

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES DE
L'UNIVERSITÉ PARIS-SUD

Discipline: Mathématiques

par

SAMUEL POCCHIOLA

Le problème d'équivalence pour les variétés de Cauchy-Riemann en dimension 5

(Synthèse en français)

Soutenue le 30 septembre 2014 devant la commission d'examen composée de:

M.	Julien DUVAL,	Examineur
M.	Jean ECALLE,	Examineur
M.	Elisha FALBEL,	Examineur
M.	Charles FRANCES,	Examineur
M.	Joël MERKER,	Directeur de thèse
M.	Alexandre SUKHOV,	Rapporteur

Rapporteurs:

M. Peter OLVER
M. Alexandre SUKHOV



Thèse préparée au
Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud
91405 Orsay CEDEX

Remerciements

L'aboutissement de ce travail doctoral doit beaucoup à la bienveillance, l'énergie, et l'implication sans faille de mon directeur de thèse, Joël Merker, auquel j'exprime ici ma profonde reconnaissance. Je lui dois de m'avoir patiemment formé aux problématiques de la géométrie de Cauchy-Riemann, de m'avoir généreusement proposé un sujet de thèse "brûlant" à ses yeux - le problème d'équivalence pour les variétés-CR Levi-dégénérées de dimension 5 -, et d'avoir su, par ses conseils et son enthousiasme, me donner confiance dans les inévitables moments de doute qui accompagnent un travail de recherche.

L'influence sur cette thèse du livre de Peter Olver: *Equivalence, Invariants and Symmetry* est manifeste. C'est en effet dans cet ouvrage de référence que j'ai découvert les subtilités du problème d'équivalence et de la méthode de Cartan. C'est donc avec une joie toute particulière que je remercie Peter Olver d'avoir accepté d'être rapporteur de cette thèse. Je remercie tout aussi vivement Alexandre Suhkov, qui a lui aussi eu la gentillesse de bien vouloir être rapporteur de ce travail.

Mes plus vifs remerciements s'adressent ensuite à Julien Duval, Jean Ecalle, Elisha Falbel et Charles Frances, qui me font l'honneur d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse.

Ces quatre années de doctorat effectuées au sein du laboratoire de mathématiques d'Orsay l'ont été dans des conditions particulièrement favorables. Je remercie à ce titre David Harari et Valérie Blandin-Lavigne, pour les excellentes conditions d'accueil des doctorants au sein du laboratoire.

Enfin je remercie mes parents, Michel et Anne-Marie, pour leur affection indéfectible, et mes amis, sans le soutien desquels ce travail n'aurait pas été possible.

Ce mémoire est une contribution à la résolution du problème d'équivalence pour les variétés de Cauchy-Riemann en dimension inférieure ou égale à 5. Le problème d'équivalence, à biholomorphisme près, des hypersurfaces réelles des variétés complexes été formulé pour la première fois par Henri Poincaré en 1906 de la manière suivante:

Etant données deux hypersurfaces (locales) réelles $M, M' \subset \mathbb{C}^2$, existe-t-il un bi-holomorphisme de \mathbb{C}^2 qui envoie M sur M' ?

Poincaré a donné un argument heuristique montrant que la réponse à ce problème est négative en général, mais la première preuve rigoureuse n'a été formulée par Elie Cartan qu'en 1932 [4, 5], avec la construction d'une "connexion hypersphérique" sur les hypersurfaces de \mathbb{C}^2 , en utilisant la technique du repère mobile, connue aujourd'hui sous le nom de méthode d'équivalence de Cartan.

Pour utiliser une terminologie moderne, étant donnée une variété M et une certaine structure géométrique sur M , qui apparaît généralement comme une G -structure sur M (i.e. une réduction du fibré des repères de M), la méthode d'équivalence de Cartan vise à produire un fibré principal P sur M , ainsi qu'un co-repère ω de 1-formes sur P adapté à la structure géométrique de M au sens suivant: un isomorphisme entre deux structures géométriques M et M' se relève en un unique isomorphisme entre P et P' envoyant ω sur ω' . Le problème d'équivalence entre M et M' est ainsi ramené à un problème d'équivalence entre $\{e\}$ -structures, dont la solution est bien connue [20, 26].

