



HAL
open science

Les équations de Maxwell covariantes pour le calcul rapide des champs diffractés par des conducteurs complexes. Application au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault

François Caire

► **To cite this version:**

François Caire. Les équations de Maxwell covariantes pour le calcul rapide des champs diffractés par des conducteurs complexes. Application au Contrôle Non Destructif par courants de Foucault. Electromagnétisme. Université Paris Sud - Paris XI, 2014. Français. NNT : 2014PA112284 . tel-01127162

HAL Id: tel-01127162

<https://theses.hal.science/tel-01127162>

Submitted on 7 Mar 2015

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : Sciences et Technologies de l'Information, des
Télécommunications et des Systèmes.

Laboratoire de Simulation et de Modélisation en Électromagnétisme,
CEA LIST/DISC/LSME
Institut Pascal, UMR 6602, UFR Sciences et Technologies

DISCIPLINE : Physique

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 22/10/2014

par

François CAIRE

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL COVARIANTES POUR LE CALCUL RAPIDE DES
CHAMPS DIFFRACTÉS PAR DES CONDUCTEURS COMPLEXES. APPLICATION AU
CONTRÔLE NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT.

Directeur de thèse :	M. Denis PRÉMEL	Ingénieur de Recherche, HDR (CEA LIST)
Co-directeur de thèse :	M. Gérard GRANET	Professeur des Universités, Institut Pascal (UMR 6602)
Composition du jury :		
<i>Rapporteurs :</i>	M. Richard DUSSÉAUX	Professeur des Universités, LATMOS (UVSQ)
	M. André NICOLET	Professeur des Universités, Institut Fresnel, (UMR CNRS 6133)
<i>Examineurs :</i>	M. Patrick DULAR	Directeur de Recherche, Institut Montefiore (Université de Liège)
	M. Dominique LESSELIER	Directeur de Recherche CNRS, L2S (Supélec)
	M. Guglielmo RUBINACCI	Professeur des Universités (Università di Napoli Federico II)
<i>Membre invité :</i>	M. Philip MEILLAND	Ingénieur de Recherche (Arcelor Mittal Maizières Research)

Remerciements

Je tiens à remercier ici toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ma thèse.

Tout d'abord je remercie Madame Clarisse Poidevin qui m'a permis d'effectuer ce travail de thèse au sein de son département (DISC), où j'ai pu profiter d'un environnement de travail agréable et stimulant.

Je remercie également Monsieur Christophe Reboud qui m'a accueilli dans son laboratoire (LSME) et qui a fait preuve d'une grande disponibilité. Ses conseils avisés ainsi que ses remarques pertinentes ont fortement contribué à l'amélioration de mon travail.

Je remercie Monsieur Steve Mahaut de m'avoir impliqué au projet SIMPOSIUM et de m'avoir ainsi permis d'acquérir une vision plus globale du contexte de mon travail de thèse.

Mes remerciements vont également à Monsieur Philip Meiland qui a suivi mon travail avec intérêt et qui a mis à ma disposition le matériel nécessaire aux validations expérimentales des modèles.

J'adresse mes plus sincères remerciements à Monsieur Gérard Granet qui a supervisé ce travail de thèse et qui m'a accueilli ponctuellement dans son laboratoire (PHOTON, Institut Pascal). Au cours de ces trois années, j'ai eu la chance de pouvoir profiter de ses vastes connaissances, de son expertise scientifique et de ses grandes qualités humaines. Nos nombreuses discussions, toujours très enrichissantes, ont été une aide précieuse.

J'exprime ma grande reconnaissance à Monsieur Denis Prémel qui a encadré mon travail au quotidien et qui m'a fait confiance durant ces trois années. Son expertise scientifique, sa pédagogie et ses conseils avisés ont permis l'aboutissement de mes travaux. Sa grande disponibilité, son écoute ainsi que ses grandes qualités humaines ont rendu ces trois années très agréables.

Je tiens également à remercier les membres de l'équipe du LSME qui ont su créer un environnement de travail très agréable. J'ai eu la chance de pouvoir profiter de leur grande expertise scientifique au travers de réunions et de discussions toujours très pointues et enrichissantes.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Messieurs Jean-Marc Decitre et Frédéric Nozais pour leur grande disponibilité et leur aide précieuse lors de l'acquisition des résultats expérimentaux.

J'adresse des remerciements tout particuliers à mes parents ainsi qu'à ma soeur, Hélène et à mes amis de toujours, Benjamin, Philippe, Julien, François, Jean, sans oublier Thomas, Claire, Julien et Ségo, qui ont été un soutien constant.

Enfin, j'exprime ma profonde gratitude à Laura pour son soutien quotidien.

Résumé : Ce travail de thèse a pour objectif de fournir un outil de modélisation rapide de l'interaction d'une source électromagnétique 3D avec une pièce de géométrie ou de propriétés physiques complexes dans le domaine des basses fréquences (régime quasi-statique). La principale application est la simulation d'un procédé de Contrôle Non Destructif d'une pièce conductrice présentant une surface ou des propriétés physiques perturbées. En effet, les modèles semi-analytiques actuels sont limités aux géométries canoniques (plan, cylindre, sphère).

Afin de lever ce verrou, on utilise une approche novatrice basée sur l'écriture des équations de Maxwell dans un système de coordonnées curvilignes non-orthogonal associé à la géométrie de la pièce : on parle alors des équations de Maxwell Covariantes, déjà très utilisées dans le domaine optique pour la caractérisation des réseaux de diffraction (méthode C).

Ces équations sont ici transposées au domaine des basses fréquences et permettent d'obtenir une généralisation du formalisme en potentiel vecteur du second ordre (SOVP) des équations de Maxwell classiques développé initialement afin de traiter le cas de conducteurs de formes canoniques. On détermine alors numériquement une base de potentiels scalaires, solutions propres des équations de Maxwell covariantes et ne dépendant pas des champs d'excitation qui nous permet de représenter les champs électromagnétiques inconnus sous la forme d'expansions modales. Les coefficients de ces expansions sont calculés en introduisant le champ exciteur et en imposant les conditions de passage adéquates entre les différents milieux.

Ensuite, cette approche est couplée d'une part à un algorithme récursif (les paramètres S) afin de prendre en compte la présence d'interfaces internes complexes dans la pièce, et d'autre part à une méthode numérique d'ordre élevé (Méthode pseudo-Spectrale) afin de prendre en compte de façon rigoureuse des variations des propriétés physiques (conductivité et/ou perméabilité) du matériau avec la profondeur.

Enfin, les codes obtenus sont validés par comparaison avec des acquisitions expérimentales et à l'aide d'un logiciel commercial de calcul par éléments finis. La comparaison des temps de calcul montre en outre la grande efficacité de ces modèles par rapport aux méthodes numériques classiques.

Mots clés : Électromagnétisme, Modélisation, Courants de Foucault, Contrôle Non Destructif, Coordonnées Curvilignes, Méthode C, Méthode Spectrale.

Abstract : This PhD work concerns the development of fast numerical tools, dedicated to the computation of the electromagnetic interaction between a low frequency 3D current source and a complex conductor, presenting rough interfaces and/or conductivity variations. The main application concerns the simulation of the Eddy Current non destructive testing process applied to complex specimens. Indeed, the semi-analytical models available today are restricted to canonical geometries.

The proposed method is based on the covariant form of Maxwell's equations, which translate the physical equations and relationships in a non-orthogonal coordinate system depending on the geometry of the specimen. Historically, this method (Curvilinear Coordinate Method, CCM or C-method) has been developed in the framework of optical applications, particularly for the characterization of diffraction gratings. Here, we transpose this formalism into the quasi-static regime and we extend the Second Order Vector Potential formalism, initially dedicated to orthonormal curvilinear coordinates systems, to general curvilinear coordinate systems. Thanks to this change of base, we are able to determine numerically a set of modal solutions of the source-free Maxwell equations in the new coordinate system introduced, and this allows us to represent the unknown fields as modal expansions in source-free domains. Then, the coefficients of these expansions are computed by introducing the source fields and by enforcing the boundary conditions that the total fields must verify at interfaces between the different media.

In order to tackle the case of a layered conductor presenting rough interfaces, the generalized SOVP formalism is coupled with a recursive routine called the S-matrix algorithm. On the other hand, the application case of a complex shape specimen with depth-varying physical properties is treated by coupling the modal method we developed with a high-order numerical method : pseudo-spectral method.

The validation of these codes is carried out numerically by comparison with a commercial finite element software in some particular configurations. Besides, the homogeneous case is also validated by comparison with experimental data.

Keywords : Electromagnetism, Modelisation, Eddy Current, Non Destructive Testing, Curvilinear Coordinates, C Method, Spectral Method.

Table des matières

1	Introduction et contexte	1
1.1	Généralités sur le contrôle non destructif	2
1.2	Le Contrôle Non destructif par courants de Foucault	3
1.2.1	Principe	3
1.2.2	Domaines d'application du CND CF et contexte industriel de la thèse	4
1.3	Modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault	5
1.4	Diffraction des champs électromagnétiques par des surfaces rugueuses	7
1.5	Modifications des propriétés physiques du conducteur	8
1.6	Organisation du manuscrit	9
2	Les équations de Maxwell : introduction et présentation de différents formalismes	11
2.1	Introduction	12
2.2	Les lois de l'électromagnétisme	12
2.2.1	La force de Lorentz	12
2.2.2	Loi de Gauss	12
2.2.3	Absence de monopole magnétique	13
2.2.4	Conservation de la charge électrique	13
2.2.5	Loi de Faraday	13
2.2.6	Loi d'Ampère modifiée	13
2.2.7	Forme Locale : les équations de Maxwell	14
2.2.8	Relations de milieu	14
2.2.9	Conditions de passage	15
2.3	Formulations en Potentiels	16
2.3.1	Potentiels Vecteurs	17
2.3.2	Potentiel vecteur magnétique du Second Ordre	18
3	Les équations de Maxwell covariantes	23
3.1	Introduction	24
3.2	Notions d'électrodynamique relativiste	24
3.2.1	Quelques rappels sur l'espace de Minkowski	25
3.2.2	Équations de Maxwell-Minkowski	28
3.2.3	Relations de milieux	30
3.3	Cas particulier tridimensionnel	30
3.3.1	Identification des champs tridimensionnels	30
3.3.2	Caractérisation des composantes des tenseurs électromagnétiques	31
3.3.3	Relations de milieu tridimensionnelles	33
3.4	Formulations en potentiels	35

3.4.1	Potentiel Vecteur	35
3.4.2	Potentiel Vecteur du Second ordre	36
4	Calcul des champs induits dans un demi-espace conducteur de géométrie complexe	41
4.1	Introduction	42
4.2	Mise en équations	42
4.2.1	Changement de coordonnées	42
4.2.2	Équations Physiques	43
4.2.3	Conditions de passage	45
4.2.4	Décomposition et réduction des équations	46
4.3	Formulation en Potentiels du Second Ordre Généralisée	48
4.3.1	Approche matricielle	48
4.3.2	Approche tensorielle	49
4.3.3	Bilan	56
4.4	Résolution numérique	56
4.4.1	Description du problème et stratégie	56
4.4.2	Ré-écriture de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes	57
4.4.3	Discrétisation	59
4.4.4	Implémentation et troncature	62
4.4.5	Représentation modale	65
4.4.6	Calcul du champ incident	71
4.4.7	Calcul des coefficients	76
4.4.8	Bilan	78
4.5	Calcul de l'impédance de la bobine	78
5	Calcul des champs induits dans un conducteur stratifié de géométrie complexe	81
5.1	Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles	82
5.1.1	Présentation	82
5.1.2	Mise en équations	82
5.1.3	Résolution numérique	83
5.1.4	Stratégie	83
5.1.5	Un premier algorithme pour le calcul des coefficients	84
5.1.6	Matrices S	86
5.1.7	Algorithme récursif	87
5.1.8	Calcul des coefficients et reconstruction des solutions	90
5.2	Résultats	92
5.3	Cas 2 : conducteur de géométrie complexe avec strates non-parallèles	92
5.3.1	Présentation	92
5.3.2	Changements de coordonnées	92
5.3.3	Nouvelles expansions modales	93
5.3.4	Résolution numérique	95

6	Validation des modèles développés	97
6.1	Introduction	98
6.2	Cas # 1 : demi-espace complexe	98
6.2.1	Validation Expérimentale	98
6.2.2	Validation Numérique	109
6.3	Cas # 2 : pièce avec interfaces complexes parallèles	115
6.4	Cas # 3 : pièce à interfaces complexes non-parallèles	122
6.5	Conclusion	129
7	Modèle dédié aux conducteurs non-homogènes et/ou de Géométrie Complexe	131
7.1	Présentation du problème	132
7.1.1	Problématique	132
7.1.2	Première tentative : résolution par une méthode modale	132
7.2	Stratégie de résolution retenue	133
7.2.1	Domaines non-homogènes	133
7.2.2	Domaines homogènes	137
7.3	Discrétisation	138
7.3.1	Méthodes spectrales	138
7.3.2	Méthode pseudo-spectrale de Chebyshev	139
7.4	Implémentation	141
7.4.1	Définition des vecteurs de coefficients inconnus	142
7.4.2	Opérateurs de dérivation	143
7.4.3	Opérateurs de convolution	143
7.4.4	Conditions de passage et assemblage de la matrice	143
7.5	Calcul des solutions	146
7.6	Résultats et Validations	148
7.7	Conclusion	155
	Conclusions et Perspectives	157
A	Notions d'algèbre vectorielle et tensorielle	161
A.1	Espace vectoriel et espace dual	161
A.2	Covariance et Contravariance	162
A.3	Cas des espaces euclidiens	162
A.4	Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur	163
A.5	Notions d'algèbre vectorielle	164
A.5.1	Espace vectoriel et espace dual	164
A.5.2	Covariance et Contravariance	164
A.5.3	Cas des espaces euclidiens	165
A.5.4	Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur	166
A.6	Notions d'algèbre tensorielle	166
A.6.1	Définition	166
A.6.2	Composantes d'un tenseur	167

A.6.3	Produit contracté simple de tenseurs	167
A.6.4	Le tenseur métrique	168
A.6.5	Changement de coordonnées : repère naturel	169
A.7	Surfaces	170
A.8	Formulaire	173
A.8.1	Tenseur d'orientation et produit vectoriel	173
A.8.2	Symboles de Christoffel et opérateurs différentiels	173
B	Communications relatives au travail de thèse	175
B.1	Articles de revue avec comité de lecture publiés ou acceptés	175
B.2	Présentations orales dans des conférences internationales	175
B.3	Présentation de poster dans des conférences internationales	176
	Bibliographie	177

Table des figures

1.1	Schéma de principe des méthodes de flux.	3
1.2	Schéma de principe du procédé de coulée continue (source : <i>ssab.com</i>)	5
1.3	Images de réseaux réels	8
4.1	Exemple de configuration considérée : une sonde CF 3D scanne un demi-espace 2D extrudé.	42
4.2	Représentation schématique en coupe du problème numérique.	57
4.3	Illustration des limites du calcul des convolutions numériques avec une matrice de convolution. En haut nous avons représenté les deux fonctions f_1 et f_2 que l'on souhaite convoluer. En bas, les résultats donnés par une convolution numérique complète et tronquée (matrice de convolution).	64
4.4	Profil considéré (vu en coupe $x^2 = 0$) pour le calcul des éléments propres. On considère 8 périodes de longueur $T = 5 \text{ mm}$ et une profondeur des dents valant 1 mm	65
4.5	Comparaison des parties imaginaires des valeurs propres dans le conduc- teur (après tri).	65
4.6	Visualisation des modules de quatre modes centraux. Cas du profil triangulaire.	66
4.7	Visualisation des arguments de quatre modes centraux. Cas du profil triangulaire.	66
4.8	Visualisation des modules de quatre modes centraux. Cas du profil plan.	67
4.9	Visualisation des arguments de quatre modes centraux. Cas du profil plan.	67
4.10	Visualisation des modules des quatre derniers modes. Cas du profil triangulaire.	68
4.11	Visualisation des arguments des quatre derniers modes. Cas du profil triangulaire.	68
4.12	Visualisation des modules des quatre derniers modes. Cas du profil plan.	69
4.13	Visualisation des arguments des quatre derniers modes. Cas du profil plan.	69
4.14	Module de la composante E_x du champ électrique créé par une bobine dans l'espace libre. Cette quantité est calculée sur un plan horizontal, perpendiculaire à l'axe de la bobine et situé à 1 mm de celle-ci.	73
4.15	Erreur introduite par le calcul de la transformée de Fourier du champ source en espace libre en fonction du nombre de fréquences spatiales considérées.	73

4.16	Module de la composante E_x du champ électrique créé par une bobine éclairant un plan de conductivité 1 MS/m situé à 1 mm de celle-ci.	74
4.17	Erreur introduite par le calcul de la transformée de Fourier du champ de référence en présence d'une plaque conductrice en fonction du nombre de fréquences spatiales considérées.	75
4.18	Schéma en coupe de la configuration de référence. On considère une plaque plane conductrice située à l'altitude la plus basse du profil perturbé.	76
4.19	Vue en coupe de la surface fermée S_F	79
5.1	Configuration stratifiée considérée.	82
5.2	Schéma en coupe du problème à résoudre : dans chaque strate, les coefficients inconnus, stockés dans des vecteurs, sont séparés en contributions progressives et régressives.	85
5.3	Configuration comportant des strates complexes non parallèles.	93
5.4	Schéma illustrant les différents types de coefficients existant dans une strate formée par deux interfaces non-parallèles.	96
6.1	Vue de dessus de l'une des deux maquettes utilisées pour la validation expérimentale du code.	99
6.2	Paramètres géométriques du capteur utilisé pour les acquisitions	100
6.3	Schéma électrique représentant la chaîne d'acquisition.	100
6.4	Parties réelle et imaginaire de l'impédance brute mesurée dans l'air.	102
6.5	Parties réelle et imaginaire de l'impédance corrigée dans l'air.	102
6.6	Trajectoires de la fonction objectif et du rayon extérieur effectif au cours de l'algorithme d'optimisation.	104
6.7	Trajectoire suivie par la conductivité et l'entrefer durant la recherche.	105
6.8	Évolution de la fonction objectif $fobj_2(\sigma, l_0)$ durant la recherche conjointe de la conductivité et de l'entrefer.	105
6.9	Évolutions mesurée et calculée de ΔR en fonction de la fréquence.	106
6.10	Évolutions mesurée et calculée de ΔX en fonction de la fréquence.	106
6.11	Paramètres de la configuration utilisée pour la validation expérimentale du modèle.	107
6.12	Impédance obtenue pour $f = 350$ kHz	108
6.13	Impédance obtenue pour $f = 600$ kHz	108
6.14	Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.	110
6.15	Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle dédié aux demi-espaces et temps de calcul correspondants.	110
6.16	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.	111
6.17	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.	112
6.18	Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.	113

6.19	Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -0.8$ mm.	114
6.20	Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié parallèle et temps de calcul correspondants.	116
6.21	Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.	117
6.22	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.	118
6.23	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.	119
6.24	Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.	120
6.25	Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -1.0$ mm.	121
6.26	Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.	122
6.27	Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié non-parallèle et temps de calcul correspondants.	123
6.28	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = -1.5$ mm.	124
6.29	Comparaison des parties réelles et imaginaire des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -1.5$ mm.	125
6.30	Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.	126
6.31	Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -1.0$ mm.	127
6.32	Comparaison des parties réelles et imaginaires de l'impédance simulée par les deux modèles (FEM et CCM).	128
7.1	Configuration non-homogène considérée : plaque conductrice formée de deux interfaces complexes non-parallèles.	132
7.2	Configuration non-homogène considérée : plaque conductrice formée de deux interfaces complexes non-parallèles.	137
7.3	Tracé des fonctions cardinales associées aux polynômes de Chebyshev pour $N = 6$	141
7.4	Représentation en coupe de la grille de calcul. À gauche, nous avons représenté la grille dans le système de coordonnées cartésiennes. À droite, la grille après transformation.	142
7.5	Configuration utilisée pour la validation de la méthode S-CCM.	148
7.6	Test de Convergence de la méthode M-CCM en fonction du nombre de strates N_m considéré.	149
7.7	Approximations du profil de conductivité	150
7.8	Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié non-parallèle et temps de calcul correspondants.	150
7.9	Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.	152
7.10	Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.	153

7.11	Extraction des composantes dans des plans $x^1 = c^{ste}$, visualisation dans la strate non-homogène. Pour chaque figure : en haut est représenté le résultat $S - CCM$, en dessous le résultat $M - CCM$ et en bas la différence des deux.	154
7.12	Extraction des composantes dans des plans $x^2 = c^{ste}$, visualisation dans la strate non-homogène. Pour chaque figure : en haut est représenté le résultat $S - CCM$, en dessous le résultat $M - CCM$ et en bas la différence des deux.	154
A.1	Exemple de surface complexe considérée : surface infinie dans les direction X^1 et X^2 et d'équation de la forme $X^3 = a(X^1, X^2)$ qui sépare le milieu conducteur de l'air.	170
A.2	Illustration en 3D des bases covariantes et contravariantes d'un repère naturel. On considère ici une surface d'équation $x^3 = c^{ste}$ dans la base naturelle. Le plan (\mathcal{P}) est le plan tangent à la surface au point M . . .	172

Introduction et contexte

Sommaire

1.1	Généralités sur le contrôle non destructif	2
1.2	Le Contrôle Non destructif par courants de Foucault	3
1.2.1	Principe	3
1.2.2	Domaines d'application du CND CF et contexte industriel de la thèse	4
1.3	Modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault	5
1.4	Diffraction des champs électromagnétiques par des surfaces rugueuses	7
1.5	Modifications des propriétés physiques du conducteur	8
1.6	Organisation du manuscrit	9

1.1 Généralités sur le contrôle non destructif

Définition : « On regroupe sous le vocable « essais non destructifs » ou encore « contrôles non destructifs » l'ensemble des techniques et procédés aptes à fournir des informations sur la santé d'une pièce ou d'une structure sans qu'il en résulte d'altération préjudiciable à leur utilisation ultérieure. »

source : *Techniques de l'Ingénieur* [Dumont-Fillon 2014]

Au travers de cette définition générale, il apparaît que l'enjeu du contrôle non destructif est de détecter les modifications de la structure d'une pièce qui peuvent apparaître tout au long de son cycle de vie, de sa fabrication à sa mise au rebut, et qui sont susceptibles de perturber son comportement au sein d'un système (risque de rupture, de déformation, mauvais comportement mécanique, etc...). Ces modifications structurelles peuvent avoir des causes diverses dépendant du matériau constituant la pièce (ex : aciers, matériaux composites...), de son processus de fabrication (ex : moulage, usinage, forgeage traitements thermiques...), de son environnement d'utilisation (conditions de pression et de température, milieu agressif, bombardement neutronique...), de ses conditions d'utilisation (solicitations mécaniques...), etc...et prennent donc des formes variées.

Les défauts surfaciques ou les inclusions sont les plus courantes (et les plus surveillées) et correspondent à des modifications locales de la structure du matériau : il s'agit d'un retrait de la matière qui augmente grandement le risque de rupture. La détection de modifications des propriétés physiques (mécaniques, électromagnétiques...), induites le plus souvent par des sollicitations thermiques importantes, constitue elle aussi un enjeu industriel majeur notamment dans le domaine de la métallurgie où les procédés de traitement thermique sont très souvent employés durant le processus de fabrication des pièces. Ce type de modification est plus compliqué à détecter et à quantifier puisque les techniques de contrôle actuelles ne permettent pas de remonter directement aux propriétés mécaniques du matériau. Cependant, celles-ci étant liées à sa structure microscopique, la connaissance précise des caractéristiques physiques du matériau (très étroitement liées, pour certaines, au réseau cristallin) peut permettre d'obtenir des informations sur ces propriétés mécaniques. Ce point sera discuté dans la suite.

Les techniques de contrôle les plus répandues sont les méthodes dites « de flux » qui englobent les techniques de contrôle ultrasonore, par rayon X ou par courants de Foucault. La figure 1.1 illustre le principe de ces méthodes. Elles consistent de façon simplifiée à envoyer un « flux » Φ_0 sur le spécimen à tester et à mesurer le flux réfléchi par la pièce (ultrasons et courants de Foucault), ou le flux transmis à travers la pièce (rayons X). Le flux ainsi relevé a interagi avec la pièce et contient donc des informations sur sa structure interne qui permettent de remonter à son état de santé.

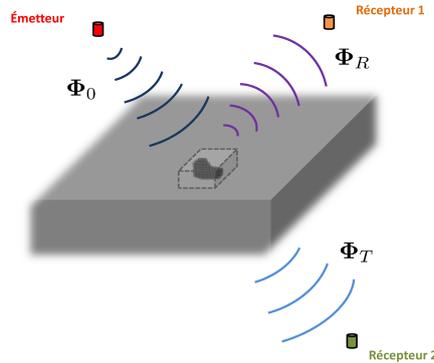


FIGURE 1.1 – Schéma de principe des méthodes de flux.

1.2 Le Contrôle Non destructif par courants de Foucault

Mon travail de thèse au sein du Laboratoire de Simulation et de Modélisation en Électromagnétisme du centre CEA de Saclay s'inscrit dans le contexte du Contrôle Non Destructif par Courants de Foucault (CNDCF), qui exploite le phénomène d'induction apparaissant dans des milieux conducteurs plongés dans un champ électromagnétique variable.

1.2.1 Principe

Découvert en 1831 par Michael Faraday, le phénomène d'induction électromagnétique lui permit d'expliquer l'apparition d'une tension aux bornes d'un circuit électrique plongé dans un champ magnétique variable. L'expérience qu'il mit en œuvre s'apparente à ce qui est aujourd'hui communément appelé un transformateur : une pile alimente un solénoïde (le circuit primaire) qui est relié à un deuxième solénoïde par le biais d'un matériau magnétique (ces matériaux permettent de canaliser le flux du champ magnétique). Il observa alors une tension aux bornes du secondaire lorsqu'il ouvrait et fermait le circuit primaire, créant ainsi un champ magnétique variable.

En 1855, Léon Foucault observe qu'un disque en rotation placé entre des aimants permanents subit un ralentissement et une augmentation de sa température : les électrons en mouvement de rotation par rapport au champ magnétique sont soumis à la force magnétique ($\mathbf{v} \times \mathbf{B}$) et se déplacent dans le référentiel du disque formant ainsi des courants. Durant leur déplacement, les électrons se heurtent aux atomes formant le réseau cristallin du conducteur, conduisant à un échauffement de celui-ci. Le ralentissement peut quant à lui être expliqué par l'apparition d'une force de Laplace sur les boucles de courant ainsi formées ($\mathbf{F} = \int I d\mathbf{l}$). Suivant le principe de moindre action, cette force va s'opposer à la cause lui ayant donné naissance : le mouvement du disque.

Le même phénomène apparaît lorsque le conducteur est en mouvement et que le champ magnétique est variable (tout comme dans l'expérience de Faraday). C'est alors le champ électrique qui crée le mouvement des électrons (la force de Lorentz s'écrit $q\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}$) créant ainsi les courants de Foucault dans le conducteur immobile. Ces courants donnent alors naissance à un champ magnétique qui s'oppose au champ leur ayant donné naissance : il rayonne à l'extérieur de la pièce, s'opposant au champ rayonné par la sonde.

Les procédés de CNDCF exploitent l'information contenue par ce champ réfléchi : il dépend fortement du parcours des électrons dans le conducteur, lui-même conditionné par la structure interne de la pièce et permet donc de rendre compte de la présence d'inclusions ou de variations des propriétés électromagnétiques.

On voit donc que cette technique de contrôle ne peut être appliquée qu'à des pièces conductrices. De plus, pour des conducteurs usuels (conductivité de l'ordre du MS/m), la densité de courant induite est d'autant plus confinée à la surface du conducteur que la fréquence (et la perméabilité) est grande (effet de peau). Ceci impose de travailler à des fréquences suffisamment basses (de quelques kHz à quelques MHz) afin d'assurer une profondeur de pénétration suffisante : on parle de régime quasi-statique. Il s'agit donc d'une méthode de contrôle de surface. De plus, l'interprétation du signal obtenu (impédance du capteur le plus souvent) est difficile.

1.2.2 Domaines d'application du CND CF et contexte industriel de la thèse

Cette technique est néanmoins très utilisée dans différents domaines de l'industrie : aéronautique, nucléaire, ferroviaire, industrie pétrolière, métallurgie, etc... car elle permet une mise en œuvre simple (dispositif d'acquisition facilement transportable) et que le contrôle ne nécessite pas de contact physique avec la pièce (contrairement à la technique utilisant les ultrasons qui nécessite la mise en place d'un couplant).

Le premier objectif de mon travail de thèse est le développement d'un modèle rapide permettant de calculer la réponse d'un capteur inductif durant le balayage d'une pièce conductrice présentant une surface ondulée suivant une direction et extrudée dans la direction transverse. Ceci répond à un besoin de l'industrie métallurgique, et en particulier de la société Arcelor Mittal, qui souhaite contrôler par cette méthode les tôles d'alliage fer carbone obtenues par un procédé de fabrication particulier nommé la « coulée continue ». Les étapes de ce processus sont représentées schématiquement sur la figure 1.2 : le métal fondu est coulé dans un refroidisseur où il se solidifie partiellement avant d'être mis en forme lors de son passage entre des rouleaux en rotation. Il continue à se refroidir durant toute la chaîne et il est finalement découpé, formant ainsi des tôles de la dimension désirée.

Ces tôles peuvent ensuite être contrôlées par une méthode de courants de Foucault ou par ultrasons une fois complètement refroidies afin d'éliminer celles qui

1.3. Modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault 5

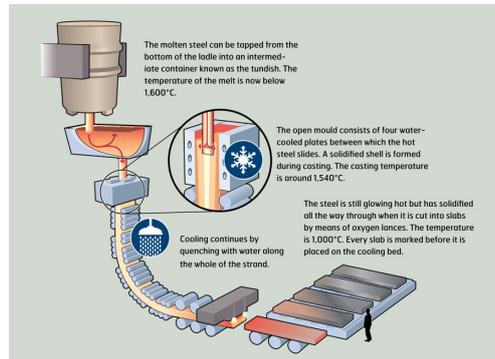


FIGURE 1.2 – Schéma de principe du procédé de coulée continue (source : *ssab.com*)

présentent des défauts. Afin d'augmenter le rendement de ce procédé de fabrication, les métallurgistes souhaitent effectuer ce contrôle avant de découper les tôles, c'est-à-dire directement en sortie du refroidisseur, où le métal est encore très chaud et non-solidifié (ceci impose une méthode de contrôle à distance) : il présente alors une surface ondulée en raison de son passage entre les rouleaux. Ces ondulations perturbent fortement le signal de réponse de la sonde et rend l'interprétation des résultats très compliquée. L'utilisation d'un modèle rapide permettant de prédire la réponse du capteur à l'ondulation géométrique permettrait donc de développer une méthode de diagnostic plus appropriée s'appuyant sur la modélisation.

Avant de présenter la méthode que nous avons choisie afin d'implémenter ce modèle, nous exposerons rapidement les principales méthodes de modélisation utilisées pour le contrôle non destructif par courants de Foucault.

1.3 Modélisation du contrôle non destructif par courants de Foucault

À l'instar des autres disciplines de la physique, la modélisation des phénomènes électromagnétiques a connu un essor considérable avec l'augmentation des capacités de calcul des machines. Elle est devenue un outil majeur du CND-CF qui permet aux industriels de remplacer en partie les études expérimentales coûteuses nécessaires à la conception de nouveaux procédés de contrôle (nouveaux capteurs, nouvelles géométries de pièces, études de sensibilité, études paramétriques etc...). De plus, elle constitue une aide précieuse à l'interprétation des signaux qui est particulièrement délicate. En outre, il est clair que le développement de modèles rapides et précis constitue une étape fondamentale en vue de l'inversion des signaux de contrôle : opération qui consiste à reconstruire directement les propriétés internes du spécimen à partir des mesures effectuées.

Aujourd'hui, les modèles existants sont essentiellement basés sur deux groupes de méthodes : les méthodes numériques, générales mais souvent coûteuses (temps

de calcul et mémoire) et les méthodes semi-analytiques, moins générales mais plus légères.

Appartenant à la première catégorie, la méthode des éléments finis a été initialement introduite dans les années 50 par des ingénieurs afin de résoudre des problèmes de mécanique des milieux déformables. Depuis lors, ses bases théoriques ont été considérablement consolidées et son champ d'applications s'est élargi à la plupart des domaines de la physique moderne et plus particulièrement à l'électromagnétisme. En effet, de nombreux travaux théoriques [Nédélec 1973, Bossavit 1993] ont permis le développement de modèles numériques, notamment dans le domaine des courants de Foucault [Albanese 1997, Dular 2003, Sabariego 2007], où cette méthode est rapidement devenue incontournable. Son avantage principal réside dans sa généralité qui lui permet de traiter des configurations présentant des caractéristiques géométriques et physiques très variées. Cependant, elle conduit pour la plupart des configurations industrielles (grandes dimensions, multi-échelles etc...), à la résolution numérique d'un système de grande taille (mais creux), ce qui peut conduire à des temps de calcul importants (utilisation d'un solveur itératif).

S'appuyant sur une formulation intégrale des équations de Maxwell développée à la fin du XIX^e siècle, les méthodes intégrales de volumes (VIE) et de surfaces (SIE) ont elles aussi connu un développement important à la fin du siècle dernier. Elles appartiennent au groupe des méthodes semi-analytiques car elles reposent sur l'utilisation des dyades de Green dont les expressions analytiques sont connues dans l'espace libre et pour certaines configurations présentant une géométrie simple (géométrie canonique : plans, cylindres, sphères).

La méthode SIE [Hiptmair 2005, Chew 2008] repose sur une représentation en sources de courants surfaciques magnétique et électrique équivalentes des champs électromagnétiques et sur l'utilisation du noyau de Green de l'espace libre. Ainsi, le problème volumique est ramené à un problème surfacique, ne nécessitant de mailler que les interfaces des parties actives de la configuration, ce qui conduit à la résolution d'un système de taille réduite par rapport à la méthode des éléments finis. Elle permet donc de traiter des configurations de géométries complexes. Cependant, cette formulation n'est valable que pour des matériaux homogènes. De plus, le système obtenu étant nécessairement plein, la résolution directe peut être lourde pour certaines configurations et nécessite l'utilisation de techniques de compression spécifiques.

La formulation VIE implémentée dans le module dédié au contrôle par courants de Foucault de la plateforme CIVA développée au CEA LIST repose sur l'écriture analytique de la dyade de Green associée à la géométrie de la configuration considérée [Chew 1995, chap. 7]. Cette méthode est très rapide puisque seul le défaut est discrétisé en cellules élémentaires. La résolution se décompose alors en trois étapes distinctes [Bowler 1991, Nair 1990]. Premièrement, le champ primaire correspondant au champ créé par la sonde dans la pièce en l'absence de défaut est calculé. Puis,

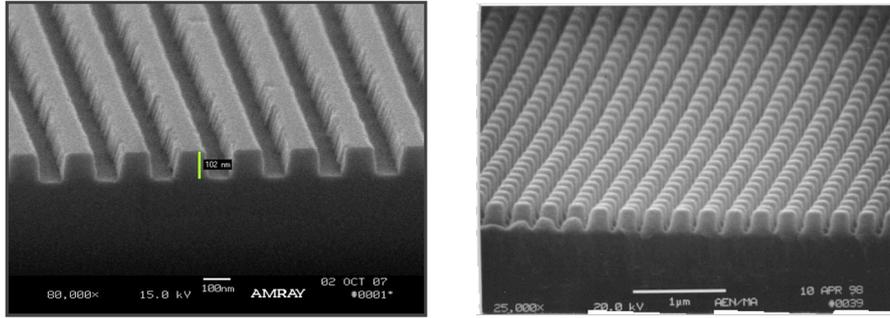
la perturbation de ce champ primaire, induite par la présence du défaut volumique est obtenue en superposant les champs rayonnés par les différentes cellules formant le défaut, qui sont vues comme des sources secondaires. Finalement, la réponse du capteur à cette perturbation est calculée. On voit donc que l'efficacité de cette méthode est tributaire d'une part de la connaissance de l'expression analytique de la dyade de Green associée à la géométrie (limitée à l'heure actuelle aux géométries canoniques) et d'autre part de l'efficacité du modèle utilisé pour le calcul du champ primaire dans la configuration sans défaut.

Ce dernier point s'inscrit lui aussi dans la première problématique de mon travail de thèse. En effet, les géométries traitées à l'heure actuelle par cette méthode étant canoniques (plans ou cylindres stratifiés...), le calcul du champ primaire est effectué à l'aide de méthodes semi-analytiques limitées à ce type de géométries [Dodd 1968, Theodoulidis 2006, Theodoulidis 2005]. Afin de traiter efficacement des configurations de géométries plus complexes, il est donc nécessaire de développer un modèle rapide permettant de calculer le champ primaire induit dans une pièce saine de géométrie complexe. Ainsi, comme nous l'avons déjà dit dans la section précédente, je me suis intéressé au développement d'un modèle dédié aux pièces présentant des interfaces irrégulières extrudées.

1.4 Diffraction des champs électromagnétiques par des surfaces rugueuses

La modélisation de l'interaction d'un champ électromagnétique avec des obstacles présentant des surfaces rugueuses ou irrégulières est à l'origine de nombreux travaux de recherche dans le domaine de l'optique et de la photonique, plus particulièrement pour l'étude des réseaux de diffraction, outil incontournable de la spectroscopie. Les applications technologiques sont nombreuses [Antonakakis 2012, chap. 1] : séparation du faisceau laser de la tête de lecture des lecteurs DVD, amélioration de l'absorption de cellules photovoltaïques, augmentation de la résolution des écrans LCD, etc... Sur les figures 1.3(a) et 1.3(b), nous avons représenté deux images de réseaux optiques 1D et 2D réels.

Ainsi, de nombreux travaux de recherche ont conduit au développement de différents modèles numériques afin de simuler le comportement de ces réseaux. De même que dans le domaine du contrôle non destructif, on compte parmi les principales des méthodes purement numériques, telles que les éléments finis [Nicolet 2004, Bao 2005] ou des méthodes semi-analytiques basées sur des formulations intégrales [Maystre 1972, Déchamps 2006]. Des méthodes modales ont aussi été développées et permettent d'obtenir des codes de simulation très rapides. Parmi cette classe de modèles, on compte principalement la méthode de Fourier-Rayleigh [Maystre 1984] et la méthode des Coordonnées Curvilignes (méthode C ou CCM) [Chandezon 1980, Granet 1998, Li 1994]. Ces deux approches modales reposent sur des formalismes très similaires mais des études de convergence montrent que suite à la discrétisation des équations effectuées lors de l'implémentation, la méthode C présente une



(a) Réseau 1D pour écran LCD (source : *Plymouth Grating Laboratory*) (b) Réseau 2D pour cellule photovoltaïque (source : *Holographix LLC*)

FIGURE 1.3 – Images de réseaux réels

meilleure convergence pour des réseaux de formes arbitraires [Popov 1986], principalement car elle repose sur l'écriture des équations dans un système de coordonnées lié à la géométrie du réseau (équations de Maxwell covariantes [Chandezon 1979, Post 1997]). Elle a de plus été utilisée avec succès pour d'autres applications, notamment pour l'étude des surfaces agricoles (décrites par des variables aléatoires) [Dusséaux 2008, Braham 2007]. Nous avons donc opté pour cette dernière que nous avons transposée au domaine du contrôle Non Destructif par courants de Foucault.

1.5 Modifications des propriétés physiques du conducteur

Comme nous l'avons expliqué dans la présentation générale du Contrôle Non Destructif, un autre enjeu de ce procédé consiste à détecter d'éventuelles modifications des propriétés physiques de la pièce contrôlée. Dans le cadre du CND-CF, les travaux actuels visent à reconstruire les gradients de conductivité et/ou de perméabilité pouvant apparaître en surface d'une pièce, suite à des traitements thermiques volontaires (on vérifie donc le bon déroulement de cette opération) ou involontaires (dus à l'opération d'usinage, à l'environnement de la pièce durant son utilisation...).

En effet, des travaux ont montré qu'il existe une forte corrélation entre ces propriétés électromagnétiques et les propriétés mécaniques des alliages, notamment les contraintes résiduelles de surface [Blodgett 2004, Hillmann 2008, Yu 2005]. La détermination préliminaire d'un profil de conductivité à partir de mesures physiques est un problème complexe d'inversion et constitue un sujet de recherche très actif dans le domaine du contrôle non destructif par courants de Foucault.

Ce procédé d'inversion vise donc, à partir de la mesure de la réponse d'un capteur courants de Foucault, à remonter au profil de conductivité de la pièce. Ainsi, il nécessite un modèle direct rapide, capable de calculer la réponse du capteur à différentes fréquences et pour différents profils de conductivité.

Différents modèles existent dans la littérature, qui permettent de prédire la réponse d'un capteur éclairant une pièce plane présentant un gradient de conductivité surfacique. Certains sont basés sur une hypothèse forte concernant le profil de conductivité qui est alors approché par une fonction analytique connue dont on peut faire varier certains paramètres [Lambert 2011, Theodoulidis 1995], ce qui permet d'obtenir une solution analytique des équations, au prix d'une perte de généralité. D'autres méthodes peuvent être envisagées en effectuant une expansion en série de Taylor des inconnues et des paramètres [Khalaj-Amirhosseini 2007]. Ceci permettrait de prendre en compte des profils quelconques mais nécessiterait une procédure de résolution itérative qui se révélerait lourde en 3D. Une autre solution consiste à approcher le profil de conductivité par une fonction constante par morceaux, ramenant le problème à une plaque plane composée de strates homogènes.

Il existe des travaux portant sur un algorithme d'inversion basé sur cette dernière méthode et qui utilise donc un modèle direct dédié à des pièces planes homogènes stratifiées [Dodd 1968]. Une version simplifiée de cet algorithme a été développée [Yu 2004] puis améliorée [Abu-Nabah 2006] par la suite. Cependant, il ne permet pas de prendre en compte l'influence de l'état de surface de la pièce (fortement altéré dans le cas de pièces soumises à du grenailage ou à du martèlement à froid) sur la mesure du profil de conductivité [Blodgett 2003].

Le second objectif de mon travail de thèse est donc le développement d'un modèle rapide permettant de calculer les champs et la réponse d'un capteur inductif lors du contrôle par courants de Foucault d'une pièce de géométrie complexe (extrudée) présentant un gradient de conductivité.

1.6 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit s'organise en sept chapitres.

Dans le chapitre suivant, nous présentons rapidement les équations de Maxwell et les principaux formalismes utilisés dans les modèles actuels. Ceci nous conduit à un formalisme particulièrement intéressant pour notre application (formalisme en potentiel vecteur du second ordre) qui a initialement été utilisé afin de calculer les champs primaires dans des systèmes de coordonnées curvilignes orthogonaux et que nous souhaitons généraliser afin d'utiliser la méthode C.

Le troisième chapitre concerne la théorie des équations de Maxwell covariantes que nous souhaitons introduire dans le formalisme en potentiel vecteur. Nous présentons ici l'origine de ces équations ainsi que les propriétés mathématiques des inconnues qu'elles mettent en jeu.

Dans le chapitre suivant, nous présentons le formalisme en potentiels que nous avons développé et nous l'appliquons à une géométrie constituée d'un demi-espace présentant une surface complexe. Ensuite, nous détaillons la stratégie de discrétisation adoptée ainsi que la méthode de résolution du problème.

Le chapitre 5 concerne l'extension du modèle obtenu à des configurations présentant des interfaces parallèles et non-parallèles. Nous détaillons alors les algorithmes particuliers utilisés et leur implémentation.

Dans le chapitre 6, nous présentons les résultats obtenus pour différentes configurations et leur comparaison avec des signaux de référence. Nous présentons tout d'abord des comparaisons avec des acquisitions expérimentales effectuées au laboratoire sur des maquettes fournies par la société Arcelor Mittal dans le cadre du projet européen SIMPOSIUM [sim]. Le dispositif d'acquisition ainsi que le traitement préalable des données expérimentales sont détaillés. Ensuite, nous comparons les champs électromagnétiques calculés dans des configurations plus complexes avec ceux obtenus à l'aide d'un logiciel commercial de calcul par éléments finis.

Dans le chapitre 7, nous présentons le modèle développé afin de prendre en compte un gradient de conductivité dans la pièce. Le formalisme des équations de Maxwell covariantes est étendu à des transformations de coordonnées plus générales et la résolution par un couplage avec une méthode numérique des équations ainsi obtenues est détaillée. De même que précédemment, des résultats de validations numériques du modèle sont présentés.

Les équations de Maxwell : introduction et présentation de différents formalismes

Sommaire

2.1	Introduction	12
2.2	Les lois de l'électromagnétisme	12
2.2.1	La force de Lorentz	12
2.2.2	Loi de Gauss	12
2.2.3	Absence de monopole magnétique	13
2.2.4	Conservation de la charge électrique	13
2.2.5	Loi de Faraday	13
2.2.6	Loi d'Ampère modifiée	13
2.2.7	Forme Locale : les équations de Maxwell	14
2.2.8	Relations de milieu	14
2.2.9	Conditions de passage	15
2.3	Formulations en Potentiels	16
2.3.1	Potentiels Vecteurs	17
2.3.2	Potentiel vecteur magnétique du Second Ordre	18

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est de rappeler brièvement les différentes lois décrivant les phénomènes électromagnétiques auxquels nous nous intéressons et les différentes équations, tirées de ces lois, qui sont le plus souvent utilisées afin de modéliser numériquement ces phénomènes. En effet, bien que l'état électromagnétique d'un milieu puisse être décrit intégralement par la donnée conjointe du champ électrique $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ et de l'induction magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ en tout point \mathbf{r} de ce milieu et à tout instant t , les différentes méthodes de calcul numérique ou analytique actuelles reposent le plus souvent sur le calcul d'une ou plusieurs grandeurs intermédiaires, vectorielles ou scalaires, que l'on nommera potentiels.

2.2 Les lois de l'électromagnétisme

Nous présentons très rapidement ici les lois bien connues de l'électromagnétisme en commençant par leurs formes intégrales. En effet, bien que les méthodes de modélisation actuelles permettent de calculer directement les grandeurs locales que sont les champs électriques et magnétiques, les signaux expérimentaux obtenus dans le domaine du contrôle non destructif (l'impédance de la sonde par exemple) sont le plus souvent rattachés à des grandeurs énergétiques et donc intégrales.

2.2.1 La force de Lorentz

La force de Lorentz permet de décrire en un point \mathbf{r} de l'espace et à un instant t l'action de la répartition totale des charges électrostatiques et courants de l'univers sur une charge ponctuelle q que l'on placerait au point \mathbf{r} . Les notions de champ électrique et d'induction magnétique sont introduites au travers de la définition de cette force qui s'écrit :

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = q(\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)), \quad (2.1)$$

où $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ représente le vecteur vitesse de la charge q .

2.2.2 Loi de Gauss

La première loi de l'électromagnétisme décrit le flux du champ électrique \mathbf{E} à travers une surface fermée $\delta\Omega$ ne possédant pas de densité de charge surfacique et formant un volume Ω contenant une charge électrique Q_Ω . La loi de Gauss s'écrit alors (dans le vide) :

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{Q_\Omega}{\varepsilon_0}, \quad (2.2)$$

où ε_0 est la permittivité électrique du vide. Il est important de noter ici que la charge Q_Ω peut être ponctuelle, mais peut aussi être créée par une densité volumique de charges $\rho(\mathbf{r})$. On a donc :

$$Q_\Omega = \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{r}) dV \quad (2.3)$$

2.2.3 Absence de monopole magnétique

La recherche d'une version analogue au théorème de Gauss pour le champ magnétique se heurte à un constat expérimental sans équivoque : aucune charge magnétique (ou monopole) n'a été découverte à l'heure actuelle. Ceci se traduit par le fait que le flux du champ magnétique au travers d'une surface fermée $\partial\Omega$ est inconditionnellement nul :

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (2.4)$$

Néanmoins, sans s'étendre outre mesure sur ce sujet, il est important de noter qu'il existe des formalismes mathématiques des lois de l'électromagnétisme s'appuyant sur l'analogie électrique-magnétique et faisant ainsi intervenir des densités de charges magnétiques fictives afin d'utiliser les résultats connus de l'électrostatique pour la résolution de problèmes de magnétostatique.

2.2.4 Conservation de la charge électrique

À l'instar de la relation précédente, la loi de conservation de la charge électrique repose sur une réalité physique simple : la présence d'un courant électrique (flux de charges électriques) traversant une surface fermée $\partial\Omega$ formant un volume Ω contenant une charge $Q_\Omega(t)$ conduit nécessairement à une variation de $Q_\Omega(t)$ afin de compenser la charge sortante (ou entrante), *i.e.* :

$$\oiint_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} Q_\Omega(t). \quad (2.5)$$

2.2.5 Loi de Faraday

La seconde loi est dite loi de Faraday et décrit un phénomène dynamique qui est à l'origine même de la création des courants de Foucault. En effet, elle postule que pour toute surface S s'appuyant sur un contour fermé Γ , les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} vérifient :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right). \quad (2.6)$$

Le terme de gauche représente la circulation du champ électrique le long du contour Γ et est souvent appelé la force électromotrice e . Le terme de droite représente la dérivée temporelle du flux du champ magnétique à travers la surface S .

2.2.6 Loi d'Ampère modifiée

La dernière loi est attribuée à Ampère et s'écrit, en conservant les mêmes notations que précédemment et en se plaçant dans le vide :

$$\int_{\Gamma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} = \mu_0 \iint_S \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{r} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\iint_S \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} \right), \quad (2.7)$$

où $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ désigne la densité de courant.

En réalité, la loi d'Ampère telle qu'il l'a formulée ne contient pas la deuxième intégrale du terme de droite. C'est Maxwell qui, s'apercevant de l'incohérence des équations ainsi obtenues (la conservation de la charge n'était pas assurée en régime dynamique) postula la présence de courants de déplacement ($\varepsilon_0 \frac{d}{dt} \mathbf{E}$ dans le vide), unifiant alors les trois lois que nous venons de voir.

2.2.7 Forme Locale : les équations de Maxwell

La forme locale de ces équations a été décrite en tout premier lieu par Maxwell au XIX^e siècle, dans son ouvrage intitulé "Electricity and Magnetism" [Maxwell 1892] sous la forme d'un système de huit équations couplées. C'est Heaviside qui a par la suite réduit ce système aux quatre équations différentielles que nous connaissons aujourd'hui :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{2.8}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.9}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \tag{2.10}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}, \tag{2.11}$$

où l'opérateur ∇ est un opérateur différentiel qui prend la forme $\nabla = [\partial_x, \partial_y, \partial_z]^T$ en coordonnées cartésiennes, avec la convention $\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha}$.

À ces équations, on peut ajouter la forme locale de l'équation de conservation de la charge (qui est déjà contenue par ces équations) :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \tag{2.12}$$

2.2.8 Relations de milieu

Les équations (2.8) à (2.11) mettent en jeu 5 grandeurs vectorielles \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{H} et \mathbf{J} qui sont appelées respectivement le champ électrique, l'induction électrique, le champ d'induction magnétique, le champ magnétique et la densité de courant électrique ainsi qu'une grandeur scalaire, la densité volumique de charges électriques ρ du milieu. Elles sont reliées entre elles par les relations de milieu qui font intervenir des objets mathématiques représentant les propriétés électromagnétiques du milieu à l'échelle macroscopique.

Dans le cas général, ces objets sont des tenseurs d'ordre 2 et de rang trois que l'on repèrera par le symbole $\bar{\bar{\bar{\cdot}}}$. Ces relations relient les différentes grandeurs vectorielles

que l'on vient de citer et s'écrivent sous la forme suivante pour un matériau linéaire :

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \bar{\epsilon}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) = \bar{\sigma}(\mathbf{r}, t)\mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (2.14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mu}(\mathbf{r}, t)\mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (2.15)$$

où le terme $\mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t)$ représente la densité de courant résultant uniquement du mouvement des charges soumises à la force de Lorentz. En présence d'une source de courant, la densité de courant totale dans le milieu source s'écrit :

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_i(\mathbf{r}, t) + \mathbf{J}_e(\mathbf{r}, t), \quad (2.16)$$

où \mathbf{J}_e représente la densité de courant "externe", c'est à dire imposée au niveau de la source.

Dans le cas d'un matériau homogène et isotrope tel que l'air ou le vide, on peut remplacer les tenseurs de permittivité, de conductivité et de perméabilité par des grandeurs scalaires, ce qui simplifie grandement le problème à résoudre.

Au sens large, la modélisation des phénomènes électromagnétiques repose sur la résolution numérique des équations de Maxwell afin de calculer les champs vectoriels en tout point de l'espace et à tout instant t . À partir de la connaissance de ces grandeurs, il est possible de calculer numériquement des grandeurs intégrales telles que l'impédance d'un capteur, ou le flux du champ magnétique etc... en utilisant la forme intégrale des lois de l'électromagnétisme afin de confronter les résultats de simulation aux acquisitions expérimentales.

Dans la plupart des configurations, différents matériaux cohabitent et des domaines présentant des propriétés électromagnétiques différentes sont donc mis en jeu. Ainsi, plutôt que de résoudre un problème complexe global, on résout souvent les équations de Maxwell dans chaque milieu et l'on assure l'unicité de la solution en imposant des conditions de passage entre les différents milieux.

2.2.9 Conditions de passage

Si l'on considère une surface S séparant un milieu 1 d'un milieu 2, les relations de passage entre les champs électromagnétiques s'écrivent :

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (2.17)$$

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_S, \quad (2.18)$$

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \times \mathbf{n} = \mathbf{J}_s, \quad (2.19)$$

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (2.20)$$

où ρ_S représente la densité surfacique de charges présentes sur la surface S et \mathbf{J}_s , la densité de courant surfacique sur cette même surface.

Une densité de charge est par nature volumique et le second membre de l'équation (2.18) est nul au sens strict. Néanmoins, dans certains cas (pour des matériaux très conducteurs par exemple, ou pour des fréquences très élevées), la densité volumique de charge devient très grande au voisinage de l'interface et décroît très rapidement en s'éloignant de cette interface, entraînant une variation locale des champs très importante sur une très faible épaisseur (quelques angströms pour un conducteur classique). Ainsi, si l'on observe la variation de la composante normale de \mathbf{D} sur une distance supérieure, il est possible d'observer un saut. Le "modèle" de la densité de charge surfacique permet donc une représentation plus fidèle à la réalité dans ces cas.

De même, une densité de courant surfacique ne peut apparaître que dans un conducteur parfait, c'est-à-dire un matériau qui repousse de façon idéale les lignes des champs électromagnétiques : les charges et courants sont repoussés au niveau des surfaces du matériau et s'organisent de sorte à annuler les champs à l'intérieur du matériau (les champs d'excitation sont compensés par les champs créés par ces nouvelles distributions de charges et courants).

Le modèle de conducteur parfait est d'autant plus réaliste que l'épaisseur de peau $\delta = 1/\sqrt{\sigma\mu\pi f}$ est faible. En effet, dans ce cas, on a vu que l'on pouvait approcher les densités de charge et de courant par des grandeurs surfaciques et considérer les champs nuls à l'intérieur du conducteur. Néanmoins, notre domaine d'application étant le contrôle non destructif par courants de Foucault, nous travaillons ici dans le cadre des basses fréquences (régime quasi-statique) et nous considérerons donc que $\rho_s = 0$ et $\mathbf{J}_s = \mathbf{0}$ dans toute la suite de ce document.

2.3 Formulations en Potentiels

Nous proposons ici une brève présentation des formulations en potentiels (scalaires ou vecteurs) des équations de Maxwell qui sont souvent considérées pour la résolution des problèmes d'électromagnétisme. Nous ne prétendons pas ici donner un cadre théorique complet à ces formulations mais simplement en détailler les points-clés. En effet, la méthode de résolution que nous proposons dans les chapitres suivants repose sur un formalisme en potentiels scalaires obtenu dans de nouveaux systèmes de coordonnées et constitue donc une généralisation des formulations usuelles. De plus, les résultats de simulation que nous obtenons avec les modèles développés ont été validés numériquement par comparaison avec des modèles numériques existants (de type éléments finis [Multiphysics 2012]) reposant sur de tels formalismes.

Le cadre de ce travail étant le Contrôle Non Destructif par courants de Foucault, nous présenterons ici les formulations en potentiels dites de la magnétodynamique qui s'obtiennent en supprimant la contribution des courants de déplacement dans les équations de Maxwell. En effet, les fréquences d'excitation mises en jeu dans ce type d'applications sont faibles et permettent donc de considérer que ces courants

sont négligeables devant les courants de conduction.

Dans ce cadre, les équations que nous considérons ici s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.21)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (2.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (2.23)$$

2.3.1 Potentiels Vecteurs

Ce type de formulation, très utilisé pour la méthode des éléments finis, s'appuie sur les propriétés suivantes de l'opérateur ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= 0, \text{ pour toute fonction } f \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) &= 0, \text{ pour tout champ vectoriel } \mathbf{F}. \end{aligned}$$

Il en existe de plusieurs types, suivant que l'on travaille avec le champ magnétique ou la densité de courant. L'introduction d'un vecteur potentiel permet d'imposer de façon forte une divergence nulle au champ vectoriel considéré et ainsi de réduire le nombre d'inconnues recherchées.

2.3.1.1 Formulation en potentiel vecteur électrique

Cette formulation est dédiée à un milieu conducteur et exploite le fait que dans un tel milieu, la densité de courant \mathbf{J} est à flux conservatif. On l'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{T}, \quad (2.24)$$

où \mathbf{T} est appelé le vecteur potentiel électrique. Le champ \mathbf{H} est obtenu via la relation de Maxwell-Ampère et s'écrit donc :

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} - \nabla \phi, \quad (2.25)$$

où ϕ est un potentiel scalaire. On assure l'unicité de la solution (\mathbf{T}, ϕ) en imposant une condition de jauge sur \mathbf{T} .

2.3.1.2 Formulations en potentiel vecteur magnétique

Formulation $\mathbf{A} - \phi$ Cette formulation est dédiée au cas d'un milieu conducteur quelconque ($\rho = 0$). Elle permet de se ramener à un problème à quatre inconnues en introduisant un potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} défini à partir de l'équation de Maxwell-Thomson (2.21), traduisant la propriété de divergence nulle du champ magnétique qui est automatiquement vérifiée en posant

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.26)$$

De façon analogue, en appliquant l'opérateur $\nabla \times$ à l'équation de Maxwell-Faraday (2.22), on voit directement que $\nabla \times (\mathbf{E} - \partial_t \mathbf{A}) = \mathbf{0}$.

On introduit donc un potentiel scalaire ϕ tel que :

$$\mathbf{E} - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla\phi. \quad (2.27)$$

L'unicité du couple de potentiels \mathbf{A} , ϕ est finalement obtenue en ajoutant une condition de jauge, les plus utilisées étant la jauge de Lorentz ($\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$) et celle de Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$). Les champs électromagnétiques peuvent tous être déduits de ces deux potentiels dans un milieu conducteur.

Cette formulation est la formulation duale de celle en potentiel vecteur électrique : pour un problème donné, ces deux solutions convergent vers la solution exacte en l'encadrant.

Formulation \mathbf{A}^* Dans le cas où le conducteur est homogène, on peut utiliser une formulation dite en potentiel vecteur modifié qui est définie comme ceci :

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}^* \\ \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.28)$$

et l'on rajoute la jauge de Coulomb dans les milieux non-conducteurs :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}^* = 0.$$

Cette dernière n'est pas nécessaire dans les milieux conducteurs homogènes puisque la jauge implicite $\nabla \cdot (\sigma \mathbf{A}^*) = 0$ est assurée par la définition de \mathbf{A}^* . En effet, en régime harmonique (on choisit une convention en $\exp(-j\omega t)$ des champs électromagnétiques, que l'on utilisera dans tout le manuscrit), on a :

$$\mathbf{J} = j\omega\sigma \mathbf{A}^* \text{ et } \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (2.29)$$

Ainsi, la détermination du seul potentiel vecteur \mathbf{A}^* permet de reconstruire l'ensemble des champs \mathbf{E} seulement en utilisant (2.29) et \mathbf{B} , d'où l'intérêt d'un tel formalisme.

2.3.2 Potentiel vecteur magnétique du Second Ordre

Ce formalisme porte le nom anglais de Second Order Vector Potential (SOVP). Lorsque l'on souhaite calculer les champs créés par une source extérieure dans un conducteur homogène, la formulation en potentiel vecteur modifié semble être le meilleur candidat puisqu'elle conduit à la recherche d'une seule inconnue vectorielle. En effet, si l'on considère une excitation harmonique en $\exp(-i\omega t)$, le problème de magnétodynamique est ramené à la recherche des solutions de l'équation suivante :

$$\Delta \mathbf{A}^* - k^2 \mathbf{A}^* = \mathbf{0}, \quad (2.30)$$

où Δ désigne l'opérateur Laplacien vectoriel et $k^2 = i\omega\mu\sigma$ est le carré du nombre d'onde.

