



**HAL**  
open science

# Uniformisation des variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes

Nicolas Tholozan

► **To cite this version:**

Nicolas Tholozan. Uniformisation des variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Nice Sophia Antipolis, 2014. Français. NNT : 2014NICE4079 . tel-01127086

**HAL Id: tel-01127086**

**<https://theses.hal.science/tel-01127086>**

Submitted on 6 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Nice-Sophia Antipolis – UFR Sciences  
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

## THÈSE

pour obtenir le grade de

**Docteur en sciences de l'université de Nice-Sophia Antipolis**

Discipline :

**Mathématiques**

présentée et soutenue le 4 novembre 2014 par

Nicolas THOLOZAN

---

**Uniformisation des variétés pseudo-riemanniennes  
localement homogènes**

---

### JURY :

Yves BENOIST	Rapporteur
Sorin DUMITRESCU	Directeur de thèse
Olivier GUICHARD	Examineur
Fanny KASSEL	Examinatrice
François LABOURIE	Président du jury
Jean-Marc SCHLENKER	Examineur
Richard WENTWORTH	Rapporteur



Laboratoire J.-A. Dieudonné  
UMR CNRS 7351 Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 2  
France

Université de Nice–Sophia Antipolis  
École Doctorale de Sciences Fondamen-  
tales et Appliquées  
Parc Valrose  
06108 Nice Cedex 2  
France

*à ma Mirabelle*

*Ces grandes visions étranglaient ta parole  
Et l'infini terrible effara ton œil bleu.*

# Remerciements

Les mots me manquent pour dire tout ce que cette thèse doit à Sorin. Je lui suis infiniment reconnaissant pour toutes les mathématiques qu'il m'a apprises depuis le début de mon Master 2, ainsi que pour toutes ses qualités humaines : sa disponibilité, son intégrité, son humour, son amitié. Le jeune élève naïf que j'étais il y a quatre ans a beaucoup mûri à son contact. Je souhaite à tous les doctorants d'avoir cette chance.

Je remercie aussi du fond du cœur Yves Benoist et Richard Wentworth pour avoir accepté de rapporter cette thèse. J'en suis d'autant plus heureux que tous deux m'ont beaucoup apporté par leurs enseignements lumineux. Je garde un souvenir ému des nombreuses discussions que j'ai pu avoir avec Yves au début de ma thèse et de son enthousiasme à raconter des mathématiques. Quant à Richard, qui m'a initié aux fibrés de Higgs et aux applications harmoniques, je le remercie d'avoir traversé l'atlantique et la France pour assister à ma soutenance. Je suis honoré également de la présence dans le jury de François Labourie, dont les travaux sur les représentations des groupes de surfaces sont pour moi un exemple, Jean-Marc Schlenker, avec qui je me réjouis de travailler dans un futur proche, ainsi qu'Olivier Guichard et Fanny Kassel, qui ont manifesté un intérêt constant pour mes travaux depuis le début de ma thèse. Enfin, cette thèse doit énormément à Bertrand Deroin, avec qui je collabore depuis plus d'un an et qui m'a appris tant de choses. Je ne suis encore qu'un chercheur débutant, mais j'ai le sentiment qu'une complicité mathématique comme la nôtre est une chose rare et précieuse.

Je n'en serais pas là aujourd'hui si je n'éprouvais un certain plaisir à manipuler des objets abstraits et complexes qu'on n'arrive à comprendre qu'après de longues réflexions. J'aimerais donc remercier ici tous ceux qui m'ont transmis, chacun leur tour, un peu de leur passion pour les mathématiques : mon père et ma mère pour commencer, puis Mme Broust, M. Charlot, Monsieur T. (encore lui), et mes professeurs de classe préparatoire Franck Taïeb et Yves Duval. Ensuite la liste s'allonge et il m'est impossible de tous les nommer, mais je remercie les professeurs de l'ÉNS et plus particulièrement Frédéric Paulin et Pierre Pansu pour leurs enseignements exceptionnels et pour leur sollicitude à l'égard des étudiants. Merci enfin à Étienne Ghys, Adolfo Guillot, Serge Cantat, Charles Frances et tous ceux qui ont un jour posé un regard bienveillant sur mes balbutiements de chercheur en herbe, me donnant ainsi la confiance nécessaire pour m'atteler à cette thèse.

Je quitterai bientôt Nice, non sans une certaine nostalgie. Je profite donc de ces lignes pour exprimer ma gratitude envers tous ceux qui contribuent à faire du laboratoire Dieu-donné un lieu de travail agréable, convivial et épanouissant. Merci plus particulièrement à Mélisande pour son interprétation de Brahms et Fauré, à Julien pour m'avoir attendu à l'arrivée du triathlon, à Nathalie pour avoir enrichi mon vocabulaire, à Charles pour son figatelli et à l'oncle de J.-B. pour sa mirabelle. Merci à tous les autres thésards, les anciens,

les nouveaux, ceux du GdR GoT, ceux du GdR Gâteaux, merci à Jean-Louis, Angélique et surtout Manuelle, qui a supporté patiemment ma “phobie administrative”.

Merci aussi aux matheux rencontrés ailleurs, à Paris où à l’autre bout du monde, pour les bons moments passés à faire des maths, à boire des bières, à skier, grimper, courir, chanter, danser, discuter politique ou refaire le monde. Merci à Oskar, Jonah, Andy, Clara, Brice, Maxime et tant d’autres. Merci aux amis de Poincaré pour les discussions interminables sur la différence entre une cellulation polyédrale et une polyédration cellulaire.

Merci à Paul et Jeanne pour leur hospitalité à Saint-Jean-de-Monts durant les heures sombres de la rédaction, ainsi qu’à Jean-Marie, Virginie et Emma pour leur accueil à Lyon pendant ma dernière relecture. Merci à mes amis de toujours pour tous les bons moments passés à oublier un peu mes obsessions mathématiques : merci à Aldric, Lise, Tertio, Anne, Célia, Stéphane, Matthieu, Marion, Oriane, Steve, Igor, Manon. Merci à Barbara, Léa, Lola et toute ma famille pour la confiance qu’ils me donnent.

Enfin, merci à celle qui a relu minutieusement cette thèse du premier au dernier mot, celle qui depuis maintenant quatre ans me soutient, m’encourage, et fait tourner de son nom tous les moulins de mon cœur.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
0.1 Problèmes de géométrisation . . . . .	11
0.1.1 Géométrisation des surfaces . . . . .	11
0.1.2 Géométrisation des variétés de dimension 3 . . . . .	12
0.1.3 Géométriser en général : la notion de $(G, X)$ -structure . . . . .	12
0.1.4 $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes et problèmes de complétude . . . . .	14
0.2 Résultats de la thèse . . . . .	16
0.2.1 Métriques invariantes à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	16
0.2.2 Quelques théorèmes de complétude . . . . .	18
0.2.3 Domination des représentations d'un groupe de surface . . . . .	19
0.2.4 Application à la géométrie anti-de Sitter de dimension 3 . . . . .	21
<b>1 Variétés localement homogènes et <math>(G, X)</math>-structures</b>	<b>25</b>
1.1 Rappels de géométrie pseudo-riemannienne . . . . .	27
1.1.1 Connexion de Levi-Civita et géodésiques pseudo-riemanniennes . . . . .	27
1.1.2 Courbure . . . . .	29
1.1.3 Isométries, champs de Killing et homogénéité . . . . .	29
1.2 Métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	32
1.3 Symétrie et symétrie locale . . . . .	41
1.3.1 Point de vue géométrique et analytique . . . . .	41
1.3.2 Modèles . . . . .	42
1.3.3 Exemples . . . . .	43
1.4 Métriques riemanniennes holomorphes . . . . .	46
1.5 Le formalisme des $(G, X)$ -structures . . . . .	48
1.5.1 La catégorie des $(G, X)$ -structures . . . . .	49
1.5.2 Espace de déformation et espace des modules . . . . .	51
1.5.3 Complétude et complétude géodésique . . . . .	52
1.6 Questions générales . . . . .	54
1.6.1 Complétude . . . . .	54
1.6.2 Existence et déformation des formes de Clifford-Klein . . . . .	56
1.6.3 Topologie des $(G, X)$ -variétés . . . . .	58
1.6.4 Topologie et géométrie des espaces de déformation . . . . .	59
<b>2 Deux théorèmes de complétude</b>	<b>61</b>
2.1 Structures kleiniennes et ouverts divisibles . . . . .	61
2.2 Quelques extensions du théorème de Carrière . . . . .	63
2.3 Preuve des théorèmes 2.2.2 et 2.2.3 . . . . .	66
2.4 Preuve du théorème 2.2.4 . . . . .	69

<b>3</b>	<b>Domination des représentations d'un groupe de surface</b>	<b>79</b>
3.1	Représentations, constantes de Lipschitz, domination . . . . .	80
3.1.1	Applications lipschitziennes équivariantes . . . . .	80
3.1.2	Constante de Lipschitz et spectre des longueurs . . . . .	81
3.1.3	Continuité de la constante de Lipschitz minimale . . . . .	82
3.2	Résultats . . . . .	95
3.2.1	Existence d'une représentation fuchsienne dominant $\rho$ . . . . .	95
3.2.2	Topologie du domaine $\text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$ . . . . .	98
3.3	Applications harmoniques équivariantes . . . . .	99
3.3.1	Applications harmoniques . . . . .	99
3.3.2	Fonctionnelles sur l'espace de Teichmüller . . . . .	103
3.4	Preuve des théorèmes de domination . . . . .	106
3.4.1	L'image de $\Psi_\rho$ est dans $\text{Dom}(\rho)$ . . . . .	107
3.4.2	Construction de l'inverse de $\Psi$ . . . . .	112
<b>4</b>	<b>Variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3</b>	<b>119</b>
4.1	Géométrie anti-de Sitter en dimension 3 . . . . .	121
4.1.1	Espaces anti-de Sitter . . . . .	121
4.1.2	Quotients compacts . . . . .	122
4.2	Topologie de l'espace $\text{Adm}(S)$ . . . . .	123
4.2.1	Représentations d'un groupe de surface dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . . . . .	124
4.2.2	Paires admissibles . . . . .	126
4.3	Topologie des variétés anti-de Sitter compactes . . . . .	128
4.3.1	Raffinement des théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel . . . . .	128
4.3.2	Les variétés AdS compactes sont des fibrés de Seifert . . . . .	131
4.3.3	Classification des fibrés en cercles . . . . .	134
4.4	Espace de déformation . . . . .	136
4.4.1	Longueur de la fibre d'une variété anti-de Sitter compacte . . . . .	136
4.4.2	Composantes connexes des espaces de déformation . . . . .	138
4.5	Volume . . . . .	142
	<b>Conclusion</b>	<b>145</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>

# Introduction

AU DÉBUT DES ANNÉES 80, Thurston a initié un programme de géométrisation des variétés de dimension 3 dans le but de les classifier topologiquement. Ce programme s'est diversifié au cours des dernières décennies, conduisant à l'émergence d'un domaine de recherche dont le centre d'intérêt est l'étude des relations entre la topologie d'une variété et les "géométries" dont on peut la munir. Cette thèse, qui rend compte de trois années de doctorat sous la direction de Sorin Dumitrescu, s'inscrit dans cette problématique, et s'intéresse plus particulièrement aux variétés munies de géométries *pseudo-riemanniennes*.

Géométriser une variété, dans un sens large, consiste à la munir d'un objet géométrique rigide (une métrique, par exemple) assez symétrique pour permettre d'identifier localement  $M$  à un espace homogène  $X$ , c'est-à-dire un espace muni d'un groupe de symétries  $G$  de dimension finie agissant transitivement. La géométrie de l'espace  $X$  est en général bien comprise grâce à la théorie des groupes de Lie, et on peut espérer en déduire une meilleure compréhension de la topologie de la variété  $M$ .

La théorie des  $(G, X)$ -structures, introduite par Thurston dans [Thu80] fournit un cadre général à ces considérations. Si  $X$  est une variété munie d'une action transitive d'un groupe de Lie  $G$ , une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  est un atlas de  $M$  à valeur dans  $X$  dont les changements de cartes sont donnés par des transformations de  $G$ . Une  $(G, X)$ -structure est donc en quelque sorte une "structure locale d'espace homogène" sur  $M$ . C'est précisément ce que l'on obtient lorsqu'on munit  $M$  d'une structure géométrique localement symétrique.

Reprenant des idées d'Ehresmann [Ehr36], Thurston établit dans [Thu80] un lien étroit entre les  $(G, X)$ -structures sur une variété compacte  $M$  et les représentations de  $\pi_1(M)$  à valeurs dans  $G$  : à chaque  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est associé un *morphisme d'holonomie* de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ , et le théorème d'Ehresmann–Thurston affirme que ces morphismes d'holonomies paramètrent localement l'espace des  $(G, X)$ -structures sur  $M$ . Il est parfois possible de caractériser l'ensemble des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  qui sont des morphismes d'holonomie et d'en déduire la topologie de l'espace des  $(G, X)$ -structures sur  $M$ .

Les géométries qui nous intéressent ici sont des géométries pseudo-riemanniennes. Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne  $q$  sur une variété  $M$  est la donnée, en chaque point, d'une forme quadratique non dégénérée sur le fibré tangent. Elle est dite *localement homogène* si la métrique pseudo-riemannienne a la même "forme" au voisinage de tout point, c'est-à-dire si deux points  $x$  et  $y$  admettent des voisinages  $U$  et  $V$  tels que  $q|_U$  peut être envoyée sur  $q|_V$  par un difféomorphisme de  $U$  dans  $V$ . Les variétés pseudo-riemanniennes compactes localement homogènes sont (dans tous les cas connus) modélées localement sur des espaces homogènes. Leur étude se transcrit donc bien dans le langage des  $(G, X)$ -structures.

Les problèmes soulevés par l'étude des  $(G, X)$ -structures dépendent pour beaucoup de la géométrie considérée. Ici, nous nous intéresserons entre autres à une question spé-

cifique aux géométries pseudo-riemanniennes : celle de la complétude. Rappelons qu'une variété pseudo-riemannienne est dite *géodésiquement complète* si ses géodésiques sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ . Si  $M$  est une variété riemannienne compacte localement isométrique à  $X$ , elle est géodésiquement complète (d'après le théorème de Hopf–Rinow) et on en déduit que  $M$  est un quotient du modèle  $X$  par un sous-groupe discret de  $G = \text{Isom}(X)$ . On dit alors que la  $(G, X)$ -structure de  $M$  est complète. Il existe en revanche des variétés pseudo-riemanniennes compactes (même localement homogènes) dont le flot géodésique est incomplet. Si  $X$  est un espace pseudo-riemannien homogène, on ne sait donc pas démontrer en général que toute  $(G, X)$ -variété compacte est complète. Cependant, on ne connaît aucun contre-exemple à cette affirmation. En particulier, selon la conjecture de Markus, toute variété pseudo-riemannienne plate compacte devrait être un quotient de  $\mathbb{R}^n$  par un sous-groupe discret de transformations affines.

Le premier chapitre de cette thèse introduira quelques notions générales de géométrie pseudo-riemannienne. Nous y définirons en particulier la notion de variété pseudo-riemannienne localement symétrique (au sens de Cartan) et expliquerons pourquoi ces variétés sont naturellement munies de  $(G, X)$ -structures. La section 2 de ce chapitre, relativement indépendante, sera consacrée à l'étude du flot géodésique des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  (théorème 1). Elle nous fournira des contre-exemples pseudo-riemanniens à certaines propositions qui, dans le cas riemannien, découlent du théorème de Hopf–Rinow.

Dans le deuxième chapitre de cette thèse, nous nous intéresserons à la question de la complétude des  $(G, X)$ -variétés pseudo-riemanniennes compactes. Bien que le théorème de Hopf–Rinow n'ait pas de sens en géométrie pseudo-riemannienne, Carrière [Car89] et Klingler [Kli96] ont prouvé que les variétés lorentziennes compactes de courbure constante sont toutes géodésiquement complètes et sont donc des quotients d'un modèle homogène par un sous-groupe discret d'isométries. Nous généraliserons partiellement ces théorèmes à d'autres géométries en prouvant que certaines  $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes compactes sont complètes sous l'hypothèse qu'elles sont a priori *kleiniennes*, c'est-à-dire obtenues en quotientant un ouvert du modèle  $X$  (théorème 3). Ce résultat est certes moins satisfaisant que le théorème de Carrière et Klingler, mais il possède néanmoins des conséquences intéressantes dans le cas où  $X$  est un groupe de Lie de rang 1 muni de sa métrique de Killing (corollaire 4).

Le troisième chapitre sera consacré à un problème de comparaison des représentations d'un groupe de surface. Il s'agit – étant donnée une surface compacte orientée  $S$  et une variété riemannienne  $M$  complète, simplement connexe et de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$  (l'espace symétrique d'un groupe de Lie de rang 1, par exemple) – de décrire l'ensemble des couples  $(j, \rho)$ , où  $j : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est une représentation fuchsienne et où  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$  est *strictement dominée* par  $j$ , dans le sens où il existe une application de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  qui est  $(j, \rho)$ -équivariante et contractante. Nous résoudrons ce problème (théorèmes 5 et 7) au moyen de la théorie des applications harmoniques tordues. Nous donnerons aussi plusieurs conséquences intéressantes de ces théorèmes, mais nous réserverons leur principale application pour le chapitre 4.

Le quatrième et dernier chapitre de cette thèse sera consacré à la géométrie anti-de Sitter, c'est-à-dire la géométrie lorentzienne de courbure constante  $-1$ . Nous y décrirons les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 et leurs espaces de déformation. Ces variétés sont des quotients du revêtement universel de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing. Nous nous appuyerons sur des théorèmes de Kulkarni–Raymond [KR85] et Kassel [Kas09] qui décrivent ces quotients à revêtement fini près et ramènent l'étude de leur espace

de déformation à la description de l'ensemble des couples  $(j, \rho)$  de représentations d'un groupe de surface dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$ . Nous pourrions donc appliquer directement les résultats du chapitre 3. Certaines précautions seront cependant nécessaires pour décrire précisément l'ensemble des structures anti-de Sitter sur une variété donnée. Il nous faudra en particulier déduire des théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel une description de tous les quotients de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  (pas seulement à revêtement fini près). Pour finir, nous calculerons le volume de ces variétés anti-de Sitter et nous verrons que ce volume est stable par déformation.

## 0.1 Problèmes de géométrisation

Afin de motiver les questions auxquelles nous nous intéressons dans cette thèse, commençons par donner un aperçu chronologique de l'apparition des problèmes de géométrisation en topologie différentielle.

### 0.1.1 Géométrisation des surfaces

L'histoire des problèmes de géométrisation prend racine dans les travaux de la fin du XIX<sup>e</sup> siècle et du début du XX<sup>e</sup> siècle sur la classification des surfaces de Riemann. Le célèbre théorème d'uniformisation, démontré par Poincaré et Koebe en 1907 après plusieurs décennies de recherches, établit en effet une correspondance entre les structures complexes sur une surface donnée et les métriques riemanniennes complètes de courbure constante sur cette surface (à ce sujet, on pourra lire [dSG10]). Pour classer les surfaces de Riemann compactes, par exemple, il suffit donc de classer topologiquement les surfaces compactes orientées puis de décrire, pour chaque surface, l'ensemble des métriques de courbure constante qu'elle possède.

La célèbre formule de Gauss–Bonnet permet de relier le signe de la courbure d'une métrique de courbure constante à la caractéristique d'Euler de la surface. Ainsi, la sphère possède une métrique de courbure 1, alors que le tore possède des métriques plates et les surfaces de genre supérieur des métriques de courbure  $-1$ .

Sur la sphère, toutes les métriques de courbure 1 sont les mêmes modulo un difféomorphisme isotope à l'identité. En revanche, le tore peut posséder plusieurs métriques plates. Chaque métrique plate identifie le tore au quotient de  $\mathbb{C}$  par un réseau, ce dont on déduit que l'espace des métriques plates modulo isotopie est homéomorphe à l'espace des morphismes de  $\mathbb{Z}^2$  dans  $\mathbb{C}$  dont l'image est un réseau, quotienté par l'action du groupe des rotations. Cet espace possède une structure de variété algébrique réelle et s'identifie à  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ .

Une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2 possède également toute une famille de métriques de courbure  $-1$ , qui correspondent chacune à une structure complexe sur  $S$ . L'espace de toutes les structures complexes sur  $S$  modulo isotopie s'appelle *l'espace de Teichmüller* de  $S$ . Chaque métrique de courbure  $-1$  sur  $S$  identifie  $S$  à un quotient du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  par un sous-groupe de  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . On en déduit que l'espace de Teichmüller de  $S$  est homéomorphe à l'espace des représentations *fuchsien* (i.e. injectives d'image discrète) de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$ , quotienté par l'action de  $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^2)$  par conjugaison. De nombreux travaux ont contribué à décrire plus précisément cet espace. En particulier, Teichmüller a prouvé qu'il était homéomorphe à une boule de dimension  $-3\chi(S)$  (où  $\chi(S)$  désigne la caractéristique d'Euler de  $S$ ) et qu'il possédait une structure naturelle de variété complexe [Tei82].

### 0.1.2 Géométrisation des variétés de dimension 3

Alors que la géométrisation des surfaces compactes était postérieure à leur classification topologique, Thurston révolutionna la géométrie différentielle vers la fin des années 70 en suggérant la nécessité de géométriser les variétés de dimension 3 dans le but de les classifier topologiquement.

Pour poser le cadre de ce programme de géométrisation, il lista dans [Thu82] les 8 géométries riemanniennes “les plus symétriques” en dimension 3 – les géométries de courbure constante  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{H}^3$ , ainsi que les géométries produits  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  et trois géométries invariantes à gauche sur les groupes de Lie **Sol**, **Heis** et  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  – et proposa de décrire les variétés pouvant posséder telle ou telle de ces géométries. Lui-même prouva que de nombreuses variétés compactes possèdent des structures hyperboliques. À sa suite, Scott classifia dans [Sco83] la plupart des variétés compactes possédant l’une de ses autres géométries. Il montra que les variétés compactes modelées sur  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ , **Heis** et  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  sont toutes des *fibrés de Seifert* et que, réciproquement, tout fibré de Seifert possède une et une seule de ces géométries. De même qu’en dimension 2, une variété munie d’une de ces huit géométries s’identifie à un quotient du modèle correspondant. L’espace des structures géométriques sur une variété donnée est alors paramétré par une famille de morphismes du groupe fondamental de cette variété dans le groupe des isométries d’un de ces espaces homogènes. Une différence notable entre les dimensions 2 et 3 apparaît alors en géométrie hyperbolique : alors qu’une surface de genre supérieur à 2 possède une infinité de métriques hyperboliques, paramétrées par l’espace de Teichmüller, une variété compacte de dimension 3 possède au plus une métrique hyperbolique, d’après le théorème de rigidité de Mostow [Mos68].

Le programme de géométrisation de Thurston, initié dans [Thu82], a été parachevé durant la dernière décennie par deux théorèmes retentissants : d’une part, Perelman a prouvé que toute variété compacte de dimension 3 peut être “découpée” en morceaux géométrisables ; d’autre part, les travaux successifs de Kahn–Markovic [KM12], Wise [Wis04] et Agol [AGM13] ont abouti à la preuve de la conjecture virtuellement Haken, qui permet en particulier de décrire les 3-variétés hyperboliques à revêtement fini près.

### 0.1.3 Géométriser en général : la notion de $(G, X)$ -structure

Les travaux de Thurston ont ouvert un champ d’investigation nouveau qui va bien au-delà de la géométrisation des variétés de dimension 3. Ils nous invitent plus généralement à nous interroger systématiquement sur les diverses façons de “géométriser” une variété. Pour aller plus loin, commençons par préciser ce que nous entendons par là.

On peut pour cela se référer à la définition donnée par Klein dans son célèbre programme d’Erlangen [Kle72] : une géométrie est la donnée d’une variété  $X$  et d’un “groupe de symétries”  $G$  agissant transitivement sur  $X$ . Autrement dit, une “géométrie” est la donnée d’un espace homogène.

Les géométries que nous avons mentionnées jusqu’ici étaient des géométries riemanniennes, c’est-à-dire que l’espace  $X$  était munie d’une métrique riemannienne homogène et que le groupe  $G$  était défini comme le groupe des isométries de  $X$ . On peut s’intéresser à de nombreuses autres géométries comme la géométrie affine, où l’espace  $X$  est l’espace affine  $\mathbb{R}^n$  muni de l’action du groupe des transformations affines, ou encore la géométrie projective.

Qu’est-ce alors que géométriser une variété ? Dans les exemples précédents, il s’agissait de munir une variété  $M$  d’une métrique riemannienne localement isométrique à la métrique d’un espace homogène. Si, par exemple, on munit une surface compacte  $S$  d’une métrique

riemannienne de courbure  $-1$ , cette surface s'identifie localement au plan hyperbolique. Plus précisément,  $S$  possède un atlas de cartes à valeurs dans  $\mathbb{H}^2$  formé d'isométries locales, dont les changements de cartes sont des isométries de  $\mathbb{H}^2$ . Dans ce sens, géométriser une variété consiste à la munir d'une "structure locale d'espace homogène", ce qui conduit à la définition générale de  $(G, X)$ -structure (la terminologie est due à Thurston, mais la notion avait déjà été introduite par Ehresmann dans [Ehr36]).

**Définition.** Soit  $X$  une variété différentielle munie d'une action transitive d'un groupe de Lie  $G$  et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ . Une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est la donnée d'un atlas de cartes de  $M$  à valeurs dans  $X$ , dont les changements de cartes sont les restrictions d'éléments de  $G$ .

Lorsque  $G$  préserve une structure géométrique sur  $X$  (comme une métrique pseudo-riemannienne, une forme volume, une connexion...), toute  $(G, X)$ -structure sur  $M$  induit naturellement une structure géométrique localement isomorphe à celle de  $X$ . Si de plus tout difféomorphisme local préservant la structure géométrique de  $X$  est la restriction d'un élément de  $G$ , alors, réciproquement, toute structure géométrique sur  $M$  localement isomorphe à celle de  $X$  induit une  $(G, X)$ -structure. Dans de nombreux cas, on peut donc interpréter une  $(G, X)$ -structure comme la donnée d'une certaine structure géométrique localement homogène sur  $M$ . Par exemple, une *structure affine* (i.e. une  $(\text{Aff}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure) est équivalente à la donnée d'une connexion plate et sans torsion.

Une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  peut être alternativement décrite par un couple  $(\text{dev}, \rho)$ , où  $\rho$  est un morphisme du groupe fondamental de  $M$  dans  $G$  appelé *morphisme d'holonomie* et  $\text{dev}$  un difféomorphisme local  $\rho$ -équivariant du revêtement universel de  $M$  dans  $X$  appelé *application développante*. Le remarquable théorème d'Ehresmann–Thurston affirme que les  $(G, X)$ -structures sur une variété compacte  $M$  sont paramétrées localement par leur morphisme d'holonomie, dans le sens où :

- si  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$  est l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ , alors tout morphisme assez proche de  $\rho$  est encore l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  proche de la  $(G, X)$ -structure initiale,
- si deux  $(G, X)$ -structures sur  $M$  assez proches ont même holonomie, alors elles sont identiques modulo une isotopie de  $M$ .

Ce théorème établit donc un lien étroit entre l'espace de déformation  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$  des  $(G, X)$ -structures sur une variété compacte  $M$  (c'est-à-dire l'espace des  $(G, X)$ -structures sur  $M$  modulo isotopie) et l'espace des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ . Il explique en particulier pourquoi il est fréquent qu'une même variété  $M$  possède plusieurs  $(G, X)$ -structures différentes : d'après ce théorème, il suffit, pour déformer une  $(G, X)$ -structure en une autre, de déformer le morphisme d'holonomie dans l'espace des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ .

Maintenant que nous avons défini les  $(G, X)$ -structures et leurs espaces de déformation, nous pouvons formuler plus précisément notre problématique. Étant donné un espace  $G$ -homogène  $X$ , nous pouvons espérer classifier les  $(G, X)$ -structures compactes en répondant aux questions suivantes :

- Quelles variétés compactes possèdent des  $(G, X)$ -structures ?
- Si une variété compacte  $M$  possède une  $(G, X)$ -structure, quelle est la topologie de l'espace de déformation des  $(G, X)$ -structures sur  $M$  ?
- En particulier, quelles représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  sont les holonomies de  $(G, X)$ -structures sur  $M$  ?

### 0.1.4 $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes et problèmes de complétude

Hormis quelques résultats généraux comme le théorème d'Ehresmann–Thurston, chaque géométrie recèle ses propres spécificités et ouvre un nouveau champ d'investigation. Outre les géométries riemanniennes, l'étude des structures affines et projectives sur les variétés a fait l'objet de nombreux travaux (citons entre autres [FGH81], [Ben04], [GKM00], ou encore [Ben00]), même si, dans ce domaine, plusieurs questions importantes restent sans réponse. Dans cette thèse, nous nous intéresserons à des  $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes, c'est-à-dire où  $G$  est le groupe des isométries d'une métrique pseudo-riemannienne sur  $X$ . Malgré quelques travaux importants en géométrie lorentzienne ([Car89], [Kli96] et [Zeg98], par exemple), la géométrisation des variétés par des  $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes est encore largement incomprise.

### Géométries pseudo-riemanniennes

Rappelons qu'une métrique pseudo-riemannienne  $q$  sur une variété  $M$  de dimension  $d$  est la donnée, en tout point  $x$  de  $M$ , d'une forme quadratique non dégénérée sur l'espace tangent en  $x$ , telle que  $q_x$  varie de façon lisse avec  $x$ . Lorsque  $M$  est connexe, la signature de  $q$  ne dépend pas du point. Si, par exemple,  $q$  est de signature  $(d, 0)$ , elle est définie positive en tout point et c'est donc une métrique riemannienne. Lorsque  $q$  est de signature  $(d - 1, 1)$ , on parle de métrique lorentzienne.

De nombreux outils d'analyse riemannienne se généralisent sans difficulté au cadre pseudo-riemannien. En particulier, il existe une unique connexion linéaire  $\nabla$  sans torsion sur le fibré tangent à  $M$  dont le transport parallèle préserve  $q$ , appelée connexion de Levi–Civita de  $q$ . Cette connexion permet de définir les géodésiques de  $q$ , qui sont les courbes  $\gamma$  solutions de l'équation différentielle

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0 .$$

La connexion de Levi–Civita permet également de définir le tenseur de courbure de  $q$  comme le tenseur  $R$  tel que

$$R(X, Y, Z, T) = q(\nabla_X \nabla_Y Z, T) - q(\nabla_Y \nabla_X Z, T) - q(\nabla_{[X, Y]} Z, T)$$

pour tous champs de vecteurs  $X, Y, Z$  et  $T$ . Si  $P$  est un 2-plan de  $T_x M$  en restriction auquel  $q$  est non dégénérée, la courbure sectionnelle de  $P$  est donnée par

$$\frac{R(X, Y, Y, X)}{q(X, X)q(Y, Y) - q(X, Y)^2} ,$$

où  $(X, Y)$  désigne une base quelconque de  $P$ .

Les premiers exemples de variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes sont les variétés de courbure sectionnelle constante. Quitte à renormaliser la métrique, de telles variétés sont localement modélées sur les espaces homogènes  $\mathbb{R}^{p, q}$ ,  $\mathbb{S}^{p, q}$  et  $\mathbb{H}^{p, q}$ , qui peuvent être construits de façon analogue à la construction de l'espace euclidien, de la sphère et de l'espace hyperbolique (voir par exemple [Wol74]). Ces espaces ont un groupe d'isométries de dimension maximale. Dans le cas lorentzien,  $\mathbb{R}^{d-1, 1}$ ,  $\mathbb{S}^{d-1, 1}$  et  $\mathbb{H}^{d-1, 1}$  sont appelés respectivement *espace de Minkovski*, *espace de Sitter* et *espace anti-de Sitter*.

Les variétés de courbure constante sont en particulier *localement symétriques* au sens de Cartan, une condition plus faible qui suffit à garantir l'homogénéité locale. Cartan a

remarqué que le transport parallèle de la connexion de Levi–Civita préserve la courbure sectionnelle de  $q$  si et seulement si l’application linéaire

$$-\text{Id} : T_x M \rightarrow T_x M$$

s’étend en une isométrie locale au voisinage de tout point  $x$ . Une métrique  $q$  vérifiant cette propriété est dite *localement symétrique*. Si ces isométries locales se prolongent globalement, on dit que  $M$  est un *espace symétrique*. Dans ce cas, le groupe des isométries de  $M$  agit transitivement sur  $M$ .

Si  $M$  est une variété pseudo-riemannienne localement symétrique, il existe toujours un espace symétrique  $X$  localement isométrique à  $M$ . De plus, toute isométrie locale de  $X$  se prolonge en une isométrie globale. Par conséquent, toute métrique pseudo-riemannienne localement symétrique sur  $M$  induit une  $(\text{Isom}(X), X)$ -structure, pour un certain espace symétrique  $X$ . Ces considérations feront l’objet du premier chapitre de la thèse.

### Complétude

Lorsque  $X$  est une variété riemannienne  $G$ -homogène, nous avons affirmé assez rapidement au début de l’introduction que toute  $(G, X)$ -structure sur une variété compacte  $M$  identifiait  $M$  à un quotient de  $X$  par un groupe discret d’isométries. Cela n’est pas vrai en général : une  $(G, X)$ -structure compacte n’est pas nécessairement un quotient de  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$ . La spécificité des  $(G, X)$ -structures riemanniennes se déduit du théorème de Hopf–Rinow, d’après lequel toute variété riemannienne compacte est géodésiquement complète, c’est-à-dire que ses géodésiques sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ . Plus généralement, on a

**Proposition** (ch.1, proposition 1.5.14). *Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène. Supposons que  $G$  préserve une connexion affine  $\nabla^X$  sur  $X$  qui est géodésiquement complète. Soit  $M$  une variété munie d’une  $(G, X)$ -structure et  $\nabla^M$  la connexion induite sur  $M$  par  $\nabla^X$ . Alors  $\nabla^M$  est géodésiquement complète si et seulement si  $M$  est isomorphe, en tant que  $(G, X)$ -structure, à un quotient de  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $X$ .*

Cette proposition motive la définition suivante :

**Définition.** Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ . Une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est dite *complète* si  $M$  est isomorphe, en tant que  $(G, X)$ -structure, à un quotient de  $X$ .

En géométrie riemannienne, il découle donc du théorème de Hopf–Rinow que toutes les  $(G, X)$ -variétés compactes sont complètes. Par contre, dès qu’on sort du cadre riemannien, le théorème de Hopf–Rinow tombe en défaut et plusieurs problèmes se posent :

- **Un espace pseudo-riemannien homogène n’est pas toujours géodésiquement complet.** Il existe par exemple des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  dont le flot géodésique est incomplet (voir ch.1, section 1.2 ou bien [GL95]). Si  $X$  est un tel espace homogène, la complétude d’une  $(\text{Isom}(X), X)$ -structure n’est plus équivalente à la complétude géodésique de la métrique induite. Notons qu’en revanche, tout espace pseudo-riemannien symétrique est géodésiquement complet (ch.1, proposition 1.3.4).

• **Une variété pseudo-riemannienne compacte n'est pas toujours géodésiquement complète.** Si on munit par exemple  $SL(2, \mathbb{R})$  d'une métrique lorentzienne invariante à gauche dont le flot géodésique est incomplet, puis qu'on quotiente  $SL(2, \mathbb{R})$  par un réseau cocompact, on obtient une variété lorentzienne compacte localement homogène et géodésiquement incomplète (voir ch.1, section 1.2).

• **Une  $(G, X)$ -structure compacte n'est pas toujours complète.** Par exemple, le quotient de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  par le groupe engendré par une homothétie est une variété compacte difféomorphe à  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ , qui possède une structure affine non complète. D'autres contre-exemples plus riches apparaissent en géométrie projective réelle et complexe.

Il existe néanmoins de nombreuses géométries pour lesquelles on ne connaît pas de  $(G, X)$ -structure compacte non complète. La célèbre conjecture de Markus [Mar63] (voir ch.1, section 1.6.1) affirme par exemple qu'une structure affine sur une variété compacte est complète dès lors qu'elle admet une forme volume parallèle. Plus généralement, on ne connaît pas de  $(G, X)$ -structure compacte non complète lorsque  $G$  préserve une forme volume sur  $X$ . En particulier, si  $X$  est un espace pseudo-riemannien homogène, on peut conjecturer que toutes les  $(\text{Isom}(X), X)$ -structures compactes sont complètes. Nous nous intéresserons à cette question dans le chapitre 2 de cette thèse.

## 0.2 Résultats de la thèse

### 0.2.1 Métriques invariantes à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$

Comme remarqué précédemment, les conséquences du théorème de Hopf–Rinow selon lesquelles les variétés riemanniennes compactes et les variétés riemanniennes homogènes sont géodésiquement complètes ne sont plus valables dans le cadre pseudo-riemannien. En guise de contre-exemple, nous étudions dans la section 2 du chapitre 1 le flot géodésique des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$ .

Guédiri et Lafontaine ont remarqué dans [GL95] que certaines métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  sont géodésiquement incomplètes. En quotientant  $SL(2, \mathbb{R})$  muni d'une telle métrique par l'action à gauche d'un réseau cocompact, on obtient une variété pseudo-riemannienne compacte dont le flot géodésique n'est pas complet. À leur suite, Bromberg et Medina ont classifié dans [BM08] les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie de dimension 3 dont le flot géodésique est complet. Le résultat que nous obtenons dans la section 2 du chapitre 1 est une reformulation du théorème de Bromberg–Medina dans le cas de  $SL(2, \mathbb{R})$  au moyen d'un critère plus géométrique.

Soit  $G$  un groupe de Lie et  $q$  une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur  $G$ . Si  $\gamma$  est une géodésique de  $q$ , le vecteur  $\gamma^{-1}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)$ , appartenant à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , satisfait une équation différentielle ordinaire appelée équation d'Euler–Arnold. Cette équation, mise en évidence par Arnold dans [Arn89], est une généralisation des équations d'Euler qui régissent le mouvement libre d'un solide dans l'espace. On vérifie aisément que le flot géodésique de  $q$  est complet si et seulement si les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ .

L'équation d'Euler–Arnold est donnée par un champ de vecteur polynomial homogène de degré 2 sur  $\mathfrak{g}$ . Bromberg et Medina ont prouvé que si  $G$  est de dimension 3, le flot géodésique de  $q$  est incomplet si et seulement si l'équation d'Euler–Arnold admet une *direction radiale non dégénérée*, c'est-à-dire un vecteur  $\xi$  tel que le champ d'Euler–Arnold en  $\xi$  est non nul et colinéaire à  $\xi$ .

Lorsque  $G$  est semi-simple, l'équation d'Euler–Arnold est linéairement conjuguée à l'équation

$$\dot{\xi} = [\xi, \Lambda \xi] ,$$

où  $\Lambda$  est l'unique endomorphisme de  $\mathfrak{g}$  auto-adjoint pour la forme de Killing  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$  et tel que

$$q(\cdot, \cdot) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \Lambda^{-1} \cdot) .$$

Cette équation possède alors de nombreuses intégrales premières. En étudiant les lignes de niveau de ces intégrales premières, on obtient une condition suffisante de complétude :

**Lemme** (ch.1, lemme 1.2.6). *Si le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$  intersecte trivialement (i.e. uniquement en 0) le cône isotrope de la forme quadratique  $\kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \Lambda \cdot)$ , alors les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont bornées et le flot géodésique de  $q$  est complet.*

Dans le cas de  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ , le cône nilpotent est simplement le cône isotrope de la métrique de Killing. Nous obtenons alors une réciproque à ce lemme, qui permet de retrouver le théorème de Bromberg–Medina.

**Théorème 1** (ch.1, théorème 1.2.8). *Notons  $\kappa$  la forme de Killing sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $q$  une métrique lorentzienne invariante à gauche sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  et  $\Lambda$  l'endomorphisme de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  auto-adjoint pour la forme de Killing tel que*

$$q(\cdot, \cdot) = \kappa(\cdot, \Lambda^{-1} \cdot) .$$

*Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le flot géodésique de  $q$  est incomplet,*
- (ii) *le champ d'Euler–Arnold admet des directions radiales non dégénérées,*
- (iii) *le cône isotrope de la forme de Killing intersecte transversalement le cône isotrope de la forme quadratique  $\kappa(\cdot, \Lambda \cdot)$ .*

Remarquons que la condition (iii) est stable par perturbation. Par conséquent, le domaine des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  qui sont géodésiquement incomplètes est ouvert. Le complémentaire de cet ouvert est d'intérieur non vide, puisqu'il contient l'ouvert des métriques pour lesquelles les cônes isotropes de  $\kappa(\cdot, \cdot)$  et de  $\kappa(\cdot, \Lambda \cdot)$  s'intersectent trivialement. On obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 2.** *L'ensemble des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  se partitionne en deux ouverts non vides  $U_+$ ,  $U_-$  et un fermé semi-algébrique d'intérieur vide  $V_0$  tels que*

- *Si  $q$  appartient à  $U_+$ , les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont bornées et le flot géodésique de  $q$  est complet,*
- *Si  $q$  appartient à  $U_-$ , l'équation d'Euler–Arnold possède des directions radiales non dégénérées et le flot géodésique de  $q$  est incomplet,*
- *Si  $q$  appartient à  $V_0$ , le flot géodésique de  $q$  est complet, mais l'équation d'Euler–Arnold peut admettre des solutions non bornées.*

Nous donnons à la fin de la section 2 du chapitre 1 quelques arguments qui nous incitent à conjecturer qu'une telle trichotomie se généralise à n'importe quel groupe de Lie semi-simple.

### 0.2.2 Quelques théorèmes de complétude

Dans le chapitre 2, nous nous intéressons au problème de la complétude des  $(G, X)$ -structures pseudo-riemanniennes compactes. Soit  $X$  une variété pseudo-riemannienne homogène et  $G$  son groupe d'isométries. Toute  $(G, X)$ -structure sur une variété compacte  $M$  induit alors une métrique pseudo-riemannienne localement isométrique à celle de  $X$ . Nous venons de voir que cette métrique peut ne pas être géodésiquement complète (par exemple si  $X$  est  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$  muni d'une métrique lorentzienne invariante à gauche dont le flot géodésique est incomplet). Cette incomplétude est cependant due à l'incomplétude géodésique du modèle  $X$  et on ne connaît pas d'exemple où  $M$  soit incomplète en tant que  $(G, X)$ -structure. En particulier, si  $X$  est un espace pseudo-riemannien symétrique, alors la complétude géodésique des variétés localement modelées sur  $X$  et leur complétude en tant que  $(G, X)$ -structures sont équivalentes. On peut alors conjecturer que toutes les variétés pseudo-riemanniennes compactes localement modelées sur  $X$  sont géodésiquement complètes. Cette conjecture peut être vue comme une généralisation de la conjecture de Markus, qui impliquerait que les variétés pseudo-riemanniennes plates compactes sont géodésiquement complètes.

La conjecture de Markus a été prouvée par Carrière dans le cas particulier des variétés lorentziennes plates [Car89], puis généralisée par Klingler aux variétés lorentziennes de courbure constante [Kli96].

**Théorème** (Carrière, Klingler). *Soit  $M$  une variété lorentzienne compacte de courbure constante. Alors  $M$  est géodésiquement complète.*

L'objet du chapitre 2 est d'étendre ce théorème à d'autres géométries pseudo-riemanniennes. Nous n'y arriverons que sous une hypothèse supplémentaire.

**Définition.** Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ . Une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est dite *kleinienne* si  $M$  s'identifie à un quotient d'un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $X$  par un sous-groupe de  $G$  agissant librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathcal{U}$ .

Un ouvert  $\mathcal{U}$  qui admet une action proprement discontinue et cocompacte d'un sous-groupe de  $G$  est appelé un *ouvert divisible*. Nous prouvons dans le chapitre 2 que pour certaines géométries, le seul ouvert divisible est l'espace  $X$  tout entier. Autrement dit, dans ces géométries, toutes les structures kleiniennes sont complètes.

Les deux premières géométries concernées sont des cas particuliers de géométrie affine. L'une est donnée par l'action sur  $\mathbb{C}^d$  du groupe  $\mathrm{U}(d-1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d$  des transformations affines dont la partie linéaire préserve une forme sesquilinéaire de signature réelle  $(2d-2, 2)$ . L'autre est donnée par l'action sur  $\mathbb{C}^3$  du groupe  $\mathrm{O}(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3$  des transformations affines dont la partie linéaire préserve une forme quadratique complexe non dégénérée. Cette dernière peut être vue comme un analogue holomorphe de la géométrie euclidienne (voir ch.1, section 1.4). Enfin, la troisième géométrie concernée sera celle d'un groupe de Lie semi-simple  $L$  de rang réel 1 muni de sa métrique de Killing  $\kappa_L$ . La métrique de Killing est invariante par translations à gauche et à droite et le groupe d'isométries de  $(L, \kappa_L)$  s'identifie (à indice fini près) au quotient de  $L \times L$  par le plongement diagonal du centre  $Z(L)$  de  $L$ .

**Théorème 3** (ch.2, théorèmes 2.2.2, 2.2.3 et 2.2.4). *Pour tout couple  $(G, X)$  dans la liste suivante :*

- $(\mathrm{U}(d-1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ,
- $(\mathrm{O}(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ ,

–  $(L \times L/Z(L), L)$ ,  $L$  semi-simple de rang réel 1,  
 les  $(G, X)$ -structures kleiniennees sur les variétés compactes sont complètes.

Ce théorème n'est pas complètement satisfaisant puisque, conjecturalement, pour chacune de ces géométries, toutes les  $(G, X)$ -structures compactes sont complètes. Son intérêt vient du fait que l'ensemble des  $(G, X)$ -structures kleiniennees sur une variété  $M$  est fermé dans l'espace de toutes les  $(G, X)$ -structures (ch.2, corollaire 2.1.4). On obtient donc comme corollaire que, pour les couples  $(G, X)$  listés ci-dessus, l'espace des  $(G, X)$ -structures complètes sur une variété compacte  $X$  est fermé dans l'espace de toutes les  $(G, X)$ -structures.

**Remarque.** On ne connaît pas de géométrie  $(G, X)$  pour laquelle l'ensemble des  $(G, X)$ -structures complètes sur une variété compacte  $M$  ne soit pas fermé dans l'espace de toutes les  $(G, X)$ -structure sur  $M$ .

Par ailleurs, dans le cas où  $X = L$  est un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1 et  $G = L \times L/Z(L)$ , Guéritaud, Guichard, Kassel et Wienhard décrivent dans [GGKW] les  $(G, L)$ -structures complètes et prouvent en particulier que l'espace des  $(G, L)$ -structures complètes sur une variété compacte  $M$  est ouvert dans l'espace de toutes les  $(G, L)$ -structures. En combinant leur théorème et le nôtre, on obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 4.** *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, soit  $G$  le groupe  $L \times L/Z(L)$  agissant sur  $L$  par translations à gauche et à droite et soit  $M$  une variété compacte de même dimension que  $L$ . Alors le domaine des  $(G, L)$ -structures complètes sur  $M$  forme une union de composantes connexes de  $\text{Def}_{(G,L)}(M)$ .*

Autrement dit, on ne peut pas espérer obtenir de contre-exemple à la conjecture de Markus généralisée en déformant continûment une  $(G, L)$ -structure complète sur une variété compacte.

### 0.2.3 Domination des représentations d'un groupe de surface

Le chapitre 3 de cette thèse se focalise sur une question de comparaison de représentations d'un groupe de surface. Fixons une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2, une variété riemannienne  $M$  et une représentation  $\rho$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Nous souhaitons décrire l'espace des représentations fuchsiennees  $j : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  pour lesquelles il existe une application de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  qui soit  $(j, \rho)$ -équivariante et contractante (ou, plus généralement,  $\lambda$ -lipschitzienne, pour un  $\lambda$  strictement inférieur à une constante  $C$  donnée). Nous résumons ici les résultats obtenus, dans le cas où  $M$  est de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$  (par exemple lorsque  $M$  est l'espace symétrique d'un groupe de Lie de rang réel 1). Nous donnons également quelques conséquences de ces résultats liés à la théorie des représentations d'un groupe de surface. La principale motivation de ce théorème – son application à la description des espaces de déformation des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 – fera l'objet du chapitre 4 de la thèse. Nous en discutons dans la section suivante.

**Définition.** Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $M$  un espace métrique. Étant données une représentation fuchsienne  $j$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$ , on appelle constante de Lipschitz minimale et on note

$$\text{Lip}(j, \rho)$$

l'infimum des constantes de Lipschitz d'applications  $(j, \rho)$ -équivariantees de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$ . On dit que  $j$  domine strictement  $\rho$  si  $\text{Lip}(j, \rho) < 1$ .

Nous nous intéresserons uniquement au cas où  $M$  est une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$  (appelée par la suite *espace riemannien*  $\text{CAT}(-1)$ ).

La fonction  $\text{Lip}$  est continue (ch.3, théorème 3.1.7) et ne dépend que de la classe de  $j$  et de  $\rho$  modulo conjugaison. On peut donc la voir comme définie sur  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$ , où  $\text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$  désigne l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$  modulo conjugaison et où  $\mathcal{T}(S)$  désigne l'espace de Teichmüller de  $S$  (qui s'identifie à l'espace des représentations fuchsienues modulo conjugaison).

La constante de Lipschitz minimale fournit une comparaison très fine entre deux représentations, qui implique de nombreuses autres inégalités plus larges. Par exemple, un contrôle de la constante de Lipschitz minimale fournit immédiatement un contrôle du *spectre des longueurs* de  $\rho$  (ch.3, section 3.1.2) ou de son exposant critique (ch.3, définition 3.2.4).

La constante de Lipschitz minimale a été introduite par Thurston dans le cas particulier où  $\rho$  est également une représentation fuchsienne [Thu86]. En remarquant que  $\text{Lip}(j, \rho) > 1$  lorsque  $j$  et  $\rho$  sont fuchiennes, Thurston définit une distance asymétrique sur l'espace de Teichmüller, donnée par

$$d_{Th}(j, \rho) = \log(\text{Lip}(j, \rho)) .$$

L'étude de la fonction  $\text{Lip}$  dans un cadre plus général a été développée par Guéritaud et Kassel dans [GK13]. Leur travail est motivé en grande partie par la description des quotients d'un groupe de Lie  $L$  de rang 1 par des sous-groupes de  $L \times L$  (voir section 0.2.4).

Le premier théorème du chapitre 3, obtenu en collaboration avec Bertrand Deroin, affirme que toute représentation  $\rho$  peut être dominée par une représentation fuchsienne.

**Théorème 5** (ch.3, théorème 3.2.2). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2, soit  $M$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$  et soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Alors il existe une représentation fuchsienne  $j$  qui domine strictement  $\rho$ , sauf si  $\rho$  est elle même fuchsienne, i.e. stabilise un plan totalement géodésique de courbure  $-1$  en restriction auquel elle est fuchsienne.*

Ce théorème a été obtenu indépendamment et avec des méthodes différentes par Guéritaud–Kassel–Wolff dans le cas où  $M$  est le plan hyperbolique [GKW13]. Il permet d'étendre certains contrôles uniformes sur les représentations fuchiennes à toutes les représentations à valeurs dans le groupe des isométries d'un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Pour illustrer cela, rappelons la définition de la systole et de la constante de Bers.

**Définition 0.2.1.** La *systole* en genre  $g$  est le plus petit nombre  $\sigma_g$  tel que toute métrique hyperbolique sur une surface compacte de genre  $g$  possède une courbe fermée simple de longueur inférieure à  $\sigma_g$ . La *constante de Bers* en genre  $g$  est le plus petit nombre  $B_g$  tel que, pour toute métrique hyperbolique sur une surface compacte  $S$  de genre  $g$ , il existe un découpage de  $S$  en pantalons par des courbes de longueurs inférieures à  $B_g$ .

On déduit aisément du théorème 5 le résultat suivant :

**Corollaire 6** (ch.3, corollaire 3.2.9). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g$  supérieur à 2, soit  $M$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$  et soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Alors :*

- *il existe une courbe fermée simple sur  $S$  qui représente un élément du groupe fondamental dont l'image par  $\rho$  a une longueur de translation inférieure à  $\sigma_g$ ,*

- *il existe une décomposition en pantalons de  $S$  par des courbes représentant des éléments du groupe fondamental dont les images par  $\rho$  ont des longueurs de translation inférieures à  $B_g$ .*

Ce dernier corollaire a été utilisé par Marché et Wolff [MW13] pour prouver en genre 2 une célèbre conjecture de Bowditch selon laquelle toute représentation non fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  admet une courbe fermée simple dont l'image est elliptique ou parabolique.

La preuve du théorème 5 construit une représentation dominant  $\rho$  par des méthodes analytiques utilisant la théorie des applications harmoniques tordues (voir ch.3, section 3.3). La représentation ainsi construite dépend en fait du choix a priori d'une structure complexe sur la surface  $S$ . Pour être plus précis, on construit une application  $\Psi_\rho : \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathcal{T}(S)$ , dont on montre que l'image est contenue dans le domaine  $\text{Dom}(\rho)$  des représentations qui dominent strictement  $\rho$ . On en déduit en particulier que ce domaine est non vide. Dans un second temps, nous montrerons que  $\Psi_\rho$  est un homéomorphisme de  $\mathcal{T}(S)$  dans  $\text{Dom}(\rho)$  qui varie continûment avec  $\rho$ . On obtient ainsi le théorème suivant :

**Théorème 7** (ch.3, théorème 3.2.10). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $M$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Alors le domaine  $\text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$  formé des couples  $(j, \rho) \in \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$  est homéomorphe à  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}_{n_f}(S, \text{Isom}(M))$  (où  $\text{Rep}_{n_f}(S, \text{Isom}(M))$  désigne l'ensemble des représentations  $\rho$  qui ne sont pas fuchiennes en restriction à un plan stable totalement géodésique de courbure  $-1$ ).*

Si on divise la métrique  $g_M$  de  $M$  par une constante  $C^2 > 1$ , on multiplie sa courbure sectionnelle par  $C^2$  et le théorème reste valable pour cette métrique renormalisée. La constante de Lipschitz minimale est quant à elle divisée par  $C$ . Grâce à cette renormalisation, on peut déduire du théorème 7 une description de l'ensemble des représentations fuchiennes  $j$  telles que  $\text{Lip}(j, \rho) < C$ .

**Corollaire 8** (ch.3, corollaires 3.2.12 et 3.2.13). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $M$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Pour toute représentation  $\rho$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$  et toute constante  $C$  strictement supérieure à 1, l'ensemble*

$$\{j \in \mathcal{T}(S) \mid \text{Lip}(j, \rho) < C\}$$

*est homéomorphe à  $\mathcal{T}(S)$ . En particulier, les boules ouvertes à gauche pour la distance asymétrique de Thurston sur  $\mathcal{T}(S)$  sont contractiles.*

#### 0.2.4 Application à la géométrie anti-de Sitter de dimension 3

Les résultats du chapitre 3, qui semblent plus relever de la théorie des représentations des groupes de surfaces que de l'étude des variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques, sont en fait motivés par un problème de géométrie anti-de Sitter de dimension 3.

Une variété anti-de Sitter est une variété lorentzienne de courbure constante  $-1$ . En dimension 3, ces variétés sont localement modélées sur  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing. D'après le théorème de Klingler, les variétés anti-de Sitter compactes sont complètes et sont donc des quotients du revêtement universel  $\widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par l'action d'un sous-groupe de  $\widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})} \times \widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$  agissant par translations à gauche et à droite. Le groupe fondamental de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , mais le théorème

des niveaux finis, dû à Kulkarni et Raymond [KR85] (voir ch.4, théorème 4.1.2 et la discussion qui suit), affirme que ces variétés sont en fait des quotients d'un revêtement fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Pour décrire les variétés anti-de Sitter compactes à revêtement fini près, il reste donc à décrire les quotients compacts de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Rappelons que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  s'identifie au groupe  $\mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  des isométries de  $\mathbb{H}^2$  préservant l'orientation. Kulkarni et Raymond ont prouvé dans [KR85] que ces quotients sont, à indice fini près, de la forme

$$j \times \rho(\Gamma) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) ,$$

où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $j$  et  $\rho$  deux représentations de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  telles que  $j$  est fuchsienne.

Kassel [Kas09] a ensuite montré que  $j \times \rho(\Gamma)$  agit librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  si et seulement si  $j$  domine strictement  $\rho$ . Ce théorème conduit naturellement à s'interroger sur la topologie de l'espace des couples  $(j, \rho)$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$  (ce qui fait l'objet de la question 2.1 d'un récent article de survol co-écrit par plusieurs spécialistes du domaine [BBD<sup>+</sup>12]).

Le théorème 7 permet d'obtenir une réponse à cette question :

**Corollaire 9** (ch.4, corollaire 4.2.7). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g$  supérieur à 2. Notons  $\mathrm{Rep}_k(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  de classe d'Euler  $k$  modulo conjugaison. Alors l'ensemble des couples  $(j, \rho) \in \mathcal{T}(S) \times \mathrm{Rep}(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$  est homéomorphe à*

$$\mathcal{T}(S) \times \coprod_{2-2g < k < 2g-2} \mathrm{Rep}_k(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})) .$$

*En particulier, cet ensemble possède  $4g - 5$  composantes connexes, classifiées par la classe d'Euler de la représentation  $\rho$ .*

Notons que ce théorème ne décrit pas l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété donnée, car la topologie d'un quotient de la forme

$$j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

dépend de la classe d'Euler de  $\rho$ . Pour arriver à une description d'un espace de déformation, il est nécessaire de décrire tous les quotients de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  (pas uniquement à revêtement fini près) et de "regrouper ensemble" les quotients qui donnent topologiquement la même variété.

Dans ce but, nous commencerons par raffiner (sans nouvelle difficulté) les théorèmes de Kulkarni-Raymond et Kassel de façon à décrire tous les quotients compacts de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  (ch.4, lemmes 4.3.1 et 4.3.3). Nous prouverons ensuite que ces quotients sont des *fibrés de Seifert*. Ce résultat se déduisait déjà des travaux de Kulkarni et Raymond, mais nous en donnons une preuve plus explicite due à Guéritaud et Kassel [GK13], qui construit la fibration de Seifert à partir d'une application équivariante contractante (ch.4, corollaire 4.3.6).

La description de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur chaque fibré de Seifert serait trop technique, car elle ferait intervenir la classification des orbifolds hyperboliques et celle des représentations de leur groupe fondamental. Nous nous restreindrons donc au cas des fibrés en cercles. Il apparaîtra que pour toute structure anti-de Sitter  $q$  sur un fibré en cercle  $M$  au dessus de  $S$ , les fibres de  $M$  sont librement homotopes à des géodésiques fermées simples de type temps et de même longueur. Nous appellerons *lon-*

gueur de la fibre cette longueur divisée par  $\pi$  et nous la noterons  $\mathbf{n}(M, q)$  (ch.4, définition 4.4.1).

En utilisant le théorème 9 et en regroupant les quotients donnant les mêmes fibrés en cercles, on obtient le théorème suivant :

**Théorème 10** (ch.4, théorème 4.4.6). *Soit  $M$  un fibré en cercle de classe d'Euler  $k$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$ . Alors :*

- les composantes connexes de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur  $M$  sont classifiées par la longueur de la fibre,
- la longueur de la fibre prend toutes les valeurs entières strictement comprises entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , ainsi que la valeur rationnelle  $\frac{2g-2}{k}$ .

Il est également intéressant de comprendre où se situent, dans cet espace de déformation, les structures anti-de-Sitter pour lesquelles la représentation  $\rho$  est à valeurs dans un sous-groupe compact maximal. Ces structures, appelées *standard*, sont historiquement les premières à avoir été mises en évidence. On a d'abord cru que toutes les structures anti-de Sitter étaient standard, puis que toutes les structures anti-de Sitter pouvaient être obtenues par déformation de structures standard. Il transparaîtra clairement dans la preuve du théorème 10 que les structures standard ont une longueur de la fibre égale  $\frac{2g-2}{k}$  et que lorsque  $k$  ne divise pas  $2g - 2$ , ces structures standard sont "rigides", c'est-à-dire qu'elles ne peuvent être déformées en des structures non standard. Lorsque  $k$  est supérieur à  $4g - 4$ , le fibré en cercle de classe d'Euler  $k$  au dessus de  $S$  ne possède que des structures anti-de Sitter standard.

Nous terminerons le chapitre 4 par le calcul du volume des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, répondant ainsi à la question 2.2 de [BBD<sup>+</sup>12].

**Théorème 11** (ch.4, théorème 4.5.1). *Soit  $M$  un fibré en cercle de classe d'Euler  $k$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$  et  $q$  une métrique anti-de Sitter sur  $M$ , de longueur de la fibre  $\mathbf{n}(M, q)$ . Alors*

$$\text{Vol}(M, q) = \frac{\pi^2}{2} \left( (4g - 4)\mathbf{n}(M, q) - k\mathbf{n}(M, q)^2 \right).$$

*En particulier, le volume de  $q$  ne dépend que de la composante connexe de  $q$  dans l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur  $M$ .*

Ce calcul se déduit de la description explicite des variétés anti-de Sitter compactes comme fibrés de Seifert.

Les résultats du chapitre 2 font l'objet de l'article [Tho13]. Le théorème 5, obtenu en collaboration avec Bertrand Deroin, est prouvé dans [DT13]. Le théorème 7 est quant à lui prouvé dans [Tho14]. Enfin, les résultats du chapitre 4 feront l'objet d'un article ultérieur.

Malgré quelques paragraphes de rappels dans le chapitre 1, il nous sera malheureusement impossible de ré-introduire dans cette thèse toutes les notions qui nous seront utiles. Nous serons en particulier très évasifs sur les outils d'analyse pseudo-riemannienne et nous ne ferons pratiquement aucun rappel sur la théorie des groupes de Lie. Nous conseillons au lecteur intéressé le livre de Wolf [Wol74] pour une introduction aux variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques, celui de Knapp [Kna02] pour un cours complet sur les groupes et algèbres de Lie, ou encore celui d'Helgason [Hel79] pour un point de vue plus géométrique sur les groupes de Lie semi-simples.



# Chapitre 1

## Variétés localement homogènes et $(G, X)$ -structures

L'OBJECTIF DE CE CHAPITRE INTRODUCTIF sera de situer mes travaux de recherche dans le cadre général de l'étude des variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes. Notre fil rouge sera de montrer comment l'étude de ces variétés peut se traduire dans le langage des  $(G, X)$ -structures, introduit par Thurston dans [Thu80] et dont l'idée remonte à Ehresmann.

Le principe général est le suivant. Considérons  $X$  une variété différentielle munie d'une structure géométrique rigide  $q$  (comme une connexion affine ou, dans notre cas, une métrique pseudo-riemannienne), et supposons que le groupe  $G$  des transformations de  $X$  qui préservent  $q$  agit transitivement sur  $X$ . Alors, étant donnée une variété  $M$  de même dimension que  $X$ , il existe, sous certaines hypothèses, une correspondance naturelle entre les structures géométriques rigides sur  $M$  localement isomorphes à  $(X, q)$  et les atlas de cartes de  $M$  à valeurs dans  $X$  dont les changements de cartes sont dans  $G$ . C'est cet atlas que Thurston appelle une  $(G, X)$ -structure sur la variété  $M$ . On peut alors "oublier" en quelque sorte la structure géométrique dont on a muni  $M$  pour se focaliser sur la structure locale d'espace homogène qu'elle induit. La notion de  $(G, X)$ -structure est même définie pour des espaces  $G$ -homogènes  $X$  où  $G$  n'est pas a priori le groupe des automorphismes d'une structure géométrique sur  $X$ .

