} \frac{\kappa}{r_{ic}^2(\tau_{ic})} \tau_{ic} t^{-1}, \quad (2.95)$$

$$= \dot{\varepsilon}_0 \tau_{ic} t^{-1}, \quad (2.96)$$

with  $\dot{\varepsilon}_0$  in  $s^{-1}$  and  $t$  in s.



**Figure 2.14:** Strain as a function of the radius of the inner core for thermal stratification (a.) and compositional stratification (b.). Integration from equation (2.88) is the red line (analytical solution for thermal stratification and numerical solution for compositional stratification), and the blue lines stand for the estimation  $u/Pe$ , which is valid for  $r > 0.5 r_{ic}$ . The minimum radius is computed for  $Ra/M = 1$ , limit under which the strong stratification approximation is no longer valid.

$$\varepsilon(r) = \begin{cases} \dot{\varepsilon}_0 \tau_{ic} 2 \ln \frac{r-\delta}{r}, & \text{for } r < r_{ic}(\tau_{ic}) - \delta, \\ \dot{\varepsilon}_0 \tau_{ic} 2 \ln \frac{r_{ic}(\tau_{ic})}{r}, & \text{for } r > r_{ic}(\tau_{ic}) - \delta, \end{cases} \quad (2.97)$$

The strain rate is assumed to be constant over the layer  $\delta$  whereas we could have used numerical results of the simulations to have the exact repartition and profile of strain over radius and time. But because the von Mises strain rate profile over radius is close to a rectangular function, it is easier to work with exact solution such as the one discussed here. It implies a linear increase of the absolute value of the strain, which is unlikely. This will in general overestimate the total strain.

Comparison between the strain computed from (2.97) and the simplest solution  $u/Pe$  discussed in the text is plotted on Fig. 2.14. The solution  $u/Pe$  is a good approximation for radius larger than  $0.5 r_{ic}$ , except in the uppermost layer, in which the deformation did not occur completely yet.

**2.13.3** Large Pe - Compositional stratification

---

For compositional stratification,

$$\delta = \left( \frac{Pe}{|Ra_0|} \right)^{1/5} r_{ic}(\tau_{ic}) \left( \frac{t}{\tau_{ic}} \right)^{-1/5}. \quad (2.98)$$

No exact solution for inverting  $r_{ic}(\tau_{ic})(t_{max}/\tau_{ic})^{1/2} - \delta(\tau_{ic})(t/\tau_{ic})^{-1/5} = r$  can be found. Fig. 2.14 b. shows the strain rate according to numerical integration and the approximation  $u/Pe$ .  $u/Pe$  is a good approximation for  $r > 0.5 r_{ic}$ .

# 3

## COMMENT COMPARER MODÈLES GÉODYNAMIQUES ET OBSERVATIONS SISMOLOGIQUES ?

---

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>3.2</b>	<b>Building a phase diagram for the Earth's inner core</b>	<b>92</b>
3.2.1	Introduction and rationale	96
3.2.2	Thermal and compositional density stratification	97
3.2.3	Phase change at the inner core boundary	100
3.2.4	Dynamical regimes	102
3.2.4.1	Heterogeneous inner core growth and topography relaxation	103
3.2.4.2	Lorentz force	104
	Poloidal flow	104
	Azimuthal flow	106
3.2.4.3	Joule heating	106
3.2.4.4	Rayleigh-Bénard convection	108
	Large $\mathcal{P}$ limit	108
	Small $\mathcal{P}$ limit	109
3.2.5	Regime diagram	110
3.2.5.1	Thermal stratification	111
	Stable stratification	112
	Unstable stratification	112
	Effect of thermal diffusivity	114
	Exploring the inner core history	114
3.2.5.2	Compositional stratification	116
3.2.6	Discussion and conclusion	117
3.2.7	Appendices	118
	Boundary between weak and strong stratification regimes	120
3.2.7.1	Small $Pe$ limit – thermal stratification	120
	Scaling of the heat equation terms	120
3.2.7.2	Large $Pe$ limit – compositional stratification	122
	Scaling of the terms of the composition transport equation	122

**3.3 Sharp Hemisphere Boundaries in a Translating Inner Core . . . 123**

---

## 3.1 Introduction

Dans la section 1.3, nous avons passé en revue les différents modèles publiés proposant d'expliquer les observations sismiques de la graine. En particulier, nous allons nous intéresser ici aux modèles d'écoulements globaux dans la graine. Basés sur des instabilités de convection (Jeanloz & Wenk, 1988; Buffett, 2009; Deguen & Cardin, 2011; Cottaar & Buffett, 2012; Alboussière et al., 2010; Monnereau et al., 2010; Mizzon & Monnereau, 2013; Deguen et al., 2013) ou sur des forçages extérieurs (Yoshida et al., 1996; Karato, 1999; Buffett & Bloxham, 2000; Buffett & Wenk, 2001; Takehiro, 2010; Deguen et al., 2011; Lasbleis et al., submitted), ces modèles proposent des écoulements de grandes échelles dans la graine dont la géométrie et/ou les déformations induites sont susceptibles d'expliquer les observations sismiques.

Aucune étude globale n'a encore été réalisée pour comparer et tester les modèles proposés. Pour cela, il est important de comprendre les limitations inhérentes à chacune des disciplines intéressées.

D'un côté, nous avons les observations sismiques : des mesures de temps d'arrivées d'ondes particulières et des études de modes propres. Ces observations sont limitées par la géométrie des rais, par la couverture (parcellaire) en stations d'observation et en sources sismiques et par la connaissance de la structure globale de la Terre. De plus, en fonction des caractéristiques de la zone d'étude, globale ou locale, tridimensionnelle ou unidimensionnelle, les informations fournies au modèle seront différentes et donc les conclusions potentiellement biaisées. Par exemple, l'observation d'une zone aux propriétés différentes au centre de la graine, appelée "innermost inner core" pourrait être lié à la façon dont la moyenne a été prise entre les deux hémisphères (Lythgoe et al., 2014).

Par ailleurs, différents types de dynamique sont envisageables dans la graine. Pour définir un modèle géodynamique, les auteurs utilisent le plus souvent un seul ingrédient physique : croissance différentielle, champ magnétique ou convection thermo-solutale. Des arguments physiques simples peuvent ainsi être extraits, gagnant en compréhension mais perdant en complexité. Les conclusions de ces études sont souvent données en terme de géométrie et d'intensité de l'écoulement obtenu. Ainsi, les cartes de vitesse et de déformation sont directement comparées aux cartes d'observations sismiques.

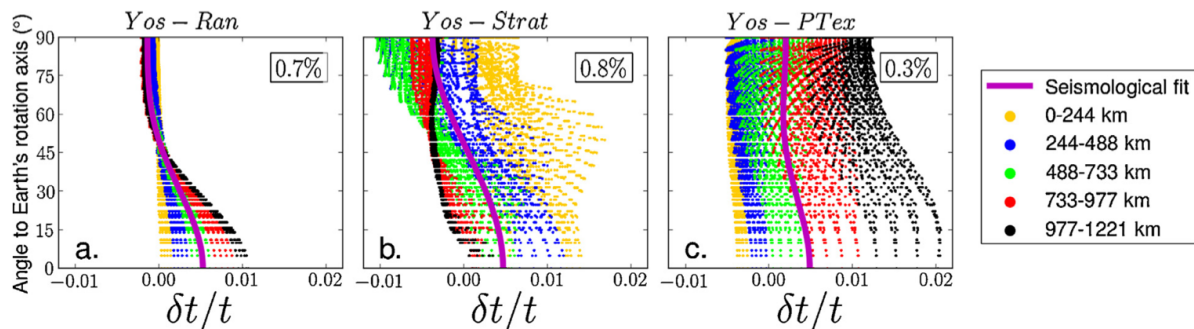
La connaissance des différents paramètres physiques de la graine est de plus incomplète. Certains paramètres, considérés acquis par le passé, se sont révélés ensuite très différents pour des mesures ou calculs plus récents. C'est par exemple le cas de la conductivité thermique : la valeur de référence était donnée pour le noyau à  $36 - 79 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (Stacey & Anderson, 2001; Stacey & Loper, 2007), alors qu'elle est maintenant estimée à  $85-230 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , soit plus de trois fois la valeur haute utilisée auparavant (Gomi et al., 2013; de Koker & Steinle-Neumann, 2012; Pozzo et al., 2012, 2014). L'amélioration des expériences à haute pression permet maintenant l'étude à des pressions presque similaires à celle du noyau terrestre<sup>a</sup>. Pour la graine, cette nouvelle estimation de la

a. jusque 100 GPa pour Gomi et al. (2013), alors que la pression à la base du manteau est d'environ



conductivité thermique, estimée maintenant à  $180\text{-}230\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ , modifie le temps caractéristique de diffusion thermique de l'ordre alors de la centaine de millions d'années ( $r_{ic}^2\rho C_p/6k \approx 0.1\text{ Gyrs}$ ), sensiblement inférieur aux estimations d'âge de la graine. Avec une diffusion aussi efficace, les instabilités de convection liée à la stratification instable thermique ne peuvent se développer que pour des âges de la graine faibles.

Pour autant, de nombreux paramètres physiques sont nécessaires pour proposer des observables sismiques comparables avec les observations à partir d'un modèle géodynamique. Pour l'instant, [Lincot et al. \(2014\)](#) est la seule étude complète qui, partant d'hypothèses géodynamiques, calcule les résidus de temps de trajet d'ondes sismiques (les observables utilisés pour calculer l'anisotropie sismique (figure 3.1)). Pour calculer les résidu sismiques, l'étude utilise les modules élastiques publiés pour le fer de type  $\varepsilon\text{-Fe}$  aux conditions de pression et température de la graine, calculés à partir de modèles expérimentaux et/ou numériques ([Antonangeli et al., 2006](#); [Laio et al., 2000](#); [Mao et al., 1998](#); [Martorell et al., 2013](#); [Sha & Cohen, 2010](#); [Steinle-Neumann et al., 2001](#); [Stixrude & Cohen, 1995](#); [Vočadlo et al., 2009](#)). Les valeurs obtenues par ces études sont toujours débattues et ne présentent pas toutes la même symétrie ou la même orientation de l'anisotropie pour un cristal unique. [Lincot et al. \(2014\)](#) utilise deux modèles principaux, qui permettent d'obtenir des vitesses d'ondes de compression plus rapides selon l'axe a ([Vočadlo et al., 2009](#)) ou l'axe c ([Laio et al., 2000](#)), selon les besoins des modèles d'orientation des grains. La diversité des résultats obtenus par les différentes études des propriétés du fer à haute pression rend difficile une interprétation simple des modèles géodynamiques en terme d'observables sismiques, voir pose question sur la pertinence des modèles de propriétés élastiques des matériaux précédemment publiés.



**Figure 3.1** – Résidu de temps de trajet calculé par [Lincot et al. \(2014\)](#) pour le modèle de [Yoshida et al. \(1996\)](#) et [Deguen et al. \(2011\)](#), considérant ou non une texturation initiale. Les constantes élastiques du modèle sont issues de [Vočadlo et al. \(2009\)](#)

Dans cette partie, je me suis intéressée aux moyens de tester les modèles géodynamiques publiés.

Dans la section 3.2, je présente le travail soumis au journal *Physics of the Earth and Planetary Interiors* portant sur la construction d'un diagramme de régime reprenant et comparant quantitativement tous les modèles d'écoulements globaux dans la graine, en

fonction de la viscosité et de l'intensité et le signe de la stratification.

La section 3.3 est consacrée à une publication dans *Geophysical Research Letters*, qui s'intéresse à une question *a priori* simple : la translation est-elle compatible avec les observations sismiques, et en particulier avec l'existence d'une limite abrupte entre les deux hémisphères ? Nous avons voulu confronter les observations sismiques et un modèle géodynamique, partant du constat que, parfois, ces deux disciplines utilisent des codes et des typologies différentes qui peuvent amener des conclusions biaisées si l'étude n'est pas quantitative. Ce travail a été réalisé dans le cadre de l'école d'été CIDER (*Cooperative Institute for Dynamic Earth Research*) 2012, dont la thématique générale était *Deep Time : How did early Earth become our modern world ?*.

## 3.2 Building a phase diagram for the Earth's inner core

Plusieurs mécanismes à l'origine d'écoulements globaux dans la graine ont été proposés par le passé. On a classifié ces mécanismes en deux sous-groupes, selon que la dynamique est basée sur des instabilités de convection ou sur des forçages extérieurs (voir partie 1.3 et figure 1.13).

Nous avons déjà discuté d'un mécanisme particulier, lié à la force électromagnétique générée par le champ magnétique du noyau liquide, dans la partie 2. Les écoulements liés à des forçages extérieurs sont présents quelque soit la dynamique globale de la graine, et se surimposent les uns aux autres, tandis que les instabilités de convection nécessitent un profil de densité instable pour se développer et donc une histoire thermique et chimique particulière.

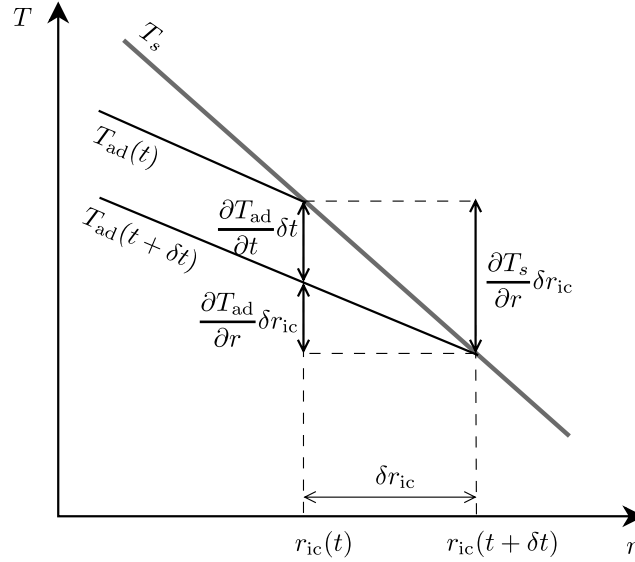
Pour comparer les différents écoulements et obtenir une première estimation des possibles observations, nous avons décidé de nous focaliser sur le taux de déformation instantanée maximal induit par les écoulements. En effet, en comparant le taux de déformation instantanée il est possible de comparer quantitativement deux forçages et d'estimer lequel sera susceptible de prendre le pas et d'orienter l'écoulement global. Utiliser la valeur maximale de ce taux permet de s'affranchir de la géométrie des écoulements. Pour le cas où deux écoulements seraient susceptibles d'engendrer des déformations de même ordre de grandeur, il faudrait alors étudier avec plus d'attention les géométries. L'avantage de cette approche est que, pour la majeure partie des modèles proposés, ce taux de déformation instantané est facilement calculable. Le lecteur est invité à se référer à la section 3.2.4 pour le calcul exact des taux de déformation dans chaque cas. La figure 3.4 répertorie les différents forçages, les géométries et les lois d'échelle des taux de déformation. Le taux de déformation instantané, son amplitude et sa géométrie, permet ainsi d'avoir une première estimation des observables sismiques envisageable, sans pour autant perdre en précision du fait de la trop grande variabilité des propriétés élastiques publiées.

Le premier paramètre intéressant, pour comparer les différents modèles, est la stratification en densité de la graine. En effet, on fonction du signe de cette stratification, on pourra ou non développer des instabilités de convection. De plus, pour les écoulements liés à des forçages extérieurs, l'intensité de la stratification jouera sur la géométrie de l'écoulement, concentrant la déformation dans une couche superficielle dans le cas d'une stratification forte (Buffett & Wenk, 2001; Deguen et al., 2011; Lasbleis et al., submitted). La stratification en densité peut être gouvernée par les effets thermiques ou chimiques, et nous découplons les deux dans cette étude, comme cela a été fait dans la section précédente. La stratification thermique est liée à l'histoire thermique de la Terre, et à deux paramètres principaux : l'âge de la graine et la valeur de la conductivité thermique. Deguen & Cardin (2011) donnent comme paramètre pour estimer au premier ordre la stabilité de la stratification thermique un âge adimensionné défini comme

$$\mathcal{T}_{ic} = \left( \frac{dT_s}{dT_{ad}} - 1 \right)^{-1} \frac{r_{ic}/2u_{ic}}{r_{ic}^2/6\kappa_T}, \quad (3.1)$$

qui compare le temps caractéristique de croissance de la graine  $r_{ic}/2u_{ic}$  avec le temps caractéristique de diffusion thermique  $r_{ic}^2/6\kappa_T$ , où  $\kappa_T$  est la diffusivité thermique.

Le facteur  $dT_s/dT_{ad} - 1$  est lié à la variation temporelle de la température adiabatique  $T_{ad}$ , qui peut s'écrire  $\partial T_{ad}/\partial t = [(\partial T_s/\partial r)_{ic} - (\partial T_{ad}/\partial r)_{ic}]u_{ic}$ .  $dT_s/dT_{ad}$  est le rapport entre la pente de Clapeyron et la pente de l'adiabat, et caractérise le refroidissement séculaire de la graine.



**Figure 3.2** – Schéma du refroidissement de la graine : la frontière de la graine est fixée à la température de fusion  $T_s$  et l'adiabat  $T_{ad}$  est ancré à l'ICB. La croissance de la graine de  $\delta r_{ic}$  diminue la température de  $T_{ad}(t)$  à  $T_{ad}(t + \delta t)$ . On obtient finalement la variation temporelle de la température adiabatique  $\partial T_{ad}/\partial t = [(\partial T_s/\partial r)_{ic} - (\partial T_{ad}/\partial r)_{ic}]u_{ic}$ .

Pour une croissance simple, avec le rayon de la graine proportionnel à la racine du temps, le temps  $r_{ic}/2u_{ic}$  est simplement l'âge de la graine. C'est cet âge adimensionné que nous utilisons pour estimer l'intensité de la stratification. Pour  $\mathcal{T}_{ic}$  plus grand que 1, la stratification est stable, et si un écoulement existe, il est lié aux forçages extérieurs. Dans ce cas, si la stratification est forte, les mouvements radiaux sont susceptibles d'être inhibés et l'écoulement peut être concentré dans une couche sous la surface de la graine. Le critère exact pour lequel la stratification est considérée comme prédominante dépend du forçage extérieur et est développé séparément pour chaque forçage. Quand  $\mathcal{T}_{ic}$  est plus petit que 1, l'écoulement est principalement contrôlé par des instabilités de convection, mais les forçages extérieurs sont toujours susceptibles de contrôler une partie de l'écoulement.

Un autre paramètre clef pour la dynamique de la graine est la viscosité. Les estimations publiées de viscosité pour la graine vont de  $10^{11}$  à  $10^{24}$  Pa.s, avec des arguments de physique des matériaux (Yoshida et al., 1996; Van Orman, 2004; Reaman et al., 2011; Gleason & Mao, 2013) ou d'observations extérieures (Buffett, 1997; Mound & Buffett, 2006; Koot & Dumberry, 2011; Gleason & Mao, 2013; Davies et al., 2014). Ce paramètre est pourtant un des paramètre clef pour déterminer le régime de déformation de la graine. Le temps caractéristique visqueux d'une topographie à la surface de la graine,  $\tau_\eta = \eta/\Delta\rho g_{ic}r_{ic}$ , avec

$\Delta\rho$  la différence de densité entre le solide et le liquide, permet d'estimer la réponse de la surface de la graine à un écart à la position d'équilibre. On définit un nombre sans dimension caractérisant la réaction de l'interface en comparant ce temps visqueux au temps caractéristique de changement de phase  $\tau_\phi$  (Deguen et al., 2013), on obtient alors

$$P = \frac{\tau_\phi g_{ic} r_{ic} \Delta\rho}{\eta}. \quad (3.2)$$

Ce paramètre permet d'estimer les conditions aux limites à appliquer aux différents modèles, imperméables pour  $P \gg 1$  et perméables pour  $P \ll 1$ . Il avait été développé par Deguen et al. (2013) pour explorer la dynamique de convection en fonction des conditions aux limites. L'instabilité de convection de type translation se développe quand  $\mathcal{P}$  est inférieur à 40, ce qui correspond à une viscosité supérieure à  $2.5 \times 10^{18}$  Pa.s. Dans le cas d'une stratification stable, les effets des différents forçages extérieurs dépendent de la viscosité, les exposants des lois d'échelle dépendants du forçage et de la stratification.

Le paramètre de changement de phase  $\mathcal{P}$  a été construit pour étudier les instabilités de convection, et n'a donc pas été pris en compte dans les autres études. Il faut donc être prudent dans l'interprétation, car pour chaque forçage les auteurs ont choisi une condition aux limites particulière. Dans la partie précédente, j'ai étudié le forçage par les forces électromagnétiques, et j'ai pu montrer que ce forçage étant d'autant plus efficace à faible viscosité, il fallait considérer des conditions aux limites de type imperméable, avec  $\mathcal{P} \gg 10^3$ , et ce contrairement aux travaux déjà réalisés (Karato, 1999; Buffett & Bloxham, 2000). Ces conditions aux limites imperméables correspondent grossièrement à une viscosité inférieure à  $10^{17}$  Pa.s. On peut considérer que les forçages efficaces à haute viscosité (croissance préférentielle) doivent avoir des conditions aux limites perméables, et que ceux efficaces à basse viscosité (forçages magnétiques) des conditions imperméables. On peut simplement citer le travail de Takehiro (2010) qui a étudié la dynamique induite par un effet Joule non homogène horizontalement, mais qui considère des conditions aux limites parfaitement perméables. L'étude avec conditions aux limites imperméables a été discutée en conférence, mais non encore publiée et nous avons choisi de n'utiliser que les résultats publiés. Nous pensons que, comme l'effet est inférieur de plusieurs ordres de grandeur aux autres taux de déformation, il serait de toute façon toujours plus faible que les autres forçages, même avec des conditions aux limites différentes.

Finalement, considérant des valeurs raisonnables pour tous les paramètres nous avons calculé le taux de déformation des différents modèles en fonction de la stratification et de la viscosité. Le maximum de ce taux de déformation est présenté sur la figure 3.5. Le taux de déformation  $\dot{\epsilon}$  est adimensionné par  $u_{ic}/r_{ic}$ , et une valeur de 1 correspond donc à une déformation de l'ordre de 1 si appliqué sur l'âge de la graine.

Pour pouvoir expliquer les observations d'anisotropie à symétrie cylindrique, la déformation doit s'appliquer en volume, avec une symétrie cylindrique et avoir un taux de déformation au moins égal à 1. Dans le diagramme de régime 3.5, aucune zone du diagramme ne correspond à tous ces critères. Pour obtenir une déformation suffisamment forte, la viscosité doit être plus faible que  $10^{16-18}$  Pa.s, mais alors la déformation est sus-

ceptible d'être soit concentrée en surface (stratification stable) ou aléatoirement répartie (convection de type panache). Pour obtenir une géométrie cohérente, deux mécanismes sont susceptibles de jouer. La translation permet d'obtenir à la fois une dichotomie Est-Ouest et une déformation avec une symétrie sensiblement cylindrique, mais le taux de déformation est extrêmement faible et s'applique de plus uniquement sur le temps d'une translation, donc une fraction de l'âge de la graine. La croissance équatoriale dans le cas où la stratification n'est pas assez forte pour s'opposer au forçage donne une géométrie intéressante, et est prédominante pour des viscosités supérieures à  $10^{24}$  Pa.s, mais il est plus raisonnable de penser que les taux de déformation sont alors trop faibles pour qu'une texture se mette en place.

Le travail qui suit a été soumis pour publication à *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, en collaboration avec Renaud Deguen (Laboratoire de Géologie de Lyon, ENS Lyon, Université Lyon 1, France).

### 3.2.1 Introduction and rationale

Since the discovery that P-waves in the inner core travel faster along the Earth's spin axis than perpendicular to it (Poupinet et al., 1983), an observation which had soon been interpreted as indicating elastic anisotropy in the inner core (Morelli et al., 1986; Woodhouse JH, 1986), the seismological picture of Earth's inner core has become increasingly complex: the strength and geometry of anisotropy, P-wave velocity, attenuation and anisotropy in attenuation all exhibit radial and longitudinal variations (see Souriau (2007), Tkalčić & Kennett (2008) and Deuss (2014) for reviews). A number of geodynamical mechanisms have been proposed to explain the origin of the structure of the inner core, with suggested mechanisms falling into two broad categories: (i) solidification texturing, whereby the iron crystals acquire a lattice preferred orientation (LPO) as a result of the solidification process (Karato, 1993; Bergman, 1997), and (ii) development of LPO due to deformation associated with creeping flow in the inner core. Solidification texturing is likely to exist, but to what extent the resulting texture is re-worked by deformation within the inner core is unclear (Bergman, 2002; Bergman et al., 2010; Al-Khatatbeh et al., 2013; Bergman et al., 2014; Lincot et al., 2014). We focus here on deformation mechanisms, with the goal of this study being to compare quantitatively the many mechanisms proposed so far in the literature and build a regime diagram giving the dominant mechanism as a function of the values of key control parameters.

It is useful to further subdivide deformation mechanisms between *Rayleigh-Bénard-type convection* (arising from unstable radial thermal or compositional gradients) and what we will call *externally forced mechanisms*, with forcing originating from the outer core. Possible forcing include the effect of the core magnetic field, which can drive a flow either through the direct effect of the Lorentz force (Karato, 1999; Buffett & Bloxham, 2000; Buffett & Wenk, 2001) or through heterogeneous Joule heating of the inner core (Takehiro, 2010), and viscous relaxation of a topography of the inner core boundary (ICB) associated with spatially heterogeneous inner core growth (Yoshida et al., 1996).

The existence of Rayleigh-Bénard convection depends on a strict criterion, namely that a Rayleigh number appropriately defined is larger than a critical value. As a consequence, Rayleigh-Bénard convection can exist only under specific conditions. In contrast, externally forced mechanisms can in principle always exist, but the geometry and strength of the flow and associated amount of stress or strain rate then depend on the physical parameters and state of the inner core.

A meaningful comparison between the different proposed mechanisms requires first the definition of a measure of the strength of the flow. Since we are interested in comparing their ability to produce a seismological observable LPO, possible measures include the instantaneous strain rates or stresses, and cumulative strain. The magnitude of the velocity of the flow is not a good indicator of its ability to produce LPO, which depends on the strength of the spatial gradient of the velocity field (deformation rate) - a uniform flow, with therefore no deformation associated, will not produce any texture. The cumulative



strain could be a good measure for simple flows, but is difficult to estimate and interpret in the case of time-dependent flows. For this reason, we rather focus on the instantaneous strain rate, and consider that the *dominant mechanism* at a given time is the one which induces the highest strain rates, when averaged over the inner core. Note that this will not tell us whether the dominant mechanism has the potential to produce an observable seismic anisotropy. For example, large strain rates would not necessarily lead to a significant large scale anisotropy if the flow is highly time-dependent, as is the case of chaotic thermal convection.

One possible caveat associated with using a global quantity (the averaged strain rate) to discriminate between different mechanisms is that the location of the maximum strain rate may differ among the various deformation mechanisms, which means that it is possible that at a given time different mechanisms are dominant in different parts of the inner core. The complexity of the seismological picture of the inner core may indicate that this indeed the case.

The paper is organized as follow. In section 3.2.2, we discuss under what conditions the inner core has a stable or unstable thermally or compositionally induced density stratification. Scaling laws for the strain rate associated with the various mechanisms proposed in the literature are summarized and discussed in section 3.2.4. The regime diagrams build from these scaling laws are then discussed in section 3.2.5.

### 3.2.2 Thermal and compositional density stratification

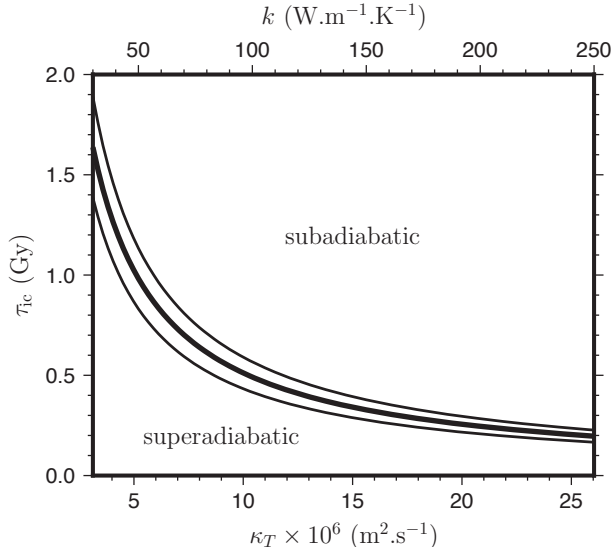
A first key question for inner core dynamics is whether the radial density profile in the inner core resulting from thermal and compositional variations is stable or unstable. This has been studied in details in a number of previous work (Sumita et al., 1995; Yukutake, 1998; Buffett, 2009; Deguen & Cardin, 2011; Gubbins et al., 2013; Labrosse, 2014). We briefly discuss this question here, following the approach developed in Deguen & Cardin (2011) and Deguen et al. (2013).

A necessary condition for thermal convection to exist is that the temperature profile in the inner core is superadiabatic. It is therefore useful to introduce a potential temperature defined as  $\Theta = T(r, \theta, \phi, t) - T_{ad}(r, t)$ , where  $T_{ad}(r, t)$  is the adiabat anchored at the ICB. The temperature profile is superadiabatic if  $\partial\Theta/\partial z > 0$ , and is subadiabatic if  $\partial\Theta/\partial z < 0$ . With this formulation, the heat equation can be rewritten as

$$\frac{D\Theta}{Dt} = \kappa_T \nabla^2 \Theta + S_T(t), \quad \Theta(r_{ic}) = 0 \quad (3.3)$$

where  $\kappa_T$  is the thermal diffusivity (Deguen & Cardin, 2011; Deguen et al., 2013). Though the effective source term  $S_T(t)$  can include radiogenic heating and Joule heating, it is in fact dominated by the contribution of secular cooling (Yukutake, 1998; Deguen & Cardin, 2011). Ignoring radiogenic and Joule heating, the effective heating rate  $S_T(t)$  is given by





**Figure 3.3:** Critical age of the inner core above which a subadiabatic temperature profile is predicted, as a function of  $\kappa$ , for  $dT_s/dT_{ad} = 1.65 \pm 0.1$ . The corresponding value of the thermal conductivity  $k$  assuming  $\rho = 12800 \text{ kg.m}^{-3}$  and  $c_p = 750 \text{ J.kg}^{-1}$  is given on the upper axes.

the difference between the rate of heat conduction along the adiabat and secular cooling :

$$S_T(t) = \kappa_T \nabla^2 T_{ad} - \frac{\partial T_{ad}}{\partial t}. \quad (3.4)$$

The term  $S_T$  is mathematically analog to internal heating. Depending on the sign of  $S_T$ , either an unstable ( $S_T > 0$ ) or stable ( $S_T < 0$ ) thermal stratification can develop in the inner core. The first term on the RHS of Equation (3.4) is negative (the inner core loses heat to the outer core) and the term  $-\frac{\partial T_{ad}}{\partial t}$  is positive, which shows that the inner core can develop a superadiabatic temperature profile only if the cooling rate at the ICB is fast enough compared to thermal conduction.

The effective heating rate  $S_T$  can be written as

$$S_T = 3 \frac{\kappa_T \rho g' \gamma T}{K_S} \left[ \left( \frac{dT_s}{dT_{ad}} - 1 \right) 2 \frac{r_{ic}(t)^2 / 6 \kappa_T}{r_{ic} / u_{ic}} - 1 \right] \quad (3.5)$$

(Deguen & Cardin, 2011), where  $r_{ic}(t)$  is the radius of the inner core at time  $t$ ,  $u_{ic} = dr_{ic}/dt$  is the growth rate of the inner core,  $\rho$  is the density of the inner core,  $g' = dg/dr$  is the radial derivative of the acceleration of gravity,  $\gamma$  the Gruneisen parameter,  $K_S$  the isentropic bulk modulus, and  $dT_s/dT_{ad}$  is the ratio of the Clapeyron slope to the adiabat. The sign of  $S_T$  depends on whether the parameter

$$\mathcal{T}_{ic,t} = \frac{1}{2} \left( \frac{dT_s}{dT_{ad}} - 1 \right)^{-1} \frac{r_{ic} / u_{ic}}{r_{ic}^2 / 6 \kappa_T} \quad (3.6)$$

is larger or smaller than 1.  $\mathcal{T}_{ic,t}$  basically compares the timescale of inner core growth  $r_{ic}(t)/u_{ic}(t)$  at time  $t$  to the timescale of thermal diffusion  $r_{ic}(t)^2/6\kappa_T$  (the factor 6 comes

from the spherical geometry of the inner core), with the factor  $(dT_s/dT_{ad} - 1)$  being a measure of the distance of the initial temperature profile from the adiabat. In the special case where the radius of the inner core grows as the square root of time, the quantity  $6\kappa_T/(r_{ic}u_{ic})$  is constant and equal to  $2\tau_{ic}/\tau_\kappa$ , where  $\tau_{ic}$  is the age of the inner core and  $\tau_\kappa = r_{ic}^2/(6\kappa_T)$  is the timescale of thermal diffusion in the inner core calculated with the current inner core radius. The parameter  $\mathcal{T}_{ic}(t)$  is then constant and equal to

$$\mathcal{T}_{ic} = \left( \frac{dT_s}{dT_{ad}} - 1 \right)^{-1} \frac{\tau_{ic}}{\tau_\kappa}. \quad (3.7)$$

The parameter  $\mathcal{T}_{ic}$ , hereafter called the *non-dimensional inner core age*, is therefore a good indicator of whether the geotherm in the inner core is subadiabatic or superadiabatic: according to Eq. (3.5),  $S_T$  would have been positive (leading to an unstable thermal gradient) for most of inner core history if  $\mathcal{T}_{ic} < 1$ , and negative for most of inner core history if  $\mathcal{T}_{ic} > 1$ . With the recent estimates of inner core thermal conductivity above  $170 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  (de Koker & Steinle-Neumann, 2012; Pozzo et al., 2012; Gomi et al., 2013; Pozzo et al., 2014), giving  $\kappa_T \gtrsim 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ , we find that the inner core can be superadiabatic ( $\mathcal{T}_{ic} < 1$ ) only if the age of the inner core is smaller than  $\simeq 300 \text{ My}$  (see Figure 3.3), which would require a CMB heat flux on the order of  $30 \text{ TW}$  (Labrosse et al., 2001; Nimmo, 2007; Gomi et al., 2013), a very unlikely value. As a comparison, with the much smaller value of thermal conductivity of  $k = 36 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  previously proposed by Stacey & Loper (2007); Stacey & Davis (2008), the requirement for a superadiabatic temperature profile was that  $\tau_{ic} < 1.3 \text{ Gy}$ , which is much more plausible.

