



# Étude théorique et expérimentale de la stabilité de l'écoulement de films de fluide non Newtonien sur plan incliné

Mohamed Hatem Allouche

## ► To cite this version:

Mohamed Hatem Allouche. Étude théorique et expérimentale de la stabilité de l'écoulement de films de fluide non Newtonien sur plan incliné. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2014. Français. NNT: 2014LYO10185 . tel-01127309

**HAL Id: tel-01127309**

**<https://theses.hal.science/tel-01127309>**

Submitted on 7 Mar 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON

Délivrée par

L'UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1

Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (LMFA – Lyon)

ECOLE DOCTORALE

Mécanique - Energétique - Génie civil - Acoustique

DIPLOME DE DOCTORAT

(arrêté du 7 août 2006)

soutenue publiquement le 24 septembre 2014

par

ALLOUCHE Mohamed Hatem

TITRE :

Etude théorique et expérimentale de la stabilité de l'écoulement  
de films de fluide non Newtonien sur plan incliné.

Directeur de thèse : M. BEN HADID Hamda (Pr. UCBL/LMFA)

Co-directeur de thèse : M. BOTTON Valéry (Hdr. Insa de Lyon/LMFA)

JURY :

Président : M. MOJTABI Abdelkader (Pr. UPS Toulouse/IMFT)

Rapporteur : M. RUYER-QUIL Christian (Pr. Université de Savoie/LOCIE)

Rapporteur : M. NOUAR Chérif (D.R. CNRS/LEMETA)

Examinatrice : Mme. MILLET Séverine (Mcf. UCBL/LMFA)

Examineur : M. CHAMBON Guillaume (C.R. IRSTEA Grenoble)

Examineur : M. HENRY Daniel (D.R. CNRS/LMFA)



# UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

## Président de l'Université

**M. François-Noël GILLY**

Vice-président du Conseil d'Administration

M. le Professeur Hamda BEN HADID

Vice-président du Conseil des Etudes et de la Vie Universitaire

M. le Professeur Philippe LALLE

Vice-président du Conseil Scientifique

M. le Professeur Germain GILLET

Directeur Général des Services

M. Alain HELLEU

## *COMPOSANTES SANTE*

Faculté de Médecine Lyon Est – Claude Bernard

Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE

Faculté de Médecine et de Maïeutique Lyon Sud – Charles Mérieux

Directeur : Mme la Professeure C. BURILLON

Faculté d'Odontologie

Directeur : M. le Professeur D. BOURGEOIS

Institut des Sciences Pharmaceutiques et Biologiques

Directeur : Mme la Professeure C. VINCIGUERRA

Institut des Sciences et Techniques de la Réadaptation

Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON

Département de formation et Centre de Recherche en Biologie Humaine

Directeur : Mme. la Professeure A-M. SCHOTT

## *COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET TECHNOLOGIE*

Faculté des Sciences et Technologies

Directeur : M. F. DE MARCHI

Département Biologie

Directeur : M. le Professeur F. FLEURY

Département Chimie Biochimie

Directeur : Mme Caroline FELIX

Département GEP

Directeur : M. Hassan HAMMOURI

Département Informatique

Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE

Département Mathématiques

Directeur : M. Georges TOMANOV

Département Mécanique

Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID

Département Physique

Directeur : M. Jean-Claude PLENET

UFR Sciences et Techniques des Activités Physiques et Sportives

Directeur : M. Y. VANPOULLE

Observatoire des Sciences de l'Univers de Lyon

Directeur : M. B. GUIDERDONI

Polytech Lyon

Directeur : M. P. FOURNIER

Ecole Supérieure de Chimie Physique Electronique

Directeur : M. G. PIGNAULT

Institut Universitaire de Technologie de Lyon 1

Directeur : M. C. VITON

Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education

Directeur : M. A. MOUGNIOTTE

Institut de Science Financière et d'Assurances

Directeur : M. N. LEBOISNE



---

« Important papers have been published by [...], whose conclusions are in contradiction to one another. »

H.B. Squire (1933)



# Résumé

Nous étudions la stabilité de l'écoulement de fluides rhéofluidifiants (pseudoplastiques) sous la forme d'un film sur un plan incliné. La connaissance des conditions d'apparition des instabilités dans ce type d'écoulements intéresse particulièrement le secteur industriel faisant appel à des méthodes de couchage (papèterie, photographie, alimentaire...). Cette configuration d'écoulement n'en garde pas moins un intérêt environnemental, où, dans certaines situations exceptionnelles (coulées de boues et/ou de débris, laves torrentielles, écoulements de glaciers, avalanches...), les observations de terrain montrent que l'écoulement est souvent constitué de « paquets de boues » assez régulièrement espacés, plutôt que d'un écoulement continu.

Les fluides utilisés dans ce contexte sont souvent de nature complexe, aussi nous choisirons de les modéliser comme des fluides non Newtoniens rhéofluidifiants, bien qu'ils présentent souvent un seuil minimum de mise en mouvement. La viscosité est décrite par la loi de Carreau, qui a l'avantage de présenter un plateau Newtonien aux très faibles valeurs du cisaillement local. La caractérisation rhéologique des fluides utilisés est déterminée à partir de l'étude de la propagation et de l'atténuation d'ondes capillaires. Nous faisons appel à une technique optique appelée *électrocapillarité*, qui nous permet de déterminer en particulier la viscosité limite à cisaillement nul, et la largeur du plateau Newtonien à des valeurs de cisaillement aussi faibles que  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$ . Nous avons réalisé des mesures sur deux solutions différentes de polymères, et la technique apparaît très utile pour les fluides faiblement concentrés présentant un fort comportement rhéofluidifiant.

L'objectif principal de notre travail est d'étudier expérimentalement la stabilité de films rhéofluidifiants sur plan incliné. A angle d'inclinaison fixé, nous avons déterminé le seuil critique et tracé la courbe marginale de stabilité sur les plans  $(Re, k)$  et  $(Re, c)$  pour les différents fluides étudiés. Nous trouvons que nos résultats expérimentaux sont en bon accord avec les résultats numériques, et confirment l'effet rhéofluidifiant déstabilisant relativement au cas Newtonien (nombre de Reynolds critique plus bas, rapport entre la célérité critique de l'onde et une estimation de la vitesse de l'écoulement à la surface libre plus grand).

Nous discutons enfin la validité du théorème de Squire en écrivant l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée aux ondes 3D. Analytiquement, les relations de Squire ne sont pas vérifiées, et les résultats numériques montrent que les termes empêchant analytiquement l'établissement des relations de Squire, ne peuvent pas être négligés. Par conséquent, nous ne pouvons utiliser les relations de Squire dans le cas d'un écoulement de film sur plan incliné que dans le cas Newtonien.

**Mots clés :** Stabilité, Rhéologie, Films minces, Surface libre.



**Theoretical and experimental study of the  
stability of non Newtonian fluid films  
flowing down an inclined plane.**



# Abstract

We study the stability of shear-thinning (pseudoplastic) fluids film flow down an inclined plane. This problem is of interest in many industrial applications such as coating, and may explain the manifestation of a specific kind of surface waves, appearing in some spectacular environmental flow configurations such as debris flows or surge waves. One of the defects encountered in the coating processes is the onset of instabilities which causes ripples responsible for the degradation of the coating uniformity. We focus on fluids obeying the Carreau law. This model accurately describes the rheological behaviour of fluids like polymer solutions and melts, and is particularly suitable to free surface flow issues.

From an experimental point of view, rotational rheometers are torque-sensitive, which makes the measurement of viscosity at low shear-rates very difficult, in particular for low viscosity fluids. An accurate knowledge of this value is, however, particularly crucial for the characterization of different flows, in particular those featuring a free surface, a symmetry axis or a symmetry plane. The experimental determination of viscosity and surface tension is enabled from the propagation of attenuated capillary waves. An optical technique called *electrocapillarity* has been implemented in order to determine the shear-thinning viscosity at values of the shear-rate as small as  $10^{-3}s^{-1}$ , from measurements of the spatial attenuation and wavelength. We have performed measurements on two different polymer solutions and the technique appears to be very useful for low concentrated solutions that exhibit a strong shear-thinning behaviour.

The main objective of this work is to study experimentally the spatial evolution of surface waves propagating in the case of shear-thinning fluids film flow. The experimental study essentially consists in measuring amplification coefficients and wavelengths in marginal conditions, which allows to retrieve the linear stability threshold. The experimental results presented in the  $(Re, k)$  and  $(Re, c)$  planes are in good agreement with the numerical results obtained by a resolution of the generalized Orr-Sommerfeld equation, and confirm the destabilizing effect of the shear-thinning properties in comparison with the Newtonian case (the critical Reynolds number is smaller, and the ratio between the marginal waves celerity and the flow velocity at the free surface is larger).

Finally, we discuss the validity of the Squire's theorem in the case of generalized Newtonian fluids film flow down an inclined plane : we have written the generalized Orr-Sommerfeld equation by taking into account the spanwise disturbances. Analytically, there are no Squire's transformations; and the numerical results show that the terms preventing the Squire's relations to be established, cannot be considered as negligible

**Keywords:** Stability, Rheology, Thin films, Free surface.



# Remerciements

Je dédie ce travail à tous les doctorants, en début ou en fin de thèse, mais aussi aux étudiants désireux de suivre un cursus doctoral. Il s'agit, à mon sens, de l'expérience professionnelle la plus enrichissante sur tous les plans. Si j'ai réussi à mener ce projet à terme, je le dois d'abord et avant tout à mes parents, qui se sont sacrifiés pour m'éduquer, me scolariser, et m'instruire dans d'excellentes conditions.

Papa, merci de m'avoir inculqué l'amour de la Science, et de m'avoir initié au bricolage, sans quoi je n'aurais pas prétendu à une thèse à dominante expérimentale. Merci aussi pour les nombreux tuyaux que tu m'as filés concernant la manipulation de polymères fondus !

Maman, que dire... Je n'ai jamais connu quelqu'un d'aussi dévoué, aussi bien envers des proches que des étrangers. Avec un capital santé relativement timide, tu t'es constamment surpassée, tout à ton honneur.

Mouna, jamais personne n'a été aussi fusionnel avec moi, et ce, depuis notre tendre enfance. Avec Simo et Lina (pour le moment), je vous souhaite d'être bénis dans chacune de vos vies.

Majdy, on a passé un agréable moment pendant ta prépa, j'espère avoir été à la hauteur durant cette phase délicate, sans m'éterniser sur mes excès de paternalisme, quelques fois...

Un clin d'oeil sincère à mon beau-frère Simohamed et la ptite fée Lina. Une pensée fraternelle aux membres de ma famille élargie, mes oncles et tantes, cousins et cousines, du Maroc et de Tunisie, et plus largement à l'ensemble de mes amis.

Je dis un grand merci aux membres de jury qui se sont déplacés et qui ont favorablement évalué ce travail de thèse.

Je rends hommage à mes collègues du LMFA :

Bien que n'ayant quasiment jamais travaillé avec Monsieur le Professeur Hamda Ben Hadid, je lui suis reconnaissant pour avoir appuyé ma candidature comme allocataire de recherche durant l'audition doctorale, merci aussi pour les conseils prodigués surtout en première année.

Valéry Botton, je n'ai jamais connu quelqu'un d'aussi avenant, disponible, et doté surtout d'une intelligence remarquable. Tu nous as toujours tiré vers le haut, quels que soient les moyens dont on a pu disposer.

Daniel Henry est encore plus surprenant par sa simplicité et sa modestie. Extrêmement humble, il surprend surtout par sa rigueur et son incomparable minutie.

La troisième personne avec qui j'ai le plus travaillé est une femme constamment souriante : Séverine Millet. Je te remercie avant tout pour ta bonne humeur et pour m'avoir encadré depuis ce TER sur les fluides non Newtoniens en master.

J'ai eu la chance de préparer une thèse « globale ».

L'aspect expérimental est dominant. A ce titre, je remercie particulièrement les personnes qui m'ont directement ou indirectement assisté sur mes deux manip. Merci Patrick Pinsard et Cédric Marmounier pour m'avoir dépanné à maintes reprises question matériel. Merci Philippe Eyraud pour les nombreux papiers, que ce soient pour le Schlieren ou pour la biblio.

Les aspects théorique et numérique complètent mon travail, et à ce titre j'adresse un grand merci à François Rousset (Cethil, Insa de Lyon) pour les nombreux échanges concernant le code de stabilité et le problème Orr-Sommerfeld.

Sur les plans humain et relationnel, je salue mes deux frères et compagnons de thèse : Brahim Moudjed et Redouane Boussaa. Au premier, le plus méthodique d'entre nous, je souhaite une carrière des plus prolifiques sur le plan de la recherche. Au second, le plus pieux d'entre nous, je souhaite un long parcours universitaire en Algérie. J'espère sincèrement ne pas nous perdre de vue, et pas seulement car j'ai hâte de visiter l'Algérie ! Merci aussi, pour leur bonne humeur quotidienne, aux permanents du labo. Je pense à Jean-Yves Champagne, Mahmoud El Hajem, Serges Simoëns, Emmanuel Mignot, Nicolas Rivière, Gilbert Travin et Cyril Mauger. Merci aussi aux collègues enseignants du LMFA durant mon monitorat et mon ATER, Delphine Doppler, Ivana Vinkovic, Marc Buffat, Lionel Soulhac, Jean-Marc Vignon, Gilles Robert, Alexis Giauque, et j'en oublie sûrement... Bonne continuation aux doctorants qui m'ont précédé (Yann Peltier, Pierre Valiorgue, Ghizlane Mouktadiri, Trong Daï, Shyam Sunder Gopalakrishnan) et bon courage à ceux qui m'ont suivi (Ibtissem Gorraïb, Nicolas Souzy, Han Lei, Aboubakr Saleh, Gaby Launay, Ababacar Seck, Donato Vallefucio, Gang Huang, Cai Wei). Une pensée bien méritée aussi au personnel administratif : à Meryem Laboune, Dalila Khiat, Marilyne Galindo, Chantal Gourouvin, Nadira Matar...

Je rends hommage par ailleurs au groupe de mécanique de la Faculté des Sciences Aïn Chok à Casablanca, et à leur tête mes professeurs de mécanique des fluides, Ahmed Hifdi et Saïd Aniss. Vous retrouver, ainsi que plusieurs autres enseignants et collègues, au congrès de Mécanique d'Agadir, fut un moment d'une intense émotion.

Je ferme cette page en dédiant l'aboutissement de ce travail, et bien au-delà, à la prune de mes yeux, à Fatine, celle que j'ai sollicitée pour m'accompagner dans ma vie.

---

« A la mémoire de celles et ceux qui viennent de nous quitter précipitemment... A mes tontons Youssef et Ahmed, à mes tatas Radhia et Wassila, à mon beau père, Ali ; que Dieu accueille leur âme en paix... »



# Table des matières

|                                                                              |               |
|------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| Résumé                                                                       | iii           |
| Abstract                                                                     | vii           |
| Remerciements                                                                | ix            |
| Table des matières                                                           | iii           |
| Liste des tableaux                                                           | vii           |
| Table des figures                                                            | ix            |
| Notations                                                                    | 1             |
| <br>Introduction                                                             | <br>3         |
| <b>1 Etat de l'art</b>                                                       | <b>7</b>      |
| 1.1 Introduction générale . . . . .                                          | 8             |
| 1.2 Mécanismes d'instabilité de type "film" . . . . .                        | 9             |
| 1.2.1 En s'appuyant sur les équations de Navier-Stokes linéarisées . . . . . | 11            |
| 1.2.1.1 Phase de naissance ( <i>initiating mechanism</i> ) . . . . .         | 11            |
| 1.2.1.2 Phase de croissance ( <i>growth mechanism</i> ) . . . . .            | 13            |
| 1.2.2 En s'appuyant sur les équations de Saint-Venant linéarisées . . . . .  | 14            |
| 1.2.2.1 Relation de dispersion . . . . .                                     | 15            |
| 1.2.2.2 Onde cinématique - onde diffusive . . . . .                          | 16            |
| 1.2.2.3 Hiérarchie d'ondes - critère de stabilité . . . . .                  | 17            |
| 1.3 Moyens expérimentaux de référence . . . . .                              | 19            |
| 1.3.1 Détection locale d'ondes . . . . .                                     | 19            |
| 1.3.2 Détection globale d'ondes de surface . . . . .                         | 19            |
| 1.4 Etudes numériques . . . . .                                              | 21            |
| 1.5 Conclusion . . . . .                                                     | 23            |
| <br><b>2 Caractérisation expérimentale des fluides utilisés</b>              | <br><b>25</b> |
| 2.1 Quel fluide rhéofluidifiant choisir ? . . . . .                          | 26            |
| 2.2 Rhéologie des polymères et modèles empiriques . . . . .                  | 27            |
| 2.2.1 Le CMC . . . . .                                                       | 29            |
| 2.2.2 La gomme Xanthane . . . . .                                            | 30            |

|          |                                                                                                        |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.3      | Problématique expérimentale liée à la faible gamme de cisaillement appliqué . .                        | 31        |
| 2.3.1    | Contexte théorique et difficultés rencontrées en rhéométrie . . . . .                                  | 31        |
| 2.3.2    | Electrocapillarité : présentation de la technique . . . . .                                            | 32        |
| 2.3.3    | Montage expérimental . . . . .                                                                         | 33        |
| 2.3.4    | Théorie des ondes capillaires avec dissipation visqueuse - validation en<br>fluide Newtonien . . . . . | 37        |
| 2.3.4.1  | Discussions sur le choix du modèle . . . . .                                                           | 37        |
| 2.3.4.2  | Estimation de l'amplitude de l'onde détectée et du cisaillement<br>appliqué . . . . .                  | 43        |
| 2.3.4.3  | Analyse des résultats dans le cas Newtonien . . . . .                                                  | 46        |
| 2.3.5    | Résultats en fluide rhéofluidifiant . . . . .                                                          | 47        |
| 2.3.5.1  | CMC . . . . .                                                                                          | 47        |
| 2.3.5.2  | Gomme Xanthane . . . . .                                                                               | 52        |
| 2.4      | Conclusion . . . . .                                                                                   | 53        |
| <b>3</b> | <b>Etude d'instabilités de films rhéofluidifiants sur plan incliné</b>                                 | <b>55</b> |
| 3.1      | Installation expérimentale et déroulement des mesures . . . . .                                        | 56        |
| 3.1.1    | Mesures locales . . . . .                                                                              | 56        |
| 3.1.2    | Mesures globales . . . . .                                                                             | 58        |
| 3.2      | Premiers résultats et validation dans le cas Newtonien . . . . .                                       | 59        |
| 3.2.1    | Complémentarité des deux techniques . . . . .                                                          | 60        |
| 3.2.2    | Seuil linéaire de stabilité . . . . .                                                                  | 62        |
| 3.3      | Stabilité linéaire de film rhéofluidifiant à angle fixé . . . . .                                      | 64        |
| 3.3.1    | Estimation de la gamme de cisaillement appliqué sur la couche de film . .                              | 65        |
| 3.3.2    | Résultats et discussions . . . . .                                                                     | 66        |
| 3.3.2.1  | <i>Solution de CMC à 0.075%</i> . . . . .                                                              | 66        |
| 3.3.2.2  | <i>Solution de gomme Xanthane à 0.08%</i> . . . . .                                                    | 66        |
| 3.3.2.3  | <i>Choix d'autres solutions</i> . . . . .                                                              | 68        |
| 3.4      | Conclusion . . . . .                                                                                   | 75        |
| <b>4</b> | <b>Instabilités 3D et relations de Squire</b>                                                          | <b>77</b> |
| 4.1      | Introduction et bibliographie . . . . .                                                                | 78        |
| 4.2      | Equation d'Orr-Sommerfeld généralisée à un fluide purement visqueux - ondes 3D                         | 79        |
| 4.2.1    | Etude du champ de base . . . . .                                                                       | 79        |
| 4.2.2    | Analyse de stabilité linéaire . . . . .                                                                | 81        |
| 4.2.3    | Conditions aux limites . . . . .                                                                       | 82        |
| 4.2.4    | Perturbations périodiques . . . . .                                                                    | 83        |
| 4.2.4.1  | Formulation du problème . . . . .                                                                      | 83        |
| 4.2.4.2  | Relations de Squire . . . . .                                                                          | 85        |
| 4.3      | Résultats à angle d'inclinaison fixé . . . . .                                                         | 87        |
| 4.4      | Etude numérique - analyse temporelle de stabilité linéaire . . . . .                                   | 88        |
| 4.4.1    | Résolution par méthode spectrale . . . . .                                                             | 88        |
| 4.4.2    | Recherche de seuil - méthode de continuation . . . . .                                                 | 88        |
| 4.4.2.1  | Description de l'algorithme . . . . .                                                                  | 89        |
| 4.4.2.2  | Seuil critique 2D . . . . .                                                                            | 90        |
| 4.4.2.3  | Seuils 3D : comparaison des problèmes réduit et complet . . . .                                        | 91        |
| 4.5      | Conclusion . . . . .                                                                                   | 95        |

|                                                                                                     |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>Conclusion et perspectives</b>                                                                   | <b>97</b>  |
| <b>Annexes</b>                                                                                      | <b>101</b> |
| <b>A Les asymptotes de la loi de Carreau</b>                                                        | <b>103</b> |
| <b>B Rhéologie des fluides complexes</b>                                                            | <b>105</b> |
| B.1 Liquides purement visqueux . . . . .                                                            | 105        |
| B.2 Liquides viscoplastiques . . . . .                                                              | 105        |
| B.3 Liquides viscoélastiques . . . . .                                                              | 106        |
| B.4 Comportement dépendant du temps . . . . .                                                       | 108        |
| <b>C Aspects de rhéométrie</b>                                                                      | <b>111</b> |
| C.1 Rhéomètres de Couette . . . . .                                                                 | 111        |
| C.2 Rhéomètres oscillants . . . . .                                                                 | 112        |
| <b>D Propriétés du CMC</b>                                                                          | <b>113</b> |
| <b>E Propriétés de la gomme Xanthane</b>                                                            | <b>115</b> |
| <b>F Démodulation synchrone</b>                                                                     | <b>117</b> |
| <b>G Théorie des ondes capillaires avec dissipation visqueuse</b>                                   | <b>119</b> |
| G.1 Modèle de propagation . . . . .                                                                 | 119        |
| G.2 Modèle d'atténuation . . . . .                                                                  | 119        |
| <b>H Expressions asymptotiques <math>\alpha \rightarrow 0</math> du nombre de Reynolds critique</b> | <b>121</b> |
| <b>I Théorème de Squire en canal plan</b>                                                           | <b>123</b> |
| <b>Bibliographie</b>                                                                                | <b>125</b> |