L'intérêt d'adopter ce point de vue provient du fait qu'une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  peut être décrite par un couple  $(\text{dev}, \rho)$ , où  $\rho$  est une représentation du groupe fondamental de  $M$  dans  $G$  et  $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow M$  un difféomorphisme local  $\rho$ -équivariant. La description des  $(G, X)$ -structures se ramène alors à l'étude de certaines représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  et de leur dynamique sur l'espace homogène  $X$ . En particulier, le théorème d'Ehresmann–Thurston [Thu82], impressionnant par son degré de généralité, affirme que l'espace des  $(G, X)$ -structures sur une variété compacte  $M$  est localement paramétré par les morphismes d'holonomie (voir section 1.5.2).

Hormis ce théorème, l'étude des  $(G, X)$ -structures dépend beaucoup de l'espace homogène considéré et ce point de vue sert plutôt à fixer un cadre de réflexion qu'à apporter des réponses générales. Les questions naturelles qui se posent sont : quelles variétés  $M$  possèdent une  $(G, X)$ -structure ? À quoi ressemble l'espace des  $(G, X)$ -structures sur une variété  $M$  donnée ? En particulier, quels morphismes de  $\pi_1(M)$  dans  $G$  s'interprètent géométriquement comme l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure ?

Dans le contexte de la géométrie pseudo-riemannienne, le point de vue des  $(G, X)$ -structures s'est révélé essentiel dans la preuve des théorèmes de Carrière et Klingler, qui généralisent le théorème classique de Hopf–Rinow à certaines variétés pseudo-riemanniennes.

Carrière [Car89] et Klingler [Kli96] ont montré que les variétés lorentziennes compactes de courbure constante sont géodésiquement complètes (voir section 1.6.1). Leur preuve repose sur le fait que la notion analytique de complétude géodésique (il s'agit de savoir si les solutions d'une équation différentielle peuvent exploser en temps fini) est en fait équivalente à une autre notion de complétude, propre aux  $(G, X)$ -structures : une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est dite complète si  $M$  s'identifie à un quotient de  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$ . Pour de nombreux espaces  $G$ -homogènes  $X$  (et notamment dès que  $G$  préserve une métrique pseudo-riemannienne sur  $X$ ), on ne sait pas s'il existe des  $(G, X)$ -variétés compactes non complètes.

Nous souhaitons donc étudier les variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes du point de vue des  $(G, X)$ -structures. Cette transcription n'est toutefois pas immédiate et peut être impossible en général. Un premier obstacle à cette transcription vient du fait qu'une variété pseudo-riemannienne localement homogène n'est pas nécessairement localement modélée sur un espace homogène. La construction naturelle pour trouver un modèle homogène à une structure localement homogène consiste à considérer l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  des germes de champs de Killing en un point, la sous-algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de ceux qui s'annulent en ce point et à poser  $X = G/H$ , où  $G$  est le groupe de Lie simplement connexe engendré par  $\mathfrak{g}$  et  $H$  le sous-groupe engendré par  $\mathfrak{h}$ . Or il se peut que  $H$  ne soit pas fermé dans  $G$ . Ce phénomène ne se produit toutefois pas en dimension inférieure à 4, en vertu d'un théorème de Mostow [Mos50] (voir section 1.3.2).

Par ailleurs, si  $M$  est une variété pseudo-riemannienne localement homogène qui possède un modèle  $X$ , la complétude géodésique de  $M$  n'est pas toujours équivalente à sa complétude en tant que  $(G, X)$ -structure, pour la simple raison que le modèle  $X$  lui-même peut ne pas être géodésiquement complet. En guise d'exemple, nous étudions dans la section 1.2 les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  et prouvons que beaucoup d'entre elles sont géodésiquement incomplètes.

Nous nous placerons donc sous une hypothèse plus forte que l'homogénéité locale : la symétrie locale au sens de Cartan (voir section 1.3). Un des objectifs de ce chapitre est de montrer que cette hypothèse résout les problèmes que nous venons de mentionner : d'une part, toute variété pseudo-riemannienne localement symétrique est localement modélée sur un espace symétrique, d'autre part, tout espace pseudo-riemannien symétrique est géodésiquement complet, de sorte que la complétude géodésique d'une variété localement symétrique est équivalente à la complétude de la  $(G, X)$ -structure qui lui est associée.

Ce premier chapitre s'organise ainsi. Après de brefs rappels de géométrie pseudo-riemannienne (section 1.1), nous illustrons les difficultés de la question de la complétude géodésique en étudiant les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  (section 1.2). Dans cette section relativement indépendante du reste du chapitre, nous retrouvons par des arguments plus géométriques un théorème de Bromberg–Medina qui classe les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  dont le flot géodésique est complet (théorème 1.2.8). Nous obtenons en particulier que l'espace des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  se partitionne en deux ouverts non-vides  $U_+$  et  $U_-$  et un fermé semi-algébrique  $V_0$  tel que les métriques de  $U_+$  et de  $V_0$  sont géodésiquement complètes et celles de  $U_-$  sont géodésiquement incomplètes (corollaire 1.2.9). Nous donnons également quelques arguments plus généraux qui nous conduisent à conjecturer qu'une telle classification reste valable sur des groupes de Lie semi-simples de dimension supérieure.

Nous introduisons ensuite la notion de variété pseudo-riemannienne localement symétrique et montrons que ces variétés satisfont les quelques bonnes propriétés qui nous

permettrons de les étudier à travers le prisme des  $(G, X)$ -structures (section 1.3). Dans la section 1.4, nous introduisons la notion de variété *riemannienne holomorphe*, une généralisation holomorphe de la notion de variété pseudo-riemannienne. De telles variétés peuvent également être localement symétriques et leur étude se transcrit également dans le langage des  $(G, X)$ -structures.

Dans la section 1.5, nous rappelons les résultats généraux de la théorie des  $(G, X)$ -structures (en particulier le théorème d'Ehresmann–Thurston) et établissons les correspondances fondamentales entre l'étude des métriques pseudo-riemanniennes localement symétriques et l'étude des  $(G, X)$ -structures associées. Nous montrons en particulier l'équivalence entre les deux notions de complétude (proposition 1.5.14), ainsi que la correspondance entre les espaces de déformation. Enfin, nous terminons ce chapitre par une liste de questions générales qui ont motivé ce travail de recherche (section 1.6), questions que nous étayons par des conjectures et des résultats partiels obtenus ces trente dernières années.

Les résultats de ce chapitre ne sont pas nouveaux, à l'exception de ceux de la section 1.2. Nous omettrons donc de nombreuses preuves, pour nous concentrer uniquement sur les théorèmes qui établissent un lien entre variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques et  $(G, X)$ -structures. On pourra consulter [Wol74] pour plus de précisions sur les variétés pseudo-riemanniennes localement homogènes et la symétrie au sens de Cartan, ainsi que [Gol10] pour une introduction à la théorie des  $(G, X)$ -structures.

Le degré de généralité de ce chapitre introductif pourra sembler excessif en comparaison du reste de la thèse qui se focalisera sur des géométries bien spécifiques. Il m'a semblé cependant qu'il serait dommage de ne pas inclure cette mise en contexte, qui a été l'objet d'un travail de réflexion non négligeable au cours de mon doctorat.

## 1.1 Rappels de géométrie pseudo-riemannienne

Soit  $M$  une variété différentielle. Une métrique pseudo-riemannienne  $q$  sur  $M$  est une section lisse du fibré  $\text{Sym}^2 TM$  des formes quadratiques sur le fibré tangent, telle qu'en tout point  $x$  de  $M$ , la forme quadratique  $q_x$  définie sur  $T_x M$  est non dégénérée. Cette notion généralise donc la notion de métrique riemannienne, qui suppose  $q_x$  définie positive en tout point.

Une métrique pseudo-riemannienne assigne une “norme” négative à certains vecteurs tangents et ne peut donc pas s'interpréter comme le générateur infinitésimal d'une distance sur la variété  $M$ . Néanmoins, les métriques pseudo-riemanniennes partagent de nombreuses propriétés avec les métriques riemanniennes. En particulier, une métrique pseudo-riemannienne possède une unique connexion de Levi–Civita, qui permet de définir un flot géodésique et un opérateur de courbure. L'objet de cette section est de rappeler brièvement la définition de ces objets.

### 1.1.1 Connexion de Levi–Civita et géodésiques pseudo-riemanniennes

Rappelons qu'une connexion linéaire  $\nabla$  sur un fibré vectoriel  $E \rightarrow M$  est la donnée d'une “bonne” façon de dériver les sections de  $E$ . Formellement, c'est un opérateur linéaire

$$\nabla : C^\infty(E) \rightarrow C^\infty(\Omega^1(M) \otimes E)$$

satisfaisant la règle de Leibniz :

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

pour toute section  $s$  de  $E$  et toute fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $X$  est un champ de vecteurs sur  $M$  et  $s$  une section de  $E$ , on note  $\nabla_X s$  la contraction de  $X$  avec  $\nabla s$ .

Soit  $c : [0, 1] \rightarrow M$  un chemin et  $u_0$  un vecteur de  $E_{c(0)}$ . Il existe alors un unique chemin  $u(t) \in E_{c(t)}$  vérifiant  $u(0) = u_0$  et  $\nabla_{\dot{c}(t)} u(t) = 0$ . De plus, l'application de  $E_{c(0)}$  dans  $E_{c(1)}$  qui à  $u(0)$  associe  $u(1)$  est linéaire. Elle est appelée *transport parallèle* de la connexion  $\nabla$  le long de  $c$ .

Supposons maintenant que le fibré  $E$  est le fibré tangent à la variété  $M$ . On appelle alors *torsion* d'une connexion  $\nabla$  la section  $T^\nabla$  du fibré  $\Lambda^2 T^*M \otimes TM$  définie par

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

pour tout champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $M$ . (On vérifie aisément que cette expression est  $C^\infty(M)$ -linéaire en  $X$  et en  $Y$  et que sa valeur en un point  $x$  ne dépend donc que des valeurs de  $X$  et  $Y$  au point  $x$ .)

**Proposition-définition 1.1.1.** Soit  $q$  une métrique pseudo-riemannienne sur une variété  $M$ . Il existe une unique connexion sur  $TM$  dont la torsion soit nulle et dont le transport parallèle préserve la métrique  $q$ . Cette connexion est appelée *connexion de Levi-Civita* associée à  $q$ .

La preuve de cette proposition est en tout point identique à la preuve classique en géométrie riemannienne (lire par exemple [GHL90], p.72).

L'existence d'une connexion de Levi-Civita permet de définir les géodésiques de la métrique  $q$  comme les courbes  $\gamma$  solutions de l'équation

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0.$$

Ces géodésiques sont en fait les projections sur  $M$  des courbes intégrales d'un champ de vecteurs sur l'espace total du fibré tangent à la variété  $M$ . Autrement dit, pour tout point  $x$  de  $M$  et tout vecteur  $u \in T_x M$ , il existe une unique géodésique issue de  $x$  et dirigée par  $u$ . Le flot de ce champ de vecteur est appelé *flot géodésique*. Par homogénéité de l'équation des géodésiques, l'image au temps  $t$  de la géodésique issue de  $x$  dirigée par  $u$  est égale (lorsqu'elle existe) à l'image au temps 1 de la géodésique issue de  $x$  dirigée par  $tu$ . On la note  $\exp_x(tu)$ . L'application  $u \mapsto \exp_x(u)$  est appelée *application exponentielle* au point  $x$ . L'application exponentielle fournit, comme dans le cas riemannien, des coordonnées locales "standard", grâce à la proposition suivante :

**Proposition 1.1.2.** Pour tout  $x \in M$ , il existe un ouvert  $U$  de  $T_x M$  contenant 0 tel que  $\exp_x : U \rightarrow M$  est un difféomorphisme sur son image.

Notons que le flot géodésique est défini sur un ouvert maximal de  $TM \times \mathbb{R}$  qui n'est pas nécessairement tout  $TM \times \mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.3.** La variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est dite *géodésiquement complète* si son flot géodésique est complet, c'est-à-dire défini sur tout  $TM \times \mathbb{R}$ .

Rappelons qu'en géométrie riemannienne, le théorème classique de Hopf–Rinow relie la complétude géodésique à la complétude métrique ([GHL90], p.96).

**Théorème 1.1.4** (Hopf–Rinow). Une variété riemannienne  $(M, q)$  est géodésiquement complète si et seulement si la distance induite par  $q$  fait de  $M$  un espace métrique complet.

**Corollaire 1.1.5.** *Les variétés riemanniennes compactes sont géodésiquement complètes.*

Comme une métrique pseudo-riemannienne n'induit pas de distance sur  $M$ , le théorème de Hopf–Rinow n'a pas de sens en géométrie pseudo-riemannienne. Son corollaire est faux : il existe, dès la dimension 2, des exemples de variétés lorentziennes compactes qui ne sont pas géodésiquement complètes (voir par exemple [GL95]). Nous donnerons dans la section 1.2 un exemple en dimension 3 où la métrique lorentzienne considérée est de plus localement homogène.

### 1.1.2 Courbure

La courbure d'une métrique pseudo-riemannienne  $q$  se définit, comme dans le cadre riemannien, à partir de sa connexion de Levi–Civita  $\nabla$ .

**Définition 1.1.6.** Le *tenseur de courbure* de la métrique  $q$  est la section  $R^q$  de  $T^*M^{\otimes 4}$  définie par

$$R^q(X, Y, Z, T) = q(\nabla_X \nabla_Y Z, T) - q(\nabla_Y \nabla_X Z, T) - q(\nabla_{[X, Y]} Z, T) \quad (1.1)$$

pour tout champs de vecteurs  $X, Y, Z, T$ . (Comme pour la torsion, on vérifie que la valeur de  $R^q$  au point  $x$  ne dépend que des valeurs de  $X, Y, Z, T$  au point  $x$ .)

Le tenseur de courbure est anti-symétrique en  $X$  et  $Y$  et symétrique en  $(X, Y)$  et  $(Z, T)$ . Il est par conséquent caractérisé par son évaluation sur les 2-plans, appelée *courbure sectionnelle*. Dans le cas pseudo-riemannien, la courbure sectionnelle ne peut pas être évaluée sur les 2-plans isotropes.

**Définition 1.1.7.** Soit  $P \subset T_x M$  un 2-plan non-isotrope pour  $q_x$  (i.e. tel que  $q_x|_P$  est non dégénérée). La courbure sectionnelle de  $P$  est donnée par

$$\frac{R_x^q(X, Y, Y, X)}{q_x(X, X)q_x(Y, Y) - q_x(X, Y)^2},$$

où  $(X, Y)$  désigne une base quelconque de  $P$ .

### 1.1.3 Isométries, champs de Killing et homogénéité

Soient  $(M, q)$  et  $(N, q')$  deux variétés pseudo-riemanniennes de même dimension. Par analogie avec le cas riemannien, on appelle *isométrie* un difféomorphisme  $\varphi : M \rightarrow N$  tel que  $\varphi^* q' = q$ . Une isométrie locale de  $M$  dans  $N$  est la donnée d'un ouvert  $U$  de  $M$ , d'un ouvert  $V$  de  $N$  et d'une isométrie de  $(U, q|_U)$  dans  $(V, q'|_V)$ . Un *champ de Killing* sur la variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est un champ de vecteur dont le flot est formé d'isométries de  $(M, q)$ . On appelle également *champ de Killing local* un champ de vecteur défini sur un ouvert de  $M$ , dont le flot est formé d'isométries locales.

Lorsque  $M$  est connexe, les isométries de  $M$  dans  $N$  sont caractérisées par leur différentielle en un point  $x$ . Elles préservent en effet les géodésiques et sont donc linéaires en coordonnées exponentielles. De plus, la différentielle d'une isométrie  $\varphi$  en un point  $x$  est une isométrie linéaire de  $(T_x M, q_x)$  dans  $(T_{\varphi(x)} N, q'_{\varphi(x)})$ . On en déduit que le groupe des isométries d'une variété pseudo-riemannienne  $M$  de dimension  $n$  est un groupe de Lie de dimension inférieure à

$$\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+2)}{2}.$$

Son algèbre de Lie tangente s'identifie à l'algèbre de Lie des champs de Killing.

De même, le pseudo-groupe des germes d'isométries locales est un pseudo-groupe de Lie de dimension inférieure à  $\frac{n(n+1)}{2}$  et l'ensemble des germes de champs de Killing locaux en un point  $x$  forme une algèbre de Lie de dimension inférieure à  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Elle contient une sous-algèbre de Lie de dimension inférieure à  $\frac{n(n-1)}{2}$  formée des germes de champs de Killing locaux s'annulant en  $x$ , qui s'identifie à l'algèbre de Lie du sous-groupe des germes d'isométries locales fixant  $x$ .

Toute isométrie linéaire de  $(T_x M, q_x)$  dans  $(T_{x'} N, q'_{x'})$  ne s'étend pas nécessairement en une isométrie locale via les coordonnées exponentielles. Pour cela, il est par exemple nécessaire que cette isométrie linéaire préserve également le tenseur de courbure. En fait, une métrique pseudo-riemannienne générique n'admet pas d'isométrie locale. Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas particulier où le pseudo-groupe des isométries locales est "assez gros" pour agir transitivement sur la variété.

**Définition 1.1.8.** Une variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est dite *homogène* si le groupe des isométries de  $(M, q)$  agit transitivement sur la variété  $M$ . Elle est dite *localement homogène* si le pseudo-groupe des isométries locales de  $(M, q)$  agit transitivement sur  $M$ .

Le lemme suivant permet dans certains cas de passer de l'homogénéité locale à l'homogénéité globale.

**Lemme 1.1.9.** *Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne simplement connexe localement homogène et géodésiquement complète. Alors toute isométrie locale de  $(M, q)$  se prolonge en une isométrie globale. En particulier,  $M$  est homogène.*

*Preuve.* On se contentera de prouver qu'une isométrie locale se prolonge (de façon unique) sur un voisinage de tout chemin de  $M$ . Le résultat se déduira alors de la simple connexité de  $M$ .

Il suffit pour cela de montrer que, si  $c : [0, 1] \rightarrow M$  est un chemin continu,  $U$  un ouvert de  $M$  contenant  $c([0, 1])$  et  $f : U \rightarrow M$  une isométrie locale, alors  $f$  se prolonge à un voisinage de  $c([0, 1])$ . Par compacité de  $c([0, 1])$ , il existe  $0 < t < 1$  et  $V_t$  un voisinage de 0 dans  $T_{c(t)} M$  tel que l'application  $\exp_{c(t)}$  est injective sur  $V_t$  et tel que  $c(1)$  est inclus dans  $U_t = \exp_{c(t)}(V_t)$ . Comme le flot géodésique de  $M$  est complet, on peut définir l'application

$$g : \begin{array}{ccc} U_t & \rightarrow & M \\ \exp_{c(t)}(u) & \mapsto & \exp_{f(c(t))}(df(u)) \end{array} .$$

Comme  $g$  est linéaire en coordonnées exponentielles et puisque  $dg$  coïncide avec  $df$  au point  $c(t)$ , l'application  $g$  est une isométrie locale, qui coïncide avec  $f$  sur  $U \cap U_t$ . L'application

$$\bar{f} : U \cup U_t \rightarrow M \\ x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in U \\ g(x) & \text{si } x \in U_t \end{cases}$$

est donc bien une isométrie locale et prolonge  $f$  à un voisinage de  $c([0, 1])$ .  $\square$

On peut tirer de ce lemme plusieurs conséquences en géométrie riemannienne.

**Corollaire 1.1.10.** *Si  $M$  est une variété riemannienne compacte localement homogène, son revêtement universel est homogène.*

*Preuve.* Par le théorème de Hopf–Rinow,  $M$  est géodésiquement complète et son revêtement universel l'est également. On conclut alors grâce au lemme 1.1.9.  $\square$

Le théorème de Hopf–Rinow admet également la conséquence suivante :

**Proposition 1.1.11.** *Soit  $M$  une variété riemannienne homogène. Alors  $M$  est géodésiquement complète. Si  $M$  est de plus simplement connexe, alors toute isométrie locale de  $M$  se prolonge en une isométrie globale.*

Ce résultat n'a pas d'équivalent pseudo-riemannien. En voici un premier contre-exemple. Soit  $U$  l'ouvert des  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tels que  $y > 0$ . Munissons  $U$  de la métrique riemannienne plate  $dx dy$ . Le groupe des transformations affines lorentziennes de la forme

$$(x, y) \mapsto (\lambda x + b, \lambda^{-1}y)$$

agit transitivement sur l'ouvert  $U$ , qui est donc un espace pseudo-riemannien homogène. Il n'est cependant pas géodésiquement complet, puisque c'est un ouvert strict de  $(\mathbb{R}^2, dx dy)$ . L'isométrie locale  $(x, y) \mapsto (x, y - 1)$ , bien définie par exemple sur un voisinage du point  $(0, 2)$ , ne se prolonge pas en une isométrie globale. Dans la section 1.2, nous donnerons d'autres contre-exemples en étudiant la complétude géodésique des métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ .

## Modèles

Soit  $G$  le groupe des isométries de  $M$  et  $H$  le sous-groupe des isométries fixant un point base  $x_0$ . Si la variété  $(M, q)$  est homogène, elle s'identifie au quotient  $G/H$ , sur lequel  $G$  agit par translations à gauche. Si par exemple  $H$  est trivial,  $(M, q)$  s'identifie à un groupe de Lie muni d'une métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche.

Réciproquement, on peut construire une variété pseudo-riemannienne homogène par la donnée d'un groupe de Lie  $G$  et d'un sous-groupe de Lie  $H$  vérifiant certaines propriétés :

**Proposition 1.1.12.** *Soit  $G$  un groupe de Lie, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , et  $H$  un sous-groupe fermé, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ . Toute forme quadratique non dégénérée sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  invariante par l'action adjointe de  $H$  s'étend de façon unique en une métrique pseudo-riemannienne sur  $G/H$  invariante par  $G$ .*

Il est naturel de se demander si une variété pseudo-riemannienne localement homogène  $(M, q)$  est localement isométrique à un modèle homogène. Pour cela, considérons un point  $x$  de  $M$ , et notons  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie des champs de Killing locaux au voisinage de  $x$  et  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre des champs s'annulant en  $x$ . Soit  $G$  l'unique groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et soit  $H$  le sous-groupe connexe engendré par  $\mathfrak{h}$ .

**Proposition 1.1.13** ([Mos50]). *La variété  $(M, q)$  admet un modèle homogène si et seulement si  $H$  est fermé dans  $G$ . Dans ce cas,  $M$  est localement isométrique à l'espace homogène  $G/H$ .*

Si la variété  $M$  est de dimension inférieure à 4, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  est de codimension inférieure à 4 dans  $\mathfrak{g}$  et le théorème suivant affirme que le sous-groupe  $H$  est nécessairement fermé dans  $G$ .

**Théorème 1.1.14** (Mostow, [Mos50]). *Soit  $G$  un groupe de Lie simplement connexe et  $\mathfrak{h}$  une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{g}$  de codimension inférieure à 4. Alors le sous-groupe de  $G$  engendré par  $\mathfrak{h}$  est fermé dans  $G$ .*

Par conséquent, toute variété pseudo-riemannienne localement homogène de dimension inférieure à 4 est localement isométrique à une variété pseudo-riemannienne homogène de

même dimension. Il existe en revanche des contre-exemples au théorème de Mostow à partir de la codimension 5. Le premier de ces exemples consiste à considérer  $\mathfrak{h}$  une direction de pente irrationnelle dans un tore de dimension 2 plongé dans  $SU(2) \times SU(2)$ . Cet exemple permet de construire des métriques riemanniennes localement homogènes en dimension 5 qui n'admettent pas de modèle homogène. De telles métriques ne peuvent toutefois pas exister sur des variétés compactes puisque, d'après le corollaire 1.1.10, le revêtement d'une variété riemannienne compacte localement homogène est homogène.

La preuve du corollaire 1.1.10, qui repose sur le théorème de Hopf–Rinow, n'est plus valable en géométrie pseudo-riemannienne. On ne connaît cependant pas d'exemple de variété pseudo-riemannienne compacte localement homogène qui n'admette pas de modèle homogène.

## 1.2 Métriques lorentziennes invariantes à gauche sur $SL(2, \mathbb{R})$

Cette section peut être lue comme une parenthèse dans le reste du chapitre. Nous y donnons un critère géométrique de complétude géodésique pour les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$ . Il apparaîtra que beaucoup de ces métriques ne sont pas géodésiquement complètes, ce qui fournira un contre-exemple à la proposition 1.1.11 dans le cas pseudo-riemannien. En munissant  $SL(2, \mathbb{R})$  d'une métrique invariante à gauche géodésiquement incomplète, puis en le quotientant à gauche par un réseau cocompact, on obtient une variété lorentzienne compacte de dimension 3 localement homogène qui n'est pas géodésiquement complète, ce qui fournit également un contre-exemple au corollaire 1.1.5.

Les métriques riemanniennes invariantes à gauche sur un groupe de Lie ont été étudiées en profondeur par Milnor [Mil76], qui a mis en évidence des relations entre certaines propriétés de courbure de ces métriques et la structure géométrique du groupe de Lie. Concernant les métriques pseudo-riemanniennes, par contre, la littérature est moins riche. La question de la complétude géodésique de ces métriques semble avoir été posée pour la première fois par Guédiri et Lafontaine dans [GL95]. Ces derniers mettent en évidence l'existence de métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  qui sont géodésiquement incomplètes. Leur article comporte toutefois une erreur, qui les fait conclure à la généralité de ces exemples. Une étude plus systématique de Bromberg et Medina [BM08] corrige le résultat de Guédiri–Lafontaine et classe les métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur les groupes de Lie de dimension 3 dont le flot géodésique est complet. Nous retrouvons ici le théorème de Bromberg–Medina dans le cas de  $SL(2, \mathbb{R})$  à partir d'un critère plus géométrique de complétude. Il apparaît notamment que ni la complétude ni l'incomplétude géodésique ne sont génériques.

Considérons une métrique pseudo-riemannienne  $q$  invariante à gauche sur un groupe de Lie  $G$ . L'étude du flot géodésique de  $q$  se ramène à l'étude d'une équation différentielle ordinaire sur l'algèbre de Lie, appelée équation d'Euler–Arnold. Lorsque le groupe de Lie est semi-simple, cette équation possède de nombreuses intégrales premières. En particulier, dans le cas de  $SL(2, \mathbb{R})$ , l'équation d'Euler–Arnold est complètement intégrable, ce qui simplifie grandement son étude.

**Proposition 1.2.1** (Arnold, [Arn89]). *Soit  $\gamma(t)$  une géodésique pour la métrique  $q$ . Posons*

$$\eta(t) = \gamma^{-1}(t) \cdot \dot{\gamma}(t) .$$

le vecteur  $\eta(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire

$$\dot{\eta} = \text{ad}_{\eta}^* \eta, \quad (1.2)$$

où  $\text{ad}_{\eta}^*$  désigne l'adjoint de  $\text{ad}_{\eta} \in \text{End}(\mathfrak{g})$  pour la forme quadratique  $q$ .

*Preuve.* Notons  $R_g$  (resp.  $L_g$ ) la différentielle de la multiplication à droite (resp. à gauche) par  $g$  et  $\text{Ad}_g$  la différentielle en l'élément neutre de la conjugaison par  $g$ .

Comme la métrique  $q$  est invariante à gauche, les champs de vecteurs invariants à droite sont des champs de Killing. Or, d'après un théorème de Noether (cf. [Wol74]), le long d'une géodésique  $\gamma(t)$ , le produit scalaire de  $\dot{\gamma}(t)$  avec un champ de Killing est constant. Soit  $Z$  un vecteur de  $\mathfrak{g}$  et  $\gamma(t)$  une géodésique. On a donc

$$q(\dot{\gamma}(t), R_{\gamma(t)} Z) = \text{Cste},$$

et par invariance à gauche,

$$q(\eta(t), \text{Ad}_{\gamma(t)^{-1}} Z) = \text{Cste}.$$

En dérivant, on obtient :

$$\begin{aligned} q(\dot{\eta}(t), \text{Ad}_{\gamma(t)^{-1}} Z) &= q(\eta(t), \text{ad}_{\eta(t)} \text{Ad}_{\gamma(t)^{-1}} Z) \\ &= q(\text{ad}_{\eta(t)}^* \eta(t), \text{Ad}_{\gamma(t)^{-1}} Z). \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout  $Z \in \mathfrak{g}$  et que  $\text{Ad}_{\gamma(t)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est surjectif, on obtient finalement :

$$\dot{\eta}(t) = \text{ad}_{\eta(t)}^* \eta(t).$$

□

L'équation (1.2) est appelée *équation d'Euler-Arnold*. On appellera également *champ d'Euler-Arnold* le champ de vecteur  $X$  sur  $\mathfrak{g}$  donné par

$$X_{\eta} = \text{ad}_{\eta}^* \eta.$$

On vérifie aisément que la complétude géodésique de la métrique  $q$  est équivalente à la complétude du champ d'Euler-Arnold.

**Proposition 1.2.2.** *Le flot géodésique de la métrique  $q$  est complet si et seulement si les solutions de l'équation d'Euler-Arnold sont définies sur tout  $\mathbb{R}$ .*

*Preuve.* Supposons que le flot géodésique de  $q$  est complet. Pour tout  $u \in \mathfrak{g}$ , soit  $\gamma_u : \mathbb{R} \rightarrow G$  la géodésique telle que  $\gamma_u(0) = \mathbf{1}_G$  et  $\dot{\gamma}_u(0) = u$ . Alors  $\gamma_u^{-1}(t) \cdot \dot{\gamma}_u(t)$  fournit une solution de l'équation d'Euler-Arnold de condition initiale  $u$  définie sur tout  $\mathbb{R}$ . Le champ d'Euler-Arnold est donc complet.

Réciproquement, supposons que le flot géodésique de  $q$  est incomplet. Soit  $\gamma$  une géodésique définie sur un intervalle maximal  $]a, b[$  où  $b < \infty$ . La courbe  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  sort de tout compact de  $TM$  lorsque  $t$  tend vers  $b$ . Munissons  $G$  d'une métrique riemannienne  $\|\cdot\|$  invariante à gauche. Supposons que  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  reste borné lorsque  $t$  tend vers  $b$ . Alors la courbe  $\gamma|_{]b-\varepsilon, b[}$  est de longueur finie pour  $\|\cdot\|$  et  $\gamma(t)$  reste également borné lorsque  $t$  tend vers  $b$ . Mais ceci contredit le fait que  $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))$  sort de tout compact de  $TM$ . Par conséquent,  $\|\dot{\gamma}(t)\|$  n'est pas bornée au voisinage de  $b$  et, par invariance à gauche,  $\|\gamma^{-1}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)\|$  non plus. La solution de l'équation d'Euler-Arnold  $\gamma^{-1}(t) \cdot \dot{\gamma}(t)$ , définie sur  $]a, b[$ , ne se prolonge donc pas au-delà de  $b$  et le champ d'Euler-Arnold est donc incomplet. □

Notons que le champ d'Euler–Arnold est un champ quadratique (i.e. ses coordonnées sont des polynômes homogènes de degré 2). Il semble par conséquent difficile, pour prouver sa complétude, d'appliquer un lemme de Grönwall. Une majoration brutale donne en effet une inégalité de la forme

$$\frac{d}{dt} \|\eta\| \leq \text{Cste} \|\eta\|^2$$

qui ne permet pas de conclure, puisque les solutions de l'équation  $f' = f^2$  explosent en temps fini. C'est une des raisons pour lesquelles la question de la complétude de ces métriques reste en grande partie ouverte.

Lorsque le groupe  $G$  est semi-simple, en revanche, il est possible d'exhiber plusieurs intégrales premières du champ d'Euler–Arnold, qui contraignent parfois ses solutions à rester bornées, ce qui permet de conclure à la complétude. Pour faire apparaître ces intégrales premières, il est nécessaire d'observer l'équation induite sur le dual  $\mathfrak{g}^\dagger$  de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Commençons par rappeler la définition d'un groupe de Lie semi-simple. On consultera [Kna02] pour plus de détails.

**Définition 1.2.3.** Une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple si elle ne contient pas d'idéal résoluble non trivial. Un groupe de Lie est semi-simple si son algèbre de Lie est semi-simple.

Une algèbre de Lie semi-simple possède une forme quadratique particulière, appelée *forme de Killing*.

**Proposition-définition 1.2.4** (voir [Kna02]). Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathfrak{g}$  est semi-simple,
- la forme quadratique  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  définie sur  $\mathfrak{g}$  par

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(u, v) = \text{Tr}(\text{ad}_u \text{ad}_v)$$

est non dégénérée.

Cette forme quadratique est appelée *forme de Killing* de  $\mathfrak{g}$ . La *métrique de Killing* sur un groupe de Lie semi-simple  $G$ , notée  $\kappa_G$ , est la métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur  $G$  qui coïncide avec  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  en l'élément neutre.

La forme de Killing a la particularité d'être préservée par les automorphismes de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  et en particulier par les automorphismes intérieurs. Par conséquent, la métrique de Killing est également invariante à droite.

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple. La forme de Killing de  $\mathfrak{g}$  fournit un isomorphisme canonique de  $\mathfrak{g}$  avec son dual  $\mathfrak{g}^\dagger$ . Nous identifierons donc dans la suite un élément  $\xi$  de  $\mathfrak{g}$  avec la forme linéaire  $\kappa_{\mathfrak{g}}(\xi, \cdot)$  de  $\mathfrak{g}^\dagger$ .

Soit  $q$  une métrique invariante à gauche sur  $G$ . Notons  $q^\dagger$  la forme quadratique induite par  $q$  sur  $\mathfrak{g}^\dagger$ , que nous identifions ensuite à  $\mathfrak{g}$  au moyen de la métrique de Killing. La forme linéaire  $q^\dagger$  s'identifie alors à

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \Lambda \cdot),$$

où  $\Lambda$  est l'unique automorphisme linéaire de  $\mathfrak{g}$  auto-adjoint pour la forme de Killing tel que

$$q(\cdot, \cdot) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \Lambda^{-1} \cdot).$$

Si  $\eta(t)$  est une solution de l'équation d'Euler–Arnold, notons  $\xi(t)$  la forme linéaire

$$q(\eta(t), \cdot) ,$$

qui s'identifie via la forme de Killing au vecteur

$$\xi(t) = \Lambda^{-1}\eta(t) .$$

**Proposition 1.2.5.** *Le vecteur  $\xi(t) = \Lambda^{-1}\eta(t)$  vérifie l'équation différentielle ordinaire*

$$\dot{\xi} = [\xi, \Lambda\xi] , \tag{1.3}$$

*qui est conjuguée linéairement à l'équation d'Euler–Arnold.*

Nous appellerons donc *champ d'Euler–Arnold dual* le champ

$$X^\dagger : \xi \mapsto [\xi, \Lambda\xi] .$$

Cette nouvelle forme de l'équation d'Euler–Arnold permet de mettre en évidence plusieurs intégrales premières qui sont des polynômes homogènes. En effet, le champ d'Euler–Arnold dual préserve clairement les orbites de l'action adjointe de  $G$ . En particulier, les fonctions

$$F_k : \xi \mapsto \text{Tr}(\text{ad}_\xi^k)$$

sont des intégrales premières de  $X^\dagger$ . D'autre part, en utilisant le fait que l'action adjointe préserve la forme de Killing, on obtient aisément que

$$q^\dagger = \kappa_{\mathfrak{g}}(\cdot, \Lambda\cdot)$$

est aussi une intégrale première du champ d'Euler–Arnold dual. On en déduit une condition suffisante de complétude :

**Lemme 1.2.6.** *Si le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte trivialement (i.e. uniquement en 0) le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$ , alors les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont bornées (voir figure 1.1) et la métrique  $q$  est géodésiquement complète.*

*Preuve.* Fixons une norme quelconque  $\|\cdot\|$  sur  $\mathfrak{g}$ . Soit  $\xi : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  une solution de l'équation d'Euler–Arnold duale. Supposons  $\xi(t)$  non borné lorsque  $t$  tend vers  $b$ . Soit  $t_n$  une suite tendant vers  $b$  telle que  $\|\xi(t_n)\|$  tend vers l'infini. Le vecteur  $\xi(t_n)/\|\xi(t_n)\|$  est un vecteur unitaire de  $\mathfrak{g}$  et, quitte à extraire, on peut donc supposer que  $\xi(t_n)/\|\xi(t_n)\|$  tend vers un vecteur non nul  $\theta$ . Comme les fonctions  $F_k$  sont des intégrales premières de l'équation,  $F_k(\xi(t_n))$  est constant et on a donc

$$F_k(\xi(t_n)/\|\xi(t_n)\|) = \frac{1}{\|\xi(t_n)\|^k} F_k(\xi(t_n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Par continuité, on a donc

$$\text{Tr}(\text{ad}_\theta^k) = 0$$

pour tout entier  $k$  et  $\theta$  est donc dans le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$ . De même, comme  $q^\dagger$  est une intégrale première homogène de degré 2, on a  $q^\dagger(\theta, \theta) = 0$ . Le vecteur  $\theta$ , non nul, est également dans le cône isotrope de  $q^\dagger$ , qui intersecte donc non trivialement le cône nilpotent.  $\square$

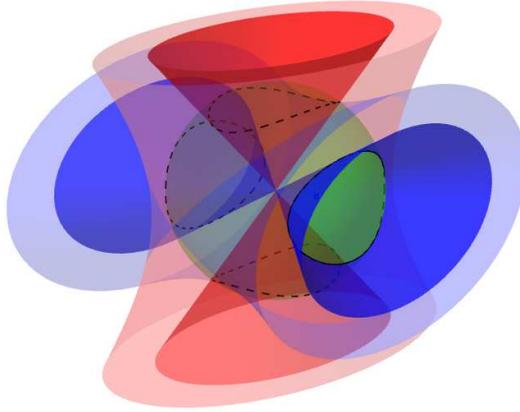


FIGURE 1.1 – Cas où le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte trivialement le cône nilpotent de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Les courbes noires sont des courbes intégrales du champ d’Euler–Arnold.

**Corollaire 1.2.7.** *Toute métrique pseudo-riemannienne invariante à gauche sur un groupe de Lie semi-simple compact est géodésiquement complète.*

*Preuve.* Le cône nilpotent de l’algèbre de Lie d’un groupe de Lie semi-simple compact est trivial puisqu’il est inclus dans le cône isotrope de la forme de Killing qui est définie négative. L’hypothèse du lemme 1.2.6 est donc toujours vérifiée dans ce cas-là.  $\square$

Plaçons-nous maintenant dans le cas où le groupe  $G$  est  $SL(2, \mathbb{R})$  et où  $q$  est lorentzienne. Le cône nilpotent de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  est simplement le cône isotrope de sa métrique de Killing. Nous allons alors prouver une quasi réciproque au lemme 1.2.6. Rappelons que deux sous-variétés  $W_1$  et  $W_2$  d’une variété  $V$  s’intersectent *transversalement* en un point  $x$  si

$$T_x W_1 + T_x W_2 = T_x V .$$

**Théorème 1.2.8** (Bromberg–Medina, T.). *Soit  $q$  une métrique lorentzienne invariante à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$ . Notons encore  $q$  la métrique restreinte à l’algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  et  $q^\dagger$  la métrique induite sur le dual de l’algèbre de Lie, que l’on indentifie à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  via sa métrique de Killing. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *le flot géodésique de la métrique  $q$  est incomplet,*
- (ii) *le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte transversalement le cône nilpotent de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ ,*
- (iii) *il existe un vecteur  $\xi$  tel que  $[\xi, \Lambda\xi]$  est non nul et colinéaire à  $\xi$ .*

Un vecteur  $\xi$  tel que  $[\xi, \Lambda\xi]$  est non nul et colinéaire à  $\xi$  est appelé une *direction radiale non dégénérée* du champ  $X^\dagger$ . Bromberg et Medina ont prouvé dans [BM08] l’équivalence, pour les groupes de Lie de dimension 3, entre l’incomplétude de l’équation d’Euler–Arnold et l’existence de directions radiales non dégénérées. Nous retrouvons ici leur théorème, dans le cas de  $SL(2, \mathbb{R})$ , via un critère plus géométrique : les directions radiales non dégénérées sont exactement, lorsqu’elles existent, les intersections transverses du cône isotrope de  $q^\dagger$  avec le cône isotrope de la forme de Killing (voir figure 1.2).

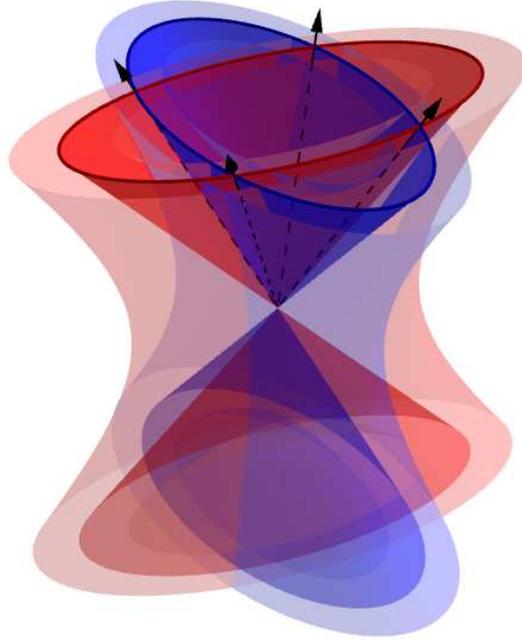


FIGURE 1.2 – Cas où le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte transversalement le cône nilpotent (en bleu). Les intersections des deux cônes sont des directions radiales non dégénérées.

*Démonstration.*

(iii)  $\Rightarrow$  (i).

Soit  $\xi$  un vecteur de  $\mathfrak{g}$  tel que  $[\xi, \Lambda\xi] = \alpha\xi$ , où  $\alpha \neq 0$ . La droite dirigée par  $\xi$  est alors stable par le champ d'Euler–Arnold et la solution de condition initiale  $\xi$  s'écrit  $\varphi(t)\xi$ . Comme le champ d'Euler–Arnold est quadratique,  $\varphi$  vérifie l'équation

$$\varphi' = \alpha\varphi^2,$$

dont les solutions explosent en temps fini. Le champ d'Euler–Arnold n'est donc pas complet.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii).

Notons  $\kappa$  la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Supposons qu'il existe un vecteur  $\xi$  non nul tel que le cône isotrope de  $\kappa$  intersecte le cône isotrope de  $q^\dagger$  transversalement en  $\xi$ . Comme  $q^\dagger$  et  $\kappa$  sont des intégrales premières, la droite  $\mathbb{R}\xi$ , intersection de ces deux cônes, est stable par le flot du champ d'Euler–Arnold dual et  $X_\xi^\dagger = [\xi, \Lambda\xi]$  est donc colinéaire à  $\xi$ . Observons de plus que

$$d_\xi\kappa = \kappa(\xi, \cdot),$$

et

$$d_\xi q^\dagger = \kappa(\Lambda\xi, \cdot).$$

Comme, par hypothèse, les deux cônes isotropes ne sont pas tangents en  $\xi$ , les vecteurs  $\xi$  et  $\Lambda\xi$  ne sont donc pas colinéaires. Or, dans  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , deux vecteurs commutent si et seulement s'ils sont colinéaires. On en déduit que  $[\xi, \Lambda\xi] \neq 0$ . Le vecteur  $\xi$  est donc bien

une direction radiale non dégénérée.

(i)  $\Rightarrow$  (ii).

D'après le lemme 1.2.6, si l'équation d'Euler–Arnold est incomplète, alors les cônes isotropes de  $\kappa$  et de  $q^\dagger$  s'intersectent en un vecteur non nul. Il reste à voir que l'une de ces intersections est transverse. Cela nécessitera l'étude de plusieurs cas.

Supposons pour commencer que les deux cônes s'intersectent tangentiellement en un vecteur non nul  $\xi$ . Comme

$$d_\xi \kappa = \kappa(\xi, \cdot) ,$$

et

$$d_\xi q^\dagger = \kappa(\Lambda \xi, \cdot) ,$$

on obtient que  $\xi$  est un vecteur propre de  $\Lambda$ , pour une valeur propre  $b$ . Comme  $\xi$  est isotrope et  $\Lambda$  symétrique pour la forme de Killing, on en déduit  $b$  est une racine multiple du polynôme caractéristique de  $\Lambda$ . En effet, les sous-espaces caractéristiques de  $\Lambda$  sont en somme directe et sont orthogonaux pour  $\kappa$ . Comme la forme de Killing est non dégénérée, un sous-espace caractéristique ne peut donc pas être isotrope et le sous-espace caractéristique associé à la valeur propre  $b$  n'est donc pas réduit à  $\mathbb{R}\xi$ .

En co-réduisant  $\kappa$  et  $\Lambda$ , on est alors ramené à étudier l'une des situations suivantes.

- Point d'intersection double :

$$(\kappa, \Lambda) \approx \left( \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \left( \begin{array}{ccc} a & 0 & 0 \\ 0 & b & \varepsilon \\ 0 & 0 & b \end{array} \right) \right)$$

dans une base  $(e_1, e_2, e_3)$ . La direction  $\mathbb{R}e_2$  est alors notre direction de tangence entre les deux cônes isotropes. Notons  $(x, y, z)$  les coordonnées d'un vecteur  $\xi$  dans la base  $(e_1, e_2, e_3)$ . L'équation d'Euler–Arnold duale s'écrit alors

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\varepsilon z^2 \\ \dot{y} &= (b-a)xy + \varepsilon xz \\ \dot{z} &= (a-b)xz . \end{cases}$$

De plus, en combinant les deux intégrales premières

$$\kappa(x, y, z) = x^2 + 2yz$$

et

$$q^\dagger(x, y, z) = ax^2 + \varepsilon z^2 + 2byz ,$$

on vérifie que

$$(a-b)x^2 + \varepsilon z^2$$

est encore une intégrale première et que l'intersection des cônes isotropes de  $x^2 + 2yz$  et  $ax^2 + \varepsilon z^2 + 2byz$  est encore l'intersection des cônes isotropes de  $x^2 + 2yz$  et  $(a-b)x^2 + \varepsilon z^2$ . Il y a alors quatre sous-cas à traiter :

- Cas où  $\varepsilon(a-b) > 0$ . La direction  $\mathbb{R}e_2$  est alors l'unique intersection des deux cônes. Comme  $(a-b)x^2 + \varepsilon z^2$  est constant le long d'une solution,  $x$  et  $z$  restent

bornés. La seconde équation donne alors

$$|\dot{y}| \leq A|y| + B$$

pour certaines constantes  $A$  et  $B$ . On en déduit que  $y$  n'explose pas en temps fini. L'équation d'Euler–Arnold duale est donc complète.

- Cas où  $\varepsilon(a - b) < 0$ . Il existe alors deux autres intersections transverses, données par

$$\begin{cases} x &= \pm \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}} z \\ y &= \frac{\varepsilon}{2(a-b)} z. \end{cases}$$

L'équation d'Euler–Arnold est donc incomplète.

- Cas où  $a = b$  (et  $\varepsilon \neq 0$ ). La direction  $\mathbb{R}e_2$  est alors l'unique intersection des deux cônes et elle est d'ordre 4. Puisque  $z^2$  est une intégrale première, on obtient que  $x(t) = Ct + D$  pour certaines constantes  $C$  et  $D$ , puis que

$$|\dot{y}| \leq (At + B)|y| + (A't + B')$$

pour certaines constantes  $A, B, A'$  et  $B'$ , ce dont on déduit, encore une fois, que  $y$  n'explose pas en temps fini. L'équation d'Euler–Arnold est donc complète.

- Cas où  $\varepsilon = 0$  (et  $a \neq b$ ). La direction  $\mathbb{R}e_3$  est une autre direction de tangence des deux cônes. Puisque  $x^2$  est une intégrale première,  $x$  est constant le long d'une solution et l'équation d'Euler–Arnold devient une équation linéaire en  $y$  et  $z$ , qui est donc complète.

- Point d'intersection triple :

$$(\kappa, \Lambda) \approx \left( \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & a \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right) \right)$$

dans une base  $(e_1, e_2, e_3)$ . Dans ce cas, la direction  $\mathbb{R}e_1$  est une intersection d'ordre 3 et la direction  $\mathbb{R}e_3$  est une intersection transverse. L'équation d'Euler–Arnold est alors incomplète.

Nous avons donc montré que, dans tous ces cas critiques, l'équation d'Euler–Arnold est incomplète si et seulement s'il existe une intersection transverse. Cela conclut la preuve du théorème 1.2.8.  $\square$

**Corollaire 1.2.9.** *L'ensemble des métriques lorentziennes invariantes par translation à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  se partitionne en deux ouverts non vides  $U_+$ ,  $U_-$  et un fermé semi-algébrique d'intérieur vide  $V_0$  tels que*

- Si  $q$  appartient à  $U_+$ , les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont bornées et le flot géodésique de  $q$  est complet,
- Si  $q$  appartient à  $U_-$ , l'équation d'Euler–Arnold possède des directions radiales non-dégénérées et le flot géodésique de  $q$  est incomplet,
- Si  $q$  appartient à  $V_0$ , le flot géodésique de  $q$  est complet, mais l'équation d'Euler–Arnold peut admettre des solutions non bornées.

*Preuve.* Soit  $U_+$  l'ensemble des métriques  $q$  telles que le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte trivialement le cône isotrope  $\kappa$  et  $U_-$  l'ensemble des métriques  $q$  telles que le cône isotrope de  $q^\dagger$  et celui de  $\kappa$  possèdent une intersection transverse. Les domaines  $U_+$  et  $U_-$  sont bien des ouverts non vides qui, d'après le théorème 1.2.8, satisfont les conditions du corollaire. Enfin, leur complémentaire est le fermé semi-algébrique  $V_0$  formé des métriques  $q$  telles que le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte le cône isotrope de  $\kappa$  et lui est tangent en toutes ses intersections. D'après la démonstration du théorème 1.2.8, les métriques de  $V_0$  sont géodésiquement complètes.  $\square$

Nous conjecturons que cette trichotomie se généralise à des groupe de Lie semi-simples de dimension supérieure.

**Conjecture.** *L'espace des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur un groupe de Lie semi-simple se partitionne en deux ouverts non vides  $U_+$  et  $U_-$  et un fermé semi-algébrique  $V_0$  d'intérieur vide tels que :*

- Si  $q$  appartient à  $U_+$ , les solutions de l'équation d'Euler–Arnold sont bornées et le flot géodésique de  $q$  est complet,
- Si  $q$  appartient à  $U_-$ , le flot géodésique de  $q$  est incomplet,
- Si  $q$  appartient à  $V_0$ , le flot géodésique de  $q$  est complet, mais l'équation d'Euler–Arnold admet des solutions non bornées.

D'après le lemme 1.2.6, L'ouvert  $U_+$  contiendrait au moins les métriques  $q$  dont le cône isotrope dual intersecte trivialement le cône nilpotent. L'ouvert  $U_-$ , quant à lui, contiendrait les métriques  $q$  pour lesquelles le champ d'Euler–Arnold possède des directions radiales non-dégénérées. Notons que pour de telles métriques, le cône isotrope intersecte transversalement le cône nilpotent. L'implication (iii)  $\Rightarrow$  (ii) du théorème 1.2.8 se généralise en effet à tout groupe de Lie semi-simple.

**Lemme 1.2.10.** *Soit  $\xi$  une direction radiale non dégénérée de  $X^\dagger$ . Alors  $\xi$  est nilpotent et le cône isotrope de  $q^\dagger$  intersecte transversalement l'orbite de  $\xi$  sous l'action adjointe de  $G$  en  $\xi$ .*

**Remarque 1.2.11.** Rappelons que le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$  est la réunion d'un nombre fini d'orbites sous l'action adjointe de  $G$  et que chaque orbite est ouverte dans son adhérence. En particulier, un élément générique du cône nilpotent est un point lisse dont l'orbite sous l'action adjointe est ouverte. Dans le cas particulier où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , le cône nilpotent de  $\mathfrak{g}$  est exactement le cône isotrope de la forme de Killing et tous les éléments nilpotents non nuls sont dans la même orbite sous l'action adjointe.

*Démonstration.* Soit  $\xi$  une direction radiale non dégénérée. Alors, quitte à renormaliser  $\xi$ , on peut supposer que  $[\xi, \Lambda\xi] = \xi$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_\xi^k) &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{[\xi, \Lambda\xi]}\mathrm{ad}_\xi^{k-1}) \\ &= \mathrm{Tr}\left((\mathrm{ad}_\xi\mathrm{ad}_{\Lambda\xi} - \mathrm{ad}_{\Lambda\xi}\mathrm{ad}_\xi)\mathrm{ad}_\xi^{k-1}\right) \\ &= \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_\xi\mathrm{ad}_{\Lambda\xi}\mathrm{ad}_\xi^{k-1}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_{\Lambda\xi}\mathrm{ad}_\xi^k) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'où il découle que  $\xi$  est nilpotent. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} q^\dagger(\xi, \xi) &= \kappa(\xi, \Lambda\xi) \\ &= \kappa([\xi, \Lambda\xi], \Lambda\xi) \\ &= \kappa(\xi, [\Lambda\xi, \Lambda\xi]) \\ &= 0, \end{aligned}$$

et  $\xi$  est donc également dans le cône isotrope de  $q^\dagger$ .

Enfin, supposons que l'intersection de l'orbite de  $\xi$  sous l'action adjointe et du cône isotrope de  $q^\dagger$  ne soit pas transverse en  $\xi$ . L'espace tangent à l'orbite de  $\xi$  sous l'action adjointe est exactement l'image de  $\mathfrak{g}$  par  $\text{ad}_\xi$  et on a donc

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(\Lambda\xi, [\xi, \eta]) = 0$$

pour tout  $\eta \in \mathfrak{g}$ , d'où

$$\kappa_{\mathfrak{g}}([\xi, \Lambda\xi], \eta) = \kappa_{\mathfrak{g}}(\xi, \eta) = 0,$$

ce qui est absurde puisque  $\xi$  est un vecteur non nul par hypothèse. Par conséquent, l'intersection entre l'orbite de  $\xi$  et le cône isotrope de  $q^\dagger$  est transverse.  $\square$

Pour prouver partiellement la conjecture, il suffirait donc de montrer que, réciproquement, lorsque le cône isotrope dual intersecte transversalement une orbite nilpotente, leur intersection contient toujours une direction radiale non dégénérée. Il resterait ensuite à étudier le cas critique où cette intersection est non triviale mais n'est pas transverse.

### 1.3 Symétrie et symétrie locale

Cette section est consacrée à la notion de *symétrie* d'une variété pseudo-riemannienne, introduite par Cartan. Nous en rappelons les différentes caractérisations et prouvons que toute variété pseudo-riemannienne localement symétrique admet un modèle globalement symétrique, qui est géodésiquement complet. La condition de symétrie, plus contraignante que l'homogénéité, est cependant assez large pour englober de nombreux exemples intéressants que nous détaillons dans la section 1.3.3.

#### 1.3.1 Point de vue géométrique et analytique

**Définition 1.3.1.** Une variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est dite *symétrique* si pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe une isométrie  $\sigma_x$  de  $(M, q)$ , fixant  $x$  et telle que

$$d\sigma_x = -\text{Id}_{T_x M}.$$

La variété  $(M, q)$  est dite *localement symétrique* si pour tout point  $x$  de  $M$ , il existe une isométrie locale  $\sigma_x$  fixant  $x$  et dont la différentielle en  $x$  est  $-\text{Id}_{T_x M}$ .

L'isométrie  $\sigma_x$  est appelée *symétrie centrale* de centre  $x$ . Comme une isométrie pseudo-riemannienne est caractérisée par sa différentielle en un point, si la symétrie centrale de centre  $x$  existe, elle est unique et c'est alors une involution. Si  $(M, q)$  est symétrique et connexe, on peut envoyer un point de  $M$  sur n'importe quel autre en composant successivement des symétries centrales. On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 1.3.2.** *Une variété pseudo-riemannienne connexe symétrique est homogène. Une variété pseudo-riemannienne connexe localement symétrique est localement homogène.*

*Preuve.* Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne connexe symétrique et  $x$  et  $y$  deux points de  $M$ . Soient

$$x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$$

une suite de points de  $M$  tels que  $x_i$  est dans l'image de l'application  $\exp_{x_{i-1}}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $u_i \in T_{x_{i-1}}M$  tel que  $\exp_{x_{i-1}}(u_i) = x_i$  et soit  $m_i$  le point  $\exp_{x_{i-1}}\left(\frac{1}{2}u_i\right)$ . Alors la symétrie centrale de centre  $m_i$  envoie  $x_{i-1}$  sur  $x_i$  et l'isométrie

$$\sigma_{m_n} \circ \dots \circ \sigma_{m_1}$$

envoie donc  $x_0 = x$  sur  $x_n = y$ . On en déduit que  $M$  est homogène. Dans le cas où  $M$  est seulement localement symétrique, la même preuve fournit une isométrie locale qui envoie  $x$  sur  $y$ , ce qui prouve que  $M$  est localement homogène.  $\square$

Le théorème suivant donne une caractérisation plus analytique de la symétrie locale. On en trouve une preuve dans [Wol74].

**Théorème 1.3.3** (Cartan). *Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *La métrique  $q$  est localement symétrique,*
- *Le transport parallèle associé à la connexion de Levi-Civita de  $q$  préserve la courbure sectionnelle,*
- *pour tout points  $x$  et  $y$  de  $M$ , si une application linéaire  $\varphi$  de  $T_xM$  dans  $T_yM$  préserve la métrique et le tenseur de courbure, alors elle s'étend en une isométrie locale.*

La condition de symétrie suffit à garantir quelques bonnes propriétés que les métriques pseudo-riemanniennes homogènes n'ont pas en général. L'une d'elles est la complétude géodésique.

**Proposition 1.3.4.** *Les variétés pseudo-riemanniennes symétriques sont géodésiquement complètes.*

*Preuve.* Soit  $(X, q)$  une variété pseudo-riemannienne symétrique au sens de Cartan. Soit  $\gamma$  une géodésique, définie sur un intervalle maximal  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $I = \mathbb{R}$ . Soit  $t_0 \in I$  et soit  $\sigma_{t_0}$  la symétrie centrale de centre  $\gamma(t_0)$ . Posons  $\eta(t) = \sigma_{t_0}(\gamma(2t_0 - t))$ . La courbe  $\eta(t)$  est une géodésique définie sur l'intervalle  $J = 2t_0 - I$  et on a  $\eta(t_0) = \gamma(t_0)$  et  $\dot{\eta}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$ . Par conséquent,  $\eta$  prolonge  $\gamma$ . Par maximalité de  $I$ , on a  $J \subset I$  et  $I$  est donc stable par la symétrie de centre  $t_0$ . Comme ceci est vrai pour tout  $t_0 \in I$ , on a clairement  $I = \mathbb{R}$ .  $\square$

En appliquant le lemme 1.1.9, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 1.3.5.** *Si  $(M, q)$  est une variété pseudo-riemannienne symétrique simplement connexe, toute isométrie locale de  $M$  se prolonge en une isométrie globale.*

### 1.3.2 Modèles

Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne localement symétrique et  $x$  un point de  $M$ . Soit  $\mathfrak{g}$  l'algèbre de Lie des germes de champs de Killing en  $x$  et  $\mathfrak{h}$  la sous-algèbre des

germes s'annulant en  $x$ . La symétrie centrale  $\sigma_x$  induit une involution de  $\mathfrak{g}$  dont l'espace propre associé à la valeur propre 1 est exactement  $\mathfrak{h}$ .

Soit  $G$  le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie  $G$  et  $H$  le sous-groupe de  $G$  dont l'action adjointe commute à  $\sigma_x$ . L'algèbre de Lie de  $H$  est précisément  $\mathfrak{h}$  et, de par sa définition,  $H$  est clairement fermé dans  $G$ . Par conséquent, le quotient  $G/H$  est un espace symétrique et la variété  $(M, q)$  est localement modelée sur  $G/H$ . On obtient donc la proposition suivante :

**Proposition 1.3.6.** *Toute variété localement symétrique est localement modelée sur un espace symétrique.*

Réciproquement, on peut souvent reconstruire un espace pseudo-riemannien symétrique à partir d'un groupe de Lie  $G$  et d'une involution  $\sigma$  de  $G$ . Soit  $H$  le sous-groupe de  $G$  fixé par  $\sigma$  et  $\mathfrak{g}$  et  $\mathfrak{h}$  les algèbres de Lie respectives de  $G$  et  $H$ . Si l'action adjointe de  $H$  préserve une forme quadratique non-dégénérée sur  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ , alors la métrique pseudo-riemannienne  $G$ -homogène induite sur  $G/H$  est symétrique. L'involution  $\sigma$  passe au quotient en une isométrie de  $G/H$  qui est la symétrie centrale fixant le point  $\mathbf{1}_G H$ .

Si, par exemple, l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est semi-simple, l'action adjointe de  $\sigma$  sur  $\mathfrak{g}$  préserve la forme de Killing de  $\mathfrak{g}$ . L'espace propre de  $\sigma$  associé à la valeur propre  $-1$  est alors  $\mathfrak{h}^\perp$  et on a donc

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^\perp .$$

La métrique de Killing restreinte à  $\mathfrak{h}^\perp$  est alors non dégénérée et préservée par l'action adjointe de  $H$ . On obtient donc le résultat suivant :

**Proposition 1.3.7.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple et  $\sigma$  une involution de  $G$ . Soit  $H$  le sous-groupe des points fixes de  $\sigma$ . Alors l'action de  $G$  sur  $G/H$  préserve une métrique pseudo-riemannienne symétrique telle que la transformation induite par  $\sigma$  sur  $G/H$  est la symétrie centrale de centre  $\bar{\mathbf{1}}_G$  (où  $\bar{\mathbf{1}}_G$  désigne l'image de l'élément neutre de  $G$  par la projection de  $G$  sur  $G/H$ ).*

### 1.3.3 Exemples

Nous donnons dans cette section trois familles importantes d'exemples d'espaces symétriques.

#### Espaces de courbure sectionnelle constante

Une variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est dite *de courbure constante* si la courbure sectionnelle de tous les 2-plans est la même. Dans ce cas, le transport parallèle de la connexion de Levi-Civita préserve évidemment la courbure sectionnelle et la variété pseudo-riemannienne  $(M, q)$  est en particulier localement symétrique. Soient  $x$  et  $y$  deux points de  $M$ . Toute application linéaire de  $T_x M$  dans  $T_y M$  préservant la métrique  $q$  préserve également le tenseur de courbure et s'étend donc en une isométrie locale. Les variétés de courbure constante sont donc celles dont le pseudo-groupe d'isométries locales est "maximal" (de dimension  $\frac{n(n+1)}{2}$ ).

Notons que lorsqu'on multiplie une métrique pseudo-riemannienne  $q$  par une constante  $\lambda$ , on divise sa courbure sectionnelle par  $\lambda$ . Les métriques pseudo-riemanniennes de signature fixée et de courbure constante sont donc, à renormalisation par un scalaire strictement positif près, de courbure 1, 0 ou  $-1$ . De telles métriques existent et peuvent se construire en généralisant la construction des géométries sphérique, euclidienne et hyperbolique (voir [Wol74]).