A formulation similar to Eq. (3.3) can be found for the compositional field (Deguen et al., 2013). We denote by  $c^s$  and  $c^l$  the light element concentration in the inner and outer core, respectively,  $c_{icb}^{s,l}$  their values at the ICB, and  $\dot{c}_{icb}^{s,l} = dc_{icb}^{s,l}/dt$  their time derivatives at the ICB. The concentration in the liquid and solid sides of the ICB are linked by the partition coefficient  $k = c_{icb}^s/c_{icb}^l$ . Introducing  $C = c - c_{icb}^s$ , the equation of transport of light elements can be written as

$$\frac{DC}{Dt} = \kappa_c \nabla^2 C + S_c, \quad C(r_{ic}) = 0, \quad (3.8)$$

where  $\kappa_c$  is the coefficient of diffusion of the light element and

$$S_c = -\frac{dc_{icb}^s}{dt} = -k \frac{dc_{icb}^l}{dt} - c_{icb}^l \frac{dk}{dt}, \quad (3.9)$$

which is analog to the potential temperature transport equation (3.3). Similarly, the sign of  $S_c$  determines whether an unstable ( $S_c > 0$ ) or stable ( $S_c < 0$ ) compositional stratification would develop in the inner core. In general, the partition coefficient  $k$  can vary with time, either because of dynamical effects or because  $k$  likely varies with pressure, temperature and composition (Alboussière et al., 2010; Deguen & Cardin, 2011; Gubbins et al., 2013), which can lead to a non-monotonic compositional profile in the inner core (Gubbins et al.,

2013; Labrosse, 2014).

One important difference between thermal and compositional stratification comes from the very large difference between thermal and compositional diffusivities. The importance of diffusion can be estimated by comparing the timescales of diffusion of heat or composition, given by  $r_{\text{ic}}^2/(6\kappa_T)$  and  $r_{\text{ic}}^2/(6\kappa_c)$ , to the timescale of inner core growth  $r_{\text{ic}}/u_{\text{ic}}$ , where  $r_{\text{ic}}$  is the radius of the inner core and  $u_{\text{ic}}$  its growth rate. The ratio of the timescales of diffusion and inner core growth gives a thermal Péclet number  $Pe_T = u_{\text{ic}}r_{\text{ic}}/\kappa_T$  and a compositional Péclet number  $Pe_c = u_{\text{ic}}r_{\text{ic}}/\kappa_c$ . These Péclet number quantify the advection due to the growth compared to the diffusion of heat or composition. With a thermal diffusivity  $\kappa_T \simeq 1.7 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  and  $u_{\text{ic}} \sim 10^{-11} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , the diffusion timescale is  $\sim 470 \text{ My}$ , comparable with the age of the inner core, and the thermal Péclet number  $Pe_T = u_{\text{ic}}r_{\text{ic}}/\kappa_T \sim 1$ . In contrast, assuming a compositional diffusion coefficient  $\kappa_c \sim 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  gives a diffusion timescale  $\sim 3 \cdot 10^7 \text{ Gy}$  and a compositional Péclet number  $Pe_c = u_{\text{ic}}r_{\text{ic}}/\kappa_c \sim 10^7 \gg 1$ , which means that the composition is virtually frozen in the inner core.

If the thermal Péclet number is  $\mathcal{O}(1)$ , then diffusion balances heat production, which gives a potential temperature difference  $\simeq S_T r_{\text{ic}}^2/(6\kappa_T)$  between the inner core center and the ICB. The density difference associated with potential temperature variations across the inner core is on the order of  $\delta\rho_T = \alpha_T \rho S_T r_{\text{ic}}^2/(6\kappa_T)$ .  $S_T$  is typically on the order of  $\sim 100 \text{ K/Gy}$ , which gives a thermally induced density difference across the inner core on the order of  $\sim 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

If the Péclet number is large and diffusion ineffective, then the difference in concentration is  $\int_0^t S_c(t') dt'$  with  $t$  the time since inner core nucleation, and the current density stratification is given by  $\delta\rho_c \sim \alpha_c \rho \int_0^{\tau_{\text{ic}}} S_c(t') dt'$ . This can typically be a few  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , similar to the thermal effect.

In what follows, the strength of the stratification will be measured by a Rayleigh number, which we define as

$$Ra_x = \frac{\delta\rho_x g_{\text{icb}} r_{\text{ic}}^3}{\eta\kappa_x} \quad (3.10)$$

where  $\delta\rho_x$  is either  $\delta\rho_T$  in the thermal case or  $\delta\rho_c$  in the compositional case as defined above.

### 3.2.3 Phase change at the inner core boundary

One peculiarity of convection in Earth's inner core is that the inner core boundary is a phase change interface, at which solidification or melting can occur if the ICB is deformed.

The rate of phase change can be shown to be proportional to the dynamic topography (Alboussière et al., 2010), with a timescale of topography erosion by melting or freezing  $\tau_\phi$  inversely proportional to the velocity in the liquid outer core  $u'$ . Considering  $u' \sim$

$10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ , the timescale  $\tau_\phi$  is found to be  $\sim 10^3$  yrs. Comparing this timescale with the timescale of viscous relaxation  $\tau_\eta = \eta/(\Delta\rho g_{\text{icb}}r_{\text{ic}})$  of a topography of wavelength  $\sim r_{\text{ic}}$ , [Deguen et al. \(2013\)](#) defines a non-dimensional number, here called the *phase change number*  $\mathcal{P}$ , as

$$\mathcal{P} = \frac{\tau_\phi}{\tau_\eta}, \quad (3.11)$$

which describes the behavior of the interface. Here  $\eta$  is the viscosity of the inner core,  $\Delta\rho$  is the density jump across the ICB and  $g_{\text{icb}}$  is the gravity at the ICB.

Boundary conditions for the inner core problems are modified by the use of this dimensionless parameter  $\mathcal{P}$ , which prescribes the permeability of the inner core boundary. For  $\mathcal{P} = 0$ , the phase change is instantaneous and the boundary is completely permeable, whereas for  $\mathcal{P} \rightarrow \infty$ , freezing or melting is infinitely slow and the boundary is completely impermeable.

The phase change number  $\mathcal{P}$  is important to determine the dynamics of a convective inner core, leading to either plume convection or translation for respectively large and low  $\mathcal{P}$ . For external forcing, no complete study has been done except for [Lasbleis et al. \(submitted\)](#), where they develop evolution of the flow induced by toroidal magnetic field with the Lorentz force for different value of  $\mathcal{P}$ . Here we will use scaling laws available in the literature, but it is important to notice that, considering the large range of published values for the viscosity, the uncertainties for the value of  $\mathcal{P}$  is also large (for  $\eta = 10^{11-22} \text{ Pa.s}$ ,  $\mathcal{P}$  is obtained between  $10^9$  to  $10^{-2}$ ). As described in [Lasbleis et al. \(submitted\)](#), the dynamics in the inner core can be strongly modified for a given problem by a modification of the phase change number  $\mathcal{P}$ , either for the geometry (leading to closed stream lines for a large  $\mathcal{P}$ ) or the strength of the flow.

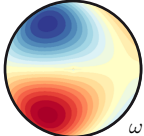
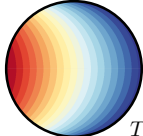
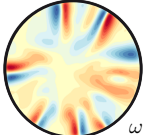
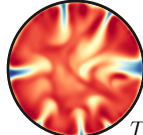
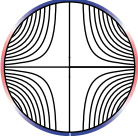

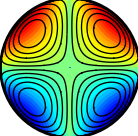

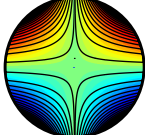
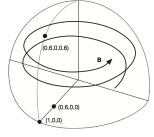
**Table 3.1:** A set of non-dimensional numbers for Earth's inner core dynamics.

Non-dimensional number	
Rayleigh number	$Ra_x = \frac{\delta\rho_x g_{\text{icb}} r_{\text{ic}}^3}{\eta\kappa_x}$
Phase change number	$\mathcal{P} = \frac{\Delta\rho g_{\text{icb}} r_{\text{ic}} \tau_\phi}{\eta}$
Magnetic number	$M = \frac{B_\phi^2 r_{\text{ic}}}{\mu_0 \eta u_{\text{ic}}}$
Péclet number	$Pe_x = u_{\text{ic}} r_{\text{ic}} / \kappa_x$
Inner core growth heterogeneity	$S_2$

### 3.2.4 Dynamical regimes

In this section, we now discuss quantitatively the various published dynamical mechanisms and give scaling laws for the strain rate associated with these mechanisms. We will express the strain rates as functions of a limited number of non-dimensional numbers, summarized in table 3.1, to allow an easy comparison between the different mechanisms. Several of these non-dimensional numbers have thermal and compositional counterparts (*i.e.* Rayleigh and Péclet numbers). In the following, we will use a subscript 'x' denoting either thermal ( $x = T$ ) or compositional ( $x = c$ ) parameters in formulas valid for both thermal and compositional fields.

A summary of the different regimes is presented on Figure 3.4, with scaling laws for strain rates and examples of flow produced by these mechanisms.

unstable stratification	Translation			$\dot{\epsilon} \sim (Ra_x^* \mathcal{P})^{1/2} Pe_x^{-1}$			
	Plume convection			$\dot{\epsilon} \sim 0.25(Ra_x^*)^{0.524} Pe_x^{-1}$			
stable stratification	Differential growth	Neutral stratification		Thermal stratification - low Pe -		Compositional stratification - large Pe -	
		$\dot{\epsilon} \sim S_2$	$\dot{\epsilon} \sim S_2  Ra_T ^{1/3}$	$\dot{\epsilon} \sim S_2  Ra_c / Pe_c ^{2/5}$			
	Magnetic forces	Poloidal Lorentz force	Neutral stratification		Thermal stratification - low Pe -		Compositional stratification - large Pe -
		$\dot{\epsilon} \sim M$	$\dot{\epsilon} \sim M  Ra_T ^{-1/3}$	$\dot{\epsilon} \sim M  Ra_c / Pe_c ^{-2/5}$			
		Joule heating	$\dot{\epsilon} \sim 8\lambda / \kappa Di M  Ra_T ^{-1}$				
Tangential Lorentz force		$\dot{\epsilon} = 0.1 B_z / B_\phi M$					

**Figure 3.4:** Summary of the different mechanisms presented here, with scale laws for the instantaneous strain rates made dimensionless by  $u_{ic}/r_{ic}$ . For unstable stratification, meridional cross sections of the vorticity (left) and temperature (right) fields are presented. For external forcing mechanisms, streamlines (black lines) and intensity of forcing are shown.

### 3.2.4.1 Heterogeneous inner core growth and topography relaxation

Yoshida et al. (1996) have proposed a mechanism based on the idea that the inner core is unlikely to grow in a perfectly spherically symmetric way. The inner core boundary would therefore not exactly coincide with an isopotential surface, and the resulting topographical load would induce horizontal variations in stress within the inner core, which would drive a flow from the high stress regions (below positive topography) to the low stress regions (below negative topography). The process is analog to post-glacial rebound, except that here the topographical load is constantly renewed by solidification. This implies that the system can reach a quasi steady state with a velocity field of magnitude proportional to the amplitude of the solidification rate heterogeneity, provided that the pattern of heterogeneous solidification is maintained on a timescale long compared with the viscous relaxation timescale. For a degree one heterogeneity, the viscous relaxation timescale is  $\sim \eta/(\Delta\rho g_{\text{icb}}r_{\text{ic}})$ , which is at most  $\sim 100$  kyrs if  $\eta \lesssim 10^{22}$  Pa.s, and only about one month if the viscosity is, say,  $\sim 10^{16}$  Pa.s.

Yoshida et al. (1996) argue that the inner core likely grows faster in the equatorial belt than at the poles because of the effect of the Coriolis force on the structure of the flow in the outer core, which is expected to make heat transfer in the outer core anisotropic, with more efficient heat transfer in the directions perpendicular to the Earth's spin axis. Yoshida et al. (1996) therefore assumed a degree 2, order 0 solidification pattern with a solidification rate of the form  $u_{\text{ic}} [1 - S_2 P_2(\cos\theta)]$ , where  $\theta$  is the colatitude and  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  is the Legendre polynomial of degree 2. With this formulation, the ratio between the equatorial and polar growth rates is given by  $(1 + S_2/2)/(1 - S_2)$ . Numerical simulations of thermocompositional convection and dynamo action in the core display solidification rates possibly twice larger at the equator than at the poles (*e.g.* Aubert et al., 2008), which corresponds to  $S_2 = 2/5$ . Additional spatial variations of the solidification rate may be associated with long term control of the mean outer core flow by lateral variations of the heat flux through the core-mantle boundary (Sumita & Olson, 1999; Aubert et al., 2008); this can lead to a deformation pattern in the inner core including degree one and higher degrees components (Deguen, 2012).

In the case of a negligible density stratification, as considered by Yoshida et al. (1996), the flow develops within the whole inner core (see figure 3.4). The velocity simply scales as  $S_2 u_{\text{ic}}$  and varies over a length scale comparable with the inner core radius. The strain rate then scales as

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{\text{ic}}}{r_{\text{ic}}} S_2. \quad (3.12)$$

If the inner core is stably stratified, the flow calculated by Yoshida et al. (1996) remains unaltered by the stratification only if  $|Ra_T| < S_2 Pe_T$  or  $|Ra_c| < S_2 Pe_c$  (see 3.2.7). If the stratification is stronger, then the stable stratification impedes radial motions and the deformation becomes localized in a shear layer below the ICB (see figure 3.4) rather than

developing within the whole inner core. To describe this flow, [Deguen et al. \(2011\)](#) used a control parameter defined as

$$\mathcal{B}_x = \frac{\delta\rho_x g(r_{\text{ic}}) r_{\text{ic}}^2}{\eta u_{\text{ic}}}, \quad (3.13)$$

where  $\delta\rho_x$  is the difference of density across the ICB associated with either thermal or compositional stratification. In terms of the non-dimensional numbers used so far,  $\mathcal{B}_T = Ra_T/Pe_T^2$  and  $\mathcal{B}_c = Ra_c/Pe_c$ .

The scaling laws for the shear layer thickness  $\delta$ , for the horizontal velocity  $u$  in the layer, and for the strain rate depends on whether the stable stratification is of thermal or compositional origin. In the case of a stable compositional stratification, for which the Péclet number is large and diffusion of the stabilizing field is negligible, [Deguen et al. \(2011\)](#) found that the thickness of the shear layer scales as  $\delta \sim r_{\text{ic}}|\mathcal{B}_c|^{-1/5}$ , while the horizontal velocity in the layer scales as  $S_2 u_{\text{ic}}|\mathcal{B}_c|^{1/5}$ . This gives a strain rate

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{\text{ic}}}{r_{\text{ic}}} S_2 \left| \frac{Ra_c}{Pe_c} \right|^{2/5}, \quad (3.14)$$

where here  $Ra_c$  is the Rayleigh number defined in Eq. (3.10) based on the composition scale  $\int_0^t S_c dt'$ . Notice that the diffusivity  $\kappa_c$  present in  $Ra_c$  and  $Pe_c$  cancel out: the strain rate is independent of the compositional diffusivity.

If thermal stratification is considered instead of compositional stratification, the Péclet number is  $\mathcal{O}(1)$  and the scaling given in equation (3.14) does not apply. The correct scaling (demonstrated in 3.2.7) is  $\delta \sim r_{\text{ic}}|Ra_T|^{-1/6}$  and  $u \sim S_2 u_{\text{ic}}|Ra_T|^{1/6}$ , which gives

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{\text{ic}}}{r_{\text{ic}}} S_2 |Ra_T|^{1/3}. \quad (3.15)$$

#### 3.2.4.2 Lorentz force

**Poloidal flow** [Karato \(1999\)](#) investigated the effect of the poloidal part of the Lorentz force, of magnitude  $\sim B_\phi^2/(\mu_0 r_{\text{ic}})$ , where  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$  is the magnetic permeability of free space and  $B_\phi$  is the azimuthal component of the magnetic field at the ICB. Assuming a balance between the Lorentz force and the viscous forces, which are  $\sim \eta u/r_{\text{ic}}^2$ , gives a typical flow velocity  $\sim B_\phi^2 r_{\text{ic}}/(\mu_0 \eta) \sim u_{\text{ic}} M$ . The typical length scale of velocity variations is the inner core radius, and the strain rate is

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{\text{ic}}}{r_{\text{ic}}} M, \quad (3.16)$$

where the number  $M$  is defined as

$$M = \frac{B_\phi^2 r_{\text{ic}}}{\mu_0 \eta u_{\text{ic}}}. \quad (3.17)$$



Karato (1999) assumed fully permeable boundary conditions at the ICB, which corresponds to  $\mathcal{P} \rightarrow 0$  in our formalism. Lasbleis et al. (submitted) found that this is a valid assumption for this flow only if  $\mathcal{P} \lesssim 10$ . If  $\mathcal{P} \gtrsim 10$ , the deformation of the ICB induced by Lorentz forces is not large enough to produce significant melting or freezing, and the boundary condition is close to impermeable. They also determined that the ratio  $u/M$  varies only by a factor 10 between large and low  $\mathcal{P}$ .

Buffett & Bloxham (2000) argued that if the inner core is stably stratified the poloidal part of the Lorentz force would not produce any significant flow, because a large fraction of the Lorentz force would be balanced by the buoyancy forces arising when isocompositional or isothermal surfaces are deformed. Though the Lorentz force cannot be balanced exactly by the buoyancy forces, the residual flow becomes vanishingly small as the strength of the stratification is increased. Lasbleis et al. (submitted) have shown that the effect of stratification is important if  $|Ra_T|/Pe_T \gtrsim M$  or  $|Ra_c|/Pe_c \gtrsim M$ .

When the stratification is strong enough to alter the flow, the effect on the pattern of the flow is found to be similar to what was found in the case of heterogeneous inner core growth: radial flow is impeded and the flow is localized in a shear layer below the ICB. Lasbleis et al. (submitted) found that the scaling laws describing the shear layer thickness and the magnitude of the velocity in the layer depend on the value of the Péclet number. In the small Péclet number limit, corresponding to thermal stratification, the thickness  $\delta$  of the shear layer scales as  $\delta \sim r_{ic}|Ra_T|^{-1/6}$  while the horizontal velocity in the layer scales as  $u \sim u_{ic}M|Ra_T|^{-1/2}$ . This gives

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{ic}}{r_{ic}} \frac{M}{|Ra_T|^{1/3}}. \quad (3.18)$$

In the large Péclet number limit, corresponding to compositional stratification, the thickness of the shear layer scales as  $\delta \sim r_{ic}(|Ra_c|/Pe_c)^{-1/5}$  and  $u \sim u_{ic}M(Pe_c/|Ra_c|)^{3/5}$ . This gives

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{ic}}{r_{ic}} \frac{M}{|Ra_c/Pe_c|^{2/5}}. \quad (3.19)$$

As with heterogeneous growth, the scalings are independent of the compositional diffusivity in the case of compositional stratification.

Notice that the shear layer thickness follows the same scaling as does the layer which develops in the case of a flow forced by heterogeneous inner core growth with stable stratification (see section 3.2.4.1). The key difference is that in the case of heterogeneous growth, the flux of mass across the layer is independent of the stratification strength, since it is set by the magnitude of the solidification rate heterogeneities, so that decreasing the shear layer thickness results in larger horizontal velocities. Increasing the strength of the stratification therefore results in higher velocities and smaller length scales, which together imply a larger strain rate magnitude. In the case of the flow induced by the Lorentz force, the horizontal velocity decreases as the strength of the stratification is increased. The velocity decreases with  $|Ra|$  faster than does the layer thickness, which at the end implies



than that the strain rate magnitude decreases with increasing stratification.

**Azimuthal flow** With the realization that a stable radial stratification would strongly impede the development of a radial flow in the inner core, [Buffett & Wenk \(2001\)](#) turned their attention to the horizontal part of the Lorentz force, which arises from interactions between the toroidal component and  $z$ -component of the magnetic field. This component of the Lorentz force drives a longitudinal flow of magnitude

$$v_\phi = -\frac{1}{10} \frac{B_z(r_{\text{ic}})B_\phi(r_{\text{ic}})}{\mu\eta} \frac{r^3}{r_{\text{ic}}^2} \sin\theta. \quad (3.20)$$

Being horizontal, this flow is not affected by the presence of a density stratification ([Buffett & Wenk, 2001](#)). The strain rate at  $(r, \theta)$  can be calculated as

$$\dot{\epsilon}(r, \theta) = \dot{\epsilon}_{r,\phi}(r, \theta) = \frac{1}{10} \frac{B_z B_\phi(r_{\text{ic}}) r^2}{\mu_0 \eta r_{\text{ic}}^2} \sin\theta. \quad (3.21)$$

The maximum value of  $\dot{\epsilon}$  is reached at the equator at the ICB, and is

$$\dot{\epsilon}_{\text{max}} = \frac{1}{10} \frac{B_z B_\phi(r_{\text{ic}})}{\mu_0 \eta} = \frac{u_{\text{ic}}}{r_{\text{ic}}} \frac{1}{10} \frac{B_z}{B_\phi} M. \quad (3.22)$$

### 3.2.4.3 Joule heating

Another possible effect of the magnetic field comes, as proposed by [Takehiro \(2010\)](#), from the Joule heating associated with the electrical currents  $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} / \mu_0$  diffused in the inner core. The volumetric rate of Joule heating is given by  $Q_j = \mathbf{j}^2 / \sigma = |\nabla \times \mathbf{B}|^2 / (\sigma \mu_0^2)$ , where  $\sigma$  is electrical conductivity. Because  $Q_j$  depends on the magnetic field intensity, spatial variations in magnetic field strength induces spatial variations of heating rate, and the resulting horizontal variations of temperature induces horizontal variations of density which can drive a flow. Regions with a larger than average rate of Joule heating will tend to rise, while regions with low Joule heating will tend to sink.

[Takehiro \(2010\)](#) developed a model for the flow induced by Joule heating in the case of a stable thermal stratification, and found that the typical velocity is given by

$$u \simeq 8 \frac{|Q_j| r_{\text{ic}}}{\rho c_p \delta \bar{\Theta}}, \quad \text{with} \quad |Q_j| = \frac{B_\phi^2}{\mu_0^2 \sigma r_{\text{ic}}^2}, \quad (3.23)$$

where  $\delta \bar{\Theta}$  is the difference of potential temperature between the ICB and the center of the inner core. With  $B_\phi \sim 10^{-2}$  T and  $\sigma = 1.5 \times 10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $|Q_j|$  is about  $10^{-11} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ . The scaling given by Eq. (3.23) can be found with the following simple calculation. Neglecting thermal diffusion, a parcel of inner core material would see its temperature increase at a rate  $|Q_j| / (\rho c_p)$ . The density of the parcel will therefore decrease and the parcel will

tend to rise with a velocity  $u$ . However, if a stable thermal stratification is assumed, the parcel will find itself in warmer – and therefore less dense – surroundings. Viewed from the parcel, the rate of change of the potential temperature around the parcel is given by  $u \partial \bar{\Theta} / \partial r$ . Assuming that the parcel evolves through a succession of equilibrium states at which its temperature remains equal to that of the surrounding (which is a reasonable assumption since this is a creeping flow), equating the rate of temperature increase  $|Q_j| / (\rho c_p)$  of the parcel with  $u \partial \bar{\Theta} / \partial r \sim u \bar{\Theta} / r_{ic}$  gives the velocity scaling given in Eq. (3.23).

The length scale of velocity variations is the radius of the inner core, and the strain rate is therefore

$$\dot{\epsilon} \simeq 8 \frac{|Q_j|}{\rho c_p \delta \bar{\Theta}} \simeq \frac{u_{ic}}{r_{ic}} 8 \frac{\lambda}{\kappa_T} \frac{\alpha_T g_{icb} r_{ic}}{c_p} \frac{M}{|Ra_T|} \quad (3.24)$$

where  $\lambda = 1 / (\sigma \mu_0)$ . With  $\lambda / \kappa \simeq 3 \gg 10^4$ , and the dissipation number  $Di = (\alpha_T g_{icb} r_{ic}) / c_p \simeq 7 \cdot 10^{-2}$ , we have approximately  $\dot{\epsilon} \simeq (u_{ic} / r_{ic}) 2 \cdot 10^4 M / |Ra_T|$ .

The analysis done by Takehiro (2010) cannot be simply transposed to the case of stable compositional stratification. If locally heated, a parcel of inner core material will rise but, in the case of a stable compositional stratification, will have a concentration in light elements lower than the surroundings. The parcel will stop when the effect of composition on density compensate the effect of temperature. Ignoring thermal diffusion, and starting at a time  $t = 0$  with no horizontal temperature variations, the temperature excess in a region of high Joule heating at a time  $t$  is  $\sim |Q_j| t / (\rho c_p)$  and the associated density decrease is  $\sim \alpha_T \rho |Q_j| t / (\rho c_p) \sim \alpha_T |Q_j| t / c_p$ . Now, if a parcel is displaced upward by an amount  $h$ , the compositional difference between the parcel and the environment is  $\sim (\partial c / \partial r) h$  and the density difference arising from the compositional effect is  $\alpha_c \rho (\partial c / \partial r) h$ . Thermal and compositional effects compensate when

$$h \sim \frac{\alpha_T |Q_j|}{c_p \alpha_c \rho (\partial c / \partial r)} t. \quad (3.25)$$

Assuming that the parcel evolves through a succession of equilibrium states at which thermal and compositional effects compensate, the heated part of the inner core would rise at a velocity  $u = dh / dt$  given by

$$u \sim \frac{\alpha_T |Q_j|}{c_p \alpha_c \rho (\partial c / \partial r)}. \quad (3.26)$$

According to equations (3.25) and (3.26) with  $|Q_j| \sim 10^{-11} \text{ W.m}^{-3}$  and  $\alpha_c \rho (\partial c / \partial r) \sim 5 \gg 10^{-6} \text{ kg.m}^{-3}$ , the total displacement in 500 My is  $\sim 500 \text{ m}$ , and the typical velocity is  $\sim 10^{-14} \text{ m.s}^{-1}$ , which is negligibly small compared with the other mechanisms. In addition, the assumptions made in this simple calculations were chosen as to maximize the velocity estimate. Including the effect of thermal diffusion in particular would make the process even slower.

#### 3.2.4.4 Rayleigh-Bénard convection

The last mechanism we consider is Rayleigh-Bénard type convection, *i.e.* natural convection arising from an unstable radial density gradient. This has been first proposed for the inner core by [Jeanloz & Wenk \(1988\)](#), and later studied in more details ([Weber & Machel, 1992](#); [Wenk et al., 2000](#); [Buffett, 2009](#); [Monnereau et al., 2010](#); [Alboussière et al., 2010](#); [Deguen & Cardin, 2011](#); [Cottaar & Buffett, 2012](#); [Mizzon & Monnereau, 2013](#); [Deguen et al., 2013](#)).

In addition to  $\mathcal{P}$ , the style and vigor of convection depends on thermal and compositional Rayleigh numbers. Though thermal and compositional convection, if they exist, are driven respectively by cooling at the ICB and change in composition at the ICB, the two situations are mathematically equivalent to convection driven by an internal buoyancy source, which is either  $S_T$  or  $S_c$  as defined in section 3.2.2. Unlike the mechanisms discussed so far, the relevant definition of the Rayleigh number is then

$$Ra_x^* = \frac{\alpha_x \rho g_{icb} S_x r_{ic}^5}{6 \kappa_x^2 \eta}. \quad (3.27)$$

in both the thermal and compositional cases. In the thermal case, the definition is equivalent to the Rayleigh number used so far and  $Ra_T = Ra_x^*$ . In the compositional case, the definition is different, and  $Ra_c^* \sim Ra_c / Pe_c$ .

**Large  $\mathcal{P}$  limit** If the phase change number  $\mathcal{P} > 30$ , dynamically induced melting and freezing happen at a rate small compared with typical convection velocity within the inner core. The inner core boundary then behaves as an impermeable boundary ([Deguen et al., 2013](#); [Mizzon & Monnereau, 2013](#)) and the regime of convection is not affected by phase change at the ICB. The inner core is unstable if the Rayleigh number is larger than a critical value of 1545.6, above which the first unstable mode has a degree 1 pattern ([Chandrasekhar, 1961](#)). Smaller scales modes appear when the Rayleigh number is increased, a chaotic regime with plumes originating from below the ICB being eventually reached ([Weber & Machel, 1992](#); [Deguen & Cardin, 2011](#); [Mizzon & Monnereau, 2013](#); [Deguen et al., 2013](#)).

[Deguen et al. \(2013\)](#) have developed scaling laws for the velocity, mean temperature, horizontal spacing between plumes, and typical strain rates valid for chaotic internally heated convection in a sphere in statistically steady state. In particular, the typical value of the strain rate is given by

$$\dot{\epsilon} \simeq 0.25 \frac{u_{ic}}{r_{ic}} \frac{Ra_x^{*0.524}}{Pe_x}. \quad (3.28)$$

In principle, the scaling laws found by [Deguen et al. \(2013\)](#) are valid for both the thermal and compositional cases, provided that the Rayleigh number is large enough, and that

the statistically steady state assumption applies. However, since the inner core is growing and the source terms  $S_T$  and  $S_c$  in the heat and composition equations vary with time, whether the inner core can be considered in quasi-steady state is open to question. It has been verified in numerical simulations of thermal convection including inner core growth and core thermal evolution that the scaling laws developed for statistically steady state correctly predict the dynamical state of the inner core (Deguen et al., 2013), but no similar verification has been done in the case of compositional convection.

One way to estimate the approach to quasi-steady state is to compare the timescale needed to reach the mean temperature or composition predicted by the steady-state scaling law, and compare this timescale to the timescale  $r_{ic}/u_{ic}$  of inner core growth. In steady state, the mean potential temperature and composition are given by  $\langle\Theta\rangle = 2.9(S_T r_{ic}^2/6\kappa)Ra_T^*{}^{-0.238}$  and  $\langle C\rangle = 2.9(S_c r_{ic}^2/6\kappa_c)Ra_c^*{}^{-0.238}$  (Deguen et al., 2013). The time needed to reach these mean temperature and composition are  $\langle\Theta\rangle/S_T = 2.9(r_{ic}^2/6\kappa)Ra_T^*{}^{-0.238}$  and  $\langle C\rangle/S_c = 2.9(r_{ic}^2/6\kappa_c)Ra_c^*{}^{-0.238}$ , respectively. The ratio of these timescales to the timescale of inner core growth  $r_{ic}/u_{ic}$  are given by  $0.48Pe_T Ra_T^*{}^{-0.238}$  and  $0.48Pe_c Ra_c^*{}^{-0.238}$ . The Péclet numbers being fixed, the inner core can approach a quasi steady state only if its Rayleigh number is large enough. In the case of thermal convection,  $Pe_T \sim 1$  and the quasi-steady state regime can be reached within Earth's inner core history if  $Ra_T^* \gg (0.48 Pe)^{1/0.238} \sim 10^{-1}$ . In the case of compositional convection,  $Pe_c \sim 10^7$ , and a quasi-steady state regime can be reached if  $Ra_c^* \gg (0.48 Pe_c)^{1/0.238} \sim 10^{28}$ . With  $S_c \sim 10^{-20} \text{ s}^{-1}$ , we obtain  $Ra_c^* \sim (\eta/10^{16} \text{ Pa.s}) \gg 10^{23}$  which, although large, does not allow to reach a quasi-steady state.