# Liste des tableaux

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 0.1 | Tentative de classification des fluides complexes.<br>Source web : S. Poncet <i>Initiation à la rhéologie</i> , “ <a href="http://l3mnp.l3m.univ-mrs.fr/site/SitePersoPoncet/enseignement/cours_rheologie.pdf">http ://l3mnp.l3m.univ-mrs.fr/site/SitePersoPoncet/enseignement/cours_rheologie.pdf</a> ” . . . . .             | 4  |
| 2.1 | Résumé des principales techniques expérimentales trouvées dans la littérature employées pour générer des ondes capillaires. En rouge les principales références bibliographiques, en vert le type de modèle pour lequel nous avons opté. . . .                                                                                 | 34 |
| 2.2 | Caractéristiques des solutions utilisées durant notre travail expérimental. Des informations plus précises sur les propriétés physico-chimiques du CMC et de la gomme Xanthane sont données en Annexe D-E. . . . .                                                                                                             | 36 |
| 2.3 | Résumé des principaux modèles théoriques trouvés dans la littérature. En rouge les principales références bibliographiques, en vert le type de modèle pour lequel nous avons opté. . . . .                                                                                                                                     | 40 |
| 4.1 | Valeurs des transformations d’angle d’inclinaison et de nombre de capillarité équivalents d’après les équations (4.4.6), pour l’étude de stabilité de trois ondes obliques à partir du seuil 2D, $Re_{c2D}$ obtenu pour un angle d’inclinaison, $\gamma_{2D} = 1^\circ$ et un nombre de capillarité, $Ca_{2D} = 0.1$ . . . . . | 92 |



# Table des figures

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |    |
|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 0.0.1 | Exemples de motifs d'instabilités dans le cas d'écoulements de type film. Sources : (a) Nosoko & Miyara (2004) [62], (b) Park & Nosoko (2003) [65], (c) Johnson <i>et al.</i> (1999) [43] and (d) Kliakhandler <i>et al.</i> (2001) [47]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                        | 5  |
| 0.0.2 | Evolution spatiale d'ondes de surface se développant à la surface libre d'un écoulement de film sur plan incliné. Source : <i>Falling Liquid Films</i> , Chapitre 8 [45]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 6  |
| 1.1.1 | Train d'ondes suite à un ruissellement d'eaux pluviales (à gauche) et dans un évacuateur de crue (à droite). Source : C. Ancey, Cours d'hydraulique à surface libre, p238 [4] . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 9  |
| 1.1.2 | Quelques exemples de la manifestation naturelle d'instabilités de surface. Source web : (a) « <a href="http://www.unifr.ch/geoscience/geographie/ssgmfiches/gravitaire/4206.php">http://www.unifr.ch/geoscience/geographie/ssgmfiches/gravitaire/4206.php</a> », (b) « <a href="http://planet-terre.ens-lyon.fr/image-de-la-semaine/Img183-2007-01-08.xml">planet-terre.ens-lyon.fr/image-de-la-semaine/Img183-2007-01-08.xml</a> », (c) Thèse de Y. Forterre, p93 (2002) [28] . . . . . | 10 |
| 1.2.1 | Exemples de motifs d'ondes non linéaires observées dans le cas Newtonien : ondes solitaires 2D (a) et ondes subharmoniques 3D (b). Source : Liu <i>et al.</i> (1995) [53]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 12 |
| 1.2.2 | Volumes de contrôle (en pointillés rouges) mis en évidence au niveau de l'interface perturbée à l'ordre zéro dans le sens de l'approximation grandes longueurs d'ondes, dans le cas Newtonien (Smith (1990) [78]) et rhéofluidifiant (Millet <i>et al.</i> (2008) [58]). Source : Thèse de S. Millet, p62 [56]. . . . .                                                                                                                                                                  | 13 |
| 1.2.3 | Critère de stabilité en terme de compétition entre les ondes cinématiques et les ondes dynamiques. (a) : cas stable, la vitesse des ondes cinématiques $c_k$ est comprise entre les vitesses des ondes dynamiques ascendantes $c_{d-}$ et descendantes $c_{d+}$ . (b) : cas instable. Source : Thèse de Y. Forterre, p115 (2002) [28] . . . . .                                                                                                                                          | 18 |
| 1.3.1 | Schéma du montage expérimental de la méthode FS-SS et exemple de motif aléatoire (à gauche). A droite, déplacement apparent d'un point au passage d'une onde à l'interface de 3 milieux d'indice optique distinct (air d'indice $n_{air}$ , verre d'indice $n_g$ et fluide d'indice $n_{liq}$ ). (Issu de Rabaud <i>et al.</i> , 18ème congrès français de mécanique - Août 2007) . . . . .                                                                                              | 20 |
| 1.4.1 | Seuil de stabilité selon l'angle d'inclinaison pour un fluide Newtonien et un fluide rhéofluidifiant. Source : Thèse de S. Millet (2007) [56]). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 21 |
| 1.4.2 | Rapport de la célérité des ondes critiques à la vitesse au niveau de la surface libre (a) à paramètre de temps adimensionnel fixé , (b) à indice de loi en puissance fixé. Source : Millet <i>et al.</i> (2008) [58]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                            | 22 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.4.3 | Profil longitudinal de la profondeur de l'écoulement en réponse à une excitation sinusoïdale pour une amplitude faible ( <i>traits pleins</i> ) et pour une forte amplitude ( <i>pointillés</i> ), pour : $\gamma = 15^\circ$ , $Re = 100$ , $f = 14Hz$ . Le fluide utilisé est une solution de gomme Xanthane avec $\eta_0 = 1430mPa.s$ , $n = 0.4$ , $\dot{\gamma}_c = 0.1s^{-1}$ , $m = 359.2mPa.s^n$ , $\rho = 995Kg/m^3$ , $\sigma = 65mN/m$ . Source : Ruyer-Quil <i>et al.</i> (2012) [73]. . . . .                                                                                                                                                                                                                | 23 |
| 2.1.1 | Courbes de viscosité en fonction du taux de cisaillement pour des liquides purement visqueux. Distinction générale (a), et quelques exemples de fluides rhéofluidifiants (b). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 27 |
| 2.2.1 | Viscosité en fonction du taux cisaillement pour trois solutions différentes de polymère préparées en laboratoire. Les <i>traits pleins</i> correspondent pour la solution de CMC à un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)), et pour les autres solutions à un ajustement suivant la loi en puissance (Eq. (2.1.1)). Nous avons choisi de fixer l'indice de loi en puissance à $n = 0.6$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 28 |
| 2.2.2 | Viscosité en fonction du taux de cisaillement pour trois solutions différentes de polymère préparées en laboratoire. Les <i>traits pleins</i> correspondent pour la solution de CMC à un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)), et pour les autres solutions à un ajustement suivant la loi en puissance (Eq. (2.1.1)). Nous avons choisi de fixer le paramètre de consistance à une valeur comprise entre $m = 10 - 20mPa.s^n$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                    | 29 |
| 2.2.3 | Mesures de viscosité réalisées par rhéométrie pour des solutions de différentes concentrations en CMC. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 30 |
| 2.2.4 | Mesures de viscosité réalisées par rhéométrie pour des solutions de différentes concentrations de gomme Xanthane. Source : Rodd <i>et al.</i> (2000) [71]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 31 |
| 2.3.1 | Exemple de mesure de signal local oscillant pour une solution de 0.075% de CMC. (a) Signal mesuré ( <i>tirets rouges</i> ) en réponse à un signal électrique de référence ( <i>traits pleins bleus</i> ) de tension $V_{ac} = 9Volts$ et $f = 80Hz$ , (b) pour une série de plusieurs amplitudes d'excitation. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 35 |
| 2.3.2 | (a) Déphasage entre le signal électrique de référence et le signal mesuré en fonction de la distance de propagation ( <i>points bleus</i> ), dont on tire la longueur d'onde, (b) Décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance de propagation ( <i>points bleus</i> ), dont on tire le coefficient d'atténuation spatiale. L'interface de l'onde n'est pas un résultat de mesures, mais a été reconstruite conformément à Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9] ( <i>pointillés</i> ). Résultats expérimentaux obtenus pour une solution de 0.1% en masse de CMC à $f = 90Hz$ . Les <i>traits pleins verts</i> représentent un ajustement linéaire en (a) et exponentiel en (b). . . . . | 37 |
| 2.3.3 | Schéma du montage expérimental. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 38 |
| 2.3.4 | Photo d'ensemble du montage expérimental. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 39 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |    |
|-------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3.5 | Validation dans le cas Newtonien des mesures de célérité (a) et de tension de surface (b) pour une solution aqueuse à 45% en volume de glycérine. Ces résultats ont été obtenus pour deux valeurs différentes de l'amplitude, près de la source estimée à 90Hz suivant l'Eq. (2.3.8) : $a_0 = 0.39\mu m$ (cercles bleus) ; $a_0 = 0.85\mu m$ (carrés rouges). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les <i>tirets</i> représentent un ajustement des mesures de célérité suivant l'Eq. (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre à déterminer. Sont aussi représentées les <i>barres d'erreurs</i> collectées durant toute la série de mesures. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 43 |
| 2.3.6 | Illustration des différentes étapes du post-traitement. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 44 |
| 2.3.7 | Validation dans le cas Newtonien des mesures d'atténuation spatiale (a) et de viscosité (b) pour une solution aqueuse à 45% en volume de glycérine. Ces résultats ont été obtenus pour deux valeurs de l'amplitude $a(x)$ estimées au voisinage de la source à 90Hz, suivant l'équation (2.3.8) : $a_0 = 0.39\mu m$ (cercles bleus) ; $a_0 = 0.85\mu m$ (carrés rouges). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les <i>tirets</i> représentent un ajustement des mesures d'atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre à déterminer. Le <i>trait noir</i> correspond à la valeur de viscosité mesurée par rhéométrie. Sont aussi représentées les <i>barres d'erreurs</i> collectées durant toute la série de mesures. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 44 |
| 2.3.8 | Représentation graphique de l'amplitude $a$ de l'onde détectée localement à $x$ donné dans le cas simplifié d'une seule interface liquide/air. Ici sont superposés en rouge ( <i>resp.</i> en vert) les faisceaux laser mis en jeu dans une démarche optique par réflexion ( <i>resp.</i> par réfraction). Dans ce travail, et dans le cadre de l'approximation faibles angles, nous avons eu recours à des mesures par réflexion de faisceau laser, pour lesquelles l'angle détecté vaut le double de la pente locale de la surface libre. Pour le cas illustré il s'agit de la mesure du maximum de cette pente (angle $i_1$ ) ce qui correspond à un déplacement lu sur le capteur optique ayant pour valeur $L_1 \simeq 2H.i_1$ , avec $H$ étant la distance entre la surface libre et le capteur. Dans ce cas simplifié, l'amplitude de l'onde détectée localement se réduit à $a = \frac{\lambda L_1}{4\pi H}$ . A noter que pour une même onde, l'inconvénient des mesures par réfraction de faisceau laser par rapport aux mesures par réflexion s'explique par un déplacement plus faible valant $L_2 \simeq H.(i_2 - i_1)$ et $L_2 \simeq 0.33H.i_1$ dans le cas d'une interface eau/air. . . . . | 45 |
| 2.3.9 | Mesures de célérité (a), de tension de surface (b), d'atténuation spatiale (c), et de viscosité (d) en fonction de la fréquence d'excitation pour trois solutions de concentration différente en CMC : 0.075% <i>pds</i> (carrés verts), 0.1% <i>pds</i> (triangles rouges), 0.125% <i>pds</i> (cercles bleus). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les <i>tirets</i> représentent sur les figures (a) et (b) un ajustement des mesures de célérité suivant l'équation (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre, et sur les figures (c) et (d) un ajustement des mesures atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre. Sont aussi reportées les mesures réalisées pour la solution Newtonienne de glycérine (losanges gris). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 48 |