**Définition 1.3.8.** Notons  $\mathbb{R}^{p,q}$  l'espace affine  $\mathbb{R}^{p+q}$  munie d'une métrique de signature  $(p, q)$  invariante par translations.  $\mathbb{R}^{p,q}$  est une variété pseudo-riemannienne de courbure constante égale à 0. Son groupe d'isométries est le groupe  $O(p, q) \ltimes \mathbb{R}^{p+q}$  des transformations affines dont la partie linéaire préserve la métrique.

**Définition 1.3.9.** Notons  $\mathbb{S}^{p,q}$  l'hypersurface de  $\mathbb{R}^{p+q+1}$  d'équation

$$x_1^2 + \dots + x_{p+1}^2 - x_{p+2}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2 = 1 .$$

La métrique pseudo-riemannienne induite sur le fibré tangent à  $\mathbb{S}^{p,q}$  par la métrique

$$dx_1^2 + \dots + dx_{p+1}^2 - dx_{p+2}^2 - \dots - dx_{p+q+1}^2$$

est une métrique de signature  $(p, q)$  et de courbure constante égale à 1. Son groupe d'isométries s'identifie au groupe  $O(p+1, q)$  des isométries linéaires de  $\mathbb{R}^{p+1,q}$  et le stabilisateur d'un point est un sous-groupe isomorphe à  $O(p, q)$ .

**Définition 1.3.10.** Notons  $\mathbb{H}^{p,q}$  l'hypersurface de  $\mathbb{R}^{p+q+1}$  d'équation

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q+1}^2 = -1 .$$

La métrique pseudo-riemannienne induite sur le fibré tangent à  $\mathbb{H}^{p,q}$  par la métrique

$$dx_1^2 + \dots + dx_p^2 - dx_{p+1}^2 - \dots - dx_{p+q+1}^2$$

est une métrique de signature  $(p, q)$  et de courbure constante égale à  $-1$ . Son groupe d'isométries s'identifie au groupe  $O(p, q+1)$  des isométries linéaires de  $\mathbb{R}^{p,q+1}$  et le stabilisateur d'un point est un sous-groupe isomorphe à  $O(p, q)$ .

**Exemple 1.3.11.** Dans le cas où  $q = 0$ , on retrouve les modèles de Klein de l'espace euclidien, de la sphère et de l'espace hyperbolique. Dans le cas où  $q = 1$ , on obtient leurs analogues lorentziens, appelés respectivement *espace de Minkovski*, *espace de Sitter* et *espace anti-de Sitter*. L'espace anti-de Sitter de dimension  $n$  se note parfois  $\text{AdS}^n$ .

**Remarque 1.3.12.** Notons que l'espace anti-de Sitter, tel que nous l'avons défini, est homéomorphe au produit d'une boule de codimension 1 avec un cercle et n'est donc pas simplement connexe. Il est parfois avantageux de considérer comme modèle de variété lorentzienne de courbure  $-1$  le revêtement universel de l'espace anti-de Sitter.

### Espaces riemanniens symétriques

Rappelons qu'un groupe de Lie connexe  $G$  est semi-simple si son algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  ne possède pas d'idéal résoluble non trivial. Le centre  $Z(G)$  d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  est discret et le quotient de  $G$  par son centre est donc encore un groupe de Lie semi-simple d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si le centre de  $\mathfrak{g}$  est trivial, la représentation adjointe de  $G$  est injective.

Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de centre trivial. Un sous-groupe compact de  $G$  est dit *maximal* s'il n'est pas inclus dans un sous-groupe compact strictement plus gros.

**Théorème 1.3.13** (Cartan, voir par exemple [Kna02]). *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de centre trivial. Alors tous les sous-groupes compacts maximaux de  $G$  sont conjugués et pour tout sous-groupe compact maximal  $K$ , il existe une involution  $\Theta_K$  de  $G$  dont l'ensemble des points fixes est  $K$ .*

**Corollaire 1.3.14.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple de centre trivial et sans facteur compact. Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . Alors l'espace homogène  $G/K$  possède une structure naturelle d'espace riemannien symétrique.*

Un groupe de Lie est dit *simple* si son algèbre de Lie ne contient pas d'idéal non trivial. Rappelons qu'un groupe de Lie semi-simple connexe  $G$  de centre trivial se décompose de façon canonique en un produit de groupes simples. Si l'un de ces facteurs est compact, ce facteur est inclus dans tout sous-groupe compact maximal. Si  $G$  est sans facteur compact, l'action de  $G$  sur  $G/K$  est fidèle. Par conséquent, tout groupe de Lie connexe semi-simple de centre trivial sans facteur compact s'identifie canoniquement à un groupe d'isométries d'un espace riemannien symétrique. Cela permet de traduire de nombreuses propriétés algébriques du groupe  $G$  en des propriétés géométriques de son espace symétrique.

**Proposition 1.3.15.** *L'espace symétrique associé à un groupe semi-simple de centre trivial et sans facteur compact est de courbure négative. (On dit qu'il est de type non compact.)*

**Exemple 1.3.16.** L'espace symétrique du groupe  $\mathrm{PSO}(n, 1)$  est  $\mathrm{PSO}(n, 1)/\mathrm{PSO}(n)$ , qui s'identifie à l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ .

**Théorème 1.3.17** (Cartan). *Réciproquement, tout espace riemannien symétrique est le produit d'un espace symétrique compact, d'un espace euclidien et de l'espace symétrique d'un groupe de Lie semi-simple de centre trivial et sans facteur compact.*

Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ , d'algèbre de Lie  $\mathfrak{k}$ . Soit  $A$  un sous-groupe abélien connexe de  $G$  dont l'action adjointe sur  $\mathfrak{g}$  est diagonalisable, et soit  $\mathfrak{a}$  son algèbre de Lie. Il existe alors un élément  $g$  de  $G$  tel que  $\mathrm{Ad}_g(\mathfrak{a})$  est orthogonal à  $\mathfrak{k}$  pour la forme de Killing. L'orbite de  $g^{-1}K$  dans  $G/K$  sous l'action de  $A$  est alors une sous-variété totalement géodésique de courbure nulle. Réciproquement, toute sous-variété connexe totalement géodésique de courbure nulle de  $G/K$  est une orbite d'un sous-groupe abélien connexe de  $G$  dont l'action adjointe sur  $\mathfrak{g}$  est diagonalisable.

**Définition 1.3.18.** Le *rang* d'un espace riemannien symétrique est la dimension maximale d'une sous-variété totalement géodésique de courbure nulle. Le *rang réel* d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  est le rang de l'espace symétrique associé au facteur non compact de  $G/Z(G)$ .

En particulier, un groupe de Lie semi-simple est de rang réel 1 si son espace symétrique ne contient pas de sous-variété totalement géodésique de courbure nulle de dimension 2 ou plus.

**Proposition 1.3.19.** *Un groupe de Lie semi-simple est de rang réel 1 si et seulement si son espace symétrique est de courbure strictement négative.*

Dans la suite, nous nous intéresserons particulièrement aux espaces symétriques de type non compact de rang réel 1. Ces espaces sont classifiés en trois familles infinies et un espace exceptionnel (voir [Kna02, p.366]) :

- L'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , de courbure constante  $-1$ , qui est l'espace symétrique du groupe  $\mathrm{PSO}(n, 1)$ .
- L'espace hyperbolique complexe  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^n$ , analogue kählerien de l'espace hyperbolique, dont la courbure sectionnelle holomorphe est constante mais dont la courbure réelle varie entre  $-4$  et  $-1$ . Cet espace est l'espace symétrique du groupe  $\mathrm{PSU}(n, 1)$ .
- L'espace symétrique du groupe  $\mathrm{PSp}(n, 1)$ , analogue quaternionique de  $\mathrm{PSU}(n, 1)$ .
- L'espace symétrique d'une des formes réelles du groupe  $F_4$ .

### Groupes de Lie semi-simples

Soit  $G$  un groupe de Lie. Rappelons que la *forme de Killing* de  $G$  est la forme quadratique  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  définie sur  $\mathfrak{g}$  par

$$\kappa_{\mathfrak{g}}(u, v) = \text{Tr}(\text{ad}_u \text{ad}_v) .$$

Lorsque  $G$  est semi-simple, la forme de Killing est non dégénérée. La *métrique de Killing* est la métrique pseudo-riemannienne  $\kappa_G$  invariante à gauche sur  $G$  qui coïncide avec  $\kappa_{\mathfrak{g}}$  en l'élément neutre. Comme la forme de Killing est invariante sous l'action adjointe, la métrique de Killing est aussi invariante par translations à droite.

**Proposition 1.3.20.** *Soit  $G$  un groupe de Lie semi-simple. Alors la métrique de Killing de  $G$  est symétrique. La symétrie centrale de centre l'élément neutre de  $G$  est l'application*

$$g \mapsto g^{-1} .$$

*La composante neutre de son groupe d'isométries s'identifie au quotient de  $G \times G$  par le plongement diagonal du centre  $Z(G)$  de  $G$ , dont l'action sur  $G$  est donnée par*

$$(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1} .$$

Pour abrégé, l'action de  $G \times G/Z(G)$  sur  $G$  définie ci-dessus sera simplement appelée *action par translations à gauche et à droite*.

Lorsque  $G$  est un groupe de Lie semi-simple de dimension 3, le groupe d'isométries de  $(G, \kappa_G)$  est de dimension maximale et  $G$  est donc de courbure constante. Cette remarque fournit un nouveau point de vue sur deux espaces de courbure constante :

- La sphère  $\mathbb{S}^3$ , qui est isométrique au groupe de Lie  $\text{SU}(2)$  (revêtement double de  $\text{SO}(3)$ ) muni de sa métrique de Killing,
- L'espace anti-de Sitter  $\text{AdS}^3$ , qui est isométrique au groupe  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing.

Dans la section 1.4, nous décrivons un analogue holomorphe de ces géométries de courbure constante en dimension complexe 3, obtenu en munissant  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  de sa métrique de Killing complexe. Nous commençons par rappeler que les notions pseudo-riemanniennes décrites dans les sections précédentes possèdent une généralisation naturelle dans un contexte holomorphe.

## 1.4 Métriques riemanniennes holomorphes

Il existe plusieurs façons d'étendre la notion de métrique pseudo-riemannienne à des variétés complexes. On peut par exemple s'intéresser à des métriques *pseudo-hermitiennes*, c'est-à-dire des métriques pseudo-riemanniennes telles que la multiplication par  $i$  sur chaque espace tangent  $T_x M$  est une isométrie linéaire. Comme condition supplémentaire de compatibilité entre la métrique et la structure complexe, on peut imposer que le transport parallèle associé à la connexion de Levi-Civita soit  $\mathbb{C}$ -linéaire, ce qui généralise la notion de métrique *kählérienne*. Une notion différente est celle de *métrique riemannienne holomorphe*, introduite par Lebrun [Leb82] et étudiée entre autres par Dumitrescu [Dum07] et Zeghib [DZ09].

**Définition 1.4.1.** Soit  $M$  une variété complexe. Une *métrique riemannienne holomorphe* sur  $M$  est une section holomorphe partout non dégénérée du fibré holomorphe  $\text{Sym}^2 T^* M$ .

Comme pour des métriques pseudo-riemanniennes, on peut associer à une métrique riemannienne holomorphe une unique connexion de Levi-Civita  $\nabla$  qui est alors une *connexion*

*holomorphe*, c'est-à-dire un opérateur qui à une section holomorphe de  $TM$  associe une 1-forme holomorphe à valeurs dans  $TM$ . De même, le flot géodésique de cette métrique est le flot d'un champ de vecteurs holomorphe sur  $TM$ , dont les courbes intégrales sont des courbes complexes. Enfin, la courbure de la métrique, toujours définie par la formule 1.1, est maintenant un tenseur holomorphe. (Pour tous ces résultats d'analyse locale des métriques riemanniennes holomorphes, nous renvoyons à [Leb82] et [Leb83].)

On appelle toujours isométrie d'une variété riemannienne holomorphe  $(M, q)$  un difféomorphisme  $f$  de  $M$  tel que  $f^*q = q$ . Notons que, comme les isométries sont linéaires en coordonnées exponentielles et que les coordonnées exponentielles sont holomorphes, toute isométrie d'une variété riemannienne holomorphe est automatiquement un biholomorphisme.

Une variété riemannienne holomorphe est encore appelée homogène (resp. localement homogène) si l'action de son groupe d'isométries (resp. de son pseudo-groupe d'isométries locales) est transitive. La définition de la symétrie et de la symétrie locale s'étendent de la même façon, ainsi que toutes les propriétés de la section 1.3. En particulier, il existe des modèles de variétés pseudo-riemanniennes de courbure sectionnelle constante. Rappelons que toutes les formes quadratiques non dégénérées sur un espace vectoriel complexe sont isomorphes. Par conséquent, toutes les variétés riemanniennes holomorphes de courbure constante sont – à renormalisation par un scalaire complexe non nul près – de courbure 0 ou 1. Les variétés de courbure nulle sont localement modelées sur  $\mathbb{C}^n$  muni d'une métrique riemannienne holomorphe invariante par translation, dont le groupe d'isométries est le groupe  $O(n, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^n$  des transformations affines dont la partie linéaire préserve la métrique. Les variétés de courbure 1, quant à elles, sont localement modelées sur l'hypersurface complexe de  $\mathbb{C}^{n+1}$  d'équation

$$z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1 ,$$

munie de la restriction au fibré tangent de la forme quadratique complexe

$$dz_1^2 + \dots + dz_{n+1}^2 .$$

Le groupe des d'isométries de cet espace est le groupe  $O(n+1, \mathbb{C})$ .

On obtient d'autres exemples de variétés riemanniennes holomorphes symétriques en considérant un groupe de Lie complexe  $G$  semi-simple muni de sa métrique de Killing complexe, définie sur  $\mathfrak{g}$  par

$$\kappa_G^{\mathbb{C}}(u, v) = \text{Tr}_{\mathbb{C}}(\text{ad}_u \text{ad}_v) .$$

En particulier, le groupe de Lie  $SL(2, \mathbb{C})$  muni de sa métrique de Killing complexe est de courbure constante non nulle et fournit donc un autre point de vue sur la géométrie riemannienne holomorphe de courbure 1 en dimension 3, analogue à l'interprétation de l'espace anti-de Sitter de dimension 3 comme le groupe  $SL(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing.

Une métrique riemannienne holomorphe est un objet beaucoup plus rigide qu'une métrique pseudo-riemannienne. Une telle métrique possède par exemple un volume qui est une section holomorphe du fibré canonique, qui est donc trivial. Notons aussi que la courbure scalaire d'une telle métrique est une fonction holomorphe. Sur une variété compacte, elle est donc constante. Plus généralement, tous les invariants scalaires d'une métrique riemannienne holomorphe sur une variété complexe compacte sont constants. Ces remarques suggèrent que de telles métriques devraient nécessairement être localement homogènes.

Sous l'hypothèse que la variété complexe est kählérienne, ce résultat découle d'un théorème d'Inoue–Kobayashi–Ochiai [IKO80]. Dumitrescu a conjecturé qu'il était vrai en général et l'a prouvé pour les variétés compactes de dimension complexe 3 [Dum07].

**Théorème 1.4.2** (Dumitrescu). *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension 3 et  $q$  une métrique riemannienne holomorphe sur  $M$ . Alors  $q$  est localement homogène.*

Dumitrescu et Zeghib [DZ09] ont ensuite classifié les différentes géométries riemanniennes holomorphes qui peuvent apparaître sur une variété compacte de dimension complexe 3. Cette classification, analogue à la classification de Thurston des huit géométries riemanniennes de dimension 3, comporte quatre modèles : les deux géométries de courbure constante, ainsi que deux géométries invariantes à gauche sur les groupes de Lie complexes  $\mathbf{Sol}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathbf{Heis}_{\mathbb{C}}$ . Les auteurs prouvent également dans [DZ09] que les variétés modelées sur  $\mathbf{Sol}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathbf{Heis}_{\mathbb{C}}$  sont à revêtement fini près des quotients de  $\mathbf{Sol}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathbf{Heis}_{\mathbb{C}}$  par l'action à gauche de réseaux cocompacts. Comme  $\mathbf{Sol}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathbf{Heis}_{\mathbb{C}}$  possèdent chacun une métrique riemannienne holomorphe invariante à gauche qui est plate, ils obtiennent en définitive le théorème suivant :

**Théorème 1.4.3** (Dumitrescu–Zeghib, [DZ09]). *Soit  $M$  une variété complexe compacte de dimension 3. Si  $M$  possède une métrique riemannienne holomorphe, alors un revêtement fini de  $M$  possède une métrique riemannienne holomorphe de courbure constante.*

La classification (à revêtement fini près) des variétés complexes compactes de dimension 3 possédant des métriques riemanniennes holomorphes se ramène donc à la classification des variétés riemanniennes holomorphes de courbure constante. De ce point de vue, il est donc particulièrement intéressant d'étudier les variétés complexes compactes localement modelées sur  $\mathbb{C}^3$  muni d'une métrique riemannienne holomorphe invariante par translations, ou sur  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  muni de sa métrique de Killing. Nous reviendrons sur ces géométries dans le chapitre 2.

## 1.5 Le formalisme des $(G, X)$ -structures

Nous avons remarqué dans la section 1.3 que toute variété pseudo-riemannienne localement symétrique admet un “modèle” symétrique et que toute isométrie locale d'une variété symétrique se prolonge en une isométrie globale. Ceci peut être résumé dans la proposition suivante :

**Proposition 1.5.1.** *Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne localement symétrique. Il existe un espace pseudo-riemannien symétrique  $X$  de même dimension que  $M$ , de groupe d'isométries  $G$ , et un atlas de cartes de  $M$  à valeurs dans  $X$  (formé d'isométries locales), dont les changements de cartes sont des isométries de  $X$ .*

Réciproquement, on a

**Proposition 1.5.2.** *Soit  $X$  un espace pseudo-riemannien symétrique et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ , munie d'un atlas de cartes à valeurs dans  $X$  dont les changements de cartes sont des isométries de  $X$ . Alors il existe une unique métrique pseudo-riemannienne sur  $M$  telle que les cartes de cet atlas sont des isométries locales.*

Ces deux propositions permettent d'étudier  $M$  en faisant abstraction de la métrique pseudo-riemannienne localement symétrique pour se focaliser sur la structure locale d'espace homogène qu'elle induit. C'est ce qui conduit à la définition générale de  $(G, X)$ -structure.

### 1.5.1 La catégorie des $(G, X)$ -structures

**Définition 1.5.3.** Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène (i.e. une variété munie d'une action transitive du groupe de Lie  $G$ ) et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ . Une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est la donnée d'un atlas  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ , où les  $U_i$  recouvrent  $M$  et où les

$$\varphi_i : U_i \rightarrow X$$

sont des difféomorphismes locaux injectifs tels que pour tout  $i, j \in I$ , sur chaque composante connexe de  $U_i \cap U_j$ , il existe  $g \in G$  tel que

$$\varphi_j = g \cdot \varphi_i .$$

Deux  $(G, X)$ -structures sur  $M$  sont considérées comme égales si la réunion des atlas qui les définissent est encore une  $(G, X)$ -structure.

Lorsqu'une  $(G, X)$ -structure nous est donnée sur une variété  $M$ , on dira parfois que  $M$  est *localement modelée* sur  $X$ , ou encore que  $M$  est une  $(G, X)$ -variété.

**Exemple 1.5.4.** Le groupe  $\text{Aff}(n, \mathbb{R})$  (resp.  $\text{Aff}(n, \mathbb{C})$ ) des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$  (resp. de  $\mathbb{C}^n$ ) agit transitivement sur  $\mathbb{R}^n$  (resp.  $\mathbb{C}^n$ ). Une  $(\text{Aff}(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n)$ -structure (resp. une  $(\text{Aff}(n, \mathbb{C}), \mathbb{C}^n)$ -structure) sur une variété  $M$  de dimension réelle (resp. complexe)  $n$  est appelée une *structure affine réelle* (resp. *structure affine complexe*).

De même, on appelle *structure projective réelle* (resp. *structure projective complexe*) sur  $M$  une  $(\text{PGL}(n+1, \mathbb{R}), \mathbb{RP}^n)$ -structure (resp. une  $(\text{PGL}(n+1, \mathbb{C}), \mathbb{CP}^n)$ -structure).

Si  $X$  est un espace pseudo-riemannien symétrique et  $G$  son groupe d'isométries, nous avons vu que la donnée d'une  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  est équivalente à la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne localement isométrique à la métrique de  $X$ . Plus généralement, toute structure géométrique  $G$ -invariante sur  $X$  induit une structure géométrique de même nature sur  $M$ . Par exemple, la donnée d'une structure affine sur une variété est équivalente à la donnée d'une connexion plate et sans torsion sur le fibré tangent. On peut plus généralement penser une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  comme une structure géométrique localement isomorphe à une structure géométrique sur  $X$  dont le groupe d'automorphismes est  $G$ .

Soit  $f : N \rightarrow M$  un difféomorphisme local et  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  un atlas d'une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ . Considérons alors un atlas de  $N$  de la forme  $(V_j, \varphi_{i_j} \circ f)_{j \in J}$ , où  $(V_j)_{j \in J}$  est un recouvrement ouvert de  $N$  tel que pour tout  $j$ , la restriction de  $f$  à  $V_j$  est un difféomorphisme sur son image et tel que  $f(V_j) \subset U_{i_j}$ . Cette atlas définit une  $(G, X)$ -structure sur  $N$ , appelée *tiré en arrière* par  $f$  de la  $(G, X)$ -structure de  $M$ . Les  $(G, X)$ -structures se tirent donc en arrière par les difféomorphismes locaux. En particulier, une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  induit naturellement une  $(G, X)$ -structure sur tout revêtement de  $M$ .

Inversement, une  $(G, X)$ -structure sur un revêtement galoisien de  $M$  peut descendre en une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ , sous réserve que l'action du groupe de revêtement *préserve* la  $(G, X)$ -structure, dans le sens suivant :

**Définition 1.5.5.** Soient  $M$  une  $(G, X)$ -variété et  $f$  un difféomorphisme de  $M$ . On dit que  $f$  *préserve* la  $(G, X)$ -structure de  $M$ , ou encore que  $f$  est un automorphisme de la  $(G, X)$ -structure, si cette  $(G, X)$ -structure est égale à son tiré en arrière par  $f$ . Plus généralement, si  $M$  et  $N$  sont deux  $(G, X)$ -variétés et  $f : M \rightarrow N$  un difféomorphisme local, on dit que  $f$  est un morphisme de  $(G, X)$ -variétés si la  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est identique au tiré en arrière de la  $(G, X)$ -structure sur  $N$  par  $f$ .

**Proposition 1.5.6.** *Soit  $M$  une  $(G, X)$ -variété et  $\Gamma$  un groupe de difféomorphismes de  $M$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $M$  en préservant la  $(G, X)$ -structure. Alors il existe une unique  $(G, X)$ -structure sur le quotient  $M/\Gamma$  telle que l'application de revêtement de  $M$  dans  $M/\Gamma$  est un morphisme de  $(G, X)$ -structures.*

Remarquons que les différentes notions que nous venons d'introduire ne sont que des généralisations à toute  $(G, X)$ -structure de notions très naturelles en géométrie pseudo-riemannienne. En effet, si  $X$  est un espace pseudo-riemannien symétrique et  $G$  son groupe d'isométries, une  $(G, X)$ -structure sur  $M$  est simplement la donnée d'une métrique pseudo-riemannienne sur  $M$  localement isométrique à  $X$ . Le tiré en arrière d'une  $(G, X)$ -structure est alors la  $(G, X)$ -structure associée au tiré en arrière de la métrique pseudo-riemannienne et un morphisme entre deux  $(G, X)$ -structures est une isométrie locale. La proposition précédente affirme simplement que, si  $(M, q)$  est une variété pseudo-riemannienne localement isométrique à  $X$  et  $\Gamma$  un groupe d'isométries de  $M$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $M$ , alors la métrique  $q$  passe au quotient en une métrique  $\bar{q}$  sur  $M/\Gamma$ , telle que l'application de revêtement de  $(M, q)$  dans  $(M/\Gamma, \bar{q})$  est une isométrie locale.

Nous voici maintenant capables de construire des  $(G, X)$ -variétés de différentes manières. On peut par exemple considérer  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $X$ . Le quotient de  $X$  par  $\Gamma$  est alors une  $(G, X)$ -variété. De telles  $(G, X)$ -variétés sont appelées *complètes* (voir section 1.5.3). On peut également quotienter un ouvert  $U$  de  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$  préservant  $U$  et agissant librement et proprement discontinûment sur  $U$ . Les  $(G, X)$ -variétés ainsi obtenues sont parfois appelées *kleiniennes* ou *uniformisables* (voir chapitre 2, section 2.1).

Voici une construction encore plus générale. Soit  $M$  une variété de même dimension que  $X$  et  $\tilde{M}$  son revêtement universel. Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(M)$  dans  $G$ . Supposons qu'il existe un difféomorphisme local  $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  qui soit  $\rho$ -équivariant, c'est-à-dire tel que pour tout  $\gamma \in \pi_1(M)$ , le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \rightarrow & X \\ \gamma \downarrow & & \downarrow \rho(\gamma) \\ \tilde{M} & \rightarrow & X \end{array} .$$

Munissons  $\tilde{M}$  de la  $(G, X)$ -structure tirée en arrière par  $\text{dev}$ . Par  $\rho$ -équivariance de  $\text{dev}$ , cette  $(G, X)$ -structure est préservée par l'action de  $\pi_1(M)$  et induit donc une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ .

**Exemple 1.5.7.** Soit  $\Lambda$  un réseau dans  $\mathbb{C}$ . l'application exponentielle, de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$ , est un difféomorphisme local équivariant pour le morphisme

$$\begin{array}{ccc} \rho : \Lambda & \rightarrow & \text{Aff}(1, \mathbb{C}) \\ \lambda & \mapsto & (z \mapsto e^{\lambda z}). \end{array}$$

Le couple  $(\exp, \rho)$  induit donc une structure affine complexe sur le tore  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

La proposition suivante affirme que toutes les  $(G, X)$ -structures sont en fait construites de cette façon.

**Proposition 1.5.8.** *Soit  $M$  une  $(G, X)$ -variété et  $\tilde{M}$  son revêtement universel, muni de la  $(G, X)$ -structure induite par  $M$ . Alors il existe un morphisme de  $(G, X)$ -structures*

$$\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$$

appelé application développante, ainsi qu'un morphisme  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$  appelé morphisme d'holonomie, tel que  $\text{dev}$  est  $\rho$ -équivariante.

Deux couples  $(\text{dev}, \rho)$  et  $(\text{dev}', \rho')$  induisent la même  $(G, X)$ -structure sur  $M$  si et seulement s'il existe  $g \in G$  tel que

$$\text{dev}' = g \circ \text{dev}$$

et

$$\rho' = g\rho g^{-1}.$$

Ce nouveau point de vue sur les  $(G, X)$ -structures va se révéler particulièrement utile pour "déformer" des  $(G, X)$ -structures sur une variété  $M$ , comme nous allons le voir dans la section suivante.

### 1.5.2 Espace de déformation et espace des modules

Une même variété peut posséder plusieurs  $(G, X)$ -structures distinctes. Ceci conduit à définir l'espace des modules et l'espace de déformation des  $(G, X)$ -structures sur une variété  $M$ . Rappelons que le groupe  $\text{Diff}(M)$  des difféomorphismes de  $M$  agit sur l'ensemble des  $(G, X)$ -structures sur  $M$  en les tirant en arrière.

**Définition 1.5.9.** Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ .

- L'espace des modules des  $(G, X)$ -structures sur  $M$ , noté  $\text{Mod}_{(G, X)}(M)$ , est le quotient de l'ensemble des  $(G, X)$ -structures sur  $M$  par l'action du groupe  $\text{Diff}(M)$ .
- L'espace de déformation des  $(G, X)$ -structures sur  $M$ , noté  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ , est le quotient de l'ensemble des  $(G, X)$ -structures sur  $M$  par l'action du groupe  $\text{Diff}^0(M)$  des difféomorphismes de  $M$  isotopes à l'identité.

**Exemple 1.5.10.** Dans le cas où  $X$  est un espace pseudo-riemannien symétrique et  $G$  son groupe d'isométries, l'espace de déformation  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$  est exactement l'espace des métriques pseudo-riemanniennes sur  $M$  localement isométriques à  $X$  modulo isotopie.

La description des  $(G, X)$ -structures par les couples  $(\text{dev}, \rho)$  va permettre de raffiner considérablement la description des espaces de déformation. Rappelons que le couple  $(\text{dev}, \rho)$  associé à une  $(G, X)$ -structure est bien défini modulo l'action de  $G$  donnée par

$$g \cdot (\text{dev}, \rho) = (g \circ \text{dev}, g\rho g^{-1}).$$

Par ailleurs, tout difféomorphisme  $h$  de  $M$  se relève en un difféomorphisme  $\tilde{h}$  de  $\tilde{M}$  qui est équivariant pour un automorphisme  $\sigma$  de  $\pi_1(M)$ . (Lorsque  $h$  est isotope à l'identité, le morphisme  $\sigma$  est trivial.) Si  $M$  est munie d'une  $(G, X)$ -structure donnée par un couple  $(\text{dev}, \rho)$ , le tiré en arrière de cette  $(G, X)$ -structure par  $h$  est donné par le couple

$$(\text{dev} \circ \tilde{h}, \rho \circ \sigma).$$

La composition de  $(\text{dev}, \rho)$  avec  $(\tilde{h}, \sigma)$  fournit donc une action à droite de  $\text{Diff}(M)$  sur l'ensemble des couples  $(\text{dev}, \rho)$  et permet de donner une nouvelle définition de l'espace des modules et de l'espace de déformation :

$$\text{Mod}_{(G, X)}(M) = G \backslash \left\{ (\text{dev}, \rho), \text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X \text{ difféomorphisme } \rho\text{-equivariant} \right\} / \text{Diff}(M)$$

et

$$\text{Def}_{(G,X)}(M) = G \setminus \left\{ (\text{dev}, \rho), \text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X \text{ difféomorphisme } \rho\text{-equivariant} \right\} / \text{Diff}^0(M) .$$

Ce point de vue permet entre autres de munir l'espace des modules et l'espace de déformation de la topologie induite par passage au quotient de la topologie compacte ouverte sur les couples  $(\text{dev}, \rho)$ . Notons que cette topologie peut en général ne pas être séparée.

Soit  $\Gamma$  un groupe. Notons  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  l'espace des représentations de  $\Gamma$  dans  $G$ . Le groupe  $G$  agit sur  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  par

$$g \cdot \rho : \gamma \mapsto g\rho(\gamma)g^{-1}$$

pour tout  $\rho \in \text{Hom}(\Gamma, G)$ , tout  $g \in G$  et tout  $\gamma \in \Gamma$ . Dans la suite, on appellera simplement cette action *l'action de  $G$  par conjugaison*. On notera  $\text{Rep}(\Gamma, G)$  le quotient de  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  sous l'action de  $G$  par conjugaison. Lorsque  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une variété  $M$ , on notera parfois cet espace  $\text{Rep}(M, G)$ . Lorsque  $\Gamma$  est de type fini (s'il s'agit, par exemple, du groupe fondamental d'une variété compacte), l'espace  $\text{Hom}(\Gamma, G)$  est une variété algébrique, ce qui induit une structure d'espace topologique (non nécessairement séparé) sur le quotient  $\text{Rep}(\Gamma, G)$ .

Le théorème le plus saisissant de la théorie des  $(G, X)$ -structures est sans doute le théorème d'Ehrmann–Thurston ([Ehr36], [Thu80]), qui affirme que l'espace de déformation des  $(G, X)$ -structures sur une variété compacte  $M$  est localement homéomorphe à  $\text{Rep}(\Gamma, G)$ .

**Théorème 1.5.11** (Ehresman–Thurston). *Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène et  $M$  une variété compacte de même dimension que  $X$ . L'application*

$$\begin{array}{ccc} \text{Hol} : \text{Def}_{(G,X)}(M) & \rightarrow & \text{Rep}(M, G) \\ (\text{dev}, \rho) & \mapsto & \rho \end{array}$$

*est un homéomorphisme local.*

On peut reformuler ce théorème en disant que si  $\rho : \pi_1(M) \rightarrow G$  est l'holonomie d'une  $(G, X)$ -structure sur  $M$ , alors les morphismes proches de  $\rho$  sont encore des morphismes d'holonomie de  $(G, X)$ -structures sur  $M$  proches de la structures initiale, et que deux  $(G, X)$ -structures proches ont la même holonomie si et seulement si elles sont conjuguées par une isotopie de  $M$ .

### 1.5.3 Complétude et complétude géodésique

Un des intérêts d'adopter le point de vue des  $(G, X)$ -structures est de transcrire la notion a priori analytique de complétude géodésique en une notion algébrique et dynamique.

Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène. Commençons par remarquer que si  $X$  n'est pas simplement connexe, l'action de  $G$  sur  $X$  se relève en une action fidèle et transitive d'un revêtement  $\tilde{G}$  de  $G$  sur  $\tilde{X}$ . De plus, toute  $(G, X)$ -structure sur une variété  $M$  induit une  $(\tilde{G}, \tilde{X})$ -structure. On ne perd donc pas de généralité en considérant uniquement des modèles  $X$  simplement connexes.

**Définition 1.5.12.** Une  $(G, X)$ -variété  $M$  est dite *complète* si son application développante se relève en un difféomorphisme global de  $\tilde{M} \rightarrow \tilde{X}$ .

Lorsque  $X$  est simplement connexe, l'application développante d'une  $(G, X)$ -structure complète identifie  $\tilde{M}$  à  $X$ , sur lequel  $\pi_1(M)$  agit via le morphisme d'holonomie. Les  $(G, X)$ -variétés complètes sont donc les quotients  $\Gamma \backslash X$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $G$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $X$ . De telles  $(G, X)$ -structures sont également appelées *formes de Clifford–Klein*.

Dans le cas de variétés compactes, on peut encore caractériser la complétude de la façon suivante :

**Proposition 1.5.13.** *Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène simplement connexe,  $M$  une  $(G, X)$ -variété compacte et  $(\text{dev}, \rho)$  une application développante et un morphisme d'holonomie associés à la  $(G, X)$ -structure de  $M$ . Alors  $M$  est une  $(G, X)$ -variété complète si seulement si  $\rho(\pi_1(M))$  agit librement et proprement discontinûment sur  $X$ .*

*Preuve.* Si  $M$  est complète, l'application développante est un difféomorphisme  $\rho$ -équivariant de  $\tilde{M}$  dans  $X$  et, comme  $\pi_1(M)$  agit librement et proprement discontinûment sur  $\tilde{M}$ , son image  $\rho(\pi_1(M))$  agit librement et proprement discontinûment sur  $X$ .

Réciproquement, supposons que  $\rho(\pi_1(M))$  agisse proprement discontinûment sur  $X$ . Alors l'application développante passe au quotient en un difféomorphisme local

$$\overline{\text{dev}} : M \rightarrow \rho(\pi_1(M)) \backslash X .$$

Comme  $M$  est compacte, ce difféomorphisme local est propre et c'est donc un revêtement. Il se relève donc en un difféomorphisme de  $\tilde{M} \rightarrow X$ . Il suit que l'application  $\text{dev}$  est un difféomorphisme global.  $\square$

Le rapport entre la complétude des  $(G, X)$ -structures et la complétude géodésique est énoncé dans la proposition suivante :

**Proposition 1.5.14.** *Supposons que le fibré tangent à  $X$  possède une connexion  $G$ -invariante géodésiquement complète. Soit  $M$  une  $(G, X)$ -variété. Alors  $M$  est complète en tant que  $(G, X)$ -variété si et seulement si la connexion induite sur  $M$  par la  $(G, X)$ -structure est géodésiquement complète.*

*Preuve.* Si  $M$  est une  $(G, X)$ -variété complète, son revêtement universel s'identifie au modèle  $X$  qui est par hypothèse géodésiquement complet. Par conséquent,  $M$  est géodésiquement complète.

Réciproquement, supposons  $M$  géodésiquement complète et montrons qu'elle est alors complète en tant que  $(G, X)$ -variété. L'application développante  $\text{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  est un difféomorphisme local et il nous suffit de prouver qu'il vérifie la propriété de relèvement des chemins.

Supposons qu'il existe un chemin continu  $c : [0, 1] \rightarrow X$  et un point  $m \in \text{dev}^{-1}(c(0))$  tel que  $c$  se relève en partant de  $m$  sur  $[0, 1[$  et montrons que  $c$  se relève alors sur tout  $[0, 1]$ . Soit  $\tilde{c} : [0, 1[ \rightarrow \tilde{M}$  ce relèvement. Comme  $c([0, 1])$  est compact dans  $X$ , il existe un temps  $t$  pour lequel  $c([t, 1])$  est inclus dans le domaine d'injectivité de l'application  $\exp_{c(t)}$ . Soit  $U$  un ouvert de  $T_{c(t)}X$  contenant  $0$  tel que  $\exp_{c(t)|_U}$  soit un difféomorphisme local injectif dont l'image contient  $c([t, 1])$ . Soit  $\tilde{U}$  l'ouvert de  $T_{\tilde{c}(t)}\tilde{M}$  image réciproque de  $U$  par la différentielle de  $\text{dev}$ . Comme l'application développante envoie géodésique sur géodésique, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{d_{\tilde{c}(t)}\text{dev}} & U \\ \exp_{\tilde{c}(t)} \downarrow & & \downarrow \exp_{c(t)} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\text{dev}} & X \end{array}$$

Posons alors

$$\begin{aligned}\hat{c}(u) &= \tilde{c}(u) \quad \text{si } u \leq t \\ &= \exp_{\tilde{c}(t)} \circ \text{od}_{c(t)} \circ \text{dev}^{-1} \circ \exp_{c(t)}^{-1}(c(u)) \quad \text{si } u \in ]t, 1] .\end{aligned}$$

Le chemin  $\hat{c}$  est bien défini, continu, et relève  $c$  en partant de  $m$  sur tout l'intervalle  $[0, 1]$ . L'application développante est donc un revêtement et la  $(G, X)$ -structure est complète.  $\square$

**Corollaire 1.5.15.** *Soit  $(M, q)$  une variété pseudo-riemannienne localement symétrique. Soit  $X$  l'espace symétrique connexe et simplement connexe localement isométrique à  $M$  et  $G$  son groupe d'isométries. Alors  $M$  est géodésiquement complète si et seulement si elle est isométrique à un quotient  $\Gamma \backslash X$ , où  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $G$  agissant librement et proprement discontinûment sur  $M$ .*

**Corollaire 1.5.16.** *Soit  $X$  un espace riemannien homogène,  $G$  son groupe d'isométries et  $M$  une variété compacte localement isométrique à  $X$ . Alors  $M$  est isométrique au quotient de  $X$  par un sous-groupe discret et sans torsion de  $G$ .*

## 1.6 Questions générales

Fixons un espace  $G$ -homogène  $X$ . Les  $(G, X)$ -structures sont des objets rigides, ce qui autorise à espérer “classifier” les  $(G, X)$ -variétés compactes. Pour les géométries riemanniennes, une telle classification est connue en dimension 2 depuis le théorème d'uniformisation de Poincaré–Koebe (voir [dSG10] et les travaux de Teichmüller [Tei82]). Le programme de géométrisation de Thurston [Thu82], qui visait entre autres à étendre cette classification en dimension 3, a été en grande partie accompli durant les dernières décennies – le théorème d'Agol [AGM13] et Wise [Wis04] parachevant en quelque sorte la classification des variétés compactes géométrisables de dimension 3 à revêtement fini près.

L'objectif de cette thèse est d'obtenir des résultats similaires pour des géométries pseudo-riemanniennes. Nous terminons donc ce chapitre en énonçant quelques questions générales dont la résolution aboutirait à une classification des  $(G, X)$ -structures sur les variétés compactes. Nous étayons ces questions par des exemples, des conjectures et des résultats partiels connus, ainsi que ceux contenus dans cette thèse.

### 1.6.1 Complétude

Si  $X$  est un espace riemannien  $G$ -homogène, le corollaire 1.5.16 constitue une première étape essentielle vers une classification des  $(G, X)$ -structures compactes. Ce corollaire ramène en effet un problème analytique – la description des métriques riemanniennes sur les variétés compactes vérifiant une certaine équation aux dérivées partielles – à un problème algébrique – la descriptions des réseaux sans torsion de  $G$ .

Or, en général, il n'est pas vrai que les  $(G, X)$ -structures compactes sont complètes. Ainsi, l'exemple 1.5.7 montre qu'un tore de dimension 2 possède des structures affines complexes incomplètes (dans cet exemple, l'image de l'application développante est un ouvert strict du modèle  $\mathbb{C}$ ). Si l'on s'intéresse aux structures projectives complexes sur une surface compacte  $S$  de genre supérieur à 2, on obtient une classe plus riche d'exemples, où l'application développante peut ne pas être injective, ni surjective, ni même un revêtement sur son image, et où l'holonomie peut agir sur  $\mathbb{C}P^1$  avec une orbite dense. Le théorème de Gallo–Kapovich–Marden [GKM00] affirme en effet que presque toute représentation de

$\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$  qui se relève à  $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$  est l'holonomie d'une structure projective complexe sur  $S$ .

En revanche, on ne connaît pas d'exemple de  $(G, X)$ -structure compacte non complète dès lors que  $G$  préserve une forme volume sur  $X$ . La conjecture la plus célèbre dans ce sens est la conjecture de Markus, selon laquelle une variété affine compacte est nécessairement complète lorsqu'elle possède une forme volume parallèle.

**Conjecture** (Markus, [Mar63]). *Soit  $M$  une variété compacte, munie d'une connexion plate et sans torsion dont le transport parallèle préserve une forme volume. Alors  $M$  est géodésiquement complète.*

*De façon équivalente, soit  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$  le groupe des transformations affines de  $\mathbb{R}^n$  préservant un volume. Alors toutes les  $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -variétés compactes sont complètes.*

La conjecture de Markus a été partiellement résolue par Fried, Goldman et Hirsch, sous l'hypothèse que le groupe fondamental de  $M$  est nilpotent. Leur théorème étend un théorème de Smillie qui supposait le groupe fondamental abélien.

**Théorème 1.6.1** (Fried–Goldman–Hirsch, [FGH81]). *Soit  $M$  une variété compacte dont le groupe fondamental est nilpotent. Alors toute  $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ -structure sur  $M$  est complète.*

Notons que la conjecture de Markus impliquerait que toute variété pseudo-riemannienne plate compacte est géodésiquement complète. En effet, la connexion de Levi–Civita d'une variété plate est, par définition, une connexion plate et sans torsion qui préserve la métrique. À revêtement double près, la variété est orientable et sa connexion de Levi–Civita préserve alors le volume associé à la métrique. D'après la conjecture de Markus, elle doit donc être géodésiquement complète.

Dans le cas de métriques lorentziennes plates, la conjecture a été prouvée par Carrière [Car89], puis généralisée par Klingler aux métriques lorentziennes de courbure constante [Kli96].

**Théorème 1.6.2** (Carrière, Klingler). *Toute variété lorentzienne compacte de courbure constante est géodésiquement complète.*

D'un point de vue analytique, ce théorème peut surprendre, puisque les métriques lorentziennes sur les variétés compactes ne sont pas nécessairement géodésiquement complètes (cf. section 1.2). La preuve de Carrière et Klingler s'appuie fortement sur la  $(G, X)$ -structure induite par une métrique de courbure constante. On peut penser plus généralement que les  $(\mathrm{Isom}(X), X)$ -structures compactes sont complètes lorsque  $X$  est une variété pseudo-riemannienne localement homogène, ce qui nous conduit à formuler la conjecture suivante, variante de celle de Markus :

**Conjecture** (Markus pseudo-riemannien). *Les variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques compactes sont géodésiquement complètes.*

Dans le chapitre 2, nous abordons cette question pour certaines géométries pseudo-riemanniennes, en particulier pour les variétés compactes localement modelées sur un groupe de Lie de rang 1 muni de sa métrique de Killing. Nous montrons que ces variétés sont complètes, sous l'hypothèse additionnelle que la  $(G, X)$ -structure est kleinienne (théorème 2.2.4). Comme cette condition est fermée (corollaire 2.1.4), on en déduira que l'espace des structures complètes est fermé dans l'espace de déformation.

### 1.6.2 Existence et déformation des formes de Clifford–Klein

Sous réserve de prouver la conjecture de Markus pseudo-riemannienne, la classification des  $(G, X)$ -variétés compactes se ramène donc à la description des formes de Clifford–Klein compactes. Existent-elles ? Sont-elles déformables ?

#### Cas riemannien

Dans le cas où  $X$  est un espace riemannien, les formes de Clifford–Klein compactes de  $X$  sont des quotients de  $X$  par un réseau cocompact de  $G$ . Réciproquement, tout réseau cocompact de  $G$  admet – d’après le lemme de Selberg [Sel89] – un sous-groupe d’indice fini sans torsion qui agit alors librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $X$ . L’existence de réseaux, lorsque  $G$  est semi-simple, est garantie par le théorème de Borel :

**Théorème 1.6.3** (Borel, [Bor63]). *Tout groupe de Lie semi-simple admet un réseau cocompact.*

**Corollaire 1.6.4.** *Tout espace riemannien symétrique admet une forme de Clifford–Klein compacte.*

Les célèbres théorèmes de rigidité de Mostow [Mos68] et de Margulis [Mar91] impliquent par ailleurs que si  $G$  est un groupe de Lie simple non compact différent de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , alors tout réseau de  $G$  est rigide. En particulier, une variété compacte  $M$  de dimension supérieure à 3 admet au plus une métrique hyperbolique à difféomorphisme près. En revanche, dans le cas où  $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  les réseaux de  $G$  sont déformables et paramètrent les déformations de structures complexes sur les surfaces compactes de genre supérieur à 2, d’après le théorème de Poincaré–Koebe (cf. section 1.6.4).

#### Cas pseudo-riemannien

Ces mêmes questions se posent lorsque  $X$  est pseudo-riemannien et n’admettent pas de réponse aussi générale. Pour certaines géométries il n’existe pas de forme de Clifford–Klein compacte. La géométrie de Sitter est un contre-exemple classique. Il existe en effet dans  $\mathbb{S}^{n-1,1}$  un compact  $C$  tel que pour toute isométrie  $g$  de  $\mathbb{S}^{n-1,1}$ , on a

$$g \cdot C \cap C \neq \emptyset.$$

Les seuls sous-groupes agissant proprement sur  $\mathbb{S}^{n-1,1}$  sont donc des sous-groupes finis, qui n’agissent pas cocompactement.  $\mathbb{S}^{n-1,1}$  ne possède donc pas de forme de Clifford–Klein compacte. Cet exemple est un cas particulier du phénomène de Calabi–Markus, mis en évidence par Kobayashi [Kob89]. Benoist et Labourie ont également donné dans [BL92] des critères de non-existence de formes de Clifford–Klein.

Une façon d’obtenir des formes de Clifford–Klein de  $X$  est de trouver un sous-groupe de Lie  $L$  de  $G$  agissant transitivement et proprement sur  $X$ , puis de quotienter  $X$  par un réseau cocompact de  $L$ . On obtient par exemple des variétés anti-de Sitter compactes en dimension impaire en quotientant  $\mathrm{AdS}^{2n+1}$  par un réseau cocompact de  $\mathrm{U}(n, 1) \subset \mathrm{SO}(2n, 2)$ . De tels quotients sont appelés *standard*. On peut ensuite espérer obtenir des exemples plus exotiques en déformant non trivialement ce réseau de  $L$  dans le groupe  $G$ . D’après le théorème d’Ehresmann–Thurston, une telle déformation – lorsqu’elle est possible – fournira toujours une nouvelle  $(G, X)$ -structure. Cependant, si l’on ne sait pas que la conjecture de Markus est valide, cette  $(G, X)$ -structure pourrait ne pas être complète. Kassel [Kas08]

a cependant prouvé que, dans de nombreux cas, les déformations des formes de Clifford–Klein compactes standard restent des formes de Clifford–Klein.

Ce procédé pour obtenir des formes de Clifford–Klein non standard n’est cependant pas toujours fructueux. Tout d’abord, si le groupe  $L$  est de rang 2, le théorème de super-rigidité de Margulis [Mar91] implique que toute déformation d’un réseau de  $L$  dans  $G$  est obtenue par conjugaison. Même lorsque  $L$  est de rang 1, les réseaux de  $L$  peuvent être rigides dans  $G$ . Zeghib l’a prouvé pour des réseaux de  $U(n, 1) \subset SO(2n, 2)$  pour  $n$  supérieur à 2 [Zeg98]. Autrement dit, les structures anti-de Sitter standard sur les variétés compactes de dimension supérieure à 4 ne peuvent pas être déformées. Zeghib a conjecturé que toutes les variétés anti-de Sitter compactes de dimension supérieure à 4 sont standard.

Le cas de la dimension 3 est particulier, du fait que  $AdS^3$  s’identifie à (un revêtement double de)  $PSL(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing, dont le groupe d’isométries est (à indice fini près)  $PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$  agissant par translations à gauche et à droite. Si  $K$  est un sous-groupe compact maximal de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , le sous-groupe  $PSL(2, \mathbb{R}) \times K$  agit proprement et transitivement sur  $PSL(2, \mathbb{R})$  et permet donc d’obtenir des structures standard. Goldman [Gol85a] puis Kobayashi [Kob98] ont remarqué que ces quotients pouvaient se déformer en des quotients non standard. Plus précisément, considérons une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2. Soit  $j : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  une représentation fuchsienne. Alors pour toute représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL(2, \mathbb{R})$  suffisamment proche de la représentation triviale, le groupe

$$j \times \rho(\pi_1(S)) = \{(j(\gamma), \rho(\gamma)), \gamma \in \pi_1(S)\} \subset PSL(2, \mathbb{R}) \times PSL(2, \mathbb{R})$$

agit encore librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $PSL(2, \mathbb{R})$ . Ce résultat a été généralisé par Ghys à  $SL(2, \mathbb{C})$  [Ghy95] et par Kobayashi à tout groupe de Lie de rang 1 [Kob98]. Notons que, dans le cas de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , le résultat se déduit a posteriori du théorème d’Ehresmann–Thurston et du théorème de Klingler.

Kulkarni et Raymond [KR85], dans le cas de  $PSL(2, \mathbb{R})$ , puis Kobayashi [Kob93] et Kassel [Kas08], dans le cas d’un groupe de Lie de rang 1 quelconque, ont prouvé que toutes les formes de Clifford–Klein étaient, à revêtement fini près, de cette forme.

**Théorème 1.6.5** (Kobayashi, Kassel). *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang 1 et  $\Gamma$  un sous-groupe discret sans torsion de  $L \times L$  agissant proprement discontinûment et cocompactement sur  $L$ . Alors, la projection de  $\Gamma$  sur l’un des facteurs  $L$  est injective, d’image un réseau cocompact de  $L$ .*

*Autrement dit, les formes de Clifford–Klein compactes de  $L$  sous l’action de  $L \times L$  sont toutes de la forme*

$$i \times \rho(\Gamma) \backslash L ,$$

*où  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $L$  et  $i$  l’injection de  $\Gamma$  dans  $L$ .*

Ce théorème ne dit toutefois pas pour quels réseaux  $\Gamma$  et quelles représentations  $\rho$  l’action obtenue est effectivement propre. Cette question a été traitée par Kassel dans le cas de  $PSL(2, \mathbb{R})$  [Kas09]. Son résultat a ensuite été généralisé par Guéritaud et Kassel au cas de  $PSO(n, 1)$  [GK13] puis par Guéritaud, Guichard, Kassel et Wienhard à tout groupe de Lie de rang 1 [GGKW].

Pour énoncer leur théorème, rappelons que si  $g$  est une isométrie d’un espace métrique  $X$ , on appelle longueur de translation de  $g$  le nombre

$$l(g) = \inf_{x \in X} d(x, g \cdot x) .$$

Lorsque  $L$  est un groupe de Lie semi-simple, on appellera longueur de translation d'un élément de  $L$  sa longueur de translation vu comme isométrie de l'espace symétrique de  $L$ .

**Théorème 1.6.6** (Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard). *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1,  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $L$  et  $\rho$  une représentation de  $\Gamma$  dans  $L$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $i \times \rho(\Gamma) \subset L \times L$  agit proprement discontinûment et cocompactement sur  $L$ ,
- (ii) il existe  $\lambda < 1$  tel que pour tout  $\gamma \in \Gamma$ ,

$$l(\rho(\gamma)) \leq \lambda l(\gamma).$$

La condition (ii) est de plus une condition ouverte, ce qui conduit au corollaire suivant :

**Corollaire 1.6.7** (Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard). *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang 1, muni de l'action de  $G = L \times L/Z(L)$  par translations à gauche et à droite. Soit  $M$  une variété de même dimension que  $L$ . Alors l'espace des  $(G, L)$ -structures complètes est ouvert dans  $\text{Def}_{(G,L)}(M)$ .*

### 1.6.3 Topologie des $(G, X)$ -variétés

Idéalement, la caractérisation des formes de Clifford–Klein aboutit à une description de la topologie des  $(G, X)$ -variétés compactes.

Il existe en effet un lien étroit entre la topologie d'une variété compacte et les géométries qu'elle peut posséder. En dimension 2, pour commencer, le théorème de Gauss–Bonnet (voir [GHL90]) et le théorème d'uniformisation de Poincaré–Koebe (voir [dSG10]) impliquent qu'une surface compacte orientée admet une métrique sphérique si et seulement si c'est une sphère, une métrique plate si et seulement si c'est un tore et une métrique hyperbolique si et seulement si elle est de genre supérieur à 2.

En dimension 3, Thurston a classifié les huit géométries riemanniennes pouvant apparaître sur des variétés compactes et, à sa suite, de nombreux auteurs ont travaillé à caractériser les variétés compactes pouvant être modelées sur telle ou telle géométrie. La résolution par Agol [AGM13] et Wise [Wis04] de la *conjecture virtuellement Haken* (voir [Thu82]), qui caractérise la topologie des variétés hyperboliques compactes de dimension 3 à revêtement fini près, semble avoir clos un chapitre de ce programme de géométrisation.

En revanche, beaucoup de questions restent ouvertes si l'on ne se focalise plus sur des géométries riemanniennes. Auslander a par exemple conjecturé que le groupe fondamental d'une variété affine compacte est virtuellement résoluble. Cette conjecture a été prouvée en petite dimension [AMS97] mais n'est pas résolue en général.

Dans le cas de variétés modelées sur  $\text{SO}(n, 1)$  muni de sa métrique de Killing, beaucoup de choses sont comprises grâce aux travaux de Guéritaud–Kassel. Le critère de propreté donné dans [GK13] (voir théorème 1.6.6) a en effet pour conséquence que toute variété localement modelée sur  $\text{SO}(n, 1)$  est, à revêtement fini près, un  $\text{SO}(n)$ -fibré principal au dessus d'une variété hyperbolique compacte de dimension  $n$ . Ils obtiennent en particulier une preuve plus explicite d'un corollaire de Kulkarni–Raymond selon lequel les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont des fibrés de Seifert à base hyperbolique. Nous donnerons dans le chapitre 4 une reformulation de la preuve de Guéritaud–Kassel (corollaire 4.3.6) qui nous permettra de calculer le volume des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 (ch.4, théorème 4.5.1).

#### 1.6.4 Topologie et géométrie des espaces de déformation

Pour compléter une “classification” des  $(G, X)$ -structures compactes, il faut encore comprendre “combien” une variété compacte  $M$  peut posséder de  $(G, X)$ -structures différentes. Pour cela, on peut espérer décrire la topologie et la géométrie de l’espace de déformation  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ , ainsi que son image par l’application  $\text{Hol}$ .

L’exemple le plus célèbre d’une telle description est l’*espace de Teichmüller*. Étant donnée une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2, rappelons que le théorème d’uniformisation de Poincaré–Koebe établit une bijection entre l’espace de déformation des structures complexes sur  $S$  compatibles avec l’orientation – appelé espace de Teichmüller de  $S$  et noté  $\mathcal{T}(S)$  – et celui des métriques hyperboliques sur  $S$ . Cet espace s’identifie encore, via l’holonomie, à l’une des composantes connexes de la variété des caractères de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Plus précisément, d’après un théorème de Goldman [Gol80], les composantes connexes de l’espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  sont classifiées par leur classe d’Euler qui, d’après l’inégalité de Milnor–Wood, prend toutes les valeurs entières entre  $\chi(S)$  et  $-\chi(S)$ , où  $\chi(S)$  désigne la caractéristique d’Euler de  $S$ . De plus une représentation est de classe d’Euler  $\pm\chi(S)$  si et seulement si elle est *fuchsienne*, i.e. injective et d’image un réseau cocompact de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . La condition de compatibilité avec l’orientation de  $S$  implique alors que l’espace de Teichmüller est homéomorphe à l’espace des représentations de classe d’Euler  $-\chi(S)$  modulo conjugaison.

D’après le théorème de Teichmüller, cet espace est une variété différentielle complexe diffeomorphe à  $\mathbb{R}^{-3\chi(S)}$ . Elle possède de plus une métrique kählerienne de courbure négative invariante par l’action du groupe modulaire de  $S$ , appelée métrique de Weil–Petersson.

Dans le chapitre 4, nous aboutirons à une description topologique de l’espace de déformation des structures anti-de Sitter sur un fibré en cercle au dessus d’une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2. D’après le critère de propreté de Kassel (théorème 1.6.6, cas de  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ ), cette description se ramène essentiellement à comprendre l’espace des couples de représentations  $(j, \rho)$  de  $\pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  vérifiant une certaine condition de “domination” (voir ch.3, définition 3.1.3). Nous montrerons dans le chapitre 3 que cet espace est homéomorphe au produit de l’espace de Teichmüller par l’espace des représentations non fuchsiennes, ramenant ainsi sa description topologique à celle de l’espace des représentations non fuchsiennes, accomplie par Hitchin dans [Hit87].



## Chapitre 2

# Deux théorèmes de complétude

LE BUT DE CE CHAPITRE est d'étendre les théorèmes de Carrière et Klingler à d'autres géométries pseudo-riemanniennes. Nous y présentons les résultats obtenus dans [Tho13]. Rappelons que, conjecturalement, le flot géodésique d'une variété pseudo-riemannienne compacte localement symétrique est complet. Cette conjecture a été prouvée par Carrière pour les variétés lorentziennes plates [Car89], puis le résultat a été étendu par Klingler aux variétés lorentziennes de courbure constante [Kli96] (cf. chapitre 1, théorème 1.6.2). Nous nous intéressons ici à des géométries pseudo-riemanniennes de signature  $(p, q)$ , où  $p$  et  $q$  sont supérieurs à 2.

Comme expliqué dans le chapitre 1, la question de la complétude de ces variétés se pose en termes de  $(G, X)$ -structures. Il s'agit de prouver que, pour certains groupes de Lie  $G$  et certains espaces homogènes  $X$ , toute  $(G, X)$ -structure compacte est une *forme de Clifford–Klein*, c'est-à-dire un quotient du modèle  $X$  par un sous-groupe discret de  $G$ . Nous n'arriverons à cette conclusion que pour des  $(G, X)$ -variétés qui sont supposées a priori *kleiniennes*, c'est-à-dire obtenues comme quotients d'ouverts de  $X$  (voir section 2.1).

Comme l'ensemble des  $(G, X)$ -structures kleiniennes sur une variété  $M$  est fermé dans l'espace de déformation  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$  (corollaire 2.1.4), on obtient comme corollaire intéressant que, pour les géométries que nous considérons, l'ensemble des structures complètes est fermé. Pour l'une de ces géométries, ce corollaire fait pendant au théorème de Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard selon lequel l'ensemble des structures complètes est ouvert (ch.1, corollaire 1.6.7).

### 2.1 Structures kleiniennes et ouverts divisibles

Kulkarni et Pinkall ont introduit dans [KP86] la terminologie de *structure kleinnienne* pour désigner une  $(G, X)$ -structure obtenue en quotientant un ouvert du modèle  $X$ . De telles structures sont parfois appelées *uniformisables*, mais cette terminologie est plus ambiguë dans la littérature. Chez certains auteurs, elle suppose que l'ouvert  $\mathcal{U}$  est le domaine de discontinuité du groupe par lequel on le quotiente. Or la notion de domaine de discontinuité n'est pas toujours bien définie. J'ai donc préféré reprendre ici la terminologie de Kulkarni et Pinkall.

**Définition 2.1.1.** Une  $(G, X)$ -variété  $M$  est dite kleinnienne si  $M$  est isomorphe à un quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{U}$ , où  $\mathcal{U}$  est un ouvert de  $X$  et  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  préservant  $\mathcal{U}$  dont l'action sur  $\mathcal{U}$  est libre et proprement discontinue.

Notons qu'un ouvert  $\mathcal{U}$  générique de  $X$  n'est préservé par aucun élément non trivial de  $G$ . Un ouvert  $\mathcal{U}$  qui revêt une variété kleinnienne est donc très spécifique.

**Définition 2.1.2.** Un ouvert  $\mathcal{U}$  d'un espace  $G$ -homogène  $X$  est dit *divisible* s'il existe un sous-groupe discret de  $G$  préservant  $\mathcal{U}$  et agissant proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathcal{U}$ .

Si  $\mathcal{U}$  est un ouvert divisible, soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $G$  agissant proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathcal{U}$ . En vertu du lemme de Selberg [Sel89], on peut de plus supposer que  $\Gamma$  est sans torsion. Le quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{U}$  est alors une  $(G, X)$ -variété kleinienne compacte. Réciproquement, Toute variété kleinienne compacte est revêtue par un ouvert divisible.

Les exemples les plus riches d'ouverts divisibles et de structures kleiniennes compactes apparaissent en géométrie projective réelle et complexe.

**Représentations quasi-fuchsiennes.** Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2. Dans l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ , il existe un ouvert de représentations  $\rho$  contenant les représentations fuchsiennes à valeur dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , pour lesquelles  $\rho(\pi_1(S))$  agit proprement discontinûment sur deux ouverts simplement connexes de  $\mathbb{CP}^1$ , dont le complémentaire est une courbe de Jordan. Ces représentations sont appelées *quasi-fuchsiennes*. Le quotient de chacun de ces ouverts par  $\rho(\pi_1(S))$  est une surface homéomorphe à  $S$  et induit donc sur  $S$  une structure projective complexe qui est kleinienne.

**Convexes divisibles.** De façon analogue, on peut considérer une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_0(2, 1) \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{R})$  et la déformer continûment en une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(3, \mathbb{R})$ . Une telle représentation  $\rho$  préserve un ouvert convexe de  $\mathbb{RP}^2$  sur lequel elle agit librement, proprement discontinûment et cocompactement. Cet ouvert est donc divisible et le quotient fournit une structure projective réelle sur  $S$ , qui est kleinienne.

La proposition suivante caractérise les structures kleiniennes en termes d'application développante et d'holonomie.