Le concept de variété CR permet de reformuler le problème d'équivalence entre sous-variétés réelles de \mathbb{C}^n de manière intrinsèque. On rappelle [3] qu'une structure CR sur une variété M est la donnée d'un sous-fibré L de $\mathbb{C} \otimes TM$ de rang pair $2n$ tel que:

- $L \cap \bar{L} = \{0\}$
- L est formellement intégrable, i.e. $[L, L] \subset L$.

L'entier n est la dimension CR de M , et $k = \dim M - 2n$ est la codimension de M . Une sous-variété réelle générique $M \subset \mathbb{C}^n$ est canoniquement munie d'une structure CR lorsque l'on définit le fibré CR de M par $L = T^{1,0}M$.

Etant données deux structures CR, (M, L) et (M', L') , un difféomorphisme $\varphi : M \rightarrow M'$ est un isomorphisme CR entre M et M' si φ envoie le fibré CR de M sur celui de M' , i.e. si $\varphi(L) = L'$. Le problème d'équivalence pour les variétés CR peut être reformulé comme suit:

Etant données deux variétés CR (locales) M, M' , existe-t-il un isomorphisme CR (local) entre M et M' ?

La réponse à cette question nécessite l'introduction du concept de forme de Levi [1, 3]. La forme de Levi LF_p d'une variété CR M en un point $p \in M$ est la forme hermitienne

antisymétrique définie sur L_p par:

$$LF_p(X, Y) = i[\tilde{X}, \tilde{Y}]_p \pmod{L_p \oplus \bar{L}_p},$$

où $X, Y \in L_p$ et \tilde{X} et \tilde{Y} sont deux sections locales de $M \rightarrow L$ telles que $\tilde{X}_p = X$ et $\tilde{Y}_p = Y$. Il s'agit d'un invariant CR de M au sens où si $\varphi : M \rightarrow M'$ est un isomorphisme CR entre M et M' , alors $LF = \varphi^* LF'$. Il est bien connu [16] que si LF s'annule identiquement sur M , ce qui signifie que le fibré $L \oplus \bar{L}$ est involutif, alors M est CR-isomorphe à un produit $M \cong \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^k$. Nous excluons ce cas dégénéré dans la suite de ce mémoire.

Un autre invariant CR joue un rôle central dans notre analyse. Soit $(E^i)_{i \geq 1}$ la suite des sous-fibrés de $\mathbb{C} \otimes TM$ définie par:

$$E^1 := L \oplus \bar{L}, \quad E^{i+1} := E^i \oplus [L, E^i] \oplus [\bar{L}, E^i],$$

et soit

$$r_i := \text{rang}_{\mathbb{C}} E^i.$$

Par exemple, on a toujours $r_1 = 2n$, où n est la dimension CR de M , tandis que $r_2 = r_1$ si et seulement si M est Levi-plate. La suite $r := (r_i)_{i \geq 1}$ constitue un invariant CR de M . Celle-ci étant croissante et bornée par la dimension de M , elle est stationnaire à partir d'un certain rang. On adopte pour cette raison la convention de n'écrire que les premières valeurs distinctes de r : on écrit par exemple $(2, 3)$ au lieu de $(2, 3, 3, \dots)$.

Restreignons désormais notre analyse du problème d'équivalence aux variétés CR de dimension inférieure ou égale à 5. La dimension CR n et la codimension k doivent satisfaire l'inéquation $2n + k \leq 5$, ce qui, le cas des variétés totalement réelles ou totalement complexes mis à part, ne laisse que 4 valeurs possibles pour (n, k) :

$$(1, 1), \quad (1, 2), \quad (1, 3), \quad (2, 1),$$

que nous désignons dans la suite comme étant le type de M .

L'analyse des valeurs possibles prises par la suite r et par le rang de la forme de Levi conduit à l'identification de 6 classes différentes de variétés CR en dimension ≤ 5 (see [16]).