|        |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |    |
|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 2.3.10 | Mesures de célérité (a), de tension de surface (b), d'atténuation spatiale (c), et de viscosité (d) en fonction de la fréquence d'excitation pour une solution à 0.075% en masse de CMC. Ces résultats ont été obtenus pour quatre valeurs différentes de la tension électrique injectée donnant naissance à des ondes capillaires d'amplitude estimée, au voisinage de la source et à la fréquence la plus basse, suivant l'équation (2.3.8) à : $a_0 = 0.61\mu m$ (étoiles noires), $a_0 = 0.4\mu m$ (cercles rouges), $a_0 = 0.27\mu m$ (triangles verts), $a_0 = 0.19\mu m$ (carrés noirs). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les <i>tirets</i> représentent sur les figures (a) et (b) un ajustement des mesures de célérité suivant l'équation (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre, et sur les figures (c) et (d) un ajustement des mesures atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre. Sont aussi reportées les mesures réalisées pour la solution Newtonienne de glycérine (losanges gris). | 50 |
| 2.3.11 | Rhéogramme final de la solution à 0.075% en masse de CMC. Projection des mesures de viscosité (Fig. 2.3.10d) au sein des mesures réalisées par rhéométrie (points bleus). Les <i>tirets</i> représentent un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)). Dans ce cas, les seules mesures issues du rhéomètre suffisent pour caractériser le plateau Newtonien sans tenir compte des mesures tirées de l'électrocapillarité (marqueurs vides).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 51 |
| 2.3.12 | Rhéogramme final de la solution à 0.08% en masse de gomme Xanthane. Par souci de concision, nous projetons directement les mesures de viscosité tirées de l'électrocapillarité au sein des mesures réalisées par rhéométrie (points bleus). Les <i>tirets</i> représentent un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)). Dans ce cas, les seules mesures issues du rhéomètre ne suffisent plus à caractériser le plateau Newtonien, et nous devons absolument tenir compte des mesures tirées de l'électrocapillarité (marqueurs vides) pour obtenir une valeur de $\eta_0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 52 |
| 3.1.1  | (a) Photo du montage optique utilisé dans une approche par réflexion de faisceau laser. (b) Zoom sur le dispositif d'excitation. Le pot vibrant noir se déplace suivant l'horizontale, entraînant avec lui une plaque immergée dans le petit réservoir amont, ce qui se manifeste par de faibles variations temporelles de profondeur du film, à la même fréquence que celle du pot vibrant.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 57 |
| 3.1.2  | (a) Détection d'ondes de surface par réfraction de faisceau laser à partir de mesures locales de la pente longitudinale de la surface libre. (b) Signal oscillant répondant à une fréquence d'excitation de 15Hz. Cas d'une solution aqueuse de glycérine à 60% , $Re = 23$ , $\gamma = 1^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 58 |
| 3.2.1  | Champ d'épaisseur reconstitué après intégration numérique. Ne sont représentées que les variations autour d'une épaisseur moyenne non déterminée expérimentalement et ramenée à zéro. Cas stable pour une solution aqueuse de glycérine à 60% , $f=15Hz$ , $Re=23$ , $\gamma = 1^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 61 |
| 3.2.2  | Superposition des mesures locales ( <i>étoiles noires</i> ) et globales ( <i>points bleus</i> ) de la pente longitudinale de la surface libre, effectuées au niveau de l'axe central de l'écoulement, sous les mêmes conditions expérimentales. Longueur d'onde et coefficient d'amplification sont déterminés à partir d'un ajustement dans le sens des moindres carrés du nuage de points sur l'Eq. (3.2.1). Cas stable pour une solution aqueuse de glycérine à 60% , $f=15Hz$ , $Re=23$ , $\gamma = 1^\circ$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 61 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.2.3 | Résultats expérimentaux de stabilité linéaire spatiale pour des solutions aqueuses de glycérine - validation dans le cas Newtonien. Ces résultats ont été obtenus par des mesures en deux points réalisées par réfraction de faisceau laser. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 63 |
| 3.2.4 | Nombre de Reynolds critique expérimental, normalisé par sa valeur théorique (Eq. (3.2.3)), en fonction de la largeur du plan incliné $L_{plan}$ adimensionnée par la longueur capillaire. Les <i>marqueurs pleins</i> correspondent aux résultats expérimentaux de Vlachogiannis <i>et al.</i> (2010) [86] sur une gamme d'angle d'inclinaison telle que $\gamma = [5^\circ-30^\circ]$ , et pour des largeurs du plan incliné telles que $L_{plan} = \{83mm, 166mm, 250mm\}$ . Les <i>marqueurs vides</i> correspondent à nos résultats expérimentaux représentés en (c) sur une gamme d'angle d'inclinaison telle que $\gamma = [1.2^\circ-5.6^\circ]$ , et pour une largeur du plan incliné telle que $L_{plan} = 464mm$ . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 64 |
| 3.3.1 | (a) Courbe marginale de stabilité dans le plan $(Re, f)$ pour la solution de gomme Xanthane à 0.08‰ étudiée à $1^\circ$ d'inclinaison. Les cercles correspondent aux mesures de fréquence de coupure au nombre de Reynolds considéré, le marqueur en croix verte désigne le nombre de Reynolds critique déterminé par Ng & Mei (1994) [60] et le marqueur en carré rouge celui déterminé par Ruyer-Quil <i>et al.</i> (2012) [73]. Le trait plein correspond à un ajustement des mesures expérimentales suivant l'équation (3.2.2), et l'extrapolation de cette courbe aux fréquences nulles fournit un nombre de Reynolds critique expérimental tel que $Re_c = 38.5$ . Le nombre de Reynolds critique obtenu dans le cas Newtonien est affiché en losange gris. (b) Mesures de longueurs d'ondes marginales. Nous rappelons les valeurs utilisées pour tracer ces courbes, qui sont les mêmes que celles déterminées par électrocapillarité (Tab. 2.2 & Fig. 2.3.12) : $\rho = 981Kg/m^3$ , $\eta_0 = 4.43mPa.s$ , $n = 0.79$ , $\dot{\gamma}_c = 2.23s^{-1}$ . . . . . | 67 |
| 3.3.2 | Courbes de viscosité des fluides n°3 ( <i>carrés</i> ) et n°4 ( <i>triangles</i> ) faiblement rhéofluidifiants obtenus par mélange de CMC et de gomme Xanthane. Les marqueurs vides représentent les mesures obtenues par un rhéomètre de Couette, les marqueurs pleins rouges correspondent au cisaillement maximal $\dot{\gamma}_{max}$ estimé pour l'écoulement uniforme sur la tranche de débit expérimental que nous étudions. L'ajustement des mesures de viscosité suivant la loi de Carreau apparaît en <i>tirets</i> . Les ajustements donnent les valeurs de paramètres suivant : $\eta_0 = 8.41mPa.s$ , $\dot{\gamma}_c = 77.8s^{-1}$ , $n = 0.881$ pour le fluide n°3 ( $\rho = 993Kg.m^{-3}$ , $\sigma = 45mN.m^{-1}$ ) ; et $\eta_0 = 16mPa.s$ , $\dot{\gamma}_c = 74.1s^{-1}$ , $n = 0.804$ pour le fluide n°4 ( $\rho = 1004Kg.m^{-3}$ , $\sigma = 100mN.m^{-1}$ ) . . . . .                                                                                                                                                                              | 69 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |    |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.3.3 | (a) Courbe marginale de stabilité dans le plan $(Re, f)$ pour les fluides 3 ( <i>carrés</i> ) et 4 ( <i>triangles</i> ) étudiés respectivement à un angle d'inclinaison de $3.5^\circ$ et $7^\circ$ . Les marqueurs vides correspondent aux mesures de fréquence de coupure au nombre de Reynolds considéré. Les <i>traits pleins</i> correspondent à un ajustement des mesures expérimentales suivant l'équation (3.2.2), et l'extrapolation de cette courbe aux fréquences nulles fournit un nombre de Reynolds critique expérimental $Re_c = 12.23$ et $Re_c = 5.725$ respectivement. (b) Longueur des ondes marginales mesurée ( <i>marqueurs vides</i> ) superposée aux valeurs issues des résultats numériques ( <i>marqueurs pleins</i> ) obtenues <i>via</i> : <i>i</i> ) la partie réelle de la célérité de l'onde marginale au nombre de Reynolds considéré, pour laquelle on a $c_i(Re) = 0$ ; <i>ii</i> ) les mesures de fréquence de coupure représentées en (a). Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2.                                                                                                                                                                                               | 70 |
| 3.3.4 | Courbe marginale de stabilité dans le plan $(Re, k)$ pour les fluides 3 (a) et 4 (b) étudiés respectivement à un angle d'inclinaison de $3.5^\circ$ et $7^\circ$ . Les marqueurs vides correspondent aux valeurs adimensionnées des mesures de nombre d'onde de coupure au nombre de Reynolds considéré. Les résultats numériques de courbe neutre sont représentés en <i>trait noir épais</i> en faisant varier la valeur de $L$ et de $Ca$ en fonction de l'écoulement ( <i>i.e.</i> du nombre de Reynolds). Cette courbe est enveloppée par deux courbes numériques obtenues dans les deux situations extrêmes où on fixe soit le couple $(L_{max} - Ca_{min}^{-1})$ (courbe bleue représentant le cas le plus instable) soit le couple $(L_{min} - Ca_{max}^{-1})$ (courbe rouge représentant le cas le plus stable). Numériquement on obtient respectivement un nombre de Reynolds critique $Re_c = 11.9$ et $Re_c = 5.28$ . Nous affichons aussi les valeurs de seuil critique obtenu par Ng & Mei (1994) [60] ( <i>croix verte</i> ) et par Ruyer-Quil <i>et al.</i> (2012) [73] ( <i>triangle plein rouge</i> ), ainsi que le cas Newtonien en <i>losange gris</i> . Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2. | 72 |
| 3.3.5 | (a) Célérité des ondes marginales adimensionnée par l'estimation $q/d_s$ de la vitesse de l'écoulement à la surface libre pour les fluides 3 ( <i>carrés</i> ) et 4 ( <i>triangles</i> ). Les marqueurs vides ( <i>resp.</i> pleins) correspondent aux résultats expérimentaux ( <i>resp.</i> numériques). (b) Célérité des ondes cinématiques $c_k$ ( <i>marqueurs pleins</i> ) et dynamiques descendantes $c_{d+}$ ( <i>marqueurs vides</i> ) calculées aux conditions expérimentales de stabilité marginale pour les fluides 3 ( <i>carrés</i> ) et 4 ( <i>triangles</i> ) <i>via</i> les mesures de longueur d'ondes (Fig. 3.3.3b). Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 74 |
| 3.3.6 | Nombre de Reynolds critique expérimental normalisé par sa valeur théorique Newtonienne ( <i>trait plein</i> ) en fonction du paramètre rhéofluidifiant, avec $n \sim 0.8$ , pour plusieurs angles d'inclinaison. Nous rappelons les propriétés des fluides utilisés : $\eta_0 = 8.41 mPa.s$ , $\dot{\gamma}_c = 77.8 s^{-1}$ , $n = 0.881$ pour le fluide n°3 ( $\rho = 993 Kg.m^{-3}$ , $\sigma = 45 mN.m^{-1}$ ); et $\eta_0 = 16 mPa.s$ , $\dot{\gamma}_c = 74.1 s^{-1}$ , $n = 0.804$ pour le fluide n°4 ( $\rho = 1004 Kg.m^{-3}$ , $\sigma = 100 mN.m^{-1}$ )                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 75 |
| 4.2.1 | Schéma de l'écoulement.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 80 |
| 4.2.2 | (a) Schéma représentatif d'une onde 3D d'angle d'obliquité $i_{ob}$ de nombre d'onde $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ à $(Re_{3D}, \gamma_{3D}, Ca_{3D})$ donnés, et (b) celui de l'onde 2D équivalente à $(Re_{2D}, \gamma_{2D}, Ca_{2D})$ donnés, après transformations de Squire (Eq. (4.2.37)).                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 86 |
| 4.3.1 | Effet déstabilisant de l'angle d'inclinaison dans une étude 2D.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 88 |

|       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.4.1 | Carte de stabilité marginale dans le cas rhéofluidifiant à angle d'inclinaison de $\gamma = 2^\circ$ et seuil critique 2D ( $\beta = 0$ ) avec $L = 0.5$ , $n = 0.5$ , $Ca = 10$ et $I = 5.10^{-5}$ . Sont représentés ici la courbe neutre ( $c_i = 0$ ) et le seuil critique 2D ( $\partial c_i / \partial \alpha = 0$ ). Chaque point de la courbe correspond à la situation où l'onde est marginalement stable, et est déterminé en appliquant la méthode de continuation à nombre d'onde fixé. La courbe sépare le plan $(Re, \alpha)$ en zone linéairement stable et zone linéairement instable. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 89  |
| 4.4.2 | Seuils critiques 2D de stabilité selon $L$ pour un angle d'inclinaison de $1^\circ$ ( <i>cercles</i> ), $2^\circ$ ( <i>triangles</i> ), $4^\circ$ ( <i>losanges</i> ) et $10^\circ$ ( <i>carrés</i> ), avec $n = 0.5$ , $Ca = 0$ et $I = 10^{-3}$ . Les traits pleins ( <i>resp.</i> tirets) représentent nos résultats numériques correspondant au cas incluant ( <i>resp.</i> excluant) les perturbations de viscosité. Les marqueurs vides correspondent aux résultats issus de la thèse de S. Millet p59 (2007) [56]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 91  |
| 4.4.3 | Seuils en terme de nombre de Reynolds pour une perturbation 3D, en fonction de $L$ . Les marqueurs vides ( <i>resp.</i> pleins) correspondent aux résultats numériques de seuil 3D obtenus après résolution du problème réduit (4.2.33-4.2.36) ( <i>resp.</i> complet (4.2.23-4.2.32)). Nous avons considéré des ondes obliques de $20^\circ$ ( <i>cercles</i> ), $30^\circ$ ( <i>triangles</i> ) et $40^\circ$ ( <i>carrés</i> ), par rapport à l'onde critique 2D. Les <i>traits pleins</i> correspondent, pour chaque valeur de $L$ , à l'application de la relation de Squire Eq. (4.4.7), à partir de la seule connaissance du seuil critique 2D ( <i>points rouges</i> ) obtenu pour un angle d'inclinaison $\gamma_{2D} = 1^\circ$ , et pour un fluide tel que $n = 0.5$ , $I = 10^{-5}$ et $Ca_{2D} = 0.1$ . Les <i>tirets</i> ne figurent que pour mettre en évidence les résultats du problème complet (marqueurs pleins). Les valeurs de $\gamma_{3D}$ et $Ca_{3D}$ sont données Tab. 4.1. . . . . | 93  |
| 4.4.4 | Seuils en terme de nombre de Reynolds pour une perturbation 3D, en fonction de $L$ . Les traits pleins ( <i>resp.</i> tirets) correspondent aux résultats numériques de seuil 3D obtenus après résolution du problème réduit (4.2.33-4.2.36) ( <i>resp.</i> complet (4.2.23-4.2.32)). Nous avons considéré des ondes obliques de $10^\circ$ ( <i>bleu</i> ), $20^\circ$ ( <i>noir</i> ), $26.565^\circ$ ( <i>vert</i> ) et $30^\circ$ ( <i>magenta</i> ), par rapport à l'onde critique 2D, en maintenant l'angle d'inclinaison tel que $\gamma = 2^\circ$ , et pour un fluide tel que $n = 0.5$ , $I = 10^{-5}$ et $Ca_{2D} = 0.1$ . Le seuil critique 2D est représenté en rouge. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 94  |
| A.1   | Asymptotes de la loi de Carreau. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 104 |
| B.1   | Contraintes visqueuses en fonction du cisaillement pour quelques modèles de fluides complexes. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 106 |
| B.1   | Exemples de manifestation d'effets viscoélastiques. Source : Boger & Walters (1993) [16]. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 107 |
| B.2   | Réponse d'un liquide viscoélastique à une déformation sinusoidale $\gamma(t)$ dans le cas élastique, et réponse à une vitesse de déformation $\dot{\gamma}(t)$ dans le cas purement visqueux. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 107 |
| B.3   | Modules élastique et visqueux pour une émulsion eau-huile (à gauche), et pour une solution concentrée de surfactants (à droite). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 108 |
| B.4   | Modèle de Maxwell (à gauche), Modèle de Kelvin-Voigt (à droite). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 109 |
| B.1   | Comportement thixotropique (à gauche), antithixotropique (à droite). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 109 |

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| C.1 | Schéma d'un rhéomètre cône-plan (a), rhéomètre rotatif (b) et rhéomètre plan-plan (c). . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 112 |
| D.1 | Propriétés physico-chimiques du polymère de CMC utilisé au laboratoire. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 113 |
| E.1 | Propriétés physico-chimiques du polymère de gomme Xanthane utilisé au laboratoire. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 115 |
| I.1 | Seuils critiques 2D en terme de nombre de Reynolds (a), et de nombre d'onde (b), avec $n = 0.5$ et $I = 0$ , tracés en traits pleins ( <i>resp.</i> pointillés) dans le cas incluant ( <i>resp.</i> excluant) les perturbations de viscosité. Les résultats de Nouar <i>et al.</i> (2007) [63] sont représentés par les marqueurs pleins ( <i>resp.</i> vides) dans le cas incluant ( <i>resp.</i> excluant) les perturbations de viscosité. . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 123 |
| I.2 | Résultats de seuils 3D en terme de nombre de Reynolds (a), et de nombre d'onde (b), dans le cas incluant les perturbations de viscosité. Les marqueurs correspondent aux résultats numériques de seuils 3D obtenus après résolution du problème complet (voir Chapitre 4), muni des conditions aux limites propres à l'écoulement de Poiseuille-plan, et en considérant des ondes obliques de $20^\circ$ ( <i>cercles</i> ), $30^\circ$ ( <i>carrés</i> ) et $44^\circ$ ( <i>triangles</i> ) par rapport à la direction longitudinale. Les <i>traits pleins</i> correspondent, en (a), pour chaque valeur de $L$ , à l'application de la relation de Squire portant sur les nombres de Reynolds $Re_{c3D} = Re_{c2D} / \sqrt{(1 - (\beta/k_{c2D})^2)}$ , à partir de la seule connaissance du seuil critique 2D ( <i>points noirs</i> ), obtenu pour un fluide tel que $n = 0.5$ et $I = 10^{-3}$ . . . . . | 124 |

# Notations

## Lettres latines

|          |                                                                                        |            |                  |                                                                                          |              |
|----------|----------------------------------------------------------------------------------------|------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| $a$      | Amplitude de l'onde capillaire en tout point                                           | $m$        | $L$              | Paramètre adimensionné de temps dans la loi de Carreau :<br>$L = \frac{\delta q}{d_s^2}$ |              |
| $a_0$    | Amplitude de l'onde capillaire au premier point de mesure                              | $m$        | $m$              | Paramètre de consistance de la loi en puissance                                          | $Pa.s^n$     |
| $c$      | Célérité de l'onde de surface                                                          | $m.s^{-1}$ | $n$              | Indice de loi en puissance                                                               |              |
| $c_k$    | Célérité de l'onde cinématique                                                         |            | $p$              | Pression totale de l'écoulement                                                          | $Pa$         |
| $c_{d+}$ | Célérité de l'onde dynamique descendante                                               |            | $P_b$            | Pression de l'écoulement de base                                                         |              |
| $c_{d-}$ | Célérité de l'onde dynamique ascendante                                                |            | $p'$             | Perturbation de pression                                                                 |              |
| $Ca$     | Nombre de capillarité :<br>$Ca = \frac{\eta_0 g}{\sigma d_s}$                          |            | $q$              | Débit par unité de largeur                                                               | $m^2.s^{-1}$ |
| $d$      | Profondeur de l'écoulement de base non perturbé                                        |            | $Q_{vol}$        | Débit volumique                                                                          | $m^3.s^{-1}$ |
| $d_s$    | Grandeur caractéristique d'épaisseur du film                                           | $m$        | $Re$             | Nombre de Reynolds : $Re = \frac{\rho g}{\eta_0}$                                        |              |
| $D$      | Opérateur dérivée partielle $\partial/\partial y$                                      |            | $Re_c$           | Nombre de Reynolds critique                                                              |              |
| $f$      | Fréquence d'excitation                                                                 | $Hz$       | $(u, v, w)$      | Composantes longitudinale, normale et transverse de la vitesse                           |              |
| $f_c$    | Fréquence de coupure                                                                   | $Hz$       | $U_b$            | Vitesse de base de l'écoulement                                                          |              |
| $g$      | Accélération de la pesanteur                                                           | $m.s^{-2}$ | $v_\varphi, v_g$ | Vitesses de phase et de groupe de l'onde capillaire                                      | $m.s^{-1}$   |
| $h$      | Profondeur en tout point de l'écoulement (relativement au fond)                        | $m$        | $V_{dc}, V_{ac}$ | Composantes continue et alternative de la tension électrique                             | $Volts$      |
| $I$      | Rapport des viscosités à cisaillement nul et infini : $I = \frac{\eta_0}{\eta_\infty}$ |            | $x$              | Coordonnée longitudinale                                                                 | $m$          |
| $k$      | Nombre d'onde                                                                          |            | $y$              | Coordonnée normale, origine au niveau de la surface libre non perturbée                  | $m$          |
| $k_c$    | Nombre d'onde critique                                                                 |            | $z$              | Coordonnée transverse                                                                    | $m$          |

## Lettres grecques

|                  |                                                                                       |              |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| $\alpha$         | Nombre d'onde longitudinal                                                            | $m^{-1}$     |
| $\alpha_{att}$   | Coefficient d'atténuation spatiale                                                    | $m^{-1}$     |
| $\beta$          | Nombre d'onde transverse                                                              |              |
| $\gamma$         | Angle d'inclinaison                                                                   | $rad$        |
| $\dot{\gamma}$   | Cisaillement                                                                          | $s^{-1}$     |
| $\dot{\gamma}_c$ | Largeur du plateau Newtonien pour un fluide de Carreau<br>$\dot{\gamma}_c = 1/\delta$ | $s^{-1}$     |
| $\delta$         | Paramètre de temps de la loi de Carreau                                               | $s$          |
| $\vec{\delta r}$ | Champ de déplacement mesuré par FS-SS                                                 |              |
| $\Delta$         | Opérateur différentiel<br>$\Delta = D^2 - k^2$                                        |              |
| $\eta$           | Viscosité                                                                             | $Pa.s$       |
| $\eta_0$         | Viscosité à cisaillement nul dans la loi de Carreau                                   |              |
| $\eta_\infty$    | Viscosité à cisaillement infini dans la loi de Carreau                                |              |
| $\eta'$          | Perturbation de viscosité                                                             |              |
| $\theta$         | Viscosité tangente                                                                    |              |
| $\lambda$        | Longueur d'onde                                                                       | $m$          |
| $\xi$            | Déformation de la surface libre autour de la profondeur de base                       |              |
| $\rho$           | Masse volumique                                                                       | $kg.m^{-3}$  |
| $\sigma$         | Tension de surface                                                                    | $N.m^{-1}$   |
| $\sigma_{eff}$   | Tension de surface effective                                                          |              |
| $\sigma_{ij}$    | Tenseur de contraintes visqueuses                                                     |              |
| $\sigma_{xy}^b$  | Tenseur de base des contraintes visqueuses                                            |              |
| $\sigma'_{ij}$   | Perturbations du tenseur de contraintes visqueuses                                    |              |
| $\omega$         | Fréquence angulaire                                                                   | $rad.s^{-1}$ |

## Abréviations

|       |                                                                   |
|-------|-------------------------------------------------------------------|
| CCD   | <u>C</u> harge- <u>C</u> oupled <u>D</u> evice                    |
| CMC   | <u>C</u> arboxymethylcellulose                                    |
| FS-SS | <u>F</u> ree <u>S</u> urface- <u>S</u> ynthetic <u>S</u> chlieren |
| NI    | <u>N</u> ational <u>I</u> nstruments <sup>TM</sup>                |
| PSD   | <u>P</u> osition <u>S</u> ensing <u>D</u> evice                   |

# Introduction

*Panta rhei*<sup>1</sup>, disait déjà Héraclite au sixième siècle avant notre ère. Il n'est pas question ici de polémiquer sur l'origine de cette célèbre phrase, mais dans le contexte de notre travail, il est essentiel de se poser la question jusqu'au bout : est-ce que tout coule, et sous quelles conditions ? La Rhéologie des fluides complexes est une science fascinante : elle nous enseigne comment répond un milieu déformable (solide ou liquide) lorsqu'il est soumis à une sollicitation mécanique ou contrainte.