**Proposition 2.1.3.** *Soit  $M$  une  $(G, X)$ -variété et  $\mathrm{dev} : \tilde{M} \rightarrow X$  une application développante. Notons  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  l'application de revêtement. Alors  $M$  est kleinienne si et seulement si, pour tout  $x, y \in \tilde{M}$ ,*

$$\mathrm{dev}(x) = \mathrm{dev}(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y) .$$

*En particulier, si  $\mathrm{dev}$  est injective,  $M$  est kleinienne.*

*Preuve.* Supposons que  $M$  est kleinienne. Soit  $\mathcal{U}$  l'ouvert de  $X$  dont  $M$  est un quotient. Alors  $\mathcal{U}$  est un revêtement de  $M$ . Le revêtement universel de  $M$  s'identifie donc au revêtement universel  $\tilde{\mathcal{U}}$  de  $\mathcal{U}$  et l'application développante s'identifie alors à l'application de revêtement de  $\tilde{\mathcal{U}}$  dans  $\mathcal{U}$ . Si on note  $\pi'$  l'application de revêtement de  $\mathcal{U}$  dans  $M$ , on a donc  $\pi = \pi' \circ \mathrm{dev}$  et la conclusion suit.

Réciproquement, supposons que pour tout  $x, y \in \tilde{M}$ , on a

$$\mathrm{dev}(x) = \mathrm{dev}(y) \Rightarrow \pi(x) = \pi(y) .$$

Soit  $\mathcal{U}$  l'ouvert image de  $\mathrm{dev}$ . On peut définir une application  $\pi' : \mathcal{U} \rightarrow M$  telle que

$$\pi = \pi' \circ \mathrm{dev},$$

en posant simplement

$$\pi'(u) = \pi(x)$$

où  $x$  est n'importe quel antécédent de  $u$  par  $\text{dev}$ . Par construction, on a  $\pi' \circ \text{dev} = \pi$  et, comme  $\pi$  est un revêtement, on en déduit aisément que  $\pi'$  est également un revêtement. La  $(G, X)$ -variété  $M$  est donc kleinienne.  $\square$

Rappelons que  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$  désigne l'espace de déformation des  $(G, X)$ -structures sur la variété  $M$  (ch.1, définition 1.5.9).

**Corollaire 2.1.4.** *Soit  $X$  un espace  $G$ -homogène et  $M$  une variété de même dimension que  $X$ . Alors le domaine des  $(G, X)$ -structures kleinienne sur  $M$  forme un fermé de  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ .*

*Preuve.* Soit  $(\text{dev}_n, \rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'applications développantes et de morphismes d'holonomie de  $(G, X)$ -structures kleinienne sur  $M$ , qui converge uniformément sur tout compact vers un couple  $(\text{dev}, \rho)$ . Supposons par l'absurde que la  $(G, X)$ -structure correspondant à  $(\text{dev}, \rho)$  n'est pas kleinienne. Alors, d'après la proposition 2.1.3, il existe  $x$  et  $y$  dans  $\tilde{M}$  tels que  $\text{dev}(x) = \text{dev}(y)$  mais  $\pi(x) \neq \pi(y)$ .

Soient  $U_x$  et  $U_y$  des voisinages compacts de  $x$  et  $y$  tels que  $\pi(U_x)$  et  $\pi(U_y)$  soient disjoints. Les images de  $U_x$  et  $U_y$  par  $\text{dev}$  s'intersectent et comme  $\text{dev}_n$  converge uniformément vers  $\text{dev}$  sur  $U_x \cup U_y$ , les images de  $U_x$  et  $U_y$  par  $\text{dev}_n$  s'intersectent encore pour  $n$  assez grand. Il existe donc un entier  $n$  et deux points  $x_n \in U_x$  et  $y_n \in U_y$  tels que  $\text{dev}_n(x_n) = \text{dev}_n(y_n)$ . Or, comme  $\pi(U_x)$  et  $\pi(U_y)$  sont disjoints, on a en particulier  $\pi(x_n) \neq \pi(y_n)$ . Ceci contredit le fait que la  $(G, X)$ -structure correspondant à  $(\text{dev}_n, \rho_n)$  soit kleinienne.  $\square$

Bien sûr, les  $(G, X)$ -variétés complètes sont un cas particulier de variétés kleinienne. En général, il n'est pas du tout évident qu'il existe des  $(G, X)$ -variétés compactes kleinienne qui ne soient pas complètes. Cela reviendrait à trouver des ouverts divisibles autres que l'espace  $X$  tout entier. Si nous avons vu que de tels ouverts apparaissent en géométrie projective réelle ou complexe, la question de leur existence pour d'autres géométries est souvent ouverte. La conjecture de Markus (ch.1, section 1.6.1) impliquerait par exemple qu'il n'existe pas d'ouvert strict de  $\mathbb{R}^n$  divisible sous l'action du groupe  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$ .

Cela est vrai lorsque l'ouvert de  $\mathbb{R}^n$  est supposé être un convexe propre. En effet, d'après un théorème de Vey [Vey70], si un groupe  $\Gamma$  de transformations affines de  $\mathbb{R}^n$  divise un ouvert convexe propre  $\mathcal{U}$ , alors cet ouvert est un cône et  $\Gamma$  fixe son sommet. Le groupe  $\Gamma$  préserve alors le champ de vecteur générateur du groupe des homothéties centrées au sommet du cône, qui est de divergence non nulle et ne peut donc pas descendre sur une variété compacte.

Ce résultat a été partiellement généralisé par Jo et Kim au cas où l'ouvert  $\mathcal{U}$  est seulement supposé de la forme  $\mathbb{R}^k \times \Omega$  où  $\Omega$  est un convexe propre de  $\mathbb{R}^{n-k}$  tel que  $\text{Aut}_{\text{proj}}(\Omega)$  est irréductible [JK04], mais même la question plus générale de l'existence d'un convexe strict de  $\mathbb{R}^n$  divisible par un sous-groupe de  $\text{SL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$  est ouverte.

## 2.2 Quelques extensions du théorème de Carrière

L'idée première du théorème de Carrière est d'utiliser le fait que le groupe des transformations affines lorentziennes est de *discompacité* 1. Nous proposons ici une définition très générale de la discompacité de l'action d'un groupe de Lie sur une variété.

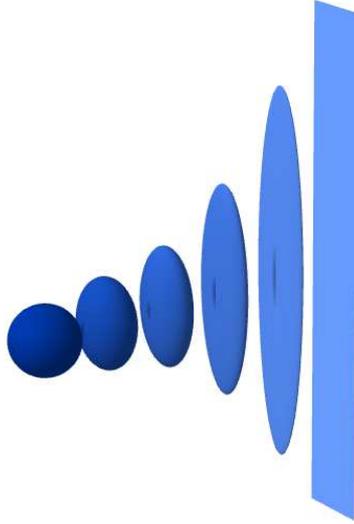


FIGURE 2.1 – Dégénérescence d'une boule sous l'action du groupe des transformations affines lorentziennes, de discompacité 1.

**Définition 2.2.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie et  $X$  un espace  $G$  homogène. Si  $(D_n)$  est une suite de parties de  $X$ , on appellera *adhérence* de  $(D_n)$  l'ensemble des valeurs d'adhérences de suites  $(x_n)$  telles que  $x_n \in D_n$ .

La *discompacité* de l'action de  $G$  sur  $X$  est le plus petit entier  $k$  tel que, pour tout ouvert  $B$  de  $X$  et toute suite  $(\gamma_n)$  d'éléments de  $G$ , si l'adhérence de  $(\gamma_n \cdot B)$  est non vide, alors elle contient une sous-variété non vide de codimension  $k$ .

La discompacité mesure en quelque sorte le nombre maximal de directions dans lesquelles une boule peut s'écraser sous l'action de  $G$ . Dans les cas qui nous intéressent, on peut la déterminer simplement en observant l'action linéarisée du stabilisateur dans  $G$  d'un point de  $X$ .

Par exemple, si le stabilisateur d'un point est compact, l'action de  $G$  est de discompacité 0. Dans le cas des isométries de  $\mathbb{R}^{d-1,1}$ , le stabilisateur d'un point s'identifie à  $O(d-1,1)$ , dont les matrices diagonalisables admettent au plus 2 valeurs propres distinctes de 1 qui sont inverses l'une de l'autre. On en déduit que l'action du groupe des isométries de  $\mathbb{R}^{d-1,1}$  est de discompacité 1 (voir figure 2.1).

De façon plus générale, si  $G$  agit sur une variété  $X$  de dimension  $d$  en préservant une métrique pseudo-riemannienne de signature  $(p, d-p)$ , alors cette action est de discompacité inférieure à  $\min(p, d-p)$ . Si l'action de  $G$  sur  $X$  préserve une forme volume sur  $X$ , elle est de discompacité inférieure à  $d-1$ . L'action du groupe affine sur  $\mathbb{R}^d$  et l'action du groupe des transformations projectives sur  $\mathbb{RP}^d$  sont par contre de discompacité  $d$ .

Pour étendre le théorème de Carrière, nous allons nous intéresser dans un premier temps à des exemples d'actions affines de discompacité 2. Convenons d'appeler *structure lorentz-hermitienne plate* sur une variété  $M$  de dimension réelle  $2d$  la donnée d'une  $(U(d-1,1) \times \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ -structure, où  $U(d-1,1) \times \mathbb{C}^d$  désigne le groupe des transformations affines complexes préservant la forme sesquilineaire

$$dz_1 d\bar{z}_1 + \dots + dz_{d-1} d\bar{z}_{d-1} - dz_d d\bar{z}_d .$$

Une structure lorentz-hermitienne plate sur  $M$  est encore équivalente à la donnée d'une structure complexe sur  $M$  et d'une métrique pseudo-hermitienne de signature réelle  $(2d - 2, 2)$  de courbure nulle.

L'action du groupe  $U(d - 1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d$  sur  $\mathbb{C}^d$  est de discompacité 2 et le théorème de Carrière ne s'applique donc pas ici. Nous allons toutefois étendre partiellement ce théorème au cadre lorentz-hermitien.

**Théorème 2.2.2.** *Il n'existe pas d'ouvert strict de  $\mathbb{C}^d$  divisible par un sous-groupe de  $U(d - 1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d$ .*

*Autrement dit, les structures lorentz-hermitiennes plates kleiniennes sur les variétés compactes sont complètes.*

Le point clé de la preuve est que l'action de  $U(d - 1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d$  sur  $\mathbb{C}^d$  est en quelque sorte de "discompacité complexe 1", dans le sens où l'adhérence des images successives d'une boule contient, lorsqu'elle est non vide, un morceau d'hyperplan complexe (de codimension réelle 2). Cette propriété est également vérifiée par l'action de  $O(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3$  sur  $\mathbb{C}^3$ . Par conséquent, la même preuve que celle du théorème 2.2.2 fournit le théorème suivant :

**Théorème 2.2.3.** *Il n'existe pas d'ouvert strict de  $\mathbb{C}^3$  divisible par un sous-groupe de  $O(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3$ .*

*Autrement dit, les structures riemanniennes holomorphes plates kleiniennes sur les variétés compactes sont complètes.*

Pour ces géométries affines, il n'existe pas de caractérisation des structures complètes compactes. On peut construire des exemples en quotientant certains groupes résolubles par des réseaux cocompacts.

Le dernier théorème de ce chapitre concerne en revanche une géométrie pour laquelle les structures complètes sont décrites avec précision par les travaux successifs de Kobayashi, Kassel, Guéritaud et al. (cf. ch.1, section 1.6.2) :

**Théorème 2.2.4.** *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, muni de l'action de  $G = L \times L/Z(L)$  par translation à gauche et à droite. Alors il n'existe pas d'ouvert strict de  $L$  divisible par un sous-groupe de  $G$ .*

*Autrement dit, les  $(G, L)$ -structures kleiniennes sur les variétés compactes sont complètes.*

En combinant ces trois théorèmes avec la proposition 2.1.4, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 2.2.5.** *Pour chacun des couples  $(G, X)$  dans la liste suivante :*

- $(U(d - 1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$ ,  $d \in \mathbb{N}^*$ ,
- $(O(3, \mathbb{C}) \ltimes \mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ ,
- $(L \times L/Z(L), L)$ ,  $L$  semi-simple de rang réel 1,

*l'ensemble des  $(G, X)$ -structures complètes sur une variété compacte  $M$  est fermé dans  $\text{Def}_{(G, X)}(M)$ .*

**Remarque 2.2.6.** En général, on ne connaît pas de géométrie  $(G, X)$  pour laquelle l'ensemble des  $(G, X)$ -structures complètes sur une variété compacte  $M$  ne soit pas fermé dans  $\text{Def}_{G, X}(M)$ .

Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 1, section 1.6.2 que si  $L$  est un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1, d'après les travaux récents de Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard, l'ensemble des  $(G, L)$ -structures complètes sur une variété compacte  $M$  est un ouvert de  $\text{Def}_{(G, L)}(M)$  (corollaire 1.6.7). On obtient finalement le résultat suivant :

**Corollaire 2.2.7.** *Soit  $L$  un groupe de Lie simple de rang 1 et  $G$  le groupe  $L \times L/Z(L)$ . Soit  $M$  une variété compacte de même dimension que  $L$ . Alors le domaine des  $(G, L)$ -structures complètes sur  $M$  forme une union de composantes connexes de  $\text{Def}_{(G, L)}(M)$ .*

*Autrement dit, il est impossible de déformer continûment une  $(G, L)$ -structure complète sur  $M$  en une  $(G, L)$ -structure incomplète.*

Nous commençons par la preuve des théorèmes 2.2.2 et 2.2.3, qui utilise des objets simples (transformations affines, sous-espaces affines) et nous servira ensuite de modèle pour la preuve du théorème 2.2.4, analogue, mais qui utilise plus profondément les propriétés des groupes de Lie de rang 1 et en particulier la structure de l'espace des sous-groupes paraboliques.

### 2.3 Preuve des théorèmes 2.2.2 et 2.2.3

Considérons un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{C}^d$  et un sous-groupe  $\Gamma$  de  $U(d-1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d$  agissant proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathcal{U}$ . Soit

$$l : U(d-1, 1) \ltimes \mathbb{C}^d \rightarrow U(d-1, 1)$$

le morphisme qui à une transformation affine de  $\mathbb{C}^d$  associe sa partie linéaire et notons  $\Gamma_0$  l'image de  $\Gamma$  par  $l$ .

Nous voulons montrer que  $\mathcal{U} = \mathbb{C}^d$ . Supposons par l'absurde que  $\mathcal{U}$  est strictement inclus dans  $\mathbb{C}^d$ . L'ouvert  $\mathcal{U}$  possède alors un bord et le point de départ de notre preuve sera d'observer la dynamique de  $\Gamma$  près du bord. Fixons sur  $\mathbb{C}^d$  une métrique euclidienne préservée par  $U(d-1) \times U(1)$ . Pour tout  $y \in \mathbb{C}^d$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on notera  $B(y, \varepsilon)$  la boule fermée centrée en  $y$  de rayon  $\varepsilon$ .

**Proposition 2.3.1.** *Il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in \partial\mathcal{U}$ , il existe une suite  $y_n$  dans  $\mathcal{U}$  convergeant vers  $y$  et une suite  $H_n$  d'hyperplans affines complexes convergeant vers un hyperplan complexe  $H$ , tels que  $y_n \in H_n$ ,  $y \in H$  et*

$$B(y_n, \varepsilon) \cap H_n \subset \mathcal{U} ,$$

$$B(y, \varepsilon) \cap H \subset \partial\mathcal{U} .$$

*Démonstration.* Soit  $F$  un domaine compact de  $\mathcal{U}$  tel que  $\Gamma \cdot F$  recouvre  $\mathcal{U}$ . Alors pour tout point  $y$  dans le bord de  $\mathcal{U}$ , il existe une suite  $(\gamma_n)$  dans  $\Gamma$  et une suite  $(x_n)$  dans  $F$  telles que la suite  $(y_n) = (\gamma_n \cdot x_n)$  converge vers  $y$ . En particulier, la suite  $(\gamma_n)$  tend vers l'infini dans  $\Gamma$ . La propriété de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{U}$  implique alors que pour n'importe quelle suite  $(x'_n) \in F^{\mathbb{N}}$ , toute valeur d'adhérence de  $(\gamma_n \cdot x'_n)$  est dans  $\partial\mathcal{U}$ .

Bien sûr, en général, l'adhérence de  $(\gamma_n \cdot F)$  pourrait se limiter à un point. Mais ce n'est pas le cas ici, où l'action de  $U(d-1, 1)$  ne contracte qu'une direction complexe. Pour préciser cela, considérons la décomposition de Cartan de  $l(\gamma_n)$ . On peut écrire  $l(\gamma_n)$  sous la forme  $k_n a_n k'_n$ , où  $k_n$  et  $k'_n$  sont dans  $U(d-1) \times U(1)$  et où  $a_n$  s'écrit dans la base  $(e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1 - e_n)$  sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_n$  réel supérieur à 1.

Soit  $\varepsilon > 0$  tel que l' $\varepsilon$ -voisinage de  $F$  est relativement compact dans  $U$ . Notons  $B_\varepsilon$  la boule fermée de centre 0 de rayon  $\varepsilon$ . On sait que  $x_n + B_\varepsilon \subset \mathcal{U}$  et donc que  $\gamma_n \cdot (x_n + B_\varepsilon) \subset \mathcal{U}$ . Or

$$\gamma_n \cdot (x_n + B_\varepsilon) = y_n + l(\gamma_n)B_\varepsilon .$$

Soit  $H_0$  l'hyperplan  $\text{Vect}^{\mathbb{C}}(e_1 + e_n, e_2, \dots, e_{n-1})$ . La matrice diagonale  $a_n$  préserve l'hyperplan complexe  $H_0$  et le dilate. D'autre part,  $k_n$  et  $k'_n$  préservent la boule  $B_\varepsilon$ . On en déduit que  $l(\gamma_n)B_\varepsilon$  contient  $(k_n H_0) \cap B_\varepsilon$ . Posons  $H_n = y_n + k_n H_0$ . Puisque  $y_n$  converge vers  $y$ , on peut, quitte à extraire, supposer que  $H_n$  converge vers un hyperplan affine  $H$  contenant  $y$ . Comme  $\mathcal{U}$  contient  $H_n \cap B(y_n, \varepsilon)$ , l'adhérence de  $\mathcal{U}$  contient  $H \cap B(y, \varepsilon)$ . Enfin,  $H \cap B(y, \varepsilon)$  est inclus dans  $\partial\mathcal{U}$ , par propriété de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{U}$ .  $\square$

**Proposition 2.3.2.** *Soit  $y \in \partial\mathcal{U}$ . Alors il existe un unique hyperplan affine complexe  $H$  tel que  $H \cap \partial\mathcal{U}$  contient un voisinage de  $y$  dans  $H$ .*

*Preuve.* D'après la proposition 2.3.1, un tel  $H$  existe. Pour prouver l'unicité, fixons un hyperplan affine complexe  $H$  contenant  $y$  tel que  $H \cap B(y, \varepsilon') \subset \partial\mathcal{U}$  pour  $\varepsilon' > 0$  et montrons que  $H$  est la limite de n'importe quelle suite  $(H_n)$  fournie par la proposition 2.3.1.

Considérons donc une suite  $y_n \in \mathcal{U}$  convergeant vers  $y$  et une suite  $(H_n)$  d'hyperplans affines complexes contenant  $y_n$  tels que  $H_n \cap B(y_n, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$  et tels que  $H_n$  converge vers  $H'$ , qui contient donc  $y$ . (Les suites  $y_n$  et  $H_n$  nous sont données par la proposition 2.3.1.) Supposons que  $H'$  est différent de  $H$ . Alors  $H'$  et  $H$  sont transverses en  $y$ , puisque ce sont deux hyperplans complexes. Pour  $n$  assez grand,  $H_n \cap B(y_n, \varepsilon)$  intersecte donc  $H \cap B(y, \varepsilon')$ , ce qui est absurde puisque  $H \cap B(y, \varepsilon')$  est inclus dans  $\partial\mathcal{U}$  alors que  $H_n \cap B(y_n, \varepsilon)$  est inclus dans  $\mathcal{U}$ . On a donc  $H = H'$ . Par conséquent,  $H$  est unique.  $\square$

**Proposition 2.3.3.** *L'ouvert  $\mathcal{U}$  est feuilleté par des copies parallèles d'un même hyperplan complexe et  $\Gamma_0$  préserve l'hyperplan vectoriel sous-jacent.*

*Preuve.* Soit  $y \in \partial\mathcal{U}$  et  $H$  l'unique hyperplan complexe contenant  $y$  tel que  $H \cap B(y, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ . Commençons par montrer que  $H$  tout entier est inclus dans  $\partial\mathcal{U}$ . Soit  $A$  l'ensemble des  $z \in H$  tels que  $H \cap B(z, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ . L'ensemble  $A$  est fermé, puisque  $\partial\mathcal{U}$  est fermé et contient  $y$ . Soit  $z \in A$  et  $z' \in H \cap B(z, \varepsilon/2)$ . Alors  $H \cap B(z', \varepsilon/2) \subset \partial\mathcal{U}$ . D'après la proposition 2.3.2, l'hyperplan  $H$  est l'unique hyperplan complexe tel que  $H \cap \partial\mathcal{U}$  contient un voisinage de  $z'$  dans  $H$  et, par la proposition 2.3.1, on a  $H \cap B(z', \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ . Par conséquent,  $B(z, \varepsilon/2) \subset A$ . L'ensemble  $A$  est ouvert et fermé dans  $H$ , donc  $A = H$  et  $H \subset \partial\mathcal{U}$ .

Par chaque point de  $\partial\mathcal{U}$  passe donc un unique hyperplan affine complexe contenu dans  $\partial\mathcal{U}$ . Montrons que tous ces hyperplans sont parallèles. Soient  $H$  et  $H'$  deux hyperplans affines contenus dans  $\partial\mathcal{U}$ . S'ils ne sont pas parallèles, ils s'intersectent transversalement en un point  $y \in \partial\mathcal{U}$ , ce qui contredit l'unicité de l'hyperplan contenu dans  $\partial\mathcal{U}$  et passant par  $y$ . Donc  $H$  et  $H'$  sont parallèles.

Tous les hyperplans contenus dans le bord de  $\mathcal{U}$  sont donc parallèles à un même hyperplan vectoriel  $H_0$ . Comme  $\Gamma$  préserve  $\mathcal{U}$ , il est clair que la partie linéaire  $\Gamma_0$  de  $\Gamma$  préserve  $H_0$ . Soit maintenant  $x \in \mathcal{U}$ . Supposons que  $x + H_0$  n'est pas inclus dans  $\mathcal{U}$ . Alors il existe  $y \in (x + H_0) \cap \partial\mathcal{U}$ . Mais alors  $(y + H_0) \subset \partial\mathcal{U}$  et en particulier  $x \in \partial\mathcal{U}$ , ce qui contredit le fait que  $x$  est un point de  $\mathcal{U}$ . Pour tout  $x \in U$ , l'hyperplan affine  $x + H_0$  est donc inclus dans  $\mathcal{U}$ , qui est feuilleté par des copies parallèles de  $H_0$ .  $\square$

**Remarque 2.3.4.** Si on considérait un ouvert  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^d$  divisible par un sous-groupe  $\Gamma$  d'isométries lorentziennes, le même raisonnement qui nous a conduit à la proposition 2.3.3 prouverait que le bord de  $\mathcal{U}$  est feuilleté par des hyperplans réels parallèles. On pourrait

alors en déduire rapidement le théorème de Carrière pour les structures lorentziennes plates kleinienne. Une partie de la difficulté du théorème de Carrière est d'éviter l'hypothèse supplémentaire que la structure est kleinienne en se restreignant à l'étoile géodésique d'un point, sur laquelle on sait que l'application développante est injective.

L'ouvert  $\mathcal{U}$  fibre donc au dessus d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{C}^d/H_0 \simeq \mathbb{C}$  et l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C}^d$  induit une action sur  $\mathbb{C}$  par transformations affines complexes, qui préserve  $\Omega$ . Il nous reste à prouver que  $\Omega = \mathbb{C}$ . Notons  $\bar{\rho}$  la représentation de  $\Gamma$  dans  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  induite par passage au quotient par  $H_0$ . Remarquons d'abord le fait suivant :

**Lemme 2.3.5.** *Si l'image de  $\Gamma$  par  $\bar{\rho}$  est discrète dans  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ , alors elle est virtuellement abélienne.*

*Démonstration.* Cela est vrai de tous les sous-groupes de  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  mais, par commodité, nous le prouvons uniquement pour des sous-groupes de type fini. Notons que  $\bar{\rho}(\Gamma)$  est bien de type fini, puisque c'est l'image du groupe fondamental d'une variété compacte.

Soit  $N$  un sous-groupe de type fini de  $\text{Aff}(\mathbb{C})$ . Supposons que  $N$  n'est pas virtuellement abélien. Alors  $N$  n'est pas virtuellement inclus dans le sous-groupe des translations. La partie linéaire  $N_0$  de  $N$  est donc infinie. Si  $N_0$  est inclus dans le sous-groupe des rotations, comme  $N_0$  est de type fini, il est monogène. Il existe donc une rotation affine dans  $N$  d'angle irrationnel et  $N$  n'est donc pas discret. Si  $N_0$  n'est pas inclus dans le sous-groupe des rotations, il existe un élément  $g$  de  $N$  de la forme  $z \mapsto az + b$ , avec  $|a| < 1$ . Quitte à conjuguer le groupe  $N$ , on peut supposer que le point fixe de  $g$  est 0 (autrement dit, que  $b = 0$ ). Comme  $N$  n'est pas abélien,  $N$  contient un élément  $h$  qui n'a pas 0 comme point fixe (i.e.  $h : z \mapsto a'z + b'$ ,  $b' \neq 0$ ). Alors  $g^k h g^{-k}$  envoie  $z$  sur  $a^k z + a^k b$ . La suite  $g^k h g^{-k}$  converge sans être stationnaire et  $\Gamma$  n'est donc pas discret.  $\square$

Montrons que  $\Omega = \mathbb{C}$ . Supposons d'abord que  $\bar{\rho}(\Gamma)$  est discret. Alors  $\bar{\rho}(\Gamma)$  est virtuellement abélien. S'il est virtuellement inclus dans le sous-groupe des translations,  $\Omega/\bar{\rho}(\Gamma)$  est, à revêtement fini près, un ouvert d'un tore. Comme  $\Omega/\bar{\rho}(\Gamma)$  doit être compact,  $\Omega = \mathbb{C}$ . Sinon,  $\bar{\rho}(\Gamma)$  est virtuellement inclus dans le stabilisateur d'un point et stabilise donc une orbite finie. Mais alors  $\Gamma$  stabilise une famille finie d'hyperplans affines complexes de  $\mathbb{C}^n$  et fixe donc virtuellement un hyperplan affine complexe. Cela est impossible d'après le théorème suivant :

**Théorème 2.3.6** (Goldman, Hirsch, [GH84]). *Soit  $M$  une variété compacte munie d'une structure affine dont l'holonomie préserve un sous-espace affine strict. Alors  $M$  ne possède pas de forme volume parallèle.*

**Remarque 2.3.7.** C'est ce même théorème qui permet à Carrière d'aboutir à une contradiction.

Supposons maintenant que  $\bar{\rho}(\Gamma)$  n'est pas discret. Alors son adhérence dans  $\text{Aff}(\mathbb{C})$  contient un sous-groupe à un paramètre. Supposons par l'absurde que  $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ . Ce sous-groupe à un paramètre stabilise alors le bord de  $\Omega$ , qui se compose donc d'une réunion d'orbites de ce sous-groupe. Les sous-groupes à un paramètre du groupe affine sont de la forme  $z \mapsto e^{ta}z + b$  ou  $z \mapsto z + tb$ . Le bord de  $\Omega$  est donc soit un point, soit une réunion de cercles concentriques, de droites parallèles, de demi-droites ayant même origine, ou de spirales logarithmiques s'enroulant autour d'un même point. Sachant que  $\bar{\rho}(\Gamma)$  doit agir cocompactement sur l'une des composantes connexes du complémentaire de  $\partial\Omega$ , on se convainc facilement que  $\partial\Omega$  ne peut être qu'un point ou une droite (dans tous les autres cas, le stabilisateur du bord de  $\Omega$  est exactement le sous-groupe à un paramètre, qui n'agit

pas cocompactement). Le groupe  $\Gamma$  stabilise alors soit un hyperplan complexe, soit un hyperplan réel de  $\mathbb{C}^d$ , ce qui, encore une fois, contredit le théorème de Goldman et Hirsch. On conclut donc que  $\Omega = \mathbb{C}$  et que  $\mathcal{U} = \mathbb{C}^d$ .

**Remarque 2.3.8.** Comme pour  $U(d-1, 1)$ , la décomposition de Cartan de  $O(3, \mathbb{C})$  permet de vérifier que l'action affine de  $O(3, \mathbb{C}) \times \mathbb{C}^3$  sur  $\mathbb{C}^3$  est de “discompacité complexe 1”, dans le sens où les ellipsoïdes dégénèrent en des hyperplans complexes. En effet, toute matrice de  $O(3, \mathbb{C})$  se décompose sous la forme  $kak'$ , avec  $k, k' \in SO(3, \mathbb{R})$  et  $a$  de la forme

$$P \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} P^{-1},$$

où  $\lambda$  est un réel supérieur ou égal à 1 et  $P$  désigne la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc reprendre cette preuve littéralement pour obtenir le théorème 2.2.3.

## 2.4 Preuve du théorème 2.2.4

La stratégie de la preuve du théorème 2.2.4 est similaire à celle du théorème 2.2.2. On raisonne par l'absurde et on considère  $\mathcal{U}$  un ouvert strict de  $L$ , muni d'une action libre, proprement discontinue et cocompacte d'un sous-groupe  $\Gamma$  de  $G = L \times L/Z(L)$ . Ce domaine  $\mathcal{U}$  possède un bord non vide  $\partial\mathcal{U}$ , où l'action de  $\Gamma$  n'est plus propre.

Comme dans la preuve du théorème 2.2.2, on commence par observer que le bord de  $\mathcal{U}$  contient des compacts dégénérés sous l'action de  $\Gamma$ . Le recours à la décomposition de Cartan de  $L$  permet de prouver que ces compacts dégénèrent sur des morceaux de *sous-espaces paraboliques* (voir définition 2.4.1), qui joueront le rôle que jouaient précédemment les hyperplans complexes.

Nous prouverons ensuite que ces sous-espaces paraboliques contenus dans le bord sont en fait des translations à droite (ou à gauche) d'un même sous-groupe parabolique minimal  $P$  et nous en déduisons que l'ouvert  $\mathcal{U}$  fibre au dessus d'un domaine de  $L/P$ . Le point clé sera de remarquer qu'à l'instar de deux hyperplans complexes dans  $\mathbb{C}^n$ , deux sous-espaces paraboliques qui ne sont pas parallèles s'intersectent toujours transversalement. Nous aurons besoin pour cela de rappeler quelques résultats classiques sur la structure des sous-groupes paraboliques minimaux d'un groupe de Lie de rang réel 1.

Pour finir, nous montrerons que le complémentaire de ce domaine de  $L/P$  doit contenir au moins deux points, puis que l'action de  $\Gamma$  ne peut pas être discrète, ce qui contredira le fait qu'elle soit proprement discontinue sur un ouvert.

### Décomposition de Cartan

Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang 1, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{l}$ . Rappelons que  $\kappa_{\mathfrak{l}}$  désigne la forme de Killing de  $\mathfrak{l}$ . Soit  $\theta$  une involution de Cartan de  $\mathfrak{l}$ , c'est-à-dire un automorphisme d'algèbre de Lie tel que  $\theta^2 = \text{Id}$  et tel que la forme quadratique  $B_{\theta}(\cdot, \cdot) = \kappa_{\mathfrak{l}}(\cdot, -\theta \cdot)$  est définie positive.

Soit  $K$  le sous-groupe de  $L$  formé des éléments dont l'action adjointe commute avec  $\theta$ . Alors la forme quadratique  $B_\theta$  est préservée par l'action adjointe de  $K$  et s'étend donc en une métrique riemannienne invariante à droite sur  $L$ , qui est également préservée par l'action à gauche de  $K$ . Dans toute la suite, lorsque nous utiliserons des notions métriques sur  $L$  ou  $\mathfrak{l}$ , nous nous référerons implicitement à la métrique associée à une involution de Cartan fixée, préservée par un sous-groupe  $K$  fixé. Bien qu'il ne soit pas toujours nécessaire d'avoir recours à une métrique aussi spécifique, cela simplifiera grandement les énoncés.

Notons  $\mathfrak{k}$  l'algèbre de Lie de  $K$ . Comme  $L$  est de rang réel 1, il existe un élément  $a \in \mathfrak{k}^\perp$  dont l'action adjointe sur  $\mathfrak{l}$  est diagonalisable et tel que tout élément  $g$  de  $L$  se décompose sous la forme

$$g = k_1 \exp(ta)k_2 ,$$

avec  $t \geq 0$  et  $k_1, k_2 \in K$ . De plus, un tel  $t$  est unique. Il s'agit, dans le cas particulier du rang 1, de la décomposition de Cartan de  $g$ . (Pour plus de précisions sur la structure des groupes de Lie semi-simples, on consultera par exemple [Kna02].)

En outre, la diagonalisation de  $\text{ad}_a$  donne une décomposition de  $\mathfrak{l}$  sous la forme

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_- ,$$

où  $\mathfrak{n}_+$  (resp.  $\mathfrak{n}_-$ ) est la somme des sous-espaces propres de  $\text{ad}_a$  correspondant à des valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives) et où  $\mathfrak{m}$  est le centralisateur de  $a$  dans  $\mathfrak{k}$ .

Notons  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_+$ . C'est une sous-algèbre de Lie de  $\mathfrak{l}$ , et les sous-algèbres de Lie conjuguées à  $\mathfrak{p}_0$  par l'action adjointe sont les *sous-algèbres paraboliques minimales* de  $\mathfrak{l}$ . (En rang 1, toutes les sous-algèbres paraboliques strictes sont minimales et conjuguées.) Le normalisateur dans  $L$  d'une sous-algèbre de Lie parabolique minimale  $\mathfrak{p}$  est un sous-groupe de Lie fermé  $P \subset L$ , d'algèbre de Lie tangente  $\mathfrak{p}$ , appelé sous-groupe parabolique minimal.

#### Définition 2.4.1.

On appellera *sous-espace parabolique* de  $L$  une sous-variété de  $L$  de la forme  $Pb$ , où  $P$  est un sous-groupe parabolique minimal de  $L$  et  $b$  un point de  $L$ .

On appellera *disque parabolique centré en  $y$  de rayon  $\varepsilon$*  une sous-variété de la forme

$$D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) = \exp(\mathfrak{p} \cap B_\varepsilon)y ,$$

où  $\mathfrak{p}$  est une sous-algèbre de Lie parabolique minimale,  $y$  est un point de  $L$  et où  $B_\varepsilon$  désigne la boule fermée de centre 0 de rayon  $\varepsilon$  dans  $\mathfrak{l}$  (pour le produit scalaire  $B_\theta$ ).

**Lemme 2.4.2.** *Il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $y \in \partial\mathcal{U}$ , il existe une suite  $y_n$  dans  $\mathcal{U}$  convergeant vers  $y$  et une suite  $\mathfrak{p}_n$  de sous-algèbres paraboliques minimales convergeant vers une sous-algèbre parabolique minimale  $\mathfrak{p}$ , tels que*

$$D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$$

et

$$D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U} .$$

*Démonstration.* Fixons  $F$  un compact de  $\mathcal{U}$  tel que  $\Gamma \cdot F$  recouvre  $\mathcal{U}$  et soit  $\varepsilon > 0$  tel que  $\exp(B_\varepsilon)F$  est encore un compact de  $\mathcal{U}$ . Soit  $y$  un point du bord de  $\mathcal{U}$ . Considérons une suite  $(y_n)$  dans  $\mathcal{U}$  convergeant vers  $y$  et deux suites  $(x_n)$  dans  $F$  et  $(\gamma_n)$  dans  $\Gamma$  telles que

$$\gamma_n \cdot x_n = y_n .$$

Par hypothèse sur  $\varepsilon$ , on a  $\exp(B_\varepsilon)x_n \subset U$  et donc  $\gamma_n \cdot \exp(B_\varepsilon)x_n \subset \mathcal{U}$ , puisque  $\mathcal{U}$  est stable par l'action de  $\Gamma$ . Montrons que  $\gamma_n \cdot \exp(B_\varepsilon)x_n$  contient un disque parabolique de rayon  $\varepsilon$  centré en  $y_n$ .

Soit  $(\gamma_{1,n}, \gamma_{2,n})$  un relèvement de  $\gamma_n$  à  $L \times L$ . On vérifie aisément que

$$\gamma_n \cdot (\exp(B_\varepsilon)x_n) = \exp(\text{Ad}_{\gamma_{1,n}}B_\varepsilon) y_n .$$

Écrivons maintenant la décomposition de Cartan de  $\gamma_{1,n}$  :

$$\gamma_{1,n} = k_n \exp(t_n a) k'_n ,$$

avec  $t_n \geq 0$  et  $k_n, k'_n \in K$ .

Tout d'abord, l'action de  $\text{Ad}_{k'_n}$  stabilise  $B_\varepsilon$ . Par conséquent,

$$\text{Ad}_{\gamma_{1,n}}B_\varepsilon = \text{Ad}_{k_n} \text{Ad}_{\exp(t_n a)}B_\varepsilon .$$

Notons comme précédemment  $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_+$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{p}_0$  est la somme des espaces propres de  $\text{ad}_a$  associés aux valeurs propres positives. Par conséquent,  $\text{Ad}_{\exp(t_n a)}$  stabilise et dilate  $\mathfrak{p}_0$ . On a donc

$$\text{Ad}_{\exp(t_n a)}B_\varepsilon \supset \text{Ad}_{\exp(t_n a)}(B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0) \supset B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0 .$$

Enfin,  $\text{Ad}_{k_n}(B_\varepsilon \cap \mathfrak{p}_0) = B_\varepsilon \cap \text{Ad}_{k_n}\mathfrak{p}_0$ , car  $\text{Ad}_{k_n}$  préserve la norme que nous avons mise sur  $\mathfrak{l}$ . Par conséquent, si l'on note  $\mathfrak{p}_n = \text{Ad}_{k_n}\mathfrak{p}_0$ , on a bien

$$D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset \gamma_n \cdot (\exp(B_\varepsilon)x_n) \subset \mathcal{U} .$$

Comme tous les  $\mathfrak{p}_n$  sont conjugués par des éléments de  $K$ , on peut, quitte à extraire, supposer que  $\mathfrak{p}_n$  converge dans la grassmannienne de  $\mathfrak{l}$  vers une sous-algèbre parabolique minimale  $\mathfrak{p}$ . Enfin, tels que nous les avons construits, chacun des disques paraboliques  $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon)$  est dans l'image par  $\gamma_n$  du domaine compact  $\exp(B_\varepsilon)F$ . Comme l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{U}$  est propre, on a donc  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ .  $\square$

Nous avons vu que par tout point du bord passe un disque parabolique. Nous allons ensuite prouver que ce disque est unique et en déduire que l'ouvert  $\mathcal{U}$  est feuilleté par des sous-espaces paraboliques parallèles. Rappelons d'abord quelques propriétés des sous-groupes et sous-algèbres paraboliques.

### Sous-algèbres paraboliques et sous-groupes paraboliques

Soit  $\mathfrak{p}$  une sous-algèbre parabolique minimale de  $\mathfrak{l}$ . Notons  $P$  le normalisateur de  $\mathfrak{p}$  dans  $L$ . Rappelons que  $\mathfrak{p}$  est l'algèbre de Lie tangente à  $P$ . Commençons par établir le lemme suivant :

**Proposition 2.4.3.** *Si le facteur non compact de  $\mathfrak{l}$  n'est pas isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ , alors  $P$  est connexe.*

*Démonstration.* Soit  $P_0$  la composante connexe de l'élément neutre dans  $P$ . Alors  $P_0$  est un sous groupe distingué de  $P$  et la projection  $\pi : L/P_0 \rightarrow L/P$  est un revêtement galoisien de groupe de Galois  $P/P_0$ . Or il est connu que, lorsque  $L$  est de rang réel 1, la variété  $L/P$  est simplement connexe, sauf si le facteur non compact de  $\mathfrak{l}$  est isomorphe à  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . En effet,  $L/P$  s'identifie au bord de l'espace symétrique  $L/K$ . Il est par conséquent homéomorphe à

une sphère, de dimension  $\geq 2$  sauf lorsque le facteur non compact de  $L$  est un revêtement de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Par conséquent, le groupe  $P/P_0$  est trivial et  $P$  est donc connexe.  $\square$

Comme la métrique de Killing de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  est lorentzienne de courbure constante, le cas où  $L$  est un revêtement de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  est résolu par le théorème de Klingler. Nous excluons désormais ce cas-là et nous supposons dorénavant que les sous-groupes paraboliques minimaux sont connexes.

Rappelons que deux sous-variétés  $N_1$  et  $N_2$  d'une variété  $M$  s'intersectent *transversalement* en  $x$  si  $x \in N_1 \cap N_2$  et si on a

$$T_x N_1 + T_x N_2 = T_x M .$$

Le lemme suivant est une conséquence facile du fait qu'en rang réel 1, deux sous-groupes paraboliques minimaux distincts sont toujours opposés (voir [BT65]).

**Lemme 2.4.4.** *Soient  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  deux sous-algèbres paraboliques minimales et  $P$  et  $P'$  les sous-groupes paraboliques minimaux qu'elles engendrent.*

- Soient  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$  et  $y \in L$ . Si  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ , alors les disques paraboliques  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon)$  et  $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon')$  sont transverses en  $y$ .
- Soient  $x$  et  $x' \in L$ . Alors les sous-espaces paraboliques  $xP$  et  $x'P'$  s'intersectent transversalement, sauf si l'un est l'image de l'autre par une multiplication à gauche ou à droite.

On dira que deux sous-espaces paraboliques sont parallèles à gauche (resp. à droite) lorsque l'un est l'image de l'autre par une multiplication à gauche (resp. à droite). Notons que deux sous-espaces paraboliques parallèles à la fois à gauche et à droite sont identiques.

*Preuve du lemme 2.4.4.* Comme, en rang réel 1, le groupe de Weil n'a que deux éléments, il découle de la *décomposition de Bruhat* (voir par exemple [Kna02]) que l'action adjointe de  $L$  est 2-transitive sur les sous-algèbres paraboliques minimales de  $\mathfrak{l}$ . En particulier, si  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{p}'$  sont distinctes, on a  $\mathfrak{p} + \mathfrak{p}' = \mathfrak{l}$ , d'où l'on déduit le premier point.

Soient maintenant  $x, x' \in L$ . Si  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$ , alors les sous-espaces paraboliques  $xP$  et  $x'P'$  sont parallèles à gauche. Sinon,  $P$  et  $P'$  sont transverses en l'élément neutre et la décomposition de Bruhat peut se reformuler de la façon suivante :

$$L = P'P \sqcup wP ,$$

où  $w$  est tel que  $\mathfrak{p}' = \mathrm{Ad}_w \mathfrak{p}$ . Considérons l'élément  $x'^{-1}x$ . Si  $x'^{-1}x \in wP$ , on obtient  $xPx^{-1} = x'P'x'^{-1}$ , et  $xP$  et  $x'P'$  sont alors parallèles à droite. Sinon, il existe  $p \in P$  et  $p' \in P'$  tels que  $x'^{-1}x = p'p^{-1}$ . On a donc  $xp = x'p'$  et  $xP$  et  $x'P'$  s'intersectent. De plus, cette intersection est transverse, puisque  $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}'$ . Cela prouve le deuxième point.  $\square$

De ces remarques et d'après le lemme 2.4.2, on peut déduire le résultat suivant :

**Proposition 2.4.5.** *Il existe un unique sous-groupe parabolique minimal  $P$  de  $L$  tel que*

- soit  $Py \subset \partial \mathcal{U}$  pour tout  $y \in \partial \mathcal{U}$ ,
- soit  $yP \subset \partial \mathcal{U}$  pour tout  $y \in \partial \mathcal{U}$ .

*Preuve.* La preuve est essentiellement identique à celle de la proposition 2.3.2. Montrons d'abord que pour tout  $y \in \partial \mathcal{U}$ , la sous-algèbre parabolique minimale  $\mathfrak{p}$  pour laquelle il existe  $\varepsilon' > 0$  telle que  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial \mathcal{U}$  est unique.

Fixons  $y \in \partial \mathcal{U}$ . Supposons qu'il existe  $\varepsilon' > 0$  et  $\mathfrak{p}$  sous-algèbre de Lie parabolique minimale telle que  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial \mathcal{U}$ . Considérons d'autre part une suite  $(y_n)$  convergeant

vers  $y$  et une suite  $(\mathfrak{p}_n)$  convergeant vers  $\mathfrak{p}'$  telle que  $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$  et  $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$  (les suites  $(y_n)$ ,  $(\mathfrak{p}_n)$  et  $\varepsilon$  sont donnés par le lemme 2.4.2). Supposons que  $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ . Alors, d'après le lemme 2.4.4,  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon')$  et  $D_{\mathfrak{p}'}(y, \varepsilon)$  sont transverses. Par conséquent, pour  $n$  assez grand,  $D_{\mathfrak{p}_n}(y_n, \varepsilon)$  intersecte  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon')$ , ce qui est absurde puisque  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon') \subset \partial\mathcal{U}$ . On a donc  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$  et on en déduit l'unicité de  $\mathfrak{p}$ .

Soit  $y \in \partial\mathcal{U}$  et  $\mathfrak{p}$  l'unique sous-algèbre parabolique minimale telle que  $D_{\mathfrak{p}}(y, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ . Montrons que  $\partial\mathcal{U}$  contient en réalité tout  $Py$ . Pour cela, considérons l'ensemble  $A$  des  $z \in Py$  tels que  $D_{\mathfrak{p}}(z, \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$  et montrons que cet ensemble est ouvert et fermé dans  $Py$ . Comme, d'après le lemme 2.4.3,  $Py$  est connexe et puisque  $A$  contient  $y$ , cela impliquera le résultat.

Le fait que  $A$  est fermé vient simplement du fait que  $\partial\mathcal{U}$  est fermé. Montrons que  $A$  est ouvert. Soit  $z \in A$  et  $z' \in D_{\mathfrak{p}}(z, \varepsilon/2) \subset \partial\mathcal{U}$ . Alors il existe  $\varepsilon' > 0$  tel que  $D_{\mathfrak{p}}(z', \varepsilon') \subset \partial\mathcal{U}$ . D'autre part, le lemme 2.4.2 assure l'existence de  $\mathfrak{p}'$  telle que  $D_{\mathfrak{p}'}(z', \varepsilon) \subset \partial\mathcal{U}$ . Par unicité de  $\mathfrak{p}$ , on a  $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$  et  $z' \in A$ . L'ensemble  $A$  est donc ouvert et fermé, d'où  $A = \bar{P}y$  et  $\bar{P}y \subset \partial\mathcal{U}$ .

Résumons. Pour tout point  $y \in \partial\mathcal{U}$ , il existe un unique sous-espace parabolique contenant  $y$  et inclus dans  $\partial\mathcal{U}$ . Considérons deux sous-espaces paraboliques inclus dans le bord de  $\mathcal{U}$ . S'ils ne sont pas parallèles, d'après le lemme 2.4.4, ils s'intersectent transversalement en un point  $y \in \partial\mathcal{U}$ , ce qui contredit l'unicité du sous-espace parabolique passant par  $y$ . Donc tous les sous-espaces paraboliques contenus dans le bord de  $\mathcal{U}$  sont deux à deux parallèles.

Soient maintenant trois sous-espaces paraboliques distincts inclus dans  $\partial\mathcal{U}$ . Si le premier et le deuxième sont parallèles à gauche et le deuxième et le troisième sont parallèles à droite, alors le premier et le troisième ne sont pas parallèles, ce qui est absurde. On en déduit donc que les sous-espaces paraboliques contenus dans le bord de  $\mathcal{U}$  sont soit tous parallèles à gauche, soit tous parallèles à droite.  $\square$

**Proposition 2.4.6.** *Quitte à intervertir l'action à gauche et l'action à droite, supposons que tous les sous-espaces paraboliques contenus dans le bord de  $\mathcal{U}$  sont les translations à gauche d'un même sous-groupe parabolique  $P$ . Alors :*

- $\mathcal{U}$  est stable par multiplication à droite par  $P$ ,
- $\Gamma \subset (L \times P)/Z(L)$ .

*Preuve.* Soit  $x \in \mathcal{U}$ . Supposons que  $xP \not\subset \mathcal{U}$ . Alors il existe  $p \in P$  tel que  $xp \in \partial\mathcal{U}$ . Mais alors  $xpP \subset \partial\mathcal{U}$  et en particulier  $x \in \partial\mathcal{U}$ , ce qui est absurde. Donc  $xP \subset \mathcal{U}$ . Cela prouve le premier point.

Soient maintenant  $y \in \partial\mathcal{U}$  et  $\gamma \in \Gamma$ . Notons  $(\gamma_1, \gamma_2)$  un relèvement de  $\gamma$  à  $L \times L$ . On a  $yP \subset \partial\mathcal{U}$ . Comme le bord de  $\mathcal{U}$  est stable sous l'action de  $\gamma$ ,

$$\gamma \cdot (yP) = (\gamma \cdot y)\gamma_2 P \gamma_2^{-1} \subset \partial\mathcal{U}.$$

Or l'unique sous-espace parabolique inclus dans  $\partial\mathcal{U}$  et contenant  $\gamma \cdot y$  est  $(\gamma \cdot y)P$ . Donc  $\gamma_2 P \gamma_2^{-1} = P$  et  $\gamma_2 \in P$  ( $P$  est en effet son propre normalisateur dans  $L$ ). Cela prouve le second point.  $\square$

### Fin de la preuve

Nous venons de prouver que le domaine  $\mathcal{U}$  fibre au dessus d'un ouvert  $\Omega$  de  $L/P$ . De plus, l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{U}$  préserve cette fibration et  $\Gamma$  est donc inclus dans  $L \times P/Z(L)$ . Il nous reste à prouver que  $\Omega = L/P$ .

Prouvons pour commencer que  $\Omega$  n'est pas  $L/P$  privé d'un point. Supposons par l'absurde qu'il existe  $x \in L$  tel que  $\mathcal{U} = L - xP$ . Alors l'action de  $\Gamma$  préserve  $xP$  et on a donc  $\Gamma \subset (xPx^{-1} \times P) / Z(L)$ . D'après la décomposition de Bruhat, l'action de  $xPx^{-1} \times P$  sur  $\mathcal{U} = L - xP$  est transitive.

La contradiction proviendra donc du résultat suivant :

**Théorème 2.4.7.** *Soit  $L$  un groupe de Lie semi-simple de rang réel 1. Soit  $P$  un sous-groupe parabolique minimal de  $L$  et  $x$  un point de  $L$ . Alors aucune variété compacte ne peut posséder une  $(xPx^{-1} \times P, L - xP)$ -structure. (Le facteur  $xPx^{-1}$  agissant sur  $L - xP$  par multiplication à gauche et le facteur  $P$  par multiplication à droite.)*

*Preuve.* Quitte à conjuguer par un élément de  $L \times \{\mathbf{1}_L\}$ , on peut supposer que  $x \notin P$ . Par conséquent,  $\mathbf{1}_L \in L - xP$ . Posons  $P' = xPx^{-1}$ . Comme l'action adjointe de  $L$  est 2-transitive sur les sous-groupes paraboliques minimaux, il existe une décomposition de  $\mathfrak{l}$  sous la forme

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{n}_-$$

où  $a$  est un élément tel que  $\text{ad}_a$  est diagonalisable,  $\mathfrak{n}_+$  la somme des espaces propres de  $a$  pour les valeurs propres strictement positives,  $\mathfrak{n}_-$  la somme des espaces propres de  $a$  pour les valeurs propres strictement négatives,  $\mathfrak{m}$  le centralisateur de  $a$  dans  $\mathfrak{k}$ , et telle que  $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_+$  (resp.  $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathfrak{n}_-$ ) est l'algèbre de Lie tangente à  $P'$  (resp.  $P$ ).

Le stabilisateur de  $\mathbf{1}_L$  dans  $P' \times P$  est le plongement diagonal de  $P \cap P'$ . Son algèbre de Lie est  $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a$  et le vecteur  $a$  est donc invariant par l'action de ce stabilisateur. Par conséquent,  $a$  s'étend en un champ de vecteur  $X_a$  défini sur  $L - xP$  et préservé par  $P' \times P$ . Ce champ de vecteur descendra sur toute variété munie d'une  $(P' \times P, L - xP)$ -structure.

D'autre part,  $L - xP$  possède une forme volume  $\omega$  invariante sous l'action de  $P' \times P$  (restriction d'une forme volume bi-invariante sur  $L$ ). Nous allons montrer que le champ de vecteur  $X_a$  dilate le volume  $\omega$ .

Par homogénéité, il existe une constante  $C$  telle que  $X_a \cdot \omega = C\omega$  et il suffit de calculer  $C$  au point  $\mathbf{1}_L$ . Considérons  $e_1, \dots, e_n$  une base de diagonalisation de  $\mathfrak{l}$  sous l'action de  $\text{ad}_a$ . Soit  $\lambda_i$  la valeur propre associée à  $e_i$ . Soient  $E_i$  les champs invariants à droite prolongeant les  $e_i$ . Le volume  $\omega$  étant invariant à droite, il s'écrit (à une constante près)  $E_1^* \wedge \dots \wedge E_n^*$ . Comme il est également invariant à gauche, il est préservé par les champs  $E_i$ .

Posons  $X_a = \sum \alpha_i E_i$ , où les  $\alpha_i$  sont des fonctions de  $L - xP$  dans  $\mathbb{R}$ . On a alors

$$X_a \cdot \omega = \text{div}(X_a)\omega$$

où

$$\text{div}(X_a) = \sum_i d\alpha_i(E_i) .$$

Calculons cette divergence au point  $\mathbf{1}$ . Notons  $L_g$  (resp.  $R_g$ ) la différentielle de la multiplication à gauche (resp. à droite) par un élément  $g$  de  $L$ . Soit d'abord  $i$  tel que  $\lambda_i \leq 0$ . Alors  $\exp(te_i) \subset P$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . On a donc  $X_a(\exp(te_i)) = R_{\exp(te_i)}a$ . Comme le champ  $X_a$  est invariant à droite le long de  $P$ , les fonctions  $\alpha_j$  sont constantes le long de  $P$  et en particulier  $d\alpha_i(e_i) = 0$  lorsque  $\lambda_i \leq 0$ .

Soit maintenant  $i$  tel que  $\lambda_i > 0$ . Alors  $\exp(te_i) \subset P'$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Donc

$$\begin{aligned} X_a(\exp(te_i)) &= L_{\exp(te_i)}a \\ &= R_{\exp(te_i)}\text{Ad}_{\exp(te_i)}a \\ &= R_{\exp(te_i)}(a - \lambda_i te_i) , \end{aligned}$$

d'où

$$\alpha_i(\exp(te_i)) = -\lambda_i t .$$

En prenant la dérivée en  $t = 0$ , on obtient finalement :

$$d\alpha_i(e_i) = -\lambda_i .$$

En conclusion,  $\operatorname{div}(X_a)$  est l'opposé de la somme des valeurs propres strictement positives de  $a$ . Cette divergence est donc non nulle. Or, si  $M$  est une variété compacte,  $\omega$  une forme volume sur  $M$  et  $X$  un champ de vecteur, de flot  $\Phi_t$ , on a

$$\int_M \Phi_t^* \omega = \int_M \omega$$

pour tout  $t$ . En particulier, le champ  $X$  ne peut pas dilater uniformément le volume  $\omega$ . Par conséquent, Il n'existe pas de variété compacte localement modelée sur  $(P' \times P, L - xP)$ .  $\square$

Nous avons donc prouvé que  $\Omega$  ne peut pas être  $L/P$  privé d'un seul point. Montrons maintenant que  $\Omega$  ne peut pas non plus être  $L/P$  privé de deux points ou plus. Commençons par la remarque suivante :

**Proposition 2.4.8.** *Soit  $\Delta$  un sous-groupe fermé de  $L$  préservant un ouvert  $\Omega$  de  $L/P$  dont le complémentaire contient au moins deux points. Alors l'action de  $\Delta$  sur  $\Omega$  est propre.*

Pour prouver cette proposition, rappelons que l'action de  $L$  sur  $L/P$  possède une dynamique "nord-sud", dans le sens suivant :

**Lemme 2.4.9** (voir par exemple [Fra07], lemme 4). *Soit  $\gamma_n$  une suite de  $L$  sortant de tout compact. Alors il existe deux pôles  $x_-$  et  $x_+ \in L/P$  (éventuellement égaux), une suite extraite  $\gamma_{n_k}$ , une suite de voisinages  $U_k$  de  $x_-$  et une suite de voisinages  $V_k$  de  $x_+$  tels que*

- Pour tout  $k$ , l'action à gauche de  $\gamma_{n_k}$  envoie le complémentaire de  $U_k$  dans  $V_k$  et  $\gamma_{n_k}^{-1}$  envoie le complémentaire de  $V_k$  dans  $U_k$ ,
- $\bigcap_k U_k = \{x_-\}$  et  $\bigcap_k V_k = \{x_+\}$ .

Ce résultat est une propriété classique des espaces  $L/P$  où  $L$  est de rang 1. Le point  $x_-$  (resp.  $x_+$ ) est appelé *pôle répulsif* (resp. *pôle attractif*) de la suite  $\gamma_{n_k}$ .

*Preuve de la proposition 2.4.8.* Considérons un sous-groupe fermé  $\Delta$  de  $L$  préservant un domaine  $\Omega$  de  $L/P$  dont le complémentaire contient au moins deux points.

Montrons tout d'abord que les pôles d'une suite possédant une dynamique nord-sud sont dans le bord de  $\Omega$ . Soit  $\gamma_n$  une suite de  $\Delta$  possédant une dynamique nord-sud de pôles  $x_-$  et  $x_+$ . Alors :

- Soit  $\Omega^c$  est inclus dans  $\{x_-, x_+\}$ ; dans ce cas, comme  $\Omega^c$  contient au moins deux points, on a  $\Omega^c = \{x_-, x_+\}$
- Soit il existe  $x \in \Omega^c$  différent de  $x_-$  et  $x_+$ . La dynamique nord-sud nous dit alors que  $\gamma_n \cdot x$  converge vers  $x_+$  et  $\gamma_n^{-1} \cdot x$  converge vers  $x_-$ . Comme  $\Omega^c$  est un fermé  $\Delta$ -invariant,  $x_-$  et  $x_+$  appartiennent à  $\Omega^c$ .

Supposons que l'action de  $\Delta$  sur  $\Omega$  ne soit pas propre. Il existe alors un compact  $F \subset \Omega$  et une suite  $(\gamma_n) \in \Delta^{\mathbb{N}}$  sortant de tout compact de  $L$  telle que  $\gamma_n \cdot F$  intersecte  $F$  pour tout  $n$ . Considérons  $n_k$  une extraction et  $x_-, x_+, U_k, V_k$  comme dans le lemme 2.4.9. D'après la remarque précédente,  $x_-$  et  $x_+$  sont dans  $\partial\Omega$ . En particulier,  $F$  ne contient aucun des

deux pôles. Par conséquent, pour  $k$  assez grand,  $F$  est inclus dans le complémentaire de  $U_k$  et donc  $\gamma_{n_k} \cdot F \subset V_k$ . Mais pour  $k$  assez grand,  $F$  est aussi inclus dans le complémentaire de  $V_k$ . Donc pour  $k$  assez grand,  $\gamma_{n_k} \cdot F$  n'intersecte pas  $F$ . Cela contredit l'hypothèse. Donc l'action est propre.  $\square$

Revenons à notre ouvert  $\mathcal{U}$  de  $L$  qui fibre au dessus de  $\Omega \subset L/P$  et sur lequel un sous-groupe  $\Gamma$  de  $(L \times P)/Z(L)$  agit proprement discontinûment et cocompactement. Pour terminer la preuve, nous supposons pour simplifier les notations, que le centre de  $L$  est trivial.  $\Gamma$  est donc un sous-groupe de  $L \times P$ . Notons  $\rho_1$  (resp.  $\rho_2$ ) la projection de  $L \times P$  sur le facteur  $L$  (resp. le facteur  $P$ ). Nous avons prouvé que le complémentaire de  $\Omega$  contient au moins deux points. D'après la proposition 2.4.8, l'action sur  $\Omega$  de l'adhérence de  $\rho_1(\Gamma)$  dans  $L$  est donc propre. Nous allons montrer que  $\Gamma$  ne peut pas être discret dans  $L \times P$ .

$P$  se décompose sous la forme  $M \exp(\mathbb{R}a)N_+$ , où  $N_+$  est le radical nilpotent de  $P$ , où  $a$  est un élément de  $\mathfrak{p}$  dont l'action adjointe sur  $\mathfrak{n}_+$  est diagonalisable à valeurs propres strictement positives et où  $M$  désigne le centralisateur de  $a$  dans  $K$ . Remarquons que le sous-groupe de  $P$  engendré par  $\exp(a)$  et par un élément  $b \in N_+ \setminus \{1_L\}$  n'est pas discret. En effet, l'action adjointe de  $\exp(a)$  dilate  $\mathfrak{n}_+$  et par conséquent,  $(\exp(-na)b \exp(na))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $1_L$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$  sans être stationnaire. L'idée de la preuve qui va suivre est d'utiliser la cocompacité de l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{U}$  pour trouver des éléments de  $\Gamma$  "assez proches" de  $(1, \exp(na))$  et de  $(1, b)$ , et conclure que  $\Gamma$  non plus n'est pas discret.

Munissons  $L$  d'une métrique invariante à droite. Soit  $x \in L$  tel que  $xP$  est inclus dans  $\mathcal{U}$ . En particulier,  $x \exp(na) \in \mathcal{U}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par cocompacité de l'action de  $\Gamma$ , il existe donc une suite  $g_n = (\alpha_n, \beta_n) \in \Gamma$  telle que  $y_n = \alpha_n x \exp(na) \beta_n^{-1}$  reste dans un compact de  $\mathcal{U}$ . D'après la proposition 2.4.6, la suite  $(\beta_n)$  est dans  $P$ . En projetant dans  $L/P$ , on observe que  $\alpha_n x P$  reste dans un compact de  $\Omega$ . Comme l'action de  $\rho_1(\Gamma)$  sur  $\Omega$  est propre, on en déduit que la suite  $\alpha_n$  est bornée dans  $L$ . Posons  $c_n = y_n^{-1} \alpha_n x$ . La suite  $\beta_n = c_n \exp(na)$  reste donc à distance bornée de  $\exp(na)$ .

De même, il existe une suite  $h_k = (\gamma_k, \delta_k) \in \Gamma$  telle que  $z_k = \gamma_k x \exp(kb) \delta_k^{-1}$  reste dans un compact de  $\mathcal{U}$ . Par propriété de l'action de  $\rho_1(\Gamma)$  sur  $\Omega$ , la suite  $\gamma_k$  est bornée dans  $L$  et la suite  $\delta_k$  s'écrit alors  $\delta_k = d_k \exp(kb)$ , où  $d_k = z_k^{-1} \gamma_k x$  est bornée.