Si l'on se place dans le repère cartésien formé par la base canonique de \mathbb{R}^3 , l'opérateur Laplacien vectoriel appliqué à un champ de vecteurs \mathbf{F} donne :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{F}|_x = \partial_x^2 F_x + \partial_y^2 F_x + \partial_z^2 F_x, \\ \Delta \mathbf{F}|_y = \partial_x^2 F_y + \partial_y^2 F_y + \partial_z^2 F_y, \\ \Delta \mathbf{F}|_z = \partial_x^2 F_z + \partial_y^2 F_z + \partial_z^2 F_z, \end{cases} \quad (2.31)$$

et la résolution de l'équation (2.30) se réduit donc à la résolution de trois équations scalaires indépendantes.

En revanche, dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales (cylindriques, paraboliques, sphériques, etc...), les trois équations scalaires obtenues par projection de l'équation (2.30) sur les vecteurs de base ne sont plus indépendantes. Donnons leurs expressions dans un repère cylindrique (\mathbf{r}, θ, z) de vecteurs de base $(\mathbf{r}, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{F}|_{\mathbf{u}_r} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) F_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta F_\theta, \\ \Delta \mathbf{F}|_{\mathbf{u}_\theta} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) F_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta F_r, \\ \Delta \mathbf{F}|_{\mathbf{u}_z} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \partial_z^2 - \frac{1}{r^2} \right) F_z, \end{cases} \quad (2.32)$$

La résolution d'un tel système couplé de trois équations à trois inconnues pouvant être lourde en pratique, on va introduire deux champs scalaires de l'espace dits potentiels de Hertz. Comme nous allons le voir, le choix judicieux de ces grandeurs va nous permettre de nous ramener à deux équations différentielles découplées (et identiques).

Cette stratégie a été adoptée à plusieurs reprises dans le domaine du contrôle non destructif par courants de Foucault et a donné naissance à des méthodes de calcul des champs primaires très efficaces [Theodoulidis 1997, Theodoulidis 2005]. On se propose d'en donner les principales étapes puisque nous proposons de généraliser cette méthode pour le cas de systèmes de coordonnées curvilignes générales. Nous détaillerons les résultats obtenus dans le cas de repères cylindrique et sphérique qui constitueront un point de validation pour notre formulation.

L'idée charnière est de choisir une direction de décomposition \mathbf{u}_d que l'on nommera longitudinale par abus de langage. Un nouveau potentiel \mathbf{W} est introduit, dont on séparera les composantes transverses de la composante longitudinale. Celui-ci est défini à partir du potentiel vecteur :

$$\mathbf{A}^* = \nabla \times \mathbf{W}, \quad (2.33)$$

et il est décomposé à l'aide de deux nouveaux potentiels scalaires W_a et W_b de la façon suivante :

$$\mathbf{W} = gW_a \mathbf{u}_d + \mathbf{u}_d \times \nabla(gW_b). \quad (2.34)$$

Chapitre 2. Les équations de Maxwell : introduction et présentation de différents formalismes

Ainsi, pour le cas cylindrique (avec une base curviligne définie par $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z)$) par exemple, en choisissant $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_z$ et $g=1$, et en réinjectant l'expression du potentiel vecteur magnétique ainsi obtenu dans l'équation (2.30), on obtient finalement deux équations, identiques et découplées pour W_a et W_b , qui s'écrivent [Jackson 1962, Theodoulidis 1997] :

$$\begin{aligned}\nabla^2 W_a - k^2 W_a &= 0 \\ \nabla^2 W_b - k^2 W_b &= 0.\end{aligned}\quad (2.35)$$

Notons que le signe $-$ est dû à la convention temporelle particulière que nous avons choisie.

À partir de $W_a(r, \theta, z)$ et $W_b(r, \theta, z)$, on peut remonter à toutes les composantes du potentiel vecteur $\mathbf{A}^*(r, \theta, z)$. En effet, par définition, on a :

$$\begin{aligned}A_r^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 W_b}{\partial r \partial z}, \\ A_\theta^* &= -\frac{\partial W_a}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_b}{\partial \theta \partial z}, \\ A_z^* &= \frac{\partial^2 W_b}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_b}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W_b}{\partial \theta^2}.\end{aligned}\quad (2.36)$$

On peut alors exprimer les composantes du champ magnétique $\mathbf{B}(r, \theta, z) = \nabla \times \mathbf{A}^*$ dans tous les domaines (conducteur ou air) :

$$\begin{aligned}B_r &= \frac{k^2}{r} \frac{\partial W_b}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 W_a}{\partial r \partial z}, \\ B_\theta &= -k^2 \frac{\partial W_b}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \theta \partial z}, \\ B_z &= -k^2 W_a + \frac{\partial^2 W_a}{\partial z^2}.\end{aligned}\quad (2.37)$$

On peut aussi calculer les composantes du champ $\mathbf{E}(r, \theta, z) = j\omega \mathbf{A}^*$ dans le milieu conducteur.

Dans les milieux non conducteurs ($\sigma = 0 \Rightarrow k^2 = 0$), les équations (2.35) sont des équations de Laplace. Leurs solutions générales séparables dans un système de coordonnées cylindriques prennent la forme suivante [Theodoulidis 2002] :

$$W_{a,b}(r, \theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_m (C_m I_m(|\alpha r|) + D_m K_m(|\alpha r|)) e^{jm\theta} e^{j\alpha z} d\alpha,$$

où I_m et K_m sont des fonctions de Bessel modifiées de première et seconde espèce respectivement. Dans les domaines conducteurs, on retrouve des équations de Helmholtz ayant pour solutions générales [Moon 1971] :

$$W_{a,b}(r, \theta, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_m (R_m I_m(\alpha_1 r) + T_m K_m(\alpha_1 r)) e^{jm\theta} e^{j\alpha z} d\alpha,$$

avec $\alpha_1^2 = \alpha^2 + k^2$. Le problème est donc ramené à la détermination des coefficients C_m et D_m dans les milieux non-conducteurs ainsi que R_m et T_m dans les milieux

conducteurs. On doit aussi assurer les conditions de passage du champ magnétique au niveau des interfaces entre les différents milieux.

Ainsi, la résolution du problème pour un tube creux d'épaisseur finie et de longueur infinie, dans lequel est placée une bobine cylindrique peut être résumée de la façon suivante :

- Calcul des solutions propres de l'équation (2.35) dans chaque domaine,
- Décomposition modale des potentiels scalaires inconnus : choix d'un nombre de modes et troncature,
- Calcul du champ incident créé par la bobine seule,
- Application des conditions aux limites sur les différentes interfaces → calcul des coefficients des différentes décompositions,
- Calcul de A^* , puis de \mathbf{E} (dans le conducteur) et \mathbf{B} .

Le cas de coordonnées sphériques (de base $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\phi$) est traité de manière analogue. On ne rappellera ici que les expressions des champs en fonction des potentiels afin de disposer d'un point de comparaison avec le formalisme développé. Le potentiel vecteur magnétique du second ordre est, dans ce cas, décomposé de la manière suivante [Theodoulidis 1997] :

$$\mathbf{W} = rW_a\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_r \times \nabla(rW_b), \quad (2.38)$$

c'est-à-dire en posant $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_r$ et $g = r$ dans la décomposition générale présentée ci-dessus, et les composantes du champ \mathbf{B} sont obtenues par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} B_r &= r \frac{\partial^2 W_a}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial W_a}{\partial r} + k^2 r W_a, \\ B_\theta &= \frac{\partial^2 W_a}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \theta} - \frac{k^2}{\sin(\theta)} \frac{\partial W_b}{\partial \phi}, \\ B_\phi &= \frac{1}{\sin(\theta)} \left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial \phi \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_a}{\partial \phi} \right) + k^2 \frac{\partial W_b}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Dans la suite, nous allons voir que ce formalisme peut être étendu à des systèmes de coordonnées curvilignes non orthogonales et qu'il permet ainsi de calculer les courants induits dans des conducteurs homogènes de géométrie complexe en se limitant au calcul numérique des deux potentiels de Hertz. Les équations de Maxwell dans de tels systèmes de coordonnées prennent une forme particulière mettant en jeu les composantes covariantes et contravariantes des champs ainsi que le tenseur métrique de la transformation permettant de passer du système de coordonnées cartésiennes au système de coordonnées curvilignes générales (cf. annexe A).

Les équations de Maxwell covariantes

Sommaire

3.1	Introduction	24
3.2	Notions d'électrodynamique relativiste	24
3.2.1	Quelques rappels sur l'espace de Minkowski	25
3.2.2	Équations de Maxwell-Minkowski	28
3.2.3	Relations de milieu	30
3.3	Cas particulier tridimensionnel	30
3.3.1	Identification des champs tridimensionnels	30
3.3.2	Caractérisation des composantes des tenseurs électromagnétiques	31
3.3.3	Relations de milieu tridimensionnelles	33
3.4	Formulations en potentiels	35
3.4.1	Potentiel Vecteur	35
3.4.2	Potentiel Vecteur du Second ordre	36

3.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les différentes formulations tensorielles des équations de Maxwell et le cheminement conduisant à la formulation tridimensionnelle utilisée dans le cas des coordonnées curvilignes générales qui nous intéresse.

Dans son ouvrage intitulé « Formal Structure of Electromagnetics. General Covariance and Electromagnetics » [Post 1997], E. J. Post étudie l'invariance naturelle par toute transformation de Lorentz de l'équation de propagation des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} dans le vide à l'origine de la théorie de la relativité restreinte d'Albert Einstein (dont nous rappelons ici le cadre mathématique proposé par Minkowski).

Post remarque alors que cette équation n'est plus un invariant de Lorentz lorsque l'on se place dans un matériau diélectrique ou conducteur. L'invariance des équations de propagation est cependant conservée en introduisant les champs \mathbf{B} et \mathbf{D} dans les équations de Maxwell. Ceux-ci sont alors reliés aux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} (cf chapitre précédent) par les relations constitutives du matériau qui ne sont pas invariantes par une transformation de Lorentz mais sont transformées d'une manière particulière. On dit qu'elles sont « covariantes ».

En d'autres termes, l'invariance de Lorentz des équations de Maxwell dans le vide est généralisée par la covariance de Lorentz de l'ensemble des équations de Maxwell et des relations constitutives dans un matériau (cf [chap. 3][Post 1997]).

S'inspirant des travaux de Post, J. Chandezon [Chandezon 1979] s'est intéressé à la façon dont se transformaient les relations constitutives par un changement de coordonnées tri-dimensionnel. Il en a déduit une formulation tensorielle covariante des équations de Maxwell tridimensionnelles (associées aux relations de milieu), faisant intervenir la métrique du changement de coordonnées opéré. Ces équations constituent le fondement théorique de la méthode des coordonnées curvilignes que nous souhaitons utiliser.

Ainsi, après avoir introduit le formalisme quadri-dimensionnel de l'espace-temps de Minkowski, nous détaillerons le cas particulier des transformations tridimensionnelles conduisant aux équations de Maxwell covariantes. Enfin, nous ré-écrivons ces équations en y introduisant le formalisme en potentiels vecteurs (SOVP) que nous généralisons ici.

3.2 Notions d'électrodynamique relativiste

Au début du XX^e siècle, un mathématicien allemand nommé Hermann Minkowski s'intéresse de près aux travaux menés par Albert Einstein, notamment sa théorie de la relativité restreinte. Considérant les équations de l'électrodynamique et les transformations de Lorentz, il s'aperçoit que le temps et les coordonnées d'espace y jouent des rôles analogues. En effet, les transformations de Lorentz sont les premières à impliquer une transformation linéaire du temps, au même titre qu'une coordonnée d'espace qui peut être modifiée de façon linéaire lorsqu'elle est mesurée par un opérateur en mouvement rectiligne uniforme. Il a alors l'idée de considérer

le temps comme une coordonnée à part entière dans un espace à 4 dimensions que l'on connaît sous le nom d'espace-temps ou espace de Minkowski et qui permet de réécrire les équations de l'électrodynamique sous une forme tensorielle.

3.2.1 Quelques rappels sur l'espace de Minkowski

De même que la notion de vecteur émane de la façon dont ces objets sont transformés par toute rotation du système de coordonnées, la notion de quadrivecteur découle de la façon dont ces grandeurs se transforment par une transformation de Lorentz.

3.2.1.1 Transformation de Lorentz et quadrivecteur :

On appelle transformation de Lorentz, la transformation spatio-temporelle suivante :

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}, \\ y' &= y, \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où v est une vitesse supposée constante et c la vitesse de la lumière dans le vide. Cette transformation relie deux systèmes de coordonnées de l'espace-temps qui sont en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre à la vitesse v . Ici, l'axe x a été choisi de sorte que le vecteur vitesse s'écrive $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_x$.

Lorentz a montré que les équations de Maxwell étaient invariantes par toute transformation de ce type ce qui conduisit Einstein à postuler que toutes les lois de la physique devaient être invariantes par ce type de transformation et à corriger les équations de la mécanique classique, ou Newtonienne, afin qu'elles soient invariantes par toute transformation de Lorentz : il aboutit ainsi à sa fameuse théorie de la relativité restreinte.

C'est alors que Minkowski intervient et développe un formalisme mathématique permettant d'écrire de façon simplifiée et plus compréhensible les théories développées par Einstein. Pour ce faire, il introduisit la notion d'espace-temps et de quadrivecteur que nous résumons ici.

L'espace de Minkowski est un espace affine de dimension 4 que l'on notera M_4 . Un quadrivecteur est un objet de M_4 dont la première composante est dite « temporelle » et les trois autres « spatiales ». L'exemple le plus simple est le quadrivecteur position

qui s'écrit

$$x^\mu = [x^0, x^1, x^2, x^3]^T = [ct, x, y, z]^T,$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. Il porte aussi le nom d'« évènement ».

On peut alors réécrire la transformation de Lorentz (3.1) sous forme matricielle. En effet, en posant :

$$\mathcal{L}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$, la transformation spéciale (3.1) s'écrit directement

$$x'^\mu = \mathcal{L}^\mu{}_\nu x^\nu.$$

Nous avons considéré le cas particulier d'une translation uniforme suivant l'axe x mais ce formalisme peut être aisément élargi à toutes les transformations de Lorentz ainsi qu'aux rotations. L'ensemble de ces transformations est alors nommé le groupe de Lorentz complet.

3.2.1.2 Métrique de l'espace-temps :

La forme bilinéaire suivante, notée q , et appliquée ici à deux quadrivecteurs quelconques $a^\mu = [a^0, a^1, a^2, a^3]^T$ et $b^\mu = [b^0, b^1, b^2, b^3]^T$:

$$q(a^\mu, b^\mu) = a^0 b^0 - (a^1 b^1 + a^2 b^2 + a^3 b^3), \quad (3.2)$$

est d'un intérêt tout particulier pour l'espace-temps de Minkowski, puisque bien que n'étant pas définie positive, elle joue le rôle de produit scalaire pour cet espace.

En effet, la définition même de la notion de vecteur repose sur deux points :

- tous les vecteurs se transforment de la même manière par une rotation du système de coordonnées,
- la norme d'un vecteur est invariante dans n'importe quel système de coordonnées.

La généralisation de ces deux points est obtenue pour les quadrivecteurs. En effet, les composantes d'un quadrivecteur quelconque $a^\mu = [a^0, a^1, a^2, a^3]^T$ sont transformées de la manière suivante par la transformation de Lorentz (3.1) :

$$a'^\mu = \mathcal{L}^\mu{}_\nu a^\nu, \quad (3.3)$$

et toute grandeur vectorielle de dimension 4 se transformant de cette manière est nommée quadrivecteur. On dit aussi que c'est un covariant de Lorentz (qui diffère des invariants de Lorentz tels que le temps propre).

Pour un quadrivecteur a^μ , la quantité $q(a^\mu, a^\mu) = (a^0)^2 - ((a^1)^2 + (a^2)^2 + (a^3)^2)$ est invariante par toute transformation de Lorentz. Elle constitue le carré de la pseudo-norme de a^μ dans M_4 . En particulier, on a l'égalité :

$$ds^2 = c^2 dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

où ds est l'intervalle élémentaire dans M_4 , qui permet de définir une métrique propre à M_4 puisque l'on définit le tenseur métrique associé par :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ et } g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

On a donc bien : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

3.2.1.3 Tenseurs et pseudo-tenseurs

Nous avons vu que la définition de quadrivecteur émane directement de la façon dont ces quantités se transforment par le groupe de Lorentz. Nous avons vu également qu'une fois que l'on a choisi un système de coordonnées ainsi qu'une base covariante, on pouvait représenter les tenseurs par leurs composantes. Mais comment savoir si un ensemble de coefficients est un tenseur ? Cette question est très importante dans le cadre de l'électrodynamique relativiste (et dans celui de la physique en général) puisqu'avant de développer les équations régissant le comportement de grandeurs physiques telles que les potentiels, les champs électromagnétiques, etc... il nous faut leur donner une structure mathématique.

Encore une fois, le caractère tensoriel d'un ensemble de coefficients est déterminé par son comportement sous une transformation décrite par une matrice. On considère pour simplifier des tenseurs d'ordre deux et la transformation définie par la donnée de sa matrice de changement de base : $A^\lambda_{\lambda'}$ et son déterminant Δ .

Par définition, un ensemble de coefficients $T_{\lambda\beta}$ se transformant en suivant la règle :

$$T_{\lambda'\beta'} = A^\lambda_{\lambda'} A^\beta_{\beta'} T_{\lambda\beta} = A^\lambda_{\lambda'} A^\beta_{\beta'} T_{\lambda\beta}, \quad (3.5)$$

représente les composantes covariantes d'un tenseur.

On définit aussi les pseudo-tenseurs, qui vérifient la loi de transformation suivante :

$$T_{\lambda'\beta'} = \text{signe}(\Delta) |\Delta| A^\lambda_{\lambda'} A^\beta_{\beta'} T_{\lambda\beta}, \quad (3.6)$$

et qui présentent un poids ± 1 qui est donné par le signe du déterminant Δ de la matrice de changement de base (c'est le jacobien dans le cas d'un repère naturel).

De plus, nous manipulerons dans la suite un objet particulier dont les composantes sont invariantes par toute transformation. Il s'agit du tenseur-densité de Lévi-Civita dont les composantes dans un espace à n dimensions sont données par :

$$\xi^{1\dots n} = \begin{cases} +1, & \text{pour une permutation paire des indices } 1 \dots n \\ -1, & \text{pour une permutation impaire des indices } 1 \dots n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

En particulier, dans un espace de dimension 3, où nous l'utiliserons, ces composantes vérifient :

$$\xi^{ijk} = \det \left(\begin{bmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{bmatrix} \right) . \quad (3.7)$$

Dans son ouvrage portant sur le caractère intrinsèquement covariant des équations de Maxwell, E. J. Post [Post 1997] a observé la façon dont se transformaient les différentes grandeurs physiques mises en jeu dans les équations de Maxwell. Il en a déduit un classement des grandeurs physiques mises en jeu dans les équations de Maxwell-Minkowski que nous présentons succinctement dans la prochaine section.

3.2.2 Équations de Maxwell-Minkowski

Afin de réécrire les équations de Maxwell dans l'espace à 4 dimensions, Minkowski a construit différents objets mathématiques à partir des grandeurs physiques intervenant dans les équations de Maxwell classiques.

La première grandeur est le quadri-potentiel-vecteur, noté A^μ dont les composantes contravariantes sont définies par [Feynman 1969, chap. 25] :

$$\mathcal{A}^\mu = [A^0, A^1, A^2, A^3]^T = [\phi/c, \mathbf{A}]^T, \quad (3.8)$$

où ϕ est le potentiel scalaire électrostatique et \mathbf{A} le potentiel vecteur classique. On montre que ce quadri-potentiel se transforme en vérifiant les formules de transformations des quadrivecteurs (3.3). C'est donc bien un quadrivecteur.

À partir de A^μ , on peut construire une grandeur d'ordre deux, que l'on note $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ et qui vérifie :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu, \quad (3.9)$$

où le signe ∂_μ désigne la dérivée partielle par rapport à la composante contravariante de l'évènement x^μ , *i.e.* $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$. \mathcal{F} est un tenseur d'ordre deux antisymétrique. Par définition des potentiels scalaire et vecteur classiques (cf (2.26) et (2.27)), on peut écrire directement que :

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1/c & -E_2/c & -E_3/c \\ -E_1/c & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2/c & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3/c & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

où les indices 1, 2 et 3 désignent les composantes spatiales des champs E et B dans la base de l'espace de Minkowski. Cette base étant orthonormée, on ne distingue pas ici les composantes covariantes ou contravariantes. C'est pourquoi tous les indices sont écrits en bas (ceci est faux pour un système non-orthogonal comme nous l'expliquons dans la suite). Cette étude sera faite lorsque nous nous intéresserons à des systèmes de coordonnées non-orthogonales. On peut vérifier que l'égalité (3.9), contient à elle seule les deux relations (2.26) et (2.27).

La première équation de Maxwell-Minkowski découle de la relation (3.9) et s'écrit :

$$\partial_\kappa F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\kappa\mu} + \partial_\mu F_{\nu\kappa} = 0. \quad (3.11)$$

Elle traduit le fait que le tenseur électromagnétique dérive d'un (quadri)potentiel vecteur (le terme de droite de la relation (3.9) n'est autre que la généralisation du rotationnel en dimension 4) et donc que sa divergence doit être nulle.

La seconde équation de Maxwell-Minkowski fait intervenir deux autres quantités analogues. On introduit donc un quadrivecteur contenant les éventuelles sources de charges et de courant. On pose donc :

$$\mathcal{J}^\mu = [c\rho, \mathbf{J}], \quad (3.12)$$

où ρ et \mathbf{J} sont respectivement la densité volumique de charge et la densité de courant classiques. De même que le quadri-potential-vecteur, on montre que \mathcal{J}^μ est bien un quadrivecteur.

Comme précédemment, on construit aussi un objet d'ordre deux défini par :

$$G^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & D_1/c & D_2/c & D_3/c \\ D_1/c & 0 & H_3 & -H_2 \\ D_2/c & -H_3 & 0 & H_1 \\ D_3/c & H_2 & -H_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

où les composantes D_α et H_α correspondent respectivement aux composantes du vecteur déplacement électrique et champ magnétique. Post a montré que cet objet était un pseudo-tenseur d'ordre 2.

La deuxième équation de Maxwell-Minkowski s'écrit alors :

$$\partial_\nu G^{\mu\nu} = \mathcal{J}^\mu. \quad (3.14)$$

Il est relativement aisé de montrer que l'équation (3.11) contient à la fois les équations de Maxwell-Thomson et de Maxwell-Faraday, tandis que (3.14) contient directement les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère. Il reste un point que nous n'avons pas abordé afin que l'équivalence soit complète : la condition de jauge portant sur les potentiels. La condition de jauge de Lorentz prend une forme très simple en dimension 4, puisqu'elle s'écrit directement :

$$\partial_\mu \mathcal{A}^\mu = 0. \quad (3.15)$$

Remarque : dans cette présentation des équations de Maxwell-Minkowski, les tenseurs et pseudo-tenseurs sont représentés soit par leurs composantes covariantes, soit par leurs composantes contravariantes. Lorsque l'on travaille dans un système de coordonnées orthogonales tel que l'espace de Minkowski, le passage d'une représentation à l'autre est immédiat puisque le tenseur métrique est diagonal. Ici, il suffit donc de changer le signe des composantes spatiales des tenseurs introduits. Dans la suite, ces équations seront considérées dans des systèmes de coordonnées plus complexes (car non-orthogonaux) où l'on verra que la notation tensorielle prend tout son sens.

3.2.3 Relations de milieux

De même que l'on a écrit les équations de Maxwell classiques sous forme tensorielle dans l'espace de Minkowski, on doit écrire les relations de milieux dans cet espace. Pour ce faire, on suppose qu'il existe une relation entre les deux tenseurs \mathcal{F} et \mathcal{G} , qui s'écrit :

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\Xi^{\mu\nu\rho\sigma}\mathcal{F}_{\rho\sigma}, \quad (3.16)$$

où l'objet Ξ est un pseudo-tenseur d'ordre 4. Cette relation permet donc de généraliser les relations de milieu exprimées au chapitre 2 dans un espace tridimensionnel.

En raison des propriétés d'antisymétrie de \mathcal{F} et \mathcal{G} , le pseudo-tenseur Ξ possède des propriétés de symétrie particulières. En effet, on a [Post 1997, chap 6] :

$$\Xi^{\lambda\nu\sigma\kappa} = -\Xi^{\lambda\nu\kappa\sigma}, \quad \Xi^{\lambda\nu\sigma\kappa} = -\Xi^{\nu\lambda\sigma\kappa},$$

et

$$\Xi^{\lambda\nu\sigma\kappa} = \Xi^{\sigma\kappa\lambda\nu}.$$

3.3 Cas particulier tridimensionnel

À partir des résultats précédents, il nous est possible d'obtenir une formulation tensorielle tridimensionnelle des équations de Maxwell. On se place alors dans \mathbb{R}^3 muni de sa base canonique et de son produit scalaire canonique.

3.3.1 Identification des champs tridimensionnels

On a vu que les composantes non-nulles des tenseurs \mathcal{F} et \mathcal{G} s'identifiaient avec les composantes spatiales des champs électromagnétiques. Cette identification prend la forme suivante :

$$\begin{cases} E_i = cF_{0i}, \\ B^i = \frac{1}{2}\xi^{ijk}\mathcal{F}_{jk}, \\ D^i = cG^{0i}, \\ H_i = \frac{1}{2}\xi^{ijk}\mathcal{G}^{jk}, \end{cases} \quad (3.17)$$

où ξ désigne l'indicateur de Lévi-Civita que l'on a déjà défini(cf. (3.7)).

En présence de sources, on identifie aussi les composantes du quadrivecteur \mathcal{J} :

$$\begin{cases} \rho = c\mathcal{J}^0 \\ J_i = \mathcal{J}^i \end{cases} \quad (3.18)$$

Les équations de Maxwell covariantes tri-dimensionnelles s'écrivent donc en utilisant ces identifications :

$$\begin{cases} \xi^{ijk}\partial_j E_k = -c\partial_0 B^i = -\partial_t B^i, \\ \partial_i B^i = 0, \\ \xi^{ijk}\partial_j H_k = c\partial_0 D^i + J^i = \partial_t D^i + J^i, \\ \partial_i D^i = \rho. \end{cases} \quad (3.19)$$

Rappelons que ces équations ont été obtenues dans l'espace de Minkowski, c'est-à-dire avec des vecteurs de base de type spatial orthogonaux. Elles ne diffèrent donc en rien des équations de Maxwell tridimensionnelles classiques écrites dans un système orthonormé, si ce n'est par leurs notations tensorielles. Cependant, c'est bien ce caractère tensoriel qui va nous permettre de les transposer à un système de coordonnées non-orthogonales obtenu par une transformation de la base orthonormée spatiale.

Dans ce cas, il est important de préciser si les composantes des champs mises en jeu dans les équations (3.19) sont covariantes ou contravariantes (elles étaient confondues dans l'espace de Minkowski). En effet, la position des indices que nous avons adoptée ici n'a pas été justifiée.

3.3.2 Caractérisation des composantes des tenseurs électromagnétiques

E. J. Post et J. Chandezon [Chandezon 1979] ont donné la structure tensorielle des composantes des champs \mathcal{F} et \mathcal{G} que nous avons identifiées aux composantes spatiales des champs électromagnétiques. Pour ce faire, la stratégie est toujours la même : on observe comment sont transformées ces composantes, le postulat de base étant que $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ et $\mathcal{G}^{\mu\nu}$ sont respectivement les composantes covariantes et contravariantes de deux tenseurs d'ordre deux de l'espace de Minkowski. Ajoutons qu'on se limite ici à des transformations spatiales et holonômes, c'est-à-dire pouvant être représentées par des matrices agissant sur les vecteurs de base de type spatial uniquement.

Autrement dit, la caractérisation de ces composantes dans ce cadre se ramène à l'étude de leur transformation par un changement de base à 4 dimensions, représenté par une matrice de changement de base de la forme :

$$\tilde{A}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & A^i{}_j & \\ 0 & & & \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

où A^i_j est une matrice de changement de base tri-dimensionnelle. Sa matrice inverse est notée C^i_j .

Chandezon donne les résultats de l'étude de ces transformations sur les différentes composantes des champs :

	Comportement	Type de composante	Type d'objet
E_i	$E'_j = A^i_j E_i$	covariantes	tenseur
H_i	$H'_j = A^i_j H_i$	covariantes	tenseur
B^i	$B'^j = \Delta C^j_i B^i$	contravariantes	pseudo-tenseur
D^i	$D'^j = \Delta C^j_i D^i$	contravariantes	pseudo-tenseur

On se propose d'en faire la démonstration pour les composantes E_i . Ce n'est qu'un exercice calculatoire, mais il permet de faire apparaître explicitement l'influence des hypothèses que l'on a formulées quant aux transformations que l'on considère dans le cadre de cette étude (pour rappel : holonomie et invariance temporelle) et donc le domaine de validité de celle-ci.

On recherche donc comment les composantes \mathcal{F}_{0i} sont modifiées par le changement de base défini par la matrice \tilde{A}^μ_ν . On part du postulat que \mathcal{F} est un tenseur et donc que ses composantes sont transformées suivant la règle de transformation des tenseurs. On a donc :

$$\mathcal{F}'_{\kappa\lambda} = \tilde{A}^\mu_\kappa \tilde{A}^\nu_\lambda \mathcal{F}_{\mu\nu}. \quad (3.21)$$

On s'intéresse aux composantes du type \mathcal{F}'_{0i} , avec $i = 1, 2, 3$. En développant, on a alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_{0i} = & \tilde{A}^0_0 \left(\tilde{A}^0_i \mathcal{F}_{00} + \tilde{A}^1_i \mathcal{F}_{01} + \tilde{A}^2_i \mathcal{F}_{02} + \tilde{A}^3_i \mathcal{F}_{03} \right) \\ & + \tilde{A}^1_0 \left(\tilde{A}^0_i \mathcal{F}_{10} + \tilde{A}^1_i \mathcal{F}_{11} + \tilde{A}^2_i \mathcal{F}_{12} + \tilde{A}^3_i \mathcal{F}_{13} \right) \\ & + \tilde{A}^2_0 \left(\tilde{A}^0_i \mathcal{F}_{20} + \tilde{A}^1_i \mathcal{F}_{21} + \tilde{A}^2_i \mathcal{F}_{22} + \tilde{A}^3_i \mathcal{F}_{23} \right) \\ & + \tilde{A}^3_0 \left(\tilde{A}^0_i \mathcal{F}_{30} + \tilde{A}^1_i \mathcal{F}_{31} + \tilde{A}^2_i \mathcal{F}_{32} + \tilde{A}^3_i \mathcal{F}_{33} \right) \end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée en remarquant d'une part que $\tilde{A}^i_0 = \delta^i_0$ donc seule la première ligne est conservée, puis que $\mathcal{F}_{\mu\mu} = 0$, $\forall \mu$, ce qui conduit finalement à :

$$\mathcal{F}'_{0i} = \tilde{A}^1_i \mathcal{F}_{01} + \tilde{A}^2_i \mathcal{F}_{02} + \tilde{A}^3_i \mathcal{F}_{03},$$

soit finalement en identifiant les termes du tenseurs électromagnétique dans les deux bases :

$$E'_i = \tilde{A}^j_i E_j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

ce qui conduit, en remarquant que $\left[\tilde{A}^j_i \right]_{i,j \neq 0} = A^j_i$, à :

$$E'_i = A^j_i E_j.$$

Le même traitement peut être appliqué pour les autres composantes des tenseurs champs électromagnétiques.

3.3.3 Relations de milieu tridimensionnelles

En appliquant la même démarche, on se propose d'obtenir des relations de milieu tridimensionnelles à partir de l'équation (3.16) et des identifications des composantes de \mathcal{F} et \mathcal{G} que l'on vient de faire, de sorte à obtenir une formulation générale des relations (2.13) à (2.15) dans un système de coordonnées quelconque.

Suivant la démarche de Chandezon, on définit donc deux tenseurs ε et χ de composantes ε^{ij} et χ_{ij} , d'ordre 2 définis à partir de Ξ de la façon suivante :

$$\varepsilon^{ij} = \Xi^{0i0j}, \text{ et } \chi_{ij} = \xi_{ijk}\xi_{jmn}\Xi^{klmn}. \quad (3.22)$$

Après calcul, on a finalement :

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon^{ij} E_j, \\ H_i &= \chi_{ij} B^j. \end{aligned}$$

soit finalement en posant $\mu^{ij} = \chi_{ij}^{-1}$, on obtient les relations de milieu classiques de l'espace à trois dimensions :

$$\begin{aligned} D^i &= \varepsilon^{ij} E_j, \\ B^j &= \mu^{ij} H_j. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Si le milieu considéré est conducteur, on peut introduire un tenseur de conductivité d'ordre 2, dont les composantes contravariantes seront notées σ^{ij} et on a :

$$J^i = \sigma^{ij} E_j. \quad (3.24)$$

On a donc obtenu les relations de milieu sous une nouvelle forme tensorielle. Une question s'impose alors : qu'ont-elles de plus intéressant que les équations (2.13) à (2.15) ? La réponse réside dans la façon dont on a construit ces relations : on est parti d'un formalisme portant sur des tenseurs et pseudo-tenseurs de l'espace de Minkowski et on en a déduit des relations dans l'espace tridimensionnel. Ainsi, bien que le système de coordonnées spatiales considéré pour l'obtention de ces relations soit composé de vecteurs de bases orthogonaux (il s'agit de l'espace tridimensionnel issu de l'espace de Minkowski), celles-ci restent invariantes par toute transformation spatiale. En d'autres termes, elles restent valables pour des systèmes de coordonnées non-orthogonales.

On voit alors la différence majeure entre les relations tensorielles explicitées ici et celles que l'on considère classiquement puisque ici, le caractère tensoriel transcrit à la fois les propriétés physiques du milieu ainsi que le système de coordonnées général dans lequel on a choisi de travailler.

De la même façon que pour les champs électromagnétiques, on peut caractériser le comportement tensoriel des tenseurs que l'on vient d'introduire. Résumons ceci dans le tableau suivant en conservant la même notation pour la matrice de changement de base A et son inverse C :

	Comportement	Type de composante	Type d'objet
ε^{ij}	$\varepsilon'^{mn} = \Delta C^m{}_i{}^n{}_j \varepsilon^{ij}$	2-contravariantes	pseudo-tenseur
μ^{ij}	$\mu'^{mn} = \Delta C^m{}_i{}^n{}_j \mu^{ij}$	2-contravariantes	pseudo-tenseur
χ_{ij}	$\chi'_{mn} = \Delta A^i{}_m{}^j{}_n \chi_{ij}$	2-covariantes	pseudo-tenseur

Cas particulier d'un milieu conducteur homogène et isotrope : Dans le cas où l'on est en présence d'un milieu homogène isotrope, les tenseurs que l'on vient d'introduire prennent une forme particulière. En effet, dans le cadre classique, les équations (2.13) à (2.15) deviennent :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \quad (3.27)$$

où ε , μ et σ sont des grandeurs scalaires. On s'est ici placé dans un système de coordonnées cartésiennes orthonormé. Suivant J. Chandezon [Chandezon 1979], on peut donc réécrire ces relations sous la forme (les composantes covariantes et contravariantes sont confondues pour un système orthonormé) :

$$D^i = \varepsilon \delta^{ij} E_j, \quad (3.28)$$

$$B^i = \mu \delta^{ij} H_j, \quad (3.29)$$

$$J^i = \sigma \delta^{ij} E_j. \quad (3.30)$$

Comme $g^{ij} = \delta^{ij}$ pour un système orthonormé, on peut écrire que l'on a :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \delta^{ij} = \varepsilon g^{ij}, \quad (3.31)$$

$$\mu^{ij} = \mu \delta^{ij} = \mu g^{ij}, \quad (3.32)$$

$$\sigma^{ij} = \sigma \delta^{ij} = \sigma g^{ij}, \quad (3.33)$$

dans ce cas particulier.

Si on applique un changement de coordonnées quelconque, de matrice de changement de base $A^i{}_j$ et de tenseur métrique inverse g'^{ij} , et si l'on considère le comportement pseudo-tensoriel des tenseurs de propriétés physiques et les lois de transformation des tenseurs, on a :

$$\varepsilon'^{mn} = |\Delta| A^m{}_i{}^n{}_j \varepsilon^{ij}, \quad (3.34)$$

ou, si la transformation est appliquée au système de coordonnées cartésien :

$$\varepsilon'^{mn} = \varepsilon |\Delta| A^m{}_i{}^n{}_j g^{ij} = \varepsilon |\Delta| g'^{mn}. \quad (3.35)$$

Finalement, si l'on considère un repère naturel, dont la matrice de changement de base est la jacobienne de la transformation, on a

$$\Delta = \sqrt{g},$$

ce qui conduit finalement à une expression générale des tenseurs ε^{ij} , μ^{ij} et σ^{ij} :

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon \sqrt{g} g^{ij}, \quad (3.36)$$

$$\mu^{ij} = \mu \sqrt{g} g^{ij}, \quad (3.37)$$

$$\sigma^{ij} = \sigma \sqrt{g} g^{ij}. \quad (3.38)$$

Cas particulier d'un milieu conducteur non-homogène et isotrope : Il est tout à fait possible à ce stade de considérer un matériau non-homogène, qui présenterait par exemple une conductivité variant dans l'espace : $\sigma(x, y, z)$ (ou une permittivité ou une perméabilité ou les trois variant simultanément) dans le repère cartésien orthonormé. En effet, nous avons déjà dit que lorsque l'on se plaçait dans un repère naturel, les bases covariantes et contravariantes dépendaient du point où celles-ci étaient calculées et que le tenseur métrique était en réalité un champ de tenseur (les composantes de g dépendent des coordonnées d'espace). Ainsi, les relations précédentes restent valables dans le cas plus général où les propriétés physiques du matériau ne sont plus des constantes scalaires mais des fonctions scalaires des variables de l'espace.

Cas particulier d'un milieu conducteur homogène et anisotrope : On considère ici le cas où le matériau est anisotrope et plus particulièrement, où il présente une conductivité différente suivant la direction considérée. Ce cas est très intéressant puisqu'il peut représenter un matériau composite homogénéisé.

Dans ce cas, on représente la conductivité par un tenseur d'ordre deux dans le système cartésien orthonormé :

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}.$$

Les formules de changement de base donnent alors :

$$\bar{\sigma}'^{mn} = |\Delta| A^m{}_i{}^n{}_j \bar{\sigma}^{ij}.$$

Ce type de transformation est particulièrement utilisé pour modéliser le comportement des métamatériaux [Diatta 2012] et pourrait aussi permettre d'utiliser ce formalisme afin de calculer les champs induits dans un matériau composite homogénéisé. Cependant, dans le cadre de ma thèse, je me suis restreint aux matériaux isotropes.

3.4 Formulations en potentiels

3.4.1 Potentiel Vecteur

On se propose ici de développer un nouveau formalisme des équations de Maxwell covariantes qui est basé sur l'introduction d'un potentiel vecteur \mathbf{A} , analogue

au potentiel \mathbf{A}^* . La différence majeure réside dans le fait que l'on considère ici des relations plus générales car tensorielles entre le potentiel et le champ dérivant de ce potentiel.

On se place dans un milieu conducteur homogène, et l'on écrit de façon analogue à la théorie classique que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Les formules des opérateurs différentiels dans des systèmes de coordonnées non-orthogonaux généraux, et plus particulièrement pour des systèmes de coordonnées naturels (c'est le cas qui nous intéresse) sont rappelées dans l'annexe A. On en déduit directement l'expression des composantes contravariantes de \mathbf{B} :

$$B^k = -\partial_i A_j h^{ijk}, \quad (3.39)$$

où les h^{ijk} sont les composantes contravariantes du tenseur d'orientation défini dans l'annexe A.

3.4.2 Potentiel Vecteur du Second ordre

On peut alors de façon analogue définir un potentiel-vecteur du second ordre \mathbf{W} :

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W},$$

et de même que précédemment, décomposer ce potentiel suivant un axe privilégié \mathbf{u} en introduisant deux potentiels scalaires Γ et Π (tenseurs d'ordre 0), qui sont la généralisation à des repères naturels quelconques de W_a et W_b :

$$\mathbf{W} = \Pi \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \nabla \Gamma. \quad (3.40)$$

De même que précédemment, on se propose de développer l'expression des composantes de \mathbf{A} en fonction de Γ et Π . Pour ce faire, on utilise les expressions des opérateurs gradient et rotationnel ainsi que du produit vectoriel dans des systèmes de coordonnées naturels.

3.4.2.1 Expression des composantes de \mathbf{W}

Posons $\mathbf{l} = \nabla \Gamma$ et $\mathbf{z} = \mathbf{u} \times \mathbf{l}$. Les formules du gradient nous permettent d'écrire :

$$l_i = \partial_i \Gamma,$$

et celles du produit vectoriel :

$$z^k = h^{kij} u_i l_j,$$

soit finalement :

$$z^k = h^{kij} u_i \partial_j \Gamma. \quad (3.41)$$

On peut donc écrire directement :

$$W^k = \Pi u^k + h^{kij} u_i \partial_j \Gamma, \quad (3.42)$$

et $W_p = g_{pk} W^k$, g étant le tenseur métrique de la transformation.

3.4.2.2 Expression des composantes de \mathbf{A}

Les composantes de \mathbf{A} se déduisent directement du résultat précédent en appliquant l'opérateur rotationnel à \mathbf{W} . En effet, on a par définition :

$$A^p = -\partial_n W_m h^{mnp}.$$

En injectant les expressions de W_j obtenues, on peut donc écrire :

$$A^p = -\partial_n g_{mk} W^k h^{mnp} = -\partial_n g_{mk} \left(\Pi u^k + h^{kij} u_i \partial_j \Gamma \right) h^{mnp},$$

soit finalement en remarquant que $g_{mk} u^k = u_m$, on obtient :

$$A^p = -\partial_n \left(\Pi u_m + g_{mk} h^{kij} u_i \partial_j \Gamma \right) h^{mnp}, \quad (3.43)$$

qui constitue une généralisation aux systèmes de coordonnées naturels non-orthogonaux du formalisme en potentiel vecteur du second ordre.

Afin de vérifier (en partie) cette relation, on se propose de détailler le cas d'un repère cylindrique et de comparer les expressions obtenues avec celles de la littérature que l'on a déjà explicitées dans le chapitre 2. Une justification plus complète sera présentée dans le chapitre suivant.

3.4.2.3 Cas particulier : repère cylindrique

Dans le cas d'un repère cylindrique, le changement de repère naturel par rapport à la base canonique de \mathbb{R}^3 (dont les vecteurs normés seront notés \mathbf{X}_i , $i = 1, 2$ ou 3) où un point M est représenté par ses coordonnées (X^1, X^2, X^3) s'écrit :

$$\begin{cases} X^1 = r \cos(\theta) \\ X^2 = r \sin(\theta) \\ X^3 = z. \end{cases} \quad (3.44)$$

Le point M peut alors être repéré de façon équivalente par la donnée de (r, θ, z) . La matrice jacobienne de ce changement de base s'écrit :

$$J(M) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et l'on peut donc exprimer les vecteurs de la base covariante du repère naturel dans la base canonique :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \cos(\theta) \mathbf{X}_1 + \sin(\theta) \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{e}_2 = -r \sin(\theta) \mathbf{X}_1 + r \cos(\theta) \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3 \end{cases} \quad (3.45)$$

on peut noter que les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 correspondent respectivement à \mathbf{e}_r et $r \mathbf{e}_\theta$ qui forment la base orthonormée du système cylindrique classique. La base naturelle

ainsi obtenue est donc orthogonale mais n'est pas normée : on peut cependant obtenir une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}_3)$ à partir de la base naturelle posant $\mathbf{e}'_2 = \frac{\mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_2\|} = \frac{\mathbf{e}_2}{r}$. On retombe alors sur la base cylindrique « classique ».

Remarque : Ceci soulève un point important lorsque l'on travaille dans des repères naturels : les vecteurs de base n'étant pas forcément normés, les grandeurs physiques que l'on calculera à partir des composantes des champs vectoriels ne seront donc pas directement comparables : une opération de normalisation sera nécessaire. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4, lorsque nous aborderons le calcul de l'impédance d'un capteur inductif à partir des composantes covariantes des champs électromagnétiques.

On calcule maintenant les composantes covariantes du tenseur métrique (notées g_{ij}) que l'on stocke dans une matrice G :

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.46)$$

où l'on voit que $g = \det(G) = r^2$, et ses composantes contravariantes (notées g^{ij}) :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Choisissons le même axe de décomposition que dans le cas classique : $\mathbf{u} = \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3$, ce qui conduit à la définition de deux tenseurs d'ordre 0, Γ et Π . Explicitons alors les composantes contravariantes du potentiel vecteur en utilisant la formule générale (3.43). On se propose de détailler le calcul pour A^1 , les autres composantes étant obtenues de façon analogue :

$$A^1 = -\partial_n \left(\Pi u_m + g_{mk} h^{kij} u_i \partial_j \Gamma \right) h^{mn1}.$$

Les composantes de h^{mnp} étant nulles si l'un des trois indices est répété, A^1 se compose de deux contributions : l'une pour $m = 2, n = 3$, l'autre pour $m = 3, n = 2$. On a :

$$A^1_{(m=2,n=3)} = -\partial_3 \left(\Pi u_2 + g_{2k} h^{kij} u_i \partial_j \Gamma \right) h^{231},$$

qui se simplifie en remarquant que $h^{231} = \frac{1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{r}$ et $u_2 = 0$:

$$A^1_{(m=3,n=2)} = -\frac{1}{r} \partial_3 g_{2k} h^{kij} u_i \partial_j \Gamma,$$

soit en développant les termes de sommation et en remarquant que g est diagonal ($g_{2k} = r^2 \delta_{2k}$) et que $u_i = \delta_{i3}$:

$$A^1_{(m=3,n=2)} = \frac{1}{r} \partial_3 g_{22} (h^{231} u_3 \partial_1 \Gamma) = \partial_3 \partial_1 \Gamma.$$

Suivant le même type de raisonnement, on explicite la contribution pour $m = 3$ et $n = 2$:

$$A_{(m=3,n=2)}^1 = -\partial_2 \left(\Pi u_3 + g_{3k} h^{kij} u_i \partial_j \Gamma \right) h^{321},$$

et l'on a donc :

$$A_{(m=3,n=2)}^1 = \partial_2 \left(\Pi + g_{33} \underbrace{h^{3ij} \delta_{i3}}_{=0} \partial_j \Gamma \right) \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \partial_2 \Pi.$$

Soit finalement :

$$A^1 = -\partial_3 \partial_1 \Gamma + \frac{1}{r} \partial_2 \Pi. \quad (3.48)$$

Le même exercice pour les autres composantes de A donne :

$$A^2 = -\frac{1}{r} \partial_3 \partial_2 \Gamma + \frac{1}{r^2} \partial_1 \Pi, \quad (3.49)$$

et

$$A^3 = \frac{1}{r} \partial_1 \Gamma + \partial_1^2 \Gamma + \frac{1}{r^2} \partial_2^2 \Gamma, \quad (3.50)$$

ce qui conduit, en remarquant que $A_\theta = \frac{1}{r} A_2 = \frac{1}{r} g_{22} A^2 = r A^2$ (on a vu que la base naturelle n'était pas normée), $A_r = A_1 = A^1$ et $A_z = A_3 = A^3$, au même résultat que la littérature.

On pourrait de la même manière expliciter les composantes de \mathbf{B} dans la base cylindrique classique en utilisant ce formalisme tensoriel. Ceci conduit à des calculs lourds que l'on ne mènera pas ici. Dans le chapitre suivant, en revanche, on se propose de résoudre les équations de Maxwell covariantes par une méthode modale faisant intervenir le formalisme en potentiel vecteur généralisé que nous venons de voir. On se placera alors dans un système de coordonnées curvilignes non-orthogonal où l'on exploitera pleinement ce formalisme tensoriel.

Calcul des champs induits dans un demi-espace conducteur de géométrie complexe

Sommaire

4.1	Introduction	42
4.2	Mise en équations	42
4.2.1	Changement de coordonnées	42
4.2.2	Équations Physiques	43
4.2.3	Conditions de passage	45
4.2.4	Décomposition et réduction des équations	46
4.3	Formulation en Potentiels du Second Ordre Généralisée	48
4.3.1	Approche matricielle	48
4.3.2	Approche tensorielle	49
4.3.3	Bilan	56
4.4	Résolution numérique	56
4.4.1	Description du problème et stratégie	56
4.4.2	Ré-écriture de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes	57
4.4.3	Discrétisation	59
4.4.4	Implémentation et troncature	62
4.4.5	Représentation modale	65
4.4.6	Calcul du champ incident	71
4.4.7	Calcul des coefficients	76
4.4.8	Bilan	78
4.5	Calcul de l'impédance de la bobine	78

4.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 1, la simulation rapide du contrôle par courants de Foucault de pièces de géométrie complexe est un sujet de recherche crucial en raison des forts besoins industriels.

Nous proposons ici une méthode modale permettant de calculer les champs induits par une sonde courants de Foucault 3D quelconque (non-magnétique et non blindée) dans un demi-espace conducteur homogène, linéaire et isotrope et présentant une surface complexe. On s'intéresse à des surfaces 2D extrudées, c'est-à-dire que la configuration totale à traiter est dite $2D1/2$. Ce type de configuration est représenté sur la figure 4.1.

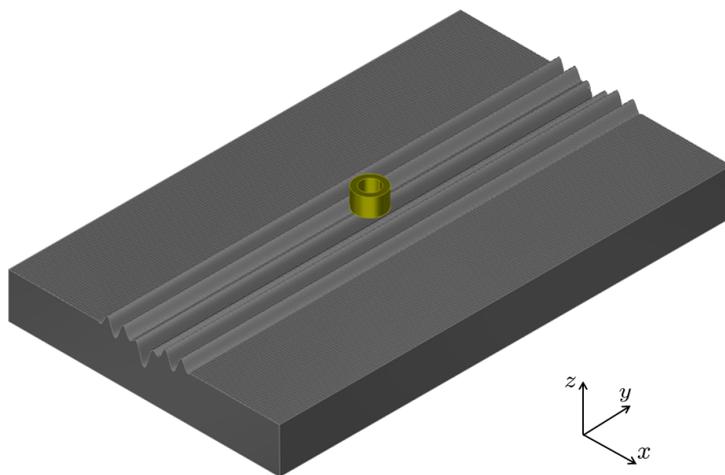


FIGURE 4.1 – Exemple de configuration considérée : une sonde CF 3D scanne un demi-espace 2D extrudé.

4.2 Mise en équations

4.2.1 Changement de coordonnées

On fait l'hypothèse que dans le plan yOz , l'interface air-conducteur s'identifie au graphe d'une fonction $z = \alpha(x)$, dérivable au sens des distributions.

On applique alors le changement de base suivant, dont le rôle principal est de simplifier l'équation de l'interface :

$$\begin{cases} x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 + \alpha(x^1) \end{cases}, \quad (4.1)$$

ce qui conduit à l'obtention d'un nouveau système de coordonnées naturel et non-orthogonal (cf. Annexe A), dans lequel l'équation de l'interface air-conducteur s'écrit

simplement $x^3 = 0$. Les composantes covariantes du tenseur métrique (notées g_{ij}) en un point M repéré par ses coordonnées contravariantes (x^1, x^2, x^3) dans ce nouveau système s'identifient aux coefficients de la matrice G définie par :

$$G = \begin{bmatrix} 1 + (\partial_1 \alpha(x^1))^2 & 0 & \partial_1 \alpha(x^1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_1 \alpha(x^1) & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

où, de même que précédemment, $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$. On voit directement que $g = \det(G) = 1$. Ses composantes contravariantes g^{ij} au même point M s'identifient aux coefficients de la matrice inverse de G :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\partial_1 \alpha(x^1) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\partial_1 \alpha(x^1) & 0 & 1 + (\partial_1 \alpha(x^1))^2 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

et les vecteurs de la base covariante (notés \mathbf{e}_i) s'écrivent de la façon suivante en fonction des vecteurs de la base cartésienne (notés \mathbf{X}_i) :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{X}_1 + (\partial_1 \alpha(x^1)) \mathbf{X}_3 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{X}_2 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{X}_3 \end{cases}. \quad (4.4)$$

Les vecteurs de la base duale ou contravariante s'écrivent quant à eux :

$$\mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}^1 = \mathbf{e}_1 - \partial_1 \alpha(x^1) \mathbf{e}_3 = \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{e}^2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{X}_2, \\ \mathbf{e}^3 = -\partial_1 \alpha(x^1) \mathbf{e}_1 + (1 + (\partial_1 \alpha(x^1))^2) \mathbf{e}_3 \\ \quad = \mathbf{X}_3 - \partial_1 \alpha(x^1) \mathbf{X}_1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté possible, nous désignerons $\partial_1 \alpha(x^1)$ par $\dot{\alpha}$.

4.2.2 Équations Physiques

Les équations de Maxwell, ainsi que les relations de milieu doivent être considérées sous leur forme covariante dans ce nouveau système de coordonnées. Comme nous l'avons déjà vu, les équations de Maxwell covariantes s'écrivent de façon générale :

$$\begin{cases} \xi^{abc} \partial_b E_c = -\partial_t B^a, \\ \partial_a B^a = 0, \\ \xi^{abc} \partial_b H_c = \partial_t D^a + J^a, \\ \partial_i D^i = \rho, \end{cases} \quad (4.6)$$

où $a, b, c = 1, 2$ ou 3 et ξ^{abc} désigne l'indicateur de Lévi-Civita que nous avons déjà introduit, et $J^a = J_s^a + J_i^a$, où J_s désigne la densité de courant au niveau de la sonde (source) et J_i la densité de courants induits au niveau du conducteur.

La densité de courant J_s est imposée au niveau de la sonde et celle-ci est nulle dans toute autre zone de l'espace. On cherche à calculer les champs dans les zones extérieures à la sonde. La densité de courant source peut donc être supprimée des équations que l'on considère. Nous verrons que la prise en compte des champs d'excitation peut être effectuée lors de l'application des conditions de passage (cf section suivante).

De plus, dans le cadre du contrôle non destructif par courants de Foucault classique, le courant d'injection imposé au niveau de la sonde est sinusoïdal de pulsation ω . On travaillera alors en régime harmonique et la dépendance en t des différentes grandeurs physiques sera représentée par le facteur $\exp(-j\omega t)$, avec $j = \sqrt{-1}$. On considère alors les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} \xi^{abc}\partial_b E_c = j\omega B^a, \\ \partial_a B^a = 0, \\ \xi^{abc}\partial_b H_c = J_i^a - j\omega D^a, \end{cases} \quad (4.7)$$

que l'on se propose de résoudre ici. On verra même par la suite que l'on n'aura que deux de ces trois équations à résoudre numériquement.

Les relations de milieu dans le cas d'un matériau homogène, linéaire et isotrope et ne comportant pas de source de courant s'écrivent :

$$\begin{cases} D^a = \varepsilon g^{ab} E_b, \\ B^a = \mu g^{ab} H_b, \\ J_i^a = \sigma g^{ab} E_b, \end{cases} \quad (4.8)$$

où ε , μ et σ désignent respectivement la permittivité électrique, la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du matériau.

On peut alors ré-injecter ces expressions dans les équations (4.7) et l'on obtient des équations portant uniquement sur les composantes covariantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\mu\partial_a g^{ab} H_b = 0, \quad (4.9)$$

$$\xi^{abc}\partial_b E_c = j\omega\mu g^{ad} H_d, \quad (4.10)$$

$$\xi^{abc}\partial_b H_c = (\sigma - j\omega\varepsilon)g^{ad} E_d. \quad (4.11)$$

On pose alors $\tilde{\sigma} = \sigma - j\omega\varepsilon$ afin de simplifier les relations. On peut noter que dans le cadre du contrôle non destructif par courants de Foucault, les ordres de grandeur des conductivités et des fréquences d'excitation mises en jeu permettent d'écrire que $\tilde{\sigma} \simeq \sigma$ dans le milieu conducteur. En revanche, dans l'air, on considèrera que $\tilde{\sigma} = -j\omega\varepsilon$, et non $\tilde{\sigma} = 0$. Ce choix nous permet de développer un formalisme valable à la fois dans l'air et dans le conducteur.

On peut utiliser une notation compacte des deux dernières équations (en rotationnel) en posant : $\tilde{\nabla} = [\partial_1, \partial_2, \partial_3]^T$: attention, il ne s'agit pas de l'opérateur classique exprimé en coordonnées curviligne mais plutôt d'un opérateur ∇ que

l'on qualifera de « naturel ». De même, le symbole \times utilisé ici ne représente pas le produit vectoriel généralisé au système de coordonnées non-orthogonal (cf. Annexe A) mais un produit vectoriel « naturel ». On définit aussi $\mathbf{E}_\bullet = [E_1, E_2, E_3]^T$ et $\mathbf{H}_\bullet = [H_1, H_2, H_3]^T$. Les deux équations peuvent alors être représentées sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\nabla} \times & -j\omega\mu G^\bullet \\ -\tilde{\sigma} G^\bullet & \tilde{\nabla} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\bullet \\ \mathbf{H}_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

que l'on peut symétriser comme suit, en posant $k = \sqrt{j\omega\mu\tilde{\sigma}}$, $Z = \frac{\omega\mu}{k}$ et $\tilde{\mathbf{H}} = jZ\mathbf{H}$, puis en multipliant la deuxième ligne par $\frac{j\omega\mu}{k}$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\nabla} \times & -kG^\bullet \\ -kG^\bullet & \tilde{\nabla} \times \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E}_\bullet \\ \tilde{\mathbf{H}}_\bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

4.2.3 Conditions de passage

Aux équations physiques que doivent satisfaire les champs électromagnétiques s'ajoutent des conditions de passage particulières au niveau de l'interface air-conducteur. On a déjà vu que dans le cas d'un matériau conducteur de conductivité finie, celles-ci s'écrivaient :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^{(1)} - \mathbf{E}^{(2)}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{D}^{(1)} - \mathbf{D}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H}^{(1)} - \mathbf{H}^{(2)}) \times \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{B}^{(1)} - \mathbf{B}^{(2)}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

(1) et (2) désignent respectivement l'air et le milieu conducteur et \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface entre ces deux milieux. Ces relations, qui permettent d'assurer l'unicité des solutions des équations physiques que l'on vient de voir ne sont néanmoins pas exploitables sous cette forme : il faut déterminer exactement quelles composantes (covariantes ou contravariantes) des champs sont conservées à la traversée de l'interface. Pour ce faire, déterminons quelles sont les composantes tangentielles et normales d'un vecteur quelconque \mathbf{u} de composantes (u_1, u_2, u_3) et (u^1, u^2, u^3) .

On a vu que l'on avait :

$$\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i,$$

et, par définition du repère naturel que l'on a choisi, on a (cf. Annexe A) :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i}.$$

Il est donc clair que, par construction, les vecteurs de base \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont tangents à l'interface au point courant M. Ainsi, les composantes tangentielles à l'interface u_{t1}

et u_{t2} d'un vecteur quelconque \mathbf{u} doivent vérifier :

$$u_{t1} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_1 = (u_i \mathbf{e}^i) \cdot \mathbf{e}_1 = u_i \delta_i^1 = u_1,$$

et de même $u_{t2} = u_2$. Les composantes tangentielles d'un champ de vecteurs sur l'interface sont donc les composantes covariantes 1 et 2.

De façon analogue, le calcul de $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$ (en passant par la base cartésienne ou directement en utilisant les formules du produit vectoriel de tenseurs) montre que \mathbf{e}^3 est normal à la surface. La composante d'un champ de vecteur normale à la surface est donc la troisième composante contravariante.

On peut donc écrire les conditions de passage sous la forme :

$$E_1^{(1)} = E_1^{(2)}, \quad (4.13)$$

$$E_2^{(1)} = E_2^{(2)}, \quad (4.14)$$

$$H_1^{(1)} = H_1^{(2)}, \quad (4.15)$$

$$H_2^{(1)} = H_2^{(2)}, \quad (4.16)$$

$$D^{3(1)} = D^{3(2)}, \quad (4.17)$$

$$B^{3(1)} = B^{3(2)}. \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

Elles constituent donc six équations supplémentaires que les champs doivent satisfaire au niveau de l'interface air-conducteur. Nous verrons par la suite qu'en réalité seules quatre de ces équations sont nécessaires. En effet, de même que lorsque l'on travaille dans un repère orthonormé, on peut exprimer les deux composantes des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} suivant cet axe en fonction des quatre autres. C'est l'objet de la section suivante.