Pour ce qui est des liquides, ceux-ci peuvent avoir des comportements étonnants, et la plupart possèdent des propriétés rhéologiques très variées. Le tableau 0.1 résume quelques exemples de grandes familles de liquides de comportement non Newtonien (Annexe B). Tout n'est qu'une question d'échelle de temps, c'est ainsi que se comprend le nombre de Deborah qui compare ainsi le temps physique de réponse du matériau par rapport au temps de l'observation. Dans ce travail, nous allons nous intéresser aux fluides rhéofluidifiants qui forment une classe de liquides visqueux non linéaires dont la viscosité diminue avec le taux de cisaillement. D'un point de vue rhéologique, il existe plusieurs lois semi-empiriques destinées à décrire la viscosité des liquides rhéofluidifiants comme fonction du taux de cisaillement ; nous choisirons tout au long de ce travail de la modéliser principalement par la loi de Carreau (Annexe A) qui a la particularité de présenter une région de comportement Newtonien pour les faibles valeurs du cisaillement local.

D'un autre côté, tant sur le plan environnemental qu'industriel, ou simplement dans la vie de tous les jours, les écoulements peu profonds à surface libre (aussi appelés films minces) présentent rapidement des motifs ondulatoires qui peuvent devenir très complexes suivant la pente, la vitesse de l'écoulement et/ou les propriétés physiques du fluide considéré (Fig. 0.0.1). Il est admis que les ondes qui apparaissent « le plus tôt » dans ce contexte sont quasi-planes, et caractérisées par une longueur d'onde très grande devant l'épaisseur moyenne de l'écoulement ; nous parlons d'ondes de surface. Sur le plan expérimental, Kapitza & Kapitza (1949) [46], puis Alekseenko *et al.* (1979) [1] furent les premiers à visualiser sur plan vertical des ondes très variées présentant une dynamique très riche. Sur plan incliné, la figure 0.0.2 montre qu'à partir d'une certaine distance à l'aval, les ondes de surface se développent rapidement suivant un régime non linéaire, ce qui rend le régime linéaire assez difficile à maintenir, et donc à étudier. Dans ce travail, nous nous intéressons principalement au régime linéaire où les ondes sont exclusivement sinusoïdales, et l'amplitude supposée la plus petite possible. Par ailleurs, il a été montré que les instabilités de ce type apparaissent pour un nombre de Reynolds non nul, ce qui explique le caractère convectif de ces instabilités. Le problème théorique de stabilité linéaire

---

1. "Tout coule".

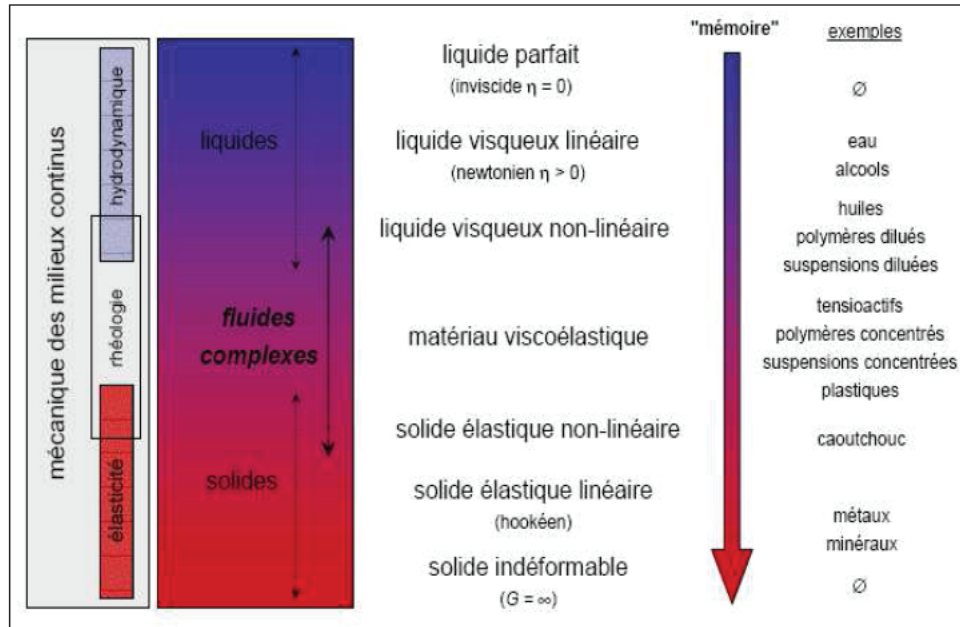


TABLE 0.1 : Tentative de classification des fluides complexes.

Source web : S. Poncet *Initiation à la rhéologie*, "[http ://l3mgrp.l3m.univ-mrs.fr/site/SitePersoPoncet/enseignement/cours\\_rheologie.pdf](http://l3mgrp.l3m.univ-mrs.fr/site/SitePersoPoncet/enseignement/cours_rheologie.pdf)"

dans le cas Newtonien est relativement bien compris depuis les travaux pionniers de Benjamin (1957) & Yih (1963) [14, 90]. Par la suite, les travaux expérimentaux de Liu *et al.* (1993) [52] ont montré que le seuil critique linéaire évolue bien comme une fonction décroissante de l'angle d'inclinaison.

Etant donné que les fluides mis en jeu sont souvent non Newtoniens, il est donc intéressant de comparer les résultats de stabilité à ceux obtenus dans le cas particulier des fluides Newtoniens.

Le premier chapitre de cette thèse résume l'essentiel des travaux publiés à ce jour concernant la stabilité des écoulements de film par gravité le long d'un plan incliné. Nous présenterons les différentes approches théoriques employées pour comprendre le problème, tout en insistant sur l'aspect phénoménologique décrivant physiquement les mécanismes responsables de la naissance, puis de la croissance des ondes de surface, indépendamment du cas Newtonien ou non Newtonien. Dans le cas rhéofluidifiant à une couche de fluide, nous nous appuierons essentiellement sur les travaux numériques menés par notre équipe (Rousset *et al.* (2007) [72], Millet *et al.* (2008) [58]) et ceux s'appuyant sur une approche relativement différente type *shallow water* (Ng & Mei (1994) [60], Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]).

Un intérêt particulier sera porté dans le deuxième chapitre à la caractérisation expérimentale des propriétés rhéologiques des fluides employés. La connaissance précise des paramètres apparaissant dans la loi de Carreau est d'un poids majeur dans notre étude de stabilité ; nous verrons que tous les paramètres physiques décrivant la rhéologie du fluide peuvent de manière significative déplacer le seuil critique en terme de nombre de Reynolds. Dans cette optique, Allouche *et al.* (2015) [2] ont mis en place une technique optique non intrusive permettant de générer des ondes capillaires que nous étudions sur une large gamme de fréquence. D'abord validée sur des

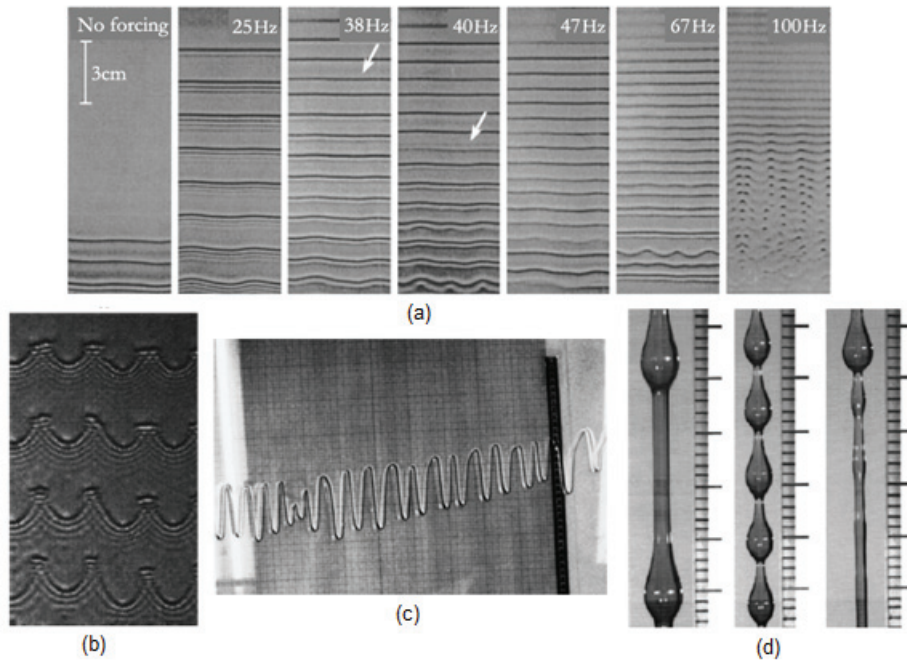


FIGURE 0.0.1 : Exemples de motifs d'instabilités dans le cas d'écoulements de type film. Sources : (a) Nosoko & Miyara (2004) [62], (b) Park & Nosoko (2003) [65], (c) Johnson *et al.* (1999) [43] and (d) Kliakhandler *et al.* (2001) [47].

solutions Newtoniennes de viscosité connue, cette méthode appelée *électrocapillarité* sera appliquée pour caractériser rhéologiquement deux solutions de polymère rhéofluidifiant disponibles en laboratoire : le Carboxyméthylcellulose (CMC, *E466*) et la gomme Xanthane (*E415*).

Le chapitre 3 décrit le dispositif mis en place établissant l'écoulement de film sur plan incliné, et se consacre à la présentation et l'analyse des résultats de stabilité linéaire pour des solutions de concentration différente en polymère. Pour détecter les ondes, nous aurons recours à deux techniques : l'une locale, l'autre globale semblable aux techniques de Schlieren (FS-SS, Moisy *et al.* (2009) [59]). Cette dernière permet entre autres de reconstituer l'élévation de surface et donc d'étudier plus fidèlement le train d'ondes (variations transverses, non planéité...). A angle d'inclinaison fixé, nous présenterons nos résultats expérimentaux de courbe marginale de stabilité classiquement sur le plan  $(Re, f)$ , que nous comparerons aux résultats numériques de stabilité temporelle *via* les mesures de longueurs et célérités d'ondes marginales dans les plans  $(Re, k)$  et  $(Re, c)$ .

Enfin le chapitre 4 propose une réponse à un problème souvent considéré comme acquis : celui de la validité du théorème de Squire dans le cas non Newtonien purement visqueux. Squire (1933) [82] fut le premier à s'interroger sur une analogie entre les ondes 3D et les ondes 2D dans le cas simple d'un écoulement de fluide Newtonien sur canal plan ; son théorème s'énonce en exprimant que ce sont les ondes 2D qui apparaissent en premier : communément nous disons que ces ondes planes sont les plus dangereuses. Après avoir écrit l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée aux ondes 3D, nous discuterons analytiquement la validité des relations de Squire, puis nous procéderons à une étude numérique 3D dans la continuité de la thèse de S. Millet (2007) [56], ce qui nous permettra de fournir une conclusion sur cette problématique.

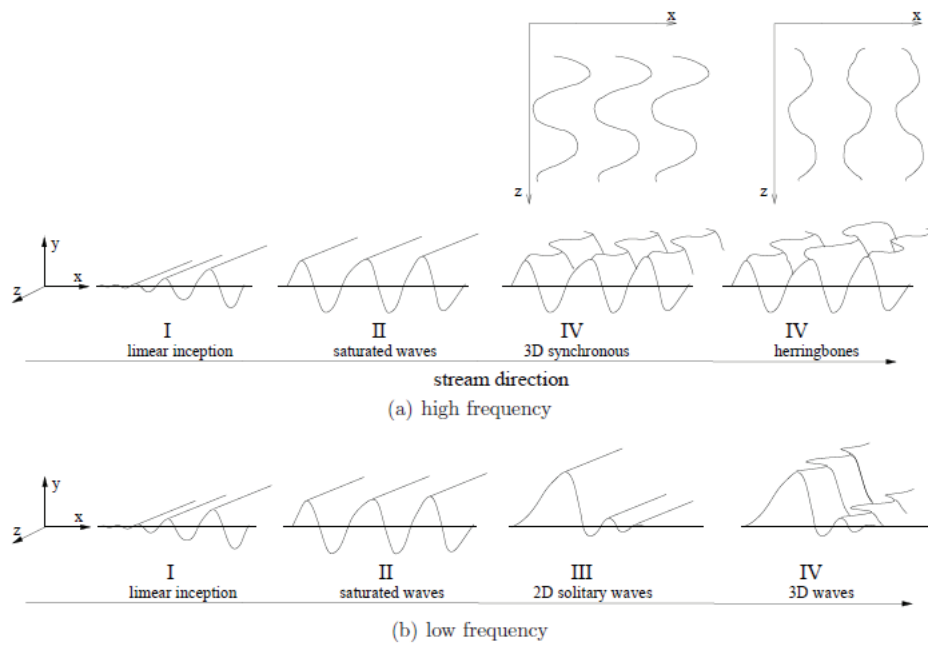


FIGURE 0.0.2 : Evolution spatiale d'ondes de surface se développant à la surface libre d'un écoulement de film sur plan incliné. Source : *Falling Liquid Films*, Chapitre 8 [45].

# **Chapitre 1**

## **Etat de l'art**

## 1.1 Introduction générale

Nombreux sont les phénomènes physiques durant lesquels des mouvements ondulatoires peuvent se manifester dans un milieu liquide présentant une surface libre. Nous pouvons communément les appeler vagues (*waves* en anglais), et les définir comme étant “une multitude de phénomènes où une onde se propage à la surface d’une étendue d’eau” (C. Ancey [4]). Les origines de leur création et les conditions de leur développement sont diverses, ce qui fait qu’elles peuvent être plus ou moins dévastatrices ou apporter une plus ou moins grande efficacité dans les procédés (énergie houlomotrice). Que leur formation soit liée à un obstacle ou à une variation de hauteur, qu’elles soient simplement provoquées par une déformation de la surface libre ou par le vent, il est essentiel d’être capable de comprendre les mécanismes qui entrent en jeu à leur naissance, et les forces qui entretiennent leur progression afin de prédire leur évolution dans le temps et l’espace.

Plusieurs modèles physiques et théoriques ont été proposés suivant les ordres de grandeur retenus en terme de profondeur, d’amplitude et de longueur d’onde. Certains apparaissent très adaptés pour une large variété de vagues (ex : équations de Korteweg et de Vries qui peuvent décrire aussi bien le comportement d’un soliton que celui des vagues scélérates) mais la plupart ne décrivent correctement la réalité que dans les configurations les plus simples (ex : fonction d’Airy et ondes de gravité) et subissent très rapidement un nombre important de limitations, par exemple lorsque les effets non-linéaires et dispersifs ne sont plus en équilibre (dans le cas d’un déferlement où le sommet de la vague cherche à se déplacer plus vite que sa base). Certaines situations exceptionnelles sont encore moins bien comprises, dans la mesure où plusieurs phénomènes complexes peuvent être mis en jeu comme le transport solide (crues et laves torrentielles, écoulements de glaciers), les glissements de terrain engendrant le déplacement d’un grand volume d’eau (formation de tsunamis à l’approche des côtes par conservation de l’énergie) ou les mascarets (forme particulière de ressaut hydraulique à la suite de la remontée d’eau à contre courant dans un fleuve).

Les observations représentées sur la figure 1.1.1 montrent des trains d’ondes, qui ne font pas l’objet de notre travail, et qui apparaissent à la surface libre d’un écoulement sur terrain pentu comme dans le cas d’un ruissellement d’eaux de pluie. Lors de certains événements géophysiques spectaculaires (Fig. 1.1.2a-b)), et en particulier les coulées de boue (Fig. 1.1.2c)), les observations de terrain montrent que l’écoulement est souvent constitué de “paquets de boues” (*surges*) assez régulièrement espacés, plutôt que d’un écoulement continu. L’origine de cette organisation de l’écoulement en paquets se trouve peut-être dans une instabilité de type “instabilité de film”<sup>1</sup> et de son développement non linéaire ; prédire les longueurs d’ondes issues d’un tel processus permettrait de valider ou d’invalider cette hypothèse, et de tester les modèles numériques opérationnels.

En dehors des configurations environnementales, les problèmes de stabilité d’écoulements de films liquides par gravité se rencontrent dans certaines applications telles que l’extraction de chaleur depuis des surfaces solides planes, des procédés tels que l’enduction (*coating* en anglais) ou le couchage en général. La problématique est alors d’éviter ou de retarder l’apparition d’instabilités qui constituent à la fois une source de défauts dans le produit fini et une limitation

---

1. Nous appelons “film” tout écoulement laminaire à surface libre beaucoup plus long que son épaisseur.



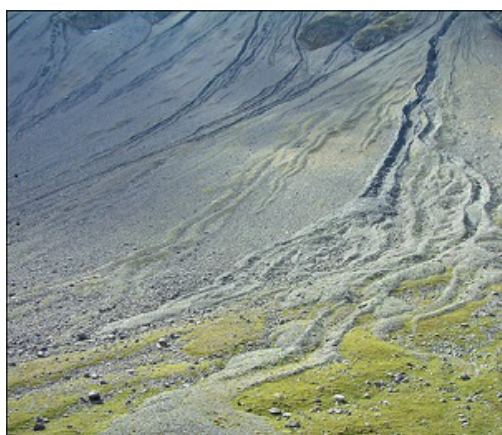
FIGURE 1.1.1 : Train d'ondes suite à un ruissellement d'eaux pluviales (à gauche) et dans un évacuateur de crue (à droite). Source : C. Ancey, Cours d'hydraulique à surface libre, p238 [4]

de la productivité. Que ce soit dans l'industrie ou dans l'environnement, les fluides sont souvent de nature complexe (Chambon *et al.* (2009) [17], Benslimane *et al.* (2011) [15], Jouvét *et al.* (2011) [44]), aussi nous choisirons dans un premier temps de les modéliser comme des fluides non Newtoniens plutôt rhéofluidifiants bien qu'ils présentent parfois un seuil de mise en mouvement (Annexe B).

## 1.2 Mécanismes d'instabilité de type "film"

En prenant comme modèle physique le film mince, isotherme, uniforme, s'écoulant par gravité le long d'un plan incliné, nous essaierons dans ce chapitre de comprendre quels sont les mécanismes physiques responsables, dans un premier temps, de la naissance de ces instabilités à partir de perturbations dont nous tenterons de définir la nature, puis de comprendre dans un deuxième temps les conditions dynamiques favorables à leur croissance et leur manifestation comme ondes de surface, atténuées ou amplifiées (dans l'espace ou dans le temps). Les observations expérimentales classent les instabilités de type "film" comme des ondes de surface de longueur d'onde très grandes devant la profondeur moyenne de l'écoulement de base (*long-wave instabilities*), ce qui justifiera depuis Yih (1963) [90] les études numériques asymptotiques de stabilité temporelle à grandes longueurs d'ondes (*long-wave expansion*).

Etant donné que deux formulations mathématiques sont généralement proposées dans les problèmes d'écoulement à surface libre, suivant que les auteurs soient d'obédience mécanicienne ou hydraulicienne, nous nous intéresserons particulièrement à les juxtaposer les unes aux autres sans toutefois écrire toutes les équations relatives à notre problème.



(a) Lave torrentielle (Lenzerheide, Suisse)



(b) Mer de glace - Glacier de Leschaux -  
Grandes Jorasses.



(c) Bouffée ou "paquet de boue" (vallée du Jiang-  
jia, province du Sichan, Chine).

FIGURE 1.1.2 : Quelques exemples de la manifestation naturelle d'instabilités de surface.  
Source web : (a) « <http://www.unifr.ch/geoscience/geographie/ssgmfiches/gravitaire/4206.php> », (b) « [planet-terre.ens-lyon.fr/image-de-la-semaine/Img183-2007-01-08.xml](http://planet-terre.ens-lyon.fr/image-de-la-semaine/Img183-2007-01-08.xml) », (c) Thèse de Y. Forterre, p93 (2002) [28]

Il est intuitif de penser que la stabilité du problème sera rythmée par la concurrence de quatre forces ou acteurs majeurs<sup>2</sup> :

- Les effets inertiels, essentiellement la vitesse caractéristique de l'écoulement,
- La force motrice due à la composante longitudinale du poids,
- Le gradient de pression dû notamment à la variation de profondeur,
- Les forces de frottements, qu'elles soient de nature visqueuse ou rugueuse.