Soit  $B$  un compact de  $P$ , image par l'exponentielle d'un convexe de  $\mathfrak{p}$ , tel que les suites  $c_n$  et  $d_k$  restent dans  $B$ . On notera  $B^r$  l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme produit de  $r$  éléments de  $B$ . Pour tout  $n$  positif, l'action adjointe de  $\exp(-na)$  fixe  $\mathfrak{m} \oplus \mathbb{R}a$  et contracte  $\mathfrak{n}_+$ . On a donc  $\exp(-na)B \exp(na) \subset B$ . De plus, pour tout élément  $\nu$  de  $N_+$ , la suite  $\exp(-na)\nu \exp(na)$  converge vers  $1$  et est donc contenue dans  $B$  pour  $n$  suffisamment grand. On en déduit aisément que la suite  $\beta_n^{-1} \delta_k \beta_n$  reste bornée lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , quelque soit la valeur de  $k$ . Supposons que cette suite ne prenne qu'un nombre fini de valeurs. Alors il existe des entiers  $n$  et  $m$  arbitrairement grands tels que

$$\beta_n^{-1} \delta_k \beta_n = \beta_{n+m}^{-1} \delta_k \beta_{m+n}.$$

On a alors

$$\exp(kb) = d_k^{-1} c_n \exp(-ma) c_{n+m}^{-1} \delta_k c_{n+m} \exp(ma) c_n^{-1},$$

d'où

$$\exp(kb) \in B^4 \exp(-ma) \exp(kb) \exp(ma) B^3.$$

En choisissant  $m$  assez grand, on obtient

$$\exp(kb) \in B^8.$$

Or  $B^8$  est compact, et cela est donc impossible pour  $k$  suffisamment grand. Pour un bon choix de  $k$ , la suite  $\beta_n^{-1}\delta_k\beta_n$  est donc bornée et prend une infinité de valeurs. D'autre part, la suite  $\alpha_n^{-1}\gamma_k\alpha_n$  est également bornée car  $\alpha_n$  est bornée. Par conséquent, la suite  $g_n^{-1}h_kg_n \in \Gamma$  est bornée et prend une infinité de valeurs.  $\Gamma$  n'est donc pas discret dans  $L \times P$ .

On prouverait par le même raisonnement que  $\Gamma$  n'est pas discret dans  $(L \times P)/Z(L)$  lorsque le centre de  $L$  est non trivial. Il suffit pour cela d'écrire les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\gamma_k)$  sous la forme  $\alpha_n = \bar{\alpha}_n + t_n$  et  $\gamma_k = \bar{\gamma}_k + t'_k$ , où  $\bar{\alpha}_n$  et  $\bar{\gamma}_k$  sont bornées et  $t_n$  et  $t'_k$  sont dans le centre de  $(L \times P)/Z(L)$ . Or si  $\Gamma$  n'est pas discret, il ne peut pas agir proprement discontinûment sur un ouvert de  $L$ . On en déduit donc que le complémentaire de  $\Omega$  ne contient pas plus de deux points. Par conséquent,  $\Omega = L/P$ ,  $\mathcal{U} = L$  et le théorème est prouvé.



## Chapitre 3

# Domination des représentations d'un groupe de surface

NOUS PRÉSENTONS DANS CE CHAPITRE les résultats des articles [DT13] et [Tho14], dont le but initial est de répondre à la question suivante, soulevée dans [BBD<sup>+</sup>12] :

**Question.** Étant donnée une surface compacte orientée  $S$ , quelle est la topologie de l'espace  $\text{Adm}(S)$  des paires de représentations  $(j, \rho)$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  telles que  $j$  est fuchsienne et *domine strictement*  $\rho$  ?

Par domination stricte, on entend qu'il existe une application de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\mathbb{H}^2$  qui est  $(j, \rho)$ -équivariante et  $\lambda$ -lipschitzienne pour un  $\lambda < 1$ .

À l'origine, cette question est motivée par son application à la description de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur les 3-variétés compactes. Il se trouve cependant que la réponse que nous donnons se généralise naturellement à un cadre plus large, où  $\rho$  est une représentation à valeurs dans le groupe des isométries d'une variété riemannienne de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$ . Nous traitons donc ici la question générale et ses applications diverses et reviendrons sur les conséquences en géométrie anti-de Sitter dans le chapitre suivant.

Nous commencerons par prouver que, pour une telle représentation  $\rho$ , il existe toujours une représentation fuchsienne  $j$  qui domine strictement  $\rho$ , sauf dans le cas très particulier où  $\rho$  est elle-même "fuchsienne" en un certain sens (théorème 3.2.2). Ce résultat possède déjà plusieurs conséquences intéressantes, comme celle d'étendre la systole et la constante de Bers à toutes ces représentations (corollaire 3.2.9).

La preuve de ce premier théorème consiste à construire une application de l'espace de Teichmüller de  $S$  dans lui-même et à montrer que son image est contenue dans le domaine  $\text{Dom}(\rho)$  des représentations qui dominent strictement  $\rho$ . Nous prouverons dans un deuxième temps que cette application est un homéomorphisme de l'espace de Teichmüller sur  $\text{Dom}(\rho)$ . On en déduit en particulier la topologie de l'espace  $\text{Adm}(S)$ . Une autre conséquence de ce résultat est que les boules à gauche pour la distance asymétrique de Thurston sur l'espace de Teichmüller sont contractiles (corollaire 3.2.13).

Pour préciser le contexte de ces résultats, nous définissons dans la section 3.1 la fonction  $\text{Lip}$ , qui aux représentations  $j$  et  $\rho$  associe la constante de Lipschitz minimale d'une application  $(j, \rho)$ -équivariante. Nous discutons de la relation entre cette constante de Lipschitz minimale et la comparaison du *spectre des longueurs* de  $j$  et de  $\rho$ . Enfin, nous prouvons que cette fonction dépend continûment de  $j$  et de  $\rho$ , ce qui nécessitera quelques rappels sur la géométrie des espaces  $\text{CAT}(-1)$ .

Dans la section 3.2, nous énonçons nos deux théorèmes et leurs divers corollaires. La section 3.3 contient uniquement des rappels de la théorie des applications harmoniques et plus particulièrement des applications harmoniques tordues sur les surfaces de Riemann. Nous y introduisons les outils nécessaires à notre preuve. Enfin, nous prouvons les théorèmes 3.2.2 et 3.2.10 dans la section 3.4.

### 3.1 Représentations, constantes de Lipschitz, domination

Dans tout ce chapitre, nous appellerons *espace riemannien*  $\text{CAT}(-1)$  une variété riemannienne complète simplement connexe de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$ . Comme nous nous intéressons à des représentations à valeurs dans les isométries de ces espaces, les exemples les plus intéressants seront ceux qui possèdent le plus d'isométries, c'est-à-dire les espaces symétriques associés aux groupes de Lie de rang 1. En renormalisant bien leur métrique, ces espaces sont en effet de courbure constante  $-1$  ou de courbure comprise entre  $-4$  et  $-1$  (voir ch.1, section 1.3.3).

Le terme d' "espace  $\text{CAT}(-1)$ ", introduit par Gromov dans [Gro87], dénote le fait qu'un tel espace est "plus courbé" que l'espace hyperbolique dans le sens où ses triangles sont "plus fins" que des triangles du plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  (voir définition 3.1.8). Cette condition simple suffit à garantir de nombreuses propriétés à ces espaces. Nous reviendrons sur certaines de ces propriétés dans la section 3.1.3. Pour l'heure, notons simplement que les espaces  $\text{CAT}(-1)$  sont en particuliers contractiles.

#### 3.1.1 Applications lipschitziennes équivariantes

Dans toute la suite,  $(M, g_M)$  désignera un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$  et  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2. Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Commençons par montrer qu'il existe toujours des applications lipschitziennes  $(j, \rho)$ -équivariantes de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$ .

Remarquons pour cela qu'on peut associer à  $(j, \rho)$  un  $M$ -fibré plat  $E_\rho$  au dessus de  $j(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2 \simeq S$ , c'est-à-dire une fibration sur  $S$  de fibre  $M$ , munie d'une connexion plate dont le transport parallèle préserve la métrique  $g_M$ . Ce fibré est simplement le quotient tordu

$$\mathbb{H}^2 \times M / \pi_1(S) ,$$

où l'action de  $\pi_1(S)$  sur  $\mathbb{H}^2 \times M$  est donnée par

$$\gamma \cdot (x, y) = (j(\gamma) \cdot x, \rho(\gamma) \cdot y) .$$

Comme les fibres de  $E_\rho$  sont contractiles, le fibré  $E_\rho$  admet des sections lisses qui sont toutes homotopes. Soit  $s$  une telle section. Le relèvement de  $s$  à  $\mathbb{H}^2$  fournit une application lisse  $\tilde{s}$  de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  qui est  $(j, \rho)$ -équivariante. (Réciproquement, toute application  $(j, \rho)$ -équivariante de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  passe au quotient en une section de  $E_\rho$ .) Comme  $S$  est compacte et par équivariance de  $\tilde{s}$ , la différentielle de  $\tilde{s}$  est bornée et  $\tilde{s}$  est donc lipschitzienne.

**Définition 3.1.1.** Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . La *constante de Lipschitz minimale* associée au couple  $(j, \rho)$  est définie par

$$\text{Lip}(j, \rho) = \inf \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \exists f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M \text{ } (j, \rho)\text{-équivariante et } \lambda\text{-lipschitzienne} \right\} .$$

Rappelons qu'un groupe de Lie  $G$  agit sur l'espace  $\text{Hom}(S, G)$  des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $G$  par conjugaison. On vérifie aisément que cette action préserve la constante de Lipschitz minimale :

**Proposition 3.1.2.** *Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Alors la fonction  $\text{Lip}(\cdot, \rho)$  est préservée par l'action de  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  par conjugaison et la fonction  $\text{Lip}(j, \cdot)$  est préservée par l'action de  $\text{Isom}(M)$  par conjugaison.*

Notons  $\text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$  le quotient de  $\text{Hom}(S, \text{Isom}(M))$  par l'action de  $\text{Isom}(M)$  par conjugaison et rappelons que  $\mathcal{T}(S)$  désigne l'espace de Teichmüller de  $S$ , qui s'identifie à l'espace des représentations fuchsiennes de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  modulo conjugaison par  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  (cf. ch.1, section 1.6.4). L'application  $\text{Lip}$  passe donc au quotient en une application définie sur

$$\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) .$$

**Définition 3.1.3.** Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . On dira que  $j$  domine  $\rho$  si

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq 1$$

et que  $j$  domine strictement  $\rho$  si l'inégalité est stricte.

### Distance asymétrique de Thurston

Lorsque  $M$  est également le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , la constante de Lipschitz minimale permet en particulier de comparer deux représentations fuchsiennes. Soit  $S$  une surface compacte orientée et  $j_1$  et  $j_2$  deux représentations fuchsiennes de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . Rappelons que les quotients  $j_1(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$  et  $j_2(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$  ont même volume. On en déduit aisément que

$$\text{Lip}(j_1, j_2) \geq 1,$$

avec égalité si et seulement si  $j_1$  et  $j_2$  sont conjuguées par une isométrie de  $\mathbb{H}^2$ . La fonction

$$\begin{aligned} d_{Th} : \mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S) &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (j_1, j_2) &\mapsto \log(\text{Lip}(j_1, j_2)) \end{aligned}$$

définit alors une distance asymétrique sur  $\mathcal{T}(S)$  invariante par l'action du groupe modulaire de  $S$ . Thurston a introduit cette distance dans [Thu86], où il prouve (entre autres) qu'elle définit bien la topologie usuelle sur l'espace de Teichmüller.

### 3.1.2 Constante de Lipschitz et spectre des longueurs

Soit  $\gamma$  une isométrie de  $(M, g_M)$ . Rappelons que la longueur de translation de  $\gamma$  est définie par

$$l(\gamma) = \inf_{x \in M} d(x, \gamma \cdot x) ,$$

où  $d$  désigne la distance induite sur  $M$  par la métrique riemannienne  $g_M$ . La longueur de translation d'une isométrie ne dépend que de sa classe de conjugaison dans  $\text{Isom}(M)$ .

Si  $\rho$  est une représentation d'un groupe  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(M, g_M)$ , on appelle *spectre des longueurs* de  $\rho$  la fonction

$$\begin{aligned} L_\rho : \Gamma &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \gamma &\mapsto l(\rho(\gamma)) . \end{aligned}$$

Le spectre des longueurs capture de nombreuses propriétés géométriques et dynamiques d'une représentation, au point de la caractériser dans de nombreux cas. Il découle par exemple des résultats de [Thu86] que deux représentations fuchsienues qui ont même spectre des longueurs sont conjuguées.

Il peut donc être intéressant de “contrôler” le spectre des longueurs d'une représentation. Or, c'est précisément ce que permet la constante de Lipschitz minimale :

**Proposition 3.1.4.** *Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Supposons*

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq C .$$

Alors

$$L_\rho \leq CL_j .$$

Cette proposition possède dans certains cas une réciproque, mais celle-ci est loin d'être triviale. Thurston l'a d'abord prouvée dans le cas particulier où  $\rho$  est également une représentation fuchsienne [Thu86], puis Kassel l'a étendue à toutes les représentations  $\rho$  à valeurs dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  [Kas09]. Guéritaud et Kassel l'ont ensuite généralisée au cas où  $M$  est l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ . Leur travail porte plus généralement sur la constante de Lipschitz minimale associée à un couple  $(j, \rho)$  de représentations d'un groupe discret dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ , où  $j$  est injective d'image discrète. Nous nous contentons ici d'énoncer leur théorème dans le cas particulier d'un groupe de surface et d'une représentation  $j$  fuchsienne.

**Théorème 3.1.5** (Guéritaud–Kassel, [GK13]). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2. Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Alors :*

- pour tout  $C \geq 1$ , on a l'équivalence

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq C \Leftrightarrow L_\rho \leq CL_j ,$$

- $j$  domine strictement  $\rho$  si et seulement si il existe  $\lambda < 1$  tel que

$$L_\rho \leq \lambda L_j .$$

**Remarque 3.1.6.** La preuve de ce théorème repose sur une version équivariante d'un théorème de Kirszbraun–Valentine qui affirme qu'on peut étendre une application lipschitzienne définie sur un domaine compact à tout l'espace sans augmenter la constante de Lipschitz si celle-ci est supérieure à 1, ou en la maintenant strictement inférieure à 1 dans le cas contraire. Comme me l'a fait remarquer Guéritaud, ce théorème reste valable tant que l'espace d'arrivée est un espace CAT(−1). Il est donc vraisemblable que le théorème 3.1.5 s'étende à notre cadre, où  $\rho$  est à valeurs dans le groupe des isométries d'un espace riemannien CAT(−1).

### 3.1.3 Continuité de la constante de Lipschitz minimale

Pour conclure cette présentation de la fonction Lip, nous allons prouver le résultat suivant :

**Théorème 3.1.7.** *Soit  $S$  une surface compacte de genre supérieur à 2 et  $M$  un espace riemannien CAT(−1). Alors la fonction*

$$\text{Lip} : \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

*est continue.*

Ce résultat n'est pas fondamentalement nouveau. Dans le cas où  $\rho$  est aussi une représentation fuchsienne, la continuité de Lip est contenue dans le théorème selon lequel la distance asymétrique de Thurston définit la topologie usuelle sur  $\mathcal{T}(S)$  [Thu86]. Nous admettrons d'ailleurs ce théorème au cours de la preuve. Guéritaud et Kassel ont prouvé la continuité de Lip dans le cas où  $\rho$  est à valeurs dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^n)$  et notre preuve suivra essentiellement la leur.

Bien que cette preuve soit assez naturelle, elle présente une difficulté technique qui nécessitera quelques rappels sur la géométrie des espaces  $\text{CAT}(-1)$ , ce qui la rend relativement longue. Comme elle n'est pas nécessaire à la compréhension du reste du chapitre, il est tout à fait possible de ne pas s'y attarder.

Nous commencerons par prouver rapidement la continuité par rapport à  $j$  en utilisant la continuité de la distance asymétrique de Thurston. Nous prouverons ensuite la semi-continuité supérieure par rapport à  $\rho$  grâce à un argument classique qui permet de déformer une application  $(j, \rho)$ -équivariante en une application  $(j, \rho')$ -équivariante pour  $\rho'$  proche de  $\rho$  sans trop augmenter la constante de Lipschitz. La semi-continuité inférieure posera plus de problèmes. Si  $\rho_n$  est une suite de représentations convergeant vers  $\rho$ , on peut considérer une suite d'applications  $(j, \rho_n)$ -équivariantes et équi-lipschitziennes, et espérer en extraire une sous-suite convergente grâce au théorème d'Ascoli, ce qui permettrait de conclure. La seule situation où cette suite peut ne pas converger apparaît lorsque la représentation  $\rho$  fixe un point à l'infini dans  $M$ . C'est ce cas-là qui nécessitera plusieurs lemmes techniques.

### Continuité par rapport à $j$

Commençons par fixer  $\rho \in \text{Hom}(S, \text{Isom}(M))$ . La continuité de l'application

$$j \rightarrow \text{Lip}(j, \rho)$$

se déduit alors facilement de la continuité de la distance asymétrique de Thurston [Thu86]. Soit  $j_0$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et fixons  $\varepsilon > 0$ . Puisque la distance asymétrique de Thurston définit la topologie usuelle sur  $\mathcal{T}(S)$ , on peut considérer un voisinage  $U_\varepsilon$  de  $j_0$  tel que pour tout  $j \in U_\varepsilon$ , on ait

$$\text{Lip}(j_0, j) \leq 1 + \varepsilon$$

et

$$\text{Lip}(j, j_0) \leq 1 + \varepsilon .$$

Soit  $j$  une représentation fuchsienne appartenant à  $U_\varepsilon$  et  $h : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application  $(j, j_0)$ -équivariante et  $(1 + 2\varepsilon)$ -lipschitzienne. Soit par ailleurs  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  une application  $(j_0, \rho)$ -équivariante et  $(\text{Lip}(j_0, \rho) + \varepsilon)$ -lipschitzienne. Alors l'application

$$f \circ h : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$$

est  $(j, \rho)$ -équivariante et  $(1 + 2\varepsilon)(\text{Lip}(X, \rho) + \varepsilon)$ -lipschitzienne. On a donc

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq (1 + 2\varepsilon)(\text{Lip}(j_0, \rho) + \varepsilon) .$$

En intervertissant  $j_0$  et  $j$ , on obtient de même que

$$\text{Lip}(j_0, \rho) \leq (1 + 2\varepsilon)(\text{Lip}(j, \rho) + \varepsilon) .$$

Il vient finalement que

$$\text{Lip}(j_0, \rho) - \text{Cste } \varepsilon \leq \text{Lip}(j, \rho) \leq \text{Lip}(j_0, \rho) + \text{Cste } \varepsilon$$

pour tout  $j \in U_\varepsilon$ , ce qui prouve la continuité de l'application  $j \mapsto \text{Lip}(j, \rho)$  au point  $j_0$ .

### Semi-continuité supérieure par rapport à $\rho$

Comme le groupe des isométries d'une variété riemannienne est un groupe de Lie, l'espace  $\text{Hom}(S, \text{Isom}(M))$  possède une structure de variété algébrique réelle. Il est en particulier localement connexe par arcs et il nous suffit donc, pour prouver la semi-continuité supérieure, de montrer que si  $(\rho_t)_{t \in [0, \varepsilon[}$  est une famille continue de représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ , on a

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \text{Lip}(j, \rho_t) \leq \text{Lip}(j, \rho_0) .$$

Pour cela, voyons  $\rho_t$  comme la monodromie d'une connexion plate  $\nabla_t$  sur un  $M$ -fibré  $E$  fixé au dessus de  $S \simeq j(\pi_1(S)) \setminus \mathbb{H}^2$ , qui varie continûment avec  $t$  (cf. preuve du théorème d'Ehresmann–Thurston dans [Thu80]). Soit  $C > \text{Lip}(j, \rho_0)$  et soit  $f_0$  une application  $(j, \rho_0)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$ . L'application  $f_0$  induit une section  $s_0$  du fibré plat  $(E, \nabla_0)$ . Cette section peut à son tour être vue comme une section  $s_t$  du fibré  $(E, \nabla_t)$ , associée à une application  $f_t$  de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  qui est  $(j, \rho_t)$ -équivariante. La continuité de la famille  $\nabla_t$  et la compacité de  $S$  impliquent que  $f_t$  est  $(C + \alpha(t))$ -lipschitzienne, pour une fonction  $\alpha(t)$  qui tend vers 0 lorsque  $t$  tend vers 0. On en déduit que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \text{Lip}(j, \rho_t) \leq C .$$

Ceci étant vrai pour tout  $C > \text{Lip}(j, \rho_0)$ , on obtient bien que

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \text{Lip}(j, \rho_t) \leq \text{Lip}(j, \rho_0) ,$$

ce qui prouve la semi-continuité supérieure.

### Géométrie des espaces CAT(−1)

Si les arguments utilisés jusqu'ici sont très généraux, la preuve de la semi-continuité inférieure, plus délicate, utilisera l'hypothèse de courbure sur  $M$ . Pour aboutir, quelques rappels sur la géométrie des espaces CAT(−1) sont nécessaires, à commencer par une définition rigoureuse. Rappelons qu'un *espace de longueur*  $(M, d)$  est un espace métrique dans lequel la distance entre deux points est donnée par l'infimum des longueurs des chemins continus reliant ces deux points. Un *segment géodésique minimisant* entre deux points  $x$  et  $y$  de  $M$  est une courbe d'extrémités  $x$  et  $y$  dont la longueur est égale à  $d(x, y)$ . (Lorsque  $(M, d)$  est complet, un tel segment existe toujours.) Si  $x_1, x_2$  et  $x_3$  sont trois points d'un espace de longueur, un triangle de sommets  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (noté  $\tau(x_1, x_2, x_3)$ ) est la réunion de trois segments géodésiques minimisants reliant  $x_1$  à  $x_2$ ,  $x_2$  à  $x_3$  et  $x_3$  à  $x_1$ .

**Définition 3.1.8.** Un *espace* CAT(−1) est un espace de longueurs  $(M, d)$  tel que pour tout triangle  $\tau(x_1, x_2, x_3)$  dans  $M$ , si  $\tau(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  désigne un triangle de  $\mathbb{H}^2$  dont les côtés ont même longueur que ceux de  $\tau(x_1, x_2, x_3)$ , alors l'application de  $\tau(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  dans  $M$  qui envoie  $\bar{x}_i$  sur  $x_i$  et qui est géodésique sur chaque côté de  $\tau(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$  est 1-lipschitzienne.

Nous allons ici énoncer (sans les prouver) quelques propriétés des espaces riemanniens  $\text{CAT}(-1)$ , qui peuvent être obtenues aisément pour le plan hyperbolique, puis généralisées grâce à la condition de comparaison des triangles. Nous n'avons pas trouvé de référence spécifiquement dédiée aux espaces  $\text{CAT}(-1)$ , mais les énoncés que nous donnons sont pour la plupart des cas particuliers de propriétés plus générales des espaces Gromov-hyperboliques et des espaces  $\text{CAT}(0)$ , que l'on pourra trouver dans [GdlH90] et [BH99]. Comme il nous est impossible de réintroduire toute la théorie, nous nous contenterons d'énoncer diverses propositions qui nous serviront plus tard. Le lecteur me pardonnera, je l'espère, le caractère un peu désorganisé de ce paragraphe.

**Angles hyperboliques.** Soit  $M$  un espace  $\text{CAT}(-1)$  et  $x, y$  et  $z$  trois points de  $M$ . On notera

$$\angle_{hyp}(y, x, z)$$

l'angle au sommet  $\bar{x}$  d'un triangle hyperbolique  $\tau(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  dont les côtés ont mêmes longueurs que ceux du triangle  $\tau(x, y, z)$ .

**Proposition 3.1.9.** *Les angles hyperboliques vérifient l'inégalité triangulaire : Si  $x, y, z$  et  $t$  sont quatre points de  $M$ , on a*

$$\angle_{hyp}(y, x, t) \leq \angle_{hyp}(y, x, z) + \angle_{hyp}(z, x, t) .$$

**Proposition 3.1.10.** *Si  $\tau_n$  est une suite de triangles de  $M$  dont les longueurs des côtés tendent vers  $+\infty$  et dont les angles hyperboliques aux sommets convergent, alors deux de ces angles au moins tendent vers 0.*

**Bord à l'infini.** Un espace  $\text{CAT}(-1)$  est en particulier *hyperbolique* au sens de Gromov et possède donc un *bord à l'infini*, défini comme le quotient de l'espace des rayons géodésiques paramétrés à vitesse 1 par la relation d'équivalence :

$$\gamma_1 \sim \gamma_2$$

lorsque la distance entre  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  reste bornée quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Si  $M$  est un espace  $\text{CAT}(-1)$  *propre* (i.e. dont les boules fermées sont compactes), le bord à l'infini de  $M$ , noté  $\partial_\infty M$ , fournit une compactification de  $M$ . Lorsque  $M$  est un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ , pour tout point  $x$  de  $M$ , l'application  $\exp_x : T_x M \rightarrow M$  est un difféomorphisme global, qui se prolonge en un homéomorphisme de  $\partial_\infty T_x M$  dans  $\partial_\infty M$  (où  $\partial_\infty T_x M$  désigne l'espace des demi-droites de  $T_x M$  issues de 0). En d'autres termes,  $M \cup \partial_\infty M$  est homéomorphe à une boule fermée. Toute géodésique  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  converge vers un point  $\gamma_+$  de  $\partial_\infty M$  lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$  et vers un point  $\gamma_-$  de  $\partial_\infty M$  lorsque  $t$  tend vers  $-\infty$ . Réciproquement, tout couple de points distincts de  $\partial_\infty M$  forme les extrémités d'une unique géodésique de  $M$ .

La fonction d'angle hyperbolique se prolonge au bord dans le sens où, si  $x$  est un point de  $M$  et  $(y_n)$  et  $(z_n)$  sont deux suites dans  $M$  convergeant respectivement vers deux points  $p$  et  $q$  du bord à l'infini, alors l'angle  $\angle_{hyp}(y_n, x, z_n)$  converge vers une valeur qui ne dépend que de  $x, p$  et  $q$ , que nous noterons  $\angle_\infty(p, x, q)$ . La fonction

$$\begin{aligned} d_x : \partial_\infty M \times \partial_\infty M &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (p, q) &\mapsto \angle_\infty(p, x, q) \end{aligned}$$

est une distance sur  $\partial_\infty M$ .

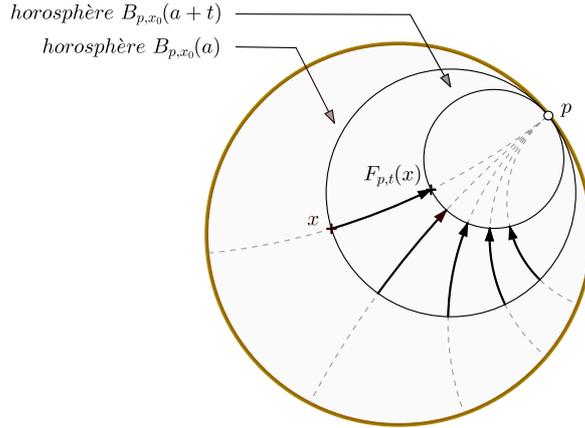


FIGURE 3.1 – L'application  $\mathbf{F}_{p,t}$  envoie l'horosphère  $B_{p,x_0}^{-1}(a)$  sur l'horosphère  $B_{p,x_0}^{-1}(a+t)$ .

**Fonctions de Busemann.** Soit  $p$  un point de  $\partial_\infty M$  et  $x_0$  et  $x$  deux points de  $M$ . Soit  $\gamma : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$  le rayon géodésique issu de  $x$  et dirigé vers  $p$ . Alors

$$d(x_0, \gamma(t)) - t$$

converge vers un réel que nous noterons  $B_{p,x_0}(x)$ . Par inégalité triangulaire, on a clairement :

$$|B_{p,x_0}(x)| \leq d(x_0, x) . \quad (3.1)$$

La fonction  $B_{p,x_0}$  est appelée *fonction de Busemann*. La fonction de Busemann ne dépend en fait de  $x_0$  que par une translation. En effet, si  $x_0, x_1$  et  $x$  sont trois points de  $M$ , on a

$$B_{p,x_0}(x) = B_{p,x_0}(x_1) + B_{p,x_1}(x) . \quad (3.2)$$

Soit  $p$  un point de  $\partial_\infty M$ . Les lignes de niveaux de la fonction de Busemann  $B_{p,x_0}$  sont appelées des *horosphères* tangentes à  $p$ . Lorsque  $M$  est un espace riemannien CAT(-1) de dimension  $n$ , les horosphères sont des hypersurfaces lisses diffeomorphes à  $\mathbb{R}^{n-1}$ , qui forment un feuilletage orthogonal au feuilletage de dimension 1 constitué des géodésiques dirigées vers  $p$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on notera  $F_{p,t}$  l'application qui à un point  $x$  de  $M$  associe le point  $\gamma_{x,p}(t)$ , où  $\gamma_{x,p}$  désigne le rayon géodésique issu de  $x$  dirigé vers  $p$ . L'application  $F_{p,t}$  préserve le feuilletage de  $M$  en horosphères tangentes à  $p$  et induit une surjection de  $B_{p,x_0}^{-1}(a)$  dans  $B_{p,x_0}^{-1}(a+t)$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  (figure 3.1). Lorsque  $M$  est riemannien, cette surjection est même un difféomorphisme.

**Proposition 3.1.11.** *La fonction  $F_{p,t}$  est 1-lipschitzienne et on a de plus l'inégalité suivante :*

$$|B_{p,x}(y)| \leq d(F_{p,t}(x), F_{p,t}(y)) \leq |B_{p,x}(y)| + e^{-t}d(x, y) .$$

*En particulier, la distance entre  $F_{p,t}(x)$  et  $F_{p,t}(y)$  converge vers  $|B_{p,x}(y)|$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ .*

**Isométries.** Les isométries de  $M$  se prolongent en des homéomorphismes de  $M \cup \partial_\infty M$  et, en restriction à  $\text{Isom}(M)$ , la topologie de la convergence uniforme sur tout compact de  $M$  et la topologie de la convergence uniforme sur  $M \cup \partial_\infty M$  coïncident. Lorsque  $M$  est riemannien,  $\text{Isom}(M)$  est un groupe de Lie de dimension finie et ces deux topologies coïncident alors avec la topologie de groupe de Lie.

Soit  $g$  une isométrie de  $M$ . Rappelons qu'on appelle *longueur de translation* de  $g$  le nombre

$$l(g) = \inf_{x \in M} d(x, g \cdot x) .$$

La fonction  $l$  est continue sur  $\text{Isom}(M)$  et invariante par conjugaison. Elle permet de classer les isométries de  $M$  en trois catégories.

Si  $l(g) = 0$ , alors  $g$  fixe soit un point de  $M$  – on dit alors que  $g$  est *elliptique* – soit un unique point de  $\partial_\infty M$  – auquel cas  $g$  est *parabolique*. Une isométrie elliptique préserve naturellement la fonction distance à un point fixe et ses orbites sont donc bornées. Une isométrie parabolique, quant à elle, préservent les horosphères tangentes à son point fixe.

Lorsque  $l(g) > 0$ , on dit que  $g$  est *hyperbolique*. Dans ce cas, l'ensemble des points  $x$  de  $M$  tels que  $d(x, g \cdot x) = l(g)$  forme une géodésique de  $M$ , notée  $\text{axe}(g)$ . Cet ensemble est stable par  $g$ , et  $g$  agit le long de son axe comme une translation de longueur  $l(g)$ . Les extrémités de l'axe de  $g$  sont les deux seuls points de  $\partial_\infty M$  fixés par  $g$ .

**Proposition 3.1.12.** *Soit  $g$  une isométrie de  $M$  fixant un point  $p$  de  $\partial_\infty M$ . Alors le nombre*

$$B_{p,x}(g \cdot x)$$

*est indépendant du point  $x$  et vérifie*

$$|B_{p,x}(g \cdot x)| = l(g) .$$

**Propriétés des isométries hyperboliques.** Nous terminons cette section sur la géométrie des espaces  $\text{CAT}(-1)$  par quelques propriétés des isométries hyperboliques qui nous serviront dans la suite. Commençons par une proposition qui affirme que les éléments de  $M$  qui ne sont “pas trop” déplacés par une isométrie hyperbolique  $g$  ne sont “pas trop loin” de l'axe de  $g$ .

**Proposition 3.1.13.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute constante  $k$ , il existe une constante  $C(\varepsilon, k)$  telle que si  $g$  est une isométrie hyperbolique de  $M$  telle que  $l(g) \geq \varepsilon$  et  $x$  un point de  $M$  tel que*

$$d(x, g \cdot x) \leq k ,$$

*alors*

$$d(x, \text{axe}(g)) \leq C(\varepsilon, k) .$$

**Remarque 3.1.14.** On pourrait tout à fait expliciter la constante  $C(\varepsilon, k)$  par simple comparaison avec le cas de  $\mathbb{H}^2$ .

La proposition suivante affirme que les isométries hyperboliques ont une dynamique “nord-sud”, dans le sens suivant :

**Proposition 3.1.15.** *Soit  $g$  une isométrie hyperbolique de  $M$  et  $g_-$  et  $g_+$  les extrémités de  $\text{axe}(g)$  (orienté dans le sens dans lequel  $g$  translate). Alors il existe deux suites de compacts  $(U_n^-)$  et  $(U_n^+)$  de  $M \cup \partial_\infty M$  tels que*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^- = g_- ,$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^+ = g_+ ,$$

et tels que  $g^n$  envoie le complémentaire de  $U_n^-$  dans  $U_n^+$ . En particulier, la suite  $g^n$  converge uniformément sur tout compact de  $M \cup \partial_\infty M \setminus \{g_-\}$  vers l'application qui envoie tout point sur  $g_+$ .

Ce type de dynamique caractérise de plus les isométries hyperboliques. En effet,

**Proposition 3.1.16.** *Soit  $g_n$  une suite d'isométries de  $M$ . Supposons qu'il existe deux points distincts  $p_-$  et  $p_+$  de  $\partial_\infty M$  et deux suites de compacts  $(U_n^-)$  et  $(U_n^+)$  de  $M \cup \partial_\infty M$  tels que*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^- = p_- ,$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n^+ = p_+ ,$$

et tels que  $g_n$  envoie le complémentaire de  $U_n^-$  dans  $U_n^+$ . Alors la longueur de translation de  $g_n$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . En particulier,  $g_n$  est hyperbolique pour  $n$  assez grand.

Terminons avec une proposition qui permet de caractériser les isométries hyperboliques en n'observant que trois points d'une orbite. Cette proposition affirme que si  $g$  est une isométrie et  $x$  un point de  $M$  tel que la distance entre  $x$  et  $g \cdot x$  est suffisamment grande et l'angle  $\angle_{hyp}(g^{-1} \cdot x, x, g \cdot x)$  pas trop petit, alors  $g$  est hyperbolique.

**Proposition 3.1.17.** *Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C$  telle que pour toute isométrie  $g$  de  $M$ , s'il existe un point  $x$  tel que*

$$d(x, g \cdot x) \geq C$$

et

$$\angle_{hyp}(g^{-1} \cdot x, x, g \cdot x) \geq \varepsilon ,$$

alors  $g$  est hyperbolique.

### Représentations paraboliques

Pour prouver la semi-continuité inférieure par rapport à  $\rho$ , la partie délicate sera de traiter le cas où  $\rho$  fixe un point de  $\partial_\infty M$ . Lorsque  $M$  est l'espace hyperbolique  $\mathbb{H}^n$ , cette condition revient à dire que l'image de  $\rho$  est incluse dans un sous-groupe parabolique de  $\text{PO}(n, 1) = \text{Isom}(\mathbb{H}^n)$ . Par analogie, on appellera donc *représentation parabolique* une représentation qui fixe un point de  $\partial_\infty M$ .

Le but de cette section est de prouver deux lemmes qui nous permettront ensuite de traiter la semi-continuité inférieure en une représentation parabolique. Le premier caractérise les représentations paraboliques par leur spectre de longueur, tandis que le second relie la constante de Lipschitz minimale à ce spectre de longueur.

**Lemme 3.1.18.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $\text{Isom}(M)$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\Gamma$  fixe un point de  $M \cup \partial_\infty M$ ,
- (ii) il existe un morphisme  $m$  de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $g \in \Gamma$ , on a

$$l(g) = |m(g)| .$$

**Lemme 3.1.19.** *Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation parabolique de  $\pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$ . Soit  $m$  un morphisme de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ , on ait*

$$l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)| .$$

Notons  $\text{Lip}(j, m)$  la constante de Lipschitz minimale d'une application  $(j, m)$ -équivariante de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors on a

$$\text{Lip}(j, \rho) = \text{Lip}(j, m) .$$

*Démonstration du lemme 3.1.18.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii).

Si  $\Gamma$  possède un point fixe dans  $M$ , alors  $l(g) = 0$  pour tout  $g \in \Gamma$  et le morphisme trivial convient. Sinon, soit  $p$  un point fixe de  $\Gamma$  dans  $\partial_\infty M$ . Fixons un point base  $x_0$  de  $M$  et posons

$$m(g) = B_{p, x_0}(g \cdot x_0)$$

pour tout  $g \in \Gamma$ . D'après la proposition 3.1.12, on a bien

$$|m(g)| = l(g) .$$

Vérifions que  $m$  est un morphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$ . Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $\Gamma$ . D'après l'équation (3.2), on a

$$\begin{aligned} m(gh) &= B_{p, x_0}(gh \cdot x_0) \\ &= B_{p, x_0}(h \cdot x_0) + B_{p, h \cdot x_0}(gh \cdot x_0) . \end{aligned}$$

Or, d'après la proposition 3.1.12, on a

$$B_{p, h \cdot x_0}(gh \cdot x_0) = B_{p, x_0}(g \cdot x_0) .$$

Il vient finalement

$$\begin{aligned} m(gh) &= B_{p, x_0}(g \cdot x_0) + B_{p, x_0}(h \cdot x_0) \\ &= m(g) + m(h) . \end{aligned}$$

La fonction  $m$  est donc bien un morphisme de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i).

Pour prouver la réciproque, il nous faut considérer deux cas distincts.

- *Cas où  $m \neq 0$ .* Dans ce cas,  $\Gamma$  contient des éléments hyperboliques. Montrons alors que les axes de tous ces éléments ont une extrémité commune.

Supposons qu'il existe deux isométries hyperboliques  $g$  et  $h$  de  $\Gamma$  dont les axes ont toutes leurs extrémités distinctes. Quitte à remplacer  $g$  et  $h$  par des puissances, on peut supposer que le groupe engendré par  $g$  et  $h$  possède une dynamique de type Schottky (figure 3.2). L'idée générale est alors que l'orbite d'un point  $x$  sous l'action de ce groupe est quasi-isométrique à un groupe libre à deux générateurs muni de sa distance de Cayley, ce qui contredit le fait que la longueur de translation des éléments de ce groupe soit donnée par un morphisme à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

Pour être plus précis, appliquons la proposition 3.1.15 à  $g$  et  $h$  et considérons  $(U_n^+)$ ,  $(U_n^-)$ ,  $(V_k^+)$  et  $(V_k^-)$  des suites de compacts de  $M \cup \partial_\infty M$  tels que  $\bigcap U_n^+ = g^+$ ,  $\bigcap U_n^- = g^-$ ,

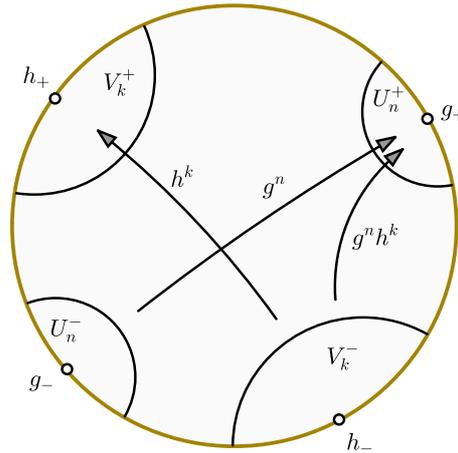


FIGURE 3.2 – Dynamique de type Schottky.

$\cap V_k^+ = h^+$  et  $\cap V_k^- = h^-$ , et tels que  $g^n$  envoie le complémentaire de  $U_n^-$  dans  $U_n^+$ ,  $g^{-n}$  envoie le complémentaire de  $U_n^+$  dans  $U_n^-$ ,  $h^k$  envoie le complémentaire de  $V_k^-$  dans  $V_k^+$  et  $h^{-k}$  envoie le complémentaire de  $V_k^+$  dans  $V_k^-$ .

Pour  $n$  et  $k$  suffisamment grands, les ouverts  $U_n^+$ ,  $U_n^-$ ,  $V_k^+$  et  $V_k^-$  sont deux à deux disjoints et l'isométrie  $g^n h^k$  envoie le complémentaire de  $V_k^-$  dans  $U_n^+$ . Comme  $\cap U_n^+ = g_+$  et  $\cap V_k^- = h_-$ , on en déduit, d'après la proposition 3.1.16, que la longueur de translation de  $g^n h^k$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  et  $k$  tendent simultanément vers  $+\infty$ . En remplaçant  $h$  par  $h^{-1}$ , on obtiendrait de même que la longueur de translation de  $g^n h^{-k}$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $n$  et  $k$  tendent vers  $+\infty$ .

Or nous savons par ailleurs que

$$l(g^n h^k) = |n m(g) + k m(h)| ,$$

et comme  $m(g)$  et  $m(h)$  sont non nuls, on peut trouver, pour tout entier  $n$ , un entier  $k$  tel que

$$l(g^n h^k) \leq |m(h)| .$$

Cela contredit le fait que  $l(g^n h^k)$  tend vers l'infini quand  $n$  et  $k$  tendent vers l'infini.

Par conséquent, les axes de deux éléments hyperboliques de  $\Gamma$  ont toujours une extrémité commune. On en déduit aisément que les axes de tous les éléments hyperboliques de  $\Gamma$  ont une extrémité commune. Si cette extrémité commune est unique, comme l'axe de  $ghg^{-1}$  est l'image par  $g$  de l'axe de  $h$ , on en déduit qu'elle est fixée par tous les éléments de  $\Gamma$ .

Il se pourrait également que toutes les isométries hyperboliques de  $\Gamma$  aient le même axe. Dans ce cas, le groupe  $\Gamma$  préserve une géodésique  $\gamma$  et agit le long de cette géodésique par translation ou par symétrie. Les translations fixent chacune des extrémités de la géodésique et il nous reste donc à exclure les symétries. Supposons donc qu'un élément  $g$  agisse par symétrie. Soit  $h$  un élément hyperbolique de  $\Gamma$ . Alors l'élément  $hgh^{-1}g^{-1}$  est encore hyperbolique (car composition de deux symétries), ce qui contredit le fait que

$$m(hgh^{-1}g^{-1}) = 0 .$$

Par conséquent, tous les éléments de  $\Gamma$  agissent par translation de long de  $\gamma$  et fixent donc chacune des extrémités de  $\gamma$ .

• *Cas où  $m \equiv 0$ .* Le second cas à traiter est celui, très particulier, où tous les éléments de  $\Gamma$  sont elliptiques ou paraboliques. Soit  $x$  un point quelconque de  $M$ . Si l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\Gamma$  est bornée, alors  $\Gamma$  stabilise cette orbite et fixe le centre de la plus petite boule fermée contenant cet orbite. Dans le cas contraire, montrons que l'intersection de  $\partial_\infty M$  avec l'adhérence de  $\Gamma \cdot x$  contient exactement un point, qui sera alors fixé par  $\Gamma$ . L'argument que nous utiliserons est une variante d'un argument classique de géométrie des espaces Gromov-hyperboliques, qui sert entre autres à prouver que tout groupe hyperbolique contient un élément hyperbolique (voir par exemple [GdlH90]).

Par l'absurde, supposons que l'adhérence de  $\Gamma \cdot x$  contienne deux points distincts  $p$  et  $p'$  de  $\partial_\infty M$ . Soit  $(g_n)$  et  $(h_n)$  deux suites d'éléments de  $\Gamma$  telles que

$$g_n \cdot x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p$$

et

$$h_n \cdot x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p'.$$

Comme  $p$  et  $p'$  sont distincts, l'angle

$$\alpha_n = \angle_{hyp}(g_n \cdot x, x, h_n \cdot x)$$

converge vers  $\alpha = \angle_\infty(p, x, p')$  qui est non nul.

Par ailleurs, comme  $g_n$  est elliptique ou parabolique par hypothèse et puisque  $d(x, g_n \cdot x)$  tend vers l'infini, on déduit de la proposition 3.1.17 que l'angle

$$\angle_{hyp}(g_n \cdot x, x, g_n^{-1} \cdot x)$$

tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Enfin, les longueurs des côtés du triangle  $\tau(x, h_n \cdot x, g_n \cdot x)$  tendent  $+\infty$  et d'après la proposition 3.1.10, l'angle  $\angle_{hyp}(x, h_n \cdot x, g_n \cdot x)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . En appliquant l'isométrie  $g_n^{-1}$ , on en déduit que l'angle  $\angle_{hyp}(g_n^{-1} \cdot x, x, g_n^{-1} h_n \cdot x)$  tend aussi vers 0. Par inégalité triangulaire, on obtient finalement que l'angle

$$\angle_{hyp}(g_n^{-1} h_n \cdot x, x, g_n \cdot x)$$

tend vers 0 (la figure 3.3 aide à visualiser les angles en question). En inversant les rôles de  $g_n$  et  $h_n$ , on obtiendrait de même que l'angle

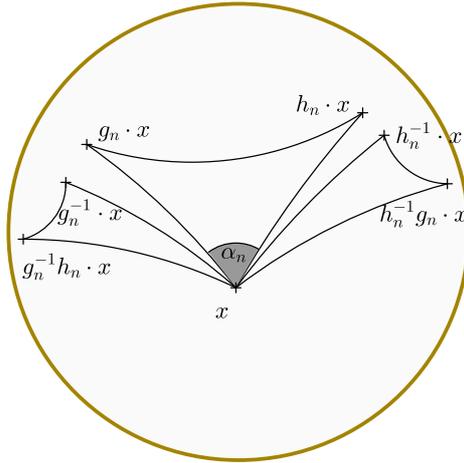
$$\angle_{hyp}(h_n^{-1} g_n \cdot x, x, h_n \cdot x)$$

tend vers 0. Par conséquent, l'angle

$$\angle_{hyp}(g_n^{-1} h_n \cdot x, x, h_n^{-1} g_n \cdot x)$$

tend vers  $\alpha \neq 0$ . Or la distance  $d(x, h_n^{-1} g_n \cdot x)$  tend vers  $+\infty$ . D'après la proposition 3.1.17,  $h_n^{-1} g_n$  est donc hyperbolique pour  $n$  assez grand, ce qui contredit l'hypothèse.

L'adhérence de l'orbite  $\Gamma \cdot x$  contient donc un unique point de  $\partial_\infty M$ , qui est fixé par le groupe  $\Gamma$ . Cela conclut la preuve du lemme 3.1.18.  $\square$

FIGURE 3.3 – L'isométrie  $h_n^{-1}g_n$  est hyperbolique.

*Preuve du lemme 3.1.19.*

Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $\rho$  une représentation parabolique de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . D'après le lemme 3.1.18, il existe un morphisme  $m : \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ , on a

$$l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)| .$$

Montrons qu'alors

$$\text{Lip}(j, \rho) = \text{Lip}(j, m) .$$

Soit  $p \in \partial_\infty M$  un point fixe de  $\rho$ . Rappelons que le morphisme  $m$  est alors donné par

$$m(\gamma) = B_{p,x}(\rho(\gamma) \cdot x) ,$$

où  $x$  est un point quelconque de  $M$ .

Considérons d'abord  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  une application  $(j, \rho)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne. Fixons un point base  $x_0 \in M$ , et posons

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto B_{p,x_0}(f(x)) . \end{aligned}$$

Vérifions que  $\bar{f}$  est  $(j, m)$ -équivariante. Soit  $\gamma$  un élément de  $\pi_1(S)$ . On a alors

$$\begin{aligned} \bar{f}(j(\gamma) \cdot x) &= B_{p,x_0}(f(j(\gamma) \cdot x)) \\ &= B_{p,x_0}(\rho(\gamma) \cdot f(x)) \\ &= B_{p,x_0}(f(x)) + B_{p,f(x)}(\rho(\gamma) \cdot f(x)) \\ &= \bar{f}(x) + m(\gamma) . \end{aligned}$$

La fonction  $\bar{f}$  est donc  $(j, m)$ -équivariante. De plus, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^2$ , on a

$$\begin{aligned} |\bar{f}(y) - \bar{f}(x)| &= |B_{p,x_0}(f(y)) - B_{p,x_0}(f(x))| \\ &= |B_{p,f(x)}(f(y))| \\ &\leq d(f(x), f(y)) . \end{aligned}$$

L'application  $\bar{f}$  est donc encore  $C$ -lipschitzienne. On en déduit que

$$\text{Lip}(j, m) \leq \text{Lip}(j, \rho) .$$

Montrons maintenant l'inégalité inverse. Soit  $\bar{f}$  une fonction  $(j, m)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\mathbb{R}$ . Commençons par montrer qu'il existe une fonction  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{H}^2$ ,

$$\bar{f}(x) = B_{p,x_0}(f(x)) .$$

Pour cela, notons  $S \times_\rho M$  le  $M$ -fibré plat

$$\mathbb{H}^2 \times M / j \times \rho(\pi_1(S)) ,$$

et  $S \times_m \mathbb{R}$  le  $\mathbb{R}$ -fibré plat

$$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R} / j \times m(\pi_1(S)) .$$

L'application de  $\mathbb{H}^2 \times M$  dans  $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$  qui à  $(x, y)$  associe  $(x, B_{p,x_0}(y))$  passe au quotient en une fibration

$$\pi : S \times_\rho M \rightarrow S \times_m \mathbb{R} ,$$

dont les fibres sont des horosphères tangentes à  $p$ . Ces horosphères sont contractiles et la fibration  $\pi$  admet donc une section lisse, qui permet de relever toute application  $(j, m)$ -équivariante  $\bar{f}$  (vue comme section du fibré  $S \times_m \mathbb{R} \rightarrow S$ ) en une application  $(j, \rho)$ -équivariante  $f$  telle que

$$\bar{f}(x) = B_{p,x_0}(f(x))$$

pour tout  $x \in \mathbb{H}^2$ .

L'application  $f$  ainsi construite est  $C'$ -lipschitzienne pour une certaine constante  $C'$ , mais  $C'$  est a priori strictement supérieur à  $C$ . Toutefois, comme  $p$  est fixé par la représentation  $\rho$ , l'application  $F_{p,t}$  commute avec  $\rho(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$  et, par conséquent, l'application  $F_{p,t} \circ f$  est encore une application  $(j, \rho)$ -équivariante. Or, d'après la proposition 3.1.11, on a pour tout  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{H}^2$ ,

$$\begin{aligned} d(F_{p,t} \circ f(x), F_{p,t} \circ f(y)) &\leq |B_{p,f(x)}(f(y))| + e^{-t}d(f(x), f(y)) \\ &\leq |\bar{f}(y) - \bar{f}(x)| + e^{-t}C' d(x, y) \\ &\leq (C + C'e^{-t}) d(x, y) . \end{aligned}$$

L'application  $F_{p,t} \circ f$  est donc  $(C + C'e^{-t})$ -lipschitzienne. Comme ceci est vrai pour tout  $C > \text{Lip}(j, m)$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on en déduit que  $\text{Lip}(j, \rho) \leq \text{Lip}(j, m)$ , ce qui conclut.  $\square$

### Semi-continuité inférieure par rapport à $\rho$

Pour prouver la semi-continuité inférieure, considérons une suite  $(\rho_n)$  de représentations convergeant vers une représentation  $\rho$ . Supposons qu'il existe une suite  $f_n$  d'appli-

cations  $(j, \rho_n)$ -équivariantes et  $C$ -lipschitziennes. Montrons qu'on a alors

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq C .$$

Fixons un point base  $x$  de  $\mathbb{H}^2$ . Si  $f_n(x)$  ne tend pas vers l'infini dans  $M$ , on peut, quitte à extraire, supposer que  $f_n(x)$  converge. Par le théorème d'Ascoli, la suite  $(f_n)$  possède alors une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une application  $C$ -lipschitzienne et  $\rho$ -équivariante, ce qui conclut. Le cas délicat est celui où  $f_n(x)$  tend vers l'infini dans  $M$ . On peut alors, quitte à extraire, supposer que  $f_n(x)$  converge vers un point  $p$  de  $\partial_\infty M$ .

**Proposition 3.1.20.** *Supposons que  $f_n(x)$  converge vers  $p \in \partial_\infty M$ . Alors le point  $p$  est fixé par  $\rho(\gamma)$  pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ .*

*Preuve.* Fixons  $\gamma \in \pi_1(S)$ . Commençons par remarquer que la suite

$$d(f_n(x), \rho_n(\gamma) \cdot f_n(x))$$

est bornée. En effet, on a

$$\begin{aligned} d(f_n(x), \rho_n(\gamma) \cdot f_n(x)) &= d(f_n(x), f_n(j(\gamma) \cdot x)) \\ &\leq C d(x, j(\gamma) \cdot x) . \end{aligned}$$

Comme  $p \in \partial_\infty M$  et puisque  $f_n(x)$  converge vers  $p$ , on en déduit que  $\rho_n(\gamma) \cdot f_n(x)$  converge aussi vers  $p$ . Or  $\rho_n(\gamma)$  converge uniformément vers  $\rho(\gamma)$  sur  $M \cup \partial_\infty M$  et  $\rho_n(\gamma) \cdot f_n(x)$  converge donc vers  $\rho(\gamma) \cdot p$ . On a donc

$$\rho(\gamma) \cdot p = p .$$

□

Supposons donc que  $\rho$  fixe un point  $p$  de  $\partial_\infty M$ . D'après le lemme 3.1.18, il existe alors un morphisme  $m : \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{R}$  tel que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ ,

$$l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)| .$$

Supposons d'abord que  $m \equiv 0$ . D'après le lemme 3.1.19, on a alors  $\text{Lip}(j, \rho) = \text{Lip}(j, m) = 0$  et la semi-continuité inférieure est triviale au point  $\rho$ . Dans le cas contraire, montrons qu'on peut trouver une suite  $(g_n)$  d'isométries de  $M$  tels que  $g_n \circ f_n$  converge. Considérons pour cela un élément de  $\pi_1(S)$  tel que  $\rho(\gamma)$  est une isométrie hyperbolique. Notons  $A$  son axe et  $l > 0$  sa longueur de translation. Alors pour  $n$  assez grand,  $\rho_n(\gamma)$  est une isométrie hyperbolique d'axe  $A_n$  et de longueur de translation  $l_n$ , tels que

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} A$$

et

$$l_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l .$$

Nous avons vu (proposition 3.1.20) que la distance  $d(f_n(x), \rho_n(\gamma) \cdot f_n(x))$  reste bornée quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . D'après la proposition 3.1.13, il existe donc une constante  $B'$  telle que pour tout  $n$  suffisamment grand,

$$d(f_n(x), A_n) \leq B' .$$

Soit maintenant  $(a_n)$  une suite de points tels que  $a_n \in A_n$  et tels que  $(a_n)$  converge vers un point  $a \in A$ . Soit  $y_n$  la projection de  $f_n(x)$  sur  $A_n$ . Comme  $\rho_n(\gamma)$  agit comme une translation de longueur  $l_n$  le long de  $A_n$ , il existe un entier  $k_n \in \mathbb{Z}$  tel que

$$d\left(\rho_n(\gamma)^{k_n} \cdot y_n, a_n\right) \leq l_n .$$

On obtient finalement

$$d\left(\rho_n(\gamma)^{k_n} \cdot f_n(x), a\right) \leq B' + l_n + d(a_n, a),$$

et comme  $d(a_n, a)$  et  $l_n$  sont bornés,  $\rho_n(\gamma)^{k_n} \circ f_n(x)$  reste bornée.

Or l'application  $\rho_n(\gamma)^{k_n} \circ f_n$  est  $(j, \rho_n(\gamma)^{-k_n} \cdot \rho)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne. Par le théorème d'Ascoli, quitte à extraire,  $(\rho_n(\gamma)^{k_n} \circ f_n)$  converge vers une application  $f'$ , qui est  $C$ -lipschitzienne et  $(j, \rho')$ -équivariante pour une certaine représentation  $\rho'$ . On a donc

$$\text{Lip}(j, \rho') \leq C .$$

Mais par ailleurs, on a pour tout  $\gamma' \in \pi_1(S)$ ,

$$\begin{aligned} l(\rho'(\gamma')) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} l\left(\rho_n(\gamma)^{-k_n} \rho_n(\gamma') \rho_n(\gamma)^{k_n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} l(\rho_n(\gamma')) \\ &= l(\rho(\gamma')) \\ &= |m(\gamma')| . \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le lemme 3.1.18, la représentation  $\rho'$  fixe également un point de  $M \cup \partial_\infty M$  et, d'après le lemme 3.1.19, on a

$$\text{Lip}(j, \rho') = \text{Lip}(j, m) = \text{Lip}(j, \rho) .$$

On obtient finalement

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq C ,$$

ce qui conclut la preuve de la semi-continuité inférieure en  $\rho$ .

## 3.2 Résultats

Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $(M, g_M)$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Notre but est de décrire le domaine  $\text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$  de  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$  formé des couples  $(j, \rho)$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$  et plus généralement le domaine des couples  $(j, \rho)$  tels que  $\text{Lip}(j, \rho)$  est strictement inférieur à une constante  $C$ . D'après le théorème 3.1.7, la fonction  $\text{Lip}$  est continue et ces domaines sont donc des ouverts.

### 3.2.1 Existence d'une représentation fuchsienne dominant $\rho$

Il est naturel de commencer par se demander si le domaine  $\text{Dom}(\rho)$  des représentations fuchiennes dominant strictement une représentation  $\rho$  donnée est non vide. Nous avons vu que cela n'est pas le cas lorsque  $\rho$  est une représentation fuchsienne à valeurs dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ . Plus généralement, on dira qu'une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$  est

*fuchsienne* si elle est injective, d'image discrète et stabilise un plan totalement géodésique de  $M$  de courbure constante  $-1$ .

**Proposition 3.2.1.** *Si  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$  est fuchsienne, il n'existe pas de représentation fuchsienne  $j$  telle que  $\text{Lip}(j, \rho) < 1$  et il existe une unique représentation fuchsienne  $j$  telle que  $\text{Lip}(j, \rho) = 1$ .*

*Preuve.* Soit  $P$  le plan totalement géodésique de courbure  $-1$  préservé par  $\rho$ . Notons  $\pi$  la projection orthogonale de  $M$  sur  $P$ . Comme  $M$  est un espace  $CAT(-1)$ , l'application  $\pi$  est bien définie et 1-lipschitzienne. Soit maintenant  $j$  une représentation fuchsienne et  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  une application  $(j, \rho)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne. Alors  $\pi \circ f$  est encore  $(j, \rho)$ -équivariante et  $C$ -lipschitzienne. Par conséquent, la constante de Lipschitz minimale est atteinte pour une application à valeurs dans  $P \simeq \mathbb{H}^2$ . On se ramène ainsi au cas de deux représentations fuchiennes  $j$  et  $\rho$  à valeurs dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$ , pour lequel la proposition se déduit aisément du fait que  $j(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$  et  $\rho(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$  ont même volume.  $\square$

Le théorème suivant affirme que ces représentations fuchiennes sont “maximales” parmi les représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ , au sens où toute autre représentation peut être strictement dominée par une représentation fuchsienne.

**Théorème 3.2.2** (Deroin–T., [DT13]). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $(M, g_M)$  un espace riemannien  $CAT(-1)$ . Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Si  $\rho$  n'est pas fuchsienne, il existe une représentation fuchsienne  $j : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  qui domine strictement  $\rho$ .*

**Remarque 3.2.3.** Ce théorème s'applique en particulier à des représentations  $\rho$  à valeurs dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \text{Isom}^+(\mathbb{H}^2)$  de classe d'Euler intermédiaire. Dans ce cas-là, il a été obtenu indépendamment et avec des méthodes différentes par Guéritaud–Kassel–Wolff [GKW13].

D'après ce théorème, les représentations fuchiennes sont “maximales” en un sens très fort qui implique de nombreuses propriétés de comparaison plus faibles. Pour illustrer cela, rappelons la définition de l'exposant critique d'une représentation.

**Définition 3.2.4.** Soit  $\rho$  une représentation injective d'image discrète de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Fixons un point  $x$  de  $M$  quelconque. L'*exposant critique* de  $\rho$  est le plus petit réel  $\delta(\rho)$  tel que la série de Poincaré

$$\sum_{\gamma \in \pi_1(S)} e^{-s d(x, \rho(\gamma) \cdot x)}$$

converge pour tout  $s > \delta(\rho)$ . (Ce nombre ne dépend pas du point  $x$  choisi.)

**Remarque 3.2.5.** Si les orbites de  $\rho$  ne sont pas discrètes, l'exposant critique de  $\rho$  est infini.

L'exposant critique coïncide dans de nombreux cas (en particulier lorsque  $\rho(\pi_1(S))$  est convexe cocompact) avec la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de  $\rho(\pi_1(S))$  (voir par exemple [Coo93]). En particulier, il est égal à 1 lorsque  $\rho$  est fuchsienne. On déduit alors du théorème 3.2.2 le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.6.** *L'exposant critique d'une représentation  $\rho$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$  est supérieur à 1. Il est de plus égal à 1 si et seulement si  $\rho$  est fuchsienne. En particulier, si  $\rho$  est injective d'image convexe cocompacte, alors la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de  $\rho$  dans  $\partial_\infty M$  est supérieure à 1, avec égalité si et seulement si  $\rho$  est fuchsienne.*

**Remarque 3.2.7.** Dans le cas où  $\rho$  est une représentation quasi-fuchsienne à valeurs dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^3)$ , ce corollaire est un célèbre théorème de Bowen [Bow79]. Une version plus générale est due à Bonk et Kleiner [BK04]. Ces théorèmes concernent la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite de représentations convexes cocompactes. Nous ne savons pas s'il existe des représentations pour lesquelles ce résultat est nouveau.

*Preuve du corollaire 3.2.6.* Supposons que  $\rho$  n'est pas fuchsienne. D'après le théorème 3.2.2, il existe une représentation fuchsienne  $j$  et une application  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  qui est  $(j, \rho)$ -équivariante et  $\lambda$ -lipschitzienne pour un  $\lambda < 1$ . Il est alors facile de vérifier que

$$\delta(\rho) \geq \frac{1}{\lambda} \delta(j) .$$

En effet, soit  $x$  un point de  $\mathbb{H}^2$ . Pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ , on a

$$d(f(x), \rho(\gamma) \cdot f(x)) \leq \lambda d(x, \gamma \cdot x) ,$$

et par conséquent,

$$\sum_{\gamma \in \pi_1(S)} e^{-s d(f(x), \rho(\gamma) \cdot f(x))} \geq \sum_{\gamma \in \pi_1(S)} e^{-\lambda s d(x, \gamma \cdot x)} .$$

La somme de gauche diverge donc dès que  $s\lambda < \delta(j)$ . □

Une autre conséquence intéressante du théorème 3.2.2 est d'étendre certains contrôles topologiques sur les représentations fuchiennes (comme la systole et la constante de Bers) à toutes les représentations  $\rho$ . Pour préciser cela, rappelons la définition de la systole et de la constante de Bers.