4.2.4 Décomposition et réduction des équations

On impose ici une direction de décomposition privilégiée. On choisit naturellement \mathbf{e}^2 qui est l'axe d'invariance de notre specimen. On définit alors les grandeurs :

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_\bullet - E_2 \mathbf{e}^2, \quad (4.20)$$

et

$$\tilde{\mathbf{H}}_t = \tilde{\mathbf{H}}_\bullet - \tilde{H}_2 \mathbf{e}^2. \quad (4.21)$$

L'opérateur naturel ∇ peut être décomposé de manière analogue en écrivant :

$$\tilde{\nabla}_t = \tilde{\nabla} - \partial_2 \mathbf{e}^2. \quad (4.22)$$

Suivant le raisonnement présenté dans [Bowler 1987, Prémel 2012], appliquons alors l'opérateur $\mathbf{e}^2 \times$ à la première ligne de l'équation (4.12). On a donc :

$$\mathbf{e}^2 \times \tilde{\nabla} \mathbf{E}_\bullet = \mathbf{e}^2 \times \left(kG^\bullet \tilde{\mathbf{H}}_\bullet \right), \quad (4.23)$$

et l'on montre (en notant que $G^\bullet e^2 = e^2 = e_2$) que ceci conduit à :

$$\tilde{\nabla}_t E_2 - \partial_2 E_t = e^2 \times (kG^\bullet \tilde{H}_t). \quad (4.24)$$

En faisant de même avec la seconde ligne de (4.12), et en séparant les contributions transverses de celles suivant e^2 , on obtient alors le système compact suivant (cf. [Prémel 2012]) :

$$\begin{bmatrix} \partial_2 & e^2 \times kG^\bullet \\ e^2 \times kG^\bullet & \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_t \\ \tilde{H}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_t & 0 \\ 0 & \tilde{\nabla}_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ \tilde{H}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Afin de découpler les champs E_t et \tilde{H}_t , on peut appliquer l'opérateur :

$$\begin{bmatrix} \partial_2 & -e^2 \times kG^\bullet \\ -e^2 \times kG^\bullet & \partial_2 \end{bmatrix}$$

à la relation (4.25), ce qui conduit à un système du second ordre de la forme :

$$[C] \begin{bmatrix} E_t \\ \tilde{H}_t \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} E_2 \\ \tilde{H}_2 \end{bmatrix},$$

où C et M sont des « matrices » symétriques de taille 4×4 dont les coefficients C_{ij} et M_{ij} s'écrivent :

$$\begin{cases} M_{11} = M_{22} = \partial_2 \tilde{\nabla}_t \\ M_{12} = M_{21} = -(e^2 \times kG^\bullet) \tilde{\nabla}_t \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} C_{11} = C_{22} = \partial_2^2 + e^2 \times (kG^\bullet (e^2 \times kG^\bullet)) \\ C_{12} = C_{21} = \partial_2 (e^2 \times kG^\bullet) - (e^2 \times kG^\bullet) \partial_2. \end{cases}$$

En raison du choix particulier de l'axe de décomposition (e^2), et parce que les composantes du tenseur métrique ne dépendent pas de la variable x^2 , on voit directement que l'on a $C_{12} = C_{21} = 0$ [Prémel 2012]. De plus, on peut montrer que l'on a :

$$\forall \mathbf{u} = u_i e^i, \quad (kG^\bullet (e^2 \times kG^\bullet \mathbf{u})) = \mathbf{u} - u_2 e^2 = \mathbf{u}_t.$$

Ainsi, en développant les différentes expressions, on obtient finalement un système de quatre équations aux dérivées partielles du second ordre non triviales :

$$\begin{cases} (\partial_2^2 + k^2) E_1 = \partial_2 \partial_1 E_2 - k((1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3 - \dot{\alpha} \partial_1) \tilde{H}_2, \\ (\partial_2^2 + k^2) E_3 = \partial_2 \partial_3 E_2 - k(\partial_1 - \dot{\alpha} \partial_3) \tilde{H}_2, \\ (\partial_2^2 + k^2) \tilde{H}_1 = \partial_2 \partial_1 \tilde{H}_2 - k((1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3 - \dot{\alpha} \partial_1) E_2, \\ (\partial_2^2 + k^2) \tilde{H}_3 = \partial_2 \partial_3 \tilde{H}_2 - k(\partial_1 - \dot{\alpha} \partial_3) E_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Finalement, les deux autres équations étant triviales, on peut ré-écrire le système précédent sous la forme compacte suivante (cf. [Prémel 2012]) :

$$(\partial_2^2 + k^2) \begin{bmatrix} E \\ \tilde{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 \tilde{\nabla} & -ke^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} \\ -ke^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} & \partial_2 \tilde{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2 \\ \tilde{H}_2 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

On a donc exprimé toutes les composantes en fonction des deux seules composantes E_2 et H_2 et l'on retrouve les mêmes relations que celles de la littérature [Aït Braham 2008]. Ainsi, on a ramené le problème comportant six inconnues à un problème n'en comportant plus que deux puisque la détermination des seules composantes E_2 et \tilde{H}_2 nous permet de calculer toutes les composantes.

Néanmoins, on voit dans le système (4.27) que la détermination des autres composantes n'est pas directe en raison de la présence de l'opérateur $\partial_2^2 + k^2$.

4.3 Formulation en Potentiels du Second Ordre Généralisée

4.3.1 Approche matricielle

Afin de s'affranchir de ce problème, on peut imaginer qu'il existe deux potentiels du second ordre W_1 et W_2 tels que l'on ait directement :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E} \\ \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2 \tilde{\nabla} & -k\mathbf{e}^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} \\ -k\mathbf{e}^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} & \partial_2 \tilde{\nabla} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Cette approche est détaillée dans [Prémel 2012] et conduit, en posant $W_1 = -j\omega\mu\Gamma$ et $W_2 = jZ\Pi$, aux expressions matricielles suivantes pour les champs :

$$\mathbf{E} = j\omega\mu \tilde{\nabla} \times \left(\mathbf{e}^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} \Gamma + \tilde{\nabla} \times G^\bullet \mathbf{e}^2 \Pi \right), \quad (4.29)$$

et

$$\mathbf{H} = -\tilde{\nabla} \times \left(k^2 G^\bullet \mathbf{e}^2 \Gamma + \mathbf{e}^2 \times G^\bullet \tilde{\nabla} \Pi \right). \quad (4.30)$$

En réinjectant ces expressions dans l'équation (4.12), on peut montrer que les potentiels Γ et Π vérifient tous les deux la même équation aux dérivées partielles :

$$[\partial_1^2 + \partial_2^2 + (1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^2 - (\dot{\alpha}\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha})\partial_3 + k^2] \begin{bmatrix} \Gamma \\ \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

De plus, les expressions des champs (4.29) et (4.30) sont les mêmes que celles obtenues en utilisant le formalisme SOVP appliqué à des systèmes de coordonnées orthogonaux (on peut refaire le même raisonnement en se plaçant dans une base cylindrique naturelle et choisir \mathbf{e}_z comme axe de décomposition).

On peut alors se demander si ces potentiels sont les mêmes que ceux que l'on a introduit par le biais d'un tenseur potentiel vecteur magnétique dans le chapitre précédent. Afin de répondre à cette question et ainsi justifier pleinement la généralisation du formalisme SOVP, on se propose d'utiliser une approche purement tensorielle.

4.3.2 Approche tensorielle

Dans cette section, afin de généraliser le formalisme SOVP, on se propose de repartir des équations physiques générales sous leur forme tensorielle et d'étendre les mêmes raisonnements que ceux présentés dans la littératures [Bowler 1987] aux équations tensorielles. Pour ce faire, on va utiliser les formules des opérateurs différentiels dans des systèmes de coordonnées généraux (cf. Annexe A).

4.3.2.1 Décomposition et calculs tensoriels

Comme précédemment, on choisit un axe de décomposition défini par sa direction $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i = u^i \mathbf{e}_i$. On rappelle que l'introduction d'un tenseur potentiel vecteur magnétique du second ordre \mathbf{W} sous la forme :

$$W^k = W_a u^k + h^{kij} u_i \partial_j W_b, \quad (4.32)$$

et défini à partir du potentiel vecteur magnétique par $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}$, conduit à l'expression suivante pour le potentiel vecteur magnétique (cf. (3.43)) :

$$A^p = -\partial_n \left(W_a u_m + g_{mk} h^{kij} u_i \partial_j W_b \right) h^{mnp}, \quad (4.33)$$

où l'on rappelle que les coefficients h^{mnp} sont les composantes contravariantes du tenseur d'orientation.

En considérant la transformation (4.1), et en choisissant l'axe \mathbf{e}^2 pour axe de décomposition, on montre, en développant la relation précédente, que l'on obtient alors les relations suivantes pour les composantes contravariantes de \mathbf{A} :

$$\begin{cases} A^1 &= \partial_3 W_a + \dot{\alpha} \partial_2 (\partial_3 - \partial_1) W_b \\ A^2 &= [(1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3^2 + \partial_1^2 - (\partial_1 \dot{\alpha} + \dot{\alpha} \partial_1) \partial_3] W_b \\ A^3 &= -\partial_1 W_a + (\dot{\alpha} \partial_1 - (1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3) \partial_2 W_b \end{cases} \quad (4.34)$$

Ses composantes covariantes s'expriment donc comme suit ($A_j = g_{ij} A^i$) :

$$\begin{cases} A_1 &= -\partial_2 \partial_1 W_b + ((1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3 - \dot{\alpha} \partial_1) W_a, \\ A_2 &= A^2, \\ A_3 &= (\dot{\alpha} \partial_3 - \partial_1) W_a - \partial_3 \partial_2 W_b. \end{cases} \quad (4.35)$$

Par définition, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} vérifie $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{A} = j\omega \mathbf{A}$. Ainsi, on peut obtenir les composantes contravariantes de \mathbf{B} en calculant directement le rotationnel de \mathbf{A} dans le système de coordonnées considéré. En effet, on a :

$$(\nabla \times \mathbf{A})^p = -\partial_n A_m h^{mnp},$$

soit, après calculs :

$$\left\{ \begin{array}{l} B^1 = [-(1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^3 + (\partial_1\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\partial_1)\partial_3^2 - \partial_3(\partial_1^2 + \partial_2^2)] W_b + (\partial_1 + \dot{\alpha}\partial_3)\partial_2 W_a, \\ B^2 = [(1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^2 + \partial_1^2 - (\partial_1\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\partial_1)\partial_3] W_a, \\ B^3 = [(1 + \dot{\alpha}^2) - 3(\partial_1\dot{\alpha}) - 2\dot{\alpha}] \partial_3^2 \partial_1 W_a \\ \quad + [2\partial_3^2 \dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha}) - (\partial_1 2\dot{\alpha})\partial_3 + \partial_1^2(\partial_1^2 + \partial_2^2)] W_b. \end{array} \right. \quad (4.36)$$

et les composantes covariantes de \mathbf{B} s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_1 = [(1 + \dot{\alpha}^2)(-(1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^2 + (\partial_1\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\partial_1)\partial_3 - \partial_3(\partial_1^2 + \partial_2^2)) \\ \quad + \dot{\alpha}(2\partial_3^2 \dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha}) - (\partial_1 2\dot{\alpha})\partial_3 + \partial_1^2(\partial_1^2 + \partial_2^2))] W_b \\ \quad + [(1 + \dot{\alpha}^2)(\partial_1 + \dot{\alpha}\partial_3)\partial_2 + \dot{\alpha}((1 + \dot{\alpha}^2) - 3(\partial_1\dot{\alpha}) - 2\dot{\alpha})\partial_3^2 \partial_1] W_a, \\ B_2 = B^2, \\ B_3 = [\dot{\alpha}(-(1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^2 + (\partial_1\dot{\alpha} + \dot{\alpha}\partial_1)\partial_3 - \partial_3(\partial_1^2 + \partial_2^2)) \\ \quad + (2\partial_3^2 \dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha}) - (\partial_1 2\dot{\alpha})\partial_3 + \partial_1^2(\partial_1^2 + \partial_2^2))] W_b \\ \quad + [\dot{\alpha}(\partial_1 + \dot{\alpha}\partial_3)\partial_2 + ((1 + \dot{\alpha}^2) - 3(\partial_1\dot{\alpha}) - 2\dot{\alpha})\partial_3^2 \partial_1] W_a. \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Toujours en suivant le même raisonnement que J. Bowler [Bowler 1987], on calcule maintenant les composantes contravariantes de $\nabla \times \mathbf{B}$ que l'on notera $rotB^p$. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} rotB^1 = [- (1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^3 + (\dot{\alpha}\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha})\partial_3^2 - (\partial_1^2 + \partial_2^2)\partial_3] W_a \\ \quad + [- (1 + \dot{\alpha}^2)\dot{\alpha}\partial_3^3\partial_2 + 3\dot{\alpha}^2\partial_3^2\partial_2\partial_1 + 3\dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3\partial_2 \\ \quad - 3\dot{\alpha}\partial_3\partial_2\partial_1^2 - \dot{\alpha}\partial_3^2\partial_2\partial_1 + (\partial_2^2 + \partial_3^2 - 3\partial_1(\dot{\alpha})\partial_3)\partial_2\partial_1 \\ \quad - ((\partial_1^2\dot{\alpha})\partial_3 - \partial_1^3)\partial_2] W_b, \\ rotB^2 = [- 3(\partial_1\dot{\alpha})^2\partial_3^2 - 12\dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3\partial_1 - 4\dot{\alpha}(\partial_1^2\dot{\alpha}\partial_3^3 \\ \quad - \partial_3\partial_2^2 - \partial_3^4 - 2\partial_3^2\partial_1^2 - \partial_2^2\partial_1^2 - \partial_1^4 \\ \quad + 6(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3^3\partial_1^2 + (\partial_1\dot{\alpha})\partial_3\partial_2^2 + 4(\partial_1^2\dot{\alpha})\partial_1\partial_3 + (\partial_1^3\dot{\alpha})\partial_3 - 2\dot{\alpha}^2 \\ \quad + 4\dot{\alpha}(\partial_3^3\partial_1 + \partial_3^3\partial_1) - (\partial_1^3\dot{\alpha})\partial_3^4 + 4(\partial_1^2\dot{\alpha})\partial_3^3\partial_1 \\ \quad - 6\dot{\alpha}^2\partial_3^2\partial_1^2 - \dot{\alpha}^2\partial_3^2\partial_2^2 + 2\dot{\alpha}\partial_3\partial_2^2\partial_1 + 2(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3^3] W_b, \\ rotB^3 = [3\dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3\partial_2\partial_1 + \dot{\alpha}(\partial_1^2\dot{\alpha})\partial_3\partial_2 - 3\dot{\alpha}^2(\partial_1\dot{\alpha})\partial_2\partial_3^2 - \dot{\alpha}\partial_1^3\partial_2 \\ \quad + \dot{\alpha}^4\partial_3^3\partial_2 - 3\dot{\alpha}^3\partial_3^2\partial_2\partial_1 + 3\dot{\alpha}^2\partial_3\partial_2\partial_1^2 + (1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3\partial_2^3 \\ \quad - \dot{\alpha}\partial_2^3\partial_1 + \partial_3\partial_2\partial_1^2 + \partial_3^3\partial_2 + -(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3^2\partial_2 \\ \quad + 2\dot{\alpha}^2\partial_2\partial_3^2\partial_1] W_b \\ \quad + [(\partial_2^2 + \partial_2^2)\partial_1 + 2\dot{\alpha}(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3^2 + \dot{\alpha}^2\partial_3^2\partial_1 \\ \quad - 3(\partial_1\dot{\alpha})\partial_3\partial_1 - 2\dot{\alpha}\partial_3\partial_1^2 - (\partial_1^2\dot{\alpha})\partial_3 + \partial_1^3] W_a. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

4.3.2.2 Équations physiques

Maintenant que l'on connaît les composantes de $\nabla \times \mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}$ et de \mathbf{A} , considérons l'équation de Maxwell-Ampère sous la forme :

$$\mathbf{e}\mathbf{q} = \nabla \times \mathbf{B} - k^2 \mathbf{A} = 0, \quad (4.39)$$

qui doit être satisfaite par les champs tensoriels (on montre aisément en utilisant la formule du rotationnel en coordonnées naturelles qu'elle est équivalente à la quatrième équation de Maxwell covariante). On va montrer que par un raisonnement analogue à celui présenté dans [Bowler 1987], on peut déduire de tout ce qui précède des équations aux dérivées partielles découplées pour les potentiels scalaires W_a et W_b .

Pour ce faire, la première étape est de calculer la quantité $\mathbf{u} \times \mathbf{e}\mathbf{q}$, où \times désigne le produit vectoriel entre deux tenseurs (on rappelle que $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^k = h^{kij}u_iv_j$ pour des tenseurs d'ordre un et $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = h_{kij}u^iv^j$) et \mathbf{u} est la direction de décomposition (donc \mathbf{e}^2 ici). On notera :

$$\mathbf{e}\mathbf{q}_\times = \mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}\mathbf{q},$$

dont on ne détaillera pas ici l'expression qui est très lourde.

Équation du mode TE (W_a) :

Dans [Bowler 1987], afin d'obtenir une équation portant sur W_a uniquement, les auteurs appliquent l'opérateur divergence tangentielle. Cependant, nous proposons de calculer la divergence totale de $\mathbf{e}\mathbf{q}_\times$ que l'on notera ici $\nabla \cdot \mathbf{e}\mathbf{q}_\times$.

Dans un système de coordonnées variant dans l'espace, les opérateurs différentiels comportent une contribution supplémentaire qui émane de la variation spatiale de la base naturelle. Cette contribution particulière est prise en compte par l'introduction des symboles de Christoffel, notés Γ^k_{ij} (cf Annexe A).

On montre que dans le cas de la transformation considérée ici, seul Γ^3_{11} est non-nul et l'on a :

$$\Gamma^3_{11} = \frac{d^2}{dx^{1^2}}\alpha(x^1) = \frac{d}{dx^1}\dot{\alpha}(x^1).$$

La formule générale de la divergence ne faisant intervenir que les symboles de Christoffel du type Γ^k_{ik} , on voit directement que cette contribution est nulle dans ce cas.

On a donc plus simplement :

$$\nabla \cdot \mathbf{e}\mathbf{q}_\times = \partial_k \mathbf{e}\mathbf{q}_\times^k + \mathbf{e}\mathbf{q}_\times^i \Gamma^k_{ik} = \partial_k \mathbf{e}\mathbf{q}_\times^k,$$

et puisque physiquement on doit avoir $\mathbf{e}\mathbf{q} = \mathbf{0}$, on a *a fortiori* $\nabla \cdot \mathbf{e}\mathbf{q}_\times = 0$.

On montre alors que l'équation $\nabla \cdot \mathbf{e}\mathbf{q}_\times = 0$ ne fait intervenir que le potentiel W_a et qu'elle prend la forme :

$$(d_1^2 + k^2)(d_2^2 W_a) = 0, \quad (4.40)$$

où :

$$d_1^2 = (1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 - (\dot{\alpha} \partial_1 + \partial_1 \dot{\alpha}) \partial_3,$$

et

$$d_2^2 = d_1^2 - \partial_2^2.$$

Il s'agit donc d'une équation aux dérivées partielles d'ordre 4 en W_a .

Équation du mode TM (W_b) :

On poursuit l'analogie avec [Bowler 1987] et on cherche donc une équation portant sur W_b : on va donc calculer le rotationnel de $\mathbf{e}q_\times$. On a déjà vu que les composantes du rotationnel d'un vecteur (tenseur d'ordre 1) \mathbf{v} , de composantes covariantes v_m étaient obtenues par :

$$(\nabla \times \mathbf{v})^p = -\partial_n v_m h^{mnp}.$$

On peut donc calculer les composantes contravariantes de $\nabla \times \mathbf{e}q_\times$ et on en déduit ensuite ses composantes covariantes en effectuant le produit tensoriel avec g_{ij} . Après de lourds calculs, on montre finalement que l'on a :

$$(\nabla \times \mathbf{e}q_\times)_2 = \partial_2 (d_1^2 + k^2) d_2^2 W_b. \quad (4.41)$$

De même que l'on avait $\nabla \cdot \mathbf{e}q_\times = 0$, on a $\nabla \times \mathbf{e}q_\times = \mathbf{0}$ et, en projetant cette équation sur le vecteur de base \mathbf{e}_2 (ou, de façon plus générale sur le vecteur utilisé pour la décomposition du potentiel vecteur), on en déduit donc une équation aux dérivées partielles d'ordre 5 sur W_b , qui prend la forme :

$$\partial_2 (d_1^2 + k^2) (d_2^2 W_b) = 0. \quad (4.42)$$

De même que dans [Bowler 1987], nous avons obtenu deux équations découplées d'ordre 4 et 5, portant respectivement sur W_a et W_b . Afin d'obtenir des solutions à ces équations, nous allons nous restreindre, de façon analogue à la littérature, aux solutions vérifiant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(d_1^2 + k^2)(f) = 0. \quad (4.43)$$

En effet, si f est solution de (4.43), f est solution des deux équations (4.40) et (4.42) puisqu'alors on a $d_2^2(f) = (d_1^2 - \partial_2^2)f = -(k^2 + \partial_2^2)f$ donc :

$$(d_1^2 + k^2)(d_2^2 f) = (d_1^2 + k^2)(-(k^2 + \partial_2^2)f),$$

et comme il est évident que les opérateurs d_1^2 et ∂_2^2 commutent, on a finalement :

$$(d_1^2 + k^2)(d_2^2 f) = -(k^2 + \partial_2^2) ((d_1^2 + k^2)(f)) = 0.$$

On se limitera alors à la recherche des solutions W_a et W_b de (4.40) et (4.42) qui vérifient la même équation d'ordre 2 :

$$[(1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3^2 + \partial_1^2 + \partial_2^2 - (\dot{\alpha} \partial_1 + \partial_1 \dot{\alpha}) \partial_3 + k^2] \begin{bmatrix} W_a \\ W_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

On retrouve exactement la même équation que (4.31), portant sur les potentiels Γ et Π introduits intuitivement.

4.3.2.3 Opérateur de Laplace-Beltrami

Il est intéressant, afin de compléter la généralisation du formalisme SOVP, de calculer l'opérateur Laplacien en coordonnées curvilignes générales qui est communément appelé l'opérateur de Laplace-Beltrami, en hommage à ce mathématicien italien qui l'a introduit au *XIX*^e siècle.

Cet opérateur qui s'applique à un champ scalaire f et dont l'action sur f sera notée Δf permet de généraliser le laplacien pour des systèmes de coordonnées généraux.

Dans un système de coordonnées locales, présentant une métrique g_{ij} , l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit :

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f, \quad (4.45)$$

où $g = \det(g_{ij})$ et g^{ij} désigne les composantes contravariantes du tenseur métrique.

Pour la transformation que nous avons définie ici (cf. (4.1)), la relation générale (4.45) conduit à :

$$\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + (1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3^2 - (\dot{\alpha} \partial_1 + \partial_1 \dot{\alpha}) \partial_3. \quad (4.46)$$

Ainsi, en définissant également l'opérateur Laplace-Beltrami transverse, noté Δ_t et défini ici par $\Delta_t = \Delta - \partial_2^2$, on peut réécrire les équations (4.40) et (4.42) sous la même forme que celles obtenues dans [Bowler 1987] pour le cas particulier d'une géométrie canonique. Il est évident en effet que l'on a :

$$(4.40) \Leftrightarrow (\Delta + k^2) \Delta_t W_a = 0, \quad (4.47)$$

et

$$(4.42) \Leftrightarrow \partial_2 (\Delta + k^2) \Delta_t W_b = 0. \quad (4.48)$$

Ainsi, comme on l'a dit précédemment on se limitera à la recherche des potentiels W_a et W_b solutions de la même équation scalaire :

$$(\Delta + k^2)W = 0,$$

qui est l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes générales.

4.3.2.4 Relations Champs-Potentiels

Nous verrons dans la section suivante la stratégie que nous avons adoptée afin de calculer numériquement les solutions de cette équation aux dérivées partielles. Une fois les solutions obtenues dans les différents domaines considérés (ici l'air et le specimen conducteur), on pourra alors remonter aux quantités physiques qui nous intéressent : les champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{H} . On a vu que la formulation en

potentiel-vecteur modifiée que l'on a utilisée ici est définie par les relations vectorielles :

$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (4.50)$$

$$\mathbf{E} = j\omega \mathbf{A}. \quad (4.51)$$

On se propose dans un premier temps de simplifier les relations entre les composantes des champs que l'on en déduit et les potentiels scalaires introduits avant de les implémenter.

Les expressions des composantes de \mathbf{A} sont détaillées dans (4.35) et (4.34) où l'on peut voir en particulier que l'on a :

$$A^2 = A_2 = \Delta_t W_b.$$

Comme on a vu que W_b devait être solution de l'équation $(\Delta + k^2)W_b = 0$, on peut alors simplifier l'expression de A_2 qui devient directement :

$$A_2 = -(\partial_2^2 + k^2)W_b.$$

Les autres composantes de \mathbf{A} ne seront pas modifiées.

Ceci conduit à une expression plus simple des composantes contravariantes de $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, puisque l'on obtient :

$$\begin{cases} B^1 = k^2 W_b + (\dot{\alpha} \partial_3 \partial_2 - \partial_2 \partial_1) W_a, \\ B^2 = \Delta_t W_a, \\ B^3 = (-(1 + \dot{\alpha}^2) \partial_2 \partial_3 + \dot{\alpha} \partial_2 \partial_1) W_a - k^2 \partial_1 W_b, \end{cases}$$

et l'on peut donc simplifier B^2 de même que A_2 :

$$B^2 = -(\partial_2^2 + k^2)W_a.$$

Finalement, il reste à calculer les composantes covariantes de \mathbf{E} et \mathbf{H} qui sont les grandeurs d'intérêt (car elles sont continues à l'interface).

Les composantes de \mathbf{H} sont obtenues en utilisant la relation de milieu et l'on a :

$$\mathbf{H}_\bullet = \frac{1}{\sqrt{|g|}} G_\bullet \mu^{-1} \mathbf{B}^\bullet,$$

ce qui conduit à :

$$\begin{cases} H_1 = \mu^{-1} [-\partial_2 \partial_1 W_a + k^2 ((1 + \dot{\alpha}^2) \partial_3 - \dot{\alpha} \partial_1) W_b], \\ H_2 = -\mu^{-1} (\partial_2^2 + k^2) W_a, \\ H_3 = \mu^{-1} [-\partial_2 \partial_3 W_a + k^2 (-\partial_1 + \dot{\alpha} \partial_3) W_b]. \end{cases} \quad (4.52)$$

Finalement, on posera $W_a = -\mu\Pi$ et $W_b = \mu\Gamma$, ce qui conduit aux expressions suivantes pour les composantes covariantes des champs électromagnétiques :

$$E_1 = -j\omega\mu[\partial_2\partial_1\Gamma + ((1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3 - \dot{\alpha}\partial_1)\Pi], \quad (4.53)$$

$$E_2 = -j\omega\mu(\partial_2 + k^2)\Gamma, \quad (4.54)$$

$$E_3 = -j\omega\mu[\partial_3\partial_2\Gamma + (\dot{\alpha}\partial_3 - \partial_1)\Pi], \quad (4.55)$$

$$H_1 = \partial_2\partial_1\Pi + k^2((1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3 - \dot{\alpha}\partial_1)\Gamma, \quad (4.56)$$

$$H_2 = (\partial_2^2 + k^2)\Pi, \quad (4.57)$$

$$H_3 = \partial_2\partial_3\Pi + k^2(-\partial_1 + \dot{\alpha}\partial_3)\Gamma. \quad (4.58)$$

On peut vérifier également que la première équation de (4.6) est directement vérifiée en raison du formalisme en potentiel vecteur ($\mathbf{B} = \mathbf{rot}(\mathbf{A})$). De façon analogue, la formulation en potentiel vecteur du second ordre conduit à la définition implicite de la jauge de Coulomb :

$$\partial_a A^a = 0.$$

4.3.2.5 Autres configurations

Nous avons ici détaillé le cheminement conduisant à la généralisation du formalisme en potentiels du second ordre. Pour ce faire, on a fixé la direction de décomposition en posant $\mathbf{u}_d = \mathbf{e}^2$, mais ce n'est pas le seul cas possible.

En effet, considérant d'abord le même type de géométrie, on montre de la même manière que l'on peut effectuer une décomposition suivant la direction \mathbf{e}^3 . En suivant exactement le même raisonnement, ceci conduit à de nouvelles relations champs-potentiels, où les potentiels sont bien entendu différents (on les notera avec un ' pour éviter toute confusion). Ces relations s'écrivent alors :

$$E_1 = -j\omega\mu[-\partial_2\Pi' + (\partial_3\partial_1 + \dot{\alpha}k^2)\Gamma'], \quad (4.59)$$

$$E_2 = -j\omega\mu[\partial_3\partial_2\Gamma' + (\partial_1 - \dot{\alpha}\partial_3)\Pi'], \quad (4.60)$$

$$E_3 = -j\omega\mu(\partial_3^2 + k^2)\Gamma', \quad (4.61)$$

$$H_1 = (\partial_1\partial_3 + \dot{\alpha}k^2)\Pi' - k^2\partial_2\Gamma', \quad (4.62)$$

$$H_2 = \partial_3\partial_2\Pi' + k^2(\partial_1 - \dot{\alpha}\partial_3)\Gamma', \quad (4.63)$$

$$H_3 = (\partial_3^2 + k^2)\Pi'. \quad (4.64)$$

Cette formulation est équivalente à celle obtenue avec une décomposition suivant \mathbf{e}^2 et conduit à la détermination des mêmes solutions modales puisqu'il est évident que l'opérateur de Laplace-Beltrami est inchangé.

4.3.3 Bilan

En s’inspirant du formalisme en potentiel vecteur du second ordre, que l’on a généralisé à un système de coordonnées non-orthogonales présentant une direction d’invariance, on a ramené le problème décrit par le système d’équations (4.6), couplé aux relations de milieu (4.8) comportant 6 inconnues (deux vectorielles) dans chaque domaine, à un problème à deux inconnues scalaires par domaine, ces potentiels étant solutions de la même équation aux dérivées partielles.

Nous allons maintenant détailler la résolution numérique du problème d’intérêt (où l’on a $\alpha(x^1)$) que l’on a effectuée en utilisant une méthode modale. En effet, nous avons ici considéré les équations de Maxwell en l’absence de source : on va rechercher des solutions modales de l’équation de Helmholtz scalaire en coordonnées curvilignes qui vont nous fournir une base optimale pour représenter les solutions réelles. Cette méthode (CCM) a été utilisée, comme nous l’avons vu, afin de calculer les efficacités de réseaux de diffraction éclairés par des ondes planes. La résolution est alors menée sur les composantes de champ directement en séparant les polarisations TE et TM et en exploitant la pseudo-périodicité des solutions recherchées qui sont représentées comme des séries d’harmoniques de Floquet.

Dans le contexte du CNDCF, la source est une sonde inductive 3D localisée : on ne peut plus séparer les polarisations TE et TM lors de l’application des conditions de passage. Le formalisme en potentiels du second ordre nous permet cependant de déterminer des solutions modales séparément : les modes ne sont alors couplés que lors du calcul des coefficients des expansions modales représentant les composantes des champs comme nous allons le voir.

4.4 Résolution numérique

4.4.1 Description du problème et stratégie

Le problème mathématique que l’on a à résoudre est représenté en coupe sur la figure 4.4.1.

En effet, on recherche quatre champs scalaires $(\Gamma_1(x^1, x^2, x^3), \Pi_1(x^1, x^2, x^3))$ dans l’air et $(\Gamma_2(x^1, x^2, x^3), \Pi_2(x^1, x^2, x^3))$ dans le conducteur vérifiant deux à deux la même équation :

$$(\Delta + k_p^2)f = 0, \text{ dans } \Omega_p \tag{4.65}$$

où l’indice p désigne le numéro du milieu (1 pour l’air et 2 pour le conducteur). Nous allons rechercher des solutions modales de ces équations.

De plus, on recherche des solutions de (4.65) vérifiant les conditions de radiations à l’infini, notamment dans la direction x^3 (les bords du type $\partial^{(x^3)}$ sont situés à l’infini). Ces solutions sont repérées par l’indice + dans l’air ($x^3 > 0$) et par l’indice – dans le conducteur ($x^3 < 0$). Nous verrons dans la suite comment elles sont obtenues. Suivant les directions x^1 et x^2 , les bords du domaine (notés $\partial_{\pm}^{(x^1)}$ et $\partial_{\pm}^{(x^2)}$)

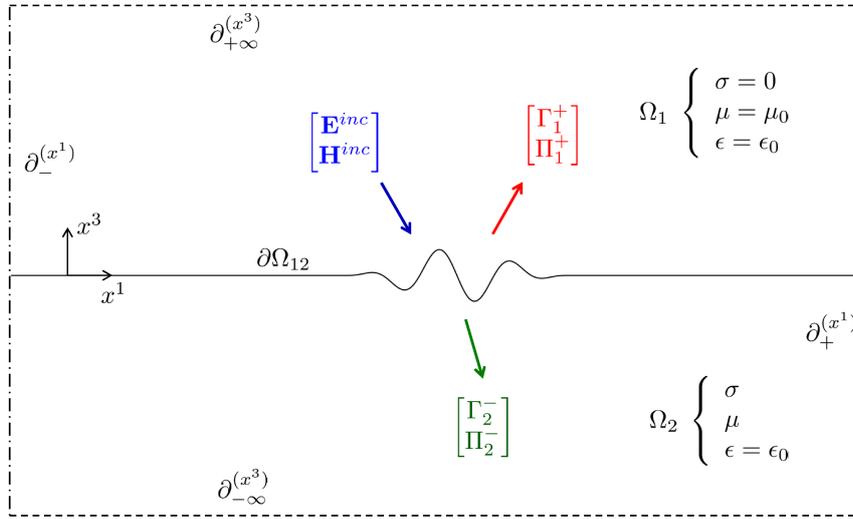


FIGURE 4.2 – Représentation schématique en coupe du problème numérique.

sont quant à eux situés à une distance finie de la source. Des conditions de bords spécifiques seront donc appliquées aux potentiels au niveau de ces bords. On voit donc que le domaine de calcul que l'on considère est un parallélépipède infini dans la direction x^3 .

Le long de l'interface $\partial\Omega_{12}$, on a vu que les composantes des champs devaient vérifier les relations de passage (4.13) à (4.18). Les quatre potentiels doivent donc vérifier des conditions traduisant ces relations de passage et seules quatre équations supplémentaires sont nécessaires. On choisit d'imposer la continuité des composantes covariantes suivant x^1 et x^2 , et en injectant les relations champs-potentiels correspondantes (cf. (4.53) à (4.58)) dans les relations de passage, on obtient (sans oublier la contribution de la source !) quatre relations supplémentaires qui seront explicitées dans la suite de ce document.

Enfin, les champ électromagnétiques d'excitation, désignés par $\mathbf{E}^{(inc)}$ et $\mathbf{H}^{(inc)}$ et créé par la source de courant harmonique est introduit dans l'air. Ces champs seront calculés, suivant le type de sonde considéré, par des modèles semi-analytiques existants.

4.4.2 Ré-écriture de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes

Comme nous l'avons vu, la première étape consiste à déterminer des solutions modales de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes dans chaque do-

maine. Mathématiquement, ceci revient à dire que l'on va rechercher les solutions propres de l'opérateur de Laplace-Beltrami dans le cas particulier des coordonnées curvilignes générales.

On cherche donc les fonctions $\Psi^{(p)}(x^1, x^2, x^3)$ telles que :

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + (1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3^2 - (\dot{\alpha}\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha})\partial_3 + k_p^2)\Psi^{(p)} = 0.$$

En posant $\Phi^{(p)} = \partial_3\Psi^{(p)}$, on peut écrire cette équation du second ordre sous la forme du système du premier ordre augmenté suivant [Chandezon 1980] :

$$\begin{bmatrix} (1 + \dot{\alpha}^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \partial_3 \begin{bmatrix} \Phi^{(p)} \\ \Psi^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\alpha}\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha}) & -(\partial_1^2 + \partial_2^2 + k_p^2) \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi^{(p)} \\ \Psi^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (4.66)$$

Les solutions générales d'un tel système s'écrivent sous la forme [Aït Braham 2008] :

$$\begin{bmatrix} \Phi^{(p)} \\ \Psi^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^{(p)} \\ \psi^{(p)} \end{bmatrix} \exp(j\lambda^{(p)}x^3),$$

où $j = \sqrt{-1}$. $\psi^{(p)}(x^1, x^2)$ et $\phi^{(p)}(x^1, x^2)$ sont solutions de l'équation :

$$\begin{bmatrix} (1 + \dot{\alpha}^2) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \lambda^{(p)} \begin{bmatrix} \phi^{(p)} \\ \psi^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(\dot{\alpha}\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha}) & j(\partial_1^2 + \partial_2^2 + k_p^2) \\ -j & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^{(p)} \\ \psi^{(p)} \end{bmatrix}. \quad (4.67)$$

On voit que l'on a obtenu un comportement d'onde plane dans la direction x^3 et que les solutions du système augmenté (4.66) que l'on recherche s'écrivent sous la forme séparable :

$$\begin{aligned} \Psi^{(p)}(x^1, x^2, x^3) &= \psi^{(p)}(x^1, x^2)e^{j\lambda^{(p)}x^3}, \\ \Phi^{(p)}(x^1, x^2, x^3) &= \phi^{(p)}(x^1, x^2)e^{j\lambda^{(p)}x^3} = j\lambda^{(p)}\Psi^{(p)}(x^1, x^2, x^3). \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que suivant les valeurs de la partie imaginaire de $\lambda^{(p)}$, ces solutions s'atténuent ou divergent lorsque $x^3 \rightarrow \pm\infty$. En effet, en posant $\lambda^{(p)} = \Re(\lambda^{(p)}) + j\Im(\lambda^{(p)})$, on voit que l'on a :

$$\Psi^{(p)}(x^1, x^2, x^3) = \psi^{(p)}(x^1, x^2)e^{j\Re(\lambda^{(p)})x^3}e^{-\Im(\lambda^{(p)})x^3},$$

et donc que le facteur d'amortissement de l'onde est : $e^{-\Im(\lambda^{(p)})x^3}$. On peut donc d'ores et déjà éliminer les solutions non physiques.

Ainsi, dans le milieu Ω_1 , $x^3 \rightarrow +\infty$: on ne conservera que les solutions associées aux $\lambda^{(1)}$ telles que $\Im(\lambda^{(1)}) > 0$ et dans le milieu Ω_2 , on ne conservera que les solutions associées aux $\lambda^{(2)}$ telles que $\Im(\lambda^{(2)}) < 0$. On notera ces valeurs particulières de $\lambda^{(1)}$ et $\lambda^{(2)}$ respectivement $\lambda^{(1)+}$ et $\lambda^{(2)-}$ et leurs solutions associées seront notées $\Psi^{(1)+}$ et $\Psi^{(2)-}$.

Il reste alors à déterminer les solutions $\psi^{(p)}$ et $\phi^{(p)}$ du système (4.67) ainsi que les valeurs de $\lambda^{(p)}$. Nous proposons d'utiliser la méthode des moments afin d'en déduire une approximation discrète sous la forme d'un système matriciel de dimension finie que l'on pourra résoudre numériquement.

4.4.3 Discrétisation

Le système (4.67) est constitué de deux équations aux dérivées partielles couplées.

$$\begin{cases} \lambda^{(p)} c \phi^{(p)} = (\partial_1 \dot{\alpha} + \dot{\alpha} \partial_1) \phi^{(p)} + (\partial_1^2 + \partial_2^2 + k_p^2) \psi^{(p)} \\ \phi_p = j \lambda^{(p)} \psi^{(p)}, \end{cases} \quad (4.68)$$

où l'on a posé $c(x^1) = 1 + \dot{\alpha}(x^1)^2$.

On choisit de discrétiser ce système en utilisant une méthode de Galerkin avec pour fonctions tests et base les fonctions (cette méthode porte aussi le nom de méthode de Fourier) :

$$T_{mn} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x^1, x^2) & \mapsto & e^{j u_m x^1} e^{j v_n x^2}. \end{array}$$

Les grandeurs u_m et v_n (où m et n sont des entiers relatifs) sont respectivement les pulsations spatiales discrètes selon les directions x^1 et x^2 . On fixe donc à ce stade les résolutions spectrales δ_u et δ_v , et l'on considère une infinité de fonctions T_{mn} .

Le choix de ces fonctions de base a été fait d'une part pour des raisons historiques (la méthode C a été développée initialement pour des configurations périodiques, cf [Granet 1995]), et d'autre part car elles permettent une implémentation simple ainsi qu'un temps de calcul réduit pour les applications visées. Il est clair que d'autres fonctions de bases peuvent être envisagées, notamment des polynômes de Legendre ou des B-splines.

On considère aussi le produit scalaire canonique de l'espace des fonctions continues à valeurs dans \mathbb{C} , noté $C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$. On le notera \langle, \rangle et on rappelle sa définition :

$$\forall (f, g) \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})^2, \langle f, g \rangle = \int \int f(x^1, x^2) \bar{g}(x^1, x^2) dx^1 dx^2,$$

où $\bar{g}(x^1, x^2)$ désigne le conjugué du nombre complexe $g(x^1, x^2)$.

Les différentes fonctions inconnues sont donc écrites sous la forme de sommes infinies de fonctions T , c'est-à-dire que les solutions seront approchées par des sommes d'ondes planes (l'indice du milieu p est ici supprimé dans un souci de clarté) :

$$\psi(x^1, x^2) = \sum_k \sum_l \hat{\psi}_{kl} T_{kl}(x^1, x^2), \quad (4.69)$$

$$\phi(x^1, x^2) = \sum_k \sum_l \hat{\phi}_{kl} T_{kl}(x^1, x^2). \quad (4.70)$$

Les inconnues du problème sont donc désormais les coefficients $\hat{\psi}_{kl}$ et $\hat{\phi}_{kl}$.

En réinjectant ces expressions dans les équations (4.68), et en les projetant (au sens du produit scalaire \langle, \rangle) sur la base des mêmes fonctions T_{mn} , on obtient le système d'équations suivant, de taille infinie :

$$\begin{cases} \lambda \langle c\phi, T_{mn} \rangle = \langle (\partial_1 \dot{\alpha} + \dot{\alpha} \partial_1) \phi, T_{mn} \rangle + \langle (\partial_1^2 + \partial_2^2 + k_p^2) \psi, T_{mn} \rangle \\ \langle \phi, T_{mn} \rangle = j\lambda \langle \psi, T_{mn} \rangle, \end{cases} \quad (4.71)$$

Développons alors les différents termes en commençant par $\langle c\phi, T_{mn} \rangle$. Par définition, celui-ci s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle c\phi, T_{mn} \rangle &= \int \int c(x^1) \sum_{k,l} \hat{\phi}_{kl} T_{kl}(x^1, x^2) \bar{T}_{mn}(x^1, x^2) . dx^1 dx^2 \\ &= \sum_{k,l} \hat{\phi}_{kl} \int \int c(x^1) T_{kl}(x^1, x^2) \bar{T}_{mn}(x^1, x^2) dx^1 dx^2 \\ &= \sum_{k,l} \hat{\phi}_{kl} \left(\int e^{j(v_l - v_n)x^2} dx^2 \right) \left(\int c(x^1) e^{j(u_k - u_m)x^1} . dx^1 \right) \\ &= \sum_{k,l} \hat{\phi}_{kl} \delta_{l,n} \int c(x^1) e^{j(u_k - u_m)x^1} dx^1 \\ &= \sum_k \hat{\phi}_{kn} \int c(x^1) e^{j(u_k - u_m)x^1} dx^1 \end{aligned}$$

Les quantités $\int c(x^1) . e^{j(u_k - u_m)x^1} . dx^1$ peuvent être calculées analytiquement pour certaines fonctions $\alpha(x^1)$. Néanmoins, afin de conserver une robustesse importante du code pour les différentes fonctions de profil, on choisit de calculer numériquement ces intégrales. Pour ce faire, on va approcher la fonction $c(x^1)$ par l'expression suivante :

$$c(x^1) = \sum_q \hat{c}_q e^{ju_q x^1},$$

qui ne nécessite qu'une hypothèse d'intégrabilité sur c (on a $\hat{c}_q = \int \bar{T}_q(x^1) c(x^1) dx^1$, qui est la transformée de Fourier de c). Ceci conduit à :

$$\begin{aligned} \langle c\phi, T_{mn} \rangle &= \sum_k \hat{\phi}_{kn} \sum_q \hat{c}_q \int e^{j(u_q + u_k)x^1} . e^{-ju_m x^1} . dx^1, \\ &= \sum_k \hat{\phi}_{kn} \sum_{q'} \hat{c}_{q'-k} \int e^{ju_{q'} x^1} e^{j(-u_m)x^1} . dx^1, \\ &= \sum_k \hat{\phi}_{kn} \sum_{q'} \hat{c}_{q'-k} \delta_{q',m}, \\ &= \sum_k \hat{\phi}_{kn} \hat{c}_{m-k}. \end{aligned}$$

On voit alors apparaître un produit de convolution 1D. On définit donc la matrice de convolution 1D infinie associée à c , que l'on note $C^{(\infty)}$ et qui vérifie :

$$\forall \hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_m)_{m \in \mathbb{Z}} / x_m \in \mathbb{C}, \quad \hat{\mathbf{y}} = C^{(\infty)} \hat{\mathbf{x}} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{Z}, \quad \hat{y}_m = \sum_k \hat{x}_k \hat{c}_{m-k}.$$

On peut donc écrire, pour chaque valeur de n :

$$\langle c\phi, T_{mn} \rangle = C_m^{(\infty)} \hat{\phi}_n,$$

où $\hat{\phi}_n = [\hat{\phi}_{-\infty n}, \dots, \hat{\phi}_{-1n}, \hat{\phi}_{0n}, \hat{\phi}_{1n}, \dots, \hat{\phi}_{+\infty n}]^T$ et $C_m^{(\infty)}$ désigne la $m^{\text{ième}}$ ligne de $C^{(\infty)}$.

Les autres termes sont calculés de manière analogue. On a directement :

$$\begin{aligned} \partial_1 \phi &= \sum_{kl} j u_k \hat{\psi}_{kl} T_{kl}, \\ \partial_1^2 \phi &= - \sum_{kl} (u_k)^2 \hat{\psi}_{kl} T_{kl}, \\ \partial_2 \phi &= \sum_{kl} j v_l \hat{\psi}_{kl} T_{kl}, \\ \partial_2^2 \phi &= - \sum_{kl} (v_l)^2 \hat{\psi}_{kl} T_{kl}, \end{aligned}$$

d'où l'on tire :

$$\begin{aligned} \langle \partial_1^2 \phi, T_{mn} \rangle &= -(u_m)^2 \hat{\phi}_{mn}, \\ \langle \partial_2^2 \phi, T_{mn} \rangle &= -(v_n)^2 \hat{\phi}_{mn}, \end{aligned}$$

et il est évident que :

$$\langle k^2 \psi, T_{mn} \rangle = k^2 \hat{\psi}_{mn},$$

et que :

$$\langle \phi, T_{mn} \rangle - j\lambda \langle \psi, T_{mn} \rangle = 0 = \hat{\phi}_{mn} - j\lambda \hat{\psi}_{mn}.$$

On définit aussi la matrice de convolution de taille infinie associée à $\dot{\alpha}$, et on la note $A^{(\infty)}$. On a donc pour finir :

$$\langle \dot{\alpha} \partial_1 \phi, T_{mn} \rangle = -A_m^{(\infty)} (j\mathbf{u} \hat{\phi}_n),$$

où $\mathbf{u} = \text{diag}([u_{-\infty}, \dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots, u_{+\infty}])$ et

$$\langle \partial_1 \dot{\alpha} \phi, T_{mn} \rangle = -j u_m (A_m^{(\infty)} \hat{\phi}_n).$$

Comme on l'a dit lorsque l'on a introduit C , le calcul de la matrice de convolution associée à $\dot{\alpha}$ ne nécessite qu'une hypothèse d'intégrabilité de $\dot{\alpha}$ (la dérivée est ici définie au sens des distributions). On a en effet :

$$\hat{\alpha}_q = \int \dot{\alpha}(x^1) \bar{T}_q(x^1) dx^1.$$

De plus, le calcul de A nous permet aussi de calculer directement C . En effet, puisque $c(x^1) = 1 + \dot{\alpha}^2$, on peut écrire directement que $C^{(\infty)} = I_d^{(\infty)} + A^{(\infty)} A^{(\infty)}$, où $I_d^{(\infty)}$ est la matrice identité de taille infinie.

Ainsi, pour le cas considéré ici où la pièce est invariante suivant la direction x^2 , on peut résoudre un système pour chaque valeur de n et l'on obtient donc une

infinité de systèmes matriciels de taille infinie à résoudre. Pour chaque valeur de n , le système à résoudre s'écrit d'après ce que l'on vient de dire :

$$\begin{bmatrix} I_d^{(\infty)} + A^{(\infty)}A^{(\infty)} & 0 \\ 0 & I_d^{(\infty)} \end{bmatrix} \lambda \begin{bmatrix} \hat{\phi}_n \\ \hat{\psi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(A^{(\infty)}\mathbf{u} + \mathbf{u}A^{(\infty)}) & j(\mathbf{u}^2 + v_n^2 + k^2) \\ -jI_d^{(\infty)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_n \\ \hat{\psi}_n \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Il est important de noter que si la géométrie considérée est caractérisée par une interface coïncidant avec une fonction 2D $\alpha(x^1, x^2)$, on ne peut plus traiter le problème de façon découplée : il faudrait considérer des produits de convolution 2D, ce qui conduirait à la résolution d'un système global. Dans le cadre de l'application visée, nous nous sommes restreints aux profils 1D.

4.4.4 Implémentation et troncature

Afin de résoudre numériquement le système aux valeurs propres (4.72) de taille infinie, il est nécessaire de se limiter à un nombre fini de fonctions T_{mn} : on effectue donc une troncature de la base d'ondes planes choisie pour représenter les solutions.

On définit donc, en plus des résolutions spectrales δ_u et δ_v , des nombres de modes M_u et M_v dans chaque direction. Il est clair que la précision de la méthode dépend grandement du choix de ces paramètres numériques. De plus, comme nous l'avons vu, l'implémentation nécessite le calcul de la matrice de convolution (tronquée elle aussi) associée à la fonction $\hat{\alpha}(x^1)$. Pour cela, on doit en tout premier lieu calculer les coefficients $\hat{\alpha}_q$ définis à l'aide de la transformée de Fourier 1D :

$$\hat{\alpha}_q = \int \hat{\alpha}(x^1) e^{-ju_q x^1} dx^1.$$

En outre, de même que l'axe spectral, l'axe spatial est discrétisé et borné : on fixe des bornes finies $[x_m^1, x_M^1]$ et $[x_m^2, x_M^2]$ (il s'agit des bords désignés par $\partial_{\pm}^{x^1}$ et $\partial_{\pm}^{x^2}$ sur la figure 4.4.1) et deux résolutions spatiales ∂_x^1 et ∂_x^2 . La transformée de Fourier 1D est alors remplacée par une Transformée de Fourier discrète, et l'on obtient :

$$\hat{\alpha}_q = \sum_{n=0}^{N_1-1} \hat{\alpha}(n\delta x^1) e^{-jqn\delta u \delta x^1} = \sum_{n=0}^{N_1-1} \hat{\alpha}_n e^{-jqn2\pi/N_1},$$

où N_1 est le nombre de points suivant x^1 et $\delta u \delta x^1 = 2\pi/N_1$.

Remarque : On voit alors que l'on « périodise » artificiellement la géométrie et donc les solutions du problème. Il en résulte que les conditions implicites sur les bords $\partial_{\pm}^{x^1}$ et $\partial_{\pm}^{x^2}$ sont des conditions de périodicité : par ce schéma numérique, on impose que les solutions soient périodiques de périodes spatiales $T_1 = x_M^1 - x_m^1$ suivant x^1 et $T_2 = x_M^2 - x_m^2$. Ceci n'est pas gênant si l'on s'assure que les solutions soient nulles sur les bords, c'est-à-dire si l'on choisit un domaine numérique suffisamment grand. Ce point sera discuté lorsque l'on abordera le calcul des champs sources (champs d'excitation rayonnés par la sonde).

Finalement, on construit la matrice de convolution associée à $\hat{\alpha}$ à l'aide des $2M_u + 1$ coefficients $\hat{\alpha}_q$ que l'on a calculés. Pour ce faire, on effectue un bourrage de zéros, c'est à dire que l'on construit un vecteur $[\tilde{\alpha}]$ de la manière suivante :

$$[\tilde{\alpha}] = \underbrace{[0, \dots, 0]}_{\times 2M_u + 1}, \hat{\alpha}_{M_u}, \dots, \hat{\alpha}_{-M_u}, \underbrace{[0, \dots, 0]}_{\times 2M_u + 1},$$

ce qui revient à imposer la nullité des coefficients non calculés (on voit encore l'importance du choix des paramètres numériques). Puis on calcule la matrice de toeplitz construite à partir de $[\tilde{\alpha}]$. On la note \tilde{A} . Cette matrice carrée de taille $3(2M_u + 1)$ est alors tronquée et l'on a finalement :

$$A_{ij} = \tilde{A}_{m_i, n_j}, \text{ avec } \begin{cases} n_j = 3M_u + 1 + j, & j = 1, \dots, 2M_u + 1 \\ m_i = i, & i = 1, \dots, 2M_u + 1 \end{cases}.$$

Il est alors clair que les troncatures opérées nécessitent une attention particulière lors du choix des paramètres numériques, notamment des bornes spectrales puisque c'est dans le domaine de Fourier que l'on effectue le produit de convolution. En effet, le produit de convolution réalisé avec les matrices de convolution ainsi définies ne sera exact que si les fonctions mises en jeu (la dérivée du profil géométrique notamment) possèdent un spectre de largeur suffisamment étroit devant le domaine spectral considéré. Ceci peut être illustré sur l'intervalle $[-1, 1]$ en définissant deux fonctions $f_1(\eta)$ et $f_2(\eta)$, où $\eta \in [-1, 1]$. On choisit, pour illustrer notre propos, des fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= (\sin(2\pi\eta) + \eta^3)e^{-\lambda\eta^2} \\ f_2(\eta) &= e^{-2\eta^2/\sigma}. \end{aligned}$$

Les grandeurs λ et σ sont ici deux paramètres réels qui nous permettent de faire varier le support de f_1 et f_2 afin d'illustrer la précision du calcul d'un produit de convolution à l'aide de notre matrice de convolution. Ces fonctions sont échantillonnées aux points η_n et l'on obtient alors deux vecteurs f_{1n} et f_{2n} dont on veut calculer la convolution numérique $f_1 * f_2$. Cette convolution est alors calculée d'une part à l'aide de la matrice de convolution associée à f_1 et d'autre part avec un produit de convolution numérique classique entre les deux vecteurs. On effectue alors ces calculs pour deux couples de valeurs de σ et λ . Les comparaisons des produits de convolution ainsi que les fonctions considérées sont représentées sur la figure 4.3.

On a ainsi approché les systèmes de taille infinie (4.72) par un ensemble de $M_v + 1$ systèmes matriciels de dimension finie $2(2M_u + 1)$, qui prennent la forme suivante dans le milieu p :

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} \lambda^{(p)} \begin{bmatrix} \hat{\phi}^{(p)} \\ \hat{\psi}^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -j(\mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{u}\mathbf{A}) & j(k_p^2 - \mathbf{u}^2 - v_n^2) \\ -jI_d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}^{(p)} \\ \hat{\psi}^{(p)} \end{bmatrix}, \quad (4.73)$$

où I_d est la matrice identité de taille $2M_u + 1$. On ne considère que $M_v + 1$ systèmes (et non pas $2M_v + 1$) car la fréquence spatiale v_n intervient au carré.

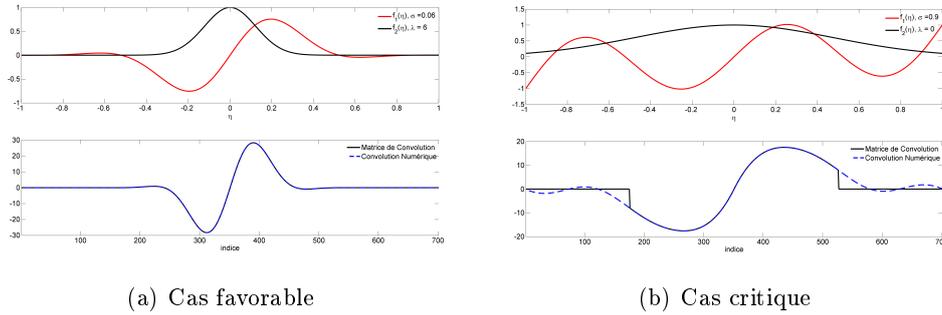


FIGURE 4.3 – Illustration des limites du calcul des convolutions numériques avec une matrice de convolution. En haut nous avons représenté les deux fonctions f_1 et f_2 que l'on souhaite convoluer. En bas, les résultats donnés par une convolution numérique complète et tronquée (matrice de convolution).

On a donc $M_v + 1$ systèmes aux valeurs propres à résoudre dans chaque milieu et chaque système conduit à la détermination de $2M_u + 1$ vecteurs propres et de leurs valeurs propres associées. On effectue ensuite un tri de ces éléments propres en observant le signe de $\Im(\lambda^{(p)})$ suivant le milieu considéré comme on l'a déjà expliqué. Ceci conduit à la suppression de M_u éléments propres dans chaque domaine.

On propose maintenant de donner un exemple des éléments propres obtenus dans une configuration particulière représentée sur la figure 4.4 et de les comparer à ceux obtenus pour un demi-espace présentant une interface plane ($\hat{\alpha} = 0$). On fixe pour cela $v_n = v_0 = 0$ et on s'intéresse en particulier aux vecteurs ψ_{m0} et aux valeurs propres λ_{m0} associées. Les paramètres numériques, choisis selon les critères déjà discutés, et physiques sont rassemblés dans le tableau suivant (où l'on note L_1 la largeur du domaine spatial suivant x^1) :

Paramètre	Valeur
M_u	85
δ_1	0.15 mm
L_1	60 mm
<i>freq</i>	100 kHz
σ	1 MS/m
μ	μ_0
ε	ε_0

Sur la figure 4.5, on a tracé les parties imaginaires des valeurs propres pour $v = 0$ dans le cas du plan et du profil triangulaire. Il est aisé de montrer que les valeurs propres dans le cas où $\hat{\alpha} = 0$ s'écrivent $\lambda_{mn} = \sqrt{j(k^2 - u_m^2 - v_n^2)}$, ce qui pour $v_n = 0$ conduit bien à la droite observée sur la figure 4.5. De plus, on voit que les parties imaginaires les moins grandes tendent vers celles du plan : les

solutions propres associées sont les moins atténuées lorsque l'on se déplace vers les x^3 croissants. Il est en effet logique que les modes existants en profondeur (à plus grande distance de la perturbation géométrique) tendent vers ceux du demi-espace plan.

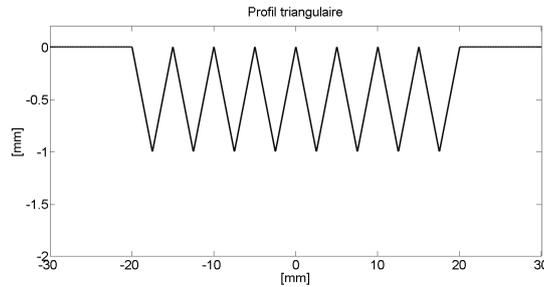


FIGURE 4.4 – Profil considéré (vu en coupe $x^2 = 0$) pour le calcul des éléments propres. On considère 8 périodes de longueur $T = 5 \text{ mm}$ et une profondeur des dents valant 1 mm .

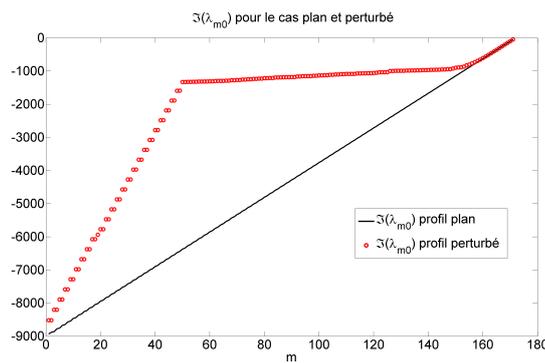


FIGURE 4.5 – Comparaison des parties imaginaires des valeurs propres dans le conducteur (après tri).

Sur les figures 4.6 à 4.13, on a tracé les modules et phases de huit vecteurs propres calculés dans le domaine conducteur pour un profil plan et le profil triangulaire considéré. Les quatre premiers ont été choisis dans une zone « centrale » du spectre, où les parties imaginaires des valeurs propres diffèrent le plus. Les quatre autres vecteurs propres choisis sont les quatre derniers correspondant aux valeurs propres les plus proches.