Nous verrons que quel que soit le formalisme mathématique sur lequel on s'appuie, l'apparition puis la croissance d'ondes de surface seront toujours interprétées comme étant inhérentes à la conservation du débit d'un côté, et à la compétitivité de ces quatre forces d'un autre côté. Suivant le poids relatif de chacun de ces quatre acteurs, et suivant la mesure avec laquelle l'écoulement saura garantir la conservation du débit, les ondes auront une dynamique plus ou moins riche (*i.e.* les célérités atteindront des valeurs très variées), et les effets inertiels seront plus ou moins déstabilisants. A cause des effets de bord, les ondes seront plus ou moins planes, et si le régime linéaire est dépassé, du fait des variations de profondeur qui ne sont plus minoritaires compte tenu de la relative grande amplitude des ondes (au delà des ondes linéaires saturées en amplitude), un large panel d'ondes non linéaires peut être observé (Fig. 0.0.2). A noter que dans le cas Newtonien, Liu *et al.* (1995) [53] observent à angle d'inclinaison fixé des ondes solitaires à basses fréquences (Fig. 1.2.1a) qui interagissent entre elles pour, notamment du fait des variations transverses, former des motifs tridimensionnels d'ondes à plus hautes fréquences (Fig. 1.2.1b).

Nous nous intéresserons, dans la suite de ce travail, principalement au régime linéaire pour lequel nous observons des ondes primaires, c'est-à-dire des ondes bidimensionnelles sinusoïdales et d'amplitude la plus petite possible.

### 1.2.1 En s'appuyant sur les équations de Navier-Stokes linéarisées

De tradition "mécanique", notre équipe s'est proposée de prime abord de s'appuyer sur une formulation basée sur les équations de Navier-Stokes, qui, linéarisées autour de l'écoulement de base, aboutit aux équations aux perturbations de type Orr-Sommerfeld. Ce choix repose essentiellement sur l'introduction d'un nombre adimensionnel comparant les effets inertiels de l'écoulement de base aux effets visqueux : il s'agit du nombre de Reynolds.

En dehors des travaux théoriques et expérimentaux que nous aborderons plus tard, peu d'études phénoménologiques furent présentées dans le but de comprendre les mécanismes d'instabilités. Dans le cas Newtonien, nous citerons principalement Smith (1990) [78] qui s'est intéressé à la stabilité linéaire temporelle de l'écoulement uniforme, et qui a distingué deux phases bien distinctes : la phase de naissance de l'onde de surface à partir d'une perturbation interfaciale, et sa phase de croissance qui laissera place à un régime stable ou instable.

#### 1.2.1.1 Phase de naissance (*initiating mechanism*)

Dans le cas Newtonien, Smith (1990) [78] explique qu'au tout départ, l'écoulement présente un gradient de vitesse non nul selon la direction normale qui ne satisfait donc plus la condition de contrainte tangentielle nulle au niveau de la surface libre perturbée, d'où la naissance d'une

---

2. En dehors de la conservation de la masse qui est indépendante de la dynamique de n'importe quel type d'écoulement.

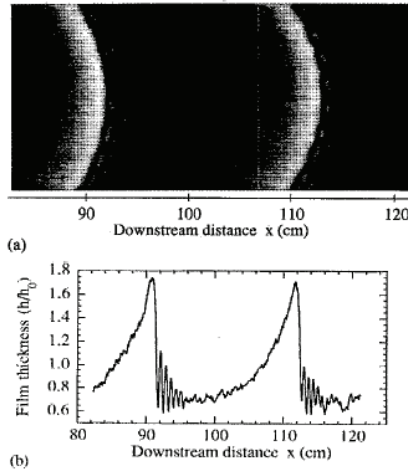


FIG. 2. Spanwise modulations of solitary waves. (a) A snapshot taken at  $\beta=4.0^\circ$ ,  $R=73$ , and  $f=1.4$  Hz. Transverse modulations distort the steep fronts of solitary waves and the subsidiary wave fronts. (b) The wave profile read from the centerline of (a). The wavelength of the solitary waves is about 21 cm.

(a)

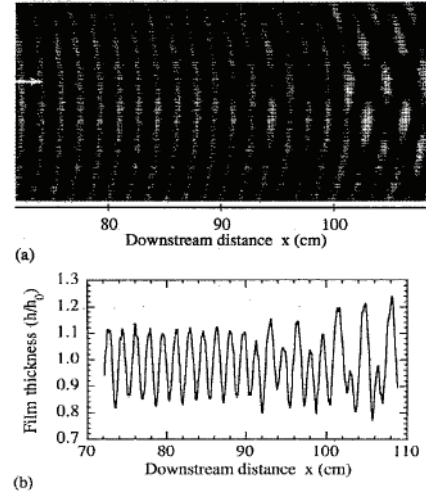


FIG. 4. Herringbone patterns due to the 3-D subharmonic instability. (a) A snapshot taken at  $\beta=4.0^\circ$ ,  $R=50.5$ , and  $f=14.0$  Hz. (b) The wave profile read from the line indicated by the white arrow in (a). This line goes through a row of maxima.

(b)

FIGURE 1.2.1 : Exemples de motifs d'ondes non linéaires observées dans le cas Newtonien : ondes solitaires 2D (a) et ondes subharmoniques 3D (b). Source : Liu *et al.* (1995) [53].

perturbation longitudinale de vitesse  $u'$  de profil linéaire<sup>3</sup>, agissant (dans la mesure du possible) de façon à contrebalancer la contrainte de cisaillement due au champ de base (Fig. 1.2.2). Dans le cas rhéofluidifiant, *via* la loi de Carreau (Annexe A,B) par exemple, un raisonnement similaire a été proposé par Millet *et al.* (2008) [58], en incluant les perturbations de viscosité du fait des perturbations de cisaillement, de sorte que le profil de perturbation longitudinale de vitesse n'évolue plus de façon linéaire (Fig. 1.2.2).

Par ailleurs, en se plaçant dans le repère de l'onde au niveau de la surface libre, et en choisissant convenablement le volume de contrôle pour lequel nous écrivons la conservation du débit (Fig. 1.2.2), il est possible de se ramener à l'ordre zéro à une expression reliant la célérité des ondes marginalement stables à la vitesse de l'écoulement au niveau de la surface libre non perturbée (Fig. 1.4.2). En excluant les perturbations de viscosité chez Millet *et al.* (2008) [58], nous retrouvons le résultat classique dans le cas Newtonien, à savoir que les ondes critiques voyagent avec une célérité deux fois supérieure à la vitesse de l'écoulement à la surface libre (Yih (1963) [90], Smith (1990) [78]).

Tout commence donc au niveau de l'interface. L'écoulement répond à une perturbation  $\xi'$  par une perturbation de contrainte de cisaillement, qui est à l'origine de la manifestation d'une onde de surface, qui se propagera à une certaine célérité par conservation du débit, à l'ordre zéro suivant l'approximation grandes longueurs d'ondes. Smith (1990) [78] qualifie ce processus

3. Cette perturbation de vitesse induira de ce fait une perturbation de contrainte de cisaillement  $\sigma'_{xy} = \xi'$ , en notant que la dérivée seconde de la vitesse de base au niveau de l'interface non déformée telle qu'elle apparaît chez Smith (1990) [78], vaut toujours ici  $\frac{d^2 U_b}{dy^2} = -1$  (voir Chapitre 4).

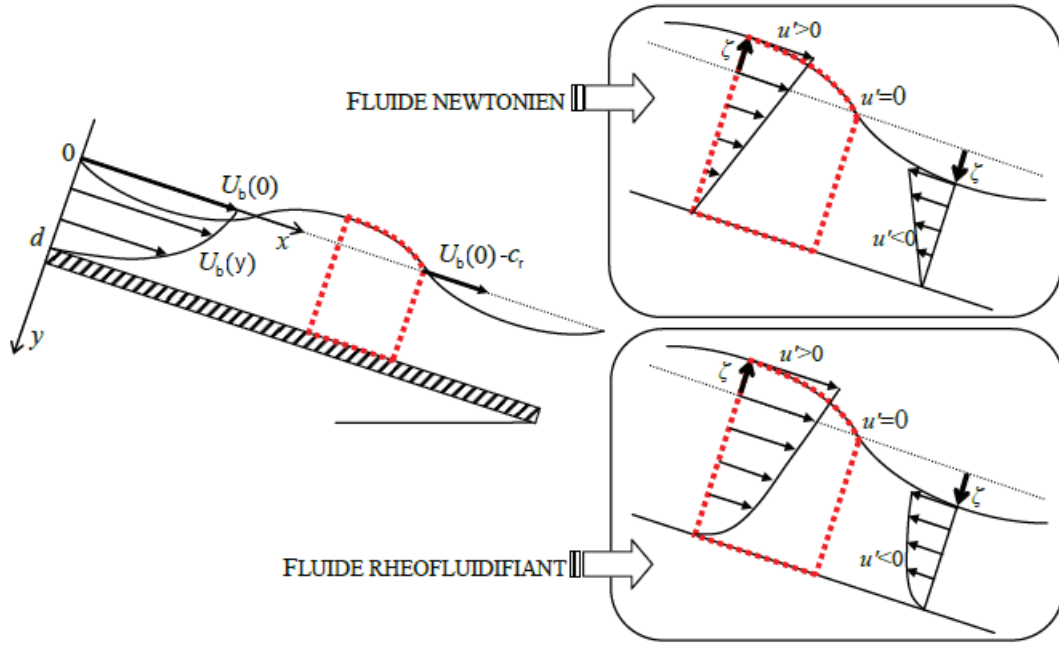


FIGURE 1.2.2 : Volumes de contrôle (en pointillés rouges) mis en évidence au niveau de l'interface perturbée à l'ordre zéro dans le sens de l'approximation grandes longueurs d'ondes, dans le cas Newtonien (Smith (1990) [78]) et rhéofluidifiant (Millet *et al.* (2008) [58]). Source : Thèse de S. Millet, p62 [56].

comme étant la principale source d'énergie pour la perturbation, qui tient donc son origine du travail des efforts de cisaillement de l'écoulement de base au niveau de la surface libre. Ceci est en accord avec les conclusions de Kelly *et al.* (1989) dans le cas Newtonien et ceux parus dans la thèse de S. Millet (Chapitre 5, [56]) dans le cas rhéofluidifiant.

#### 1.2.1.2 Phase de croissance (*growth mechanism*)

Le raisonnement précédent ne permet cependant pas de conclure quant à la stabilité ou non de l'écoulement : en effet le développement à l'ordre zéro ne fait pas apparaître les termes d'amplification (partie imaginaire de la célérité pour une étude temporelle, amplification spatiale pour une étude spatiale). Pour prédire l'évolution et donc la croissance spatio-temporelle de l'instabilité, il est nécessaire d'analyser les termes d'ordre supérieur, ce qui revient physiquement à mettre en balance les quatre acteurs majeurs introduits précédemment. En effet, à l'ordre zéro, l'écoulement est supposé parallèle et l'inertie est donc absente. Smith (1990) [78] a présenté un exemple de scénario dynamique au premier et au second ordre, et a calculé, à angle d'inclinaison fixé, la contribution des termes de pression, d'inertie et de diffusion visqueuse rassemblés autour du nombre de Reynolds. En cherchant sous quelles conditions nous assistons à un comportement marginal de l'instabilité (c'est-à-dire en lui imposant une croissance spatiale ou temporelle nulle), ce processus a permis à Smith (1990) [78] dans le cas Newtonien et Rousset *et al.* (2007) [72] dans le cas rhéofluidifiant,<sup>4</sup> d'obtenir l'expression du nombre de Reynolds critique directement en fonction de l'angle d'inclinaison, sans toutefois passer par une

4. du moins réduit au cas faiblement rhéofluidifiant, l'approche de Rousset *et al.* étant donc doublement asymptotique.

résolution complète du problème aux valeurs propres : ceci représente le poids et l'intérêt de cette méthode asymptotique.

Afin de distinguer les effets stabilisants des effets déstabilisants, observons ce qui se passe sous une crête (*resp.* sous un creux) : du fait du passage de l'onde, la profondeur locale du film est maximale (*resp.* minimale). Par distribution hydrostatique, la pression régnant sous une crête (*resp.* sous un creux) est positive (*resp.* négative) et aura pour effet de refouler (*resp.* d'admettre) une partie du fluide, et donc d'atténuer dans les deux cas la croissance de l'onde. C'est ainsi que la pression telle qu'elle apparaît dans les termes d'ordre supérieur dans le développement asymptotique, est désignée comme un effet stabilisant. Bien évidemment, d'autres acteurs peuvent être associés aux mêmes termes de pression, comme les effets de tension de surface qui physiquement modifient la pression en réécrivant l'équilibre des contraintes normales au niveau de la surface libre (voir Chapitre 4). Pour reprendre l'exemple d'une tension de surface non nulle, les travaux numériques de Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] et expérimentaux de Georgantaki *et al.* (2011) [30] montrent que ces effets agissent en plus de la pression hydrostatique comme effets stabilisants en réduisant la zone instable dans la courbe marginale de stabilité, mais sans toutefois déplacer le seuil critique en terme de nombre de Reynolds<sup>5</sup>.

Comme effets déstabilisants, nous retrouvons généralement les effets d'inertie, qui, à l'inverse des effets de pression, auront tendance à admettre davantage de fluide sous la crête d'une onde, et donc joueront en faveur de son amplification. Sans oublier que dans le cadre de notre étude, l'aspect rhéofluidifiant aura pour impact de réduire le poids des effets visqueux par rapport au cas Newtonien : comme l'écart entre célérité et vitesse à la surface est plus grand, l'inertie est plus grande ce qui se traduira par une déstabilisation de l'écoulement par rapport au cas Newtonien. L'essentiel est que d'une façon générale, les termes d'inertie viendront contrebalancer les termes de pression stabilisants, ce qui confirme expérimentalement l'origine inertielle de l'instabilité de film (Liu *et al.* (1993) [52]), si bien qu'elle se déclenche pour un nombre de Reynolds non nul. A noter que dans le cas Newtonien, des études théoriques ont été menées afin de comprendre l'influence dans la stabilité de l'écoulement d'un chauffage uniforme du plan incliné (Hu *et al.* (2008) [40]) ou l'influence d'une condition de semi-glisement au fond (Samanta *et al.* (2011) [74], Anjalaiah *et al.* (2013) [5]).

### 1.2.2 En s'appuyant sur les équations de Saint-Venant linéarisées

Une autre façon de décrire un écoulement sur pente à surface libre, 1D et uniforme, est de passer par une formulation de type Saint-Venant (*shallow water*) dont les inconnues peuvent être soit le couple profondeur-vitesse longitudinale  $(h, u)$  (Forterre & Pouliquen (2003) [29]) ou bien le couple profondeur-débit par unité de largeur  $(h, q)$  (Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]). Plusieurs études théoriques ont été menées, en introduisant comme grandeurs caractéristiques la vitesse  $V$  de l'écoulement uniforme de film de profondeur caractéristique  $h_N$ . Dans le cas d'un fluide purement visqueux<sup>6</sup> de viscosité décrite suivant la loi en puissance (Annexe B), cette profondeur, aussi appelée profondeur de Nusselt, correspond à la solution que retient

---

5. A noter toutefois que les effets de tension de surface ne sont stabilisants que dans le cas d'écoulements 2D, alors que dans certaines configurations d'écoulement 3D, comme les jets, ceux-ci se comportent comme des effets déstabilisants.

6. On entend par "fluide purement visqueux" un liquide dont la viscosité peut être définie sous la forme d'un scalaire quel que soit la valeur du cisaillement local, c'est-à-dire en tout point de l'écoulement (Annexe B). Par ailleurs, les contraintes exercées sur un fluide purement visqueux n'engendrent aucun comportement élastique. Les fluides à seuil et les fluides viscoélastiques échappent donc en particulier à cette définition.

le film mince uniforme de vitesse caractéristique  $V = (\frac{\rho g \sin \gamma h_N^{n+1}}{m})^{1/n}$  et de viscosité effective  $\eta_{eff} = m(\frac{V}{h_N})^{n-1}$ , lorsqu'on considère qu'il y a équilibre entre la composante longitudinale du poids  $\rho g \sin \gamma$  et le frottement au fond  $m V^n h_N^{-(n+1)}$  (Ng & Mei (1994) [60], Dandapat & Mukhopadhyay (2001,2003) [21, 20], Sisoiev *et al.* (2007) [77], Amaouche *et al.* (2009) [3], Fernandez-Nieto *et al.* (2010) [25], Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73], Noble & Vila (2013) [61]). Cette hypothèse est par ailleurs la même que celle de l'approximation d'onde cinématique.

A partir de ces grandeurs caractéristiques, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] construit le nombre de Reynolds défini par  $Re = \frac{\rho V^{2-n} h_N^n}{m}$ , les équations de Saint-Venant adimensionnées faisant intervenir le nombre de Froude qui compare la vitesse caractéristique de l'écoulement  $V$  à la célérité des ondes de gravité  $\sqrt{g h_N \cos \gamma}$ . Notons qu'en intégrant analytiquement les équations de Navier-Stokes sur la profondeur, nous retrouvons les équations de Saint-Venant ; nombres de Reynolds et de Froude sont reliés, indépendamment du cas Newtonien ou non Newtonien, *via* l'angle d'inclinaison :

$$Re \propto Fr^2 \cot \gamma. \quad (1.2.1)$$

### 1.2.2.1 Relation de dispersion

Le principal intérêt des équations linéarisées de Saint-Venant réside dans la possibilité de se ramener à une relation de dispersion d'un ordre moins élevé qu'en partant des équations de Navier-Stokes linéarisées, après avoir écrit les inconnues du problème sous forme de modes normaux. Celle-ci se présente sous une forme généralement complexe reliant les différentes propriétés physiques du fluide aux caractéristiques de l'onde (fréquence et nombre d'onde complexes dans le cas général). Dans le cas rhéofluidant, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] montrent qu'elle peut se présenter sous la forme canonique de l'expression Eq. (1.2.4).

La difficulté la plus fréquemment rencontrée réside dans l'établissement d'une loi de frottement choisie de façon à bien faire apparaître le frottement au fond. Dans le cas d'un écoulement turbulent en canal ouvert, on utilise souvent une loi de type Chézy ou Manning-Strickler (C. Ancey, Cours d'hydraulique à surface libre [4]), mais ceci peut représenter une tâche relativement ardue dans certains cas complexes comme les écoulements granulaires (Forterre & Pouliquen (2003) [29]) ou les écoulements de film de fluides complexes (Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]).

Suivant que l'on s'intéresse à un problème de stabilité temporelle (*resp.* spatiale), la résolution de cette relation de dispersion reviendra à considérer un nombre d'onde réel (*resp.* complexe) et une fréquence complexe (*resp.* réelle). Dans le cas d'une étude temporelle, l'écoulement est instable vis à vis du nombre d'onde réel  $k$  si la partie imaginaire de  $\omega$  est positive, *i.e.*  $\omega_i(k) > 0$ . La résolution fournit deux branches (+) et (−) pour  $\omega_i(k)$ , et généralement seule l'une des deux est physiquement acceptable, et conduit à un écoulement linéairement stable ou instable selon le nombre de Froude, l'angle d'inclinaison, ou éventuellement les paramètres rhéologiques du fluide. En fixant tous les paramètres à l'exception du nombre de Froude, nous raisonnons de la même manière que dans la méthode asymptotique développée par Smith (1990) [78] : d'une part les ondes marginales sont solutions de  $\omega_i(k) = 0$ , et d'autre part, pour déterminer le seuil critique, il suffit de connaître le comportement aux grandes longueurs d'onde (*i.e.* pour  $k \rightarrow 0$ ) de la branche  $\omega_i$  physiquement retenue comme solution.

