



**HAL**  
open science

# Etude de l'exposition des personnes aux ondes électromagnétiques en environnement complexe

Ourouk Jawad

► **To cite this version:**

Ourouk Jawad. Etude de l'exposition des personnes aux ondes électromagnétiques en environnement complexe. Sciences de l'ingénieur [physics]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI; Université libre de Bruxelles (1970-..), 2014. Français. NNT : 2014PA066292 . tel-01127185

**HAL Id: tel-01127185**

**<https://theses.hal.science/tel-01127185>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**Université Libre de Bruxelles**

École polytechnique de Bruxelles  
OPERA  
Wireless Communications Group



**Université Pierre et Marie Curie**

Faculté d'Ingénierie  
Laboratoire d'Électronique et  
Électromagnétisme

## ÉTUDE DE L'EXPOSITION DES PERSONNES AUX ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES EN ENVIRONNEMENT COMPLEXE

Dissertation originale présentée en vue de l'obtention du Grade de

**DOCTEUR en Sciences de l'Ingénieur**  
de l'**UNIVERSITÉ LIBRE DE BRUXELLES**

et

**DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE**

préparée sous la direction des Professeurs

Philippe De Doncker, David Lautru et Aziz Benlarbi-Delaï

Présentée par

**M. JAWAD Ourouk**

Soutenance privée le 10 Septembre 2014

Soutenance publique le 22 Octobre 2014

Composition du Jury :

Prof. DE DONCKER Philippe	Directeur de thèse
Prof. BENLARBI-DELAÏ Aziz	Directeur de thèse
Prof. EMPLIT Philippe	Président du Jury
Prof. LIÉNARD Martine	Rapporteur
Prof. DRICOT Jean-Michel	Rapporteur
Prof. LAUTRU David	Encadrant
Prof. HÉLIER Marc	Examineur
Dr. WIART Joe	Examineur



# Remerciements

La thèse est un travail personnel mais elle ne peut pas aboutir sans l'appui d'un riche entourage. Tout d'abord, je souhaiterais remercier les membres du jury de m'avoir fait l'honneur de s'intéresser à mon travail et de m'aider à avoir un regard critique sur mes résultats, au cours de la soutenance privée, me permettant d'améliorer mon manuscrit. Je remercie solennellement le Professeur Philippe Emplit d'avoir accepté de présider mon jury et de m'avoir accordé sa confiance durant ces deux années où j'ai occupé le poste d'assistant et où j'ai pu découvrir le monde merveilleux de l'enseignement. Je remercie la Professeur Martine Liénard et le Professeur Jean-Michel Dricot d'avoir acceptés d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie solennellement le Professeur Marc Hélier d'avoir pris le temps de participer à mon jury et également d'avoir transmis à des générations d'étudiants, dont moi, le goût pour l'électromagnétisme. Je n'oublierai jamais ses cours si intéressants. Mes remerciements vont également au Docteur Joe Wiart qui a suivi et soutenu le projet de ma thèse en me prodiguant de précieux conseils. Merci à lui d'avoir participé à mon jury. Les personnes qui ont encadré mon travail méritent également de grands remerciements : Aziz Benlarbi-Delaï pour la direction de cette thèse et pour l'accueil au L2E lorsque je revenais de Bruxelles. David Lautru pour m'avoir, tout au début, proposé ce projet bruxello-parisien, pour m'avoir encadré et pour sa disponibilité malgré les kilomètres qui nous séparaient. Enfin, je le remercie pour l'intérêt général qu'il a porté à mon travail et pour les conseils et les aides apportés, du L2E à Ville d'Avray en passant par la Belgique. En parlant de la Belgique, mes plus riches remerciements vont à Philippe De Doncker. Mon séjour à Bruxelles aura complètement changé ma vie et ce que je peux dire c'est que scientifiquement j'ai beaucoup appris sous son aile. Je le remercie de m'avoir accueilli, fait confiance et appuyé lorsque j'ai demandé la bourse FRIA. Je le remercie également pour la liberté qu'il donne à ses chercheurs et pour la méthode scientifique qu'il leur transmet. Je ressors grandi de cette expérience et c'est, en grande partie, grâce à lui.

Cette thèse s'est faite en co-tutelle entre Paris et Bruxelles. Pour autant, j'ai passé la majorité de mon temps au sein du Wireless Communications Group et mon intégration dans ce laboratoire s'est faite très rapidement. Je remercie tous les membres que j'ai connus, les anciens : Stéphane, François Bellens, Ali, Oli, Jessica. Mais aussi les membres actuels : Verlouche (Compagnon de galère), Bodart, Marc, Jérémy, Thibault (bientôt ancien!), Marie-Paule. Je souhaiterais adres-

ser des remerciements spéciaux pour les trois mousquetaires. Theo, mon ami. On a passé le FRIA ensemble et on a fait des conférences terribles. Merci à lui d'être ce qu'il est et pour ses conseils lorsque j'étais bloqué. C'tout. Sullivan, merci pour ses conseils capillaires et pour la reprise du flambeau de hard core user d'Hydra. Courage à lui et allez les diables rouches. Merci à Luca pour sa sagesse et aussi pour les apéro aux moments de déprime-écriture-de-thèse. Rdv au Verschu'. Un tout grand merci à Jim pour l'aide apportée sur Hydra.

J'ai toujours été très bien accueilli au L2E lors de mes deux séjours, je souhaite à cette occasion remercier tous ses membres et saluer les doctorants et les permanents avec qui j'ai pu échanger sur les conditions de vie des chercheurs. Amine, Nicolas, Amazir, Chaouki, Julien, Takfarinas, Chloé, Baptiste...je les remercie tous pour ce qu'ils m'ont apporté.

Je souhaiterais également remercier mon entourage en commençant par mes ami(e)s : mon Ro pour le Vietnam et les futures destinations, Polo pour les conseils de jeune docteur, Beber pour m'avoir fait porter du bois, Lelio pour les petits plats dans le Eastpack, Antoine pour la passion beau/foot/bière qu'on a en commun, Ilona pour me mettre une couette sur le dos, Marianne pour l'abstraction et le réel, Aouefa pour me rappeler quand même qu'on est bon, Elise pour apprécier à sa juste valeur la baleine à bosse, Oscar pour les souvenirs de Beaubourg, Ysaline pour ses conseils pour Shanghai et pour sa solidarité, Florie pour toutes les visites que l'on va se faire. Je souhaiterais également remercier la clique de Pantin (ils se reconnaîtront !) vous êtes géniaux. Mais également Thomas Roger-Moellic. J'ai recherché et j'ai trouvé, comme il le dirait. Et enfin merci à Charlotte pour tous ses plats de grand chef et d'avoir emménagé à Bruxelles en même temps que moi. J'en oublie surement et j'en suis désolé.

Je garde le meilleur pour la fin. Je souhaiterais remercier de tout mon cœur mes parents qui m'ont inculqué le goût du savoir et l'importance dans ce monde d'avoir des diplômes. Ce travail leur est dédié, à eux, à leur exil, ainsi qu'aux sacrifices qu'ils ont eu à faire pour nous élever dignement. Je remercie mes soeurs, Salam, Safaa et Shèmse. Merci de m'entourer et de m'aimer comme elles le font, merci pour leurs soutiens dans tout ce que je fait. Ce travail est également le leur. Merci à Jean-Michel pour l'expertise cinématographique et à Paloma pour le bonheur quand je vois son sourire.

Enfin, je terminerai ces longs remerciements par la personne sans qui rien n'aurait de sens. Charline me donne tout ce dont un être humain a besoin : un soutien imparfait et un amour infini. Cette année fut difficile mais on a réussi ensemble. La satisfaction personnelle que je ressens n'aurait aucune saveur si je n'avais été avec elle. Merci de m'avoir supporté et d'être fière de moi.

# Résumé

## **Étude de l'exposition des personnes aux ondes électromagnétiques en environnement complexe**

Actuellement, les technologies sans fil sont omniprésentes dans les lieux de vie, de travail ou de transport de la population. Les recherches en dosimétrie numérique non-ionisante ont connu des avancées considérables notamment grâce à la capacité de calcul croissante des ordinateurs. Ces dernières années, la prise en compte de la variabilité dans la dosimétrie est devenue un enjeu majeur. Les sources de variabilité sont nombreuses, parmi elles, les conditions d'exposition au rayonnement électromagnétique peuvent induire des doses absorbées très différentes.

La modélisation de canal de propagation en environnement intérieur a permis d'avoir une connaissance précise des conditions d'exposition d'un corps humain plongé dans cet environnement. Les modèles stochastiques montrent le caractère statistique de l'exposition des corps humains. Cette thèse a pour but de développer une méthode statistique du calcul de la dose absorbée par le corps et d'adapter le modèle de canal stochastique à la dosimétrie.

L'étude statistique de l'exposition a révélé la nécessité d'obtenir les valeurs de Débit d'Absorption Spécifique corps entier dans le cas d'expositions à une onde plane pour tous les angles d'incidence possibles. Compte tenu des temps de calcul particulièrement long en dosimétrie, une méthode d'interpolation efficace, le krigeage, des valeurs de Débit d'Absorption Spécifique a été mise en œuvre. La méthode du krigeage permet alors d'obtenir les valeurs de Débit d'Absorption Spécifique pour tous les angles d'incidences et donc de calculer les deux premiers moments du Débit d'Absorption Spécifique.

L'analyse de sensibilité aux paramètres du canal des moments du Débit d'Absorption Spécifique a permis de connaître l'impact de chacun de ces paramètres. Le modèle de canal a pu être simplifié et donc adapté à la dosimétrie tout en quantifiant l'erreur d'approximation qu'implique cette simplification.

Cette thèse répond à l'enjeu de la prise en compte de la variabilité en dosimétrie dans un environnement complexe et les outils mis en œuvre ouvrent la voie de l'étude de l'exposition dans tous les environnements complexes.

**Mots-clés :** Dosimétrie numérique, Débit d'Absorption Spécifique, Krigeage, Variogramme, Modèle de canal, Analyse de sensibilité.

## Abstract

### **Study of people's exposure to electromagnetic waves in complex environment**

Nowadays, wireless communications are omnipresent in people's habitat, working place or means of transportation. Research in non-ionizing numerical dosimetry has been improved thanks to high calculation capacity of computers. These years, integrating variability in the field of dosimetry has become a major issue. Sources of variability are numerous ; among them, there is the exposure conditions to electromagnetic radiation which can lead to very different absorbed doses.

Indoor channel modeling enables to have a deep knowledge of the exposure conditions of a human body located inside this indoor environment. Stochastic models show the statistical approach of people's exposure. The aim of this thesis is to develop a statistical method of calculation of the absorbed dose by the human body and to adapt the stochastic channel model to dosimetry.

The statistical study of exposure reveals the need to obtain Specific Absorption Rate values for a plane wave exposure for all possible angles of incidence. Taking into account that computation in dosimetry is time consuming, an efficient interpolation method, kriging method, is implemented in order to get whole body Specific Absorption Rate values. Kriging method enables to obtain Specific Absorption Rate for all possible angles of incidence and then to calculate expectation and variance of Specific Absorption Rate.

Sensitivity Analysis of expectation and variance to the statistical channel parameters reveals the impact of each parameter. The channel model has been simplified and then adapted to dosimetry by estimating the approximation error induced by this reduction.

This thesis answer to the issue of integrating variability in dosimetry in a complex environment and develop the tools that open a new path in studying exposure in any complex environment.

**Keywords :** Numerical dosimetry, Specific Absorption Rate, Kriging, Variogram, Channel model, Sensitivity analysis.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction générale . . . . .	1
1.2 La dosimétrie non-ionisante . . . . .	5
1.2.1 Couplage entre un champ électromagnétique et un système biologique . . . . .	5
1.2.2 Les recommandations internationales . . . . .	6
1.2.3 Les normes européenne, bruxelloise et parisienne . . . . .	8
1.2.4 Dosimétrie Numérique . . . . .	9
1.3 Variabilité et dosimétrie, un enjeu majeur . . . . .	13
1.4 Contribution et organisation de ce manuscrit . . . . .	15
<b>2 Étude statistique de l'exposition</b>	<b>17</b>
2.1 Les paramètres du modèle de canal . . . . .	17
2.1.1 Les paramètres de la partie spéculaire . . . . .	19
2.1.2 Les paramètres de la partie diffuse . . . . .	22
2.2 Développement analytique . . . . .	25
2.2.1 Espérance du <i>DAS</i> . . . . .	25
2.2.2 Variance du <i>DAS</i> . . . . .	26
2.3 Application sur un modèle de corps simplifié . . . . .	28
2.3.1 Distribution . . . . .	31
2.4 Conclusion . . . . .	33

<b>3</b>	<b>Le krigeage pour la dosimétrie</b>	<b>35</b>
3.1	Les méthodes d'interpolation spatiale . . . . .	36
3.1.1	Méthodes déterministes . . . . .	37
3.1.2	Méthodes stochastiques . . . . .	38
3.2	La méthode du krigeage . . . . .	39
3.2.1	Définitions . . . . .	40
3.2.2	Les contraintes . . . . .	44
3.2.3	Le Krigeage simple . . . . .	45
3.2.4	Le Krigeage ordinaire . . . . .	47
3.2.5	Le Krigeage universel . . . . .	50
3.3	L'analyse variographique . . . . .	51
3.3.1	Variogramme expérimental . . . . .	51
3.3.2	Théorie du modèle de variogramme . . . . .	53
3.3.3	Les modèles de variogramme . . . . .	55
3.3.4	Anisotropie . . . . .	56
3.3.5	Ajuster un modèle de variogramme . . . . .	58
3.4	Les échantillons : les valeurs de $DAS$ calculées par FDTD . . . . .	59
3.5	Estimation par la méthode du krigeage ordinaire . . . . .	61
3.5.1	Les coordonnées des variogrammes expérimentaux . . . . .	62
3.5.2	Les variogrammes expérimentaux . . . . .	65
3.5.3	Ajustement d'un modèle de variogramme . . . . .	68
3.5.4	Estimation . . . . .	71
3.6	Validation de la méthode sur les résultats de Thelonious . . . . .	83
<b>4</b>	<b>L'analyse de sensibilité</b>	<b>89</b>
4.1	Introduction . . . . .	89
4.2	Les indices de Sobol' . . . . .	91
4.2.1	Décomposition ANOVA . . . . .	91
4.2.2	Les indices de sensibilité par Monte-Carlo . . . . .	92
4.3	Impact des paramètres du modèle de canal . . . . .	96
4.3.1	Les paramètres d'entrée . . . . .	96
4.3.2	Analyse des indices de sensibilité totale . . . . .	97
4.4	Adaptation du modèle de canal pour la dosimétrie . . . . .	102
4.4.1	Méthode pour fixer les variables non-essentiels . . . . .	102
4.4.2	Fixer des paramètres du modèle de canal . . . . .	103
4.4.3	Le modèle de canal adapté à la dosimétrie . . . . .	105
4.5	Exemple d'utilisation du modèle de canal adapté . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>109</b>

---

<b>A La méthode des Différences Finies dans le Domaine Temporel</b>	<b>113</b>
A.1 Équations de Maxwell . . . . .	113
A.2 Principe de résolution . . . . .	114
A.2.1 Critère de stabilité . . . . .	116
A.2.2 Dispersion numérique . . . . .	116
A.2.3 Conditions aux limites . . . . .	117
A.3 Principe d'équivalence . . . . .	117
<b>B Calcul du champ électrique dans le modèle cylindrique</b>	<b>119</b>
<b>C Critère d'information d'Akaike</b>	<b>123</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>125</b>
<b>Liste des publications</b>	<b>133</b>



# Liste des figures

1.1	Niveaux de référence pour l'exposition à des champs électriques variables dans le temps pour la population générale et les travailleurs [1]. . . . .	7
1.2	Modèle anatomique de corps humain : <i>Visible Human</i> . . . . .	11
1.3	Modèle anatomique de corps humain : <i>Roberta</i> . . . . .	12
2.1	Coordonnées sphériques et représentation des étalements angulaires d'un <i>cluster</i> . . . . .	20
2.2	Modèle de corps cylindrique . . . . .	29
2.3	Fonction de répartition du <i>DAS</i> pour 4000 réalisations . . . . .	32
3.1	Un vecteur $\vec{h}$ liant $\vec{x}_\alpha$ et $\vec{x}_\beta = \vec{x}_\alpha + \vec{h}$ . . . . .	52
3.2	Modèles de variogramme en fonction de $h =  \vec{h} $ : (a) Linéaire, (b) Sphérique, (c) Exponentiel, (d) Gaussien, (e) Quadratique, (f) Effet de trou. . . . .	57
3.3	Angle d'élévation par rapport au corps de Roberta vu sur le coté gauche. . . . .	61
3.4	Angle azimutale par rapport au corps de Roberta vu de haut. . . . .	61
3.5	Coupe dans le plan <i>Oyz</i> de Roberta exposée à une onde plane. . . . .	62
3.6	Coupe dans le plan <i>Oxz</i> de Roberta exposée à une onde plane. . . . .	62
3.7	Valeurs de <i>DAS</i> de Roberta, polarisation en $\theta$ , calculées par FDTD . . . . .	63
3.8	Valeurs de <i>DAS</i> de Roberta, polarisation en $\phi$ , calculées par FDTD . . . . .	63
3.9	Valeurs de <i>DAS</i> de Thelonious, polarisation en $\theta$ , calculées par FDTD . . . . .	64
3.10	Valeurs de <i>DAS</i> de Thelonious, polarisation en $\phi$ , calculées par FDTD . . . . .	64
3.11	Distance loxodromique et orthodromique entre Milan et Los Angeles. . . . .	65
3.12	Variogramme expérimental de Roberta pour la polarisation en $\theta$ . . . . .	66
3.13	Variogramme expérimental de Roberta pour la polarisation en $\phi$ . . . . .	66
3.14	Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en $\theta$ en fonction de $\Delta\phi$ pour différents $\Delta\theta$ . . . . .	67
3.15	Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en $\phi$ en fonction de $\Delta\phi$ pour différents $\Delta\theta$ . . . . .	67
3.16	Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en $\theta$ en fonction de $\Delta\theta$ pour différents $\Delta\phi$ . . . . .	68

3.17	Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en $\phi$ en fonction de $\Delta\theta$ pour différents $\Delta\phi$ . . . . .	69
3.18	Variogramme expérimental réduit de Roberta pour la polarisation en $\theta$ . . . . .	69
3.19	Variogramme expérimental réduit de Roberta pour la polarisation en $\phi$ . . . . .	70
3.20	Voisinage à quatre voisins. . . . .	71
3.21	Voisinage à neuf voisins. . . . .	72
3.22	Configuration 1 . . . . .	73
3.23	Configuration 2 . . . . .	74
3.24	Configuration 3 . . . . .	74
3.25	Configuration 4 . . . . .	75
3.26	Variance d'estimation pour la configuration 1 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	76
3.27	Variance d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	76
3.28	Variance d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	77
3.29	Variance d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	77
3.30	Résultat d'estimation pour la configuration 1 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	79
3.31	Résultat d'estimation pour la configuration 1 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	79
3.32	Résultat d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	80
3.33	Résultat d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	81
3.34	Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	81
3.35	Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	82
3.36	Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	82
3.37	Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	83
3.38	Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	85
3.39	Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	85
3.40	Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon $\theta$ ). . . . .	86
3.41	Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon $\phi$ ). . . . .	86
4.1	Convergence des indices de sensibilité de $\langle DAS \rangle$ pour un <i>cluster</i> . . . . .	98
4.2	Convergence des indices de sensibilité de $\sigma_{DAS}^2$ pour un <i>cluster</i> . . . . .	98
4.3	Convergence des indices de sensibilité de $\langle DAS \rangle$ pour deux <i>clusters</i> . . . . .	99
4.4	Convergence des indices de sensibilité de $\sigma_{DAS}^2$ pour deux <i>clusters</i> . . . . .	99
4.5	Convergence des indices de sensibilité de $\langle DAS \rangle$ pour trois <i>clusters</i> . . . . .	100
4.6	Convergence des indices de sensibilité de $\sigma_{DAS}^2$ pour trois <i>clusters</i> . . . . .	100
4.7	Fonction de répartition de $\langle DAS \rangle$ avec une loi log-normale ajustée. . . . .	107
4.8	Fonction de répartition de $\sigma_{DAS}^2$ avec une loi log-normale ajustée. . . . .	108
B.1	Modèle de corps simplifié exposé à une onde plane . . . . .	121

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs efficaces du champ électrique (niveaux de référence) entre 10MHz et 10 GHz pour les travailleurs et la population générale . . . . .	3
1.2	Valeurs de $DAS$ pour les travailleurs et la population générale pour l'intervalle de fréquence 10 MHz-10 GHz . . . . .	3
1.3	Evolution des normes des recommandations de l'ICNIRP à l'ordonnance bruxelloise	9
2.1	Paramètres des distributions définissant les paramètres du modèle de canal . . . . .	24
2.2	Propriétés électrique et physique du modèle de corps simplifié . . . . .	30
2.3	Comparaison entre les méthodes analytique et statistique du $\langle DAS \rangle$ et de $\sigma_{DAS}$ pour $N_R=4000$ . . . . .	31
2.4	Paramètres de la loi log-normale . . . . .	32
3.1	Paramètres des modèles de variogramme pour Roberta . . . . .	70
3.2	Configurations des scénarios d'estimation . . . . .	72
3.3	Erreur relative maximale et erreur relative moyenne sur les résultats d'estimation .	78
3.4	Paramètres du modèle de variogramme pour Thelonious . . . . .	84
3.5	Erreurs relatives maximale et moyenne sur les résultats de Thelonious . . . . .	84
4.1	Liste des paramètres d'entrée . . . . .	97
4.2	Résultats finaux des indices de sensibilité totale sur $\langle DAS \rangle$ et $\sigma_{DAS}^2$ pour les différents scénarios d'exposition pour Roberta . . . . .	101
4.3	Classement décroissant d'influence des paramètres du canal sur $\langle DAS \rangle$ et $\sigma_{DAS}^2$ pour les différents scénarios d'exposition de Roberta . . . . .	102
4.4	Erreur d'approximation (en pourcentage) sur $\langle DAS \rangle$ et $\sigma_{DAS}^2$ pour différents $\mathbf{z}_0$ .	104



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction générale . . . . .</b>	<b>1</b>
<b>1.2</b>	<b>La dosimétrie non-ionisante . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1	Couplage entre un champ électromagnétique et un système biologique	5
1.2.2	Les recommandations internationales . . . . .	6
1.2.3	Les normes européenne, bruxelloise et parisienne . . . . .	8
1.2.4	Dosimétrie Numérique . . . . .	9
<b>1.3</b>	<b>Variabilité et dosimétrie, un enjeu majeur . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>1.4</b>	<b>Contribution et organisation de ce manuscrit . . . . .</b>	<b>15</b>

---

### 1.1 Introduction générale

Depuis plusieurs années un débat existe au sein de la communauté scientifique, du monde politique et de la société civile à propos des effets sanitaires possibles des ondes électromagnétiques. Ce débat a des implications importantes au niveau du déploiement des réseaux de télécommunication cellulaires, puisque, par respect du principe de précaution, les autorités politiques imposent des niveaux maximum des champs électromagnétiques de plus en plus sévères, et ouvertement appelés à diminuer au fil des années. Le déploiement de plus en plus fréquent de réseaux sans fil dans les domiciles des particuliers, ou dans les bureaux, relance ce débat. D'autant plus que les installations sans fil domestiques sont placées dans les pièces de vie de l'habitation. Ces installations sont placées le plus souvent par les opérateurs de télécommunication eux-mêmes.

Il sera donc important dans les prochaines années de pouvoir prédire quelles sont les doses électromagnétiques encourues par les utilisateurs de réseaux locaux, d'une part pour les opérateurs, pour démontrer au public la maîtrise de leur technologie, et d'autre part pour les instances de

régulations, afin de contrôler le déploiement.

L'objectif de ce travail de recherche est de pouvoir estimer la puissance absorbée par une personne dans un environnement électromagnétique complexe, c'est à dire en intérieur. Pour cela, il est utile de s'intéresser aux domaines de recherche concernés par l'exposition des personnes en environnement électromagnétique complexe.

La dosimétrie électromagnétique est le domaine de recherche qui a pour objet l'étude de l'exposition des êtres vivants aux champs électromagnétiques. La dosimétrie fait intervenir un grand nombre de domaines d'expertise et les études menées à travers le monde sont abondantes et diverses [1–16]. La Commission Internationale pour la Protection contre le Rayonnement Non-Ionisant (ICNIRP) est l'institution internationale chargée de définir les recommandations de limitation des champs électromagnétiques que vont mettre en place les États et les régions [1]. L'ICNIRP a classifié les effets négatifs et les différents types de couplages entre les champs et le corps humain. Les trois principaux mécanismes d'interactions champs-corps humains sont le couplage au champ électrique basse fréquence, le couplage au champ magnétique basse fréquence et l'absorption de l'énergie provenant des champs électromagnétiques. Le couplage au champ électrique basse fréquence provoque un courant électrique, une formation de dipôles électriques ou une réorientation des dipôles électriques déjà présents dans les tissus. Le couplage au champ magnétique basse fréquence provoque la circulation de courant électrique. L'absorption de l'énergie provenant des champs électromagnétiques, dont la fréquence est supérieur à 100 kHz, peut provoquer une possible élévation de la température. Ce troisième couplage est logiquement prédominant aux fréquences typiques des réseaux cellulaires ou locaux.

En ce qui concerne un effet cancérigène possible, l'ICNIRP a conclu que les données valables sont insuffisantes pour assurer une restriction [2]. Ainsi, les recommandations de l'ICNIRP sont basées sur les effets à court terme sur la santé tels que l'élévation de la température du corps provenant de l'absorption de l'énergie électromagnétique durant l'exposition. Cependant, l'Organisation Mondiale de la Santé (OMS) et plus particulièrement son Centre International de Recherche contre le Cancer (CIRC) a récemment reconnu pour la première fois les champs électromagnétiques radiofréquences comme étant peut être cancérigènes [3] sur la base d'un possible risque accrue de gliome, un type de cancer malin du cerveau associé à l'utilisation du téléphone sans fils. Le CIRC classe les champs électromagnétiques radiofréquences dans le groupe 2B.

Il existe cinq groupes de classification des agents. Groupe 1 : l'agent est cancérigène pour l'homme. Groupe 2A : l'agent est probablement cancérigène. Groupe 2B : l'agent est peut-être cancérigène. Groupe 3 : l'agent est inclassable quant à sa cancérigénicité pour l'homme. Groupe 4 : l'agent n'est probablement pas cancérigène pour l'homme. Le groupe 2 inclut la situation extrême où, pour un agent, le degré de preuve de cancérigénicité est suffisant ainsi que la situation où, pour un autre agent, il n'y a pas de données humaines mais pour lequel il y a une preuve de cancérigénicité issus d'expériences sur des animaux. Les sous nominations A et B signifient simplement différents niveaux de preuve de cancérigénicité humaine [17].

Tableau 1.1 – Valeurs efficaces du champ électrique (niveaux de référence) entre 10MHz et 10 GHz pour les travailleurs et la population générale

Domaine de fréquences	$ E $ (V/m) (Travailleurs)	$ E $ V/m (Population)
10-400 MHz	61	28
400-2000 MHz	$3f^{1/2}$	$1.375f^{1/2}$
2-10 GHz	137	61

Les différentes études qui ont été menées sur l'exposition aux ondes électromagnétiques ont permis de définir un certain nombre de variables permettant de connaître la portée des effets négatifs. Les normes ont été définies sous deux aspects : les niveaux de référence et les restrictions de base. Les restrictions de base sont directement définies à partir des effets reconnus sur la santé. La quantité physique qui définit ces restrictions (aux fréquences utiles pour les réseaux sans fil) est le Débit d'Absorption Spécifique (*DAS*) exprimé en W/kg. Il exprime la puissance absorbée par le corps entier ou une portion de corps, par unité de masse. Le niveau de référence est quant à lui fixé par la valeur efficace du champ électrique. La conformité avec ce niveau de référence doit théoriquement assurer la conformité avec la restriction de base. Il reste, néanmoins, important de tester la conformité aux restrictions de base, surtout avec la mise en lumière récente de la non-applicabilité des niveaux de référence n'étaient pas applicables au cas des enfants mesurant moins de 1,30m [2]. Les tableaux 1.1 et 1.2 représentent les valeurs des niveaux de références et les restrictions de base pour les fréquences des réseaux sans fils pour deux types de public, les travailleurs et la population générale. Une distinction est faite entre les travailleurs et la population générale. Les travailleurs qui manipulent tous les jours des instruments de technologie radiofréquence sont considérés plus protégés que la population générale, c'est pourquoi leurs niveaux de référence sont plus élevés. Dans le tableau 1.1,  $f$  indique la fréquence, elle est à exprimer dans l'unité indiquée dans la colonne de gauche.

Tableau 1.2 – Valeurs de *DAS* pour les travailleurs et la population générale pour l'intervalle de fréquence 10 MHz-10 GHz

Public	<i>DAS</i> moyen corps entier (W/kg)	<i>DAS</i> local (tête et tronc) (W/kg)	<i>DAS</i> local (membres) (W/kg)
Travailleurs	0.4	10	20
Population	0.08	2	4

La dosimétrie électromagnétique a ainsi pour objectif la détermination du *DAS* dans le

corps exposé aux ondes électromagnétiques. Le *DAS* est bien entendu impossible à mesurer *in vivo* pour l'être humain, et la dosimétrie *in situ* repose sur des simulations numériques. Cette méthode a permis ces dernières années d'estimer le *DAS* sur des modèles anatomiques très précis de corps humain grâce à la méthode des différences finies dans le domaine temporel [5, 6, 10, 13]. La dosimétrie expérimentale s'appuie, quant à elle, sur des fantômes remplis de liquide normalisé imitant les propriétés électriques du corps humain [11, 12].

Les outils de simulation mettent en place des conditions d'exposition de plus en plus réelles [4]. Pour l'exposition aux stations de base des réseaux cellulaires par exemple, le rayonnement est décomposé en ondes planes avant d'être introduit dans un code calcul de différences finies [5]. L'incertitude sur les paramètres d'incidence des ondes planes commence également à être pris en compte [6]. Mais les travaux actuels ne font pas encore le lien entre la dosimétrie électromagnétique et la modélisation de canal pour réseaux sans fil qui a justement pour objectif la description précise de l'environnement électromagnétique.

Or, cette modélisation a connu d'importantes avancées ces dernières années. Alors qu'il y a quelques années seulement elle se basait sur la définition de réponses impulsionnelles standardisées, l'émergence des algorithmes d'identification des composantes multi-trajets d'une part, et la généralisation des systèmes de communication multi-antennes d'autre part, ont conduit à une modélisation beaucoup plus proche de la physique de la propagation des ondes [18–22].

Actuellement, les modèles de canal en milieu intérieur reposent sur une approche dite de *clusters* : il a été identifié expérimentalement que les rayons incidents au récepteur n'arrivent pas isolés, mais regroupés angulairement et temporellement en paquets appelés *clusters*. Ces *clusters* sont modélisés à une double échelle. Les caractéristiques globales (temps d'arrivée, angle d'arrivée,...) sont déterminés, soit numériquement par une méthode de ray-tracing, soit sur base empirique à partir de scénarios génériques et grâce à des algorithmes d'identification (SAGE,...). Les caractéristiques de structure interne des *clusters* (nombre de rayons, amplitude des rayons,...) sont définies de façon statistique à partir de données expérimentales [18–22].

Une fois identifiés et caractérisés, ces *clusters* forment ce qui est appelé la partie spéculaire des composantes multi-trajets, c'est-à-dire l'ensemble des rayons qui peuvent être discriminés par les méthodes d'identification numériques ou expérimentales. La seconde partie du rayonnement est appelée partie diffuse. On estime qu'en milieu intérieur 20 à 30% de l'énergie électromagnétique y est contenue [21].

Toutes ces avancées ont été synthétisées dans le modèle de canal de l'action européenne COST 2100 [18].

L'exploration rapide des domaines de recherche permet de dégager les objectifs précis de ce doctorat :

- Développer une méthode de calcul, au sens statistique, des doses électromagnétiques reçues par un individu plongé dans un environnement électromagnétique réaliste en milieu intérieur,
- Proposer un modèle de canal adapté et optimisé pour la dosimétrie.

Ce travail de recherche a donc pour but d'apporter une meilleure compréhension physique de l'exposition des personnes en environnement complexe par la prise en compte de la variabilité en dosimétrie. L'objectif n'est pas de répondre à la problématique de la dangerosité potentielle de l'exposition au rayonnement électromagnétique.

## 1.2 La dosimétrie non-ionisante

La dosimétrie signifie l'évaluation de la dose, il est donc nécessaire d'identifier la métrique qui quantifie la dose liée à l'effet concerné. Le champ électrique dans le tissu est la première cause d'un effet biologique suite à une exposition indépendamment du mécanisme d'interaction. Ainsi, le champ électrique induit ou les quantités dosimétriques du Débit d'Absorption Spécifique (*DAS*) ou encore de la densité de courant doivent être évalués et corrélés au phénomène observé. Ceci est le rôle de la dosimétrie.

### 1.2.1 Couplage entre un champ électromagnétique et un système biologique

Lors de l'arrivée d'un champ électromagnétique radio-fréquence sur un corps biologique, l'onde est réfléchi, transmise, réfractée et/ou diffractée par le corps. Ces phénomènes sont régis par les équations de Maxwell. Les champs transmis de l'exposition à une source radio-fréquence vont induire des champs électriques et magnétiques dans le système biologique qui vont interagir de multiples manières avec les tissus et cellules. Cette interaction dépend de la fréquence, de la forme d'onde, de l'amplitude du champ incident et de l'énergie absorbée par le système biologique. La connaissance d'un mécanisme spécifique responsable d'un effet biologique est scientifiquement intéressant car il facilite la compréhension de ce phénomène. Il aide à l'analyse de relations entre des effets biologiques variés dans différents modèles expérimentaux ou sujets et les effets biologiques servent de guide de comparaison et d'extrapolation de résultats expérimentaux de tissu à tissu, de tissu à animal, d'animal à animal, d'animal à humain et d'humain à humain.

L'exposition du corps humain aux champs électriques ou magnétiques basses fréquences n'entraîne généralement qu'une absorption d'énergie négligeable et aucune élévation de température mesurable. L'exposition à des champs électromagnétiques de fréquences supérieures à 100 kHz peut toutefois entraîner une absorption d'énergie et une élévation de température significatives. De façon générale, l'exposition à un champ électromagnétique uniforme (onde plane) entraîne un dépôt et une distribution d'énergie fortement non-homogènes à l'intérieur du corps ; ce dépôt et cette distribution doivent être évalués par dosimétrie.

L'effet thermique est le mécanisme dominant parmi les effets biologiques reconnus venant d'une exposition aux ondes électromagnétiques. Les normes concernant l'exposition des êtres humains sont basées sur les effets thermiques. L'élévation de la température est liée au taux d'énergie

absorbée dans le corps entier lorsque la durée d'exposition est supérieure à la constante de temps thermique dans le corps ( $> 6$  minutes) [1].

L'élévation de la température est directement liée à la puissance absorbée par le corps. La distribution de la température en fonction du temps et de l'espace,  $T(r, t)$ , est liée à la distribution du  $DAS$  divisé par la densité volumique  $\rho(r)$ , nommée  $Q_v(r)$  par l'équation de bio-chaleur pour l'exposition aux champs électromagnétiques [23]

$$\nabla \cdot (K(r, t)\nabla T) + A(r, T) + Q_v(r) - RL(r) - B(r, T)(T - T_B) = C(r)\rho(r)\frac{\partial T}{\partial t} [\text{W}/\text{m}^3] \quad (1.1)$$

avec le membre de gauche représentant le transfert de chaleur par conduction passive où  $K[\text{W}/\text{m}^\circ\text{C}]$  est la conductivité thermique du tissu,  $A[\text{W} \cdot \text{m}^{-3}]$  est la production de chaleur du métabolisme,  $RL[\text{W} \cdot \text{m}^{-3}]$  représente les pertes de chaleur liées à la respiration,  $B[\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})]$  est le flux sanguin et  $T_B$  la température du sang. Le membre de droite de l'équation représente l'augmentation de la température par unité de temps avec la capacitance thermique par unité de volume donné par le produit de  $C[\text{J}/(\text{kg}^\circ\text{C})]$  et  $\rho[\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}]$ .

## 1.2.2 Les recommandations internationales

L'essor qu'ont connu les technologies sans fil depuis quarante ans ont poussé la communauté scientifique internationale à établir des recommandations de limitation des champs électromagnétiques [1]. L'Organisation Mondiale de la Santé, le Programme des Nations Unies pour l'Environnement ainsi que l'Association Internationale de Radioprotection (IRPA, organisation internationale existante avant la naissance de l'ICNIRP en 1992) ont dès la fin des années 1980 effectué un travail d'études bibliographiques sur les effets biologiques signalés à la suite d'expositions à des champs électriques et magnétiques à basse fréquence. En mai 1992, au huitième congrès de l'IRPA, la naissance de l'ICNIRP a lieu. Elle est chargée d'étudier les risques potentiels liés aux différents types de rayonnement non-ionisant, d'élaborer des guides internationaux pour l'établissement de limites d'expositions et de traiter de tous les aspects de la protection contre ces rayonnements.

C'est ainsi qu'a paru le célèbre guide pour l'établissement de limites d'exposition aux champs électriques, magnétiques et électromagnétiques qui concernent les champs alternatifs de fréquence variable dans le temps, jusqu'à 300 GHz en Novembre 1997 [1]. Ce guide est mis à jour périodiquement, au fur et à mesure de l'identification des effets nocifs des champs électriques, magnétiques ou électromagnétiques comme par exemple lors de la mise en lumière de la non-applicabilité des niveaux de référence pour les enfants de moins de 1.30 m [2]. Il sert de base pour les normes définies par les États et les régions.

Durant cette thèse nous nous intéresserons au couplage direct notamment à la fréquence typique des technologies sans fil IEEE 802.11b, 802.11g, 802.11n mieux connu sous le nom de WLAN (*Wireless local Area Network*) spécialement autour de la fréquence de 2.45 GHz [24]. Le

couplage identifié à ces fréquences est celui de l'absorption d'énergie provenant des champs électromagnétiques. L'exposition du corps humain aux champs électriques ou magnétiques basses fréquences n'entraîne généralement qu'une absorption d'énergie négligeable et aucune élévation de température mesurable. Aux fréquences d'intérêt dans notre cas, la grandeur physique utilisée qui, est la restriction de base, est le Débit d'Absorption Spécifique (*DAS*) exprimé en  $\text{W.kg}^{-1}$ .

Les niveaux de référence sont indiqués à des fins d'évaluations pratiques de l'exposition, afin de déterminer s'il est possible que les restrictions de base soient dépassées. Le niveau de référence dans notre cas est la valeur efficace du champ électrique  $|E|$  exprimée en  $\text{V.m}^{-1}$  à l'endroit où le corps exposé est placé. La figure 1.1 représente les niveaux de référence du champ électrique en fonction de la fréquence pour les travailleurs et la population générale. Le respect du ni-

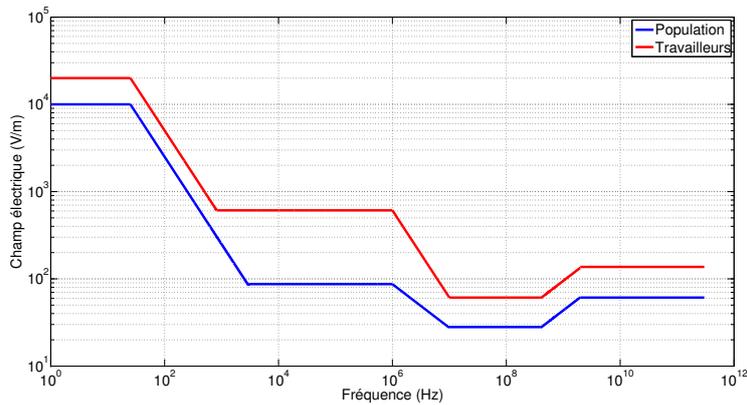


FIGURE 1.1 – Niveaux de référence pour l'exposition à des champs électriques variables dans le temps pour la population générale et les travailleurs [1].

veau de référence garantit le respect de la restriction de base. Si la valeur mesurée ou calculée dépasse le niveau de référence, il ne s'ensuit pas nécessairement que la restriction de base soit dépassée (voir la partie relative aux ordres de grandeur, partie 1.2.4.3 ci-après). Toutefois, tout dépassement du niveau de référence impose de vérifier le respect de la restriction de base correspondante.

L'enjeu est de calculer le *DAS* puisqu'il est impossible de le mesurer *in vivo* et que le dépassement du niveau de référence n'implique pas forcément le dépassement de la restriction de base. Le *DAS* est défini comme la dérivée temporelle d'un incrément d'énergie  $\delta W$ , absorbée ou dissipée dans un incrément de masse,  $\delta m$ , contenu dans un élément de volume,  $\delta V$  d'une densité massique  $\rho$  [8]

$$DAS = \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta W}{\delta m} \right) = \frac{\delta}{\delta t} \left( \frac{\delta W}{\rho \delta V} \right) \quad (1.2)$$

L'expression 1.2 est également *DAS* instantané. Le *DAS* local peut également s'écrire de la manière suivante en fonction du module du champ électrique

$$DAS_{local}(x, y, z) = \frac{\sigma(x, y, z) |E(x, y, z)|^2}{2\rho(x, y, z)} \quad (1.3)$$

Avec  $\sigma(x, y, z)$  la conductivité électrique d'un tissu biologique exprimée en  $S.m^{-1}$ ,  $E(x, y, z)$  le champ électrique en valeur crête et  $\rho(x, y, z)$  la densité massique du tissu exprimée en  $kg.m^{-3}$ . Le *DAS* corps entier s'exprime comme suit

$$DAS = \frac{1}{m} \int_V \frac{\sigma(x, y, z) |E(x, y, z)|^2}{2} dV \quad (1.4)$$

Avec  $m$  la masse totale du corps humain exposé et  $V$  le volume occupé par ce corps.

### 1.2.3 Les normes européenne, bruxelloise et parisienne

L'ICNIRP produit et met à jour ses recommandations en vue de la limitation de l'exposition des personnes aux rayonnements non-ionisants cependant c'est l'Union Européenne et les États membres qui ont le dernier mot pour légiférer sur cette limitation, notamment via la directive 2004/40/CE du Parlement européen et son rectificatif [25, 26]. Les connaissances sur les effets directs ou indirects des ondes électromagnétiques croissent, alors que, l'utilisation des technologies sans fil se généralise. Face à cela, l'Union Européenne et les États appliquent le principe de précaution et tendent donc à définir des normes plus restrictives que les recommandations produites par l'ICNIRP. Les normes européennes notamment la directive 1999/519/CE [25] sur les restrictions de base et les niveaux de référence pour les travailleurs sont équivalentes aux recommandations de l'ICNIRP, cependant le rectificatif à la directive 2004/40/CE [26] présente des niveaux réajustés.

Les normes françaises, par le décret n° 2002-775 du 3 mai 2002 [27], suivent exactement les normes européennes de la directive 1999/519/CE. Cependant, une charte a été signée par la Mairie de Paris et les opérateurs de téléphonie mobile le 20 mars 2003. Cette charte a constamment été mise à jour jusqu'à sa version du 13 décembre 2012 [28]. Cette charte invite et engage les opérateurs "à faire leurs meilleurs efforts pour contenir les niveaux de champs électromagnétiques moyens liés à la téléphonie mobile autour des niveaux actuels dans les lieux de vie fermés et les établissements particuliers" [28]. De plus, elle fixe des niveaux maximaux d'exposition aux services 2G (900-1800 MHz) et 3G (900-2100 MHz) limités à  $5 V/m^1$ . La ville et les opérateurs s'engagent également à limiter l'exposition à un niveau maximal global 2G, 3G et

1. Ce niveau de champ total sera calculé en équivalent 900 MHz selon la méthode décrite à l'annexe 5 de la charte. ( $1V/m@900MHz = \frac{41}{58}V/m@1800MHz$  et  $1V/m@900MHz = \frac{41}{61}V/m@2100MHz$ ).

4G à 7 V/m<sup>2</sup>.

Un autre exemple significatif de la mise en application du principe de précaution est le cas de la Belgique. Un arrêté royal de 2005 a fortement réduit le *DAS* corps entier et les niveaux de référence [29] par rapport aux recommandations de l'ICNIRP. Suite au transfert de la compétence de limitation des champs électromagnétiques du gouvernement fédéral aux gouvernements régionaux, une nouvelle ordonnance [30] a vu le jour en 2007 pour la région de Bruxelles-Capitale qui porte sur la densité de puissance et qui est inférieure à la valeur de l'arrêté royal. Le tableau 1.3 présente l'évolution des normes belges pour les fréquences d'intérêt des technologies suivant le protocole IEEE 802.11x (la norme du champ électrique est exprimée en valeur efficace)<sup>3</sup>. La

Tableau 1.3 – Evolution des normes des recommandations de l'ICNIRP à l'ordonnance bruxelloise

	$S[\text{W}/\text{m}^2]$	$ E [\text{V}/\text{m}]$	$DAS [\text{W}/\text{kg}]$
ICNIRP (2 GHz-10 GHz)	10	61	0.08
Directive 1999 519 CE(2 GHz-300 GHz)	10	61	0.08
Arrêté Royal belge(2 GHz-10 GHz)	2.5	30.7	0.02
Ordonnance Bruxelles(2 GHz-300 GHz)	0.05	néant	néant

comparaison des recommandations de l'ICNIRP aux normes européennes et aux normes belges montrent que le principe de précaution est effectivement appliqué. Il y a donc nécessité de calculer de manière précise les métriques relatives à l'exposition des personnes en l'occurrence le *DAS* corps entier. Pour cela, il existe des méthodes numériques que nous présentons dans la partie suivante.

## 1.2.4 Dosimétrie Numérique

La dosimétrie numérique est un domaine de la dosimétrie électromagnétique qui permet de calculer le champ électrique absorbé par le corps grâce à l'utilisation de méthodes numériques et de modèles de corps humain. Dès la fin des années 1980, les caractéristiques basiques de l'absorption d'énergie par un corps humain ont été établies sur de simples modèles sphériques ou sphéroïdaux. Ces premiers résultats ont été utilisés pour la mise en place des recommandations de protection.