4.4.5 Représentation modale

Une fois que l'on a obtenu les solutions propres des équations de Helmholtz dans chaque milieu et que l'on en a exclu celles qui n'étaient pas physiquement acceptables, on obtient alors deux bases de fonctions propres dans chaque domaine

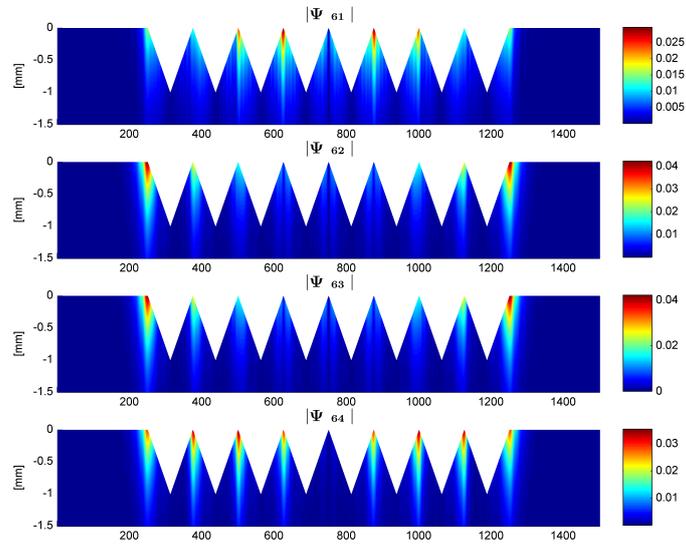


FIGURE 4.6 – Visualisation des modules de quatre modes centraux. Cas du profil triangulaire.

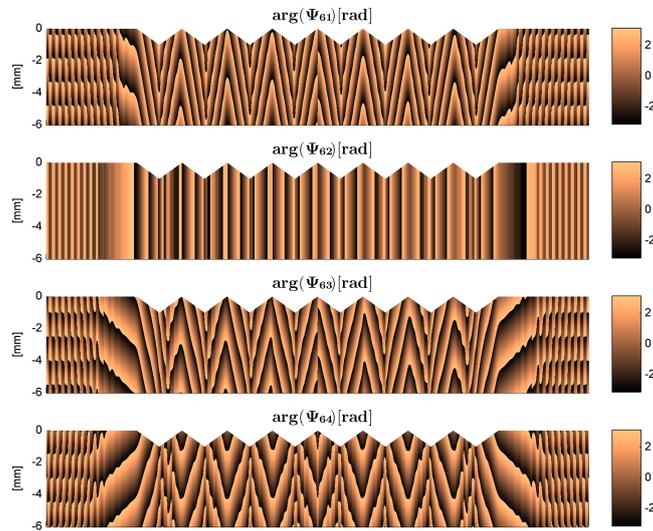


FIGURE 4.7 – Visualisation des arguments de quatre modes centraux. Cas du profil triangulaire.

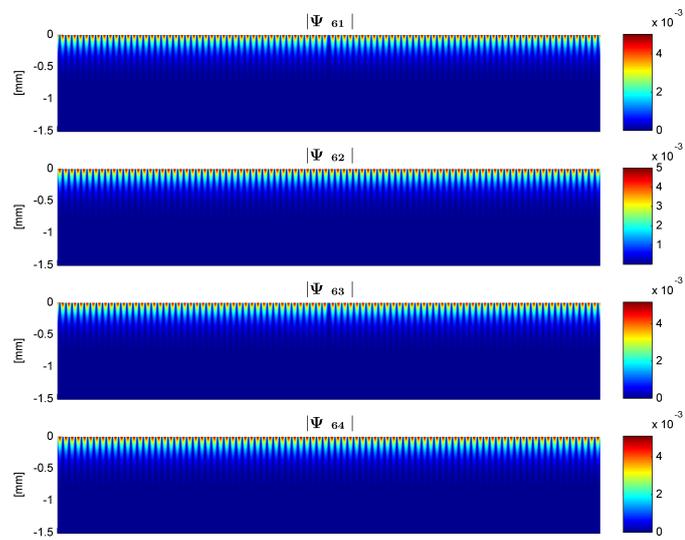


FIGURE 4.8 – Visualisation des modules de quatre modes centraux. Cas du profil plan.

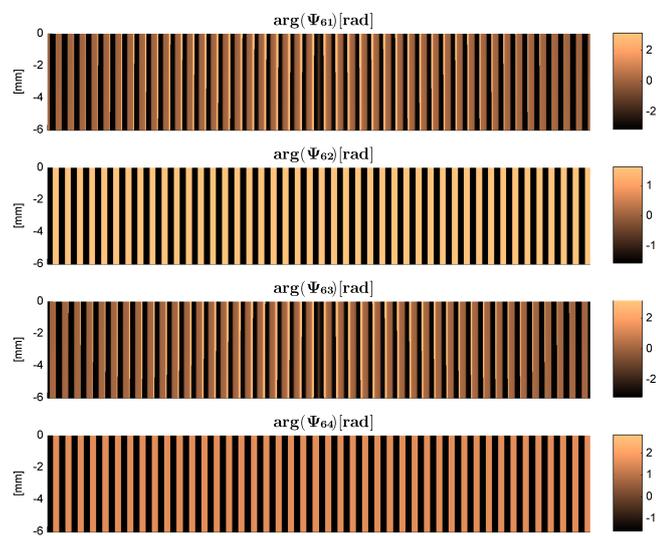


FIGURE 4.9 – Visualisation des arguments de quatre modes centraux. Cas du profil plan.

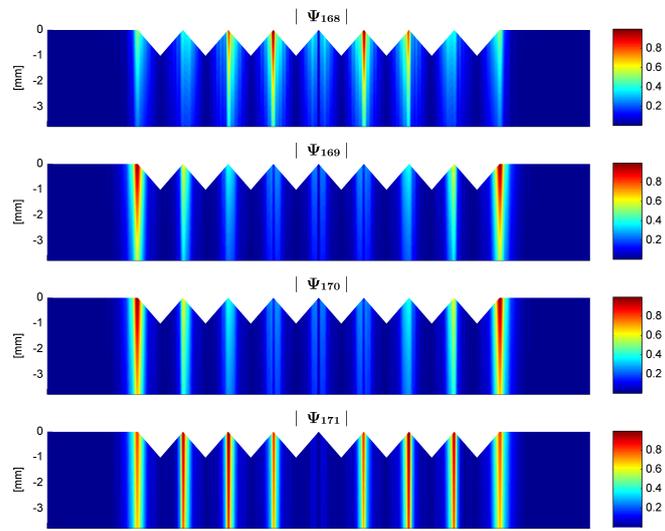


FIGURE 4.10 – Visualisation des modules des quatre derniers modes. Cas du profil triangulaire.

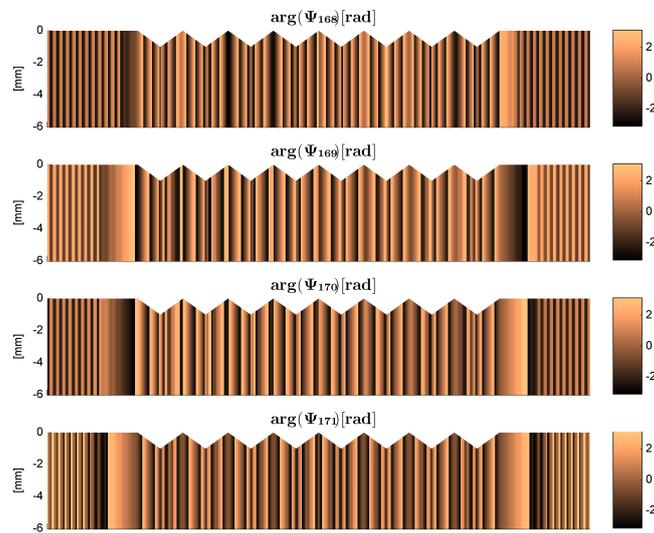


FIGURE 4.11 – Visualisation des arguments des quatre derniers modes. Cas du profil triangulaire.

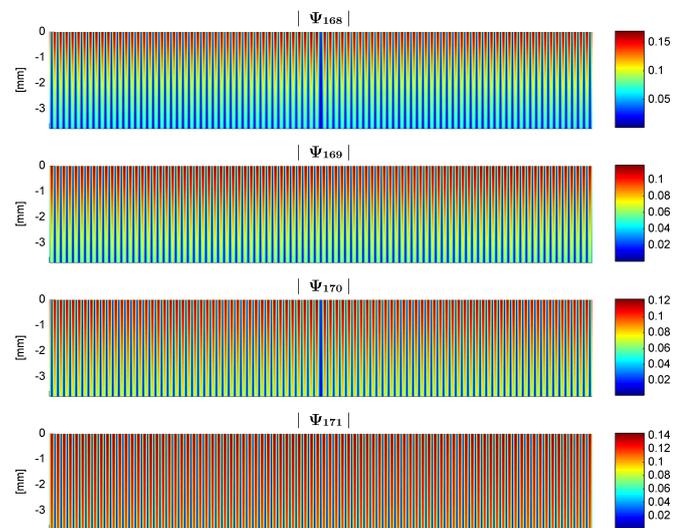


FIGURE 4.12 – Visualisation des modules des quatre derniers modes. Cas du profil plan.

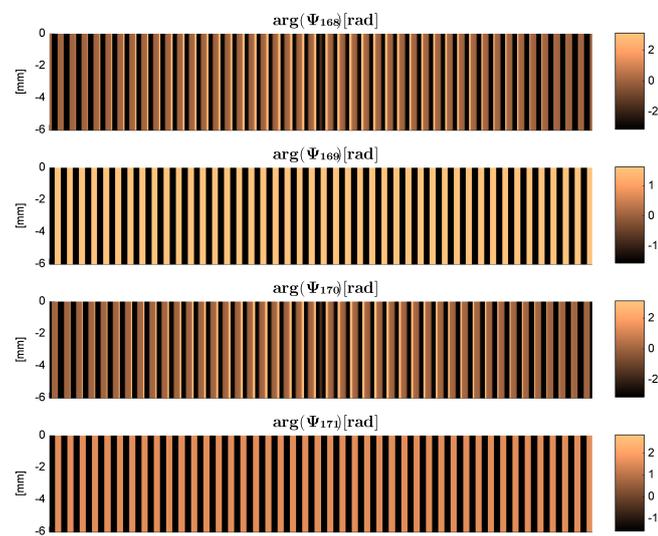


FIGURE 4.13 – Visualisation des arguments des quatre derniers modes. Cas du profil plan.

que l'on notera $\psi_{mn}^{(p)}(x^1, x^2)$ et $\phi_{mn}^{(p)}(x^1, x^2)$, où les indices m et n désignent le numéro de la fonction propre considérée : elles sont au nombre exact de $(M_v + 1)(2M_u + 1)$ dans chaque domaine puisque l'on a $\psi_{mn}^{(p)} = \psi_{m(-n)}^{(p)}$ et $\phi_{mn}^{(p)} = \phi_{m(-n)}^{(p)}$ (la fréquence spatiale v_n intervient au carré dans le système matriciel, ce qui émane du caractère extrudé de la géométrie : ce n'est plus vrai pour une surface complexe 2D). On représente alors les potentiels inconnus comme des expansions modales en utilisant ces fonctions propres et on écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1^+(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \gamma_{mn}^{(1)+} \psi_{mn}^{(1)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(1)+} x^3}, \\ \Pi_1^+(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \pi_{mn}^{(1)+} \psi_{mn}^{(1)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(1)+} x^3}, \end{array} \right. \quad (4.74)$$

dans l'air et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_2^-(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \gamma_{mn}^{(2)-} \psi_{mn}^{(2)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(2)-} x^3}, \\ \Pi_2^-(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \pi_{mn}^{(2)-} \psi_{mn}^{(2)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(2)-} x^3}, \end{array} \right. \quad (4.75)$$

dans le demi-espace conducteur.

On a aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_3 \Gamma_1^+(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \gamma_{mn}^{(1)+} \phi_q^{(1)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(1)+} x^3}, \\ \partial_3 \Pi_1^+(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \pi_q^{(1)+} \phi_{mn}^{(1)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(1)+} x^3}, \end{array} \right. \quad (4.76)$$

dans l'air et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_3 \Gamma_2^-(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \gamma_{mn}^{(2)-} \phi_q(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(2)-} x^3}, \\ \partial_3 \Pi_1^-(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \pi_{mn}^{(2)-} \phi_{mn}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(2)-} x^3}, \end{array} \right. \quad (4.77)$$

dans le demi-espace conducteur. Dans la suite, il sera sous-entendu que les indices m et n prennent des valeurs entières de $-M_u$ à M_u et de $-M_v$ à M_v et les symboles de sommes respectifs seront simplement écrits \sum_m et \sum_n .

Les quantités $\gamma_{mn}^{(p)\pm}$ et $\pi_{mn}^{(p)\pm}$ sont des coefficients inconnus qu'il reste à déterminer afin d'obtenir les solutions du problème complet. Ils sont au nombre exact de $4(2M_v + 1)(2M_u + 1)$ et, afin de les déterminer numériquement, on va construire un

nouveau système d'équations. Celles-ci sont obtenues en écrivant la continuité des composantes tangentielles des champs électromagnétiques à l'interface $x^3 = 0$. En effet, en injectant les représentations modales des potentiels dans les relations différentielles champs-potentiels (4.53) à (4.58), on en déduit des expansions modales des champs dans les différents domaines. On a, en effet :

$$E_1^{(p)} = -j\omega\mu \sum_n \sum_m [\partial_2 \partial_1 \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn} + (c\partial_3 - \dot{\alpha}\partial_1) \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)}] e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.78)$$

$$E_2^{(p)} = -j\omega\mu \sum_n \sum_m (\partial_2 + k^2) \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn} e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.79)$$

$$E_3^{(p)} = -j\omega\mu \sum_n \sum_m [\partial_3 \partial_2 \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn} + (\dot{\alpha}\partial_3 - \partial_1) \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)}] e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.80)$$

$$H_1^{(p)} = \sum_n \sum_m [\partial_2 \partial_1 \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)} + k^2 (c\partial_3 - \dot{\alpha}\partial_1) \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}] e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.81)$$

$$H_2^{(p)} = \sum_n \sum_m (\partial_2^2 + k^2) \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)} e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.82)$$

$$H_3^{(p)} = \sum_n \sum_m [\partial_2 \partial_3 \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)} + k^2 (-\partial_1 + \dot{\alpha}\partial_3) \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}] e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \quad (4.83)$$

où les dépendances en x^1 et x^2 n'ont pas été écrites dans un souci de clarté des formules. On a vu que les composantes E_1 , E_2 , H_1 et H_2 devaient être continues à la traversée de l'interface. Ces conditions supplémentaires conduisent aux $4(2M_v + 1)(M_u + 1)$ relations recherchées qui s'écrivent donc :

$$E_1^{(1)}(x^1, x^2, x^3 = 0) + E_1^{(inc)}(x^1, x^2, x^3 = 0) = E_1^{(2)}(x^1, x^2, x^3 = 0), \quad (4.84)$$

$$E_2^{(1)}(x^1, x^2, x^3 = 0) + E_2^{(inc)}(x^1, x^2, x^3 = 0) = E_2^{(2)}(x^1, x^2, x^3 = 0), \quad (4.85)$$

$$H_1^{(1)}(x^1, x^2, x^3 = 0) + H_1^{(inc)}(x^1, x^2, x^3 = 0) = H_1^{(2)}(x^1, x^2, x^3 = 0), \quad (4.86)$$

$$H_2^{(1)}(x^1, x^2, x^3 = 0) + H_2^{(inc)}(x^1, x^2, x^3 = 0) = H_2^{(2)}(x^1, x^2, x^3 = 0), \quad (4.87)$$

où l'indice (inc) désigne le champ créé par la source. Avant d'expliquer comment ces équations sont résolues, il est indispensable de présenter la stratégie adoptée pour le calcul du champ incident.

4.4.6 Calcul du champ incident

4.4.6.1 Champ dans l'espace libre

Dans un premier temps, le champ incident est considéré comme étant le champ créé par la bobine seule rayonnant dans l'espace libre. Dans le cas d'une bobine cylindrique, on peut calculer ce champ en utilisant une méthode analytique formulée dans [Moon 1971] où il est démontré que le potentiel vecteur créé par une telle bobine dans l'air s'écrit dans un repère cylindrique $\mathbf{A}_s = \nabla \times W_{as} \mathbf{e}_z$, avec :

$$W_{as}(r, \theta, z) = D_S \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_m K_m(|a|r) e^{jm\theta} e^{jaz} da, \quad (4.88)$$

où D_S désigne un coefficient dépendant de la géométrie de la bobine et du courant d'excitation (voir [Theodoulidis 2002] pour le détail du calcul de D_S) et K_m

désignent les fonctions de Bessel modifiées de deuxième espèce. Ainsi, connaissant $\mathbf{A}_s(r, \theta, z)$, on est capable de calculer les composantes des champs créés par ce type de bobine en tout point de l'espace, et plus particulièrement le long de l'interface $z = a(x)$ ou $x^3 = 0$. Cependant, nous avons choisi de discrétiser le système d'équations traduisant la continuité des composantes tangentielles en utilisant la même stratégie que précédemment, c'est-à-dire par une méthode de Galerkin en utilisant des fonctions de base exponentielles complexes. Il est donc nécessaire, afin de construire le second membre, de calculer les transformées de Fourier discrètes des composantes covariantes des champs incidents et la précision de cette opération (ou sa réversibilité) dépend grandement de l'expansion spatiale de ces champs ainsi que de leur contenu spectral.

Sur la figure 4.14, nous avons représenté le module de la composante E_x dans le domaine spatial, du champ créé par une bobine cylindrique formée de $N = 328$ spires dont les rayons externe et interne valent 1.6 mm et 1.0 mm respectivement. Le courant d'excitation est de 1 A et la fréquence vaut 100 kHz. On représente ici le champ calculé sur un plan horizontal situé sous une bobine, à une distance de 0.3 mm. On remarque que son support est très important devant le rayon de la bobine, ce qui conduit à une taille de domaine numérique très importante suivant x^1 et x^2 et donc à un nombre de fonctions de base (et donc un nombre de modes) important afin de s'assurer que la transformée de Fourier discrète de ce champ est bien calculée.

En effet, la résolution spectrale étant définie par $\delta_u = 2\pi/L_1$ (et de façon analogue suivant x^2), où L_1 représente la longueur du domaine spatial considéré, il est clair que le choix de L_1 influe grandement sur la précision du calcul de la transformée de Fourier discrète : plus L_1 sera grand et meilleure sera la résolution spectrale. Mais pour un nombre de fonctions M_u donné, augmenter L_1 conduit aussi à tronquer le spectre de la transformation de Fourier discrète ce qui peut conduire à de fortes pertes d'information.

La précision de ce calcul est illustrée sur la figure 4.15, où l'on a tracé l'erreur ξ , définie par :

$$\xi = \frac{\int \int |\mathcal{TF}^{-1}(\mathcal{TF}(E_x(x^1, x^2)))| - |E_x(x^1, x^2)| \cdot dx^1 dx^2}{\int \int |E_x(x^1, x^2)| \cdot dx^1 dx^2} * 100$$

en fonction de M (on a choisi pour illustrer ce point $M_u = M_v = M$). On a au préalable fixé la valeur de L_1 et L_2 à 90 mm et les résolutions spatiales δ_{x^1} et δ_{x^2} à 0.16 mm.

On peut voir que l'erreur décroît lentement et qu'il est nécessaire de conserver un nombre assez important de modes (> 80) afin d'obtenir une erreur inférieure à 0.1 %, ce qui conduit à une taille importante des matrices et donc à une réduction des performances du code. Afin de réduire ce nombre de modes, on propose donc une méthode de perturbation.

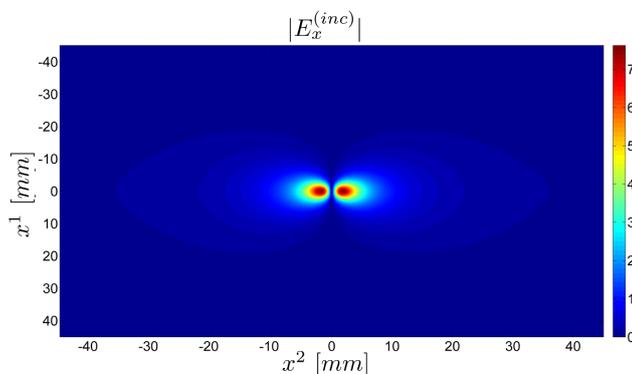


FIGURE 4.14 – Module de la composante E_x du champ électrique créé par une bobine dans l'espace libre. Cette quantité est calculée sur un plan horizontal, perpendiculaire à l'axe de la bobine et situé à 1 mm de celle-ci.

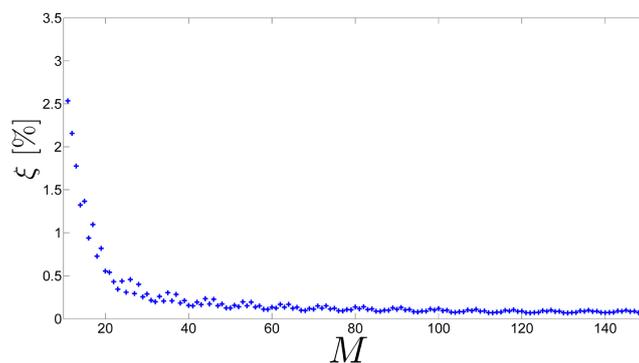


FIGURE 4.15 – Erreur introduite par le calcul de la transformée de Fourier du champ source en espace libre en fonction du nombre de fréquences spatiales considérées.

4.4.6.2 Problème de perturbation

La méthode de perturbation consiste à remplacer le champ créé par la source dans l'espace libre par le champ total obtenu dans une configuration « proche » de celle d'intérêt. Ceci conduit à ne calculer, *in fine*, que la variation des solutions par rapport à la configuration de référence choisie, ce qui nécessite un nombre de modes moins important : une partie de l'information est en effet contenue dans le champ de référence. Cette méthode a été utilisée à plusieurs reprises dans l'étude des réseaux de diffraction, notamment au travers de la méthode de source géné-

ralisée [Tishchenko 1998, Shcherbakov 2010] et également pour la modélisation de configurations de contrôle non destructif par courants de Foucault [Sabariego 2007] où elle a permis d’augmenter la vitesse de convergence des modèles utilisés.

Pour la configuration qui nous intéresse, on choisit une géométrie de référence canonique afin d’utiliser un modèle de calcul des champs de référence performant. En effet, des méthodes de calcul semi-analytique des champs dans des configurations canoniques ont déjà été implémentées au laboratoire : on utilise le modèle bien connu de Dodd et Deed [Dodd 1968] pour calculer les champs de référence lorsque l’on considère une sonde cylindrique et afin de traiter le cas de sondes de géométries plus complexes, la sonde est décomposée en cellules trapézoïdales élémentaires dont l’expression analytique du champ est connue [I Babic 2005], ce qui permet, par superposition, de calculer les champs totaux créés par des sondes de formes plus complexes [Theodoulidis 2006, Reboud 2012] éclairant des pièces de géométrie plane.

Afin d’illustrer dans un premier temps le gain apporté par cette méthode de perturbation, nous avons représenté sur la figure 4.16 le champ créé par la même bobine cylindrique sur le même plan horizontal que lors du calcul dans l’espace libre. De plus, nous avons considéré un demi-espace conducteur de conductivité 1 MS/m situé à une distance de 1 mm au dessous de la sonde. Le champ observé est donc la somme du champ incident dans l’espace libre et du champ réfléchi par la plaque. Celui-ci présente une expansion spatiale très inférieure puisque le champ créé par les courants induits dans la pièce tend à réduire la source lui ayant donné naissance.

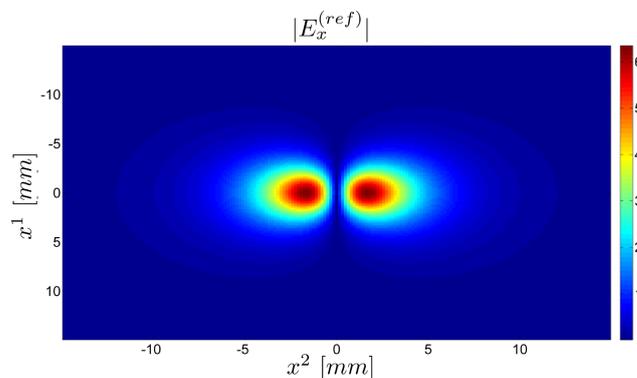


FIGURE 4.16 – Module de la composante E_x du champ électrique créé par une bobine éclairant un plan de conductivité 1 MS/m situé à 1 mm de celle-ci.

Ceci nous permet alors de réduire le domaine numérique considéré et d’accroître fortement les performances de la méthode. En effet, sur la figure 4.17, nous avons représenté l’erreur ξ définie de la même manière que précédemment en fonction du

nombre de modes considéré. La taille de la boîte numérique a été réduite dans ce cas à 30 mm suivant les directions x^1 et x^2 . On observe une convergence nettement plus rapide que précédemment puisque l'erreur est nulle à partir de $M = 15$.

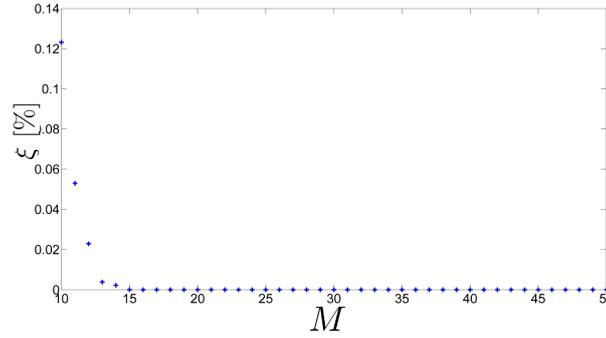


FIGURE 4.17 – Erreur introduite par le calcul de la transformée de Fourier du champ de référence en présence d'une plaque conductrice en fonction du nombre de fréquences spatiales considérées.

Comme nous l'avons déjà dit, ce champ de référence est composé en tout point situé au-dessus du conducteur plan, de la somme du champ créé dans l'espace libre par la sonde et du champ réfléchi par la plaque. On a donc :

$$\mathbf{E}^{(inc)} = \mathbf{E}^{(ref)} - \mathbf{E}_{plan}^{(R)},$$

et

$$\mathbf{H}^{(inc)} = \mathbf{H}^{(ref)} - \mathbf{H}_{plan}^{(R)},$$

que l'on ré-injecte dans les équations (4.13) à (4.16). Pour la première, on obtient par exemple sur l'interface $x^3 = 0$:

$$E_1^{(1)} - E_{1,plan}^{(R)} + E_1^{(ref)} = E_1^{(2)}. \quad (4.89)$$

On pose alors : $\tilde{E}_1^{(1)} = E_1^{(1)} - E_{1,plan}^{(R)}$, qui constitue la perturbation du champ réfléchi par le conducteur de géométrie complexe par rapport au champ réfléchi par le conducteur plan. C'est la grandeur que l'on cherchera à déterminer désormais. On introduit de même les quantités $\tilde{E}_2^{(1)}$, $\tilde{H}_1^{(1)}$ et $\tilde{H}_2^{(1)}$ dans le milieu (1). On a vu que les champs réfléchis dans l'air dérivent des deux potentiels inconnus $\Gamma^{(1)+}$ et $\Pi^{(1)+}$. On postule alors que les champs de perturbation dérivent quant à eux de deux potentiels de perturbation $\tilde{\Gamma}^{(1)+}$ et $\tilde{\Pi}^{(1)+}$, que l'on décomposera en utilisant les mêmes fonctions modales $\psi_{mn}^{(1)+}$ (et $\phi_{mn}^{(1)+}$ pour leur dérivée suivant x^3) puisqu'ils vérifient de même l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes : ce sont les coefficients

inconnus $\gamma_{mn}^{(1)}$ et $\pi_{mn}^{(1)}$ de ces décompositions qui sont modifiés. Les champs inconnus dans le milieu conducteur ne sont pas modifiés et le calcul des coefficients dans le milieu (2) conduit donc directement à la détermination du champ total dans ce domaine.

En résumé, nous avons remplacé le champ incident créé par la bobine dans l'espace libre par un champ de référence constitué de la somme de ce champ incident et du champ réfléchi par un conducteur plan. Ce champ de référence doit donc être calculé dans l'air et en tout point de l'interface complexe d'intérêt. Ainsi, pour la configuration de référence, on considèrera une pièce plane située à l'altitude la plus basse du profil géométrique. Cette configuration est illustrée sur la figure 4.18.

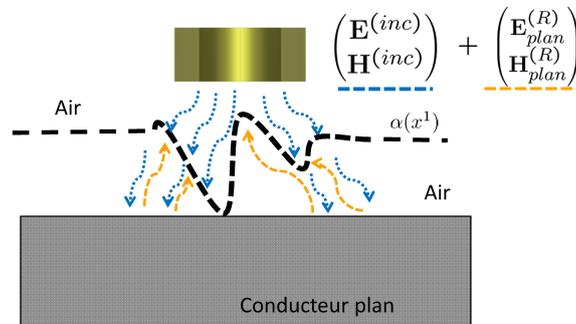


FIGURE 4.18 – Schéma en coupe de la configuration de référence. On considère une plaque plane conductrice située à l'altitude la plus basse du profil perturbé.

Dans un soucis de clarté, nous écrirons les champs de perturbation inconnus dans l'air sans le signe \sim : on gardera à l'esprit que dans toute la suite, les champs inconnus dans le milieu (1) sont des champs de perturbation.

4.4.7 Calcul des coefficients

On peut donc s'intéresser à nouveau aux équations issues de l'application des conditions de passage. Afin d'en déduire un système matriciel, on va adopter la même stratégie que lorsque l'on a discrétisé le système aux valeurs propres. On remplace donc les fonctions ψ et ϕ par leurs expansions dans les équations (4.78) à (4.83) et on les projette sur les mêmes fonctions exponentielles complexes au sens du même produit scalaire. On introduit alors les opérateurs matriciels suivants pour chaque

valeur v_n de v (et pour tous les u_m) :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_n^{(p)} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)} \right], \\
\mathcal{N}_n^{(p)} &= -j\omega\mu_p \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)} + C \hat{\phi}_n^{(p)} \right], \\
\mathcal{O}_n^{(p)} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)}, \\
\mathcal{P}_n^{(p)} &= k_p^2 \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)} + C \hat{\phi}_n^{(p)} \right], \\
\mathcal{Q}_n^{(p)} &= -v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)}, \\
\mathcal{R}_n^{(p)} &= \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)}.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Ces opérateurs sont obtenus en discrétisant les opérateurs différentiels continus intervenant dans les équations (4.78) à (4.83) de la même manière que lors de la discrétisation des opérateurs intervenant dans l'équation de Helmholtz effectuée afin d'obtenir des solutions propres numériquement (cf. section 4.4.3). On exploite encore une fois l'invariance de la géométrie suivant x^2 : on effectue une boucle sur les valeurs de v_n de la fréquence spatiale associée à la direction x^2 .

En utilisant ces opérateurs, on peut écrire les quatre relations (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16) sous la forme de $2M_v + 1$ systèmes matriciels de taille $4(2M_u + 1)$. On a en effet, pour chaque valeur v_n de v :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{M}_n^{(1)} & \mathcal{N}_n^{(1)} & -\mathcal{M}_n^{(2)} & -\mathcal{N}_n^{(2)} \\ \mathcal{O}_n^{(1)} & 0 & -\mathcal{O}_n^{(2)} & 0 \\ \mathcal{P}_n^{(1)} & \mathcal{Q}_n^{(1)} & -\mathcal{P}_n^{(2)} & -\mathcal{Q}_n^{(2)} \\ \mathcal{R}_n^{(1)} & 0 & -\mathcal{R}_n^{(2)} & 0 \end{bmatrix}}_{=\mathcal{M}_n} \begin{bmatrix} \gamma_n^{(1)+} \\ \pi_n^{(1)+} \\ \gamma_n^{(2)-} \\ \pi_n^{(2)-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{E}_{1,n}^{(ref)} \\ \hat{E}_{2,n}^{(ref)} \\ \hat{H}_{2,n}^{(ref)} \\ \hat{H}_{2,n}^{(ref)} \end{bmatrix}, \tag{4.91}$$

qui constitue la version discrétisée des équations (4.13), (4.14), (4.15) et (4.16).

Les seconds membres étant obtenus par le calcul des champs de référence que l'on a présenté dans la partie précédente, la résolution numérique de ce système conduit directement à la détermination des coefficients recherchés sur l'interface x^3 . On peut alors reconstruire les potentiels scalaires sur toute surface parallèle à l'interface (donc en tout point de l'espace) en propageant les expansions modales à l'aide des opérateurs exponentiels. Finalement, on peut calculer les composantes covariantes des champs partout en utilisant les opérateurs (5.3) pour les composantes tangentielles et en introduisant les opérateurs suivants pour le calcul des composantes E_3 et H_3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n^{(p)} &= jv_n \hat{\phi}_n^{(p)}, \\
\mathcal{T}_n^{(p)} &= A \hat{\phi}_n^{(p)} - j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)},
\end{aligned} \tag{4.92}$$

puisque l'on a, au niveau de l'interface :

$$\hat{E}_{3,n}^{(p)} = -j\omega\mu \left[\mathcal{S}_n^{(p)} \gamma_n^{(p)\pm} + \mathcal{T}_n^{(p)} \pi_n^{(p)\pm} \right],$$

et

$$\hat{H}_{3,n}^{(p)} = \mathcal{S}_n^{(p)} \gamma_n^{(p)\pm} + k_p^2 \mathcal{T}_n^{(p)} \pi_n^{(p)\pm}.$$

4.4.8 Bilan

On vient de décrire la méthode modale développée pour traiter le cas d'un demi-espace conducteur présentant une interface complexe 1D extrudée et éclairée par une source inductive 3D qui est supposée ne pas être modifiée par le champ réfléchi par la plaque (elle ne comporte donc ni blindage, ni noyau de ferrite).

Cette méthode comporte deux étapes principales qui sont d'une part le calcul des solutions propres des équations de Helmholtz scalaires sans source dans les deux milieux homogènes mis en jeu puis le calcul des solutions du problème complet exprimées comme des expansions modales de ces solutions propres. Il est alors important de noter que durant la première étape, on résout des équations ne comportant pas de terme source. Il est donc clair que les solutions propres obtenues ne dépendent pas du champ d'excitation de la sonde mais seulement des propriétés physiques du matériau, du système de coordonnées choisi (donc de l'équation de l'interface) et de la fréquence d'excitation.

Cette caractéristique de la méthode est très intéressante dans le cadre du contrôle non destructif par courants de Foucault puisque l'on voit alors que la simulation d'un balayage de la pièce par une sonde ne nécessitera d'effectuer la première étape qu'une seule fois. En d'autres termes, l'assemblage des matrices \mathcal{M}_n introduites lors de l'application des conditions de passage et donc de la détermination des coefficients inconnus (cf. (4.91)) n'est effectué qu'une seule fois pour un spécimen et une fréquence d'excitation donnés. Lors d'un déplacement ou d'une modification de la sonde, seul le second membre de (4.91) est modifié afin de calculer les nouveaux coefficients.

4.5 Calcul de l'impédance de la bobine

On a vu comment obtenir les composantes covariantes des champs dans tout l'espace en résolvant un problème de perturbation. On s'intéresse maintenant au calcul de l'impédance de la sonde en présence du demi-espace perturbé. En particulier, on recherche la variation d'impédance ΔZ par rapport à la configuration plane de référence que l'on a utilisée pour la détermination des champs de référence (l'impédance Z_{ref} de la sonde dans cette configuration est donnée par les mêmes modèles semi-analytiques utilisés pour le calcul des champs).

On s'intéresse dans un premier temps à la variation d'impédance pour une configuration du type de celle représentée sur la figure 4.1. Dans ce cas, l'unique sonde présente joue à la fois le rôle d'émetteur et de récepteur. Dans ce cas, B. A. Auld et J. C. Moulder ont montré [Auld 1999] que la variation d'impédance de la sonde entre la configuration complète et la configuration avec une pièce perturbée s'écrit :

$$\Delta Z = Z - Z_{ref} = \frac{1}{I_0^2} \iint_{S_F} \left(\mathbf{E}^{(ref)} \times \mathbf{H} - \mathbf{H}^{(ref)} \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (4.93)$$

où I_0 désigne l'amplitude du courant imposé dans la sonde, S_F la surface fermée représentée en coupe sur la figure 4.19 et \mathbf{n} le vecteur unitaire normal et sortant de la surface S_F .

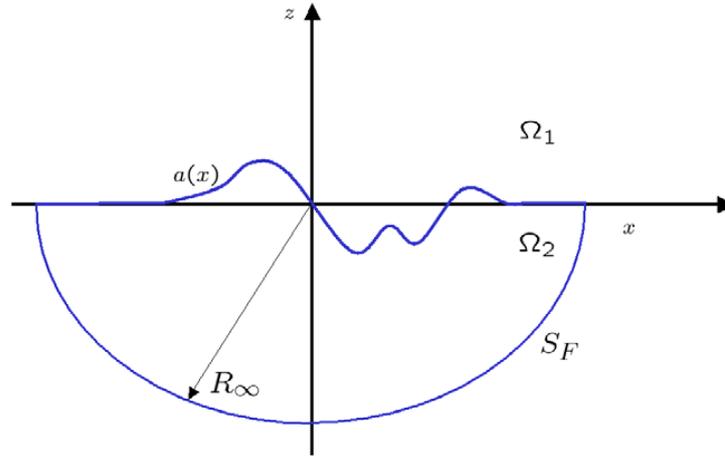


FIGURE 4.19 – Vue en coupe de la surface fermée S_F .

Le choix de la surface S_F étant arbitraire, on peut faire tendre le rayon du demi-cylindre ainsi que sa hauteur vers l'infini ou, en pratique vers des valeurs assurant que les champs électromagnétiques soient nuls sur la partie cylindrique de S_F ainsi que sur ses parois verticales (parallèles au plan xOz). La seule contribution restante est alors la quantité

$$\mathcal{I} = \iint_{S_c} \left(\mathbf{E}^{(ref)} \times \mathbf{H} - \mathbf{H}^{(ref)} \times \mathbf{E} \right) \cdot \mathbf{n} ds,$$

où S_c désigne l'interface air-conducteur.

On a déjà vu que le vecteur de la base curviligne normal à l'interface S_c était \mathbf{e}^3 . On va donc calculer les produits vectoriels dans cette base, en utilisant les formules générales, et les projeter sur \mathbf{e}^3 . On a en effet :

$$(\mathbf{H}^{(ref)} \times \mathbf{E})^a = h^{abc} H_i^{(ref)} E_j,$$

où les quantités h^{abc} représentent les composantes contravariantes du tenseur d'orientation déjà présenté. On a alors :

$$(\mathbf{H}^{(ref)} \times \mathbf{E})^3 = (\mathbf{H}^{(ref)} \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}^3 = H_1^{(ref)} E_2 - H_2^{(ref)} E_1. \quad (4.94)$$

Il est important de noter ici que lorsque l'on travaille dans des bases de coordonnées naturelles, les vecteurs de bases que l'on utilise ne sont pas nécessairement normés, ce qui signifie que les composantes de champ calculées ne représentent pas directement des grandeurs physiques : il faut les diviser par la norme des vecteurs de

base. Jusqu'ici, ce problème n'était pas apparu puisque les coefficients de normalisation apparaissaient des deux côtés des équations que l'on souhaitait résoudre (notamment le système traduisant la continuité des composantes tangentielles (4.91)). Ici, on doit travailler avec les champs « physiques », c'est-à-dire normalisés et on doit donc considérer les quantités :

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{\|\mathbf{e}_1\|} = \frac{E_1}{\sqrt{1+\dot{\alpha}^2}} \\ \frac{E_2}{\|\mathbf{e}_2\|} = E_2 \\ \frac{E_3}{\|\mathbf{e}_3\|} = E_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{H_1}{\|\mathbf{e}_1\|} = \frac{H_1}{\sqrt{1+\dot{\alpha}^2}} \\ \frac{H_2}{\|\mathbf{e}_2\|} = H_2 \\ \frac{H_3}{\|\mathbf{e}_3\|} = H_3 \end{bmatrix}$$

De plus, on a dit que le vecteur \mathbf{n} était un vecteur unitaire. Il vérifie donc :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}^3}{\|\mathbf{e}^3\|} = \frac{\mathbf{e}^3}{\sqrt{1+\dot{\alpha}^2}}.$$

On a donc obtenu :

$$\Delta Z = \frac{E_1^{(ref)} H_2 - E_2^{(ref)} H_1 + H_1^{(ref)} E_2 - H_2^{(ref)} E_1}{1 + \dot{\alpha}^2} ds.$$

De plus, il faut calculer l'élément infinitésimal de surface en fonction des éléments infinitésimaux de longueur dx^1 et dx^2 . Étant donné que les vecteurs de la base naturelle \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont naturellement tangents à l'interface, on a directement l'égalité :

$$ds = \|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\| dx^1 dx^2 = \sqrt{1 + \dot{\alpha}^2} dx^1 dx^2.$$

Finalement, l'expression exacte donnant la variation d'impédance du capteur s'écrit :

$$\Delta Z = \frac{1}{I_0^2} \int_{x^1} \int_{x^2} \frac{E_1^{(ref)} H_2 - E_2^{(ref)} H_1 + H_1^{(ref)} E_2 - H_2^{(ref)} E_1}{\sqrt{1 + \dot{\alpha}^2}} dx^1 dx^2. \quad (4.95)$$

Une fois les composantes covariantes des champs déterminées, on peut donc calculer directement la variation d'impédance en calculant l'intégrale précédente numériquement.

Calcul des champs induits dans un conducteur stratifié de géométrie complexe

Sommaire

5.1	Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles	82
5.1.1	Présentation	82
5.1.2	Mise en équations	82
5.1.3	Résolution numérique	83
5.1.4	Stratégie	83
5.1.5	Un premier algorithme pour le calcul des coefficients	84
5.1.6	Matrices S	86
5.1.7	Algorithme récursif	87
5.1.8	Calcul des coefficients et reconstruction des solutions	90
5.2	Résultats	92
5.3	Cas 2 : conducteur de géométrie complexe avec strates non-parallèles	92
5.3.1	Présentation	92
5.3.2	Changements de coordonnées	92
5.3.3	Nouvelles expansions modales	93
5.3.4	Résolution numérique	95

5.1 Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles

5.1.1 Présentation

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la méthode de résolution des équations de Maxwell covariantes pour le cas d'un demi-espace conducteur. Néanmoins, ce cas ne permet qu'une approximation des configurations réelles pour lesquelles il est possible de négliger l'influence de l'interface inférieure de la plaque (comme nous le ferons pour effectuer les validations expérimentales dans le chapitre suivant), ce qui revient à dire que l'épaisseur de la pièce est très grande devant l'épaisseur de peau.

On se propose maintenant d'étendre les configurations traitées par le code afin de prendre en compte la présence d'interfaces supplémentaires dans la pièce. On considère donc une pièce extrudée suivant la direction transverse et présentant des interfaces complexes parallèles. Ce type de configuration est représenté sur la figure 5.1. Les différentes strates composant la pièces sont considérées comme étant homogènes, linéaires et isotropes.

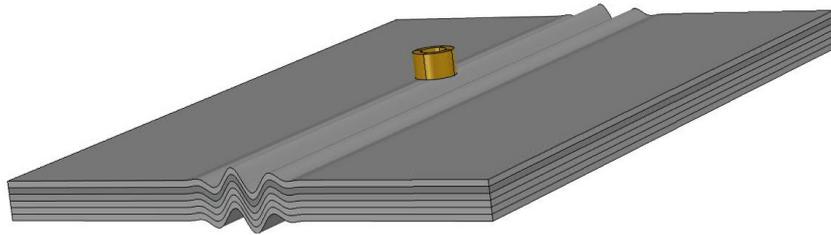


FIGURE 5.1 – Configuration stratifiée considérée.

La stratégie que l'on va exposer ici s'appuie fortement sur la méthode de résolution utilisée pour traiter le cas d'un demi-espace complexe. En effet, la première étape du calcul consiste à déterminer des solutions propres de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes générales dans chacune des strates composant le spécimen. Les solutions complètes seront alors de la même manière exprimées comme des sommes pondérées de ces fonctions modales dans chaque strate. Le calcul des coefficients est quant à lui plus complexe puisqu'il est ici nécessaire de considérer toutes les interactions entre les modes. Cette étape sera réalisée en introduisant un algorithme récursif que nous détaillerons.

5.1.2 Mise en équations

Dans cette section, on présente le formalisme physique que l'on propose d'utiliser afin de traiter le cas représenté sur la figure 5.1. Celui-ci reste très similaire à celui développé pour traiter le cas du demi-espace.

5.1. Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles 83

5.1.2.1 Changement de coordonnées

Les interfaces étant parallèles, elles sont définies par des équations de la forme :

$$z = \alpha(x) + C_p,$$

avec C_p une constante pour la strate séparant les milieux p et $p + 1$, l'indice p désignant le numéro du domaine considéré : 0 pour le domaine supérieur et N pour le domaine inférieur (on a donc N interfaces séparant $N + 1$ domaines).

On applique donc le même type de transformation que précédemment, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} x = x^1 \\ y = x^2 \\ z = x^3 + \alpha(x^1) \end{cases}, \quad (5.1)$$

qui conduit au même repère naturel et à la même métrique que celle du chapitre précédent.

5.1.2.2 Équations physiques

On utilise le même formalisme en potentiels que précédemment et on définit donc deux potentiels scalaires Γ_p et Π_p dans chaque couche p (où aucune source n'est présente). Ces potentiels doivent vérifier chacun la même équation de Helmholtz curviligne :

$$(\Delta + k_p^2)f = 0,$$

qui est alors différente pour chaque couche homogène puisque $k_p^2 = j\omega\mu_p\sigma_p$. Il est clair que $\Gamma^{(p)}$ et $\Pi^{(p)}$ ne sont définis qu'à l'intérieur de la couche p .

Au niveau des interfaces, les composantes tangentielles des champs doivent être continues.

5.1.3 Résolution numérique

5.1.4 Stratégie

Les potentiels étant tous solutions de l'équation de Helmholtz, on les représente donc comme des sommes pondérées des solutions propres de ces équations qui sont composées des solutions progressives (notées $-$ et régressives $+$) que l'on séparera ici. Contrairement au cas du demi-espace, dans une strate enfouie au centre de la pièce, les deux types de contributions co-existent et sont inconnues.

Pour la couche p , on écrit donc :

$$\begin{cases} \Gamma_p^\pm(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \gamma_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(1)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \\ \Pi_p^\pm(x^1, x^2, x^3) = \sum_{n=-M_v}^{+M_v} \sum_{m=-M_u}^{+M_u} \pi_{mn}^{(p)\pm} \psi_{mn}^{(p)}(x^1, x^2) e^{j\lambda_{mn}^{(p)\pm} x^3}, \end{cases} \quad (5.2)$$

En regroupant les coefficients de type TE et TM deux à deux, on définit des vecteurs colonnes $\mathbf{b}_n^{(p)\pm}$ contenant les coefficients :

$$\mathbf{b}_n^{(p)\pm} = \left[\gamma_{1,n}^{(p)\pm} \quad \dots \quad \gamma_{M_u,n}^{(p)\pm} \quad \pi_{1,n}^{(p)\pm} \quad \dots \quad \pi_{M_u,n}^{(p)\pm} \right]^T.$$

Ce point est illustré sur la figure 5.2. Le problème consiste donc à calculer tous les coefficients en prenant en compte toutes les réflexions internes se produisant dans chaque strate. Les coefficients inconnus sont au nombre de $2(2N - 1)(2M_u + 1)(2M_v + 1)$: l'onde incidente dans le milieu 0 est une entrée du problème et il est clair qu'aucune onde réfléchie dans le milieu inférieur n'est physiquement admissible ($\mathbf{b}_2^+ = \mathbf{0}$). Les nombres M_u et M_v désignent de même que précédemment les nombre de fonctions exponentielles complexes de fréquence spatiale positive utilisées pour discrétiser les équations de Helmholtz.

Comme nous l'avons dit plus haut, afin d'assurer les conditions de passage des champs au niveau des interfaces parallèles, on utilise les opérateurs de passage définis dans (5.3) dont on sépare les contributions progressives et régressives. On considère alors, pour chaque valeur v_n de v , les opérateurs numériques suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} \right], \\ \mathcal{N}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} + C \hat{\phi}_n^{(p)\pm} \right], \\ \mathcal{O}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)\pm}, \\ \mathcal{P}_n^{(p)\pm} &= k_p^2 \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} + C \hat{\phi}_n^{(p)\pm} \right], \\ \mathcal{Q}_n^{(p)\pm} &= -v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm}, \\ \mathcal{R}_n^{(p)\pm} &= \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)\pm}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

qui vont nous permettre de relier les approximations numériques des potentiels dans chaque couche aux approximations des composantes covariantes des champs dans la couche correspondante, et plus particulièrement au niveau des interfaces communes à deux couches adjacentes. L'écriture de la continuité des composantes tangentiels des champs directement en fonction des potentiels et donc des coefficients va nous permettre d'obtenir des relations entre ces coefficients et *in fine* de les calculer. La partie suivante présente deux stratégies d'obtention de ces relations.

5.1.5 Un premier algorithme pour le calcul des coefficients

Intuitivement, l'écriture de la continuité des composantes tangentiels sur les N interfaces parallèles successives formant le specimen conduit à l'obtention de $(2M_v + 1)N$ systèmes d'équations de taille $4(2M_u + 1)$ (on définit un système pour chaque valeur de fréquence spatiale v) reliant les coefficients de deux strates adjacentes. Une fois discrétisées de la même manière que dans le cas du demi-espace, ces équations sont alors approchées par des relations matricielles prenant la forme suivante sur

5.1. Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles 85

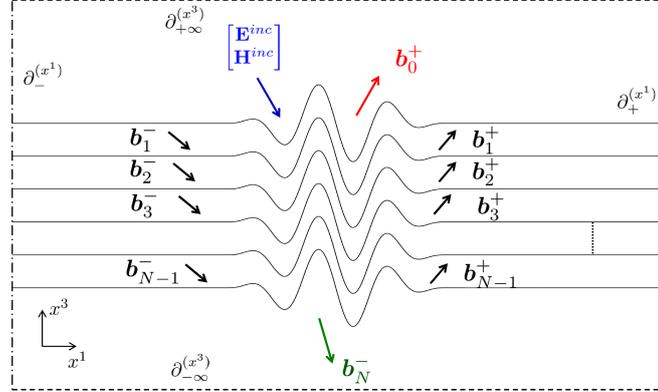


FIGURE 5.2 – Schéma en coupe du problème à résoudre : dans chaque strate, les coefficients inconnus, stockés dans des vecteurs, sont séparés en contributions progressives et régressives.

l'interface entre les strates $p - 1$ et p :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathcal{L}_n^{(p-1)+} & \mathcal{L}_n^{(p-1)-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{p-1}^+(C_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{p-1}^+(C_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{p-1}^-(C_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{p-1}^-(C_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p-1)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p-1)-} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{L}_n^{(p)+} & \mathcal{L}_n^{(p)-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p^+(C_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_p^+(C_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_p^-(C_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_p^-(C_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p)-} \end{bmatrix}, \quad (5.4) \end{aligned}$$

où les opérateurs $\mathcal{L}_n^{(p)\pm}$ sont définis par la relation générale :

$$\mathcal{L}_n^{(p)\pm} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{p-1}^{(p)\pm} & \mathcal{N}_n^{(p)\pm} \\ \mathcal{O}_n^{(p)\pm} & 0 \\ \mathcal{P}_n^{(p)\pm} & \mathcal{Q}_n^{(p)\pm} \\ 0 & \mathcal{R}_n^{(p)\pm} \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Les matrices ξ sont des matrices diagonales contenant les exponentielles complexes permettant de propager les modes au sein des strates. Elles sont définies par :

$$\xi_p^\pm(x^3) = \text{diag}[e^{j\lambda_{1,p}^\pm x^3}, \dots, e^{j\lambda_{M_u,p}^\pm x^3}]. \quad (5.6)$$

Ainsi, si on connaît les coefficients dans la strate (p), on peut calculer directement les coefficients dans la strate ($p - 1$) en inversant la matrice globale devant le terme de gauche et en calculant une matrice de transmission $T_n(p - 1, p)$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p-1)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p-1)-} \end{bmatrix} = T_n(p - 1, p) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p)-} \end{bmatrix}.$$

On peut alors construire une matrice T globale reliant directement les coefficients de la strate supérieure à ceux de la strate inférieure en multipliant les différentes matrices $T_n(p - 1, p)$, avec p variant de N_p à 0. Cette méthode très intuitive n'est cependant pas utilisée en pratique car elle présente une instabilité importante lorsque l'épaisseur de la pièce augmente. En effet, lors de la construction de la matrice globale T , les termes exponentiels croissants avec l'épaisseur deviennent très grands par accumulation, conduisant à une instabilité numérique lors du calcul des coefficients.

Suivant l'analyse de Li [Li 1996], nous avons utilisé l'algorithme des matrices S que nous présentons dans la section suivante.

5.1.6 Matrices S

L'algorithme des matrices S [Cotter 1995] est basé sur une représentation de type entrée-sortie des différentes interfaces formant la plaque stratifiée. En effet, si l'on considère l'interface séparant les milieux $p - 1$ et p , les coefficients $\mathbf{b}_n^{(p-1)-}$ et $\mathbf{b}_n^{(p)+}$ peuvent être vues comme les amplitudes des ondes « entrantes » tandis que les coefficients $\mathbf{b}_n^{(p-1)+}$ et $\mathbf{b}_n^{(p)-}$ sont associés à des ondes « sortantes ». Dans la suite, afin d'alléger les notations, on n'explicitera plus l'indice n et on écrira les vecteurs de coefficients de la strate p sous la forme \mathbf{b}_p^\pm .

On définit alors une matrice S d'interface, pour l'interface entre les milieux $p - 1$ et p par :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{p-1}^+ \\ \mathbf{b}_p^- \end{bmatrix}}_{\text{Entrées}} = S(p, p - 1) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_p^+ \\ \mathbf{b}_{p-1}^- \end{bmatrix}}_{\text{Sorties}}, \quad (5.7)$$

qui relie les ondes sortantes aux ondes entrantes. Ces matrices sont construites simplement en ré-arrangeant la relation matricielle (5.4) et en l'écrivant sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{L}_n^{(p-1)+} & -\mathcal{L}_n^{(p)-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_{p-1}^+(C_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_{p-1}^+(C_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_p^-(C_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_p^-(C_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p-1)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p)-} \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{L}_n^{(p)+} & -\mathcal{L}_n^{(p-1)-} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_p^+(C_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_p^+(C_p) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi_{p-1}^-(C_p) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi_{p-1}^-(C_p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_n^{(p)+} \\ \mathbf{b}_n^{(p-1)-} \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

5.1. Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles 87

d'où l'on tire directement la matrice désirée en inversant le bloc de gauche. De plus, on définit des matrices S globales, qui relient directement les coefficients entre deux strates n'étant plus nécessairement adjacentes : ceci revient à considérer le groupement de strates comprises entre la strate l et la strate p , par exemple, avec $l \geq p$, comme une boîte noire dont les entrées sont les coefficients \mathbf{b}_p^- et \mathbf{b}_l^+ , et les sorties sont les coefficients \mathbf{b}_p^+ et \mathbf{b}_l^- . On définit alors cette matrice de façon analogue à la matrice d'interface présentée ci-avant et l'on écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_p^+ \\ \mathbf{b}_l^- \end{bmatrix} = S(l, p) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_l^+ \\ \mathbf{b}_p^- \end{bmatrix}.$$

L'idée est alors de déterminer la matrice $S(N, 0)$ qui va nous permettre de relier directement les coefficients dans la strate inférieure aux coefficients de la strate supérieure. Celle-ci étant connue, on peut alors considérer la pièce entière comme une boîte noire dont les entrées sont le champ incident sur l'interface supérieure et les sorties le champ transmis dans la strate N et le champ réfléchi dans la strate 0 .

5.1.7 Algorithme récursif

On recherche une relation directe reliant \mathbf{b}_0^+ et \mathbf{b}_N^- à \mathbf{b}_N^+ et \mathbf{b}_0^- . L'idée de l'algorithme stable présenté dans [Li 1996] et [Cotter 1995] est alors de partir de la relation de continuité des composantes sur la strate inférieure, qui nous permet de relier les coefficients des strates $N - 1$ et N , puis d'écrire les conditions de passage des champs sur l'interface entre les milieux $N - 2$ et $N - 1$ afin d'en déduire une relation entre les coefficients de ces strates. Ensuite, en éliminant les coefficients de la strate $N - 1$ dans les différentes relations obtenues, on peut obtenir une relation directe entre les coefficients de la strate N et ceux de la strate $N - 2$: on construit alors la matrice $S(N, N - 2)$. Il est donc clair qu'en appliquant de façon récursive ce raisonnement, on aboutit à la construction de la matrice convoitée $S(N, 0)$.

Afin d'obtenir la relation de récursivité permettant l'implémentation de l'algorithme considérons la relation traduisant les conditions de passage des champs au niveau de l'interface inférieure. On a, par définition :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N-1}^+ \\ \mathbf{b}_N^- \end{bmatrix} = S(N, N - 1) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_N^+ \\ \mathbf{b}_{N-1}^- \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

et sur l'interface entre les milieux $N - 2$ et $N - 1$, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N-2}^+ \\ \mathbf{b}_{N-1}^- \end{bmatrix} = S(N - 1, N - 2) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N-1}^+ \\ \mathbf{b}_{N-2}^- \end{bmatrix}. \quad (5.10)$$

Les deux matrices S mises en jeu ici sont calculées en utilisant la relation générale (5.8) et on souhaite donc calculer la matrice $S(N, N - 2)$ définie par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{N-2}^+ \\ \mathbf{b}_N^- \end{bmatrix} = S(N, N - 2) \begin{bmatrix} \mathbf{b}_N^+ \\ \mathbf{b}_{N-2}^- \end{bmatrix}. \quad (5.11)$$

(5.9) nous donne les relations suivantes :

$$\mathbf{b}_{N-1}^+ = S_{11}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ + S_{12}(N, N-1)\mathbf{b}_{N-1}^- \quad (5.12)$$

$$\mathbf{b}_N^- = S_{21}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ + S_{22}(N, N-1)\mathbf{b}_{N-1}^- \quad (5.13)$$

et (5.10) conduit à :

$$\mathbf{b}_{N-2}^+ = S_{11}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-1}^+ + S_{12}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^- \quad (5.14)$$

$$\mathbf{b}_{N-1}^- = S_{21}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-1}^+ + S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^- \quad (5.15)$$

En injectant (5.15) dans (5.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{N-1}^+ = S_{11}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ + S_{12}(N, N-1) & (S_{21}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-1}^+ \\ & + S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^-), \end{aligned} \quad (5.16)$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{N-1}^+ = [I_d - S_{12}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)]^{-1} & (S_{11}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ \\ & + S_{12}(N, N-1)S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^-), \end{aligned} \quad (5.17)$$

où I_d est la matrice identité de taille $2(2M_u + 1)$. On injecte alors cette équation dans (5.14), ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{N-2}^+ = S_{11}(N-1, N-2)[I_d - S_{12}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)]^{-1} & (S_{11}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ \\ & + S_{12}(N, N-1)S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^-) + S_{12}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^- \end{aligned} \quad (5.18)$$

d'où l'on déduit directement par identification :

$$\begin{aligned} S_{11}(N, N-2) = S_{11}(N-1, N-2)[I_d - S_{12}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)]^{-1} \\ \times S_{11}(N, N-1), \end{aligned} \quad (5.19)$$

et

$$\begin{aligned} S_{12}(N, N-2) = S_{11}(N-1, N-2)[I_d - S_{12}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)]^{-1} \\ \times S_{12}(N, N-1)S_{22}(N-1, N-2) + S_{12}(N-1, N-2). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Afin de déterminer les autres sous-blocs, on développe l'expression de \mathbf{b}_N^+ . En posant $U = [I_d - S_{12}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)]^{-1}$, on a en effet :

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_N^- = S_{21}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ + S_{22}(N, N-1)[S_{21}(N-1, N-2)U \\ \times (S_{11}(N, N-1)\mathbf{b}_N^+ + S_{12}(N, N-1)S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^-) \\ + S_{22}(N-1, N-2)\mathbf{b}_{N-2}^-], \end{aligned} \quad (5.21)$$

d'où l'on déduit directement :

$$\begin{aligned} S_{21}(N, N-2) = S_{21}(N, N-1) \\ + S_{22}(N, N-1)S_{21}(N-1, N-2)US_{11}(N, N-1), \end{aligned} \quad (5.22)$$

5.1. Cas 1: conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles 89

et

$$S_{22}(N, N-2) = S_{22}(N, N-1)(S_{21}(N-1, N-2)US_{12}(N, N-1) + I_d)S_{22}(N-1, N-2). \quad (5.23)$$

Nous avons donc construit la matrice $S(N, N-2)$ en utilisant les matrices d'interfaces $S(N, N-1)$ et $S(N-1, N-2)$. À partir de là, on peut calculer la matrice d'interface suivante ($S(N-2, N-3)$) et construire la matrice globale $S(N, N-3)$ à partir de $S(N-2, N-3)$ et $S(N, N-2)$.