**Définition 3.2.8.** La *systole* en genre  $g$  est le plus petit nombre  $\sigma_g$  tel que toute métrique hyperbolique sur une surface compacte de genre  $g$  possède une courbe fermée simple de longueur inférieure à  $\sigma_g$ .

La *constante de Bers* en genre  $g$  est le plus petit nombre  $B_g$  tel que, pour toute métrique hyperbolique sur une surface compacte  $S$  de genre  $g$ , il existe un découpage de  $S$  en pantalons par des courbes de longueurs inférieures à  $B_g$ .

Dans ces définitions, les courbes "optimales" sont des géodésiques et leur longueur est simplement la longueur de translation de l'image de cette courbe par le morphisme d'holonomie. (Cette image n'est définie qu'à conjugaison près, mais la longueur de translation est justement invariante par conjugaison.) En utilisant le fait que toute représentation à valeurs dans  $\text{Isom}(M)$  peut être dominée par une représentation fuchsienne, on obtient directement le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.9.** Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans le groupe des isométries d'un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Alors

- il existe un élément  $\gamma$  de  $\pi_1(S)$  représenté par une courbe fermée simple et tel que la longueur de translation de  $\rho(\gamma)$  est inférieure à  $\sigma_g$ ,
- il existe un découpage de  $S$  en pantalons par des courbes représentant des éléments  $\gamma_i \in \pi_1(S)$  tels que pour tout  $i$ , la longueur de translation de  $\rho(\gamma_i)$  est inférieure à  $B_g$ .

La systole et la constante de Bers ont fait l'objet de nombreux travaux. En particulier, la constante de Bers a été calculée par Gendulphé en genre 2 [Gen11]. Cette valeur explicite et son extension à toutes les représentations à valeur dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  ont permis à Marché et Wolff de prouver une célèbre conjecture de Bowditch en genre 2 et d'en déduire les composantes ergodiques de l'action du groupe modulaire d'une surface de genre 2 sur la variété des caractères à valeur dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  [MW13].

### 3.2.2 Topologie du domaine $\mathrm{Dom}(S, \mathrm{Isom}(M))$

Étant donnée une représentation  $\rho$  d'un groupe de surface à valeurs dans  $\mathrm{Isom}(M)$ , on notera

$$\mathrm{Dom}_C(\rho)$$

le domaine de  $\mathcal{T}(S)$  formé des représentations fuchsienues  $j$  telles que  $\mathrm{Lip}(j, \rho) < C$ . On notera également

$$\mathrm{Dom}_C(S, \mathrm{Isom}(M))$$

le domaine de  $\mathcal{T}(S) \times \mathrm{Rep}(S, \mathrm{Isom}(M))$  formé des couples  $(j, \rho)$  tels que  $\mathrm{Lip}(j, \rho) < C$ . Lorsque la constante  $C$  n'est pas précisée, il sera sous-entendu qu'elle vaut 1.

Pour prouver le théorème 3.2.2, nous construisons dans [DT13] une application  $\Psi_\rho$  de l'espace de Teichmüller dans lui-même à l'aide d'outils provenant de la théorie des applications harmoniques tordues et nous montrons à l'aide d'un principe du maximum que l'image de  $\Psi_\rho$  est contenue dans  $\mathrm{Dom}(\rho)$ . Il s'avère que cette application  $\Psi_\rho$  paramètre exactement le domaine  $\mathrm{Dom}(\rho)$ , ce que nous prouverons en explicitant l'inverse de  $\Psi_\rho$ . En outre, des arguments classiques d'analyse harmonique garantissent que l'application  $\Psi_\rho$  est continue. Nous montrerons que sa réciproque est également continue. Notons  $\mathrm{Rep}_{nf}(S, \mathrm{Isom}(M))$  le domaine de  $\mathrm{Rep}(S, \mathrm{Isom}(M))$  formé des représentations qui ne sont pas fuchsienues. On obtient le théorème suivant :

**Théorème 3.2.10** ([Tho14]). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $(M, g_M)$  un espace riemannien  $\mathrm{CAT}(-1)$ . L'espace  $\mathrm{Dom}(S, \mathrm{Isom}(M))$ , qui fibre au dessus de  $\mathrm{Rep}_{nf}(S, \mathrm{Isom}(M))$ , est homéomorphe comme espace fibré au produit :*

$$\mathcal{T}(S) \times \mathrm{Rep}_{nf}(S, \mathrm{Isom}(M)) .$$

*En particulier, pour toute représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{Isom}(M)$  non fuchsienne, le domaine  $\mathrm{Dom}(\rho) \subset \mathcal{T}(S)$  est homéomorphe à  $\mathcal{T}(S)$ .*

**Remarque 3.2.11.** Ce théorème s'applique entre autre lorsque  $M$  est le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ , fournissant ainsi une réponse à la question 2.2 de [BBD<sup>+</sup>12]. Nous reviendrons sur ce cas particulier et son application à la géométrie anti-de Sitter dans le chapitre suivant.

Soit  $C$  une constante strictement supérieure à 1. Si la métrique  $g_M$  est de courbure inférieure à  $-1$ , alors la métrique  $\frac{1}{C^2} g_M$  est de courbure inférieure à  $-C^2$ . Or il est clair que si  $j$  est une représentation fuchsienne et  $\rho$  une représentation à valeurs dans  $\mathrm{Isom}(M)$ , on a

$$\mathrm{Lip}_{\frac{1}{C^2} g_M}(j, \rho) = \frac{1}{C} \mathrm{Lip}_{g_M}(j, \rho) ,$$

et que par conséquent,

$$\mathrm{Dom}_C(S, \mathrm{Isom}(M, g_M)) = \mathrm{Dom}\left(S, \mathrm{Isom}\left(M, \frac{1}{C^2} g_M\right)\right) .$$

On peut donc appliquer le théorème précédent pour obtenir une description de  $\text{Dom}_C(S, \text{Isom}(M, g_M))$  pour une constante  $C > 1$ . Dans ce cas-là, aucune représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M, \frac{1}{C^2}g_M)$  n'est fuchsienne, puisque la courbure de  $\frac{1}{C^2}g_M$  est partout strictement inférieure à  $-1$ . On obtient donc le corollaire suivant :

**Corollaire 3.2.12.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $(M, g_M)$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$ . Pour tout  $C > 1$ , l'espace  $\text{Dom}_C(S, \text{Isom}(M))$ , qui fibre au dessus de  $\text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$ , est homéomorphe comme espace fibré au produit :*

$$\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) .$$

*En particulier, pour toute représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$ , le domaine  $\text{Dom}_C(\rho)$  est homéomorphe à  $\mathcal{T}(S)$ .*

On peut appliquer ce corollaire au cas où  $M$  est également l'espace hyperbolique et  $\rho$  une représentation fuchsienne. Étant donnée une constante  $C > 1$  et un point  $\rho$  dans  $\mathcal{T}(S)$ , le domaine  $\text{Dom}_C(\rho)$  n'est autre que la *boule ouverte à gauche* de centre  $\rho$  de rayon  $\log C$  pour la distance asymétrique de Thurston, c'est-à-dire l'ouvert

$$\{j \in \mathcal{T}(S) \mid d_{Th}(j, \rho) < \log C\} .$$

On en déduit le fait suivant :

**Corollaire 3.2.13.** *Les boules ouvertes à gauche pour la distance asymétrique de Thurston sont contractiles.*

**Remarque 3.2.14.** D'après un théorème de Wolpert [Wol87], les fonctions longueurs  $j \mapsto l(j(\gamma))$  sur l'espace de Teichmüller sont convexes pour la métrique de Weil–Petersson. On en déduit que les boules à droite pour la distance de Thurston sont contractiles. Cependant, le caractère asymétrique de cette distance ne permet pas d'en déduire le corollaire 3.2.13. À notre connaissance, ce résultat est nouveau.

Les théorèmes 3.2.2 et 3.2.10 seront prouvés dans la section 3.4.

### 3.3 Applications harmoniques équivariantes

Cette section constitue un bref rappel de la théorie des applications harmoniques et plus particulièrement des applications harmoniques tordues sur une surface de Riemann. Notre but est d'introduire tous les outils qui seront nécessaires à la preuve des théorèmes 3.2.2 et 3.2.10. Pour plus de détails sur les applications harmoniques, on pourra consulter l'article de Daskalopoulos et Wentworth [DW07].

#### 3.3.1 Applications harmoniques

Une application harmonique entre deux variétés riemanniennes est un point critique de la *fonctionnelle d'énergie*, qui associe à une fonction  $f$  la moyenne de la norme au carré de  $df$ . Nous nous intéresserons ici au cas d'applications harmoniques définies sur des surfaces. Nous choisissons donc de nous restreindre d'emblée à ce cadre-là, bien que les définitions et les résultats d'existence soient valables dans un cadre plus général.

Soit  $S$  une surface orientée munie d'une métrique riemannienne  $g_0$ . Une 2-forme symétrique sur  $S$  est une section lisse du fibré  $\text{Sym}^2 T^*S$ . Une telle forme sera dite *positive* si elle est positive en tout point.

**Définition 3.3.1.** Soit  $g_1$  une 2-forme symétrique positive sur  $S$ . Soit  $A$  le champ d'endomorphismes symétriques de  $(TS, g_0)$  tel que  $g_1 = g_0(\cdot, A\cdot)$ . La *densité d'énergie* de  $g_1$  (par rapport à la métrique riemannienne  $g_0$ ) est la fonction

$$x \mapsto e_{g_0}(g_1)(x) = \frac{1}{2} \text{Tr}(A_x) .$$

Soit  $f$  une application lisse de  $(S, g_0)$  à valeurs dans une variété riemannienne  $(M, g_M)$ . La *densité d'énergie* de  $f$  est la densité d'énergie du tiré en arrière de  $g_M$  par  $f$  :

$$e_{g_0}(f)(x) = e_{g_0}(f^*g_M)(x) .$$

Lorsque cela ne prêterait pas à confusion nous omettrons d'indiquer la densité d'énergie par la métrique  $g_0$  et nous écrirons simplement “ $e(f)$ ”.

**Définition 3.3.2.** L'*énergie totale* de l'application  $f$  est l'intégrale sur la surface  $S$  de la densité d'énergie :

$$E(f) = \int_S e(f)(x) \text{Vol}_{g_0}(x) ,$$

où  $\text{Vol}_{g_0}$  désigne la forme volume induite par la métrique  $g_0$ .

Considérons maintenant une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$  et une application lisse  $\rho$ -équivariante  $f : \tilde{S} \rightarrow M$ . Comme  $\rho(\pi_1(S))$  agit sur  $M$  par isométries, la 2-forme symétrique  $f^*g_M$  sur  $\tilde{S}$  est préservée par l'action de  $\pi_1(S)$  et la densité d'énergie  $e_{\tilde{g}_0}(f)$  est donc invariante par l'action du groupe fondamental. On peut alors définir la densité d'énergie de  $f$  sur  $S$  comme la fonction  $e_{g_0}(f)$  induite par passage au quotient et l'énergie totale  $E(f)$  comme l'intégrale de  $e_{g_0}(f)$  contre le volume de la métrique  $g_0$ .

À partir de maintenant,  $S$  désignera une surface compacte orientée de genre supérieur à 2. Supposons que  $f : S \rightarrow M$  minimise l'énergie parmi toutes les applications lisses qui lui sont homotopes. Alors  $f$  doit vérifier une équation au dérivées partielles qui s'exprime comme l'annulation d'un opérateur appelé *champ de tension*.

**Définition 3.3.3.** Soit  $f : (S, g_0) \rightarrow (M, g_M)$  une application lisse. Voyons  $df$  comme un morphisme de fibrés de  $TS$  dans  $f^*TM$  et munissons  $TS$  et  $f^*TM$  des connexions de Levi-Civita associées respectivement à  $g_0$  et à  $g_M$ .

– La *seconde forme fondamentale* de  $f$  est la section de  $\text{Sym}^2 T^*S \otimes f^*TM$  définie par

$$II^f(X, Y) = \nabla_X df(Y) - df(\nabla_X Y) , \tag{3.3}$$

– Le *champ de tension* de  $f$  est la trace de la seconde forme fondamentale :

$$\tau(f) := \text{Tr}_{g_0} II^f = II^f(e_1, e_1) + II^f(e_2, e_2) \tag{3.4}$$

où  $(e_1, e_2)$  un repère orthonormé quelconque de  $(TS, g_0)$ ,

– L'application  $f$  est dite *harmonique* si son champ de tension est identiquement nul.

**Proposition 3.3.4.** Si  $f : S \rightarrow M$  minimise la fonctionnelle d'énergie parmi toutes les applications homotopes à  $f$ , alors  $f$  est harmonique.

De même, une application  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{S}$  dans  $M$  qui minimise l'énergie parmi toutes les applications équivariantes qui lui sont homotopes est harmonique.

Remarquons enfin que l'énergie totale d'une application  $f$  ne dépend en fait que de la classe conforme de la métrique  $g_0$  sur  $S$ . En effet, comme  $S$  est de dimension 2, si  $g_0$  est

multipliée par une fonction strictement positive  $\sigma$ , l'énergie de  $f$  est multipliée par  $\frac{1}{\sigma}$ , mais le volume est multiplié par  $\sigma$  et l'énergie totale de  $f$  est donc préservée. Il en découle que l'harmonicité d'une fonction  $f$  définie sur une surface  $S$  dépend également uniquement de la classe conforme de la métrique riemannienne sur  $S$ .

### Théorèmes d'existence

Dans [ES64], Eells et Sampson étudient le flot de l'équation parabolique :

$$\frac{d}{dt}f_t(x) = \tau(f_t)_x$$

et prouvent que, sous une hypothèse de courbure, ce flot est bien défini pour tout temps et que la constante de Lipschitz de  $f_t$  peut être contrôlée uniformément le long d'une trajectoire. Ils en déduisent alors le premier théorème général d'existence d'applications harmoniques :

**Théorème 3.3.5** (Eells–Sampson). *Soit  $S$  une surface de Riemann compacte,  $(M, g_M)$  une variété riemannienne compacte de courbure sectionnelle négative et  $f : S \rightarrow M$  une application continue. Alors il existe une application harmonique  $f'$  homotope à  $f$ , qui minimise l'énergie dans sa classe d'homotopie. Si, de plus, la courbure de  $M$  est strictement négative, alors cette application harmonique est unique, sauf si elle est à valeurs dans une géodésique de  $M$ .*

Le profond travail d'analyse de l'article de Eells–Sampson a permis d'obtenir de nombreuses généralisations de ce théorème. Nous nous intéresserons ici particulièrement à une version équivariante, due à Corlette dans le cas particulier où  $M$  est l'espace symétrique d'un groupe de Lie semi-simple [Cor88] et à Labourie dans le cas plus général où  $M$  est un espace riemannien de courbure négative [Lab91].

L'idée de ce théorème est de considérer le flot de Eells–Sampson pour des applications équivariantes. La courbure négative de l'espace d'arrivée garantit un contrôle uniforme sur la constante de Lipschitz des applications équivariantes  $f_t$ . Pour conclure comme dans le cas de Eells et Sampson, il reste à voir que cette famille d'applications équivariantes et équi-lipschitziennes ne peut pas “partir à l'infini”. Or nous avons vu au cours de la preuve du théorème 3.1.7 que, lorsque  $M$  est un espace CAT(−1), si une famille d'applications  $\rho$ -équivariantes et équi-lipschitziennes est non bornée, alors la représentation  $\rho$  est parabolique (proposition 3.1.20). Le théorème suivant découle de cette remarque :

**Théorème 3.3.6** (Corlette [Cor88], Labourie [Lab91]). *Soit  $S$  une surface fermée munie d'une structure conforme,  $(M, g_M)$  un espace riemannien CAT(−1) et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$  qui ne fixe pas un point de  $\partial_\infty M$ . Alors il existe une unique application harmonique  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{S}$  dans  $M$ .*

**Remarque 3.3.7.** Ce théorème est en fait un cas particulier du théorème de Corlette et Labourie qui traite plus généralement d'applications harmoniques tordues à valeurs dans un espace de courbure négative.

### Cas des représentations paraboliques

Si  $\rho$  est une représentation parabolique, il n'existe pas nécessairement d'application  $\rho$ -équivariante harmonique. Ces représentations peuvent néanmoins être intégrées à la théorie, grâce aux quelques remarques qui suivent.

Considérons d'abord une représentation  $\rho$  qui fixe les extrémités d'une géodésique  $\gamma$ . Il existe alors plusieurs applications harmoniques  $\rho$ -équivariantes de  $\tilde{S}$  dans  $M$ , qui prennent leurs valeurs dans la géodésique  $\gamma$  et sont toutes identiques modulo une translation le long de  $\gamma$ . Ces applications harmoniques induisent des fonctions harmoniques à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui sont les primitives de la 1-forme harmonique  $\omega_\rho$  sur  $S$  dont les périodes sont données par le morphisme  $m$  tel que

$$l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)|$$

pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ . En particulier, si  $f$  est une application  $\rho$ -équivariante harmonique, on a

$$f^*g_M = \omega_\rho^2,$$

qui ne dépend pas du choix de  $f$ .

Lorsque  $\rho$  fixe un unique point dans  $\partial_\infty M$ , il n'existe pas d'application harmonique  $\rho$ -équivariante. En revanche, d'après le lemme 3.1.18, il existe bien un morphisme  $m$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  tel que  $l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)|$  pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ . On peut alors considérer la 1-forme harmonique  $\omega_\rho$  dont les périodes sont données par  $m$ .

**Proposition 3.3.8.** *Soit  $\rho$  une représentation parabolique de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Alors l'infimum des énergies des applications  $\rho$ -équivariantes de  $\tilde{S}$  dans  $M$  est égal à*

$$\int_S e_{g_0}(\omega_\rho^2) \text{Vol}_{g_0}.$$

Plus précisément, si  $f_n$  est une suite d'applications lisses et  $\rho$ -équivariantes dont l'énergie totale converge vers l'infimum des énergies de toutes les applications lisses  $\rho$ -équivariantes, alors  $f_n^*g_M$  converge  $L^2$  vers  $\omega_\rho^2$ .

*Preuve.* L'intégrale

$$\int_S e_{g_0}(\omega_\rho^2) \text{Vol}_{g_0}$$

n'est autre que l'énergie d'une fonction harmonique  $m$ -équivariante de  $\tilde{S}$  dans  $\mathbb{R}$ . Pour montrer qu'elle est égale à l'infimum des énergies d'applications  $\rho$ -équivariantes de  $\tilde{S}$  dans  $M$ , la preuve est identique à la celle du lemme 3.1.19.

Soit  $p \in \partial_\infty M$  un point fixe de  $\rho$  et  $x_0$  un point base quelconque de  $M$ . Pour toute application lisse et  $\rho$ -équivariante  $f : \tilde{S} \rightarrow M$ , on pose

$$\bar{f} = B_{p,x_0} \circ f.$$

On observe que  $\bar{f}$  est  $m$ -équivariante et que

$$e_{g_0}(\bar{f}) \leq e_{g_0}(f).$$

Réciproquement, si  $g : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $m$ -équivariante, on peut trouver une application  $\rho$ -équivariante  $f : \tilde{S} \rightarrow M$  telle que  $g = \bar{f}$  et dont l'énergie soit arbitrairement proche de celle de  $g$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \inf \left\{ E_{g_0}(f), f : \tilde{S} \rightarrow M \text{ } \rho\text{-équivariante} \right\} &= \inf \left\{ E_{g_0}(g), g : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{R} \text{ } m\text{-équivariante} \right\} \\ &= \int_S e_{g_0}(\omega_\rho^2) \text{Vol}_{g_0}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pour prouver le second point, considérons une suite minimisante  $f_n$ . Alors la suite

$$\bar{f}_n = B_{p,x_0} \circ f_n$$

est encore minimisante, d'où l'on déduit que

$$\bar{f}_n^* dx^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \omega_\rho^2$$

dans  $L^2$ . Par ailleurs,

$$\left| E_{g_0}(f_n) - E_{g_0}(\bar{f}_n) \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'après (3.5), d'où

$$\int_S \text{Tr}_{g_0} (f_n^* g_M - \bar{f}_n^* dx^2) \text{Vol}_{g_0} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Il en découle que  $f_n^* g_M$  converge vers  $\omega^2$  dans  $L^2$ .  $\square$

Il est donc naturel d'étendre la notion d'application harmonique  $\rho$ -équivariante aux représentations  $\rho$  fixant un point de  $\partial_\infty M$  en considérant une primitive de  $\omega_\rho$ . Pour simplifier certains énoncés, lorsque  $\rho$  fixe un point de  $\partial_\infty M$ , il nous arrivera d'appeler abusivement "application harmonique  $\rho$ -équivariante" une primitive de la 1-forme harmonique  $\omega_\rho$  telle que

$$l(\rho(\gamma)) = \left| \int_\gamma \omega_\rho \right|$$

pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ .

### 3.3.2 Fonctionnelles sur l'espace de Teichmüller

À l'instar de la constante de Lipschitz minimale, l'énergie d'une application harmonique équivariante peut être vue comme un outil de comparaison entre une représentation fuchsienne et une autre représentation. Si la constante de Lipschitz minimale fournit une comparaison beaucoup plus explicite, la fonctionnelle d'énergie a l'avantage d'être profondément liée à la structure analytique complexe de l'espace de Teichmüller. C'est ce que nous allons illustrer dans cette section.

#### Différentielle de Hopf

Soit  $(S, g_0)$  une surface munie d'une métrique riemannienne,  $(M, g_M)$  une variété riemannienne et  $f$  une application lisse de  $S$  dans  $M$ . La classe conforme de  $g_0$  induit sur  $S$  une structure complexe. Le tenseur  $f^* g_M$  se décompose alors de façon unique en une partie de type  $(1, 1)$ , une partie de type  $(2, 0)$  et une partie de type  $(0, 2)$ . Comme  $f^* g_M$  est réel, ses parties  $(2, 0)$  et  $(0, 2)$  sont conjuguées. On peut vérifier par ailleurs que la partie  $(1, 1)$  de  $f$  est  $e(f)g_0$  (voir proposition 3.4.5). On obtient donc

$$f^* g_M = e(f)g_0 + \Phi_f + \bar{\Phi}_f ,$$

où  $\Phi_f$  est une *différentielle quadratique* (i.e. une section du carré du fibré canonique de la surface de Riemann  $(S, [g_0])$ ), appelée *différentielle de Hopf* de  $f$ .

La proposition suivante, classique, est due à Hopf.

**Proposition 3.3.9** (Voir [DW07], p.21). *Si  $f$  est harmonique, sa différentielle de Hopf est holomorphe. La réciproque est vraie lorsque  $M$  est de dimension 1 ou 2.*

Si  $f$  est une application  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{S}$  dans  $M$ , la différentielle de Hopf de  $f$  est invariante sous l'action de  $\pi_1(S)$  et passe donc au quotient en une différentielle quadratique sur  $S$ . Lorsque cela ne prête pas à confusion, on appellera encore différentielle de

Hopf de  $f$  la différentielle quadratique induite par passage au quotient.

Rappelons que l'espace de Teichmüller de  $S$  peut être vu de façon équivalente comme l'espace des structures complexes sur  $S$  modulo isotopie, comme l'espace des métriques hyperboliques sur  $S$  modulo isotopie, ou encore comme l'espace des représentations fuchsienues de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  modulo conjugaison. Dans ce chapitre, nous notons un point de  $\mathcal{T}(S)$  par la lettre  $X$  lorsqu'on le considère comme la surface  $S$  munie d'une structure complexe, ou par la lettre  $j$  lorsqu'on le considère comme une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathbb{H}^2$  de classe d'Euler maximale.

L'espace de Teichmüller est homéomorphe à  $\mathbb{R}^{6g-6}$  et possède une structure complexe [Tei82]. Si  $X$  est un point de  $\mathcal{T}(S)$ , l'ensemble des différentielles quadratiques holomorphes sur  $X$  forme un espace vectoriel complexe de dimension  $3g-3$  que nous noterons  $Q(X)$ . Le fibré  $Q\mathcal{T}(S)$  défini par  $Q_X(\mathcal{T}(S)) = Q(X)$  est un fibré holomorphe sur  $\mathcal{T}(S)$  qui s'identifie, d'après les travaux de Teichmüller, au fibré cotangent à  $\mathcal{T}(S)$ .

### Fonctionnelles sur l'espace de Teichmüller

Soit  $(M, g_M)$  un espace riemannien  $\text{CAT}(-1)$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . Pour toute structure conforme  $[g]$  sur  $S$ , on peut considérer  $f_{[g]}$  l'application harmonique  $\rho$ -équivariante de  $(\tilde{S}, [\tilde{g}])$  dans  $(M, g_M)$ . (Lorsque  $\rho$  est parabolique, on considère à la place une primitive de la forme harmonique  $\omega_\rho$ .) Si  $h$  est un difféomorphisme de  $S$ , on a clairement

$$f_{[h^*g]} = f_{[g]} \circ h .$$

Il suit que l'énergie totale de  $f_{[g]}$  est invariante par isotopie. Cette énergie ne dépend également que de la classe de conjugaison de la représentation  $\rho$ . On peut donc définir une fonction

$$\mathbf{E} : \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

qui à un point  $X$  de  $\mathcal{T}(S)$  et à une représentation  $\rho$  associe l'énergie de l'application harmonique  $\rho$ -équivariante  $f_X$  de  $\tilde{X}$  dans  $M$ . De même, il existe une application bien définie

$$\Phi : \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) \rightarrow Q\mathcal{T}(S)$$

qui à  $(X, \rho)$  associe la différentielle de Hopf de l'application harmonique  $f_X$ .

**Proposition 3.3.10.** *Les fonctions  $\mathbf{E}$  et  $\Phi$  sont continues.*

*Preuve.* Il s'agit d'une conséquence classique du caractère elliptique des équations définissant l'harmonicité. Si  $(X_n, \rho_n)$  converge vers  $(X, \rho)$ , les dérivées des applications harmoniques  $\rho_n$ -équivariantes  $f_n : \tilde{X}_n \rightarrow M$  peuvent être uniformément contrôlées par leur énergie totale et la suite  $f_n$  est donc équi-lipschitzienne. Une fois cela établi, la preuve est similaire à celle de la continuité de la fonction Lip. Si  $\rho$  n'est pas parabolique, on en déduit que la suite  $f_n$  converge uniformément en topologie  $C^1$  vers une application  $\rho$ -équivariante  $f : \tilde{X} \rightarrow M$ , et la conclusion suit.

Dans le cas où  $\rho$  fixe un point à l'infini, on peut encore reprendre la stratégie de la preuve de la semi-continuité inférieure de la fonction Lip pour conclure : on trouve une suite d'isométries  $(g_n)$  telle que  $g_n \circ f_n$  converge vers une application harmonique  $\rho'$ -équivariante, puis on utilise le fait que  $\mathbf{E}(X, \rho)$  et  $\mathbf{E}(X, \rho')$  sont égaux puisqu'ils ne dépendent que du morphisme  $m$  tel que  $l(\rho(\gamma)) = l(\rho'(\gamma)) = |m(\gamma)|$ .  $\square$

**Proposition 3.3.11** (voir [Wen07]). *Pour tout  $\rho \in \text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$ , la fonction  $\mathbf{E}(\cdot, \rho)$  est  $C^1$  et sa différentielle en un point  $X_0$  de  $\mathcal{T}(S)$  est donnée par*

$$d\mathbf{E}(\cdot, \rho)(X_0) = -4\Phi(X_0, \rho) .$$

### Cas des représentations fuchsienues

Supposons maintenant que  $(M, g_M)$  est le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$ . L'espace de Teichmüller s'identifie alors à une composante connexe de  $\text{Rep}(S, \text{Isom}(M))$  et les applications  $\mathbf{E}$  et  $\Phi$  induisent donc des applications définies sur  $\mathcal{T}(S) \times \mathcal{T}(S)$  par simple restriction.

Soit  $\rho$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(\mathbb{H}^2)$  et  $X$  un point de  $\mathcal{T}(S)$ . D'après le théorème de Eells–Sampson, il existe une unique application harmonique de  $X$  dans  $\rho(\pi_1(X)) \backslash \mathbb{H}^2$  telle que le morphisme induit sur le groupe fondamental envoie un élément  $\gamma$  de  $\pi_1(S)$  sur  $\rho(\gamma)$ . Cette application harmonique se relève en une application de  $\tilde{X}$  dans  $\mathbb{H}^2$  qui n'est autre que l'unique application harmonique  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{X}$  dans  $\mathbb{H}^2$ . Le théorème de Schoen–Yau affirme que cette application est un difféomorphisme.

**Théorème 3.3.12** (Schoen–Yau, [SY78]). *Soient  $g_1$  et  $g_2$  deux métriques riemanniennes sur une surface compacte  $S$ . Supposons que  $g_2$  est de courbure négative. Alors l'unique application harmonique de  $(S, g_1)$  dans  $(S, g_2)$  homotope à l'identité est un difféomorphisme.*

**Remarque 3.3.13.** Dans le cas particulier où la métrique  $g_2$  est de courbure constante  $-1$  (le cas qui nous intéresse ici), ce théorème a été obtenu indépendamment par Sampson [Sam78].

**Corollaire 3.3.14.** *Soit  $g_1$  une métrique hyperbolique sur  $S$  et  $Y$  un point de  $\mathcal{T}(S)$ . Alors il existe une unique métrique hyperbolique  $g_2$  représentant  $Y$  telle que*

$$\text{Id} : (S, g_1) \rightarrow (S, g_2)$$

*est harmonique. Il existe aussi une unique métrique  $g'_2$  représentant  $Y$  telle que*

$$\text{Id} : (S, g'_2) \rightarrow (S, g_1)$$

*est harmonique.*

*Preuve.* Soit  $g_2$  une métrique représentant  $Y$ . D'après le théorème de Schoen–Yau, l'unique application  $h : (S, g_1) \rightarrow (S, g_2)$  qui est harmonique et homotope à l'identité est un homéomorphisme. La métrique  $h^*g_2$  représente encore le point  $Y$  de  $\mathcal{T}(S)$ , et par construction,

$$\text{Id} : (S, g_1) \rightarrow (S, h^*g_2)$$

est harmonique. Le second point se prouve exactement de la même façon.  $\square$

Fixons un point  $X$  de l'espace de Teichmüller. L'application  $\Phi(X, \cdot)$  envoie l'espace de Teichmüller dans l'espace vectoriel  $Q(X)$ . Sampson [Sam78] a prouvé que cette application est une immersion injective et Wolf [Wol89] a prouvé que c'est un homéomorphisme de  $\mathcal{T}(S)$  dans  $Q(X)$ . Ce résultat a été obtenu indépendamment par Hitchin comme une conséquence de la paramétrisation de la variété des caractères de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par certains fibrés de Higgs [Hit87].

**Théorème 3.3.15** (Sampson, Hitchin, Wolf). *Pour tout point  $X$  de  $\mathcal{T}(S)$ , l'application*

$$\Phi(X, \cdot) : \mathcal{T}(S) \rightarrow Q(X)$$

est un homéomorphisme.

La combinaison des théorèmes de Schoen–Yau et de Sampson, Hitchin et Wolf peut se reformuler comme une généralisation du théorème d'uniformisation :

**Théorème 3.3.16** (Schoen–Yau, Sampson, Hitchin, Wolf). *Soit  $g_1$  une métrique riemannienne sur une surface compacte orientée  $S$  de genre supérieur à 2 et  $\Phi$  une différentielle quadratique holomorphe sur  $S$  (pour la structure complexe induite par la classe conforme de  $g_1$ ). Alors il existe une unique métrique  $g_2$  sur  $S$  de courbure constante  $-1$  telle que*

$$g_2 = e_{g_1}(g_2)g_1 + \Phi + \bar{\Phi}.$$

Nous utiliserons enfin le résultat suivant :

**Théorème 3.3.17** (Tromba, [Tro92]). *Soit  $\rho$  une représentation fuchsienne. Alors la fonction  $\mathbf{E}(\cdot, \rho)$  définie sur  $\mathcal{T}(S)$  est propre.*

Ce théorème a été étendu à de nombreuses autres classes de représentations (voir [GW07]) mais nous ne l'utiliserons que dans le cas où  $\rho$  est fuchsienne.

### 3.4 Preuve des théorèmes de domination

Nous avons maintenant tous les outils en main pour définir un homéomorphisme de  $\mathcal{T}(S)$  dans  $\text{Dom}(\rho)$ . Fixons donc une représentation  $\rho$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{Isom}(M)$ . On définit l'application

$$\Psi_\rho : \mathcal{T}(S) \rightarrow \mathcal{T}(S)$$

qui à  $X$  associe l'unique  $j$  (donné par le théorème de Sampson–Hitchin–Wolf) tel que  $\Phi(X, j) = \Phi(X, \rho)$ . On définit également

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) &\rightarrow \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{Isom}(M)) \\ (X, \rho) &\mapsto (\Psi_\rho(X), \rho). \end{aligned}$$

**Proposition 3.4.1.** *Les applications  $\Psi_\rho$  et  $\Psi$  sont continues.*

*Preuve.* ces applications sont obtenues en composant l'application  $\Phi$ , qui est continue d'après la proposition 3.3.10, et la réciproque de  $\Phi(X, \cdot)$ , qui est un homéomorphisme d'après le théorème de Sampson–Hitchin–Wolf.  $\square$

Dans [DT13], nous prouvons le théorème suivant :

**Théorème 3.4.2** (Deroin–T.). *Si  $\rho$  n'est pas fuchsienne, alors l'image de  $\Psi_\rho$  est contenue dans  $\text{Dom}(\rho)$ .*

Nous prouvons ensuite dans [Tho14] :

**Théorème 3.4.3.** *L'application*

$$\Psi : \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}_{nf}(S, \text{Isom}(M)) \rightarrow \text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$$

*est un homéomorphisme.*

On obtient ainsi les théorèmes 3.2.2 et 3.2.10.

### 3.4.1 L'image de $\Psi_\rho$ est dans $\text{Dom}(\rho)$

Commençons par prouver le théorème 3.4.2. Pour cela, fixons une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{Isom}(M)$  et un point  $X$  de l'espace de Teichmüller. Soit  $g_0$  une métrique hyperbolique sur  $S$  représentant le point  $X$  et  $f : (\tilde{S}, \tilde{g}_0) \rightarrow (M, g_M)$  une application harmonique  $\rho$ -équivariante. (Si  $\rho$  fixe un point de  $\partial_\infty M$ , on remplace  $M$  par  $\mathbb{R}$  et  $f$  par une primitive de la forme harmonique  $\omega_\rho$ .) Notons  $\Phi$  la différentielle de Hopf de  $f$ . On a donc

$$f^*g_M = e_{g_0}(f)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}.$$

D'après le théorème de Sampson–Hitchin–Wolf combiné avec le théorème de Schoen–Yau, Il existe une unique métrique hyperbolique  $g_1$  sur  $S$  telle que

$$g_1 = e_{g_0}(g_1)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}.$$

Par définition de  $\Psi_\rho$ , la métrique  $g_1$  représente le point  $\Psi_\rho(X)$  dans l'espace de Teichmüller. Le théorème 3.4.2 est donc une conséquence directe du lemme suivant :

**Lemme 3.4.4.** *Si  $\rho$  n'est pas fuchsienne, alors*

$$f^*g_M < g_1$$

sur tout  $S$ .

En effet, connaissant cette inégalité et par compacité de  $S$ , il existe une constante  $\lambda < 1$  telle que  $f^*g_M \leq \lambda g_1$ . L'application  $f : (\tilde{S}, \tilde{g}_1) \simeq \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  est donc  $\rho$ -équivariante et contractante. Comme la métrique  $g_1$  représente le point  $\Psi_\rho(X) \in \mathcal{T}(S)$ , on a donc

$$\Psi_\rho(X) \in \text{Dom}(\rho).$$

Lorsque  $\rho$  fixe un point à l'infini,  $f$  n'est par une application  $\rho$ -équivariante à valeurs dans  $M$  mais une application  $m$ -équivariante à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , où  $m$  est le morphisme de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathbb{R}$  tel que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$ ,

$$l(\rho(\gamma)) = |m(\gamma)|.$$

On déduit donc du lemme 3.4.4 que  $\text{Lip}_{g_1}(m) < 1$ . Or, d'après le lemme 3.1.19, on a

$$\text{Lip}_{g_1}(m) = \text{Lip}_{g_1}(\rho).$$

La conclusion est donc toujours valable dans ce cas-là.

#### Preuve du lemme 3.4.4

Rappelons que  $g_0$  induit naturellement une métrique hermitienne sur le fibré en droites  $K_X^2$  (où  $K_X$  désigne le fibré canonique de  $X$ ). Étant donnée une différentielle quadratique  $\Phi$ , la fonction  $\|\Phi\|_{g_0}^2$  est donc bien définie sur  $S$ .

**Proposition 3.4.5.** *Soit  $g'$  une 2-forme symétrique positive sur  $S$ . Décomposons  $g'$  sous la forme  $g' = \alpha g + \Phi + \bar{\Phi}$ , où  $\alpha$  est une fonction positive et  $\Phi$  est une différentielle quadratique. On a alors*

$$e_{g_0}(g') = \alpha$$

et

$$\det_{g_0} g' = e(g')^2 - 4 \|\Phi\|_{g_0}^2. \quad (3.6)$$

*Preuve.* Soit  $z$  une coordonnée complexe locale.  $g_0$  s'écrit localement

$$g_0 = \sigma dzd\bar{z}$$

où  $\sigma$  est une fonction strictement positive. On a donc

$$g' = \alpha\sigma dzd\bar{z} + \varphi dz^2 + \bar{\varphi}d\bar{z}^2$$

où  $\alpha$  est une fonction réelle positive et  $\varphi$  une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Dans les coordonnées  $(x = \Re(z), y = \Im(z))$ , on obtient

$$g_0 = \sigma(dx^2 + dy^2)$$

et

$$g' = (\alpha\sigma + 2\Re(\varphi))dx^2 + (\alpha\sigma - 2\Re(\varphi))dy^2 - 4\Im(\varphi)dxdy .$$

On en déduit que

$$e_{g_0}(g') = \alpha$$

et

$$\det_{g_0}(g') = \alpha^2 - 4\frac{|\varphi|^2}{\sigma^2} = e(g')^2 - 4\|\Phi\|_{g_0}^2 .$$

□

Comme  $g'$  est positif, on obtient en particulier que  $e(g')^2 - 4\|\Phi\|_{g_0}^2 \geq 0$ . Il en résulte que le système d'équations

$$\begin{cases} u + v &= e(g') \\ uv &= \|\Phi\|_{g_0}^2 \end{cases}$$

admet deux solutions positives (éventuellement identiques). Nous utiliserons le lemme suivant :

**Lemme 3.4.6.** *Supposons que  $\Phi$  est holomorphe. Soient  $H$  et  $L$  les fonctions définies sur  $S$  par*

- $H \geq L$
- $H + L = e_{g_0}(g')$
- $HL = \|\Phi\|_{g_0}^2$  .

*Alors  $(H - L)^2 = \det_{g_0}g'$  et, partout où  $g'$  est non dégénérée,  $H$  et  $L$  sont solutions de l'équation aux dérivées partielles suivante :*

$$\Delta_0 \log(u) = -2\kappa(g') \left( u - \frac{\|\Phi\|_{g_0}^2}{u} \right) - 2 , \tag{3.7}$$

où  $\kappa(g')$  désigne la courbure de Gauss de la métrique  $g'$  et  $\Delta_0$  le laplacien de la métrique  $g_0$ .

*Preuve.* Le fait que  $(H - L)^2 = \det_{g_0}g'$  est une reformulation de (3.6). Le second point est un résultat classique qu'on trouve par exemple dans l'article de Schoen–Yau [SY78] (voir aussi [Wol89]). Notons  $U$  le domaine de  $S$  où  $g'$  est non dégénérée et  $f$  l'identité sur  $U$ , vu comme application de  $(U, g_0)$  dans  $(U, g')$ . On a alors

$$H = \|\partial f\|^2$$

et

$$L = \|\bar{\partial}f\|^2$$

(voir [SY78, équation (6)]). L'équation (3.7) découle du fait que l'application  $f$  est harmonique, puisque sa différentielle de Hopf est holomorphe (voir [SY78, équations (16) et (17)]).  $\square$

Revenons à la comparaison des métriques

$$f^*g_M = e(f)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}$$

et

$$g_1 = e(g_1)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}.$$

Introduisons les fonctions  $H_1$  et  $L_1$  telles que

$$H_1 \geq L_1,$$

$$e(g_1) = H_1 + L_1$$

et

$$H_1L_1 = \|\Phi\|_{g_0}^2,$$

ainsi que les fonctions  $H_2$  et  $L_2$  telles que

$$H_2 \geq L_2,$$

$$e(f) = H_2 + L_2$$

et

$$H_2L_2 = \|\Phi\|_{g_0}^2.$$

Le lemme 3.4.6 implique donc directement les faits suivants :

- $L_1, H_1, L_2, H_2$  sont positives,
- $\text{Vol}_{g_1} = (H_1 - L_1)\text{Vol}_{g_0}$  (en particulier,  $H_1 > L_1$ ),
- $\det_{g_0}f^*g_M = (H_2 - L_2)^2$ ,
- $H_1$  et  $L_1$  sont toutes deux solutions de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta_0 \log(u) = 2u - 2\frac{\|\Phi\|_{g_0}^2}{u} - 2, \quad (3.8)$$

- Sur l'ouvert  $U$  de  $S$  où  $f^*g_M$  est non dégénérée,  $H_2$  et  $L_2$  sont des fonctions lisses solutions de l'équation

$$\Delta_0 \log(u) = 2\beta u - 2\beta\frac{\|\Phi\|_{g_0}^2}{u} - 2, \quad (3.9)$$

où  $\beta = -\kappa(f^*(g_M))$ .

Rappelons que dans le cas où la représentation  $\rho$  fixe un point à l'infini de  $M$ , le tenseur  $f^*g_M$  est remplacé par le tenseur  $\omega_\rho^2$ . Dans ce cas,  $H_2$  et  $L_2$  sont encore bien définies et sont égales en tout point.

**Remarque 3.4.7.** Le domaine  $U$  où  $f^*g_M$  est non dégénérée est soit vide, soit dense, d'après [Sam78, Corollaire du théorème 3].

La preuve du théorème utilise dans un cadre plus général un principe du maximum

déjà utilisé par Sampson pour prouver l'injectivité de l'application  $\Phi(X, \cdot)$ . Pour pouvoir utiliser ce principe du maximum, le point clé est le lemme suivant, sans doute classique. On en trouve une version légèrement plus faible dans [Sam78] (théorème 7) :

**Lemme 3.4.8.** *Pour tout  $x$  dans  $U$ , on a  $\kappa(f^*g_M)(x) \leq -1$ . De plus, cette inégalité est stricte, sauf lorsque la seconde forme fondamentale de l'image de  $\tilde{S}$  par  $f$  s'annule au point  $f(\tilde{x})$  (où  $\tilde{x}$  désigne un relevé quelconque de  $x$  à  $\tilde{S}$ ). En particulier, si  $\kappa(f^*g_M)$  est identiquement égal à  $-1$  sur  $U$ , alors l'image de  $U$  par  $f$  est totalement géodésique.*

L'idée de la preuve de ce lemme est que l'image d'une application harmonique est toujours courbée "négativement" dans l'espace ambiant parce qu'elle admet en tout point deux directions dans lesquelles les courbures principales sont opposées. Par conséquent la courbure de la métrique restreinte à l'image, qui est la somme de la courbure sectionnelle du plan tangent et d'un terme de "courbure extrinsèque", est inférieure à  $-1$ . Donnons maintenant une preuve rigoureuse.

*Preuve du lemme 3.4.8.* Notons  $\tilde{U}$  l'image réciproque de  $U$  par l'application de revêtement de  $\tilde{S}$  dans  $S$ . Par définition de  $U$ , l'application  $f$  est une immersion en restriction à  $\tilde{U}$ . Soit  $V$  un ouvert de  $\tilde{U}$ , assez petit pour que  $N := f(V)$  soit une sous-variété plongée dans  $M$ . Puisque  $f : (V, f^*g_M) \rightarrow (N, g_{M|N})$  est une isométrie, il nous faut simplement prouver que  $(N, g_{M|N})$  a une courbure inférieure à  $-1$ . Soit  $(e_1, e_2)$  un repère orthonormé de  $TN$ . La courbure de  $N$  est reliée à la courbure sectionnelle de  $TN$  dans l'espace ambiant  $M$  par la relation suivante :

$$\kappa^N = \kappa^M(TN) + \langle II^N(e_1, e_1), II^N(e_2, e_2) \rangle - \|II^N(e_1, e_2)\|^2, \quad (3.10)$$

où  $II^N(u, v)$  désigne la seconde forme fondamentale de  $N$ . On peut encore réécrire cette identité :

$$\kappa^N = \kappa^M(TN) + \frac{\text{codim}(N)}{\text{Jac}(f)^2} \cdot \mathbb{E} \left( \det_{g_0}(\langle II^N(df(\cdot), df(\cdot)), n \rangle) \right) \quad (3.11)$$

où  $\mathbb{E}$  désigne la moyenne sur tous les vecteurs unitaires  $n$  orthogonaux à  $TN$  et où  $\text{Jac}(f)$  désigne le jacobien de  $f : (V, g_0) \rightarrow (N, g_{M|N})$ .

La seconde forme fondamentale de  $f$  (voir (3.3)) et celle de  $N$  sont quant à elles reliées par

$$II^f(X, Y) = II^N(df(X), df(Y)) + df \left( \nabla_X^{f^*g} Y - \nabla_X^{g_0} Y \right). \quad (3.12)$$

En particulier, puisque les deux termes du membre de droite sont orthogonaux et comme  $f$  est harmonique, on obtient

$$\text{Tr}_{g_0} II^N(df(\cdot), df(\cdot)) = 0.$$

Pour tout vecteur unitaire  $n \in TM$  orthogonal à  $TN$ , on a donc :

$$\text{Tr}_{g_0} \langle II^N(df(\cdot), df(\cdot)), n \rangle = 0.$$

Par conséquent, les valeurs propres de la forme quadratique  $\langle II^N(df(\cdot), df(\cdot)), n \rangle$  sont opposées et  $\det_{g_0}(\langle II^N(df(\cdot), df(\cdot)), n \rangle) \leq 0$ , avec égalité si et seulement si la forme quadratique  $\langle II^N(df(\cdot), df(\cdot)), n \rangle$  s'annule. On déduit alors de l'équation (3.11) que

$$\kappa^N \leq \kappa^M(TN) \leq -1,$$

avec égalité si et seulement si la seconde forme fondamentale de  $N$  s'annule. □

**Lemme 3.4.9.** *Si  $f$  n'induit pas un difféomorphisme de  $\tilde{S}$  dans un plan totalement géodésique de courbure  $-1$ , alors*

$$H_2 < H_1$$

en tout point de  $S$ .

*Preuve.* Commençons par remarquer que, sur le complémentaire de  $U$ , puisque  $f^*g_M$  est dégénérée, on a  $\det_{g_0}(f^*g_M) = 0$  et donc

$$H_2 = L_2 = \sqrt{\|\Phi\|_{g_0}^2} = \sqrt{L_1 H_1} < H_1 .$$

Concentrons-nous donc sur le domaine  $U$ .

Rappelons que  $H_1$  ne s'annule pas puisque  $H_1 > L_1 \geq 0$ . Soit  $x$  un point de  $S$  tel que  $H_2(x)/H_1(x)$  est maximal. Supposons par l'absurde que  $H_2(x) > H_1(x)$ . Alors, en particulier,  $x$  est dans  $U$ . Les équations (3.8) et (3.9) montrent qu'au point  $x$ ,

$$\Delta_0 \log \left( \frac{H_2}{H_1} \right) = 2(H_2 - H_1) + 2\|\Phi\|_{g_0}^2 \left( \frac{1}{H_1} - \frac{1}{H_2} \right) + 2(\beta - 1)(H_2 - L_2) , \quad (3.13)$$

où  $\beta = -\kappa(f^*g_M)$ . D'après le lemme 3.4.8, on a  $\beta \geq 1$ . Comme  $H_2 \geq L_2$  par hypothèse, le dernier terme de l'équation (3.13) est donc positif. Par conséquent, l'hypothèse  $H_2(x) > H_1(x)$  implique clairement que  $\Delta_0 \log \left( \frac{H_2}{H_1} \right) (x) > 0$ , ce qui contredit la maximalité de  $\log \left( \frac{H_2}{H_1} \right)$  en  $x$ . À ce maximum, on a donc nécessairement  $H_2 \leq H_1$  et donc  $H_2 \leq H_1$  sur tout  $S$ .

Pour obtenir l'inégalité stricte, nous allons utiliser la version suivante du principe du maximum strict, qui semble remonter à Picard :

**Lemme 3.4.10** (Picard). *Soit  $w$  une fonction réelle négative sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$ , telle que  $\Delta w \geq Kw$  pour une certaine constante  $K > 0$ . Alors soit  $w \equiv 0$  sur  $U$ , soit  $w < 0$  sur  $U$ .*

Dans ce lemme,  $\Delta$  désigne a priori le laplacien associé à la métrique plate, mais puisqu'il s'agit d'un résultat local, la même conclusion est valable pour n'importe quelle métrique conforme. Appliquons le lemme 3.4.10 à la fonction  $w = \log \left( \frac{H_2}{H_1} \right)$ . Puisque  $\beta \geq 1$ , on déduit de l'équation (3.13) que

$$\Delta_0 \log \left( \frac{H_2}{H_1} \right) \geq \left( 2 + \frac{2\|\Phi\|_{g_0}^2}{H_1 H_2} \right) (H_2 - H_1),$$

et on obtient finalement

$$\Delta_0 w \geq 2(H_1 + L_2)(e^w - 1) \geq Kw ,$$

où  $K := \max_S(H_1 + L_2)$ . Il découle du lemme 3.4.10 que si  $H_2$  n'est pas identiquement égal à  $H_1$  sur  $U$ , on a  $H_2 < H_1$  on  $U$ . Par ailleurs, sur le complémentaire de  $U$ , on a vu que  $H_2 < H_1$ . Dans le cas où  $H_2 = H_1$ , le complémentaire de  $U$  est donc vide et l'équation (3.13) montre que  $\kappa(f^*g_M) = -\beta = -1$ . D'après le lemme 3.4.8, l'image de  $f$  est alors un plan totalement géodésique de courbure  $-1$ . De plus, dans ce cas, on a également  $L_2 = L_1$  et donc  $f^*g_M = g_1$ , ce qui signifie que  $f : (S, g_1) \rightarrow M$  est un plongement isométrique. Cela conclut la preuve du lemme 3.4.9.  $\square$

D'après le lemme 3.4.9, si  $f : (\tilde{S}, \tilde{g}_1) \rightarrow (M, g_M)$  n'est pas un plongement isométrique

totale-ment géodésique, alors  $H_2 < H_1$ . Comme  $H_2L_2 = H_1L_1$  on a également  $L_2 > L_1$ . Par conséquent  $(H_2 - L_2)^2 < (H_1 - L_1)^2$ , et en ajoutant  $4H_2L_2 = 4H_1L_1$  à chaque membre, on obtient que

$$(H_2 + L_2)^2 < (H_1 + L_1)^2 .$$

Or, rappelons que  $f^*g_M = (H_2 + L_2)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}$  et  $g_1 = (H_1 + L_1)g_0 + \Phi + \bar{\Phi}$ . Il est donc clair que  $H_2 + L_2 < H_1 + L_1$  implique que  $f^*g_M < g_1$ . Cela conclut la preuve du lemme 3.4.4 et donc celle du théorème 3.4.2.

### 3.4.2 Construction de l'inverse de $\Psi$

Nous venons de prouver que, lorsque  $\rho$  n'est pas fuchsienne,  $\Psi_\rho$  prend ses valeurs dans  $\text{Dom}(\rho)$ . Nous allons maintenant prouver que  $\Psi_\rho : \mathcal{T}(S) \rightarrow \text{Dom}(\rho)$  est une bijection en explicitant son inverse. Pour cela, étant donnée une représentation fuchsienne  $j$ , introduisons la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  définie sur  $\mathcal{T}(S)$  par

$$\mathbf{F}_{j,\rho}(X) = \mathbf{E}(X, j) - \mathbf{E}(X, \rho) .$$

La proposition 3.3.11 permet de calculer la différentielle de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ . On a

$$d\mathbf{F}_{j,\rho}(X) = 4\Phi(X, \rho) - 4\Phi(X, j).$$

En particulier,  $X$  est un point critique de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  si et seulement si  $\Phi(X, j) = \Phi(X, \rho)$ , ce qui signifie exactement que  $\Psi_\rho(X) = j$ . Il nous suffit donc de prouver que, lorsque  $j$  domine strictement  $\rho$ , la fonctionnelle  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  admet un unique point critique.

**Lemme 3.4.11.** *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i) la représentation  $j$  domine strictement  $\rho$ ,
- (ii) la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  est propre,
- (iii) la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  admet un point critique.

*Démonstration.*

(iii)  $\Rightarrow$  (i). Nous venons de voir que si  $X$  est un point critique de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ , on a  $\Psi_\rho(X) = j$ . Dans ce cas, d'après le théorème 3.4.2,  $j$  domine strictement  $\rho$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). Cette implication est directe : si la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  est propre, elle admet un minimum, qui est en particulier un point critique.

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Supposons que  $j$  domine strictement  $\rho$ . Soit  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow M$  une application  $(j, \rho)$ -équivariante et  $\lambda$ -lipschitzienne pour un  $\lambda < 1$ . Soit  $X$  un point quelconque de  $\mathcal{T}(S)$  et  $h : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{H}^2$  l'unique application  $j$ -équivariante harmonique. On a donc  $\mathbf{E}(X, j) = E_X(h)$  (où  $E_X(h)$  désigne l'énergie totale de l'application  $h$ ). Par ailleurs, l'application  $f \circ h$  est une application  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{X}$  dans  $M$  et comme  $f$  est  $\lambda$ -lipschitzienne, on a

$$\mathbf{E}(X, \rho) \leq E_X(f \circ h) \leq \lambda E_X(h) = \lambda \mathbf{E}(X, j) .$$

On en déduit que

$$\mathbf{F}_{j,\rho}(X) \geq (1 - \lambda)\mathbf{E}(X, j) .$$

Or, d'après le théorème de Tromba (théorème 3.3.17), la fonction  $X \mapsto \mathbf{E}(X, j)$  est propre. Par conséquent, la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  est également propre. □

**Proposition 3.4.12.** *Si  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  admet un point critique, ce point critique est l'unique minimum de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ .*

*Démonstration.*

Soit  $X_1$  un point critique de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  et  $X_2$  un autre point de  $\mathcal{T}(S)$ . Choisissons une métrique  $g_1$  sur  $S$  dans la classe conforme donnée par  $X_1$  et soit  $g_0$  la métrique hyperbolique sur  $S$  obtenue en tirant en arrière la métrique de Poincaré sur  $\mathbb{H}^2$  par l'unique application  $j$ -équivariante de  $(\tilde{S}, \tilde{g}_1)$  dans  $\mathbb{H}^2$ . Soit maintenant  $g_2$  la métrique hyperbolique représentant  $X_2$  telle que  $\text{Id} : (S, g_2) \rightarrow (S, g_0)$  est harmonique. Soit enfin  $f : (\tilde{S}, \tilde{g}_1) \rightarrow (M, g_M)$  une application  $\rho$ -équivariante harmonique. Écrivons les décompositions des différentes métriques par rapport à  $g_1$ . On a

$$\begin{aligned} g_0 &= e_{g_1}(g_0)g_1 + \Phi + \bar{\Phi} , \\ f^*g_M &= e_{g_1}(f)g_1 + \Phi + \bar{\Phi} , \\ g_2 &= e_{g_1}(g_2)g_1 + \Psi + \bar{\Psi} , \end{aligned}$$

où  $\Phi$  et  $\Psi$  sont des différentielles quadratiques sur  $S$  et où  $\Phi$  est holomorphe par rapport à la structure conforme de  $g_1$ . Notons que la même différentielle  $\Phi$  apparaît dans les décompositions de  $g_0$  et  $f^*g_M$  puisque, par hypothèse,  $X_1$  est un point critique de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  et qu'on a par conséquent  $\Phi(X_1, j) = \Phi(X_1, \rho)$ .

**Lemme 3.4.13.** *On a l'identité suivante :*

$$E_{g_2}(g_0) - E_{g_2}(f^*g_M) = \int_S \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4\|\Psi\|_{g_1}^2}{e_{g_1}(g_2)^2}}} (e_{g_1}(g_0) - e_{g_1}(f^*g_M)) \text{Vol}_{g_1} . \quad (3.14)$$

*Preuve.* Il s'agit d'un calcul assez élémentaire. Plaçons nous dans une coordonnée locale complexe  $z = x + iy$  pour laquelle  $g_1$  est conforme. Notons  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit scalaire standard sur  $\mathbb{C}$ .

Toute 2-forme symétrique sur  $\mathbb{C}$  peut s'écrire sous la forme  $\langle \cdot, G \cdot \rangle$ , où  $G$  est un champ d'endomorphismes symétriques de  $\mathbb{R}^2$  dépendant des coordonnées  $(x, y)$ . Représentons un tel endomorphisme par sa matrice dans la base canonique  $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ . Localement, nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} g_0 &= \langle \cdot, G_0 \cdot \rangle , \\ g_1 &= \langle \cdot, G_1 \cdot \rangle , \\ g_2 &= \langle \cdot, G_2 \cdot \rangle , \\ f^*g_M &= \langle \cdot, G_f \cdot \rangle . \end{aligned}$$

Puisque  $g_1$  est conforme pour la coordonnée  $z$ , on a  $g_1 = \sigma \langle \cdot, \cdot \rangle$  pour une fonction strictement positive  $\sigma$ . Écrivons par ailleurs

$$\begin{aligned} \Phi &= \varphi dz^2 , \\ \Psi &= \psi dz^2 , \end{aligned}$$

où  $\varphi$  et  $\psi$  sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . (Puisque  $\Phi$  est holomorphe,  $\varphi$  l'est également, mais cela n'est pas utile à notre calcul.)

On peut maintenant exprimer  $G_0, G_1, G_2, G_f, \text{Vol}_{g_1}$  et  $\text{Vol}_{g_2}$  en fonction des paramètres

$\sigma$ ,  $e_{g_1}(g_0)$ ,  $e_{g_1}(g_2)$ ,  $e_{g_1}(f)$ ,  $\varphi$  et  $\psi$ . On vérifie aisément que

$$G_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix},$$

$$G_0 = \begin{pmatrix} \sigma e_{g_1}(g_0) + 2\Re(\varphi) & -2\Im(\varphi) \\ -2\Im(\varphi) & \sigma e_{g_1}(g_0) - 2\Re(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$G_f = \begin{pmatrix} \sigma e_{g_1}(g_f) + 2\Re(\varphi) & -2\Im(\varphi) \\ -2\Im(\varphi) & \sigma e_{g_1}(g_f) - 2\Re(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$G_2 = \begin{pmatrix} \sigma e_{g_1}(g_2) + 2\Re(\psi) & -2\Im(\psi) \\ -2\Im(\psi) & \sigma e_{g_1}(g_2) - 2\Re(\psi) \end{pmatrix},$$

$$\text{Vol}_{g_1} = \sigma \, dzd\bar{z},$$

$$\text{Vol}_{g_2} = \sqrt{\det G_2} \, dzd\bar{z} = \sqrt{\sigma^2 e_{g_1}(g_2)^2 - 4|\psi|^2} \, dzd\bar{z}.$$

Nous voulons maintenant exprimer  $e_{g_2}(g_0)$  et  $e_{g_2}(f^*g_M)$ . Pour ce faire, notons qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} g_0(\cdot, \cdot) &= \langle \cdot, G_0 \cdot \rangle \\ &= \langle \cdot, G_2(G_2^{-1}G_0) \cdot \rangle \\ &= g_2(\cdot, G_2^{-1}G_0 \cdot). \end{aligned}$$

Par définition de la densité d'énergie, on obtient

$$\begin{aligned} e_{g_2}(g_0) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(G_2^{-1}G_0) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ \frac{1}{\det G_2} \begin{pmatrix} \sigma e_{g_1}(g_2) - 2\Re(\psi) & 2\Im(\psi) \\ 2\Im(\psi) & \sigma e_{g_1}(g_2) + 2\Re(\psi) \end{pmatrix} \right. \\ &\quad \left. \times \begin{pmatrix} \sigma e_{g_1}(g_0) + 2\Re(\varphi) & -2\Im(\varphi) \\ -2\Im(\varphi) & \sigma e_{g_1}(g_0) - 2\Re(\varphi) \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sigma^2 e_{g_1}(g_2)^2 - 4|\psi|^2} \left( \sigma^2 e_{g_1}(g_2) e_{g_1}(g_0) - (\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi) \right). \end{aligned}$$

De même, on a

$$e_{g_2}(f^*g_M) = \frac{1}{\sigma^2 e_{g_1}(g_2)^2 - 4|\psi|^2} \left( \sigma^2 e_{g_1}(g_2) e_{g_1}(f) - (\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi) \right).$$

lorsqu'on calcule la différence, les termes en  $\varphi\bar{\psi} + \bar{\varphi}\psi$  se simplifient. (Il est essentiel ici que  $f^*g_M$  et  $g_0$  aient la même composante de type  $(2, 0)$ .) On obtient en définitive :

$$\begin{aligned}
(e_{g_2}(g_0) - e_{g_2}(f^*g_M)) \text{Vol}_{g_2} &= \frac{\sigma^2 e_{g_1}(g_2)(e_{g_2}(g_0) - e_{g_2}(f^*g_M))}{\sqrt{\sigma^2 e_{g_1}(g_2)^2 - 4|\psi|^2}} dz d\bar{z} \\
&= \frac{e_{g_2}(g_0) - e_{g_2}(f^*g_M)}{\sqrt{1 - 4\frac{\|\Psi\|_{g_1}^2}{e_{g_1}(g_2)^2}}} \text{Vol}_{g_1} .
\end{aligned}$$

Puisque les paramètres de cette dernière expression sont des fonctions bien définies sur  $S$  et que cette identité est vraie dans n'importe quelle carte locale, elle est vraie partout sur  $S$  et on obtient le lemme 3.4.13 en intégrant.  $\square$

On déduit du lemme 3.4.13 que

$$\begin{aligned}
E_{g_2}(g_0) - E_{g_2}(f^*g_M) &\geq \int_S (e_{g_1}(g_0) - e_{g_1}(f^*g_M)) \text{Vol}_{g_1} \\
&\geq E_{g_1}(g_0) - E_{g_1}(f^*g_M) \\
&\geq \mathbf{E}(X_1, j) - \mathbf{E}(X_1, \rho) \\
&\geq \mathbf{F}_{j,\rho}(X_1) ,
\end{aligned}$$

avec égalité si et seulement si  $\|\Psi\|_{g_1} \equiv 0$ , i.e. si  $g_1$  et  $g_2$  sont conformes. Or nous avons par ailleurs  $E_{g_2}(g_0) = \mathbf{E}(X_2, j)$  (par construction de  $g_2$ ) et  $E_{g_2}(f^*g_M) \geq \mathbf{E}(X_2, \rho)$ , d'où

$$E_{g_2}(g_0) - E_{g_2}(f^*g_M) \leq \mathbf{F}_{j,\rho}(X_2) .$$

En combinant les deux inégalités, on obtient finalement

$$\mathbf{F}_{j,\rho}(X_2) \geq \mathbf{F}_{j,\rho}(X_1) ,$$

avec égalité si et seulement si  $X_1 = X_2$ . Par conséquent,  $X_1$  est l'unique minimum de la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ .  $\square$

On peut donc définir l'application  $\Psi_\rho^{-1}$  qui à  $j \in \text{Dom}(\rho)$  associe l'unique minimum de la fonction  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ . Ce minimum est l'unique antécédent de  $j$  par  $\Psi_\rho$  et  $\Psi_\rho^{-1}$  est donc bien l'inverse de  $\Psi_\rho$ . Enfin, l'inverse de l'application  $\Psi$  est l'application

$$\begin{aligned}
\Psi^{-1} : \text{Dom}(S, \text{Isom}(M)) &\rightarrow \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}_{nf}(S, \text{Isom}(M)) \\
(j, \rho) &\mapsto (\Psi_\rho^{-1}(j), \rho) .
\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve du théorème 3.4.3, il reste à prouver que  $\Psi_\rho^{-1}$  est continue et varie continûment avec  $\rho$ . Or  $\Psi_\rho^{-1}(j)$  est défini comme l'unique minimum d'une fonction dépendant continûment de  $j$  et de  $\rho$ . La continuité de  $\Psi^{-1}$  sera donc la conséquence d'un résultat général de topologie, selon lequel l'unique minimum d'une application propre  $F_y$  dépendant d'un paramètre  $y$  varie continûment avec  $y$  lorsque la famille  $(F_y)_{y \in Y}$  est *localement uniformément propre*.