7. A noter qu'on retrouve dans le cas Newtonien la solution semi-parabolique pour le profil de vitesse (*Falling Liquid Films*, Chapitre 2 [45]).

Parallèlement, dans le cadre d'une étude spatiale, l'écoulement est instable vis à vis de la fréquence  $\omega_r$ , si la partie imaginaire de  $k$  est négative *i.e.*  $k_i(\omega) < 0$ . De la même façon, pour déterminer le seuil critique, il suffit de connaître le comportement aux fréquences nulles (*i.e.* pour  $\omega \rightarrow 0$ ) de la branche  $k_i$  physiquement retenue comme solution.

### 1.2.2.2 Onde cinématique - onde diffusive

Afin d'établir un critère de stabilité en terme de célérité d'ondes, nous nous proposons de présenter ici une démarche différente de l'analyse en modes normaux.

Pour commencer, nous nous proposons de réanalyser les quatre forces majeures qui entrent en équilibre dans le cas général d'un écoulement sur pente à surface libre. Commençons par le cas simple des ondes de gravité, qui se manifestent à la surface libre d'un volume d'eau au repos ou d'un écoulement sur faible pente de type fluvial : dans ce premier cas, la composante longitudinale du poids est quasi-nulle, et l'écoulement uniforme traduit l'équilibre entre les termes inertiels et le gradient de pression dû aux variations de profondeur. Ces deux processus sont dominants tant que l'équilibre n'est pas rompu, et la propagation des ondes de gravité dépendra du poids de l'une ou l'autre de ces deux forces en compétition. Nous parlons dans ce choix de modélisation d'approximation d'*onde dynamique*.

Prenons maintenant l'exemple d'une crue lente : dans le cas d'un écoulement uniforme sur pente ni trop faible ni trop forte, les observations de terrain montrent que les variations de profondeur et les effets d'inertie sont suffisamment faibles pour qu'ils ne constituent pas forcément les termes prédominants. L'écoulement uniforme traduit généralement dans ce cas l'équilibre entre la composante longitudinale du poids et les forces de frottement. On parle dans ce cas d'approximation d'*onde cinématique*. Ceci est un modèle, et comme tout modèle il peut admettre des limites, et même présenter des incohérences<sup>8</sup>. En effet, si l'amplitude de l'onde de crue devient trop importante, le gradient de pression ne peut plus être négligé, et on parle d'approximation d'*onde diffusive* qui traduit de ce fait l'équilibre entre la composante longitudinale du poids, les forces de frottement et le gradient de pression.

L'approximation d'onde cinématique en écoulement uniforme pousse à considérer que dans la limite des faibles amplitudes, la vitesse tente de s'adapter aux variations de profondeur, et ce *via* l'équation de conservation de la masse qui peut généralement s'écrire en formulation Saint-Venant :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0. \quad (1.2.2)$$

Linéarisée autour de l'écoulement uniforme, l'équation (1.2.2) peut se réécrire généralement sous la forme<sup>9</sup> :

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + c_k \frac{\partial h'}{\partial x} = 0. \quad (1.2.3)$$

Nous remarquons qu'il s'agit là d'une équation d'advection : Whitham (1974) [89] explique que la perturbation  $h'$  va se propager à la vitesse de l'onde cinématique  $c_k$ , différente de la vitesse moyenne de l'écoulement. De même que la condition cinématique à la surface libre, qui est

---

8. Ce modèle peut conduire par exemple à la formation de ressauts hydrauliques sans que cela corresponde à une situation réellement observée (Thèse de Y. Forterre, Chapitre 6 [28]).

9. Dans le cas d'un film en loi de puissance, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] écrit  $\frac{\partial h}{\partial t} + h^{\frac{n+1}{n}} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$ , avec  $n$  étant l'indice de loi en puissance (Annexe B).

le point déclencheur de l'instabilité grandes longueurs d'ondes dans le développement asymptotique à l'ordre zéro présenté par Smith (1990) [78], l'existence ici d'une onde cinématique, qui est une simple conséquence de la conservation de la masse, constitue le point de départ du mécanisme d'instabilité.

En réalité, lorsque l'amplitude des ondes et l'inertie dépassent un certain seuil, il devient de plus en plus difficile pour l'écoulement d'ajuster sa vitesse à la déformation de la surface libre. De ce fait, le gradient de pression dû aux variations de profondeur n'est plus négligeable, et le modèle d'onde cinématique n'est plus valable. Le modèle d'onde diffusive introduit précédemment devient plus adéquat dans la description de l'instabilité. Un peu comme les termes d'ordre supérieur dans le développement asymptotique de Smith (1990) [78] qui entrent en jeu dans la stabilité du problème, il faut, pour qu'il y ait instabilité, que l'effet déstabilisant dû à l'inertie de l'onde cinématique dépasse les effets stabilisants dont le principal est la pression hydrostatique qui a tendance à étaler l'amplitude de l'onde. Ainsi, en faisant appel à l'onde diffusive par la prise en compte des variations de quantité de mouvement, la vitesse de l'écoulement n'est plus reliée de façon univoque à la profondeur, mais peut varier relativement lentement.

### 1.2.2.3 Hiérarchie d'ondes - critère de stabilité

Afin de prendre en compte les effets dynamiques de l'écoulement, le raisonnement proposé par Whitham (1974) [89] à l'étape ultérieure est de combiner la conservation de la quantité de mouvement à la conservation de la masse. Le résultat aboutit généralement à une équation de type advection-diffusion<sup>10</sup> portant sur la perturbation de débit  $q'$  (Cours d'hydraulique à surface libre, Chapitre 6 [4]) ou sur la perturbation de profondeur  $h'$  (Forterre & Pouliquen (2003) [29], *Falling Liquid Films*, Chapitre 7 [45]). En remaniant cette équation d'advection-diffusion, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] obtient dans le cas rhéofluidifiant l'équation (1.2.4) qui fait apparaître ce que Whitham (1974) [89] qualifie de "hiérarchie d'ondes", où  $c$  représente la célérité adimensionnée de l'onde de surface,  $c_k$  la célérité de l'onde cinématique relative au nombre d'onde  $k$  et  $c_{d+}$  (*resp.*  $c_{d-}$ ) la célérité des ondes dynamiques (ondes de gravité advectées par l'écoulement) descendantes (*resp.* ascendantes) :

$$c - c_k(k) - ikRe [c - c_{d-}(k)] [c - c_{d+}(k)] = 0. \quad (1.2.4)$$

De manière analogue au raisonnement de Smith (1990) [78], dans la limite des faibles nombres de Reynolds ( $Re \rightarrow 0$ ), la perturbation se propage à l'ordre le plus bas comme une onde cinématique de vitesse  $c_k$ . Parallèlement, dans la limite des grands nombres de Reynolds ( $Re \rightarrow \infty$ ), l'effet des termes d'ordre supérieur est d'amortir ou d'amplifier la perturbation suivant le signe et le poids des termes diffusifs. Les ondes dynamiques sont la réponse du film à la variation de quantité de mouvement, de pression hydrostatique et éventuellement de tension de surface.

Dans le cas d'un écoulement de film rhéofluidifiant, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] explique que le critère de stabilité de l'écoulement uniforme se résume à la condition (Fig. 1.2.3) :

$$c_{d-} \leq c_k \leq c_{d+}. \quad (1.2.5)$$

L'écoulement est marginalement stable à la condition que  $c_{d+} = c_k(k)$ , et de ce fait le seuil critique est atteint dans la limite des grandes longueurs d'ondes ( $k \rightarrow 0$ ), et s'ensuit la loi

10. A noter que dans certaines configurations d'écoulement, cette équation d'advection-diffusion présente un coefficient de diffusion, mais aussi un coefficient d'advection qui est le même que celui déterminé dans l'approximation d'onde cinématique (Cours d'hydraulique à surface libre, Chapitre 6 [4]).

d'évolution du nombre de Froude critique en fonction de l'angle (Annexe H). Pour résumer, l'intérêt de l'approche de Whitham (1974) [89] consiste à fournir un critère de stabilité interprété simplement en terme de compétition entre les ondes cinématiques et dynamiques. Y. Forterre (2002), Chapitre 3 [28] l'explique bien en décrivant que dans le cas stable (Fig. 1.2.3a), les ondes dynamiques "rayonnent" de part et d'autre des ondes cinématiques, permettant ainsi à l'écoulement d'ajuster sa vitesse relativement aux variations de profondeur *via* l'équation de conservation de la masse. Dans le cas contraire (Fig. 1.2.3b), le fluide a du mal à ajuster sa vitesse, et l'amplitude de l'onde cinématique croît jusqu'à faire basculer l'écoulement dans un régime instable.

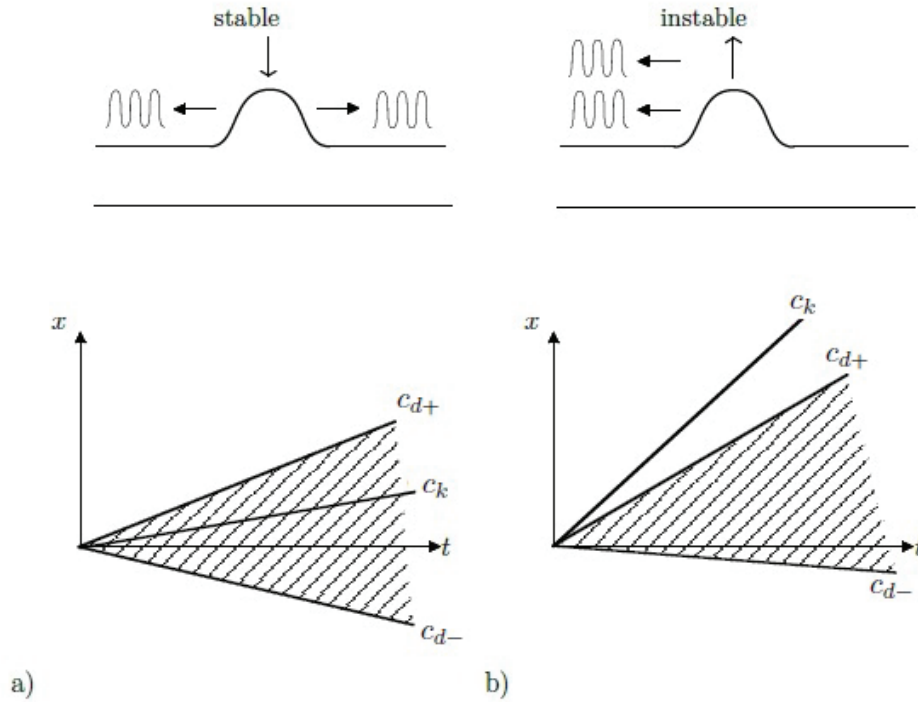


FIGURE 1.2.3 : Critère de stabilité en terme de compétition entre les ondes cinématiques et les ondes dynamiques. (a) : cas stable, la vitesse des ondes cinématiques  $c_k$  est comprise entre les vitesses des ondes dynamiques ascendantes  $c_{d+}$  et descendantes  $c_{d-}$ . (b) : cas instable. Source : Thèse de Y. Forterre, p115 (2002) [28]

Nous rappelons pour conclure que le passage vers la loi d'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle d'inclinaison est possible *via* l'équation (1.2.1). Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] ont aussi montré que les seuils critiques linéaires pour différentes valeurs des paramètres rhéofluidifiants, obtenus par les approches s'appuyant sur la résolution des équations de Navier-Stokes et Saint-Venant linéarisées, sont équivalents, ce qui renforce l'analogie physique de ces deux approches différentes en terme de compréhension des mécanismes d'instabilité grandes longueurs d'ondes.

## 1.3 Moyens expérimentaux de référence

Les travaux expérimentaux pionniers de Kapitza & Kapitza (1949) [46] ont permis la visualisation d'ondes se manifestant à la surface libre d'un écoulement de film tombant suivant la verticale. Dans le cas plan incliné, les travaux expérimentaux en fluide Newtonien réalisés par Liu *et al.* (1993) [52] confirment l'hypothèse selon laquelle les instabilités se manifestant au niveau de la surface libre sont de nature convective, ce qui explique le caractère spatial de notre problème de stabilité.

Concernant la façon de générer les ondes de surface, il est possible d'imposer une variation de pression en amont de l'écoulement de film : suivant l'amplitude et la fréquence imposées, des ondes primaires (Liu *et al.* (1993) [52]) ou non linéaires (Liu *et al.* (1995) [53]) peuvent être créées et finissent par se propager le long du plan incliné. Dans le cas d'écoulements granulaires, Forterre & Pouliquen (2003) [29] utilisent des haut-parleurs équivalents à un mince jet d'air périodique agissant sur toute la largeur du plan. Et dans le cas particulier des laves torrentielles, Chambon *et al.* (2009) [17] ont étudié expérimentalement l'organisation en paquets de boue (*surges*), où les coulées présentent un front qui peut devenir très raide, précédé à l'amont d'un écoulement d'épaisseur uniforme. Par un dispositif original où le plan incliné est à fond mobile, ils génèrent des coulées globalement stationnaires dans le référentiel du laboratoire.

### 1.3.1 Détection locale d'ondes

Le moyen le plus simple de repérer une onde est de disposer d'un appareil de détection locale qui fournit localement un signal temporel retranscrivant ainsi une partie des caractéristiques ondulatoires de l'onde. Dans le cas simple des ondes primaires que l'on observe tant qu'on est dans le régime linéaire, le signal temporel recueilli reflète le caractère sinusoïdal de l'onde en réponse à la fréquence d'excitation imposée en amont de l'écoulement. Parmi les moyens de mesures recensés dans la littérature, nous trouvons des dispositifs intrusifs tels que des micro-sondes se présentant sous la forme de deux fils fins de chrome de dimension inférieure à  $1\text{mm}$  (Vlachogiannis *et al.* (2010) [86], Georgantaki *et al.* (2011)), mais aussi des dispositifs optiques non intrusifs permettant de scanner localement le passage de l'onde. Liu *et al.* (1993,1995) [52, 53] utilisent des capteurs optiques photosensibles permettant de détecter l'onde par réfraction de faisceau laser, tandis que Forterre & Pouliquen (2003) [29] emploient une photodiode sensible aux variations de transmission de lumière.

### 1.3.2 Détection globale d'ondes de surface

De façon plus complexe que les mesures locales en un point, une possibilité est de détecter le passage des ondes sur une section du plan incliné afin de vérifier leur planéité, en procédant non pas par le biais d'un faisceau laser localisé mais d'une nappe laser de  $100\mu\text{m}$  d'épaisseur traversant la largeur du domaine d'étude (Haas *et al.* (2011) [35]).

D'autres techniques optiques plus ou moins intrusives permettent la détection globale d'un train d'ondes de surface dans le but de déterminer l'ensemble des propriétés ondulatoires de l'écoulement (atténuation spatiale, longueur d'onde, bidimensionnalité ou variations transverses). Une façon de faire est d'ensemencer l'écoulement de particules qui présentent la propriété de fluorescer une fois l'écoulement exposé à de la lumière ultra-violette (*fluorescence imaging*). Cette technique est utilisée par Liu *et al.* (1993,1995) [52, 53] dans le cas d'un écou-

lement de film Newtonien sur plan incliné, et par Hagemeier *et al.* (2012) [36] dans le cas d'un écoulement sur canal ouvert et pour visualiser la déformation d'une surface libre à la suite d'une retombée de goutte. Sous l'effet du passage d'une onde, cette intensité lumineuse émise varie, et il est possible d'enregistrer, *via* une caméra, l'élévation de surface.

Une autre façon de faire sans ensemençer l'écoulement de particules intrusives est de projeter des figures d'interférences (*FTP : Fourier Transform Profilometry*) sur la surface libre déformée (Haas *et al.* (2011) [67]), et enregistrer par caméra les variations de profondeur comme c'est le cas lors de mesures de formes 3D en mécanique des solides (Takeda & Mutoh (1983) [83]).

Un autre moyen simple à mettre en oeuvre, et qui demande un coût d'installation relativement raisonnable, est la méthode optique présentée par Moisy *et al.* (2009) [59]. Celle-ci s'apparente beaucoup aux techniques de *Schlieren* permettant de mesurer des gradients de densité en aérodynamique (Richard & Raffel (2001) [70]) à partir de l'analyse du déplacement apparent d'un motif de points (*moiré*) dans l'arrière plan d'un écoulement (*BOS : Background Oriented Schlieren*). Revisitée dans le but de mesurer la déformation d'une surface libre, cette technique appelée FS-SS (*Free Surface Synthetic Schlieren*) s'avère très utile et permet entre autres de remonter aux variations d'épaisseur autour d'une épaisseur moyenne (Fig. 1.3.1).

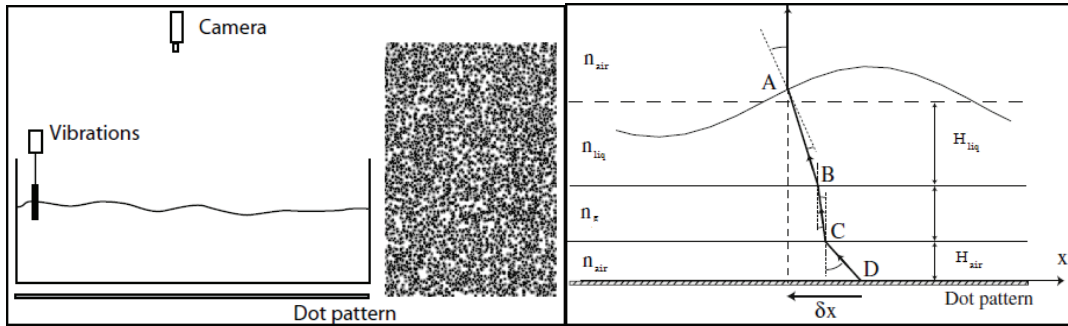


FIGURE 1.3.1 : Schéma du montage expérimental de la méthode FS-SS et exemple de motif aléatoire (à gauche). À droite, déplacement apparent d'un point au passage d'une onde à l'interface de 3 milieux d'indice optique distinct (air d'indice  $n_{air}$ , verre d'indice  $n_g$  et fluide d'indice  $n_{liq}$ ). (Issu de Rabaud *et al.*, 18ème congrès français de mécanique - Août 2007)

Par ailleurs, une relation intégrale (Eq. (1.3.1)) reliant directement le gradient d'épaisseur au champ de déplacement apparent instantané  $\vec{\delta r}$  mesuré, est fournie suivant un certain nombre d'hypothèses :

- La distance entre le motif de points et la caméra doit être grande par rapport à la dimension du domaine de visualisation, de façon à ce que l'angle paraxial soit le plus faible possible ;
- Nous considérons une approximation de faible pente de la surface libre ;
- Enfin, il est supposé dans Moisy *et al.* (2009) [59] que l'amplitude des ondes est très faible devant l'épaisseur moyenne de la couche de fluide.

$$\begin{cases} \nabla h = -\frac{\vec{\delta r}}{h^*} \\ \frac{1}{h^*} = \frac{1}{\alpha_{opt}d} - \frac{1}{H} \end{cases}, \quad (1.3.1)$$

avec  $\alpha_{opt} = 1 - n_{air}/n_{liq}$ ;  $n_{air}$  étant l'indice de réfraction de l'air et  $n_{liq}$  celui du fluide;  $d$  la profondeur moyenne de la couche liquide et  $H$  la distance entre le motif de points et la caméra.

Pour remonter au champ d'épaisseur, un code d'inversion numérique de gradient basé sur les différences centrées du second ordre est proposé par Moisy *et al.* (2009) [59] et fait partie d'une bibliothèque de fonctions proposée comme post-processing.