La matrice globale $S(N, p-1)$ est construite en utilisant les mêmes relations de récursivité. On écrit en effet :

$$S_{11}(N, p-1) = S_{11}(p, p-1)U_p S_{11}(N, p), \quad (5.24)$$

$$S_{12}(N, p-1) = S_{11}(p, p-1)U_p S_{12}(N, p)S_{22}(p, p-1) + S_{12}(p, p-1), \quad (5.25)$$

$$S_{21}(N, p-1) = S_{21}(N, p) + S_{22}(N, p)S_{21}(p, p-1)U_p S_{11}(N, p), \quad (5.26)$$

et

$$S_{22}(N, p-1) = S_{22}(N, p)(S_{21}(p-1, p)U_p S_{12}(N, p) + I_d)S_{22}(p, p-1), \quad (5.27)$$

où $U_p = [I_d - S_{12}(N, p)S_{21}(p, p-1)]^{-1}$.

On peut donc écrire un algorithme récursif nous permettant de construire pas à pas les différentes S matrices et ainsi de relier les coefficients de la strate courante aux coefficients de la strate inférieure directement. L'initialisation de cet algorithme est la donnée de $S(N, N)$, qui est égale à la matrice identité de taille $8(2M_u + 1)$ puisqu'elle relie les coefficients de la strate inférieure directement à eux-mêmes. L'algorithme que nous avons implémenté est le suivant :

Algorithme Calcul des Matrices S

Début

Initialisation: $S(N, N) \leftarrow I_d[8(2M_u + 1)]$

Pour p variant de N à 1 faire

Calculer $S(p, p - 1)$

Calculer $S(N, p - 1)$ en utilisant $S(p, p - 1)$ et $S(N, p)$:

$U_p \leftarrow [I_d[2(2M_u + 1)] - S_{12}(N, p)S_{21}(p, p - 1)]^{-1}$

$S_{11}(N, p - 1) \leftarrow S_{11}(p, p - 1)U_pS_{11}(N, p)$

$S_{12}(N, p - 1) \leftarrow S_{11}(p, p - 1)U_pS_{12}(N, p)S_{22}(p, p - 1) + S_{12}(p, p - 1)$

$S_{21}(N, p - 1) \leftarrow S_{21}(N, p) + S_{22}(N, p)S_{21}(p, p - 1)U_pS_{11}(N, p)$

$S_{22}(N, p - 1) \leftarrow S_{22}(N, p)(S_{21}(p - 1, p)U_pS_{12}(N, p) + I_d)S_{22}(p, p - 1)$

Stocker $S(N, p - 1)$

$p = p - 1$

FinPour

Fin

On note que cette procédure conduit au calcul et au stockage de l'ensemble des matrices S. Ainsi, une fois que l'on aura calculé les coefficients dans la strate inférieure en introduisant le champ d'excitation créé par la bobine, on sera à même de calculer les coefficients dans n'importe quelle strate p à l'aide de la matrice S intermédiaire $S(N, p)$. Cependant, ceci n'est utile que si l'on souhaite effectivement calculer les champs dans la pièce : si seule la réponse du capteur nous intéresse, on peut ne conserver que la matrice globale qui nous permet de calculer les champs réfléchis inconnus dans l'air et donc la variation d'impédance de la sonde.

De plus, il est clair que ces matrices ne dépendent pas des champs excitateurs et permettent de décrire la pièce de manière globale à l'aide d'une seule matrice S qui regroupe toutes les interactions entre les modes propres vivant dans les strates. Cette caractéristique de la méthode est très intéressante pour notre application (le contrôle non destructif par courants de Foucault) puisque de même que pour le cas du demi-espace, ce calcul ne doit être effectué qu'une seule fois pour un balayage spatial du capteur.

5.1.8 Calcul des coefficients et reconstruction des solutions

Pour une position du capteur (considéré comme une source de courant traversée par un courant sinusoïdal de pulsation ω), on peut calculer les coefficients des expansions modales représentant le champ réfléchi dans l'air et le champ transmis dans la strate inférieure en utilisant la matrice $S(N, 0)$.

Cependant, cela nécessiterait de calculer les coefficients \mathbf{b}_0^- associés aux champs créés par la sonde dans l'espace libre et, comme nous l'avons dit, cela conduirait à une augmentation du nombre de modes nécessaire. Nous avons donc préféré résoudre un problème de perturbation comme précédemment et nous choisissons une

5.1. Cas 1 : conducteur de géométrie complexe avec strates parallèles 91

configuration de référence constituée d'un demi-espace conducteur plan dont l'interface est située à l'altitude la plus basse du profil supérieur. De plus, les propriétés physiques de ce demi-espace sont choisies comme étant celles de la couche supérieure du conducteur stratifié.

L'inconvénient est alors que l'on ne peut plus représenter le champs de référence comme une expansion modale des seules fonctions propres régressives obtenues dans l'air : ceci peut s'expliquer physiquement par le fait que le champ de référence est constitué de la somme d'un champ régressif (champ de l'espace libre) et d'un champ progressif (le champ réfléchi par le demi-espace plan). On choisit donc de travailler directement avec les champs de référence obtenus par les modèles semi-analytiques introduits précédemment.

Afin de pouvoir introduire directement les champs de référence dans la procédure de calcul des coefficients, nous avons dû modifier l'algorithme utilisé. La stratégie adoptée consiste à s'arrêter juste après l'itération $N - 1$, c'est-à-dire une fois que l'on a obtenu la matrice globale $S(N, 1)$. On écrit alors les relations matricielles traduisant la continuité des composantes tangentielles des champs sur l'interface supérieure de la même manière que lorsque l'on était en présence d'un demi-espace (cf. relation (4.91)), ce qui nous permet d'obtenir des relations entre les coefficients inconnus \mathbf{b}_0^+ et \mathbf{b}_1^\pm . Cette fois-ci cependant, il faut tenir compte des composantes réfléchis par les $N - 1$ strates présentes sous la première strate : les coefficients \mathbf{b}_1^+ sont évidemment non-nuls. On obtient donc l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_0^+ & \mathcal{N}_0^+ & -\mathcal{M}_1^- & -\mathcal{N}_1^- \\ \mathcal{O}_0^+ & 0 & -\mathcal{O}_1^- & 0 \\ \mathcal{P}_0^+ & \mathcal{Q}_0^+ & -\mathcal{P}_1^- & -\mathcal{Q}_1^- \\ 0 & \mathcal{R}_0^+ & 0 & -\mathcal{R}_1^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_0^+ \\ \mathbf{b}_1^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1^+ & \mathcal{N}_1^+ \\ \mathcal{O}_1^+ & 0 \\ \mathcal{P}_1^+ & \mathcal{Q}_1^+ \\ 0 & \mathcal{R}_1^+ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^+ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} E_1^{(ref)} \\ E_2^{(ref)} \\ H_1^{(ref)} \\ H_2^{(ref)} \end{bmatrix}, \quad (5.28)$$

où l'indice n correspondant à la fréquence spatiale v_n n'est pas explicité dans un souci de clarté des formules. Les indices portés par les opérateurs correspondent donc ici au numéro du milieu considéré.

Ensuite, on introduit la matrice $S(N, 1)$ afin d'exprimer les contributions \mathbf{b}_1^\pm en fonctions des seuls coefficients \mathbf{b}_N^- . En effet, on a par définition (et puisque $\mathbf{b}_N^+ = \mathbf{0}$) :

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1^+ = S_{12}(N, 1)\mathbf{b}_1^- \\ \mathbf{b}_N^- = S_{22}(N, 1)\mathbf{b}_1^- \end{cases} \iff \begin{cases} \mathbf{b}_1^+ = S_{12}(N, 1)S_{22}(N, 1)^{-1}\mathbf{b}_N^- \\ \mathbf{b}_1^- = S_{22}(N, 1)^{-1}\mathbf{b}_N^- \end{cases}. \quad (5.29)$$

Ceci conduit à ré-écrire (5.28) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathcal{M}_0^+ & \mathcal{N}_0^+ \\ \mathcal{O}_0^+ & 0 \\ \mathcal{P}_0^+ & \mathcal{Q}_0^+ \\ 0 & \mathcal{R}_0^+ \end{bmatrix} [\mathbf{b}_0^+] - \left(\begin{bmatrix} \mathcal{M}_1^+ & \mathcal{N}_1^+ \\ \mathcal{O}_1^+ & 0 \\ \mathcal{P}_1^+ & \mathcal{Q}_1^+ \\ 0 & \mathcal{R}_1^+ \end{bmatrix} [S_{12}(N, 1)] \right. \\
 \left. + \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1^- & \mathcal{N}_1^- \\ \mathcal{O}_1^- & 0 \\ \mathcal{P}_1^- & \mathcal{Q}_1^- \\ 0 & \mathcal{R}_1^- \end{bmatrix} \right) [S_{22}(N, 1)^{-1}] [\mathbf{b}_N^-] = - \begin{bmatrix} E_1^{(ref)} \\ E_2^{(ref)} \\ H_1^{(ref)} \\ H_2^{(ref)} \end{bmatrix}. \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

Pour chaque fréquence spatiale v_n , on obtient alors un système de $8(2M_u + 1)$ équations, que l'on discrétise toujours de la même manière et qui nous permettent donc de calculer les $2 \times 4(2M_u + 1)$ coefficients \mathbf{b}_0^+ et \mathbf{b}_N^- . Comme nous l'avons dit, une fois ces coefficients calculés, on peut calculer les coefficients dans n'importe quelle strate p en utilisant la matrice $S(N, p)$ que l'on a au préalable stockée. On peut alors calculer les champs en n'importe quel point de l'espace.

5.2 Résultats

5.3 Cas 2 : conducteur de géométrie complexe avec strates non-parallèles

5.3.1 Présentation

On considère maintenant le cas d'une pièce composée de strates homogènes présentant des interfaces non parallèles. Cette configuration particulière est représentée sur la figure 7.1 pour le cas particulier d'une plaque présentant deux interfaces complexes non parallèles. Nous choisissons de traiter ce cas afin d'illustrer la méthode de résolution choisie, qui sera générale et permettra de traiter le cas plus général d'un nombre arbitraire de strate non parallèles.

5.3.2 Changements de coordonnées

Lorsque la pièce est formée de strates non parallèles, on doit appliquer un changement de coordonnées différent lié à chaque interface. En effet, chacune des interfaces peut être décrite par une équation de la forme $z = a_{p,p+1}(x) + C_{p,p+1}$, où p et $p + 1$ désignent les numéros des domaines séparés par la strate considérée. On applique alors un changement de coordonnées de la forme suivante pour chaque interface entre les domaines p et $p + 1$:

$$\begin{cases} x^1 = x, \\ x^2 = y, \\ x_{p,p+1}^3 = z + a_{p,p+1}(x^1). \end{cases} \quad (5.31)$$

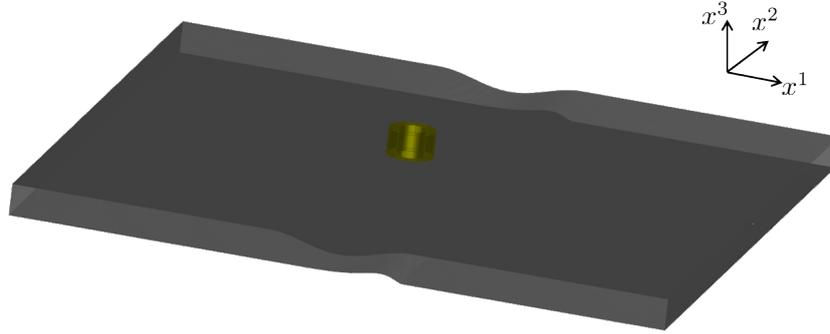


FIGURE 5.3 – Configuration comportant des strates complexes non parallèles.

Ceci conduit à la construction de plusieurs repères naturels (formés chacun d'une base covariante et de sa base duale). Ainsi, dans la strate p délimitée par deux interfaces non-parallèles, les potentiels inconnus vérifieront les équations de Helmholtz covariantes associées à chaque système de coordonnées (formées à partir des opérateurs de Laplace-Beltrami correspondants).

Afin de décrire la méthode de résolution dans ce cas, on considère la configuration particulière de la figure 7.1 où la pièce est formée de deux interfaces non parallèles. L'équation de l'interface supérieure est $z = a_\alpha(x)$, et celle de l'interface inférieure est $z = a_\beta(x) + C_\beta$, où C_β est une constante. Les potentiels scalaires vivant dans la strate 1 (la strate 0 étant l'air et la strate 2 la strate inférieure : air ou substrat) sont alors approchés par deux types d'expansions modales. En effet, à chaque changement de coordonnées correspond une équation de Helmholtz covariante, que l'on discrétise par la méthode de Galerkin déjà présentée et dont on obtient des solutions propres (cf chapitre précédent). Dans un souci de clarté, les coordonnées associées à l'interface supérieure seront repérées par l'indice α et les coordonnées associées à l'interface inférieure seront repérées par l'indice β .

5.3.3 Nouvelles expansions modales

On définit alors les deux couples d'expansions modales, vivant dans la strate (1) et définis par :

$$\begin{cases} \Gamma_\alpha^{(1)}(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3) = \sum_n \sum_m \gamma_{mn,\alpha}^{(1)\pm} \psi_{mn,\alpha}^{(1)\pm}(x_\alpha^1, x_\alpha^2) e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)\pm} x_\alpha^3} \\ \Pi_\alpha^{(1)}(x_\alpha^1, x_\alpha^2, x_\alpha^3) = \sum_n \sum_m \pi_{mn,\alpha}^{(1)\pm} \psi_{mn,\alpha}^{(1)\pm}(x_\alpha^1, x_\alpha^2) e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)\pm} x_\alpha^3} \end{cases}, \quad (5.32)$$

et

$$\begin{cases} \Gamma_{\beta}^{(1)}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2, x_{\beta}^3) = \sum_n \sum_m \gamma_{mn,\beta}^{(1)\pm} \psi_{mn,\beta}^{(1)\pm}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)\pm} x_{\beta}^3} \\ \Pi_{\beta}^{(1)}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2, x_{\beta}^3) = \sum_n \sum_m \pi_{mn,\beta}^{(1)\pm} \psi_{mn,\beta}^{(1)\pm}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)\pm} x_{\beta}^3} \end{cases} \quad (5.33)$$

En remarquant que l'on a $z = x_{\alpha}^3 + a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) = x_{\beta}^3 + a_{\beta}(x_{\beta}^1)$, on définit deux types de potentiels transformés (on ne détaillera les formules que pour Γ , celles pour Π étant analogues) :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2, x_{\alpha}^3) &= \Gamma_{\beta}^{(1)+}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2, x_{\alpha}^3 + a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) - a_{\beta}(x_{\beta}^1)) = \\ &= \sum_n \sum_m \gamma_{mn,\beta}^{(1)+} \psi_{mn,\beta}^{(1)\pm}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)+}(a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) - a_{\beta}(x_{\beta}^1))} e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)+} x_{\alpha}^3}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

et

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2, x_{\beta}^3) &= \Gamma_{\alpha}^{(1)-}(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2, x_{\beta}^3 + a_{\beta}(x_{\beta}^1) - a_{\alpha}(x_{\alpha}^1)) = \\ &= \sum_n \sum_m \gamma_{mn,\alpha}^{(1)-} \psi_{mn,\alpha}^{(1)\pm}(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2) e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)-}(a_{\beta}(x_{\beta}^1) - a_{\alpha}(x_{\alpha}^1))} e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)-} x_{\beta}^3}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

On définit alors les fonctions propres transformées de la façon suivante :

$$\psi_{mn,\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) = \psi_{mn,\beta}^{(1)+}(x_{\beta}^1, x_{\beta}^2) e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)+}(a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) - a_{\beta}(x_{\beta}^1))}, \quad (5.36)$$

et

$$\psi_{mn,\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2) = \psi_{mn,\alpha}^{(1)-}(x_{\alpha}^1, x_{\alpha}^2) e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)-}(a_{\beta}(x_{\beta}^1) - a_{\alpha}(x_{\alpha}^1))}. \quad (5.37)$$

À partir de ces expressions, on va construire une matrice S particulière, dite matrice d'interface qui va nous permettre de relier les coefficients inconnus de la strate (1) liés à l'interface α à ceux liés à l'interface β . Pour ce faire, on va exprimer le fait que les deux représentations des potentiels de la strate 1 doivent être égales lorsqu'elles sont calculées au même point de l'espace. Cela s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+}(x^1, x^2, x_{\alpha}^3) &= \Gamma_{\alpha}^{(1)+}(x^1, x^2, x_{\alpha}^3), \\ \Gamma_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-}(x^1, x^2, x_{\beta}^3) &= \Gamma_{\alpha}^{(1)-}(x^1, x^2, x_{\beta}^3). \end{aligned} \quad (5.38)$$

En discrétisant ces relations dans le domaine de Fourier (ainsi que celles pour $\Pi^{(1)}$, obtenues de façon analogue), et en remarquant que l'on a :

$$\hat{\psi}_{mn,\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+} = \mathcal{TF} \left(\psi_{mn,\beta}^{(1)+} \right) * \mathcal{TF} \left(e^{j\lambda_{mn,\beta}^{(1)+}(a_{\alpha}(x_{\alpha}^1) - a_{\beta}(x_{\beta}^1))} \right), \quad (5.39)$$

et

$$\hat{\psi}_{mn,\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-} = \mathcal{TF} \left(\psi_{mn,\alpha}^{(1)-} \right) * \mathcal{TF} \left(e^{j\lambda_{mn,\alpha}^{(1)-}(a_{\beta}(x_{\beta}^1) - a_{\alpha}(x_{\alpha}^1))} \right), \quad (5.40)$$

où \mathcal{TF} désigne la transformée de Fourier et $*$ le produit de convolution, on construit la matrice S de couche $\tilde{S}^{(1)}$ définie par :

$$\begin{bmatrix} b_\alpha^{(1)+} \\ b_\beta^{(1)-} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{S}_{\beta \rightarrow \alpha}^{(1)+} & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{\alpha \rightarrow \beta}^{(1)-} \end{bmatrix}}_{\tilde{S}^{(1)}} \begin{bmatrix} b_\beta^{(1)+} \\ b_\alpha^{(1)-} \end{bmatrix}, \quad (5.41)$$

où les sous-blocs sont définis par :

$$[b_\alpha^+] = [\tilde{S}_{\beta \rightarrow \alpha}^+] [b_\beta^+] \text{ et } [b_\beta^-] = [\tilde{S}_{\alpha \rightarrow \beta}^-] [b_\alpha^-].$$

On voit donc que le calcul de ces matrices S d'interfaces permet de passer d'une base modale à une autre. On peut alors imaginer une autre utilisation de ces matrices. En effet, les champs obtenus par cette méthode sont calculés sous forme modale dans les systèmes de coordonnées naturels associés aux interfaces complexes considérées. L'inconvénient est alors que les composantes de champs sont obtenues nécessairement sur des surfaces parallèles à l'interface considérée. L'utilisation de ces matrices S peut alors nous permettre de propager la solution obtenue sur ce type de surface vers une autre surface d'observation : un plan par exemple, ou un demi-cylindre, ce qui permet de faciliter le couplage éventuel avec d'autres modèles travaillant sur des grilles cartésiennes.

5.3.4 Résolution numérique

La stratégie de résolution consiste en une extension de celle que l'on a utilisée pour calculer les solutions dans le cas d'une pièce présentant des interfaces complexes parallèles : on va calculer une matrice S globale permettant de représenter la pièce comme une boîte noire avec 2 entrées et deux sorties. La différence ici est que la matrice d'interface $\tilde{S}^{(p)}$ doit être incorporée lors du calcul de la matrice globale $S(N, p - 1)$.

En effet, la matrice $S(p, p - 1)$ est calculée en exprimant la continuité des composantes tangentielles des champs sur l'interface entre les milieux p et $p - 1$. Elle relie donc les coefficients des expansions modales des potentiels exprimées dans le repère lié à cette interface. Par définition, la matrice $S(N, p)$ relie, quant à elle, les coefficients de la strate inférieure aux coefficients de la strate p associés au repère lié à l'interface entre les milieux p et $p + 1$. Il est donc nécessaire afin de compléter le schéma de relier les coefficients associés aux deux repères différents présents dans le milieu p . Ce point est illustré, pour la configuration simplifiée ne présentant que deux interfaces, sur la figure 5.4.

L'algorithme de calcul des matrices S ainsi modifiées est le suivant :

Algorithme Calcul des Matrices S modifiées

Début

Initialisation: $S(N, N) \leftarrow I_d[8(2M_u + 1)]$

Pour p variant de N à 1 faire

Calculer $S(p, p - 1)$

Calculer $\tilde{S}_{(p,p-1) \rightarrow (p+1,p)}^-$ et $\tilde{S}_{(p+1,p) \rightarrow (p,p-1)}^+$:

$\tilde{S}_{(p+1,p) \rightarrow (p,p-1)}^+ \leftarrow [\hat{\psi}_{(p,p-1)}^{(p)+}]^{-1} [\hat{\psi}_{(p+1,p) \rightarrow (p,p-1)}^{(p)+}]$

$\tilde{S}_{(p,p-1) \rightarrow (p+1,p)}^- \leftarrow [\hat{\psi}_{(p+1,p)}^{(p)-}]^{-1} [\hat{\psi}_{(p,p-1) \rightarrow (p+1,p)}^{(p)-}]$

Calculer $\tilde{S}(N, p)$

$\tilde{S}(N, p) \leftarrow \begin{bmatrix} \tilde{S}_{(p+1,p) \rightarrow (p,p-1)}^+ & 0 \\ 0 & I_d \end{bmatrix} S(N, p) \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & \tilde{S}_{(p,p-1) \rightarrow (p+1,p)}^- \end{bmatrix}$

Calculer S(N,p) en utilisant $S(p, p - 1)$ et $\tilde{S}(N, p)$:

$U_p \leftarrow [I_d[2(2M_u + 1)] - S_{12}(N, p)S_{21}(p, p - 1)]^{-1}$

$S_{11}(N, p - 1) \leftarrow S_{11}(p, p - 1)U_p\tilde{S}_{11}(N, p)$

$S_{12}(N, p - 1) \leftarrow S_{11}(p, p - 1)U_p\tilde{S}_{12}(N, p)S_{22}(p, p - 1) + S_{12}(p, p - 1)$

$S_{21}(N, p - 1) \leftarrow \tilde{S}_{21}(N, p) + \tilde{S}_{22}(N, p)S_{21}(p, p - 1)U_p\tilde{S}_{11}(N, p)$

$S_{22}(N, p - 1) \leftarrow \tilde{S}_{22}(N, p)(S_{21}(p - 1, p)U_p\tilde{S}_{12}(N, p) + I_d)S_{22}(p, p - 1)$

Stocker $S(N, p - 1)$

$p = p - 1$

FinPour

Fin

Celui-ci généralise le calcul des matrices S au cas d'un conducteur présentant plusieurs interfaces non parallèles. Un fois ces matrices obtenues, le calcul des coefficients et la reconstruction des champs se fait de la même manière que pour le cas parallèle.

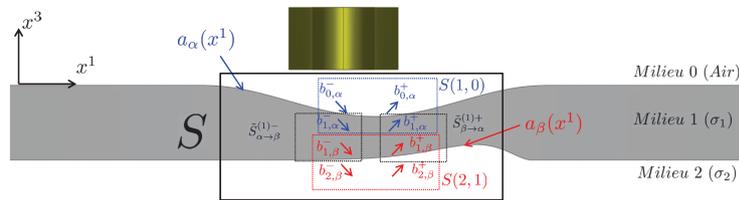


FIGURE 5.4 – Schéma illustrant les différents types de coefficients existant dans une strate formée par deux interfaces non-parallèles.

Validation des modèles développés

Sommaire

6.1	Introduction	98
6.2	Cas # 1 : demi-espace complexe	98
6.2.1	Validation Expérimentale	98
6.2.2	Validation Numérique	109
6.3	Cas # 2 : pièce avec interfaces complexes parallèles	115
6.4	Cas # 3 : pièce à interfaces complexes non-parallèles	122
6.5	Conclusion	129

6.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre les différents résultats de validation obtenus pour le modèle développé. Pour les trois classes de configuration que nous avons abordé dans les chapitres précédents, nous avons en effet comparé le modèle à des solutions de référence. Dans le cas du demi-espace, nous avons tout d'abord comparé le modèle à des résultats expérimentaux dans une configuration correspondant à un besoin industriel. J'ai effectué ces acquisitions au laboratoire et nous présentons ici la chaîne d'acquisition utilisée ainsi que les différents traitements nécessaires à la validation. Cette validation m'a permis de m'assurer que le modèle donnait des résultats corrects et qu'il répondait ainsi au besoin industriel. Néanmoins, elle ne permet de valider que le calcul de l'impédance puisque le capteur utilisé pour la mesure est une bobine.

Ainsi, afin de valider pleinement le modèle, nous avons choisi de comparer les résultats à ceux obtenus grâce à un logiciel commercial de calcul par éléments finis [Multiphysics 2012]. Les composantes covariantes des champs complexes obtenues sont alors comparées à celles données par notre modèle sur des interfaces parallèles aux profils géométriques (plans d'équation $x^3 = c^{ste}$) et nous effectuons aussi des extractions de ces composantes dans des plans $x^1 = c^{ste}$ et $x^2 = c^{ste}$. Enfin, nous calculons l'erreur relative commise sur chaque composante X_i , $i = 1, 2, 3$ en utilisant la formule suivante :

$$\xi = \left\| \frac{X_i^{(CCM)} - X_i^{(FEM)}}{X_i^{(FEM)}} \right\|, \quad (6.1)$$

où $|\cdot|$ désigne le module du nombre complexe ..

La machine utilisée pour le calcul par éléments finis possède deux cœurs d'une fréquence d'horloge de 3.1 GHz et 32 Gb de mémoire RAM. Celle utilisée pour les calculs avec la méthode semi-analytique (que l'on nommera *CCM* pour Curvilinear Coordinate Method) possède deux cœurs de 3.1 GHz de fréquence d'horloge et 8 Gb de mémoire vive. Nous présentons, en plus des résultats obtenus, les paramètres numériques ainsi que les temps de calcul de la méthode CCM dans les différentes configurations considérées. Concernant le modèle éléments finis, le temps de calcul pour chacune des configurations est sensiblement le même. En effet, la configuration implémentée (notamment le maillage) conduit à la détermination de près de 5 millions de degrés de liberté dans chaque cas. Le temps de calcul pour chaque position du capteur est de l'ordre de la quinzaine de minutes.

6.2 Cas # 1 : demi-espace complexe

6.2.1 Validation Expérimentale

6.2.1.1 Configuration

Comme nous l'avons vu dans l'introduction, l'application industrielle visée par ces développements s'inscrit dans le cadre du projet européen SIMPOSIUM. Notre

principal partenaire industriel est la société Arcelor Mittal (AMMR) qui souhaite simuler le contrôle par une méthode électromagnétique de plaques d'alliage fer-carbone obtenues par une méthode de coulée continue (cf Introduction). Le point de contrôle visé se situe durant la phase de refroidissement du métal et celui-ci y présente une surface ondulée périodique et extrudée suivant la direction transverse, résultant de son roulement entre des rouleaux. De plus, sa température y est estimée à 1500°C et sa conductivité avoisine 1MS/m.

Afin de valider expérimentalement le modèle développé en se rapprochant le plus possible des conditions réelles, des maquettes en titane ont été usinées afin de créer une surface périodique triangulaire (cf. figure 6.1). La conductivité du titane à température ambiante est de l'ordre de 0.6MS/m. Bien qu'il existe des acier inoxydables dont la conductivité à température ambiante soit plus proche de celle du matériau réel, ceux-ci présentent l'inconvénient de subir une transformation de surface lors des procédés d'usinage. Cette transformation dite « martensitique », résultant de la variation rapide de température induite par le procédé d'usinage, conduit à l'apparition d'un comportement ferromagnétique du matériau, qui perturberait fortement le signal de la sonde.



FIGURE 6.1 – Vue de dessus de l'une des deux maquettes utilisées pour la validation expérimentale du code.

6.2.1.2 Caractérisation de la chaîne d'acquisition

Concernant la partie acquisition, nous avons utilisé une bobine cylindrique sans noyau de ferrite dont les paramètres géométriques sont présentés sur la figure 6.2. Il est important de noter que la chaîne d'acquisition réelle comporte des éléments parasites qui sont représentés sur la figure 6.3. Ce modèle électrique a été initiale-

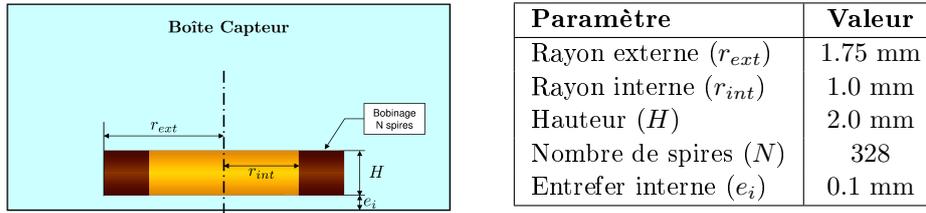


FIGURE 6.2 – Paramètres géométriques du capteur utilisé pour les acquisitions

ment proposé par D. J. Harrison *et al.* [Harrison 1996]. Les différents composants introduits ici représentent chacun une contribution particulière à l'impédance totale de l'ensemble sonde et chaîne d'acquisition. En effet, les composants R_s et C_s représentent respectivement la résistance et la capacité interne du capteur tandis que R_0 et L_0 représentent la résistance et l'inductance de la sonde en régime continu (DC). La capacité C_L modélise l'effet capacitif parasite dû au câbles de connexion. Tous les autres parasites que l'on ne sait pas identifier de manière précise sont regroupés sous la forme d'une impédance Z_c (elle prend en compte par exemple l'inductance linéique des câbles). Finalement, l'impédance Z représente la variation d'impédance due à l'induction de courants de Foucault dans le conducteur sous test (c'est la grandeur que l'on aimerait isoler lors de la mesure effectuée à l'aide d'un impédancemètre).

Finalement, suivant [Harrison 1996], nous regroupons toutes les impédances parasites dues à la chaîne d'acquisition (hormis la sonde) sous la forme d'une seule impédance Z_p comme on peut le voir sur la figure 6.3. Cette impédance Z_p permet de prendre en compte tous les effets capacitifs, résistifs et inductifs parasites de la chaîne d'acquisition. Elle est donc infinie lorsque la fréquence tend vers 0.

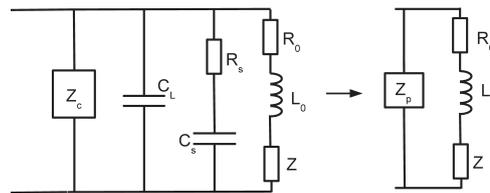


FIGURE 6.3 – Schéma électrique représentant la chaîne d'acquisition.

Afin de réaliser une validation expérimentale, il faut nous assurer que la configuration simulée correspond bien aux conditions expérimentales. Nous avons vu que le champ de référence que nous utilisons dans le modèle développé était calculé par un module semi-analytique permettant de calculer le champ rayonné par une sonde inductive (considérée comme une source de courant parfaite) au-dessus d'un plan

conducteur. Il est clair que les impédances parasites ne sont pas prises en compte dans notre modèle en l'état actuel. Deux solutions s'offrent à nous : modifier le modèle en prenant en compte les impédances parasites (il existe des travaux à ce sujet [Skarlatos 2012]) ou « filtrer » les contributions des éléments parasites sur le signal expérimental. Notre connaissance grossière des différentes impédances parasites nous conduit à opter pour la deuxième option.

On va maintenant chercher à identifier les différents éléments de la chaîne d'acquisition afin de les soustraire à la mesure et donc d'isoler l'impédance Z . Moulder *et al.* [Moulder 1998] ont proposé un protocole que nous résumons ici.

La première étape consiste à effectuer des mesures de l'impédance en l'absence du spécimen à des fréquences les plus basses possibles. L'impédance mesurée dans ces conditions est notée $Z_A(\omega)$. On peut alors en déduire les valeurs de R_0 et L_0 . En effet, pour R_0 , on choisira la valeur moyenne de la partie réelle de Z_A . Pour déterminer L_0 , on effectue une régression linéaire ($\Im(Z_A)$ est considérée comme étant sensiblement égale à $jL_0\omega$), la pente de la droite nous donnant L_0 . Ainsi, on peut donc directement obtenir l'admittance $Y_p = 1/Z_p$ parasite en écrivant :

$$Y_p(\omega) = Y_A(\omega) - Y_0(\omega), \quad (6.2)$$

ce qui nous permettra par la suite de corriger les acquisitions en écrivant que l'impédance corrigée $Z_{corr}(\omega) = 1/Y_{corr}(\omega)$ vérifie :

$$Z_{corr}(\omega) = \frac{1}{Y(\omega) - Y_p(\omega)}, \quad (6.3)$$

où $Y(\omega) = 1/Z(\omega)$ désigne l'admittance brute mesurée.

Afin d'illustrer ce traitement, nous avons dans un premier temps effectué la correction sur le signal brut obtenu dans l'air pour des fréquences comprises entre 100 Hz et 4 MHz. Les valeurs de R_0 et L_0 sont obtenues par des acquisitions à des fréquences comprises entre 100 Hz et 25 kHz qui donnent $R_0 = 24.018 \Omega$ et $L_0 = 0.179$ mH.

Sur la figure 6.4, nous avons tracé les parties réelle et imaginaire de la mesure brute dans l'air. On observe un comportement fortement résonnant autour de la fréquence de 2.7 MHz, ce qui confirme bien la présence d'effets capacitifs parasites dans la chaîne d'acquisition. Rappelons ici que nous souhaitons valider un modèle permettant de calculer la réponse d'une sonde durant le scan d'un demi espace de géométrie complexe. La maquette dont nous disposons présentant une épaisseur de l'ordre de deux millimètres, nous allons donc nous placer à des fréquences importantes afin de limiter la profondeur de pénétration des champs et ainsi d'éviter une réflexion non désirée sur la deuxième interface. On travaillera donc entre 250 kHz et 1 MHz.

Sur la figure 6.5, nous avons représenté les données obtenues dans l'air après correction (cette fois ci avec une échelle de fréquence linéaire). Il s'agit donc, idéal-

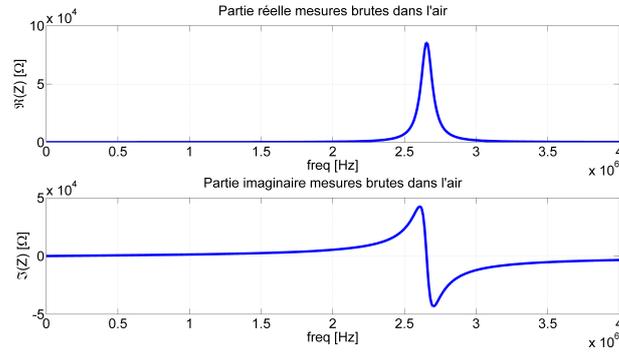


FIGURE 6.4 – Parties réelle et imaginaire de l'impédance brute mesurée dans l'air.

lement de l'impédance de la sonde seule dans l'air et l'on peut noter la disparition de la résonance et donc la compensation de tout effet capacitif.

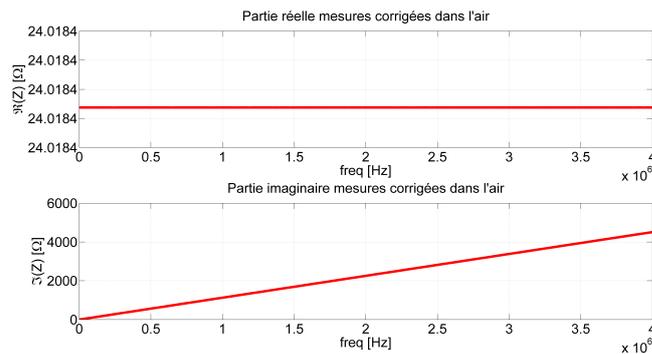


FIGURE 6.5 – Parties réelle et imaginaire de l'impédance corrigée dans l'air.

6.2.1.3 Caractérisation de la sonde

Nous venons de voir comment procéder afin de s'affranchir des effets parasites de la chaîne d'acquisition. Nous souhaitons maintenant corriger encore les mesures afin de s'affranchir d'un effet parasite que le modèle utilisé pour le calcul des champs de référence ne prend pas en compte. Il s'agit de l'effet de peau apparaissant dans le bobinage même de la sonde lorsque l'on y impose un courant variable. En effet, la densité de courant dans le bobinage en cuivre n'est pas uniforme : elle est d'autant plus concentrée à l'extérieur du fil que la fréquence d'excitation est importante. Afin de tenir compte de cet effet à l'échelle du capteur, nous avons choisi de déterminer un rayon extérieur effectif de la bobine (qui sera donc nécessairement plus faible que le rayon extérieur indiqué par le constructeur) qui sera par la suite utilisé comme donnée d'entrée pour le modèle. Le rayon intérieur restera quant à lui inchangé.

Afin de déterminer le rayon effectif optimal, nous avons utilisé une méthode d'optimisation stochastique (recuit simulé) qui nous permet de déterminer le rayon extérieur qui minimise l'écart entre la mesure de l'inductance corrigée par la méthode précédente et l'inductance L_0 d'une bobine idéale calculée par un modèle analytique [Dodd 1974]. La procédure exacte est la suivante :

```

Routine recherche( $T_{init}, T_{final}, r_{min}, r_{max}, \lambda, fobj$ ) : ( $r_{eff}, fobj(r_{eff})$ )
  Initialisation:  $T \leftarrow T_{init}$ 
  Initialisation:  $r \leftarrow r_{min} + (r_{max} - r_{min}) \times random(0, 1)$ 
  Initialisation:  $z \leftarrow fobj(r)$ 
  TantQue  $T > T_{finale}$  faire
     $r_+ \leftarrow r_{min} + (r_{max} - r_{min}) \times random(0, 1)$ 
     $z_+ \leftarrow fobj(r_+)$ 
     $g \leftarrow e^{-(z_+ - z)/T}$ 
    Si  $z_+ < z$  ou  $random(0, 1) < g$  Alors
       $r \leftarrow r_+$ 
       $z \leftarrow z_+$ 
    FinSi
     $T = \lambda T$ 
  FinTantQue
  Retourner  $r$ 
  Retourner  $z$ 
Fin

```

Les grandeurs d'entrée $T_{init}, T_{final}, r_{min}, r_{max}, \lambda$ et $fobj$ désignent respectivement les températures initiales et finales, les bornes de l'espace de recherche (1D ici) du rayon effectif, un paramètre de décroissance de l'algorithme ($0 < \lambda < 1$) et la fonction objectif permettant de calculer l'erreur entre la mesure et la solution courante du modèle analytique. La routine renvoie donc le rayon effectif calculé ainsi que la valeur de la fonction objectif pour ce rayon. La fonction objectif est ici définie sous la forme de l'erreur suivante :

$$fobj(r_{ext}) = \left| \frac{L_0(r_{ext}) - L_{mesure}}{L_{mesure}} \right|, \quad (6.4)$$

On choisit les bornes 1.0 mm et 3.0 mm pour l'espace de recherche et on fixe les autres paramètres aux valeurs suivante : $T_{ini} = 100$, $T_{finale} = 10^{-8}$ et $\lambda = 0.75$. Avec ces valeurs, on obtient un rayon extérieur effectif d'une valeur de 1.56 mm qui permet d'obtenir une valeur minimale de 6.10^{-3} pour la fonction objectif. Les évolutions de ces deux grandeurs au cours de la recherche sont représentées sur la figure 6.6.

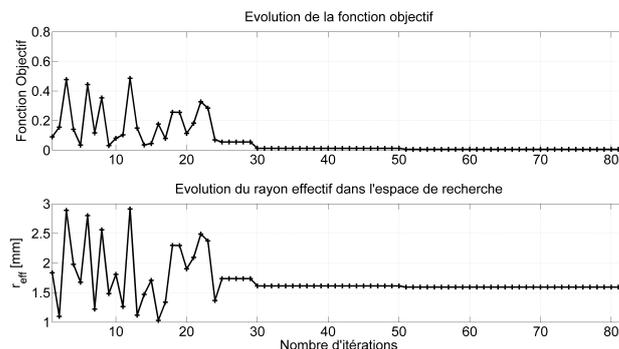


FIGURE 6.6 – Trajectoires de la fonction objectif et du rayon extérieur effectif au cours de l'algorithme d'optimisation.

6.2.1.4 Caractérisation du specimen

La dernière étape avant de comparer les résultats de simulation aux résultats expérimentaux consiste à déterminer conjointement la conductivité exacte de la pièce ainsi que l'entrefer réel durant l'acquisition. La stratégie que l'on adopte ici est sensiblement la même que pour la détermination du rayon effectif de la sonde, mais cette fois-ci, nous avons deux paramètres à estimer et les mesures utilisées à cette fin doivent bien entendu être effectuées en présence de la pièce. Nous avons donc effectué des mesures de l'impédance de la sonde à plusieurs fréquences en l'ayant au préalable plaquée sur la zone plane du specimen (zone bleue sur la photo 6.1).

De plus, le modèle direct utilisé ici est le même modèle que celui utilisé pour le calcul des champs de référence de notre modèle [Dodd 1968] : il permet de tenir compte de la présence d'une pièce plane conductrice. Les paramètres que l'on fait varier ici sont donc la conductivité du specimen ainsi que l'entrefer de la configuration. On explore un espace de recherche à deux dimensions et l'on cherche à minimiser une nouvelle fonction objectif $fobj_2$ définie cette fois-ci par :

$$fobj_2(\sigma, l_0) = \left(\frac{R_0(\sigma, l_0) - R_{mesure}}{R_{mesure}} \right)^2 + \left(\frac{L_0(\sigma, l_0) - L_{mesure}}{L_{mesure}} \right)^2.$$

L'algorithme de type recuit simulé est donc étendu afin de rechercher deux paramètres et est utilisé de la même manière que précédemment. En utilisant notre connaissance *a priori* de la conductivité de la pièce de titane, on restreint le domaine de recherche de la valeur de la conductivité à l'intervalle $[0.1, 0.7]$ MS/m et celui de l'entrefer à $[0.05, 0.5]$ mm. Les fréquences d'acquisition considérées sont équi-réparties entre 100 kHz et 900 kHz. Les paramètres numériques de l'algorithme d'optimisation sont les mêmes que pour le cas précédent.

On obtient alors une conductivité d'une valeur de 0.580 MS/m et un entrefer de 0.254 mm qui conduisent à une valeur minimale de 2.910^{-2} de la fonction objectif.

La trajectoire suivie par la conductivité et par l'entrefer durant l'algorithme de recherche dans l'espace 2D est représentée sur la figure 6.7 et l'évolution de la fonction objectif correspondant sur la figure 6.8.

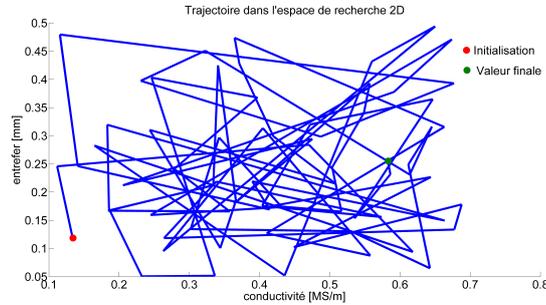


FIGURE 6.7 – Trajectoire suivie par la conductivité et l'entrefer durant la recherche.

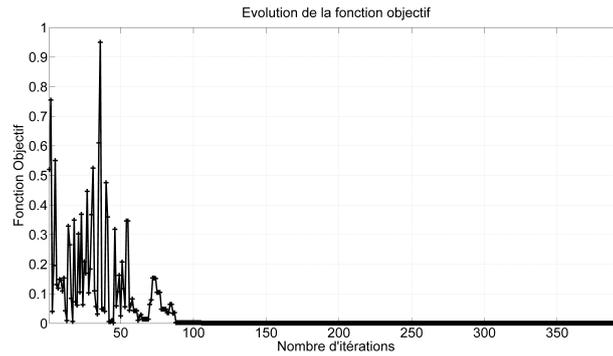


FIGURE 6.8 – Évolution de la fonction objectif $f_{obj_2}(\sigma, l_0)$ durant la recherche conjointe de la conductivité et de l'entrefer.

On peut noter que l'espace de recherche est en grande partie exploré, ce qui permet de s'assurer que le résultat obtenu ne correspond pas à un minimum local de la fonction objectif. C'est l'intérêt principal des algorithmes stochastiques qui en revanche s'avèrent très lourds dès lors que la dimension de l'espace de recherche augmente.

Finalement, afin de s'assurer que tous les paramètres estimés sont exacts, on peut comparer les évolutions fréquentielles des impédances mesurée et calculée lorsque le capteur est placée sur la partie plane de la pièce. On représente alors les évolutions de $\Delta R = R - R_0$ et de $\Delta X = X - X_0 = jL\omega - jL_0\omega$ respectivement sur les figures 6.9 et 6.10.

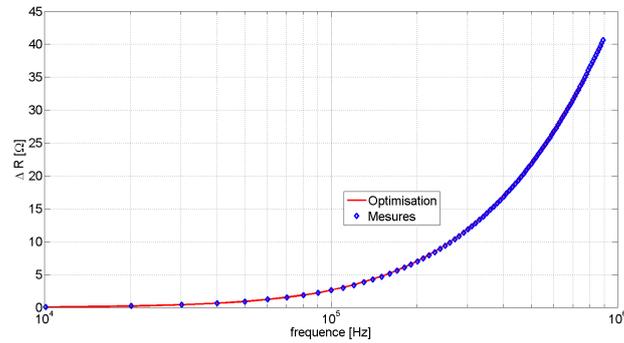


FIGURE 6.9 – Évolutions mesurée et calculée de ΔR en fonction de la fréquence.

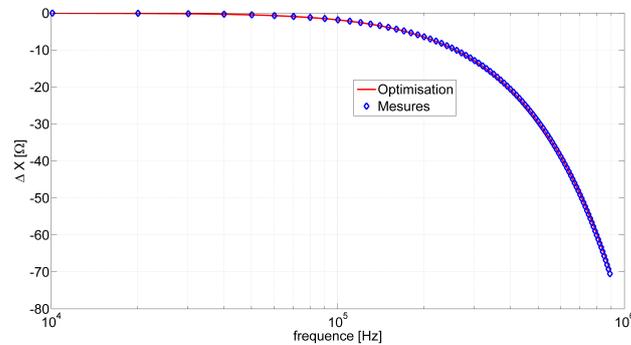


FIGURE 6.10 – Évolutions mesurée et calculée de ΔX en fonction de la fréquence.

6.2.1.5 Comparaisons

Afin de comparer les résultats obtenus avec le modèle aux acquisitions, nous avons donc considéré la configuration dont les paramètres sont donnés sur la figure 6.11. De plus, les paramètres numériques utilisés pour le modèle sont les suivants :

Paramètre	Valeur
M_u	85
M_v	25
δ_1	0.2 mm
δ_2	0.2 mm
L_1	44 mm
L_2	30 mm

Sur la figure 6.12 et 6.13, nous avons tracé les parties réelles et imaginaires de l'impédance simulée et du signal expérimental corrigé obtenues lors du balayage d'une période du profil triangulaire aux fréquences d'excitation 350 kHz et 600 kHz.

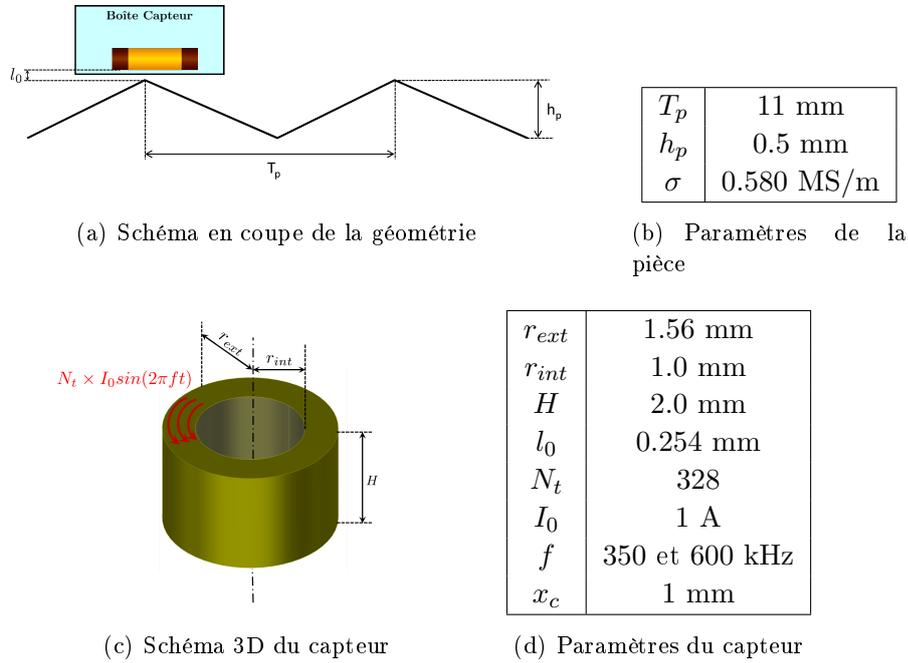


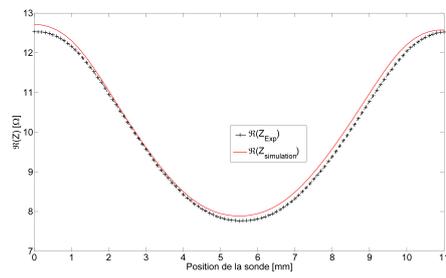
FIGURE 6.11 – Paramètres de la configuration utilisée pour la validation expérimentale du modèle.

On peut voir un très bon accord des résultats et notamment de leur valeur moyenne (très sensible à la valeur de l'entrefer), ce qui montre l'intérêt de déterminer avec soin les paramètres réels et effectifs de la configuration. Ces résultats ont été obtenus sur une machine possédant deux coeurs de 2.8 GHz et 8 Gb de mémoire vive. Les temps de calculs pour les différentes étapes de la résolution sont présentés dans le tableau 6.1.

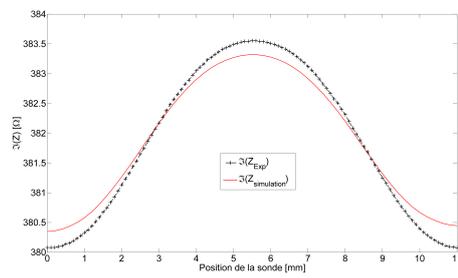
Opération	Temps CPU (s)
Calcul des modes	23.36
1 ^{er} Calcul du champ de référence	34.07
Interpolation du champ de référence	5.46
Calcul des coefficients et de Z	10.06
Total 1 ^{er} point	72.95
Total points suivants	15.35

TABLE 6.1 – Détail (par position du capteur) du temps de calcul de l'impédance simulée.

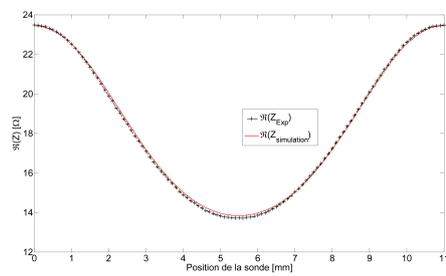
On remarque que le temps de calcul du champ de référence est séparé en deux. En effet, étant donné que ce champ est calculé sur l'interface complexe mais en pré-



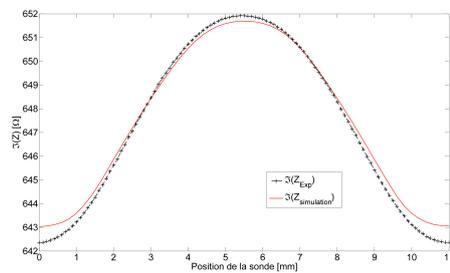
(a) Partie Réelle



(b) Partie Imaginaire

FIGURE 6.12 – Impédance obtenue pour $f = 350$ kHz

(a) Partie Réelle



(b) Partie Imaginaire

FIGURE 6.13 – Impédance obtenue pour $f = 600$ kHz

sence d'une pièce plane, nous avons choisi de le calculer sur une grille rectangulaire englobant la surface complexe. Le calcul est alors stocké et lors d'un déplacement du capteur, c'est en fait la surface d'intérêt que l'on déplace et le champ de référence est simplement ré-interpolé.

6.2.2 Validation Numérique

Nous présentons ici les résultats de validation numérique pour le cas d'un demi-espace présentant une interface complexe. Les champs calculés par notre méthode sont comparés à ceux obtenus par la méthode des éléments finis. Nous considérons la configuration représentée sur la figure 6.14(a) et dont les différents paramètres sont détaillés sur la figure 6.14. La fréquence choisie ici est arbitraire et on choisira des fréquences différentes pour chaque configuration traitée. Le profil considéré est une période de cosinusoïde.

Les tableaux de la figure 6.15 recensent les paramètres numériques utilisés pour le calcul ainsi que les différents temps de calcul obtenus pour cette configuration. Ces paramètres doivent être ajustés en fonction de la fréquence : comme nous l'avons déjà vu, l'expansion spatiale des champs est d'autant plus importante que la fréquence est basse et l'on doit s'assurer que ceux-ci sont bien nuls sur les extrémités de la boîte. En d'autres termes, plus la fréquence est basse et plus les paramètres L_1 et L_2 devront être grands (pour rappel, ces paramètres désignent les tailles du domaine numérique considéré dans les directions x^1 et x^2 respectivement). On doit alors augmenter le nombre de modes afin d'assurer la convergence de la méthode. Ce point constitue l'inconvénient majeur de la stratégie de discrétisation que nous avons choisie : les paramètres numériques sont très fortement dépendant de la fréquence considérée.

Concernant les temps de calcul, nous avons séparé les différentes contributions. Pour cette validation numérique, nous ne nous sommes intéressés qu'au calcul des champs pour une seule position du capteur et donc l'intégralité du calcul a dû être effectué. Cependant, le temps de calcul des champs pour une nouvelle position du capteur serait nettement plus faible comme on peut le remarquer dans le tableau 6.15(b).

Sur la figure 6.16, nous avons représenté les cartographies des parties réelles et imaginaires des composantes du champ électriques obtenues par les deux méthodes sur une surface d'équation $x^3 = -0.8$ mm. De même, les cartographies des composantes de \mathbf{H} apparaissent sur la figure 6.17. On voit un très bon accord des résultats et pour s'en assurer, nous avons tracé les erreurs relatives correspondantes sur la figure 6.18. Celles-ci sont très faibles puisqu'elles sont inférieures à 1% hormis en des points isolés où elles atteignent 2%.

Afin de compléter la validation numérique, nous avons représenté sur la figure 6.19 les différentes composantes calculées sur les lignes formées par les intersections des plans $x^1 = c^{ste}$ (ou $x^2 = c^{ste}$) et des surfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -0.8$ mm. Les différentes sous-figures montrent ces composantes dans le plan complexe et on peut voir un très bon accord entre les deux résultats quelque soit la profondeur d'observation.

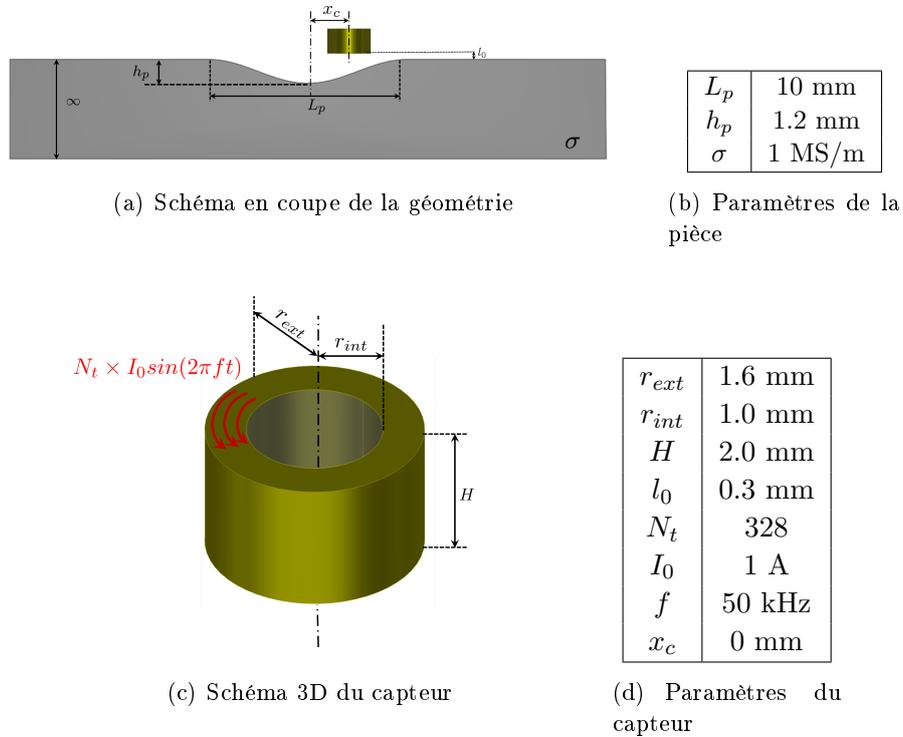


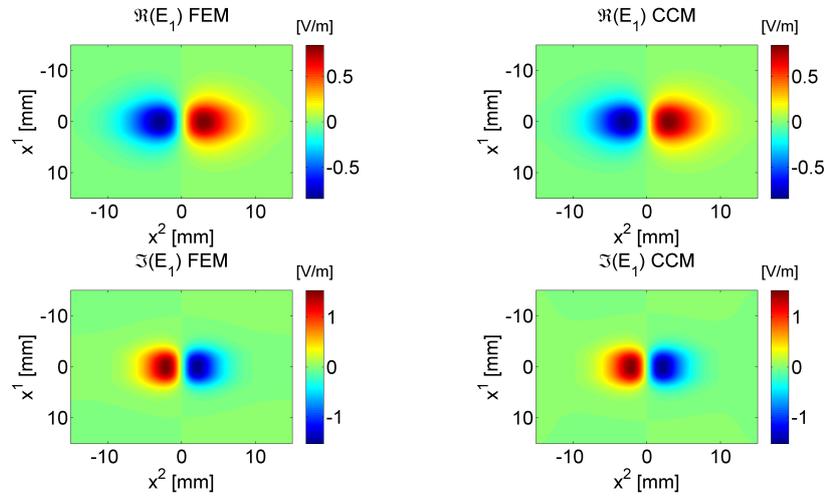
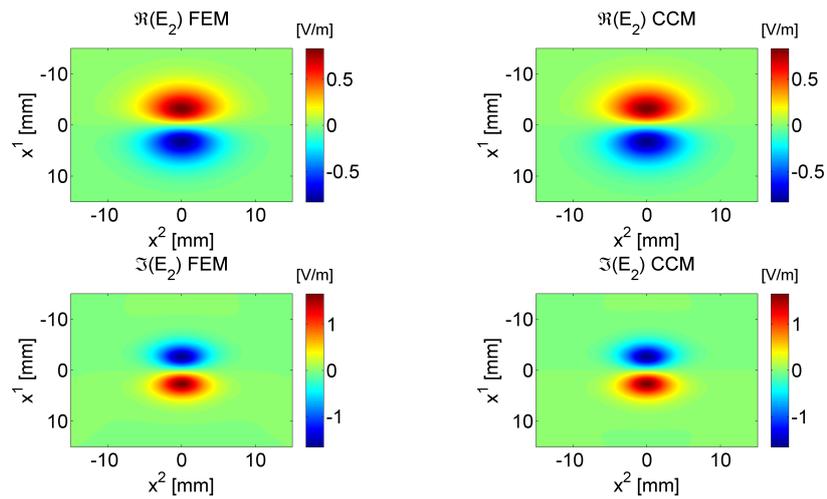
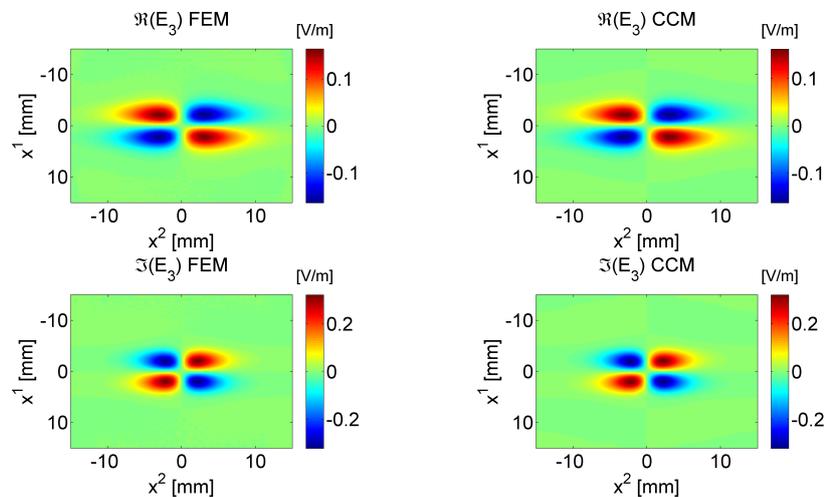
FIGURE 6.14 – Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.