**Définition 3.4.14.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques et  $(F_y)_{y \in Y}$  une famille de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  dépendant continûment de  $y$  pour la topologie compacte-ouverte. Nous dirons que la famille  $(F_y)_{y \in Y}$  est *uniformément propre* si, pour tout  $C \in \mathbb{R}$ , il existe un compact  $K \subset X$  tel que pour tout  $y \in Y$  et tout  $x \in X \setminus K$ ,  $F_y(x) > C$ .

On dira que la famille  $(F_y)_{y \in Y}$  est *localement uniformément propre* si pour tout  $y_0 \in Y$ , il existe un voisinage  $U$  de  $y_0$  tel que la sous-famille  $(F_y)_{y \in U}$  est uniformément propre.

**Proposition 3.4.15.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques et  $(F_y)_{y \in Y}$  une famille localement uniformément propre de fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$  dépendant continûment de  $y$  (pour la topologie compacte-ouverte). Supposons que chaque  $F_y$  atteint son minimum en un unique point  $x_m(y) \in X$ . Alors la fonction*

$$y \mapsto x_m(y)$$

*est continue.*

*Preuve.* Soit  $m(y) = F_y(x_m(y))$  la valeur minimale de  $F_y$ . Fixons  $y_0 \in Y$ . Soit  $U$  un voisinage de  $y_0$  et  $K$  un compact de  $X$  tel que pour tout  $y \in U$  et tout  $x \in X \setminus K$ , on ait

$$F_y(x) > m(y_0) + 1 .$$

Pour tout  $\varepsilon > 0$ , posons

$$V_\varepsilon = \{x \in X \mid F_{y_0}(x) < m(y_0) + \varepsilon\} .$$

Comme  $F_{y_0}$  est propre et atteint son minimum au seul point  $x_m(y_0)$ , la famille  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  forme une base de voisinages de  $x_m(y_0)$ . Soit  $U_\varepsilon$  un voisinage de  $y_0$  contenu dans  $U$  tel que pour tout  $y \in U_\varepsilon$  et tout  $x \in K$ ,

$$|F_y(x) - F_{y_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} .$$

( $U_\varepsilon$  existe car l'application  $y \mapsto F_y$  est continue pour la topologie compacte-ouverte.) Comme  $x_m(y_0)$  est clairement dans  $K$ , on a

$$F_y(x_m(y_0)) \leq m(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tout  $y \in U_\varepsilon$ . La valeur minimale  $m(y)$  de  $F_y$  est donc inférieure à  $m(y_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ . En particulier, pour  $\varepsilon < 2$ , ce minimum est atteint dans  $K$  (puisque en dehors de  $K$ , on a  $F_y \geq m(y_0) + 1$ ). On a ainsi  $x_m(y) \in K$ , d'où l'on déduit que

$$F_{y_0}(x_m(y)) < F_y(x_m(y)) + \frac{\varepsilon}{2} < m(y_0) + \varepsilon .$$

Nous avons donc prouvé que pour tout  $y \in U_\varepsilon$ , on a  $x_m(y) \in V_\varepsilon$ . Comme  $(V_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  est une base de voisinages de  $x_m(y_0)$ , cela prouve que l'application  $y \mapsto x_m(y)$  est continue en  $y_0$ .  $\square$

**Proposition 3.4.16.** *La famille de fonctions*

$$(\mathbf{F}_{j,\rho})_{(j,\rho) \in \text{Dom}(S, \text{Isom}(M))}$$

*est localement uniformément propre.*

*Preuve.* Cela découle de la minoration obtenue dans la preuve de la propriété de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  (lemme 3.4.11) et de la continuité de la constante de Lipschitz minimale.

Soit  $(j_0, \rho_0)$  un point de  $\text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$ . Posons  $\lambda = \text{Lip}(j_0, \rho_0) < 1$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par continuité de la fonction  $\text{Lip}$ , il existe un voisinage  $U$  de  $(j_0, \rho_0)$  dans  $\text{Dom}(S, \text{Isom}(M))$  tel que pour tout  $(j, \rho) \in U$ ,

$$\text{Lip}(j, \rho) \leq \lambda + \varepsilon ,$$

et

$$\text{Lip}(j_0, j) \leq 2 .$$

De la première inégalité, on déduit, comme dans la preuve du lemme 3.4.11, que pour tout  $(j, \rho) \in U$  et tout  $X \in \mathcal{T}(S)$ , on a

$$\mathbf{F}_{j,\rho}(X) \geq (1 - \lambda - \varepsilon)\mathbf{E}(X, j) .$$

De la deuxième inégalité, on déduit de façon similaire que pour tout  $(j, \rho) \in U$  et tout  $X \in \mathcal{T}(S)$ , on a

$$\mathbf{E}(X, j_0) \leq 2\mathbf{E}(X, j) .$$

On obtient finalement que pour tout  $(j, \rho) \in U$  et tout  $X \in \mathcal{T}(S)$ ,

$$\mathbf{F}_{j,\rho}(X) \geq \frac{1 - \lambda - \varepsilon}{2} \mathbf{E}(X, j_0) .$$

Or, d'après le théorème de Tromba, la fonction  $\mathbf{E}(\cdot, j_0)$  est propre. Pour  $\varepsilon < 1 - \lambda$ , on a donc obtenu une minoration uniforme des  $\mathbf{F}_{j,\rho}$  par une fonction propre. La famille  $(\mathbf{F}_{j,\rho})_{(j,\rho) \in U}$  est donc uniformément propre.  $\square$

Cette dernière proposition conclut la preuve du théorème 3.4.3 et donc celle du théorème 3.2.10. En effet, puisque la famille  $(\mathbf{F}_{j,\rho})_{(j,\rho) \in \text{Dom}(S, \text{Isom}(M))}$  est localement uniformément propre, l'unique minimum de  $\mathbf{F}_{j,\rho}$ , qui est égal à  $\Psi_\rho^{-1}(j)$ , varie continûment avec  $(j, \rho)$  d'après la proposition 3.4.15.



## Chapitre 4

# Variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3

CE CHAPITRE EST CONSACRÉ à la géométrie anti-de Sitter. Nous y appliquons les résultats du chapitre précédent pour décrire l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur les variétés compactes de dimension 3. Rappelons qu'une variété anti-de Sitter est une variété lorentzienne de courbure constante  $-1$ . La théorie en dimension 3 est très différente des dimensions supérieures, à cause du fait que les variétés anti-de Sitter de dimension 3 sont localement modélées sur un groupe de Lie, à savoir  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing, dont le groupe d'isométries s'identifie, à indice fini près, à  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  agissant par translations à gauche et à droite.

Rappelons que le groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  peut être vu comme le groupe des isométries de  $\mathbb{H}^2$  qui préservent l'orientation. D'après les travaux successifs de Kulkarni et Raymond [KR85], Klingler [Kli96] et Kassel [Kas09], les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont, à revêtement fini près, de la forme

$$j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) ,$$

où  $S$  est une surface compacte orientée,  $j : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  une représentation fuchsienne et  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  une représentation *strictement dominée* par  $j$ , au sens de ch.3, définition 3.1.3. On en déduit en particulier qu'une variété anti-de Sitter compacte admet un revêtement fini qui est un fibré en cercles au dessus d'une surface compacte de genre supérieur à 2 et qu'elle est elle-même un *fibré de Seifert* (voir définition 4.3.5).

Dans l'article de survol sur la géométrie anti-de Sitter [BBD<sup>+</sup>12], les auteurs posent la question suivante, motivée par le théorème de Kassel (question 2.1) :

**Question.** Quelle est la topologie de l'espace  $\mathrm{Adm}(S)$  des couples  $(j, \rho)$  dans  $\mathcal{T}(S) \times \mathrm{Rep}(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  tels que  $j$  domine strictement  $\rho$ ? En particulier, quelles sont ses composantes connexes ?

Les résultats du chapitre précédent répondent à cette question et fournissent le résultat suivant, qui n'est autre que l'application du théorème 3.2.10 au cas où  $M$  est le plan hyperbolique :

**Théorème 4.0.17.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$ . Alors l'espace  $\mathrm{Adm}(S)$  est homéomorphe à*

$$\mathcal{T}(S) \times \coprod_{2-2g < k < 2g-2} \mathrm{Rep}_k(S) ,$$

où  $\text{Rep}_k(S)$  désigne l'ensemble des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  de classe d'Euler  $k$ . En particulier,  $\text{Adm}(S)$  possède  $4g - 5$  composantes connexes, classifiées par la classe d'Euler de  $\rho$ .

Le théorème 4.2.7 ne répond cependant pas à une autre question intéressante : celle de décrire les composantes connexes de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété compacte donnée.

Le problème est double. D'une part, la topologie d'un quotient de la forme

$$j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

dépend de la classe d'Euler de la représentation  $\rho$ . Autrement dit, les différentes composantes connexes de l'espace  $\text{Adm}(S)$  paramètrent bien des espaces de structures anti-de Sitter, mais sur des variétés différentes. D'autre part, les théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel décrivent uniquement les variétés anti-de Sitter compactes à revêtement fini près. Comme le groupe fondamental de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , on peut construire d'autres variétés anti-de Sitter compactes en quotientant un revêtement fini de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Nous verrons qu'on obtient ainsi de nouvelles composantes connexes de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété donnée.

Pour décrire l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété compacte donnée, il nous faudra donc commencer par obtenir une version fine des théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel qui permette de décrire tous les quotients compacts du revêtement universel de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . En regroupant ensuite les quotients qui sont topologiquement identiques, nous serons alors capables de décrire l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur un fibré en cercle de classe d'Euler  $k$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$ . Il apparaîtra que cet espace peut posséder plusieurs composantes connexes, qui sont classifiées par un invariant  $\mathbf{n}$  que nous appellerons *longueur de la fibre* (définition 4.4.1). Cet invariant prend exactement toutes les valeurs entières strictement comprises entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , ainsi que la valeur rationnelle  $\frac{2g-2}{k}$  (proposition 4.4.2 et théorème 4.4.6).

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la section 4.1, après quelques rappels et notations sur l'espace anti-de Sitter de dimension 3 et son groupe d'isométries, nous retracerons les divers résultats obtenus depuis le début des années 80 concernant les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3. Nous énoncerons en particulier les théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel. Dans la section 4.2, nous donnerons quelques précisions sur la description de l'espace  $\text{Adm}(S)$ . Ce sera également l'occasion de quelques rappels sur l'espace des représentations d'un groupe de surface à valeurs dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Dans la section 4.3, nous énoncerons une version fine des théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel afin de décrire toutes les variétés anti-de Sitter compactes (pas uniquement à revêtement fini près). Nous donnerons alors une preuve explicite du fait que les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 sont des fibrés de Seifert, basée sur un argument de Guéritaud–Kassel [GK13]. Cela nous permettra ensuite de décrire, dans la section 4.4, l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur un fibré en cercle donné. Enfin, nous calculerons dans la section 4.5 le volume de ces variétés anti-de Sitter (théorème 4.5.1) et nous constaterons en particulier que ce volume est constant sur les composantes connexes de l'espace de déformation, ce qui répondra à la question 2.2 de [BBD<sup>+</sup>12].

## 4.1 Géométrie anti-de Sitter en dimension 3

### 4.1.1 Espaces anti-de Sitter

Rappelons qu'une variété anti-de Sitter est une variété lisse munie d'une métrique lorentzienne de courbure constante  $-1$ . En dimension 3, ces variétés sont localement isométriques au groupe  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  muni de sa métrique de Killing  $\kappa$ . Nous le noterons pour simplifier  $P_1$ .

Les géodésiques de  $P_1$  sont les translations à gauche de sous-groupes à un paramètre. Les sous-groupes à un paramètre diagonalisables sont des géodésiques de type espace (i.e. où la métrique de Killing est positive), les sous-groupes unipotents sont des géodésiques de type lumière (où la métrique de Killing est nulle) et les sous-groupes compacts sont des géodésiques de type temps (où la métrique de Killing est négative). En particulier, toutes les géodésiques de type temps de  $P_1$  sont des géodésiques fermées simples de longueur  $\pi$ .

Le groupe des isométries de  $P_1$ , que nous noterons  $I_1$ , est isomorphe à un produit semi-direct

$$(\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})) \rtimes V_4 ,$$

où  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  agit par translations à gauche et à droite et où  $V_4$  désigne le groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  engendré par les transformations

$$g \mapsto g^{-1}$$

et

$$g \mapsto \sigma g \sigma ,$$

avec

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

En particulier, la composante neutre  $I_1^0$  du groupe des isométries est isomorphe à  $P_1 \times P_1$ . Cette composante neutre est exactement l'ensemble des isométries de  $P_1$  qui préservent une orientation et une orientation du temps. Dans la suite, nous nous restreindrons par commodité à des variétés anti-de Sitter orientables et orientables dans le temps, qui sont donc des  $(I_1^0, P_1)$ -variétés.

Remarquons que  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  n'est pas simplement connexe. Son groupe fondamental est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Nous noterons  $P_k$  le revêtement à  $k$ -feuillet de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $P_\infty$  son revêtement universel. On notera également  $I_k$  (resp.  $I_\infty$ ) le groupe des isométries de  $P_k$  (resp.  $P_\infty$ ). Le revêtement  $P_k$  (resp.  $P_\infty$ ) de  $P_1$  est un groupe Lie de centre  $Z_k \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$  (resp.  $Z_\infty \simeq \mathbb{Z}$ ). Notons encore abusivement  $Z_k$  (resp.  $Z_\infty$ ) le plongement diagonal de  $Z_k$  (resp.  $Z_\infty$ ) dans  $P_k \times P_k$  (resp.  $P_\infty \times P_\infty$ ). L'action de  $P_k \times P_k$  sur  $P_k$  par translations à gauche et à droite passe au quotient en une action fidèle du groupe

$$I_k^0 = P_k \times P_k / Z_k .$$

Cette action préserve la métrique de Killing de  $P_k$ , ce qui identifie  $I_k^0$  au groupe des isométries de  $P_k$  préservant une orientation et une orientation du temps. De même, le groupe  $I_\infty^0$  des isométries de  $P_\infty$  préservant une orientation et une orientation dans le temps s'identifie à

$$P_\infty \times P_\infty / Z_\infty .$$

Notons que que le groupe  $I_1^0$  contient des sous-groupes qui agissent transitivement et proprement sur  $P_1$ . Ces sous-groupes sont tous inclus, à conjugaison par un élément de  $I_1$

près, dans le groupe  $J_1 = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \mathrm{PSO}(2)$ . Le relèvement  $J_\infty$  de  $J_1$  dans  $I_\infty$  agit sur  $P_\infty$  en préservant une métrique riemannienne. Les  $(J_\infty, P_\infty)$ -variétés peuvent donc être vues soit comme des variétés riemanniennes localement homogènes modelées sur la sixième des huit géométries de Thurston, soit comme des variétés anti-de Sitter particulières, appelées *standard*.

#### 4.1.2 Quotients compacts

L'étude des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 a commencé dans les années 80 par l'étude des variétés standard, motivée par le programme de géométrisation de Thurston. Le fibré unitaire tangent à une surface hyperbolique compacte, par exemple, s'identifie au quotient de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  par un réseau cocompact et sans torsion, et possède donc naturellement une structure anti-de Sitter standard. On obtient une plus grande diversité de variétés anti-de Sitter standard en considérant des réseaux de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui possèdent de la torsion, en relevant leur action à un revêtement fini de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et en ajoutant une composante de multiplication à droite par des éléments de  $\mathrm{PSO}(2)$ . Scott a prouvé dans [Sco83] qu'il était possible d'obtenir ainsi tous les fibrés de Seifert au dessus d'un orbifold hyperbolique, sauf ceux dont un revêtement fini est trivial.

Les premiers exemples de quotients non standard de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  ont été mis en évidence par Goldman dans [Gol85a]. Ce dernier a montré que si  $j$  est une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\rho$  une autre représentation d'image abélienne suffisamment proche de la représentation triviale (mais pas nécessairement à valeurs dans un sous-groupe compact), alors  $j \times \rho(\pi_1(S))$  agit librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On peut donc obtenir des variétés anti-de Sitter compactes complètes non standard en déformant des variétés standard.

**Remarque 4.1.1.** On sait maintenant, grâce au théorème de Klingler (voir chapitre 1, théorème 1.6.2), que toute variété anti-de Sitter compacte est complète. Le théorème de Goldman peut donc être vu a posteriori comme une conséquence du théorème d'Ehresmann–Thurston : si  $\rho$  est suffisamment proche de la représentation triviale, alors  $j \times \rho$  est l'holonomie d'une structure anti-de Sitter, et cette structure est complète d'après le théorème de Klingler.

À peu près au même moment, Kulkarni et Raymond prouvaient qu'à revêtement fini près, toutes les variétés anti-de Sitter complètes compactes sont des quotients de  $P_1$  par un groupe de surface. Le théorème dit *des niveaux finis* constitue une première étape.

**Théorème 4.1.2.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de  $I_\infty$  agissant librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $P_\infty$ . Alors  $\Gamma$  intersecte non trivialement le centre de  $I_\infty$ . Autrement dit, toute variété anti-de Sitter compacte de dimension 3 est revêtue par  $P_d$  pour un certain  $d < \infty$ .*

**Remarque 4.1.3.** Le théorème des niveaux finis a été énoncé pour la première fois par Kulkarni et Raymond dans [KR85], mais leur preuve comporte une erreur. Salein en donne une démonstration correcte dans sa thèse [Sal99, théorème 3.3.2.3]. Zeghib a quant à lui étendu ce théorème aux variétés anti-de Sitter compactes de dimension supérieure à 4 [Zeg98].

D'après le théorème des niveaux finis, toute variété anti-de Sitter compacte de dimension 3 orientable et orientable dans le temps est donc un revêtement cyclique fini d'un quotient de  $P_1$  par un sous-groupe de  $I_1 = P_1 \times P_1$ . Ce sous-groupe est de type fini et, comme  $P_1 \times P_1$  est algébrique, il admet un sous-groupe d'indice fini sans torsion, en vertu

du lemme de Selberg. Le théorème suivant décrit donc toutes les variétés anti-de Sitter compactes à revêtement fini près.

**Théorème 4.1.4** (Kulkarni–Raymond, [KR85]). *Soit  $\Gamma$  un groupe discret sans torsion et  $j \times \rho$  une représentation fidèle de  $\Gamma$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \times \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Supposons que  $j \times \rho(\Gamma)$  agisse proprement discontinûment et cocompactement sur  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Alors*

- $\Gamma$  est isomorphe au groupe fondamental d'une surface compacte orientée de genre supérieur à 2,
- l'une des représentations  $j$  ou  $\rho$  est fuchsienne.

**Remarque 4.1.5.** Ce théorème est un cas particulier d'un théorème ultérieur de Kobayashi et Kassel (voir ch.1, théorème 1.6.5).

**Définition 4.1.6.** Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2. Un couple  $(j, \rho)$  de représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est dit *admissible* si  $j \times \rho(\pi_1(S))$  agit proprement discontinûment et cocompactement sur  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

Le théorème de Kulkarni et Raymond ne dit rien des couples de représentations qui sont ou non admissibles. Il est clair que si  $j$  est fuchsienne et  $\rho$  à valeurs dans un sous-groupe compact, alors  $(j, \rho)$  est admissible. Par contre, s'il existe un élément  $\gamma$  de  $\pi_1(S)$  tel que  $\rho(\gamma)$  est conjugué à  $j(\gamma)$  par un élément  $x$  de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , on a

$$j(\gamma)x\rho(\gamma)^{-1} = x .$$

L'action de  $j \times \rho(\pi_1(S))$  sur  $P_1$  n'est alors pas propre, puisque le stabilisateur du point  $x$  contient le sous-groupe infini engendré par  $\gamma$ . La question de décrire l'espace des couples de représentations admissibles est donc non triviale.

Nous avons dit que si  $j$  est une représentation fuchsienne et  $\rho$  une représentation suffisamment proche de la représentation triviale, alors le couple  $(j, \rho)$  est admissible. Kulkarni et Raymond pensaient que toutes les variétés anti-de Sitter compactes pouvaient être obtenues en déformant continûment des structures standard. Salein a prouvé dans [Sal00] que cela était faux, en exhibant des couples de représentations admissibles  $(j, \rho)$  avec  $\rho$  de n'importe quel classe d'Euler non extrémale (voir section 4.2). De tels couples ne peuvent pas être obtenus en déformant le couple  $(j, \rho_{triv})$ .

L'idée de Salein a été de constater que si  $j$  domine strictement  $\rho$ , alors le couple  $(j, \rho)$  est admissible. Kassel a ensuite prouvé que la condition de domination est également nécessaire :

**Théorème 4.1.7** (Kassel). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre supérieur à 2 et  $(j, \rho)$  un couple de représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  tel que  $j$  est fuchsienne. Alors le couple  $(j, \rho)$  est admissible si et seulement si  $j$  domine strictement  $\rho$ .*

Ce dernier théorème vient compléter une description relativement fine des variétés anti-de Sitter compactes à revêtement fini près. Rappelons que ce théorème a été généralisé par Guéritaud–Kassel et Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard au cadre plus général des quotients de groupes de Lie de rang 1 (voir ch.1, théorème 1.6.6).

## 4.2 Topologie de l'espace $\text{Adm}(S)$

Si  $j \times \rho$  est une représentation de  $\pi_1(S)$  à valeurs dans  $P_1 \times P_1$ , la conjugaison de  $j \times \rho$  par l'isométrie  $g \mapsto g^{-1}$  permute  $j$  et  $\rho$ , tandis que la conjugaison par  $g \mapsto \sigma g \sigma$  multiplie

la classe d'Euler de  $j$  et de  $\rho$  par  $-1$ . Par conséquent, à conjugaison près, on peut supposer que tout couple admissible  $(j, \rho)$  de représentations de  $\pi_1(S)$  vérifie

$$e(j) = -\chi(S) .$$

On notera désormais  $\text{Adm}(S)$  le sous-ensemble de  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  formé des classes d'équivalences de couples admissibles.

D'après le théorème de Kassel,  $\text{Adm}(S)$  s'identifie à l'espace  $\text{Dom}(S, \text{Isom}(\mathbb{H}^2))$ , dont la topologie est décrite par le théorème 3.2.10 du chapitre 3. Ce théorème fait intervenir la topologie de l'espace  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  et nous profiterons donc de cette section pour rappeler les divers résultats qui décrivent cette topologie.

#### 4.2.1 Représentations d'un groupe de surface dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$

Rappelons que nous désignons par  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  le quotient topologique de l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par conjugaison. Cet espace est séparé en dehors des points correspondant à des représentations paraboliques (i.e. qui fixent un point de  $\partial_\infty \mathbb{H}^2$ ). Il possède de plus une structure de variété lisse en dehors des représentations qui fixent un point de  $\mathbb{H}^2 \cup \partial_\infty \mathbb{H}^2$  (voir par exemple [Lab11]).

Une première étape dans la description de cet espace est la caractérisation de ses composantes connexes. D'après un célèbre théorème de Goldman, elles sont classifiées par la *classe d'Euler* d'une représentation. Cet invariant admet de nombreuses définitions équivalentes. Nous en donnons deux qui nous serviront par la suite.

Rappelons que le groupe fondamental d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$  admet une présentation de la forme

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle .$$

On dira que cette présentation est compatible avec l'orientation de  $S$  si le nombre d'intersection

$$a_i \wedge b_i$$

est positif pour tout  $i$ .

**Définition 4.2.1.** Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  à valeurs dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Soit

$$\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$$

une présentation de  $\pi_1(S)$  compatible avec l'orientation de  $S$ . Choisissons des relèvements  $\tilde{a}_i$  (resp.  $\tilde{b}_i$ ) de  $\rho(a_i)$  (resp.  $\rho(b_i)$ ) à  $\widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$ . Alors le produit

$$\prod_{i=1}^g [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i]$$

est un élément du centre de  $\widetilde{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$ , qui ne dépend ni du choix de la présentation de  $\pi_1(S)$ , ni des relèvements des  $\rho(a_i)$  et  $\rho(b_i)$ . Cet élément est une rotation de  $\mathbb{H}^2$  d'angle  $2k\pi$ , où  $k$  est un entier appelé *classe d'Euler* de  $\rho$ .

On notera  $\mathbf{e}(\rho)$  la classe d'Euler de  $\rho$ . Il est clair d'après cette définition que la classe d'Euler est invariante par conjugaison et continue sur l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Elle est donc constante sur les composantes connexes de  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ . La proposition suivante en donne une définition équivalente.

**Proposition 4.2.2.** *Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Choisissons une application  $\rho$ -équivariante  $f : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{H}^2$ . Notons  $f^*\text{Vol}_{\mathbb{H}^2}$  la forme volume obtenue sur  $S$  par passage au quotient du tiré en arrière du volume de  $\mathbb{H}^2$  par  $f$ . Alors le nombre*

$$\frac{1}{2\pi} \int_S f^*\text{Vol}_{\mathbb{H}^2} ,$$

*indépendant du choix de  $f$ , est égal à la classe d'Euler de  $\rho$ .*

D'après cette définition, la classe d'Euler d'une représentation fuchsienne  $j$  est égale (au signe près) au volume du quotient  $j(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$  divisé par  $2\pi$ . D'après la formule de Gauss–Bonnet, on a donc

$$\mathbf{e}(j) = \pm \chi(S) ,$$

où  $\chi(S) = 2 - 2g$  désigne la caractéristique d'Euler de  $S$ .

L'inégalité de Milnor–Wood affirme que la caractéristique d'Euler de la surface est un extrémum pour la classe d'Euler.

**Théorème 4.2.3** (Milnor–Wood). *Soit  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . On a alors l'inégalité*

$$\chi(S) \leq \mathbf{e}(\rho) \leq -\chi(S) .$$

Remarquons qu'on peut déduire l'inégalité de Milnor–Wood du théorème 3.2.2 du chapitre 3. En effet, d'après ce théorème, pour toute représentation  $\rho$ , on peut trouver une représentation  $j$  fuchsienne et une application  $(j, \rho)$ -équivariante et 1-lipschitzienne de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\mathbb{H}^2$ . On a alors clairement

$$|\mathbf{e}(\rho)| \leq |\mathbf{e}(j)| .$$

Enfin, le théorème de Goldman affirme que la classe d'Euler paramètre les composantes connexes de  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$ .

**Théorème 4.2.4** (Goldman, [Gol80]).

- Pour tout entier  $k$  compris entre  $\chi(S)$  et  $-\chi(S)$ , l'ensemble des représentations de classe d'Euler  $k$  est non vide et connexe,
- une représentation est de classe d'Euler  $\pm\chi(S)$  si et seulement si elle est fuchsienne.

L'espace  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  possède donc  $4g - 3$  composantes connexes. On notera  $\text{Rep}_k(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  la composante connexe formée des représentations de classe d'Euler  $k$ . La topologie des différentes composantes connexes de  $\text{Rep}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  a été décrite par Hitchin dans [Hit87] grâce à la paramétrisation de cet espace de représentations au moyen des fibrés de Higgs. Rappelons que si  $X$  est une surface de Riemann et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ , on désigne par  $\Phi(X, \rho)$  la différentielle de Hopf d'une application harmonique  $\rho$ -équivariante de  $\tilde{X}$  dans  $\mathbb{H}^2$ .

**Théorème 4.2.5** (Hitchin). *Soit  $S$  une surface compacte de genre  $g \geq 2$  et  $X$  un point de  $\mathcal{T}(S)$ . Soit  $k$  un entier non nul compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$  et  $\Psi$  une différentielle quadratique holomorphe sur  $X$ . Si  $k \neq 0$  ou si  $\Psi \neq 0$ , alors l'ensemble*

$$\{\rho \in \text{Rep}_k(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \mid \Phi(X, \rho) = \Psi\}$$

est paramétré par l'ensemble des diviseurs effectifs de degré  $2g - 2 - k$  sur lesquels  $\Psi$  s'annule.

Par conséquent, pour  $k \neq 0$ , l'espace  $\text{Rep}_k(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  est homéomorphe à un fibré vectoriel complexe de dimension complexe  $g - 1 + k$  au dessus de la puissance symétrique d'ordre  $2g - 2 - k$  de  $S$ .

**Remarque 4.2.6.** Le cas où  $k = 0$  nécessite quelque précautions à cause de la présence de représentations élémentaires. Or, la paramétrisation de Hitchin ne décrit que les représentations semi-simples (ce qui, dans notre cas, exclut uniquement les représentations paraboliques qui ne préservent pas une géodésique).

L'ensemble des représentations  $\rho$  semi-simples de classe d'Euler nulle vérifiant que  $\Phi(X, \rho) = \Psi$  est encore paramétré (à conjugaison près) par les diviseurs effectifs de degré  $2g - 2$  sur lesquels  $\Psi$  s'annule, sauf lorsque  $\Psi \equiv 0$ . Les représentations de classe d'Euler 0 de différentielle Hopf nulle sont à valeurs dans un sous-groupe compact et sont paramétrées à conjugaison près par les fibrés en droites de degré 0 sur  $X$ .

En résumé, si on note  $\text{Rep}_0^{ss}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  l'espace des représentations semi-simples de classe d'Euler nulle et  $\text{Div}_{2g-2}(X)$  l'ensemble des diviseurs effectifs de  $X$  de degré  $2g - 2$ , alors on a

$$\text{Rep}_0^{ss}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \simeq_{\text{homéo}} \left\{ (\Psi, D) \in Q(X) \times \text{Div}_{2g-2}(X) \mid \Psi|_D = 0 \right\} / \sim$$

où  $(\Psi, D) \sim (\Psi', D')$  lorsque  $\Psi = \Psi' = 0$  et que  $D$  et  $D'$  définissent le même fibré en droite.

#### 4.2.2 Paires admissibles

Le théorème 3.2.10 du chapitre 3 permet en particulier de décrire l'espace  $\text{Adm}(S)$  des paires admissibles. Puisqu'une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  est fuchsienne si et seulement si elle est de classe d'Euler  $\pm\chi(S)$ , on obtient comme corollaire :

**Corollaire 4.2.7.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$ . L'espace  $\text{Adm}(S)$  est homéomorphe à*

$$\mathcal{T}(S) \times \coprod_{2-2g < k < 2g-2} \text{Rep}_k(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) .$$

*En particulier,  $\text{Adm}(S)$  possède  $4g - 5$  composantes connexes, classifiées par la classe d'Euler de la représentation non fuchsienne de chaque paire. La topologie de chacune de ces composantes connexes est décrite par le théorème de Hitchin.*

Rappelons que le théorème 3.2.10 est plus précis. Il décrit en effet la topologie de l'espace des représentations fuchiennes  $j$  qui dominent strictement une représentation  $\rho$  donnée. Il peut être intéressant, inversement, de décrire la topologie du domaine des représentations  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  dominées par une représentation fuchsienne  $j$  fixée. Commençons par remarquer que ce domaine est non vide pour tout entier  $k$  strictement compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$ .

**Théorème 4.2.8** (Salein, Guéritaud–Kassel–Wolff). *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$  et  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Alors pour tout entier  $k$  strictement compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$ , il existe une représentation  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  qui est strictement dominée par  $j$ .*

Ce théorème a été prouvé par Guéritaud–Kassel–Wolff dans [GKW13]. Leur idée est de partir d'une surface hyperbolique d'holonomie  $j$  et de la “plier” en un certain sens.

Le résultat obtenu par Salein est plus faible : dans [Sal00], il prouve seulement que pour tout entier  $k$  strictement compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$ , il existe une représentation fuchsienne  $j$  et une représentation  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  strictement dominée par  $j$ . Nous avons néanmoins ajouté son nom à ce théorème, car l'argument qu'il utilise peut aisément être complété par un théorème de Troyanov pour donner le résultat.

L'idée de Salein est en effet de remarquer qu'une application  $(j, \rho)$ -équivariante et holomorphe de  $\mathbb{H}^2$  dans  $\mathbb{H}^2$  est nécessairement – lorsqu'elle existe – contractante d'après le lemme de Schwarz. Il construit alors par une méthode géométrique une représentation  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  qui est l'holonomie d'une *structure hyperbolique branchée* sur la surface  $S$ . Cette structure hyperbolique branchée induit une structure complexe sur  $S$ , qui fournit grâce au théorème d'uniformisation de Poincaré–Koebe une représentation fuchsienne  $j$  pour laquelle il existe une application  $(j, \rho)$ -équivariante et holomorphe.

Pour raffiner cette preuve, il suffit de remarquer que, pour n'importe quelle structure complexe  $X$  sur  $S$  et pour tout entier  $k$  strictement compris entre 0 et  $2g - 2$ , on peut trouver une métrique hyperbolique avec  $k$  points de branchement dans la classe conforme de  $X$ . Ceci résulte d'une version du théorème d'uniformisation due à Troyanov.

**Théorème 4.2.9** (Troyanov, [Tro91]). *Soit  $X$  une surface de Riemann de genre  $g \geq 2$ . Soient  $x_1, \dots, x_k$  des points de  $X$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  des réels strictement positifs tels que*

$$\sum_{i=1}^k (\alpha_i - 2\pi) < 2\pi(2g - 2) .$$

*Alors il existe une unique métrique hyperbolique conforme sur  $X$  qui possède en chaque  $x_i$  une singularité conique d'angle  $\alpha_i$ .*

Les résultats de la section 3.4.2 du chapitre 3 et en particulier le lemme 3.4.11 permettent de retrouver le théorème 4.2.8 et de paramétrer le domaine des représentations  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  strictement dominées par  $j$ . En effet, d'après le lemme 3.4.11, la représentation  $\rho$  est strictement dominée par  $j$  si et seulement s'il existe  $X \in \mathcal{T}(S)$  tel que

$$\Phi(X, j) = \Phi(X, \rho) .$$

De plus, un tel  $X$ , s'il existe, est unique. Or, d'après le théorème 4.2.5, l'ensemble des représentations  $\rho$  de classe d'Euler  $k$  telles que  $\Phi(X, j) = \Phi(X, \rho)$  est paramétré par l'ensemble des diviseurs positifs de degré  $2g - 2 - k$  contenus dans les zéros de  $\Phi(X, j)$ . On obtient donc le théorème suivant :

**Théorème 4.2.10.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$ . Fixons une représentation fuchsienne  $j$  de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  et un entier non nul  $k$  strictement compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$ . Alors l'ensemble*

$$\{\rho \in \text{Rep}_k(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \mid j \text{ domine strictement } \rho\}$$

*est homéomorphe à l'ensemble des couples  $(X, D)$  où  $X$  est un point de  $\mathcal{T}(S)$  et  $D$  un diviseur positif de degré  $2g - 2 - k$  sur lequel  $\Phi(X, j)$  s'annule. En particulier, cet ensemble est connexe.*

**Remarque 4.2.11.** Le cas où  $k = 0$  est légèrement plus délicat à cause des représentations paraboliques. D'après la remarque 4.2.6, on a

$$\simeq_{\text{homéo}} \left\{ \rho \in \text{Rep}_0(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) \text{ semi-simple} \mid j \text{ domine strictement } \rho \right\} / \sim$$

$$\left\{ (X, D) \mid X \in \mathcal{T}(S), D \in \text{Div}_{2g-2}(X), \Phi(X, \rho)|_D = 0 \right\} / \sim$$

où  $(X, D) \sim (X', D')$  lorsque  $X = X' = [j]$  et que  $D$  et  $D'$  définissent le même fibré en droites.

Par ailleurs, si  $\rho$  est une représentation parabolique, l'orbite de  $\rho$  sous l'action adjointe de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  contient une représentation semi-simple  $\rho'$ , et on a

$$\mathrm{Lip}(j, \rho) = \mathrm{Lip}(j, \rho') .$$

On peut alors conclure à nouveau que l'ensemble

$$\{\rho \in \mathrm{Rep}_0(S, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})) \mid j \text{ domine strictement } \rho\}$$

est connexe.

Les résultats du chapitre 3 permettent donc de décrire assez finement l'espace  $\mathrm{Adm}(S)$  et répondent en particulier à la question 2.1 de [BBD<sup>+</sup>12]. Il ne décrivent cependant pas directement l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété compacte donnée ; d'abord parce que les théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel ne décrivent les variétés anti-de Sitter compactes qu'à revêtement fini près, ensuite parce que la topologie d'un quotient de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  par un couple de représentations admissibles  $(j, \rho)$  dépend de la classe d'Euler de  $\rho$ . L'objet de la suite de ce chapitre est de clarifier ces deux points.

### 4.3 Topologie des variétés anti-de Sitter compactes

Dans cette section, nous commençons par préciser les théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel de façon à décrire *toutes* les variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3 orientables dans l'espace et dans le temps. Nous ne donnerons en aucun cas une nouvelle preuve de ces théorèmes, mais nous en déduirons simplement une version plus fine. Nous montrerons ensuite que ces variétés sont toutes des *fibrés de Seifert* en adaptant une preuve de Guéritaud–Kassel ([GK13], proposition 7.2). Cette preuve nous servira dans la section 4.5 au calcul du volume des variétés anti-de Sitter compactes.

#### 4.3.1 Raffinement des théorèmes de Kulkarni–Raymond et Kassel

Notons  $p_d$  la projection de  $I_d^0$  sur  $I_1^0$  et  $r_1$  et  $r_2$  les projections de  $I_1^0 = P_1 \times P_1$  sur chacun des facteurs.

**Lemme 4.3.1** (théorème de Kulkarni–Raymond avec torsion). *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $I_d^0$  agissant proprement discontinûment et cocompactement sur  $P_d$ . Quitte à passer à un revêtement de degré inférieur, supposons que  $\Gamma$  n'intersecte pas le centre de  $I_d^0$ . Alors, à permutation des facteurs près, on a :*

- $r_1 \circ p_d(\Gamma)$  est un réseau cocompact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,
- le noyau de  $r_1 \circ p_d|_{\Gamma}$  est un sous-groupe cyclique central dans  $\Gamma$ .
- si ce noyau est non trivial, alors  $r_2 \circ p_d(\Gamma)$  est inclus dans un sous-groupe compact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ .

*Preuve.* Par hypothèse,  $\Gamma$  n'intersecte pas le centre de  $I_d^0$ , et la projection  $p_d$  restreinte à  $\Gamma$  est donc injective. De plus,  $p_d(\Gamma)$  agit proprement discontinûment et cocompactement sur  $P_1$ . D'après le théorème de Kulkarni–Raymond, si  $\Gamma'$  est un sous-groupe de  $\Gamma$  d'indice fini sans torsion, alors, quitte à permuter les facteurs,  $r_1 \circ p_d|_{\Gamma'}$  est injective, d'image un réseau cocompact de  $P_1$ . Comme  $r_1 \circ p_d(\Gamma')$  est d'indice fini dans  $r_1 \circ p_d(\Gamma)$ , on en déduit

que  $r_1 \circ p_d(\Gamma)$  est lui-même un réseau cocompact de  $P_1$  et que le noyau  $\Delta$  de  $r_1 \circ p_d|_\Gamma$  est fini.

L'image de  $\Delta$  par  $p_d$  est un sous-groupe fini de  $I_1^0 = P_1 \times P_1$  dont la projection sur le facteur de gauche est triviale, et s'identifie donc à un sous-groupe fini du facteur  $P_1$  de droite, qui est donc cyclique, inclus dans un sous-groupe compact  $K$ . Supposons que  $\Delta$  soit non trivial. Alors le normalisateur de  $\Delta$  dans  $P_1$  est exactement ce sous-groupe  $K$ . Comme  $\Delta$  est normal dans  $\Gamma$ , on obtient que  $r_2 \circ p_d(\Gamma)$  est inclus dans  $K$ . Enfin, comme  $K$  est abélien,  $r_2 \circ p_d(\Gamma)$  commute avec  $\Delta$ . Comme, par ailleurs,  $r_1 \circ p_d(\Delta)$  est trivial,  $\Delta$  est central dans  $\Gamma$ .  $\square$

Soit  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Si  $j$  et  $\rho$  sont deux représentations de  $\Gamma$  dans  $P_1$ , notons

$$\widehat{j \times \rho}^d$$

un relèvement à  $I_d^0$  (lorsqu'il existe, cf. proposition 4.3.2) de la représentation  $j \times \rho : \Gamma \rightarrow P_1 \times P_1$ . On peut reformuler le théorème de Kulkarni–Raymond avec torsion en disant que les quotients compacts de  $P_d$  qui ne sont pas quotients d'un revêtement de degré inférieur ont, quitte à permuter les facteurs, l'une des deux formes suivantes :

– soit

$$\widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d ,$$

où  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $j$  une représentation fuchsienne de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\rho$  une autre représentation,

– soit

$$\widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d / \Delta_k ,$$

où  $\Gamma$  est un réseau cocompact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $j$  une représentation fuchsienne de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $\rho$  une représentation de  $\Gamma$  dans un sous-groupe compact  $K$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ ,  $k$  un entier premier avec  $d$  et  $\Delta_k$  le sous-groupe cyclique d'ordre  $k$  de  $K$ .

Pour qu'une représentation  $j \times \rho : \Gamma \rightarrow P_1 \times P_1$  se relève à  $I_d^0$ , il existe une condition sur les classes d'Euler des représentations  $j$  et  $\rho$  (en général, la classe d'Euler d'une représentation d'un groupe  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  est un élément de  $H^2(\Gamma, \mathbb{Z})$ ).

**Proposition 4.3.2.** *Soit  $\Gamma$  un groupe de type fini et  $(j, \rho)$  un couple de représentations de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Alors la représentation  $j \times \rho$  se relève à  $I_d^0$  si et seulement si  $d$  divise  $\mathbf{e}(j) - \mathbf{e}(\rho)$ .*

*Preuve.* Comme nous n'avons pas donné de définition générale de la classe d'Euler d'une représentation d'un groupe à valeur dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , nous nous contenterons de la preuve dans le cas où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d'une surface compacte orientée de genre  $g$ . Considérons alors  $\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \rangle$  une présentation de  $\Gamma$ . Soient  $j$  et  $\rho$  deux représentations de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $z$  le générateur du centre  $Z_\infty$  de  $P_\infty$  représentant une rotation d'angle  $2\pi$  de  $\mathbb{H}^2$ . Par définition de la classe d'Euler, si  $\tilde{j}(a_i)$  et  $\tilde{\rho}(a_i)$  sont des relevés quelconques de  $j(a_i)$  et  $\rho(a_i)$  à  $P_\infty$ , on a

$$\prod_{i=1}^g [\tilde{j}(a_i), \tilde{j}(b_i)] = \mathbf{e}(j)z$$

et

$$\prod_{i=1}^g [\tilde{\rho}(a_i), \tilde{\rho}(b_i)] = \mathbf{e}(\rho)z .$$

Or le centre de  $I_\infty$  est le quotient de  $Z_\infty \times Z_\infty$  par le plongement diagonal de  $Z_\infty$  et le centre de  $I_d$  est le quotient du centre  $Z(I_\infty)$  de  $I_\infty$  par  $d \cdot Z(I_\infty)$ . Par conséquent,

$$\left( \prod_{i=1}^g [\tilde{j}(a_i), \tilde{j}(b_i)], \prod_{i=1}^g [\tilde{\rho}(a_i), \tilde{\rho}(b_i)] \right)$$

est trivial dans  $Z(I_d)$  (et  $j \times \rho$  se relève alors à  $I_d$ ) si et seulement si  $d$  divise  $\mathbf{e}(j) - \mathbf{e}(\rho)$ .  $\square$

Raffinons maintenant le théorème de Kassel pour caractériser lesquels, parmi les quotients ci-dessus, sont séparés.

**Lemme 4.3.3** (théorème de Kassel avec torsion). *Soit  $\Gamma$  un réseau cocompact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\Gamma$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et  $\rho$  une autre représentation. Soit  $d$  un entier qui divise  $\mathbf{e}(j) - \mathbf{e}(\rho)$ . Alors l'action sur  $P_d$  d'un relèvement de  $j \times \rho(\Gamma)$  est proprement discontinue et cocompacte si et seulement si  $j$  domine strictement  $\rho$ .*

*En particulier, si  $\rho$  est à valeur dans un sous-groupe compact  $K$ , alors le quotient*

$$\widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d$$

*est séparé et le quotient*

$$\widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d / \Delta_k$$

*est encore séparé.*

*Preuve.* Le théorème de Kassel n'est pour l'instant établi que pour un sous-groupe d'indice fini sans torsion. Soit donc  $\Gamma'$  un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$  sans torsion, qu'on peut supposer distingué. Désignons par  $j'$  et  $\rho'$  les restrictions de  $j$  et  $\rho$  à  $\Gamma'$ . D'après le théorème de Kassel, il existe une application  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  qui est  $(j', \rho')$ -équivariante et  $\lambda$ -lipschitzienne, pour un  $\lambda < 1$ . Soit  $\gamma$  un élément de  $\Gamma$ . Notons  $\gamma \cdot f$  l'application

$$x \mapsto \rho(\gamma) \cdot f(j(\gamma^{-1}) \cdot x).$$

Remarquons que  $\gamma \cdot f$  est encore  $(j', \rho')$ -équivariante. En effet, pour tout  $\gamma' \in \Gamma'$ , on a

$$\begin{aligned} (\gamma \cdot f)(j(\gamma') \cdot x) &= \rho(\gamma) f(j(\gamma^{-1} \gamma') \cdot x) \\ &= \rho(\gamma) f(j(\gamma^{-1} \gamma' \gamma) j(\gamma^{-1}) \cdot x) \\ &= \rho(\gamma) \rho(\gamma^{-1} \gamma' \gamma) f(j(\gamma^{-1}) \cdot x) \quad \text{car } \gamma^{-1} \gamma' \gamma \in \Gamma', \\ &= \rho(\gamma') \rho(\gamma) f(j(\gamma^{-1}) x) \\ &= \rho(\gamma') (\gamma \cdot f)(x). \end{aligned}$$

De plus, si  $\gamma \in \Gamma'$ , alors, comme  $f$  est  $(j', \rho')$ -équivariante, on a clairement

$$\gamma \cdot f = f.$$

On a ainsi défini une action de  $\Gamma/\Gamma'$  sur l'ensemble des applications  $(j', \rho')$ -équivariantes contractantes. Soit maintenant

$$\begin{aligned} \bar{f} : \mathbb{H}^2 &\rightarrow \mathbb{H}^2 \\ x &\mapsto \text{Bar} \{ \gamma \cdot f(x), \gamma \in \Gamma/\Gamma' \}, \end{aligned}$$

où  $\text{Bar}\{x_1, \dots, x_k\}$  désigne l'isobarycentre des points  $x_1, \dots, x_k$ , c'est-à-dire l'unique mi-

nimum de la fonction

$$x \mapsto d(x, x_1)^2 + \dots + d(x, x_k)^2 .$$

D'après une propriété classique des espaces CAT(0) (voir par exemple [GK13, lemme 2.10]), si  $f_1, \dots, f_k$  sont des applications  $\lambda$ -lipschitziennes d'un espace métrique à valeurs dans un espace CAT(0), alors l'application

$$x \mapsto \text{Bar}\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$$

est également  $\lambda$ -lipschitzienne. Par conséquent, l'application  $\bar{f}$  est  $\lambda$ -lipschitzienne. Elle est également  $(j', \rho')$ -équivariante et elle est de plus fixée par l'action de  $\Gamma/\Gamma'$ , d'où il découle qu'elle est en fait  $(j, \rho)$ -équivariante.  $\square$

**Remarque 4.3.4.** Nous avons en fait prouvé plus généralement que la constante de Lipschitz minimale est invariante par passage à un sous-groupe d'indice fini.

### 4.3.2 Les variétés AdS compactes sont des fibrés de Seifert

D'après le théorème de Kulkarni–Raymond (avec torsion), le groupe fondamental d'une variété anti-de Sitter compacte de dimension 3 est isomorphe à l'image réciproque par la projection de  $I_\infty^0$  dans  $I_d^0$  d'un sous-groupe de  $I_d^0$  isomorphe à une extension centrale d'un réseau cocompact de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  par un groupe cyclique. Ce groupe fondamental est donc une extension centrale du groupe fondamental d'un orbifold hyperbolique par  $\mathbb{Z}$  et il est donc isomorphe au groupe fondamental d'un *fibré de Seifert à base hyperbolique* (cf. définition 4.3.5). En invoquant le fait qu'un fibré de Seifert à base hyperbolique et une variété anti-de Sitter ont tous deux des revêtements universels contractiles, Kulkarni et Raymond concluent dans [KR85] que les variétés anti-de Sitter compactes *sont* des fibrés de Seifert par des arguments généraux de topologie algébrique. Le théorème de Kassel permet de donner une preuve explicite de ce fait en construisant une fibration au dessus d'un orbifold hyperbolique à partir d'une application équivariante contractante. Cette fibration a en outre la particularité que ses fibres sont des géodésiques de type temps.

Avant de donner cette preuve, rappelons la définition d'un fibré de Seifert.

**Définition 4.3.5.** Un fibré de Seifert  $M$  de dimension 3 est une variété  $M$  munie d'un feuilletage de dimension 1 à feuilles compactes, tel que pour toute feuille  $F$ , il existe un entier  $p \geq 1$  et un entier  $k$  premier avec  $p$  tels que sur un voisinage de  $F$ , le feuilletage est isomorphe à  $D(0, 1) \times \mathbb{S}^1/\mathbb{U}^p$ , où  $D(0, 1)$  désigne le disque unité de  $\mathbb{C}$  et où l'action du groupe des racines de l'unité  $\mathbb{U}^p$  sur  $D(0, 1) \times \mathbb{S}^1$  est donnée par

$$e^{i2\pi/p} \cdot (z, x) = (e^{i2\pi/p}z, e^{i2k\pi/p}x),$$

On dira qu'une feuille est de type  $(p, k)$  si un voisinage de cette feuille est décrit par les entiers  $p$  et  $k$ . Notons que  $p$  est bien défini et que  $k$  est bien défini modulo  $p$ . Si  $p = 1$ , le feuilletage est trivial au voisinage de la feuille donnée. Une telle feuille est appelée *régulière*.

Si  $M$  est un fibré de Seifert compact, l'espace des feuilles de ce fibré est un espace topologique compact séparé  $S$  qui possède naturellement une structure d'orbifold de dimension 2, de sorte qu'on peut voir  $M$  comme un fibré en cercles au dessus d'un orbifold. Les fibres régulières de  $M$  se projettent sur des points lisses de  $S$  et une fibre singulière de type  $(p, k)$  se projette sur un point conique de  $S$  d'angle  $\frac{2\pi}{p}$ . Si l'orbifold  $S$  peut être muni d'une métrique hyperbolique, on dira que  $M$  est un fibré de Seifert à *base hyperbolique*.

**Corollaire 4.3.6** (Kulkarni–Raymond, Guéritaud–Kassel). *Les variétés anti-de Sitter compactes sont des fibrés de Seifert à base hyperbolique.*

Dans la preuve, nous utiliserons la propriété suivante, qui permet de construire les fibrés de Seifert comme des quotients de fibrés en cercles.

**Proposition 4.3.7** (voir [Sco83]). *Soit  $M$  un fibré en cercle au dessus d'une surface  $S$ . Soit  $\Gamma$  un groupe discret de difféomorphismes de  $S$  agissant proprement discontinûment sur  $S$  et  $\tilde{\Gamma}$  un relèvement de  $\Gamma$  en un groupe de difféomorphismes de  $M$  qui agit librement sur  $M$  en préservant les fibres. Alors le quotient  $M/\tilde{\Gamma}$  est un fibré de Seifert de base  $S/\Gamma$ .*

*Démonstration du corollaire 4.3.6.*

La preuve que nous donnons est adaptée de [GK13], proposition 7.2. Commençons par considérer un quotient de  $P_1$  par  $j \times \rho(\Gamma)$ , où  $\Gamma$  est isomorphe à un réseau cocompact de  $P_1$ , où  $j$  est fuchsienne et où  $\rho$  est strictement dominée par  $j$ . Soit  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application  $(j, \rho)$ -équivariante lisse et  $\lambda$ -lipschitzienne pour un  $\lambda < 1$ . Comme  $f$  est contractante,  $f$  possède un unique point fixe et il en est de même pour  $g \circ f$ , où  $g$  est une isométrie quelconque de  $\mathbb{H}^2$ .

Considérons alors l'application  $\pi : \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}^2$  qui à  $g$  associe l'unique point fixe de  $g \circ f$ . Nous allons montrer que  $\pi$  est une submersion dont les fibres sont des géodésiques de type temps, puis que  $\pi$  passe au quotient en une fibration de Seifert de  $j \times \rho(\Gamma) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  dans  $j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$ .

Pour prouver que  $\pi$  est une submersion, commençons par prouver un lemme classique de calcul différentiel.

**Lemme 4.3.8.** *Soit  $U$  un voisinage de 0 dans  $\mathbb{R}^d$  et  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^d$  une application telle que  $f(0) = 0$  et telle que  $\|df_0\| < 1$  pour une certaine norme d'opérateur sur  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $X$  un champ de vecteur sur  $U$ , de flot  $\Phi_t$ . Alors il existe un voisinage  $V$  de 0 inclus dans  $U$  et un  $\varepsilon > 0$  tels que pour tout  $t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[$ ,  $\Phi_t$  est bien défini sur  $V$  et  $\Phi_t \circ f$  admet un unique point fixe  $x(t)$ . De plus, la fonction  $t \mapsto x(t)$  est dérivable en 0 et on a*

$$\dot{x}(0) = (\mathrm{Id} - df_0)^{-1}(X_0) .$$

*Preuve.* Il s'agit d'une simple application du théorème des fonctions implicites. Posons

$$F : \begin{array}{ccc} ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times V & \rightarrow & \mathbb{R}^d \\ (t, x) & \mapsto & \Phi_t \circ f(x) - x . \end{array}$$

On a

$$d_{(0,0)}F(s, u) = sX_0 + d_0f(u) - u .$$

Comme par hypothèse  $\|df_0\| < 1$ , l'application linéaire  $dF_{(0,0)}$  restreinte à  $\{0\} \times \mathbb{R}^d$  est bijective. Par conséquent,  $F$  est une submersion au voisinage de  $(0,0)$  et  $F^{-1}(0)$  est donc une sous-variété de dimension 1, transverse aux fibres  $t = \text{Cste}$ . Le lieu  $F^{-1}(0)$  peut donc se paramétrer localement sous la forme  $(t, x(t))$  où  $x(t)$  est lisse et vérifie

$$X_0 + df_0(\dot{x}(0)) - \dot{x}(0) = 0 .$$

La conclusion suit. □

**Corollaire 4.3.9.** *L'application  $\pi$  est une submersion dont les fibres sont des géodésiques de type temps.*

*Preuve.* Nous allons déduire du lemme 4.3.8 un calcul de la différentielle de l'application  $\pi$ . Fixons  $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et identifions l'espace tangent à  $g$  avec l'algèbre de Lie de

$\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  par parallélisme à droite. Soit  $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ . Notons  $X_u$  le champ de Killing de  $\mathbb{H}^2$  correspondant à  $u$ , c'est-à-dire le générateur du flot

$$(t, x) \mapsto \exp(tu) \cdot x .$$

Par définition,  $\pi(g)$  est fixé par  $g \circ f$  et, comme  $f$  est contractante, on a  $\|d(g \circ f)_{\pi(g)}\| < 1$ . En appliquant le lemme 4.3.8 à  $g \circ f$  au voisinage de  $\pi(g)$  et au champ de vecteur  $X_u$ , on en déduit que  $t \mapsto \pi(\exp(tu)g)$  est dérivable en 0 et que

$$d_g \pi(u) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \pi(\exp(tu)g) = \left( \mathrm{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1} (X_u(\pi(g))) .$$

Or l'application linéaire  $u \mapsto X_u(\pi(g))$  est surjective de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow T_{\pi(g)}\mathbb{H}^2$  puisque l'action de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur  $\mathbb{H}^2$  est transitive. De plus, l'application linéaire  $\left( \mathrm{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1}$  est bijective. Par conséquent,  $\pi$  est bien une submersion au point  $g$ .

Pour finir, observons que si  $x$  est un point de  $\mathbb{H}^2$  tel que  $g \circ f(x) = x$ , alors

$$\pi^{-1}(x) = Kg$$

où  $K$  est le sous-groupe compact de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  fixant  $x$ . Les fibres de l'application  $\pi$  sont des translations à droite de sous-groupes compacts de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  et sont donc des géodésiques de type temps.  $\square$

Pour conclure la preuve du corollaire 4.3.6, il nous reste à voir que l'application  $\pi$  passe au quotient en une application de  $j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  dans  $j(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$ . Vérifions donc que pour tout  $\gamma \in \pi_1(S)$  et tout  $g \in \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ , l'unique point fixe de  $j(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1} \circ f$  est l'image de l'unique point fixe de  $g \circ f$  par  $j(\gamma)$ .

Soit  $x$  le point fixe de  $g \circ f$ . On a

$$\begin{aligned} j(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1} \circ f(j(\gamma) \cdot x) &= j(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1} \rho(\gamma) \circ f(x) \quad \text{par équivariance de } f, \\ &= j(\gamma)g \circ f(x) \\ &= j(\gamma) \cdot x . \end{aligned}$$

L'unique point fixe de  $j(\gamma)g\rho(\gamma)^{-1} \circ f$  est donc  $j(\gamma) \circ f$ , ce qui prouve l'équivariance de  $\pi$  par rapport aux représentations  $j \times \rho$  et  $j$ . Par conséquent,  $\pi$  passe au quotient en une fibration de Seifert de  $j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  dans  $j(\pi_1(S)) \backslash \mathbb{H}^2$ .

Supposons maintenant que la représentation  $j \times \rho$  se relève à  $I_d^0$ . Soit  $\widehat{j \times \rho}^d$  un tel relèvement, et notons  $p_d$  la projection de  $\widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d$  sur  $j \times \rho(\Gamma) \backslash P_1$ . Il est alors clair que la composée

$$\pi \circ p_d : \widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d \rightarrow j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$$

est une fibration de Seifert dont les fibres sont des géodésiques de type temps de  $P_d$ .

Supposons enfin que  $\rho$  est à valeurs dans un sous-groupe compact  $K$  de  $P_1$ . Soit  $K_d$  le relèvement de  $K$  dans  $P_d$  et soit  $\Delta_k$  le sous-groupe cyclique d'ordre  $k$  de  $K_d$ . Le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  s'identifie à  $P_d/K_d$ . On définit alors aisément une fibration de Seifert

$$\begin{aligned} \pi : \widehat{j \times \rho}^d(\Gamma) \backslash P_d / \Delta_k &\rightarrow j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2 \\ x &\mapsto xK_d . \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on conclut donc que la variété anti-de Sitter considérée possède une structure de fibré de Seifert de base  $j(\Gamma)\backslash\mathbb{H}^2$  dont les fibres sont des géodésiques de type temps. Ce fibré de Seifert est un fibré en cercle dès que la base est lisse, c'est-à-dire dès que  $\Gamma$  est sans torsion.  $\square$

### 4.3.3 Classification des fibrés en cercles

Pour aller plus loin, il nous faudrait maintenant déterminer quels fibrés de Seifert apparaissent dans le théorème 4.3.1. Seifert [Sei33] a prouvé que les fibrés qui portent son nom sont classifiés à isomorphisme près par leur groupe fondamental. Il suffirait donc de décrire les groupes fondamentaux des variétés anti-de Sitter obtenues dans le théorème 4.3.1.

Le groupe fondamental d'un fibré de Seifert à base hyperbolique est une extension centrale de  $\mathbb{Z}$  par un réseau  $\Gamma$  de  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Ces extensions centrales sont classifiées par un élément de  $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z})$  appelé *classe d'Euler* du fibré de Seifert. Lorsque  $\Gamma$  possède de la torsion, le groupe  $\mathrm{H}^2(\Gamma, \mathbb{Z})$  n'est pas isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , ce qui complique la classification des extensions centrales de  $\mathbb{Z}$  par  $\Gamma$ , ainsi que la classification des composantes connexes de  $\mathrm{Rep}(\Gamma, \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R}))$  (cette classification a toutefois été effectuée par Jankins et Neumann [JN85]). Pour cette raison, nous nous restreindrons à partir de maintenant à l'étude des quotients qui sont des fibrés en cercles au dessus d'une surface hyperbolique.

Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g \geq 2$ . Fixons une présentation

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$$

de  $\pi_1(S)$  compatible avec l'orientation de  $S$ .

Soit  $M$  un fibré en cercles au dessus de  $S$ . Fixons une orientation des fibres et notons  $t$  l'élément de  $\pi_1(M)$  représenté par une fibre parcourue dans le sens donné par l'orientation. L'élément  $t$  est central dans  $\pi_1(S)$  et engendre le noyau de la projection

$$\pi_* : \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(S) .$$

Si les  $\tilde{a}_i$  (resp.  $\tilde{b}_i$ ) sont des relèvements des  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) à  $\pi_1(M)$ , le groupe fondamental de  $M$  admet la présentation suivante :

$$\left\langle \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, t \mid \prod_{i=1}^g [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] = t^k \right\rangle .$$

L'entier  $k$ , qui ne dépend ni de la présentation de  $\pi_1(S)$  ni du choix des relèvements  $\tilde{a}_i$  et  $\tilde{b}_i$ , est la *classe d'Euler* du fibré  $M$ . Notons que renverser l'orientation de  $S$  ou de la fibre multiplie la classe d'Euler du fibré  $M$  par  $-1$ .

**Proposition 4.3.10** (voir [Sei33] ou [Sco83]). *Les fibrés en cercles orientés sur une surface orientée  $S$  sont classifiés par leur classe d'Euler. Les fibrés en cercles orientables au dessus d'une surface orientable  $S$  sont classifiés par la valeur absolue de leur classe d'Euler.*

On notera  $M(S, k)$  le fibré en cercles au dessus de  $S$  de classe d'Euler  $k$ .