**Small  $\mathcal{P}$  limit** When the phase change number  $\mathcal{P}$  is small, phase change at the ICB is fast and profoundly modifies the regime of convection, since a new mode emerges, consisting in a global translation of the inner core with solidification on one hemisphere and melting on the other (Monnereau et al., 2010; Alboussière et al., 2010; Mizzon & Monnereau, 2013; Deguen et al., 2013). At zeroth order in  $\mathcal{P}$ , the motion is a pure translation with velocity  $\frac{\kappa}{r_{ic}} \left(\frac{6 Ra_x^*}{5 \mathcal{P}}\right)^{1/2}$ , with no deformation, and  $\dot{\epsilon} = 0$ . However, since the viscosity of the inner core is finite, deformation is still associated with the translation regime: the horizontal density variations associated with the translation induces a large scale  $l = 1$  convective flow, with a typical velocity of order  $\mathcal{P}$  times the translation velocity (Deguen et al., 2013), which gives a typical velocity  $\sim (Ra_x^* \mathcal{P})^{1/2} \kappa_x / r_{ic}$ . The resulting strain rate is

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_{ic}}{r_{ic}} \frac{(Ra_x^* \mathcal{P})^{1/2}}{Pe_x}. \quad (3.29)$$

This scaling law is valid irrespectively of whether the buoyancy source is of thermal or compositional origin (Deguen et al., 2013).

### 3.2.5 Regime diagram

To compare the deformation due to the different mechanisms, we compare the instantaneous strain rate as described previously. We normalize the strain rate by  $u_{ic}/r_{ic}$ , and thus a value close to 1 corresponds to a cumulative strain of  $\sim 100\%$  over the whole age of the inner core, had the strain rate been constant and continuously applied on the same parcel.

The inner core viscosity is the parameter with the largest uncertainties in this study, with published estimates ranging from  $10^{11}$  to  $10^{22}$  Pa.s (Yoshida et al., 1996; Buffett, 1997; Van Orman, 2004; Mound & Buffett, 2006; Koot & Dumberry, 2011; Reaman et al., 2011, 2012; Gleason & Mao, 2013; Davies et al., 2014). The second key point is, as discussed in section 3.2.2, whether the density profile of the inner core is stable or unstable, since it leads to drastically different dynamical regimes. We will therefore focus on the effect of the viscosity and on the strength and sign of the stratification to construct regime diagrams of the dynamics of the inner core. The relevant measure of the stratification depends on the type of stratification, compositional or thermal, and will be discussed for each type.

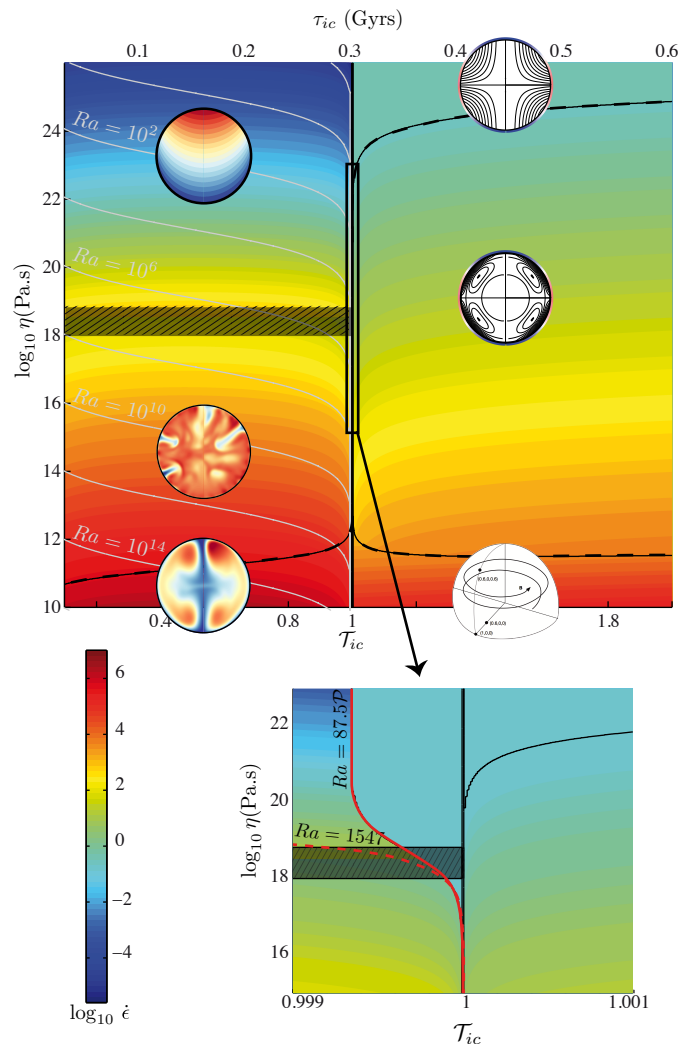
Other parameters for the core are known with large uncertainties or have been recently been discussed, such as the intensity of the magnetic field at the vicinity of the inner core boundary and the thermal diffusivity of solid iron at core pressure, and the effect of varying these parameters will be discussed in the text. Typical values for all the parameters are presented in Table 3.2.

**Table 3.2:** Parameters used in this study.

Parameter	Symbol	Value
Thermal diffusivity <sup>a</sup>	$\kappa_T$	$1.7 \gg 10^{-5} \text{ m.s}^{-2}$
Compositional diffusivity <sup>b</sup>	$\kappa_c$	$10^{-12} \text{ m.s}^{-2}$
Magnetic field strength <sup>c</sup>	$B$	3 mT
Typical time for phase change <sup>e</sup>	$\tau_\phi$	$10^3 \text{ yrs}$
Density jump at the ICB <sup>f</sup>	$\Delta\rho$	$600 \text{ kg.m}^{-3}$
Radius of ICB	$r_{ic}$	1221 km
Density of solid iron <sup>f</sup>	$\rho_s$	$12800 \text{ kg.m}^{-3}$
Acceleration of gravity <sup>f</sup> (at ICB)	$g_{ic}$	$4.4 \text{ m.s}^{-2}$
Thermal expansivity	$\alpha$	$10^{-5} \text{ K}^{-1}$
Heat capacity <sup>g</sup>	$C_p$	$750 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Electrical conductivity <sup>a</sup>	$\sigma$	$1.5 \gg 10^6 \text{ S.m}^{-1}$
Grüneisen parameter	$\gamma$	1.4
Isentropic bulk modulus <sup>f</sup>	$K_s$	1300 GPa
Clapeyron/adiabat slope ratio	$\partial T_{ad}/\partial T_s$	1.65

<sup>a</sup> Gomi et al. (2013) <sup>b</sup> Gubbins & Davies (2013) <sup>c</sup> Gillet et al. (2010) <sup>d</sup> Buffett & Wenk (2001) <sup>e</sup> Deguen et al. (2013) <sup>f</sup> Dziewoński & Anderson (1981) <sup>g</sup> Gubbins et al. (2003)

## 3.2.5.1 Thermal stratification



**Figure 3.5:** Expected instantaneous strain rate as a function of viscosity and age of the inner core. See text for details of the calculations. Dynamical regimes predominant in each zones are indicated. If two dynamics can coexist, the maximum strain rate is used. Zoom on  $\mathcal{T}_{ic} = 1$  is given on the bottom panel, to show the boundary between convection and stable state as defined in [Deguen et al. \(2013\)](#)

As discussed in section 3.2.2, the parameter  $\mathcal{T}_{ic}$  defined in Eq. (3.7) is a good indicator of the thermal state of the inner core, with  $\mathcal{T}_{ic} > 1$  implying a subadiabatic temperature profile and  $\mathcal{T}_{ic} < 1$  implying a superadiabatic temperature profile. We will use this parameter as a measure of thermal stratification, and build regime diagrams in  $(\eta, \mathcal{T}_{ic})$  space. For a given value of  $\mathcal{T}_{ic}$ , the corresponding age of the inner core,  $\tau_{ic}$ , can be calculated from Eq. (3.7), the conversion depending mostly on the assumed value of the thermal conductivity.

Figure 3.5 presents the maximum instantaneous strain rate in the  $(\eta, \mathcal{T}_{ic})$  space. A

zoom on the boundary between stable and unstable stratification is also provided.

**Stable stratification** The stratification is stable whenever the Rayleigh number is lower than the critical Rayleigh number for convection. According to [Deguen et al. \(2013\)](#), the critical Rayleigh number is equal to what [Chandrasekhar \(1961\)](#) found for convection with an impermeable boundary,  $Ra_{\text{limit}} = 1545.6$ , when  $\mathcal{P}$  is large (corresponding to low viscosities), and varies with  $\mathcal{P}$  as  $Ra_{\text{limit}} = 87.5 \mathcal{P}$  when  $\mathcal{P}$  is small (corresponding to large viscosities). This boundary is shown on [Figure 3.5](#) in the second panel. With a thermal conductivity equal to  $180 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , the ratio  $Ra/\mathcal{P}$  reaches 87.5 at  $\mathcal{T}_{\text{ic}} = 0.9992$ , where  $\mathcal{T}_{\text{ic}} = 1$  corresponds here to  $\tau_{\text{ic}} = 300 \text{ kyrs}$ . The boundary is independent of  $\eta$ . In terms of  $\mathcal{T}_{\text{ic}}$ , the onset of convection always appears very close to the limit  $\mathcal{T}_{\text{ic}} = 1$ .

In the case of a stable stratification, all the forced mechanisms described previously are expected to be active in the inner core. The one with the largest instantaneous strain rate is considered as the dominant one for a given set of parameters, and is plotted on [Figure 3.5](#).

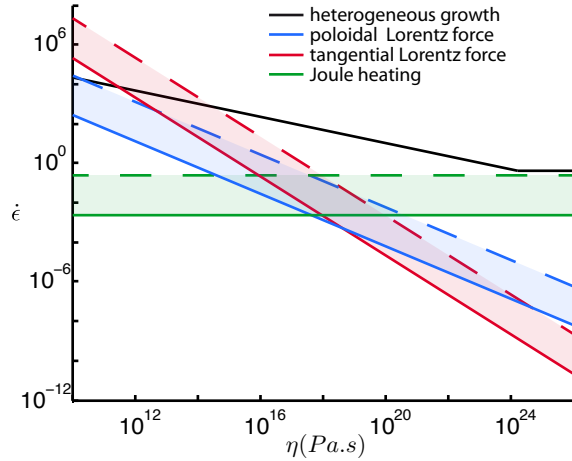
Heterogeneous growth and poloidal Lorentz force will have different behavior if the stratification is strong enough to modify the geometry of the flow or not, whereas azimuthal Lorentz force and Joule heating are similar whatever the stratification is.

For heterogeneous growth model, the neutral stratification scaling laws are used when the stratification is weak, which corresponds to  $S_2 Pe_T / |Ra_T|$  smaller than 1, and reached for large viscosity. For poloidal Lorentz force model, neutral stratification is obtained for large  $M Pe_T / |Ra_T|$ , which is independent of the viscosity and obtained only for dimensionless time close to 1 ( $1 - \mathcal{T}_{\text{ic}} = 2 \cdot 10^{-6}$ ). As discussed in [Lasbleis et al. \(submitted\)](#), this value has been reached in the early history of the inner core, when its radius was about fifty kilometers, which is not relevant here.

[Figure 3.6](#) presents the instantaneous strain rate as a function of the viscosity for the four mechanisms, with  $\mathcal{T}_{\text{ic}} = 1.65$  ( $\tau_{\text{ic}} = 0.5 \text{ Gyrs}$ ,  $k = 180 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ). For a viscosity larger than  $10^{12} \text{ Pa.s}$ , heterogeneous growth is predominant, and becomes unaffected by the stratification for  $\eta > 10^{24} \text{ Pa.s}$ . For reasonable values of the strength of the magnetic field, it seems unlikely that other mechanisms become dominant, even when exploring the early history of the inner core. Because the three other mechanisms have linear dependency in  $M$ , increasing or decreasing the strength of the magnetic field will only slightly shift the three curves. Joule heating is not expected to have importance in the dynamics of the inner core because it is three order of magnitude lower than anything else. Anyway, it is important to notice that deformation can add up and that geometries are different between the mechanisms.

When the Rayleigh number is positive but smaller than the critical Rayleigh number, the flow is the same as for neutral stratification. The maximum instantaneous strain rate in this case is also caused by the preferential equatorial growth, and plotted as well on [Figure 3.5](#), visible on the lower panel.



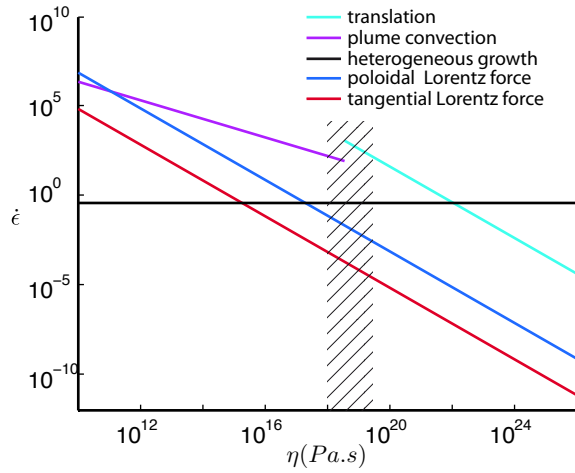


**Figure 3.6:** Stable stratification - Instantaneous strain rate as a function of the viscosity. Colors correspond to different mechanisms. For each mechanisms, upper and lower value corresponds to magnetic field values from  $B = 3 \gg 10^{-3}$  T to  $B = 3 \gg 10^{-2}$  T .

**Unstable stratification** For a Rayleigh number larger than the critical Rayleigh number, convection instabilities are expected to control the flow inside the inner core. Scaling laws for average strain rate in plumes convection and maximum strain rate for secondary flow of the translation have been discussed previously. Unlike stable stratification, these two mechanisms cannot overlap, and the boundary between the two is plotted on Figure 3.5. This boundary was estimated by Deguen et al. (2013) as  $\mathcal{P} = 40$ , which corresponds here to  $\eta = 2.5 \gg 10^{18}$  Pa.s. Close to this value, the scaling laws computed for both regimes are not relevant, and so we use a striped rectangle to identify  $10 < \mathcal{P} < 100$ .

For unstable stratification, external forces are still valid, but they are expected to have a smaller effect than convective instabilities, as visible on Figure 3.7. However, if the velocities due to these external forces are large enough compared to convective velocities, we expect convection to be modified by the forcing. To compute this, we use the scales of velocity for both magnetic forces and preferential growth and compare them with typical velocities of convection. The azimuthal and poloidal magnetic field components promote a flow which velocity scales as  $10^{-2} M u_{ic}$  and from Yoshida et al. (1996) the velocity scales as  $S_2 u_{ic}$ . For plumes convection, the velocity scales as  $0.96 Ra^{0.334} / Pe u_{ic}$ . Magnetic forces will modify the geometry of convection for  $M/Ra^{0.334}$  larger than  $10^2$ , which is for low viscosity ( $\eta < 10^{12}$ ) as seen on the regime diagram of figure 3.5. To obtain a plume velocity low enough compared to  $S_2 u_{ic}$ , the viscosity has to be larger than  $10^{21}$ , which is largely in the translation regime and this scaling for the velocities is not relevant. However, in the translation regime, the velocity is no longer a function of the viscosity and the translation velocity is always higher than the heterogeneous growth velocity. When considering strain rate, the deformation caused by the heterogeneous growth is theoretically larger than the deformation induced by the secondary flow in the translation, but it is unclear if the scaling is still valid considering the high replacement rate in the translation regime. As the inner core media is replaced, the deformation cannot add up and the estimation of the total deformation is thus overestimated with our methods.

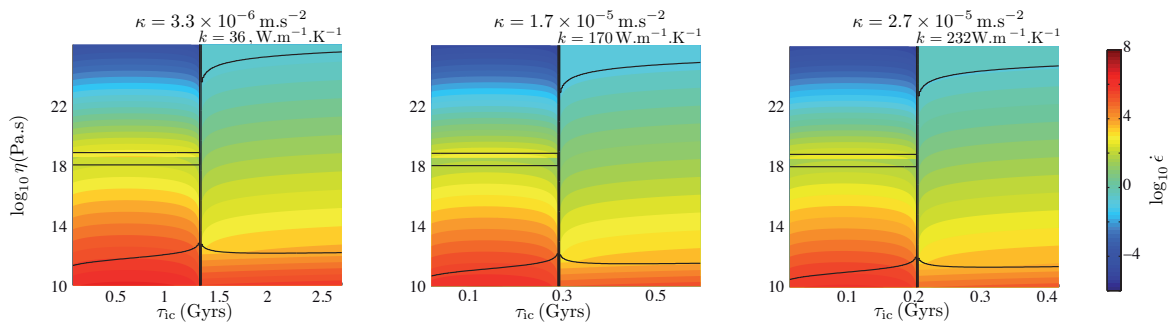




**Figure 3.7:** Unstable stratification - Instantaneous strain rate as a function of the viscosity. Colors correspond to different mechanisms.

**Effect of thermal diffusivity** Figure 3.8 presents the regime diagram computed with three different thermal diffusivities. When decreasing the thermal diffusivity compared to the one used in Figure 3.5, we obtain slightly larger strain rates for the same set of parameters and the viscosity corresponding to the boundaries between the regime increase, except for the one between translation and plume convection. The effect of the magnetic field is thus larger, for both stably and unstably stratified regions, for a smaller thermal diffusivity.

The overall aspect of the diagram is however kept identical when changing the value of the thermal diffusivity. On the other hand, the dimensional implications are greatly modified: to obtain  $\mathcal{T}_{ic}$  equal to 1, dimensional age of the inner core is 1.3 Gyrs for the smallest diffusivity ( $k = 36 \text{ W.K}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ) and less than 0.2 Gyrs for the largest published value. See Figure 3.3 for an the evolution of the critical age of the inner core as a function of the conductivity and section 3.2.2 for discussion.



**Figure 3.8:** Regime diagrams for different thermal diffusivities. Strain rate has been scaled by  $u_{ic}/r_{ic}$ .

**Exploring the inner core history** Knowing the scaling laws for the typical strain rate of the different mechanisms and the time dependence of every dimensionless parameters,

we can infer a typical time evolution of a given point in the diagrams when considering a simple growth scenario as  $r_{\text{ic}}(t) = r_{\text{ic}}(\tau_{\text{ic}})\sqrt{t/\tau_{\text{ic}}}$ .

To look at the evolution with time of the strain rate, we compute regime diagrams for three different radius of the inner core, corresponding to three different times in the inner core's history, on Figure 3.9. It is important to notice that in contrast with Figure 3.5, the strain rate is dimensional in this figure, which explains that when decreasing  $\mathcal{T}_{\text{ic}}$  in the unstably stratified regime the strain rate is actually increasing, but the total strain over the inner core history would be lower. Using dimensional strain rate allows us to compare the regime diagrams of this figure.

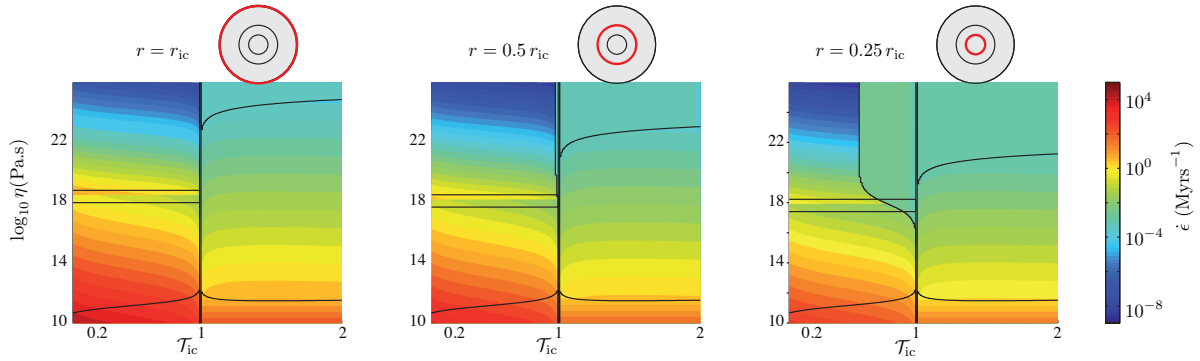
The magnitude of the strain rate is increasing with time for all the regimes shown on the diagrams. The boundaries between the different regimes evolve with time except for the one between magnetic forcing and heterogeneous growth rate with stable stratification.

For thermal stratification, the Rayleigh number is proportional to  $r_{\text{ic}}^6(t)$  and the Hartman number to  $r_{\text{ic}}(t)$ , which means that the boundary between electromagnetic forcing and heterogeneous growth is constant with radius and thus with time. Similarly, because the scaling law for the velocity in the plume convection model scales as  $Ra^{0.334}$  which is close to  $Ra^{1/3}$ , we do not see a difference for where the electromagnetic forces modify the convective flow.

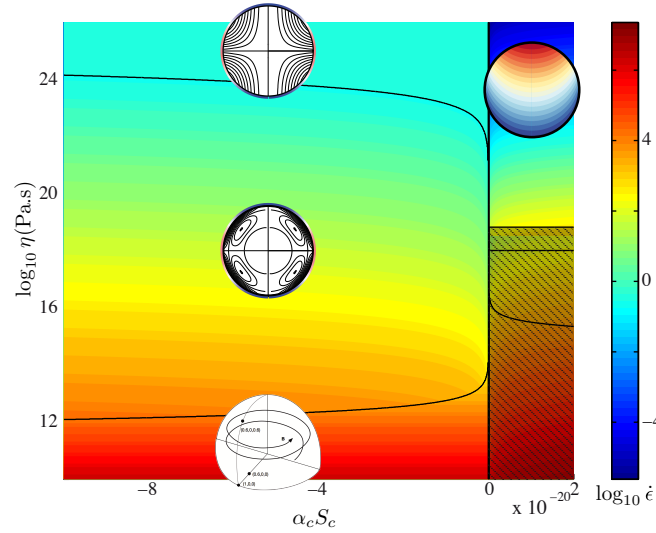
The strain rate produced by Joule heating is proportional to  $r_{\text{ic}}^{-2}(t)$  and for a radius ten times lower, with the same magnetic field, the Joule heating will have an intensity  $10^2$  larger, which is still not enough to be stronger than the preferential growth.

When going back in time, two main effects are noticeable on the diagrams. First, the stable zone for  $\mathcal{T}_{\text{ic}} < 1$  is larger. Even if the set of parameters indicates a translation regime for today's inner core, it is unlikely to happen when the inner core was younger. The exact time when the translation started depends on the ratio  $Ra_T/\mathcal{P}$  which is proportional to  $S(\mathcal{T}_{\text{ic}})r_{\text{ic}}^4(t)$ . Second, for a younger inner core the ratio  $S_2Pe/|Ra_T|$  reaches 1 for a lower viscosity, and thus for a given set of parameter in the heterogeneous growth regime, it is likely to evolve from a non-stratified regime with flow in the whole sphere to a strongly stratified regime with a flow confined in an uppermost layer.

Deguen & Cardin (2011) and Deguen et al. (2013) looked at the evolution of convection for a more realistic growth, considering thermal history as developed by Labrosse (2003). For this scenario, the source term  $S_T$  is a function of time and can evolve from negative (stable) to positive (unstable). It means that the position of the boundary between stable and unstable stratification evolves with time. The boundary remains a vertical line at a constant  $\mathcal{T}_{\text{ic}}$ , whose values increases with time. As discussed in Deguen & Cardin (2011), for such a growth scenario at a given  $\mathcal{T}_{\text{ic}}$  larger than 1, the inner core was thus convecting and the convection stopped when the effective source term  $S_T$  reaches zero.



**Figure 3.9:** Regime diagrams for three different inner core radius ( $r_{ic}(\tau_{ic})$ ,  $0.5r_{ic}(\tau_{ic})$ ,  $0.25r_{ic}(\tau_{ic})$ ), corresponding to three different times in the inner core's history. Strain rate is dimensional to enable comparison between the regime diagrams.



**Figure 3.10:** Regime diagram for compositional stratification. Color intensity corresponds to instantaneous strain rate and boundaries between different regimes are indicated with dashed (coexistence of different regimes) and solid lines (incompatibility between the regimes).

### 3.2.5.2 Compositional stratification

Compositional stratification is scaled with the source term  $S_c = \dot{c}^s(r_{ic})$ , which can be either negative or positive. Values for  $-\alpha_c S_c$  are expected from  $-10^{-19}$  (constant partition coefficient and  $\delta\rho = 10 \text{ kg.m}^{-3}$ ) to  $+10^{-20}$  (from Labrosse (2014) the density variation from oxygen only should be of order  $1 \text{ kg.m}^{-3}$ . Considering that sulfur is stabilizing the stratification, this overestimates all reasonable values).

Figure 3.10 presents instantaneous strain rate in the phase diagram  $(\alpha_c S_c, \eta)$ , with the same approach than for thermal stratification: for stable stratification, the mechanism with the maximum instantaneous strain rate is plotted on the figure, while other mechanisms are still valid but are less likely to texture the inner core, and for unstable stratification, boundary between translation and plume convection is plotted, as well as the region where

the magnetic forces are likely to channel the flow. As discussed previously, scaling laws developed for plume convection should not be used here, as the steady state is not reached for compositional convection. As it is an upper bound of the deformation, we plot it on the regime diagram with a grey shade. In the plume convection regime, the limit for which the magnetic field should channel the flow is plotted also. Because the scaling laws for velocities are a lower bound for the actual velocities in compositional convection, it is actually likely to underestimate the limit and gives a higher viscosity.

### 3.2.6 Discussion and conclusion

In this paper, we have developed regime diagrams based on the instantaneous strain rate associated with each published mechanisms. For a given age and viscosity of the inner core, the flow geometry and the intensity of strain rate can be inferred from the diagrams. The regime diagrams can be used to determine which regions in parameter space are likely to correspond to Earth's inner core by comparing the flow geometry and/or the intensity of strain to seismic observations. For the mechanisms discussed here, compositional or thermal stratification have qualitatively similar effects. The scaling laws for strain rates are different, but for the range of parameters suitable for the Earth's inner core, they both lead to strain rates values of the same order of magnitude.

Developing a significant texture requires that the accumulated strain is at least of order  $\mathcal{O}(1)$ . Whether this is likely or not can be roughly estimated from the regime diagrams shown in Figures 3.5 and 3.10, which show the strain rate normalized by  $u_{ic}/r_{ic}$ , *i.e.* the dimensional strain rate multiplied by the timescale of inner core growth  $r_{ic}/u_{ic}$ . This gives an estimate of the cumulative strain over the inner core history, had the strain rate remained constant during this time.

Most of the regions of the diagram are expected to produce significant textures when considering the intensity of the strain rate, except for the highest viscosity regions in the translation regime. Unlike other mechanisms, translation induces very large velocities, implying a high replacement rate of the inner core media. The strain rate associated with the secondary flow is low, which together with the short residence time in the inner core implies a probably small amount of accumulated strain. Translation is a good candidate to produce an East-West dichotomy (Monnereau et al., 2010; Alboussière et al., 2010; Bergman et al., 2010; Geballe et al., 2013) but cannot produce by itself a texture strong enough to explain the global anisotropy. The regions of the regime diagram with the highest strain rates are found for the lowest viscosity. The instantaneous strain rates in the plume convection regime are large but unlikely to add up because the flow is unsteady. Lorentz force can channel the flow if the viscosity is low enough and can organize the deformation such as the accumulated strain is large enough to be detected by seismic studies.

When considering only the flow geometry, most of the mechanisms presented here are unlikely to produce the N-S oriented cylindrical symmetry revealed by seismology.

Both heterogeneous growth and poloidal Lorentz forcing show such a symmetry if the stratification is weak (Karato, 1999; Yoshida et al., 1996). In the case of a strong stratification (Deguen et al., 2011; Buffett & Bloxham, 2000; Lasbleis et al., submitted), the flow is confined in an upper layer and unlikely to produce the adequate geometry. The flow induced by the azimuthal Lorentz force may seem unlikely to produce the expected geometry because deformation is restricted to the uppermost inner core, but the cumulative strain in fact increases with depth and reaches a maximum at an intermediate depth (Deguen, 2012). In the case of plumes convection, the flow is unsteady and the strain can not add up. If the viscosity is lower than  $\sim 10^{12}$  Pa.s, magnetic forcing can channel the flow, thus plausibly giving a strong cylindrical anisotropy.

At first order, to obtain a flow strong enough to texture the inner core and obtain the strong anisotropy visible in seismic data with the mechanisms we have discussed here, we need both a strong strain rate and the adequate geometry. This seems to require

- either a stable stratification and a viscosity large enough to reach the weakly stratified heterogeneous growth regime, which could give a flow with the adequate geometry (Yoshida et al., 1996). However, the timescale of texture development is similar to the age of the inner core;
- or a weakly viscous inner core, either stably or unstably stratified, for which the viscosity is low enough for the Lorentz force to be dominant and impose a N-S axisymmetric geometry.

Our regime diagrams still provide only a simplified view of Earth’s inner core dynamics. For example, evaluating the effect of thermal and compositional stratification independently is artificial, and ignores the possibility of having double diffusive convection (Deguen & Cardin, 2011; Cottaar & Buffett, 2012; Pozzo et al., 2014). Also, we have limited our analysis to mechanisms with scaling laws for the strain rate available in the literature, and thus our regime diagrams are probably incomplete. In particular, the effect of Joule heating when the inner core is unstable against convection has not yet been investigated, but may be of importance (Takehiro, 2010).

Finally, though the order of magnitude of the cumulative strain is a good indicator of the likelihood of developing a significant texture, predicting travel time residuals requires simulating the texture development process and microscopic properties of iron at inner core pressure and temperature (Lincot et al., 2014).

### 3.2.7 Appendices

---

In this appendix, we derive scaling laws describing the flow forced by heterogeneous growth of the inner core in the case of a stable thermal or compositional stratification. Scaling laws have already been derived by Deguen et al. (2011) in the compositional case, for which the Péclet number is large, but not in the thermal case, for which the Péclet number is on the order of 1 and diffusion is important. In both cases, the stable stratification impedes the development of a strong radial flow because of the buoyancy

forces which arise when surface of constant temperature or composition are deformed, and the flow is confined in a shear layer below the ICB. In what follows, we will denote by  $\delta$  the thickness of this shear layer,  $u_r$  and  $u_\theta$  the radial and latitudinal velocities, and look for scaling laws for these quantities.

We start with the equations of conservation of vorticity assuming axisymmetry around Earth's spin axis (obtained by taking the curl of the Stokes equation), heat, and mass, which we write as

$$\mathbf{0} = -\alpha_x \rho g' \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \eta \nabla^2 \omega_\phi \quad (3.30)$$

$$\frac{D\chi}{Dt} = \kappa_x \nabla^2 \chi + S_x, \quad (3.31)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.32)$$

where  $\chi$  denotes either the potential temperature  $\Theta$  or modified composition  $C = c - c_{\text{icb}}^s$  as defined in section 3.2.2, and  $x$  denotes either thermal ( $x = T$ ) or compositional ( $x = c$ ) parameters,  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta)$  denotes the radial and latitudinal components of the velocity field,  $\omega_\phi \mathbf{e}_\phi = \nabla \times \mathbf{u}$  the vorticity, with  $\mathbf{e}_\phi$  is unit vector along the longitudinal direction.

We scale lengths by  $r_{\text{ic}}$ , time by  $\tau_{\text{ic}}$ , velocity by  $\kappa_x/r_{\text{ic}}$ , and  $\chi$  by  $\Delta\chi$ .

Assuming for simplicity that  $\Delta\chi$  is constant, the system of equations (3.30)-(3.32) is rewritten in non-dimensional form as

$$\mathbf{0} = -Ra_x \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \nabla^2 \omega_\phi \quad (3.33)$$

$$\xi_x \frac{\partial \chi}{\partial t} = \nabla^2 \chi - (\mathbf{u} - Pe_x \mathbf{r}) \cdot \nabla \chi + \mathcal{S}_x, \quad (3.34)$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (3.35)$$

where  $\mathcal{S}_x = S_x \tau_{\text{ic}} / \Delta\chi$  and  $\xi_x = r_{\text{ic}}^2 / (\kappa_x \tau_{\text{ic}})$ .  $\xi_x$  is related to  $Pe_x$ . For example,  $\xi_x = 2Pe_x t$  if the radius of the inner core increases as the square root of time. The term  $Pe_x \mathbf{r} \cdot \nabla \chi$  in Eq. (3.34) comes from the time dependence of  $r_{\text{ic}}$  (inner core growth), and represents radially inward advection relative to the ICB (*e.g.* Deguen & Cardin, 2011). With this scaling, the non-dimensional inner core growth rate is given by  $u_{\text{ic}} r_{\text{ic}} / \kappa_x$ , which is the Péclet number  $Pe_x$ .