La classe I est constituée des variétés CR non Levi-plates de type $(1, 1)$. Dans ce cas la forme de Levi est de rang constant 1, et $r = (2, 3)$. Le problème d'équivalence pour ce type de variétés CR a été résolu par Elie Cartan [4, 5] dans l'article célèbre de 1932. Ce problème a été repris récemment par Merker et Sabzevari [13], qui ont obtenu une expression explicite des invariants CR de M en fonction d'une fonction graphante.

La classe II est constituée des variétés CR de type $(1, 2)$ telles que $r = (2, 3, 4)$. Elles sont aussi appelées variétés de Engel. Le problème d'équivalence pour cette classe a été résolu par

Beloshapka, Ezhov and Schmalz [2] en 2007. Une preuve alternative des résultats contenus dans [2] figure dans [23], qui constitue le chapitre 2 de ce mémoire.

La suite r peut également prendre la valeur $(2, 3)$ dans le cas des variétés non Levi-plates de type $(1, 2)$. Nous excluons cependant ce cas, qui doit être considéré comme dégénéré, car il est bien connu [16] qu'une telle variété M est alors biholomorphe à un produit $M \cong N \times \mathbb{R}$, où N est une variété CR de la classe I.

Pour les variétés non Levi-plates de type $(1, 3)$, les valeurs possibles de r sont $(2, 3)$, $(2, 3, 5)$ et $(2, 3, 4, 5)$. Le cas $r = (2, 3)$ est dégénéré, car il correspond à un produit $M \cong N \times \mathbb{R}^2$, avec N appartenant à la classe I [16]. Le cas $r = (2, 3, 5)$ conduit à une classe de variétés CR que nous appelons la classe III₁. La méthode de Cartan a été récemment employée par Merker and Sabzevari [14] pour cette classe, conduisant à la détermination d'un ensemble complet d'invariants CR. Le troisième cas $r = (2, 3, 4, 5)$ définit ce que nous appelons la classe III₂. Cette classe de variétés CR n'a encore jamais été étudiée à notre connaissance, et le chapitre 3 de ce mémoire propose une solution au problème d'équivalence pour cette classe, avec notamment la construction d'une connexion de Cartan [24].

Dans le cas des variétés CR non Levi-plates de type $(2, 1)$, la suite r ne peut prendre que la valeur $(4, 5)$, et la distinction entre les classes de variétés de ce type repose sur les valeurs du rang de la forme de Levi. Les variétés CR dont la forme de Levi est non-dégénérée constituent ce que nous appelons la classe IV₁, tandis que celles dont la forme de Levi est de rang constant égal à 1 constituent ce que nous appelons la classe IV₂. On suppose également que les variétés CR qui constituent cette dernière classe sont 2 non-dégénérées, i.e. que leur forme de Freeman est non nulle (see [16], pp 70–94), car elles seraient dans le cas contraire biholomorphes à un produit $N \times \mathbb{C}$, avec N appartenant à la classe I.

Le problème d'équivalence pour les variétés Levi non-dégénérées de codimension 1 a été résolu en 1974 par Chern and Moser [6]. Le cas de la classe IV₁ est donc couvert par les résultats contenus dans [6]. En revanche, la classe IV₂ a fait l'objet récemment d'importants efforts de recherche. Ebenfelt a proposé une solution au problème d'équivalence pour cette classe en 2001 [7], mais celle-ci s'est révélée n'être que partielle [8]. Isaev-Zaitsev [11], Medori-Spiro [15] et Pocchiola [21] ont proposé indépendamment une solution à ce problème en 2013. La référence [21] constitue le premier chapitre de ce mémoire.