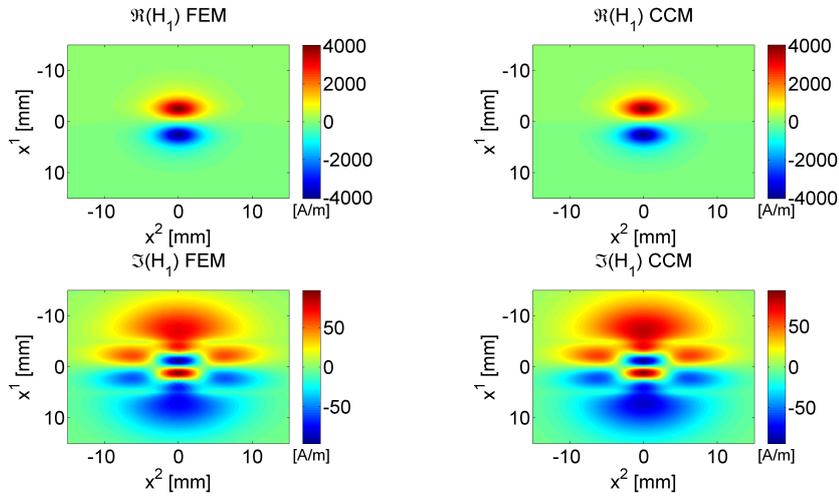
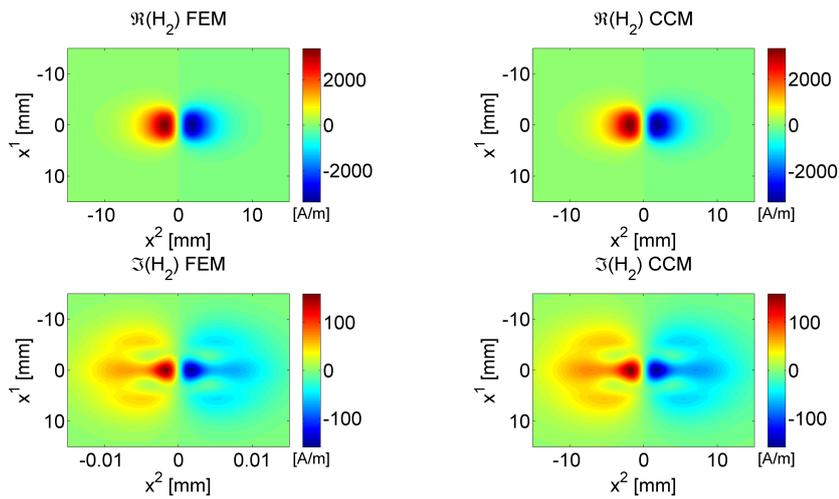
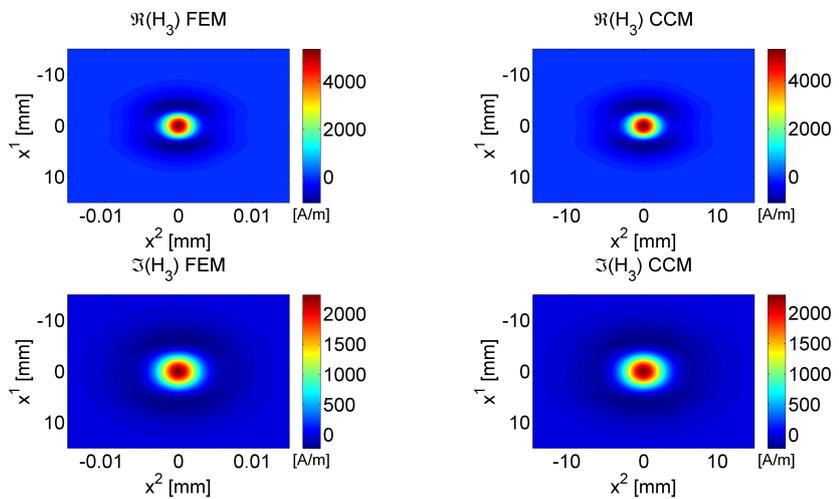
Paramètre	Valeur	Opération	Temps CPU (s)
M_u	85	Calcul des modes	26.3
M_v	55	1 ^{er} Calcul du champ de référence	36.2
L_1	90 mm	Interpolation du champ de référence	3.6
L_2	90 mm	Calcul des coefficients et de Z	13.8
δ_{x1}	0.1 mm	Total 1 ^{er} point	76.3
δ_{x2}	0.2 mm	Total points suivants	17.4

(a) Paramètres numériques utilisés pour la validation

(b) Détail des temps de calcul de la méthode CCM

FIGURE 6.15 – Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle dédié aux demi-espaces et temps de calcul correspondants.

(a) Cartographie de E_1 (b) Cartographie de E_2 (c) Cartographie de E_3 FIGURE 6.16 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.

(a) Cartographie de H_1 (b) Cartographie de H_2 (c) Cartographie de H_3 FIGURE 6.17 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.

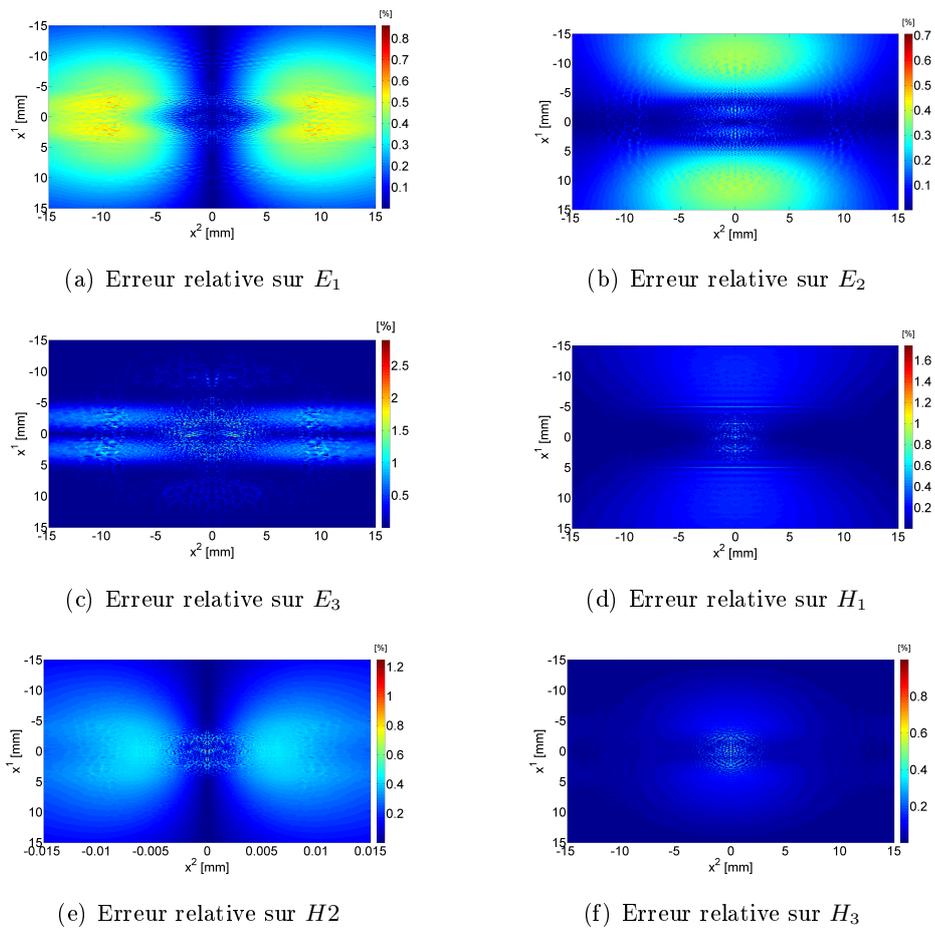


FIGURE 6.18 – Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.

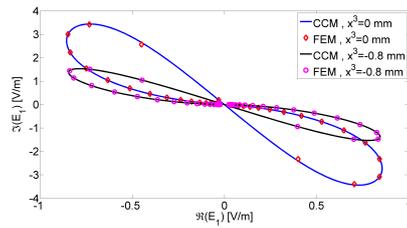
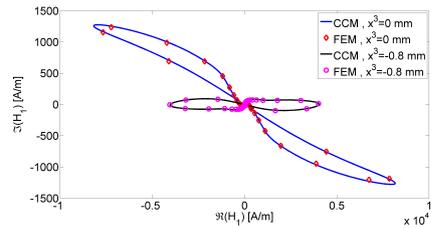
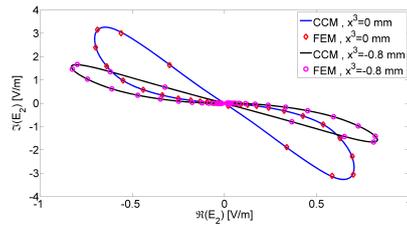
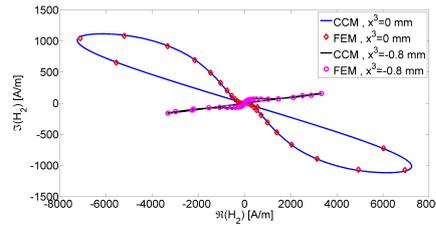
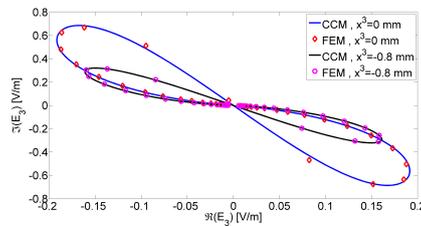
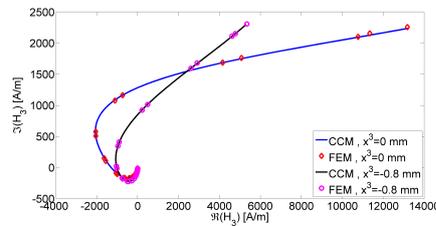
(a) Extraction de E_1 dans le plan $x^1 = 0$ (b) Extraction de H_1 dans le plan $x^2 = 0$ (c) Extraction de E_2 dans le plan $x^2 = 0$ (d) Extraction de H_2 dans le plan $x^1 = 0$ (e) Extraction E_3 dans le plan $x^1 = 2$ mm(f) Extraction H_3 dans le plan $x^1 = 0$

FIGURE 6.19 – Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -0.8$ mm.

Ces résultats montrent que le modèle développé permet un calcul des champs électromagnétiques en tout point du demi-espace conducteur (et de l'air) avec une bonne précision et un temps de calcul très faible en comparaison du modèle utilisé comme référence. Il est donc tout à fait adapté à des études paramétriques ou à de l'inversion (portant sur le profil géométrique par exemple...). De plus, la validation expérimentale du calcul de l'impédance montre que ce modèle permet de traiter efficacement des configurations réalistes (pour des plaques d'épaisseur importante devant l'épaisseur de peau tout du moins) et qu'il répond donc à un besoin industriel.

Nous proposons maintenant d'effectuer le même type de comparaisons dans le cas où la géométrie est formée de strates complexes parallèles. Dans ce cas, nous avons vu que le modèle était basé sur un couplage du formalisme SOVP généralisé avec un algorithme récursif.

6.3 Cas # 2 : pièce avec interfaces complexes parallèles

Afin de valider le modèle implémenté, nous avons effectué les calculs des champs électromagnétiques pour une pièce présentant trois interfaces parallèles dont la géométrie et les paramètres sont présentés sur la figure 6.21. Le profil géométrique est le même que dans la configuration précédente, et le capteur est excentré.

Les paramètres numériques que nous avons utilisés ainsi que les différents temps de calcul sont recensés dans les deux tableaux de la figure 6.20. On note que la fréquence est plus élevée que lors de la validation précédente, ce qui permet de choisir des bornes spatiales moins grandes et donc de réduire le nombre de modes nécessaires à la convergence du modèle.

Le calcul des éléments propres nécessite davantage d'opérations numériques que pour la configuration précédente, d'une part car il est nécessaire de calculer les vecteurs propres dans chacune des strates, et d'autre part car le temps de calcul correspondant inclut le calcul des matrices S . L'ensemble reste très rapide pour une configuration comportant peu de strates. Nous verrons dans la suite que ce calcul peut se révéler lourd lorsque le nombre de strates est très important (> 50).

De même que précédemment, nous avons tracé les cartographies des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes obtenues sur la surface d'équation $x^3 = 0$. Les composantes du champ \mathbf{E} sont représentées sur la figure 6.22, et celles du champ \mathbf{H} sur la figure 6.23. Les erreurs relatives sont quant à elles représentées sur la figure 6.24. Celles-ci sont encore une fois globalement faible, avec des pics locaux. Étant donné que nous approchons les solutions par des sommes tronquées d'ondes planes, l'erreur commise par la méthode CCM doit correspondre à la partie tronquée de cette somme. Il semble donc que cette erreur doit avoir un support important, et que la méthode ne peut introduire de pics de fréquence spatiale importante (les harmoniques de très hautes fréquences sont tronquées). Ce type d'erreur doit donc être causé par la méthode de calcul choisie pour référence.

Si l'on observe la figure 6.24(a), on peut remarquer deux types d'erreurs : l'une

Paramètre	Valeur	Opération	Temps CPU (s)
M_u	65	Calcul des modes et matrices S	38.5
M_v	35	1 ^{er} Calcul du champ de référence	37.6
L_1	70 mm	Interpolation du champ de référence	3.6
L_2	70 mm	Calcul des coefficients et de ΔZ	5.8
δ_{x1}	0.1 mm	Total 1 ^{er} point	81.9
δ_{x2}	0.2 mm	Total points suivants	9.4

(a) Paramètres numériques utilisés pour la validation

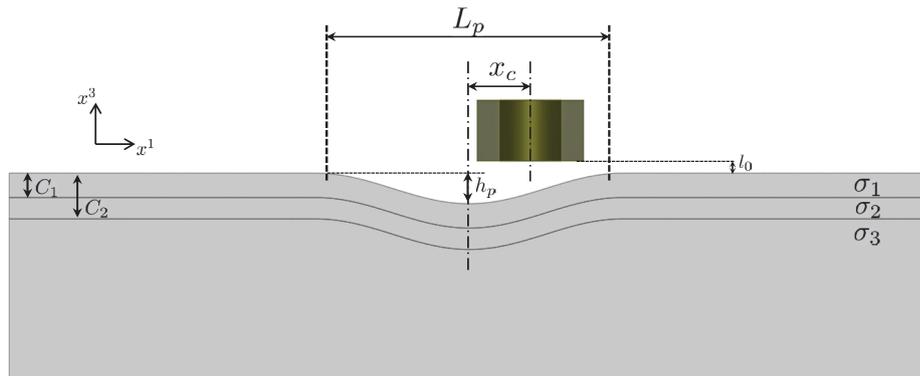
(b) Détail des temps de calcul de la méthode CCM

FIGURE 6.20 – Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié parallèle et temps de calcul correspondants.

oscillante de support important (et d'amplitude très faible) et l'autre formée de pics très locaux et d'amplitude plus forte. Nous pensons donc que la première émane de la troncature effectuée lors de la discrétisation et que l'autre émane de la solution éléments finis (on pourrait s'en affranchir en augmentant la densité du maillage).

Finalement, nous comparons les composantes de champs sur des lignes d'intersection entre les surfaces $x^3 = c^{ste}$ et des plans $x^1 = c^{ste}$ ou $x^2 = c^{ste}$ suivant les cas. Les résultats obtenus par les deux modèles pour les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -1.5$ mm sont représentés sur la figure 6.31. On peut noter un très bon accord et on remarque l'influence du dé-centrage du capteur qui conduit à des courbes de Lissajous dissymétriques.

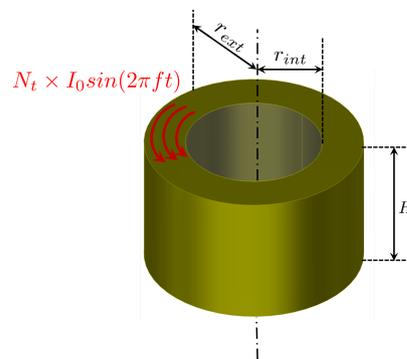
Ainsi, ces résultats montrent la validité du couplage du formalisme avec l'algorithme des paramètres S. Ce modèle permet ainsi de traiter des cas plus réalistes de pièces d'épaisseur finie. Il constitue en outre une première solution afin de traiter le cas de conducteurs présentant des propriétés variant avec la profondeur. Ceux-ci peuvent alors être approchés par une pièce présentant un nombre important de strates homogènes. Cette solution conduit cependant à des temps de calcul important si le nombre de strates nécessaires est important. Cependant, il est important de remarquer que le temps de calcul impacté est uniquement celui du calcul des éléments propres (et des matrices S). Ainsi, une fois ces grandeurs calculées et stockées, le calcul des solutions reste très léger.



(a) Schéma en coupe de la géométrie

L_p	h_p	C_1	C_2	σ_1	σ_2	σ_3
10 mm	1 mm	0.8 mm	1.5 mm	1 MS/m	0.5 MS/m	0.1 MS/m

(b) Paramètres de la pièce

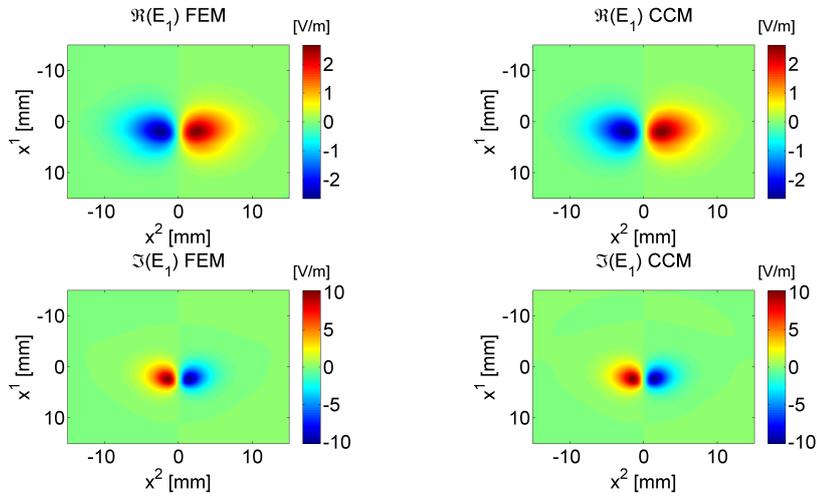
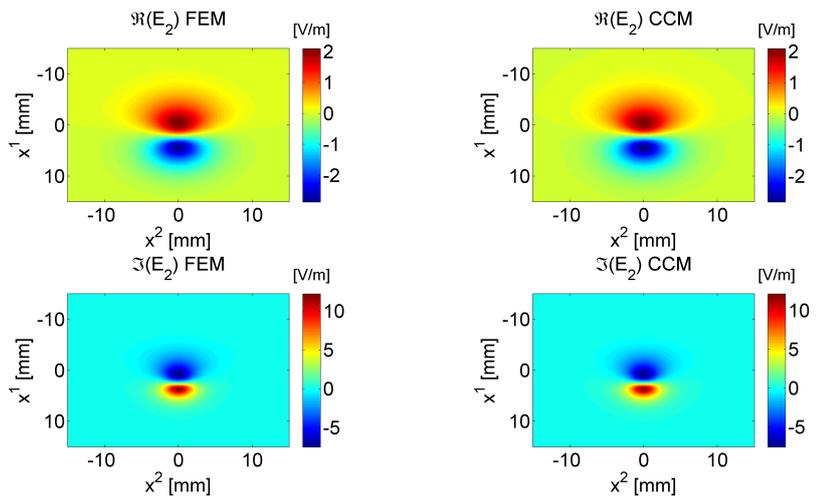
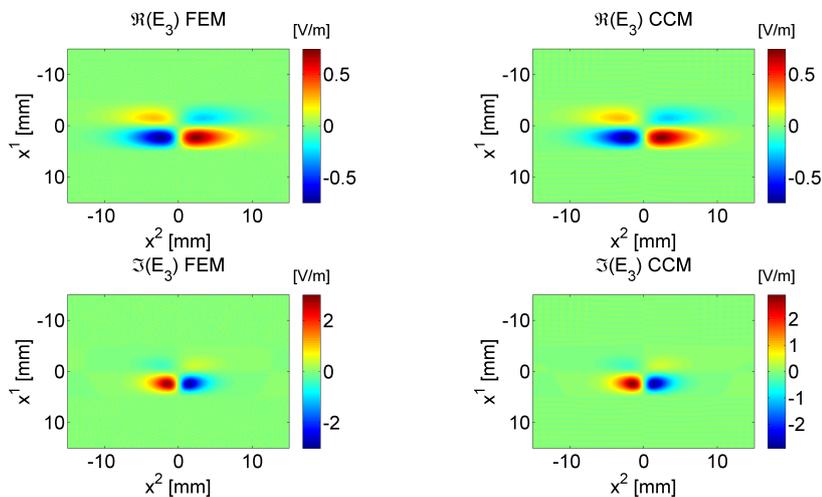


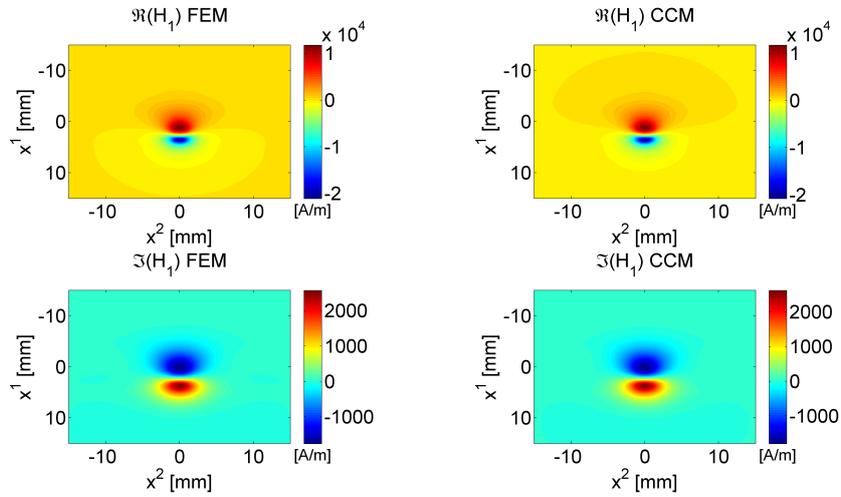
(c) Schéma 3D du capteur

r_{ext}	1.6 mm
r_{int}	1.0 mm
H	2.0 mm
l_0	0.3 mm
N_t	328
I_0	1 A
f	100 kHz
x_c	1 mm

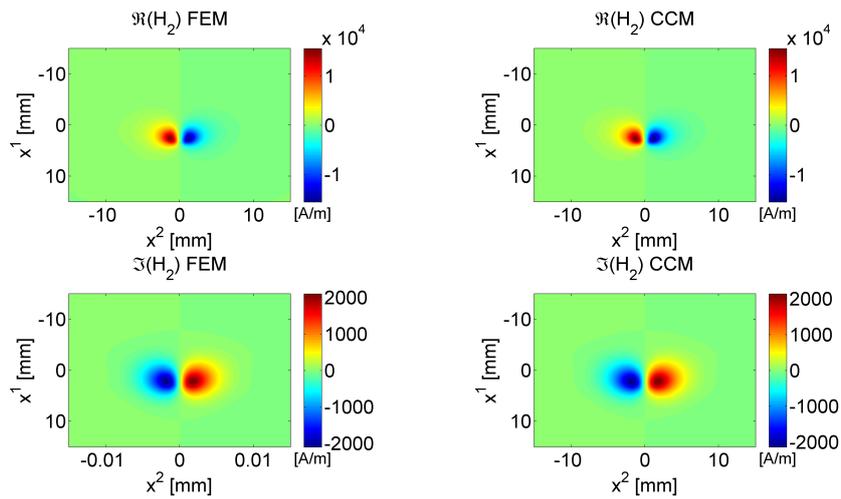
(d) Paramètres du capteur

FIGURE 6.21 – Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.

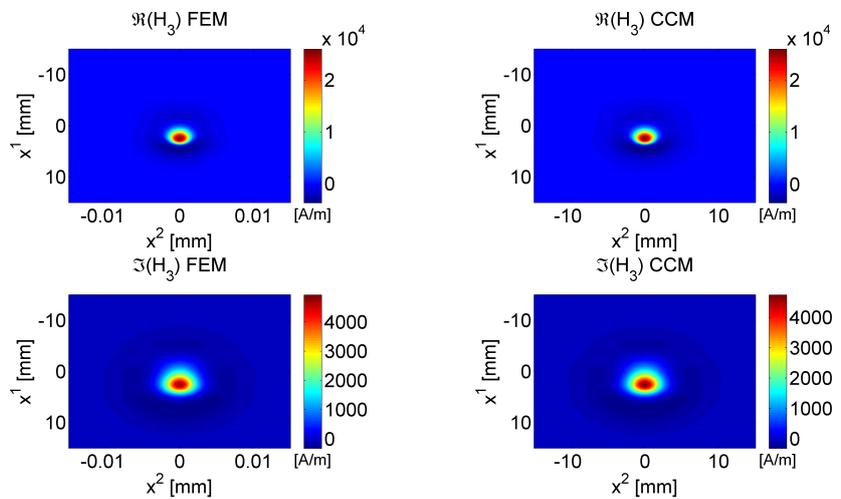
(a) Cartographie de E_1 (b) Cartographie de E_2 (c) Cartographie de E_3 FIGURE 6.22 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.



(a) Cartographie de H_1



(b) Cartographie de H_2



(c) Cartographie de H_3

FIGURE 6.23 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -0.8$ mm.

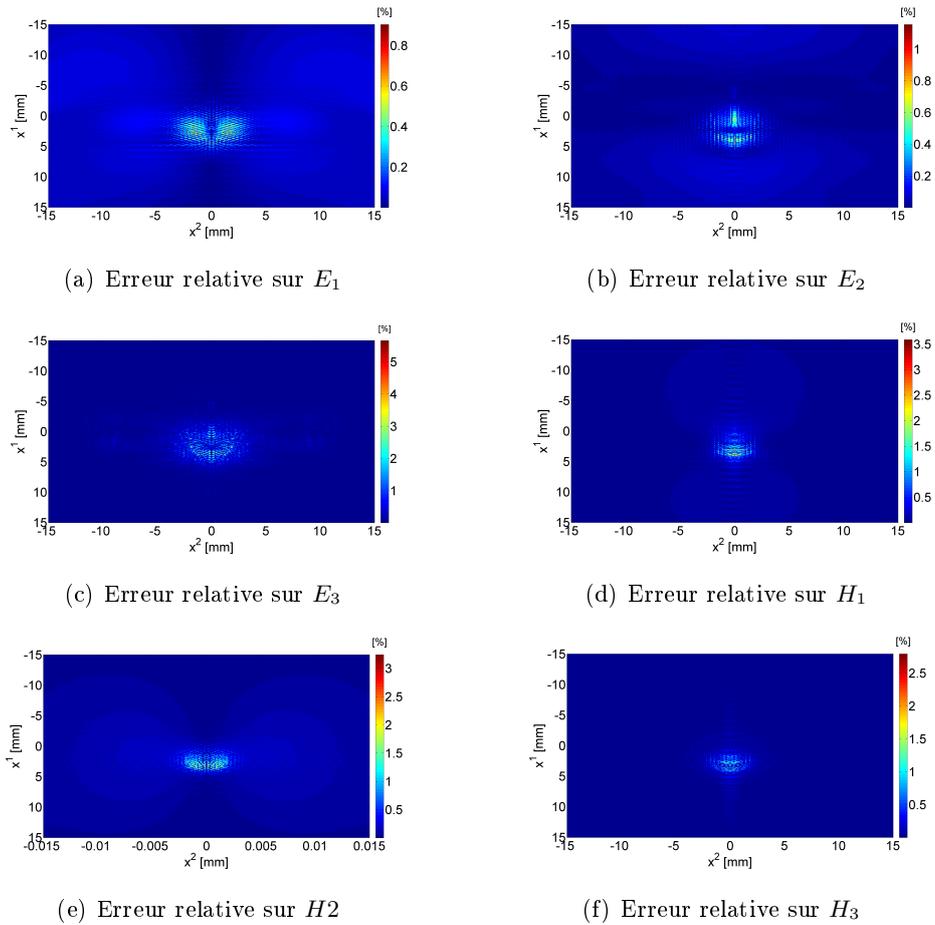


FIGURE 6.24 – Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.

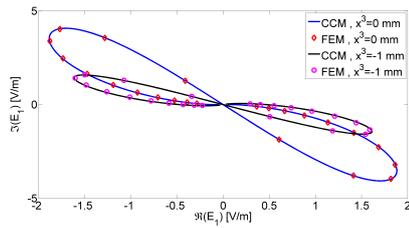
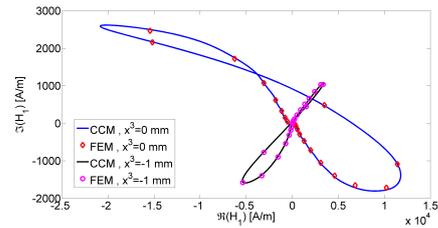
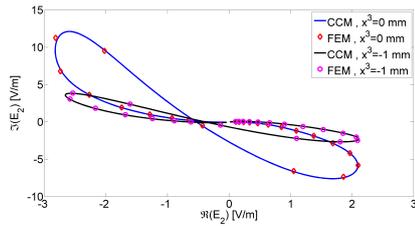
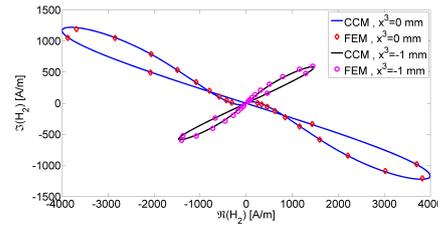
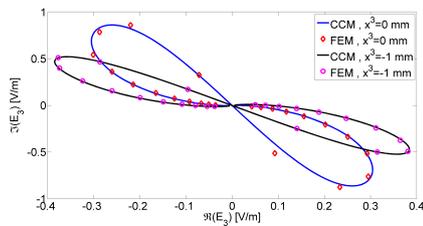
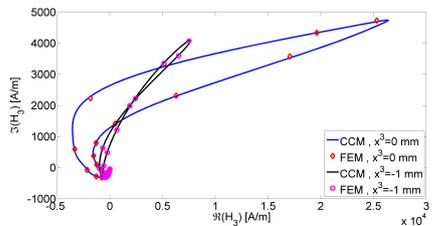
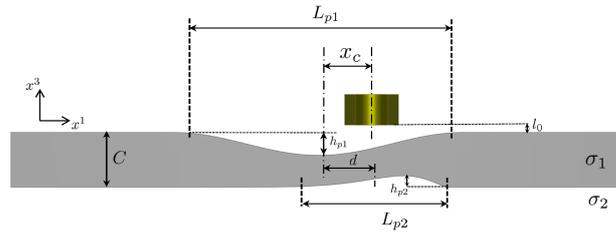
(a) Extraction de E_1 dans le plan $x^1 = 0$ mm(b) Extraction de H_1 dans le plan $x^2 = 0$ mm(c) Extraction de E_2 dans le plan $x^2 = 0$ mm(d) Extraction de H_2 dans le plan $x^1 = 0$ mm(e) Extraction E_3 dans le plan $x^2 = 2$ mm(f) Extraction H_3 dans le plan $x^1 = 0$ mm

FIGURE 6.25 – Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -1.0$ mm.

6.4 Cas # 3 : pièce à interfaces complexes non-parallèles

Considérons maintenant le dernier cas que l'on propose de traiter par notre méthode modale. Il s'agit de la configuration représentée sur la figure 6.26, qui présente deux interfaces non parallèles. L'interface supérieure est encore une fois une portion de sinussoïde tandis que l'équation de l'interface inférieure s'écrit :

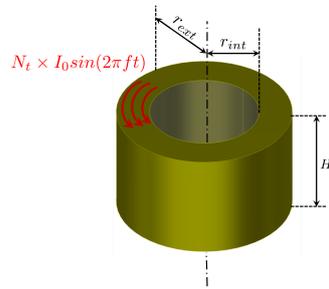
$$z = \begin{cases} \frac{h_{p1}}{2} \left(1 + \cos \left(2\pi \frac{x^1 - d}{L_{p2}} \right) \right) 0.141 \exp \left(10 \frac{x^1 - d}{L_{p2}} \right), & \text{si } |x^1 - d| < \frac{L_{p2}}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



(a) Schéma en coupe de la géométrie

L_{p1}	h_{p1}	L_{p2}	h_{p2}	C	d	σ_1	σ_2
10 mm	0.8 mm	10 mm	0.7 mm	1.5 mm	2 mm	1 MS/m	0MS/m

(b) Paramètres de la pièce



(c) Schéma 3D du capteur

r_{ext}	1.6 mm
r_{int}	1.0 mm
H	2.0 mm
l_0	0.3 mm
N_t	328
I_0	1 A
f	150 kHz
x_c	2 mm

(d) Paramètres du capteur

FIGURE 6.26 – Paramètres de la configuration utilisée pour la validation du modèle.

Comme nous l'avons vu, la méthode de calcul développée pour traiter ce type de configuration nécessite de calculer deux types de solutions propres dans la pièce, chacun étant associé à une interface. Nous avons alors généralisé l'algorithme des matrices S afin de traiter ce cas particulier. Le temps de calcul reste cependant très faible.

Nous avons représenté les cartographies des composante de champs calculées sur l'interface inférieure par les deux méthodes. Le champ \mathbf{E} est représenté sur la figure 6.28 et le champ \mathbf{H} sur la figure 6.29. On note un très bon accord des résultats. Ici, la dissymétrie des composantes est due à la fois à celle de l'interface

Paramètre	Valeur	Opération	Temps CPU (s)
M_u	85	Calcul des modes et matrices S	69.8
M_v	45	1 ^{er} Calcul du champ de référence	39.21
L_1	50 mm	Interpolation du champ de référence	3.50
L_2	50 mm	Calcul des coefficients et de ΔZ	11.9
δ_{x^1}	0.2 mm	Total 1 ^{er} point	120.9
δ_{x^2}	0.3 mm	Total points suivants	15.4

(a) Paramètres numériques utilisés pour la validation

(b) Détail des temps de calcul de la méthode CCM

FIGURE 6.27 – Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié non-parallèle et temps de calcul correspondants.

inférieure (on calcule ces composantes sur l'interface $x_2^3 = -1.5$ mm où l'indice 2 indique que l'on s'est placé dans le repère naturel associé à l'interface inférieure) et au dé-centrage du capteur. L'erreur relative est quant à elle représentée sur la figure 6.30.

Le même type d'extraction que précédemment a été réalisé ici et on a tracé sur la figure 6.31 les composantes de champs obtenues sur les deux interfaces $x_1^3 = 0$ et $x_2^3 = -1.5$ mm. Ainsi, ces composantes ne correspondent pas au même système de coordonnées.

Nous avons donc obtenu des résultats en très bon accord avec ceux calculés par la méthode des éléments finis. On complète finalement cette validation par le calcul de l'impédance de la sonde pour différentes positions. Nous avons déjà détaillé le calcul de l'impédance en utilisant le théorème de réciprocité dans le chapitre 4. Pour la solution donnée par les éléments finis, la méthode de calcul est différente et est basée sur une approche énergétique. On a en effet :

$$P_J = \int \int \int_{\Omega_c} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d\nu,$$

où P_J est la puissance dissipée par les courants de Foucault et \mathbf{J} la densité de courants induits dans le conducteur. Ω_c désigne le domaine de la pièce conductrice.

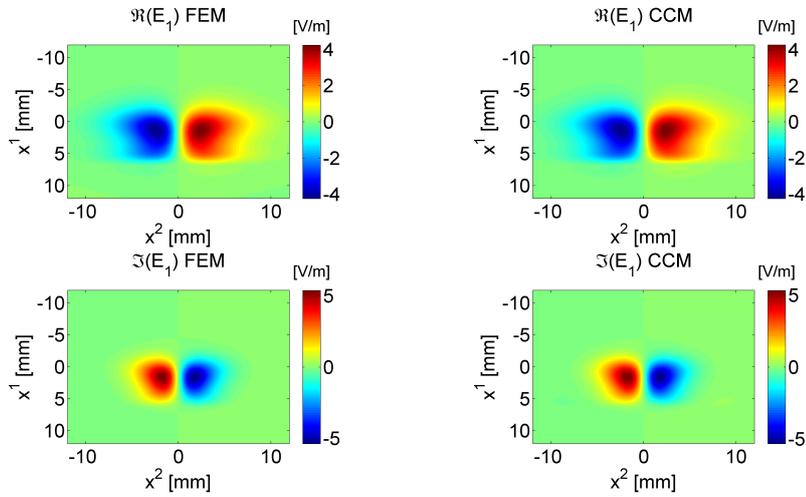
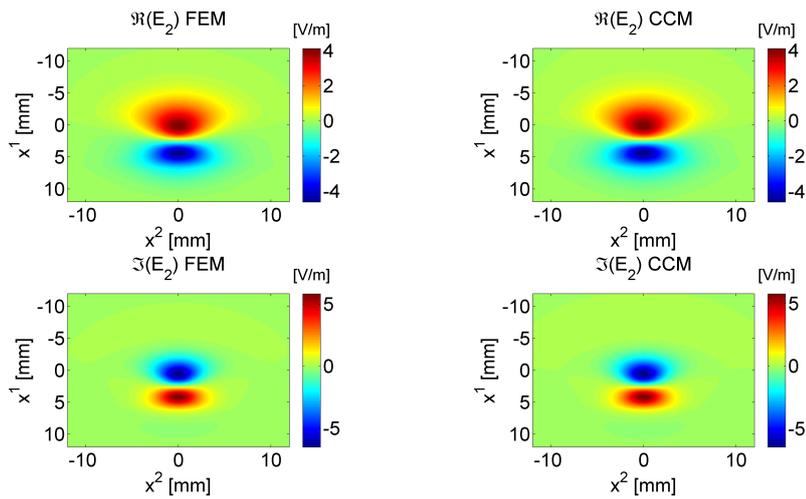
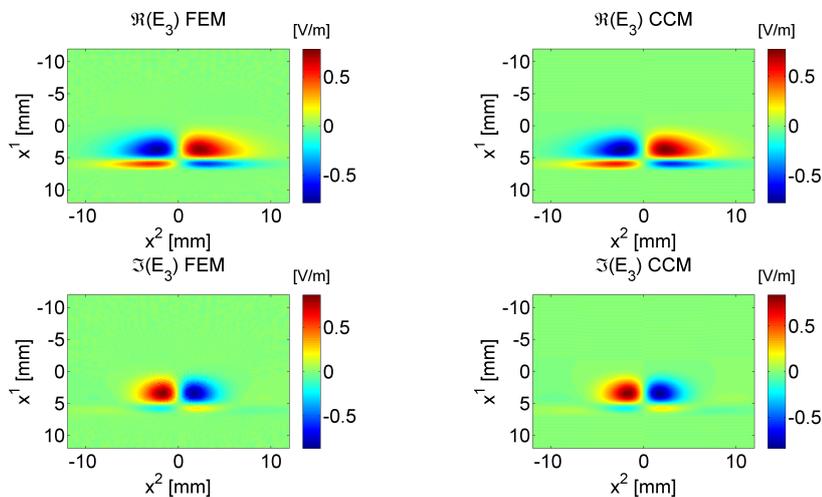
De plus, on a :

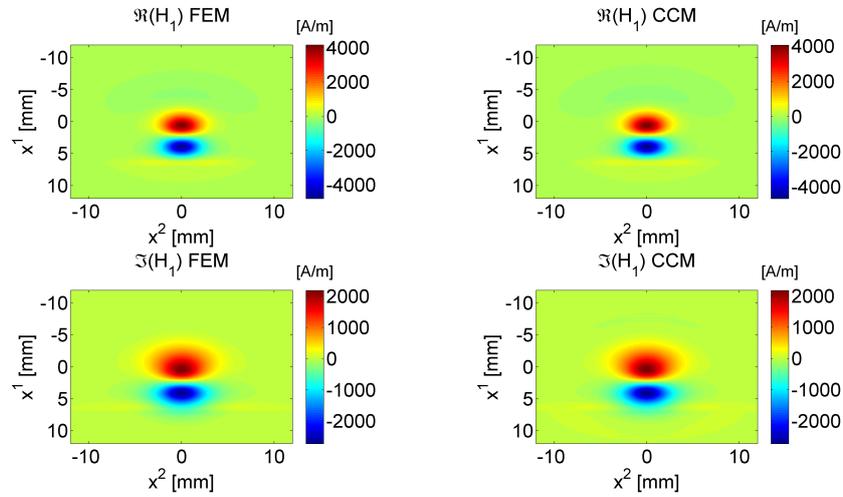
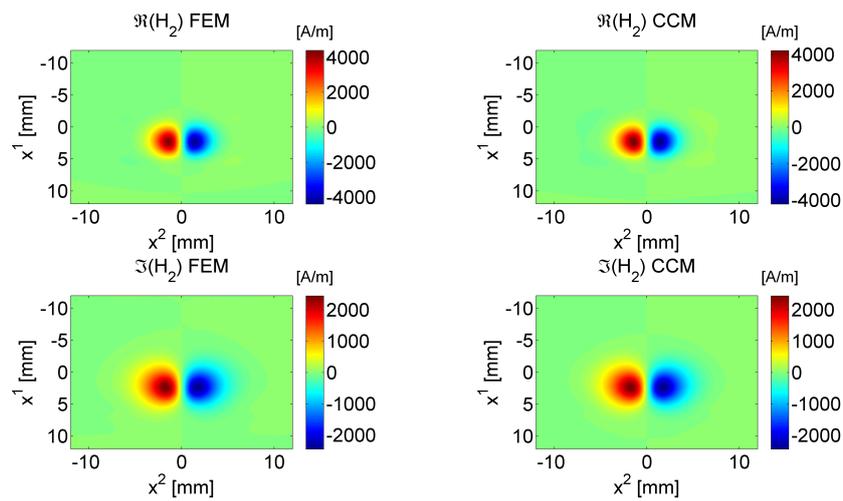
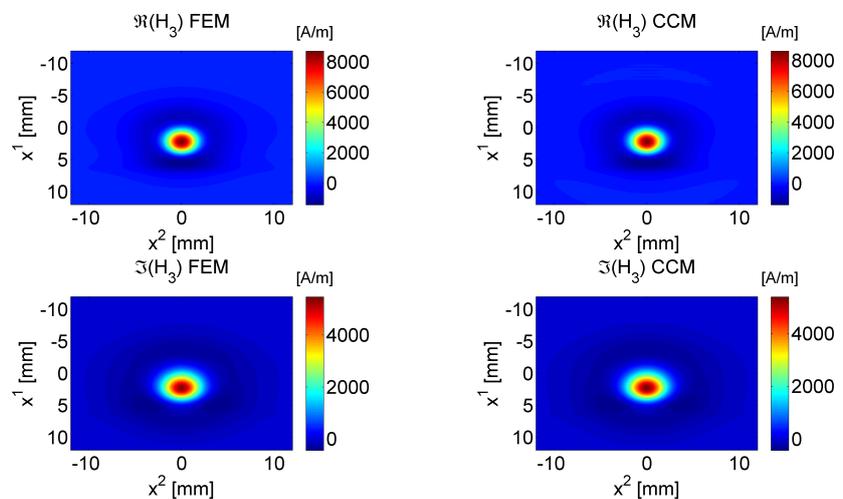
$$P_M = \frac{1}{2} \int \int \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} d\nu,$$

où P_M désigne la puissance magnétique et Ω l'ensemble de l'espace.

Ainsi, le calcul numérique de ces deux intégrales volumiques nous permet de calculer directement l'impédance de la sonde dans la configuration considérée. On a en effet $\Re(Z_{FEM}) = \frac{P_J}{I^2}$, et $\Im(Z_{FEM}) = 4\pi f \frac{P_M}{I^2}$.

La comparaison des deux résultats est représentée sur la figure 6.32 pour un déplacement du capteur de 0 à 7 mm et montre un très bon accord.

(a) Cartographie de E_1 (b) Cartographie de E_2 (c) Cartographie de E_3 FIGURE 6.28 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = -1.5$ mm.

(a) Cartographie de H_1 (b) Cartographie de H_2 (c) Cartographie de H_3 FIGURE 6.29 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = -1.5$ mm.

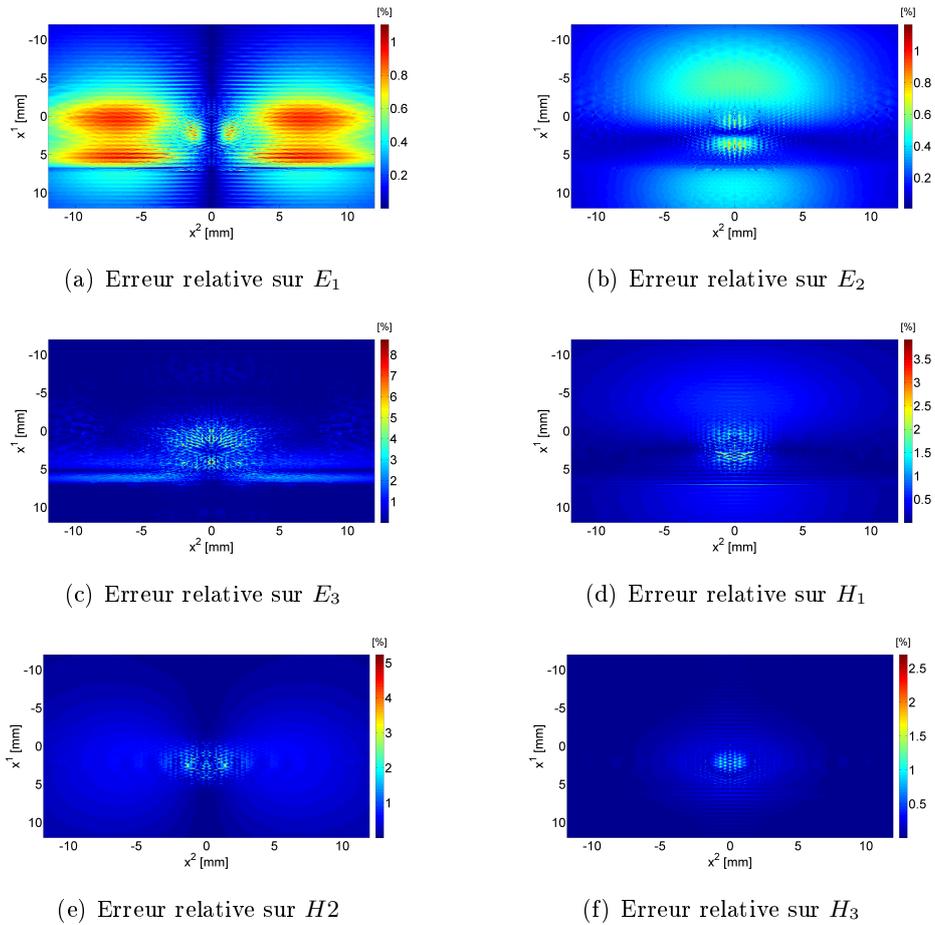


FIGURE 6.30 – Cartographie des erreurs relatives sur les modules des composantes.

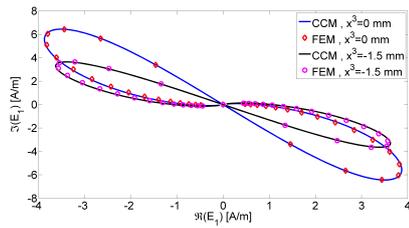
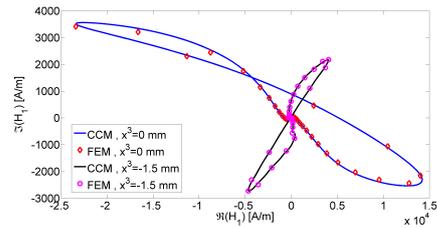
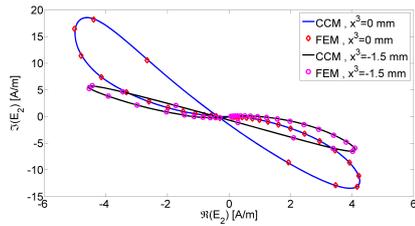
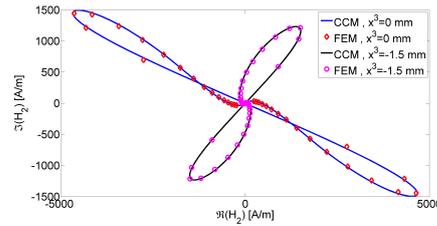
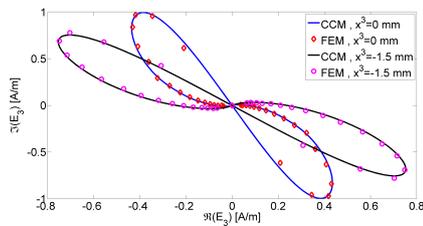
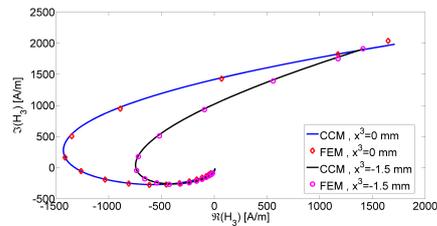
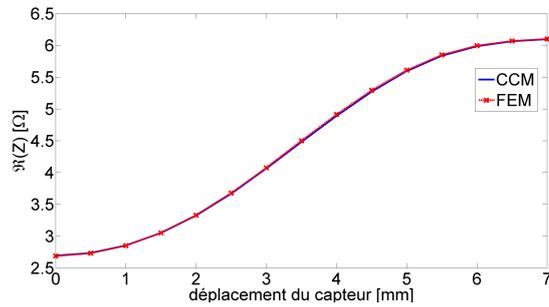
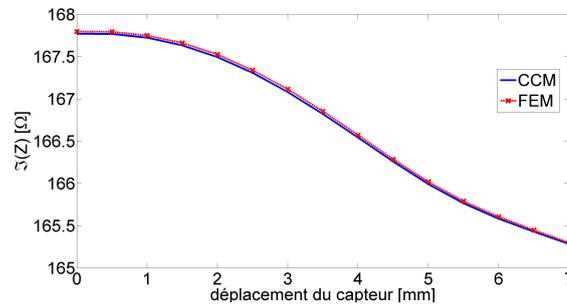
(a) Extraction de E_1 dans le plan $x^1 = 0$ mm(b) Extraction de H_1 dans le plan $x^2 = 0$ mm(c) Extraction de E_2 dans le plan $x^1 = 0$ mm(d) Extraction de H_2 dans le plan $x^1 = 0$ mm(e) Extraction E_3 dans le plan $x^2 = 2$ mm(f) Extraction H_3 dans le plan $x^1 = 0$ mm

FIGURE 6.31 – Extraction des composantes covariantes du champ électrique calculées sur les interfaces $x^3 = 0$ et $x^3 = -1.0$ mm.



(a) Parties réelles de l'impédance durant un scan. Erreur relative moyenne : 0.199 %



(b) Parties imaginaires de l'impédance durant un scan. Erreur relative moyenne : 0.016 %

FIGURE 6.32 – Comparaison des parties réelles et imaginaires de l'impédance simulée par les deux modèles (FEM et CCM).

6.5 Conclusion

Nous avons donc validé le modèle développé afin de traiter des pièces conductrices homogènes extrudées présentant des interfaces complexes. La comparaison avec une solution numérique obtenue par une méthode des éléments finie montre que ce modèle permet de calculer les champs électromagnétiques induits dans la pièce, ainsi que l'impédance de la sonde de manière rapide et précise pour différentes positions du capteur et pour différentes fréquences de travail.

Ce modèle constitue de plus une première approximation pour des pièces de géométrie complexe présentant des propriétés variant dans la profondeur. Comme nous l'avons déjà expliqué dans l'introduction, ce type de configuration présente un intérêt important dans la communauté du contrôle non destructif par courants de Foucault, en particulier pour l'inversion du profil de conductivité. Cependant, cette solution approchée ne permettrait pas d'obtenir de performances suffisantes et nous proposons dans le chapitre suivant une approche hybride permettant de traiter ce cas plus efficacement.

Modèle dédié aux conducteurs non-homogènes et/ou de Géométrie Complexe

Sommaire

7.1	Présentation du problème	132
7.1.1	Problématique	132
7.1.2	Première tentative : résolution par une méthode modale	132
7.2	Stratégie de résolution retenue	133
7.2.1	Domaines non-homogènes	133
7.2.2	Domaines homogènes	137
7.3	Discrétisation	138
7.3.1	Méthodes spectrales	138
7.3.2	Méthode pseudo-spectrale de Chebyshev	139
7.4	Implémentation	141
7.4.1	Définition des vecteurs de coefficients inconnus	142
7.4.2	Opérateurs de dérivation	143
7.4.3	Opérateurs de convolution	143
7.4.4	Conditions de passage et assemblage de la matrice	143
7.5	Calcul des solutions	146
7.6	Résultats et Validations	148
7.7	Conclusion	155

7.1 Présentation du problème

7.1.1 Problématique

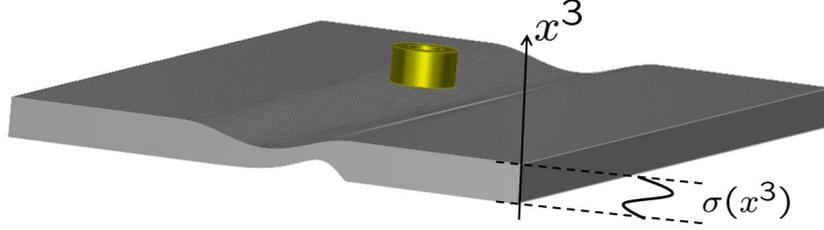


FIGURE 7.1 – Configuration non-homogène considérée : plaque conductrice formée de deux interfaces complexes non-parallèles.

On se propose ici de détailler la méthode développer afin de modéliser la configuration représentée sur la figure 7.1 : une pièce présentant des interfaces complexes ainsi qu'un gradient de conductivité (et/ou de perméabilité) suivant la profondeur est éclairée par une bobine.

7.1.2 Première tentative : résolution par une méthode modale

Partant de notre expérience acquise lors du calcul des champs électromagnétiques dans le cas d'une pièce complexe homogène, nous avons essayé, dans un premier temps, d'étendre le formalisme en potentiels vecteurs du second ordre au cas d'un demi-espace non-homogène présentant une conductivité variant suivant x^3 et une interface de géométrie complexe.

Dans ce cas, suivant le même raisonnement que pour le cas homogène, introduit un potentiel vecteur du second ordre \mathbf{W} tel que $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{W}$. Dans le milieu homogène, où aucune source n'est présente, le potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} vérifie alors l'équation :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2(x^3)\mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad (7.1)$$

où $k^2(x^3) = j\omega\mu\sigma(x^3)$. Si on poursuit le raisonnement de manière analogue au cas homogène (on écrit $\mathbf{W} = W_a \mathbf{e}^2 + \mathbf{e}^2 \times \nabla W_b$, l'équation de l'interface complexe étant $z = \alpha(x)$), on aboutit aux équations scalaires suivantes pour les potentiels :

$$(\Delta + k^2(x^3))\Delta_t W_a + \frac{d}{dx^3}(k^2(x^3))((1 + \dot{\alpha}^2)\partial_3 W_a - \dot{\alpha}\partial_1 W_a - \partial_2 \partial_1 W_b) = 0, \quad (7.2)$$

et

$$\partial_2(\Delta + k^2(x^3))\Delta_t W_b + \frac{d}{dx^3}(k^2(x^3))((1 + \dot{\alpha}^2)\partial_2 \partial_3 W_b - \dot{\alpha}\partial_2 \partial_1 W_a + \partial_1 W_a) = 0, \quad (7.3)$$

où Δ est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé au changement de repère naturel effectué.

On voit donc que la dépendance en x^3 du nombre d'onde introduit des termes supplémentaires dans les équations vérifiées par les potentiels. Ces termes ne permettent plus de se limiter à la recherche des solutions de l'équation de Helmholtz et font de plus apparaître un couplage entre les deux potentiels [Prémel 2012] : on perd donc l'intérêt même du formalisme en potentiels vecteur du second ordre. Nous n'avons donc pas poursuivi dans cette voie.

7.2 Stratégie de résolution retenue

Nous avons vu que dans une strate non-homogène présentant un gradient de conductivité, le formalisme en potentiels vecteur ne conduisait pas à une simplification du problème. Dans ce type de domaine, nous chercherons donc directement à déterminer les champs électromagnétiques en tout point en résolvant les équations de Maxwell à l'aide d'un schéma numérique que nous allons détailler.

De plus, la configuration considérée (représentée sur la figure 7.1) comporte aussi des domaines homogènes (l'air et le substrat) dans lesquels le formalisme précédent reste applicable et permet une représentation optimale des potentiels à l'aide des solutions propres de l'équation de Helmholtz en coordonnées curvilignes. Nous conserverons donc ce formalisme dans tous les domaines homogènes que comporte la configuration et nous le couplerons à celui utilisé dans la strate non-homogène.

7.2.1 Domaines non-homogènes

7.2.1.1 Choix de la méthode de discrétisation

Ne disposant pas de représentation modale des solutions dans la strate non-homogène, nous choisissons de résoudre le problème en utilisant une méthode numérique. Plusieurs solutions sont alors disponibles. On pourrait, par exemple, utiliser une méthode d'éléments finis avec une formulation de type $\mathbf{A} - \phi$ classique, nécessitant un maillage de la strate et utiliser des fonctions de base nodales définies sur les nœuds de chaque maille 3D par le produit tensoriel de polynômes de Lagrange ou des éléments d'arêtes. On discrétiserait alors les équations de Maxwell exprimées sous forme variationnelle par une méthode de Galerkin par exemple.

Cette stratégie est cependant coûteuse puisqu'elle nécessite un maillage fin des interfaces de géométrie complexe afin que celles-ci soient correctement représentées et que les conditions de passage des champs électromagnétiques y soient bien imposées.

Afin d'obtenir une résolution numérique plus légère, et ne nécessitant pas de maillage, nous avons choisi d'utiliser une méthode pseudo-spectrale (que nous présentons ci-après) afin de discrétiser les équations suivant la profondeur. Il est clair que la convergence rapide de ces méthodes n'est vérifiée que dans le cas où les quantités recherchées ne présentent pas de discontinuité sur le domaine numérique

considéré (c'est le cas des champs électromagnétiques dans un milieu non-homogène présentant un profil de conductivité continu). Cependant, la méthode développée ici peut être étendue au cas de deux couches (ou plus) non-homogènes adjacentes. On discrétiserait alors séparément ces deux couches et on imposerait les conditions de passage des champs le long de leur interface commune. Nous nous limiterons ici au développement de ce modèle dans le cas d'une seule couche non-homogène.

De plus, il est clair que l'application directe aux équations de Maxwell "classiques" ne serait pas optimale, puisque de même que pour la méthode des éléments finis, il faudrait discrétiser finement la géométrie.

Afin d'obtenir une résolution efficace du problème, nous utilisons une nouvelle fois le formalisme covariant des équations de Maxwell, que nous généralisons à des systèmes de coordonnées étendus permettant de prendre en compte directement les deux interfaces extrêmes de la strate non-homogène. La définition de ce type de système est réalisée par une méthode de raccordement de coordonnées (ou coordinate matching en anglais) qui est détaillée dans la partie suivante.

7.2.1.2 Raccordement de systèmes de coordonnées

Ce type de raccordement a été utilisé pour l'étude de réseaux de diffraction à deux dimensions avec la méthode modale de Fourier [Weiss 2009] dont elle a permis d'étendre le domaine d'application. Nous proposons de l'utiliser ici avec la méthode CCM qui est plus appropriée à notre problème.

Afin d'illustrer le principe du raccordement de coordonnées que nous avons utilisé, on considère l'exemple représenté sur la figure 7.1, où la pièce est composée de deux interfaces complexes d'équations respectives $z = \alpha_1(x) + C_1$ et $z = \alpha_2(x) + C_2$, où C_1 et C_2 sont des constantes qui désignent l'altitude moyenne des profils.