We write  $\chi = \bar{\chi} + \chi'$  with  $\bar{\chi}(r, t)$  the potential temperature or composition field for  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .  $\bar{\chi}$  is solution of

$$\xi_x \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = \nabla^2 \bar{\chi} + Pe_x \mathbf{r} \cdot \nabla \bar{\chi} + \mathcal{S}_x. \quad (3.36)$$

Subtracting Eq. (3.36) to (3.31), and assuming  $\chi' \ll \bar{\chi}$ , we obtain

$$\xi_x \frac{\partial \chi'}{\partial t} = \nabla^2 \chi' - u_\theta \frac{\partial \chi'}{\partial \theta} - u_r \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial r}. \quad (3.37)$$

In what follows, we will look for steady state scaling laws and we will therefore assume

that  $\xi_x \partial \chi' / \partial t = 0$ .

The continuity equation implies  $u_\theta \sim u_r / \delta$ . The radial velocity is imposed by the boundary condition, and is on the order of  $u_r \sim S_2 u_{ic} \sim S_2 Pe_x$ , which gives

$$u_\theta \sim \frac{S_2 Pe_x}{\delta}. \quad (3.38)$$

In the vorticity equation, the two terms must balance when the effect of stratification is important: starting with no perturbations,  $\chi' = 0$ , surfaces of constant  $\chi$  are deformed by the flow induced by the boundary conditions. This induces an increase of  $\chi'$  and of the buoyancy force which eventually balances the flow if the stratification is strong enough. With the vorticity  $\omega_\phi \sim u_\theta / \delta \sim S_2 Pe_x / \delta^2$ , we therefore have

$$\frac{S_2 Pe_x}{\delta^4} \sim |Ra_x| \chi'. \quad (3.39)$$

The scaling of the different terms of the potential temperature/composition equation depends on whether a thermal or compositional stratification is assumed, and will consider both cases separately, starting with the thermal stratification case.

**Boundary between weak and strong stratification regimes** The effect of the stratification is negligible if the buoyancy term  $|Ra_x| \partial \chi' / \partial \theta$  cannot balance the viscous forcing term. With  $\chi'$  being necessarily smaller than the temperature difference across the inner core, which is  $\mathcal{O}(1)$  in non-dimensional units in the thermal case, the buoyancy term magnitude is  $\lesssim |Ra_x|$ . The viscous term  $\nabla^2 \omega_\phi \sim \omega_\phi / \delta^2 \sim u_\theta / \delta^3 \sim S_2 Pe_x / \delta^4$  being larger than  $S_2 Pe_x$ , the effect of stratification would therefore be negligible if  $S_2 Pe_x > |Ra_x|$ .

### 3.2.7.1 Small $Pe$ limit – thermal stratification

**Scaling of the heat equation terms** With the radial gradient of  $\Theta'$  scaling as  $\Theta' / \delta$ , the horizontal gradient of  $\Theta'$  scaling as  $\Theta'$ , and  $\partial \bar{\Theta} / \partial r \sim 1$ , the different terms of the potential temperature perturbation equation then scale as follows :

$$0 = \underbrace{\nabla^2 \Theta'}_{\sim \Theta' / \delta^2} - \underbrace{u_\theta \frac{\partial \Theta'}{\partial \theta}}_{\sim u_\theta \Theta'} - \underbrace{u_r \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial r}}_{\sim u_r} + \underbrace{Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \Theta'}_{\sim Pe \Theta' / \delta}. \quad (3.40)$$

With  $\Theta' \sim S_2 Pe / (Ra \delta^4)$  from Eq. (3.39),  $u_r \sim S_2 Pe_T$  and  $u_\theta \sim S_2 Pe_T / \delta$ , we obtain

$$0 = \underbrace{\nabla^2 \Theta'}_{\sim S_2 Pe / (Ra \delta^6)} - \underbrace{u_\theta \frac{\partial \Theta'}{\partial \theta}}_{\sim S_2 Pe \Theta' / \delta} - \underbrace{u_r \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial r}}_{\sim S_2 Pe} + \underbrace{Pe \mathbf{r} \cdot \nabla \Theta'}_{\sim Pe \Theta' / \delta}. \quad (3.41)$$

The advection term must be balanced by either the diffusion term  $\nabla^2\Theta'$ , or by the inner core growth term  $Pe_T \mathbf{r} \cdot \nabla\Theta'$  (the last term is always smaller than  $Pe_T \mathbf{r} \cdot \nabla\Theta'$  since  $\delta < 1$ ). Comparing the diffusion term, which is  $\sim S_2 Pe_T / (|Ra_T| \delta^6)$ , with the inner core growth term, which is  $S_2 Pe_T^2 / (|Ra_T| \delta^5)$ , we find that the effect of inner core growth is negligible if  $Pe_T \ll 1/\delta$ .

Neglecting the term in  $Pe_T$ , the equation for the perturbation of the potential temperature writes

$$0 = \underbrace{\nabla^2\Theta'}_{\sim S_2 Pe_T / (|Ra_T| \delta^6)} - \underbrace{u \frac{\partial\Theta'}{\partial\theta}}_{\sim S_2 Pe_T \Theta' / \delta} - \underbrace{w \frac{\partial\bar{\Theta}}{\partial r}}_{\sim S_2 Pe_T}. \quad (3.42)$$

We now assume that the horizontal advection term is small compared to the vertical advection term, which requires that  $\Theta'/\delta = S_2 Pe_T / (|Ra_T| \delta^5) \ll 1$ , or that  $\delta \gg (S_2 Pe_T / |Ra_T|)^{1/5}$  (self-consistency will be checked later). Balancing vertical advection and diffusion, we obtain

$$\delta \sim |Ra_T|^{-1/6}. \quad (3.43)$$

With  $u_\theta \sim S_2 Pe_T / \delta$ , this yields

$$u_\theta \sim S_2 Pe_T |Ra_T|^{1/6} \quad (3.44)$$

and

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{u_\theta}{\delta} \sim S_2 Pe_T |Ra_T|^{1/3}. \quad (3.45)$$

The dimensional strain rate is given by

$$\dot{\epsilon} \sim \frac{\kappa_T}{r_{ic}^2} S_2 Pe_T |Ra_T|^{1/3} \sim \frac{u_{ic}}{r_{ic}} S_2 |Ra_T|^{1/3}. \quad (3.46)$$

The requirement that  $\delta \gg (S_2 Pe_T / |Ra_T|)^{1/5}$  for horizontal advection to be small compared with vertical advection requires  $|Ra_T| \gg (S_2 Pe_T)^{6/11}$ , which is verified here since  $Pe_T$  and  $S_2$  are both on the order of 1, while  $|Ra_T|$  is typically  $\gg 1$ .

Using the scaling found for  $\delta$ , the requirement that  $Pe_T \ll 1/\delta$  for inner core growth to be of negligible effect is written as

$$Pe_T \ll |Ra_T|^{1/6}. \quad (3.47)$$



---

**3.2.7.2** Large  $Pe$  limit – compositional stratification
 

---

**Scaling of the terms of the composition transport equation** The diffusion term is now assumed to be negligible, which gives

$$0 = - \underbrace{u_\theta \frac{\partial C'}{\partial \theta}}_{\sim S_2 Pe_c C' / \delta} - \underbrace{u_r \frac{\partial \bar{C}}{\partial r}}_{\sim S_2 Pe_c} + \underbrace{Pe_c \mathbf{r} \cdot \nabla C'}_{\sim Pe_c C' / \delta}. \quad (3.48)$$

Assuming again that the horizontal advection term is small compared to the vertical advection term, the main balance is between the second and third terms, which gives

$$S_2 Pe_c \sim \frac{Pe_c C'}{\delta}. \quad (3.49)$$

Using  $C' \sim S_2 Pe_c / (\delta^4 Ra_c)$  from Eq. (3.39), we obtain

$$\delta \sim (|Ra_c| / Pe_c)^{-1/5}. \quad (3.50)$$

With  $u_\theta \sim S_2 Pe_c / \delta$ , this yields

$$u_\theta \sim S_2 Pe_c (|Ra_c| / Pe_c)^{1/5} \sim S_2 Pe_c^{4/5} |Ra_c|^{1/5} \quad (3.51)$$

and

$$\dot{\varepsilon} \sim \frac{u_\theta}{\delta} \sim S_2 Pe_c (|Ra_c| / Pe_c)^{2/5} \sim S_2 Pe_c^{3/5} |Ra_c|^{2/5}. \quad (3.52)$$

The dimensional strain rate is given by

$$\dot{\varepsilon} \sim \frac{u_{ic}}{r_{ic}} S_2 (|Ra_c| / Pe_c)^{2/5}, \quad (3.53)$$

as found by [Deguen et al. \(2011\)](#).

Using the scalings found for  $\delta$  and  $u_\theta$ , the requirement that  $\delta \gg (S_2 Pe_c / |Ra_c|)^{1/5}$  for the vertical advection term to dominate over the horizontal advection term requires that  $S_2 \ll 1$ .

### 3.3 Sharp Hemisphere Boundaries in a Translating Inner Core

---

*Le document qui suit a été publié dans le journal Geophysical Research Letters le 16 mai 2013.*

*Z.M. Geballe, M. Lasbleis, V.F. Cormier, E.A. Day (2013) Sharp hemisphere boundaries in translating inner core, Geophysical Research Letters, 40, 9, 1719-1723, DOI :10.1002/grl.50372.*

Pour des soucis de copyright, la version publiée a été retiré de cette version du manuscrit. Le lecteur est invité à se référer à la version disponible sur le site du journal *Geophysical Research Letters*.



# 4

## ÉQUILIBRES SOLIDE-LIQUIDE ET ÉCOULEMENTS BIPHASIQUES

---

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Équations biphasiques pour la dynamique de la graine</b>	<b>131</b>
4.1.1	Équilibre de phase - thermodynamique classique	131
4.1.1.1	Phases pures	131
4.1.1.2	Mélanges binaires et plus	132
4.1.2	Mise en équations - théorie générale biphasique	132
4.1.2.1	Notations	135
4.1.2.2	Conservation de la masse	136
4.1.2.3	Conservation de la quantité de mouvement	137
4.1.2.4	Conservation de l'énergie	138
4.1.2.5	Équation pour l'entropie	139
	Fluide binaire	141
4.1.2.6	Équation pour la température	143
4.1.3	La graine : fluide biphasique et binaire	144
4.1.4	Conclusion	146
<b>4.2</b>	<b>F-layer : formation et stabilité de neige de fer solide</b>	<b>147</b>
4.2.1	Context of the study	147
4.2.2	Model of iron snow	149
4.2.2.1	Velocity of particles in a density gradient	150
4.2.2.2	Equation of state	151
4.2.2.3	Conservation equations	151
	Mass conservation	152
	Light elements conservation	152
	Energy conservation	152
4.2.2.4	Horizontal layer	153
	Equations	153
	Dimensionless equations	154
	Boundary condition at $h = 0$ and $h = 1$	155
	Approximation $V_{eff} \ll V_s$	155
	Equilibrium melting	155
4.2.2.5	Comparison with seismic data	156

---

4.2.3	Results for an horizontal layer . . . . .	157
4.2.3.1	Parameter dependencies . . . . .	157
4.2.3.2	Porosity and density profile . . . . .	158
4.2.3.3	Estimation of the Stokes velocity . . . . .	164
4.2.4	Conclusion . . . . .	165

---

La graine est le produit de la cristallisation lente de l'alliage de fer, nickel et autres éléments légers que constitue le noyau externe. Cette cristallisation est liée au refroidissement global de la Terre depuis sa formation, et à la forme du diagramme de phase de l'alliage.

Dans cette partie, nous allons étudier comment prendre en compte la cristallisation d'un liquide binaire pour la dynamique de la graine. Je présenterai d'abord le développement théorique des équations de la dynamique associées à un fluide binaire biphasique, puis l'hypothèse de neige pour expliquer l'existence d'une zone anormale stratifiée stable en bas du noyau liquide.

## 4.1 Équations biphasiques pour la dynamique de la graine

### 4.1.1 Équilibre de phase - thermodynamique classique

*[...] thermodynamics sets limits (inequalities) on permissible physical processes, and it establishes relationships among apparently unrelated properties. [...] In brief, thermodynamics is the study of the restrictions on the possible properties of matter that follow from the symmetry properties of the fundamental laws of physics.*

— Herbert H. Callen, *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, 1985

La thermodynamique étudie les propriétés statistiques de grands systèmes en équilibre. On va ici s'intéresser ici à un équilibre particulier, l'équilibre entre deux phases ou plus, du point de vue de la thermodynamique classique seule, c'est à dire en considérant des systèmes isolés.

#### 4.1.1.1 Phases pures

On appelle phase pure un milieu homogène en propriétés physiques et qui contient un seul élément chimique. Les propriétés physiques de la phase pure sont définies totalement par la connaissance de deux propriétés thermodynamiques, classiquement la pression et la température. Un milieu non homogène peut être composé de deux phases pures au contact, ce qui implique l'existence d'une relation supplémentaire entre les propriétés thermodynamiques du milieu. Dans ce cas on a alors trois relations entre les propriétés thermodynamiques des deux milieux (Landau & Lifshitz, 1980) :

- l'égalité des températures  $T_1 = T_2 = T$  ;
- l'égalité des pressions  $P_1 = P_2 = P$  ;
- l'égalité des potentiels chimiques  $\mu_1(P, T) = \mu_2(P, T)$ .

La relation de Gibbs pour les phases donne le nombre de degré de libertés  $f$  associé au nombre  $M$  de phases comme  $f = 3 - M$ . Donc la coexistence de plus de trois phases est impossible, et pour trois phases on prédit la coexistence en un unique point.

Comme l'entropie molaire  $s$  et le volume molaire  $v$  de chacune des phases peut s'obtenir de la connaissance du potentiel chimique avec  $(\partial\mu/\partial T)_P = s$  et  $(\partial\mu/\partial P)_T = v$ , on obtient de l'égalité des potentiels chimiques que

$$\frac{dP}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{v_1 - v_2}, \quad (4.1)$$

qui est appelée relation de Clapeyron et donne la pente de la température de changement de phase dans le diagramme Pression-Température.

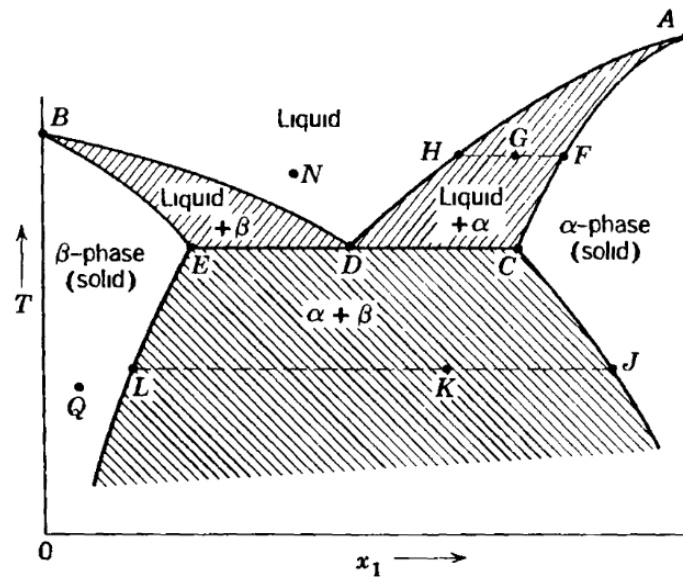
#### 4.1.1.2 Mélanges binaires et plus

Pour construire un diagramme de phase d'un mélange de deux composants chimiques, dit mélange binaire, on utilise encore l'équilibre des potentiels chimiques, qui sont fonctions de trois paramètres, la température  $T$ , la pression  $P$  et la composition chimique  $x$  (dans le cas d'un fluide binaire, la connaissance de l'une des deux concentrations donne la connaissance de chacune des deux concentrations car la somme des deux concentrations massique vaut l'unité). La relation de Gibbs nous donne maintenant que la zone de coexistence entre les deux phases n'est pas simplement une ligne dans le diagramme  $(P, T)$  mais un volume dans le diagramme  $(P, T, x)$ . Pour des raisons purement graphiques, on représente la plupart du temps le diagramme de phase d'un fluide binaire soit à une pression donnée, dans le diagramme  $(T, x)$  ou à une température donnée dans le diagramme  $(P, x)$ . Dans la vie de tous les jours, la pression est égale à la pression atmosphérique, et c'est la température que l'on fait varier (en chauffant ou refroidissant de l'eau par exemple), donc on utilisera le plus souvent la représentation à une pression donnée, comme c'est le cas par exemple pour le diagramme schématique représenté sur la figure 4.1. Cet exemple de diagramme représente les principales caractéristiques attendues d'un diagramme de phase binaire : en grisé les zones de coexistence de deux phases, et en blanc les zones où seule une phase existe. Dans ce cas particulier, les deux phases solides sont miscibles pour certaines température et composition (grossièrement, sous le segment EC). Le point D est le point dit eutectique. Lors que l'on fait fondre un solide de composition entre E et C, le premier liquide formé aura la composition du point D. Au contraire, lorsque l'on fait cristalliser un liquide de n'importe quelle composition, le solide formé sera  $\alpha$  ou  $\beta$  selon que l'on est à gauche ou à droite du point D.

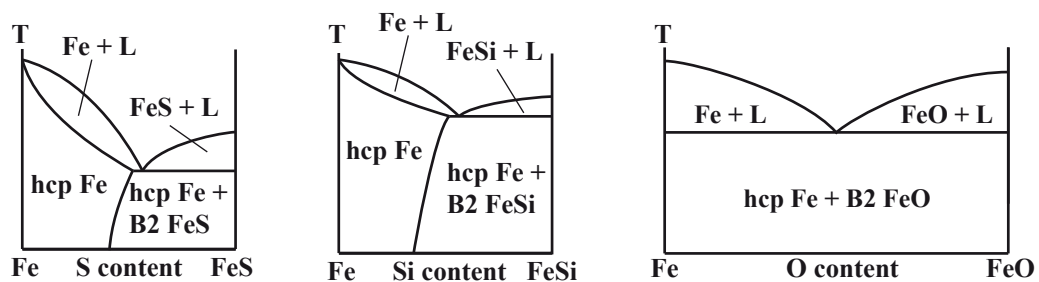
#### 4.1.2 Mise en équations - théorie générale biphasique

La thermodynamique classique se limite souvent à des systèmes à l'équilibre mécanique, sans mouvement macroscopique. Les diagrammes de phase présentés dans la sous-section précédente reflètent bien ce point. Pour la graine, par exemple, d'un point de vue purement thermodynamique, le point eutectique est considéré largement en dessous de n'importe quelle température dans la graine<sup>a</sup>, et la concentration en éléments légers est deux à trois fois plus faible dans le solide. Théoriquement, au regard simple du diagramme de phase, on s'attend donc à ce que la graine dans son ensemble soit dans la zone de co-existence du liquide et du solide dans le diagramme de phase. En effet, la courbe du solidus et le point

a. L'ajout d'éléments légers dans l'alliage de fer est supposé diminuer la température de fusion du mélange de 450 à 1000 K. Voir section 1.2.2 pour une discussion complète.



**Figure 4.1** – Exemple de diagramme de phase pour un fluide binaire à une pression donnée (Callen, 1985). Le point D correspond au point eutectique de co-existence de 3 phases (liquide, solide  $\alpha$  du point C, solide  $\beta$  du point E).



**Figure 4.2** – Diagrammes de phases schématisés pour les systèmes binaires Fe-FeS, Fe-FeSi et Fe-FeO à la pression de l'ICB (Morard et al., 2014).



eutectique sont largement inatteignables. Pourtant, un autre phénomène important est responsable de la ségrégation du liquide et du solide formé : les densités des deux phases sont suffisamment différentes pour que, sur des échelles de longueur de l'ordre de la graine, le solide se compacte et expulse le liquide. [Sumita et al. \(1996\)](#) étudient la compaction pure dans le cas d'une sphère autogravitante comme la graine, qui serait soumise à une condition de surface de porosité constante, et obtiennent que l'épaisseur de compaction, qui correspond à l'épaisseur dans laquelle il reste du liquide, est faible<sup>b</sup>. Mais cette étude ne prend pas en compte la possibilité de recristallisation et refonte due à l'écoulement de liquide en déséquilibre thermodynamique dans le milieu biphasique.

La modélisation de la dynamique de deux phases coexistantes spatialement via une théorie continue date des années soixante dix, et a été utilisée pour l'application à des contextes géophysiques de manière intensive depuis ([Frank, 1968](#); [Ahern & Turcotte, 1979](#); [McKenzie, 1984](#); [Ribe, 1985a,b](#); [Scott & Stevenson, 1984](#); [Spiegelman, 1993a,b](#); [Bercovici et al., 2001a](#); [Ricard et al., 2001](#); [Bercovici et al., 2001b](#)). Cette approche considère que la dynamique peut être décrite par un mélange de deux phases présentes partout dans l'espace avec des propriétés physiques (en particulier la fraction volumique de chaque phase) qui varie continûment. Dans ce cas, il n'y a pas de nécessité à suivre exactement la position de l'interface entre les deux phases, et on s'intéresse à des propriétés moyennées de l'écoulement.

[Bercovici et al. \(2001a\)](#) ont montré que, lorsqu'on reprend les équations pour un fluide biphasique en rajoutant la tension de surface et l'énergie de surface, on peut traiter les équations de façon totalement auto-cohérente. Les pressions dans les deux phases sont différentes, d'une part à cause de la prise en compte de la tension de surface, mais aussi car le système est hors équilibre mécanique du fait de vitesses différentes pour chaque phases.

Nous allons nous intéresser au système d'équations développé par [Bercovici et al. \(2001a\)](#); [Šrámek et al. \(2007\)](#) pour la dynamique d'un fluide biphasique avec changement de phase. Le lecteur est invité à se référer à la thèse de Ondřej Šrámek ([Šrámek, 2007](#)) pour une explication exhaustive de ce système d'équations. Ici, on souhaite rajouter un niveau supplémentaire de complexité aux équations biphasiques décrites par [Šrámek et al. \(2007\)](#) en incluant plusieurs composants chimiques dans chacune des phases. Ce travail a déjà été fait en partie par [Rudge et al. \(2011\)](#), pour étudier les mécanismes de fusion d'un manteau à plusieurs composants chimiques, mais sans prendre en compte la complexité des équations biphasiques de [Šrámek et al. \(2007\)](#), et en particulier sur la prise en compte des interactions entre les deux phases.

On s'intéresse à la dynamique induite par l'existence d'éléments légers dans le noyau terrestre. Notre système est donc un fluide biphasique et binaire, avec deux composants chimiques, l'un appelé le solvant (ici le fer pur), et l'autre appelé le soluté (les éléments légers, que l'on suppose tous avoir le même comportement et pouvoir se décrire comme

---

b. La longueur de compaction  $y$  est défini comme  $L_c = K_0(1 - \phi_0)\eta^* \eta_f$ , où  $K_0$  est le coefficient de perméabilité ( $> 10^{-20} \text{ m}^2$ ),  $\phi_0 = 0.4$  la porosité à la surface et  $\eta_f$  et  $\eta_s$  la viscosité du liquide et du solide. Pour la graine, on obtient alors  $L_c = 10^{-1} - 10^4 \text{ m}$ , pour des viscosités de solide de  $10^{16-21} \text{ Pa.s}$ .

une seule espèce chimique). L'approximation d'un seul élément léger est évidemment excessivement forte, surtout au vu des études récentes qui donnent des comportements pour, par exemple, l'oxygène et le soufre très différents en terme de coefficient de partitionnement lors de la cristallisation (par ex. [Gubbins et al., 2013](#); [Labrosse, 2014](#)). Pour autant, par souci de simplification, je considérerai dans un premier temps un seul soluté, mais en donnant les clefs pour traiter plus de deux composants chimiques.

#### 4.1.2.1 Notations

On considère que le milieu est continu, c'est à dire que l'on moyenne les quantités physiques étudiées dans un volume dit "mésoscopique", suffisamment grand devant la taille d'un grain ou d'un pore, et suffisamment petit devant l'échelle caractéristique de l'écoulement. Les propriétés de l'écoulement et de la matière sont alors considérées continues, en particulier la densité et la fraction volumique de liquide.

Les quantités sont définies sur le même modèle que [Rudge et al. \(2011\)](#), en posant  $i$  le nom de la phase et  $j$  le nom du composant chimique : pour une quantité  $A$  donnée, on notera  $A_i^j$  la quantité correspondante à la phase  $i$  (solide ou liquide) et le composant chimique  $j$ . Si l'indice  $j$  est omis, hors cas particulier, cela signifie que la quantité est écrite pour la phase  $i$  en général ( $A_i$ ).

On note  $\phi_i^j$  la fraction volumique de l'élément  $j$  dans la phase  $i$ .

Les quantités correspondantes à l'ensemble du volume mésoscopique sont liées aux quantités correspondantes à chaque phase, avec en particulier

$$\phi_i = \sum_j \phi_i^j, \quad (4.2)$$

et la densité  $\rho_i$  de chaque phase

$$\rho_i = \frac{\sum_j \rho_i^j \phi_i^j}{\sum_j \phi_i^j}. \quad (4.3)$$

Pour chaque quantité massique  $A$  que l'on définira, on écrit

$$A_i = \frac{\sum_j \rho_i^j \phi_i^j A_i^j}{\sum_j \rho_i^j \phi_i^j}, \quad (4.4)$$

ce qui revient à

$$\phi_i \rho_i A_i = \sum_j \phi_i^j \rho_i^j A_i^j. \quad (4.5)$$

La concentration massique en élément  $j$  dans la phase  $i$  s'écrit  $X_i^j$  avec

$$X_i^j = \frac{\phi_i^j \rho_i^j}{\sum_j \phi_i^j \rho_i^j}. \quad (4.6)$$

On note la dérivée particulaire, ou dérivée lagrangienne, de la quantité scalaire  $A_i$  dans la phase  $i$  de vitesse  $\mathbf{v}_i$  comme

$$\frac{D_i A_i}{Dt} = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla A_i. \quad (4.7)$$

#### 4.1.2.2 Conservation de la masse

La conservation de la masse de chacun des éléments dans chacune des phases s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i^j \rho_i^j) + \nabla \cdot (\phi_i^j \rho_i^j \mathbf{v}_i^j) = \dot{\Gamma}_i^j, \quad (4.8)$$

où  $\dot{\Gamma}_i^j$  est le taux de l'élément  $j$  produit dans la phase  $i$  lié au changement de phase, lié à la fois au taux de fusion et à la forme exacte du diagramme de phase, et  $\mathbf{v}_i^j$  la vitesse associée à l'élément  $j$  dans la phase  $i$ .

La vitesse de l'élément  $j$  est relié à la vitesse de la phase  $\mathbf{v}_i$  et à la vitesse de l'élément liée à la diffusion, avec  $\mathbf{J}_i^j$  le flux de diffusion,

$$\mathbf{J}_i^j = \phi_i^j \rho_i^j (\mathbf{v}_i^j - \mathbf{v}_i). \quad (4.9)$$

L'équation (4.8) se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_i^j \phi_i^j) + \nabla \cdot (\rho_i^j \phi_i^j \mathbf{v}_i) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i^j + \dot{\Gamma}_i^j. \quad (4.10)$$

En sommant sur l'indice  $j$  l'équation précédente, on retombe simplement sur la conservation de la masse de la phase  $i$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\phi_i \rho_i) + \nabla \cdot (\phi_i \rho_i \mathbf{v}_i) = \dot{\Gamma}_i, \quad (4.11)$$

où  $\dot{\Gamma}_i = \sum_j \dot{\Gamma}_i^j$  est le taux de fusion global. Pour conserver globalement la masse,  $\sum_i \dot{\Gamma}_i = 0$ . L'équation sera utilisée en particulier pour les équations de conservation, et on peut noter de suite que, d'une façon générale pour une quantité  $\sum_{i,j} A_i^j$  portée par l'élément, on peut écrire en utilisant (4.9) et (4.11) que

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} \rho_i^j \phi_i^j A_i^j + \nabla \cdot \sum_{i,j} \rho_i^j \phi_i^j A_i^j \mathbf{v}_i = \sum_i \rho_i \phi_i \frac{D_i A_i}{Dt} + \sum_i A_i \dot{\Gamma}_i + \nabla \cdot \sum_{i,j} A_i^j \mathbf{J}_i^j. \quad (4.12)$$

La conservation de la masse des composants chimiques  $j$  dans la phase  $i$  s'écrit à partir

de l'équation (4.10), pour  $X_i^j$  la concentration massique de l'élément  $j$  dans la phase  $i$ ,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi_i \rho_i X_i^j) + \nabla \cdot (\phi_i \rho_i X_i^j \mathbf{v}_i) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i^j + \dot{\Gamma}_i^j, \quad (4.13)$$

et en utilisant la conservation de la masse (4.11),

$$\phi_i \rho_i \frac{\partial}{\partial t}(X_i^j) + \phi_i \rho_i \mathbf{v}_i \cdot \nabla (X_i^j) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i^j + \dot{\Gamma}_i^j - X_i^j \dot{\Gamma}_i. \quad (4.14)$$

Par construction, comme  $X_i^j$  est la concentration massique de l'élément  $j$  dans la phase  $i$ , on notera que  $\sum_j X_i^j = 1$ . Les flux de diffusion de tous les éléments  $j$  de la phase  $i$  sont donc liés par  $\sum_j \mathbf{J}_i^j = 0$ , et  $\sum_j \dot{\Gamma}_i^j = \dot{\Gamma}_i$ .

#### 4.1.2.3 Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement de chaque phase est conservée, et en considérant un fluide visqueux, de pression  $P_i$ , sans terme inertiel, et sans autre champ extérieur que le champ de gravité (avec  $\mathbf{g}$  l'accélération de la gravité), [Bercovici et al. \(2001a\)](#); [Šrámek et al. \(2007\)](#) proposent

$$-\phi_i \nabla P_i + \nabla \cdot (\phi_i \boldsymbol{\tau}_i) + \phi_i \rho_i \mathbf{g} + F_\omega^i = 0, \quad (4.15)$$

Le terme  $F_\omega$  est un terme d'interaction entre les deux phases construit par [Bercovici & Ricard \(2003\)](#) pour le cas purement biphasique.  $\omega$  est un paramètre de pondération qui permet de quantifier comment se répartit l'énergie de surface entre les deux phases. Pour  $\omega = 0$ , l'énergie est portée intégralement par le solide, et pour  $\omega = 1$ , par le liquide. Ce terme d'interaction est négligé par [Rudge et al. \(2011\)](#), mais pris en compte dans ce travail. On se place maintenant dans le cas d'un fluide biphasique, une phase liquide (noté  $f$ ) et une phase solide (notée  $s$ ), et on écrira d'une manière générale  $\phi$  la fraction volumique de liquide,  $(1 - \phi)$  celle de solide, et  $\dot{\Gamma}$  le taux de fusion. Dans la suite, on continuera à utiliser l'indice  $i$  pour se référer à l'une ou l'autre phase, ou les indices  $f$  et  $s$  si on se réfère à une phase en particulier. On notera aussi  $\Delta A = A_m - A_f$  la différence entre solide et liquide pour une quantité quelconque  $A$ .

[Bercovici et al. \(2001a\)](#); [Šrámek et al. \(2007\)](#) calculent  $F_\omega = c\Delta\mathbf{v} + \omega\Delta P\nabla\phi_f$  pour le liquide et  $F_\omega = -c\Delta\mathbf{v} + (1 - \omega)\Delta P\nabla\phi_f$  pour le solide, où  $c$  est un coefficient d'interaction relié à la perméabilité,  $\Delta P = P_m - P_f$  et  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_m - \mathbf{v}_f$ . Le tenseur des contraintes est lié à la viscosité  $\eta_i$  de la phase  $i$  et au champ de vitesse  $\mathbf{v}_i$  comme

$$\boldsymbol{\tau}_i = \eta_i \left( \nabla \mathbf{v}_i + [\nabla \mathbf{v}_i]^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{I} \right), \quad (4.16)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $[\ ]^T$  la transposée du tenseur.

En injectant les formes de  $F_\omega$  de [Bercovici et al. \(2001a\)](#) dans l'équation (4.15), la

conservation du moment pour chaque phase s'obtient comme

$$-\phi \nabla P_f + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}_f) + \phi \rho_f \mathbf{g} + c \Delta \mathbf{v} + \omega \Delta P \nabla \phi = 0, \quad (4.17)$$

et

$$-(1 - \phi) \nabla P_m + \nabla \cdot ((1 - \phi) \boldsymbol{\tau}_m) + (1 - \phi) \rho_m \mathbf{g} - c \Delta \mathbf{v} + (1 - \omega) \Delta P \nabla \phi. \quad (4.18)$$

Le tenseur des contraintes est lié à la viscosité  $\eta_i$  de la phase  $i$  et au champ de vitesse  $\mathbf{v}_i$  comme

$$\boldsymbol{\tau}_i = \eta_i \left( \nabla \mathbf{v}_i + [\nabla \mathbf{v}_i]^T - \frac{2}{3} \nabla \cdot \mathbf{v}_i \mathbf{I} \right), \quad (4.19)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  $[\ ]^T$  la transposée du tenseur.