## 1.4 Etudes numériques

Dans le cas d'un fluide non-Newtonien purement visqueux, plusieurs approches théoriques différentes ont été utilisées pour résoudre le problème de stabilité. L'essentiel des études numériques auxquelles nous ferons référence concerne les travaux entrepris par notre équipe qui s'était intéressée à la stabilité linéaire temporelle de films liquides d'une ou plusieurs couches (Rousset *et al.* (2007) [72], Millet *et al.* (2008,2013) [58, 57]). Les liquides étudiés étant faiblement rhéofluidifiants, notre équipe s'est proposée de les modéliser par la loi de Carreau tandis que Ng & Mei (1994) [60]) lui ont préféré un modèle en loi de puissance, et que, plus récemment, Ruyer-Quil (2012) [73] et Noble & Vila (2013) [61] ont régularisé la loi en puissance par un plateau Newtonien aux très faibles valeurs de cisaillement.

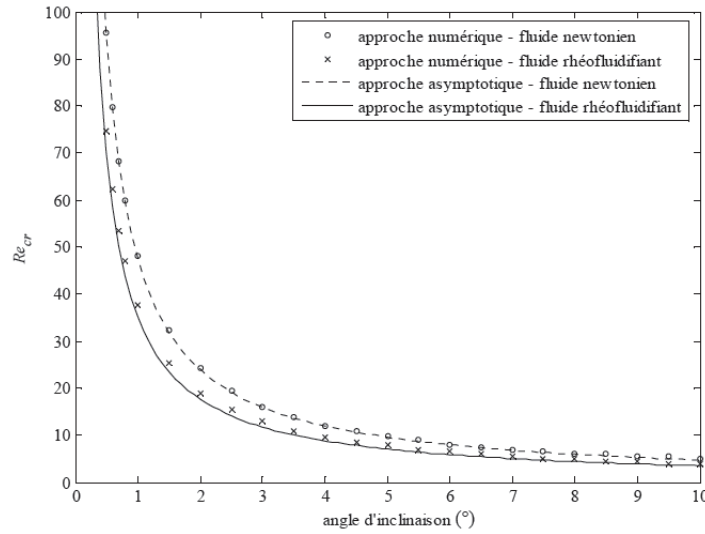


FIGURE 1.4.1 : Seuil de stabilité selon l'angle d'inclinaison pour un fluide Newtonien et un fluide rhéofluidifiant. Source : Thèse de S. Millet (2007) [56].

La première approche équivaut à l'approche asymptotique grandes longueurs d'ondes développée par Smith (1990) [78] dans le cas Newtonien, et appliquée au cas rhéofluidifiant par Rousset *et al.* (2007) [72]. Elle a permis de mettre en valeur l'importance des fluctuations de viscosité dans la modification de la loi donnant le nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle pour un fluide rhéofluidifiant (Fig. 1.4.1). Ces fluctuations de viscosité entrent aussi en compte dans le fait que le rapport entre la célérité critique des ondes et la vitesse de l'écoulement

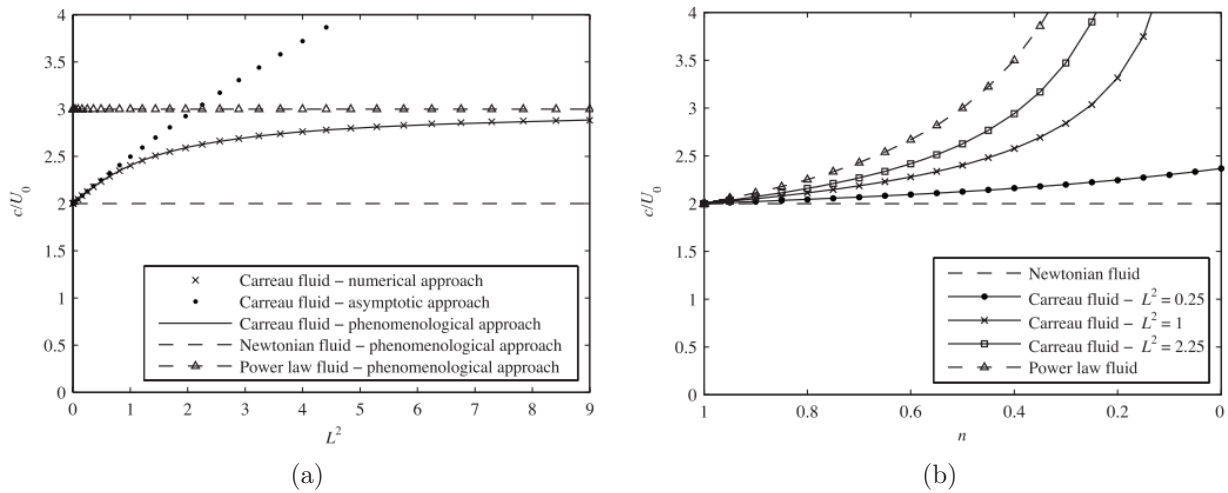


FIGURE 1.4.2 : Rapport de la célérité des ondes critiques à la vitesse au niveau de la surface libre (a) à paramètre de temps adimensionnel fixé, (b) à indice de loi en puissance fixé. Source : Millet *et al.* (2008) [58].

à la surface libre est plus grand que dans le cas Newtonien (Fig. 1.4.2). Cette approche présente l'intérêt de mener à des résultats intéressants sans présupposer une forme de loi constitutive pour le fluide - il suffit que celui-ci soit purement visqueux.

La seconde approche repose sur un développement analytique doublement asymptotique (Rousset *et al.* (2007) [72]) dans lequel on considère des ondes longues dans la limite d'un comportement très faiblement rhéofluidifiant.

Enfin, une approche pleinement numérique a été menée, toujours en considérant un fluide de Carreau, mais en ne se limitant ni aux grandes longueurs d'ondes ni au cas faiblement rhéofluidifiant. Il s'agit d'une étude de stabilité à l'aide d'une formulation de type Orr-Sommerfeld discrétisée par une approche spectrale, qui confirme entre autres que ce sont les ondes longues qui sont les plus instables, que le rapport entre la célérité des ondes critiques et la vitesse de l'écoulement à la surface libre est plus grand que dans le cas Newtonien, que le nombre de Reynolds critique évolue toujours en cotangente de l'angle, et que les effets rhéofluidifiants font qu'il est plus faible que dans le cas Newtonien.

D'un autre côté, Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] ont développé une étude linéaire de stabilité spatio-temporelle se basant à la fois sur une approche s'appuyant sur les équations de Navier-Stokes et de Saint-Venant linéarisées. Ces deux approches, relativement différentes, fournissent le même seuil critique de stabilité après développement asymptotique grandes longueurs d'ondes, qui est lui-même identique<sup>11</sup> à celui obtenu par la résolution numérique du problème aux valeurs propres (Annexe H). Ces expressions du nombre de Reynolds critique sont à comparer à une expression proposée par Ng & Mei (1994) [60] à l'ordre le plus bas dans le développement asymptotique.

11. Il est à noter que "lorsque le développement asymptotique aux grandes longueurs d'onde ( $\alpha \rightarrow 0$ ) est fait de façon correcte, l'expression du nombre de Reynolds critique est rigoureusement identique à celle obtenue à partir de la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld : théorème mathématique". Propos échangés avec J.P. Vila au Gdr "Ruissellement et films cisailés" à Aussois, le 08/04/2014.

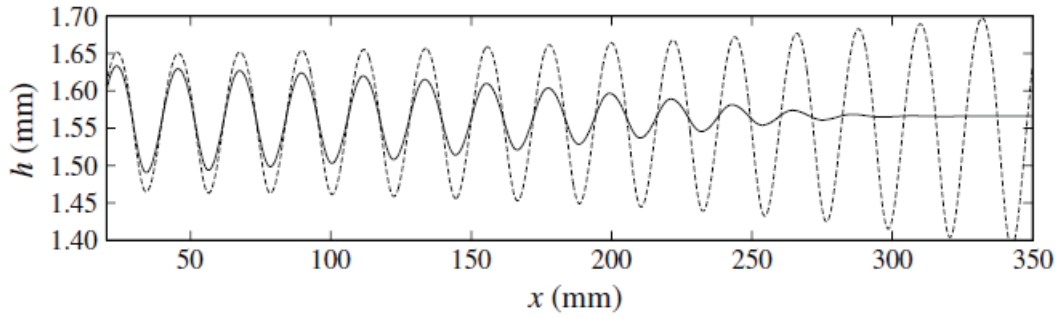


FIGURE 1.4.3 : Profil longitudinal de la profondeur de l'écoulement en réponse à une excitation sinusoïdale pour une amplitude faible (*traits pleins*) et pour une forte amplitude (*pointillés*), pour :  $\gamma = 15^\circ$ ,  $Re = 100$ ,  $f = 14Hz$ . Le fluide utilisé est une solution de gomme Xanthane avec  $\eta_0 = 1430mPa.s$ ,  $n = 0.4$ ,  $\dot{\gamma}_c = 0.1s^{-1}$ ,  $m = 359.2mPa.s^n$ ,  $\rho = 995Kg/m^3$ ,  $\sigma = 65mN/m$ . Source : Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73].

Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] ont aussi étudié le comportement spatial de certaines ondes non linéaires non loin du seuil critique linéaire : à angle d'inclinaison, nombre de Reynolds et fréquence d'excitation fixés, ils ont pu mettre en évidence un certain type d'ondes qui, bien qu'elles soient linéairement stables dans la limite des très faibles amplitudes, bifurquent vers un régime instable lorsque leur amplitude dépasse une certaine gamme (Fig. 1.4.3). De telles ondes sont qualifiées de “conditionnellement stables” et n'ont jamais été observées pour des fluides Newtoniens.

## 1.5 Conclusion

Nous nous sommes principalement intéressés aux ondes primaires à la surface libre d'écoulements de type film. Nous avons en particulier énuméré dans ce chapitre différentes avancées de la littérature concernant la stabilité spatio-temporelle d'un écoulement de film rhéofluidifiant. Nous avons vu que les différentes approches phénoménologiques, à savoir les approches basées sur les équations d'Orr-Sommerfeld et de Saint-Venant linéarisées, et qui sont proposées dans le but de comprendre les mécanismes d'instabilité de type “film”, sont équivalentes. Dans le cas Newtonien, elles aboutissent numériquement au même seuil critique linéaire.

D'un point de vue expérimental, nous avons conçu un dispositif similaire à celui de Liu *et al.* (1993) [52] en vue, dans un premier temps, de le valider dans le cas Newtonien, puis, dans un deuxième temps, de vérifier les résultats clés dans le cas rhéofluidifiant, à savoir : *i*) nombre de Reynolds critique plus bas que dans le cas Newtonien, *ii*) rapport entre la célérité des ondes critiques et la vitesse de l'écoulement à la surface libre plus grand que dans le cas Newtonien. La concordance entre résultats théoriques, numériques, et expérimentaux font l'objet essentiel de ce manuscrit, l'absence d'études expérimentales en film non Newtonien dans la littérature constituant le caractère innovant de notre travail de thèse.



## **Chapitre 2**

# **Caractérisation expérimentale des fluides utilisés**

## 2.1 Quel fluide rhéofluidifiant choisir ?

Les exemples de manifestation d'ondes de surface lors d'écoulements géophysiques spectaculaires attribuent rhéologiquement aux fluides un comportement rhéofluidifiant à seuil (Chambon *et al.* (2009) [17], Benslimane *et al.* (2011) [15], Annexe B). Dans un autre contexte, les écoulements de glaciers ont été étudiés numériquement par Jouvét *et al.* (2011) [44] qui leur confèrent aussi d'après des mesures sur le terrain un comportement rhéofluidifiant à seuil. Gibouin *et al.* (2013) [32] ont étendu la rhéométrie classique en couplant des mesures PIV (*Vélocimétrie par images de particules*) du champ de gradient de vitesse à des mesures du champ de contraintes par photoélasticimétrie. Les solutions synthétiques de céramique liquide employées présentent aussi un comportement rhéofluidifiant.

Nous cherchons donc à caractériser des liquides rhéofluidifiants (ou pseudoplastiques), c'est à dire des liquides dont la viscosité est supposée diminuer avec le taux de cisaillement (Fig. 2.1.1). Nous disposons en laboratoire de trois polymères ayant plus ou moins un comportement rhéofluidifiant : de la poudre de Carboxyméthylcellulose (CMC), de la poudre de gomme Xanthane, et des cristaux de Polyacrylamide *Zetag*. Les solutions aqueuses de ces différents polymères peuvent par ailleurs présenter une rhéologie plus complexe à fortes concentrations, mêlant en outre des effets viscoélastiques (facilement mis en évidence par l'effet Weissenberg lors d'essais de rhéométrie) à des comportements thixotropes (Annexe B).

Le cadre de notre étude nous astreint à ne considérer que des fluides purement visqueux (*Generalized Newtonian Fluids*). Ce modèle comprend les fluides Newtoniens, ainsi que les fluides non Newtoniens pour lesquels la contrainte visqueuse peut toujours s'écrire comme une fonction du taux de cisaillement, *via* une viscosité effective qu'il est possible de déterminer expérimentalement. N'entrent pas dans cette définition les fluides viscoélastiques, les fluides viscoplastiques comme les fluides à seuil ou de Bingham ou les fluides thixotropes (Annexe B). Plusieurs auteurs choisissent la loi en puissance afin de décrire la viscosité  $\eta$  des fluides purement visqueux comme une fonction du taux de cisaillement  $\dot{\gamma}$  ; son expression s'écrit :

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (2.1.1)$$

où  $m$  est le paramètre de consistance et  $n$  l'indice de pente.

Dans le cas des liquides rhéofluidifiants ( $0 < n < 1$ ), la loi en puissance présente toutefois l'inconvénient de faire diverger la viscosité lorsque le taux de cisaillement tend vers zéro. De plus, les mesures de viscosité par rhéométrie (Annexe C) montrent que plusieurs de ces liquides présentent un comportement Newtonien aux très faibles valeurs du taux de cisaillement. La loi de Carreau est un exemple de modèles rhéologiques proposés dans le but de décrire plus fidèlement la viscosité des fluides se comportant comme des fluides purement visqueux ; son expression s'écrit :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^2\right]^{(n-1)/2}. \quad (2.1.2)$$

L'équation (2.1.2) montre que pour  $\dot{\gamma} \ll \dot{\gamma}_c$  (*resp.*  $\dot{\gamma} \gg \dot{\gamma}_c$ ), les fluides de Carreau se comportent comme des fluides Newtoniens de viscosité à cisaillement nul  $\eta_0$  (*resp.* comme des fluides en loi de puissance d'indice  $n$ ). Dans certains cas, ces fluides peuvent retrouver un comportement Newtonien de viscosité  $\eta_\infty$  pour des valeurs très grandes du cisaillement. Physiquement, les fluides rhéofluidifiants (*resp.* rhéoépaississants) sont bien décrits par la loi de Carreau pour  $n < 1$  (*resp.*  $n > 1$ ). L'annexe A représente graphiquement les asymptotes de la loi de Carreau.

A noter qu'au niveau de  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ , l'équivalence entre les lois en puissance et de Carreau s'exprime par  $\eta_0 = m\dot{\gamma}_c^{n-1}$ .

Par ailleurs, étant donné que nous aurons recours à des techniques optiques, les fluides utilisés devront être si possible transparents, ou, le cas échéant, le moins troubles possible. Nous privilégions également les polymères les plus facilement mis en solution, et il est utile que les solutions de polymères employées soient stables dans le temps, c'est-à-dire qu'il n'est pas souhaitable qu'à concentration et température fixées, l'on puisse observer une évolution dans leur comportement rhéologique. Etant donné que nous étudierons une interface liquide/air et que nous serons amenés à injecter un champ électrique au sein du fluide (Fig. 2.3.4), il est nécessaire que les solutions en question présentent une constante diélectrique relativement plus grande que celle de l'air au dessus de l'interface. Sont enfin écartés, si possible, les liquides dangereux ou corrosifs, et les solutions de polymères organiques destinés à l'industrie alimentaire, qui présentent l'inconvénient de rapidement se dégrader, voire se pétrifier, au contact de l'air ambiant.

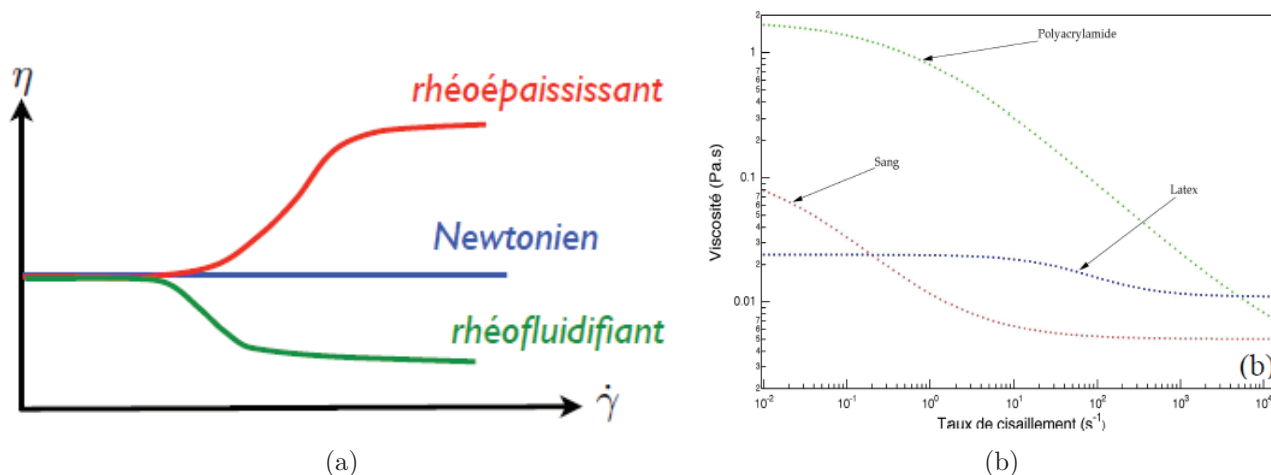


FIGURE 2.1.1 : Courbes de viscosité en fonction du taux de cisaillement pour des liquides purement visqueux. Distinction générale (a), et quelques exemples de fluides rhéofluidifiants (b).

## 2.2 Rhéologie des polymères et modèles empiriques

Le Carboxymethylcellulose (CMC *E466*), le polyacrylamide *Zetag* et la gomme Xanthane (*E415*) sont les trois polymères aux propriétés rhéofluidifiantes disponibles au laboratoire. Nous commençons dans un premier temps par faire une étude paramétrique en laboratoire en comparant les mesures issues du rhéomètre pour ces trois fluides, à indice  $n$  fixé (Fig. 2.2.1), puis à paramètre de consistance  $m$  fixé (Fig. 2.2.2). Nous choisirons dans la mesure du possible d'ajuster les mesures suivant le modèle empirique le plus adéquat, il s'agira généralement de la loi de Carreau ou de la loi en puissance (Eq. (2.1.2) & (2.1.1)). Dans un premier temps, nous avons préparé les solutions de polymère de façon à fixer, le cas échéant, un des deux paramètres apparaissant dans la loi en puissance (Eq. (2.1.1)). La figure 2.2.1 représente trois

rhéogrammes de solutions présentant le même indice,  $n$ , de loi en puissance (*i.e.* la même pente à haut cisaillement, voir Annexe A). Nous voyons qu'à  $n$  fixé c'est la viscosité de la solution de CMC qui chute le moins jusqu'à une certaine valeur du cisaillement ( $\dot{\gamma} = 700\text{s}^{-1}$ ). C'est que pour cette solution, le plateau Newtonien s'étend jusqu'à quelques  $10\text{s}^{-1}$  alors qu'il sort de la plage de mesures pour les deux autres solutions. La figure 2.2.2 représente trois rhéogrammes de solutions présentant un paramètre de consistance similaire : nous voyons que les indices de loi en puissance changent d'une solution à une autre, et là aussi il s'agit du CMC (*resp.* de la gomme Xanthane) qui voit sa viscosité chuter le moins vite (*resp.* le plus vite).