Chacune de ces 6 classes de variétés CR contient une variété particulière, que nous appelons le modèle, dont l'algèbre de Lie des automorphismes CR infinitésimaux est de dimension maximale. Il joue un rôle central, car les variétés CR appartenant à la même classe peuvent généralement être considérées comme des déformations de celui-ci, par le biais d'une connexion de Cartan. La détermination de l'algèbre de Lie des automorphismes CR infinitésimaux des modèles peut être réalisée via la méthode de Cartan, celle-ci fournissant d'ailleurs un guide pour le cas plus complexe des variétés CR quelconques de la même classe, car une structure similaire de normalisations des paramètres de groupe apparaît dans les deux cas. Pour cette raison, nous avons

commencé la résolution du problème d'équivalence pour les classes II, III₂ et IV₂ par la détermination de l'algèbre de Lie des automorphismes CR infinitésimaux des modèles pour chacune de ces trois classes. Ces modèles sont donnés respectivement par:

1. la cubique de Beloshapka dans \mathbb{C}^3 :

$$\begin{aligned} \text{B :} \quad w_1 &= \bar{w}_1 + 2i z \bar{z}, \\ w_2 &= \bar{w}_2 + 2i z \bar{z} (z + \bar{z}), \end{aligned}$$

2. la sous-variété $\text{N} \subset \mathbb{C}^4$:

$$\begin{aligned} \text{N :} \quad w_1 &= \bar{w}_1 + 2i z \bar{z}, \\ w_2 &= \bar{w}_2 + 2i z \bar{z} (z + \bar{z}), \\ w_3 &= \bar{w}_3 + 2i z \bar{z} (z^2 + \frac{3}{2} z \bar{z} + \bar{z}^2), \end{aligned}$$

3. le tube au-dessus du cône de lumière, $\text{LC} \subset \mathbb{C}^3$:

$$\text{LC :} \quad (\text{Re } z_1)^2 - (\text{Re } z_2)^2 - (\text{Re } z_3)^2 = 0, \quad \text{Re } z_1 > 0.$$

La détermination de leurs automorphismes infinitésimaux constitue le chapitre 4 de ce mémoire.

Pour résumer, ce mémoire comprend les parties suivantes:

- Le chapitre 1 contient deux versions de la solution du problème d'équivalence pour les variétés CR 2 non-dégénérées de dimension 5 dont la forme de Levi est de rang constant égal à 1, une version courte qui présente les résultats obtenus et donne les grandes lignes des preuves, et une version longue qui contient tous les détails nécessaires.
- Le chapitre 2 propose une solution au problème d'équivalence pour les variétés de Engel, avec explicitation des invariants CR en fonction d'une fonction graphante.
- Le chapitre 3 propose une solution au problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe III₂.
- Le chapitre 4 contient la détermination, par la méthode de Cartan, de l'algèbre de Lie des automorphismes CR infinitésimaux des modèles pour les classes II, III₂ et IV₂.

Nous donnons à présent les énoncés des résultats obtenus.

Le chapitre 1 contient le théorème suivant, traitant du cas des variétés de la classe IV₂:

Théorème 1 *Deux invariants fondamentaux, J et W , interviennent dans la résolution du problème d'équivalence pour les variétés CR de la classe IV_2 . Une telle variété CR M est localement biholomorphe au tube au-dessus du cône de lumière,*

$$\text{LC} : \quad (\text{Re } z_1)^2 - (\text{Re } z_2)^2 - (\text{Re } z_3)^2 = 0, \quad \text{Re } z_1 > 0,$$

dont l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux, $\text{aut}_{\text{CR}}(\text{LC})$, est de dimension 10, si et seulement si:

$$J \equiv W \equiv 0.$$

Si $J \not\equiv 0$, ou si $W \not\equiv 0$, un parallélisme absolu est construit sur M . En particulier, l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux de M satisfait:

$$\dim \text{aut}_{\text{CR}}(M) \leq 5.$$

Les variétés 2 non-dégénérées, de rang de Levi égal à 1, et qui sont de plus homogènes (i.e ont un groupe d'automorphismes CR transitif), ont été classifiées en 2007 par Fels-Kaup [10]. Le théorème 1 confirme donc la baisse de la dimension du groupe d'automorphismes de 10 à 5 observée dans le cas particulier étudié par Fels-Kaup, et l'étend au cas des variétés CR non homogènes.