L'opération de raccordement de systèmes de coordonnées consiste à définir un changement de coordonnées de la forme :

$$\begin{cases} x = x^1, \\ y = x^2, \\ z = a(x^1, x^3), \end{cases} \quad (7.4)$$

où a est une fonction de l'espace vérifiant les deux égalités suivantes :

$$a(x^1, x^3 = C_1) = \alpha_1(x) + C_1, \quad (7.5)$$

et

$$a(x^1, x^3 = C_2) = \alpha_2(x) + C_2. \quad (7.6)$$

On obtient alors un système de coordonnées naturelles associées à ce changement de coordonnées dont les composantes covariantes du tenseur métrique peuvent être regroupées dans la matrice suivante :

$$G = (g_{ab}) = \begin{bmatrix} 1 + \dot{a}_1^2 & 0 & \dot{a}_1 \dot{a}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dot{a}_1 \dot{a}_3 & 0 & \dot{a}_3^2 \end{bmatrix},$$

où $\dot{a}_i \equiv \partial_i a$. Son déterminant vaut $g = \dot{a}_3^2$ et ses composantes contravariantes s'écrivent (nous verrons lors de la construction de la fonction a que l'on a nécessairement $\dot{a}_3 \neq 0$ si les deux profils sont distincts) :

$$G^{-1} = (g^{ab}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_3} & 0 & \frac{1 + \dot{a}_1^2}{\dot{a}_3^2} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs de la base covariante sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{X}_1 + \dot{a}_1 \mathbf{X}_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{X}_2, \\ \mathbf{e}_3 &= \dot{a}_3 \mathbf{X}_3 \end{aligned},$$

où les vecteurs \mathbf{X}_i désignent les vecteurs de la base canonique orthonormée de \mathbb{R}^3 . Les vecteurs de base contravariants s'écrivent quant à eux :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^1 &= \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{e}^2 &= \mathbf{X}_2, \\ \mathbf{e}^3 &= -\frac{\dot{a}_1}{\dot{a}_3} \mathbf{X}_1 + \frac{1}{\dot{a}_3} \mathbf{X}_3, \end{aligned}.$$

On vérifie donc directement, en utilisant (7.5) et (7.6), que sur les deux interfaces extrêmes, ces vecteurs de base s'identifient à ceux des repères naturels associés aux transformations par translation suivantes :

$$\begin{cases} x = x^1, \\ x = x^2, \\ z = x_i^3 + \alpha_i(x^1), \end{cases}$$

avec $i = 1$ pour l'interface supérieure et $i = 2$ pour l'interface inférieure. Ceci prouve donc que les vecteurs de base \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 que nous venons de définir sont tangents aux deux interfaces.

Il existe une infinité de fonctions $a(x^1, x^3)$ vérifiant les deux conditions (7.5) et (7.6). Nous avons choisi de la construire en utilisant une fonction de transition $t_n(x^3)$ de la forme :

$$t_n : x^3 \mapsto \left(\frac{x^3 - C_2}{C_1 - C_2} \right)^n, \quad (7.7)$$

avec n , un entier naturel. On voit aussi qu'il est nécessaire d'imposer $C_1 - C_2 \neq 0$ afin que les fonctions t_n soient bien définies. Il est clair que ces fonctions valent 1 en $x^3 = C_1$ et 0 en $x^3 = C_2$. On construit alors $a(x^1, x^3)$ de la façon suivante :

$$a(x^1, x^3) : (x^1, x^3) \mapsto t_n(x^3)(\alpha_1(x^1) + C_1) + (1 - t_n(x^3))(\alpha_2(x^1) + C_2). \quad (7.8)$$

7.2.1.3 Équations physiques

Nous re-détaillons rapidement ici les équations physiques que l'on se propose de résoudre. Comme précédemment, nous allons considérer les équations de Maxwell sous forme tensorielle. Cependant, les inconnues recherchées dans la strate non-homogène ne seront plus les potentiels de Hertz mais directement les composantes covariantes tangentielles des champs électromagnétiques. En effet, dans le nouveau repère introduit dans la partie précédente, les équations de Maxwell covariantes pour un domaine sans source, couplées aux relations de milieu (cf. equations (4.9), (4.10), (4.11) et (4.8)) conduisent aux relations générales suivantes :

$$\partial_2 E_3 - \partial_3 E_2 = j\omega\mu\sqrt{g}(g^{11}H_1 + g^{13}H_3), \quad (7.9)$$

$$\partial_3 E_1 - \partial_1 E_3 = j\omega\mu\sqrt{g}H_2, \quad (7.10)$$

$$\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1 = j\omega\mu\sqrt{g}(g^{31}H_1 + g^{33}H_3), \quad (7.11)$$

$$\partial_2 H_3 - \partial_3 H_2 = \sigma\sqrt{g}(g^{11}E_1 + g^{13}E_3), \quad (7.12)$$

$$\partial_3 H_1 - \partial_1 H_3 = \sigma\sqrt{g}E_2, \quad (7.13)$$

$$\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1 = \sigma\sqrt{g}(g^{31}E_1 + g^{33}E_3), \quad (7.14)$$

d'où l'on peut éliminer les composantes E_3 et H_3 en écrivant (on a $g^{33} = \frac{1 + \dot{a}_1^2}{\dot{a}_3^2} \neq 0$ et $\sqrt{g}g^{33} = 1 + \dot{a}_1^2 \neq 0$) :

$$\begin{cases} E_3 = \frac{1}{\sigma\sqrt{g}g^{33}} [\partial_1 H_2 - \partial_2 H_1] - \frac{g^{31}}{g^{33}} E_1 \\ H_3 = \frac{1}{j\omega\mu\sqrt{g}g^{33}} [\partial_1 E_2 - \partial_2 E_1] - \frac{g^{31}}{g^{33}} H_1, \end{cases} \quad (7.15)$$

et en ré-injectant ces expressions dans les relations précédentes, on peut les écrire sous la forme d'un système de quatre équations indépendantes que l'on peut représenter sous la forme compacte suivante :

$$\begin{bmatrix} 0 & \sigma\mathcal{A} & \mathcal{B} & \partial_2\partial_1 \\ \mathcal{B} & \partial_2\partial_1 & 0 & j\omega\mu\mathcal{A} \\ \mathcal{C} & 0 & \mathcal{F}(\sigma) & \mathcal{D}(\sigma, \mu) \\ \mathcal{F}(\mu) & \mathcal{D}(\mu, \sigma) & \mathcal{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7.16)$$

avec

$$\mathcal{A} = -\sqrt{g}(g^{33}\partial_3 + g^{13}\partial_1),$$

$$\mathcal{B} = -\left(\partial_2^2 + j\omega\mu\sigma g(g^{11}g^{33} - (g^{13})^2)\right),$$

$$\mathcal{C} = \partial_3 + \partial_1 \frac{g^{31}}{g^{33}},$$

$$\mathcal{D}(\zeta, \xi) = -\left(\partial_1 \frac{1}{\zeta\sqrt{g}g^{33}} \partial_1 + j\omega\xi\sqrt{g}\right), \quad \forall (\zeta, \xi),$$

$$\text{et } \mathcal{F}(\vartheta) = \partial_1 \frac{1}{\vartheta\sqrt{g}g^{33}} \partial_2, \quad \forall \vartheta.$$

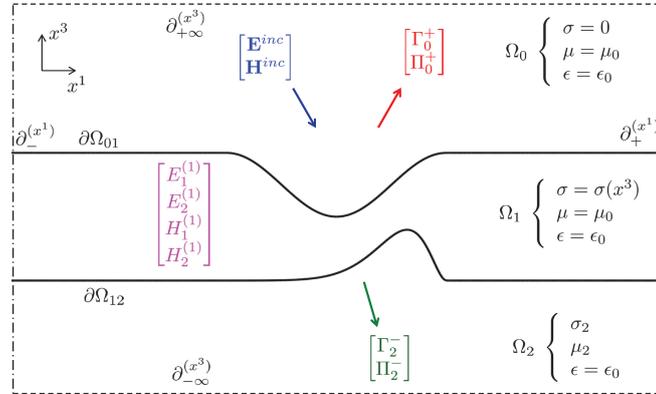


FIGURE 7.2 – Configuration non-homogène considérée : plaque conductrice formée de deux interfaces complexes non-parallèles.

On propose donc de déterminer numériquement les quatre composantes des champs vérifiant ces équations au sein de la strate non-homogène. Afin d'obtenir des solutions uniques à ce problème, il est nécessaire d'imposer des conditions de bords à ces quatre composantes. De même que lorsque nous avons traité le cas d'une pièce stratifiée, les conditions que l'on impose ici sont de type Dirichlet puisqu'elles traduisent la continuité de ces quatre composantes au niveau des deux interfaces extrêmes. En effet, nous avons vu lors de la construction du repère étendu utilisé ici, que ces composantes sont bien tangentes aux deux interfaces complexes formant la strate.

On obtient de cette manière des relations entre les composantes des champs inconnus vivant dans la strate non-homogène et celles des champs inconnus vivant dans les strates homogènes (air et substrat).

7.2.2 Domaines homogènes

Dans les domaines homogènes, le formalisme en potentiels vecteur du second ordre généralisé est utilisé de la même manière que précédemment. Nous nous placerons alors dans les systèmes de coordonnées de translation associés respectivement à l'interface supérieure dans l'air et à l'interface inférieure dans le substrat et l'on représentera les potentiels inconnus réfléchis dans l'air et transmis dans le substrat de la même manière que précédemment. Ce point ne sera donc pas détaillé ici. Le problème global que l'on se propose alors de résoudre est représenté schématiquement en coupe sur la figure 7.2.

7.3 Discrétisation

Afin de déterminer numériquement les différentes inconnues du problème (coefficients des expansions modales dans les couches homogènes et composantes covariantes des champs dans la couche non-homogène), nous utilisons, suivant les directions x^1 et x^2 , la même stratégie de discrétisation que celle introduite lors de l'étude du demi-espace conducteur. En revanche, la discrétisation de la couche non-homogène suivant l'axe vertical est effectuée en utilisant une méthode pseudo-spectrale, présentant une convergence rapide pour la classe de problèmes considérée (profils de conductivité et/ou de perméabilité continus).

7.3.1 Méthodes spectrales

7.3.1.1 Introduction

Les méthodes spectrale et pseudo-spectrale [Boyd 2001, Trefethen 2000] ont été largement utilisées afin de résoudre des équations aux dérivées partielles dans divers domaines de la physique tels que la géophysique [Hung 1998], la mécanique quantique [Rawitscher 2005], la mécanique des fluides [Malik 1985] etc... Leur avantage principal réside dans leur convergence très rapide (on parle de convergence spectrale) lorsque la solution est douce. Lorsque l'on recherche une solution discontinue ou variant rapidement, ces méthodes ne sont cependant pas les plus appropriées.

Nous considérons ici des profils de conductivité (ou de perméabilité) continus. Les champs électromagnétiques sont donc eux aussi continus à l'intérieur de tels milieux non-homogènes : nous avons donc opté pour ce type de méthode afin d'exploiter leur convergence rapide. De plus, si l'on souhaite considérer un profil de conductivité discontinu, on peut étendre cette méthode en divisant le domaine en deux sous-domaines au niveau de la discontinuité et en l'appliquant dans chaque domaine. On raccorde alors les solutions (qui sont continues dans chaque sous-domaine) en imposant des conditions de passage au niveau de l'interface fictive.

7.3.1.2 Principe général

L'idée générale afin de déterminer les valeurs aux $N + 1$ nœuds de discrétisation x_k de la solution $f(x)$ d'une équation différentielle par une méthode spectrale est d'approcher cette fonction par une série de fonctions $\rho_k(x)$. On obtient alors un interpolant de f , que l'on notera \hat{f} et qui s'écrit sous la forme :

$$\hat{f}(x) = \sum_{k=0}^N f(x_k) \rho_k(x).$$

Les fonctions $\rho_k(x)$ sont appelées les fonctions cardinales et vérifient la propriété suivante $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$:

$$\rho_k(x_l) = \begin{cases} 1, & \text{si } k = l \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est alors immédiat que $f(x_m) = \hat{f}(x_m)$.

On approxime alors la dérivée de f par celle de \hat{f} , c'est à dire que l'on fait l'hypothèse que l'on a $f'(x) \simeq \sum_k f(x_k) \rho'_k(x)$. On souhaite de plus obtenir les coefficients v_k de l'interpolant de f' défini par :

$$\hat{f}'(x) = \sum_{k=0}^N v_k \rho_k(x).$$

Afin d'obtenir une relation entre les f'_k et les $f(x_k)$, nous introduisons une base de $N + 1$ fonctions tests notées $\eta_m(x)$ définies sur l'intervalle \mathcal{I} que nous choisirons dans un premier temps égal à $[-1, 1]$. On introduit aussi une fonction de pondération $w(x)$ et on considère le produit scalaire sur l'espace $\mathcal{C}_0(\mathcal{I}, \mathbb{R})$ défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 w(x) f(x) g(x) dx.$$

On projette alors la relation $\hat{f}'(x) = \sum_{k=0}^N f'_k \rho_k(x) = \sum_k f(x_k) \rho'_k(x)$ sur la base des fonctions η au sens de ce produit scalaire. On obtient donc $N + 1$ relations entre les coefficients f'_k et les $f(x_k)$:

$$\sum_{k=0}^N f(x_k) \langle \rho'_k, \eta_m \rangle = \sum_{k=0}^N f'_k \langle \rho_k, \eta_m \rangle, \quad \forall m \in \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Ces relations peuvent être exprimées sous la forme matricielle suivante :

$$[M_{ij}][f(x_j)]_0^N = [L_{ij}][v_j]_0^N,$$

avec

$$M_{ij} = \int_{-1}^1 w(x) \rho'_i(x) \eta_j(x) dx \quad \text{et} \quad L_{ij} = \int_{-1}^1 w(x) \rho_i(x) \eta_j(x) dx.$$

On peut donc définir une matrice dite de différenciation $D_N = L^{-1}M$. On a donc $[v_j] = D_N[f(x_j)]$. De plus, les coefficients d'interpolation des dérivées d'ordre supérieur de f , que l'on note $f_j^{(q)}$ peuvent être calculés par la relation $[f_j^{(q)}] = D_N^q[f_j]$.

7.3.2 Méthode pseudo-spectrale de Chebyshev

Afin d'obtenir une résolution très rapide du problème, nous avons opté pour une méthode dite pseudo-spectrale qui consiste à choisir comme fonctions test des impulsions de Dirac et une fonction de pondération valant un sur \mathcal{I} . Ceci conduit à un calcul très rapide des coefficients de la matrice D_N .

Il est clair que ce type de méthode conduit à minimiser l'erreur commise sur les valeurs de la fonction f au niveau des points de collocation seulement. Cependant, suivant le couple fonctions cardinales et points de discrétisation choisi, l'erreur

commise entre les nœuds de discrétisation peut être plus ou moins importante : des oscillations importantes peuvent apparaître (phénomène de Runge). Afin de limiter au maximum ce phénomène, une solution communément employée est d'utiliser une base de polynômes de Chebyshev définis sur l'intervalle $[-1, 1]$ par :

$$T_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \forall k \in \mathbb{N}.$$

En effet, l'une des propriétés de ces polynômes est qu'ils présentent une oscillation minimale (par rapport à n'importe quel polynôme de même degré) sur l'intervalle $[-1, 1]$ [Boyd 2001, chap. 4]. Afin de discrétiser les équations que l'on a obtenu par le formalisme covariant des équations de Maxwell suivant la direction x^3 , on utilisera donc une base de $N + 1$ polynômes de Chebyshev associés aux noeuds de Chebyshev définis par :

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), k = \llbracket 0, N \rrbracket. \quad (7.17)$$

Les fonctions cardinales associées à cette base sont définies de la façon suivante [Boyd 2001, chap. 5] :

$$\rho_k(x) = \frac{(-1)^{(k+1)}(1-x^2)T'_N(x_k)}{c_k N^2(x-x_k)}, \quad c_k = 1 + \delta_{k,0} + \delta_{k,N},$$

où les x_k sont leurs zéros définis par :

$$x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{N}\right), n = \llbracket 0, N \rrbracket.$$

Ils correspondent aux extrema des polynôme de Chebyshev et sont appelés les noeuds de Chebyshev ou de Gauss-Lobatto-Chebyshev. Ils constitueront donc la grille de discrétisation de l'axe x^3 . Sur la figure 7.3, nous avons représenté ces fonctions, obtenues pour $N = 6$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Les noeuds ont été représentés par des croix noires et l'on peut voir que leur densité est accrue aux extrémités du domaine : cette particularité contribue à minimiser le phénomène de Runge qui est d'autant plus important que l'on s'éloigne de l'axe $x = 0$.

Les coefficients de la matrice de différenciation correspondante sont les suivants [Trefethen 2000] :

$$\begin{aligned} D_{kj} &= \frac{c_k(-1)^{j+k}}{c_j(x_k - x_j)}, \\ D_{kk} &= \frac{-x_k}{2(1-x_k^2)}, \\ D_{00} &= -D_{NN} = \frac{2N^2 + 2}{6}. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Nous avons ici présenté la méthode de discrétisation en raisonnant sur l'intervalle $\mathcal{I} = [-1, 1]$ mais tout ceci est aisément transposable à tout intervalle $\mathcal{I}_2 = [a, b]$ en

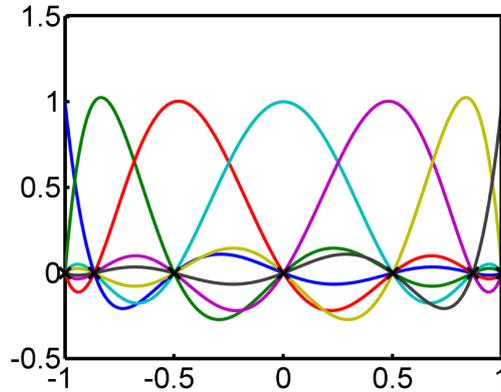


FIGURE 7.3 – Tracé des fonctions cardinales associées aux polynômes de Chebyshev pour $N = 6$.

appliquant la transformation définie par le difféomorphisme suivant :

$$\mathcal{G} : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}_2$$

$$x \rightarrow \mathcal{G}(x) = \frac{a-b}{2}x + \frac{a+b}{2},$$

dont le jacobien est $\mathcal{J} = (a-b)/2$. La matrice de différenciation associée à l'intervalle $[a, b]$ s'écrit donc $\tilde{D}_N = \mathcal{J}D_N$ et elle est associée aux nouveaux nœuds $\{x_j^3\}_0^N = \{\mathcal{G}(x_j)\}_0^N$.

Ainsi, dans la strate non-homogène, on définit une grille de points selon l'axe x^3 dans le système de coordonnées étendu :

$$\{x_j^3\}_0^N = \left\{ \frac{C_2 - C_1}{2} \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right) + \frac{C_1 + C_2}{2} \right\}_0^N.$$

Les axes transverses x^1 et x^2 sont discrétisés uniformément de même que précédemment : les nœuds dans ces directions sont identiques à ceux des domaines homogènes. Sur la figure 7.4, nous avons représenté la grille obtenue dans le repère cartésien à gauche et dans le repère étendu à droite. On voit alors tout l'intérêt du formalisme covariant puisque celui-ci nous permet de résoudre les équations sur une simple grille rectangulaire et l'on s'affranchit donc de toute complexité géométrique lors de la discrétisation des équations. Cette complexité est cependant reportée sur le formalisme utilisé.

7.4 Implémentation

Dans cette section, nous décrivons l'implémentation du modèle que nous avons réalisée. Comme nous l'avons vu, deux formalismes différents sont utilisés dans les

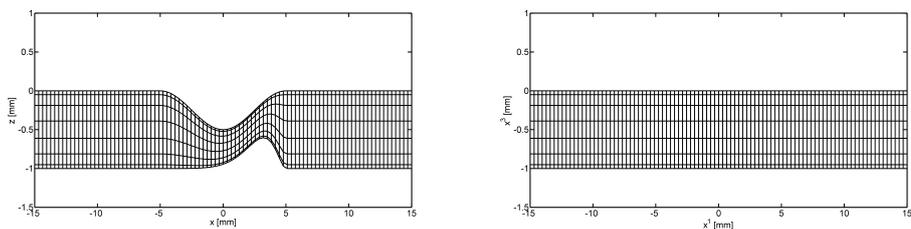


FIGURE 7.4 – Représentation en coupe de la grille de calcul. À gauche, nous avons représenté la grille dans le système de coordonnées cartésiennes. À droite, la grille après transformation.

différents domaines et la résolution des équations qui en découlent nécessite un couplage obtenu par l'application des conditions de passages au niveau des deux interfaces $\partial\Omega_{01}$ et $\partial\Omega_{12}$.

7.4.1 Définition des vecteurs de coefficients inconnus

On peut voir dans (7.18) que la matrice de différenciation ainsi obtenue est pleine, ce qui signifie que le calcul de chacun des coefficients de la décomposition en série de $f^{(p)}$ fait intervenir l'ensemble des coefficients de $f^{(p-1)}$. Il en résulte que la détermination des coefficients inconnus suivant x^3 ne peut pas être effectuée de manière séquentielle : les valeurs des champs inconnus le long d'une ligne verticale seront donc calculées simultanément. La même constatation peut être faite suivant l'axe x^1 en raison cette fois-ci des opérations de convolution qui sont réalisées à l'aide d'opérateurs matriciels (cf.chapitre 4, eq. 5.3). Pour ces raisons, les coefficients inconnus associés à une grandeur quelconque X sont stockés de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \left[\hat{X}(\mathbf{u}, \mathbf{x}^3) \right] &= \mathcal{TF} [X(x^1, x^3)] = \\ & \left[\hat{X}(u_{-M_u}, x_0^3) \dots \hat{X}(u_{M_u}, x_0^3) \right] \dots \left[\hat{X}(u_{-M_u}, x_N^3) \dots \hat{X}(u_{M_u}, x_N^3) \right]^T, \quad (7.19) \end{aligned}$$

où les u_i désignent les fréquences spatiales associées à l'axe x^1 .

préalable que les inconnues recherchées dans les deux couches homogènes sont les coefficients $\pi^{+(0)}, \gamma^{+(0)}, \pi^{+(2)}$ et $\gamma^{+(2)}$ des décompositions modales des potentiels de Hertz définis dans ces couches. De plus, les composantes covariantes tangentielles (dans le système de coordonnées particulier associé) des champs inconnus dans ces domaines sont obtenues à partir des potentiels en utilisant les opérateurs numériques suivants (cf. Chap. 4) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} \right], \\
 \mathcal{N}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} + C \hat{\phi}_n^{(p)\pm} \right], \\
 \mathcal{O}_n^{(p)\pm} &= -j\omega\mu_p \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)\pm}, \\
 \mathcal{P}_n^{(p)\pm} &= k_p^2 \left[-A j \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm} + C \hat{\phi}_n^{(p)\pm} \right], \\
 \mathcal{Q}_n^{(p)\pm} &= -v_n \mathbf{u} \hat{\psi}_n^{(p)\pm}, \\
 \mathcal{R}_n^{(p)\pm} &= \left[-v_n^2 + k_p^2 \right] \hat{\psi}_n^{(p)\pm},
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

où $p = 0$ ou 2 dans le cas considéré ici (cf. figure 7.2).

Résumons le problème mathématique que nous souhaitons résoudre. Dans la couche non-homogène, on recherche les valeurs des composantes tangentielles des champs dans le domaine de Fourier pour les directions x^1 et x^2 et sur les points de Chebyshev utilisés pour discrétiser l'axe x^3 . On a donc $4(2M_u + 1)(2M_v + 1)(N + 1)$ inconnues dans la couche homogène, qui sont stockées dans les vecteurs $\hat{E}_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}^3)_m$, $\hat{E}_2(\mathbf{u}, \mathbf{x}^3)_m$, $\hat{H}_1(\mathbf{u}, \mathbf{x}^3)_m$ et $\hat{H}_2(\mathbf{u}, \mathbf{x}^3)_m$, avec $m = -M_v \dots M_v$.

Ces champs inconnus doivent être solutions du système (7.16) dont les opérateurs sont discrétisés sur la grille de calcul. Ils doivent de plus vérifier des conditions de continuité au niveau des interfaces complexes afin d'assurer leur unicité. Numériquement, on impose donc à ces composantes de vérifier les équations de Maxwell covariantes sur les $N - 1$ surfaces d'équation $x^3 = x_j^3$, $j = 1 \dots N - 1$ (plans internes à la couche (1)) et les conditions de continuité sur les deux interfaces d'équation $x^3 = C_1$ et $x^3 = C_2$.

Concernant les notations utilisées, un opérateur différentiel quelconque \mathcal{D} est discrétisé en utilisant les opérateurs de dérivation et de convolution numériques introduits ci-dessus. L'opérateur numérique obtenu sera alors noté $[\mathcal{D}]$, et sa restriction aux $N - 1$ plans internes de la couche (1) sera noté par $[\mathcal{D}]_1^{N-1}$. Cette restriction est une matrice rectangulaire de taille $(N - 1)(2M_u + 1)$ obtenue en ne conservant que les $(N - 1)(2M_u + 1)$ lignes centrales de l'opérateur total. Les lignes que l'on a exclues forment les restrictions de cet opérateur aux deux interfaces extrêmes que l'on note respectivement $[\mathcal{D}]_0$ et $[\mathcal{D}]_N$.

Dans les deux couches homogènes, les inconnues sont les coefficients des décompositions modales des potentiels scalaires, $\gamma^{(0)+}$, $\pi^{(0)+}$, $\gamma^{(2)-}$ et $\pi^{(2)-}$, qui sont au nombre de $4(2M_u + 1)(2M_v + 1)$ et ils sont stockés dans les vecteurs $\boldsymbol{\gamma}_m^{(0)+}$, $\boldsymbol{\pi}_m^{(0)+}$, $\boldsymbol{\gamma}_m^{(2)-}$ et $\boldsymbol{\pi}_m^{(2)-}$. De la même manière que pour les modèles dédiés aux pièces formées de couches homogènes, les composantes tangentielles des champs sont construites

à partir de ces coefficients en utilisant les opérateurs de passage champs-potentiels discrétisés que l'on a déjà présentés.

Ainsi, l'écriture des conditions de passage au niveau des deux interfaces conduit à $4(2M_u + 1)$ relations entre les coefficients et les valeurs des champs sur les surfaces d'équation $x^3 = C_1$ et $x^3 = C_2$ pour chaque valeur de v_m . La discrétisation du système (7.16), sur les $N - 1$ surfaces internes d'équations $x^3 = x_j^3$ conduit quant à elle à $(N - 1)4(2M_u + 1)$ relations entre les valeurs des composantes covariantes des champs à l'intérieur de la couche non-homogène pour chaque valeur de v_m . On doit donc ajouter $4(2M_u + 1)$ relations indépendantes au système matriciel obtenu comportant en tout $4(2M_u + 1)(N + 1) + 4(2M_u + 1)$ inconnues.

Afin d'obtenir des équations supplémentaires sur les coefficients des expansions modales dans les couches homogènes, nous écrivons les équations de Maxwell covariantes obtenues dans la couche non-homogène le long des deux interfaces $x^3 = C_1$ et $x^3 = C_2$ (et portant sur les seules composantes tangentielles des champs vivant dans cette couche). Ces deux équations n'ont pas encore été utilisées : elles ont été remplacées par les conditions de passage des composantes tangentielles le long de ces interfaces. De plus, afin d'obtenir des relations portant sur les coefficients des expansions modales, nous écrivons ces équations sur les composantes tangentielles des champs vivant dans les strates homogènes (elles doivent être égales à celles vivant dans la strate non-homogène). En d'autres termes, nous appliquons les restrictions aux deux interfaces $x^3 = C_1$ et $x^3 = C_2$ de l'opérateur défini dans (7.16), respectivement aux composantes tangentielles à l'interface supérieure du champ total dans l'air (cette équation fait donc intervenir le champ de référence) et aux composantes tangentielles du champ transmis dans le milieu inférieur.

Numériquement, ceci se traduit par les relations numériques suivantes :

$$n_{11}^{(0)} \gamma_m^{(0)+} + n_{12}^{(0)} \pi_m^{(0)+} + s_1^{(0)} = 0, \quad (7.21)$$

$$n_{21}^{(0)} \gamma_m^{(0)+} + n_{22}^{(0)} \pi_m^{(0)+} + s_2^{(0)} = 0, \quad (7.22)$$

$$n_{11}^{(2)} \gamma_m^{(2)-} + n_{12}^{(2)} \pi_m^{(2)-} = 0, \quad (7.23)$$

$$n_{21}^{(2)} \gamma_m^{(2)-} + n_{22}^{(2)} \pi_m^{(2)-} = 0, \quad (7.24)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 n_{11}^{(0)} &= [\mathcal{C}]_1 \mathcal{M}_m^{(0)+} + [\mathcal{F}(\sigma)]_1 \mathcal{P}_m^{(0)+}, \\
 n_{12}^{(0)} &= [\mathcal{C}]_1 \mathcal{N}_m^{(0)+} + [\mathcal{F}(\sigma)]_1 \mathcal{Q}_m^{(0)+} + [\mathcal{D}(\sigma, \mu)]_1 R_m^{(0)+}, \\
 n_{21}^{(0)} &= [\mathcal{F}(\mu)]_1 \mathcal{M}_m^{(0)+} + [\mathcal{D}(\mu, \sigma)]_1 \mathcal{O}_m^{(0)+} + [\mathcal{C}]_1 \mathcal{P}_m^{(0)+}, \\
 n_{22}^{(0)} &= [\mathcal{F}(\mu)]_1 \mathcal{N}_m^{(0)+} + [\mathcal{C}]_1 \mathcal{Q}_m^{(0)+}, \\
 n_{11}^{(2)} &= [\mathcal{C}]_N \mathcal{M}_m^{(2)+} + [\mathcal{F}(\sigma)]_N \mathcal{P}_m^{(2)+}, \\
 n_{12}^{(2)} &= [\mathcal{C}]_N \mathcal{N}_m^{(2)+} + [\mathcal{F}(\sigma)]_N \mathcal{Q}_m^{(2)+} + [\mathcal{D}(\sigma, \mu)]_N R_m^{(2)+}, \\
 n_{21}^{(2)} &= [\mathcal{F}(\mu)]_N \mathcal{M}_m^{(2)+} + [\mathcal{D}(\mu, \sigma)]_N \mathcal{O}_m^{(2)+} + [\mathcal{C}]_N \mathcal{P}_m^{(2)+}, \\
 n_{22}^{(2)} &= [\mathcal{F}(\mu)]_N \mathcal{N}_m^{(2)+} + [\mathcal{C}]_N \mathcal{Q}_m^{(2)+},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 s_1^{(0)} &= [\mathcal{C}]_1 \hat{E}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) + [\mathcal{F}(\sigma)]_1 \hat{H}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) + [\mathcal{D}(\sigma, \mu)]_1 \hat{H}_2^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m), \\
 s_2^{(0)} &= [\mathcal{F}(\mu)]_1 \hat{E}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) + [\mathcal{D}(\mu, \sigma)]_1 \hat{E}_2^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) + [\mathcal{C}]_1 \hat{H}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m).
 \end{aligned}$$

Ces deux dernières relations traduisent l'application de l'opérateur différentiel au champ de référence. Elles ne font pas intervenir les inconnues et apparaîtront donc au second membre du système matriciel à résoudre.

Finalement, nous pouvons construire $2M_v + 1$ matrices carrées Z_m de taille $4(2M_u + 1)(N + 2)$ dont la structure générale est donnée en bas de page. Ces différentes matrices sont creuses.

7.5 Calcul des solutions

L'introduction du champ de référence calculé pour une géométrie présentant une plaque plane homogène de même que précédemment conduit à la construction d'un

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix}
 n_{11}^{(0)} & n_{12}^{(0)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 n_{21}^{(0)} & n_{22}^{(0)} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \mathcal{M}^{(0)+} & \mathcal{N}^{(0)+} & -\mathbf{I}_u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \mathcal{O}^{(0)+} & -\mathbf{I}_u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 \mathcal{P}^{(0)+} & \mathcal{Q}^{(0)+} & -\mathbf{I}_u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \mathcal{R}^{(0)+} & -\mathbf{I}_u & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & [\sigma \mathcal{A}]_2^{N-1} & [\mathcal{B}]_2^{N-1} & jv_m [\mathcal{D}_u]_2^{N-1} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & [\mathcal{B}]_2^{N-1} & jv_m [\mathcal{D}_u]_2^{N-1} & 0 & [j\omega \mu \mathcal{A}]_2^{N-1} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & [\mathcal{C}]_2^{N-1} & 0 & [\mathcal{F}(\sigma)]_2^{N-1} & [\mathcal{D}(\sigma, \mu)]_2^{N-1} & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & [\mathcal{F}(\mu)]_2^{N-1} & [\mathcal{D}(\mu, \sigma)]_2^{N-1} & [\mathcal{C}]_2^{N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\mathbf{I}_u & \mathcal{M}^{(2)-} & \mathcal{N}^{(2)-} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\mathbf{I}_u & 0 & \mathcal{O}^{(2)-} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\mathbf{I}_u & \mathcal{P}^{(2)-} & \mathcal{Q}^{(2)-} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\mathbf{I}_u & 0 & \mathcal{R}^{(2)-} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n_{11}^{(2)} & n_{12}^{(2)} \\
 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n_{21}^{(2)} & n_{22}^{(2)}
 \end{bmatrix}.$$

second membre prenant la forme suivante :

$$Y_m = \begin{bmatrix} -s_1^{(0)} \\ -s_2^{(0)} \\ -\hat{E}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) \\ -\hat{E}_2^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) \\ -\hat{H}_1^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) \\ -\hat{H}_2^{(ref)}(\mathbf{u}, v_m) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Comme nous l'avons vu, les deux premières lignes sont constituées par les restrictions de l'opérateur (7.16) aux deux interfaces appliquées au champ de référence dans l'air.

La structure choisie pour la matrice Z_m conduit à la détermination d'un vecteur inconnu \mathbf{X}_m défini par :

$$\mathbf{X}_m = \begin{bmatrix} \gamma_m^{(0)+} \\ \pi_m^{(0)+} \\ E_1(\mathbf{u}, v_m, x_1^3) \\ E_2(\mathbf{u}, v_m, x_1^3) \\ H_1(\mathbf{u}, v_m, x_1^3) \\ H_2(\mathbf{u}, v_m, x_1^3) \\ E_1(\mathbf{u}, v_m, x_{2..N-1}^3) \\ E_2(\mathbf{u}, v_m, x_{2..N-1}^3) \\ H_1(\mathbf{u}, v_m, x_{2..N-1}^3) \\ H_2(\mathbf{u}, v_m, x_{2..N-1}^3) \\ E_1(\mathbf{u}, v_m, x_N^3) \\ E_2(\mathbf{u}, v_m, x_N^3) \\ H_1(\mathbf{u}, v_m, x_N^3) \\ H_2(\mathbf{u}, v_m, x_N^3) \\ \gamma_m^{(2)-} \\ \pi_m^{(2)-} \end{bmatrix}. \quad (7.26)$$

On résout alors $2M_v + 1$ systèmes matriciels de la forme $Z_m X_m = Y_m$ à l'aide d'un solveur direct. Les matrices Z_m ne dépendant pas de l'excitation, il n'est pas nécessaire de les recalculer pour un déplacement de la sonde : on construit une

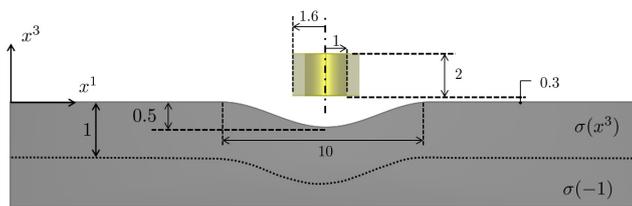
matrice d'excitation en concaténant les différents vecteurs colonnes Y_m construits pour chaque position du capteur, ce qui nous permet de calculer les solutions pour l'ensemble des positions du capteur d'un coup.

Dans la section suivante, nous présentons la stratégie adoptée afin de valider ce modèle, ainsi que les résultats obtenus. Nous expliciteront aussi les paramètres numériques utilisés ainsi que les temps de calcul obtenus.

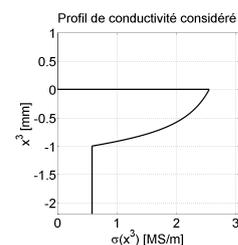
7.6 Résultats et Validations

Afin de valider le code développé pour traiter des configurations présentant des gradients de conductivité (nous ne mêlerons pas ici gradient de conductivité et de perméabilité), nous allons le comparer au résultat donné par une autre méthode de calcul. Cependant, le logiciel commercial de calcul par éléments finis que nous avons utilisé afin de valider les codes dédiés aux pièces stratifiées ne m'a pas donné satisfaction dans ce cas : j'ai rencontré des problèmes de convergence lorsque j'ai introduit un gradient de conductivité dans la strate. Ainsi, j'ai finalement choisi de valider ce code à l'aide de la méthode précédente que l'on utilisera afin d'approcher la couche non-homogène par une couche formée de couches homogènes très fines. Cela revient à dire que l'on va approcher le profil de conductivité par une fonction constante par morceau : on va donc comparer une méthode d'ordre 0 à une méthode d'ordre élevé.

Dans un premier temps, vérifions que cette méthode converge bien vers la solution donnée par notre code hybride basé sur la méthode spectrale (et que l'on dénotera par S-CCM dans la suite). Pour ce faire, on considère la configuration représentée en coupe sur la figure 7.5(a).



(a) Vue en coupe de la configuration



(b) Profil de conductivité considéré

FIGURE 7.5 – Configuration utilisée pour la validation de la méthode S-CCM.

Les dimensions sont en millimètres. La couche inférieure est considérée comme étant un substrat et on fixe sa conductivité à la dernière valeur prise par le profil de la strate non-homogène (ce qui doit être le cas dans un matériau ayant subi des

traitements de surface). On choisit alors un profil de la forme :

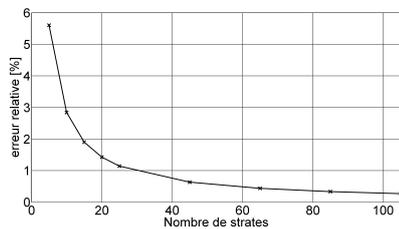
$$\sigma(x^3) = \sigma_0 \operatorname{Arctan}(3(x^3 + c)/b), \quad (7.27)$$

avec c et b , deux constantes que l'on fixe à 0.5 mm et 1 mm, et $\sigma_0 = 2$ MS/m. Ce profil particulier est représenté sur la figure 7.5(b).

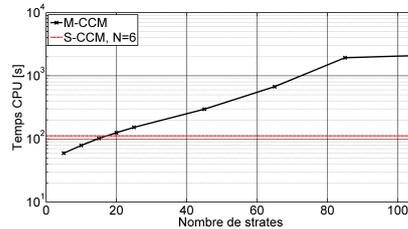
Cette configuration est approchée par un empilement de $N_m + 1$ couches homogènes (en plus de l'air) afin d'être traitée par le code développé pour les configurations stratifiées à interfaces parallèles (que l'on nommera M-CCM). Dans un premier temps, nous avons observé l'erreur entre les résultats donnés par les deux codes pour différentes valeurs de N_m (nombre de strates approchant la strate non-homogène). Étant donné que les deux méthodes développées calculent une perturbation par rapport à la même configuration de référence, nous avons choisie de comparer l'erreur relative commise sur la perturbation ΔZ de l'impédance (l'impédance de référence étant la même pour les deux configurations). Nous avons fixé le nombre de points de collocation à $N + 1 = 7$ pour la méthode S-CCM, en ayant au préalable vérifié que le résultat avait convergé. La formule de l'erreur relative choisie est donnée par :

$$\xi = \left\| \frac{\Delta Z_S - \Delta Z_M}{\Delta Z_S} \right\|.$$

Sur la figure 7.6, nous avons tracé l'évolution de l'erreur et du temps de calcul en fonction de N_m . On voit bien que le résultat approché par la méthode converge vers celui obtenu lorsque l'on augmente la valeur de N_m , ce qui justifie son utilisation comme solution de référence ici. Le temps de calcul devient très vite important : il est fortement impacté par le calcul d'un grand nombre de fonctions propres et de matrices S, ce qui montre que cette méthode n'est pas idéale pour traiter ce genre de configuration (tout dépend en fait de la précision recherchée). En rouge, sur la figure 7.6(b) nous avons repéré le temps de calcul obtenu avec la méthode spectrale.



(a) Évolution de l'erreur relative



(b) Évolution du temps de calcul

FIGURE 7.6 – Test de Convergence de la méthode M-CCM en fonction du nombre de strates N_m considéré.

Nous choisissons finalement de fixer N_m à une valeur de 55 et N à 7 afin de comparer les champs calculés par les deux méthodes. Les paramètres numériques

sont fixés à : $M_u = M_v = 35$, $\delta_{x^1} = \delta_{x^2} = 0.2$ mm, $L_1 = L_2 = 50$ mm, où L_1 et L_2 désignent la taille de la boîte numérique considérée suivant les directions x^1 et x^2 respectivement. Sur la figure 7.7, nous avons tracé le profil analytique ainsi que les approximations obtenues d'une part avec la méthode modale et d'autre part avec une interpolation sur les polynômes de Chebychev en utilisant ces valeurs. Le tracé du bas représente les deux erreurs.

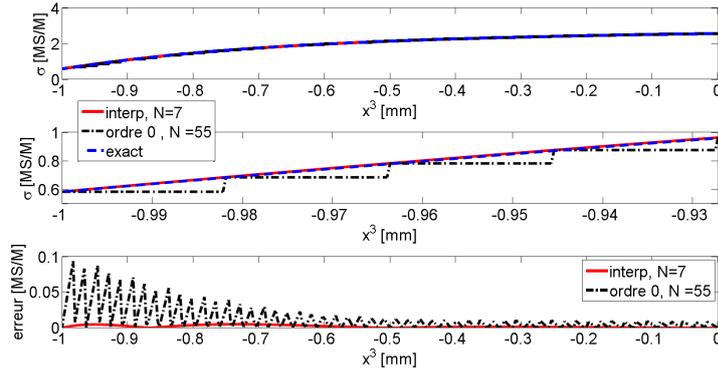


FIGURE 7.7 – Approximations du profil de conductivité

Les paramètres numériques utilisés, ainsi que les temps de calcul sont donnés dans les tableaux de la figure 7.8.

Paramètre	Valeur	M – CCM	
M_u	45	Opération	T_{CPU} (s)
M_v	45	Calcul des modes et matrices S	3062
L_1	50 mm	Calcul des coefficients et de ΔZ	609
L_2	50 mm	Calcul des champs dans la strate	2124
δ_{x^1}	0.15 mm	S – CCM	
δ_{x^2}	0.2 mm	Calcul des modes	12
N_m ($M - CCM$)	55	Assemblage des matrices	42
N ($S - CCM$)	7	Calcul des solutions et de ΔZ	112
		Calcul des champs dans la strate	12
		Calcul du champ de référence et Z_{ref}	49

(a) Paramètres numériques utilisés pour la validation.

(b) Détail des temps de calcul pour les deux méthodes.

FIGURE 7.8 – Paramètres numériques utilisés pour la validation du modèle stratifié non-parallèle et temps de calcul correspondants.

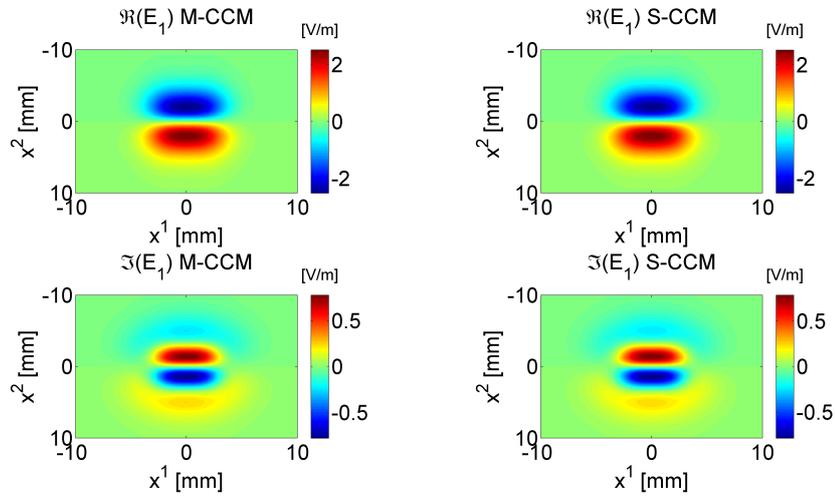
Nous avons volontairement choisi d'augmenter les nombres de modes pour le calcul des champs afin de s'assurer que les deux méthodes convergent bien (le calcul des champs est plus sensible à ces paramètres que le calcul de l'impédance qui est une grandeur intégrée). On note tout d'abord que la méthode modale est très

lourde dans cette configuration. En effet, elle nécessite de calculer 56 matrices S ce qui impacte le temps de calcul des éléments propres. De plus, le calcul des champs dans la profondeur de la strate non-homogène (on a choisi de calculer les champs sur 31 surfaces $x^3 = c^{ste}$ réparties uniformément dans cette strate) est lui aussi très lourd pour cette méthode puisque l'on doit recalculer les coefficients dans chaque strate concernée en utilisant les matrices S intermédiaires. Cette opération est particulièrement rapide pour la méthode spectrale puisque l'étape de résolution conduit directement à la détermination des champs sur les points de collocation : ils sont ensuite interpolés sur les points souhaités à l'aide des fonctions cardinales déjà présentées.

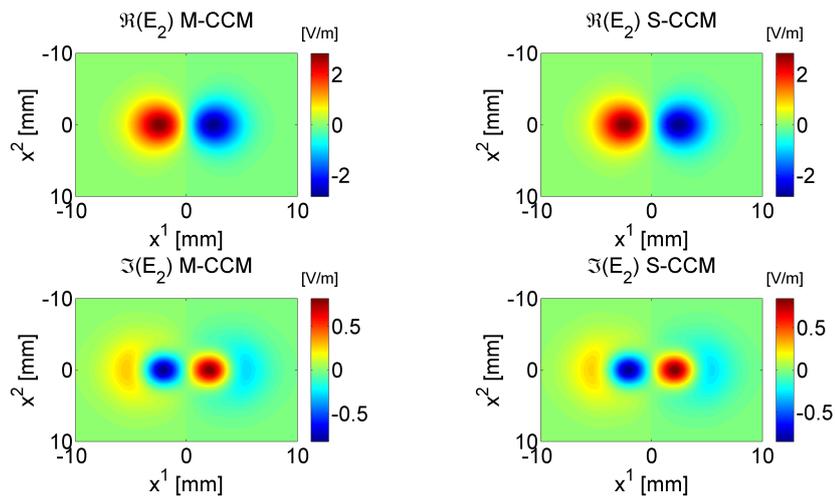
Sur les figures 7.9 et 7.10 nous avons représenté, de même que précédemment, les cartographies des composantes covariantes des champs électriques et magnétiques calculées sur l'interface supérieure. Ces figures montrent un très bon accord. Comme nous l'avons dit, nous avons aussi calculé les champs sur des plans en profondeur dans la strate non-homogène puisque leur variation dans cette direction est particulièrement dépendante du profil de conductivité. Les résultats obtenus sont représentés sur les figures 7.11 et 7.12. Sur la première, nous avons représenté les extractions de certaines composantes dans des plans d'équation $x^1 = c^{ste}$. Les deux premières cartographies de chaque sous image représentent le module de la composante calculée par la méthode spectrale en haut et par la méthode modale en dessous. La troisième cartographie représente la différence de ces deux modules.

Sur la figure 7.12, nous avons représenté de façon analogue les différentes composantes dans des plans $x^2 = c^{ste}$ cette fois-ci.

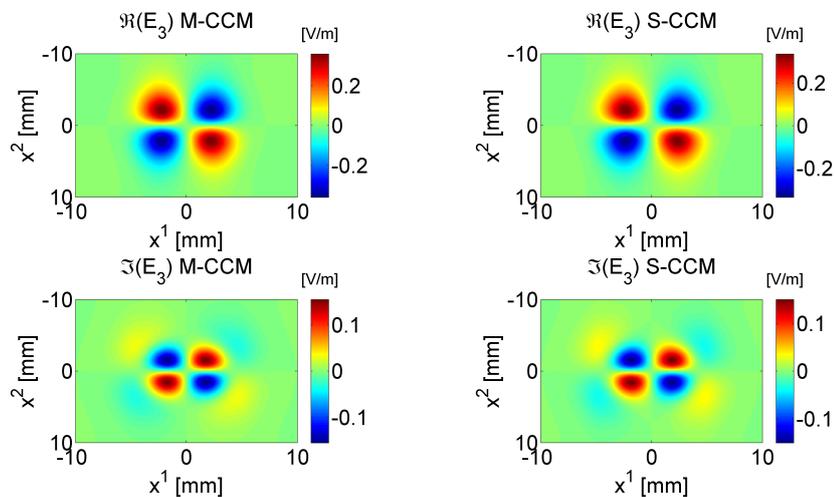
Tous ces résultats montrent un très bon accord des deux approches, les erreurs relatives restant faibles (elles sont de l'ordre de 1%) et nous avons montré que l'on pouvait encore les réduire en augmentant le nombre de strates utilisé pour la méthode modale (ceci conduirait cependant à des temps de calcul très importants pour cette méthode).



(a) Cartographie de E_1



(b) Cartographie de E_2



(c) Cartographie de E_3

FIGURE 7.9 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes covariantes du champ électrique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.

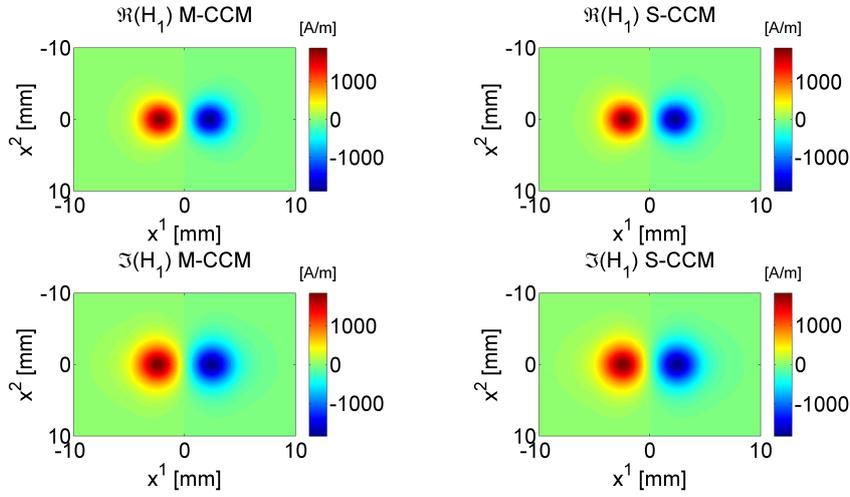
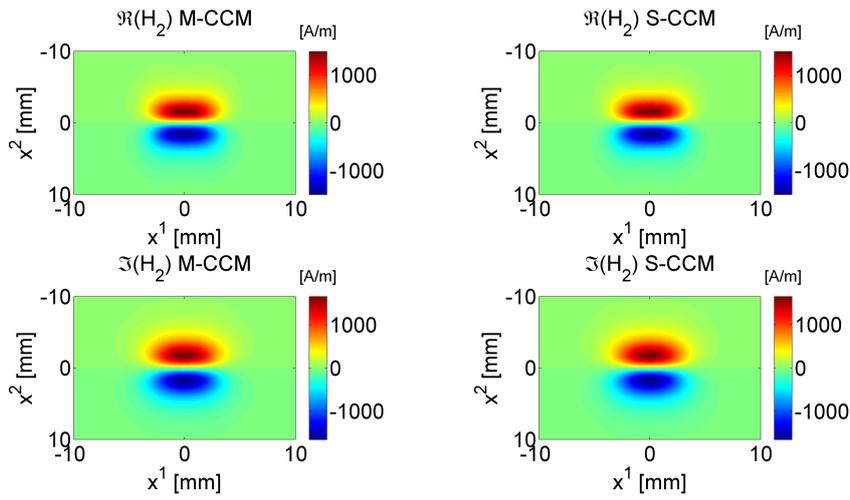
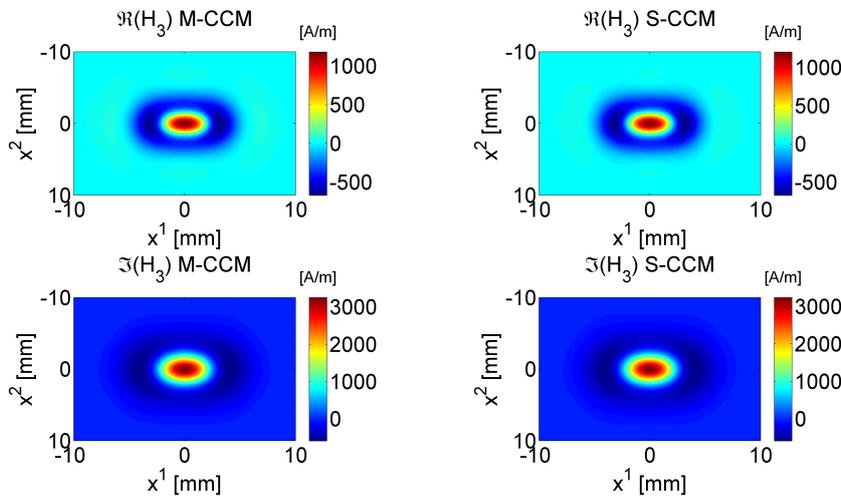
(a) Cartographie de H_1 (b) Cartographie de H_2 (c) Cartographie de H_3

FIGURE 7.10 – Comparaison des parties réelles et imaginaires des composantes co-variantes du champ magnétique calculées sur l'interface $x^3 = 0$ mm.

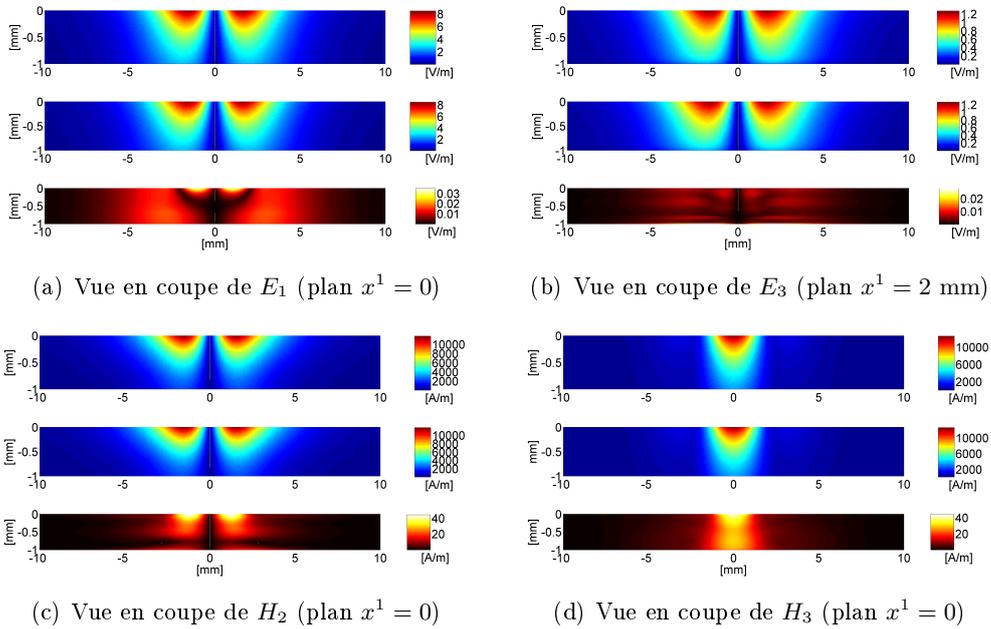


FIGURE 7.11 – Extraction des composantes dans des plans $x^1 = c^{ste}$, visualisation dans la strate non-homogène. Pour chaque figure : en haut est représenté le résultat $S - CCM$, en dessous le résultat $M - CCM$ et en bas la différence des deux.

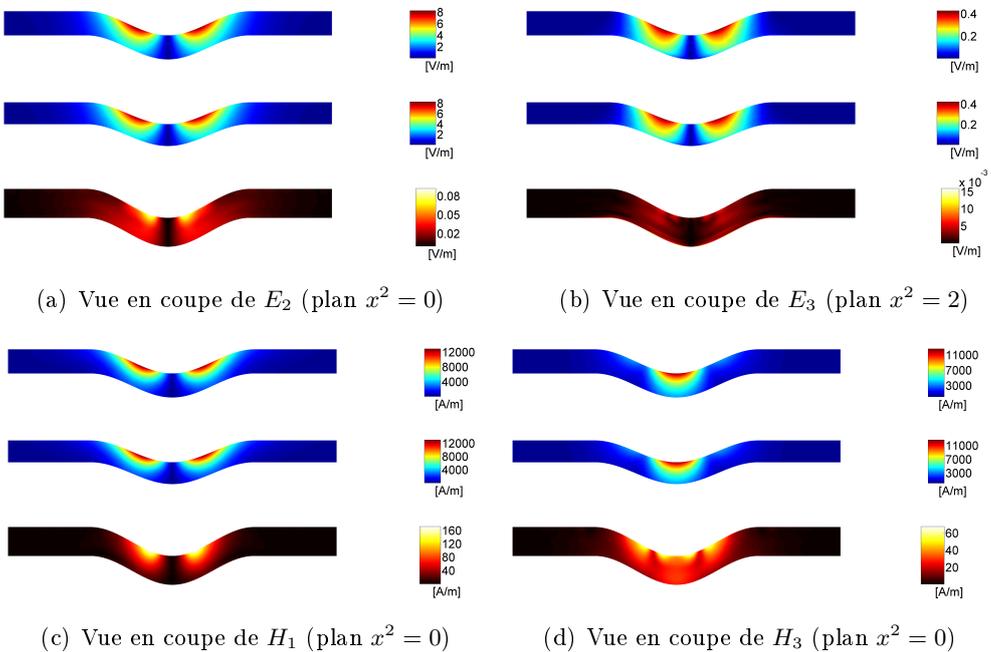


FIGURE 7.12 – Extraction des composantes dans des plans $x^2 = c^{ste}$, visualisation dans la strate non-homogène. Pour chaque figure : en haut est représenté le résultat $S - CCM$, en dessous le résultat $M - CCM$ et en bas la différence des deux.

7.7 Conclusion

Nous avons présenté ici le modèle développé afin de calculer la réponse d'une sonde et les champs induits par celle-ci lors du contrôle d'une pièce complexe (extrudée) présentant un gradient de conductivité dans la profondeur. Il est clair que la méthode modale précédemment développée peut donner une approximation fidèle de ce cas à l'ordre 0 en considérant un nombre de strates suffisant. Néanmoins, le calcul devient alors très lourd : il faut un grand nombre de strates pour obtenir une précision suffisante.

La méthode hybride (obtenue par un couplage de la méthode modale précédente et d'une approche pseudo-spectrale) présentée ici s'appuie quant à elle sur le même formalisme des équations de Maxwell dans les domaines homogènes (air et substrat par exemple). Les équations régissant le comportement des champs dans la zone non-homogène sont discrétisées par une méthode numérique d'ordre élevé présentant une convergence très rapide (méthode pseudo-spectrale de Chebyshev) et les deux formalismes sont couplés par l'application des conditions de passage des champs aux deux interfaces séparant les milieux homogènes de la strate non-homogène.

Nous avons validé ce modèle en utilisant le cas limite de la méthode modale précédente et nous avons montré qu'elle était beaucoup plus adaptée à ce type de configuration. Nous avons choisi un profil de conductivité arbitraire (en arc tangente) pour la validation mais n'importe quel forme de profil de conductivité peut être considéré. Cependant, plus les variations du profil seront importantes et plus l'ordre choisi pour la méthode devra être important.

Conclusions et Perspectives

Conclusions

Au cours de cette thèse, j'ai développé des codes de simulation afin de calculer les champs induits par un capteur inductif 3D dans une pièce conductrice de géométrie et/ou de propriétés physiques complexes.

Le premier code développé permet de calculer les champs réfléchis et transmis ainsi que la réponse (impédance) d'un capteur éclairant des pièces extrudées présentant des interfaces complexes. Il répond tout d'abord à un besoin industriel puisqu'il permet de simuler la réponse d'un capteur lors du contrôle de pièces présentant une surface ondulée, situation rencontrée lors du procédé de coulée continue présenté dans l'introduction de ce manuscrit. Il a été validé expérimentalement et numériquement et je l'ai intégré à une version de développement de la plateforme de simulation CIVA développée au CEA LIST qui a été livrée à la société Arcelor Mittal dans le cadre du projet européen SIMPOSIUM [sim]. En outre, il permet un calcul complet des champs électromagnétiques dans des configurations plus complexes où les pièces sont formées de plusieurs interfaces irrégulières et non-parallèles. Les temps de calcul obtenus sont très faibles en comparaison des méthodes numériques classiques. Ce code constitue donc une extension des méthodes semi-analytiques de calcul de champ actuelles et une première étape charnière (calcul du champ primaire) en vue du calcul de la simulation de la réponse d'une pièce complexe comportant un défaut par une méthode de type intégrale de volume (VIE).