**Remarque 4.3.11.** On peut toujours munir  $M(S, k)$  d'une action de  $\mathrm{U}(1)$  de façon à identifier  $M(S, k)$  à un  $\mathrm{U}(1)$ -fibré principal au dessus de  $S$ . Soit  $d$  un entier. Le quotient de  $M(S, k)$  par l'action du sous-groupe cyclique

$$\mathbb{U}^d = \{e^{i2k\pi/d}, k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathrm{U}(1)$$

est le fibré en cercle  $M(S, dk)$ . Inversement, si  $d$  divise  $k$ , le fibré  $M(S, k)$  est le quotient par une action de  $\mathbb{U}^d$  du fibré  $M(S, k/d)$  (voir [Sco83] pour une version plus générale de ces remarques).

La proposition suivante détermine la classe d'Euler des fibrés en cercles obtenus dans le théorème 4.3.1 en fonction de la classe d'Euler des représentations  $j$  et  $\rho$ .

**Proposition 4.3.12.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée de genre  $g$  supérieur à 2 et  $(j, \rho)$  un couple de représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$ , avec  $j$  fuchsienne et  $\rho$  strictement dominée par  $j$ . Alors*

– *Le quotient*

$$j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash P_1$$

*est difféomorphe à*

$$M(S, 2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)) .$$

– *Si  $d$  divise  $2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)$ , soit  $\widehat{j \times \rho}^d$  un relèvement de  $j \times \rho$  à  $I_0^d$ . Alors le quotient*

$$\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S)) \backslash P_d$$

*est difféomorphe à*

$$M\left(S, \frac{2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)}{d}\right) .$$

– *Si  $\rho$  est à valeur dans un sous-groupe compact  $K$  et si  $d$  divise  $2g - 2$ , soit  $\widehat{j \times \rho}^d$  un relèvement de  $j \times \rho$  à  $I_0^d$  et  $\Delta_k$  le sous-groupe cyclique d'ordre  $k$  du relèvement  $K_d$  de  $K$  à  $P_d$ . Alors le quotient*

$$\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S)) \backslash P_d / \Delta_k$$

*est isomorphe à  $M\left(S, \frac{k}{d}(2g - 2)\right)$ .*

*Preuve.* D'après le corollaire 4.3.6, ces quotients sont des fibrés en cercles au dessus de  $S$  et il suffit donc de déterminer leur groupe fondamental. Notons  $p_\infty : I_\infty^0 \rightarrow I_1^0$  l'application de revêtement. Le quotient

$$j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash P_1$$

a pour groupe fondamental  $\tilde{\Gamma} = p_\infty^{-1}(j \times \rho(\pi_1(S)))$ . Ce groupe  $\tilde{\Gamma}$  est engendré par des relèvements

$$(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i)), (\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i))$$

de  $(j(a_i), \rho(a_i))$  et  $(j(b_i), \rho(b_i))$  et par le générateur  $z$  de  $Z(I_\infty^0)$  correspondant à une rotation d'angle  $2\pi$  dans  $\mathbb{H}^2$ . On a donc une suite exacte

$$\mathbf{1} \rightarrow Z(I_\infty^0) \rightarrow \tilde{\Gamma} \rightarrow \pi_1(S) \rightarrow \mathbf{1} .$$

Comme dans la preuve de la proposition 4.3.2, on observe que

$$\prod_{i=1}^g [(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i)), (\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i))] = (\mathbf{e}(j) - \mathbf{e}(\rho)) z .$$

Par conséquent,  $\tilde{\Gamma}$  est bien isomorphe au groupe fondamental du fibré en cercle

$$M(S, \mathbf{e}(j) - \mathbf{e}(\rho)) .$$

Les deux autres cas se déduisent du premier et de la remarque 4.3.11. Il est clair en effet que  $j \times \rho(\pi_1(S)) \backslash P_1$  est le quotient de  $\widehat{j \times \rho^d}(\pi_1(S)) \backslash P_d$  par un groupe cyclique d'ordre  $d$  agissant sur les fibres. De même,  $\widehat{j \times \rho^d}(\pi_1(S)) \backslash P_d / \Delta_k$  est un quotient de  $\widehat{j \times \rho^d}(\pi_1(S)) \backslash P_d$  par une action fibre à fibre d'un groupe cyclique d'ordre  $k$ .  $\square$

**Remarque 4.3.13.** Il découle de la proposition 4.3.12 que les fibrés en cercles possédant une structure anti-de Sitter sont tous de classe d'Euler non-nulle. En effet, pour être de classe d'Euler nulle, un tel fibré devrait être, à revêtement fini près, de la forme

$$j \times \rho(\Gamma) \backslash \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$$

avec

$$\mathbf{e}(j) = \mathbf{e}(\rho) .$$

Or, dans ce cas,  $j \times \rho$  n'agit pas proprement sur  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  puisque  $\mathrm{Lip}(j, \rho) \geq 1$  (cf. ch.3, remarque 3.2.1).

Nous verrons plus loin que, réciproquement, tout fibré en cercle de classe d'Euler non nulle sur une surface compacte de genre supérieur à 2 possède une structure anti-de Sitter (ce qui est un cas particulier d'un résultat de Scott [Sco83] et Kulkarni–Raymond [KR85]).

## 4.4 Espace de déformation

Notons  $\mathrm{Def}_{\mathrm{AdS}}(M)$  l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur une variété  $M$ . Le but de cette section est de décrire la topologie de  $\mathrm{Def}_{\mathrm{AdS}}(M)$  lorsque  $M$  est un fibré en cercle au dessus d'une surface compacte. Nous verrons en particulier que cet espace possède un nombre fini de composantes connexes, qui sont classifiées par un nombre rationnel que nous appellerons la *longueur de la fibre*.

### 4.4.1 Longueur de la fibre d'une variété anti-de Sitter compacte

Soit  $M = M(S, k)$  le fibré en cercles de classe d'Euler  $k$  au dessus de  $S$ . Soit  $\gamma$  un lacet de  $M$  faisant le tour d'une fibre. Vu comme élément du groupe fondamental,  $\gamma$  est un générateur du centre de  $\pi_1(M)$ .

Soit maintenant  $q$  une métrique anti-de Sitter sur  $M$ . Cette métrique induit un morphisme d'holonomie  $h : \pi_1(M) \rightarrow I_\infty^0$ . Il découle du théorème 4.3.1 que l'image de  $\gamma$  par ce morphisme d'holonomie appartient au relèvement  $K_\infty$  d'un sous-groupe compact à un paramètre  $K$  de  $P_1 \times P_1$  et que  $h(\gamma)$  est même central dans  $I_\infty^0$  si la structure anti-de Sitter n'est pas standard. Par conséquent, il existe une géodésique fermée simple de type temps sur  $M$  qui est homotope à  $\gamma$ , et toutes les géodésiques fermées de type temps homotope à  $\gamma$  ont même longueur.

**Définition 4.4.1.** Soit  $M$  un fibré en cercle orientable au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  et  $q$  une métrique anti-de Sitter sur  $M$ . Nous appellerons *longueur de la fibre* le nombre

$$\mathbf{n}(M, q) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \sqrt{-q(\dot{c}(t), \dot{c}(t))} ,$$

où  $c : [0, 1] \rightarrow M$  est une géodésique fermée simple de type temps librement homotope à une fibre de  $M$ .

La longueur de la fibre est clairement invariante par l'action de  $\text{Diff}(M)$ . On peut donc voir  $\mathbf{n}$  comme une fonction sur l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur  $M$ .

Lorsque  $(M, q)$  est isométrique au quotient

$$(\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S))) \backslash P_d ,$$

la longueur de la fibre est égale à  $d$  et coïncide donc avec le "niveau" de la structure anti-de Sitter (i.e. le plus petit entier  $d$  tel que  $(M, q)$  est un quotient de  $P_d$ ). Lorsque  $(M, q)$  est isométrique au quotient

$$\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S)) \backslash P_d / \Delta_k ,$$

la longueur de la fibre est égale à  $\frac{d}{k}$ .

En particulier, la longueur de la fibre ne prend que des valeurs rationnelles. Par conséquent, elle est constante sur les composantes connexes de  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$  et permet donc de distinguer diverses composantes connexes. La proposition suivante détermine les valeurs que peut prendre la longueur de la fibre sur un fibré  $M$  fixé.

**Proposition 4.4.2.** *Soit  $M = M(S, k)$  le fibré en cercles de classe d'Euler  $k > 0$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g$  supérieur à 2. La longueur de la fibre, définie sur  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$ , prend exactement toutes les valeurs entières strictement comprises entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , ainsi que la valeur rationnelle  $\frac{2g-2}{k}$ .*

*Preuve.* Soit  $q$  une métrique anti-de Sitter sur  $M(S, k)$ . Si  $q$  fournit une structure anti-de Sitter standard, alors  $(M, q)$  est isométrique à un quotient de la forme

$$\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S)) \backslash P_d / \Delta_l ,$$

et d'après la proposition 4.3.12, on a

$$k = \frac{l}{d}(2g - 2) = \frac{2g - 2}{\mathbf{n}(M, q)} ,$$

d'où

$$\mathbf{n}(M, q) = \frac{2g - 2}{k} .$$

Réciproquement, on obtient une structure anti-de Sitter sur  $M(S, k)$  dont la longueur de la fibre est  $\frac{2g-2}{k}$  en relevant à  $P_{2g-2}$  l'action de  $j \times \rho$  où  $\rho$  est à valeurs dans un sous-groupe compact, puis en quotientant à droite par un groupe cyclique d'ordre  $k$ .

Supposons maintenant que  $q$  n'est pas standard. Alors  $\mathbf{n}(M, q)$  est entier et, d'après la proposition 4.3.12, il existe une représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{R})$  non fuchsienne telle que

$$k = \frac{2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)}{d} = \frac{2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)}{\mathbf{n}(M, q)} .$$

On a donc

$$\mathbf{n}(M, q) = \frac{2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)}{k} ,$$

et d'après l'inégalité de Milnor–Wood,

$$0 < \mathbf{n}(M, q) < \frac{4g - 4}{k} .$$

Réciproquement, si  $d$  est un entier strictement compris entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , il existe une

représentation  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  de classe d'Euler  $2g - 2 - kd$ . D'après le théorème 3.2.2 (chapitre 3), il existe une représentation  $j$  de classe d'Euler  $2g - 2$  qui domine strictement  $\rho$ . La représentation  $j \times \rho$  se relève alors en une représentation  $\widehat{j \times \rho}^d$  de  $\pi_1(S)$  dans  $I_d^0$  et le quotient  $\widehat{j \times \rho}^d(\pi_1(S)) \backslash P_d$  est une variété anti-de Sitter diffeomorphe à  $M(S, k)$  dont la longueur de la fibre vaut  $d$ .  $\square$

Dans la section suivante, nous prouvons que chaque fibre de la fonction  $\mathbf{n}$  est connexe. La proposition 4.4.2 classe donc les composantes connexes de  $\mathrm{Def}_{\mathrm{AdS}}(M)$ .

#### 4.4.2 Composantes connexes des espaces de déformation

Soit  $M = M(S, k)$  le fibré en cercles orientable de classe d'Euler  $k > 0$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$ . Commençons par rappeler que l'espace de déformation  $\mathrm{Def}_{\mathrm{AdS}}(M)$  est paramétré par un espace de représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$ .

**Proposition 4.4.3.** *L'espace  $\mathrm{Def}_{\mathrm{AdS}}(M)$  est homéomorphe à l'espace des représentations injectives de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$  agissant librement, proprement discontinûment et cocompactement sur  $P_\infty$ , quotienté par l'action de  $I_\infty$  par conjugaison.*

*Preuve.* D'après le théorème de Klingler (voir ch.1 théorème 1.6.2), toute structure anti-de Sitter sur  $M$  est complète. Son morphisme d'holonomie fournit alors une représentation injective de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty$  (bien définie modulo conjugaison) dont l'action sur  $P_\infty$  est libre, proprement discontinue et cocompacte. Comme, par hypothèse,  $S$  et  $M$  sont orientables, le morphisme d'holonomie est en fait à valeurs dans le sous-groupe  $I_\infty^0$ .

Réciproquement, soit  $h$  une représentation injective de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$  dont l'action sur  $P_\infty$  est proprement discontinue et cocompacte. Comme  $M$  et  $h(\pi_1(M)) \backslash P_\infty$  sont des espaces  $\kappa(\pi, 1)$ , le théorème de Whitehead [Whi49] – complété par un théorème de Waldhausen [Wal68] – implique l'existence d'un diffeomorphisme de  $M$  dans  $h(\pi_1(M)) \backslash P_\infty$ , unique à isotopie près, qui induit le morphisme  $h$  en homotopie. Par conséquent,  $h$  est le morphisme d'holonomie d'une structure anti-de Sitter sur  $M$ , unique à isotopie près.  $\square$

Rappelons que  $\mathrm{Rep}_k(S, P_1)$  désigne l'espace des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  de classe d'Euler  $k$  modulo conjugaison. Pour tout entier  $d > 0$ , nous noterons  $\mathrm{Paires}_k(S, I_d^0)$  l'espace des relèvements à  $I_d^0$  des représentations  $j \times \rho : \pi_1(S) \rightarrow I_1^0$ , où  $j$  est fuchsienne et  $\rho$  de classe d'Euler  $2g - 2 - dk$ , modulo conjugaison par  $I_d^0$ . On notera également  $\mathrm{Adm}_k(S, I_d^0)$  le domaine de  $\mathrm{Paires}_k(S, I_d^0)$  formé des relèvements de représentations  $j \times \rho$  telles que  $j$  domine strictement  $\rho$ . Enfin, nous noterons  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  l'ensemble des morphismes de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$  qui relèvent les morphismes de  $\mathrm{Paires}_k(S, I_d^0)$  modulo conjugaison par  $I_\infty^0$  et  $\mathrm{Adm}_k^d(M, I_\infty^0) \subset \mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  ceux qui relèvent des morphismes de  $\mathrm{Adm}_k(S, I_d^0)$ .

**Lemme 4.4.4.** *Soit  $d$  un entier supérieur à 1 tel que  $dk < 4g - 4$ . Alors*

- $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  est un revêtement galoisien connexe de

$$\mathrm{Paires}_{dk}(S, I_1^0) \simeq \mathcal{T}(S) \times \mathrm{Rep}_{2g-2-dk}(S, P_1) ,$$

*de groupe de Galois  $\mathbb{Z}^{2g}$ ,*

- $\mathrm{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$  est homéomorphe à  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$ .

*Démonstration.*

Toute représentation de  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  envoie le centre de  $\pi_1(M)$  dans le centre de  $I_\infty^0$ , et l'application de revêtement de  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  dans  $\mathrm{Paires}_{dk}(S, I_1^0)$  est simplement l'application  $\pi_{rep}$  qui à une représentation de  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  associe la représentation induite

de  $\pi_1(S)$  dans  $I_1^0 : P_1 \times P_1$ . Montrons que cette application est un revêtement galoisien de groupe de Galois  $\mathbb{Z}^{2g}$ . Pour cela, fixons une présentation

$$\left\langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = 1 \right\rangle$$

de  $\pi_1(S)$  et une présentation

$$\left\langle \tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{a}_g, \tilde{b}_g, t \mid \prod_{i=1}^g [\tilde{a}_i, \tilde{b}_i] = t^k \right\rangle$$

de  $\pi_1(M)$  (telle que le morphisme induit en homotopie par la projection de  $M$  sur  $S$  envoie  $\tilde{a}_i$  sur  $a_i$ ,  $\tilde{b}_i$  sur  $b_i$  et  $t$  sur  $\mathbf{1}_{\pi_1(S)}$ ).

Rappelons qu'on désigne par  $Z_\infty$  le centre de  $P_\infty$  ainsi que son plongement diagonal dans  $P_\infty \times P_\infty$ . Le groupe  $I_\infty^0$  est isomorphe à  $P_\infty \times P_\infty / Z_\infty$  et son centre est engendré par l'élément  $\bar{z}$  image de  $(z, 1) \in P_\infty \times P_\infty$ , où  $z$  désigne le générateur de  $Z_\infty$  correspondant à une rotation d'angle  $2\pi$  de  $\mathbb{H}^2$ .

Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  de classe d'Euler  $2g - 2 - dk$ . Alors tout morphisme de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$  appartenant à  $\pi_{rep}^{-1}(j \times \rho)$  envoie  $t$  sur  $\bar{z}^d$  et  $\tilde{a}_i$  (resp.  $\tilde{b}_i$ ) sur la projection dans  $I_\infty$  d'un relèvement  $(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i))$  (resp.  $(\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i))$ ) de  $(j(a_i), \rho(a_i))$  (resp.  $(j(b_i), \rho(b_i))$ ) à  $P_\infty \times P_\infty$ . Choisir un élément de la fibre  $\pi_{rep}^{-1}(j \times \rho)$  revient donc à choisir les relèvements  $(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i))$  et  $(\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i))$  modulo le plongement diagonal de  $Z_\infty$ . On peut alors définir une action de  $\mathbb{Z}^{2g}$  sur  $\text{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  de la façon suivante :

Si  $h$  est un élément de  $\pi_{rep}^{-1}(j \times \rho)$  qui envoie  $\tilde{a}_i$  (resp.  $\tilde{b}_i$ ) sur  $(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i))$  (resp.  $(\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i))$ ), l'image de  $h$  par le  $2g$ -uplet  $(\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g)$  est l'élément de  $\pi_{rep}^{-1}(j \times \rho)$  qui envoie  $a_i$  (resp.  $b_i$ ) sur

$$(\tilde{j}(a_i), \tilde{\rho}(a_i) + z^{\alpha_i})$$

(resp.

$$(\tilde{j}(b_i), \tilde{\rho}(b_i) + z^{\beta_i}) .$$

Il est alors clair que  $\mathbb{Z}^{2g}$  agit ainsi comme un groupe d'automorphismes de revêtement et que

$$\text{Paires}_{dk}(S, I_1^0) = \mathbb{Z}^{2g} \backslash \text{Rep}_k^d(M, I_\infty^0) .$$

Prouvons maintenant que ce revêtement est connexe. La preuve est analogue à la preuve du fait que l'ensemble des relèvements à  $P_d$  des représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  de classe d'Euler  $dk$  est connexe lorsque  $|dk| < 2g - 2$  [Gol88]. Il suffit de prouver que pour tout élément  $\alpha$  de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{2g}$ , il existe un élément  $h$  de  $\text{Paires}_{dk}(S, I_1^0)$  tel que  $h$  et  $\alpha \cdot h$  peuvent être connectés par un chemin continu. Par symétrie, il suffit de le prouver pour  $\alpha = (1, 0, \dots, 0)$ . Pour prouver cela, nous admettrons le lemme suivant :

**Lemme 4.4.5** ([Gol85b]). *Soit  $l$  un entier strictement compris entre  $2 - 2g$  et  $2g - 2$ . Alors il existe une représentation  $\rho$  de classe d'Euler  $l$  telle que  $\rho(b_1)$  est elliptique et différent de  $\mathbf{1}_{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$ .*

Soit  $j$  une représentation fuchsienne de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1$  de classe d'Euler  $2g - 2 - dk$  telle que  $\rho(b_1)$  est elliptique. Soient  $s \in ]0, 2\pi[$  et  $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  tels que  $\exp(2\pi u) = \mathbf{1}_{\text{PSL}(2, \mathbb{R})}$  et  $\exp(su) = \rho(b_1)$ . Pour tout  $t \in [0, 2\pi]$ , notons

$\rho_t$  la représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$  telle que

$$\rho_t(b_i) = \rho(b_i)$$

pour tout  $i$ ,

$$\rho_t(a_i) = \rho(a_i)$$

pour tout  $i \geq 2$  et

$$\rho_t(a_1) = \rho(a_1) \exp(tu) .$$

On vérifie aisément que  $\rho_t$  est bien définie, du fait que  $\exp(tu)$  commute avec  $\rho(b_1)$ . On a par ailleurs  $\rho_0 = \rho_{2\pi} = \rho$ . Soit maintenant  $(h_t)_{t \in [0, 2\pi]}$  un chemin continu dans  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  relevant le chemin  $(j \times \rho_t)_{t \in [0, 2\pi]}$ . En particulier,  $h_0$  et  $h_{2\pi}$  sont deux relèvements de  $j \times \rho$ . Par continuité, on a clairement

$$h_{2\pi}(\tilde{b}_i) = h_0(\tilde{b}_i)$$

pour tout  $i$ ,

$$h_{2\pi}(\tilde{a}_i) = h_0(\tilde{a}_i)$$

pour tout  $i \geq 2$  et

$$h_{2\pi}(\tilde{a}_1) = h_0(\tilde{a}_1) \exp(2\pi u) .$$

Or,  $\exp(2\pi u)$  est égal au générateur de  $z$  de  $Z_\infty$ . On a donc prouvé que  $h_0 = h$  et  $h_{2\pi} = (1, 0, \dots, 0) \cdot h$  sont dans la même composante connexe. On montrerait de même qu'il existe pour tout élément  $\alpha$  de la base canonique de  $\mathbb{Z}^{2g}$  un élément  $h$  de  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  tel que  $h$  et  $\alpha \cdot h$  sont dans la même composante connexe. Comme la base canonique de  $\mathbb{Z}^{2g}$  engendre le groupe de Galois du revêtement galoisien  $\pi_{rep} : \mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0) \rightarrow \mathrm{Paires}_{kd}(S, P_1)$ , on en déduit que ce revêtement est connexe.

Il nous reste à prouver que  $\mathrm{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$  est homéomorphe à  $\mathrm{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$ . D'après le théorème 3.2.10 du chapitre 3, on sait déjà que  $\mathrm{Paires}_{kd}(S, P_1)$  est homéomorphe à  $\mathrm{Adm}_{kd}(S, P_1)$ . Il nous reste donc à relever cet homéomorphisme. Rappelons que cet homéomorphisme est donné par

$$j \times \rho \mapsto \Psi_\rho(j) \times \rho$$

(voir chapitre 3, section 3.4).

Notons par ailleurs que si  $\gamma$  est un élément hyperbolique de  $P_1$ , il existe un unique relèvement  $\hat{\gamma}$  de  $\gamma$  à  $P_1$  qui est dans l'image de l'application exponentielle. Cette remarque permet de relever canoniquement l'homéomorphisme de  $\mathrm{Paires}_{kd}(S, P_1)$  dans  $\mathrm{Adm}_{kd}(S, P_1)$ , de la façon suivante :

Soit  $j \times \rho \in \mathrm{Paires}_{kd}(S, P_1)$  et  $h$  un élément de  $\pi_{rep}^{-1}(j \times \rho)$ . Pour tout  $i$ , il existe un unique relèvement  $\tilde{\rho}(a_i)$  (resp.  $\tilde{\rho}(b_i)$ ) de  $\rho(a_i)$  (resp.  $\rho(b_i)$ ) à  $P_d$  tel que

$$h(\tilde{a}_i) = \pi_\infty \left( \widehat{j(a_i)}, \tilde{\rho}(a_i) \right)$$

et

$$h(\tilde{b}_i) = \pi_\infty \left( \widehat{j(b_i)}, \tilde{\rho}(b_i) \right) ,$$

où  $\pi_\infty$  désigne la projection de  $P_\infty \times P_\infty$  sur  $I_\infty$ .

On définit alors  $\widehat{\Psi}(h)$  comme le morphisme  $h$  de  $\pi_{rep}^{-1}(\Psi_\rho(j), \rho)$  qui envoie  $\tilde{a}_i$  sur

$$\pi_\infty \left( \widehat{\Psi_\rho(j)}(a_i), \tilde{\rho}(a_i) \right)$$

et  $b_i$  sur

$$\pi_\infty \left( \widehat{\Psi_\rho(j)}(b_i), \tilde{\rho}(b_i) \right) .$$

On relèverait de même l'homéomorphisme  $\Psi^{-1} : \text{Adm}_{kd}(S, P_1) \rightarrow \text{Paires}_{kd}(S, P_1)$  en une application de  $\text{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$  dans  $\text{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$ , réciproque de  $\widehat{\Psi}$ . On conclut donc que  $\text{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$  et  $\text{Rep}_k^d(M, I_\infty^0)$  sont homéomorphes.  $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de décrire l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur un fibré en cercle donné :

**Théorème 4.4.6.** *Soit  $M = M(S, k)$  le fibré en cercles de classe d'Euler  $k > 0$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g$ . Alors :*

- l'application  $\mathbf{n}$  prend exactement toutes les valeurs entières strictement comprises entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , ainsi que la valeur rationnelle  $\frac{2g-2}{k}$ ,
- les composantes connexes de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur  $M$  sont les fibres de l'application  $\mathbf{n}$ ,
- si  $d \in \mathbb{Z} \cap ]0, \frac{4g-4}{k}[$ , la fibre  $\mathbf{n}^{-1}(d)$  est homéomorphe à un revêtement galoisien de  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}_{2g-2-dk}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R}))$  de groupe de Galois  $\mathbb{Z}^{2g}$ ,
- si  $k$  ne divise pas  $2g - 2$ , la fibre  $\mathbf{n}^{-1}(\frac{2g-2}{k})$  est homéomorphe à un revêtement galoisien de  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{PSO}(2))$  de groupe de Galois  $\mathbb{Z}^{2g}$ ,

*Preuve.* Les valeurs prises par l'application  $\mathbf{n}$  sont données par la proposition 4.4.2. D'après les lemmes 4.3.1 et 4.3.3 et la proposition 4.4.3, si  $d$  est un entier strictement compris entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ , le domaine de  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$  formé des structures anti-de Sitter de longueur de la fibre  $d$  est homéomorphe à  $\text{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$ . Enfin,  $\text{Adm}_k^d(M, I_\infty^0)$  est connexe, homéomorphe à un revêtement galoisien au dessus de

$$\text{Paires}_{kd}(S, I_\infty^0) \simeq \mathcal{T}(S) \times \text{Rep}_{2g-2-dk}(S, \text{PSL}(2, \mathbb{R})) .$$

Il reste à décrire l'ensemble des structures anti-de Sitter de longueur de la fibre  $\frac{2g-2}{k}$  lorsque  $k$  ne divise pas  $2g - 2$ . D'après la preuve de la proposition 4.4.2, ces structures sont standard et identifient  $M$  à un quotient de la forme

$$\widehat{j \times \rho}^{2g-2}(\pi_1(S)) \backslash P_{2g-2} / \Delta_k ,$$

où  $\Delta_k$  est le sous-groupe cyclique d'ordre  $k$  du relèvement  $K_d$  de  $K = \text{PSO}(2)$  à  $P_d$ . Le domaine  $\mathbf{n}^{-1}(\frac{2g-2}{k})$  est alors homéomorphe à l'espace des représentations de  $\pi_1(M)$  dans  $I_\infty^0$  qui relèvent les représentations  $j \times \rho$  de  $\pi_1(S)$  dans  $P_1 \times K$  telles que  $j$  est fuchsienne et on peut montrer, exactement comme dans la preuve du lemme 4.4.4, que cet espace est un revêtement galoisien connexe de  $\mathcal{T}(S) \times \text{Rep}(S, \text{PSO}(2))$  de groupe de Galois  $\mathbb{Z}^{2g}$ .  $\square$

Pour conclure cette description de l'espace de déformation  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$  revenons sur la place qu'occupent dans cet espace les structures standard. D'après la proposition 4.4.2, ces structures standard ont pour longueur de la fibre  $\frac{2g-2}{k}$ . Lorsque  $k$  divise  $2g - 2$ , la composante connexe  $\mathbf{n}^{-1}(\frac{2g-2}{k})$  de  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$  contient des structures non standard et toute structure standard peut donc être déformée continûment en une structure non standard. En revanche, si  $k$  ne divise pas  $\frac{2g-2}{k}$ , la composante connexe  $\mathbf{n}^{-1}(\frac{2g-2}{k})$  ne contient que des structures standard. Remarquons enfin que si  $k \geq 4g - 4$ , il n'existe pas d'entier strictement compris entre 0 et  $\frac{4g-4}{k}$ . Dans ce cas, l'espace  $\text{Def}_{\text{AdS}}(M)$  possède une seule composante connexe, formée uniquement de structures standard.

## 4.5 Volume

Pour parachever notre description des variétés anti-de Sitter compactes de dimension 3, nous allons déterminer le volume global des métriques anti-de Sitter sur les fibrés en cercles, ce qui répondra à la question 2.2 de [BBD<sup>+</sup>12].

**Théorème 4.5.1.** *Soit  $M = M(S, k)$  le fibré en cercle de classe d'Euler  $k \geq 0$  au dessus d'une surface compacte orientée  $S$  de genre  $g \geq 2$ . Soit  $q$  une métrique anti-de Sitter sur la variété  $M = M(S, k)$ . Alors le volume total de  $(M, q)$  s'exprime en fonction de la longueur de la fibre de  $q$  par*

$$\text{Vol}(M, q) = \frac{\pi^2}{2} \left( (4g - 4)\mathbf{n}(M, q) - k \mathbf{n}(M, q)^2 \right) .$$

*En particulier, ce volume est constant sur les composantes connexes de l'espace de déformation des structures anti-de Sitter sur  $M$ .*

Le théorème sera une conséquence du lemme suivant :

**Lemme 4.5.2.** *Soient  $j$  et  $\rho$  deux représentations de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  telles que  $j$  est fuchsienne et domine strictement  $\rho$ . Alors le quotient*

$$j \times \rho(\Gamma) \backslash P_1$$

*a pour volume*

$$\frac{\pi^2}{2} (2g - 2 + \mathbf{e}(\rho)) .$$

Commençons par vérifier que le lemme 4.5.2 implique bien le théorème 4.1.7. Soit  $q$  une métrique anti-de Sitter sur  $M = M(S, k)$ . Comme le volume d'un revêtement est égal au volume de la base multiplié par le degré du revêtement, on obtient, d'après le lemme 4.5.2 :

$$\text{Vol}(M, q) = \frac{\pi^2}{2} \mathbf{n}(M, q) (2g - 2 + \mathbf{e}(\rho)) ,$$

où  $\rho$  est une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  telle que

$$k = \frac{2g - 2 - \mathbf{e}(\rho)}{\mathbf{n}(M, q)} .$$

On a donc

$$\mathbf{e}(\rho) = 2g - 2 - k \mathbf{n}(M, q) ,$$

d'où

$$\text{Vol}(M, q) = \frac{\pi^2}{2} \left( (4g - 4)\mathbf{n}(M, q) - k \mathbf{n}(M, q)^2 \right) .$$

*Démonstration du lemme 4.5.2.*

Soit  $f : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$  une application  $(j, \rho)$ -équivariante et  $\lambda$ -lipschitzienne pour un  $\lambda < 1$ . Soit

$$\pi : j \times \rho(\Gamma) \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$$

la fibration en cercles associée à  $f$  définie dans la preuve du corollaire 4.3.6.

Fixons  $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . L'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  se décompose sous la forme  $\mathfrak{k}_g \oplus \mathfrak{k}_g^\perp$ , où  $\mathfrak{k}_g$  désigne l'algèbre de Lie du stabilisateur du point  $\pi(g)$ . La différentielle  $d_g \pi$  a pour noyau  $\mathfrak{k}_g$  et induit un isomorphisme de  $\mathfrak{k}_g^\perp$  dans  $T_{\pi(g)} \mathbb{H}^2$ . On peut donc définir une forme

volume  $\text{Vol}^\pi$  sur  $T_g\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  en munissant  $\mathfrak{k}_g$  de la mesure de longueur associée à la forme de Killing de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  et  $\mathfrak{k}_g^\perp$  du tiré en arrière de la forme volume  $\text{Vol}^{\mathbb{H}^2}$  de  $\mathbb{H}^2$  par  $\pi$ . Quel est le rapport entre ce volume et le volume  $\text{Vol}^\kappa$  associé à la métrique de Killing sur  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  ?

Pour le voir, considérons  $(u, v)$  une base orthonormée de  $\mathfrak{k}_g^\perp$  et  $w$  un vecteur unitaire de  $\mathfrak{k}_g$  de norme 1. Alors, au signe près, on a  $\text{Vol}^\kappa(u, v, w) = 1$ . Par ailleurs, les champs de Killing  $X_u$  et  $X_v$  sur  $\mathbb{H}^2$  associés à  $u$  et  $v$  sont orthogonaux de norme 2 au point  $\pi(g)$  et vérifient donc  $\text{Vol}_{\pi(g)}^{\mathbb{H}^2}(X_u, X_v) = 4$ . Or, nous avons vu au cours de la preuve de la proposition 4.3.9 que la différentielle de  $\pi$  en  $g$  vérifie

$$d_g\pi(u) = \left( \text{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1} (X_u)$$

et

$$d_g\pi(v) = \left( \text{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1} (X_v) .$$

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Vol}_{\pi(g)}^{\mathbb{H}^2}(d_g\pi(u), d_g\pi(v)) &= \det \left( \text{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1} \text{Vol}_{\pi(g)}^{\mathbb{H}^2}(X_u, X_v) \\ &= 4 \det \left( \text{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right)^{-1} , \end{aligned}$$

d'où

$$\text{Vol}_g^\kappa = \frac{1}{4} \det \left( \text{Id} - d_{\pi(g)}(g \circ f) \right) \text{Vol}_g^\pi .$$

Nous allons maintenant intégrer cette identité pour obtenir le résultat souhaité. Posons  $S = j(\Gamma) \backslash \mathbb{H}^2$  et  $M = j \times \rho(\Gamma) \backslash \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Soit  $U$  un ouvert de  $S$  sur lequel la fibration  $\pi : M \rightarrow S$  admet une section  $s$ . On peut alors identifier l'ouvert  $V = \pi^{-1}(U)$  à  $K \times U$ , où  $K$  est le stabilisateur d'un point base  $x_0$  de  $U$ . La trivialisatation est donnée par

$$(k, x) \mapsto hkh^{-1}s(x),$$

où  $h$  désigne n'importe quel élément de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui envoie  $x_0$  sur  $x$  (de sorte que  $hKh^{-1}$  est le stabilisateur de  $x$ ). À travers cette identification, le volume  $\text{Vol}^\pi$  s'identifie au volume produit sur  $K \times U$  et on a

$$\text{Vol}_{(k,x)}^\kappa = \frac{1}{4} \det \left( \text{Id} - d_x(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) \text{Vol}_{(k,x)}^\pi .$$

Commençons par intégrer  $\text{Vol}^\kappa$  fibre par fibre.

**Proposition 4.5.3.**

$$\int_K \det \left( \text{Id} - d_x(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) dk = \pi (1 + \text{Jac}_f(x)) ,$$

où  $\text{Jac}_f(x)$  est défini par

$$f^* \left( \text{Vol}_{f(x)}^{\mathbb{H}^2} \right) = \text{Jac}_f(x) \text{Vol}_x^{\mathbb{H}^2} .$$

*Preuve.* On a

$$\begin{aligned} \int_K \det \left( \text{Id} - d_x(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) dk &= \int_K \left[ 1 - \text{Tr} \left( d_x(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) \right. \\ &\quad \left. + \det \left( d_x(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) \right] dk \\ &= \pi - \int_{hKh^{-1}} \text{Tr} \left( d_x k d_x(s(x) \circ f) \right) dk \\ &\quad + \int_{hKh^{-1}} \det \left( d_x k d_x(s(x) \circ f) \right) dk . \end{aligned}$$

Or, quand  $k$  parcourt  $hKh^{-1}$ , la dérivée  $d_x k$  parcourt le groupe des rotations de  $T_x S$ , qui est stable par multiplication par  $-\text{Id}_{T_x S}$ . On a par conséquent

$$\int_{hKh^{-1}} \text{Tr} \left( d_x k d_x(s(x) \circ f) \right) dk = - \int_{hKh^{-1}} \text{Tr} \left( d_x k d_x(s(x) \circ f) \right) dk = 0 .$$

De plus, pour tout  $k$  dans  $hKh^{-1}$ , on a  $\det(d_x k) = 1$ , et donc

$$\begin{aligned} \int_{hKh^{-1}} \det \left( d_x k d_x(s(x) \circ f) \right) dk &= \int_{hKh^{-1}} \det(d_x(s(x) \circ f)) \\ &= \pi \det(d_x(s(x) \circ f)) \\ &= \pi \text{Jac}_f(x) \end{aligned}$$

car  $s(x)$  est une isométrie de  $\mathbb{H}^2$  et préserve donc son volume. On a bien finalement

$$\int_K \det \left( \text{Id} - d(hkh^{-1}s(x) \circ f) \right) dk = \pi (1 + \text{Jac}_f(x)) .$$

□

D'après la proposition 4.5.3, on a donc

$$\int_{K \times U} \text{Vol}^\kappa = \int_U \frac{\pi}{4} (1 + \text{Jac}_f(x)) \text{Vol}^{\mathbb{H}^2} .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_M \text{Vol}^\kappa &= \int_S \frac{\pi}{4} (1 + \text{Jac}_f(x)) \text{Vol}^{\mathbb{H}^2} \\ &= \frac{\pi}{4} \int_S \text{Vol}^{\mathbb{H}^2} + \frac{\pi}{4} \int_S f^* (\text{Vol}^{\mathbb{H}^2}) \\ &= \frac{\pi^2}{2} (\mathbf{e}(j) + \mathbf{e}(\rho)) . \end{aligned}$$

□

# Conclusion

L'ÉTUDE DES VARIÉTÉS PSEUDO-RIEMANNIENNES localement homogènes et, plus généralement, la géométrisation des variétés est un sujet riche où interagissent des outils d'analyse, de géométrie différentielle, de géométrie algébrique et de dynamique. Les différentes questions abordées dans cette thèse illustrent, je l'espère, cette diversité d'aspects. Les résultats que j'ai obtenu, s'ils sont motivés par une même problématique générale, ouvrent des perspectives de recherche dans plusieurs directions. J'aimerais conclure cette thèse en évoquant ces différentes perspectives.

Notre premier théorème classifiait les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  dont le flot géodésique est complet. Il serait intéressant d'aller plus loin et de caractériser la complétude du flot géodésique des métriques pseudo-riemanniennes invariantes à gauche sur un groupe de Lie semi-simple quelconque. Comme nous l'avons vu, le problème se ramène à l'étude des solutions d'un champ de vecteur quadratique sur l'algèbre de Lie (le champ d'Euler–Arnold). Ce champ possède des intégrales premières homogènes qui définissent une variété projective réelle (l'intersection du cône nilpotent avec le cône isotrope de la métrique duale) sur laquelle la projection du champ d'Euler–Arnold induit un feuilletage algébrique de dimension 1. On aimerait par exemple prouver que ce feuilletage possède des singularités, qui correspondraient à des directions radiales du champ d'Euler–Arnold. Ces questions nous orientent vers des problèmes assez concrets (mais probablement difficiles) de géométrie algébrique réelle. Notre espoir serait de trouver un critère de complétude qui s'exprime joliment en fonction de la métrique considérée et de la structure d'algèbre de Lie. Il serait intéressant, plus généralement, d'étudier la complétude géodésique des métriques pseudo-riemanniennes homogènes.

Nous avons ensuite étudié la question de la complétude des  $(G, X)$ -structures compactes. Dans ce domaine, les théorèmes du chapitre 2 constituent une avancée modeste devant l'ampleur du travail qu'il reste à faire. Il semble en particulier très difficile, avec les techniques que nous avons utilisées, de généraliser nos résultats à des  $(G, X)$ -structures qui ne sont plus supposées kleiniennes. On peut en revanche espérer étendre ces techniques à l'étude plus générale des ouverts divisibles d'un espace pseudo-riemannien homogène. On pourrait par exemple essayer de prouver qu'il n'existe pas d'ouvert strict de  $\mathbb{R}^n$  divisible par un sous-groupe de transformations affines pseudo-riemanniennes. Si un tel ouvert existait, on constaterait que son bord contient des sous-espaces affines de dimension supérieure à la moitié de celle de l'espace. Par ces mêmes arguments utilisés au chapitre 2, ces sous-espaces devraient ne pas s'intersecter transversalement, ce qui est une condition algébrique non triviale, quoique difficile à exploiter.

Dans le chapitre 3, initialement motivé par un problème de géométrie anti-de Sitter de dimension 3, nous avons été conduit à nous intéresser à des questions de comparai-

son géométrique entre des représentations de groupes de surfaces. Nous avons pu décrire l'ensemble des représentations fuchsienues qui dominent une représentation à valeurs dans un groupe de Lie de rang 1 et prouver en particulier que cet ensemble est non vide. Il serait maintenant intéressant de considérer des représentations à valeurs dans des groupes de Lie de rang supérieur, en commençant par des représentations à valeurs dans  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  (qu'on peut voir comme agissant isométriquement sur son espace symétrique). Rappelons que l'espace de ces représentations contient les représentations de Hitchin, qui sont obtenues en déformant continûment une représentation de la forme  $\iota \circ j$ , où  $j$  est fuchsienne et où  $\iota : \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  est une représentation irréductible. Le théorème 5 ne se généralise pas aux représentations Hitchin et plusieurs résultats tendent à montrer que les représentations fuchsienues sont au contraire "minimales" parmi les Hitchin (voir par exemple [Hit92], proposition 10.1, ou [Cra09] pour le cas de la dimension 3). Ceci nous conduit à formuler les conjectures suivantes :

**Conjecture.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée et  $\rho : \pi_1(S) \rightarrow \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  une représentation de Hitchin. Alors il existe une représentation fuchsienne  $j$  telle que*

$$L_j \leq L_\rho .$$

(Rappelons que  $L_\rho$  est la fonction qui à  $\gamma$  associe la longueur de translation de  $\rho(\gamma)$ .)

**Conjecture.** *Soit  $S$  une surface compacte orientée et  $\rho$  une représentation de  $\pi_1(S)$  dans  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ . Alors il existe une représentation de Hitchin  $j$  telle que*

$$L_\rho \leq L_j .$$

La première de ces conjectures a été évoquée par Tengren Zhang dans une conférence lors de la Junior Retreat du GEAR à l'Université d'Ann Arbor. Nous avons formulé la seconde avec Bertrand Deroin dans [DT13]. Notons que ces questions sont volontairement imprécises car le spectre des longueurs d'une représentation à valeur dans  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  dépend de la façon dont on mesure les distances sur l'espace symétrique de  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ . À cet effet, la métrique riemannienne provenant de la métrique de Killing de  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  n'est pas la seule intéressante. Il existe d'autres métriques possibles qui capturent des propriétés algébriques différentes.

Ces deux conjectures pourraient être abordées avec des outils similaires à ceux utilisés dans le chapitre 3 (applications harmoniques tordues, fonctionnelles sur l'espace de Teichmüller) et s'inscriraient alors dans une problématique plus générale : celle de comprendre les liens entre les propriétés géométriques des représentations à valeurs dans  $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$  et leur paramétrisation analytique au moyen des fibrés de Higgs.

Les résultats du chapitre 4 sont pour une grande part des résultats antérieurs ou des applications directes du théorème 3.2.10 du chapitre 3. J'envisage de les publier dans un article qui dresserait un bilan des résultats connus sur les variétés anti-de Sitter compactes. Ce serait l'occasion d'étendre le théorème 10 aux fibrés de Seifert en général, ce qui devrait se faire sans nouvelle difficulté, malgré quelques aspects techniques liés à la classification des orbifolds hyperboliques et des représentations de leur groupe fondamental.

Enfin, il semble possible de généraliser le calcul du volume des variétés anti-de Sitter compactes aux quotients compacts de  $\mathrm{PSO}(n, 1)$  par un sous-groupe de  $\mathrm{PSO}(n, 1) \times \mathrm{PSO}(n, 1)$ , voire même aux quotients de volume fini. Il serait alors intéressant de constater les différentes valeurs prises ce volume. Observera-t-on, comme dans le cas des variétés anti-de Sitter compactes, que le volume est invariant par petite déformation, ou trouvera-

---

t-on des exemples où le volume se déforme ? Ces questions sont vraisemblablement reliées aux travaux de Francavilla [Fra04] et Bucher–Burger–Iozzi [BBI13] (parmi d’autres) sur les différentes définitions du volume des représentations d’un réseau de  $\mathrm{PSO}(n, 1)$  et sur les valeurs qu’il peut prendre. Ce serait pour nous l’occasion de nous familiariser avec cette théorie.



# Bibliographie

- [AGM13] Ian AGOL, Daniel GROVES et Jason MANNING : The virtual Haken conjecture. *Doc. Math.*, 18:1045–1087, 2013.
- [AMS97] Herbert ABELS, Gregory A. MARGULIS et Gregory A. SOIFER : Properly discontinuous groups of affine transformations with orthogonal linear part. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 324:253–258, 1997.
- [Arn89] Vladimir I. ARNOLD : *Mathematical methods of classical mechanics*, volume 60 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2<sup>e</sup> édition, 1989. traduit du russe par K. Vogtmann and A. Weinstein.
- [BBD<sup>+</sup>12] Thierry BARBOT, Francesco BONSANTE, Jeffrey DANCIGER, William M. GOLDMAN, François GUÉRITAUD, Fanny KASSEL, Kirill KRASNOV, Jean-Marc SCHLENKER et Abdelghani ZEGHIB : Some open questions in anti-de Sitter geometry. 2012. arXiv :1205.6103.
- [BBI13] Michelle BUCHER, Marc BURGER et Alessandra IOZZI : A dual interpretation of the Gromov–Thurston proof of Mostow rigidity and volume rigidity for representations of hyperbolic lattices. *In Trends in Harmonic Analysis*, pages 47–76. Springer, 2013.
- [Ben00] Yves BENOIST : Tores affines. *Contemp. Math.*, 262:1–38, 2000.
- [Ben04] Yves BENOIST : Convexes divisibles. I. *In Algebraic groups and arithmetic*, pages 339–374. Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2004.
- [BH99] Martin BRIDSON et André HAEFLIGER : *Metric spaces of non-positive curvature*, volume 319. Springer-Verlag, 1999.
- [BK04] Mario BONK et Bruce KLEINER : Rigidity for quasi-Fuchsian actions on negatively curved spaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2004(61):3309–3316, 2004.
- [BL92] Yves BENOIST et François LABOURIE : Sur les espaces homogènes modèles de variétés compactes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 76:99–109, 1992.
- [BM08] Shirley BROMBERG et Alberto MEDINA : Geodesically complete Lorentzian metrics on some homogeneous 3-manifolds. *SIGMA*, 4:13 pages, 2008.
- [Bor63] Armand BOREL : Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces. *Topology*, 2:111–122, 1963.
- [Bow79] Rufus BOWEN : Hausdorff dimension of quasi-circles. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 50(1):11–25, 1979.
- [BT65] Armand BOREL et Jacques TITS : Groupes réductifs. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (27):55–150, 1965.
- [Car89] Yves CARRIÈRE : Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines. *Invent. Math.*, 95(3):615–628, 1989.

- [Coo93] Michel COORNAERT : Mesures de Patterson-Sullivan sur le bord d'un espace hyperbolique au sens de Gromov. *Pacific J. Math.*, 159(2):241–270, 1993.
- [Cor88] Kevin CORLETTE : Flat  $G$ -bundles with canonical metrics. *J. Differential Geom.*, 28(3):361–382, 1988.
- [Cra09] Mickaël CRAMPON : Entropies of compact strictly convex projective manifolds. *J. Mod. Dyn.*, 3(4):511–547, 2009.
- [dSG10] Henri-Paul de SAINT-GERVAIS : *Uniformisation des surfaces de Riemann : retour sur un théorème centenaire*. ENS éditions, 2010.
- [DT13] Bertrand DEROIN et Nicolas THOLOZAN : Dominating surface group representations by Fuchsian ones. 2013. arXiv :1311.2919.
- [Dum07] Sorin DUMITRESCU : Homogénéité locale pour les métriques riemanniennes holomorphes en dimension 3. *Ann. Inst. Fourier*, 57(3):739–773, 2007.
- [DW07] Georgios DASKALOPOULOS et Richard A. WENTWORTH : Harmonic maps and Teichmüller theory. *Handbook of Teichmüller theory*, 1:33–109, 2007.
- [DZ09] Sorin DUMITRESCU et Abdelghani ZEGHIB : Global rigidity of holomorphic Riemannian metrics on compact complex 3-manifolds. *Math. Ann.*, 345(1):53–81, 2009.
- [Ehr36] Charles EHRESMANN : Sur les espaces localement homogènes. *Enseign. Math.*, 35:317–333, 1936.
- [ES64] James EELLS, Jr. et Joseph H. SAMPSON : Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86:109–160, 1964.
- [FGH81] David FRIED, William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH : Affine manifolds with nilpotent holonomy. *Comment. Math. Helv.*, 56(4):487–523, 1981.
- [Fra04] Stefano FRANCAVIGLIA : Hyperbolic volume of representations of fundamental groups of cusped 3-manifolds. *Int. Math. Res. Not.*, 2004(9):425–459, 2004.
- [Fra07] Charles FRANCES : Sur le groupe d'automorphismes des géométries paraboliques de rang 1. *Ann. Sci. Éc Norm. Supér. (4)*, 40(5):741–764, 2007.
- [GdlH90] Étienne GHYS et Pierre de la HARPE : Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. *Progr. Math.*, 83, 1990.
- [Gen11] Matthieu GENDULPHE : Constante de Bers en genre 2. *Math. Ann.*, 350(4):919–951, 2011.
- [GGKW] François GUÉRITAUD, Olivier GUICHARD, Fanny KASSEL et Anna WIENHARD : Anosov representations and proper actions on group manifolds. En préparation.
- [GH84] William M. GOLDMAN et Morris W. HIRSCH : The radiance obstruction and parallel forms on affine manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 286(2):629–649, 1984.
- [GHL90] Sylvestre GALLOT, Dominique HULIN et Jacques LAFONTAINE : *Riemannian geometry*, volume 3. Springer, 1990.
- [Ghy95] Étienne GHYS : Déformations des structures complexes sur les espaces homogènes de  $SL(2, \mathbb{C})$ . *J. Reine Angew. Math.*, 468:113–138, 1995.
- [GK13] François GUÉRITAUD et Fanny KASSEL : Maximally stretched laminations on geometrically finite hyperbolic manifolds. 2013. arXiv :1307.0250.
- [GKM00] Daniel GALLO, Michael KAPOVICH et Albert MARDEN : The monodromy groups of Schwarzian equations on closed Riemann surfaces. *Ann. of Math.*, 151(2):625–704, 2000.

- [GKW13] François GUÉRITAUD, Fanny KASSEL et Maxime WOLFF : Compact anti-de Sitter 3-manifolds and folded hyperbolic structures on surfaces. 2013. arXiv :1311.2804.
- [GL95] Mohammed GUEDIRI et Jacques LAFONTAINE : Sur la complétude des variétés pseudo-riemanniennes. *J. Geom. Phys.*, 15(2):150–158, 1995.
- [Gol80] William M. GOLDMAN : *Discontinuous groups and the Euler class*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1980. Ph.D. Thesis–University of California, Berkeley.
- [Gol85a] William M. GOLDMAN : Nonstandard Lorentz space forms. *J. Differential Geom.*, 21(2):301–308, 1985.
- [Gol85b] William M GOLDMAN : Representations of fundamental groups of surfaces. *In Geometry and topology*, pages 95–117. Springer, 1985.
- [Gol88] William M. GOLDMAN : Topological components of spaces of representations. *Invent. Math.*, 93(3):557–607, 1988.
- [Gol10] William M. GOLDMAN : Locally homogeneous geometric manifolds. *In Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II*, pages 717–744, New Delhi, 2010. Hindustan Book Agency.
- [Gro87] Mikhaïl GROMOV : Hyperbolic groups. *In S.M. GERSTEN, éditeur : Essays in Group Theory*, volume 8 de *Mathematical Sciences Research Institute Publications*, pages 75–263. Springer New York, 1987.
- [GW07] William M. GOLDMAN et Richard A. WENTWORTH : Energy of twisted harmonic maps of Riemann surfaces. *Contemp. Math.*, 432:45, 2007.
- [Hel79] Sigurdur HELGASON : *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 80. Academic press, 1979.
- [Hit87] Nigel J. HITCHIN : The self-duality equations on a Riemann surface. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 55(1):59–126, 1987.
- [Hit92] Nigel J. HITCHIN : Lie groups and Teichmüller space. *Topology*, 31(3):449–473, 1992.
- [IKO80] M. INOUE, S. KOBAYASHI et T. OCHIAI : Holomorphic affine connections on compact complex surfaces. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 27(2):247–264, 1980.
- [JK04] Kyeonghee JO et Inkang KIM : Convex affine domains and Markus conjecture. *Math. Z.*, 248(1):173–182, 2004.
- [JN85] Mark JANKINS et Walter D. NEUMANN : Homomorphisms of Fuchsian groups to  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ . *Comment. Math. Helv.*, 60(1):480–495, 1985.
- [Kas08] Fanny KASSEL : Proper actions on corank-one reductive homogeneous spaces. *J. Lie Theory*, 18(4):961–978, 2008.
- [Kas09] Fanny KASSEL : *Quotients compacts d'espaces homogènes réels ou p-adiques*. Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud 11, 2009.
- [Kle72] Felix KLEIN : Vergleichende betrachtungen ueber neuere geometrische forschungen ("Erlanger programm"), 1872.
- [Kli96] Bruno KLINGLER : Complétude des variétés lorentziennes à courbure constante. *Math. Ann.*, 306(2):353–370, 1996.
- [KM12] Jeremy KAHN et Vladimir MARKOVIC : Immersing almost geodesic surfaces in a closed hyperbolic three manifold. *Ann. of Math.*, 175(3):1127–1190, 2012.
- [Kna02] Anthony W. KNAPP : *Lie groups beyond an introduction*, volume 140 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 2<sup>e</sup> édition, 2002.

- [Kob89] Toshiyuki KOBAYASHI : Proper action on a homogeneous space of reductive type. *Math. Ann.*, 285(2):249–263, 1989.
- [Kob93] Toshiyuki KOBAYASHI : On discontinuous groups acting on homogeneous spaces with noncompact isotropy subgroups. *J. Geom. Phys.*, 12(2):133–144, 1993.
- [Kob98] Toshiyuki KOBAYASHI : Deformation of compact Clifford-Klein forms of indefinite-Riemannian homogeneous manifolds. *Math. Ann.*, 310:394–408, 1998.
- [KP86] Ravi S. KULKARNI et Ulrich PINKALL : Uniformization of geometric structures with applications to conformal geometry. In *Differential geometry, Peñíscola 1985*, volume 1209 de *Lecture Notes in Math.*, pages 190–209. Springer, Berlin, 1986.
- [KR85] Ravi S. KULKARNI et Frank RAYMOND : 3-dimensional Lorentz space-forms and Seifert fiber spaces. *J. Differential Geom.*, 21(2):231–268, 1985.
- [Lab91] François LABOURIE : Existence d’applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111(3):877–882, 1991.
- [Lab11] François LABOURIE : Lectures on representations of surface groups. 2011.
- [Leb82] Claude LEBRUN :  $\mathcal{H}$ -spaces with a cosmological constant. *Proc. R. Soc. Lond.*, 380:171–185, 1982.
- [Leb83] Claude LEBRUN : Spaces of complex null geodesics in complex-Riemannian geometry. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 278:209–231, 1983.
- [Mar63] Lawrence MARKUS : *Cosmological models in differential geometry*. University of Minnesota Press, 1963.
- [Mar91] Gregory A. MARGULIS : *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, volume 17. Springer, 1991.
- [Mil76] John MILNOR : Curvatures of left invariant metrics on Lie groups. *Adv. Math.*, 21(3):293–329, 1976.
- [Mos50] George D. MOSTOW : The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces. *Ann. of Math.*, 52:606–636, 1950.
- [Mos68] George D. MOSTOW : Quasi-conformal mappings in  $n$ -space and the rigidity of hyperbolic space forms. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 34(1):53–104, 1968.
- [MW13] Julien MARCHÉ et Maxime WOLFF : The modular action on  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ -characters in genus 2. 2013. arXiv :1309.3553.
- [Sal99] François SALEIN : *Variétés anti-de Sitter de dimension 3*. Thèse de doctorat, ENS Lyon, 1999.
- [Sal00] François SALEIN : Variétés anti-de Sitter de dimension 3 exotiques. *Ann. Inst. Fourier*, 50(1):257–284, 2000.
- [Sam78] Joseph H. SAMPSON : Some properties and applications of harmonic mappings. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 11(2):211–228, 1978.
- [Sco83] Peter SCOTT : The geometries of 3-manifolds. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 15(5):401–487, 1983.
- [Sei33] Herbert SEIFERT : Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume. *Acta Math.*, 60(1):147–238, 1933.

- [Sel89] Atle SELBERG : On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces (1960). In *Collected papers*, volume 1, pages 475–492. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [SY78] Richard SCHOEN et Shing Tung YAU : On univalent harmonic maps between surfaces. *Invent. Math.*, 44(3):265–278, 1978.
- [Tei82] Oswald TEICHMÜLLER : *Gesammelte abhandlungen, collected papers of Oswald Teichmüller edited by L.V. Ahlfors and F.W. Gehring*. Springer-Verlag, 1982.
- [Tho13] Nicolas THOLOZAN : Sur la complétude de certaines variétés pseudo-riemanniennes localement symétriques. *Ann. Inst. Fourier*, 2013. à paraître.
- [Tho14] Nicolas THOLOZAN : Dominating surface group representations and deforming closed Anti de-Sitter 3-manifolds. 2014. arXiv :1307.3315.
- [Thu80] William P. THURSTON : *The Geometry and topology of 3-manifolds*. Princeton University Press, 1980.
- [Thu82] William P. THURSTON : Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 6(3):357–381, 1982.
- [Thu86] William P. THURSTON : Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces. 1986. arXiv :9801039.
- [Tro91] Marc TROYANOV : Prescribing curvature on compact surfaces with conical singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 324(2):793–821, 1991.
- [Tro92] Anthony J. TROMBA : *Teichmüller theory in Riemannian geometry*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992. Lecture notes prepared by Jochen Denzler.
- [Vey70] Jacques VEY : Sur les automorphismes affines des ouverts convexes saillants. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa (3)*, 24:641–665, 1970.
- [Wal68] Friedhelm WALDHAUSEN : On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math.*, 87:56–88, 1968.
- [Wen07] Richard A. WENTWORTH : Energy of harmonic maps and Gardiner’s formula. In *In the tradition of Ahlfors-Bers. IV*, volume 432 de *Contemp. Math.*, pages 221–229. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Whi49] John H. C. WHITEHEAD : Combinatorial homotopy I and II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55:213–245 et 453–496, 1949.
- [Wis04] Daniel T. WISE : Cubulating small cancellation groups. *Geometric & Functional Analysis GAFA*, 14(1):150–214, 2004.
- [Wol74] Joseph A. WOLF : *Spaces of constant curvature*. Publish or Perish Inc., Boston, 3<sup>e</sup> édition, 1974.
- [Wol87] Scott A. WOLPERT : Geodesic length functions and the Nielsen problem. *J. Differential Geom.*, 25(2):275–296, 1987.
- [Wol89] Michael WOLF : The Teichmüller theory of harmonic maps. *J. Differential Geom.*, 29(2):449–479, 1989.
- [Zeg98] Abdelghani ZEGHIB : On closed anti-de Sitter spacetimes. *Math. Ann.*, 310(4): 695–716, 1998.



**Résumé.** Ce travail étudie les variétés pseudo-riemanniennes compactes localement homogènes à travers le prisme des  $(G, X)$ -structures, introduites par Thurston dans son programme de géométrisation.

Nous commençons par présenter la problématique générale et discutons notamment du rapport entre la *complétude géodésique* de ces variétés et une autre notion de complétude propre aux  $(G, X)$ -structures. Nous donnons également dans le chapitre 1 une nouvelle preuve d'un théorème de Bromberg et Medina qui classe les métriques lorentziennes invariantes à gauche sur  $SL(2, \mathbb{R})$  dont le flot géodésique est complet.

Conjecturalement, toute  $(G, X)$ -structure pseudo-riemannienne sur une variété compacte est complète. Nous prouvons ici que cela est vrai pour certaines géométries, sous l'hypothèse que la  $(G, X)$ -structure est a priori *kleinienne*. On en déduit que, pour ces géométries, la complétude est une condition fermée. Lorsque  $X$  est un groupe de Lie de rang 1 muni de sa métrique de Killing, ce résultat complète un théorème de Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard selon lequel la complétude est une condition ouverte.

Nous nous tournons ensuite vers l'étude des représentations d'un groupe de surface à valeurs dans les isométries d'une variété riemannienne  $M$  complète simplement connexe de courbure sectionnelle inférieure à  $-1$ . Étant donnée une telle représentation  $\rho$ , nous montrons que l'ensemble des représentations fuchsienues  $j$  telles qu'il existe une application  $(j, \rho)$ -équivariante et contractante de  $\mathbb{H}^2$  dans  $M$  est un ouvert non vide et contractile de l'espace de Teichmüller (sauf lorsque  $\rho$  est elle-même fuchsienne).

Ce résultat nous permet de décrire l'espace des métriques lorentziennes de courbure constante  $-1$  sur un fibré en cercle au dessus d'une surface compacte. Nous montrons que cet espace possède un nombre fini de composantes connexes classifiées par un invariant que nous appelons *longueur de la fibre*. Nous prouvons également que le volume total de ces métriques ne dépend que de la topologie du fibré et de la longueur de la fibre.

**Mots-clés :** Variété pseudo-riemannienne,  $(G, X)$ -structure, espace homogène, flot géodésique, complétude, représentation, groupe de surface, anti-de Sitter.

---

## Uniformization of pseudo-Riemannian locally homogeneous manifolds

**Abstract.** In this work, we study closed locally homogeneous pseudo-Riemannian manifolds through the notion of  $(G, X)$ -structure, introduced by Thurston in his geometrization program.

We start by presenting the general problem. In particular, we discuss the link between *geodesical completeness* of those manifolds and another notion of completeness specific to  $(G, X)$ -structures. In chapter 1, we also give a new proof of a theorem by Bromberg and Medina which classifies left invariant Lorentz metrics on  $SL(2, \mathbb{R})$  that are geodesically complete.

Conjecturally, every pseudo-riemannian  $(G, X)$ -structure on a closed manifold is complete. Here we prove that it holds for certain geometries, provided that the  $(G, X)$ -structure is a priori *kleinian*. This implies that, for such geometries, completeness is a closed condition. When  $X$  is a Lie group of rank 1 handled with its Killing metric, this result complements a theorem of Guéritaud–Guichard–Kassel–Wienhard, according to which completeness is an open condition.

We then turn to the study of representations of surface groups into the isometry group of a complete simply connected Riemannian manifold  $M$  of curvature less than or equal to  $-1$ . Given such a representation  $\rho$ , we prove that the set of Fuchsian representations  $j$  for which there exists a  $(j, \rho)$ -equivariant contracting map from  $\mathbb{H}^2$  to  $M$  is a non-empty open contractible subset of the Teichmüller space (unless  $\rho$  itself is Fuchsian).

This result allows us to describe the space of Lorentz metrics of constant curvature  $-1$  on a circle bundle over a closed surface. We show that this space has finitely many connected components, classified by an invariant that we call the *length of the fiber*. We also prove that the total volume of those metrics only depends on the topology of the bundle and on the length of the fiber.

**Key-words:** pseudo-Riemannian manifold,  $(G, X)$ -structure, homogeneous space, geodesic flow, completeness, representation, surface group, anti-de Sitter.