La classe IV_2 a été étudiée récemment par Isaev-Zaitsev dans [11], où un parallélisme absolu est construit sur un fibré de dimension 10, et par Medori-Spiro dans [15], où une connexion de Cartan est construite par une approche purement algébrique. Le résultat que nous proposons retrouve celui proposé par Isaev-Zaitsev, et exhibe de plus la bifurcation:

$$(J \equiv W \equiv 0) \quad \text{or} \quad (J \not\equiv 0 \text{ or } W \not\equiv 0),$$

qui caractérise l'équivalence locale au modèle. Une grande part de l'intérêt de ce résultat réside dans l'explicitation de formules pour les invariants J et W , présentées sous forme compacte de la manière suivante:

$$\begin{aligned} J = & \frac{5}{18} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k}))^2}{\mathcal{L}_1(\bar{k})^2} P + \frac{1}{3} P \mathcal{L}_1(P) - \frac{1}{9} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k}))}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} P^2 \\ & + \frac{20}{27} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k}))^3}{\mathcal{L}_1(\bar{k})^3} - \frac{5}{6} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k})) \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k})))}{\mathcal{L}_1(\bar{k})^2} \\ & + \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k})) \mathcal{L}_1(P)}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k})))}{\mathcal{L}_1(\bar{k})} P \\ & - \frac{2}{27} P^3 - \frac{1}{6} \mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(P)) + \frac{1}{6} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\bar{k}))))}{\mathcal{L}_1(\bar{k})}, \end{aligned}$$

et

$$W := \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}_1(\overline{\mathcal{L}_1(k)})}{\overline{\mathcal{L}_1(k)}} + \frac{2}{3} \frac{\mathcal{L}_1(\mathcal{L}_1(\overline{k}))}{\mathcal{L}_1(\overline{k})} \\ + \frac{1}{3} \frac{\overline{\mathcal{L}_1(\overline{\mathcal{L}_1(k)})} \mathcal{K}(\overline{\mathcal{L}_1(k)})}{\overline{\mathcal{L}_1(k)}^3} - \frac{1}{3} \frac{\mathcal{K}(\overline{\mathcal{L}_1(\overline{\mathcal{L}_1(k)})})}{\overline{\mathcal{L}_1(k)}^2} + \frac{i}{3} \frac{\mathcal{T}(k)}{\overline{\mathcal{L}_1(k)}}.$$

Insistons également sur le fait que le théorème 1 contient le corollaire crucial suivant:

Corollaire 1 *Soit M une variété CR de la classe IV_2 . Si M n'est pas localement isomorphe au modèle en un point $p \in M$, alors la dimension de l'algèbre de Lie de ses automorphismes CR infinitésimaux au point p est bornée par 5, i.e.:*

$$\dim \text{aut}_p(M) \leq 5$$

Le théorème suivant, contenu dans le chapitre 2, traite du cas des variétés de Engel:

Théorème 2 *Soit M une variété CR appartenant à la classe II. Il existe un sous-fibré P du fibré des co-repères $\mathbb{C} \otimes F(M)$ de M et un co-repère $\omega := (\Lambda, \sigma, \rho, \zeta, \bar{\zeta})$ de P tel que tout CR-difféomorphisme h de M induit un difféomorphisme h^* de P satisfaisant $h^*(\omega) = \omega$. De plus, les équations de structure de ω sur P sont de la forme:*

$$\begin{aligned} d\sigma &= 3\Lambda \wedge \sigma + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \bar{\zeta}, \\ d\rho &= 2\Lambda \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \Lambda \wedge \zeta + \mathfrak{I}_1 \sigma \wedge \rho + \mathfrak{I}_2 \sigma \wedge \zeta + \mathfrak{I}_3 \sigma \wedge \bar{\zeta} + \mathfrak{I}_4 \rho \wedge \zeta + \mathfrak{I}_5 \rho \wedge \bar{\zeta}, \\ d\bar{\zeta} &= \Lambda \wedge \bar{\zeta} + \overline{\mathfrak{I}_1} \sigma \wedge \rho + \overline{\mathfrak{I}_3} \sigma \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{I}_2} \sigma \wedge \bar{\zeta} + \overline{\mathfrak{I}_5} \rho \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{I}_4} \rho \wedge \bar{\zeta}, \\ d\Lambda &= \frac{i}{2} \mathfrak{I}_1 \sigma \wedge \bar{\zeta} - \frac{i}{2} \overline{\mathfrak{I}_1} \sigma \wedge \zeta - \frac{1}{3} (\mathfrak{I}_2 + \overline{\mathfrak{I}_3}) \rho \wedge \zeta - \frac{1}{3} (\overline{\mathfrak{I}_2} + \mathfrak{I}_3) \rho \wedge \bar{\zeta} \\ &\quad + \mathfrak{I}_0 \sigma \wedge \zeta, \end{aligned}$$