#### 4.1.2.4 Conservation de l'énergie

La variation d'énergie totale du système est reliée au travail et à la chaleur fournie au système. L'équation de conservation de l'énergie interne  $\sum_{i,j} \rho_i \phi_j e_i^j = \sum_i \rho_i \phi_i e_i$  s'écrit donc à partir de la conservation de l'énergie totale du système

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} \rho_i^j \phi_i^j e_i^j + \nabla \cdot \sum_{i,j} \rho_i^j \phi_i^j e_i^j \mathbf{v}_i^j = Q + W, \quad (4.20)$$

où  $Q$  et  $W$  sont respectivement la chaleur et le travail fourni au milieu.

Si on suit Ricard (2007, p.59 (section 7.02.5.1.2)) pour le traitement de la force appliquée à un fluide à plusieurs composants chimiques, chaque composant est soumis à la même pression et au même stress, mais possède une vitesse différente. On écrit alors  $W_i$ , le travail appliqué sur la phase  $i$

$$W_i = -\nabla \cdot \left[ P_i \sum_j \phi_i^j \mathbf{v}_i^j - \phi_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{v}_i \right] + \mathbf{g} \cdot \sum_j \phi_i^j \rho_i^j \mathbf{v}_i^j, \quad (4.21)$$

qui se simplifie en utilisant l'équation (4.9) et en se rappelant que  $\sum_j \mathbf{J}_i^j = 0$ , pour avoir

$$W_i = -\nabla \cdot [P_i \phi_i \mathbf{v}_i - \phi_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{v}_i] + \phi_i \rho_i \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}_i - \nabla \cdot \left[ \sum_j P_i \frac{\mathbf{J}_i^j}{\rho_i^j} \right]. \quad (4.22)$$

L'équation (4.20) se réécrit en utilisant l'équation (4.12)

$$\sum_i \left[ \rho_i \phi_i \frac{D_i e_i}{Dt} + e_i \dot{\Gamma}_i \right] = Q - \sum_i \nabla \cdot [P_i \phi_i \mathbf{v}_i - \phi_i \boldsymbol{\tau}_i \cdot \mathbf{v}_i] - \sum_{i,j} \nabla \cdot \left[ \mathbf{J}_i^j \left( e_i^j + \frac{P_i}{\rho_i^j} \right) \right]. \quad (4.23)$$

En utilisant les équations de conservations de la quantité de mouvement (4.17) et (4.18), on obtient finalement une équation pour l'énergie dans le cas d'un fluide à deux phases (liquide et solide) comme

$$\begin{aligned} \phi \rho_f \frac{D_f e_f}{Dt} + (1 - \phi) \rho_m \frac{D_m e_m}{Dt} = \dot{\Gamma} \left[ \Delta e + \Delta \left( \frac{P}{\rho} \right) \right] + \phi \boldsymbol{\tau}_f : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_f + (1 - \phi) \boldsymbol{\tau}_m : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_m \\ + H - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + c(\Delta \mathbf{v})^2 - \Delta P \frac{D_\omega \phi}{Dt} + \phi \frac{P_f}{\rho_f} \frac{D_f \rho_f}{Dt} + (1 - \phi) \frac{P_m}{\rho_m} \frac{D_m \rho_m}{Dt} - \sum_{i,j} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{J}_i^j \left( e_i^j + \frac{P_i}{\rho_i^j} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec  $Q = H - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q}$ ,  $H$  la production de chaleur interne liée à la radioactivité,  $\mathbf{q}$  le flux de chaleur et  $D_\omega/Dt$  est la dérivée lagrangienne prise pour la vitesse  $\mathbf{v}_\omega = \omega \mathbf{v}_f + (1 - \omega) \mathbf{v}_m$ .

On reconnaît dans l'équation (4.24) des termes en enthalpie  $h_i^j = e_i^j + P_i/\rho_i^j$ . On peut réécrire cette équation en utilisant l'enthalpie comme variable et on obtient

$$\begin{aligned} \phi \rho_f \frac{D_f h_f}{Dt} + (1 - \phi) \rho_m \frac{D_m h_m}{Dt} - \dot{\Gamma} \Delta h = \\ H - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \psi + \phi \frac{D_f P_f}{Dt} + (1 - \phi) \frac{D_m P_m}{Dt} - \Delta P \frac{D_\omega \phi}{Dt} - \sum_{i,j} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{J}_i^j h_i^j \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

où  $\psi = c(\Delta \mathbf{v})^2 + \phi \boldsymbol{\tau}_f : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_f + (1 - \phi) \boldsymbol{\tau}_m : \boldsymbol{\nabla} \mathbf{v}_m$  est la dissipation liée à la déformation.

#### 4.1.2.5 Équation pour l'entropie

L'énergie de Gibbs (massique)  $g_i$ , dans le cas d'un fluide à plusieurs composants chimiques, s'écrit

$$g_i = h_i - T s_i = \sum_j \mu_i^j X_i^j, \quad (4.26)$$

où  $\mu_i^j$  est le potentiel chimique de l'élément  $j$  dans la phase  $i$ , défini comme  $\mu_i^j = \partial g_i / \partial X_i^j |_{P,T,X_i^{j \neq j}}$ . La dérivée totale de l'enthalpie s'obtient comme

$$dh_i = T ds_i + \frac{dP_i}{\rho_i} + \sum_j \mu_i^j dX_i^j. \quad (4.27)$$

À partir de l'équation (4.25) pour l'enthalpie, on écrit pour l'entropie

$$\begin{aligned} \phi \rho_f T \frac{D_f s_f}{Dt} + (1 - \phi) \rho_m T \frac{D_m s_m}{Dt} - \dot{\Gamma} \Delta h = H - \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{q} + \psi - \Delta P \frac{D_\omega \phi}{Dt} \\ - \sum_j \phi \rho_f \mu_f^j \frac{D_f X_f^j}{Dt} - \sum_j (1 - \phi) \rho_m \mu_m^j \frac{D_m X_m^j}{Dt} - \sum_{i,j} \boldsymbol{\nabla} \cdot \left[ \mathbf{J}_i^j h_i^j \right], \end{aligned} \quad (4.28)$$

qu'il faut réécrire sous la forme d'une équation de conservation

$$\sum_{i,j} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\phi_i^j \rho_i^j s_i^j) + \nabla \cdot (\phi_i^j \rho_i^j \mathbf{v}_i^j s_i^j) \right] = -\nabla \cdot \mathbf{J}_S + S, \quad (4.29)$$

avec  $\mathbf{J}_S$  les flux d'entropie et  $S$  les sources d'entropie.

On peut calculer les flux et sources provenant de la somme des dérivées particulières pour les compositions avec les équations de conservation pour chaque élément chimique dans chacune des phases (équation (4.14))

$$\begin{aligned} \sum_j \phi \rho_f \mu_f^j \frac{D_f X_f^j}{Dt} + \sum_j (1 - \phi) \rho_m \mu_m^j \frac{D_m X_m^j}{Dt} = & - \sum_j \mu_f^j \nabla \cdot \mathbf{J}_f^j - \sum_j \mu_m^j \nabla \cdot \mathbf{J}_m^j \\ & + \sum_j (\mu_f^j - \mu_m^j) \dot{\Gamma}^j + \sum_j (\mu_m^j X_m^j - \mu_f^j X_f^j) \dot{\Gamma}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Le flux d'entropie de l'équation (4.29) est alors

$$\mathbf{J}_S = \frac{\mathbf{q} - \sum_j \mu_f^j \mathbf{J}_f^j - \sum_j \mu_m^j \mathbf{J}_m^j}{T}, \quad (4.31)$$

et les sources d'entropie, après calcul patient et en se rappelant que  $\mu_i^j = g_i^j = h_i^j - T s_i^j$  et que  $\sum_j \mu_i^j X_i^j = h_i - T s_i^c$ , j'obtiens

$$\begin{aligned} TS = \sum_j \dot{\Gamma}^j \left[ P_\omega \frac{\Delta \rho}{\rho_f \rho_m} - \Delta \mu^j \right] - \Delta P \left[ \frac{D_\omega \phi}{Dt} - \frac{\rho_\omega}{\rho_f \rho_m} \dot{\Gamma} \right] \\ - \frac{1}{T} \left( \mathbf{q} - \sum_{i,j} \mu_i^j \mathbf{J}_i^j \right) \cdot \nabla T - \sum_{i,j} \mathbf{J}_i^j \cdot \nabla \mu_i^j \\ + c(\Delta \mathbf{v})^2 + \phi \boldsymbol{\tau}_f : \nabla \mathbf{v}_f + (1 - \phi) \boldsymbol{\tau}_m : \nabla \mathbf{v}_m. \end{aligned} \quad (4.32)$$

On a noté  $A_\omega$  une quantité moyennée comme  $A_\omega = (1 - \omega)A_f + \omega A_m$ .

Chaque ligne de l'équation (4.32) correspond à un ordre tensoriel pour les forces et flux thermodynamiques, ce qui nous permet de traiter les relations entre forces et flux pour chaque ordre tensoriel comme traditionnellement (De Groot & Mazur, 1984).

La première ligne de l'équation (4.32) correspond à l'ordre tensoriel 0, et Šrámek et al. (2007) avait identifié  $-\Delta P$  et  $\dot{\Gamma}$  comme flux thermodynamiques. La première ligne a été arrangée de manière à ce que le terme  $D_\omega \phi / Dt - \rho_\omega / \rho_f \rho_m$  soit indépendant de  $\dot{\Gamma}^j$ , et on reconnaît  $-\Delta P$  et  $\dot{\Gamma}^j$  comme les flux thermodynamiques.

Considérant une relation linéaire entre les flux et forces thermodynamiques (De Groot & Mazur, 1984), on peut considérer que le différentiel de pression est découplé des taux

c. il faut être prudent en séparant les grandeurs par élément et par phase dans ce cas précis.

de fusion, et définir un scalaires  $L_{11}$  (Šrámek et al., 2007) avec

$$\Delta P = -L_{11} \left( \frac{D_\omega \phi}{Dt} - \frac{\rho_\omega}{\rho_f \rho_m} \right). \quad (4.33)$$

Le coefficient  $L_{11}$  devrait correspondre aux même équations que Bercovici et al. (2001a); Bercovici & Ricard (2003) et donc

$$L_{11} = K_0 \frac{\eta_f + \eta_m}{\phi(1 - \phi)}, \quad (4.34)$$

avec  $K_0$  est une constante sans dimension qui dépend de la géométrie des pores, et est d'ordre 1.

En prenant comme exemple Šrámek et al. (2007), les coefficients reliant flux et forces thermodynamiques peuvent être choisi tendant vers l'infini pour un changement de phase à l'équilibre, et on obtient alors que, pour chaque composant  $j$ ,

$$\mu_m^j - \mu_f^j = 0. \quad (4.35)$$

**Fluide binaire** Pour pouvoir traiter pleinement les sources et flux d'ordres tensoriels supérieurs, il faut maintenant restreindre le système étudié. Pour la graine, nous nous intéressons au cas plus simple du fluide binaire, c'est à dire avec exactement un solvant et un seul soluté. Pour connaître parfaitement l'état thermodynamique du système, il nous faut donc maintenant connaître deux variables thermodynamiques, comme la pression et la température, et une concentration, du solvant ou du soluté. En effet, les concentrations massiques de chacun de ces composants sont liées. On notera donc à partir de maintenant  $X_i$  la concentration massique du soluté, et  $1 - X_i$  celle du solvant, dans la phase  $i$ . En particulier, on notera que  $dX_i^{\text{solvant}} = -dX_i^{\text{solute}}$  et  $\mathbf{J}_i^{\text{solvant}} = -\mathbf{J}_i^{\text{solute}}$

Si on reprend la dérivée totale de l'enthalpie comme exemple, dans l'équation (4.27), on peut maintenant définir un nouveau potentiel chimique qui correspond en fait à la différence entre les deux potentiels chimique  $\mu = \mu^{\text{solute}} - \mu^{\text{solvant}}$  et réécrire

$$dh_i = T ds_i + \frac{dP_i}{\rho_i} + \mu_i dX_i. \quad (4.36)$$

$\mathbf{J}_S$  se simplifie,

$$\mathbf{J}_S = \frac{\mathbf{q} - \mu_f \mathbf{J}_f - \mu_m \mathbf{J}_m}{T}, \quad (4.37)$$

et les sources d'entropie correspondantes, de premier ordre tensoriel, sont

$$S' = -\frac{1}{T^2} [(\mathbf{q} - \mu_f \mathbf{J}_f - \mu_m \mathbf{J}_m) \cdot \nabla T + T \mathbf{J}_f \cdot \nabla \mu_f + T \mathbf{J}_m \cdot \nabla \mu_m]. \quad (4.38)$$

Pour simplifier le problème, on considère que la diffusion dans le solide est négligeable,



et que seule celle dans le liquide nous intéresse. Les termes en  $\mathbf{J}_m$  sont alors négligeables dans l'équation (4.38), et on reconnaît deux forces thermodynamiques,  $\nabla T$  et  $\nabla \mu_f$ . On réécrit alors l'équation (4.38) en utilisant la définition des flux d'entropie (4.37),

$$S' = -\frac{1}{T} [\mathbf{J}_s \cdot \nabla T + \mathbf{J}_f \cdot \nabla \mu_f]. \quad (4.39)$$

Dans le cadre de l'approximation linéaire (De Groot & Mazur, 1984), on obtient alors une relations entre les forces et flux thermodynamiques comme

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_f \\ \mathbf{J}_s \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla \mu \\ \nabla T \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Le principe d'Onsager permet d'égaliser  $\beta_{12} = \beta_{21}$  mais ne nous donne pas d'informations sur les coefficients.

On obtient pour la source d'entropie  $S'$

$$S' = \frac{\beta_{22}}{T} (\nabla T) + \frac{\beta_{11}}{T} \nabla \mu_f + 2 \frac{\beta_{12}}{T} \nabla \mu_f \nabla T. \quad (4.41)$$

En l'absence de plusieurs composants chimiques, cette expression se simplifierait en la loi de Fourier avec  $\mathbf{J}_s = -\mathbf{q}/T = -k \nabla T/T$ , et donc on identifie  $\beta_{22} = k/T$ .

Et en écrivant la dérivée totale du potentiel chimique comme

$$d\mu = \frac{\beta}{\rho} dP - \frac{h_X}{T} dT + \mu_X^T dX, \quad (4.42)$$

où  $\mu_X^T$  est par définition la dérivée isobare et isotherme du potentiel chimique et  $\beta$  le coefficient de dilatation chimique isobare  $\beta = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial X^j)_{T,P,X^{i \neq j}}$  et  $h_X$  la chaleur de réaction (liée à la dissolution)  $h_X = T(\partial s/\partial X^j)_{T,P,X^{i \neq j}}$ . On réécrit à partir de l'équation (4.40) l'expression du flux d'élément chimique  $\mathbf{J}_f$

$$\mathbf{J}_f = -\beta_{11} \mu_X^T \nabla X - (\beta_{12} - \beta_{11} \frac{h_X}{T}) \nabla T - \beta_{11} \frac{\beta}{\rho_f T} \nabla P. \quad (4.43)$$

Les termes de l'équation (4.43) ont chacun une signification physique. Le premier terme est la classique diffusion chimique. Le second terme contient le couplage par effet Soret entre gradient chimique et gradient thermique, à travers le coefficient  $\beta_{12}$ , que l'on négligera la plupart du temps dans le cas de la Terre. Le troisième terme est un effet de baro-diffusion, que nous pouvons difficilement négliger car nous considérons  $\beta$  comme non nul.

En posant la diffusivité chimique

$$\kappa_X = \frac{\beta_{11} \mu_X^T}{\rho_f}, \quad (4.44)$$

le coefficient de Soret

$$k_X^T = \frac{T\beta_{12}}{\beta_{11}\mu_X^T} - \frac{h_X}{\mu_X^T}, \quad (4.45)$$

et le coefficient de baro-diffusion

$$k_X^P = \frac{\beta P}{\rho\mu_X^T}, \quad (4.46)$$

on réécrit l'équation (4.43) comme

$$\mathbf{J}_f = -\rho_f \kappa_X \left( \nabla X + \frac{k_X^T}{T} \nabla T + \frac{k_X^P}{P} \nabla P \right). \quad (4.47)$$

En négligeant le couplage entre chaleur et composition, l'expression pour le flux d'entropie devient relativement simple (on néglige tous les termes en  $\beta_{12}$ ).

Et le flux d'entropie s'écrit

$$\mathbf{J}_S = -\frac{k}{T} \nabla T. \quad (4.48)$$

Et donc

$$\mathbf{q} = -k \nabla T + \mu \mathbf{J}_f. \quad (4.49)$$

Cette expression nous permettra d'exprimer correctement  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  dans la conservation de l'énergie.

#### 4.1.2.6 Équation pour la température

Les dérivées totales de l'enthalpie et de la température sont reliées par une équation d'état comme

$$dh = C_p dT + \frac{1 - \alpha T}{\rho_i} dP + \sum_j h_i^j dX_i^j, \quad (4.50)$$

où  $\alpha = -\rho^{-1}(\partial\rho/\partial T)_{P,X^j}$  est le coefficient d'expansion thermique et  $h_i^j X_i^j = h_i$ .

On obtient une équation pour la température en injectant la forme  $dh$  de l'équation (4.50) dans l'équation pour enthalpie (4.25) et en utilisant les relations développées à

partir des sources d'entropie (4.33),

$$C_{p,f}\phi\rho_f\frac{D_fT}{Dt} + C_{p,m}(1-\phi)\rho_m\frac{D_mT}{Dt} = -\alpha_fT\phi\frac{D_fP}{Dt} - \alpha_mT(1-\phi)\frac{D_mP}{Dt} \\ + \psi + \frac{\Delta P^2}{L_{11}} + \nabla \cdot \mathbf{q} - \sum_{i,j} \mathbf{J}_i^j \cdot \nabla h_i^j + \sum_{i,j} h_i^j \dot{\Gamma}_i^j. \quad (4.51)$$

On retrouve ici une équation pour la température similaire à [Rudge et al. \(2011\)](#), avec les deux derniers termes liés à la composition et au changement de phase. Le traitement prudent des équations de conservation (énergie et entropie) nous a permis de ne pas avoir à définir un nouveau flux  $\mathbf{q}'$ , car les termes s'annulent avec le  $\nabla \cdot \mathbf{J}_i^j h_i^j$ , dernier terme de l'équation (4.25).

Pour cette équation, on a considéré que  $\Delta\mu = 0$ , c'est à dire que le changement de phase se fait à l'équilibre thermodynamique, comme pour l'équation (4.35), ce qui est similaire à dire que la température est fixée à la température du liquidus (variable avec la pression et la composition).

### 4.1.3 La graine : fluide biphasique et binaire

Pour appliquer les équations précédentes à la dynamique de la graine, on va faire quelques approximations simplificatrices.

Les équations précédentes prenaient en compte un facteur  $\omega$ .  $\omega$  est défini par [Bercovici et al. \(2001a\)](#) pour prendre en compte certaines propriétés de l'interface,

$$\omega = \frac{\phi\eta_f}{\phi\eta_f + (1-\phi)\eta_m}, \quad (4.52)$$

et la pression à l'interface vaut  $P_\omega = (1-\omega)P_f + \omega P_m$ . Pour la graine, la viscosité du liquide et du solide sont très différentes,  $\eta_m \gg \eta_f$ , et donc nous pouvons poser que  $\omega \rightarrow 0$ .

Les conservations de la masse pour chacun des deux fluides nous donnent

$$\frac{D_\omega\phi}{Dt} - \frac{\rho_\omega}{\rho_f\rho_m} = (1-\omega)(1-\phi)\nabla \cdot \mathbf{v}_m + \omega\phi\nabla \cdot \mathbf{v}_f, \quad (4.53)$$

et donc on obtient pour le différentiel de pression  $\Delta P$  défini à l'équation (4.33), avec  $\mu_m \gg \mu_r$  et  $\omega = 0$ ,

$$\Delta P = -K_0 \frac{\mu_m}{\phi} \nabla \cdot \mathbf{v}_m, \quad (4.54)$$

où on a aussi utilisé la définition de (4.34), qui vaut maintenant  $L_{11} = K_0\eta_m/(\phi(1-\phi))$ .

Le saut de pression entre les deux phases est donc lié à la déformation visqueuse du milieu. Ici, on a négligé les effets de tension superficielle.

Pour la graine, on se place dans le cas biphasique et binaire, c'est à dire que nous avons affaire à deux phases et deux composants chimiques. Les composants sont le soluté (noté 1) et le solvant (noté 2).  $\dot{\Gamma}$  est le taux de fusion global, et  $\dot{\Gamma}^j$  celui correspondant à la phase  $j$ .

Les termes correspondant à la composition et au changement de phase de l'équation (4.51) pour la température se réduisent maintenant à

$$\sum_{i,j} h_i^j \dot{\Gamma}_i^j = -\Delta h^1 \dot{\Gamma}^1 - \Delta h^2 \dot{\Gamma}^2, \quad (4.55)$$

et en négligeant la diffusion dans le solide,

$$\sum_{i,j} \mathbf{J}_i^j \cdot \nabla h_i^j = \mathbf{J}_f^1 \cdot \nabla (h_f^1 - h_f^2). \quad (4.56)$$

Finalement, si on reprend toutes les équations pour un écoulement biphasique d'un fluide binaire avec changement de phase, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi \rho_f) + \nabla \cdot (\phi \rho_f \mathbf{v}_f) = \dot{\Gamma}, \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}((1 - \phi) \rho_m) + \nabla \cdot ((1 - \phi) \rho_m \mathbf{v}_m) = -\dot{\Gamma}, \quad (4.58)$$

$$\phi \rho_f \frac{\partial}{\partial t}(X_f) + \phi \rho_f \mathbf{v}_f \cdot \nabla (X_f) = -\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \dot{\Gamma}^1 - X_f \dot{\Gamma}, \quad (4.59)$$

$$(1 - \phi) \rho_m \frac{\partial}{\partial t}(X_m) + (1 - \phi) \rho_m \mathbf{v}_m \cdot \nabla (X_m) = -\dot{\Gamma}^1 + X_m \dot{\Gamma}, \quad (4.60)$$

où  $X_i$  est la concentration massique en soluté (en éléments légers) de la phase  $i$ .

$$-\phi \nabla P_f + \nabla \cdot (\phi \boldsymbol{\tau}_f) + \phi \rho_f \mathbf{g} + c \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (4.61)$$

$$-(1 - \phi) \nabla P_m + \nabla \cdot ((1 - \phi) \boldsymbol{\tau}_m) + (1 - \phi) \rho_m \mathbf{g} - c \Delta \mathbf{v} + \Delta P \nabla \phi. \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned} C_{p,f} \phi \rho_f \frac{D_f T}{Dt} + C_{p,m} (1 - \phi) \rho_m \frac{D_m T}{Dt} &= -\alpha_f T \phi \rho_f \frac{D_f P}{Dt} - \alpha_m T (1 - \phi) \rho_m \frac{D_m P}{Dt} \\ &+ \psi + K_0 \eta_m \frac{\phi}{1 - \phi} (\nabla \cdot \mathbf{v}_m)^2 + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{J}_f^1 \cdot \nabla (h_f^1 - h_f^2) - \Delta h^1 \dot{\Gamma}^1 - \Delta h^2 \dot{\Gamma}^2. \end{aligned} \quad (4.63)$$

**4.1.4** Conclusion

---

Finalement, nous avons construit un système d'équations pour décrire la graine comme un fluide biphasique et binaire : les équations (4.57) à (4.63). Ces équations nécessitent une bonne connaissance des propriétés physiques de chacune des phases et de chacun des composants chimiques. Ces équations sont utiles pour décrire la zone de coexistence de solide-liquide dans la graine, c'est à dire la zone autour de l'ICB.

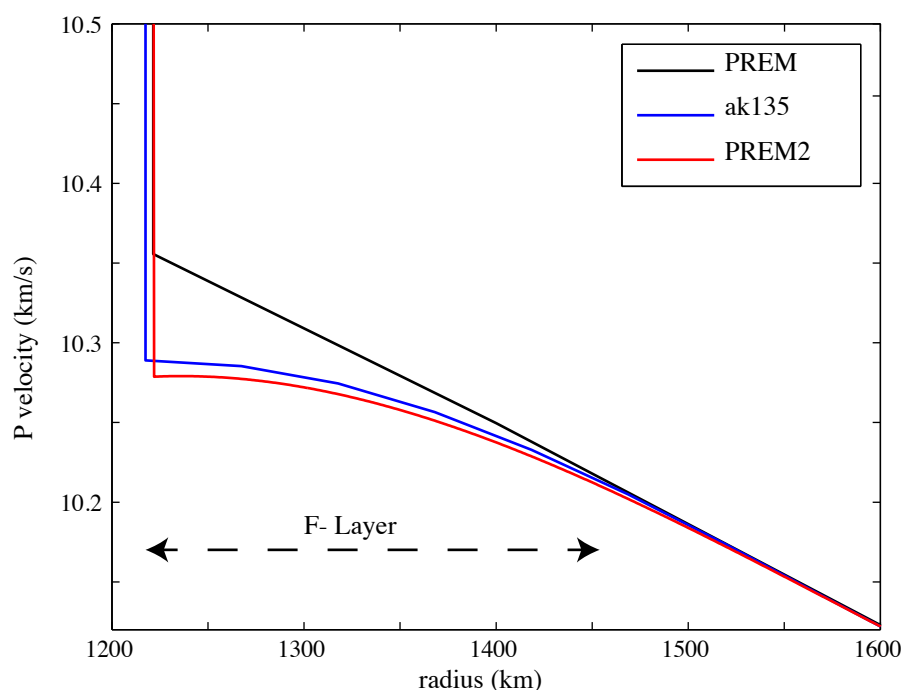
On peut aussi noter que ces équations sont valides à très faible fraction de liquide. On obtient alors simplement des équations pour un fluide de viscosité  $\eta_s$ . Dans le cas où la fraction de solide est très faible, ces équations ne peuvent pas prendre en compte une convection turbulente, et il faut donc être très prudent pour prendre en compte la partie du noyau externe.

Dans la suite de ce chapitre, nous appliquerons ce type d'approche pour proposer une dynamique biphasique dans la zone appelée *F-layer*, à la base du noyau liquide. Cette zone est stratifiée stable, ce qui signifie que les mouvements de liquide sont bien contraints par la théorie.

## 4.2 F-layer : formation et stabilité de neige de fer solide

### 4.2.1 Context of the study

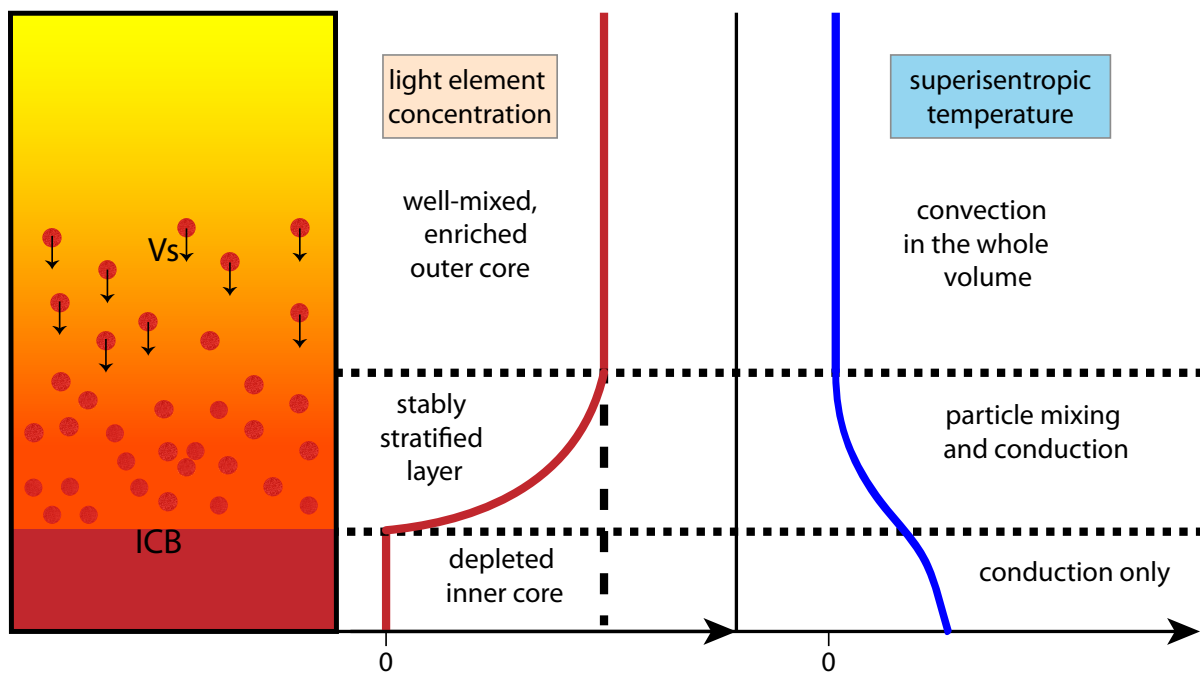
The preliminary unidimensional model for the Earth PREM (Dziewoński & Anderson, 1981) exhibits a well-mixed isentropic state in the outer core, consistent with a vigorous convection driving the dynamo. Yet, significant deviations from the PREM Model in the outer core have been found in several studies, with reduced P velocities at the base of the outer core (Souriau & Poupinet, 1991; Song & Helmberger, 1992, 1995; Kennett et al., 1995; Yu, 2005; Cormier et al., 2011). P-waves velocities are  $V_P = \sqrt{K/\rho}$ , with  $K$  the bulk modulus and  $\rho$  the density. Thus, a decrease in P-wave velocity can be induced by either a decrease in  $K$  or an increase of  $\rho$ , or both. Gubbins et al. (2008) argue that this decrease in P velocities indicates an increasing density profile with depth, and so a stably stratified layer. The expected density anomaly at the ICB in the liquid would be the opposite: light elements are expelled by freezing of the liquid outer core and the freezing of the inner core at the ICB should increase the light element concentration in the liquid, and thus decrease the density of the liquid and destabilize the layer. This surprising heavy layer at the base of the outer core has been proposed to be of compositional origin (Gubbins et al., 2008) and its 150 km thickness is much larger than diffusion length scales.



**Figure 4.3:** Seismic observations of the F-layer: global models PREM (Dziewoński & Anderson, 1981), AK135 (Kennett et al., 1995) and PREM2 (Song & Helmberger, 1995)

To produce such a layer, recent models are based on the idea of Braginsky (1963);

Gubbins et al. (2008) that melting is needed to produce an iron rich liquid (Alboussière et al., 2010; Gubbins et al., 2011). By melting part of the inner core boundary, Alboussière et al. (2010) suggested that a stable layer can be generated by the release of iron rich melt if the amount of melting is large enough. Melting of the inner core could be produced either by convectonal instability (Alboussière et al., 2010), which requires thus an unstable density profile of the inner core, or by heterogeneous heat flux at the ICB from heterogeneities at the Core Mantle Boundary (CMB) (Aubert et al., 2008; Gubbins et al., 2011), which requires regions of negative heat flux at the ICB to obtain melting.



**Figure 4.4:** Scheme of the proposed mechanism for the F-layer: iron particles freezing and falling at a velocity  $V_s$  in the stratified layer.

In this section, we propose another mechanism to explain the stability of such a layer. If the freezing occurs in the bulk of the F-layer and not at the inner core boundary, as iron snow (see figure 4.4), the light elements are preferentially expelled at the top of the layer, and the composition close to the inner core boundary is likely to be depleted in light elements.

Such a snowy layer was already proposed and discarded by several authors, based on morphological instabilities arguments. Fearn et al. (1981); Loper & Roberts (1981); Deguen et al. (2007) studied the linear stability of the inner core boundary and found that the boundary is likely to be unstable for the morphological instability and dendrites to form at the ICB. Loper & Roberts (1981) argued that, if dendrites are formed at the surface of the inner core, they are likely to be broken by the outer core flow and to form a slurry layer on top of the mushy layer. Shimizu et al. (2005) studied the possibility for such a slurry layer, and conclude that no particles can nucleate in the layer in the theory of homogeneous nucleation, discarding this hypothesis.

However, all these studies were focused on morphological instability, and the thickness of the zone where the instability is valid is largely smaller than the actual thickness of the seismological F-layer. In this study, the problem is taken from another point of view : assuming such a layer exists, which processes are likely to mix the layer, and which ones are likely to stabilize it?

Alboussière et al. (2010) showed that melting of a sufficiently large amount of one side of the inner core can stabilize the layer. The melting and freezing were localized in geographically different regions, and modification of this organization is likely to lead to drastically different conclusions. In particular, patches of melts as proposed by Gubbins et al. (2011) are likely to produce small plumes of light elements and have a larger disturbance effect on the layer. Also, the existence of the stratified layer decoupled the inner core with the outer core dynamics, and thus, variation of heat flux (Aubert et al., 2008; Gubbins et al., 2011) are expected to have a smaller effect on the inner core. Thus, only inner core dynamics can induce melting as proposed by Alboussière et al. (2010). They argue that the inner core translation (Monnereau et al., 2010; Alboussière et al., 2010) is the perfect candidate for such a geographically localized melting, but such a process is now difficult to sustain because of newly determined thermal conductivity values for high pressure iron (Pozzo et al., 2012; de Koker & Steinle-Neumann, 2012; Gomi et al., 2013).