### 1.2.4.1 Méthode FDTD

Une des plus importantes inventions parmi les différentes techniques de dosimétrie est le développement du *voxel* basé sur les modèles anatomiques de corps humain. Un *voxel* est un

2. Niveau calculé en équivalent 900 MHz par  $\sqrt{\sum E_{900}^2 + \frac{41}{58} \sum E_{1800}^2 + \frac{41}{61} \sum E_{2100}^2}$ .

3. L'ordonnance exprime la norme uniquement en terme de densité de puissance, c'est la raison pour laquelle nous avons mis le terme "néant".

petit élément de volume ou un cube de quelques millimètres d'arête dont les propriétés correspondent à celles des tissus et organes que le *voxel* décrit. Un modèle de corps humain peut contenir plusieurs millions de *voxels*.

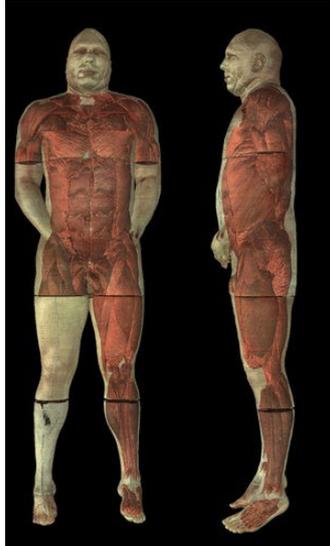
Depuis les années 1990, la méthode de différence-finie dans le domaine temporel (FDTD) est devenue la méthode numérique la plus utilisée et acceptée pour les calculs de dosimétrie numérique. La méthode FDTD est basée sur une discrétisation des équations de Maxwell dans le domaine temporel. La discrétisation spatiale des équations de Maxwell repose sur l'approche des cellules de Yee où les composantes du champ électrique et magnétique sont calculées un nœud sur deux alternativement [31]. Les nœuds aux coins des cellules de Yee sont les endroits où sont calculées les composantes du champ électrique. Les nœuds sur les faces des cellules Yee sont réservées au calcul des composantes du champ magnétique. De la même manière que spatialement, la méthode FDTD est discrète temporellement, le champ électrique et le champ magnétique sont calculés alternativement sur le pas temporel. Le temps de calcul de la méthode FDTD est proportionnel au nombre de cellules composant le domaine de simulations. La méthode FDTD présente plusieurs avantages :

- la méthode permet de ne pas passer par une inversion de matrice qui peut être coûteuse en temps de calcul et mener à des indéterminations,
- la méthode FDTD est particulièrement adaptée au milieu fortement hétérogène, c'est-à-dire, avec plusieurs milieux ayant des propriétés électriques différentes,
- enfin, l'équivalence parfaite entre la discrétisation cubique de la méthode FDTD (cellule de Yee) et les *voxels*.

La méthode FDTD requiert une discrétisation du domaine entier de simulation le long duquel les champs électriques et magnétiques vont être calculés alternativement. La mémoire des ordinateurs étant finie, il n'est pas possible de simuler des domaines de simulations de taille infinie. Étant limités à des domaines de simulations finis, des conditions absorbantes sont appliquées aux limites extérieures du domaine pour simuler la nature non-réfléctive de l'espace. Les conditions absorbantes les plus usées et les plus efficaces sont les PML (*Perfectly Matched Layer*) développées par Berenger [32]. La méthode FDTD est décrite dans l'annexe de ce manuscrit.

#### 1.2.4.2 Les modèles de corps numériques

Il existe plusieurs modèles de corps humains numériques (homme, femme, femme enceinte, enfant...) qui sont issus de données IRM (Imagerie par Résonance Magnétique) ou obtenus par *morphing* à partir d'autres modèles déjà existant et qui sont basés sur la discrétisation par *voxel*. Le premier modèle de corps en dosimétrie numérique est *Visible Human* qui a été développé par le laboratoire Brooks AFB présenté à la figure 1.2. L'inconvénient de *visible human* est qu'il est différent du "gabarit moyen" des êtres humains. Le *morphing* comme les IRM ont permis le développement d'une nouvelle gamme de modèles de corps dont les mailles peuvent être de

FIGURE 1.2 – Modèle anatomique de corps humain : *Visible Human*

dimension inférieure au millimètre. Les valeurs de conductivités et de permittivités utilisées dans la littérature sont basées sur le modèle paramétrique 4-Cole-Cole entre 10 Hz et 20 GHz de Gabriel. Elles sont issues de données de mesures et largement acceptées par la communauté scientifique [9]. Les gabarits et les propriétés des tissus (épaisseur notamment) des enfants ayant une influence prépondérante sur le *DAS*, des modèles d'enfants plus réalistes ont été développés. À ce jour un certain nombre de modèles de corps existent, notamment les modèles de corps de la fondation suisse IT'IS, la *virtual family* et la *virtual classroom*.

Durant la thèse, deux modèles de corps d'enfant de cette collection ont été utilisés, Roberta, une fille de 5 ans, et Thelonious un garçon de 6 ans [33]. À la figure 1.3 est présenté le modèle de corps de Roberta non maillé. Les modèles sont composés respectivement de 66 tissus pour Roberta et de 76 tissus pour Thelonious. Ils ont été maillés au millimètre afin de respecter la règle selon laquelle la taille des mailles doit être inférieure à  $\lambda/10$  avec  $\lambda$ , la longueur d'onde dans le matériau. Dans le vide, à la fréquence de 2.45 GHz cette longueur d'onde étant de 12.24 cm, le choix a été fait d'utiliser des mailles d'un millimètre d'arête pour respecter le critère de convergence dans tous les tissus. Les densités volumiques des différents tissus sont, quant à elles, fournies par la fondation IT'IS.

L'utilisation des modèles de corps de Roberta et Thelonious interroge sur l'utilité d'effectuer des calculs FDTD avec des modèles de corps aussi complets puisque il existe des approximations et des modèles plus simplistes. La puissance absorbée par un modèle de corps peut notamment être approximée par la proportionnalité à la surface apparente [14]. Cette approximation donne une bonne indication du niveau relatif d'exposition mais ne permet pas d'accéder à une valeur

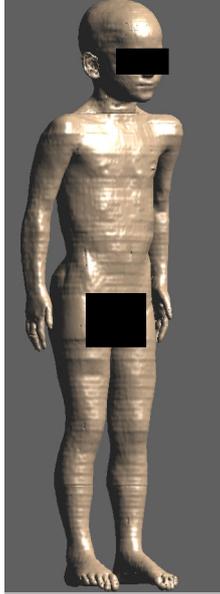


FIGURE 1.3 – Modèle anatomique de corps humain :Roberta

précise de la dose absorbée, c'est pourquoi le choix a été fait d'utiliser des modèles de corps précis.

#### 1.2.4.3 Quelques ordres de grandeur

Depuis les années 2000, un grand nombre de calculs de dosimétrie numérique sur différents modèles de corps et pour différentes fréquences a permis d'amplifier l'expertise scientifique dans ce domaine [15,16,34–36]. Les *DAS* corps entier pour un modèle de corps mâle adulte exposés à une onde plane de  $1 \text{ W/m}^2$  de densité de puissance sont inférieurs ou égaux à  $0.04 \text{ W/kg}$  à la fréquence de résonance de 70 MHz et  $0.008 \text{ W/kg}$  à 2 GHz [15]. Cependant, pour les enfants, il peut y avoir jusqu'à 40% d'augmentation du *DAS* corps entier à la fréquence de résonance et autour de 2 GHz. Des études [4,10] montrent qu'autour de la fréquence de résonance (100 MHz) et entre 1 GHz et 4 GHz pour des corps de moins d'1.30 m de hauteur (correspondant à un enfant de moins de 8 ans), aux niveaux de référence recommandés par l'ICNIRP, les valeurs de *DAS* induites peuvent être, jusqu'à 40% plus hautes que les restrictions de base actuellement en vigueur.

### 1.3 Variabilité et dosimétrie, un enjeu majeur

Le débat sur l'innocuité des ondes électromagnétiques a dopé la production d'études scientifiques dans le domaine de la dosimétrie et en a ouvert d'autres qui touchent à des thématiques de recherches variées (médecine, biochimie, épidémiologie, télécommunications etc). La prise en compte de la variabilité est un enjeu crucial de la dosimétrie. En effet, lorsque un modèle de corps est exposé à un rayonnement électromagnétique, les questions de savoir quel est le modèle de corps idéal (que ce soit le sexe, l'âge, un modèle de corps numérique ou un fantôme) à utiliser et quelles sont les conditions d'exposition les plus proches de la réalité (que ce soit champ proche, champ lointain, antenne dipôle, téléphone GSM, exposition à une onde plane ou exposition multiple due à l'environnement) se posent. Les études montrent qu'il y a beaucoup de sources de variabilité, de manière non-exhaustive : la morphologie du corps, la fréquence du champ incident, sa polarisation, le temps d'utilisation, la technologie (LTE, UMTS, GSM...), la position des organes, la position du fœtus etc [6, 10, 34, 37–41].

L'état actuel des technologies montre que l'utilisation des différents services de télécommunications sans fils se fait aujourd'hui de manière simultanée c'est-à-dire que les conditions réelles d'exposition sont en faite une accumulation d'exposition. Dans [40], l'exposition à de multiples services de communications est étudié sur base de mesures en environnement urbain à proximité d'une antenne-relais. L'étude porte sur l'estimation du niveau de référence et à la vérification des recommandations de l'ICNIRP. La dispersion est également étudiée comme dans [34] où deux différents modèles d'enfants ont été exposés à des ondes planes dont la fréquence variait entre 0.1 et 3 GHz.

Le développement des modèles numériques de corps humain a poussé les chercheurs à comparer l'absorption pour les différents modèles de corps. Dans [10] il a été montré que l'écart-type du  $DAS$  peut atteindre jusqu'à 40% de sa valeur en ayant comparé six différents modèles de corps. Dans [11], il a été montré qu'il apparaissait un écart-type de 30% entre douze différents calculs de  $DAS_{local}$  de têtes soumises au champ proche d'un téléphone mobile avec les mêmes conditions d'exposition.

La position du modèle de corps peut également induire des doses absorbées différentes. Dans [38, 42], des modèles de corps d'adultes et d'enfants ont été modifiés et des calculs de dosimétrie ont été effectué en comparant trois positions pour ces modèles de corps : debout les bras le long du corps, debout les bras tendues à la verticale au dessus du corps et en position assise. Les résultats montrent que la position "bras en l'air" peut induire une hausse du  $DAS$  corps entier par rapport à la position où les bras sont le long du corps notamment pour un modèle d'enfant où la hausse du  $DAS$  peut atteindre 25%.

La méthode FDTD est elle-même source d'incertitude car le maillage cubique va impliquer une légère déformation en marche d'escalier qui va modifier la "réalité" [43]. De plus, la taille du maillage va approximer la taille des tissus et s'écarter de la réalité physique du corps [44, 45]. Plus généralement, la morphologie des corps exposés va induire des expositions variables liées à la

position des organes, à la taille du modèle de corps et à sa masse. Par exemple, les études [46,47] montrent la variabilité que peut induire les propriétés des tissus composant une tête humaine dans les cas où celle-ci est exposée à différents modèles de téléphone GSM.

Durant les années 2000, de nouvelles approches impliquant des études statistiques ont été menées afin de répondre à la question de la variabilité. La méthode numérique principalement utilisée en dosimétrie est la méthode FDTD. Son principal inconvénient est que sa mise en œuvre va induire des temps de calcul longs notamment lorsque l'on étudie l'exposition d'un corps entier. Des efforts considérables ont été menés afin de développer des méthodes efficaces pour faire de la parallélisation de calcul sur de multiples processeurs ou l'utilisation de carte graphique [48,49]. Malgré ces efforts, les temps de calcul restent importants et sont donc incompatibles avec la perspective d'utiliser la méthode de Monte-Carlo pour mener une analyse de la sensibilité à des paramètres d'entrée variables. Afin de palier ce problème, des modèles dits "de remplacement" ont été développés.

Dans la littérature, certains travaux tentent de répondre à la variabilité induite par les conditions d'exposition dues à l'environnement. Dans [12], l'étude expérimentale de l'exposition d'un fantôme s'effectue en exposant le fantôme à de multiples rayons. Des études utilisent le tracé de rayon en environnement extérieur comme dans [13]. Dans [4,50], les modèles de corps sont exposés dans les conditions de modèles de canal déterministe et même s'il donne une bonne indication du niveau d'exposition via le calcul du *DAS*, ces études éludent l'aspect stochastique de l'exposition.

Des travaux ont été développés utilisant l'expansion polynomiale avec une estimation des coefficients de polynômes par méthode de projection ou utilisation des plans d'expérience [51]. Les résultats de cette étude montrent qu'il est possible de diminuer le nombre de calculs FDTD mais pas assez pour faire du Monte-Carlo. Dans [41,52] une nouvelle approche stochastique également basée sur le chaos polynomial est développée afin de calculer la distribution du *DAS* due à plusieurs paramètres d'entrée qui sont les angles d'inclinaisons du téléphone GSM. La solution retenue pour réduire significativement le nombre de simulation est d'estimer les coefficients des polynômes du chaos par une méthode de régression combinée avec une méthode itérative permettant de construire un modèle de remplacement. Ces études permettent de connaître l'impact des paramètres d'entrée mais ne fait pas une analyse précise de l'impact de l'ensemble des paramètres pour déterminer ceux qui ont le plus d'influence sur l'exposition. Cependant, le chaos polynomial présente l'avantage d'effectuer de l'interpolation dans le but d'estimer les indices de sensibilité aux paramètres d'entrée. À chaque type de distribution statistique est associé un type de polynôme, par exemple, pour un paramètre d'entrée suivant une loi uniforme, l'expansion se fera par un polynôme de Legendre et pour une loi gaussienne on utilisera un polynôme d'Hermitte [53]. Néanmoins, lorsque les distributions des paramètres d'entrée ne sont pas classiques<sup>4</sup> il est plus complexe d'utiliser le chaos polynomial.

---

4. Les densités de probabilité classiques auxquels sont associés des polynômes orthogonaux sont les densités de probabilité gaussienne, uniforme, gamma et beta [53].

Dans [54, 55] une méthode stochastique est développée considérant un nombre d'ondes arrivant de différentes directions et une estimation du champ total est faite en utilisant une interpolation linéaire ou spline pour évaluer le champ total induit par une exposition à de multiples ondes planes. Cependant, les interpolations linéaire ou spline ne prennent pas en compte le caractère statistique lors de l'estimation et ne fournissant pas d'outil statistique permettant de juger de sa qualité. De plus, dans [54], le nombre de simulations et donc le temps de calcul est divisé par deux grâce aux méthodes d'interpolation mais reste lourd.

Ainsi, ce travail de recherche a pour but de répondre à la variabilité en dosimétrie dans la mesure où les études menées en environnement intérieur, jusqu'ici, ne prennent pas en compte tous les paramètres du modèle de canal qui décrivent l'exposition. Le but est d'identifier les variables qui ont un impact significatif sur le *DAS* pour pouvoir obtenir un modèle de canal de communication en environnement intérieur adapté à la dosimétrie.

## 1.4 Contribution et organisation de ce manuscrit

Les objectifs de cette thèse sont l'identification des paramètres du modèle de canal qui ont un impact sur l'exposition des personnes et l'adaptation de ce modèle à la dosimétrie en environnement intérieur. Le déroulement s'est fait en plusieurs étapes qui suivent un raisonnement permettant, à terme, de répondre aux problématiques posées avec les outils à disposition.

## Chapitre 2

L'état de l'art de l'environnement électromagnétique est décrit de manière stochastique par les modèles de canaux sans fils [18–21, 56]. Ces modèles montrent que les ondes électromagnétiques ne se propagent pas séparément mais de manière groupées et que les paramètres de ces "paquets" d'ondes suivent des lois statistiques connues. La restriction de base s'exprime directement à partir du champ électrique absorbé par le corps humain et celui ci s'exprimera alors également en fonction des paramètres du modèle de canal. Le deuxième chapitre de cette thèse consiste donc à décrire statistiquement les conditions d'expositions d'un modèle de corps placé en environnement intérieur. Les paramètres de canal suivant des lois statistiques, il est logiquement nécessaire et inévitable d'analyser l'exposition de modèles de corps de manière statistique. Ainsi, il a été possible de développer des expressions analytiques de l'espérance et de la variance du *DAS* par rapport à un paramètre du modèle de canal qui est l'amplitude des composantes multi-trajets de ces *cluster*. Le chapitre porte le nom d'étude statistique de l'exposition.

### Chapitre 3

L'identification des paramètres ayant un grand impact sur l'étude de l'exposition des personnes nécessitent d'exposer des modèles de corps anatomiques à des conditions d'exposition multiples, voir infini, étant donné que les paramètres de canal sont nombreux. L'outil mis à notre disposition pour faire des calculs de dosimétrie numérique est un code FDTD développé en langage C, non-parallélisable sur plusieurs processeurs, ainsi que les modèles de corps de la *virtual family* et la *virtual classroom* [33]. L'étude de l'exposition se fait pour des modèles de corps en position debout avec les bras le long du corps. Durant cette thèse, la variabilité induite par la position du corps n'est pas étudiée. Les calculs FDTD sont coûteux en terme de temps de calcul, il est impossible de lancer une infinité de simulations en faisant varier, à chacune d'elles, les conditions d'exposition. Pour pallier ce problème, il a été nécessaire d'appliquer une méthode d'estimation efficace pour limiter le nombre de simulation tout en ayant un écart minimum entre les valeurs "réelles" (calculées par FDTD) et les valeurs estimées. L'idée a été alors de mettre en œuvre une méthode d'interpolation stochastique appelée krigeage [57, 58]. Il est ainsi possible de maîtriser la précision de l'interpolation et donc de minimiser le nombre de simulations requises pour obtenir une certaine précision. Le troisième chapitre porte sur la description de la méthode du krigeage, sa mise en œuvre et sa validation.

### Chapitre 4

L'étape finale de cette thèse est d'adapter le modèle de canal à la dosimétrie. Pour cela, il faut mesurer l'impact de chacun des paramètres du modèle de canal pour en dégager les plus influents. Identifier les paramètres d'entrée les plus ou moins influents d'un processus physique est un domaine de la statistique que l'on appelle l'analyse de sensibilité [53, 59–63]. L'analyse de sensibilité est pratiquée dans un grand nombre de domaines scientifiques comme la chimie, la finance, les sciences environnementales ou encore l'ingénierie.

Notre analyse repose sur le calcul d'indices de sensibilité que l'on appelle également indices de Sobol' en raison du chercheur du même nom qui a développé des expressions pour estimer ces indices de sensibilité. Grâce à ces indices nous mesurons l'impact de chacun des paramètres. Nous sommes alors en capacité d'effectuer une adaptation du modèle de canal pour la dosimétrie en fixant les paramètres les moins influents tout en quantifiant l'impact de ces approximations.

## Chapitre 2

# Étude statistique de l'exposition

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Les paramètres du modèle de canal</b>	<b>17</b>
2.1.1	Les paramètres de la partie spéculaire	19
2.1.2	Les paramètres de la partie diffuse	22
<b>2.2</b>	<b>Développement analytique</b>	<b>25</b>
2.2.1	Espérance du <i>DAS</i>	25
2.2.2	Variance du <i>DAS</i>	26
<b>2.3</b>	<b>Application sur un modèle de corps simplifié</b>	<b>28</b>
2.3.1	Distribution	31
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>33</b>

---

## 2.1 Les paramètres du modèle de canal

Un canal de communication sans fils est un environnement de propagation des ondes électromagnétiques qui se trouve entre une antenne de transmission et une antenne de réception. L'excitation par un courant sinusoïdal d'une antenne de transmission implique l'émission d'ondes électromagnétiques. Les ondes se propagent et interagissent avec l'environnement ambiant puis vont finalement induire un courant sur l'antenne de réception.

Une description déterministe du canal de communication présente certaines limites. Supposons qu'il soit réalisable de fournir une description complète de l'environnement de propagation entre deux antennes à un certain instant, le simple fait de déplacer des objets ou d'introduire de nouvelles personnes changera l'environnement de propagation. La modélisation d'un canal de communication sans fils doit être statistique.

Un modèle de canal sans fils devient alors un outil de simulation qui permet de comprendre ce

qui se passe entre une antenne d'émission et une antenne de réception sans la nécessité d'implémenter le système de communication sans fils réel.

L'interaction des ondes électromagnétique avec l'environnement est complexe et dépendra logiquement fortement de celui-ci. L'intérêt des modèles de canal sans fils est quadruple :

- le processus de création du modèle de canal aide à comprendre le phénomène de propagation dans le canal et comprendre ce phénomène permettra une meilleure utilisation et optimisation des ressources sans-fils,
- les algorithmes de traitement du signal peuvent être tester sans construire le système,
- dans le cas où une formulation mathématique est possible, elle peut être utilisée pour résoudre analytiquement les problèmes de traitement du signal,
- enfin, les conditions d'exposition des humains présents dans cet environnement électromagnétique sont connus de manière précise.

Les modèles de canal déterministes sont des modèles "exacts", où l'environnement est défini et où le champ  $y$  est calculé en chaque endroit. Les modèles de tracé de rayons sont les plus populaires des modèles déterministes [64, 65]. Cependant, ces derniers ne prennent pas en compte le caractère stochastique du canal. Dès lors où la position d'un objet est modifiée, le modèle déterministe peine à représenter la réalité des phénomènes.

Les modèles statistiques de canal sont une famille de modèles où le canal est décrit en modélisant les propriétés statistiques des paramètres de canal [66]. Les propriétés du modèle statistique du canal sont extraites des campagnes de mesures expérimentales sans justification physique. Cependant, certaines distributions statistiques peuvent disposer d'une explication physique. L'avantage majeur des modèles statistiques de canal est leur grande simplicité mathématique, ce qui rend leur utilisation facile et permet de résoudre des problèmes de traitement du signal. Le principal inconvénient des modèles statistiques de canal est qu'ils ne sont pas flexibles. Ils sont limités à des environnements spécifiques et peuvent être difficilement adaptable à d'autres environnements.

Les modèles de canal stochastique sur base géométrique (GBSCM pour *Geometry-Based Stochastic Channel Model*) sont une famille particulière des modèles statistiques. Le modèle de canal est construit sur base de mesures comme une somme de trajets de propagation géométrique permettant de recréer les propriétés du canal. Les angles des composantes multi-trajets à l'émetteur et au récepteur sont décrits par des distributions statistiques tout comme leur amplitudes et les paramètres de polarisation. L'atout central de ce type de modèle est son indépendance vis-à-vis de l'équipement utilisé pour construire et paramétrer le modèle. Décivant très fidèlement l'environnement électromagnétique, c'est un modèle GBSCM qui sera utilisé dans cette thèse afin de définir statistiquement les conditions d'exposition. Dans [19], un modèle de canal en environnement intérieur *Multi-Input Multi-Output* (MIMO) polarisé est décrit. Ce modèle introduit toutes les informations nécessaires pour définir les conditions d'exposition. La création de modèle de canal est menée en suivant trois étapes. La campagne de mesures sert à observer et déterminer quel phénomène de propagation sera inclus dans le modèle de canal,

vient ensuite, la phase de modélisation qui passe par l'utilisation d'algorithme d'identifications des composantes multi-trajets (en anglais *Multi-Path Components* MPCs). Il s'agit des ondes électromagnétiques qui se propagent entre l'émetteur et le récepteur et qui interagissent avec l'environnement. La modélisation est faite en définissant les paramètres du modèle en fonction des résultats de l'identification une par une des MPCs. La troisième étape consiste, enfin, à valider ce modèle de canal à partir de métriques pré-déterminés.

Depuis quelques années, il a été montré que la modélisation de canal, en considérant une somme d'ondes suivant différents trajets de propagation, amène à sous-estimer la puissance du canal et sa diversité [19, 56, 67]. Une partie minoritaire de la puissance ne peut plus être considérée comme faisant partie des composantes multi-trajets dites "spéculaires" car les caractéristiques de cette partie sont trop variables d'une réalisation à l'autre du canal. Cette partie de la puissance est décrite comme étant la composante "diffuse". L'algorithme d'identification des MPCs étant performant jusqu'à certains niveaux de puissance, les résidus de cette identification représentent la partie diffuse. La réponse impulsionnelle du canal appelé  $H$  s'obtient en sommant la partie spéculaire et la partie diffuse

$$H(\tau) = H_{spec}(\tau) + H_{diff}(\tau) \quad (2.1)$$

avec  $\tau$  le délai de propagation des MPCs. Une contribution de cette thèse est de mesurer l'impact de la partie diffuse sur l'exposition.

Dans [19], un modèle de canal *Multi-Input Multi-Output* (MIMO) prenant en compte la polarisation en environnement intérieur est décrit. La raison pour laquelle nous avons choisi d'utiliser un modèle de canal MIMO est que seul ce type de canal permet de connaître de manière précise les directions d'arrivée des *clusters*. Comme cela a été décrit dans l'introduction, ce modèle de canal comporte une partie spéculaire et une partie diffuse. Nous allons commencer par la description des paramètres spéculaires.

### 2.1.1 Les paramètres de la partie spéculaire

Ce modèle est basé sur le concept de *cluster*. À l'intérieur de chaque *cluster*, les composantes multi-trajets appelées MPCs (pour *Multi-Path Components*) sont regroupées angulairement et temporellement. La figure 2.1 représente les coordonnées sphériques qui nous serviront à repérer les *clusters* ainsi que les MPCs. Les *clusters* sont définis par leurs angles d'incidence dans les directions azimutale  $\mu_\phi$  et d'élévation  $\mu_\theta$  ainsi que leurs étalements angulaires  $\Delta\phi$  et  $\Delta\theta$ . Ces quatre paramètres permettent de définir un angle solide comme représenté à la figure 2.1 qui contiendra les MPCs incidents. Les angles d'incidences des MPCs  $(\phi_{c,l}, \theta_{c,l})$  suivent des lois gaussiennes avec pour moyenne et écart-type respectivement les angles d'incidence et les étalements angulaires dans les deux directions :

$$\phi_{c,l} \sim \mathcal{N}(\mu_\phi^c, \Delta\phi_c) \quad (2.2)$$

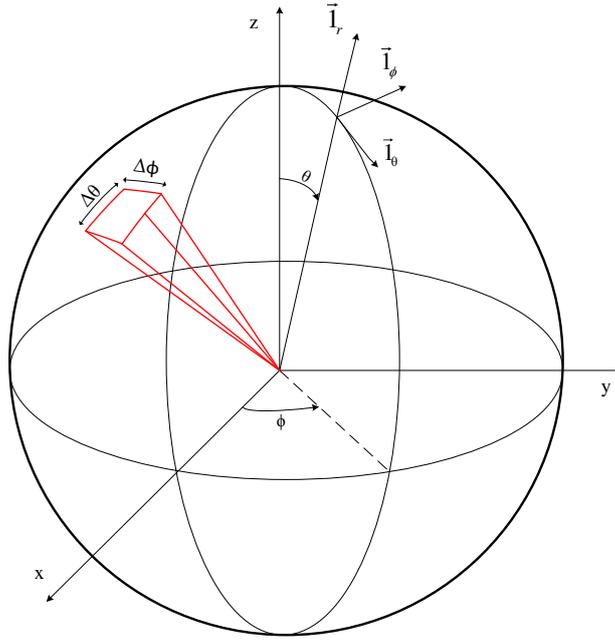


FIGURE 2.1 – Coordonnées sphériques et représentation des étalements angulaires d'un *cluster*.

$$\theta_{c,l} \sim \mathcal{N}(\mu_{\theta}^c, \Delta\theta_c) \quad (2.3)$$

avec  $\phi_{c,l}$  l'angle d'incidence azimutal et  $\theta_{c,l}$  l'angle d'incidence d'élévation du  $l$ -ième MPCs appartenant au  $c$ -ième *cluster*. Nous nommerons par la suite  $\mu_{\phi}^c$  l'angle d'incidence azimutal du  $c$ -ième *cluster* et  $\mu_{\theta}^c$  l'angle d'incidence d'élévation du  $c$ -ième *cluster*, ainsi que,  $\Delta\phi_c$  et  $\Delta\theta_c$  les étalements angulaires en azimutal et en élévation du  $c$ -ième *cluster*. Les angles d'incidences des *clusters* et les étalements angulaires suivent également des lois particulières. Les angles d'incidence en élévation suivent une loi de Laplace et les angles d'incidence en azimutal sont extraits des mesures. Par un souci de commodité, nous considérerons que les angles azimutaux suivent une loi uniforme.

$$\mu_{\phi}^c \sim \mathcal{U}(0^\circ, 360^\circ) \quad (2.4)$$

$$\mu_\theta^c \sim \mathcal{L}(90^\circ, 45^\circ) \quad (2.5)$$

Les étalements angulaires, quant à eux, suivent des lois log-normales avec les moyennes et variances extraites des mesures.

$$\Delta\phi_c \sim \mathcal{LN}(0, b_1) \quad (2.6)$$

$$\Delta\theta_c \sim \mathcal{LN}(0, b_2) \quad (2.7)$$

avec  $b_1$  et  $b_2$  des paramètres expérimentaux présentés au tableau 2.1. L'amplitude des MPCs suivent des lois complexes normales

$$\alpha_\theta^{c,l} \sim \sqrt{\frac{P_{(s),\theta}^c}{2N_{MPCs}}} (\mathcal{N}(0, 1) + j\mathcal{N}(0, 1)) \quad (2.8)$$

$$\alpha_\phi^{c,l} \sim \sqrt{\frac{P_{(s),\phi}^c}{2N_{MPCs}}} (\mathcal{N}(0, 1) + j\mathcal{N}(0, 1)) \quad (2.9)$$

avec  $\alpha_\theta^{c,l}$  et  $\alpha_\phi^{c,l}$  respectivement les amplitudes de la composante en  $\theta$  et en  $\phi$  du  $l$ -ième MPCs appartenant au  $c$ -ième cluster,  $P_{(s),\theta}^c$  et  $P_{(s),\phi}^c$  respectivement les puissances spéculaires des composantes  $\theta$  et  $\phi$  du  $c$ -ième *cluster*,  $N_{MPCs}$  le nombre de MPCs composant chaque cluster et  $\mathcal{N}(0, 1)$  une loi de distribution normale centrée réduite. Les MPCs venant de différentes directions, elles ont a priori subi des interactions forts différentes avec l'environnement, leurs amplitudes sont supposées être non-corrélées :

$$\langle \alpha_i^{c,l} \alpha_{i'}^{c',l'*} \rangle = \frac{P_{(s),i}^c}{N_{MPCs}} \delta_{c,c'} \delta_{l,l'} \delta_{i,i'} \quad (2.10)$$

avec  $\langle \bullet \rangle$  l'espérance de la variable aléatoire,  $i$  ou  $i'$  est  $\theta$  ou  $\phi$  et  $\delta$  est le symbole de Kronecker. Le modèle de canal dit que la puissance des *clusters* suit une loi semi-logarithmique décroissante. En supposant que les antennes émettrices sont polarisées selon la direction  $\theta$ , la puissance du *cluster* est une fonction aléatoire du retard de propagation  $\tau$  :

$$P_{(s),\theta}^c = -a_P \log(\tau) + b_P + \mathcal{N}(0, \chi_P) \quad (2.11)$$

avec  $\tau$  le retard de propagation entre les antennes émettrices et la position du corps,  $a_P$ ,  $b_P$  et  $\chi_P$  étant des valeurs empiriques. La puissance du *cluster* peut alors être uniformément sélectionnée parmi toutes les valeurs possibles  $P_{(s),\theta}^c$ . Cependant, pour obtenir des résultats normalisable par rapport à la puissance, au cours de ce travail de recherches nous travaillerons à puissance constante.

Le modèle de canal développé dans [19] se penche également sur la définition d'un modèle pour un système sans fil multi-antennes polarisé. Une antenne émettrice rayonne des ondes électromagnétiques qui possèdent des composantes selon  $\vec{1}_\theta$  et  $\vec{1}_\phi$ . On définit le rapport de

puissance entre la composante  $\theta$  et  $\phi$  du *cluster*  $c$ . Ce rapport quantifie la puissance relative d'une polarisation par rapport à l'autre, il est mieux connu sous le nom de *Cross Polarization Discrimination* en anglais (XPD).

$$\chi_{(s),c} = \frac{P_{(s),\theta}^c}{P_{(s),\phi}^c} \quad (2.12)$$

Le XPD a également été caractérisé par des mesures de canal, il suit une loi normale :

$$\chi_{(s),c} \sim \mathcal{N}(\mu_{\chi_s}, \sigma_{\chi_s}) \quad (2.13)$$

avec  $\mu_{\chi_s}$  la moyenne de la distribution et  $\sigma_{\chi_s}$  son écart-type, ces valeurs sont présentées au tableau 2.1.

### 2.1.2 Les paramètres de la partie diffuse

Dans [19], la partie diffuse est décrite de manière précise. Il a été observé que lors de l'extraction des composantes multi-trajets des mesures de canal MIMO, une puissance résiduelle reste, celle-ci est appelée la composante multi-trajet diffuse. Les composantes multi-trajets diffuses (en anglais *Diffuse Multi-path Components* DMCs) sont composés des éléments suivant :

- la superposition de MPCs dont la puissance est trop faible pour pouvoir être extraite des mesures MIMO par l'algorithme d'identification,
- les erreurs de modélisation, l'algorithme d'identification compare les mesures avec le modèle d'onde plane théorique. Les différences entre le modèle et le réel canal de propagation peuvent contribuer à la partie diffuse,
- enfin, les erreurs de calibration des antennes peuvent aussi contribuer à la partie diffuse.

En environnement *indoor*, la partie diffuse peut représenter une proportion conséquente de la puissance totale (30% en moyenne) qui ne peut pas être négligée. Il est montré dans la littérature que la partie diffuse est très corrélée à la partie spéculaire et qu'elles doivent être modélisées ensemble [21]. En effet, les mesures de canal montrent que par des techniques de *beamforming* la partie diffuse est très proche de la partie spéculaire même si les DMCs ne sont pas identifiables par l'algorithme SAGE.

Dans le modèle de canal, les *clusters* présentent donc une partie spéculaire matérialisée par les MPCs et une partie diffuse matérialisée par les composantes multi-trajets diffuses. Le modèle est très complet et définit de manière précise l'ensemble des paramètres. Les *clusters* sont définis angulairement par leurs angles d'incidence et leurs étalements angulaires dans les deux directions. Dans un premier temps, le modèle prévoit qu'il existe une distance entre l'angle d'incidence du *cluster* et l'angle d'incidence moyen des DMCs. Ensuite, le modèle dit également que les étalements sont différents pour la partie spéculaire et la partie diffuse. En effet, les étalements angulaires de la partie diffuse sont plus larges que ceux de la partie spéculaire. Pour la présente utilisation du modèle de canal, et au vu du peu de différence que cela va induire sur

notre analyse, nous allons faire une simplification. Nous considérerons seulement la différence au niveau des étalements angulaires (spéculaires ou diffus) et nous prendrons comme similaire les angles d'incidences spéculaires et diffus. Les étalements angulaires diffus suivent des lois log-normales :

$$\Delta\phi_c^{(d)} \sim \mathcal{LN}(\mu_\phi^c, b_{d,1}) \quad (2.14)$$

$$\Delta\theta_c^{(d)} \sim \mathcal{LN}(\mu_\theta^c, b_{d,2}) \quad (2.15)$$

avec  $\mu_\phi^c$  et  $\mu_\theta^c$  les moyennes et  $b_{d,1}$   $b_{d,2}$  les écart-types des distributions dont les valeurs sont présentées au tableau 2.1. Les angles d'incidence des DMCs suivent des lois normales

$$\phi_{c,l}^{(d)} \sim \mathcal{N}(\mu_\phi^c, \Delta\phi_c^d) \quad (2.16)$$

$$\theta_{c,l}^{(d)} \sim \mathcal{N}(\mu_\theta^c, \Delta\theta_c^d) \quad (2.17)$$

avec  $\mu_\phi^c$  et  $\mu_\theta^c$  les moyennes et  $\Delta\phi_c^d$  et  $\Delta\theta_c^d$  les écart-types des distributions dont les valeurs sont présentées au tableau 2.1. Les amplitudes des DMCs suivent également des lois complexes normales que l'on peut exprimer de la manière suivante :

$$\alpha_{(d),\theta}^{c,l} \sim \sqrt{\frac{P_{(d),\theta}^c}{2N_{DMCs}}} (\mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)) \quad (2.18)$$

$$\alpha_{(d),\phi}^{c,l} \sim \sqrt{\frac{P_{(d),\phi}^c}{2N_{DMCs}}} (\mathcal{N}(0,1) + j\mathcal{N}(0,1)) \quad (2.19)$$

avec  $P_{(d),\theta}^c$  la puissance diffuse de la composante en  $\theta$  du  $c$ -ième *cluster* et  $N_{DMCs}$  le nombre de DMCs par *cluster*. L'un des éléments importants dans le modèle de canal est la manière dont on définit l'écart entre la puissance spéculaire et la puissance diffuse. Pour définir cela, il faut introduire une nouvelle variable, la puissance totale  $P_{tot}^c$ . La puissance totale s'obtient en sommant la puissance spéculaire et la puissance diffuse d'un *cluster*. On définit la puissance diffuse de la manière suivante :

$$P_{(d),\theta}^c = P_{tot}^c - DPD \quad (2.20)$$

avec  $DPD$  est la distance par rapport à la puissance diffuse (en anglais *Diffuse Power Distance, DPD*), cette grandeur est une variable aléatoire qui suit également une loi connue, en l'occurrence, une loi normale.

$$DPD \sim \mathcal{N}(\mu_{DPD}, \sigma_{DPD}) \quad (2.21)$$

avec  $\mu_{DPD}$  la moyenne et  $\sigma_{DPD}$  l'écart-type de la distribution dont les valeurs sont présentées au tableau 2.1. La puissance spéculaire est ensuite obtenu par

$$P_{(s),\theta}^c = P_{tot}^c - P_{(d),\theta}^c \quad (2.22)$$

Le XPD est également différent en ce qui concerne les DMCs

$$\chi_{(d),c} = \frac{P_{(d),\theta}^c}{P_{(d),\phi}^c} \quad (2.23)$$

Le XPD diffus suit également une loi de distribution normal

$$\chi_{d,c} \sim \mathcal{N}(\mu_{\chi_d}, \sigma_{\chi_d}) \quad (2.24)$$

Toutes les valeurs expérimentales des paramètres statistiques sont regroupées dans le tableau 2.1 et sont issus des mesures de canal *Corridor to Office* de [19].

Le nombre de *clusters*  $N_C$  est le nombre de cluster moyen trouvé dans le cadre de ce scénario.

Tableau 2.1 – Paramètres des distributions définissant les paramètres du modèle de canal

$b_1 [^\circ]$	3.31
$b_2 [^\circ]$	1.46
$a_P$ [dB]	21.39
$b_P$ [dB]	74.22
$\chi_P$ [dB]	3.02
$\mu_{\chi_s}$ [dB]	4.74
$\sigma_{\chi_s}$ [dB]	5.80
$b_{d,1} [^\circ]$	11.19
$b_{d,2} [^\circ]$	5.11
$\mu_{DPD}$ [dB]	7.93
$\sigma_{DPD}$ [dB]	4.16
$\mu_{\chi_d}$ [dB]	4.31
$\sigma_{\chi_d}$ [dB]	3.18
$N_C$	12
$N_{MPCs}$	20
$N_{DMCs}$	4

Le nombre de MPCs est de 20 pour faire en sorte que le canal présente assez de *fading*. Le nombre de DMCs est décidé en suivant la règle générale suivante  $N_{MPCs} = \Delta\tau_C \cdot B$  avec  $\Delta\tau_C$  le retard maximal d'arrivée des MPCs, dans le cas des mesures menées dans [19], il est de 200 ns et  $B$  la bande de fréquence de notre système, ici, elle est de 20 MHz.

### Remarque concernant les distributions

Les distributions qui ont été définies aux équations 2.2, 2.3, 2.6, 2.7, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16, 2.17, 2.21 et 2.24 doivent être tronquées afin de correspondre à une réalité physique des paramètres. Dès lors, ces distributions ont été tronquées entre deux valeurs : la limite inférieure correspondant à la moyenne de la distribution moins deux fois l'écart-type et la limite supérieure correspondant à la moyenne plus deux fois l'écart-type.

Les paramètres qui ont été présentés montrent que l'exposition s'étudie de manière statistique en fonction du retard de propagation et angulairement. Par la suite, il est intéressant de regarder comment interviennent ces paramètres notamment l'amplitude des MPCs et DMCs sur l'exposition.

## 2.2 Développement analytique

L'évaluation de l'exposition se fait par le calcul de la restriction de base qui est le *DAS* corps entier :

$$DAS = \frac{1}{m} \int_V \frac{\sigma |E|^2}{2} dV \quad (2.25)$$

avec  $m$  la masse total du corps humain,  $\sigma (= \sigma(x, y, z))$  la conductivité des tissus,  $|E|$  le champ électrique total à l'intérieur du corps et  $V$  le volume total occupé par le corps. On utilise l'expression 2.25 car on considère l'exposition à la fréquence unique de 2.45 GHz. Cependant, il aurait été possible de calculer le *DAS* instantané par l'expression 1.2 pour observer les fluctuations de la dose absorbée en fonction du temps.

Les conditions d'expositions sont définies par le modèle de canal structuré en *clusters* présenté aux sections 2.1.1 et 2.1.2. Les amplitudes complexes des MPCs et des DMCs suivent des lois connues et ces composantes diffuses ou spéculaires sont non-corrélées (hypothèse 2.10). Dans ce contexte, l'analyse de l'exposition d'un modèle de corps doit être faite statistiquement, c'est-à-dire en calculant les deux premiers moments du *DAS*. Dans le développement suivant, nous ne prenons en compte, dans un premier temps, que les parties spéculaires des *clusters*. Ces *clusters* sont composés du même nombre de MPCs. Chaque composante du champ électrique total absorbé par le corps peut être séparée en une partie aléatoire et une partie déterministe. Dans la suite du manuscrit les parties déterministes du champ électrique à l'intérieur du corps seront appelées  $\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l})$  et  $\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l})$ . Les indices  $\theta$  et  $\phi$  représentent donc la polarisation des champs électriques incidents sur le corps.