où $\mathfrak{I}_0, \mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \mathfrak{I}_4, \mathfrak{I}_5$, sont des fonctions sur P .

Le théorème suivant est contenu dans le chapitre 3, et traite du cas des variétés de la classe III_2 :

Théorème 3 *Soit M une variété CR appartenant à la classe III_2 . Il existe un sous-fibré P du fibré des co-repères $\mathbb{C} \otimes F(M)$ de M et un co-repère $\omega := (\Lambda, \tau, \sigma, \rho, \zeta, \bar{\zeta})$ de P tel que tout CR-difféomorphisme h de M induit un difféomorphisme h^* de P satisfaisant $h^*(\omega) = \omega$. De plus, les équations de structure de ω sur P sont de la forme:*

$$d\tau = 4\Lambda \wedge \tau + \mathfrak{J}_1 \tau \wedge \zeta - \mathfrak{J}_1 \tau \wedge \bar{\zeta} + 3\mathfrak{J}_1 \sigma \wedge \rho + \sigma \wedge \zeta + \sigma \wedge \bar{\zeta},$$

$$d\sigma = 3\Lambda \wedge \sigma$$

$$+ \mathfrak{J}_2 \tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_3 \tau \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{J}_3} \tau \wedge \bar{\zeta} + \mathfrak{J}_4 \sigma \wedge \rho \\ - \frac{\mathfrak{J}_1}{2} \sigma \wedge \zeta + \frac{\mathfrak{J}_1}{2} \sigma \wedge \bar{\zeta} + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \bar{\zeta},$$

$$d\rho = 2\Lambda \wedge \rho$$

$$+ \mathfrak{J}_5 \tau \wedge \sigma + \mathfrak{J}_6 \tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_7 \tau \wedge \zeta + \overline{\mathfrak{J}_7} \tau \wedge \bar{\zeta} + \mathfrak{J}_8 \sigma \wedge \rho + \mathfrak{J}_9 \sigma \wedge \zeta \\ + \overline{\mathfrak{J}_9} \sigma \wedge \bar{\zeta} - \frac{\mathfrak{J}_1}{2} \rho \wedge \zeta + \frac{\mathfrak{J}_1}{2} \rho \wedge \bar{\zeta} + i \zeta \wedge \bar{\zeta},$$

$$d\zeta = \Lambda \wedge \zeta$$

$$+ \mathfrak{J}_{10} \tau \wedge \sigma + \mathfrak{J}_{11} \tau \wedge \rho + \mathfrak{J}_{12} \tau \wedge \zeta + \mathfrak{J}_{13} \tau \wedge \bar{\zeta} \\ + \mathfrak{J}_{14} \sigma \wedge \rho + \mathfrak{J}_{15} \sigma \wedge \zeta,$$

$$d\Lambda = \sum_{\nu\mu} X_{\nu\mu} \nu \wedge \mu, \quad \nu, \mu = \tau, \sigma, \rho, \zeta, \bar{\zeta},$$

où $\mathfrak{J}_i, X_{\nu\mu}$, sont des fonctions sur P .

Enfin les trois théorèmes qui suivent donnent une description de l'algèbre de Lie des automorphismes infinitésimaux des modèles pour les trois classes de variétés étudiées dans ce mémoire. Ils sont contenus dans le chapitre 4.