So melting of solid inner core at the ICB is likely to strongly destabilize the layer, with the sole exception of the translation instability. Other possibilities for producing an iron-rich liquid at the inner core boundary are: freezing at the top of the stratified layer and freezing in the bulk of the stratified layer.

If the crystallization occurs only at the top of the layer, particles of solid iron will either slowly and lamina­rily sink into the layer, or create particle avalanches. Avalanches are expected to mix the layer and slowly settling particles in the stratified layer are virtually the same as freezing in the bulk of the layer because they are subject to re-melting and freezing due to the temperature and compositional variation in the layer.

Thus, we study the stability of iron snow in a stratified layer with the properties of the F-layer of the core. The main questions are : what are the constraints to obtain a stable snowy layer? For which physical properties will such a layer be compatible with seismological observations?

---

#### 4.2.2 Model of iron snow

---

The system is made of particles settling in a stably stratified layer. The liquid layer is stratified both in composition and temperature, and the particles are interacting with the surrounding fluid by mixing and freezing. When falling, the freezing or melting of particles will modify the composition profile to have the temperature profile equal to the liquidus profile.

We consider a binary alloy with settling of particles of pure iron, with a simple phase



diagram where the liquidus is a function of pressure and light element concentrations as

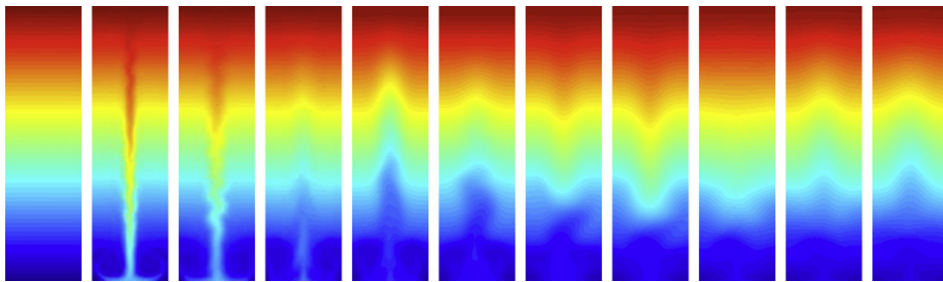
$$T_{\text{liq}} = T_{\text{liq},0} + (P - P_{\text{ref}}) \frac{\partial T_{\text{liq}}}{\partial P} - X \frac{\partial T_{\text{liq}}}{\partial X}, \quad (4.64)$$

with  $T_{\text{liq},0}$  the temperature of fusion of pure iron at the reference pressure  $P_{\text{ref}}$ .

#### 4.2.2.1 Velocity of particles in a density gradient

In the stratified fluid literature, the density stratification is measured by the Brunt-Väisälä frequency  $N = (-g/\rho(d\rho/dz))^{1/2}$ . Blanchette (2013) discussed the effect of a single particle falling in a stratified layer. Settling of particles distorts the density profile by dragging fluid, and if buoyancy dominates over viscous effects, the disturbance vanishes in a time approximated by  $t \sim 1/N$ . Their computation for a single particle is shown on figure 4.5. In this example, the particle is large (A particle Reynolds number  $Re_p = Ua\rho_f/\eta = 190$ , where  $a$  and  $U$  the size and velocity of the particle and  $\rho_f$  and  $\eta$  the density and viscosity of the fluid), and the wake is stronger than expected in our case. Even so, the stratification is disturbed by the particle but settles back to an equilibrium state after a tens of  $1/N$  times. The particle excites an internal wave in the stratified media, whose amplitude decreases quickly.

The density variation to be considered here is not the global  $d\rho/dr$  gradient, which is positive, but the density difference compared to a well mixed layer. Using  $\Delta\rho \approx 300 \text{ kg.m}^{-3}$  (Gubbins et al., 2008), the Brunt-Väisälä frequency is of order  $5 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ , a typical period of about one year.



**Figure 4.5:** Numerical simulation snapshots taken every  $1/N$  s presenting the stratification modification due to the falling of a single particle ( $Re_p = 190$ ). Figure from Blanchette (2013).

To describe the dynamics of the particles, Blanchette (2013) used three dimensionless numbers:

- the particle Reynolds number  $Re_p = \rho_f U a / \eta$ ;
- the Froude number  $Fr = U / N a$ ;
- the Richardson number  $Ri = Re / Fr^2$ , constructed to compare the buoyancy and viscous shear forces.

Yick et al. (2009) quantify the drag of a sphere settling in a stratified fluid. They show that for small particles Reynolds number  $Re_p$ , inverse of Froude number  $Fr^{-1}$  and Richardson number  $Ri$ , the drag of a sphere at a given depth is close to the drag of a sphere in an homogeneous media at the same density as the density of the stratified liquid at this depth, because the particle's velocity adjusts to the surrounding conditions on a short time scale,  $a^2\rho_f/\eta$ , where  $a$  is the radius of the sphere and  $\eta$  and  $\rho_l$  the viscosity and density of the liquid (Oster & Yamamoto, 1963). The Stokes velocity obtained for a single particle is thus

$$U_s = \frac{2a^2g(\rho_p - \rho_f(\mathbf{r}))}{9\eta}, \quad (4.65)$$

with  $g$  the gravity acceleration and  $\rho_p$  the particle density.

Following Blanchette & Bush (2005), the typical speed of particles inside a suspension with a particle volume fraction  $\phi$  is linked to the speed of a single particle  $U_s$  through

$$u_s = f(\phi)U_s, \quad (4.66)$$

where  $f(\phi)$  is a function which is 1 for  $\phi \rightarrow 0$  and that can be approximated in the limit of small particle concentrations as  $f(\phi) = 1 + 6.55\phi + \mathcal{O}(\phi^2)$  (Batchelor, 1972).

So, at first order,  $u_s = U_s$  if all the particles in the mesoscopic volume where  $u_s$  is defined have the same physical properties, such as same densities and radius.

#### 4.2.2.2 Equation of state

---

The densities of the phases are described by two equations of state that considered dependencies on temperature, with  $\alpha$  the thermal expansion coefficient, and light elements concentration, with  $\beta$  the chemical expansion coefficient, as

$$\rho_f = \rho_{f,0}(1 - \beta X - \alpha_f(T - T_{\text{ref}})), \quad (4.67)$$

$$\rho_p = \rho_{p,0}(1 - \alpha_p(T - T_{\text{ref}})). \quad (4.68)$$

The particles are pure iron, and the reference profile  $T_{\text{ref}}$  is chosen at  $X = 0$  and  $T_{\text{ref}} = T_{\text{icb}}$ , the temperature at the ICB.

#### 4.2.2.3 Conservation equations

---

We treat the dynamics of the particles and fluid in the stratified layer as the dynamics of a two-phase mixture for which the velocities of the solid particles are prescribed by

the Stokes velocity from equations (4.66) (Bercovici et al., 2001a; Šrámek et al., 2007). Quantities referring to the liquid phase will have the  $l$  subscript and those referring to the solid the  $p$  subscript. We note  $\phi$  the volume fraction of particles.

**Mass conservation** Conservation of mass for both phases are written as

$$\frac{\partial \rho_p \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \mathbf{V}_s \phi) = \dot{\Gamma}, \quad (4.69)$$

and

$$\frac{\partial \rho_f (1 - \phi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{V}_l (1 - \phi)) = -\dot{\Gamma}, \quad (4.70)$$

with  $\dot{\Gamma}$  the rate of solid production per unit volume and  $\mathbf{V}_s$  and  $\mathbf{V}_l$  the velocity of the solid and liquid phases.

Combining these two equations, we obtain an equation for the mean velocity  $\bar{\mathbf{V}} = \phi \mathbf{V}_s + (1 - \phi) \mathbf{V}_l$  as

$$\nabla \cdot (\phi \mathbf{V}_s + (1 - \phi) \mathbf{V}_l) = \frac{\rho_f - \rho_p}{\rho_f \rho_p} \dot{\Gamma}. \quad (4.71)$$

The density difference between solid and liquid is negligible compared to the total density of the solid, and thus we will consider the equation (4.71) equal to zero.

**Light elements conservation** The conservation of light elements in the liquid phase depends on the advection of the liquid, the diffusion with  $\kappa_X$  the diffusion coefficient and a source term that takes into account the release of light elements through freezing of particles. The mass fraction of light elements  $X$  in the liquid verifies thus

$$\frac{\partial}{\partial t} ((1 - \phi) \rho_f X) + \nabla \cdot (\mathbf{V}_l (1 - \phi) \rho_f X) = \dot{\Gamma}^X + \rho_f \kappa_X \nabla \cdot ((1 - \phi) \nabla X), \quad (4.72)$$

where  $\dot{\Gamma}^X$  is the amount of light elements released by the freezing of  $\dot{\Gamma}$  particles, which depends on the phase diagram. For a simple eutectic phase diagram with no impurities in the solid phase, the quantity  $\dot{\Gamma}^X$  is simply  $\dot{\Gamma}^X = X \dot{\Gamma}$ . Combining this equation with the conservation of mass, we obtain

$$(1 - \phi) \rho_f \frac{\partial X}{\partial t} + (1 - \phi) \rho_f \mathbf{V}_l \cdot \nabla X = 2X \dot{\Gamma} + \rho_f \kappa_X \nabla \cdot ((1 - \phi) \nabla X). \quad (4.73)$$

**Energy conservation** Considering the Boussinesq approximation, negligible work from viscous forces, and no contribution from the diffusion of light elements, the energy

conservation can be reduced to an equation for the temperature<sup>d</sup> as

$$\overline{\rho C_p} \frac{\partial T}{\partial t} + \overline{\rho C_p \mathbf{V}} \cdot \nabla T = T \Delta s \dot{\Gamma} + k \nabla \cdot \nabla T, \quad (4.74)$$

where  $\Delta s$  is the variation of entropy during the phase change and the latent heat of crystallization is defined as  $L = T \Delta s$  and  $k$  the thermal conductivity. The latent heat for crystallization of iron under core pressure has been estimated to 600-1200 kJ.kg<sup>-1</sup> (Poirier, 1994b; Anderson & Duba, 1997).

Assuming chemical equilibrium, the temperature is actually the melting temperature and the equation (4.74) is an equation to compute  $\dot{\Gamma}$ . For this problem, with a low particle concentration, the mean density is approximated by the density of the fluid.

#### 4.2.2.4 Horizontal layer

The system is approximated to an horizontal layer, with the bottom boundary being the inner core boundary and the top boundary at the top of the stratified layer. The seismic F-layer is about 200 km thick and the typical length scale of the surface of the inner core is  $\sqrt{4\pi r_{icb}^2} = 4000$  km, so this is a good approximation for the present day F-layer. First, we consider an horizontal symmetry. The gravity is considered constant in the layer, with  $g = 4/3\pi r_{icb} G$ .

**Equations** From the conservations of mass (4.69) and (4.71), we obtain

$$\frac{\partial}{\partial z} (\phi V_s + (1 - \phi) V_l) = 0 \quad (4.75)$$

and

$$\rho_p \frac{\partial \phi}{\partial t} + \rho_p \frac{\partial}{\partial z} (V_s \phi) = \dot{\Gamma}. \quad (4.76)$$

Conservation of light elements (4.73) and energy (4.74) give

$$\rho_f \left( \frac{\partial X}{\partial t} + (1 - \phi) V_l \frac{\partial X}{\partial z} \right) = 2X \dot{\Gamma} + \rho_f \kappa_X \left( (1 - \phi) \frac{\partial X}{\partial z} \right), \quad (4.77)$$

and

$$C_P \rho_f \frac{\partial T}{\partial t} + \overline{C_P \rho V} \frac{\partial T}{\partial z} = T \Delta s \dot{\Gamma} + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (4.78)$$

d. The energy conservation is written from the equation (4.63), with a negligible  $\Delta(h^1 - h^2)$ , and  $\Delta h^2$  which reduces to  $T \Delta s$  for an equilibrium melting  $\Delta \mu^2 = 0$ . Pressure variations, interactions between liquid and solid  $\Delta P$  are also negligible.

**Dimensionless equations** We use the dimensionless height  $h$  defined as

$$h = \frac{z - r_{ic}(t)}{d(t)}, \quad (4.79)$$

with  $r_{ic}$  the height of the bottom boundary representing the inner core boundary and  $d(t)$  the thickness of the stratified layer. Substituting this in the time derivative, two artificial advection terms appears as

$$\frac{\partial}{\partial t} = - \left( \frac{\dot{r}_{ic}}{d} + h \frac{\dot{d}}{d} \right) \frac{\partial}{\partial h} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (4.80)$$

We will note  $V_{eff}$  the effective artificial velocity  $\dot{r}_{ic} + h\dot{d}$ . Quantities are made dimensionless using reference quantities from table 4.1.

**Table 4.1:** Characteristic scales for every quantities

Quantity	Symbol	Characteristic scale	Symbol
Length	$z, d$	Present thickness of the layer	$d_0$
Velocity	$V_p, V_l$	Stokes velocity	$V_{s,0}$
Time	$t$		$d_0/V_{s,0}$
Density	$\rho_f, \rho_p$	Density of liquid at the ICB	$\rho_0$
Freezing rate	$\dot{\Gamma}$		$V_{s,0}\rho_0/d_0$
Light element concentration	$X$	Present concentration in the outer core	$X_0$
Temperature	$T, T_{liq}$	Melting temperature of pure iron at ICB	$T_{liq,0}$

Dimensionless equations for conservation of mass, momentum, light elements and energy are now written as

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{V_{eff}}{d} \frac{\partial \phi}{\partial h} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial h} (V_s \phi) + \frac{\dot{\Gamma}}{\rho_p}, \quad (4.81)$$

$$\frac{\partial}{\partial h} (\phi V_s + (1 - \phi) V_l) = 0, \quad (4.82)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{V_{eff} - (1 - \phi) V_l}{d} \frac{\partial X}{\partial h} + 2X \frac{\dot{\Gamma}}{\rho_p} + \frac{1}{d^2 Pe_X} \frac{\partial}{\partial h} \left( (1 - \phi) \frac{\partial X}{\partial h} \right), \quad (4.83)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{V_{eff} - \bar{V}}{d} \frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} T \dot{\Gamma} + \frac{1}{d^2 Pe_T} \frac{\partial^2 T}{\partial h^2}, \quad (4.84)$$

with

$$\gamma = \frac{C_p}{\Delta s}, \quad Pe_T = \frac{V_{s,0}d_0}{\kappa}, \quad Pe_X = \frac{V_{s,0}d_0}{\kappa_X}, \quad (4.85)$$

with  $\kappa = k/\rho C_p$  the thermal diffusivity and  $d$  the dimensionless thickness of the layer.

**Boundary condition at  $h = 0$  and  $h = 1$**  By construction of the variable  $h$ ,  $\bar{V} = 0$  for  $h = 0$ . Applying this to equation (4.82), the mean velocity is zero in the whole volume  $\bar{V} = 0$ . To solve the equations, we will also consider compositional boundary conditions as :  $X(h = 1) = X_0$  the concentration in the outer core and  $\phi V_s|_{h=1} = 0$ .

**Approximation  $V_{eff} \ll V_s$**  Considering that  $V_{eff} \ll V_s$  in the volume, we neglect  $V_{eff}$  in equation (4.81).

**Equilibrium melting** If considering equilibrium melting, the temperature profile is equal to the liquidus temperature defined previously in equation (4.64).

For a horizontal layer, with a constant density profile  $\rho = \rho_f$ , the pressure profile is linear as  $dP = -\rho g dr$  and  $P = P_{ref} - \rho_f g(z - r_{ic}) = P_{ref} - \rho_f g dh$ , because we consider a constant acceleratio of gravity  $g$ ,  $P_{ref}$  being the pressure reference at  $h = 0$ , the inner core boundary. The dimensionless temperature of the liquidus, with constant  $\frac{\partial T_{liq}}{\partial X} = m_X$  and  $\frac{\partial T_{liq}}{\partial P} = m_P$ , is

$$T_{liq} = 1 - \mathcal{M}_P h - X \mathcal{M}_X, \quad (4.86)$$

with  $\mathcal{M}_P = \rho_f g d m_P / T_{liq,0}$  and  $\mathcal{M}_X = m_X X_0 / (T_{liq,0})$  the dimensionless slopes of the solidus.

The density difference between liquid and solid is considered to be negligible everywhere except when computing the particles velocities, similar to the Boussinesq approximation commonly used when studying thermal convection.

To obtain the reference state, we compute solutions of the steady state  $\partial/\partial t = 0$ . The set of equations for the three variables  $\phi V_s$ ,  $X$  and  $\dot{\Gamma}$  is

$$\dot{\Gamma} = \frac{d}{dh}(\phi V_s), \quad (4.87)$$

$$(V_{eff} + \phi V_f) \frac{dX}{dh} + 2X\dot{\Gamma} + \frac{1}{Pe_X} \frac{d}{dh} \left( (1 - \phi) \frac{dX}{dh} \right) = 0, \quad (4.88)$$

$$\mathcal{M}_X V_{eff} \frac{dX}{dh} - V_{eff} \mathcal{M}_P + \frac{1}{\gamma} \dot{\Gamma} (1 - \mathcal{M}_P h - \mathcal{M}_X X) + \mathcal{M}_X \frac{1}{Pe_T} \frac{d^2 X}{dh^2} = 0. \quad (4.89)$$

Equation (4.87) is an equation for the freezing rate  $\dot{\Gamma}$ , which can then be eliminated from the two other equations. The remaining two equations, one of first order and one of second order, can be transformed into a set of three first order ordinary differential equations for the variables  $X$ ,  $Y = dX/dh$  and  $Z = \phi V_s$ . For  $Pe_X \rightarrow \infty$ , the system can be write as

$$\frac{dX}{dh} = Y, \quad (4.90)$$

$$\frac{dY}{dh} = \frac{Pe_T}{\mathcal{M}_X} \left( V_{eff} \mathcal{M}_P + \frac{(V_{eff} + Z)Y}{2X\gamma} (1 - \mathcal{M}_P h - \mathcal{M}_X X) - \mathcal{M}_X V_{eff} Y \right), \quad (4.91)$$

$$\frac{dZ}{dh} = -\frac{(V_{eff} + Z)Y}{2X}. \quad (4.92)$$

The equations are solved using a Runge-Kutta scheme, starting from the upper boundary at which the conditions have been defined in paragraph 4.2.2.4.

**Table 4.2:** Typical values of physical parameters

Parameter	Symbol	Value
Density	$\rho_0$	12800 kg.m <sup>-3</sup>
Thermal diffusivity	$k$	1.8 × 10 <sup>-5</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
Compositional diffusivity	$\lambda_X$	10 <sup>-9</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>
Thickness of the F-layer	$d_0$	200 km
Melting temperature of pure iron	$T_{liq,0}$	6250 K
Acceleration of gravity	$g$	4.4 m.s <sup>-2</sup>
Inner core growth	$\dot{r}_{ic}$	10 <sup>-11</sup> m.s <sup>-1</sup>
Entropy of crystallization	$\Delta s$	118 J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Heat capacity	$C_p$	850 J.kg <sup>-1</sup> .K <sup>-1</sup>
Liquidus slope (pressure dependence)	$m_P = \frac{\partial T_{liq,0}}{\partial P}$	9 × 10 <sup>-9</sup> K.Pa <sup>-1</sup>
Liquidus slope (temperature dependence)	$m_X = \frac{\partial T_{liq,0}}{\partial X}$	1.1 × 10 <sup>4</sup> K

#### 4.2.2.5 Comparison with seismic data

We compute the seismic velocity from the compositional stratification obtained with the set of equations developed in the previous paragraph. To do so, we use the method developed by Gubbins et al. (2008). The density profile is determined using ideal mixing solution by

$$\rho(z) = \frac{1}{X/\rho_L + (1 - X)/\rho_H} + \delta\rho_T + \delta\rho_P, \quad (4.93)$$

**Table 4.3:** Dimensionless parameters

Name	Definition	Value
$Pe_T$	$\frac{V_{s,0}d_0}{\kappa}$	$1.1 \times 10^6$
$Pe_X$	$\frac{V_{s,0}d_0}{\kappa_X}$	$2 \times 10^{10}$
$\gamma$	$\frac{C_P}{\Delta s}$	7.2
$V_{eff}$	$\frac{\dot{r}_{ic}}{V_{s,0}}$	$10^{-7}$
$\mathcal{M}_P$	$\frac{\rho_f g m_P d}{T_{liq,0}}$	$1.6 \times 10^{-2}$
$\mathcal{M}_X$	$\frac{X_0 m_X}{T_{liq,0}}$	$1.7 \times 10^{-1}$

where  $\rho_L$  and  $\rho_H$  are densities of respectively light and heavy elements at the reference level  $h = 1$ ,  $\delta\rho_T = -\rho_H\alpha T_{liq}(h)$  and  $\delta\rho_P = -\rho_H^2ghd/K$  the density variations due to the temperature and pressure profiles.  $\rho_H = 12530$  is the density of a liquid with the same elements as in the inner core at the ICB (Gubbins et al., 2008). The density  $\rho_L$  is defined using equation (4.93) at  $h = 1$ , with the density of the liquid in the outer core and  $X = 0.08$ .

With the density profile, the velocity of P-waves is calculated by  $V_P^2 = K/\rho$ , where the modulus  $K$  is obtained from PREM. We compare the obtained velocities with both the PREM profile and the AK135 profile. The value of the P-wave velocity at the bottom of the layer is used as a constraint of our model.

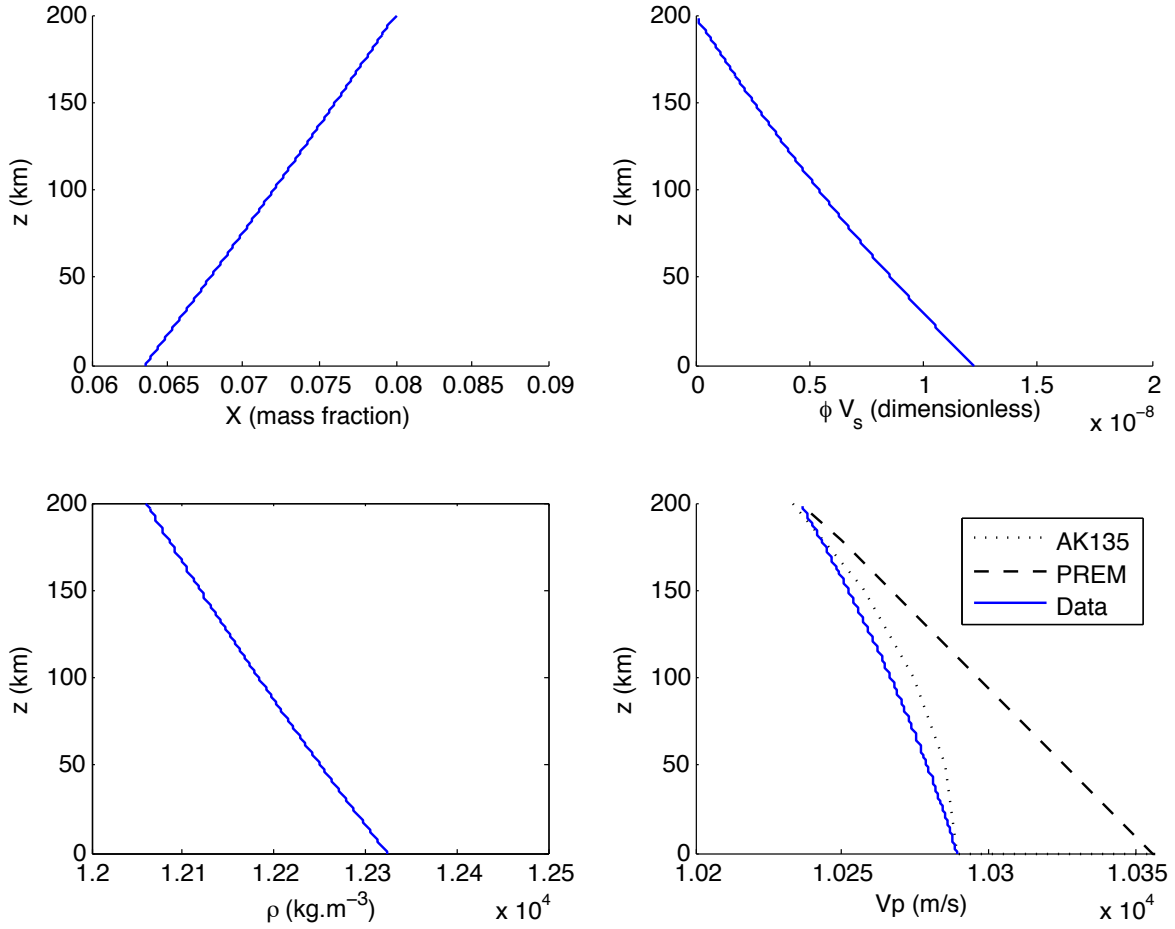
### 4.2.3 Results for an horizontal layer

The profiles obtained with the parameters from table 4.2 are plotted on figure 4.6 and are relatively close to the velocity profile observed in AK135. By construction, the bottom and top values are the AK135 value

#### 4.2.3.1 Parameter dependencies

To calculate the dependence of the profiles with several parameters, we compute the profiles for different set of parameters. For each figure, all the parameters are fixed on the typical values of table 4.2 except for one parameter of interest, which is defined in the legend. The dimensionless parameters are computed from the values of the physical





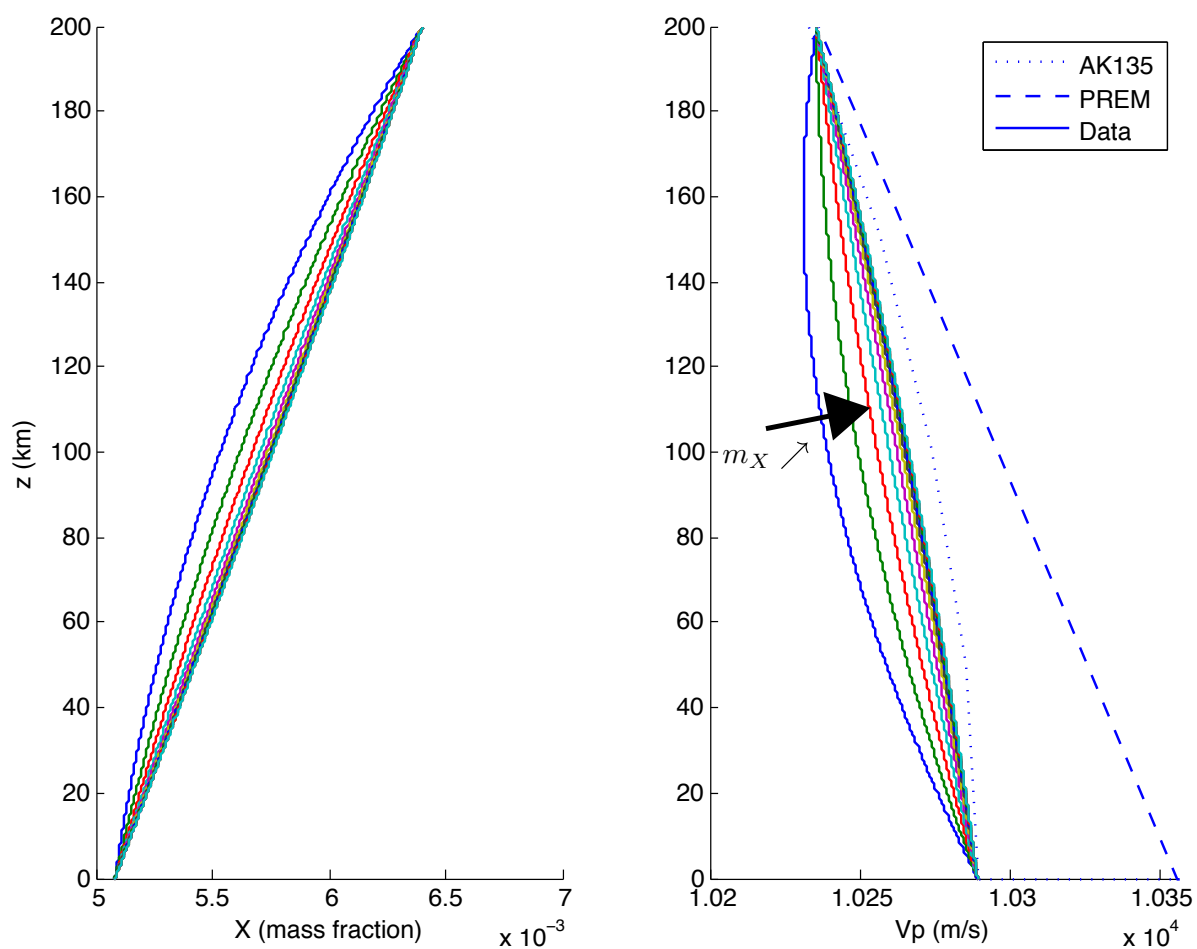
**Figure 4.6:** Profiles for physical parameters defined in table 4.2.

parameters, and the equations are solved to obtain the composition and P-wave velocity profiles. Evolution of the profile with the slope of the liquids  $m_X$ , thermal diffusivity  $\kappa$  and parameter  $\gamma$  are plotted on figures 4.7 to 4.9.

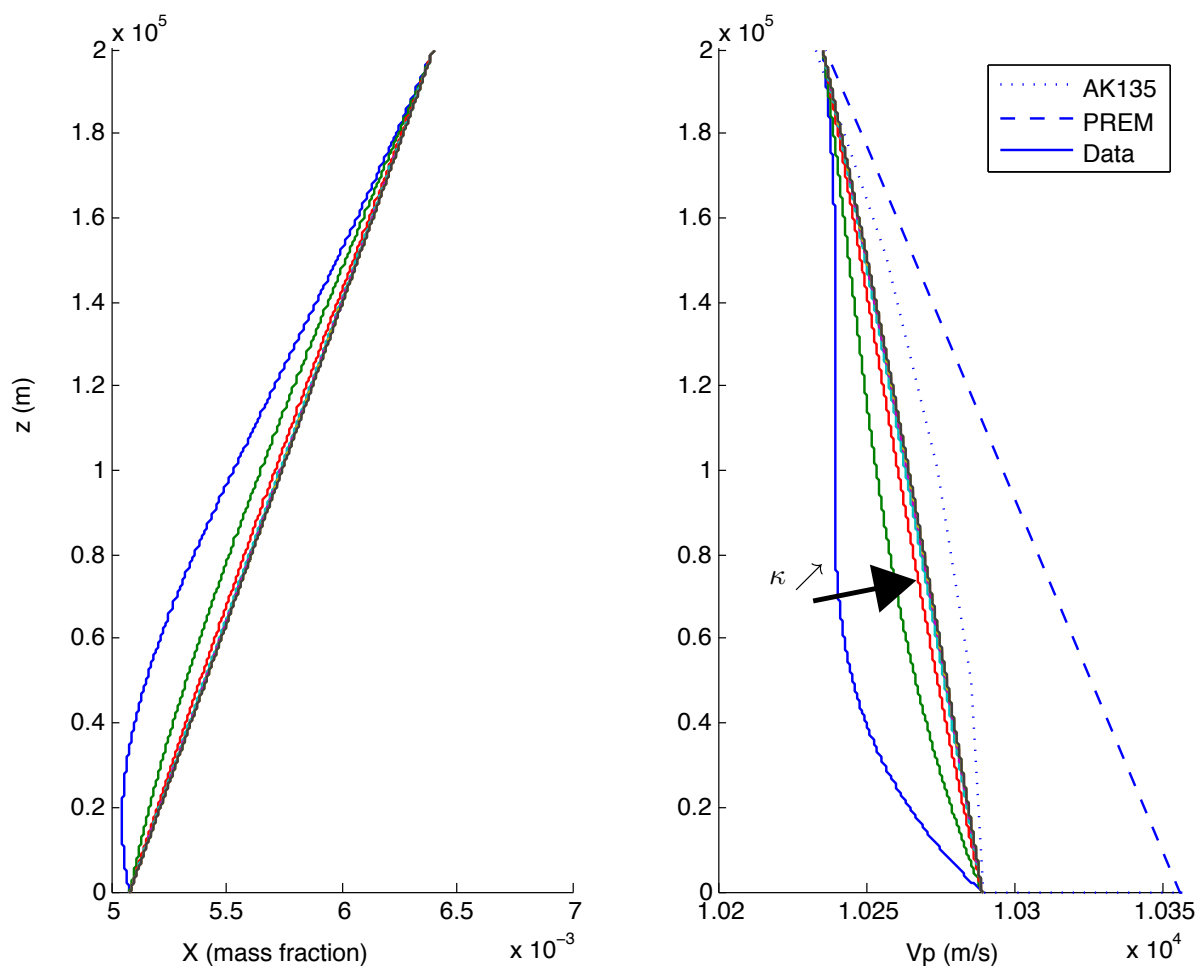
#### 4.2.3.2 Porosity and density profile

Unlike Gubbins et al. (2008), we aim to study the stability of a slurry layer compared to instabilities of the porosity profile. With our model, we compute the  $\phi V_s$  profile which is the solid flux through the horizontal layers in our problem. In our results, the solid flux  $\phi V_s$  decreases with radius, which is compatible with a stable solid fraction profile.