### 2.2.1 Espérance du *DAS*

Le champ total  $\vec{E}_{tot}$  dans le corps humain peut être écrit en terme de somme de *clusters* composés de MPCs :

$$\vec{E}_{tot}(r, \theta, \phi) = \sum_{c=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} [\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l}) \alpha_\theta^{c,l} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l}) \alpha_\phi^{c,l}] \quad (2.26)$$

avec  $N_c$  le nombre de *clusters*,  $(r, \theta, \phi)$  indiquent les coordonnées sphériques et  $(\theta_{c,l}, \phi_{c,l})$  est l'angle d'incidence du  $l$ -ième MPC du  $c$ -ième *cluster*. Dans le développement suivant nous utiliserons  $\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l}$  à la place de  $\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l})$  et  $\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l}$  à la place de  $\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l}(r, \theta, \phi, \theta_{c,l}, \phi_{c,l})$  et

$\vec{E}_{tot}$  à la place de  $\vec{E}_{tot}(r, \theta, \phi)$  afin d'alléger les expressions. Le module carré du champ total s'écrit de la manière suivante

$$|\vec{E}_{tot}|^2 = \sum_{c,d} \sum_{l,m}^{N_c N_{MPCs}} [\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m*} \alpha_\theta^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,m*} \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\phi^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m*} \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l*} \alpha_\phi^{c,l*} \alpha_\theta^{d,m}] \quad (2.27)$$

avec (\*) qui indique le complexe conjugué. Le *DAS* s'écrit alors

$$DAS = \frac{1}{2m} \sum_{c,d} \sum_{l,m}^{N_c N_{MPCs}} \int_V \sigma [\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m*} \alpha_\theta^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,m*} \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\phi^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m*} \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l*} \alpha_\phi^{c,l*} \alpha_\theta^{d,m}] dV \quad (2.28)$$

En prenant l'espérance et en faisant l'hypothèse que les MPCs sont non-corrélées (hypothèse 2.10), il en vient :

$$\langle DAS \rangle = \frac{1}{2m} \sum_{c,d} \sum_{l,m}^{N_c N_{MPCs}} \int_V \sigma [\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,m*} \langle \alpha_\theta^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} \rangle + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,m*} \langle \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\phi^{d,m*} \rangle] dV \quad (2.29)$$

Car  $\langle \alpha_\phi^{c,l*} \alpha_\theta^{d,m} \rangle = \langle \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} \rangle = 0$ . Par l'hypothèse 2.10 on peut écrire :

$$\langle \alpha_\theta^{c,l} \alpha_\theta^{d,m*} \rangle = \frac{P_\theta^c}{N_{MPCs}} \delta_{c,d} \delta_{l,m} \quad (2.30)$$

$$\langle \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\phi^{d,m*} \rangle = \frac{P_\phi^c}{N_{MPCs}} \delta_{c,d} \delta_{l,m} \quad (2.31)$$

Finalement, on peut écrire

$$\langle DAS \rangle = \langle DAS^\theta \rangle + \langle DAS^\phi \rangle \quad (2.32)$$

avec

$$\langle DAS^\theta \rangle = \frac{1}{m} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(s),\theta}^c}{2N_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \int_V \sigma |\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,l}|^2 dV \quad (2.33)$$

$$\langle DAS^\phi \rangle = \frac{1}{m} \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(s),\phi}^c}{2\chi_{(s),c} N_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \int_V \sigma |\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l}|^2 dV \quad (2.34)$$

## 2.2.2 Variance du *DAS*

La variance est donnée par

$$\sigma_{DAS}^2 = \langle DAS^2 \rangle - \langle DAS \rangle^2 \quad (2.35)$$

Il est donc nécessaire de déterminer  $\langle DAS^2 \rangle$  :

$$\begin{aligned}
DAS^2 = \frac{1}{4m^2} \sum_{c,d,e,f}^{N_c} \sum_{j,k,l,m}^{N_{MPCs}} \int_V \int_V \sigma^2 [ & \vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{e,l*} \alpha_\theta^{c,j} \alpha_\theta^{e,l*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{e,l*} \alpha_\phi^{c,j} \alpha_\theta^{e,l*} \\
& + \vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{e,l*} \alpha_\phi^{c,j*} \alpha_\theta^{e,l} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{e,l*} \alpha_\phi^{c,j} \alpha_\phi^{e,l*} ] \\
& [ \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{f,m*} \alpha_\theta^{d,k} \alpha_\theta^{f,m*} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{f,m*} \alpha_\phi^{d,k} \alpha_\theta^{f,m*} \\
& + \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{f,m*} \alpha_\phi^{d,k*} \alpha_\theta^{f,m} + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{f,m*} \alpha_\phi^{d,k} \alpha_\phi^{f,m*} ] dV^2
\end{aligned} \quad (2.36)$$

En prenant l'espérance de  $DAS^2$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle DAS^2 \rangle = \frac{1}{4m^2} \sum_{c,d,e,f}^{N_c} \sum_{j,k,l,m}^{N_{MPCs}} \int_V \int_V \sigma^2 [ & \vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{e,l*} \vec{\mathcal{E}}_\theta^{d,k} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\theta^{f,m*} \langle \alpha_\theta^{c,j} \alpha_\theta^{e,l*} \alpha_\theta^{d,k} \alpha_\theta^{f,m*} \rangle \\
& + \vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,l} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{d,m*} \vec{\mathcal{E}}_\phi^{e,j} \cdot \vec{\mathcal{E}}_\phi^{f,k*} \langle \alpha_\phi^{c,l} \alpha_\phi^{d,m*} \alpha_\phi^{e,j} \alpha_\phi^{f,k*} \rangle ] dV^2
\end{aligned} \quad (2.37)$$

Sous l'hypothèse de non-corrélation des MPCs,  $\langle DAS^2 \rangle - \langle DAS \rangle^2$  devient :

$$\begin{aligned}
\langle DAS^2 \rangle - \langle DAS \rangle^2 = \frac{1}{4m^2} \sum_{c,e}^{N_c} \left( \frac{P_{(s),\theta}^c P_{(s),\theta}^e}{N_{MPCs}} \right) \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs}} \int_V \int_V \sigma^2 [ & |\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,j}|^2 |\vec{\mathcal{E}}_\theta^{e,l}|^2 \\
& + \frac{1}{\chi_{(s),c} \chi_{(s),e}} |\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,j}|^2 |\vec{\mathcal{E}}_\phi^{e,l}|^2 ] dV^2
\end{aligned} \quad (2.38)$$

Il en vient :

$$\begin{aligned}
\sigma_{DAS}^2 = \frac{1}{m^2} \sum_{c,e}^{N_c} \left( \frac{P_{(s),\theta}^c P_{(s),\theta}^e}{(2N_{MPCs})^2} \right) \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs}} \int_V \int_V \sigma^2 [ & |\vec{\mathcal{E}}_\theta^{c,j}|^2 |\vec{\mathcal{E}}_\theta^{e,l}|^2 \\
& + \frac{1}{\chi_{(s),c} \chi_{(s),e}} |\vec{\mathcal{E}}_\phi^{c,j}|^2 |\vec{\mathcal{E}}_\phi^{e,l}|^2 ] dV^2
\end{aligned} \quad (2.39)$$

Les équations (2.32) et (2.39) peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\langle DAS \rangle = \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(s),\theta}^c}{N_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \left( DAS_{c,l}^\theta + \frac{DAS_{c,l}^\phi}{\chi_{(s),c}} \right) \quad (2.40)$$

$$\sigma_{DAS}^2 = \sum_{c,e}^{N_c} \frac{P_{(s),\theta}^c P_{(s),\theta}^e}{N_{MPCs}^2} \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs}} \left( DAS_{c,j}^\theta DAS_{e,l}^\theta + \frac{DAS_{c,j}^\phi DAS_{e,l}^\phi}{\chi_{(s),c} \chi_{(s),e}} \right) \quad (2.41)$$

avec  $DAS_{c,l}^\theta$  étant le  $DAS$  d'un corps humain exposé au  $l$ -ième MPC du  $c$ -ième *cluster* et qui est polarisé selon la direction  $\theta$ , et  $DAS_{c,l}^\phi$  respectivement polarisé dans la direction  $\phi$ , les indices  $c$

et  $l$  indiquent également l'angle d'incidence sphérique d'arrivée sur le corps humain  $(\theta_{c,l}, \phi_{c,l})$ .  $DAS_{c,l}^\theta$  et  $DAS_{c,l}^\phi$  ont finalement pour expressions :

$$DAS_{c,l}^\theta = \frac{1}{m} \int_V \frac{\sigma |\mathcal{E}_\theta^{c,l}|^2}{2} dV \quad (2.42)$$

$$DAS_{c,l}^\phi = \frac{1}{m} \int_V \frac{\sigma |\mathcal{E}_\phi^{c,l}|^2}{2} dV \quad (2.43)$$

Les expressions de l'espérance et de la variance ne prennent en compte que les composantes spéculaires des *clusters*, on peut leur ajouter les parties diffuses :

$$\begin{aligned} \langle DAS \rangle &= \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(s),\theta}^c}{N_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \left( DAS_{c,l}^\theta + \frac{DAS_{c,l}^\phi}{\chi_{(s),c}} \right) \\ &+ \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(d),\theta}^c}{N_{DMCs}} \sum_{l=1}^{N_{DMCs}} \left( DAS_{c,l}^\theta + \frac{DAS_{c,l}^\phi}{\chi_{(d),c}} \right) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{DAS}^2 &= \sum_{c,e}^{N_c} \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs} + N_{DMCs}} \frac{P_{(i),\theta}^c P_{(k),\theta}^e}{N_1 N_2} \left( DAS_{c,j}^\theta DAS_{e,l}^\theta + \frac{DAS_{c,j}^\phi DAS_{e,l}^\phi}{\chi_{(i),c} \chi_{(k),e}} \right) \\ &\begin{cases} i = d \text{ et } N_1 = N_{DMCs} & \text{si } j > N_{MPCs} \\ i = s \text{ et } N_1 = N_{MPCs} & \text{si } j \leq N_{MPCs} \\ k = d \text{ et } N_2 = N_{DMCs} & \text{si } l > N_{MPCs} \\ k = s \text{ et } N_2 = N_{MPCs} & \text{si } l \leq N_{MPCs} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

### 2.3 Application sur un modèle de corps simplifié

Le choix a été fait d'appliquer ces expressions dans le cadre d'une utilisation simple de celles-ci sur un modèle de corps simplifié. Le modèle choisi est composé de trois cylindres homogène infinis qui jouent les rôles du tronc et des bras représentés à la figure 2.2. Les propriétés physiques et électriques du modèle de corps cylindrique sont présentées au tableau 2.2. L'étude a été réalisée à la fréquence de  $f = 2.45\text{GHz}$ . La simplicité du modèle va nous permettre de mener un grand nombre de calculs et d'estimer l'espérance du  $DAS$  et sa variance par Monte-Carlo. Le calcul du champ électromagnétique dans ce modèle cylindrique est présenté à l'annexe B. La comparaison entre les résultats analytiques et statistiques montrera à quel point ces expressions analytiques sont efficaces pour calculer l'espérance et la variance du  $DAS$  sans les calculs fastidieux de Monte-Carlo. La permittivité complexe relative est définie par

$$\tilde{\epsilon}_r = \epsilon_r - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \quad (2.46)$$

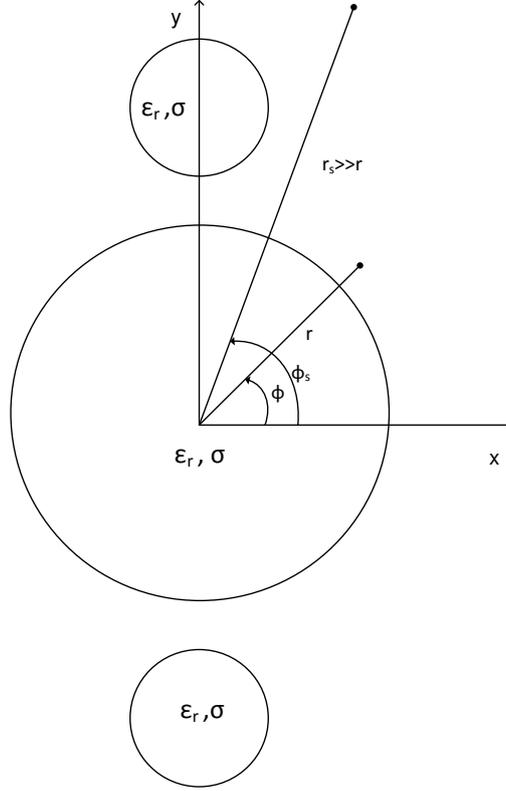


FIGURE 2.2 – Modèle de corps cylindrique

avec  $\varepsilon_0$  la permittivité en espace libre et  $\omega$  la pulsation. Les propriétés physiques et électriques du modèle de corps cylindrique sont présentées au tableau 4.1 [9].

Afin d'effectuer un exemple d'application des expressions analytiques développées à la partie précédente nous nous concentrerons sur le cas où le modèle de corps cylindrique est soumis uniquement à un seul *cluster* spéculaire polarisé selon  $\theta$ .

Ce *cluster* arrive dans le plan azimutal et possède uniquement un étalement angulaire dans la direction azimutale. Cela implique que l'espérance de  $DAS$  et sa variance ont les expressions suivantes :

$$\langle DAS \rangle = \frac{P_{(s),\theta}^1}{2mN_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \int_V \sigma |\vec{\mathcal{E}}_{\theta}^{1,l}|^2 dV \quad (2.47)$$

$$\sigma_{DAS}^2 = \frac{P_{(s),\theta}^1 P_{(s),\theta}^1}{N_{MPCs}^2} \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs}} (DAS_{1,j}^{\theta} DAS_{1,l}^{\theta}) \quad (2.48)$$

L'application se fait en deux étapes, la première consiste à lancer  $N_{MPCs}$  simulations où notre

Tableau 2.2 – Propriétés électrique et physique du modèle de corps simplifié

Longueur du tronc (m)	1.80
Rayon du tronc (m)	0.15
Longueur des bras (m)	0.80
Rayons des bras (cm)	5.0
Distance bras-tronc (cm)	5.0
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	523.4
Permittivité relative	38.57
Conductivité (S/m)	1.27
Perméabilité relative	1

modèle de corps simplifié est exposé à chaque simulation à une onde dont l'amplitude est égale à  $\sqrt{P_{(s),\theta}^1/N_{MPCs}}$  avec  $P_{(s),\theta}^1 = 1W$  et dont l'angle d'incidence azimutal suit la distribution statistique définie par le modèle de canal (équation (2.2)). L'angle d'incidence du *cluster* est  $\mu_\phi^1 = 0^\circ$  correspondant à une onde arrivant selon  $x$  (voir figure 2.2). Dans le cadre de l'application des expressions analytiques des moments du *DAS*, nous avons choisi de fixer l'étalement angulaire azimutale à  $\Delta\phi_1^{(s)} = 360^\circ$  correspondant à des composantes multi-trajet arrivant de toutes les directions possibles dans le plan azimutal. Les simulations menées vont nous permettre de calculer  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}$ .

La deuxième étape consiste à mener des simulations de type Monte-Carlo et grâce à celles-ci d'estimer  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}$ . À chaque simulation,  $N_{MPCs}$  ondes sont envoyées sur le modèle de corps cylindrique dont l'amplitude suit la distribution statistique définie par le modèle de canal

$$\alpha_{(s),\theta}^{1,l} \sim \sqrt{\frac{P_{(s),\theta}^1}{2N_{MPCs}}} (\mathcal{N}(0, 1) + j\mathcal{N}(0, 1)) \quad (2.49)$$

À chaque simulation, on obtient une valeur de  $DAS_i$ . On effectue  $N_R$  simulations afin d'estimer l'espérance et l'écart type du *DAS* avec les expressions classiques suivantes

$$\langle DAS \rangle_{MC} = \frac{1}{N_R} \sum_i^{N_R} DAS_i \quad (2.50)$$

$$\sigma_{DAS_{MC}} = \sqrt{\frac{1}{N_R - 1} \sum_i^{N_R} (DAS_i - \langle DAS \rangle_{MC})^2} \quad (2.51)$$

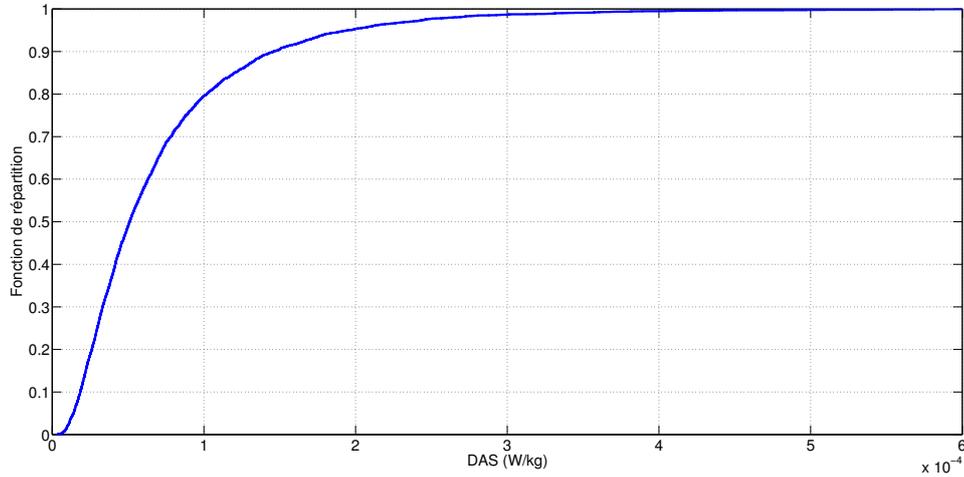
Tableau 2.3 – Comparaison entre les méthodes analytique et statistique du  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}$  pour  $N_R=4000$

	$\langle DAS \rangle$ ( $\mu\text{W}/\text{kg}$ )	$\sigma_{DAS}$ ( $\mu\text{W}/\text{kg}$ )
Méthode analytique	71.2	67.0
Méthode statistique	70.2	62.7

Le tableau 2.3 regroupe les valeurs de l'espérance du  $DAS$  et de son écart-type pour  $N_R=4000$  réalisations. Les résultats présentés au tableau 2.3 montrent qu'il y a une erreur relative entre la méthode analytique et statistique qui s'élève à 1.4% pour l'espérance du  $DAS$  et à 6.4% pour l'écart-type. Les valeurs du tableau 2.3 montrent qu'avec 4000 réalisations, on se trouve à moins de 7% de la convergence pour l'écart-type et à moins de 2% pour l'espérance. Cela montre que les expressions de l'espérance et de la variance du  $DAS$  développées à la partie précédente permettent de s'éviter ces calculs fastidieux.

### 2.3.1 Distribution

La méthode statistique avec ses 4000 réalisations nous permet de faire une analyse de la distribution du  $DAS$ . Le critère d'Akaike [68] a été utilisé pour évaluer la probabilité que la fonction de répartition issue des réalisations correspondent à une fonction de répartition connue. Le critère sélectionne le modèle qui correspond le mieux à la fonction de répartition issue de la méthode statistique en minimisant les métriques du critère Akaike. Nous avons comparé notre fonction de répartition avec celles des lois normale, log-normale, Rayleigh, Weibull, Exponentiel, poisson, Laplace, Gamma et Rice. Les résultats du critère d'Akaike montrent que la distribution qui correspond le mieux avec notre fonction de répartition est la fonction de répartition log-normale.

FIGURE 2.3 – Fonction de répartition du  $DAS$  pour 4000 réalisations

Le tableau 2.4 présente les valeurs des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  de la fonction de répartition log-normale qui correspond le mieux à celle du  $DAS$ , ainsi que, les valeurs analytiques. À partir du critère d’Akaike, on obtient les valeurs des paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ , dans le tableau 2.4, elles sont appelées valeurs statistiques. À partir des valeurs analytiques  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}$ , il est possible de calculer les paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  par les expressions suivantes :

$$\mu = \ln \langle DAS \rangle - \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \frac{\sigma_{DAS}^2}{\langle DAS \rangle^2} \right) \quad (2.52)$$

$$\sigma^2 = \ln \left( \frac{\sigma_{DAS}^2}{\langle DAS \rangle^2} + 1 \right) \quad (2.53)$$

Tableau 2.4 – Paramètres de la loi log-normale

	Valeurs analytiques	Valeurs statistiques
$\mu$ [dB]	-9.867	-9.874
$\sigma$ [dB]	0.796	0.802

## 2.4 Conclusion

La présentation du modèle de canal a permis de décrire précisément les paramètres qui le composent, ceux-ci permettent notamment de connaître les conditions d'exposition en environnement intérieur. Les principales caractéristiques de ces conditions d'exposition sont qu'elles sont étudiées de manière stochastique, que les composantes multi-trajet se propagent par paquets appelés *clusters*, et qu'enfin le modèle de canal contient une partie diffuse.

Le développement des expressions analytiques (équations 2.44 et 2.45) de l'espérance et de la variance du *DAS* a permis d'éliminer un paramètre du modèle de canal, l'amplitude complexe des MPCs et DMCs. Grâce à ces expressions, nous allons pouvoir mesurer l'impact des paramètres du modèle de canal notamment les paramètres angulaires puisque l'hypothèse de non-corrélation (2.10) des composantes multi-trajets permet d'éliminer les amplitudes aléatoires mais de conserver les paramètres relatifs à l'orientation de l'exposition. L'application sur le modèle de corps simplifié a permis de mesurer l'efficacité des expressions analytiques.

Les expressions analytiques de l'espérance et de la variance du *DAS* ont été développées mais il est également possible de développer les expressions d'ordre plus élevé et celles-ci s'exprimeront également en fonction de valeurs de *DAS*. Dans ce travail de recherche, nous nous concentrons sur les deux premiers moments du *DAS* mais l'évaluation des quantiles élevés est une perspective sérieuse pour évaluer le risque.

Les équations 2.44 et 2.45 s'expriment en fonction de valeurs de *DAS*. Une valeur *DAS* est la valeur du Débit d'Absorption Spécifique corps entier dans le cas d'une exposition à une unique onde plane polarisée selon  $\theta$  et  $\phi$  et arrivant d'une certaine direction. Cela signifie qu'il est nécessaire de connaître les valeurs de *DAS* pour tous les angles possibles et donc de mener des calculs FDTD pour toutes ces valeurs d'angles si l'on veut réaliser une étude statistique de l'exposition. Les méthodes numériques, notamment la FDTD, consomment beaucoup de mémoire et de temps de calcul, il est impossible de mener toutes ces simulations. Il faut alors opter pour une autre solution, utiliser une méthode d'estimation efficace.



# Chapitre 3

## Le krigeage pour la dosimétrie

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Les méthodes d'interpolation spatiale . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1.1	Méthodes déterministes . . . . .	37
3.1.2	Méthodes stochastiques . . . . .	38
<b>3.2</b>	<b>La méthode du krigeage . . . . .</b>	<b>39</b>
3.2.1	Définitions . . . . .	40
3.2.2	Les contraintes . . . . .	44
3.2.3	Le Krigeage simple . . . . .	45
3.2.4	Le Krigeage ordinaire . . . . .	47
3.2.5	Le Krigeage universel . . . . .	50
<b>3.3</b>	<b>L'analyse variographique . . . . .</b>	<b>51</b>
3.3.1	Variogramme expérimental . . . . .	51
3.3.2	Théorie du modèle de variogramme . . . . .	53
3.3.3	Les modèles de variogramme . . . . .	55
3.3.4	Anisotropie . . . . .	56
3.3.5	Ajuster un modèle de variogramme . . . . .	58
<b>3.4</b>	<b>Les échantillons : les valeurs de <i>DAS</i> calculées par FDTD . . . . .</b>	<b>59</b>
<b>3.5</b>	<b>Estimation par la méthode du krigeage ordinaire . . . . .</b>	<b>61</b>
3.5.1	Les coordonnées des variogrammes expérimentaux . . . . .	62
3.5.2	Les variogrammes expérimentaux . . . . .	65
3.5.3	Ajustement d'un modèle de variogramme . . . . .	68
3.5.4	Estimation . . . . .	71
<b>3.6</b>	<b>Validation de la méthode sur les résultats de Thelonious . . . . .</b>	<b>83</b>

---

L'utilisation d'une méthode d'interpolation stochastique est nécessaire si l'on veut étudier l'impact des paramètres du modèle de canal sur l'absorption d'énergie électromagnétique afin

de pallier les lourds temps de calcul en dosimétrie numérique. Il existe deux grandes familles de méthodes d'interpolation : déterministe ou stochastique. Les méthodes déterministes sont facilement implémentables mais peuvent être biaisées par la quantité d'échantillons utilisée pour estimer un processus localement ou par la distance entre ces échantillons. Pire, ce biais ne peut pas être détecté puisque il n'existe pas d'outil ou de variable spécifiant la qualité de l'estimation. Les méthodes stochastiques prennent en compte la disparité des échantillons, les distances entre les échantillons, leur nombre ou encore leur rapport d'échelle.

L'application de la méthode du krigeage à notre étude présente quatre avantages :

- cette méthode est le meilleur estimateur linéaire sans biais,
- l'estimation s'accompagne du calcul de la variance d'estimation permettant de juger de la qualité de l'estimation,
- l'application de la méthode du krigeage à la dosimétrie dans le cas d'un corps entier permet de généraliser cette méthode à tout type de corps (taille, âge, poids) notamment grâce à l'analyse variographique qui détermine le modèle de variogramme le plus adapté à la dosimétrie numérique dans le cas de l'exposition d'un corps entier debout,
- enfin, cette méthode permet de définir le nombre minimum d'échantillons (et donc de calculs FDTD à mener) à utiliser pour avoir une estimation de qualité satisfaisante.

Ce chapitre s'organise de la manière suivante : exposition des différentes méthodes d'interpolation, puis, présentation du formalisme mathématique de la méthode du krigeage. Dans une troisième sous-partie, l'étape-clé de l'analyse variographique est expliquée. Ensuite, nous présenterons les données numériques, à savoir, les valeurs de  $DAS$  que nous utiliserons pour mener l'estimation. Enfin, le chapitre se clôt sur la phase d'estimation et de validation de la méthode du krigeage.

### 3.1 Les méthodes d'interpolation spatiale

Les méthodes d'interpolation sont divisées en deux grandes familles, les méthodes déterministes et les méthodes stochastiques. Trois grandes classes de méthodes déterministes ont été dénombrées : les méthodes barycentriques, les méthodes d'interpolation par partitionnement de l'espace et les splines [69]. Du côté des méthodes stochastiques, les techniques de régression classique, de régression locale et de krigeage ont été listées [69]. Contrairement aux méthodes déterministes, les méthodes stochastiques incorporent, non seulement les valeurs observées mais également l'information relative à leur position. Ceci permet d'améliorer les estimations dans le contexte spatial. La géostatistique est un domaine qui a beaucoup participé à la mise en œuvre du développement de méthodes stochastiques [57,69]. Celles-ci proposent toutes un modèle probabiliste qui décrit le phénomène à l'aide d'un processus aléatoire. Cette procédure permettra de quantifier à la fois ce que l'on connaît et ce que l'on ignore. On sera alors capable de proposer une estimation des valeurs inconnues mais également une mesure de leur précision. Grâce à cette

modélisation, des erreurs de prévision peuvent être calculées. Voici une description succincte de ces différentes méthodes.

### 3.1.1 Méthodes déterministes

Pour l'estimation globale, la moyenne arithmétique d'un ensemble de valeurs situées dans un domaine géographique n'est pas toujours un estimateur représentatif de la moyenne globale du domaine. Cette insuffisance est mise en évidence lorsque l'échantillonnage est plus dense dans les secteurs où les valeurs sont fortes : dans ce cas, la moyenne des observations surestime la moyenne réelle.

Pour contourner cette difficulté, une première solution consiste à sélectionner une partie des données, qui soient à peu près uniformément réparties dans la zone étudiée, et à former leur moyenne arithmétique pour estimer la moyenne exhaustive. Cela revient à omettre certaines observations spatialement agrégées ou "groupées". Si cette méthode a l'avantage d'être simple, elle présente néanmoins deux inconvénients :

- elle ne prend pas en considération toutes les données, ce qui entraîne une perte d'information qui peut être précise,
- dans de nombreuses situations, il n'est pas possible d'identifier les observations à conserver et celles à négliger.

Une seconde solution consiste à pondérer les données dans l'estimation de la moyenne globale, de telle manière que les observations proches les unes des autres aient moins d'influences que les observations isolées.

Pour l'interpolation locale, des combinaisons linéaires pondérées sont également utilisées. Dans ce cas-ci, les poids tiennent en compte, non seulement de la disposition des observations les unes par rapport aux autres mais aussi de la distance entre le secteur à estimer et les points de données. On peut citer, par exemple, les polygones de Thiessen et la triangulation qui consiste à partitionner l'espace géographique, soit en polygones soit en triangles, puis à interpoler en chaque point à l'aide d'une combinaison linéaire pondérée des valeurs voisines. Les autres méthodes travaillent sur un espace non-partitionné. Les techniques barycentriques utilisent des pondérateurs liés aux distances entre le point à estimer et les points de données ; les surfaces de tendance ajustent globalement une fonction polynomiale des coordonnées aux valeurs observées ; quant aux fonctions splines, leur but est de trouver la surface la plus lisse passant par, ou non loin, des valeurs mesurées aux sites d'observations.

Au vue du large éventail de méthodes déterministes existantes, que ce soit pour l'estimation globale ou pour l'interpolation locale, il serait inutile de se lancer dans une description détaillée de chacune de ces méthodes dans cette thèse. Cependant, le lecteur peut trouver de précieuses informations dans [69].

### 3.1.2 Méthodes stochastiques

Avant de commencer la description des méthodes stochastiques, définissons tout d'abord ce que sont une variable régionalisée et une structure spatiale. Du point de vue mathématique, une variable régionalisée est une fonction numérique qui prend ses valeurs dans une région bien délimitée de l'espace appelée champ. L'espace auquel on se réfère peut être l'espace géographique, l'axe temporel, ou un espace euclidien plus complexe [69]. La notion de variable régionalisée est employée dans de nombreux domaines d'application pour quantifier des grandeurs ou des phénomènes "spatiaux". En général, une variable régionalisée varie irrégulièrement et ne peut être représentée par une fonction mathématique explicite. D'un autre côté, elle présente aussi une structure spatiale : les valeurs qu'elle prend sont "corrélées" entre elles.

Tout comme les splines, la régression classique permet d'effectuer une interpolation en ajustant une surface aux valeurs régionalisées observées. Elle suppose que la variable régionalisée à l'étude est une fonction aléatoire qui se décompose comme suit :

$$z(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) + \epsilon(\vec{x}) \quad (3.1)$$

où  $\mu(\cdot)$  est la structure déterministe pour l'espérance en fonction de la localisation des observations et  $\epsilon(\cdot)$  est une fonction aléatoire d'espérance nulle, de variance connue et suit une loi gaussienne représentant par exemple des erreurs de mesure indépendantes. La variable  $\mu(\vec{x})$  peut prendre plusieurs formes. La plus utilisée est un polynôme de degré  $d$  des coordonnées :

$$\mu(\vec{x}) = \sum_{l+k \leq d} \beta_{lk} x^l y^k \quad (3.2)$$

Les coefficients du modèle sont ajustés par une méthode quelconque d'estimation, par exemple, la méthode du maximum de vraisemblance ou celle des moindres carrés. Notons que l'interpolation par régression classique est considérée déterministe par certains auteurs [70]. D'ailleurs, l'emploi de la méthode des moindres carrés rend superflue la modélisation stochastique de la variable aléatoire.

Une extension de la régression classique permet de diminuer l'impact de l'interpolation en un point des observations éloignées de ce point. Il s'agit de la régression locale aussi nommée régression pondérée géographiquement. Cette méthode postule le même modèle qu'en régression classique. Cependant, les coefficients de la tendance  $\mu(\cdot)$  sont maintenant estimés par une méthode locale d'estimation telle les moindres carrés pondérés ou la méthode du maximum de vraisemblance pondérée.

Les régressions classique et locale ne prennent pas en considération la structure spatiale des données. Le krigeage est la première méthode d'interpolation spatiale à en avoir tenu compte. Les travaux de l'ingénieur minier sud-africain Krige (1951) sont précurseurs de la méthode. Cependant, le terme krigeage et le formalisme de cette méthode sont dus au français Matheron, qui

en a assuré le développement au Centre de Géostatistique de l'école des Mines de Paris [71, 72]. L'idée de base du krigeage est de prévoir la valeur de la variable régionalisée étudiée en un site non-échantillonné  $\vec{x}_0$  par une combinaison linéaire de données ponctuelles adjacentes :

$$z^*(\vec{x}_0) = a + \sum_{i \in V(\vec{x}_0)} \lambda_i z(\vec{x}_i) \quad (3.3)$$

Les poids  $\lambda_i$  associés à chacune des valeurs régionalisées observées sont choisis de façon à obtenir une prévision non biaisée et de variance minimale. Ces poids dépendent de la localisation des observations et de leur structure spatiale. En fait, le krigeage est le nom donné à la meilleure prédiction linéaire sans biais, en anglais *Best Linear Unbiased Predictor* ou BLUP, dans un cadre spatial [57, 58, 69, 73]. Le modèle de base du krigeage a la même forme que le modèle de régression classique ou locale, mais les erreurs sont maintenant supposées dépendantes spatialement. Il s'énonce comme suit :

$$z(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) + \delta(\vec{x}) \quad (3.4)$$

où  $\mu(\cdot)$  est la structure déterministe pour l'espérance de  $Z(\cdot)$  et  $\delta(\cdot)$  une fonction aléatoire stationnaire, d'espérance nulle et de structure spatiale connue. Pour formuler complètement le modèle, il faut spécifier la forme de la variable  $\mu(\cdot)$ . C'est en fait cette variable qui précise le type de krigeage effectué. Les trois types classiques de krigeage sont :

- krigeage simple :  $\mu(\vec{x}) = m$  est une constante connue.
- krigeage ordinaire :  $\mu(\vec{x}) = \mu$  est une constante inconnue.
- krigeage universel :  $\mu(\vec{x}) = \sum_{j=0}^p f_j(s) \beta_j$  est une combinaison linéaire de fonctions de la position de  $\vec{x}$ .

De plus, la structure spatiale de la fonction aléatoire  $\delta(\cdot)$  doit être précisée. Si elle n'est pas connue préalablement, ce qui est presque toujours le cas en pratique, elle est déterminée à partir des données lors de l'analyse variographique. Cette étape permet de décrire la variabilité spatiale de phénomènes régionalisés. Ensuite, le modèle étant complètement énoncé, le krigeage peut être effectué en un point  $\vec{x}_0$  quelconque du champ  $D$ . En fait, il s'agit simplement de déterminer la valeur des poids  $\lambda_i$  de la combinaison linéaire qui respectent la contrainte de non-biais  $E[Z^*(\vec{x}_0) - Z(\vec{x}_0)]$  tout en minimisant la variance d'estimation  $Var[Z^*(\vec{x}_0) - Z(\vec{x}_0)]$ . Le krigeage est une méthode d'interpolation très souple. Il peut-être global ou local en fonction du voisinage choisi. Il restitue donc les valeurs régionalisées "mesurées" aux sites d'observation.

## 3.2 La méthode du krigeage

Le domaine de la géostatistique a connu une grande évolution durant la seconde moitié du 20<sup>ème</sup> siècle. Originellement développée pour l'estimation des réserves de minerai, la méthode du krigeage a été généralisée à d'autres domaines des sciences de la Terre avec l'avancement des capacités de calcul des ordinateurs. Le krigeage est aujourd'hui utilisé dans beaucoup de

domaines scientifiques et dans l'industrie où il y a des besoins d'évaluation de données spatialement ou temporellement corrélées. Le krigeage est également utilisé en électromagnétisme notamment dans [74–77].

Comme cela a été mentionné dans l'introduction, l'objectif du krigeage est d'estimer la valeur d'un processus  $z$  en un site non-échantillonné  $\vec{x}_0$  par une combinaison linéaire de données ponctuelles adjacentes. L'estimation peut se faire par le krigeage simple, ordinaire ou universel. Avant de décrire ces différents types de krigeage, le cadre théorique doit être installé en présentant quelques définitions [57, 69].

### 3.2.1 Définitions

#### 3.2.1.1 Fonction aléatoire

Pour pouvoir aller au-delà de ce que la statistique conventionnelle propose, nous allons introduire le concept de fonction aléatoire. Il va fournir des outils pour analyser le caractère à la fois incertain et structuré du phénomène, ce qui permettra ultérieurement d'estimer les valeurs en des sites non-échantillonnés. La notion de fonction aléatoire a pour but de modéliser deux caractéristiques de la variable régionalisée contradictoires en apparence : d'une part, les valeurs qu'elle prend sont très aléatoires, ce qui nous empêche de prédire avec certitude les valeurs prises en des sites non-échantillonnés ; d'autre part, elles ne sont pas totalement indépendantes et présentent une certaine structure dans l'espace.

Le modèle est le suivant, chaque valeur  $z(\vec{x})$  de la variable régionalisée est interprétée comme une réalisation d'une variable aléatoire  $Z(\vec{x})$  définie en  $\vec{x}$ . On appelle fonction aléatoire, ou processus aléatoire, la collection des variables aléatoires  $\{Z(\vec{x}), \vec{x} \in \mathcal{D}\}$  [69].

La variable régionalisée  $z(\vec{x})$  a une signification "concrète", en ce sens que l'on pourrait imaginer la connaître entièrement en échantillonnant exhaustivement le champ. Au contraire, la fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  est une entité abstraite, qui n'existe pas dans la réalité ; plusieurs fonctions aléatoires peuvent être acceptables pour modéliser une même variable régionalisée, car il existe de nombreuses façons de décrire les dépendances entre des valeurs numériques.

Par rapport à l'approche de la statistique classique, la différence fondamentale est que les diverses variables aléatoires ne sont pas indépendantes. Les corrélations qui existent entre les variables aléatoires définies en plusieurs points de l'espace vont permettre de décrire la structure spatiale du phénomène régionalisé.

#### 3.2.1.2 Loi spatiale et Moments

On peut décrire la fonction aléatoire par sa loi de probabilité entière, ou plus synthétiquement par ses moments du premier et du second ordre. Du point de vue mathématique, une fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  est caractérisée par sa loi spatiale, qui correspond à la donnée de toutes les lois de probabilité de tous les vecteurs aléatoires  $\{Z(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)\}$  que l'on peut extraire de

$Z(\vec{x})$ .

Le lecteur peut se rendre compte de l'extrême complexité de cette définition. Pour pouvoir mettre en œuvre le krigeage, il est nécessaire de "résumer" la loi spatiale à ses paramètres les plus importants et significatifs. Cette contrainte de simplification est motivée par deux raisons : d'une part, la commodité des manipulations mathématiques, et d'autre part la possibilité de réaliser l'inférence statistique. Il est illusoire de vouloir déterminer la loi spatiale entière, qui contient une infinité de paramètres, à partir d'un nombre nécessairement limité de données disponibles [69].

En géostatistique linéaire, on limite la description de la loi spatiale à ses deux premiers moments, que nous allons définir ci-après.

Le moment de premier ordre d'une fonction aléatoire correspond à son espérance mathématique, qui en toute généralité dépend du point  $\vec{x}$  :

$$E[Z(\vec{x})] = \mu(\vec{x}) \quad (3.5)$$

L'espérance en un point  $\vec{x}$  donné représente la "moyenne" autour de laquelle les valeurs possibles de  $Z(\vec{x})$  se distribuent. Il s'agit d'une moyenne prise sur les différentes réalisations de la fonction aléatoire ; par abus de langage cependant on confond parfois les termes "espérance" et "moyenne".

Les moments du second ordre vont fournir une description élémentaire de la loi bivariable de  $Z(\vec{x})$ , c'est-à-dire la loi de probabilité entre les valeurs prises en deux sites  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$ . Les moments de second ordre sont la covariance et le (semi-)variogramme. La covariance entre  $Z(\vec{x}_1)$  et  $Z(\vec{x}_2)$  quantifie la corrélation, ou encore le degré de "ressemblance", entre les valeurs prises en  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  :

$$\begin{aligned} \text{cov}[Z(\vec{x}_1), Z(\vec{x}_2)] &= E\{[Z(\vec{x}_1) - \mu(\vec{x}_1)][Z(\vec{x}_2) - \mu(\vec{x}_2)]\} \\ &= E[Z(\vec{x}_1)Z(\vec{x}_2)] - \mu(\vec{x}_1)\mu(\vec{x}_2) \\ &= C(\vec{x}_1, \vec{x}_2) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La covariance entre la variable aléatoire  $Z(\vec{x}_1)$  et elle-même est égale à sa variance :

$$\text{cov}[Z(\vec{x}_1), Z(\vec{x}_1)] = \text{var}[Z(\vec{x}_1)] = E\{[Z(\vec{x}_1) - \mu(\vec{x}_1)]^2\} \quad (3.7)$$

qui mesure la dispersion de  $Z(\vec{x}_1)$  autour de sa valeur moyenne  $\mu(\vec{x}_1)$ .

Le (semi-)variogramme entre  $Z(\vec{x}_1)$  et  $Z(\vec{x}_2)$  à l'inverse de la covariance, mesure la "dissemblance" entre les valeurs prises en  $\vec{x}_1$  et  $\vec{x}_2$  :

$$\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{2} \text{var}[Z(\vec{x}_1) - Z(\vec{x}_2)] \quad (3.8)$$

Dans la suite, le préfixe "semi" sera négligé et on appellera "variogramme" la fonction  $\gamma(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ .

### 3.2.1.3 Inférence statistique, les hypothèses de stationnarité

L'inférence statistique concerne la reconstitution des caractéristiques de la fonction aléatoire (en l'occurrence, ses deux premiers moments) à partir d'un ensemble de données expérimentales. L'inférence soulève une difficulté de taille : la variable régionalisée ne constitue qu'une seule réalisation de la fonction aléatoire. Or, en toute généralité, il n'existe pas de bijection entre un processus aléatoire et une réalisation de celui-ci.

En d'autres termes, la fonction aléatoire ne peut être sans ambiguïté à partir de la variable régionalisée. Ce problème ne concerne pas la quantité d'information disponible, mais le fait que l'on essaie de décrire un phénomène unique, qui ne se répète pas, à l'aide de lois de probabilités. Pour permettre l'inférence statistique, des hypothèses limitatives, traduisant une certaine homogénéité du phénomène dans l'espace ou "stationnarité", vont être nécessaires.

Les paragraphes suivants détaillent les principales hypothèses de stationnarité que l'on peut formuler ; elles sont classées de la plus exigeante à la plus flexible [69].

**Hypothèse de stationnarité du second ordre** Du point de vue mathématique, une fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  est stationnaire du second ordre quand l'espérance mathématique existe et ne dépend pas du point  $\vec{x}$ , et que la covariance entre chaque paire  $\{Z(\vec{x} + \vec{h}), Z(\vec{x})\}$  existe et ne dépend que de  $h$  :

$$\forall \vec{x}, E[Z(\vec{x})] = \mu \text{ indépendant de } \vec{x} \quad (3.9)$$

$$\forall \vec{x}, \vec{x} + \vec{h}, \text{cov}[Z(\vec{x} + \vec{h}), Z(\vec{x})] = C(\vec{h}) \text{ ne dépend que de } \vec{h} \quad (3.10)$$

La stationnarité du second ordre implique l'existence de la variance *a priori* en tout site  $\vec{x}$  et du variogramme entre toute paire de site  $\vec{x}$  et  $\vec{x} + \vec{h}$ . A l'instar de la covariance, ces moments ne dépendent pas de la position de  $\vec{x}$  :

$$\forall \vec{x}, \text{var}[Z(\vec{x})] = \text{cov}[Z(\vec{x}), Z(\vec{x})] = C(\vec{0}) = \text{constante} \quad (3.11)$$

$$\forall \vec{x}, \vec{x} + \vec{h}, \text{var}[Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x})] / 2 = \gamma(h) = C(\vec{0}) - C(\vec{h}) \quad (3.12)$$

La condition (3.12) indique que, sous l'hypothèse de stationnarité du second ordre, la covariance et le variogramme sont deux outils équivalents pour quantifier la dépendance qui existe entre les deux mesures  $Z(\vec{x} + \vec{h})$  et  $Z(\vec{x})$ , prises en deux sites séparés de  $\vec{h}$ . L'hypothèse de stationnarité d'ordre deux concerne la fonction aléatoire ; elle ne peut être validée de manière rigoureuse et infaillible à l'aide d'un test statistique sur les données expérimentales [69]. Elle correspond à une décision, plus ou moins judicieuse ou "raisonnable". Par exemple, on peut traduire l'équation (3.9) en disant que la variable régionalisée  $z(\vec{x})$ , qui est une réalisation particulière de  $Z(\vec{x})$ ,

fluctue autour d'une valeur constante dans l'espace. Quant à l'équation (3.11), elle indique que ces fluctuations ont la même dispersion dans toutes les régions de l'espace. Ces critères empiriques, ainsi que le bon sens et l'expérience de l'utilisateur, permettent d'adopter ou d'écarter l'hypothèse stationnaire du second ordre.

**L'hypothèse intrinsèque** Il existe des phénomènes régionalisés qui ne peuvent être décrits de manière satisfaisante par une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux car ils présentent une dispersion infinie. Un exemple historique est fourni par D. G. Krige [78], qui a étudié un gisement aurifère d'Afrique du Sud pour lequel la variance expérimentale des échantillons croît indéfiniment à mesure que le domaine dans lequel ils se répartissent augmente. Or, si la teneur en or était modélisable par une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux, la variance expérimentale devrait tendre vers la variance, ce qui ne peut être le cas puisque la limite est infinie. L'hypothèse intrinsèque que nous allons présenter cherche à affaiblir l'hypothèse de stationnarité de second ordre, de sorte à être compatibles avec des variances infinies.

On dit qu'une fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  est intrinsèque quand ses accroissements  $Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x})$  sont stationnaires d'ordre deux. Cette propriété peut se résumer par les relations :

$$\text{E} \left[ Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x}) \right] = 0 \quad (3.13)$$

$$\text{var} \left[ Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x}) \right] = \text{E} \left[ (Z(\vec{x} + \vec{h}) - Z(\vec{x}))^2 \right] = 2\gamma(\vec{h}) \text{ ne dépend que de } \vec{h} \quad (3.14)$$

Toute fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux est également intrinsèque, mais la réciproque est fautive : l'hypothèse intrinsèque est plus générale que celle de la stationnarité. En particulier, la covariance d'une fonction intrinsèque peut ne pas exister ; elle n'existe que si le variogramme  $\gamma(\vec{h})$  est borné.

**Hypothèses quasi-stationnaire et quasi-intrinsèque** Les caractéristiques d'un phénomène régionalisé peuvent changer radicalement selon l'échelle à laquelle on le regarde, et un modèle satisfaisant à une certaine échelle peut ne plus l'être à une échelle différente. Pour les besoins de la pratique, il n'est pas nécessaire que la fonction aléatoire qui modélise le phénomène soit stationnaire ou intrinsèque sur tout le champ, et l'on peut restreindre les hypothèses stationnaire et intrinsèque à une échelle locale [57, 69, 73].

Une fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  est quasi-stationnaire ou localement stationnaire si elle possède une espérance constante à l'échelle d'observation (i. e.  $\mu(\vec{x}) \approx \mu(\vec{x} + \vec{h})$  si  $|\vec{h}| < b$ ), et une fonction de covariance  $C(\vec{x}, \vec{x} + \vec{h})$  ne dépendant que de  $\vec{h}$  si  $|\vec{h}| < b$ . En fait, il est souvent possible de trouver des zones quasi-stationnaires en réduisant la valeur de  $b$ , mais il peut arriver que ces zones aient peu de données, rendant impossible l'inférence statistique. La décision de représenter la régionalisation par un processus localement stationnaire doit donc concilier deux facteurs : la

taille de la zone considérée comme "homogène" et le nombre de données disponibles.

### 3.2.2 Les contraintes

Le but du krigeage est de fournir l'estimation la plus "précise" possible de la grandeur recherchée à l'aide d'une combinaison linéaire pondérée des données disponibles. Le critère de précision est la minimisation de l'erreur quadratique moyenne.

#### 3.2.2.1 Contrainte de linéarité

L'estimateur est une combinaison linéaire pondérée des données. Ainsi, dans le cas où l'on souhaite estimer la valeur de la variable régionalisée au point  $\vec{x}_0$ , on posera

$$z^*(\vec{x}_0) = a + \sum_{i=1}^n \lambda_i z(\vec{x}_i) \quad (3.15)$$

où \* est le symbole qui signifie que la variable est estimée et  $\vec{x}_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont les sites échantillonnés utilisés pour l'estimation et où la constante  $a$  et les poids  $\lambda_i$  sont les inconnus du problème.

#### 3.2.2.2 Contrainte d'autorisation

L'erreur d'estimation doit être une combinaison linéaire autorisée, c'est-à-dire que son espérance et sa variance doivent exister faute de quoi les étapes suivantes n'auront pas de sens. Le choix de n'utiliser que les deux premiers moments de la loi spatiale impose une restriction sur la manipulation de la fonction aléatoire. En effet, on ne pourra utiliser que des combinaisons linéaires pondérées de  $Z(\vec{x})$ , seules expressions pour lesquelles on saura calculer des espérances et des (co)variances.

L'hypothèse de stationnarité retenue pourra de surcroît imposer des contraintes supplémentaires, car elle ne garantit pas forcément l'existence de l'espérance et de la variance de toutes les combinaisons linéaires pondérées. On qualifie "d'autorisée" une combinaison linéaire qui possède une espérance et une variance.