Théorème 4 *La cubique de Beloshapka,*

$$\mathbb{B} : \quad \begin{aligned} w_1 &= \overline{w_1} + 2i z \bar{z}, \\ w_2 &= \overline{w_2} + 2i z \bar{z} (z + \bar{z}), \end{aligned}$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes CR infinitésimaux de dimension 5. Une base des formes de Maurer-Cartan de $\text{aut}_{\text{CR}}(\mathbb{B})$ est donnée par les 5 formes différentielles $\sigma, \rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha$, qui satisfont les équations de Maurer-Cartan suivantes:

$$\begin{aligned} d\sigma &= 3\alpha \wedge \sigma + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \bar{\zeta}, \\ d\rho &= 2\alpha \wedge \rho + i \zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \alpha \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 5 *Le modèle de la classe III₂:*

$$\begin{aligned} N : \quad w_1 &= \bar{w}_1 + 2i z \bar{z}, \\ w_2 &= \bar{w}_2 + 2i z \bar{z} (z + \bar{z}), \\ w_3 &= \bar{w}_3 + 2i z \bar{z} (z^2 + \frac{3}{2} z \bar{z} + \bar{z}^2), \end{aligned}$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes infinitésimaux de dimension 6. Une base des formes de Maurer-Cartan de $\text{aut}_{\text{CR}}(N)$ est constituée par les 6 formes différentielles $\tau, \sigma, \rho, \zeta, \bar{\zeta}, \alpha$, qui satisfaisant les équations de Maurer-Cartan suivantes:

$$\begin{aligned} d\tau &= 4\alpha \wedge \tau + \sigma \wedge \zeta + \sigma \wedge \bar{\zeta}, \\ d\sigma &= 3\alpha \wedge \sigma + \rho \wedge \zeta + \rho \wedge \bar{\zeta}, \\ d\rho &= 2\alpha \wedge \rho + i\zeta \wedge \bar{\zeta}, \\ d\zeta &= \alpha \wedge \zeta, \\ d\bar{\zeta} &= \alpha \wedge \bar{\zeta}, \\ d\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Théorème 6 *Le tube au-dessus du cône de lumière:*

$$\text{LC} : \quad (\text{Re } z_1)^2 - (\text{Re } z_2)^2 - (\text{Re } z_3)^2 = 0, \quad \text{Re } z_1 > 0.$$

possède une algèbre de Lie d'automorphismes infinitésimaux de dimension 10. Une base des formes de Maurer-Cartan de $\text{aut}_{\text{CR}}(\text{LC})$ est constituée par les 10 formes différentielles $\rho, \kappa, \zeta, \bar{\kappa}, \bar{\zeta}, \pi^1, \pi^2, \bar{\pi}^1, \bar{\pi}^2, \Lambda$, qui satisfont les équations de Maurer-Cartan:

$$\begin{aligned} d\rho &= \pi^1 \wedge \rho + \bar{\pi}^1 \wedge \rho + i\kappa \wedge \bar{\kappa}, \\ d\kappa &= \pi^1 \wedge \kappa + \pi^2 \wedge \rho + \zeta \wedge \bar{\kappa}, \\ d\zeta &= i\pi^2 \wedge \kappa + \pi^1 \wedge \zeta - \bar{\pi}^1 \wedge \zeta, \\ d\pi^1 &= i\kappa \wedge \bar{\pi}^2 + \zeta \wedge \bar{\zeta} + \Lambda \wedge \rho, \\ d\pi^2 &= \pi^2 \wedge \bar{\pi}^1 + \zeta \wedge \bar{\pi}^2 + \Lambda \wedge \kappa, \\ d\Lambda &= i\pi^2 \wedge \bar{\pi}^2 + \Lambda \wedge \pi^1 + \Lambda \wedge \bar{\pi}^1. \end{aligned}$$

References

- [1] Baouendi, M.S.; Ebenfelt, P.; Rothschild, L.P.: *Real submanifolds in complex space and their mappings*. Princeton Mathematical Series, **47**, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, xii+404 pp.