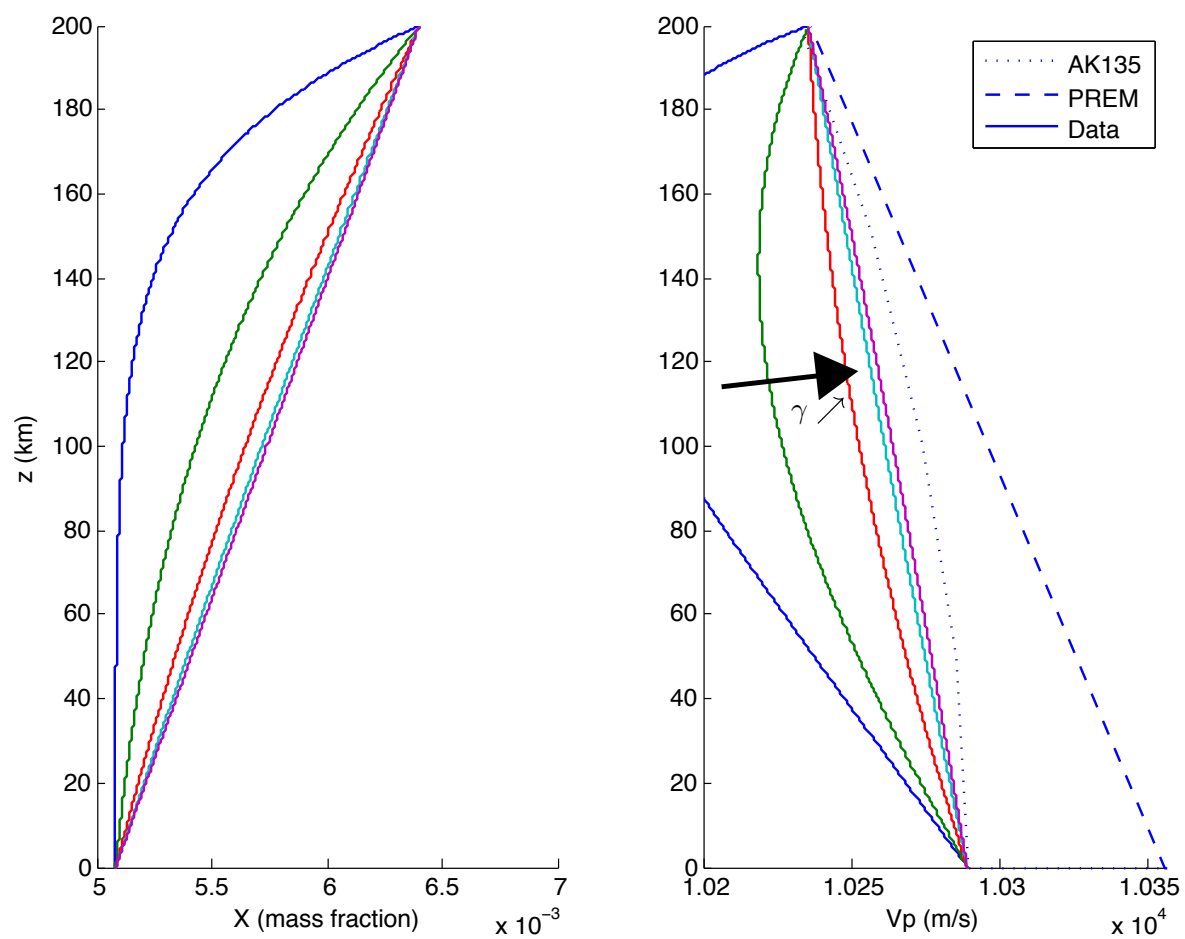
Sedimentation-induced instabilities are described in Blanchette & Bush (2005), where they develop a simple criterion for the stability of an initially uniform suspension settling



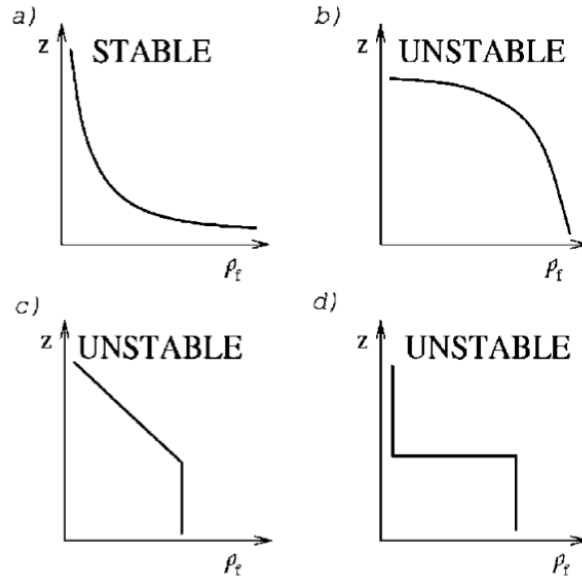
**Figure 4.7:** Profiles of composition and P-wave velocity for different values of the slope of the liquidus  $m_X$ .  $m_X$  varies from  $10^3$  to  $10^5$  K., with low values in blue.



**Figure 4.8:** Profiles of composition and P-wave velocity for different values of the thermal diffusivity  $\kappa$ .  $\kappa$  varies from  $2 \times 10^{-7}$  to  $2 \times 10^{-4}$  K., with low values in blue.



**Figure 4.9:** Profiles of composition and P-wave velocity for different values of the parameter  $\gamma$ .  $\gamma$  varies from  $7.2 \times 10^{-2}$  to  $7.2$  K., with low values in blue.



**Figure 4.10:** Stability of an initially uniform suspension settling in a stably stratified ambient as function of the liquid stratification. figure from [Blanchette & Bush \(2005\)](#).

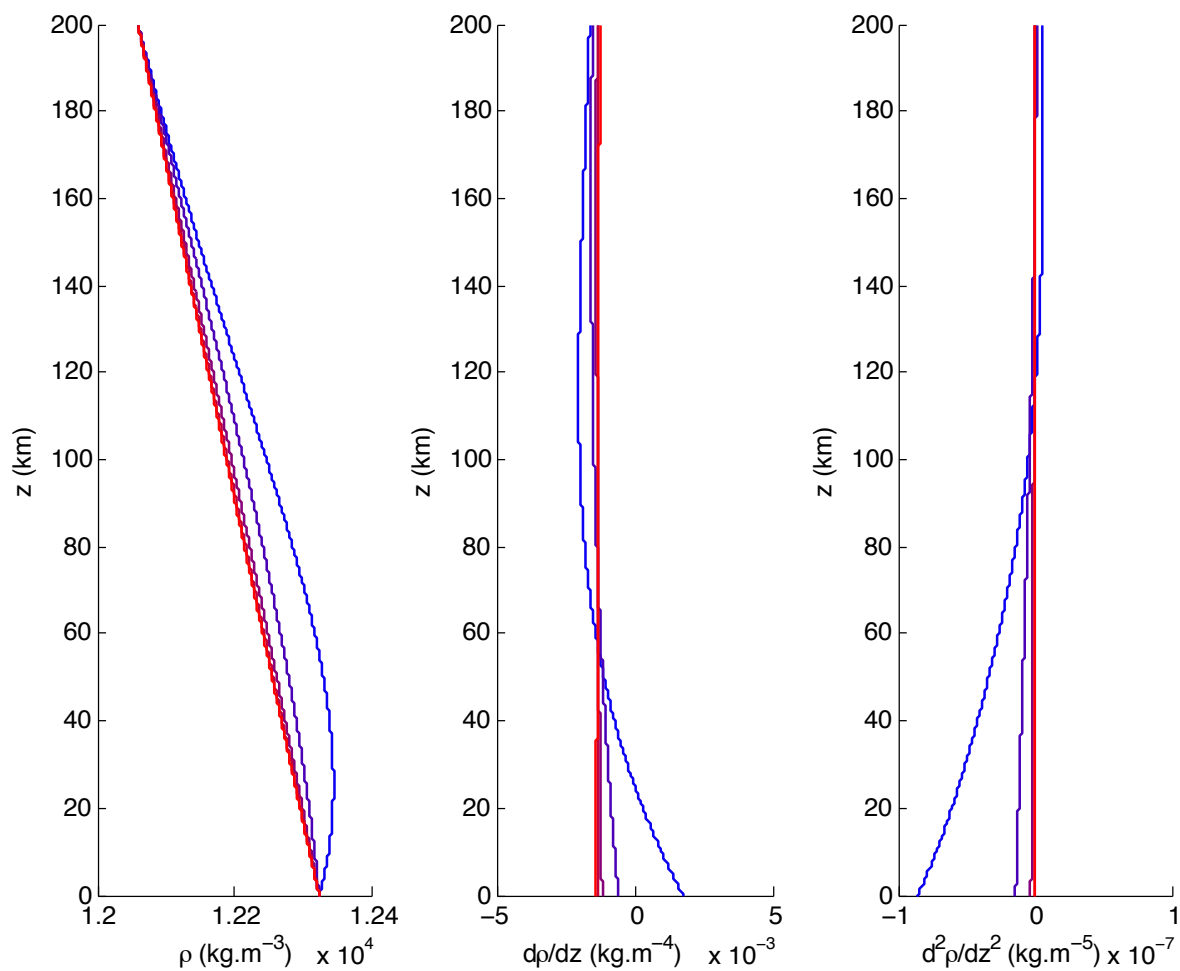
in a stably stratified ambient. An unstable profile is formed at a height  $z$  if

$$\left. \frac{d\rho_f}{dz} \right|_z > \frac{\rho_p - \rho_f(z_0)}{\rho_p - \rho_f(z)} \left( \phi(z_0) \left. \frac{d\rho_f}{dz} \right|_{z_0} - (\rho_p - \rho(z_0)) \left. \frac{d\phi}{dz} \right|_{z_0} \right), \quad (4.94)$$

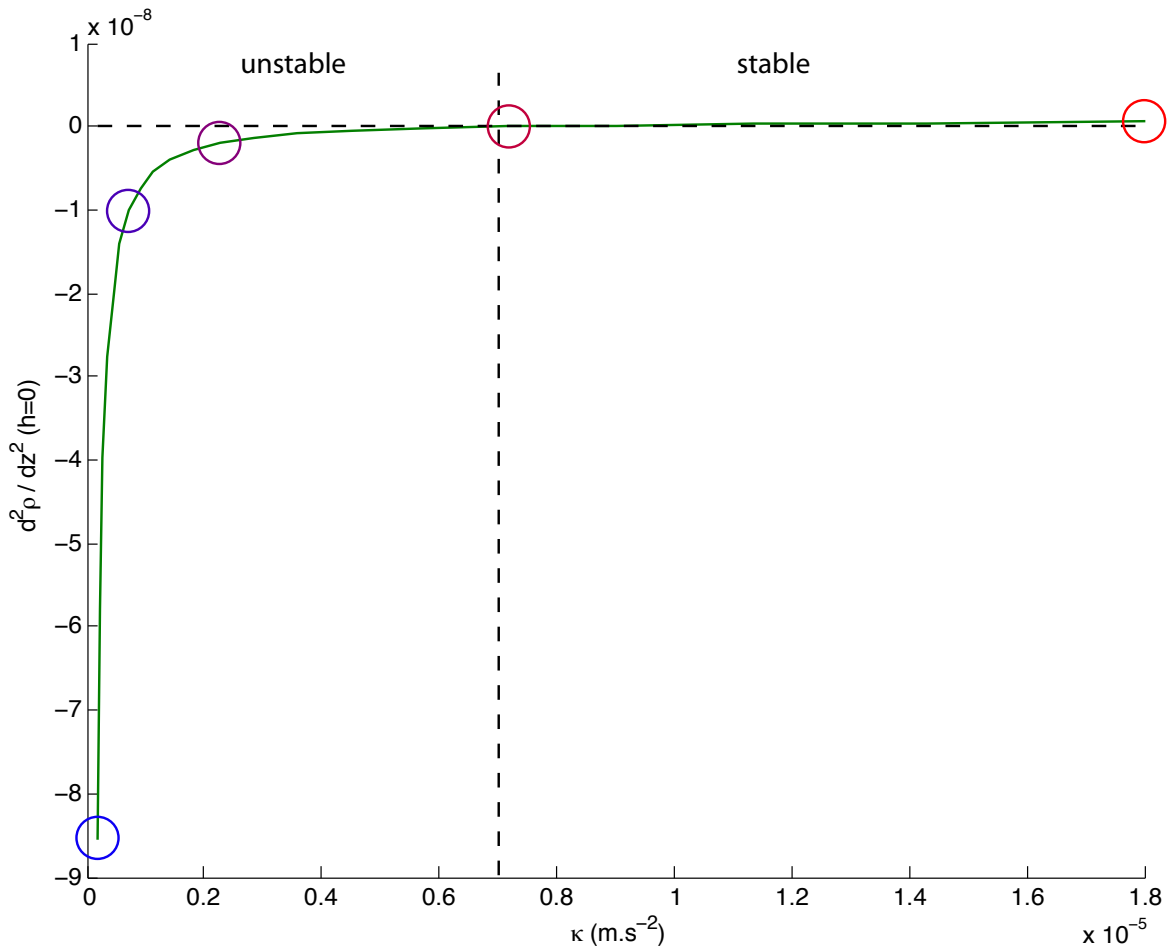
for every  $z_0$ .

This criteria is summarized on figure 4.10: the layer is stable if the density is larger at the bottom than at the top, and if the first derivative of the fluid density with height is negative and increasing with height. If the first or second derivatives are discontinuous, then the layer is unstable. If the density decreases more slowly with height at the bottom than at the top, then the layer is also unstable, even if the density seems stably stratified.

On figure 4.11, the profiles of density and its first and second derivatives are shown, for different values of thermal diffusivity  $\kappa$ . For the lowest diffusivity shown ( $\kappa = 1.8 \times 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ ), the profile is unstable because the first derivative has negative values. For a larger diffusivity, the profile could be stable, but the second derivative has to be carefully checked. The smaller value of the second derivative is obtained for  $h = 0$ , and so we plot the value of the second derivative of density as a function of the thermal diffusivity on figure 4.12. We obtain that the profile is stable compared to settling-induced instabilities as defined by [Blanchette & Bush \(2005\)](#) for thermal diffusivity larger than  $0.7 \times 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , which corresponds to a thermal conductivity of  $76 \text{ W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$ .



**Figure 4.11:** Profile for density and the first and second derivatives of the density as a function of  $z$  for 5 different values of the thermal diffusivity  $\kappa$ . For the smallest diffusivity ( $\kappa = 1.8 \times 10^{-7} \text{ m.s}^{-2}$ ), part of the profile is unstable because the first derivative is positive at the bottom of the layer. For larger diffusivity, the profile seems stable at first order, but with the criteria of [Blanchette & Bush \(2005\)](#), it may be unstable.



**Figure 4.12:** Second derivative of the density profile, taken for  $h = 0$ , as a function of the thermal diffusivity. Circles are values for thermal diffusivities plotted in figure 4.11.

#### 4.2.3.3 Estimation of the Stokes velocity

In this problem, the solid flux  $\phi V_s$  was prescribed to zero at the top of the layer, but no constraint was given for the bottom. The solid flux at  $h = 0$  is related to the inner core growth. Knowing the inner core growth, we thus estimate a scale for  $V_{s,0}$ . In our calculations, we used  $V_{s,0} = 10^{-4} \text{ m.s}^{-1}$ , the velocity in the outer core as an upper bound to compute the Peclet number. However, the bottom value of the solid flux does not depend on the Peclet number for our range of Peclet number. The value  $\phi V_s|_{h=0} = 1.2 \times 10^{-8}$  is equal to the growth rate of the inner core, taken as  $\dot{r}_{ic} = 0.5 \text{ km/Myrs}^e$ , and thus we obtain a Stokes velocity as  $V_{s,0} = 1.3 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ . This value is larger than the typical value of convection in the outer core, which is reasonable to allow the particles to fall from the top before being dragged by the outer core convection. The Stokes velocity is a function of the density difference between liquid and solid and of the radius of the particle,

e. This value is estimated from Labrosse (submitted) to have a reasonable total dissipation of 1.5 TW.

as given by equation (4.65). For a density difference of  $850 \text{ kg.m}^{-3}$  and a viscosity of the outer core of  $6 \times 10^{-3} \text{ Pa.s}$  (Poirier, 1988), the particles size is 0.1 mm. For this size, the particle Reynolds number is of order 0.1, which is coherent with the approximation given at the beginning of this chapter.

#### 4.2.4 Conclusion

---

In this section, we have obtained density, porosity and P-wave velocity profiles for the steady state of a slurry layer that can fit the seismic observations. From these profiles, the typical particle size in the layer is 0.1 mm. We computed the stability of the obtained profiles compared to density stability and sedimentation-induced stability. For large enough thermal conductivity, the profiles are stable. However, we did not compute yet the stability of the equations themselves for this profile.

In this chapter, we present a simplistic horizontal layer, with a linear pressure profile. This simplification is a good approximation for a thin F-layer, but it is not valid for a smaller inner core radius. In the near future, we will calculate also the dynamics in a spherical shell to investigate the complete evolution of this layer since the beginning of the freezing of the Earth's inner core. We expect that the results will not be too different from those presented above but the sphericity could change the curvatures of the different profiles. A more precise comparison to the seismic profile will then be more relevant.

The question of the formation of the layer is not considered here. During successive events of formation of the core, the pressure of equilibration between silicates and metal increases, and geochemical and geophysical models argue for an increasing temperature and amount of light elements in the metal phase. The initially stably stratified core should be mixed by giant impacts, allowing the core to convect and produce a magnetic field. However, it is possible that only part of the core was mixed and a stratified layer was maintained at the center of the core. Thus, the F-layer does not result from the inner core crystallization and dynamics, but a residual part of the initial stratification of the core. The slurry dynamics developed in this chapter is a way to explain how such an initial stratification can be stable even when the inner core is growing and light elements are released in the outer core.

The question of nucleation of crystals is tricky. Homogeneous nucleation which consider formation of nuclei from a completely homogeneous solution, is controlled by the energy gap to overcome the interfacial energy. For the nucleation of iron particles in the core, Shimizu et al. (2005) obtain a negligible number of nuclei formed by homogeneous nucleation. However, heterogeneous nucleation is still reasonable, and is assumed here.





# 5

## CONCLUSION GÉNÉRALE

---

Pendant cette thèse, je me suis intéressée à plusieurs aspects de la dynamique de la graine, en gardant toujours en tête la question principale : comment expliquer les observations sismiques ?

Depuis l'observation initiale de l'existence d'une anisotropie sismique dans la graine (Poupinet et al., 1983), les sismologues ont caractérisé précisément cette anisotropie en terme d'amplitude, de géométrie et de variations latérales. Ces observations sont d'autant plus robustes qu'elles ont été faites à la fois à partir de sets de données différents (ondes de volume et modes propres) mais aussi par plusieurs équipes de recherche différentes. Pourtant, trente ans après les premières observations, aucun modèle ne permet d'expliquer ces observations et les propriétés physiques, mécaniques et dynamiques de la graine restent mystérieuses. De nombreux mécanismes ont été proposés : déformation par un écoulement global donné (convection ou forçage extérieur), orientation des cristaux à la cristallisation, *etc.*

Dans ce travail de thèse, j'ai présenté quatre projets, en collaboration avec des chercheurs basés en France, au Japon et aux États Unis d'Amérique.

Revisitant les travaux de Karato (1999) et Buffett & Bloxham (2000), j'ai étudié la dynamique induite par la force de Lorentz dans la graine terrestre, en prenant en compte la stratification thermique ou chimique, la croissance de la graine et la vitesse de changement de phase à l'ICB. En explorant l'espace des paramètres, j'ai mis en évidence que, pour la graine terrestre, la dynamique est concentrée dans une couche fine sous l'ICB, avec des conditions aux limites mécaniques imperméables. Dans ces conditions, le taux de déformation est une fonction inversement proportionnelle à la viscosité. Pour obtenir une déformation détectable sismiquement, la viscosité de la graine devrait être inférieure à  $10^{14}$  Pa.s, c'est à dire dans la fourchette très basse des valeurs publiées.

Constatant que chaque modèle géodynamique publié choisit souvent les valeurs de viscosité, de stratification en densité et de forçage extérieur pour maximiser la déformation induite, j'ai proposé une manière de quantifier les déformations induites en fonction de ces paramètres. En reprenant un par un les mécanismes de déformation à grande échelle, le taux de déformation instantané maximal s'exprime comme une fonction de la viscosité et du signe et de l'amplitude de la stratification en densité. Nous avons montré que les modèles se classent globalement en deux groupes, selon le signe de la stratification : stratification en densité stable (les forçages extérieurs contrôlent l'écoulement) et stratification instable (la convection contrôle globalement l'écoulement et les forçages extérieurs sont susceptibles de l'orienter). La dynamique dépend ensuite, dans chacun de ces deux groupe, principalement de la viscosité. Nous avons obtenu un diagramme de régime qui donne, pour

une stratification et une viscosité donnée, le régime dominant (voir figure 3.5). À partir de ce diagramme de régime, on constate qu'aucune zone du diagramme n'est susceptible d'expliquer à la fois l'intensité, la géométrie et les variations latérales de l'anisotropie sismique. En particulier, on citera l'écoulement découlant d'une croissance préférentielle à l'équateur qui est un excellent candidat pour la géométrie globale de l'anisotropie, avec une symétrie cylindrique, à haute viscosité ( $\eta > 10^{22}$  Pa.s). Mais l'intensité de la déformation induite est trop faible par rapport à l'intensité de l'anisotropie détectée. La translation de la graine était aussi un autre mécanisme intéressant, car il induit de fait une dichotomie Est-Ouest. Pourtant, il est important de rappeler que la translation est une instabilité de convection, liée à un profil de densité instable et des conditions aux limites mécaniques perméables (avec changement de phase très rapide dès que l'ICB est déformée par des mouvements verticaux). Les valeurs récentes de conductivité thermique du fer à pression et température de la graine sont plusieurs fois les valeurs utilisées jusqu'alors, et pour obtenir une graine thermiquement instable, celle-ci doit être excessivement jeune ( $\tau_{ic} < 0.1$  Gyr). De plus, la translation est un mécanisme très rapide s'il a lieu qui effacerait donc toute mémoire de la graine et empêcherait donc le développement d'une texture anisotrope forte.

Une autre observation étonnante dans le noyau terrestre est la présence d'une couche présentant des vitesses d'ondes P en bas du noyau externe plus faibles qu'attendues pour un noyau parfaitement mélangé. Cette observation a été interprétée comme la présence d'une zone appauvrie en éléments légers au contact de l'ICB. Dans le cas où la cristallisation se fait principalement à l'ICB, cette couche devrait être mélangée par les panaches enrichis en éléments légers se formant à ce niveau. Pour expliquer cette anomalie sismique, je propose que la cristallisation se fasse en fait en volume dans la couche, sous forme de neige de fer, et j'ai étudié la stabilité du profil de densité et de fraction solide obtenu vis à vis des instabilités de sédimentation connues. Pour les paramètres de la graine, une telle couche, où sédimentent des particules de fer en croissance, est potentiellement stable et pourrait donc expliquer l'anomalie sismique. Il reste beaucoup à faire pour étudier la couche F avec ce modèle, pour se rapprocher un peu plus de la réalité : en terme de géométrie de la couche, d'évolution temporelle à l'échelle de l'âge de la graine, de composition du solide et du liquide, etc. Cette étude permettra de modéliser la composition du solide qui cristallise, et donc de voir comment l'existence de la F-layer joue sur les profils thermiques et chimiques de la graine.

Cette étude est un premier pas dans l'utilisation des équations d'un fluide biphasique pour étudier la dynamique de la graine. En effet, j'ai développé un système d'équation adapté à la graine pour étudier la dynamique liée à l'existence conjointe du solide et du liquide dans la zone supérieure de la graine. Ces équations sont très intéressantes car elles prennent en compte une thermodynamique de changement de phase cohérente. En particulier, je souhaiterais à terme revisiter la compaction de la partie supérieure de la graine étudiée par [Sumita et al. \(1996\)](#) en prenant en compte les interactions liées à l'enrichissement progressif du liquide qui est ensuite extrait par compaction. La présence de liquide est susceptible de provoquer des instabilités, comme cela a déjà été étudié pour

la lithosphère ([Hernlund et al., 2008b,a](#)), et ces instabilités pourraient permettre de mieux comprendre la structure de la zone sous la surface de la graine.

De nombreuses questions demeurent pour la graine, que ce soit sa dynamique ou ses propriétés physiques (thermiques, élastiques, plastiques). Pour autant, les progrès récents des expériences à haute pression en enclume à diamant sont encourageants. En contraignant mieux les propriétés élastiques à haute pression de l'alliage de fer et éléments légers que constitue la graine et le noyau, on sera alors capables de calculer directement pour chaque modèle un modèle sismique synthétique à comparer aux observations réelles. Et de la même façon que la publication récente de nouvelles valeurs pour la conductivité thermique nous ont forcé à repenser l'histoire thermique du noyau et de la graine, il serait intéressant que les expérimentateurs et les théoriciens s'intéressent à une détermination plus précise de la viscosité de la graine.



# BIBLIOGRAPHIE

- Ahern, J. & Turcotte, D., 1979. Magma migration beneath an ocean ridge, *Earth and Planetary Science Letters*, **45**(1), 115 – 122.
- Al-Khatatbeh, Y., Bergman, M. I., Lewis, D. J., Mason, Z., Zhu, L., & Rosenstock, S., 2013. Annealing of directionally solidified alloys revisited : No loss of solidification texture in Earth’s inner core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **223**, 32–39.
- Alboussière, T., Deguen, R., & Melzani, M., 2010. Melting-induced stratification above the Earth’s inner core due to convective translation, *Nature*, **466**(7307), 744–U9.
- Alexandrov, D. V. & Malygin, A. P., 2011. Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **189**(3-4), 134–141.
- Alfè, D., 2009. Temperature of the inner-core boundary of the earth : Melting of iron at high pressure from first-principles coexistence simulations, *Physical Review B*, **79**(6), 060101.
- Alfè, D., Gillan, M., & Price, G., 2002a. Complementary approaches to the ab initio calculation of melting properties, *Journal Of Chemical Physics*, **116**(14), 6170–6177.
- Alfè, D., Price, G., & Gillan, M., 2002b. Iron under Earth’s core conditions : Liquid-state thermodynamics and high-pressure melting curve from ab initio calculations, *Physical Review B*, **65**(16), 165118.
- Anderson, O. L. & Duba, A., 1997. Experimental melting curve of iron revisited, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **102**(B10), 22659–22669.
- Antonangeli, D., Merkel, S., & Farber, D. L., 2006. Elastic anisotropy in hcp metals at high pressure and the sound wave anisotropy of the earth’s inner core, *Geophysical Research Letters*, **33**(24).
- Anzellini, S., Dewaele, A., Mezouar, M., Loubeyre, P., & Morard, G., 2013. Melting of Iron at Earth’s Inner Core Boundary Based on Fast X-ray Diffraction, *Science*, **340**(6131), 464–466.
- Aubert, J. & Dumberry, M., 2010. Steady and fluctuating inner core rotation in numerical geodynamo models, *Geophysical Journal International*, **184**(1), 162–170.
- Aubert, J., Amit, H., Hulot, G., & Olson, P., 2008. Thermochemical flows couple the Earth’s inner core growth to mantle heterogeneity, *Nature*, **454**(7205), 758–761.
- Batchelor, G., 1972. Sedimentation in a dilute dispersion of spheres, *Journal of Fluid Mechanics*, **52**(02), 245–268.

- Beghein, C. & Trampert, J., 2003. Robust normal mode constraints on inner-core anisotropy from model space search, *Science*, **299**(5606), 552–555.
- Belonoshko, A. B., Ahuja, R., & Johansson, B., 2000. Quasi–ab initio molecular dynamic study of fe melting, *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 3638–3641.
- Belonoshko, A. B., Ahuja, R., & Johansson, B., 2003. Stability of the body-centred-cubic phase of iron in the earth’s inner core, *Nature*, **424**(6952), 1032–1034.
- Bercovici, D. & Ricard, Y., 2003. Energetics of a two-phase model of lithospheric damage, shear localization and plate-boundary formation, *Geophysical Journal International*, **152**(3), 581–596.
- Bercovici, D., Ricard, Y., & Schubert, G., 2001a. A two-phase model for compaction and damage 1. General theory, *Journal of Geophysical Research*, **106**(B5), 8887–8906.
- Bercovici, D., Ricard, Y., & Schubert, G., 2001b. A two-phase model for compaction and damage 3. Applications to shear localization and plate boundary formation, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **106**(B5), 8925–8939.
- Bergman, M. I., 1997. Measurements of electric anisotropy due to solidification texturing and the implications for the Earth’s inner core, *Nature*, **389**(6646), 60–63.
- Bergman, M. I., 1998. Estimates of the earth’s inner core grain size, *Geophysical research letters*, **25**(10), 1593–1596.
- Bergman, M. I., 2002. Preferred crystal orientations due to melt convection during directional solidification, *Journal of Geophysical Research*, **107**(B9), 2201.
- Bergman, M. I., Lewis, D. J., Myint, I. H., Slivka, L., Karato, S.-I., & Abreu, A., 2010. Grain growth and loss of texture during annealing of alloys, and the translation of Earth’s inner core, *Geophys. Res. Lett.*, **37**(22), L22313.
- Bergman, M. I., Al-Khatatbeh, Y., Lewis, D. J., & Shannon, M. C., 2014. Deformation of directionally solidified alloys : Evidence for microstructural hardening of earth’s inner core?, *Comptes Rendus Geoscience*, **346**(5–6), 140 – 147, Earth’s inner core.
- Birch, A. F., 1940. The alpha-gamma transformation of iron at high pressures, and the problem of the earth’s magnetism, *American Journal of Science*, **238**(3), 192–211.
- Birch, F., 1961. Composition of the earth’s mantle, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **4**(S0), 295–311.
- Birch, F., 1964. Density and composition of mantle and core, *Journal of Geophysical Research*, **69**(20), 4377–4388.
- Blanchette, F., 2013. Mixing and convection driven by particles settling in temperature-stratified ambients, *International Journal Of Heat And Mass Transfer*, **56**(1-2), 732–740.

- Blanchette, F. & Bush, J. W. M., 2005. Particle concentration evolution and sedimentation-induced instabilities in a stably stratified environment, *Physics of Fluids*, **17**(7), 073302.
- Boehler, R., 1993. Temperatures in the earth's core from melting-point measurements of iron at high static pressures, *Nature*, **363**(6429), 534–536.
- Braginsky, S., 1963. Structure of the f layer and reasons for convection in the earth's core, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **149**(6), 1311.
- Bréger, L., Romanowicz, B., & Rousset, S., 2000a. New constraints on the structure of the inner core from p'p', *Geophysical Research Letters*, **27**(17), 2781–2784.
- Bréger, L., Tkalčić, H., & Romanowicz, B., 2000b. The effect of d'' on PKP(ABĀĹŠDF) travel time residuals and possible implications for inner core structure, *Earth and Planetary Science Letters*, **175**(1–2), 133 – 143.
- Brown, J. M. & McQueen, R. G., 1986. Phase transitions, grüneisen parameter, and elasticity for shocked iron between 77 gpa and 400 gpa, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, **91**(B7), 7485–7494.
- Brush, S. G., 1980. Discovery of the earth's core, *American Journal of Physics*, **48**(9), 1–20.
- Buffett, B., Huppert, H., & Lister, J., 1996. On the thermal evolution of the Earth's core, *Journal of Geophysical Research*.
- Buffett, B. A., 1997. Geodynamic estimates of the viscosity of the Earth's inner core, *Nature*, **388**(6642), 571–573.
- Buffett, B. A., 2000a. *Dynamics of the Earth's Core*, pp. 37–62, American Geophysical Union.
- Buffett, B. A., 2000b. Sediments at the Top of Earth's Core, *Science*, **290**(5495), 1338–1342.
- Buffett, B. A., 2009. Onset and orientation of convection in the inner core, *Geophysical Journal International*, **179**(2), 711–719.
- Buffett, B. A., 2010. Tidal dissipation and the strength of the earth's internal magnetic field, *Nature*, **468**(7326), 952–954.
- Buffett, B. A. & Bloxham, J., 2000. Deformation of Earth's inner core by electromagnetic forces, *Geophysical Research Letter*, **27**(24), 4001–4004.
- Buffett, B. A. & Wenk, H. R., 2001. Texturing of the Earth's inner core by Maxwell stresses, *Nature*, **413**(6851), 60–63.