Dans le cadre de l'hypothèse d'ordre deux, toutes les combinaisons linéaires sont autorisées car l'espérance et la covariance de la fonction aléatoire existent. En revanche, l'hypothèse intrinsèque ne garantit que l'existence des moments des accroissements de la fonction aléatoire; en conséquence, seules les combinaisons linéaires d'accroissement sont autorisées. On peut montrer que ces dernières s'identifient à la famille des combinaisons linéaires de poids total nul [69]. Ainsi, l'hypothèse intrinsèque oblige à ne manipuler que des combinaisons linéaires pondérées dont la somme des poids est nulle; en contrepartie, elle est plus générale et autorise des modèles de fonctions aléatoires sans variance.

Nous donnons ci-dessous, sans démonstration, les expressions des espérances et variances des

combinaisons linéaires autorisées, en fonction des paramètres du modèle (espérance et covariance ou variogramme).

On suppose que  $Z(\vec{x})$  est une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux, d'espérance  $\mu$  de fonction de covariance  $C(\vec{h})$ . Dans ce cas, toutes les combinaisons linéaires pondérées sont autorisées, et l'on a :

$$E \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i) \right] = \mu \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (3.16)$$

$$\text{var} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i) \right] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j C(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \quad (3.17)$$

Si à présent  $Z(\vec{x})$  est une fonction aléatoire intrinsèque de variogramme  $\gamma(\vec{h})$ , seules les combinaisons linéaires de poids total nul sont autorisées. Pour de telles combinaisons, on a :

$$\left. \begin{array}{l} E [\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i)] = 0 \\ \text{var} [\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i)] = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(\vec{x}_i - \vec{x}_j) \end{array} \right\} \text{pour } \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (3.18)$$

La formule donnant la variance est identique à celle obtenue sous l'hypothèse stationnaire, à condition de remplacer la covariance (qui n'existe pas forcément) par l'opposé du variogramme. Cette règle sera constamment utilisée pour calculer les variances d'estimation globale et locale sous l'hypothèse intrinsèque.

### 3.2.2.3 Contrainte de non-biais

L'espérance de l'erreur d'estimation doit être nulle. Intuitivement, cela signifie que si l'on répète l'estimation sur un grand nombre de configurations de krigeage identiques, les erreurs commises se neutralisent.

### 3.2.2.4 Contrainte d'optimalité

Les poids  $\lambda_i$  et la constante  $a$  sont déterminés de façon à minimiser la variance d'estimation  $\text{Var}[Z^*(\vec{x}_0) - Z(\vec{x}_0)]$  sous les contraintes précédentes. En terme plus concrets, si l'on répète l'estimation sur de nombreuses configurations de krigeage identiques, la variance des erreurs est la plus faible possible.

## 3.2.3 Le Krigeage simple

Le type de krigeage dépend de la connaissance portant sur la moyenne  $\mu(\cdot)$  du modèle de base. Dans le cas du krigeage simple  $\mu$  est constante et connue. Soit  $\vec{x}_\alpha$  les positions des données,  $n$  le nombre de données et  $z(\vec{x}_\alpha)$  la variable aléatoire observée. Les positions  $\vec{x}_0$  correspondent aux endroits où la variable aléatoire  $z(\vec{x}_0)$  n'a pas été observée. La fonction aléatoire  $z(\vec{x})$  est

supposée être stationnaire de second ordre définie sur un domaine  $\mathcal{D}$ . On introduit également la fonction de covariance

$$C(\vec{h}) = \frac{1}{N(\vec{h})} \sum_{i=1}^{N(\vec{h})} \left( z(\vec{x}_i) z(\vec{x}_i + \vec{h}) \right) - \mu(\vec{x}_i) \mu(\vec{x}_i + \vec{h}) \quad (3.19)$$

avec  $N(\vec{h})$  le nombre de couples séparés de  $\vec{h}$ . L'objectif est de construire une moyenne pondérée afin de mener une estimation en un point  $\vec{x}_0$  en utilisant les informations aux points  $\vec{x}_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, n$ . Cette procédure d'estimation doit être basée sur la connaissance de la covariance entre les variables aléatoires aux positions impliquées. Cette procédure ressemble à une régression linéaire multiple transposée à un contexte spatial où les  $z(\vec{x}_\alpha)$  jouent le rôle des variables prédictives et  $z(\vec{x}_0)$  joue le rôle de variable prédite. Supposant que l'espérance  $\mu$  est constante sur tous le domaine, le krigeage simple a pour but d'estimer les écarts par rapport à cette valeur  $\mu$  que l'on connaît *a priori*. En analogie avec la régression linéaire multiple, voici l'estimation écrite en terme d'espérance pondérée

$$z^*(\vec{x}_0) = \mu + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (z(\vec{x}_\alpha) - \mu) \quad (3.20)$$

avec  $\lambda_\alpha$  étant les poids liés aux écarts  $z(\vec{x}_\alpha) - \mu$ . Notons que contrairement à la régression multiple l'espérance  $\mu$  est la même partout dans le domaine à cause de l'hypothèse de stationnarité. L'erreur d'estimation est la différence entre la valeur estimée et la valeur "vraie" en  $\vec{x}_0$

$$z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0) \quad (3.21)$$

L'estimateur est non-biaisé si l'espérance de l'erreur d'estimation est nulle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0)] &= \mu + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (\mathbb{E}[z(\vec{x}_\alpha)] - \mu) - \mathbb{E}[z(\vec{x}_0)] \\ &= \mu + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (\mu - \mu) - \mu \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

La variance de l'erreur d'estimation, aussi appelée la variance d'estimation  $\sigma_E^2$ , est exprimée de la manière suivante :

$$\sigma_E^2 = \text{var}(z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0)) = \mathbb{E} \left[ (z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0))^2 \right] \quad (3.23)$$

En développant cette expression on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_E^2 &= \mathbb{E} \left[ (z^*(\vec{x}_0))^2 + (z^*(\vec{x}_0))^2 - 2z^*(\vec{x}_0)z(\vec{x}_0) \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) + C(\vec{x}_0 - \vec{x}_0) - 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0)\end{aligned}\quad (3.24)$$

La covariance spatiale ne dépend que de la différence vectorielle entre les points du domaine, c'est pour cette raison que l'on peut écrire que  $\text{cov}[z(\vec{x}_\alpha)z(\vec{x}_\beta)] = C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta)$ . La variance d'estimation est minimum lorsque

$$\frac{\partial \sigma_E^2}{\partial \lambda_\alpha} = 0 \quad \text{pour } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

De manière explicite on obtient

$$2 \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) - 2C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0) = 0 \quad \text{pour } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

Il en vient le système d'équation de krigeage simple

$$\sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) = C(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0) \quad \text{pour } \alpha = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

La résolution du système d'équation mène aux valeurs optimales des poids  $\lambda_\beta$ . L'opération consistant à résoudre le système d'équation de krigeage simple peut se répéter pour des intervalles spatiaux réguliers déplaçant à chaque fois  $\vec{x}_0$ .

### 3.2.4 Le Krigeage ordinaire

Le krigeage simple est relativement exigeant, car il requiert la connaissance de la moyenne de la variable. Il est souvent préférable de considérer cette moyenne comme inconnue; cela permet d'assouplir l'hypothèse de stationnarité, car la moyenne peut varier d'une zone à l'autre du champ, pourvu qu'elle reste à peu près constante à l'échelle d'un voisinage de krigeage (quasi-stationnarité). Le krigeage ordinaire est le type de krigeage le plus utilisé, il sert à estimer une valeur à une position d'une région pour laquelle le variogramme est connu. Le variogramme est la fonction quantifiant la semi-variabilité moyenne des valeurs mises à disposition pour effectuer l'estimation. Son expression est la suivante

$$\gamma(\vec{h}) = \frac{1}{2} \text{var} \left( z(\vec{x} + \vec{h}) - z(\vec{x}) \right) \quad (3.28)$$

On appelle également variogramme expérimental le variogramme calculé à partir des données qui nous serviront à l'estimation, son expression est

$$\gamma_{exp}(\vec{h}) = \frac{1}{2N(\vec{h})} \sum_{i=1}^{N(\vec{h})} \left( z(\vec{x}_i + \vec{h}) - z(\vec{x}_i) \right)^2 \quad (3.29)$$

avec  $N(\vec{h})$  le nombre de couple de valeurs séparées de  $\vec{h}$ . Le variogramme est un élément clé de la méthode du krigeage, une partie de ce chapitre lui est réservée, elle se nomme l'analyse variographique (section 3.3). Le krigeage ordinaire évalue implicitement la moyenne dans un voisinage mobile en faisant l'hypothèse que l'on est dans le cas d'une stationnarité locale de second ordre. L'objectif est d'estimer la valeur en  $\vec{x}_0$  en utilisant les  $n$  valeurs voisines situées en  $\vec{x}_\alpha$  en les pondérant linéairement avec les poids  $\lambda_\alpha$

$$z^*(\vec{x}_0) = \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha z(\vec{x}_\alpha) \quad (3.30)$$

Une contrainte doit être posée sur les poids, leur somme doit être égale à 1 car dans le cas extrême où toutes les valeurs de données sont égales à une même constante la valeur estimée doit aussi être égale à cette constante. On suppose également que les données suivent une fonction aléatoire intrinsèque avec un variogramme  $\gamma(\vec{h})$ . La contrainte de non-biais est garantie par le fait que la somme des poids est égale à l'unité :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0)] &= \mathbb{E} \left[ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha z(\vec{x}_\alpha) - z(\vec{x}_0) \underbrace{\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha}_{=1} \right] \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \mathbb{E} [z(\vec{x}_\alpha) - z(\vec{x}_0)] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

parce que les espérances des incréments sont nulles. La variance d'estimation  $\sigma_E^2 = \text{var}(z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0))$  est la variance de la combinaison linéaire de

$$z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0) = \sum_{\alpha=1}^n z(\vec{x}_\alpha) - z(\vec{x}_0) = \sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha z(\vec{x}_\alpha) \quad (3.32)$$

avec un  $\lambda_0$  égal à -1 et

$$\sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha = 0 \quad (3.33)$$

La variance d'estimation est

$$\sigma_E^2 = \mathbb{E} \left[ (z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0))^2 \right] \quad (3.34)$$

L'objectif est d'avoir les valeurs de poids optimales qui vont minimiser la variance d'estimation tout en gardant la contrainte qui dit que leur somme est égale à 1. Ce problème concerne l'optimisation sous contrainte, elle fait appel à l'utilisation du multiplicateur de Lagrange [57, 58]. La fonction  $\Psi$  à minimiser devient

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \mathbb{E} \left[ (z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0))^2 \right] - 2m \left( \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha - 1 \right) \quad (3.35)$$

avec  $m$  le multiplicateur de Lagrange. La condition sur les poids implique que

$$\left[ (z^*(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_0))^2 \right] = - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta (z(\vec{x}_\alpha) - z(\vec{x}_\beta))^2 / 2 + \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha (z(\vec{x}_0) - z(\vec{x}_\alpha))^2 / 2 \quad (3.36)$$

La fonction à minimiser  $\Psi$  peut être réécrite en terme de variogramme

$$\Psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) + 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \gamma(\vec{x}_0 - \vec{x}_\alpha) - 2m \left( \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha - 1 \right) \quad (3.37)$$

En calculant la différentielle de  $\Psi$  par rapport à  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et en égalant les résultats à zéro, on trouve que les paramètres optimaux doivent satisfaire le système d'équations suivant

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) + m = \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0) & \text{pour } \alpha = 1, \dots, n \\ \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = 1 \end{cases} \quad (3.38)$$

On peut réécrire ces équations sous la forme du système matriciel de krigage ordinaire :

$$\begin{pmatrix} \gamma(\vec{x}_1 - \vec{x}_1) & \cdots & \gamma(\vec{x}_1 - \vec{x}_n) & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \gamma(\vec{x}_n - \vec{x}_1) & \cdots & \gamma(\vec{x}_n - \vec{x}_n) & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma(\vec{x}_1 - \vec{x}_0) \\ \vdots \\ \gamma(\vec{x}_n - \vec{x}_0) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Le membre de gauche du système décrit les différences entre les observations du processus physique tandis que le membre de droite montre les différences entre les observations du processus et les points d'estimations  $\vec{x}_0$ . L'expression finale de la variance d'estimation est la suivante

$$\sigma_E^2 = -\gamma(\vec{x}_0 - \vec{x}_0) - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) + 2 \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_0) \quad (3.40)$$

Le krigage ordinaire est un interpolateur exact dans le sens où si  $\vec{x}_0$  correspond à un point où on connaît la valeur du processus alors la valeur estimée sera identique à la valeur exacte du processus

$$z^*(\vec{x}_0) = z(\vec{x}_\alpha) \quad \text{si } \vec{x}_0 = \vec{x}_\alpha \quad (3.41)$$

### 3.2.5 Le Krigage universel

Le krigage peut être généralisé au cadre non-stationnaire, en particulier lorsque l'espérance de la fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  varie dans l'espace, ce qui traduit la "tendance" ou "dérive" de la variable régionalisée  $z(\vec{x})$  [57, 69, 73]. Le principe consiste à décomposer la fonction aléatoire  $Z(\vec{x})$  non-stationnaire en une somme de la tendance déterministe et d'un résidu aléatoire. Le modèle auquel répond le krigage universel est le suivant

$$Z(\vec{x}) = \mu(\vec{x}) + Y(\vec{x}) \quad (3.42)$$

avec  $Y(\vec{x})$  une fonction aléatoire stationnaire d'ordre deux. On a alors

$$E[Z(\vec{x})] = \mu(\vec{x}) \quad (3.43)$$

Dans le krigage universel l'espérance ou la tendance  $\mu(\vec{x})$  n'est plus constante mais est définie comme étant une combinaison linéaire de fonctions connues.

$$\mu(\vec{x}) = \sum_{l=0}^L a_l f_l(\vec{x}) \quad (3.44)$$

où les coefficients  $a_l$  sont non nuls et où  $f_l$  sont des fonctions connues. La fonction  $f_0(\vec{x})$  est définie comme constante

$$f_0(\vec{x}) = 1 \quad (3.45)$$

Pour l'estimation on utilise la combinaison linéaire classique

$$Z^*(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(\vec{x}_i) \quad (3.46)$$

L'estimation se fait sans biais

$$E[Z(\vec{x}_0) - Z^*(\vec{x}_0)] = 0 \quad (3.47)$$

il en vient

$$\mu(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu(\vec{x}_i) = 0 \quad (3.48)$$

ainsi

$$\sum_{l=0}^L a_l \left( f_l(\vec{x}_0) - \sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(x_i) \right) = 0 \quad (3.49)$$

Les contraintes sur les poids  $\lambda_i$  émergent de l'équation précédente

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(\vec{x}_i) = f_l(\vec{x}_0) \text{ pour } l = 0, \dots, L \quad (3.50)$$

Pour la fonction constante  $f_0(\vec{x})$  on utilise la condition usuelle

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (3.51)$$

En développant l'expression de la variance d'estimation et en introduisant les paramètres de Lagrange  $m_l$  pour sa minimisation, on arrive au système de krigeage universel suivant [57]

$$\begin{cases} \sum_{\beta=1}^n \lambda_{\beta} C(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) - \sum_{l=0}^L m_l f_l(\vec{x}_{\alpha}) = C(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_0) & \text{pour } \alpha = 1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_i f_l(\vec{x}_i) = f_l(\vec{x}_0) & \text{pour } l = 0, \dots, L \end{cases} \quad (3.52)$$

La présentation des différents types de krigeage montre qu'il est nécessaire de connaître la variabilité des données mises à disposition. Cette variabilité est quantifiée par les fonctions de covariance ou de variogramme. Dans notre cas, les données sont les valeurs de *DAS* issues d'une exposition d'un corps entier debout à une onde plane polarisée verticalement ou horizontalement en fonction des paramètres "spatiaux" que sont les angles d'incidences sphériques. Ces valeurs de *DAS* sont un processus physique qui suit des fonctions continues comme on peut le constater dans [10, 37, 41]. Au vue de la quasi-stationnarité locale du *DAS*, il est possible d'utiliser le type de krigeage le plus populaire, à savoir le krigeage ordinaire. Sur base de la connaissance de certaines données il est nécessaire de modéliser le variogramme. Cette étape est une étape-clé dans la mise en œuvre du krigeage et s'appelle l'analyse variographique.

### 3.3 L'analyse variographique

#### 3.3.1 Variogramme expérimental

La variabilité de la variable régionalisée  $z(\vec{x})$  se mesure par le calcul, pour différentes distances, des dissemblances entre des paires de données  $z_{\alpha}$  et  $z_{\beta}$  situées respectivement en  $\vec{x}_{\alpha}$  et  $\vec{x}_{\beta}$ , dans un domaine  $\mathcal{D}$ . La mesure de la dissemblance entre deux données, que l'on nommera

$g_{\alpha\beta}$ , est la moitié du carré de la différence entre ces deux valeurs :

$$g_{\alpha\beta} = \frac{(z(\vec{x}_\alpha) - z(\vec{x}_\beta))^2}{2} \quad (3.53)$$

Les deux points  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta$  peuvent définir un vecteur  $\vec{h} = \vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta$  comme on peut le voir sur la figure 3.1. La dissemblance est donc fonction de la distance entre les deux points de données et

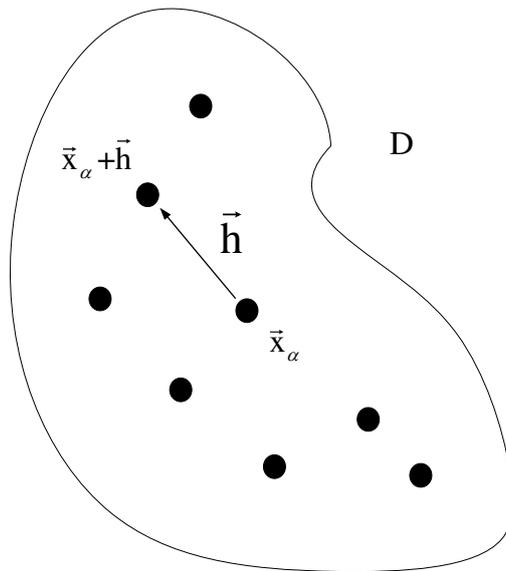


FIGURE 3.1 – Un vecteur  $\vec{h}$  liant  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta = \vec{x}_\alpha + \vec{h}$ .

l'orientation décrite par le vecteur  $\vec{h}$

$$g(\vec{h}) = \frac{1}{2} \left( z(\vec{x}_\alpha + \vec{h}) - z(\vec{x}_\alpha) \right)^2 \quad (3.54)$$

Les dissemblances étant une différence au carré, le signe du vecteur  $\vec{h}$ , i.e. l'ordre dans lequel les points  $\vec{x}_\alpha$  et  $\vec{x}_\beta$  sont considérés ne rentrent pas en jeu. La dissemblance est symétrique par rapport à  $\vec{h}$ . Ainsi, les dissemblances sont représentées graphiquement en fonction de la norme du vecteur  $\vec{h}$ . En utilisant toutes les paires d'un jeu de donnée on peut tracer les dissemblances en fonction de la distance  $h$ , c'est ce qu'on appelle le nuage de dissemblance (dans la littérature on peut rencontrer le terme de *variogram cloud*). En général, le nuage de dissemblance croît avec la distance puisque les données proches géométriquement tendent à être similaires.

La valeur moyenne des dissemblances peut être calculée pour un vecteur  $\vec{h}$  en groupant les  $n_c$  paires de points séparés d'un vecteur  $\vec{h}$ . La dissemblance moyenne en fonction de  $\vec{h}$  est la valeur de ce qu'on appelle le variogramme expérimental :

$$\gamma_{exp}(\vec{h}) = \frac{1}{2n_c} \sum_{\alpha=1}^{n_c} \left( z(\vec{x}_\alpha + \vec{h}) - z(\vec{x}_\alpha) \right)^2 \quad (3.55)$$

En pratique le variogramme expérimental est habituellement calculé en utilisant des vecteurs  $\vec{h}$  dont le module est au maximum la moitié de la taille du domaine  $\mathcal{D}$ . Le variogramme croît lorsque la distance  $h$  grandit et il atteint parfois une valeur maximale appelée palier qui est égale à la variance des données. Dans le cas d'un changement abrupt de pente à une distance particulière, cela signifie qu'un niveau intermédiaire de variation a été atteint à cette distance. Le comportement à une faible distance est également important, notamment, proche de l'origine du variogramme car il indique le type de continuité de la variable régionalisée : dérivable, continue mais non dérivable, ou encore non-continue. Dans ce dernier cas, lorsque le variogramme n'est pas nul à l'origine, nous sommes en présence d'un effet de pépité qui signifie que les valeurs de la variable change de manière abrupte sur une très petite distance.

Le variogramme expérimental est un outil convenable pour l'analyse de données spatiales car il est basé sur la mesure de dissemblance. Cependant, le variogramme expérimental ne peut être utilisé pour l'estimation, il est nécessaire de lui ajuster un variogramme théorique, aussi appelé modèle de variogramme. Le modèle de variogramme garantit que la combinaison linéaire des données soit positive. De plus, si les valeurs de variogramme expérimental étaient prises pour résoudre le système de krigeage, cela pourrait mener à des valeurs négatives de variance d'estimation comme cela est démontré dans [57]. Avant de présenter les modèles de variogramme de la littérature, il est important de rappeler quelques pré-requis théoriques.

### 3.3.2 Théorie du modèle de variogramme

Le modèle de variogramme doit respecter certaines règles, pour cela, on va se placer dans le cadre le moins restrictif, le cadre intrinsèque. On suppose que  $Z(\vec{x})$  est une fonction aléatoire intrinsèque, c'est-à-dire que ses accroissements sont stationnaires d'ordre deux, la covariance peut ne pas exister; seul le variogramme est défini avec certitude. C'est pourquoi, dans les applications pratiques, on préfère souvent utiliser le variogramme, qui est un outil plus général

que la covariance [57].

La valeur du variogramme à l'origine est nulle par définition  $\gamma(0) = 0$ . Les valeurs du variogramme sont positives  $\gamma(\vec{h}) \geq 0$ . Dans le cas où seule l'hypothèse intrinsèque est vérifiée, le variogramme  $\gamma(\vec{h})$  n'est pas borné et augmente indéfiniment lorsque  $|\vec{h}|$  augmente. On montre cependant qu'il croît moins vite qu'une parabole :  $\gamma(\vec{h})/|\vec{h}|^2$  tend vers 0 quand  $|\vec{h}|$  tend vers l'infini.

Du point de vue mathématique, le variogramme est utilisé pour calculer la variance des combinaisons linéaires autorisées, c'est-à-dire, telles que la somme des poids est nulle :

$$\text{var} \left( \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} z(\vec{x}_{\alpha}) \right) = - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \gamma(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) \geq 0 \quad \text{si} \quad \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} = 0 \quad (3.56)$$

Cette condition impose que le variogramme est une fonction du type négatif conditionnel. L'adjectif conditionnel se réfère au fait que l'inégalité n'est valable que sous la condition que la somme des poids est nulle. Pour en comprendre la raison, il suffit de développer la variance de la combinaison linéaire en prenant la variable régionalisée en lieu et place de la fonction aléatoire. L'astuce est d'ajouter la valeur  $z(0)$  afin de faire apparaître les incréments.

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} z(\vec{x}_{\alpha}) \right) &= \text{var} \left( -z(0) \underbrace{\sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha}}_0 + \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} z(\vec{x}_{\alpha}) \right) \\ &= \text{var} \left[ \sum_{\alpha=0}^n \lambda_{\alpha} (z(\vec{x}_{\alpha}) - z(0)) \right] \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} \text{E} [(z(\vec{x}_{\alpha}) - z(0)) \cdot (z(\vec{x}_{\beta}) - z(0))] \\ &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_{\alpha} \lambda_{\beta} C_I(\vec{x}_{\alpha}, \vec{x}_{\beta}) \end{aligned} \quad (3.57)$$

où  $C_I(\vec{x}_{\alpha}, \vec{x}_{\beta})$  est la covariance des incréments formée par l'utilisation de la variable additionnelle  $z(0)$ . On introduit également la variable additionnelle  $z(0)$  dans l'expression du variogramme

$$\begin{aligned} \gamma(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) &= \frac{1}{2} \text{E} [(z(\vec{x}_{\alpha}) + z(0) - z(\vec{x}_{\beta}) - z(0))^2] \\ &= \frac{1}{2} (2\gamma(\vec{x}_{\alpha}) + 2\gamma(\vec{x}_{\beta}) - 2C_I(\vec{x}_{\alpha}, \vec{x}_{\beta})) \end{aligned} \quad (3.58)$$

il en vient

$$C_I(\vec{x}_{\alpha}, \vec{x}_{\beta}) = \gamma(\vec{x}_{\alpha}) + \gamma(\vec{x}_{\beta}) - \gamma(\vec{x}_{\alpha} - \vec{x}_{\beta}) \quad (3.59)$$

Cette covariance des incréments inclut deux termes qui sont non-stationnaires  $\gamma(\vec{x}_\alpha)$  et  $\gamma(\vec{x}_\beta)$ . En revenant au calcul de la variance de la combinaison linéaire, on peut voir que les deux termes non-stationnaires s'annulent par la condition sur la somme des poids.

$$\begin{aligned}
\text{var} \left( \sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha z(\vec{x}_\alpha) \right) &= \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta C_I(\vec{x}_\alpha, \vec{x}_\beta) \\
&= \underbrace{\sum_{\beta=0}^n \lambda_\beta \sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha \gamma(\vec{x}_\alpha)}_0 + \underbrace{\sum_{\alpha=0}^n \lambda_\alpha \sum_{\beta=0}^n \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\beta)}_0 - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) \\
&= - \sum_{\alpha=0}^n \sum_{\beta=0}^n \lambda_\alpha \lambda_\beta \gamma(\vec{x}_\alpha - \vec{x}_\beta) \quad \text{pour} \quad \sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha = \sum_{\beta=1}^n \lambda_\beta = 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

Lorsque l'on utilise la combinaison linéaire de variables aléatoires, le variogramme ne peut être utilisé seulement avec une condition sur les poids garantissant son existence. En particulier, le variogramme ne peut pas être utilisé dans le krigeage simple. Les autres formes de krigeage, notamment l'ordinaire, nécessite l'utilisation du variogramme qui couvre un plus large éventail de phénomènes que la fonction de covariance [57].

### 3.3.3 Les modèles de variogramme

Comme cela a été énoncé, une fois le variogramme expérimental calculé, il est nécessaire de lui ajuster un modèle de variogramme. La littérature [57, 58, 73] fournit un certain nombre de modèles paramétriques de variogramme. De manière non-exhaustive en voici quelques exemples. Modèle linéaire (valide dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + b_l |\vec{h}|, & \vec{h} \neq \vec{0}, \end{cases} \tag{3.61}$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$  et  $b_l \geq 0$ .

Modèle sphérique (valide dans  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + c_s \left\{ (3/2)(|\vec{h}|/a_s) - (1/2)(|\vec{h}|/a_s)^3 \right\}, & \vec{0} < \vec{h} \leq a_s, \\ c_0 + c_s, & |\vec{h}| \geq a_s, \end{cases} \tag{3.62}$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$ ,  $c_s \geq 0$  et  $a_s \geq 0$ .

Modèle exponentiel (valide dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + c_e \{1 - \exp(-|\vec{h}| / a_e)\}, & \vec{h} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (3.63)$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$ ,  $c_e \geq 0$  et  $a_e \geq 0$ .

Modèle gaussien (valide dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + c_g \{1 - \exp(-|\vec{h}|^2 / a_g^2)\}, & \vec{h} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (3.64)$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$ ,  $c_g \geq 0$  et  $a_g \geq 0$ .

Modèle quadratique (valide dans  $\mathbb{R}^d, d \geq 1$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + c_r |\vec{h}|^2 / (1 + |\vec{h}|^2 / a_r), & \vec{h} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (3.65)$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$ ,  $c_r \geq 0$  et  $a_r \geq 0$ .

Modèle avec effet de trou (valide dans  $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ ) :

$$\gamma(\vec{h}) = \begin{cases} 0, & \vec{h} = \vec{0}, \\ c_0 + c_t \{1 - a_t \sin(|\vec{h}| / a_t) / |\vec{h}|\}, & \vec{h} \neq \vec{0}, \end{cases} \quad (3.66)$$

avec les paramètres constants  $c_0 \geq 0$ ,  $c_t \geq 0$  et  $a_t \geq 0$ .

La figure 3.2 présente les graphes des modèles de variogramme exposés précédemment. En général, le variogramme atteint une valeur maximale lorsque  $|\vec{h}| \rightarrow \infty$ , cette valeur maximale est appelée palier. On nomme portée la distance à partir de laquelle le variogramme atteint, son palier. La portée pratique (parfois facteur d'échelle) est la distance à partir de laquelle le variogramme reste dans un intervalle de 5% à 10% du palier.

### 3.3.4 Anisotropie

Le calcul du variogramme expérimental peut parfois révéler des comportements bien différents selon la direction dans laquelle le calcul a été fait. Ce comportement est appelé "l'anisotropie" du variogramme. En général, les comportements anisotropes sont détectés en inspectant les variogrammes expérimentaux dans différentes directions et sont inclus dans le modèle. Il existe deux types d'anisotropie : géométrique ou zonale [69].

L'anisotropie géométrique est le cas où on est en présence de portées différentes dans les différentes directions de l'espace mais où le palier est le même dans toutes les directions de l'espace.

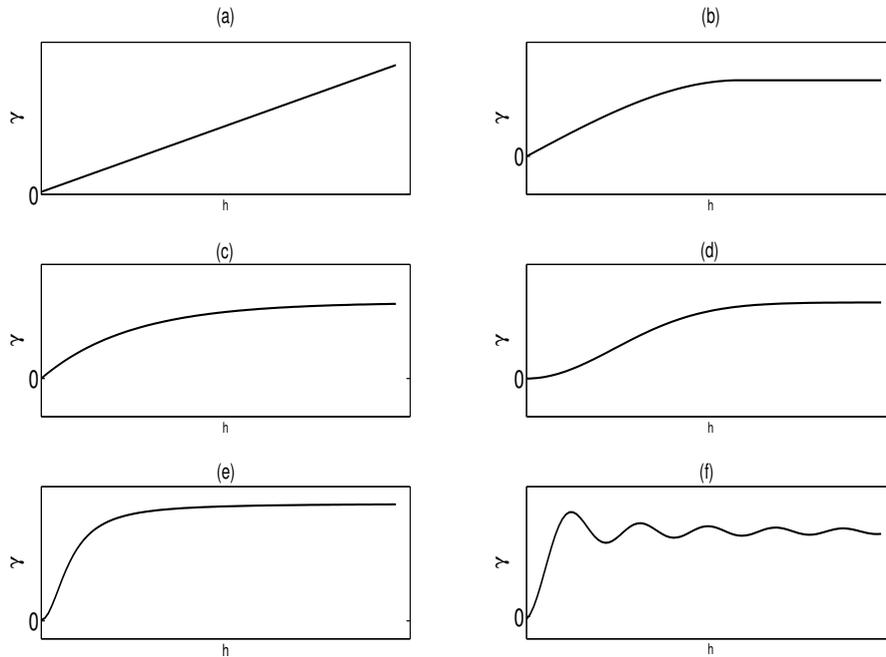


FIGURE 3.2 – Modèles de variogramme en fonction de  $h = |\vec{h}|$  : (a) Linéaire, (b) Sphérique, (c) Exponentiel, (d) Gaussien, (e) Quadratique, (f) Effet de trou.

Cette anisotropie peut être corrigée par une transformation des coordonnées spatiales, une rotation puis une homothétie, pour revenir finalement à un modèle de variogramme isotrope [58, 69]. Les lignes d'isovaleurs de la carte variographique forment des cercles concentriques dans le cas d'un variogramme bidimensionnel. Le variogramme peut s'écrire sous la forme :

$$\gamma(\vec{h}) = \gamma_0(|\mathbf{A}\vec{h}|) \quad (3.67)$$

où  $\gamma_0$  est un variogramme isotrope et où  $\mathbf{A}$  est une matrice de rotation-homothétie (elle dépend d'un angle et d'un rapport d'excentricité dans le cas bidimensionnel). L'anisotropie zonale est définie par le fait que les portées soient les mêmes dans toutes les directions mais que les paliers atteints soient différents en fonction de la direction. Dans [79], la question de la modélisation du variogramme dans le cas d'une anisotropie zonale a été étudiée, notamment les problèmes d'indéterminations que peuvent induire certains modèles lors de la résolution du système de krigeage. Supposons une fonction aléatoire repérée par des coordonnées bidimensionnelles telle

que  $\vec{h} = (x, y)'$ . D'après [79], la définition d'un variogramme de la forme

$$\gamma(x, y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y) \quad (3.68)$$

mène à la formation d'un variogramme non valide pour le krigeage, c'est-à-dire que  $\gamma(x, y)$  n'est pas une fonction du type négatif conditionnel et qu'elle impliquera un système de krigeage avec des matrices non-inversibles. Dans [73], il est également recommandé de ne pas complètement séparer les coordonnées spatiales dont dépendent la variable aléatoire comme à l'équation 3.68. Ce type de variogramme serait recommandé dans le très exceptionnel cas où  $z(x, y) = z_1(x) + z_2(y)$ . Il est plutôt recommandé d'utiliser un modèle de variogramme de la forme suivante :

$$\gamma(x, y) = \gamma_1(x) + \gamma_2(y) + \gamma_3(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (3.69)$$

L'analyse variographique est achevée par l'ajustement d'un modèle de variogramme au variogramme expérimental. Plusieurs techniques et approches existent, celle qui a été utilisée durant la thèse est expliquée ci-après.

### 3.3.5 Ajuster un modèle de variogramme

La grande majorité des variogrammes sont non-linéaires et présentent des phénomènes d'anisotropie, de plus, les variogrammes expérimentaux font apparaître d'importantes fluctuations. Dans ce contexte, l'ajustement d'un modèle de variogramme ne peut se faire de manière complètement automatique. Évidemment, cette tâche est grandement facilitée par l'existence d'un grand nombre de logiciels équipés d'algorithmes d'ajustement de modèles, cependant, c'est au statisticien de choisir le modèle (type de variogramme, type d'anisotropie) et les valeurs initiales de ses paramètres. Le choix du modèle de variogramme à ajuster repose sur une comparaison visuelle entre le variogramme expérimental obtenu et les modèles de variogramme de littérature [58, 73].

Une méthode utilisée pour ajuster un modèle non-linéaire est la méthode de Levenberg-Marquardt [80, 81]. Sur base d'un variogramme expérimental isotrope  $\gamma_{exp}(h)$  auquel on va ajuster un modèle de variogramme  $\gamma(h, \vec{\beta})$ , avec  $\vec{\beta}$  le vecteur des paramètres du modèle à optimiser. La méthode de Levenberg-Marquardt est une méthode itérative c'est à dire qu'il faut donner des valeurs initiales aux paramètres  $\vec{\beta}$ . L'algorithme va optimiser la fonction

$$S(\vec{\beta}) = \sum_{i=1}^m \left( \gamma_{exp}(h_i) - \gamma(h_i, \vec{\beta}) \right)^2 \quad (3.70)$$

de telle sorte que  $S(\vec{\beta})$  devienne minimum avec  $m$  étant le nombre de points du variogramme expérimental. À chaque itération le vecteur de paramètres  $\vec{\beta}$  est remplacé par une nouvelles estimation de ces paramètres  $\vec{\beta} + \vec{\delta}$ . Afin de déterminer  $\vec{\delta}$ , le variogramme  $\gamma(h_i, \vec{\beta} + \vec{\delta})$  est

approximé par sa linéarisation :

$$\gamma(h_i, \vec{\beta} + \vec{\delta}) \approx \gamma(h_i, \vec{\beta}) + \vec{J}_i \cdot \vec{\delta} \quad (3.71)$$

où  $\vec{J}_i = \overrightarrow{\text{grad}}(\gamma(h_i, \vec{\beta}))$  est le gradient du variogramme par rapport aux paramètres  $\vec{\beta}$ . La fonction  $S(\vec{\beta})$  est minimum lorsque son gradient par rapport à  $\vec{\delta}$  est nul. L'approximation de premier ordre de la fonction  $\gamma(h_i, \vec{\beta} + \vec{\delta})$  donne

$$S(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \approx \sum_{i=1}^m \left( \gamma_{exp}(h_i) - \gamma(h_i, \vec{\beta}) - \vec{J}_i' \cdot \vec{\delta} \right)^2 \quad (3.72)$$

En écriture matricielle

$$S(\vec{\beta} + \vec{\delta}) \approx \|\gamma_{exp}^{\vec{}} - \vec{\gamma}(\vec{\beta}) - \mathbf{J}\vec{\delta}\|^2 \quad (3.73)$$

On prend la dérivée par rapport à  $\vec{\delta}$  et la nullité de la dérivée implique

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \vec{\delta} = \mathbf{J}^T \left[ \gamma_{exp}^{\vec{}} - \vec{\gamma}(\vec{\beta}) \right] \quad (3.74)$$

avec  $\mathbf{J}$  la matrice jacobienne dont la  $i$ -ème colonne est égale à  $J_i$  et où  $\gamma_{exp}^{\vec{}}$  et  $\vec{\gamma}$  sont les vecteurs variogramme expérimental et modèle de variogramme dont les  $i$ -ème composantes sont  $\gamma_{exp}(h_i)$  et  $\gamma(h_i, \vec{\beta})$ . Le système matriciel permet d'obtenir les valeurs de  $\vec{\delta}$  par une inversion matricielle. Dans l'inversion matricielle, tout va dépendre du rapport entre la valeur propre la plus grande en norme, et la valeur propre la plus petite; ce rapport, appelé conditionnement de matrice, va concrètement refléter la robustesse de l'algorithme face au bruit. Le point essentiel de l'algorithme de Levenberg-Marquardt est d'approcher cette équation, en l'amortissant un peu. On utilise alors un facteur d'amortissement  $\lambda$  qui permet de contrôler le critère de convergence et en même temps de sortir des cas où la matrice est non-inversible [80]. L'algorithme de Levenberg-Marquardt s'écrit

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \lambda \text{diag}(\mathbf{J}^T \mathbf{J})) \vec{\delta} = \mathbf{J}^T \left[ \gamma_{exp}^{\vec{}} - \vec{\gamma}(\vec{\beta}) \right] \quad (3.75)$$

### 3.4 Les échantillons : les valeurs de *DAS* calculées par FDTD

Dans le chapitre 2, il a été montré qu'il est nécessaire d'avoir les valeurs de *DAS* corps entier issus d'une exposition à une onde plane sinusoïdale pour tous les angles d'incidences sphériques et ceci pour les polarisations verticale et horizontale. Les longs temps de calcul ne permettant pas de lancer un tel nombre de simulations FDTD, nous avons choisi de lancer un nombre raisonnable de simulations et sur base de ceux-ci d'utiliser la méthode d'interpolation du krigeage ordinaire afin d'obtenir les valeurs de *DAS* pour tous les angles d'incidences.

Durant la thèse, deux modèles de corps d'enfant ont été utilisées, Roberta une fille de 5 ans et

Thelonious un garçon de 6 ans [33]. L'intérêt d'utiliser deux modèles de corps différents est de tester la méthode du krigeage en suivant les étapes suivantes :

- en ajustant au variogramme expérimental, obtenu à l'aide des résultats de *DAS* issus des calculs de FDTD de Roberta, le meilleur modèle de variogramme,
- effectuer des estimations grâce à ce modèle de variogramme en changeant le type de voisinage,
- puis de valider ce modèle de variogramme sur les résultats de *DAS* issus des calculs de FDTD sur Thelonious et donc à terme de valider la méthode de krigeage ordinaire pour la dosimétrie d'un corps humain entier.

Les modèles de corps d'enfant utilisés sont composés respectivement de 66 tissus pour Roberta et de 76 tissus pour Thelonious. Roberta mesure 1.09m pèse 17.8kg et Thelonious mesure 1.17m et pèse 19.3kg. Ils ont été maillés au millimètre afin de respecter la règle selon laquelle la taille des mailles doit être inférieure à  $\lambda/10$  avec,  $\lambda$ , la longueur d'onde dans le matériau. Dans le vide, à la fréquence de 2.45 GHz cette longueur d'onde étant de 12.24 cm, le choix a été fait d'utiliser des mailles d'un millimètre d'arête pour respecter le critère de convergence dans tous les tissus. Le code FDTD utilisé est un code en langage C non-parallélisable, les simulations ont été effectués sur le serveur de calcul *Hydra* de l'Université Libre de Bruxelles. Les modèles de corps ont été soumis à une onde plane sinusoïdale dont l'angle d'incidence varie de la manière suivante, l'angle d'élévation

$$\theta = 0^\circ, 10^\circ, \dots 180^\circ \quad (3.76)$$

et l'angle azimutal

$$\phi = 0^\circ, 10^\circ, \dots 350^\circ \quad (3.77)$$

pour une onde polarisée verticalement (selon  $\theta$ ) et horizontalement (selon  $\phi$ ). Pour une polarisation, cela correspond à  $19 \times 36 = 684$  simulations par modèle de corps. Les figures 3.3 et 3.4 représentent les angles d'incidence sphériques ( $\theta, \phi$ ) superposés au corps de Roberta. L'origine du repère est fixé dans la réalité exactement au milieu du corps de Roberta, position calculée en prenant les moitiés des dimensions en  $x, y$  et  $z$  du corps de Roberta.

La raison pour laquelle l'angle azimutal va seulement jusqu'à  $350^\circ$  est que  $360^\circ$  est le même angle azimutal que  $0^\circ$ . L'amplitude de cette onde est d'1V/m. Dans notre code FDTD, la source de cette onde a été définie à l'aide du principe d'équivalence. La méthode FDTD est décrite en annexe, en fin du manuscrit. Les figures 3.5 et 3.6 présentent des coupes dans les plans  $Oyz$  et  $Oxz$  du modèle de corps de Roberta exposé à une onde plane incidente dont l'angle d'incidence est ( $\theta = 90^\circ, \phi = 180^\circ$ ) et polarisée verticalement. Ces résultats d'expositions montrent le niveau logarithmique du module carré de la composante en  $z$  du champ électrique ( $= 20 \log |E_z|$ ).

Les figures 3.7 à 3.10 présentent les résultats de *DAS* en fonction de ( $\theta, \phi$ ) pour les polarisations selon  $\theta$  et  $\phi$  de Roberta et Thelonious. Pour un besoin de clarté, ces résultats ont été tracés sous forme de surfaces colorées, cependant, il est évident que les valeurs de *DAS* sont en réalité un nuage de points situés aux intersections des courbes noires sur les figures 3.7 à 3.10.

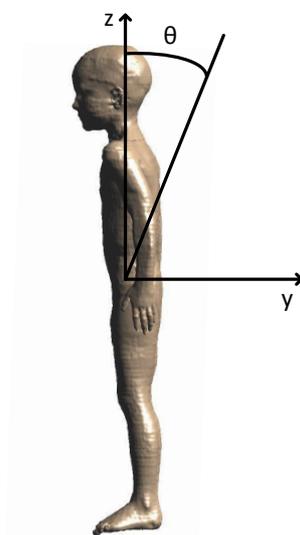


FIGURE 3.3 – Angle d’élévation par rapport au corps de Roberta vu sur le coté gauche.

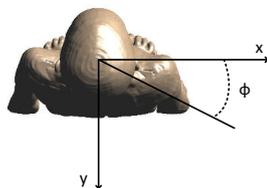


FIGURE 3.4 – Angle azimutale par rapport au corps de Roberta vu de haut.

### 3.5 Estimation par la méthode du krigeage ordinaire

Sur base des résultats de simulations présentés, les variogrammes expérimentaux des résultats de Roberta sont calculés de tel sorte que l’on puisse leur ajuster un modèle de variogramme. L’estimation sera alors menée sur les résultats de Roberta. Puis la validation de la méthode sera faite sur les résultats de Thelonious en utilisant le même modèle de variogramme.

Avant de se lancer dans le calcul du variogramme expérimental, une réflexion doit être menée sur la définition des coordonnées du vecteur, précédemment appelé  $\vec{h}$ , en fonction duquel on va calculer les variogrammes expérimentaux.

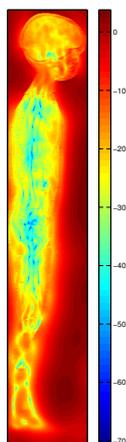


FIGURE 3.5 – Coupe dans le plan  $Oyz$  de Roberta exposée à une onde plane.

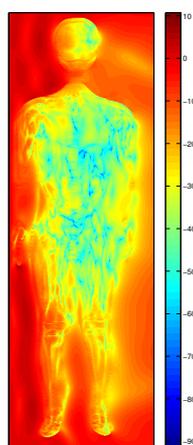
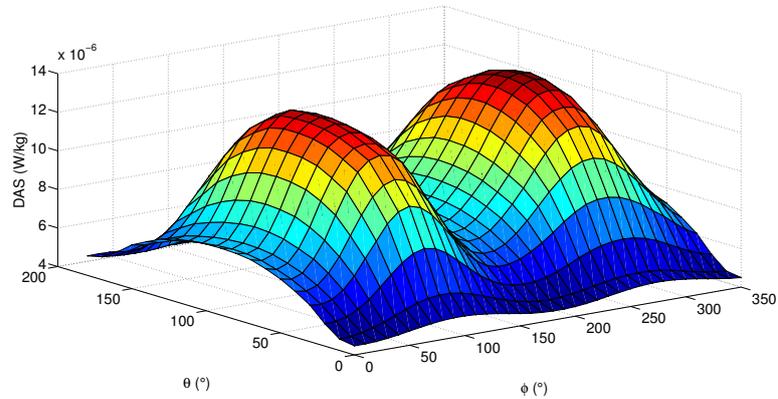
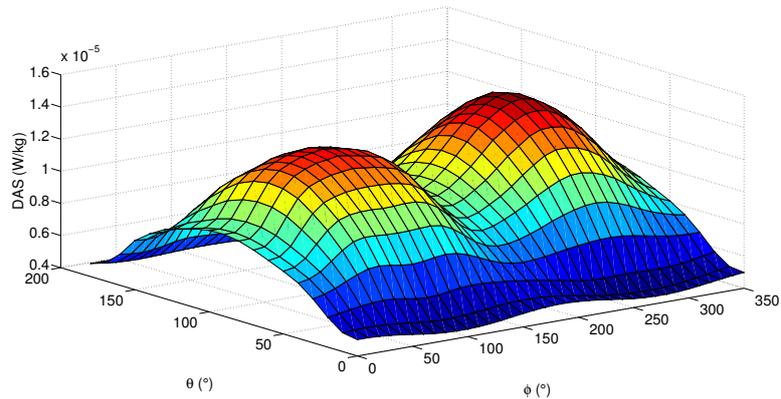


FIGURE 3.6 – Coupe dans le plan  $Oxz$  de Roberta exposée à une onde plane.