- [2] Beloshapka, V.K.; Ezhov, V.; Schmalz, G.: *Canonical Cartan connection and holomorphic invariants on Engel CR manifolds*, Russian J. Mathematical Physics **14** (2007), no. 2, 121–133.
- [3] Boggess, A.: *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1991, xviii+364 pp.
- [4] Cartan, E.: *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes*, Ann. Mat. Pura Appl. **11** (1933), no. 1, 17–90.
- [5] Cartan, E.: *Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes II*, Ann. Scuola. Norm. Sup. Pisa **1** (1932), no. 4, 333–354.
- [6] Chern, S.S.; Moser, J.K.: *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math. **133** (1974), no. 2, 219–271.
- [7] Ebenfelt, P.: *Uniformly Levi degenerate CR manifolds: the 5-dimensional case*, Duke Math. J. **110** (2001), 3–80.
- [8] Ebenfelt, P.: *Correction to "Uniformly Levi degenerate CR manifolds: the 5-dimensional case"*, Duke Math. J. **131** (2006), 589–591.
- [9] Ezhov, V.; McLaughlin, B.; Schmalz, G.: *From Cartan to Tanaka: Getting Real in the Complex World*, Notices of the AMS (2011) **58**, no. 1.
- [10] Fels, G.; Kaup, W.: *Classification of Levi-degenerate homogeneous CR-manifolds in dimension 5*, Acta. Math. **201** (2008), 1–82.
- [11] Isaev, A.; Zaitsev, D.: *Reduction of five-dimensional uniformly degenerate Levi CR structures to absolute parallelisms*, J. Anal. **23** (2013), no. 3, 1571–1605.
- [12] Kobayashi, S.: *Transformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **70**, Springer-Verlag, New-York Heidelberg Berlin, 1972.
- [13] Merker, J.; Sabzevari, M.: *Cartan equivalences for Levi-nondegenerate hypersurfaces $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ belonging to general class I*, arxiv.org/abs/1401.2963.
- [14] Merker, J.; Sabzevari, M.: *Cartan equivalences for Levi-nondegenerate hypersurfaces $M^3 \subset \mathbb{C}^2$ belonging to general class III₁*, arxiv.org/abs/1401.4297.
- [15] Medori, C.; Spiro, A.: *The equivalence problem for 5-dimensional Levi degenerate CR manifolds*, Int. Math. Res. Not. (to appear), DOI: 10.1093/imrn/rnt129.

- [16] Merker, J.; Pocchiola, S.; Sabzevari, M.: *Equivalences of 5-dimensional CR-manifolds, II: General classes I, II, III-1, III-2, IV-1, IV-2*, arxiv.org/abs/1311.5669.
- [17] Merker, J.: *Equivalences of 5-dimensional CR manifolds, III: Six models and (very) elementary normalizations*, 54 pages, arxiv.org/abs/1311.7522.
- [18] Merker, J.: *Equivalences of 5-dimensional CR-manifolds, IV: Six ambiguity matrix groups, (Initial G-structures)*, 34 pages, arxiv.org/abs/1312.1084
- [19] Merker, J.: *Equivalences of 5-dimensional CR-manifolds V: Six initial frames and coframes; Explicitness obstacles*, 63 pages, arxiv.org/abs/1312.3581
- [20] Olver, P.J.: *Equivalence, Invariance and Symmetries*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.
- [21] Pocchiola, S.: *Absolute parallelism for 2-nondegenerate real hypersurfaces $M^5 \subset \mathbb{C}^3$ of constant Levi rank 1*, arxiv.org/abs/1312.6400, 56 pp.
- [22] Pocchiola, S.: *Lie algebras of infinitesimal CR-automorphisms for the model manifolds of general classes II, III₂, IV₂*, 44 pp.
- [23] Pocchiola, S.: *Canonical Cartan connection for 4-dimensional CR-manifolds belonging to general class II*, 17 pp.
- [24] Pocchiola, S.: *Canonical Cartan connection for 5-dimensional CR-manifolds belonging to general class III₂*, 19 pp.
- [25] Poincaré, H.: Les fonctions analytiques de deux variables et la représentation conforme, *Rend. Circ. Math. Palermo*, **23**, (1907), 185-220.
- [26] Sternberg, S.: *Lectures on Differential Geometry*. Prentice-Hall mathematical series.