- Buffett, B. A., Huppert, H. E., Lister, J. R., & Woods, A. W., 1992. Analytical model for solidification of the Earth's core, *Nature*, **356**(6367), 329–331.
- Callen, H. B., 1985. *Thermodynamics and an introduction to thermostatistics*, Wiley, 2nd edn.
- Cao, A. & Romanowicz, B., 2004. Constraints on density and shear velocity contrasts at the inner core boundary, *Geophysical Journal International*, **157**(3), 1146–1151.
- Cao, A. & Romanowicz, B., 2007. Test of the innermost inner core models using broadband pkikp travel time residuals, *Geophysical Research Letters*, **34**(8), n/a–n/a.
- Cao, A., Romanowicz, B., & Takeuchi, N., 2005. An observation of PKJKP : inferences on inner core shear properties, *Science*, **308**(5727), 1453–1455.
- Chandrasekhar, S., 1961. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford University Press.
- Christensen, U. R. & Aubert, J., 2006. Scaling properties of convection-driven dynamos in rotating spherical shells and application to planetary magnetic fields, *Geophysical Journal International*, **166**(1), 97–114.
- Cormier, V. F. & Stroujkova, A., 2005. Waveform search for the innermost inner core, *Earth and Planetary Science Letters*, **236**(1–2), 96 – 105.
- Cormier, V. F., Attanayake, J., & He, K., 2011. Inner core freezing and melting : Constraints from seismic body waves, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **188**(3-4), 163–172.
- Côté, A. S., Vočadlo, L., & Brodholt, J. P., 2008. Light elements in the core : Effects of impurities on the phase diagram of iron, *Geophysical Research Letters*, **35**(5).
- Cottaar, S. & Buffett, B., 2012. Convection in the Earth's inner core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **198-199**(C), 67–78.
- Crank, J., 1984. *Free and moving boundary problems*, Oxford University Press.
- Creager, K., 1999. Large-scale variations in inner core anisotropy, *Journal of Geophysical Research*, **104**(B10), 23127–23,139.
- Davies, C. J., Stegman, D. R., & Dumberry, M., 2014. The strength of gravitational core-mantle coupling, *Geophys. Res. Lett.*, **41**(11), 3786–3792.
- De Groot, S. & Mazur, P., 1984. *Non-equilibrium thermodynamics*, Dover, New York.
- de Koker, N. & Steinle-Neumann, G., 2012. Electrical resistivity and thermal conductivity of liquid Fe alloys at high P and T, and heat flux in Earth's core, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **109**(11), 4070–4073,.

- de Wit, R., Käuff, P., Valentine, A., & Trampert, J., 2014. Bayesian inversion of free oscillations for earth's radial (an)elastic structure, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.
- Deguen, R., 2012. Structure and dynamics of Earth's inner core, *Earth And Planetary Science Letters*, **333-334**(C), 211–225.
- Deguen, R. & Cardin, P., 2009. Tectonic history of the Earth's inner core preserved in its seismic structure, *Nature Geoscience*, **2**(6), 419–422.
- Deguen, R. & Cardin, P., 2011. Thermochemical convection in Earth's inner core, *Geophysical Journal International*, **187**(3), 1101–1118.
- Deguen, R., Alboussière, T., & Brito, D., 2007. On the existence and structure of a mush at the inner core boundary of the Earth, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **164**(1-2), 36–49.
- Deguen, R., Cardin, P., Merkel, S., & Lebensohn, R. A., 2011. Texturing in Earth's inner core due to preferential growth in its equatorial belt, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **188**(3-4), 173–184.
- Deguen, R., Alboussière, T., & Cardin, P., 2013. Thermal convection in Earth's inner core with phase change at its boundary, *Geophysical Journal International*, **194**(3), 1310–1334.
- Deuss, A., 2014. Heterogeneity and Anisotropy of Earth's Inner Core, *Annual Review Of Earth And Planetary Sciences*, **42**(1), 103–126.
- Deuss, A., Woodhouse, J. H., Paulssen, H., & Trampert, J., 2000. The observation of inner core shear waves, *Geophysical Journal International*, **142**, 67–73.
- Deuss, A., Irving, J. C. E., & Woodhouse, J. H., 2010. Regional Variation of Inner Core Anisotropy from Seismic Normal Mode Observations, *Science*, **328**(5981), 1018–1020.
- Durek, J. J. & Romanowicz, B., 1999. Inner core anisotropy inferred by direct inversion of normal mode spectra, *Geophysical Journal International*, **139**(3), 599–622.
- Dziewoński, A. M. & Anderson, D. L., 1981. Preliminary reference Earth model, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **25**(4), 297–356.
- Dziewoński, A. M. & Gilbert, F., 1971. Solidity of the inner core of the Earth inferred from normal mode observations, *Nature*, **234**, 465–466.
- Fearn, D. R., Loper, D. E., & Roberts, P. H., 1981. Structure of the Earth's Inner Core, *Nature*, **292**(5820), 232–233.

- Fischer, R. A., Campbell, A. J., Caracas, R., Reaman, D. M., Dera, P., & Prakapenka, V. B., 2012. Equation of state and phase diagram of Fe–16Si alloy as a candidate component of Earth's core, *Earth and Planetary Science Letters*, **357**, 268–276.
- Frank, F., 1968. Two-component flow model for convection in the Earth's upper mantle, *Nature*, **220**(5165), 350–352.
- Garcia, R., 2002. Constraints on upper inner-core structure from waveform inversion of core phases, *Geophysical Journal International*, **150**(3), 651–664.
- Garcia, R. & Souriau, A., 2000. Inner core anisotropy and heterogeneity level, *Geophysical Research Letters*, **27**(19), 3121–3124.
- Garcia, R., Tkalčić, H., & Chevrot, S., 2006. A new global PKP data set to study Earth's core and deep mantle, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **159**(1–2), 15 – 31.
- Geballe, Z. M., Lasbleis, M., Cormier, V. F., & Day, E. A., 2013. Sharp hemisphere boundaries in a translating inner core, *Geophysical Research Letters*, **40**(9), 1719–1723.
- Gillet, N., Jault, D., Canet, E., & Fournier, A., 2010. Fast torsional waves and strong magnetic field within the Earth's core, *Nature*, **465**(7294), 74–77.
- Glatzmaier, G. A. & Roberts, P. H., 1995. A three-dimensional convective dynamo solution with rotating and finitely conducting inner core and mantle, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **91**(1–3), 63 – 75, Study of the Earth's Deep Interior.
- Glatzmaier, G. A. & Roberts, P. H., 1996. Rotation and magnetism of Earth's inner core, *Science*, **274**(5294), 1887–1891.
- Gleason, A. E. & Mao, W. L., 2013. Strength of iron at core pressures and evidence for a weak Earth's inner core, *Nature Geoscience*, **6**, 571–574.
- Gomi, H., Ohta, K., Hirose, K., Labrosse, S., Caracas, R., Verstraete, M. J., & Hernlund, J. W., 2013. The high conductivity of iron and thermal evolution of the Earth's core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **224**(C), 88–103.
- Gubbins, D. & Davies, C. J., 2013. The stratified layer at the core–mantle boundary caused by barodiffusion of oxygen, sulphur and silicon, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **215**, 21–28.
- Gubbins, D., Alfè, D., Masters, G., Price, G., & Gillan, M., 2003. Can the Earth's dynamo run on heat alone?, *Geophysical Journal International*, **155**(2), 609–622.
- Gubbins, D., Masters, G., & Nimmo, F., 2008. A thermochemical boundary layer at the base of Earth's outer core and independent estimate of core heat flux, *Geophysical Journal International*, **174**(3), 1007–1018.

- Gubbins, D., Sreenivasan, B., & Mound, J., 2011. Melting of the Earth's inner core, *Nature*, **473**(7347), 361–363.
- Gubbins, D., Alfè, D., & Davies, C. J., 2013. Compositional instability of earth's solid inner core, *Geophysical Research Letters*, **40**(6), 1084–1088.
- Hernlund, J. W., Stevenson, D. J., & Tackley, P. J., 2008a. Buoyant melting instabilities beneath extending lithosphere : 2. Linear analysis, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **113**(B4), B04406.
- Hernlund, J. W., Tackley, P. J., & Stevenson, D. J., 2008b. Buoyant melting instabilities beneath extending lithosphere : 1. numerical models, *J. Geophys. Res.*, **113**(B4), B04405.
- Irving, J. & Deuss, A., 2011a. Hemispherical structure in inner core velocity anisotropy, *Journal of Geophysical Research*, **116**(B4), 2011.
- Irving, J. C. E. & Deuss, A., 2011b. Stratified anisotropic structure at the top of Earth's inner core : A normal mode study, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **186**(1-2), 59–69.
- Ishii, M. & Dziewoński, A. M., 2002. The innermost inner core of the earth : Evidence for a change in anisotropic behavior at the radius of about 300 km, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **99**(22), 14026–14030.
- Ishii, M., Dziewoński, A. M., Tromp, J., & Ekström, G., 2002. Joint inversion of normal mode and body wave data for inner core anisotropy 2. possible complexities, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **107**(B12), ESE 21–1–ESE 21–17.
- Jackson, J. M., Sturhahn, W., Lerche, M., Zhao, J., Toellner, T. S., Alp, E. E., Sinogeikin, S. V., Bass, J. D., Murphy, C. A., & Wicks, J. K., 2013. Melting of compressed iron by monitoring atomic dynamics, *Earth and Planetary Science Letters*, **362**, 143–150.
- Jeanloz, R. & Wenk, H. R., 1988. Convection and anisotropy of the inner core, *Geophysical Research Letters*, **15**(1), 72–75.
- Jeffreys, H., 1926. The Rigidity of the Earth's Central Core., *Geophysical Journal International*, **1**, 371–383.
- Julian, B., Davies, D., & Sheppard, R., 1972. PKJKP, *Nature*, **235**(5337), 317–318.
- Kamada, S., Ohtani, E., Terasaki, H., Sakai, T., Miyahara, M., Ohishi, Y., & Hirao, N., 2012. Melting relationships in the fe–fe<sub>3</sub>s system up to the outer core conditions, *Earth and Planetary Science Letters*, **359**, 26–33.
- Karato, S., 1993. Inner Core Anisotropy Due to the Magnetic Field—induced Preferred Orientation of Iron, *Science*, **262**(5140), 1708–1711.

- Karato, S., 1999. Seismic anisotropy of the Earth's inner core resulting from flow induced by Maxwell stresses, *Nature*, **402**(6764), 871–873.
- Karato, S., 2000. Dynamics and anisotropy of the Earth's inner core, pp. 1–6.
- Kennett, B., Engdahl, E. R., & Buland, R., 1995. Constraints on seismic velocities in the Earth from traveltimes, *Geophysical Journal International*, **122**(1), 108–124.
- Komabayashi, T., Fei, Y., Meng, Y., & Prakapenka, V., 2009. In-situ x-ray diffraction measurements of the  $\gamma$ - $\epsilon$  transition boundary of iron in an internally-heated diamond anvil cell, *Earth and Planetary Science Letters*, **282**(1), 252–257.
- Koot, L. & Dumberry, M., 2011. Viscosity of the Earth's inner core : Constraints from nutation observations, *Earth And Planetary Science Letters*, **308**(3-4), 343–349.
- Koot, L. & Dumberry, M., 2013. The role of the magnetic field morphology on the electromagnetic coupling for nutations, *Geophysical Journal International*, **195**(1), 200–210.
- Labrosse, S., 2003. Thermal and magnetic evolution of the Earth's core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **140**(1), 127–143.
- Labrosse, S., 2014. Thermal and compositional stratification of the inner core, *Comptes Rendus Geoscience*, **346**(5–6), 119–129.
- Labrosse, S., submitted. Thermal evolution of the core with a high thermal conductivity, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*.
- Labrosse, S., Poirier, J., & LeMouel, J., 1997. On cooling of the Earth's core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **99**(1-2), 1–17.
- Labrosse, S., Poirier, J., & Le Mouel, J., 2001. The age of the inner core, *Earth And Planetary Science Letters*, **190**(3-4), 111–123.
- Laio, A., Bernard, S., Chiarotti, G. L., Scandolo, S., & Tosatti, E., 2000. Physics of iron at earth's core conditions, *Science*, **287**(5455), 1027–1030.
- Landau, L. D. & Lifshitz, E. M., 1980. *Statistical Physics, Part 1 : Volume 5*, Course of theoretical physics, Butterworth-Heinemann.
- Lasbleis, M. & Deguen, R., In review. Building a regime diagram for the earth's inner core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*.
- Lasbleis, M., Deguen, R., Cardin, P., & Labrosse, S., submitted. Inner core dynamics induced by the lorentz force, *Geophysical Journal International*.
- Lehmann, I., 1936. P', *Bur. Centr. Seism. Internat. Serie A*.

- Lincot, A., Deguen, R., Merkel, S., & Cardin, P., 2014. Seismic response and anisotropy of a model hcp iron inner core, *Comptes Rendus Geoscience*, **346**(5-6), 148–157.
- Loper, D. E. & Roberts, P. H., 1981. A study of conditions at the inner core boundary of the Earth, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **24**(4), 302–307.
- Lythgoe, K. H., Deuss, A., Rudge, J. F., & Neufeld, J. A., 2014. Earth's inner core : Innermost inner core or hemispherical variations ?, *Earth And Planetary Science Letters*, **385**(C), 181–189.
- Mäkinen, A. M. & Deuss, A., 2011. Global seismic body-wave observations of temporal variations in the earth's inner core, and implications for its differential rotation, *Geophysical Journal International*, **187**(1), 355–370.
- Mao, H.-k., Shu, J., Shen, G., Hemley, R. J., Li, B., & Singh, A. K., 1998. Elasticity and rheology of iron above 220 GPa and the nature of the Earth's inner core, *Nature*, **396**(6713), 741–743.
- Martorell, B., Vočadlo, L., Brodholt, J., & Wood, I. G., 2013. Strong premelting effect in the elastic properties of hcp-fe under inner-core conditions, *Science*, **342**(6157), 466–468.
- Masters, G. & Gubbins, D., 2003. On the resolution of density within the Earth, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **140**(1–3), 159–167.
- McDonough, W. & Sun, S., 1995. The composition of the Earth, *Chemical Geology*, **120**(3-4), 223–253.
- McKenzie, D. P., 1984. The generation and compaction of partially molten rock, *Journal of Petrology*, **25**(3), 713–765.
- Mizzon, H. & Monnereau, M., 2013. Implication of the lopsided growth for the viscosity of Earth's inner core, *Earth And Planetary Science Letters*, **361**, 391–401.
- Monnereau, M., Calvet, M., Margerin, L., & Souriau, A., 2010. Lopsided Growth of Earth's Inner Core, *Science*, **328**(5981), 1014–1017.
- Morard, G., Andrault, D., Antonangeli, D., & Bouchet, J., 2014. Properties of iron alloys under the earth's core conditions, *Comptes Rendus Geoscience*, **346**(5–6), 130 – 139, Earth's inner core.
- Morelli, A., Dziewoński, A. M., & Woodhouse, J. H., 1986. Anisotropy of the inner core inferred from PKIKP travel times, *Geophysical Research Letters*, **13**(13), 1545–1548.
- Mound, J. E. & Buffett, B. A., 2006. Detection of a gravitational oscillation in length-of-day, *Earth And Planetary Science Letters*, **243**(3-4), 383–389.

- Nguyen, J. H. & Holmes, N. C., 2004. Melting of iron at the physical conditions of the earth's core, *Nature*, **427**(6972), 339–342.
- Nimmo, F., 2007. Energetics of the Core, *Treatise on Geophysics*, **8**, 31–66.
- Okal, E. A. & Cansi, Y., 1998. Detection of pkjpk at intermediate periods by progressive multi-channel correlation, *Earth and planetary science letters*, **164**(1), 23–30.
- Oster, G. & Yamamoto, M., 1963. Density Gradient Techniques, *Chemical Reviews*, **63**(3), 257–&.
- Poirier, J., 1988. Transport properties of liquid metals and viscosity of the earth's core, *Geophysical Journal International*, **92**(1), 99–105.
- Poirier, J.-P., 1994a. Light elements in the earth's outer core : A critical review, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **85**(3–4), 319 – 337.
- Poirier, J. P., 1994b. Physical properties of the earth's core, *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Earth planetary sciences. Série II. Sciences de la terre et des planètes*, **318**(3), 341–350.
- Poupinet, G., Pillet, R., & Souriau, A., 1983. Possible heterogeneity of the Earth's core deduced from PKIKP travel times, *Nature*, **305**, 204–206.
- Pozzo, M., Davies, C., Gubbins, D., & Alfè, D., 2012. Thermal and electrical conductivity of iron at Earth's core conditions, *Nature*, **485**(7398), 355–358.
- Pozzo, M., Davies, C., Gubbins, D., & Alfè, D., 2014. Thermal and electrical conductivity of solid iron and iron–silicon mixtures at Earth's core conditions, *Earth And Planetary Science Letters*, **393**, 159–164.
- Reaman, D., Colijn, H., Yang, F., Hauser, A., & Panero, W., 2012. Interdiffusion of earth's core materials to 65gpa and 2200k, *Earth and Planetary Science Letters*, **349**, 8–14.
- Reaman, D. M., Daehn, G. S., & Panero, W. R., 2011. Predictive mechanism for anisotropy development in the Earth's inner core, *Earth And Planetary Science Letters*, **312**(3-4), 437–442.
- Ribe, N., 2007. Analytical approaches to mantle dynamics, *Treatise on Geophysics*, **7**, 167–226.
- Ribe, N. M., 1985a. The deformation and compaction of partial molten zones, *Geophysical Journal International*, **83**(2), 487–501.
- Ribe, N. M., 1985b. The generation and composition of partial melts in the earth's mantle, *Earth and Planetary Science Letters*, **73**(2), 361–376.



- Ricard, Y., 2007. Physics of mantle convection, *Treatise on Geophysics*, **7**, 31–87.
- Ricard, Y. & Vigny, C., 1989. Mantle dynamics with induced plate tectonics, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, **94**(B12), 17543–17559.
- Ricard, Y., Bercovici, D., & Schubert, G., 2001. A two-phase model for compaction and damage 2. Applications to compaction, deformation, and the role of interfacial surface tension, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **106**(B5), 8907–8924.
- Roberts, P. H., 2007. Theory of the geodynamo, *Treatise on Geophysics*, **8**, 67–105.
- Romanowicz, B. & Bréger, L., 2000. Anomalous splitting of free oscillations : A reevaluation of possible interpretations, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **105**(B9), 21559–21578.
- Romanowicz, B., Tkalčić, H., & Bréger, L., 2003. *Earth's Core : Dynamics, Structure, Rotation*, vol. 31 of **AGU Geodynamics Series**, chap. On the Origin of Complexity in Pkp Travel Time Data, pp. 31–44, American Geophysical Union.
- Rudge, J., Bercovici, D., & Spiegelman, M., 2011. Disequilibrium melting of a two phase multicomponent mantle, *Geophysical Journal International*, **184**(2), 699–718.
- Scott, D. R. & Stevenson, D. J., 1984. Magma solitons, *Geophysical Research Letters*, **11**(11), 1161–1164.
- Sha, X. & Cohen, R. E., 2010. Elastic isotropy of ÉŽ-fe under earth's core conditions, *Geophysical Research Letters*, **37**(10), n/a–n/a.
- Shearer, P. & Masters, G., 1990. The density and shear velocity contrast at the inner core boundary, *Geophysical Journal International*, **102**(2), 491–498.
- Shearer, P. M., Toy, K. M., & Orcutt, J. A., 1988. Axi-symmetric Earth models and inner-core anisotropy, *Nature*, **333**(6170), 228–232.
- Shen, G., Prakapenka, V. B., Rivers, M. L., & Sutton, S. R., 2004. Structure of liquid iron at pressures up to 58 gpa, *Physical review letters*, **92**(18), 185701.
- Shimizu, H., Poirier, J., & Le Mouél, J., 2005. On crystallization at the inner core boundary, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **151**(1-2), 37–51.
- Singh, S. C., Taylor, M., & Montagner, J. P., 2000. On the presence of liquid in Earth's inner core, *Science*, **287**(5462), 2471–2474.
- Song, X. & Helmberger, D. V., 1992. Velocity structure near the inner core boundary from waveform modeling, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth (1978–2012)*, **97**(B5), 6573–6586.



- Song, X. & Helmberger, D. V., 1995. A P wave velocity model of Earth's core, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **100**(B6), 9817–9830.
- Song, X. & Helmberger, D. V., 1998. Seismic Evidence for an Inner Core Transition Zone, *Science*, **282**(5390), 924–927.
- Song, X. & Poupinet, G., 2007. Inner core rotation from event-pair analysis, *Earth and Planetary Science Letters*, **261**(1), 259–266.
- Song, X. & Richards, P. G., 1996. Seismological evidence for differential rotation of the earth's inner core, *Nature*, **382**(6588), 221–224.
- Souriau, A., 1998. New seismological constraints on differential rotation of the inner core from novaya zemlya events recorded at drv, antarctica, *Geophysical Journal International*, **134**(2), F1–F5.
- Souriau, A., 2007. The earth's cores, *Treatise on Geophysics*, **1**.
- Souriau, A. & Poupinet, G., 1991. The velocity profile at the base of the liquid core from PKP (BC+ Cdiff) data : An argument in favour of radial inhomogeneity, *Geophysical Research Letters*, **18**(11), 2023–2026.
- Souriau, A. & Poupinet, G., 2000. Inner core rotation : a test at the worldwide scale, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **118**(1–2), 13 – 27.
- Souriau, A., Garcia, R., & Poupinet, G., 2003. The seismological picture of the inner core : structure and rotation, *Comptes Rendus Geoscience*, **335**(1), 51–63.
- Spiegelman, M., 1993a. Flow in deformable porous media. part 1 simple analysis, *Journal of Fluid Mechanics*, **247**, 17–38.
- Spiegelman, M., 1993b. Flow in deformable porous media. part 2 numerical analysis—the relationship between shock waves and solitary waves, *Journal of Fluid Mechanics*, **247**, 39–63.
- Šrámek, O., 2007. *Modele d'écoulement biphasé en sciences de la terre : fusion partielle, compaction et différenciation*, Ph.D. thesis, École Normale Supérieure de Lyon (France) and Charles University in Prague (Czech Republic).
- Šrámek, O., Ricard, Y., & Bercovici, D., 2007. Simultaneous melting and compaction in deformable two-phase media, *Geophysical Journal International*, **168**(3), 964–982.
- Stacey, F. & Loper, D., 2007. A revised estimate of the conductivity of iron alloy at high pressure and implications for the core energy balance, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **161**, 13–18.

- Stacey, F. D. & Anderson, O. L., 2001. Electrical and thermal conductivities of fe–ni–si alloy under core conditions, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **124**(3–4), 153–162.
- Stacey, F. D. & Davis, P. M., 2008. *Physics of the earth*, Cambridge University Press.
- Steinle-Neumann, G., Stixrude, L., Cohen, R. E., & Gülseren, O., 2001. Elasticity of iron at the temperature of the Earth’s inner core, *Nature*, **413**(6851), 57–60.
- Stevenson, D. J., 2003. Planetary science : Mission to earth’s core—a modest proposal, *Nature*, **423**(6937), 239–240.
- Stixrude, L. & Cohen, R. E., 1995. High-pressure elasticity of iron and anisotropy of earth’s inner core, *Science*, **267**(5206), 1972–1975.
- Su, W.-j. & Dziewoński, A. M., 1995. Inner core anisotropy in three dimensions, *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, **100**(B6), 9831–9852.
- Su, W.-j., Dziewoński, A. M., & Jeanloz, R., 1996. Planet within a planet : Rotation of the inner core of earth, *Science*, **274**(5294), 1883–1887.
- Sumita, I. & Olson, P., 1999. A Laboratory Model for Convection in Earth’s Core Driven by a Thermally Heterogeneous Mantle, *Science*, **286**, 1547–1549.
- Sumita, I., Yoshida, S., Hamano, Y., & Kumazawa, M., 1995. A model for the structural evolution of the earth’s core and its relation to the observations, in *The Earth’s central part : Its structure and dynamics*, pp. 232–260, ed. Yukutake, T., Terra Scientific Publishing Company.
- Sumita, I., Yoshida, S., Kumazawa, M., & Hamano, Y., 1996. A model for sedimentary compaction of a viscous medium and its application to inner-core growth, *Geophysical Journal International*, **124**(2), 502–524.
- Sun, X. & Song, X., 2008a. The inner inner core of the Earth : Texturing of iron crystals from three-dimensional seismic anisotropy, *Earth And Planetary Science Letters*, **269**, 56–65.
- Sun, X. & Song, X., 2008b. Tomographic inversion for three-dimensional anisotropy of earth’s inner core, *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **167**(1–2), 53 – 70.
- Swartzendruber, L., 1982. The fe (iron) system, *Journal of Phase Equilibria*, **3**(2), 161–165.
- Tackley, P. J., 2000. Self-consistent generation of tectonic plates in time-dependent three-dimensional mantle convection simulations 1. Pseudoplastic yielding, *Geochemistry, Geophysics, Geosystems*, **1**(8), 1–45.

- Takehiro, S.-I., 2010. Fluid motions induced by horizontally heterogeneous Joule heating in the Earth's inner core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **184**(3–4), 134–142.
- Tanaka, S. & Hamaguchi, H., 1997. Degree one heterogeneity and hemispherical variation of anisotropy in the inner core from PKP(BC)-PKP(DF) times, *Journal Of Geophysical Research-Solid Earth*, **102**, 2925–2938.
- Tateno, S., Hirose, K., Ohishi, Y., & Tatsumi, Y., 2010. The Structure of Iron in Earth's Inner Core, *Science*, **330**(6002), 359.
- Tauxe, L. & Yamazaki, T., 2007. Paleointensities, *Treatise on Geophysics*, **5**, 509–563.
- Tkalčić, H. & Kennett, B. L. N., 2008. Core structure and heterogeneity : a seismological perspective, *Australian Journal of Earth Sciences*, **55**(4), 419–431.
- Tkalčić, H., Young, M., Bodin, T., Ngo, S., & Sambridge, M., 2013. The shuffling rotation of the earth/'s inner core revealed by earthquake doublets, *Nature Geoscience*, **6**(6), 497–502.
- Tome, C., Canova, G. R., Kocks, U. F., Christodoulou, N., & Jonas, J. J., 1984. The relation between macroscopic and microscopic strain hardening in FCC polycrystals, *Acta metallurgica*, **32**(10), 1637–1653.
- Van Orman, J. A., 2004. On the viscosity and creep mechanism of Earth's inner core, *Geophysical Research Letters*, **31**(20).
- Vočadlo, L., 2007. Mineralogy of the earth-the earth's core : iron and iron alloys, *Treatise on Geophysics*, **2**, 91–120.
- Vočadlo, L., Alfè, D., Gillan, M., Wood, I., Brodholt, J., & Price, G., 2003. Possible thermal and chemical stabilization of body-centred-cubic iron in the Earth's core, *Nature*, **424**(6948), 536–539.
- Vočadlo, L., Dobson, D. P., & Wood, I. G., 2009. Ab initio calculations of the elasticity of hcp-fe as a function of temperature at inner-core pressure, *Earth and Planetary Science Letters*, **288**(3–4), 534 – 538.
- Waszek, L. & Deuss, A., 2011. Distinct layering in the hemispherical seismic velocity structure of Earth's upper inner core, *Journal of Geophysical Research*, **116**(B12).
- Weber, P. & Machetel, P., 1992. Convection within the inner core and thermal implications, *Geophysical Research Letters*, **19**(21), 2107–2110.
- Wenk, H. R., Baumgardner, J. R., Lebensohn, R., & Tomé, C. N., 2000. A convection model to explain anisotropy of the inner core, *Journal of Geophysical Research*, **105**(B3), 5663–5677.

- Williams, Q., Jeanloz, R., Bass, J., Svendsen, B., & Ahrens, T. J., 1987. The melting curve of iron to 250 gigapascals : A constraint on the temperature at earth's center, *Science*, **236**(4798), 181–182.
- Woodhouse, J. H., Giardini, D., & Li, X.-D., 1986. Evidence for inner core anisotropy from free oscillations, *Geophysical Research Letters*, **13**(13), 1549–1552.
- Woodhouse JH, Giardini D, L. X., 1986. Evidence for inner core anisotropy from free oscillations, *Geophysical Research Letters*, **13**, 1549–1552.
- Wookey, J. & Helffrich, G., 2008. Inner-core shear-wave anisotropy and texture from an observation of PKJKP waves, *Nature*.
- Yick, K. Y., Torres, C. R., Peacock, T., & Stocker, R., 2009. Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds numbers, *Journal of Fluid Mechanics*, **632**, 49.
- Yoo, C., Holmes, N., Ross, M., Webb, D. J., & Pike, C., 1993. Shock temperatures and melting of iron at earth core conditions, *Physical Review Letters*, **70**(25), 3931.
- Yoshida, S., Sumita, I., & Kumazawa, M., 1996. Growth model of the inner core coupled with the outer core dynamics and the resulting elastic anisotropy, *Journal of Geophysical Research*, **101**(B12), 28085–28103.
- Yoshida, S., Sumita, I., & Kumazawa, M., 1999. Models of the anisotropy of the Earth's inner core, *Journal Of Physics-Condensed Matter*, **10**(49), 11215–11226.
- Yu, W.-c., 2005. Seismic velocity structure in the Earth's outer core, *Journal of Geophysical Research*, **110**(B2), B02302.
- Yukutake, T., 1998. Implausibility of thermal convection in the Earth's solid inner core, *Physics Of The Earth And Planetary Interiors*, **108**(1), 1–13.

## **Dynamique et évolution de la graine terrestre**

Les progrès de l'imagerie sismique ces trente dernières années ont permis de révéler la structure complexe de la graine : une anisotropie cylindrique de quelques pourcents dont la structure fine présente des variations radiales et latérales. Ce travail de thèse s'est concentré sur les différentes dynamiques susceptibles de provoquer une telle structure, et en particulier l'anisotropie sismique. Nous avons revisité la dynamique induite par la force de Lorentz, discutant les conditions aux limites, la croissance de la graine et la stratification en densité. La déformation n'est raisonnablement suffisante que pour des viscosités inférieures à  $10^{12}$  Pa.s, dans la fourchette basse des estimations. Les modèles d'écoulements globaux dans la graine peuvent se classer en deux grandes catégories. Pour un profil de densité stable, seul un forçage extérieur, tel que la force de Lorentz, peut induire un écoulement. Dans le cas instable, la dynamique est contrôlée principalement par des instabilités de convection. Les nouvelles estimations de la diffusion thermique limitent les instabilités thermiques à des âges de graine de l'ordre de la centaine de millions d'années. En se focalisant sur deux paramètres, la viscosité et l'âge de la graine, nous avons construit un diagramme de régime qui compare quantitativement les différents modèles proposés dans la littérature. En croisant amplitude du taux de déformation et géométrie attendues, on peut raisonnablement restreindre les domaines qui pourraient engendrer la structure observée. Pourtant, aucun modèle n'est pour l'instant capable d'expliquer à la fois l'amplitude et la géométrie de l'anisotropie sismique et encore moins la dichotomie Est-Ouest. La couche F est une anomalie dans le noyau externe : d'une épaisseur de 200 km environ, à la base du noyau externe, elle présente des vitesses d'ondes sismiques plus faibles que celles prédites pour un noyau liquide parfaitement mélangé. Elle est interprétée comme une zone chimiquement appauvrie, en contradiction avec la cristallisation de la graine qui libère des éléments légers à la surface même de la graine. Nous étudions la possibilité d'une cristallisation en volume dans cette couche. Les particules de fer solides sédimentent en croissant dans un liquide de plus en plus appauvri en éléments légers. Cette neige de fer est stable sous certaines conditions, étudiées ici.

**Mots clefs** : graine, noyau, dynamique, observations sismiques, anisotropie sismique

## **Dynamics and evolution of the Earth's inner core**

In the past thirty years, our understanding of the inner core structure has increased with the number of seismic studies. Observations reveal a global anisotropy with a cylindrical symmetry and radial and lateral heterogeneities. In this work, I have studied different hypothesis on the dynamics of the inner core to explain these observations. Revisiting the dynamics induced by the Lorentz force, we studied the effect of new boundary conditions, the effect of stratification and growth rate. However, the obtained flow is not strong enough to deform the media for viscosities larger than  $10^{12}$  Pa.s, in the lower bound of the published inner core estimates. Deformation mechanisms can be subdivided between natural convection (arising from unstable thermal or compositional gradients) and externally forced flows, like the one induced by the Lorentz force. Recent estimates of the thermal diffusivity of iron at high pressure limit the possibility of thermal convection to an age of the inner core lower than a hundred of millions years. Two key parameters emerge for the inner core dynamics : the sign and strength of the density stratification and the viscosity of the inner core. We construct a regime diagram for the Earth's inner core dynamics that compares the different published models in term of maximum instantaneous deformation rate. This diagram allows us to compare both expected strain rate and deformation geometry with the seismic observations. However, we find that no published model can explain all the seismic observations. The inner core anisotropy and the hemispherical dichotomy are especially difficult to reconcile with these models. The F-layer is a 200km anomalous layer at the bottom of the outer that presents low P-wave velocities compared to well-mixed model. It has been interpreted as a layer depleted in light elements, whereas we usually consider that light elements are expelled at the surface of the inner core by freezing of the outer core alloy. We study the hypothesis of freezing in the bulk of the layer, with iron particles growing and settling in an increasingly depleted liquid.

**Keywords** : inner core, core, dynamics, seismic observation, seismic anisotropy