### 3.5.1 Les coordonnées des variogrammes expérimentaux

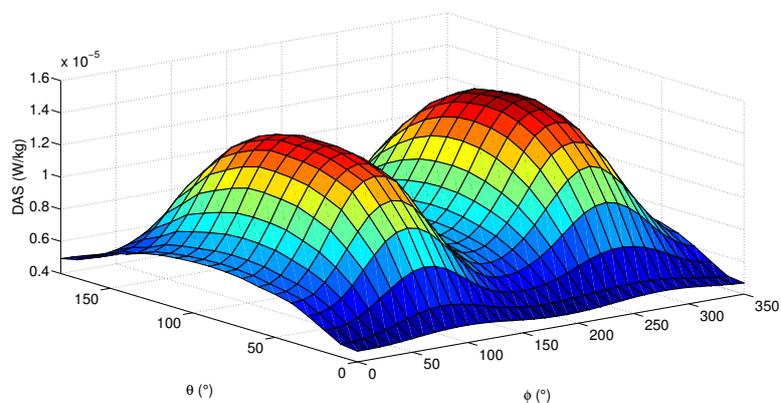
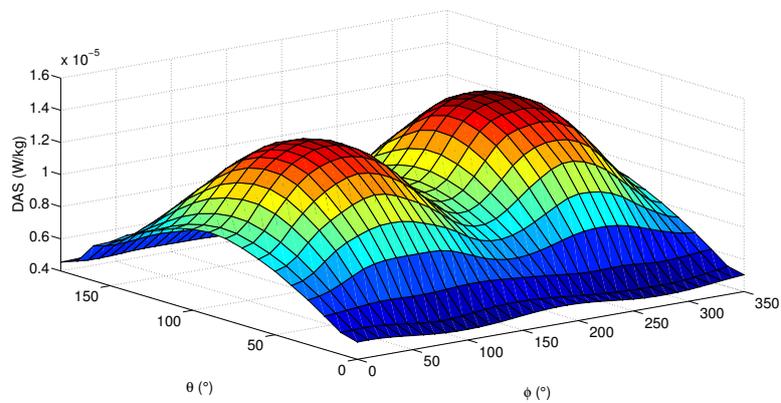
Les valeurs de  $DAS$  dépendent des angles d'incidence sphériques de l'onde plane arrivant sur le corps. Dès lors, deux options s'offrent à nous quant à la définition du vecteur  $\vec{h}$  : définir le vecteur comme étant la longueur d'arc vectorisée la plus courte sur la sphère ou bien la droite la plus courte vectorisée sur la sphère projetée sur un plan. La longueur d'arc la plus courte sur la

FIGURE 3.7 – Valeurs de  $DAS$  de Roberta, polarisation en  $\theta$ , calculées par FDTDFIGURE 3.8 – Valeurs de  $DAS$  de Roberta, polarisation en  $\phi$ , calculées par FDTD

sphère, aussi appelée distance orthodromique, est le chemin "équatorial" entre deux points du globe (en jaune sur la figure 3.11). Sur la sphère de rayon  $r$ , entre deux points  $A$  et  $B$  repérés par leur angles sphériques, elle est égale à

$$d_o = r \arccos(\sin \theta_A \sin \theta_B + \cos \theta_A \cos \theta_B \sin(\phi_B - \phi_A)) \quad (3.78)$$

La droite la plus courte sur une sphère projetée sur un plan est aussi appelée la distance loxodromique, elle représente le tracé d'une droite entre deux points du globe sur la Terre en projection de Mercator (en rouge sur la figure 3.11). La distance loxodromique, quant à elle,

FIGURE 3.9 – Valeurs de  $DAS$  de Thelonious, polarisation en  $\theta$ , calculées par FDTDFIGURE 3.10 – Valeurs de  $DAS$  de Thelonious, polarisation en  $\phi$ , calculées par FDTD

est obtenue directement à partir de l'expression suivante

$$d_l = r\sqrt{(\phi_B - \phi_A)^2 + (\theta_B - \theta_A)^2} \quad (3.79)$$

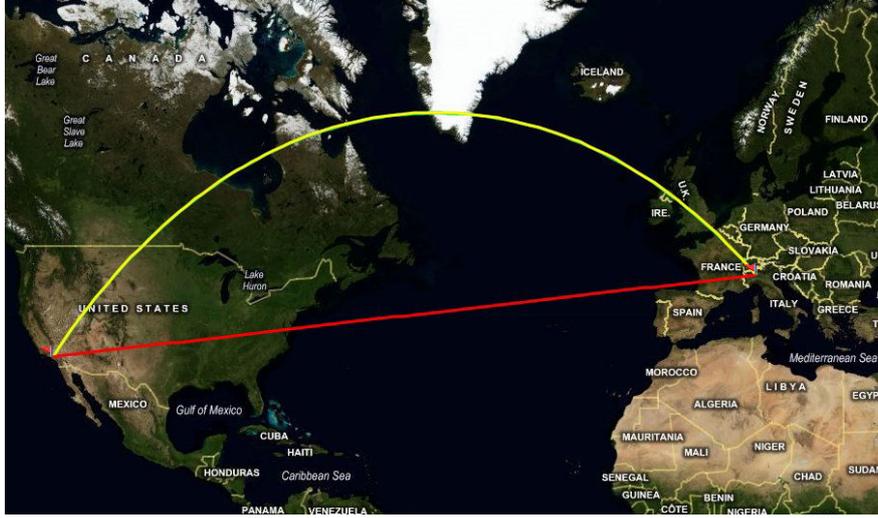


FIGURE 3.11 – Distance loxodromique et orthodromique entre Milan et Los Angeles.

L'utilisation de la longueur d'arc pour calculer le variogramme expérimental impliquerait qu'il faille définir une sphère qui viendrait englober le corps. Cependant, dans ce cas, pour l'angle d'élévation  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 180^\circ$ ), toutes les valeurs de  $DAS$  pour tout  $\phi$  seraient confondues, elles correspondraient au même point sur la sphère, alors qu'en prenant la sphère projetée sur un plan on prend en compte la variabilité selon  $\phi$  pour  $\theta = 0^\circ$  (ou  $\theta = 180^\circ$ ). Dès lors, durant notre étude les coordonnées angulaires seront considérées comme des coordonnées d'un repère, en d'autres termes, nous considérons la sphère comme étant plane. Le vecteur  $\vec{h}$  s'exprime de la manière suivante

$$\vec{h} = r \left( \Delta\theta \vec{1}_\theta + \Delta\phi \vec{1}_\phi \right) \quad (3.80)$$

où  $\Delta\theta = \theta_B - \theta_A$  et  $\Delta\phi = \phi_B - \phi_A$  sont définis à partir des coordonnées des points  $A(\theta_A, \phi_A)$  et  $B(\theta_B, \phi_B)$  et  $r$  est le rayon de la sphère.

### 3.5.2 Les variogrammes expérimentaux

Les variogrammes expérimentaux se calculent alors à partir de l'expression suivante :

$$\gamma_{exp}(\Delta\theta, \Delta\phi) = \frac{1}{2N(\Delta\theta, \Delta\phi)} \sum_{i=1}^{N(\Delta\theta, \Delta\phi)} (DAS(\theta_i, \phi_i) - DAS(\theta_i + \Delta\theta, \phi_i + \Delta\phi))^2 \quad (3.81)$$

avec  $N(\Delta\theta, \Delta\phi)$  le nombre de couple de valeurs de  $DAS$  séparées de  $(\Delta\theta, \Delta\phi)$ . Dans un premier temps, les variogrammes expérimentaux sont calculés en prenant  $\Delta\theta \in [-180^\circ, 180^\circ]$  et  $\Delta\phi \in [-360^\circ, 360^\circ]$  afin de détecter tout comportement anisotrope et vérifier que  $\gamma_{exp}(-\vec{h}) = \gamma_{exp}(\vec{h})$ . Les résultats des variogrammes expérimentaux de la polarisation  $\theta$  et de la polarisation  $\phi$  de

Roberta sont présentés en figures 3.12 et 3.13.

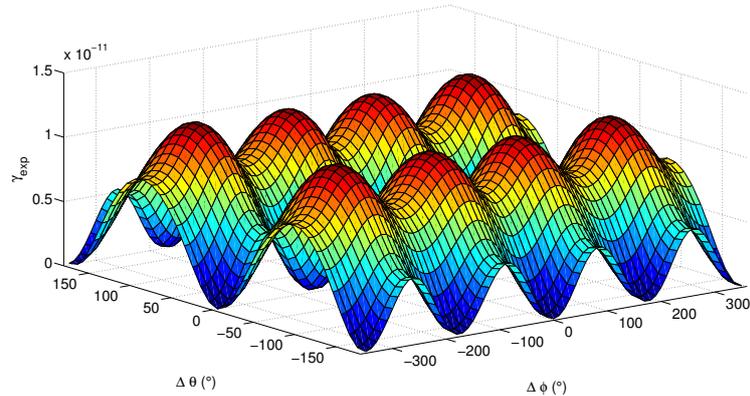


FIGURE 3.12 – Variogramme expérimental de Roberta pour la polarisation en  $\theta$ .

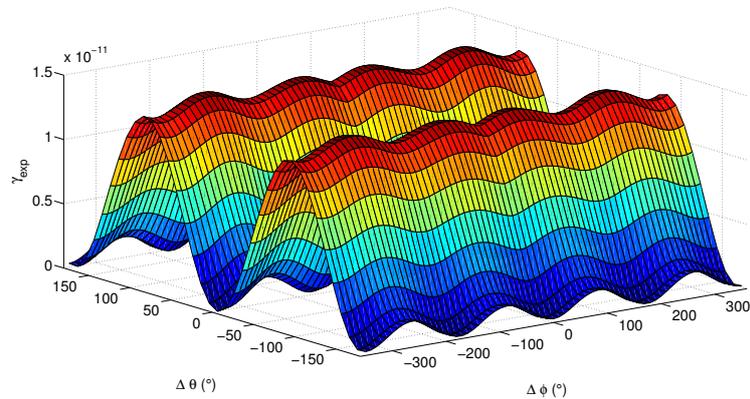


FIGURE 3.13 – Variogramme expérimental de Roberta pour la polarisation en  $\phi$ .

La représentation des variogrammes de Roberta nous permettent de constater que  $\gamma_{exp}(-\vec{h}) = \gamma_{exp}(\vec{h})$ , c'est-à-dire, que les graphes présentés en figures 3.12 et 3.13 présentent tous les deux des axes de symétrie en  $\theta = 0^\circ$  et  $\phi = 0^\circ$ . Ce qui signifie que l'on peut se limiter à l'étude des variogrammes sur les plages de  $\Delta\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  et  $\Delta\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$ . Ces variogrammes expérimentaux sont également très réguliers ce qui est rare puisque en krigeage, en général, les variogrammes expérimentaux présentent des fluctuations importantes. La régularité des variogrammes expérimentaux présentés en figures 3.12 et 3.13 s'expliquent par la régularité des données de *DAS* issues des calculs FDTD visibles aux figures 3.7 et 3.8.

De plus, les variogrammes expérimentaux montrent une périodicité. Les figures 3.14 et 3.15

représentent les variogrammes en fonction de  $\Delta\phi$  pour des valeurs de  $\Delta\theta$  fixe. Comme on peut le voir sur ces figures, les variogrammes présentent une périodicité ou une symétrie par rapport à un axe  $\Delta\phi = 180^\circ$ .

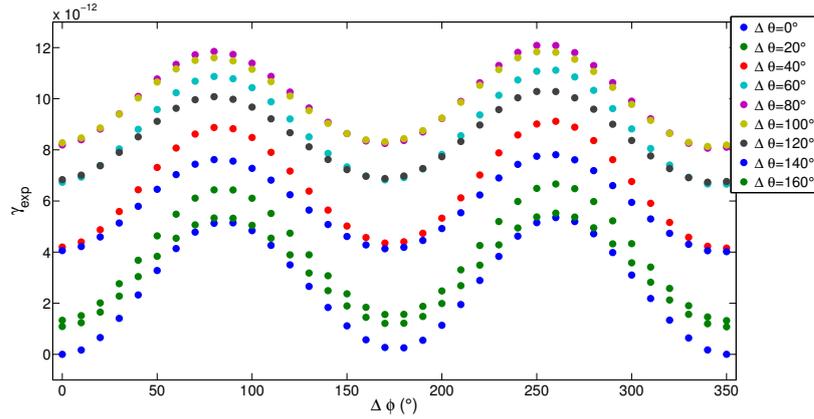


FIGURE 3.14 – Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en  $\theta$  en fonction de  $\Delta\phi$  pour différents  $\Delta\theta$ .

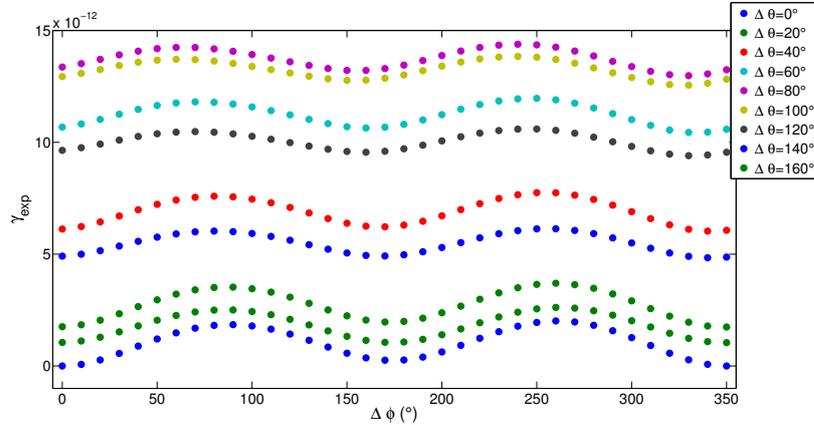


FIGURE 3.15 – Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en  $\phi$  en fonction de  $\Delta\phi$  pour différents  $\Delta\theta$ .

Cette symétrie s'explique par l'analyse de la variabilité induite par l'exposition du corps à une onde plane par rapport à son angle d'incidence. En effet, il a été montré dans [14] que le *DAS* corps entier est proportionnel en première approximation à la surface apparente de ce corps. Dès lors, la surface apparente dans le cas d'une onde plane arrivant de face sur le corps (pour un angle d'élévation quelconque) est quasiment égale à la surface apparente d'une onde

plane arrivant sur le dos d'un corps. On peut dire la même chose pour une onde plane arrivant sur le coté gauche par rapport au coté droit et finalement de tout couple de valeurs de  $DAS$  distantes de  $\Delta\phi = 180^\circ$ . Cela explique que les variogrammes tendent vers leur valeur minimum lorsque  $\Delta\phi = 180^\circ$ . Les couples formés par des valeurs de  $DAS$  distantes de  $\Delta\phi = 90^\circ$  ou  $270^\circ$  représentent, quant à eux, les dissemblances les plus significatives, c'est pour cette raison que les maximums des variogrammes sont atteints pour  $\Delta\phi = 90^\circ$  ou  $270^\circ$ .

Les figures 3.16 et 3.17 représentent les variogrammes en fonction de  $\Delta\theta$  pour des valeurs  $\Delta\phi$  fixe. On observe que ces variogrammes sont maximum pour  $\Delta\theta = 90^\circ$  et minimum pour  $\Delta\theta = 0^\circ$  et  $180^\circ$ . Le comportement de ces variogrammes suivent la même logique que précédemment à savoir les couples formés par des valeurs dont la distance est  $\Delta\theta = 90^\circ$  possèdent la plus grande différence de niveau d'exposition ce qui explique que les variogrammes sont maximum à cette distance.

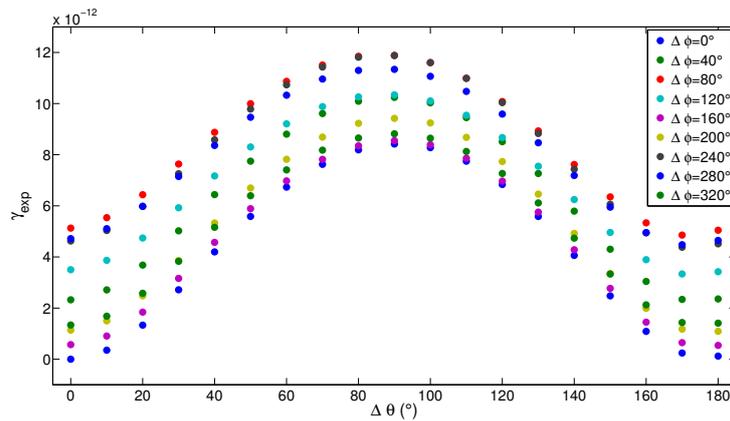


FIGURE 3.16 – Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en  $\theta$  en fonction de  $\Delta\theta$  pour différents  $\Delta\phi$ .

Comme il a été énoncé dans la sous partie relative à l'analyse variographique, le variogramme doit présenter une valeur maximale ou oscillée autour d'une valeur maximale. Ce qui implique que l'on ne peut pas garder nos variogrammes en polarisation  $\theta$  et  $\phi$  avec  $\Delta\theta \in [0^\circ, 180^\circ]$  et  $\Delta\phi \in [0^\circ, 360^\circ]$ . Nous garderons les parties de variogramme entre  $\Delta\theta = 0^\circ$ ,  $\Delta\phi = 0^\circ$  et  $\Delta\theta = 90^\circ$ ,  $\Delta\phi = 90^\circ$  correspondant aux distances pour lesquelles on atteint les premiers maximums. Les variogrammes expérimentaux que nous prendrons en considération pour l'estimation sont représentés aux figures 3.18 et 3.19.

### 3.5.3 Ajustement d'un modèle de variogramme

Il est nécessaire d'ajuster des modèles de variogramme aux variogrammes expérimentaux (figures 3.18 et 3.19). Pour cela, il est requis de visualiser chaque variogramme pour déceler

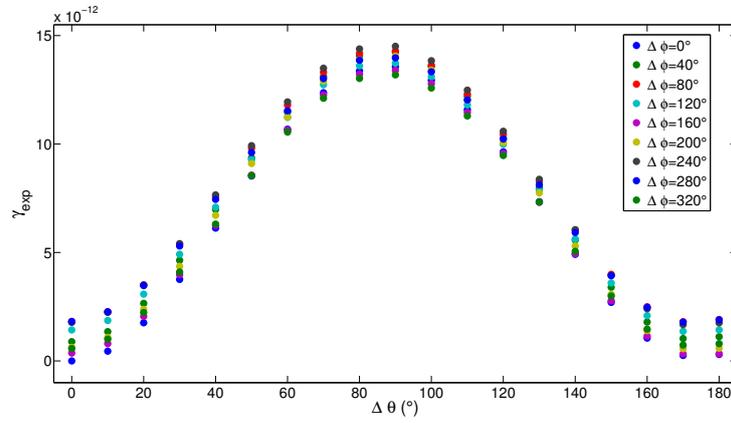


FIGURE 3.17 – Variogrammes expérimentaux de Roberta pour la polarisation en  $\phi$  en fonction de  $\Delta\theta$  pour différents  $\Delta\phi$ .

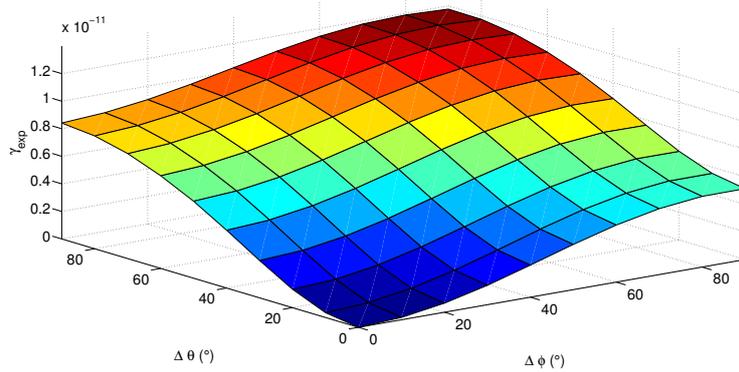


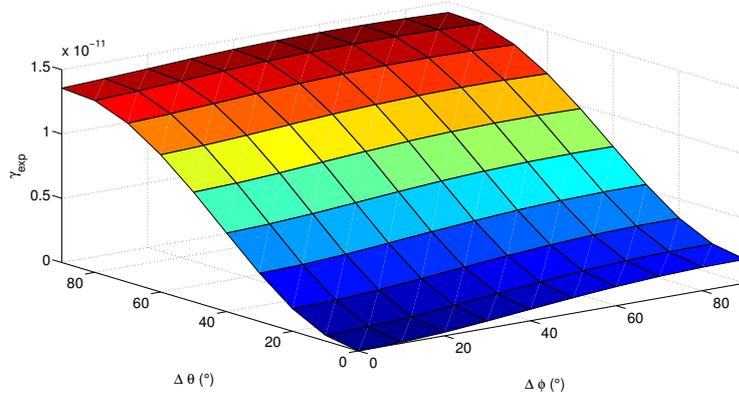
FIGURE 3.18 – Variogramme expérimental réduit de Roberta pour la polarisation en  $\theta$ .

quel modèle lui correspond le plus. Ce sont les variogrammes réduits sur  $\Delta\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$  et  $\Delta\phi \in [0^\circ, 90^\circ]$  (figures 3.18 et 3.19) auxquels il faut trouver un modèle de variogramme. Par comparaison aux modèles de variogramme de la littérature, représentés à la figure 3.2, on peut en conclure que nos variogrammes se rapprochent le plus du modèle gaussien. L'objectif est alors d'ajuster un modèle gaussien de la forme

$$\gamma(\Delta\theta, \Delta\phi) = \gamma_1(\Delta\theta) + \gamma_2(\Delta\phi) + \gamma_3(\sqrt{\Delta\theta^2 + \Delta\phi^2}) \quad (3.82)$$

avec

$$\gamma_i(h) = C_i\{1 - \exp(-h^2 / a_i^2)\} \quad (3.83)$$

FIGURE 3.19 – Variogramme expérimental réduit de Roberta pour la polarisation en  $\phi$ .

avec  $i = 1, 2$  ou  $3$ . L'ajustement consiste à trouver les valeurs des paramètres  $C_i$  et  $a_i$  qui correspondront le plus aux variogrammes expérimentaux.

Au vu des variogrammes expérimentaux, on remarque que ceux-ci présentent une anisotropie zonale, c'est-à-dire que la portée des variogrammes pour différents  $\Delta\theta$  (respectivement  $\Delta\phi$ ) est toujours la même. Cela signifie que  $a_1 = a_2 = a_3 \equiv a$  est une constante.

Afin d'ajuster le modèle de variogramme (équation 3.82), nous utilisons l'algorithme de Levenberg-Marquardt de Matlab afin d'estimer les valeurs optimales des paramètres  $(C_1, C_2, C_3, a)$ . Les résultats de l'ajustement pour les deux polarisations sont donnés tableau 3.1. De plus, l'algorithme fournit également le coefficient quantifiant à quel point l'ajustement est bon, qui est défini par l'équation suivante

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i (y_i - f_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2} \quad (3.84)$$

avec  $y_i$  les données à ajuster et  $f_i$  les valeurs prises par le modèle.

Tableau 3.1 – Paramètres des modèles de variogramme pour Roberta

	Polarisation selon $\phi$	Polarisation selon $\theta$
$C_1(\text{W/kg})^2$	$3.34 \times 10^{-12}$	$7.07 \times 10^{-12}$
$C_2(\text{W/kg})^2$	$9.93 \times 10^{-13}$	$4.11 \times 10^{-12}$
$C_3(\text{W/kg})^2$	$3.07 \times 10^{-13}$	$1.13 \times 10^{-12}$
$a_1(^{\circ})$	47	47
$a_2(^{\circ})$	47	47
$a_3(^{\circ})$	47	47
$R^2$	0.9923	0.9964

La première constatation est que l'algorithme confirme l'anisotropie zonale de notre variogramme expérimental. Ensuite, on peut constater au vu des valeurs des coefficients  $R^2$  que l'ajustement est de grande qualité.

Le modèle de variogramme étant déterminé pour les deux polarisations, il est possible de passer à la phase suivante de la méthode du krigeage ordinaire, l'estimation.

### 3.5.4 Estimation

L'étude de l'estimation consiste à appliquer la méthode de krigeage ordinaire, donc, à résoudre le système de krigeage ordinaire (équation 3.39) en faisant varier deux paramètres : le type de voisinage et la distance entre les voisins.

Le type de voisinage correspond au nombre de voisins pris en compte pour l'estimation locale dans ce voisinage et à l'emplacement de ces voisins. L'objectif est de voir comment évolue la qualité de l'estimation en fonction de ces paramètres. Ce qu'on appelle les voisins sont les valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD utilisées pour l'estimation de  $DAS^*$ . Le terme de voisinage signifie le nombre et l'emplacement des valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD prises en compte pour l'estimation  $DAS^*$ . Nous définissons plusieurs type de voisinage et différentes distances entre voisins que nous appellerons "configurations". Les différents types de voisinage sont représentés en figures 3.20 et 3.21.

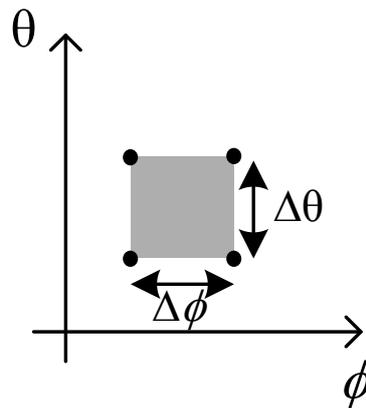


FIGURE 3.20 – Voisinage à quatre voisins.

La figure 3.20 représente le voisinage à quatre voisins. Les cercles pleins représentent les

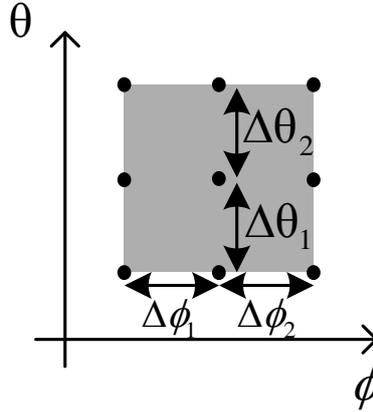


FIGURE 3.21 – Voisinage à neuf voisins.

valeurs de *DAS* utilisées pour estimer toutes les valeurs de *DAS* situées dans le carré gris. La figure 3.21 représente le voisinage à neuf voisins. De la même manière, sur cette figure les cercles pleins représentent les emplacements des valeurs de *DAS* issues des calculs FDTD. Les cercles pleins représentent les valeurs de *DAS* utilisées pour estimer les valeurs de *DAS* situées dans le carré gris.

Le tableau 3.2 présente les différentes configurations d'estimation qui sont définies par le type

Tableau 3.2 – Configurations des scénarios d'estimation

	Nombre total de valeurs <i>DAS</i> utilisées	Nombre de voisins utilisés ( $\equiv N_s$ )	Distance entre voisins
Configuration 1	$36 \times 19 = 684$	4	$\Delta\theta = 10^\circ$ $\Delta\phi = 10^\circ$
Configuration 2	$18 \times 10 = 180$	4	$\Delta\theta = 20^\circ$ $\Delta\phi = 20^\circ$
Configuration 3	$4 \times 3 = 12$	4	$\Delta\theta = 90^\circ$ $\Delta\phi = 90^\circ$
Configuration 4	$8 \times 5 = 40$	9	$\Delta\theta_1 = 50^\circ$ $\Delta\theta_2 = 40^\circ$ $\Delta\phi_1 = 50^\circ$ $\Delta\phi_2 = 40^\circ$

de voisinage et la distance entre les voisins. Les figures 3.22 à 3.25 représentent les différentes

configurations dans le plan  $(\theta, \phi)$ . Les figures 3.22 à 3.25 sont représentés pour  $\phi \in [0^\circ; 350^\circ]$ , il est évident que l'on aurait pu représenté ces figure pour  $\phi \in [0^\circ; 360^\circ]$  puisque les valeurs de *DAS* pour  $\phi = 360^\circ$  sont les même qu'à  $\phi = 0^\circ$  pour tout  $\theta$  grâce à la symétrie de rotation.

À la figure 3.22, les cercles pleins représentent les valeurs de *DAS* issues des calculs FDTD qui sont utilisées pour l'estimation dans le cadre de la configuration 1. On remarque que cette configuration utilise toutes les valeurs de *DAS* FDTD mises à disposition par nos simulations, elles sont au nombre de  $36 \times 19 = 684$  comme cela est mentionné au tableau 3.2.

La figure 3.23 représente la deuxième configuration d'estimation. Les cercles pleins représentent les valeurs de *DAS* issues des calculs FDTD prises en compte dans l'estimation et les cercles vides représentent les valeurs de *DAS* issues du calcul FDTD non prises en compte dans l'estimation. Dans la configuration 2, on utilise donc  $18 \times 10 = 180$  valeurs de simulations FDTD et l'estimation est faite sur base du voisinage à 4 voisins comme mentionné au tableau 3.2.

La figure 3.24 représente la configuration 3 d'estimation, les cercles pleins représentent les valeurs de *DAS* FDTD utilisées pour l'estimation. La configuration 3 utilise  $3 \times 4 = 12$  valeurs issues du calcul FDTD, la configuration 3 est donc celle qui utilise le moins de valeurs *DAS* issues du calcul FDTD. L'estimation est faite sur base du voisinage au quatre voisins.

Enfin, la figure 3.25 représente la configuration 4, elle utilise  $8 \times 5 = 40$  valeurs de *DAS* issues des calculs FDTD et l'estimation est faite sur base des neuf voisins.

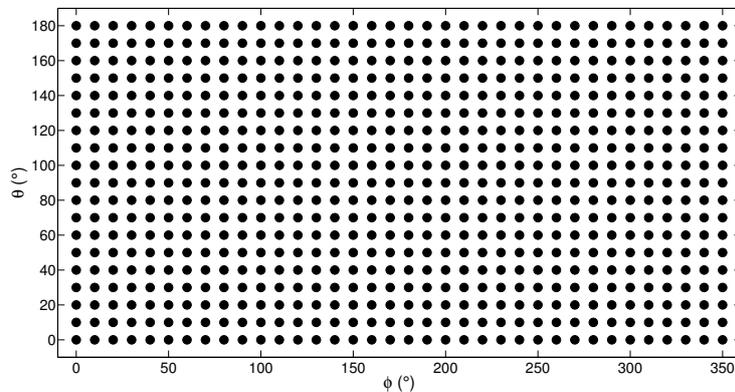


FIGURE 3.22 – Configuration 1

### 3.5.4.1 Représentation des résultats

La représentation des résultats d'estimation en trois dimensions ne permet pas de juger de la qualité d'estimation. Cependant, l'écart-type d'estimation (racine carrée de la variance d'estimation) peut être utilisé afin d'introduire des intervalles de confiance [73] à toutes les

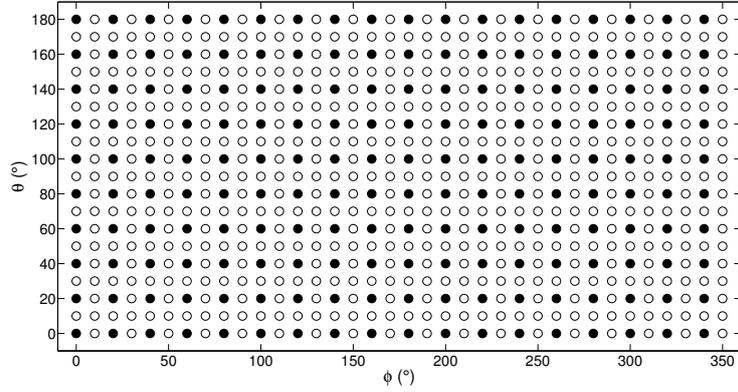


FIGURE 3.23 – Configuration 2

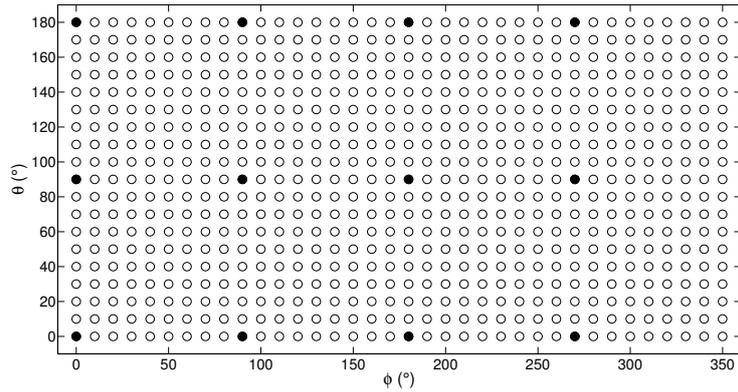


FIGURE 3.24 – Configuration 3

positions d'estimation. L'intervalle de confiance est défini par

$$[DAS - \nu\sigma_E, DAS + \nu\sigma_E] \quad (3.85)$$

Le paramètre  $\nu$  peut être déterminé en calculant l'erreur de krigeage définie par  $|DAS^* - DAS|$  à chaque point d'estimation où il y a une valeur non-utilisée de  $DAS$  issues des calculs FDTD. Ainsi, en ayant les erreurs de krigeage, il est possible de calculer la probabilité que l'erreur de krigeage soit supérieure au niveau  $\nu\sigma_E$ . Il est alors possible de faire varier  $\nu$  de telle sorte que l'on trouve la valeur idéale. Nous avons estimé  $\nu$  pour les résultats avec la polarisation selon  $\theta$  et  $\phi$  sur la configuration utilisant le plus petit nombre de valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD, la configuration 3. La raison étant que plus la distance entre les voisins est grande plus

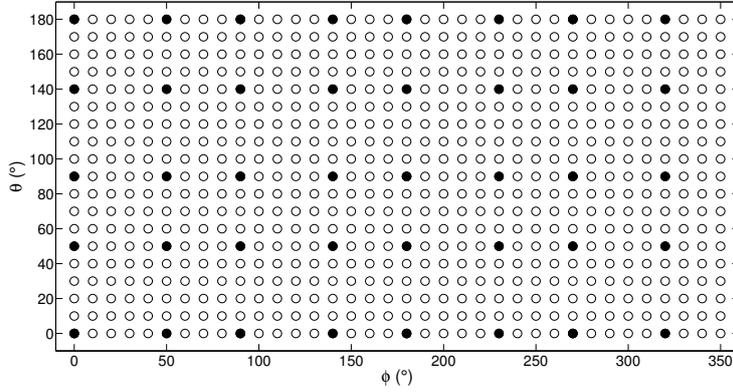


FIGURE 3.25 – Configuration 4

la variance d'estimation sera grande. De plus, la configuration 3 est celle où on a le plus de valeurs de  $DAS$  issues du calcul FDTD qui ne sont pas utilisées et donc d'erreurs de krigeage à calculer.

Pour les deux polarisations, on commence par calculer la probabilité que l'erreur du krigeage soit plus grande que  $2\sigma_E$  et on trouve

$$\Pr(|DAS^* - DAS| \geq 2\sigma_E) \simeq 0 \quad (3.86)$$

Dès lors, on réduit la valeur de  $\nu$  jusqu'à trouver que la valeur de  $\nu = 0.85$  est la plus appropriée car pour la polarisation selon  $\theta$

$$\Pr(|DAS^* - DAS| \geq 0.85\sigma_E) \simeq 0.0410 \quad (3.87)$$

et pour la polarisation selon  $\phi$

$$\Pr(|nSAR^* - nSAR| \geq 0.85\sigma_E) \simeq 0.0469 \quad (3.88)$$

Cela assure respectivement d'être à 95.31% dans l'intervalle de confiance pour la polarisation selon  $\phi$  et à 95.90% dans l'intervalle de confiance pour la polarisation selon  $\theta$ . L'intervalle de confiance est alors

$$[DAS^* - 0.85\sigma_E, DAS^* + 0.85\sigma_E] \quad (3.89)$$

Il est évident que l'intervalle de confiance peut être réduit avec les estimations des autres configurations cependant pour toutes les représentations, nous utiliserons (3.89).

La représentation des variances d'estimation en fonction de  $(\theta, \phi)$  est à l'image de la configuration choisie. Les figures 3.26 à 3.29 représentent les variances d'estimation en fonction de  $(\theta, \phi)$

pour la polarisation  $\theta$  pour les quatre configurations. Le choix a été fait de ne pas représenter les variances d'estimation pour la polarisation selon  $\phi$  car les résultats sont similaires.

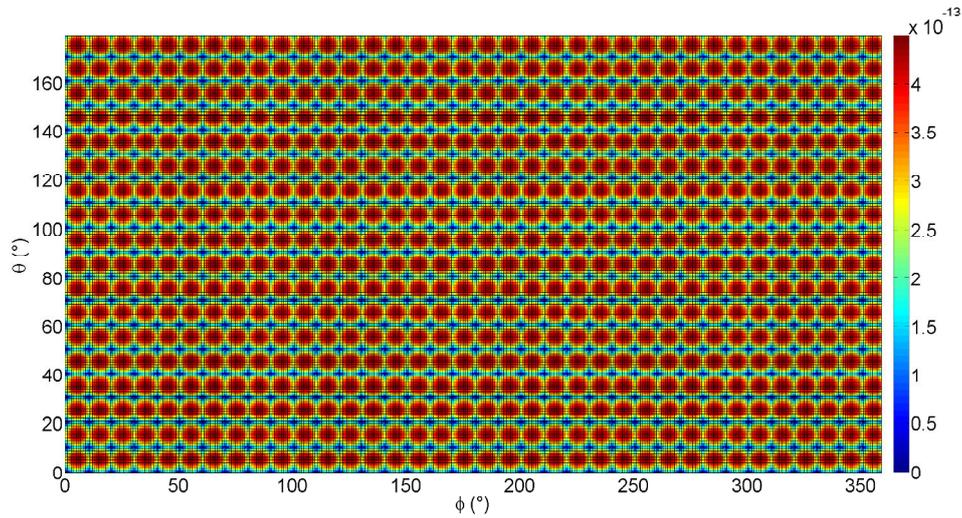


FIGURE 3.26 – Variance d'estimation pour la configuration 1 (polarisation selon  $\theta$ ).

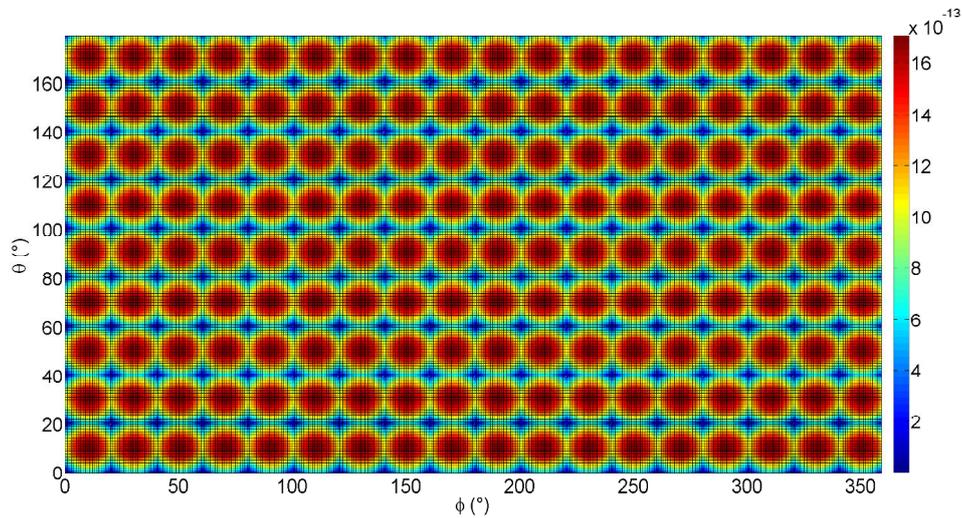
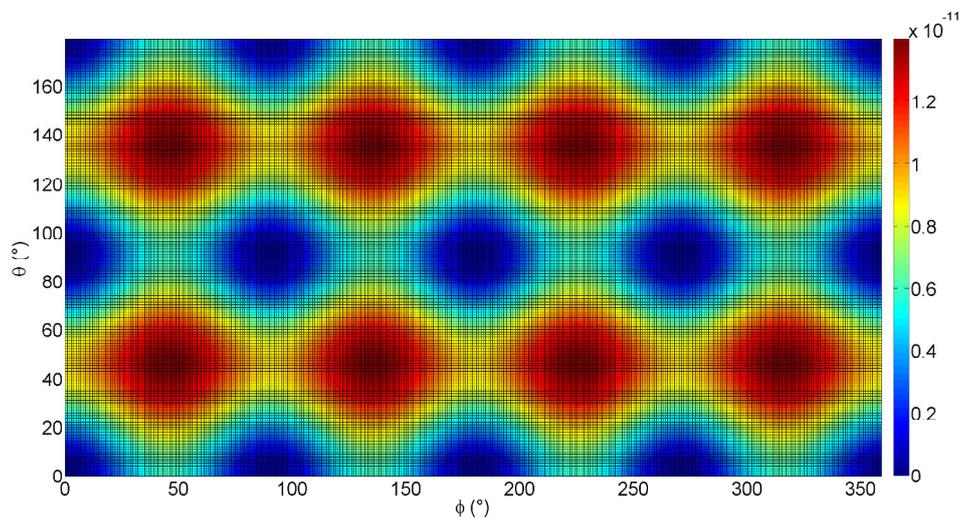
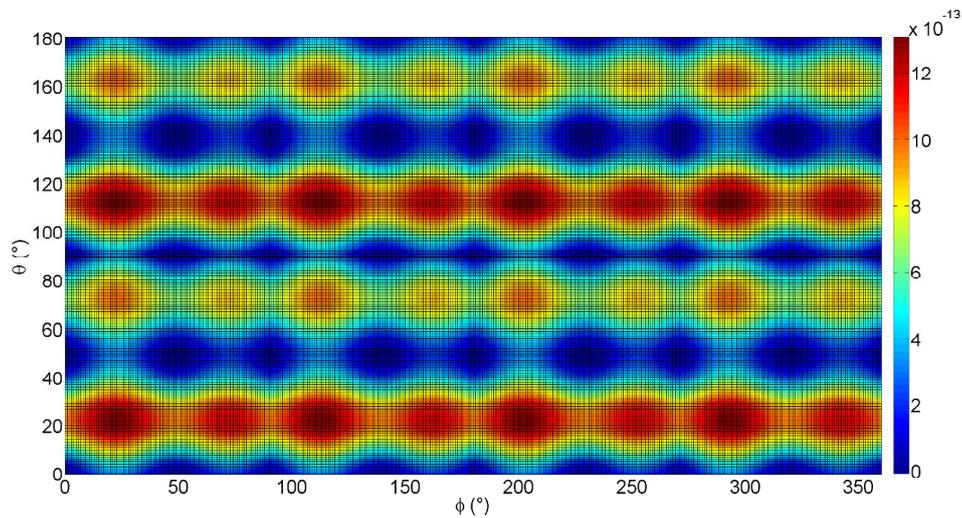


FIGURE 3.27 – Variance d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon  $\theta$ ).

On remarque que, comme cela est prévu par la méthode de krigeage, les variances d'estima-

FIGURE 3.28 – Variance d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon  $\theta$ ).FIGURE 3.29 – Variance d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon  $\theta$ ).

tion sont nulles aux emplacements où une valeur de *DAS* a été utilisée et elles sont maximum aux endroits les plus éloignés des valeurs de *DAS* issues des calculs FDTD.

### 3.5.4.2 Résultats d'estimation

Pour plus de clarté, les résultats d'estimation de  $DAS^*$  sont représentés en deux dimensions en fonction de  $\phi$ , pour  $\theta = 50^\circ$  étant donné qu'il est impossible de représenter pour toutes les valeurs de  $\theta$ . Le choix de représenter en fonction de  $\phi$  est dû au fait que la direction azimutale présente le plus de variation. On représente ces résultats pour un angle  $\theta$  constant et égal à  $50^\circ$  car cet angle présente la particularité d'avoir des valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD qui sont tantôt prises en compte ou pas prises en compte dans le voisinage en fonction de la configuration. Les figures 3.30 à 3.37 représentent les résultats d'estimation pour les différentes configurations et les deux polarisations. Plus généralement, la qualité de l'estimation peut être analysée en consultant les métriques du tableau 3.3. Ces métriques sont l'erreur relative maximale et l'erreur relative moyenne calculées par les équations suivantes

$$MaxRE = \max \left( \frac{|DAS^* - DAS|}{DAS} \times 100 \right) \quad (3.90)$$

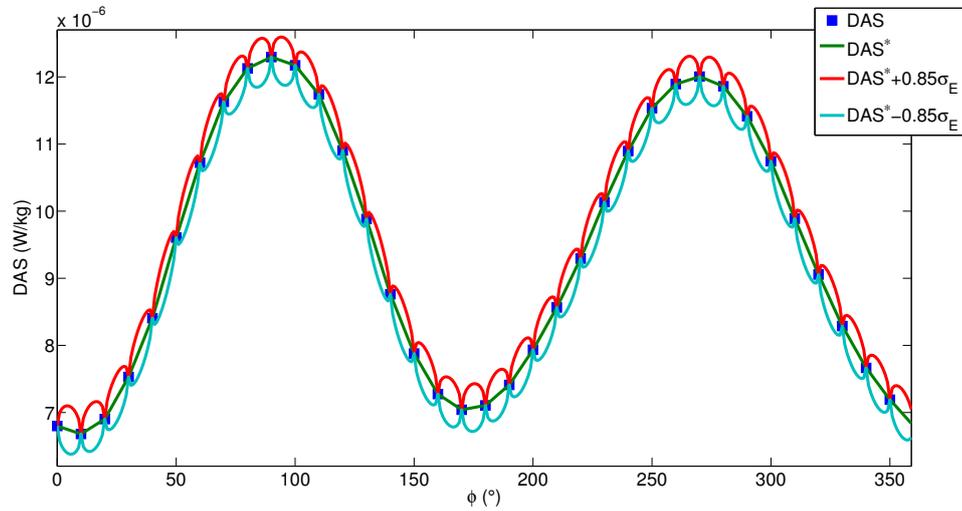
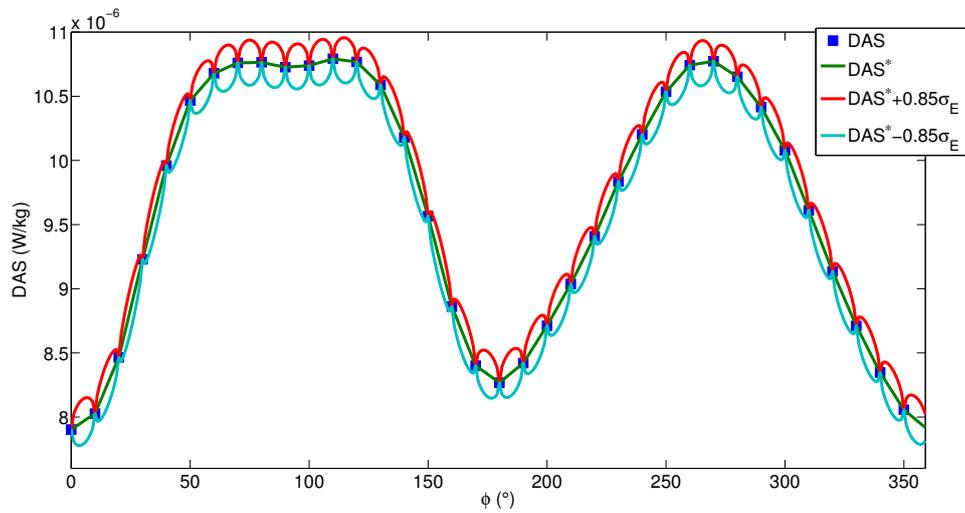
$$MeanRE = \left\langle \frac{|DAS^* - DAS|}{DAS} \right\rangle \times 100 \quad (3.91)$$

Ces métriques sont calculables pour les configurations 2, 3 et 4 mais pas pour la configuration 1 puisque celle-ci utilise toutes les valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD disponibles tandis que les autres configurations n'en utilisent qu'une partie, ce qui permet de calculer des erreurs (différence entre la valeur estimée  $DAS^*$  et la valeur de  $DAS$  calculée par FDTD).