Le deuxième code de simulation que j'ai développé repose sur un couplage entre le formalisme en potentiels vecteurs du second ordre généralisé aux systèmes de coordonnées non-orthogonaux et une méthode numérique d'ordre élevé présentant une convergence rapide. Il permet de calculer les champs induits par une source électromagnétique 3D dans des pièces présentant des interfaces complexes ainsi que des gradients de conductivité et/ou de perméabilité. Les résultats obtenus ont été comparés à ceux donnés par le code précédemment développé que l'on a utilisé pour approcher un profil de conductivité par une fonction constante par morceaux. Ce code permet de traiter de façon efficace des configurations de contrôle impliquant des pièces comportant des propriétés physiques et géométriques complexes et peut donc être utilisé afin de prendre en compte l'influence de l'état de surface de la pièce lors des processus de caractérisation des matériaux par inversion.

Perspectives

Les codes de simulation que j'ai développé traitent des configurations extrudées (ou 2D1/2), qui correspondent à un besoin industriel. Cette particularité des configurations traitées est exploitée dans l'implémentation du code, ce qui contribue à son efficacité (mémoire et temps de calcul).

Néanmoins, le formalisme particulier introduit afin de développer ces codes permet de traiter le cas d'une pièce présentant un profil variant suivant deux directions. En effet, les calculs tensoriels présentés dans le chapitre 4 peuvent tout à fait être généralisés à une interface décrite par une équation du type $z = \alpha(x, y)$. Nous avons effectué cette généralisation et nous en présentons ici les étapes principales ainsi que les expressions qui en découlent.

Dans ce cas, la transformation associée (cf. Annexe A) présente une métrique dépendant des deux coordonnées puisque l'on a :

$$g_{ij} = (G)_{ij}, \text{ avec } G = \begin{bmatrix} 1 + (\partial_1\alpha)^2 & (\partial_1\alpha)(\partial_2\alpha) & (\partial_1\alpha) \\ (\partial_1\alpha)(\partial_2\alpha) & 1 + (\partial_2\alpha)^2 & (\partial_2\alpha) \\ (\partial_1\alpha) & (\partial_2\alpha) & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.28)$$

Ici, seule la décomposition suivant e^3 reste valable puisque G dépend à la fois de x^1 et x^2 . Le même raisonnement que celui appliqué dans le cas d'une interface extrudée suivant la direction x^2 conduit alors à des relations champs-potentiels prenant la forme suivante, où l'on a posé $\partial_1\alpha = \dot{\alpha}_1$ et $\partial_2\alpha = \dot{\alpha}_2$:

$$E_1 = -j\omega\mu [(\dot{\alpha}_2\partial_3 - \partial_2)\Pi'' + (\partial_3\partial_1 + \dot{\alpha}_1k^2)\Gamma''], \quad (7.29)$$

$$E_2 = -j\omega\mu [(\partial_3\partial_2 + \dot{\alpha}_2k^2)\Gamma'' + (\partial_1 - \dot{\alpha}_1\partial_3)\Pi''], \quad (7.30)$$

$$E_3 = -j\omega\mu(\partial_3^2 + k^2)\Gamma'', \quad (7.31)$$

$$H_1 = (\partial_1\partial_3 + \dot{\alpha}_1k^2)\Pi'' - k^2(\partial_2 - \dot{\alpha}_2\partial_3)\Gamma'', \quad (7.32)$$

$$H_2 = (\partial_3\partial_2 + k^2\dot{\alpha}_2)\Pi'' + k^2(\partial_1 - \dot{\alpha}_1\partial_3)\Gamma'', \quad (7.33)$$

$$H_3 = (\partial_3^2 + k^2)\Pi''. \quad (7.34)$$

Les potentiels Γ'' et Π'' vérifient toujours l'équation $(\Delta + k^2)\cdot = 0$ où l'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit alors sous la forme :

$$\Delta \equiv \partial_1^2 + \partial_2^2 + (1 + \dot{\alpha}_2^2 + \dot{\alpha}_1^2)\partial_3^2 - (\dot{\alpha}_1\partial_1 + \partial_1\dot{\alpha}_1 + \dot{\alpha}_2\partial_2 + \partial_2\dot{\alpha}_2)\partial_3. \quad (7.35)$$

L'implémentation d'un code de simulation reposant sur ce formalisme et sur la même stratégie de discrétisation que celle adoptée pour traiter des géométries extrudées (cf. 4) conduit alors à la construction de matrices de convolution à deux dimensions. En effet, il est clair que la dépendance en x^2 du profil géométrique ne permet plus de traiter le problème de façon séquentielle comme nous l'avions fait. En d'autres termes, le calcul numérique des éléments propres de cet opérateur de Laplace-Beltrami doit être effectué en une seule étape qui consiste en la recherche des vecteurs propres et valeurs propres d'une matrice de taille $(2M_u + 1)(2M_v + 1)$.

D'un point de vue pratique, il est donc nécessaire ici de construire des matrices de convolution 2D. En outre, la détermination des coefficients des expansions modales doit elle aussi être effectuée en une seule opération qui consiste en la résolution d'un système matriciel de taille $4(2M_u + 1)(2M_v + 1)$. Cette opération peut s'avérer très lourde si le nombre de modes est important.

Nous avons vu que ce nombre de modes correspond exactement au nombre de fonctions exponentielles (ou de fréquences spatiales discrètes) que l'on fixe afin de représenter les solutions. Il constitue donc le paramètre numérique principal de cette méthode de résolution et dépend fortement des autres paramètres numériques qu'il faut choisir : la résolution spatiale et la taille du domaine numérique. Nous avons vu également que ces derniers paramètres devaient être choisis afin d'assurer une bonne représentation du profil géométrique ainsi que du champ de référence. L'inconvénient est alors que plus la fréquence est faible et plus l'expansion de ce champ est importante : il faut alors augmenter la taille du domaine numérique ce qui conduit à une augmentation du nombre de modes nécessaires et donc à une baisse des performances. De plus, il est clair qu'un nombre de modes important est nécessaire afin de représenter des profils présentant de fortes variations, ainsi que leur dérivée. Il serait alors très intéressant d'utiliser une autre base de fonctions afin de représenter les solutions. On peut penser par exemple à discrétiser les équations à l'aide d'une méthode de Galerkin basée sur l'utilisation de B-Splines, qui permettrait certainement une réduction de la taille des systèmes matriciels.

Comme nous l'avons dit, le code de simulation développé constitue la première étape (calcul du champ primaire) du calcul de la réponse d'un capteur durant le contrôle d'une pièce complexe présentant un défaut par une méthode de type intégrale de volume. L'étape suivante nécessite la connaissance de la dyade de Green associée à une pièce de géométrie complexe. Il pourrait alors être intéressant de calculer numériquement cette dyade en résolvant le problème en remplaçant la source 3D par un point source enfoui dans la pièce. Une autre solution qui mérite d'être explorée consiste à généraliser à un système de coordonnées non-orthogonales le calcul de la dyade de Green associée à un demi-espace décrit dans [Bowler 1987] (de la même manière que nous l'avons fait pour le formalisme en potentiel vecteur du second ordre).

Notions d'algèbre vectorielle et tensorielle

Nous présentons ici les notions algébriques nécessaires à l'écriture des équations de Maxwell dans un repère non-orthogonal. Cette annexe s'inspire très largement du cours d'algèbre tensorielle de J Garrigues [Garrigues]. Nous en avons extrait les éléments nécessaires au développement du formalisme en potentiels vecteurs du second ordre dans des systèmes de coordonnées curvilignes non-orthogonaux.

A.1 Espace vectoriel et espace dual

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K , dont les vecteurs de base sont notés \mathbf{e}_i . Un élément quelconque \mathbf{x} de E s'écrira donc sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n,$$

ou plus simplement, en utilisant la convention de sommation d'Einstein qui sera utilisée dans toute la suite :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

On peut alors définir l'espace dual de E (noté E^*) et représentant l'ensemble des formes linéaires $\bar{\mathbf{u}}$ de E dans K qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \forall \lambda \in K, \bar{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}).$$

Considérons maintenant les éléments particuliers de E^* que l'on notera $\bar{\mathbf{e}}^i$ et qui sont définis sous la forme suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in E / \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x}) = x^i.$$

En d'autres termes, les $\bar{\mathbf{e}}^i$ sont les formes linéaires sur E qui à tout vecteur \mathbf{x} de E associent sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base des \mathbf{e}_i .

Par définition, ces éléments particuliers $\bar{\mathbf{e}}^i$ de E^* sont associés aux éléments \mathbf{e}_i de E . Ils sont au nombre de n et vérifient :

$$\bar{\mathbf{e}}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors qu'ils forment une base de E^* , généralement appelée « base duale » de la base des \mathbf{e}_i . E^* est donc de dimension n .

A.2 Covariance et Contravariance

Définissons maintenant une nouvelle base de E que l'on notera \mathbf{e}'_i et qui se déduit de la précédente par les relations linéaires :

$$\mathbf{e}'_j = B_j^i \mathbf{e}_i \text{ et } \mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}'_j, \quad (\text{A.1})$$

où B_j^i et A_i^j forment des matrices inverses l'une de l'autre.

Les bases duales de ces deux bases se déduisent alors l'une de l'autre par des relations analogues mais en inversant les deux matrices mises en jeu, i.e :

$$\bar{\mathbf{e}}^{j'} = A_i^j \bar{\mathbf{e}}^i \text{ et } \bar{\mathbf{e}}^i = B_j^i \bar{\mathbf{e}}^{j'}. \quad (\text{A.2})$$

Ceci se montre aisément en considérant un vecteur quelconque \mathbf{x} de E et en écrivant que :

$$\bar{\mathbf{e}}^{j'}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{e}}^{j'}(x^i \mathbf{e}_i) = \bar{\mathbf{e}}^{j'}(A_k^i \mathbf{e}'_k) x^i = A_k^i \bar{\mathbf{e}}^{j'}(\mathbf{e}'_k) x^i = A_k^i \delta_k^j x^i = A_j^i x^i.$$

Or, on a $x^i = \bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x})$ par définition. Comme l'égalité est vérifiée quelque soit \mathbf{x} , on a donc montré la première relation de (A.5). La seconde se démontre de manière analogue.

Si on considère maintenant deux éléments quelconques : l'un de E (noté \mathbf{u}) et l'autre de E^* (noté $\bar{\mathbf{x}}$), et que l'on définit leurs coordonnées respectives dans les différentes bases considérées comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}'_{i'}, \\ \bar{\mathbf{x}} = x_i \bar{\mathbf{e}}^i = x_{i'} \bar{\mathbf{e}}^{i'}, \end{cases}$$

on montre en réinjectant les différentes expressions de changement de base dans les expressions précédentes que l'on a :

$$\begin{cases} x^i = B_j^i x^{j'} \\ x^{j'} = A_i^j x^i \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x_i = A_i^j x_{j'} \\ x_{j'} = B_j^i x_i \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Où l'on voit que les composantes de $\bar{\mathbf{x}}$ évoluent dans le même « sens » que les vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon « covariante » par rapport à ces vecteurs. Inversement, les composantes de \mathbf{x} évoluent dans le sens contraire des vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon « contravariante » par rapport à ces vecteurs.

A.3 Cas des espaces euclidiens

Lorsque E a une structure d'espace Euclidien, on peut définir dans cet espace une loi de composition interne appelée « produit scalaire » notée « \cdot » et faisant correspondre à tout couple de vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} un élément du corps $K = \mathfrak{R}$ (corps des réels pour un espace euclidien).

Ce produit scalaire satisfait de plus les conditions suivantes :

- $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $\forall \lambda \in \mathfrak{R}, \forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \forall \mathbf{z} \in E, \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
- si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, alors $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$.

Le caractère euclidien de E (ou même pré-euclidien le cas échéant) a une conséquence importante sur E^* . En effet, chaque élément $\bar{\mathbf{e}}^i$ de E^* est une forme linéaire de E dans \mathfrak{R} . On a donc : $\forall \mathbf{x} \in E, \bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{x}$ où les \mathbf{e}^i s'obtiennent par la définition :

$$\bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j.$$

On vient donc de montrer que les \mathbf{e}^i sont des éléments de E orthogonaux aux \mathbf{e}_j et qu'ils forment donc une autre base de E . Ainsi, la base des \mathbf{e}_i sera nommée base *covariante* et la base des \mathbf{e}^j sera la base *contravariante* (à ne pas confondre avec les **composantes** covariantes et contravariantes qui seront présentées ci-après) et on peut écrire un vecteur $\mathbf{x} \in E$ sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}^j$$

ce qui permet de remplacer les éléments de E^* par leur correspondant dans E et donc de ne travailler que dans l'espace E . La base des \mathbf{e}^i sera aussi appelée base duale de la base des \mathbf{e}_i .

A.4 Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur

On a donc montré que tout vecteur \mathbf{x} appartenant à un espace vectoriel E euclidien était défini de manière équivalente par la donnée de ses composantes dans une base de E et par ses composantes dans la base duale associée. On a vu de plus (cf. (A.6)) que les premières évoluent de façon contravariante par un changement de base, alors que les seconde évoluaient de façon covariantes. Elles seront donc nommées respectivement les composantes contravariantes et covariantes du vecteur \mathbf{x} par analogie avec les vecteurs de base.

En conclusion, les composantes contravariantes d'un vecteur \mathbf{x} sont ses composantes "naturelles", associées aux vecteurs de base de l'espace vectoriel considéré. Elles sont communément notées avec un indice en haut de telle sorte que l'on ait :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

Les composantes covariantes de \mathbf{x} correspondent aux produit scalaire de \mathbf{x} avec la base de E considérée ($x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$) et sont aussi les coordonnées du vecteur dans la base duale. Elles sont notées avec un indice en bas :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i.$$

A.5 Notions d'algèbre vectorielle

Nous présentons ici les notions algébriques nécessaires à l'écriture des équations de Maxwell dans un repère non-orthogonal.

A.5.1 Espace vectoriel et espace dual

On se place dans un espace vectoriel E de dimension n sur un corps K , dont les vecteurs de base sont notés \mathbf{e}_i . Un élément quelconque \mathbf{x} de E s'écrira donc sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + \dots + x^n \mathbf{e}_n,$$

ou plus simplement, en utilisant la convention de sommation d'Einstein qui sera utilisée dans toute la suite :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

On peut alors définir l'espace dual de E (noté E^*) et représentant l'ensemble des formes linéaires $\bar{\mathbf{u}}$ de E dans K qui satisfont aux conditions suivantes :

$$\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \forall \lambda \in K, \bar{\mathbf{u}}(\lambda \mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{y}).$$

Considérons maintenant les éléments particuliers de E^* que l'on notera $\bar{\mathbf{e}}^i$ et qui sont définis sous la forme suivante :

$$\forall \mathbf{x} \in E / \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x}) = x^i.$$

En d'autres termes, les $\bar{\mathbf{e}}^i$ sont les formes linéaires sur E qui à tout vecteur \mathbf{x} de E associent sa $i^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base des \mathbf{e}_i .

Par définition, ces éléments particuliers $\bar{\mathbf{e}}^i$ de E^* sont associés aux éléments \mathbf{e}_i de E . Ils sont au nombre de n et vérifient :

$$\bar{\mathbf{e}}^j(\mathbf{e}_i) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On montre alors qu'ils forment une base de E^* , généralement appelée « base duale » de la base des \mathbf{e}_i . E^* est donc de dimension n .

A.5.2 Covariance et Contravariance

Définissons maintenant une nouvelle base de E que l'on notera \mathbf{e}'_i et qui se déduit de la précédente par les relations linéaires :

$$\mathbf{e}'_j = B_j^i \mathbf{e}_i \text{ et } \mathbf{e}_i = A_i^j \mathbf{e}'_j, \quad (\text{A.4})$$

où B_j^i et A_i^j forment des matrices inverses l'une de l'autre.

Les bases duales de ces deux bases se déduisent alors l'une de l'autre par des relations analogues mais en inversant les deux matrices mises en jeu, i.e :

$$\bar{\mathbf{e}}^{j'} = A_i^j \bar{\mathbf{e}}^i \text{ et } \bar{\mathbf{e}}^i = B_j^i \bar{\mathbf{e}}^{j'}. \quad (\text{A.5})$$

Ceci se montre aisément en considérant un vecteur quelconque \mathbf{x} de E et en écrivant que :

$$\bar{e}^{j'}(\mathbf{x}) = \bar{e}^{j'}(x^i \mathbf{e}_i) = \bar{e}^{j'}(A_k^i \mathbf{e}'_k) x^i = A_k^i \bar{e}^{j'}(\mathbf{e}'_k) x^i = A_k^i \delta_k^j x^i = A_i^j x^i.$$

Or, on a $x^i = \bar{e}^i(\mathbf{x})$ par définition. Comme l'égalité est vérifiée quelque soit \mathbf{x} , on a donc montré la première relation de (A.5). La seconde se démontre de manière analogue.

Si on considère maintenant deux éléments quelconques : l'un de E (noté \mathbf{x}) et l'autre de E^* (noté $\bar{\mathbf{x}}$), et que l'on définit leurs coordonnées respectives dans les différentes bases considérées comme suit :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{j'}, \\ \bar{\mathbf{x}} = x_i \bar{\mathbf{e}}^i = x_{i'} \bar{\mathbf{e}}^{i'}, \end{cases}$$

on montre en réinjectant les différentes expressions de changement de base dans les expressions précédentes que l'on a :

$$\begin{cases} x^i = B_j^i x^{j'} \\ x^{j'} = A_i^j x^i \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_i = A_i^j x'_j \\ x'_j = B_j^i x_i \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Où l'on voit que les composantes de $\bar{\mathbf{x}}$ évoluent dans le même « sens » que les vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon « covariante » par rapport à ces vecteurs. Inversement, les composantes de \mathbf{x} évoluent dans le sens contraire des vecteurs de base de E . On dit qu'elles évoluent de façon « contravariante » par rapport à ces vecteurs.

A.5.3 Cas des espaces euclidiens

Lorsque E a une structure d'espace Euclidien, on peut définir dans cet espace une loi de composition interne appelée « produit scalaire » notée « . » et faisant correspondre à tout couple de vecteur \mathbf{x} et \mathbf{y} un élément du corps $K = \mathfrak{R}$ (corps des réels pour un espace euclidien).

Ce produit scalaire satisfait de plus les conditions suivantes :

- $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$
- $\forall \lambda \in \mathfrak{R}, \forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, (\lambda \mathbf{x}) \cdot \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{y} \cdot \mathbf{x})$
- $\forall \mathbf{x} \in E, \forall \mathbf{y} \in E, \forall \mathbf{z} \in E, \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z}$
- si $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, alors $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0$.

Le caractère euclidien de E (ou même pré-euclidien le cas échéant) a une conséquence importante sur E^* . En effet, chaque élément $\bar{\mathbf{e}}^i$ de E^* est une forme linéaire de E dans \mathfrak{R} . On a donc : $\forall \mathbf{x} \in E, \bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{x}$ où les \mathbf{e}^i s'obtiennent par la définition :

$$\bar{\mathbf{e}}^i(\mathbf{e}_j) = \delta_j^i = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j.$$

On vient donc de montrer que les \mathbf{e}^i sont des éléments de E orthogonaux aux \mathbf{e}_j et qu'ils forment donc une autre base de E . Ainsi, la base des \mathbf{e}_i sera nommée base *covariante* et la base des \mathbf{e}^j sera la base *contravariante* (à ne pas confondre avec les **composantes** covariantes et contravariantes qui seront présentées ci-après) et on peut écrire un vecteur $\mathbf{x} \in E$ sous la forme :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_j \mathbf{e}^j$$

ce qui permet de remplacer les éléments de E^* par leur correspondant dans E et donc de ne travailler que dans l'espace E . La base des \mathbf{e}^i sera aussi appelée base duale de la base des \mathbf{e}_i .

A.5.4 Coordonnées covariantes et contravariantes d'un vecteur

On a donc montré que tout vecteur \mathbf{x} appartenant à un espace vectoriel E euclidien était défini de manière équivalente par la donnée de ses composantes dans une base de E et par ses composantes dans la base duale associée. On a vu de plus (cf. (A.6)) que les premières évoluent de façon contravariante par un changement de base, alors que les seconde évoluaient de façon covariantes. Elles seront donc nommées respectivement les composantes contravariantes et covariantes du vecteur \mathbf{x} par analogie avec les vecteurs de base.

En conclusion, les composantes contravariantes d'un vecteur \mathbf{x} sont ses composantes "naturelles", associées aux vecteurs de base de l'espace vectoriel considéré. Elles sont communément notées avec un indice en haut de telle sorte que l'on ait :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i.$$

Les composantes covariantes de \mathbf{x} correspondent aux produit scalaire de \mathbf{x} avec la base de E considérée ($x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$) et sont aussi les coordonnées du vecteur dans la base duale. Elles sont notées avec un indice en bas :

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i.$$

A.6 Notions d'algèbre tensorielle

On se limitera ici au cas des espaces vectoriels euclidiens et l'on se placera directement dans un \mathbb{R} -espace vectoriel euclidien de dimension n .

A.6.1 Définition

Un tenseur \mathbf{T} d'ordre p est une application p -linéaire de E^p dans \mathbb{R} .

La p -linéarité signifie que \mathbf{T} est linéaire par rapport aux p vecteurs auquel il

s'applique :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{x}_p \in E^p \text{ et } \mathbf{x}'_k \in E, \\ \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{x}'_k, \dots, \mathbf{x}_p) = \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p) + \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}'_k, \dots, \mathbf{x}_p) \\ \text{et} \\ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \lambda \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p) = \lambda \mathbf{T}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_p). \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

A.6.2 Composantes d'un tenseur

Comme nous allons le voir, un tenseur peut être représenté par différentes composantes traduisant l'action de cette forme p -linéaire sur les vecteurs de l'espace de E . Afin d'illustrer ceci, prenons le cas d'un tenseur \mathbf{T} d'ordre 3. Considérons ensuite trois vecteurs quelconques de E que l'on notera \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . On a vu que ces vecteurs pouvaient s'écrire dans une base covariante $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ de E de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{y} = y^j \mathbf{e}_j, \quad \text{et } \mathbf{z} = z^k \mathbf{e}_k, \quad i, j, k = 1, \dots, n.$$

Comme \mathbf{T} est trilinéaire, on a :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k) x^i y^j z^k.$$

On définit alors les nombres $T_{ijk} = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k)$ qui sont appelés les composantes 123-covariantes du tenseur \mathbf{T} et qui sont au nombre de n^3 .

Si on est capable de calculer ces composantes, on peut alors calculer l'image de tout triplet de vecteurs de E par \mathbf{T} , puisque l'on a :

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in E, \quad \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = T_{ijk} x^i y^j z^k.$$

De plus, on peut par exemple définir les composantes 12-covariantes et 3-contravariantes de \mathbf{T} qui sont définies par $T_{ij}{}^k = \mathbf{T}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}^k)$. On voit qu'il existe alors 2^3 types de composantes pour un tenseur d'ordre 3 et pour une base de E (associée à sa base duale). De façon générale, un tenseur d'ordre p possède 2^p types de composantes différentes pour une seule base de E .

A.6.3 Produit contracté simple de tenseurs

On se limite ici à une présentation du produit contracté simple (un produit contracté double peut aussi être défini) puisque nous l'utiliserons de façon intensive dans la suite afin de parvenir à un formalisme compact des équations de Maxwell covariantes.

Le produit contracté simple de deux tenseurs \mathbf{P} et \mathbf{Q} d'ordres p et q se note $\mathbf{R} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ de même que le produit scalaire sur les vecteurs. Ses composantes sont définies en sommant sur les composantes de premier indice de \mathbf{Q} et sur les composantes de premier indice de \mathbf{P} :

$$R_{i_1 \dots i_{p-1} j_2 \dots j_q} = P_{i_1 \dots i_{p-1} k} Q^k_{j_2 \dots j_q}. \quad (\text{A.8})$$

Le résultat est donc un tenseur d'ordre $p + q - 2$.

Voyons maintenant le cas particulier qui nous intéresse. Notons tout d'abord qu'un vecteur \mathbf{v} de E constitue un tenseur d'ordre 1. En effet, on peut définir l'application linéaire qui à tout vecteur \mathbf{x} de E associe son produit scalaire avec \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} : \mathbf{x} \in E \rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}. \quad (\text{A.9})$$

Considérons maintenant un tenseur \mathbf{S} d'ordre 2. Par définition, le produit contracté de \mathbf{S} et \mathbf{v} est un tenseur d'ordre 1 (donc un vecteur) défini comme ceci :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{v} : \forall \mathbf{x} \in E, (\mathbf{S} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}) = S_{ij} v^j x^i. \quad (\text{A.10})$$

Il apparaît alors clair que le produit contracté simple de tenseurs est une généralisation du produit matriciel.

A.6.4 Le tenseur métrique

Le tenseur métrique est le tenseur \mathbf{G} d'ordre deux défini par :

$$\mathbf{G} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \times E, \rightarrow \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}, \quad (\text{A.11})$$

où « \cdot » désigne le produit scalaire sur les éléments de E défini dans la section A.5.3 qui est bien une forme bilinéaire sur \mathbb{R} .

Ce tenseur étant d'ordre 2, il possède 4 types de composantes :

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \mathbf{G}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) & g_i^j &= \mathbf{G}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^j) = \delta_i^j, \\ g^{ij} &= \mathbf{G}(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}^j) & g^i_j &= \mathbf{G}(\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j) = \delta_j^i. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Puisque le produit scalaire est commutatif, on voit directement que ce tenseur est symétrique.

De plus, on peut montrer directement que le tenseur métrique est l'élément neutre du produit tensoriel contracté simple. En effet, on a :

$$\forall \mathbf{x} \in E, (\mathbf{G} \cdot \mathbf{x}) : \forall \mathbf{y} \in E \rightarrow (\mathbf{G} \cdot \mathbf{x})(\mathbf{y}) = g^i x^j y_i = \delta^i x^j y_i = x^j y_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \quad (\text{A.13})$$

Ceci peut être facilement généralisé à tout tenseur \mathbf{T} d'ordre > 1 : $\mathbf{G} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{T}$.

Cette propriété du tenseur métrique nous permet d'exprimer les composantes covariantes d'un vecteur quelconque en fonction de ses coordonnées contravariantes. En effet, si l'on considère un vecteur $\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x_i \mathbf{e}^i$, on a :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = g^{ij} x_j \mathbf{e}_i = \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \text{ et } \mathbf{G} \cdot \mathbf{x} = g_{ij} x^j \mathbf{e}^i = \mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i, \quad (\text{A.14})$$

d'où l'on tire par identification $x^i = g^{ij} x_j$ et inversement, $x_i = g_{ij} x^j$. En particulier, on peut donc exprimer les vecteurs de la base contravariante en fonction de ceux de la base covariante et l'on a :

$$\mathbf{e}_i = g_{ij} \mathbf{e}^j \text{ et } \mathbf{e}^i = g^{ij} \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.15})$$

A.6.5 Changement de coordonnées : repère naturel

On se place ici dans \mathbb{R}^3 , muni de sa base canonique (que l'on notera \mathbf{E}_1 , \mathbf{E}_2 et \mathbf{E}_3), d'une origine O et du produit scalaire canonique.

Nous nous intéressons ici à un système de coordonnées (x^i) associées à un point M de E et décrivant le vecteur position de M par rapport à l'origine O , *i.e.* $\mathbf{OM} = \mathbf{x} = X^i \mathbf{E}_i$.

Considérons la transformation qui associe au système de coordonnées (X^1, X^2, X^3) un nouveau système de coordonnées (x^1, x^2, x^3) de l'espace tel que l'on ait :

$$\begin{cases} X^1 = f^1(x^1, x^2, x^3) \\ X^2 = f^2(x^1, x^2, x^3) \\ X^3 = f^3(x^1, x^2, x^3), \end{cases}$$

où les f^i sont des fonctions continûment dérivables et inversibles.

On appelle base naturelle du changement de base défini par les fonctions f^i , les trois vecteurs $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3)$ définis par

$$d\mathbf{OM} = dx^i \mathbf{e}_i, \quad (\text{A.16})$$

c'est-à-dire qu'une variation infinitésimale du vecteur position de M doit être égale à la somme des variations infinitésimale de ses nouvelles coordonnées portées par les vecteurs de base que l'on recherche. Il vient alors immédiatement que l'on a :

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial \mathbf{OM}}{\partial x^i}. \quad (\text{A.17})$$

Les \mathbf{e}_i ne formant pas une base orthonormée dans le cas général, on peut donc définir une base duale différente \mathbf{e}^i et un tenseur métrique \mathbf{G} non trivial. Comme le stipule la définition des vecteurs de la base covariante, celle-ci dépend de la position du point M . Donc le tenseur métrique dépend lui aussi du point M : il s'agit alors d'un champ de tenseurs, noté $\mathbf{G}(M)$. Afin de calculer ses composantes covariantes, exprimons les vecteurs de base.

Pour ce faire, on exprime la matrice jacobienne du changement de base, définie par :

$$J(M) = \begin{bmatrix} \frac{\partial X^1}{\partial x^1} & \frac{\partial X^1}{\partial x^2} & \frac{\partial X^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^2}{\partial x^1} & \frac{\partial X^2}{\partial x^2} & \frac{\partial X^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial X^3}{\partial x^1} & \frac{\partial X^3}{\partial x^2} & \frac{\partial X^3}{\partial x^3} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Par commodité, la dérivée partielle par rapport à la composante contravariante x^i du vecteur \mathbf{OM} sera écrite ∂_i et les dépendances en x^i n'apparaîtront plus explicitement si il n'y a pas de risque d'ambiguïté. On obtient donc :

$$J(M) = \begin{bmatrix} \partial_1 f^1 & \partial_2 f^1 & \partial_3 f^1 \\ \partial_1 f^2 & \partial_2 f^2 & \partial_3 f^2 \\ \partial_1 f^3 & \partial_2 f^3 & \partial_3 f^3 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

A.7 Surfaces

Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons tout particulièrement aux conducteurs présentant une surface complexe. On considèrera dans un premier temps un demi-espace présentant une conductivité σ non-nulle et dont la frontière avec l'air présente une équation du type $X^3 = a(X^1, X^2)$ dans le repère cartésien, a étant une fonction C^1 au minimum.

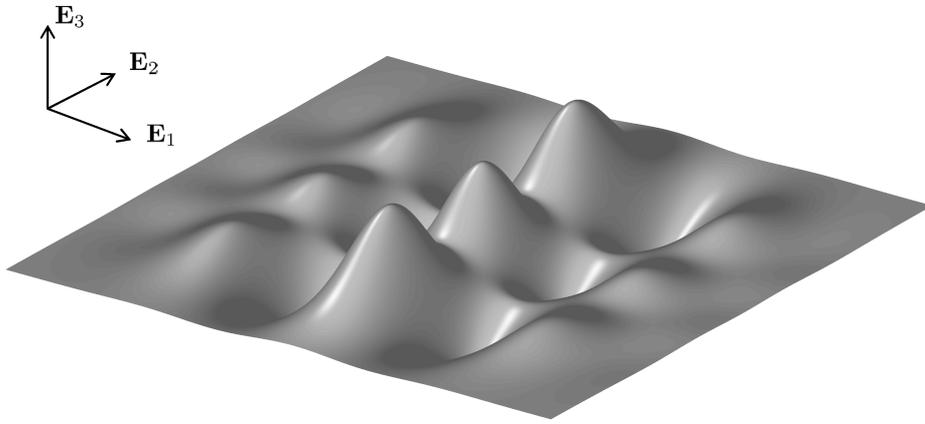


FIGURE A.1 – Exemple de surface complexe considérée : surface infinie dans les direction X^1 et X^2 et d'équation de la forme $X^3 = a(X^1, X^2)$ qui sépare le milieu conducteur de l'air.

Dans ce cas, on recherche un nouveau système de coordonnées (x^1, x^2, x^3) afin de se ramener à une équation de la surface du type $x^k = c^{ste}$, où $k = 1, 2$ ou 3 . Ceci permet en effet de simplifier la description de l'interface air-conducteur conduisant à une écriture très naturelle des conditions de passage à travers la surface des grandeurs physiques que l'on souhaite calculer dans tout l'espace (dans notre cas, il s'agit des champs électromagnétiques).

On choisit donc le changement de base suivant :

$$\begin{cases} X^1 = x^1 \\ X^2 = x^2 \\ X^3 = x^3 + a(x^1, x^2) \end{cases}, \quad (\text{A.20})$$

où il apparaît bien que l'équation de la surface s'écrit $x^3 = 0$.

On construit alors la matrice jacobienne de ce changement de base, qui s'écrit :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \partial_1 a & \partial_2 a & 1 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

dont le déterminant est $\Delta = 1$ et qui nous permet de déterminer les composantes des vecteurs de la base naturelle dans la base canonique. En effet, par définition de la base naturelle, on a directement :

$$\mathbf{e}_i = (J^T)_{ij} \mathbf{E}_j, \quad (\text{A.22})$$

où l'indice T désigne l'opération de transposition. On obtient donc les trois vecteurs de base covariante définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{E}_1 + (\partial_1 a) \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{E}_2 + (\partial_2 a) \mathbf{E}_3 \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{E}_3 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

On peut alors construire les composantes covariantes du tenseur métrique au point M, que l'on représente sous forme matricielles :

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \Rightarrow g_{ij} = (G)_{ij}, \text{ avec } G = \begin{bmatrix} 1 + (\partial_1 a)^2 & (\partial_1 a)(\partial_2 a) & (\partial_1 a) \\ (\partial_1 a)(\partial_2 a) & 1 + (\partial_2 a)^2 & (\partial_2 a) \\ (\partial_1 a) & (\partial_2 a) & 1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Le déterminant de cette matrice est $g = 1$ dans ce cas particulier. On remarque aussi que $g_{ij} = (J^T J)_{ij}$, qui est donc une autre façon de construire les composantes du tenseur métrique, et on vérifie que $g = \Delta^2 = 1$.

Pour calculer les composantes contravariantes du tenseur métrique, on utilise le fait qu'il soit l'élément neutre du produit tensoriel contracté simple. En particulier, on peut donc écrire :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{G} \Rightarrow g^{ik} g_{kj} = g_j^i = \delta_j^i, \quad (\text{A.25})$$

où il apparaît directement que la matrice formée par les composantes contravariantes est l'inverse de celle formée par les composantes covariantes.

On a donc :

$$g^{ij} = (G^{-1})_{ij}, \text{ avec } G^{-1} = g^{-1} \begin{bmatrix} g_{22}g_{33} - g_{23}g_{32} & g_{13}g_{32} - g_{12}g_{33} & g_{12}g_{23} - g_{13}g_{22} \\ g_{31}g_{23} - g_{21}g_{33} & g_{11}g_{33} - g_{13}g_{31} & g_{13}g_{21} - g_{11}g_{23} \\ g_{21}g_{32} - g_{31}g_{22} & g_{31}g_{12} - g_{11}g_{32} & g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \end{bmatrix},$$

soit finalement :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\partial_1 a \\ 0 & 1 & -\partial_2 a \\ -\partial_1 a & -\partial_2 a & 1 + (\partial_1 a)^2 + (\partial_2 a)^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

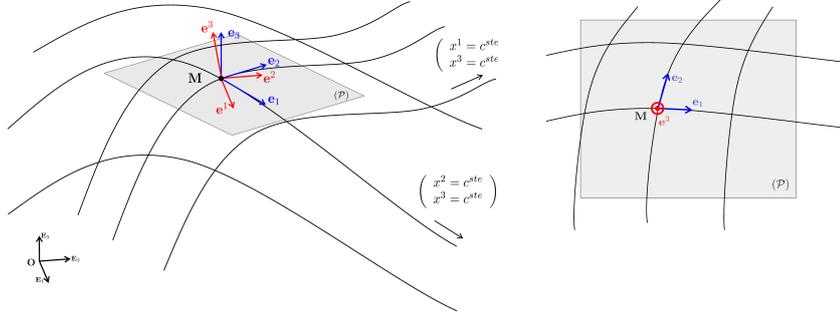


FIGURE A.2 – Illustration en 3D des bases covariantes et contravariantes d'un repère naturel. On considère ici une surface d'équation $x^3 = c^{ste}$ dans la base naturelle. Le plan (\mathcal{P}) est le plan tangent à la surface au point M .

On peut donc finalement construire la base duale du repère naturel :

$$e^i = g^{ij} e_j \Rightarrow \begin{cases} e^1 = e_1 - (\partial_1 a) e_3 = \mathbf{E}_1, \\ e^2 = e_2 - (\partial_2 a) e_3 = \mathbf{E}_2, \\ e^3 = -(\partial_1 a) e_1 - (\partial_1 a) e_2 + (1 + (\partial_1 a)^2 + (\partial_2 a)^2) e_3 \\ \quad = \mathbf{E}_3 - (\partial_1 a) \mathbf{E}_1 - (\partial_2 a) \mathbf{E}_2. \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Remarque : Nous avons ici utilisé des matrices 3×3 (G et G^{-1}) afin de stocker les composantes covariantes et contravariantes du tenseur métrique associé à la base naturelle du changement de coordonnées que nous avons considéré. Cette représentation matricielle va nous permettre dans la suite de développer une formulation compacte des équations physiques de notre problème. En effet, nous avons déjà vu qu'un vecteur \mathbf{v} était un tenseur d'ordre un et que $\mathbf{G}\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Ainsi, si l'on stocke les composantes covariantes de \mathbf{v} associées à la base naturelle du point courant dans une matrice de dimension 3×1 que l'on notera \mathbf{v}_\bullet , et ses composantes contravariantes correspondantes dans une matrice de même dimension que l'on notera \mathbf{v}^\bullet , on a la relation matricielle : $\mathbf{v}_\bullet = \mathbf{G}\mathbf{v}^\bullet$. Ceci revient à dire qu'en chaque point M , où est défini un repère naturel particulier, on identifie le tenseur $\mathbf{G}(M)$, valeur prise par le champ tensoriel \mathbf{G} au point M par une matrice G , contenant ses composantes covariantes et dépendant donc du point M (en toute rigueur on devrait écrire $G(M)$). On voit donc que les matrices G sont une représentation locale, associée à un point et à une certaine base, d'un objet mathématique beaucoup plus général (un champ tensoriel). On voit encore une fois que le produit contracté simple tensoriel est une généralisation du produit matriciel.

A.8 Formulaire

Afin de compléter cette annexe, nous donnons ici les formules tensorielles permettant de généraliser aux tenseurs les opérations classiques de l'algèbre vectoriel telles que le produit vectoriel. De plus, nous donnons les formules généralisées des opérateurs différentiels que nous avons utilisés afin d'étendre le formalisme en potentiel vecteur du second ordre.

A.8.1 Tenseur d'orientation et produit vectoriel

Tout comme le tenseur métrique, le tenseur d'orientation est d'un intérêt tout particulier lorsque l'on travaille dans des systèmes de coordonnées naturels. Dans l'espace à trois dimensions qui nous intéresse, c'est un tenseur d'ordre 3 défini par ses composantes covariantes non-nulles qui s'écrivent :

$$h_{123} = h_{231} = h_{312} = -h_{132} = -h_{321} = -h_{213} = \sqrt{g},$$

ou g est le déterminant du tenseur métrique associé à la transformation. Ses composantes contravariantes s'écrivent alors :

$$h^{123} = h^{231} = h^{312} = -h^{132} = -h^{321} = -h^{213} = \frac{1}{\sqrt{g}}.$$

Ce tenseur permet de généraliser le produit vectoriel $\mathbf{z} = \mathbf{x} \times \mathbf{y}$ de deux tenseurs d'ordre 1, \mathbf{x} et \mathbf{y} de la façon suivante :

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})_k = h_{kij} x^i y^j,$$

et

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y})^k = h^{kij} x_i y_j.$$

Il permet également le calcul du produit mixte de trois tenseurs d'ordre 1 \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} :

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] = h^{ijk} x_i y_j z_k.$$

A.8.2 Symboles de Christoffel et opérateurs différentiels

Ces symboles représentent les projections des dérivées partielles des vecteurs de la base sur eux-mêmes. On a donc par définition :

$$\partial_j \mathbf{e}_i = \Gamma^k_{ij} \mathbf{e}_k \Rightarrow \Gamma^k_{ij} = (\partial_j \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}^k. \quad (\text{A.28})$$

Ils permettent notamment d'obtenir les formules des opérateurs différentiels divergent et gradient dans un système de coordonnées général. En effet, les vecteurs de base d'un tel système varient dans l'espace et la dérivation des composantes d'un champ vectoriel comporte alors une contribution supplémentaire induite par la seule variation des vecteurs de base.

Le gradient d'un champ vectoriel \mathbf{v} dans un tel système est alors un tenseur d'ordre deux dont les composantes covariantes s'écrivent :

$$(\nabla \mathbf{v})_{ij} = \partial_j v_i - v_k \Gamma_{ij}^k, \quad (\text{A.29})$$

et sa divergence est le champ scalaire défini par :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v^i + v_k \Gamma_{ki}^i. \quad (\text{A.30})$$

Le rotationnel de ce champ de vecteur fait quant à lui intervenir à la fois les symboles de Christoffel et le tenseur d'orientation. En effet, c'est un tenseur d'ordre un défini par :

$$(\nabla \times \mathbf{v})^k = (\nabla \mathbf{v})_{ij} h^{jik} = \partial_j v_i h^{jik} - v_m \Gamma_{ij}^m h^{jik}. \quad (\text{A.31})$$

Cette dernière relation est générale et dans le cas des systèmes de coordonnées naturels auquel on se limite ici, elle peut être simplifiée. En effet, pour ces systèmes particuliers, on peut montrer que le produit tensoriel $\Gamma_{ij}^m h^{jik}$ s'annule et on a donc finalement :

$$(\nabla \times \mathbf{v})^k = -\partial_j v_i h^{ijk}, \quad (\text{A.32})$$

en remarquant que $h^{jik} = -h^{ijk}$.

Communications relatives au travail de thèse

B.1 Articles de revue avec comité de lecture publiés ou acceptés

- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Semi-analytical computation of a quasi-static field induced by an eddy current probe in a conductor with an irregular surface*, European Physical Journal : Applied Physics, vol. 64, pp. 24511-24520, 2013,
- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Semi-analytical computation of a quasi-static field induced by a 3D EC probe scanning a 2D layered conductor with parallel rough interfaces*, International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, vol. 27, Issue 3, pp. 600-613, 2014,
- F. Caire, G. Granet, D. Prémel, G. Rubinnacci, A. Tamburrino, S. Ventre, *The simposium project : numerical modeling of a carbon steel manufacturing benchmark case*, Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, vol. 39, pp. 93-100, 2014,
- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Fast computation of the fields diffracted by a multilayered conductor with non-parallel rough interfaces. Application to Eddy Current Non Destructive Testing simulation*, IEEE Transactions on Magnetics, conf. series, 2014 (accepté).

B.2 Présentations orales dans des conférences internationales

- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Application de la méthode des coordonnées curvilignes pour le calcul de la distribution des courants induits dans une pièce plane présentant une irrégularité de surface*, 7ème Conférence Européenne sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme (NUMELEC 2012),
- F. Caire, G. Granet, D. Prémel, G. Rubinnacci, A. Tamburrino, S. Ventre, *The simposium project : numerical modeling of a carbon steel manufacturing benchmark case*, The 18th International Workshop On Electromagnetic Non-destructive Evaluation (ENDE 2013),
- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Computation of a quasistatic field induced by two long straight parallel wires in a inhomogeneous layered conductor*, Progress In Electromagnetism Research Symposium, (PIERS 2013),

- F.Caire, D.Prémel, G.Granet, *Fast computation of the fields diffracted by a multilayered conductor with non-parallel rough interfaces. Application to Eddy Current Non Destructive Testing simulation*, The 16th Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation (CEFC 2014),

B.3 Présentation de poster dans des conférences internationales

- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, *Semianalytical computation of a quasistatic field induced by a 3D EC probe scanning a 2D layered conductor with parallel rough interfaces*, The 9th International Symposium on Electric and Magnetic Fields (EMF 2013),
- F. Caire, D. Prémel, G. Granet, « New methods based on matched coordinates for the computation of quasistatic fields induced in a layered conductor with a rough surface and a continuous depth profile of conductivity », 19th International Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, (COMPUMAG 2013).

Bibliographie

- [Abu-Nabah 2006] Bassam A Abu-Nabah et Peter B Nagy. *Iterative inversion method for eddy current profiling of near-surface residual stress in surface-treated metals*. NDT & E International, vol. 39, no. 8, pages 641–651, 2006. (Cité en page 9.)
- [Aït Braham 2008] K. Aït Braham et R. Dusséaux. *The curvilinear coordinate method associated with the short-coupling-range approximation for the study of scattering from one-dimensional random rough surfaces*. Optics Communications, vol. 281, no. 22, pages 5504–5510, Novembre 2008. 00002. (Cité en pages 48 et 58.)
- [Albanese 1997] R Albanese et G Rubinacci. *Finite element methods for the solution of 3D eddy current problems*. Advances in Imaging and Electron Physics, vol. 102, pages 1–86, 1997. (Cité en page 6.)
- [Antonakakis 2012] Tryfon Antonakakis, Fadi Issam Baida, Abderrahmane Belkhir, Kirill Cherednichenko, Shane Cooper, Richard Craster, Guillaume Demésy, John Desanto, Gérard Granet, Boris Gralak, Sébastien Guenneau, Daniel Maystre, André Nicolet, Brian Stout, Frédéric Zolla, Benjamin Vial et Evgeni Popov. *Gratings : Theory and Numeric Applications*. AMU (PUP), Décembre 2012. (Cité en page 7.)
- [Auld 1999] B. A. Auld et J. C. Moulder. *Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation*. Journal of Nondestructive Evaluation, vol. 18, no. 1, pages 3–36, 1999. (Cité en page 78.)
- [Bao 2005] Gang Bao, Zhiming Chen et Haijun Wu. *Adaptive finite-element method for diffraction gratings*. JOSA A, vol. 22, no. 6, pages 1106–1114, 2005. (Cité en page 7.)
- [Blodgett 2003] Mark P Blodgett, Chizoba V Ukpabi et Peter B Nagy. *Surface roughness influence on eddy current electrical conductivity measurements*. Rapport technique, DTIC Document, 2003. (Cité en page 9.)
- [Blodgett 2004] Mark P Blodgett et Peter B Nagy. *Eddy current assessment of near-surface residual stress in shot-peened nickel-base superalloys*. Journal of nondestructive evaluation, vol. 23, no. 3, pages 107–123, 2004. (Cité en page 8.)
- [Bossavit 1993] Alain Bossavit. *Electromagnetisme, en vue de la modelisation*, volume 14. Springer, 1993. (Cité en page 6.)
- [Bowler 1987] John R Bowler. *Eddy current calculations using half-space Green's functions*. Journal of applied physics, vol. 61, no. 3, pages 833–839, 1987. (Cité en pages 46, 49, 50, 51, 52, 53 et 159.)
- [Bowler 1991] JR Bowler, SA Jenkins, LD Sabbagh et HA Sabbagh. *Eddy-current probe impedance due to a volumetric flaw*. Journal of Applied Physics, vol. 70, no. 3, pages 1107–1114, 1991. (Cité en page 6.)

- [Boyd 2001] John P Boyd. Chebyshev and fourier spectral methods. Courier Dover Publications, 2001. (Cité en pages 138 et 140.)
- [Braham 2007] Karim Aït Braham. *Diffusion des ondes électromagnétiques par des surfaces rugueuses aléatoires naturelles. Méthode exacte en coordonnées curvilignes et Principe du faible couplage*. PhD thesis, Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2007. (Cité en page 8.)
- [Chandezon 1979] J Chandezon. *Les équations de Maxwell sous forme covariante. Application à l'étude de la propagation dans les guides périodiques et la diffraction par les réseaux*. These d'état, Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand, France, 1979. (Cité en pages 8, 24, 31 et 34.)
- [Chandezon 1980] J Chandezon, G Raoult et D Maystre. *A new theoretical method for diffraction gratings and its numerical application*. Journal of Optics, vol. 11, no. 4, pages 235–241, Juillet 1980. 00217. (Cité en pages 7 et 58.)
- [Chew 1995] Weng Cho Chew. Waves and fields in inhomogeneous media, volume 522. IEEE press New York, 1995. (Cité en page 6.)
- [Chew 2008] Weng Chew, Mei-Song Tong et al. Integral equation methods for electromagnetic and elastic waves. Morgan & Claypool Publishers, 2008. (Cité en page 6.)
- [Cotter 1995] N. P. K. Cotter, T. W. Preist et J. R. Sambles. *Scattering-matrix approach to multilayer diffraction*. Journal of the Optical Society of America A, vol. 12, no. 5, page 1097, Mai 1995. 00135. (Cité en pages 86 et 87.)
- [Déchamps 2006] Nicolas Déchamps, Nicole de Beaucoudrey, Christophe Bourlier et Serge Toutain. *Fast numerical method for electromagnetic scattering by rough layered interfaces : Propagation-inside-layer expansion method*. JOSA A, vol. 23, no. 2, pages 359–369, 2006. (Cité en page 7.)
- [Diatta 2012] A. Diatta, S. Guenneau, A. Nicolet et F. Zolla. *Metamaterials and the mathematical Science of invisibility*. ArXiv e-prints, 2012. (Cité en page 35.)
- [Dodd 1968] C. V. Dodd. *Analytical Solutions to Eddy-Current Probe-Coil Problems*. Journal of Applied Physics, vol. 39, no. 6, page 2829, 1968. 00000. (Cité en pages 7, 9, 74 et 104.)
- [Dodd 1974] CV Dodd, CC Cheng et WE Deeds. *Induction coils coaxial with an arbitrary number of cylindrical conductors*. Journal of Applied Physics, vol. 45, no. 2, pages 638–647, 1974. (Cité en page 103.)
- [Dular 2003] Patrick Dular, Johan Gyselinck, Christophe Geuzaine, Nelson Sadowski et JPA Bastos. *A 3-D magnetic vector potential formulation taking eddy currents in lamination stacks into account*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 39, no. 3, pages 1424–1427, 2003. (Cité en page 6.)
- [Dumont-Fillon 2014] Jacques Dumont-Fillon. *Contrôle non destructif (CND)*. Techniques de l'ingénieur CND : méthodes globales et volumiques, vol. TIB585DUO, no. r1400, 2014. (Cité en page 2.)

- [Dusséaux 2008] Richard Dusséaux, K Aät Braham et Gérard Granet. *Implementation and validation of the curvilinear coordinate method for the scattering of electromagnetic waves from two-dimensional dielectric random rough surfaces*. Waves in Random and Complex Media, vol. 18, no. 4, pages 551–570, 2008. (Cité en page 8.)
- [Feynman 1969] Richard Phillips Feynman, Robert B Leighton et Matthew Sands. The feynman lectures on physics. 2 (1969). mainly electromagnetism and matter. Addison-Wesley, 1969. (Cité en page 28.)
- [Garrigues] Jean Garrigues. Algèbre et analyse tensorielles pour l'étude des milieux continus. (Cité en page 161.)
- [Granet 1995] G. Granet, J. P. Plumey et J. Chandezon. *Scattering by a periodically corrugated dielectric layer with non-identical faces*. Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A, vol. 4, no. 1, page 1, 1995. (Cité en page 59.)
- [Granet 1998] Gérard Granet. *Analysis of diffraction by surface-relief crossed gratings with use of the Chandezon method : application to multilayer crossed gratings*. Journal of the Optical Society of America A, vol. 15, no. 5, page 1121, 1998. (Cité en page 7.)
- [Harrison 1996] D.J. Harrison, L.D. Jones et S.K. Burke. *Benchmark problems for defect size and shape determination in eddy-current nondestructive evaluation*. Journal of Nondestructive Evaluation, vol. 15, no. 1, pages 21–34, 1996. (Cité en page 100.)
- [Hillmann 2008] S Hillmann, H Heuer, HU Baron, J Bamberg, A Yashan et N Meyendorf. *Near-surface residual stress-profiling with high Frequency eddy current conductivity measurement*. Proceedings of the Review of Progress in QNDE, page 1349, 2008. (Cité en page 8.)
- [Hiptmair 2005] Ralf Hiptmair et Jörg Ostrowski. *Coupled boundary-element scheme for eddy-current computation*. Journal of engineering mathematics, vol. 51, no. 3, pages 231–250, 2005. (Cité en page 6.)
- [Hung 1998] Shu-Huei Hung et Donald W Forsyth. *Modelling anisotropic wave propagation in oceanic inhomogeneous structures using the parallel multidomain pseudo-spectral method*. Geophysical Journal International, vol. 133, no. 3, pages 726–740, 1998. (Cité en page 138.)
- [I Babic 2005] Slobodan I Babic et Cevdet Akyel. *An improvement in the calculation of the magnetic field for an arbitrary geometry coil with rectangular cross section*. International Journal of Numerical Modelling : Electronic Networks, Devices and Fields, vol. 18, no. 6, pages 493–504, 2005. (Cité en page 74.)
- [Jackson 1962] John David Jackson et John D Jackson. Classical electrodynamics, volume 3. Wiley New York etc., 1962. (Cité en page 20.)
- [Khalaj-Amirhosseini 2007] Mohammad Khalaj-Amirhosseini. *Analysis of lossy inhomogeneous planar layers using fourier series expansion*. Antennas and

- Propagation, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 2, pages 489–493, 2007. 00023. (Cité en page 9.)
- [Lambert 2011] Marc Lambert, Frédéric Nougier et Riadh Zorgati. *Eddy-current modeling of a continuous conductivity profile resulting from a diffusion process*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 47, no. 8, pages 2093–2099, 2011. (Cité en page 9.)
- [Li 1994] Lifeng Li. *Multilayer-coated diffraction gratings : differential method of Chandezon et al. revisited*. JOSA A, vol. 11, no. 11, pages 2816–2828, 1994. 00105. (Cité en page 7.)
- [Li 1996] Lifeng Li. *Formulation and comparison of two recursive matrix algorithms for modeling layered diffraction gratings*. Journal of the Optical Society of America A, vol. 13, no. 5, page 1024, 1996. (Cité en pages 86 et 87.)
- [Malik 1985] Mujeeb R Malik, Thomas A Zang et M Yousuff Hussaini. *A spectral collocation method for the Navier-Stokes equations*. Journal of Computational Physics, vol. 61, no. 1, pages 64–88, 1985. (Cité en page 138.)
- [Maxwell 1892] James Clerk Maxwell. *Electricity and Magnetism, vol. 1*. Clarendon, Oxford, page 452, 1892. (Cité en page 14.)
- [Maystre 1972] D Maystre. *Sur la diffraction d’une onde plane par un réseau métallique de conductivité finie*. Optics Communications, vol. 6, no. 1, pages 50–54, 1972. (Cité en page 7.)
- [Maystre 1984] D Maystre. *I Rigorous Vector Theories of Diffraction Gratings*. Progress in optics, vol. 21, pages 1–67, 1984. (Cité en page 7.)
- [Moon 1971] Parry Moon et Domina Eberle Spencer. *Field theory handbook, volume 2*. Springer, 1971. (Cité en pages 20 et 71.)
- [Moulder 1998] John C. Moulder, Cheng Chi Tai, B.F. Larson et James H. Rose. *Inductance of a coil on a thick ferromagnetic metal plate*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 34, no. 2, pages 505–514, Mar 1998. (Cité en page 101.)
- [Multiphysics 2012] COMSOL Multiphysics. *4.3 User’s Guide*, 2012. (Cité en pages 16 et 98.)
- [Nair 1990] Satish M Nair et James H Rose. *Electromagnetic induction (eddy currents) in a conducting half-space in the absence and presence of inhomogeneities : A new formalism*. Journal of applied physics, vol. 68, no. 12, pages 5995–6009, 1990. (Cité en page 6.)
- [Nédélec 1973] J-C Nédélec et J Planchard. *Une méthode variationnelle d’éléments finis pour la résolution numérique d’un problème extérieur dans \mathbb{R}^3* . ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis-Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 7, pages 105–129, 1973. (Cité en page 6.)
- [Nicolet 2004] André Nicolet, Sébastien Guenneau, Christophe Geuzaine et Frédéric Zolla. *Modelling of electromagnetic waves in periodic media with finite elements*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 168, no. 1, pages 321–329, 2004. (Cité en page 7.)

- [Popov 1986] E Popov et L Mashev. *Convergence of Rayleigh-Fourier method and rigorous differential method for relief diffraction gratings*. Journal of Modern Optics, vol. 33, no. 5, pages 593–605, 1986. (Cité en page 8.)
- [Post 1997] Evert Jan Post. Formal structure of electromagnetics : general covariance and electromagnetics. Courier Dover Publications, 1997. (Cité en pages 8, 24, 28 et 30.)
- [Pr emel 2012] Denis Pr emel. *Generalization of the Second Order Vector Potential Formulation for Arbitrary Non-Orthogonal Curvilinear Coordinates Systems from the Covariant Form of Maxwell's Equations*. Journal of Electromagnetic Analysis & Applications, vol. 4, no. 10, 2012. (Cité en pages 46, 47, 48 et 133.)
- [Rawitscher 2005] George H. Rawitscher et Israel Koltracht. *An Efficient Numerical Spectral Method for Solving the Schr odinger Equation*. Computing in Science and Engineering, vol. 7, no. 6, pages 58–66, 2005. (Cité en page 138.)
- [Reboud 2012] Christophe Reboud et Theodoros Theodoulidis. *Field computations of inductive sensors with various shapes for semi-analytical ECT simulation*. Studies in Applied Electromagnetics and Mechanics, vol. 36, pages 3–10, 2012. (Cité en page 74.)
- [Sabariego 2007] Ruth V Sabariego et Patrick Dular. *A perturbation approach for the modeling of eddy current nondestructive testing problems with differential probes*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 43, no. 4, pages 1289–1292, 2007. (Cité en pages 6 et 74.)
- [Shcherbakov 2010] Aleksei Aleksandrovich Shcherbakov et Aleksandr Valentovich Tishchenko. *Fast numerical method for modelling one-dimensional diffraction gratings*. Quantum Electronics, vol. 40, no. 6, page 538, 2010. (Cité en page 74.)
- [sim] *SIMPOSIUM Interoperable NDE simulation tools*. <http://www.simpodium.eu/>. (Cité en pages 10 et 157.)
- [Skarlatos 2012] Anastassios Skarlatos, Christophe Reboud, Jean-Marc Decitre et Steve Mahaut. *Numerical modelling of eddy-current testing taking into account the effect of the measuring circuit*. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, vol. 39, no. 1, pages 397–403, 2012. (Cité en page 101.)
- [Theodoulidis 1995] TP Theodoulidis, TD Tsiboukis et EE Kriezis. *Analytical solutions in eddy current testing of layered metals with continuous conductivity profiles*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 31, no. 3, pages 2254–2260, 1995. (Cité en page 9.)
- [Theodoulidis 1997] Theodoros P Theodoulidis, Nikolaos V Kantartzis, Theodoros D Tsiboukis et Epameinondas E Kriezis. *Analytical and numerical solution of the eddy-current problem in spherical coordinates based on the second-order vector potential formulation*. Magnetics, IEEE Transactions on, vol. 33, no. 4, pages 2461–2472, 1997. (Cité en pages 19, 20 et 21.)

- [Theodoulidis 2002] TP Theodoulidis. *Analytical modeling of wobble in eddy current tube testing with bobbin coils*. Journal of Research in Nondestructive Evaluation, vol. 14, no. 2, pages 111–126, 2002. (Cité en pages 20 et 71.)
- [Theodoulidis 2005] Theodoros P Theodoulidis et John R Bowler. *The truncated region eigenfunction expansion method for the solution of boundary value problems in eddy current nondestructive evaluation*. In Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, volume 760, pages 403–408. AIP Publishing, 2005. (Cité en pages 7 et 19.)
- [Theodoulidis 2006] Theodoros P Theodoulidis et Epameinondas E Kriezis. *Eddy current canonical problems (with applications to nondestructive evaluation)*. Tech Science Press, 2006. (Cité en pages 7 et 74.)
- [Tishchenko 1998] AV Tishchenko. *A generalized source method for wave propagation*. Pure and Applied Optics : Journal of the European Optical Society Part A, vol. 7, no. 6, page 1425, 1998. (Cité en page 74.)
- [Trefethen 2000] Lloyd N Trefethen. *Spectral methods in matlab*, volume 10. Siam, 2000. (Cité en pages 138 et 140.)
- [Weiss 2009] Thomas Weiss, Gérard Granet, Nikolay A Gippius, Sergei G Tikhodeev et Harald Giessen. *Matched coordinates and adaptive spatial resolution in the Fourier modal method*. Optics express, vol. 17, no. 10, pages 8051–8061, 2009. (Cité en page 134.)
- [Yu 2004] Feng Yu et Peter B. Nagy. *Simple analytical approximations for eddy current profiling of the near-surface residual stress in shot-peened metals*. Journal of Applied Physics, vol. 96, no. 2, page 1257, 2004. 00028. (Cité en page 9.)
- [Yu 2005] Feng Yu et Peter B Nagy. *Dynamic piezoresistivity calibration for eddy current nondestructive residual stress measurements*. Journal of nondestructive evaluation, vol. 24, no. 4, pages 143–143, 2005. (Cité en page 8.)