Configurations	Polarisation	MaxRE	MeanRE
2	$\phi$	9.86%	2.86%
	$\theta$	16.6%	2.86%
3	$\phi$	22.6%	8.74%
	$\theta$	30.7%	10.7%
4	$\phi$	14.1%	2.52%
	$\theta$	11.3%	2.57%

Tableau 3.3 – Erreur relative maximale et erreur relative moyenne sur les résultats d'estimation

Les figures 3.30 et 3.31 représentent les résultats d'estimation pour la configuration 1. Cette configuration est celle où on a utilisé toutes les valeurs de  $DAS$  FDTD. Comme on peut le constater l'estimation est de bonne qualité, la courbe  $DAS^*$  est à l'intérieur des intervalles de confiance. Ces résultats montrent que la méthode du krigeage ordinaire fonctionne sur des petites distances d'estimation, cependant, cette méthode est capable d'estimer pour de plus grande distance en utilisant beaucoup moins de valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD.

FIGURE 3.30 – Résultat d’estimation pour la configuration 1 (polarisation selon  $\theta$ ).FIGURE 3.31 – Résultat d’estimation pour la configuration 1 (polarisation selon  $\phi$ ).

Les figures 3.32 et 3.33 représentent les résultats d’estimation pour la configuration 2. Comme on peut le constater, les intervalles de confiance ne sont jamais nuls. Ceci est dû au fait que les valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD prises en compte dans l’estimation sont distantes de  $20^\circ$  et qu’en  $\theta = 50^\circ$  le long de  $\phi$  il n’y a pas de valeurs de  $DAS$  prises en compte dans

l'estimation. Ceci est également visible sur la figure 3.27 en regardant les variances d'estimation le long de  $\phi$  pour  $\theta = 50^\circ$ . Les résultats d'estimation pour la configuration 2 sont satisfaisants puisque la courbe d'estimation est à l'intérieur de l'intervalle de confiance et passe au près des valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD. Plus généralement, sur toutes nos données les erreurs relatives moyennes pour les deux polarisations sont inférieures à 3%. Les valeurs de  $DAS$  FDTD utilisées dans cette configuration sont distantes de  $20^\circ$ , cependant, la distance maximal pour laquelle le variogramme est défini est de  $90^\circ$ , il est donc encore possible d'accroître les distances entre les valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD prises en compte dans l'estimation.

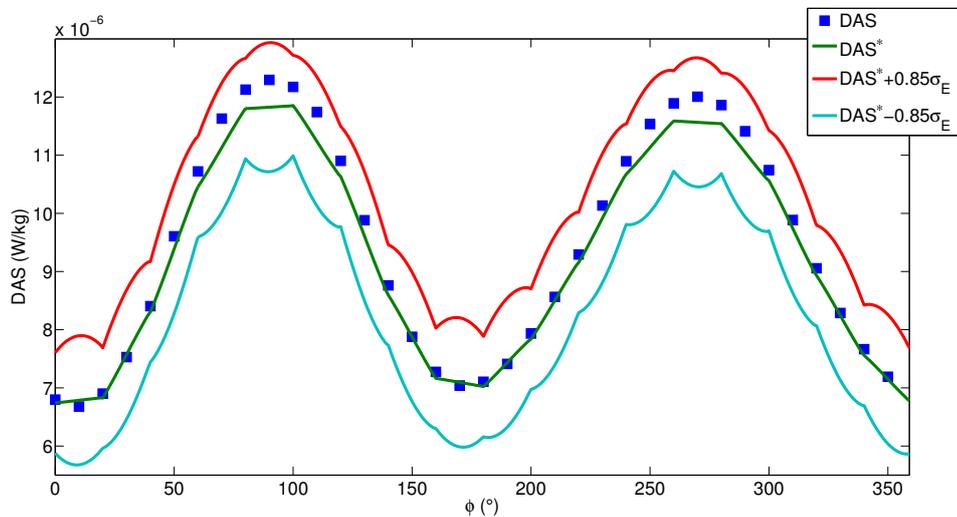
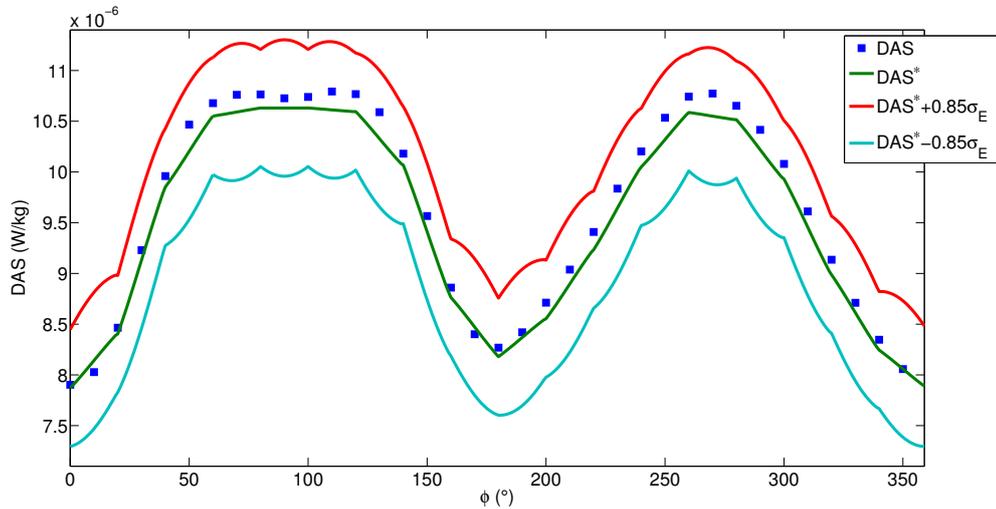
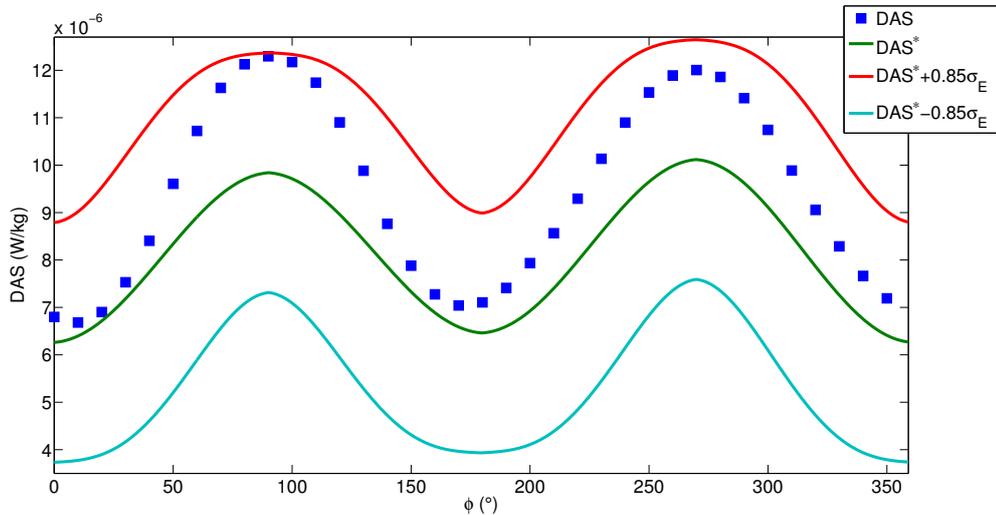


FIGURE 3.32 – Résultat d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon  $\theta$ ).

Les figures 3.34 et 3.35 représentent les résultats d'estimation pour la configuration 3. On peut constater qu'il y a une certaine distance entre les valeurs estimées et les valeurs issues du calcul FDTD, cependant ces valeurs estimées restent dans l'intervalle de confiance défini par les variances d'estimation. Les erreurs relatives moyennes quant à elle dépasse 10% pour la polarisation  $\theta$  et s'élève à un peu moins de 9% pour la polarisation selon  $\phi$ . L'erreur relative maximale pour la polarisation  $\theta$  s'élève à un tiers de la valeur du  $DAS$  ce qui est excessif. La configuration 3 a permis de réduire de manière drastique le nombre de valeurs (12 valeurs) de  $DAS$  FDTD utilisées pour estimer toutes les autres valeurs de  $DAS^*$ . Même si cette configuration nous montre la capacité du krigeage à estimer avec un nombre minimum de valeurs, il est également possible d'améliorer les résultats d'estimation en prenant en compte plus de voisins. La configuration 4 consiste à estimer les valeurs de  $DAS$  en ajoutant cinq valeurs FDTD à chaque zone d'estimation défini par la configuration 3.

Les figures 3.36 et 3.37 représentent les résultats d'estimation pour la configuration 4. On

FIGURE 3.33 – Résultat d'estimation pour la configuration 2 (polarisation selon  $\phi$ ).FIGURE 3.34 – Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon  $\theta$ ).

se rend compte que d'ajouter des valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD dans le voisinage des zones d'estimation par rapport à la configuration 3 améliore grandement la qualité de l'estimation puisque les valeurs estimées  $DAS^*$  et les valeurs de  $DAS$  issus du calcul FDTD sont très proches. De plus, cette configuration a permis de réduire grandement l'erreur relative

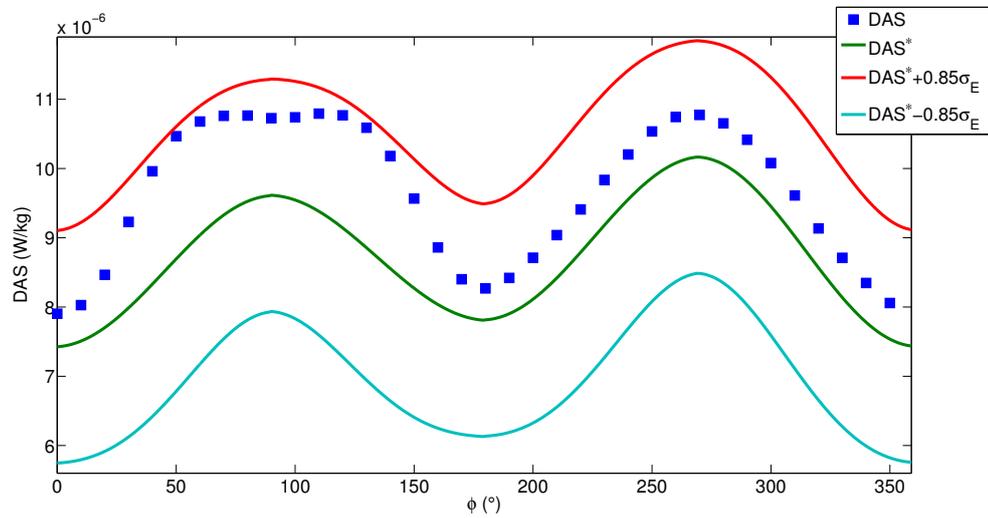


FIGURE 3.35 – Résultat d'estimation pour la configuration 3 (polarisation selon  $\phi$ ).

moyenne, puisque, on descend sous la barre fixée par la configuration 2 tandis que l'erreur relative maximale ne dépasse pas 15%.

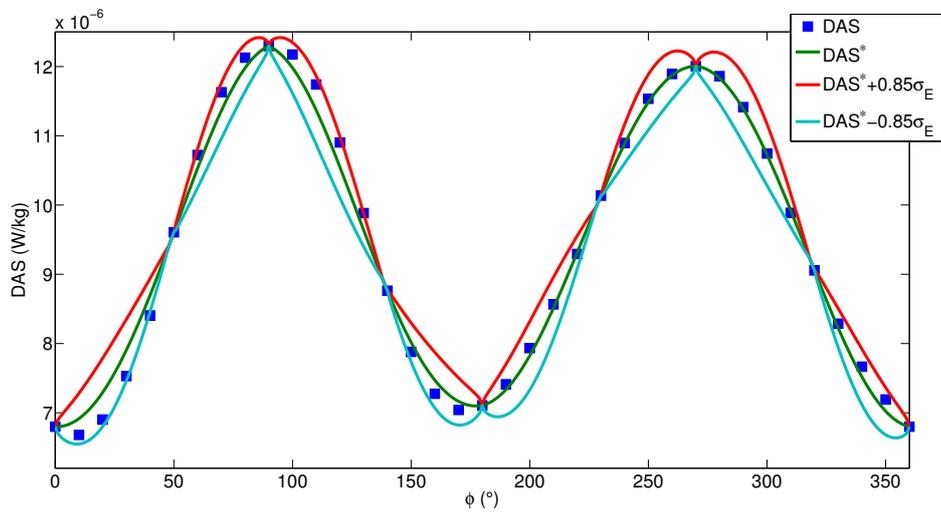


FIGURE 3.36 – Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon  $\theta$ ).

La mise en œuvre du krigeage sur les résultats de  $DAS$  de Roberta a permis de :

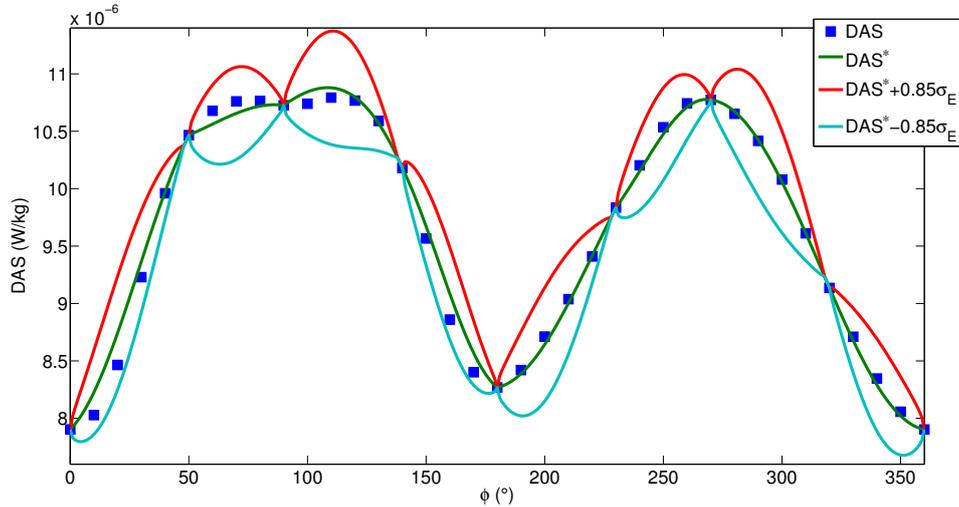


FIGURE 3.37 – Résultat d’estimation pour la configuration 4 (polarisation selon  $\phi$ ).

- définir un modèle de variogramme pour l’exposition d’un corps entier en position debout,
- tester plusieurs type de voisinage en réduisant le nombre valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD utilisées,
- obtenir les valeurs de  $DAS$  pour tous les angles d’incidence sphériques possibles et pour les deux polarisations.

### 3.6 Validation de la méthode sur les résultats de Thelonious

Afin de valider la méthode du krigeage sur la dosimétrie, il s’agit de l’appliquer sur un autre jeu de données, les valeurs de  $DAS$  corps entier issues des calculs FDTD sur le modèle de corps de Thelonious. La validation consiste à estimer les valeurs de  $DAS^*$  de Thelonious en utilisant un minimum de valeurs de  $DAS$  issus du calcul FDTD. Précédemment, l’analyse variographique a permis d’identifier le modèle de variogramme en calculant le variogramme expérimental et en lui ajustant le modèle le plus approprié. Pour la validation, le modèle de variogramme est déjà connu (équation 3.82) mais il s’agit simplement de déterminer les portées  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  pour Thelonious puisque l’analyse variographique a montré une anisotropie zonale ( $a_1 = a_2 = a_3 = 47^\circ$ ).

Les portées  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  correspondent aux valeurs maximales atteintes aux distances ( $\Delta\theta = 90^\circ, \Delta\phi = 0^\circ$ ), ( $\Delta\theta = 0^\circ, \Delta\phi = 90^\circ$ ) et ( $\Delta\theta = 90^\circ, \Delta\phi = 90^\circ$ ). Dès lors les valeurs du vario-

gramme experimental peuvent être estimés grâce à 12 valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD situées en  $(\theta_e, \phi_e)$  avec  $\theta_e = 0^\circ, 90^\circ$  et  $180^\circ$   $\phi_e = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$  et  $270^\circ$ . Les valeurs de  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  sont regroupées dans le tableau 3.4 pour les deux polarisations. L'estimation sur les résultats

Tableau 3.4 – Paramètres du modèle de variogramme pour Thelonious

	polarisation selon $\phi$	polarisation selon $\theta$
$C_1(\text{W/kg})^2$	$2.679 \times 10^{-11}$	$2.436 \times 10^{-11}$
$C_2(\text{W/kg})^2$	$5.11 \times 10^{-12}$	$1.188 \times 10^{-11}$
$C_3(\text{W/kg})^2$	$2.682 \times 10^{-11}$	$2.442 \times 10^{-11}$

de Thelonious sera faite avec les configurations impliquant le moins de valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD, les configurations 3 et 4.

Les figures 3.38 à 3.41 présentent les résultats d'estimation sur Thelonious pour les configurations 3 et 4 pour les deux polarisations. Le tableau 3.5 présente les erreurs relatives moyennes et maximales pour ces deux configurations. Les figures 3.38 et 3.39 représentent les résultats

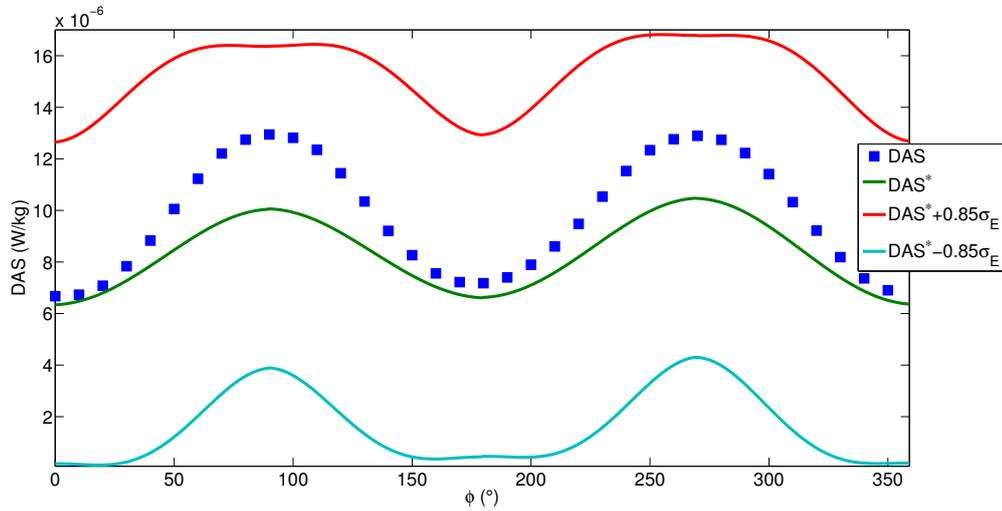
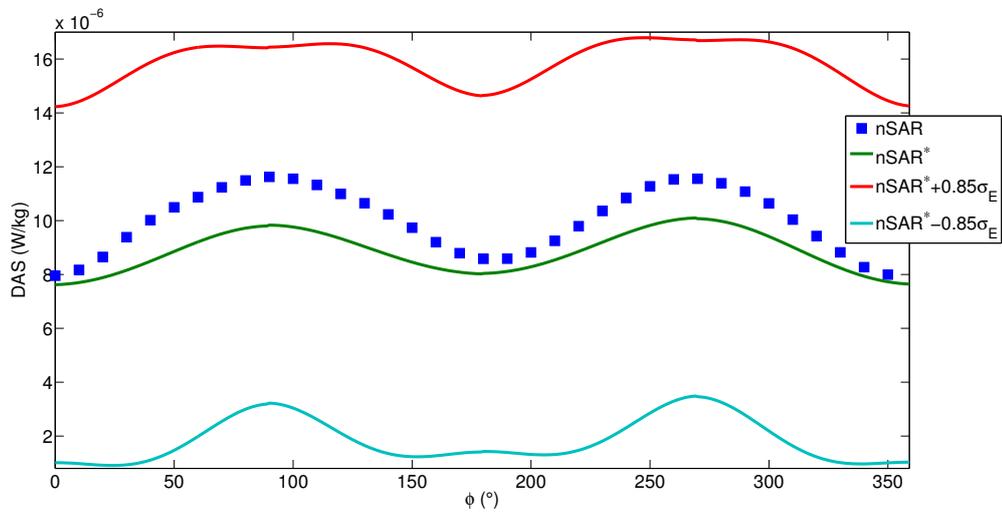
Configuration	Polarisation	MaxRE	MeanRE
3	$\phi$	24.27%	9.41%
	$\theta$	33.53%	10.99%
4	$\phi$	11.25%	2.79%
	$\theta$	10.74%	2.66%

Tableau 3.5 – Erreurs relatives maximale et moyenne sur les résultats de Thelonious

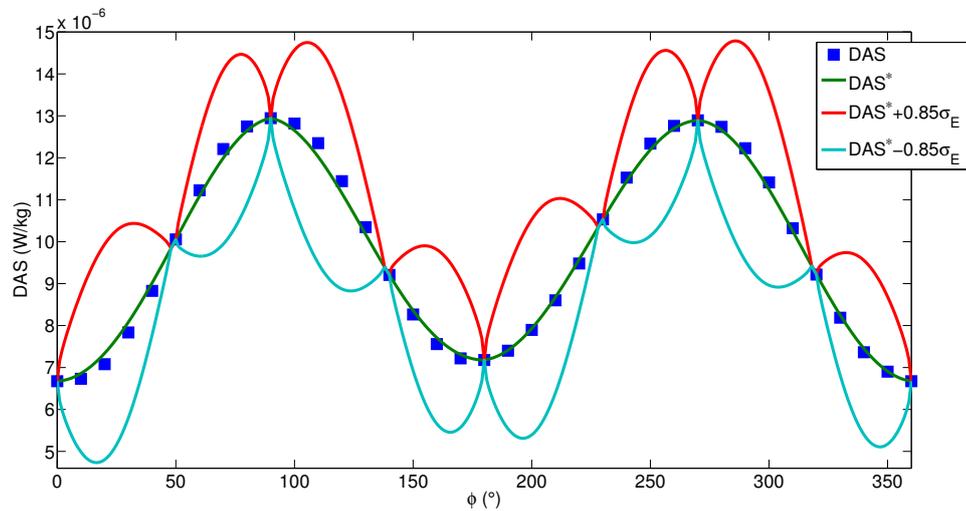
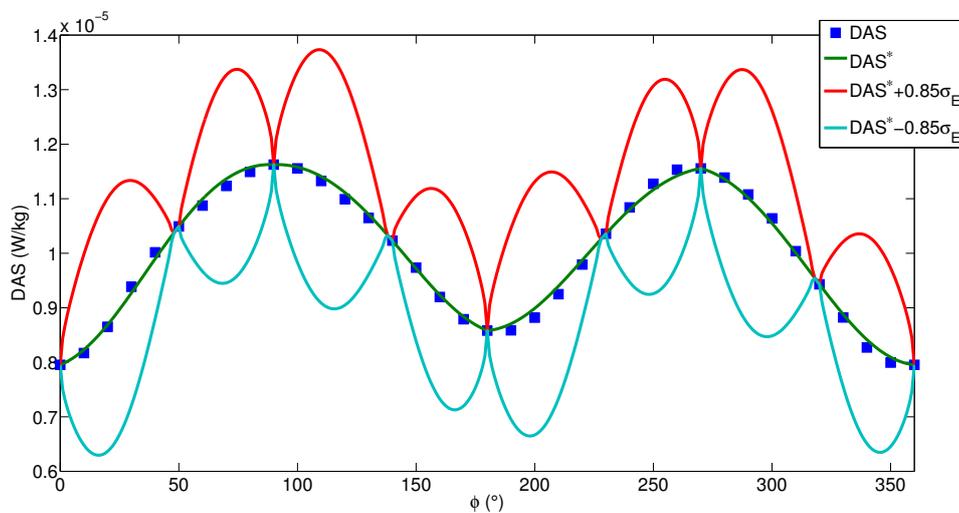
d'estimation de  $DAS^*$  en fonction de  $\phi$  pour  $\theta = 50^\circ$  pour les deux polarisations dans le cadre de la configuration 3. On peut constater qu'il y a une certaine distance entre les valeurs estimées et les valeurs issues du calcul FDTD mais que les valeurs restent dans l'intervalle de confiance. L'erreur relative moyenne est inférieure à 11% pour les deux polarisations tandis que l'erreur relative maximale est de plus de 33% pour la polarisation verticale ce qui est considérable.

Les figures 3.40 et 3.41 représentent les résultats d'estimation de  $DAS^*$  en fonction de  $\phi$  pour  $\theta = 50^\circ$  pour les deux polarisations dans le cadre de la configuration 4. De la même manière que précédemment avec les estimations sur les résultats de Roberta, passer de quatre voisins à neuf voisins (i.e. ajouter des valeurs de  $DAS$  issues des calculs FDTD dans l'estimation), améliore grandement la qualité de l'estimation puisque les valeurs estimées sont très proches des valeurs issues des calculs FDTD. Les erreurs relatives moyennes sont réduites à moins de 3% tandis que les erreurs relatives maximales ne dépassent pas 12%.

L'application de la méthode du krigeage a permis de trouver le modèle de variogramme le plus approprié, parmi ceux de la littérature, pour l'estimation du  $DAS$  d'un corps entier debout

FIGURE 3.38 – Résultat d’estimation pour la configuration 3 (polarisation selon  $\theta$ ).FIGURE 3.39 – Résultat d’estimation pour la configuration 3 (polarisation selon  $\phi$ ).

soumis à une onde plane. La méthode du krigeage et ce modèle de variogramme ont pu être validés en les appliquant aux résultats d’un autre modèle de corps d’enfant, Thelonious. On a montré qu’il était possible d’avoir une estimation du  $DAS^*$  en utilisant seulement 12 valeurs (configuration 3) de  $DAS$  issues du calcul FDTD, cette estimation mène à des erreurs relatives

FIGURE 3.40 – Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon  $\theta$ ).FIGURE 3.41 – Résultat d'estimation pour la configuration 4 (polarisation selon  $\phi$ ).

moyennes inférieures à 12% ce qui est acceptable pour une première estimation. Il a également été montré qu'il est possible de faire des estimations très précises sur base de 40 valeurs de *DAS* FDTD puisque les estimations fournissent des erreurs relatives de moins de 3%. Au delà de fournir toutes les valeurs de *DAS* possibles, la mise en œuvre du krigeage dévelop-

pée, ici, est généralisable à tout modèle de corps dans la position debout avec les bras placés le long du corps et permet de répondre à la contrainte des temps de calculs particulièrement longs en dosimétrie numérique.

En conclusion, la configuration qu'il faut utiliser est la configuration 4, si on reçoit un nouveau modèle de corps. Pour cela, la procédure à suivre est similaire à celle suivie lors de l'ajustement du modèle de variogramme pour les résultats de *DAS* de Thelonious. Sur base des 40 valeurs de *DAS*, les dissemblances peuvent être calculer et en prenant la moyenne des dissemblances pour les distances ( $\Delta\theta = 0^\circ$  ou  $90^\circ$ ,  $\Delta\phi = 0^\circ$  ou  $90^\circ$ ), on pourra alors obtenir les valeurs maximales du variogramme  $C_1, C_2$  et  $C_3$  pour ce nouveau modèle de corps. Il serait également possible de calculer les valeurs de variogramme expérimental pour les distances ( $\Delta\theta = 0^\circ$  ou  $40^\circ$  ou  $50^\circ$  ou  $90^\circ$ ,  $\Delta\phi = 0^\circ$  ou  $40^\circ$  ou  $50^\circ$  ou  $90^\circ$ ) et d'effectuer un nouvel ajustement du modèle de variogramme (3.82). Cette démarche n'a pas été testée mais mènerai à des résultats également satisfaisant puisque les valeurs  $C_1, C_2$  et  $C_3$  seront les mêmes que celles calculées avec la procédure conseillée et suivie.

La mise en œuvre du krigeage permet alors de calculer l'espérance du *DAS* et sa variance pour toute situation dictée par le modèle de canal. L'analyse de sensibilité des paramètres de canal est alors possible.



# Chapitre 4

## L'analyse de sensibilité

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>89</b>
<b>4.2</b>	<b>Les indices de Sobol'</b>	<b>91</b>
4.2.1	Décomposition ANOVA	91
4.2.2	Les indices de sensibilité par Monte-Carlo	92
<b>4.3</b>	<b>Impact des paramètres du modèle de canal</b>	<b>96</b>
4.3.1	Les paramètres d'entrée	96
4.3.2	Analyse des indices de sensibilité totale	97
<b>4.4</b>	<b>Adaptation du modèle de canal pour la dosimétrie</b>	<b>102</b>
4.4.1	Méthode pour fixer les variables non-essentiels	102
4.4.2	Fixer des paramètres du modèle de canal	103
4.4.3	Le modèle de canal adapté à la dosimétrie	105
<b>4.5</b>	<b>Exemple d'utilisation du modèle de canal adapté</b>	<b>106</b>

---

### 4.1 Introduction

L'objectif est d'adapter un modèle de canal à la dosimétrie en relevant les paramètres ayant le plus d'impact sur l'exposition des personnes. L'analyse de sensibilité est considéré comme étant la méthode permettant de quantifier l'importance relative de chaque paramètre d'entrée d'un modèle physique. Les méthodes d'analyse de sensibilité sont, en général, classées dans deux catégories :

- l'analyse de sensibilité local qui se concentre sur l'impact local d'un paramètre d'entrée sur la sortie d'un processus physique. Elle est basé sur le calcul du gradient de réponse de sortie du processus physique pour les valeurs du paramètre d'entrée autour d'une valeur

nominale. Plusieurs techniques ont été développés pour calculer le gradient de manière efficace reposant sur des schémas de différence finies ou de méthode de différentiation [82].

- l'analyse de sensibilité globale quantifie l'impact sur la sortie d'un processus physique d'un seul paramètre d'entrée ou d'une combinaison de plusieurs paramètres d'entrée.

Plusieurs contributions ont été publiés ces vingt dernières années sur l'analyse de sensibilité globale. Un bon état-de-l'art est disponible dans [59], où les méthodes sont divisés en deux groupes : celles basées sur de la régression et celles basées sur les variances. Les méthodes de régression reposent comme son nom l'indique sur une régression de la sortie du processus physique, il est alors nécessaire de calculer la corrélation entre chaque variable d'entrée et la sortie. Cette méthode est efficace à condition que le processus soit linéaire (i.e. que le coefficient de détermination  $R^2$  de la régression soit proche de un) [63].

Les méthodes basées sur le calcul de variances consiste à décomposer la variance de la sortie du processus en une somme de contributions de chaque variable d'entrée et de toutes les combinaisons de ces variables d'entrée (appelées ANOVA pour *ANalysis Of VAriance*). Les variances conditionnelles sont utilisées pour calculer les indices de sensibilité par des simulation de Monte-Carlo [59, 61].

Les documents de régulation sur l'étude d'impact recommandent l'utilisation de l'analyse de sensibilité quantitative [83]. Parmi les méthodes existantes et reconnues [53, 63], l'analyse de sensibilité basée sur les variances (*Variance-based methods*) est une bonne solution pour faire une étude d'impact des paramètres d'entrée [60, 62, 84]. Cette méthode est basée sur la décomposition de la variance de la variable de sortie sous forme de somme des contributions de chaque variable d'entrée et/ou de leur combinaisons. Contrairement à la méthode des plans d'expérience où les effets des variables d'entrée sont évalués pour des valeurs particulières de celles-ci [53], l'analyse de sensibilité basée sur les variances conditionnelles prennent en compte les distributions entières des variables d'entrée [61]. Les indices de Sobol' permettent de quantifier les sensibilités des paramètres d'entrée sur la variable de sortie [59–62, 84].

Pratiquement, ces indices sont estimés par Monte-Carlo ce qui les rendent difficilement calculables par des processus coûteux en terme de temps de calcul. Dans notre cas, les variables d'entrée dont on veut analyser l'impact sont les paramètres du modèle de canal qui vont définir les conditions d'exposition, nos paramètres de sortie sont l'espérance du  $DAS$  et sa variance dont les expressions analytiques ont été démontrées (équations 2.44 et 2.45). Ces variables de sortie s'expriment sous forme de sommes de  $DAS$ , la méthode du krigeage a permis de connaître ces valeurs de  $DAS$ , il est donc possible de faire des simulations Monte-Carlo sur les expressions de  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}^2$  en évitant les calculs FDTD qui sont coûteux en temps.

## 4.2 Les indices de Sobol'

### 4.2.1 Décomposition ANOVA

Supposons que le modèle en étude est décrit par une fonction  $u = f(\mathbf{x})$  où  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$  désigne les variables d'entrée. Il peut être vu également comme un vecteur dans une boîte de  $n$  dimensions et  $u$  une sortie scalaire. Il faut ici remarquer la différence entre la sensibilité locale et la sensibilité globale. La sensibilité locale s'intéresse à la sensibilité d'une solution  $u^*$  par rapport aux  $x_k$  considérées. Cette sensibilité est estimée par les dérivées partielles  $(\partial u / \partial x_k)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ . La sensibilité globale ne spécifie pas l'entrée  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ , elle considère le modèle  $f(\mathbf{x})$  dans la boîte. Ainsi, l'approche globale s'intéresse à la sensibilité du modèle mathématique complet plutôt que la sensibilité pour une solution donnée [62].

Dans la suite, on considère  $I^n$  comme étant un hypercube de dimensions  $n$  où  $\mathbf{x} \in I^n$ . Considérons une fonction intégrable  $f(\mathbf{x})$  définie dans  $I^n$ . La représentation ANOVA [59–62, 84] peut prendre la forme suivante

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s}^n f_{i_1 < \dots < i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \quad (4.1)$$

où  $1 \leq i_1 < \dots < i_s < n$  avec  $i_1$  le premier indice indiquant le premier paramètre et  $i_s$  indiquant le  $s$ -ième paramètre. L'équation 4.1 peut être reformulée de la manière suivante

$$f(\mathbf{x}) = f_0 + \sum_i f_i(x_i) + \sum_{i < j} f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{12\dots n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.2)$$

On peut remarquer que le nombre total de termes dans la somme de l'équation 4.1 est de  $2^n$ . L'équation 4.1 est une représentation ANOVA de  $f(\mathbf{x})$  si

$$\int f_{i_1 \dots i_s} dx_k = 0 \quad \text{pour } k = i_1, \dots, i_s \quad (4.3)$$

À partir de l'équation 4.3 on peut dire des membres de l'équation 4.1 qu'ils sont orthogonaux et peuvent être exprimés comme des intégrales de  $f(\mathbf{x})$ . Ainsi,

$$\int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f_0 \quad (4.4)$$

$$\int f(\mathbf{x}) \prod_{k \neq i} dx_k = f_0 + f_i(x_i) \quad (4.5)$$

$$\int f(\mathbf{x}) \prod_{k \neq i, j} dx_k = f_0 + f_i(x_i) + f_j(x_j) + f_{ij}(x_i, x_j) \quad (4.6)$$

Supposons maintenant que la fonction  $f(\mathbf{x})$  soit carrée intégrable. Ainsi toutes les fonctions  $f_{i_1 \dots i_s}$  sont également intégrables. La mise au carré de l'équation 4.1 et son intégration sur  $I^n$  mène à

$$\int f^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} - f_0^2 = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} \int f_{i_1 \dots i_s}^2 dx_{i_1} \dots x_{i_s} \quad (4.7)$$

On définit alors la variance totale

$$D = \int f^2(\mathbf{x})d\mathbf{x} - f_0^2 \quad (4.8)$$

et les variances conditionnelles qui sont

$$D_{i_1 \dots i_s} = \int f_{i_1 \dots i_s}^2 dx_{i_1} \dots x_{i_s} \quad (4.9)$$

On a également la relation suivante entre la variance totale et les variances conditionnelles

$$D = \sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} D_{i_1 \dots i_s} \quad (4.10)$$

Les indices de Sobol' aussi appelés indices de sensibilité sont alors définis comme étant les rapports

$$S_{i_1 \dots i_s} = \frac{D_{i_1 \dots i_s}}{D} \quad (4.11)$$

Les indices  $S_{i_1 \dots i_s}$  sont non-négatifs et vérifient la somme suivante

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1 \dots i_s} = 1 \quad (4.12)$$

Les indices de sensibilité peuvent traiter trois type de problème

- Classer des variables dans  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,
- Identifier les variables non-essentiels dans  $f(x_1, \dots, x_n)$ ,
- supprimer les facteurs d'ordre élevé dans l'équation 4.1.

Dans notre cas, notre problème est du second type.

### 4.2.2 Les indices de sensibilité par Monte-Carlo

Avant de développer les expressions des indices de sensibilité pour une approche dite de Monte-Carlo, il est nécessaire d'explicitier les relations entre indices de sensibilité de sous-ensembles de variables [62].

Considérons un jeu arbitraire de  $m$  variables,  $1 \leq m \leq n - 1$  qui sera désigné par une lettre  $\mathbf{y} = (x_{k_1}, \dots, x_{k_m})$  avec  $1 \leq k_1 < \dots < k_m \leq n$  et posons  $\mathbf{z}$  comme étant le jeu de  $n - m$  va-

riables complémentaires et donc  $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Soit  $\mathbf{K} = (k_1, \dots, k_m)$ , la variance correspondant au sous-ensemble  $\mathbf{y}$  peut être définie comme

$$D_{\mathbf{y}} = \sum_{s=1}^m \sum_{(i_1 < \dots < i_s) \in \mathbf{K}} D_{i_1 \dots i_s} \quad (4.13)$$

De manière similaire, on peut définir la variance  $D_{\mathbf{z}}$ . Il en vient la variance totale du sous-ensemble de variable  $\mathbf{y}$

$$D_{\mathbf{y}}^{tot} = D - D_{\mathbf{z}} \quad (4.14)$$

On définit alors l'indice de sensibilité totale sur les variables  $\mathbf{y}$

$$S_{\mathbf{y}}^{tot} = \frac{D_{\mathbf{y}}^{tot}}{D} \quad (4.15)$$

L'indice de sensibilité totale est un outil essentiel de l'analyse de sensibilité puisque il permet de mesurer l'impact de premier ordre mais aussi d'ordre supérieur (les interactions) des variables  $\mathbf{y}$ . On peut voir clairement que  $S_{\mathbf{y}}^{tot} = 1 - S_{\mathbf{z}}$  et que l'on a toujours  $0 \leq S_{\mathbf{y}} \leq S_{\mathbf{y}}^{tot} \leq 1$ . La situation extrême où  $S_{\mathbf{y}} = S_{\mathbf{y}}^{tot} = 0$  signifie que  $f(\mathbf{x})$  ne dépend pas de  $\mathbf{y}$ . La deuxième situation extrême où  $S_{\mathbf{y}} = S_{\mathbf{y}}^{tot} = 1$  signifie que  $f(\mathbf{x})$  ne dépend que de  $\mathbf{y}$ .

### Exemple

Supposons que  $n = 3$  et considérons deux sous-ensemble de variables :  $\mathbf{y} = (y_1)$  et  $\mathbf{z} = (z_2, z_3)$ . Dès lors,  $S_{(1)} = S_1$

$$S_{(1)}^{tot} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123} = 1 - S_{(2,3)} \quad (4.16)$$

Considérons maintenant deux autres sous-ensembles de variables :  $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$  et  $\mathbf{z} = (z_3)$ . Alors, il en vient

$$S_{(1,2)} = S_1 + S_2 + S_{12} \quad (4.17)$$

$$S_{(1,2)}^{tot} = S_1 + S_2 + S_{12} + S_{13} + S_{23} + S_{123} = 1 - S_3 \quad (4.18)$$

Les indices de sensibilité et les indices de sensibilité totale étant explicités, nous pouvons maintenant décrire leur estimateur par approche de Monte-Carlo [59, 62]. Il existe différent estimateur de ces indices de sensibilité, nous allons voir comment les calculer grâce à un jeu de réalisations. Par "réalisation" on entend ici le calcul d'une valeur de  $u$  correspondant à des valeurs d'entrée  $x_1, \dots, x_k$ . La variance  $D_{\mathbf{y}}$  d'un sous-ensemble  $\mathbf{y}$  est égale à

$$D_{\mathbf{y}} = \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f(\mathbf{y}, \mathbf{z}') d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\mathbf{z}' - f_0^2 \quad (4.19)$$

Cette intégrale peut être transformée

$$\int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')d\mathbf{y}d\mathbf{z}d\mathbf{z}' = \int d\mathbf{y} \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})d\mathbf{z} \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')d\mathbf{z}' = \int d\mathbf{y} \left[ \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})d\mathbf{z} \right]^2 \quad (4.20)$$

or,

$$\int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})d\mathbf{z} = f_0 + \sum_{s=1}^m \sum_{(i_1 < \dots < i_s) \in \mathbf{K}} f_{i_1 \dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \quad (4.21)$$

En mettant au carré et en intégrant sur  $d\mathbf{y} = dx_{k_1} \dots dx_{k_m}$ , on obtient :

$$\int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')d\mathbf{y}d\mathbf{z}d\mathbf{z}' = f_0^2 + \sum_{s=1}^m \sum_{(i_1 < \dots < i_s) \in \mathbf{K}} D_{i_1 \dots i_s} = f_0^2 + D_y \quad (4.22)$$

et cela est équivalent à l'équation 4.19. On peut alors aussi écrire

$$D_z = \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}', \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z}d\mathbf{y}' - f_0^2 \quad (4.23)$$

Ainsi, pour calculer  $S_y$  et surtout  $S_y^{tot}$  on se doit d'estimer les quatre intégrales :

$$\begin{aligned} f_0 &= \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ D + f_0 &= \int f^2(\mathbf{y}, \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ D_y + f_0^2 &= \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}, \mathbf{z}')d\mathbf{y}d\mathbf{z}d\mathbf{z}' \\ D_z + f_0^2 &= \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z})f(\mathbf{y}', \mathbf{z})d\mathbf{y}d\mathbf{z}d\mathbf{y}' \end{aligned}$$

Dès lors une méthode de Monte-Carlo peut être mise en œuvre [62,84]. Considérons deux points aléatoires  $\xi$  et  $\xi'$  qui suivent des lois connues dans  $I^n$  et posons également  $\xi = (\eta, \zeta), \xi' = (\eta', \zeta')$ . Chaque réalisation de Monte-Carlo requiert trois calculs du modèle :  $f(\xi) \equiv f(\eta, \zeta)$ ,

$f(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}')$  et  $f(\boldsymbol{\eta}', \boldsymbol{\zeta})$ . Après  $N$  réalisations, les estimations de Monte-Carlo sont obtenues par

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j) \longrightarrow f_0 \quad (4.24)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j)^2 \longrightarrow D + f_0^2 \quad (4.25)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j) f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}'_j) \longrightarrow D_{\mathbf{y}} + f_0^2 \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j) f(\boldsymbol{\eta}'_j, \boldsymbol{\zeta}_j) \longrightarrow D_{\mathbf{z}} + f_0^2 \quad (4.27)$$

La convergence stochastique désignée par " $\longrightarrow$ " implique une convergence absolue des quatre intégrales qui suit la convergence du carré de l'intégrale de  $f(\mathbf{x})$ .

Une approche de Monte-Carlo alternative a été développée par Jansen [61, 85]. Cette approche permet d'éviter les estimations négatives des indices de sensibilité totale lorsqu'ils sont très faibles. L'expression alternative pour la variance conditionnelle  $D_{\mathbf{y}}^{tot}$  est la suivante

$$D_{\mathbf{y}}^{tot} = \frac{1}{2} \int [f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - f(\mathbf{y}', \mathbf{z})]^2 d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\mathbf{y}' \quad (4.28)$$

La démonstration qui prouve que cette expression correspond à l'expression classique (équation 4.14) de  $D_{\mathbf{y}}^{tot}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int [f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - f(\mathbf{y}', \mathbf{z})]^2 d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\mathbf{y}' \\ &= \frac{1}{2} \int f^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} + \frac{1}{2} \int f^2(\mathbf{y}', \mathbf{z}) d\mathbf{y}' d\mathbf{z} - \int f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) f(\mathbf{y}', \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} d\mathbf{y}' \\ &= \int f^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} - (D_{\mathbf{z}} + f_0^2) \\ &= D - D_{\mathbf{z}} \\ &= D_{\mathbf{y}}^{tot} \end{aligned}$$

L'estimation par Monte-Carlo de l'expression (4.28) est la suivante

$$\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N [f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j) - f(\boldsymbol{\eta}'_j, \boldsymbol{\zeta}_j)]^2 \longrightarrow D_{\mathbf{y}}^{tot} \quad (4.29)$$

Dès lors on peut développer le même type d'estimateur pour  $D_{\mathbf{z}}^{tot}$

$$\frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N [f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}_j) - f(\boldsymbol{\eta}_j, \boldsymbol{\zeta}'_j)]^2 \rightarrow D_{\mathbf{z}}^{tot} \quad (4.30)$$

### 4.3 Impact des paramètres du modèle de canal

#### 4.3.1 Les paramètres d'entrée

L'analyse de sensibilité consiste à "mesurer" l'impact des paramètres du modèle de canal en environnement intérieur [19] sur l'exposition d'un modèle de corps. L'exposition se faisant de manière aléatoire, nous avons développé les expressions statistiques de l'exposition au chapitre 2. Nous rappelons ces expressions qui joueront le rôle des sorties dans notre analyse de sensibilité.

$$\begin{aligned} \langle DAS \rangle &= \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(s),\theta}^c}{N_{MPCs}} \sum_{l=1}^{N_{MPCs}} \left( nDAS_{c,l}^{\theta} + \frac{nDAS_{c,l}^{\phi}}{\chi_{(s),c}} \right) \\ &+ \sum_{c=1}^{N_c} \frac{P_{(d),\theta}^c}{N_{DMCs}} \sum_{l=1}^{N_{DMCs}} \left( nDAS_{c,l}^{\theta} + \frac{nDAS_{c,l}^{\phi}}{\chi_{(d),c}} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{DAS}^2 &= \sum_{c,e}^{N_c} \sum_{j \neq l}^{N_{MPCs} + N_{DMCs}} \frac{P_{(i),\theta}^c P_{(k),\theta}^e}{N_1 N_2} \left( nDAS_{c,j}^{\theta} nDAS_{e,l}^{\theta} + \frac{nDAS_{c,j}^{\phi} nDAS_{e,l}^{\phi}}{\chi_{(i),c} \chi_{(k),e}} \right) \\ &\begin{cases} i = d \text{ et } N_1 = N_{DMCs} & \text{si } j > N_{MPCs} \\ i = s \text{ et } N_1 = N_{MPCs} & \text{si } j \leq N_{MPCs} \\ k = d \text{ et } N_2 = N_{DMCs} & \text{si } l > N_{MPCs} \\ k = s \text{ et } N_2 = N_{MPCs} & \text{si } l \leq N_{MPCs} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Comme cela a été présenté au chapitre 2 et à la vue des expressions 4.31 et 4.32, on constate que celles-ci dépendent des paramètres généraux des *clusters* et des paramètres des MPCs et DMCs. Cependant, les paramètres des MPCs et DMCs dépendent des paramètres généraux des *clusters*. Par exemple, les angles d'incidence des MPCs sont déterminés par des distributions statistiques. Les paramètres statistiques de ces distributions sont les angles d'incidence des *clusters* ainsi que leur étalements angulaires. Dès lors, on peut considérer que les paramètres des MPCs et DMCs font partis du processus physique qui mène aux sorties  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ . L'étude de l'impact des paramètres du modèle de canal consiste alors à calculer les indices de sensibilité pour les paramètres de *clusters* et non pour les paramètres des MPCs et DMCs. Le tableau 4.1 présente les paramètres dont on va étudier l'impact sur les sorties  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ .

Tableau 4.1 – Liste des paramètres d’entrée

Symbole	Fonction
$\mu_\phi^c$	Angle azimutal
$\mu_\theta^c$	Angle d’élévation
$\Delta\phi_c$	Étalement angulaire spéculaire dans la direction azimutal
$\Delta\theta_c$	Étalement angulaire spéculaire dans la direction d’élévation
$\Delta\phi_c^{(d)}$	Étalement angulaire diffus dans la direction azimutal
$\Delta\theta_c^{(d)}$	Étalement angulaire diffus dans la direction d’élévation
$\chi_{(s),c}$	XPD spéculaire
$\chi_{(d),c}$	XPD diffus
$DPD$	Distance par rapport à la puissance diffuse

Dans les expressions  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ , il apparaît les puissances diffuses  $P_{(d),\theta}^c$  et spéculaires  $P_{(s),\theta}^c$  des *clusters*, or, celles-ci ne sont pas mentionnées dans le tableau des variables d’entrée dont on va étudier l’impact. La raison est que les puissances diffuses et spéculaires dépendent de la puissance totale du *cluster*  $P_{tot}^c$  et de la distance par rapport à la partie diffuse  $DPD$  [19]. Ainsi, les parties spéculaires et diffuses de la puissance peuvent s’écrire

$$P_{(s),\theta}^c = 10^{\frac{P_{tot}^c}{10}} - 10^{\frac{P_{tot}^c - DPD}{10}} \quad (4.33)$$

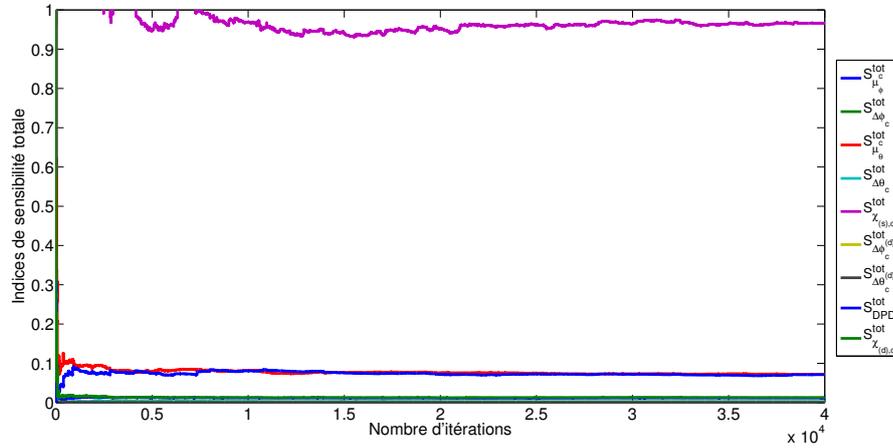
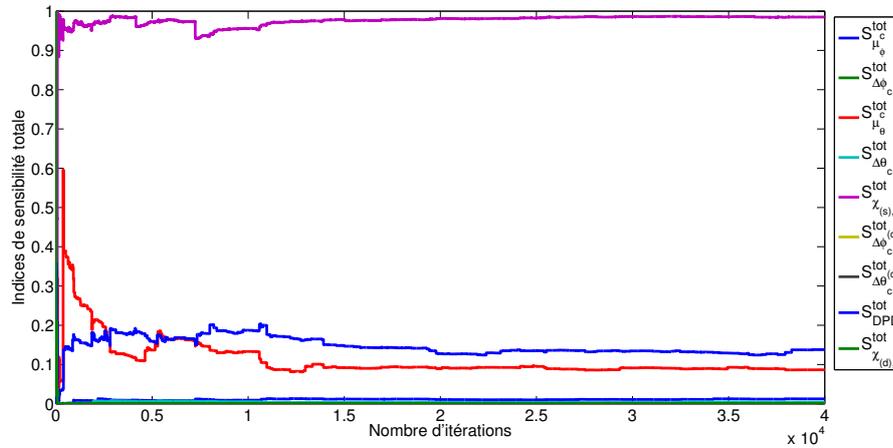
$$P_{(d),\theta}^c = 10^{\frac{P_{tot}^c - DPD}{10}} \quad (4.34)$$

Il a été montré que la puissance totale d’un *cluster* suivait une loi statistique décroissante en fonction du retard de propagation. Cependant, il est nécessaire que notre étude de sensibilité soit cohérente et que les réalisations de Monte-Carlo se fassent à puissance totale constante c’est-à-dire que l’on pose que  $P_{tot}^c = 1W$ . Cela signifie que chaque *cluster* a une puissance totale de 1W. De plus, ceci permet d’étudier l’impact de  $DPD$ , qui va donc donner l’influence de la partie diffuse sur l’exposition.

L’analyse de sensibilité se fait également à nombre de *clusters* constant, les indices de sensibilité totale ont été calculés pour Roberta exposée à un, deux ou trois *clusters*. Le nombre de réalisations afin d’atteindre la convergence s’élève à 40 000.

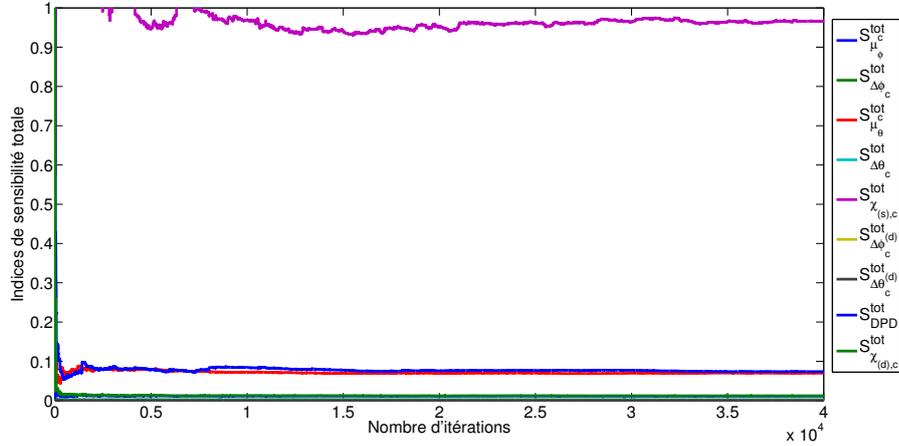
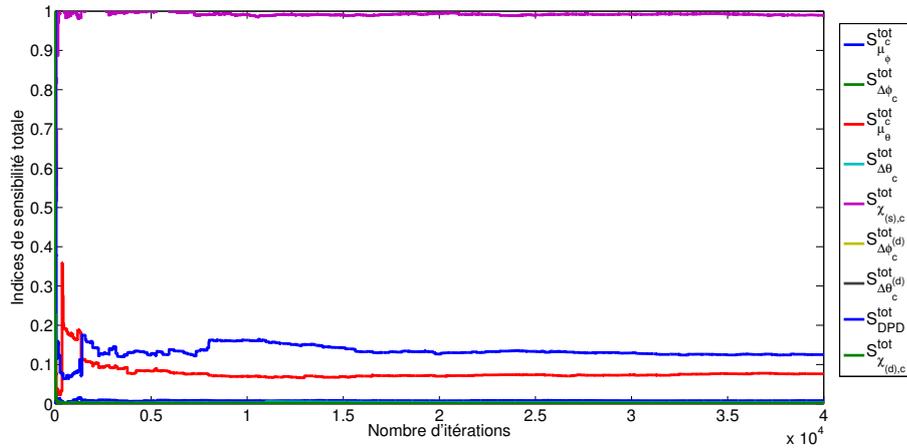
### 4.3.2 Analyse des indices de sensibilité totale

Les figures 4.1 et 4.2 représentent les convergences des indices de sensibilité totale en fonction du nombre de réalisations pour Roberta exposée à un *cluster*, pour l’espérance du *DAS* et sa variance.

FIGURE 4.1 – Convergence des indices de sensibilité de  $\langle DAS \rangle$  pour un *cluster*.FIGURE 4.2 – Convergence des indices de sensibilité de  $\sigma_{DAS}^2$  pour un *cluster*.

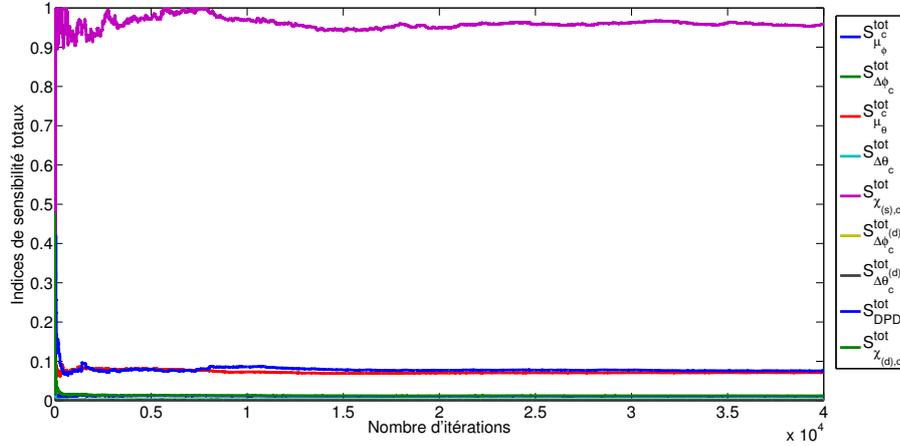
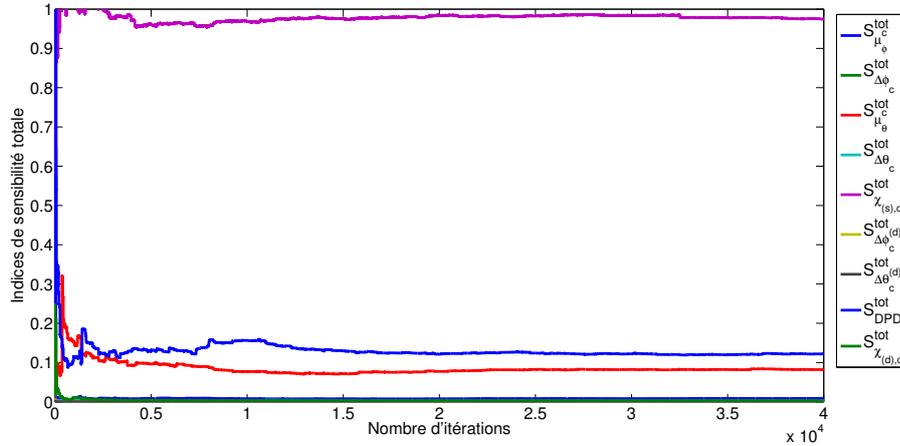
Les figures 4.3 et 4.4 représentent les convergences des indices de sensibilité totale en fonction du nombre de réalisations pour Roberta exposée à deux *clusters*, pour l'espérance du *DAS* et sa variance.

Les figures 4.5 et 4.6 représentent les convergences des indices de sensibilité totale en fonction du nombre de réalisations pour Roberta exposée à trois *clusters*, pour l'espérance du *DAS* et sa variance.

FIGURE 4.3 – Convergence des indices de sensibilité de  $\langle DAS \rangle$  pour deux *clusters*.FIGURE 4.4 – Convergence des indices de sensibilité de  $\sigma_{DAS}^2$  pour deux *clusters*.

Comme on peut le voir, sur les figures 4.1 à 4.6, la convergence des estimateurs des indices de sensibilité totale est atteinte pour 40 000 itérations. Ceci implique qu'il est possible d'étudier l'impact des paramètres de canal en utilisant ces estimateurs des indices de sensibilité. À noter que la convergence des estimateurs d'indices est plus lente pour la variance du *DAS* que pour son espérance.

Le tableau 4.2 rassemble les indices de sensibilité totale finaux, c'est à dire à la convergence

FIGURE 4.5 – Convergence des indices de sensibilité de  $\langle DAS \rangle$  pour trois *clusters*.FIGURE 4.6 – Convergence des indices de sensibilité de  $\sigma_{DAS}^2$  pour trois *clusters*.

après 40 000 réalisations de Monte-Carlo. L'exploitation des valeurs des indices de sensibilité totale permet de former un classement des variables du modèle de canal considérées des plus influentes aux moins influentes. Les classements sont regroupés dans le tableau 4.3. Les paramètres du canal les plus influents dans l'ordre sont :

- le *cross polarisation ratio* spéculaire  $\chi_{(s),c}$ ,
- la distance par rapport à la partie diffuse *DPD*,

Tableau 4.2 – Résultats finaux des indices de sensibilité totale sur  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$  pour les différents scénarios d'exposition pour Roberta

	1 cluster		2 clusters		3 clusters	
	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$
$S_{\mu_\phi^c}^{tot}$	0.011587	0.012486	0.011376	0.008194	0.011328	0.008471
$S_{\Delta\phi_c}^{tot}$	0.000800	0.000865	0.000759	0.000780	0.000772	0.000794
$S_{\mu_\theta^c}^{tot}$	0.072214	0.086475	0.070002	0.076249	0.071322	0.081965
$S_{\Delta\theta_c}^{tot}$	0.002915	0.004258	0.002553	0.003083	0.002544	0.002894
$S_{\chi_{(s),c}}^{tot}$	0.965409	0.985109	0.965409	0.989691	0.958708	0.974672
$S_{\Delta\phi_c^{(d)}}^{tot}$	0.000223	0.000009	0.000203	0.000024	0.000206	0.000043
$S_{\Delta\theta_c^{(d)}}^{tot}$	0.000495	0.000015	0.000510	0.000059	0.000498	0.000098
$S_{DPD}^{tot}$	0.071046	0.137761	0.073652	0.125103	0.075503	0.121749
$S_{\chi_{(d),c}}^{tot}$	0.012872	0.001276	0.012228	0.002063	0.012232	0.003142

- et l'angle d'incidence d'élévation du *cluster*  $\mu_\theta^c$ .

Ces trois paramètres sont toujours les trois premiers dans le classement d'influence des paramètres. Il faut noter cependant que l'ordre de grandeur de  $\mu_\theta^c$  est inférieur à celui de  $\chi_{(s),c}$  et  $DPD$ .

La première position, briguée par  $\chi_{(s),c}$ , est assez logique puisque ce paramètre va directement jouer sur le niveau de la partie relative à la polarisation horizontale comme on peut le voir dans les équations 4.31 et 4.32.

De la même manière, la  $DPD$  va déterminer les niveaux de puissance spéculaire et diffuse par *cluster*, dès lors, elle est directement à la somme des  $DAS$  dans les expressions 4.31 et 4.32.

L'angle d'incidence d'élévation des *clusters* se retrouve également dans les variables les plus influentes car il est l'angle qui apporte le plus de variabilité. En effet, la surface apparente du corps varie le plus avec l'angle d'incidence d'élévation des ondes [14].

On peut définir une seconde catégorie de paramètres qui sont moyennement influents. Ce sont la *cross polarisation ratio* diffuse  $\chi_{(d),c}$ , l'angle d'incidence azimutal des *clusters*  $\mu_\phi^c$ , l'étalement angulaire d'élévation  $\Delta\phi_c$  et l'étalement angulaire d'élévation  $\Delta\theta_c$ . Ceux-ci occupent des quatrièmes au septièmes places mais avec des places différentes en fonction du nombre de *clusters* envoyés sur Roberta. Les variables les moins influentes et qui se retrouvent toujours à la même place sont l'étalement angulaire d'élévation diffus  $\Delta\theta_c^{(d)}$  et l'étalement angulaire azimutal diffus  $\Delta\phi_c^{(d)}$ .

Le calcul des indices de sensibilité a permis d'observer les différents catégories de paramètres en fonction de leur influence. Cette étude qualitative va nous permettre d'adapter le modèle de

canal par la réduction des paramètres qui définissent l'exposition.

Tableau 4.3 – Classement décroissant d'influence des paramètres du canal sur  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$  pour les différents scénarios d'exposition de Roberta

	1 cluster		2 clusters		3 clusters	
	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$
#1	$\chi_{(s),c}$	$\chi_{(s),c}$	$\chi_{(s),c}$	$\chi_{(s),c}$	$\chi_{(s),c}$	$\chi_{(s),c}$
#2	$\mu_\theta^c$	<i>DPD</i>	<i>DPD</i>	<i>DPD</i>	<i>DPD</i>	<i>DPD</i>
#3	<i>DPD</i>	$\mu_\theta^c$	$\mu_\theta^c$	$\mu_\theta^c$	$\mu_\theta^c$	$\mu_\theta^c$
#4	$\chi_{(d),c}$	$\mu_\phi^c$	$\chi_{(d),c}$	$\mu_\phi^c$	$\chi_{(d),c}$	$\mu_\phi^c$
#5	$\mu_\phi^c$	$\Delta\theta_c$	$\mu_\phi^c$	$\Delta\theta_c$	$\mu_\phi^c$	$\chi_{(d),c}$
#6	$\Delta\theta_c$	$\chi_{(d),c}$	$\Delta\theta_c$	$\chi_{(d),c}$	$\Delta\theta_c$	$\Delta\theta_c$
#7	$\Delta\phi_c$	$\Delta\phi_c$	$\Delta\phi_c$	$\Delta\phi_c$	$\Delta\phi_c$	$\Delta\phi_c$
#8	$\Delta\theta_c^{(d)}$	$\Delta\theta_c^{(d)}$	$\Delta\theta_c^{(d)}$	$\Delta\theta_c^{(d)}$	$\Delta\theta_c^{(d)}$	$\Delta\theta_c^{(d)}$
#9	$\Delta\phi_c^{(d)}$	$\Delta\phi_c^{(d)}$	$\Delta\phi_c^{(d)}$	$\Delta\phi_c^{(d)}$	$\Delta\phi_c^{(d)}$	$\Delta\phi_c^{(d)}$

## 4.4 Adaptation du modèle de canal pour la dosimétrie

### 4.4.1 Méthode pour fixer les variables non-essentiels

L'adaptation du modèle de canal consiste à réduire les paramètres du modèle de canal qui sont peu ou pas du tout influents. Néanmoins, les indices de sensibilité totale ne permettent pas à eux seuls d'éliminer les variables non-influentes. Dans [62, 86], Sobol' développe la procédure à suivre pour fixer une ou plusieurs variables non-influentes.

Reconsidérons  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  comme étant un point de l'hypercube de  $n$  dimensions. On désigne par  $\mathbf{y}$  un sous-ensemble arbitraire de  $s$  variables et  $\mathbf{z}$  le sous-ensemble des  $n - s$  variables complémentaires,  $1 \leq s \leq n - 1$ . Ainsi  $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{y}, \mathbf{z})$  et  $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}d\mathbf{z}$ . Le sous-ensemble des variables  $\mathbf{z}$  peut être vu comme non-essentiel si  $S_{\mathbf{z}}^{tot} \ll 1$ . La procédure veut que l'on fixe une valeur  $\mathbf{z}_0$  et d'utiliser  $f(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)$  comme une approximation de  $f(\mathbf{x})$ . L'erreur d'approximation dépend alors du choix de  $\mathbf{z}_0$  :

$$\delta(\mathbf{z}_0) = \frac{1}{D} \int [f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)]^2 d\mathbf{x} \quad (4.35)$$

où  $D$  est la variance de  $f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Il est également possible de calculer l'erreur d'approximation par la méthode de Monte-Carlo par la relation suivante

$$\frac{1}{DN} \sum_{i=1}^N [f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)]^2 \longrightarrow \delta(\mathbf{z}_0) \quad (4.36)$$

L'erreur d'approximation représente le pourcentage d'erreur que va impliquer cette approximation. La démonstration suivante montre la relation entre l'erreur d'approximation et l'indice de sensibilité totale [86]. La décomposition *ANOVA* de  $f(\mathbf{x})$  peut être écrite de la manière suivante

$$f(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = f_0 + g_1(\mathbf{y}) + g_2(\mathbf{z}) + g_{12}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \quad (4.37)$$

où  $g_1(\mathbf{y})$  est la somme de tous les termes qui dépendent seulement des variables de  $\mathbf{y}$ ,  $g_2(\mathbf{z})$  est la somme de tous les termes qui dépendent seulement des variables de  $\mathbf{z}$  et  $g_{12}(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  constitue le reste. En prenant la fonction (4.37) au carré et en intégrant sur  $d\mathbf{x} = d\mathbf{y}d\mathbf{z}$  on obtient la relation  $D = D_{\mathbf{y}} + D_{\mathbf{z}} + D_{\mathbf{yz}}$  dont découle les indices de sensibilité totale. Sachant que d'après la représentation *ANOVA*,  $\int g_1 d\mathbf{y} = \int g_2 d\mathbf{z} = \int g_{12} d\mathbf{y} = \int g_{12} d\mathbf{z} = 0$ , l'expression de  $\delta(\mathbf{z}_0)$  peut alors être développée :

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{z}_0) &= \frac{1}{D} \int [g_2(\mathbf{z}) + g_{12}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) - g_2(\mathbf{z}_0) - g_{12}(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)]^2 d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{D} \int [g_2^2(\mathbf{z}) + g_{12}^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}) + g_2^2(\mathbf{z}_0) + g_{12}^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0)] d\mathbf{y}d\mathbf{z} \\ &= \frac{1}{D} \left[ D_{\mathbf{z}} + D_{\mathbf{yz}} + g_2^2(\mathbf{z}_0) + \int g_{12}^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0) d\mathbf{y} \right] \\ &= S_z^{tot} + \frac{1}{D} \left[ g_2^2(\mathbf{z}_0) + \int g_{12}^2(\mathbf{y}, \mathbf{z}_0) d\mathbf{y} \right] \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le résultat final de la démonstration 4.38 montre que  $\delta(\mathbf{z}_0) \geq S_z^{tot}$ . On peut également observer que  $\int \delta(\mathbf{z}_0) d\mathbf{z}_0 = 2S_z^{tot}$ . La fonction  $\delta(\mathbf{z}_0)$  correspond bien à l'erreur d'approximation qui est faite lorsque  $\mathbf{z}$  est fixé à  $\mathbf{z}_0$ . L'avantage des méthodes d'analyse de la sensibilité basées sur les variances est de pouvoir traiter un groupe de variables comme si celles-ci étaient une unique variable.

#### 4.4.2 Fixer des paramètres du modèle de canal

Afin de simplifier le modèle de canal, il faut fixer les variables peu influentes du modèle de canal. Nous choisirons de les fixer à leurs valeurs moyennes. La procédure choisie est de fixer une variable puis de calculer l'erreur d'approximation  $\delta(\mathbf{z}_0)$ , si celle-ci est relativement faible (inférieur à 5%) on peut alors fixer une deuxième variable peu influente puis également observer l'erreur d'approximation pour ces deux paramètres fixés. Évidemment, on fixe les paramètres

des moins influents aux plus influents afin de permettre la fixation du plus grand nombre de paramètre. La procédure est répétée et arrêtée lorsque l'on arrive à une erreur d'approximation supérieure à 5%. Le modèle de canal sera considéré comme adapté lorsque les variables peu influentes seront fixées et dont l'erreur induite sera connue.

L'étude est menée dans le cas où l'on a considéré trois *clusters*. Le tableau 4.4 présente les erreurs d'approximation de l'espérance du *DAS* et de sa variance pour les différents jeux de paramètres considérés constants. La première étape fut de fixer la valeur de  $\Delta\phi_c^{(d)}$  qui est le

Tableau 4.4 – Erreur d'approximation (en pourcentage) sur  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$  pour différents  $\mathbf{z}_0$

	$\langle DAS \rangle$	$\sigma_{DAS}^2$
$\mathbf{z}_0 = \Delta\phi_c^{(d)}$	0.04%	0.001%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)})$	0.13%	0.04%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c)$	0.25%	0.15%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c, \chi_{(d),c})$	2.08%	0.53%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c, \chi_{(d),c}, \Delta\theta_c)$	2.48%	0.99%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c, \chi_{(d),c}, \Delta\theta_c, \mu_\phi^c)$	6.06%	3.23%
$\mathbf{z}_0 = (\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c, \chi_{(d),c}, \Delta\theta_c, \mu_\phi^c, \mu_\theta^c)$	47.3%	42.6%

paramètre dont l'indice de sensibilité totale est le plus faible. La valeur de  $\Delta\phi_c^{(d)}$  a été fixé à  $5.10^\circ$  qui est égale à la valeur moyenne de  $\Delta\phi_c^{(d)}$  lorsque celle-ci est une variable aléatoire. On peut remarquer que  $\delta(\mathbf{z}_0) = 4 \times 10^{-4}$  est égale à deux fois  $S_{\mu_\phi^c}^{tot}$  ce qui corrobore le résultat de la démonstration 4.38. Au vu de la faiblesse de l'erreur d'approximation de l'espérance et de la variance, on peut considérer que l'étalement angulaire diffus dans la direction azimutale a non seulement un impact très faible sur l'exposition mais qu'en plus sa fixation induit une erreur d'approximation quasiment nulle.

Logiquement, l'étalement angulaire diffus dans la direction d'élévation a également été fixé, sa valeur est de  $\Delta\theta_c^{(d)} = 2.6^\circ$ . La fixation des deux étalements angulaires diffus induit une erreur d'approximation qui reste très faible. On peut en conclure que ces paramètres n'ont aucune influence sur l'exposition des personnes.

Le paramètre suivant qui a été fixé à sa valeur moyenne ( $\Delta\phi_c = 20^\circ$ ) est l'étalement angulaire spéculaire. Le fait de fixer ce troisième paramètre fait quasiment doubler l'erreur d'approximation pour l'espérance et la multiplie par trois pour la variance mais celles-ci restent tout de même très faibles. On peut en conclure que les trois paramètres  $(\Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \Delta\phi_c)$  peuvent être fixer tout en maintenant une erreur d'approximation négligeable.

Étant donné que l'erreur d'approximation induite par trois paramètres est toujours aussi faible, on peut continuer à fixer d'autres paramètres. Le *cross-polarisation ratio* diffus a été fixé à sa

valeur moyenne,  $\chi_{(d),c} = 3.52$ . Il faut noter que l'indice de sensibilité totale de ce paramètre est un ordre de grandeur au dessus de celui de  $\Delta\phi_c$  pour l'espérance du *DAS* et du même ordre de grandeur pour la variance. On peut donc s'attendre à une hausse de l'erreur d'approximation. En effet, on voit au tableau 4.4 que l'erreur d'approximation a fortement augmenté pour arriver à 2.08% en ce qui concerne l'espérance du *DAS*. Pour la variance, l'erreur d'approximation croit mais reste faible (inférieur à 1%).

Le paramètre suivant qui a été fixé est l'étalement angulaire spéculaire d'élévation ( $\Delta\theta_c = 12.6^\circ$ ). On constate que l'erreur d'approximation reste au même niveau que précédemment. L'erreur qu'implique la fixation de ces cinq paramètres est plutôt faible et acceptable (2.48% pour l'espérance, 0.99% pour la variance).

Le prochain paramètre à fixer est l'angle d'incidence azimutal du *cluster*. Celui-ci a été fixé à  $90^\circ$ , angle pour lequel l'exposition est la plus élevée. On remarque la fixation de ce paramètre implique un accroissement conséquent de l'erreur d'approximation pour l'espérance qui atteint un peu moins du double de l'erreur d'approximation dans la situation précédente tandis que pour la variance l'erreur est multipliée par plus de trois (6.06% pour l'espérance, 3.23% pour la variance). L'erreur d'approximation pour l'espérance du *DAS* a passé la barre des 5%, la procédure veut que une fois ce niveau dépassé la fixation des paramètres doit être stoppée. Cependant, l'erreur d'approximation pour la variance du *DAS* reste inférieure au seuil des 5%, nous pouvons fixer un nouveau paramètre pour voir l'erreur d'approximation induite. La procédure veut que l'on essaye de fixer le prochain paramètre le moins influent, c'est l'angle d'élévation des *clusters*, celui-ci est fixé à  $90^\circ$ . On se rend compte que pour l'espérance comme pour la variance, les erreurs d'approximation explosent pour atteindre plus de 47% pour l'espérance et près de 43% pour la variance. Dans ce contexte la procédure de fixation des paramètres du canal peut être arrêtée puisque on a dépassé le seuil des 5% d'erreur d'approximation.

### 4.4.3 Le modèle de canal adapté à la dosimétrie

Fixer des paramètres du modèle de canal, nous a permis de passer d'une espérance de *DAS* (ou d'une variance) dépendant de neuf paramètres à une espérance dépendant uniquement de quatre paramètres.

$$\begin{aligned} & \langle DAS \rangle \left( \mu_\phi^c, \mu_\theta^c, \Delta\phi_c, \Delta\theta_c, \Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \chi_{(s),c}, \chi_{(d),c}, DPD \right) \\ & \xrightarrow{\text{fixation de paramètres}} \langle DAS \rangle \left( \mu_\phi^c, \mu_\theta^c, \chi_{(s),c}, DPD \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_{DAS}^2 \left( \mu_\phi^c, \mu_\theta^c, \Delta\phi_c, \Delta\theta_c, \Delta\phi_c^{(d)}, \Delta\theta_c^{(d)}, \chi_{(s),c}, \chi_{(d),c}, DPD \right) \\ & \xrightarrow{\text{fixation de paramètres}} \sigma_{DAS}^2 \left( \mu_\phi^c, \mu_\theta^c, \chi_{(s),c}, DPD \right) \end{aligned}$$

Les variables qui ont été fixées le sont aux valeurs suivantes :

$$(\Delta\phi_c^{(d)} = 5.10^\circ, \Delta\theta_c^{(d)} = 2.6^\circ, \Delta\phi_c = 20^\circ, \chi_{(d),c} = 3.52, \Delta\theta_c = 12.6^\circ)$$

Avec ces valeurs fixées, les modèles d'espérance et de variance à quatre paramètres sont des approximations dont l'erreur est inférieure à 5%.

La sensibilité à ses quatre paramètres du canal de la part des moments statistiques de l'exposition peut être analysée au cas par cas. Commençons par les paramètres angulaires  $\mu_\theta^c$  et  $\mu_\phi^c$ , ils sont les seuls paramètres angulaires qui ont un impact conséquent sur l'exposition. Ceci peut s'expliquer par le fait que les *clusters* arrivant de tous les directions possibles, le degré de liberté qu'est l'élévation est celui qui va impliquer le plus de variabilité (par rapport à l'azimutal). Il suffit de comparer les surfaces apparentes du corps dans les cas où une onde plane arrive au dessus de la tête du corps humain par rapport à la situation où une onde plane arrive sur l'abdomen du corps humain. Les directions d'arrivée des composantes multi-trajets spéculaires et diffuses étant principalement déterminées par les angles d'incidence des *clusters*, il est logique que ceux-ci soient des paramètres influents.

La dépendance par rapport à la *cross polarisation ratio*, quant à elle, est due à la proportionnalité de l'inverse de cette grandeur par rapport aux valeurs de *DAS* induites par chaque MPCs polarisées horizontalement. Il était prévisible que  $\chi_{(s),c}$  ait un grand impact sur l'espérance et la variance du *DAS*, cependant, l'analyse de sensibilité révèle que c'est un paramètre prépondérant du modèle de canal.

Enfin, la présence de la *DPD* est logique puisque notre analyse de sensibilité est à puissance totale de *cluster* constante afin d'avoir des réalisations de Monte-Carlo cohérentes les unes avec les autres. Dès lors, la *DPD* est le paramètre qui va déterminer l'écart entre puissance spéculaire et diffuse. La *DPD* représentant jusqu'à 30% de la puissance totale, il est logique que ce paramètre soit également un paramètre important dont dépend l'exposition.

## 4.5 Exemple d'utilisation du modèle de canal adapté

Le modèle de canal adopté peut alors être utilisé de diverses manières. Nous présentons ici un exemple concret d'application du modèle. L'ETSI (*European Telecommunications Standards Institut*) est un organisme de l'Union Européenne qui fixe les normes sur les technologies sans-fils. Cette institution s'occupe, en autres, de fixer les niveaux maximum d'émission des points d'accès sans-fils ou routeur qui suivent le protocole 802.11(a, b, g ou n) WLAN (*Wireless Local Area Network*) [87]. L'ETSI impose aux fournisseurs d'équipements de type point d'accès sans-fil à ce que ces équipements, à la fréquence de 2.4 GHz, n'émettent pas plus de 100 mW en terme de Puissance Isotrope Rayonnante Équivalente (PIRE). L'analyse de sensibilité a été faite en utilisant une puissance par *cluster* de 1 W. L'application que l'on va faire du modèle de canal adapté à la dosimétrie se fera dans un cadre plus proche de la réalité en utilisant la

norme imposée par l'ETSI. La puissance par *cluster* est alors

$$P_{tot}^c = \frac{100}{12} \text{mW} \quad (4.39)$$

car le modèle de canal nous apporte qu'il y a en moyenne douze *clusters* incidents en *in-door* [18–20]. En 4.4.3, on a montré que le modèle de canal adapté dépendait de trois paramètres dont il faut générer les distributions. Les autres paramètres sont fixés aux valeurs indiquées en 4.4.3. Les valeurs de  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}^2$  ont été calculées pour des distributions de  $(\mu_\phi^c, \mu_\theta^c, \chi_{(s),c}, DPD)$  de 10 000 éléments.

Les figures 4.7 et 4.8 représentent les fonctions de répartition des paramètres de sortie  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}^2$ . Par le critère d'Akaike, on a comparé les fonctions de répartition de  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}^2$  avec celles des lois avec celles des lois normale, log-normale, Rayleigh, Weibull, Exponentielle, poisson, Laplace, Gamma et Rice. Les résultats du critère d'Akaike montrent que les distributions qui correspondent le mieux à nos fonctions de répartition sont les fonctions de répartition de type log-normale. Les paramètres des lois log-normales sont les suivants : pour  $\langle DAS \rangle$ , ( $\mu = -13.30, \sigma = 0.2199$ ) et pour  $\sigma_{DAS}^2$ , ( $\mu = -27.24, \sigma = 0.3809$ ). Ces résultats nous ont permis de superposer les lois log-normales aux fonctions de répartition de  $\langle DAS \rangle$  et de  $\sigma_{DAS}^2$ .

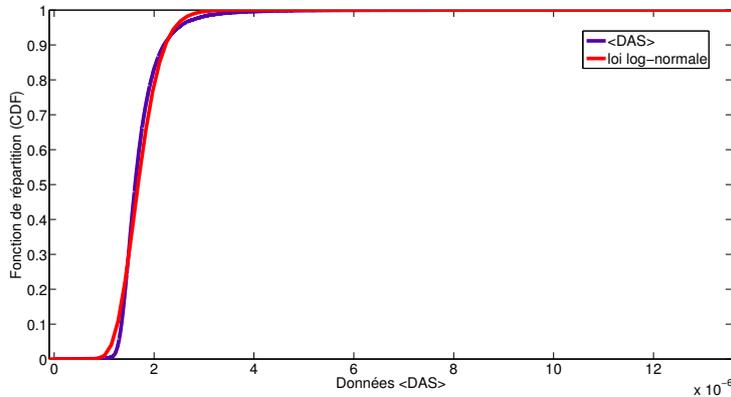


FIGURE 4.7 – Fonction de répartition de  $\langle DAS \rangle$  avec une loi log-normale ajustée.

La conclusion que l'on peut tirer de cet exemple d'application du modèle de canal adapté à la dosimétrie est que les valeurs de  $\langle DAS \rangle$  et leurs écart-types sont bien inférieurs à la norme imposée par l'ICNIRP. En effet, les valeurs de  $\langle DAS \rangle$  sont inférieures à l'ordre de grandeur de  $10^{-4} \text{W/kg}$ , or, la norme de l'ICNIRP est fixée à  $0.08 \text{W/kg}$ . Cela signifie que pour une puissance de  $100 \text{mW}$  à la source et en considérant que l'environnement n'induit pas de pertes, la norme de l'ICNIRP n'est pas dépassée.

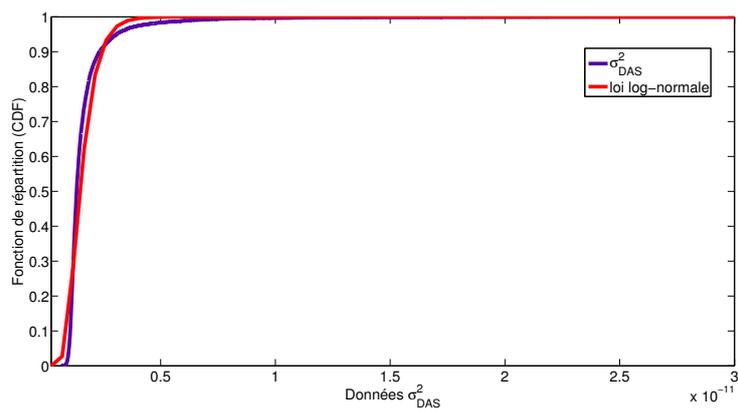


FIGURE 4.8 – Fonction de répartition de  $\sigma_{DAS}^2$  avec une loi log-normale ajustée.

# Chapitre 5

## Conclusion

La présente thèse a permis d'étudier l'exposition des personnes aux ondes électromagnétiques en environnement complexe. Depuis deux décennies, le domaine de la dosimétrie non-ionisante a connu un essor remarquable notamment à travers l'émergence de méthodes numériques et expérimentales de calcul de la dose absorbée par des modèles de corps anatomiques. Le débat sur l'innocuité des ondes électromagnétiques a poussé la communauté scientifique à accroître les recherches en dosimétrie, particulièrement dans la prise en compte du caractère aléatoire des conditions d'exposition des personnes. Au cœur de l'intégration de la variabilité dans la dosimétrie, cette étude prend en considération le caractère stochastique de l'exposition et débouche sur de la dosimétrie en environnement complexe. Pour cela, plusieurs outils aux objectifs variés ont été mis au point.

### Étude statistique de l'exposition

L'exploitation d'un modèle de canal MIMO GBSCM (*Geometry Based Stochastic Channel Model*) a conduit à identifier le caractère aléatoire des paramètres du canal notamment l'amplitude des rayons se propageant dans l'environnement *indoor*. De ce constat est née la nécessité de développer les deux premiers moments du *DAS* sur l'amplitude complexe aléatoire afin d'analyser l'exposition de manière statistique. Ces moments statistiques s'expriment en fonction des valeurs de *DAS* induites par chaque composante multi-trajet spéculaire ou diffuse. Ces expressions analytiques permettent d'éliminer l'amplitude aléatoire des composantes multi-trajet et d'étudier statistiquement l'exposition. Au delà de l'utilisation qui a été faite de ces expressions analytiques, il est possible de les utiliser dans d'autres scénarios, pour n'importe quel modèle de corps ou enfin de réadapter ces expressions pour des valeurs de *DAS* locales. Ces expressions ont été appliquées à un modèle de corps simplifié. Puis, sur ce même modèle, des réalisations d'exposition ont été effectuées avec différentes valeurs d'amplitude à chaque réalisation. Cette

comparaison entre le calcul analytique et la méthode de Monte-Carlo a montré la convergence des métriques estimées par Monte-Carlo vers les résultats du calcul analytique et surtout l'efficacité des métriques analytiques développés au vue du nombre de réalisation nécessaire pour converger vers  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ .

## La méthode du krigeage pour la dosimétrie

Les calculs de dosimétrie numérique FDTD contenant un corps entier sont connus pour être coûteux en temps de calcul. De plus, les expressions analytiques de  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$  s'expriment en fonction des valeurs  $DAS$  dans le cadre d'une exposition pour chaque composante multi-trajet. Dans l'état, il aurait été nécessaire de lancer des calculs FDTD pour chaque direction d'arrivée pour les deux polarisations horizontale et verticale, ce qui est évidemment impossible. Il s'est alors montré nécessaire d'utiliser une méthode d'interpolation efficace permettant d'avoir ces valeurs de  $DAS$  pour toutes les angles d'incidence et pour les deux polarisations. Notre choix s'est porté vers la méthode du krigeage qui a prouvé son efficacité dans un grand nombre de domaine et qui est considéré comme le meilleur estimateur linéaire sans biais. Sur base d'un certain nombre de valeurs de  $DAS$  issues de calculs FDTD nous avons mis en œuvre la méthode du krigeage. L'outil fondamental du krigeage ordinaire, sous-méthode la plus populaire du krigeage, est le variogramme qui est la fonction qui quantifie la semi-variabilité moyenne du jeu de données "expérimentales". Sur base du variogramme expérimental, un modèle de variogramme lui est ajusté. La modélisation du variogramme a été menée sur deux corps d'enfants et le variogramme le plus adapté à la dosimétrie numérique corps entier dans la position debout a été trouvée. L'efficacité de la méthode du krigeage réside dans l'apport d'une variance d'estimation qui permet de juger de la qualité de celle-ci. Lors du développement de la méthode du krigeage pour la dosimétrie, il a été possible de passer de 684 valeurs de  $DAS$  issues de calculs FDTD à 40 valeurs pour une erreur relative moyenne d'estimation inférieure à 3% ou à 12 valeurs pour erreur relative moyenne d'estimation inférieure à 11%. Ce résultat nous permet d'obtenir les valeurs de  $DAS$  estimées pour tout angle d'incidence et les deux polarisations. Surtout, cette étude est une avancée majeure pour l'application de la méthode du krigeage pour la dosimétrie en permettant la découverte du modèle de variogramme le plus adapté. A l'avenir, il sera possible d'obtenir la valeur de  $DAS$  estimée pour n'importe quel modèle de corps sur base d'un nombre minimum de simulations FDTD.

## L'analyse de sensibilité

Grâce à la méthode du krigeage on obtient les valeurs de  $DAS$  nécessaires pour pouvoir calculer  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$  dans différentes situations définies par les distributions des paramètres du modèle de canal. L'idée est de calculer l'influence de chacun des paramètres sur  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ . Le mathématicien I. M. Sobol' a développé le bagage mathématique du domaine de l'analyse de sensibilité, notamment, l'approche de Monte-Carlo du calcul des indices de sensibilité appelés également indices de Sobol'. Les indices de sensibilité totale, compris entre zéro et un, sont des outils assez puissants pour "mesurer" l'impact d'un paramètre et de l'interaction de ce paramètre avec les autres sur la sortie. Dès lors, étant débarrassés des coûteux temps de calcul grâce à la méthode du krigeage, nous avons été en capacité d'estimer par Monte-Carlo les indices de sensibilité totale des paramètres de canal sur les sorties  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ . Il faut remarquer que le critère de convergence des indices est atteint après 40 000 réalisations. Sur base des estimations des indices, nous avons pu faire un classement des paramètres des plus influents au moins influents. L'objectif ultime de cette thèse est de fournir un modèle de canal adapté à la dosimétrie, il faut alors éliminer les paramètres les moins influents. L'analyse de sensibilité prévoit également la démarche à suivre pour éliminer un paramètre d'entrée ou un groupe de paramètres qui est le moins influent. Cette méthode consiste à fixer les paramètres les moins influents à une valeur (dans notre étude le choix a été fait de remplacer les paramètres peu influents par leur valeur moyenne) et de calculer les sorties approximées. Une fonction erreur d'approximation est alors calculée qui permet de dire à quel point l'erreur sera importante lorsque ce paramètre ou ces paramètres sont fixés.

## Le modèle de canal adapté à la dosimétrie

L'analyse de sensibilité et la fixation de certains paramètres du canal a permis de réduire le modèle de canal général à un modèle de canal adapté à la dosimétrie. Il faut remarquer que l'analyse de sensibilité a été effectuée à puissance constante afin de mesurer l'impact de la partie diffuse. Ce modèle de canal adapté peut être décrit par quatre principaux paramètres : l'angle azimutal des *clusters*, l'angle d'élévation des *clusters*, le *cross polarisation ratio* spéculaire et la distance entre puissance totale et puissance diffuse. Nous sommes donc passés de neuf à trois paramètres d'entrée. La fixation des cinq paramètres non-influents induit une erreur d'approximation inférieure à 5% pour l'espérance  $\langle DAS \rangle$  et la variance  $\sigma_{DAS}^2$ . On observe également que la partie diffuse du modèle de canal, non prise en compte dans l'essentiel des productions scientifiques, a une incidence conséquente sur les sorties que sont  $\langle DAS \rangle$  et  $\sigma_{DAS}^2$ . Pour trois *clusters*, par exemple, les indices de sensibilité totale, s'élèvent à  $S_{DPD}^{tot} = 0.076$  pour  $\langle DAS \rangle$  et à  $S_{DPD}^{tot} = 0.122$  pour  $\sigma_{DAS}^2$ . Cela prouve que la partie diffuse jouit d'un impact considérable et qu'elle doit être prise en compte en terme de variable aléatoire d'entrée *via* l'écart entre puissance totale et puissance diffuse ( $DPD$ ). La prépondérance de  $\chi_{(s)}$  est due au fait que

cette variable est inversement proportionnelle au *DAS* induit par la polarisation horizontale des composantes multi-trajets. L'impact remarquable de l'angle d'incidence d'élévation des *clusters* révèle que l'exposition d'un modèle de corps est principalement caractérisée par sa symétrie ellipsoïdale notamment lorsque l'exposition se fait de manière stochastique.

## Perspectives

Ce travail de recherche a permis d'ouvrir la voie à l'étude de l'exposition des personnes en environnement intérieur. Cependant, la démarche complète et les outils développés peuvent servir à d'autres scénarios. Dans notre étude, les modèles de corps utilisés sont des modèles d'enfants. Il serait intéressant d'utiliser un modèle de corps adulte ou de femme enceinte pour observer si l'analyse de sensibilité livre les mêmes résultats. De plus, le modèle de variogramme le plus adapté a été identifié comme étant le modèle gaussien, cependant, celui-ci est adapté à la position d'un corps debout avec les bras le long du corps. Il serait intéressant de faire des simulations FDTD avec un modèle de corps assis pour des ondes planes arrivant avec différents angles d'incidence afin de calculer le variogramme expérimental et vérifier si le modèle gaussien reste le plus adapté. Dans l'étude actuelle, l'exposition est estimée par la valeur du *DAS* induite dans le corps entier. Il serait pertinent de s'intéresser au *DAS* local notamment dans certains organes comme le cerveau ou les parties génitales. Pour cela, il faudrait, sur la base des valeurs de *DAS* moyennées sur 10g ou 1g d'un organe, calculer le variogramme expérimental et lui ajuster un modèle de variogramme. Dès lors, il sera possible d'appliquer le krigeage et ensuite de faire une analyse de sensibilité. Enfin, le processus de réflexion entier peut être reproduit pour des conditions d'exposition différentes. Ici, un modèle de canal MIMO *indoor* polarisé a été utilisé mais d'autres situations d'exposition peuvent être étudiées, notamment l'exposition dite *Outdoor-to-Indoor* aux fréquences GSM pour relever les paramètres ayant un grand impact sur l'exposition. Les conditions d'exposition dans des espaces plus confinés comme dans un train ou un avion méritent enfin une étude précise et approfondie.

## Annexe A

# La méthode des Différences Finies dans le Domaine Temporel

### A.1 Équations de Maxwell

Dans un milieu linéaire isotrope homogène sans pertes, une onde électromagnétique représentée par le couple de vecteur  $(\vec{E}, \vec{H})$  est solution des équations locales de Maxwell [88] :

$$\vec{rot}\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{\partial (\epsilon \cdot \vec{E}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

$$\vec{rot}\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial (\mu \cdot \vec{H}(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.2})$$

Dans ces équations,  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  et  $\vec{H}(\vec{r}, t)$  représentent respectivement le champ électrique et le champ magnétique en un point de l'espace repéré par le vecteur  $\vec{r}$  à l'instant  $t$ . Les deux grandeurs permittivité  $\epsilon$  et perméabilité  $\mu$  permettent de définir les propriétés électromagnétiques du milieu dans lequel l'onde se propage. Dans le vide nous avons  $\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12}$  F/m et  $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H/m. Dans la suite nous désignerons la permittivité relative  $\epsilon_r$  comme étant le rapport entre  $\epsilon$  et  $\epsilon_0$ . De même pour la perméabilité relative  $\mu_r = \mu/\mu_0$ .

En projetant les équations de Maxwell sur chacun des axes d'un repère cartésien, nous obtenons un système d'équations aux dérivées partielles déterministe où les composantes du champ électrique et magnétique sont les inconnues :

$$\frac{\partial H_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{\partial H_y(\vec{r}, t)}{\partial z} = \frac{\partial (\epsilon \cdot E_x(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial H_x(\vec{r}, t)}{\partial z} - \frac{\partial H_z(\vec{r}, t)}{\partial x} = \frac{\partial (\epsilon \cdot E_y(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial H_y(\vec{r}, t)}{\partial x} - \frac{\partial H_x(\vec{r}, t)}{\partial y} = \frac{\partial (\epsilon \cdot E_z(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.5})$$

$$\frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial z} = -\frac{\partial (\mu \cdot H_x(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.6})$$

$$\frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial z} - \frac{\partial E_z(\vec{r}, t)}{\partial x} = -\frac{\partial (\mu \cdot H_y(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{\partial E_y(\vec{r}, t)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(\vec{r}, t)}{\partial y} = -\frac{\partial (\mu \cdot H_z(\vec{r}, t))}{\partial t} \quad (\text{A.8})$$

Pour résoudre ce système, c'est-à-dire déterminer le couple  $(\vec{E}, \vec{H})$  en un point quelconque de l'espace et à tout instant, Yee en 1966 a utilisé la méthode des différences finies [31]. La démarche consiste à évaluer chaque dérivée spatiale et temporelle du système d'équations par une différence centrée.

## A.2 Principe de résolution

Soit  $f(\vec{r}, t)$  une fonction scalaire représentant une composante du champ électrique ou magnétique. La dérivée partielle temporelle de  $f$  à l'instant  $t_0$  en un point de l'espace fixe  $\vec{r}_0$  peut être remplacée par une différence centrée. C'est-à-dire  $\partial f(\vec{r}_0, t_0)/\partial t$  est évaluée par la pente de la droite passant par les points  $(t_0 - \Delta/2; f(\vec{r}_0, t_0 - \Delta/2))$  et  $(t_0 + \Delta/2; f(\vec{r}_0, t_0 + \Delta/2))$ .

$$\frac{\partial f(\vec{r}_0, t_0)}{\partial t} = \frac{f(\vec{r}_0, t_0 + \Delta/2) - f(\vec{r}_0, t_0 - \Delta/2)}{\Delta} + O(\Delta^2) \quad (\text{A.9})$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation (A.9) est une approximation de la dérivée. Le deuxième terme  $O(\Delta^2)$  représente l'erreur commise sur cette estimation, elle sera négligée par la suite. En appliquant cette procédure, nous bénéficions d'une précision d'ordre deux sur la dérivée première, par rapport à une évaluation simple comme un développement de Taylor. De plus la connaissance de la valeur de la fonction  $f(\vec{r}, t)$  au point de calcul de la dérivée n'est pas nécessaire.

Cette méthode nous amène à discrétiser l'espace et le temps. L'espace de calcul, noté  $V_c$ , est construit à l'aide de pavés parallélépipédiques de volume  $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$ , nommés cellules élémentaires ou cellules de Yee. Ainsi  $V_c$  est dimensionné par trois entiers  $(N_x, N_y, N_z)$  qui indique le nombre de cellules élémentaires dans les trois directions usuelles d'un repère cartésien. Dans la majorité des cas, le maillage est orthogonal mais n'est pas nécessairement uniforme. En revanche, le temps est fractionné avec un pas d'échantillonnage constant  $(\Delta t)$ .

Une conséquence de l'emploi des différences centrées est que les composantes des champs ne sont pas estimées au même lieu, ni au même instant. Elles sont décalées spatialement et temporellement.

Spatialement, les composantes du champ électrique et magnétique sont situées respectivement

sur les arêtes et au centre des faces d'une cellule élémentaire. Un tel choix permet le centrage de toutes les dérivées spatiales dans le cas d'un maillage uniforme.

Temporellement, les composantes du champ électrique sont calculées à des instant multiples pairs du demi-pas temporel, tandis que les composantes du champ magnétique sont calculées à des instants multiples impairs du même demi-pas d'échantillonnage temporel.

En adoptant la notation suivante :

$$f(\vec{r}, t) = f(i \cdot \Delta x, j \cdot \Delta y, k \cdot \Delta z, n \cdot \Delta t) = f^n(i, j, k) \quad (\text{A.10})$$

où  $i \in [0, N_x]$ ,  $j \in [0, N_y]$ ,  $k \in [0, N_z]$  et  $n \in [0, N_t]$  et en appliquant la méthode aux équations (A.3) et (A.8) respectivement au point  $((i - 1/2) \cdot \Delta x; j \cdot \Delta y, k \cdot \Delta z)$  à l'instant  $((n - 1/2)\Delta t)$ , et au point  $((i - 1/2) \cdot \Delta x; (j - 1/2) \cdot \Delta y, k \cdot \Delta z)$  à l'instant  $n \cdot \Delta t$ . Nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} E_x^n(i - 1/2, j - 1/2, k) &= E_x^{n-1}(i - 1/2, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{H_z^{n-1/2}(i - 1/2, j + 1/2, k) - H_z^{n-1/2}(i - 1/2, j - 1/2, k)}{\Delta y} \\ &- \frac{\Delta t}{\epsilon_0 \epsilon_r} \cdot \frac{H_y^{n-1/2}(i - 1/2, j, k + 1/2) - H_y^{n-1/2}(i - 1/2, j, k - 1/2)}{\Delta z} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+1/2}(i - 1/2, j - 1/2, k) &= H_z^{n-1/2}(i - 1/2, j - 1/2, k) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{E_y^n(i, j - 1/2, k) - E_y^n(i - 1, j - 1/2, k)}{\Delta x} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{E_x^n(i - 1/2, j, k) - E_x^n(i - 1/2, j - 1, k)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

C'est-à-dire que chaque composante du champ électrique (respectivement magnétique), en un point donné du maillage, dépend de cette même composante prise au temps précédent et de quatre composantes magnétiques (respectivement électriques) adjacentes considérées elles aussi à des instants antérieurs. Des équations similaires à (A.11) et (A.12) sont obtenus pour les autres composantes du champ électromagnétique en appliquant la loi de permutation des indices [88].

Ainsi la méthode des différences finies a permis de passer d'un système d'équations aux dérivées partielles (équations (A.3) à (A.8)) à un système d'équations linéaires récursives. La solution  $(\vec{E}, \vec{H})$  se construit de manière itérative dans le domaine temporel. Ce schéma est connu dans la littérature sous le nom de "saute mouton" (*leap frog* en anglais). Il fait appel à deux notions fondamentales : critère de stabilité et dispersion numérique.

### A.2.1 Critère de stabilité

Le schéma de Yee obtenu en appliquant le principe des différences finies est explicite ; c'est-à-dire que les  $f^{n+1}(i, j, k)$  inconnues sont obtenues directement à partir des  $f^n(i, j, k)$  connues. Il est particulièrement bien adapté pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles du type hyperbolique liées principalement aux phénomènes de propagations et de convections. En revanche comme dans tout système dans lequel la sortie est bouclée sur l'entrée, des risques d'instabilité subsistent. Pour éviter le problème, le pas de temps  $\Delta t$  est limité par une condition de stabilité afin qu'aucune perturbation parasite ne puisse être amplifiée, au risque d'amener la solution à diverger.

La stabilité d'un schéma numérique peut être analysée avec la méthode de Von Neumann [89]. Ce n'est pas la plus puissante des techniques : en effet elle fournit une condition qui est nécessaire mais pas suffisante pour la stabilité. Cependant dans les cas pratiques, elle permet de situer quels sont les phénomènes limitant la stabilité. De plus elle est rapide et simple à mettre en œuvre. Avec cette méthode on obtient le critère suivant :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{(1/\Delta x)^2 + (1/\Delta y)^2 + (1/\Delta z)^2}} \quad (\text{A.13})$$

où  $c = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$  désigne la vitesse de l'onde dans le milieu de propagation, dans le vide  $c \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$ .

### A.2.2 Dispersion numérique

La numérisation des équations de Maxwell introduit une dispersion appelée dispersion numérique. Cela s'exprime par le fait que les signaux numériques progressent au cours du temps, dans le domaine de calcul, avec des vitesses de phases et de groupes différentes suivant les fréquences mais aussi suivant leurs directions de propagations par rapport aux axes du repère cartésien. C'est le cas de la propagation d'une impulsion étroite, donc riche en fréquence, sur une longue distance. Les hautes fréquences, ayant une vitesse de groupe plus faible, quittent l'enveloppe basse fréquence de l'impulsion, ce qui déforme le signal [88]. L'effet dispersif du maillage est dû à la discrétisation spatiale qui n'est qu'une représentation approchée des signaux. Ce désagrément affecte la précision du résultat attendue. En règle générale, pour minimiser cet inconvénient on applique le critère suivant :

$$\text{Max}\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\} \leq \frac{\lambda_{min}}{10} \quad (\text{A.14})$$

Il en résulte en maillage uniforme qu'en dessous de  $\lambda_{min}/\Delta = 10$ , c'est-à-dire moins de dix points d'échantillonnage par période spatiale, l'erreur commise par le schéma numérique sur la vitesse de groupe, c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'énergie, est importante. Il convient donc d'être prudent si l'on désire étudier la propagation d'une onde sinusoïdale ou d'un signal

quelconque. En effet la numérisation des signaux impose des pas d'échantillonnages spatio-temporels communs à toutes les longueurs d'ondes présentes dans le domaine de calcul.

### A.2.3 Conditions aux limites

Pour calculer une solution unique à un problème donné, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites au système d'équations différentielles. Dans un contexte de volume fini, par exemple dans la recherche des modes propres d'une cavité métallique, le problème est simple. On applique la condition aux limites d'un conducteur électrique parfait. En revanche, la situation devient complexe dans la modélisation de l'espace libre dans l'étude des structures rayonnantes. Ne pouvant pas mailler à l'infini, nous devons tronquer le volume en l'entourant par un milieu absorbant, minimisant des réflexions parasites qui viendraient perturber la réponse de l'objet à une excitation donnée, réalisant le même rôle que les absorbants du chambre anéchoïque.

Les conditions absorbantes les plus efficaces sont les couches PML (pour *Perfectly Matched Layers*) développées par Bérenger [32]. Elles se placent à la périphérie du volume de calcul refermé par des murs parfaitement conducteurs. La description de ce milieu, non-physique, à perte permet d'obtenir un coefficient de réflexion théorique nulle à une interface vide-milieu quelles que soient la fréquence et l'angle d'incidence. En pratique, il existe une faible réflexion, provenant du traitement numérique de la couche absorbante de l'interface. Toutefois, l'amplitude de l'onde réfléchie peut être atténuée principalement en paramétrant l'épaisseur de la couche. Ainsi les PML peuvent être placées près de la structure, diminuant ainsi les dimensions du volume de calcul, initialement grand, et réduisant par conséquent la mémoire et la taille du calcul.

## A.3 Principe d'équivalence

Le principe d'équivalence permet de remplacer une source réelle par des sources équivalentes électrique ( $\vec{J}$ ) et magnétique ( $\vec{M}$ ) sur une surface fermée entourant le modèle de corps à exposer. Ces sources fictives sont dites équivalentes dans une certaine zone de l'espace, car elles produisent les mêmes champs électromagnétiques à l'intérieur de cette zone. Ce concept d'équivalence traduit en électromagnétisme le principe de Huygens :

"Chaque point situé sur un front d'onde primaire peut être considéré comme la source d'une onde sphérique élémentaire; l'enveloppe de ces ondes sphériques constituant un front d'onde secondaire."

Ces sources fictives équivalentes permettent notamment d'émettre une onde plane sinusoïdale à l'intérieur d'une surface fermée que l'on appelle boîte de Huygens [90].



## Annexe B

# Calcul du champ électrique dans le modèle cylindrique

Dans le cas où un seul cylindre est exposé à une onde plane électromagnétique, le champ incident émis par une ligne source électrique (polarisation TE) en coordonnées sphériques, selon [91], est

$$\mathcal{E}_\theta^i = -I_e \frac{\beta_0^2}{4\omega\epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta_0 r_s) H_n^{(2)}(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_s)} \quad (\text{B.1})$$

où la ligne source est loin du point d'observation  $r_s \gg r$  et est parcourue par un courant  $I_e$ .  $J_n$  est la fonction de Bessel de première espèce,  $H_n^{(2)}$  est la fonction d'Hankel de seconde espèce,  $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$  est le nombre d'onde en espace libre et  $\phi_s$  est l'angle d'incidence du champ électrique incident. L'arrivée de l'onde cylindrique sur un cylindre va induire l'apparition d'un champ diffracté à l'intérieur du cylindre et à l'extérieur du cylindre. Le champ électrique diffracté a l'expression suivante [91] :

$$\mathcal{E}_\theta^s = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n^{(2)}(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_s)} & r > a \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n J_n(\beta_1 r) e^{jn(\phi-\phi_s)} & r \leq a \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

où  $a_n$  et  $b_n$  sont des coefficients constants qui dépendent des conditions aux limites,  $a$  est le rayon du cylindre et  $\beta_1$  est le nombre d'onde dans le cylindre et avec  $J'_n$  la dérivée de la fonction de Bessel et  $H_n^{(2)'}$  la dérivée de la fonction d'Hankel de type 2 [91].

$$a_n = j^{-n} \frac{J'_n(\beta_0 a) J_n(\beta_1 a) - \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} J_n(\beta_0 a) J'_n(\beta_1 a)}{\sqrt{\epsilon_r/\mu_r} J'_n(\beta_1 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a) - J_n(\beta_1 a) H_n^{(2)' }(\beta_0 a)} \quad (\text{B.3})$$

$$b_n = j^{-n} \frac{J_n(\beta_0 a) H_n^{(2)'}(\beta_0 a) - J_n'(\beta_0 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a)}{J_n(\beta_1 a) H_n^{(2)'}(\beta_0 a) - \sqrt{\epsilon_r/\mu_r} J_n'(\beta_1 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a)} \quad (\text{B.4})$$

Les sources magnétiques même si elle ne sont pas physiquement réalisables, sont souvent utilisées en guise de sources équivalentes pour analyser les surfaces équivalentes d'antennes. Dans le cas où un unique cylindre est exposé à une onde plane, les composantes du champ incident émis par une ligne source magnétique (polarisation TM) parcourue par un courant magnétique  $I_m$  dans les coordonnées de la figure 2.2 sont [91]

$$\mathcal{E}_r^i = \frac{-I_m}{4r} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n H_n^{(2)}(\beta_0 r_s) J_n(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_i)} \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{E}_\phi^i = I_m \frac{\beta_0}{j4} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n^{(2)}(\beta_0 r_s) J_n'(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_i)} \quad (\text{B.6})$$

Les composantes du champ diffracté sont les suivantes

$$\mathcal{E}_r^s = \begin{cases} \frac{1}{\omega r \epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n c_n H_n^{(2)}(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_i)} & r > a \\ \frac{1}{\omega r \epsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n J_n(\beta_1 r) e^{jn(\phi-\phi_s)} & r \leq a \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{E}_\phi^s = \begin{cases} \frac{-\beta_0}{j\omega \epsilon_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n H_n^{(2)'}(\beta_0 r) e^{jn(\phi-\phi_i)} & r > a \\ \frac{-\beta_1}{j\omega r \epsilon_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n J_n'(\beta_1 r) e^{jn(\phi-\phi_s)} & r \leq a \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

Avec

$$c_n = j^{-n} \frac{J_n'(\beta_0 a) J_n(\beta_1 a) - \sqrt{\mu_r/\epsilon_r} J_n(\beta_0 a) J_n'(\beta_1 a)}{\sqrt{\mu_r/\epsilon_r} J_n'(\beta_1 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a) - J_n(\beta_1 a) H_n^{(2)'}(\beta_0 a)} \quad (\text{B.9})$$

$$d_n = j^{-n} \frac{J_n(\beta_0 a) H_n^{(2)'}(\beta_0 a) - J_n'(\beta_0 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a)}{J_n(\beta_1 a) H_n^{(2)'}(\beta_0 a) - \sqrt{\mu_r/\epsilon_r} J_n'(\beta_1 a) H_n^{(2)}(\beta_0 a)} \quad (\text{B.10})$$

Le calcul du champ dans les trois cylindres repose sur une méthode itérative. Le champ diffracté par les cylindres est sommé avec le champ incident, ce nouveau champ sera une nouvelle fois diffracté et ainsi de suite on obtient le champ total à l'intérieur des cylindres [92]. Tout d'abord on obtient le champ total dans le corps simplifié en sommant les contributions des bras et du tronç

$$\mathcal{E}_{tot} = \mathcal{E}_{bras\ droit}^s + \mathcal{E}_{bras\ gauche}^s + \mathcal{E}_{tronç}^s \quad (\text{B.11})$$

L'algorithme 1 présente les différentes étapes pour obtenir le champ total absorbée dans les cylindres. Cette méthode itérative se fait en dix étapes. La figure B.1 présente une coupe du champ total absorbé par les trois cylindres en décibels.

---

**Algorithme 1** Calcul du champ total dans les cylindres
 

---

$$\begin{aligned}
 n = 0 \quad \mathcal{E}_{tot} &= \mathcal{E}_{inc} \\
 n = 1 \quad \mathcal{E}_{tot} &= \mathcal{E}_{inc2} = \mathcal{E}_{inc}^s + \mathcal{E}_{bras\ droit} + \mathcal{E}_{bras\ gauche}^s + \mathcal{E}_{tronc}^s \\
 n = 2 \quad \mathcal{E}_{tot} &= \mathcal{E}_{inc3} = \mathcal{E}_{inc2} + \mathcal{E}_{bras\ droit2}^s + \mathcal{E}_{bras\ gauche2}^s + \mathcal{E}_{tronc2}^s \\
 &\dots \\
 n = 10 \quad &\dots
 \end{aligned}$$


---

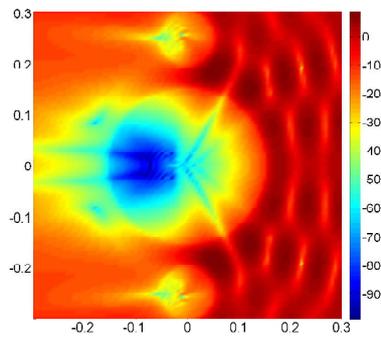


FIGURE B.1 – Modèle de corps simplifié exposé à une onde plane



## Annexe C

# Critère d'information d'Akaike

Le critère d'information d'Akaike, (en anglais *Akaike information criterion* ou *AIC*) est une mesure de la qualité d'un modèle statistique proposée par Hirotugu Akaike en 1973 [68]. Le critère d'information d'Akaike s'écrit comme la différence entre 2 fois le nombre de paramètres  $k$  et deux fois le logarithme de la vraisemblance  $L$  du modèle estimé.

$$AIC = 2k - 2 \ln L \quad (C.1)$$

où  $k$  est le nombre de paramètres du modèle et  $L$  est le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle. Soit  $X$  une variable aléatoire (v.a.) réelle, de loi discrète ou continue, dont on veut estimer un paramètre  $\theta$ . Alors on définit une fonction  $f$  telle que :

$$f(x; \theta) = \begin{cases} f_\theta(x) & \text{si } X \text{ est une v.a. continue} \\ P_\theta(X = x) & \text{si } X \text{ est une v.a. discrète} \end{cases} \quad (C.2)$$

où  $f_\theta(x)$  représente la densité de  $X$  où  $\theta$  apparaît et  $P_\theta(X = x)$  représente une probabilité discrète où  $\theta$  apparaît également. On définit la fonction de vraisemblance à l'aide des observations en  $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  de la fonction  $f_\theta$  de la manière suivante :

$$L(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n; \theta) = f(x_1; \theta) \times f(x_2; \theta) \times \dots \times f(x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (C.3)$$

On cherche à trouver le maximum de cette vraisemblance pour que les probabilités des réalisations observées soient aussi maximum. Ceci est un problème d'optimisation. On utilise généralement le fait que si  $L$  est dérivable (ce qui n'est pas toujours le cas) et si  $L$  admet un maximum global en une valeur  $\theta = \hat{\theta}$ , alors la dérivée première s'annule  $\theta = \hat{\theta}$  et que la dérivée seconde est négative.

Si l'on considère un ensemble de modèles candidats, le modèle choisi est celui qui aura la plus faible valeur d'*AIC*. Ce critère repose donc sur un compromis entre la qualité de l'ajustement

et la complexité du modèle, en pénalisant les modèles ayant un grand nombre de paramètres, ce qui limite les effets de sur-ajustement (augmenter le nombre de paramètre améliore nécessairement la qualité de l'ajustement). Supposons disposer d'un ensemble de modèles-candidats, dont on calcule les valeurs d'AIC associées. Il y aura toujours une perte d'information, du fait qu'on utilise un modèle pour représenter le processus générant les données réelles, et nous cherchons donc à sélectionner le modèle qui minimise cette perte d'information (ou plus exactement son estimation par l'*AIC*).

# Bibliographie

- [1] ICNIRP. *Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz)*. Health Phys, 1998.
- [2] ICNIRP. *Statement on the guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz)*, volume 97, pages 257–258. Health Physics, September 2009.
- [3] Centre Internationale de Recherche contre le Cancer (CIRC). Le circ classe les champs électromagnétiques de radiofréquences comme "peut-être cancérigènes pour l'homme". Communiqué 208, OMS, mai 2011.
- [4] Kühn S, Jennings W, Christ A, and Kuster N. Assessment of induced radio-frequency electromagnetic fields in various anatomical human body models. *Phys Med Biol*, 2009.
- [5] Saidi F, Lautru D, Gati A, Wong M F, Nicolas E, Jacquin F, Wiart J, and Fouad-Hanna V. An on-site sar evaluation using interpolation and planewave decomposition. *Microwave Optical and Technology Letters*, 50(6), June 2008.
- [6] Silly-Carette J, Lautru D, Wong M F, Gati A, Wiart J, and Fouad-Hanna V. Variability on the propagation of a plane wave using stochastic collocation methods in a bio-electromagnetic application. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, 19(4), April 2009.
- [7] Durney C H and Massoudi H. *Radiofrequency radiation dosimetry handbook*. Medical Division, 1985.
- [8] ICNIRP. *Exposure to high frequency electromagnetic fields, biological effects and health consequences (100 kHz-300 GHz), Review of the scientific evidence on dosimetry, biological effects, epidemiological observations, and health consequences concerning exposure to high frequency electromagnetic fields*. ICNIRP, 2009.
- [9] Gabriel S, Lau RW, and Gabriel C. The dielectric properties of biological tissues :III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Phys Med Biol*, 1996.
- [10] Conil E, Hadjem A, Lacroux F, Wong M F, and Wiart J. Variability analysis of sar from 20 MHz to 2.4 GHz for different adult and child models using finite-difference time-domain. *Physics in Medicine and Biology*, 53 :1511–1525, 2008.

- 
- [11] Beard B, Kainz W, Onishi T, Iyama T, Watanabe S, Fujiwara O, Wang J, Bit-Babik G, Faraone A, Wiart J, Christ A, Kuster N, Lee A-K, Kroeze H, Siegbahn M, Keshvari J, Abrishamkar H, Simon W, Manteuffel D, and Nikoloski N. Comparisons of computed mobile phone induced sar in the sam phantom to that in anatomically correct models of the human head. *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, 48 :397–407, 2006.
- [12] Bamba A, Joseph W, Vermeeren G, Tanghe E, Gaillot D P, Andersen J, Nielsen J, Lienard M, and Martens L. Validation of experimental whole-body sar assessment method in a complex indoor environment. *Bioelectromagnetics*, 34 :122–132, 2013.
- [13] Bernardi P, Cavagnaro M, Pisa S, and Piuze E. Human exposure to radio base-station antennas in urban environment. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technics*, 48(11), 2000.
- [14] Conil E, Hadjem A, Gati A, and Wong MF. Influence of plane-wave incidence angle on whole body and local exposure at 2100 MHz. *IEEE Trans on EMC*, 53 :48–52, February 2011.
- [15] Dimbylow P J. Fine resolution calculations of SAR in the human body for frequencies up to 3 GHz. *Physics in Medicine and Biology*, 47 :2835–2846, 2002.
- [16] Dimbylow P J. The calculation of sar from limb current in the female voxel phantom, naomi. *Radiation Protection Dosimetry*, 121(3) :236–239, 2006.
- [17] World Health Organization International Agency For Research On Cancer. Iarc monographs on the evaluation of carcinogenic risks to humans. Technical report, WHO IARC, 2006.
- [18] Sibille A, Oestges C, and Zanella A. *MIMO from theory to implementation*. Elsevier, 2010.
- [19] Quitin F. *Channel modeling for polarized MIMO systems*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2011.
- [20] Quitin F, Oestges C, Horlin F, and De Doncker P. A polarized clustered channel model for indoor MIMO systems at 3.6 GHz. *IEEE Trans. Vehic. Tech.*, 2010.
- [21] Quitin F, Oestges C, Bellens F, Van Roy S, Horlin F, and De Doncker P. Extracting specular-diffuse clusters from mimo channel measurements. In *IEEE 22nd International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications*, September 2011.
- [22] Quitin F, Oestges C, Horlin F, and De Doncker P. Channel correlation and cross-polar ratio in multi-polarized MIMO channels : Analytical derivation and experimental validation. In *Vehicular Technology Conference, 2008. VTC 2008-Fall. IEEE 68th*.
- [23] ICNIRP. *Exposure to high frequency electromagnetic fields, biological effects and health consequences (100 kHz-300 GHz)*. ICNIRP, 2009.
- [24] IEEE Computer Society. *Part 11 : Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications*. IEEE Standard association, march 2012.

- [25] Parlement de l'Union Européenne. Directive 2004/40/ce du parlement européen et du conseil, les prescriptions minimales de sécurité et de santé relatives à l'exposition des travailleurs aux risques dus aux agents physiques (champs électromagnétiques). *Journal officiel de l'Union européenne*, avril 2004.
- [26] Parlement de l'Union Européenne. Rectificatif à la directive 2004/40/ce du parlement européen et du conseil du 29 avril 2004 concernant les prescriptions minimales de sécurité et de santé relatives à l'exposition des travailleurs aux risques dus aux agents physiques (champs électromagnétiques). *Journal officiel de l'Union européenne*, mai 2004.
- [27] Gouvernement français. Décret n° 2002-775 du 3 mai 2002 pris en application du 12 de l'article l. 32 du code des postes et télécommunications et relatif aux valeurs limites d'exposition du public aux champs électromagnétiques émis par les équipements utilisés dans les réseaux de télécommunication ou par les installations radioélectriques. Technical report, République Française, 2002.
- [28] Mairie de Paris, Bouygues Telecom, Société Française du Radiotéléphone (SFR), and Société Orange France SA. Charte relative à la téléphonie mobile. Technical report, Mairie de Paris, décembre 2012.
- [29] Albert II. Arrêté royal fixant la norme pour les antennes émettant des ondes électromagnétiques entre 10 MHz et 10 GHz. *Moniteur Belge*, Septembre 2005.
- [30] Ministère de la région de Bruxelles-Capitale. Ordonnance relative à la protection de l'environnement contre les éventuels effets nocifs et nuisances provoqués par les radiations non-ionisantes. *Moniteur Belge*, mars 2007.
- [31] Yee KS. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwells equations in isotropic media. *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, 14 :302–307, 1966.
- [32] Berenger JP. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *Journal of Computer Physics*, 114 :185–200, 1994.
- [33] Christ A et al. The virtual family-development of surface-based anatomical models of two adults and two children for dosimetric simulations. *Phys Med Biol*, 2010.
- [34] Findlay RP and Dimbylow PJ. Effects of posture on FDTD calculations of specific absorption rate in a voxel model of the human body. *Phys Med Biol*, 2005.
- [35] Nagaoka T, Togashi T, Saito K, Takahashi M, Ito K, and Watanabe S. An anatomically realistic whole-body pregnant-woman model and specific absorption rates for pregnant woman exposure to electromagnetic plane waves from 10 MHz to 2 GHz. *Physics in Medicine and Biology*, 52 :6731–6745, 2007.
- [36] Wang J, Fujiwara O, Kodera S, and Watanabe S. FDTD calculation of whole-body average sar in adult and child models for frequencies from 30 MHz to 3 GHz. *Physics in Medicine and Biology*, 51 :4119–4127, 2006.

- [37] Habachi AE, Conil E, Hadjem A, Vazquez E, Wong MF, Gati A, Fleury G, and Wiart J. Statistical analysis of whole-body absorption depending on anatomical human characteristics at a frequency of 2.1 GHz. *Phys Med Biol*, 2010.
- [38] Dimbylow PJ, Hirata A, and Nagaoka T. Inter-comparison of whole-body averaged SAR in european and japanese voxel phantoms. *Phys Med Biol*, 2008.
- [39] Akimoto S, Nagaoka T, Saito K, Watanabe S, Takahashi M, and Ito K. Comparison of SAR in realistic fetus models of two fetal positions exposed to electromagnetic wave from business portable radio close to maternal abdomen. In *EMBC Annual International Conference of the IEEE*, pages 734 – 737, Buenos Aires, 2010.
- [40] Paniagua J M, Rufo M, Jimenez A, Antolin A, and Pinar I. Medium wave exposure characterisation using exposure quotients. *Radiation Protection Dosimetry*, 140(1) :34–40, 2010.
- [41] Kientega T, Conil E, Hadjem A, Richalot E, Gati A, Wong MF, Picon O, and Wiart J. A surrogate model to assess the whole-body *sar* induced by multiple plane waves at 2.4 GHz. *Ann Telecommun*, 2011.
- [42] Findlay RP, Lee AK, and Dimbylow PJ. Fdtd calculations of sar for child voxel models in different postures between 10 mhz and 3 ghz. *Radiat Prot Dosimetry*, 135 :226–231, 2009.
- [43] Schild S, Chavannes N, and Kuster N. A complete framework for the modeling of linear and nonlinear dispersion effects with fdtd. In *Electromagnetic Compatibility (APEMC), 2010 Asia-Pacific Symposium on*, pages 897–899, April 2010.
- [44] Uusitupa T M, Ilvonen S A, Laakso I M, and Nikoskinen K I. The effect of finite-difference time-domain resolution and power-loss computation method on sar values in plane wave exposure of zupal phantom. *Physics in Medicine and Biology*, 53, 2008.
- [45] Laakso I, Uusitupa T, and Ilvonen S. Comparison of sar calculation algorithms for the finite-difference time-domain method. *Physics in Medicine and Biology*, 55 :421–431, 2010.
- [46] Drossos A, Santomaa V, and Kuster N. The dependence of electromagnetic energy absorption upon human head tissue composition in the frequency range of 300–3000 MHz. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 48(11) :1988–1995, Nov 2000.
- [47] Hombach V, Meier K, Burkhardt M, Kuhn E, and Kuster N. The dependence of em energy absorption upon human head modeling at 900 MHz. *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, 44(10) :1865–1873, Oct 1996.
- [48] Liu Y, Liang Z, and Yang Z Q. Computation of electromagnetic dosimetry for human body using parallel fdtd algorithm combined with interpolation technique. *Progress in Electromagnetic Research*, 82 :95–107, 2008.
- [49] Catarinucci L, Palazzari P, and Tarricone L. A parallel fdtd tool for the solution of large dosimetric problems : an application to the interaction between humans and radiobase

- antennas. In *Microwave Symposium Digest, 2002 IEEE MTT-S International*, volume 3, pages 1755–1758, June 2002.
- [50] Vermeeren G, Joseph W, Olivier C, and Martens L. Statistical multipath exposure of a human in a realistic electromagnetic environment. *Health Phys*, 2008.
- [51] Silly-Carette J, Lautru D, Wong M F, Gati A, Wiart J, and Fouad Hanna V. Variability on the propagation of a plane wave using stochastic collocation methods in a bioelectromagnetic application. *IEEE Microwave communications letters*, 19(4), 2009.
- [52] Ghanmi A, Varsier N, Hadjem A, Wiart J, Person C, Picon O, and Conil E. Exposure analysis of children reproductive organs to EMF emitted by a mobile phone placed nearby. In *BioEM 2013 : joint meeting of the Bioelectromagnetics Society (BEMS) and the European BioElectromagnetics Association (EBEA)*, 2013.
- [53] Sudret B. *Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models : Contributions to structural reliability and stochastic spectral methods*. Habilitation à diriger des recherches, Université Blaise Pascal, 2007.
- [54] Vermeeren G, Joseph W, and Martens L. Statistical multi-path exposure method for assessing the whole-body SAR in a heterogeneous human body model in a realistic environment. *Bioelectromagnetics*, 2013.
- [55] Thielens A, Vermeeren G, Joseph W, and Martens L. Stochastic method for determination of the organ-specific averaged SAR in realistic environments at 950 MHz. *Bioelectromagnetics*, 2013.
- [56] Czink N, Richter A, Bonek E, Nuutinen J P, and Ylitalo J. Including diffuse multipath parameters in mimo channel models. In *Proceedings IEEE 66th Vehicular Technology Conference*. VTC-2007 Fall, 2007.
- [57] Wackernagel H. *Multivariate Geostatistics*. Springer, 2003.
- [58] Cressie N. *Statistics for spatial data*. Wiley-Interscience, 1992.
- [59] Saltelli A. Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices. *Computer Physics Communications*, 145 :280–297, 2002.
- [60] Saltelli A, Chan K, and Scott E M. *Sensitivity Analysis*. Wiley-Blackwell, 2008.
- [61] Saltelli A, Annoni P, Azzini I, Campolongo F, Ratto M, and Tarantola S. Variance based sensitivity analysis of model output. design and estimator for the total sensitivity index. *Computer Physics Communications*, 181 :259–270, 2010.
- [62] Sobol' I M. Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their monte carlo estimates. *Mathematics and Computer in Simulation*, 55 :271–280, 2001.
- [63] Sudret B. Review global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions. *Reliability Engineering and system safety*, 93 :964–979, 2008.

- [64] Seidel S and Rappaport T S. Site-specific propagation prediction for wireless in-building personal communication system design. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 43(4) :879–891, 1994.
- [65] Iskander M and Zhengqing Y. Propagation prediction models for wireless communication systems. *IEEE Transactions on Microwave Theory Technology*, 50(3) :662–673, 2002.
- [66] Correia L M. *Mobile broadband multimedia networks : techniques, models and tools for 4G*. Elsevier, 2006.
- [67] Richter A, Salmi J, and Koivunen. Distributed scattering in radio channels and its contribution to mimo channel capacity. In *Proceedings 1st European Conference on Antennas and Propagation*. EuCAP, 2006.
- [68] Akaike H. Likelihood of a model and information criteria. *Journal of Econometrics*, 16 :3–14, 1981.
- [69] Arnaud M and Emery X. *Estimation et interpolation spatiale : méthodes déterministes et méthodes géostatistiques*. Hermes sciences europe, 2000.
- [70] Burrough P McDonnell R. *Principles of Geographical Information Systems*. Oxford University Press, 1998.
- [71] Matheron G. Principles of geostatistics. *Economic Geology*, 58 :1246–1266, 1963.
- [72] Matheron G. The intrinsic random functions, and their applications. *Advances in Applied Probability*, 5 :439–468, 1973.
- [73] Chiles JP and Delfiner P. *Geostatistics : Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley-Interscience, 1990.
- [74] Ould Isselmou Y, Wackernagel H, Tabbara W, and Wiart J. Geostatistical estimation of electromagnetic exposure. *Geostatistics for Environmental Applications Springer*, 15 :59–69, 2008.
- [75] Cortel-Carrasco A, Ould Isselmou Y, Wong MF, Gati A, Wackernagel H, Tabbara W, and Wiart J. Management des champs électromagnétiques dans l’environnement. *Revue de l’électricité et de l’électronique*, 1 :39–43, 2009.
- [76] De Doncker P, Dricot JM, Meys R, Hélier M, and Tabbara W. Electromagnetic fields estimation using spatial statistics. *Electromagnetics*, 26 :111–122, 2006.
- [77] Rannou V, Brouaye F, Hélier M, and Tabbara W. Kriging the quantile : application to a simple transmission line model. *Inverse problems*, 18 :37, 2002.
- [78] Krige D G. *A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand*. PhD thesis, University of Witwatersrand, 1951.
- [79] Myers DE and Journel A. Variograms with zonal anisotropies non-invertible kriging systems. *Mathematical Geology*, 1990.

- 
- [80] Marquardt DW. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11 :431–441, 1963.
- [81] Gill PE and Murray W. Algorithms for the solution of the nonlinear least-squares problem. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 15 :977–992, 1978.
- [82] Cacuci D. *Sensitivity and uncertainty analysis : theory*, volume 1. Chapman and Hall, Boca Raton, 2003.
- [83] European Commission. Impact assessment guidelines. Technical report, SEC, 2009.
- [84] Sobol' I M. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Mathematical Modelling and computational experiment 1*, pages 407–414, 1993.
- [85] Jansen M J W. Analysis of variance designs for model output. *Computer Physics Communications*, 117 :35–43, 1999.
- [86] Sobol' I M, Tarantola S, Gatelli D, Kucherenko S S, and Mauntz W. Estimating approximation error when fixing unessential factors in global sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System safety*, 92 :957–960, 2007.
- [87] Alexander B E. *802.11 Wireless Network Site Surveying and Installation*. Cisco Press, 2004.
- [88] Lautru D. *Modélisation d'antennes filaires dans un maillage aux différences finies à l'aide d'une hybridation avec la méthode des moments dans le domaine temporel. Application à la dosimétrie des stations de base*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), 2000.
- [89] Isaacson E and Keller H B. *Analysis of numerical methods*. John Wiley and Sons, 1994.
- [90] Taflov A and Hagness S. *Computational electrodynamics : the Finite-Difference Time-Domain method*. Artech House, 2005.
- [91] Balanis C A. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley and Sons, 1989.
- [92] Jawad O, Lautru D, Benlarbi-Delaï A, Dricot JM, Horlin F, , and De Doncker P. A human body model exposed to a cluster of waves : A statistical study of SAR. *PIER C*, 2012.



# Liste des publications

## Conférences nationales

- Ourouk Jawad, David Lautru, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Philippe De Doncker, "Étude Statistique du DAS sous Exposition d'un Canal sans Fils en Environnement Intérieur", *Journées Scientifiques de l'URSI 2012*, Cnam Paris, 3-4 Avril 2012.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Aziz Benlarbi-Delaï, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Philippe De Doncker, "Estimation du Débit d'Absorption Spécifique par la méthode du krigeage", *18ème JNM 2013*, 15-17 Mai 2013.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Jean-Michel Dricot, Aziz Benlarbi-Delaï, Philippe De Doncker, "Estimation du DAS Corps Entier avec la Méthode du Krigeage Ordinaire", *17ème Colloque International et Exposition sur la Compatibilité ÉlectroMagnétique (CEM 2014)*, Clermont-Ferrand, 1-3 juillet 2014.

## Conférences internationales

- Ourouk Jawad, David Lautru, Stéphane Van Roy, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Philippe De Doncker, "Statistical Study of SAR in Clustered Wireless Channels", *Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP)*, Roma, Italy, April 11-15 2011.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Philippe De Doncker, "Impact of Wireless Channel Modeling on SAR Estimation in Indoor Environment", *Proceedings of Progress In Electromagnetic Research Symposium*, Kuala Lumpur, Malaysia, March 27-30 2012.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Aziz Benlarbi-Delaï, Philippe De Doncker, "Estimation of Specific Absorption Rate with kriging method", *Radio Science Meeting (Joint with AP-S Symposium), 2013 USNC-URSI*, Orlando, USA, July 7-13 2013.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Aziz Benlarbi-Delaï, Philippe De Doncker, "Sensitivity Analysis of the Specular and Diffuse Parts of Clusters Multipath on the Exposure of a

Child Body Model", *accepted to 31<sup>st</sup> URSI General Assembly and Scientific Symposium*, Beijing, China, August 16-23 2014.

## Journaux

- Ourouk Jawad, David Lautru, Aziz Benlarbi-Delai, Jean-Michel Dricot, François Horlin, Philippe De Doncker, "A Human Body Model Exposed to a Cluster of Waves : a Statistical Study of SAR", *Progress In Electromagnetics Research C*, Vol. 30, 1-13, 2012.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Aziz Benlarbi-Delaï, Jean-Michel Dricot, Philippe De Doncker, "Study of Human Exposure Using Kriging Method", submitted to PIER.
- Ourouk Jawad, David Lautru, Aziz Benlarbi-Delaï, Philippe De Doncker, "Stochastic Study of the Impact of Channel Modeling Parameters on the Exposure of a Child Body Model", to be submitted.