Dans un deuxième temps nous choisissons d'exclure le polyacrylamide *Zetag* car il présente des propriétés viscoélastiques évidentes, surtout à forte concentration : ce comportement se décèle facilement par l'effet Weissenberg (Annexe B) lorsqu'on lui fait subir des essais par rhéométrie. Compte tenu de cette première classification, nous nous concentrerons ainsi sur les deux polymères restants, à savoir le CMC et la gomme Xanthane. Bien qu'ils ne présentent pas d'effet élastique visible<sup>1</sup>, nous verrons que ces deux fluides ne se comportent comme des fluides purement visqueux que pour les plus faibles concentrations ; pour les fortes concentrations nous assistons notamment à des comportements thixotropiques. Il est intéressant de noter que globalement, quelles que soient les concentrations, les solutions de CMC et de gomme Xanthane présentent des comportements rhéofluidifiants clairs, mais très éloignés : nous qualifierons dans la suite de ce travail les solutions de CMC comme possédant un faible pouvoir rhéofluidifiant (indice de pente  $n$  modéré et large plateau Newtonien) en comparaison avec les solutions de gomme Xanthane de concentration similaire que nous qualifierons comme ayant un fort pouvoir rhéofluidifiant (fort indice de pente  $n$  et plateau Newtonien plus court).

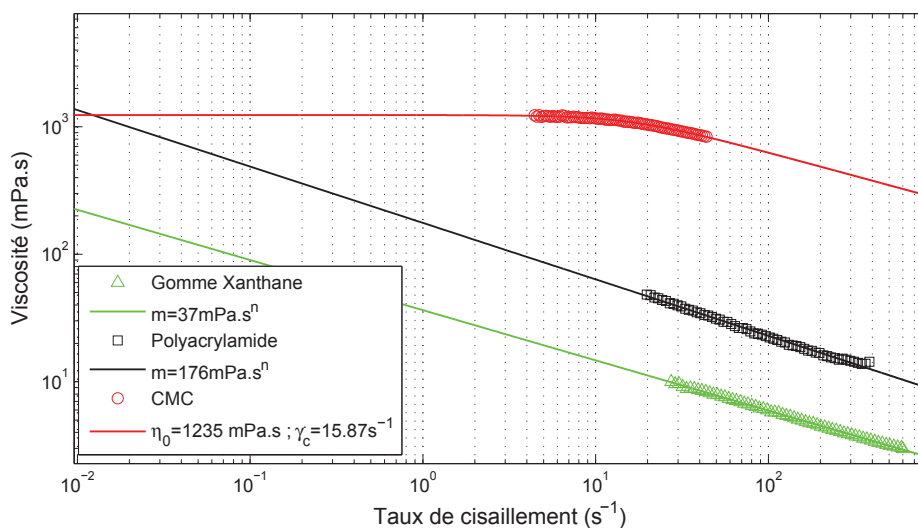


FIGURE 2.2.1 : Viscosité en fonction du taux cisaillement pour trois solutions différentes de polymère préparées en laboratoire. Les *traits pleins* correspondent pour la solution de CMC à un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)), et pour les autres solutions à un ajustement suivant la loi en puissance (Eq. (2.1.1)). Nous avons choisi de fixer l'indice de loi en puissance à  $n = 0.6$ .

1. Si l'on voulait caractériser précisément les propriétés viscoélastiques, il faudrait disposer d'un rhéomètre oscillant (Annexe C).

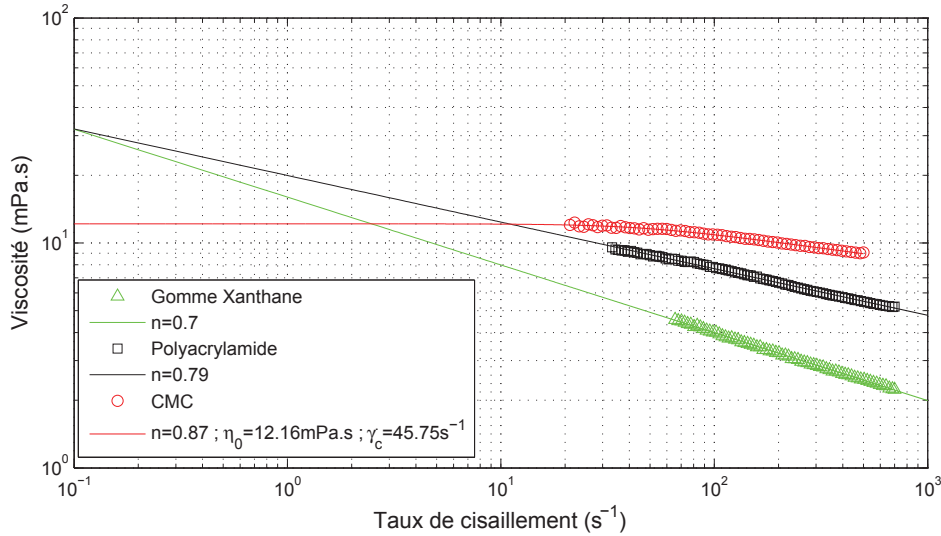
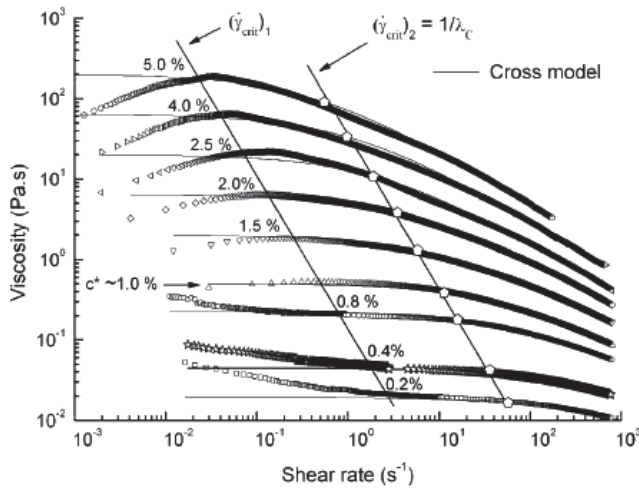


FIGURE 2.2.2 : Viscosité en fonction du taux de cisaillement pour trois solutions différentes de polymère préparées en laboratoire. Les *traits pleins* correspondent pour la solution de CMC à un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)), et pour les autres solutions à un ajustement suivant la loi en puissance (Eq. (2.1.1)). Nous avons choisi de fixer le paramètre de consistance à une valeur comprise entre  $m = 10 - 20 \text{ mPa.s}^n$ .

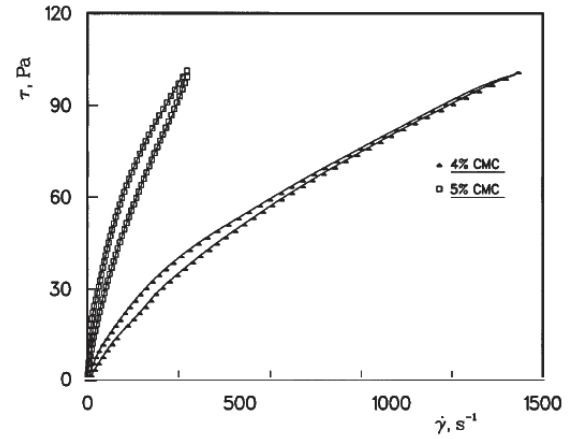
### 2.2.1 Le CMC

Référencé sur la liste des excipients sous le numéro E466, il s'agit d'un des polymères les plus répandus, utilisé notamment dans l'industrie pharmaceutique en tant que gélifiant ou agent épaississant à très forte concentration, mais aussi comme stabilisant dans des émulsions ou des suspensions à concentration plus modérée.

Des solutions aqueuses de 1 – 5% en masse de CMC ont été étudiées par Ghannam & Esmail (1997) [31], qui ont observé un comportement quasi-Newtonien pour les plus faibles concentrations, ainsi que des comportements rhéofluidifiants et thixotropes pour les plus fortes concentrations (Fig. 2.2.3b). Lin & Ko (1995) [51] et plus tard Gómez-Díaz & Navaza (2002) [33] se sont intéressés à l'influence de la température sur la viscosité de solutions de CMC de concentration comprise entre 0.05% et 1% en masse, viscosité qu'ils proposent de décrire suivant le modèle en loi de puissance. Escudier *et al.* (2000) [24] ont montré que la loi de Carreau-Yasuda (Annexe B) représente pratiquement le modèle rhéologique le mieux descriptif de la viscosité des solutions de l'ordre de 0.4% en masse de CMC. Finalement, pour une large gamme de concentrations allant de 0.2% à 7%, Benchabane & Bekkour (2008) [13] ont observé un comportement inattendu à très basses valeurs du cisaillement (jusqu'à  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  pour les plus fortes concentrations) : ils notent la présence d'un double seuil à la fois en cisaillement et en concentration en dehors desquels le plateau Newtonien n'est pas toujours mis en évidence (Fig. 2.2.3a).



(a) Benchabane &amp; Bekkour (2008).



(b) Ghannam &amp; Esmail (1997). Comportement thixotropique du CMC à fortes concentrations.

FIGURE 2.2.3 : Mesures de viscosité réalisées par rhéométrie pour des solutions de différentes concentrations en CMC.

## 2.2.2 La gomme Xanthane

Référencée sur la liste des excipients sous le numéro *E415*, la gomme Xanthane est un polysaccharide sécrété à partir de l'action d'un micro-organisme bactérien *Xanthomonas campestris*. Utilisée dans l'industrie alimentaire comme additif, son rôle et atout principal est son pouvoir de modifier la consistance des aliments en agissant comme épaississant ou gélifiant, même pour de faibles concentrations. Etant un polymère de nature organique, son principal inconvénient est de ne pas être stable au contact de l'atmosphère ambiante. Les solutions de gomme Xanthane présentent ainsi une durée de vie limitée, même s'il est possible de les conserver durablement en milieu acide.

Des études rhéologiques ont été menées (Whitcomb & Macosko (1978)[88], Rodd *et al.* (2000) [71]) afin de caractériser des solutions de différentes concentrations, essentiellement dans le but d'analyser leur comportement aux faibles valeurs du cisaillement.

Song *et al.* (2006)[81] se sont intéressés aux propriétés viscoélastiques à des fortes concentrations de 1 – 4% en masse, ainsi que Escudier *et al.* (2001) [24] qui ont réalisé une étude plus complète pour une concentration massique de 0.4%. Rodd *et al.* (2000) [71] ont également mis en évidence le caractère thixotropique de la gomme Xanthane pour des solutions de concentration supérieure à 0.5% (Fig. 2.2.4).

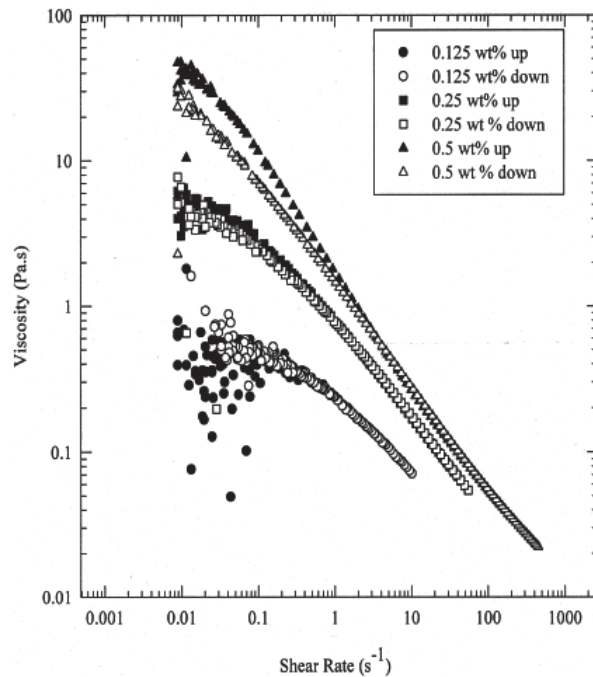


FIGURE 2.2.4 : Mesures de viscosité réalisées par rhéométrie pour des solutions de différentes concentrations de gomme Xanthane. Source : Rodd *et al.* (2000) [71].

## 2.3 Problématique expérimentale liée à la faible gamme de cisaillement appliqué

### 2.3.1 Contexte théorique et difficultés rencontrées en rhéométrie

D'un point de vue théorique, lorsqu'un écoulement présente une surface libre ou une symétrie plane ou axiale, le nombre de Reynolds est souvent défini dans le cas rhéofluidifiant comme étant basé sur la viscosité limite à taux de cisaillement nul (Rousset *et al.* (2007) [72], Nouar *et al.* (2007) [63]). Il s'agit de la viscosité observée à la surface libre et aux points de symétrie. Il apparaît donc crucial d'être en mesure de la déterminer avec précision.

Pendant longtemps, le seul moyen de mesure de la viscosité d'un fluide était d'imposer un écoulement à ce fluide puis de mesurer la résistance subie par l'écoulement suite à un contact avec un obstacle : ce fut le fondement de la viscosimétrie (viscosimètres rotationnels, à chute de bille, viscosimètres capillaires... etc).

D'une manière globale, la caractérisation expérimentale des fluides complexes représente un enjeu majeur que ce soit dans le secteur industriel ou alimentaire. Les mesures classiques de viscosité par rhéométrie révèlent certaines limitations compte tenu du comportement non Newtonien de certains liquides (en particulier lorsqu'on assiste à un brusque changement de viscosité à faible taux de cisaillement). Les rhéomètres rotationnels sont les plus répandus ; lorsque les essais consistent en la mesure d'un couple connaissant la vitesse de rotation (Annexe C), mesurer de faibles viscosités à très faible taux de cisaillement est particulièrement délicat avec ce type de technique. De surcroît, les instruments capables d'imposer d'aussi faibles gammes de cisaillement et donc d'aussi faibles vitesses de rotation ( $\ll 1 \text{ tr/min}$ ) sont en général très peu disponibles voire peu fiables, et ce d'autant plus que le fluide considéré sera peu visqueux. Dans

le cas des fluides rhéofluidifiants, plusieurs modèles empiriques sont proposés mais en réalité, suivant la concentration en polymère ainsi que son poids moléculaire, en fonction du fabricant et même de la nature chimique du solvant (Escudier *et al.* (2001) [24]), il subsistera malgré tout d'assez importants écarts dus à la fois au choix du modèle mais aussi aux incertitudes de mesure au niveau du rhéogramme.

Nous utiliserons tout de même un rhéomètre dans notre étude pour caractériser nos solutions pour des cisaillements pas trop faibles. Ces mesures seront réalisées avec un rhéomètre rotatif de Couette *Rheomat<sup>TM</sup> RM115 – A*, de couple minimal  $10\text{mN.m}$ . Suivant la plage de cisaillement parcourue, nous utiliserons généralement une géométrie MS0 1271 à double entrefer permettant l'étude de liquides de viscosité effective comprise entre 0.5 et 30 mPa.s, et/ou une géométrie standard DIN 145 pour des liquides de viscosité effective entre 20 et 400 mPa.s.

### 2.3.2 Electrocapillarité : présentation de la technique

La détermination de la tension de surface et de la viscosité d'un liquide à partir de l'étude de la propagation et de l'atténuation d'ondes capillaires est un sujet récurrent depuis quelques dizaines d'années. Comment définir les ondes capillaires à l'interface liquide/air ? Quelle technique expérimentale mettre en place pour les générer et les détecter ? Quelles seront les mesures à partir desquelles nous pouvons de manière précise caractériser la rhéologie de nos fluides ? Telles seront les questions abordées dans cette étude expérimentale.

L'électrocapillarité est une technique optique peu intrusive permettant des mesures d'atténuation et longueur d'onde spatiale à fréquence d'excitation fixée (Sohl *et al.* (1978) [79], Maloy *et al.* (1989) [54], Behroozi *et al.* (2001,2003,2010,2011) [7, 8, 11, 12]). Dans un contexte proche comme celui des procédés d'adsorption, il est aussi possible d'étudier par cette technique les propriétés élastiques de films résultant de l'organisation au niveau de l'interface de molécules organiques ou de surfactants solubles (Mann & Hansen (1963) [55], Langevin (1990) [49], Ito *et al.* (1990) [41], Jiang *et al.* (1992) [42], Saylor *et al.* (2000) [75], Dechoz & Rozé (2004) [23]). Ce type d'études permet la caractérisation des propriétés viscoélastiques des films interfaciaux pour une concentration donnée en soluté, la viscosité du fluide solvant étant supposée connue. Néanmoins, à notre connaissance, elle n'a jamais été utilisée pour des fluides purement visqueux. Elle a pourtant l'avantage de se baser sur des déformations extrêmement faibles du milieu ; elle peut donc donner accès à la viscosité à très faible cisaillement.

Concernant l'étude de la propagation des ondes capillaires, deux approches sont généralement possibles : une approche temporelle et une approche spatiale. La première revient à étudier l'évolution et la croissance temporelle d'une onde de longueur d'onde déterminée (*i.e.* la fréquence complexe est mesurée en fonction du nombre d'onde réel). Cette approche est rendue possible par une technique relativement récente (SLS : Surface light-scattering, Langevin (1990) [49]) : dans ce cas des ondes capillaires d'une large gamme de longueurs d'ondes sont générées par agitation thermique et la longueur d'onde souhaitée est sélectionnée à partir de l'angle de diffraction (*scattering angle*). La seconde approche consiste à suivre l'onde dans sa propagation spatiale, et donc à mesurer sa longueur d'onde à partir d'une fréquence d'excitation fixée. L'excitation des ondes est possible : *i*) mécaniquement (Saylor *et al.* (2000) [75]), *ii*) électriquement (Mann & Hansen (1963) [55], Sohl *et al.* (1978) [79], Maloy *et al.* (1989) [54], Ito *et al.* (1990) [41], Jiang *et al.* (1992) [42], Dechoz & Rozé (2004) [23]), et même *iii*) acoustiquement (Tan *et al.* (2010) [84]).

Bien que les deux approches fournissent les mêmes caractéristiques ondulatoires (contenues dans la relation de dispersion), elles diffèrent cependant sur la gamme des ondes capillaires en

terme de longueur d'onde et de fréquence. La première approche rend possible l'étude d'ondes capillaires très courtes à très hautes fréquences ( $\lambda \sim 10 - 100\mu m$ ;  $f \sim 1 - 10kHz$ ) tandis que la seconde approche se restreint à un régime capillaire à grandes longueurs d'onde-faibles fréquences ( $\lambda \sim 1mm$ ;  $f \sim 100Hz$ ). D'un point de vue expérimental, l'approche spatiale est la plus simple et la moins coûteuse à mettre en place, et la génération des ondes par excitation électrique (électrocapillarité) apparaît comme la technique la plus employée par les auteurs. C'est cette dernière que nous utilisons (Allouche *et al.* (2015) [2]).

A propos de l'électrocapillarité, une autre distinction majeure apparaît concernant la nature des ondes créées : Mann & Hansen (1963) [55], Sohl *et al.* (1978) [79], Maloy *et al.* (1989) [54] et Dechoz & Rozé (2004) [23] utilisent une lame de rasoir dans le but de créer des ondes planes, alors que Ito *et al.* (1990) [41], Jiang *et al.* (1992) [42] et Saylor *et al.* (2000) [75] choisissent de générer des ondes cylindriques. L'emploi d'une aiguille dans le but de générer des ondes cylindriques présente essentiellement l'avantage d'éviter des problèmes d'effets de bord dans le cas où l'axe de la lame n'est pas parfaitement parallèle à la surface libre, mais a l'inconvénient de présenter une atténuation naturelle des ondes hors atténuation par dissipation visqueuse. L'intérêt d'étudier des ondes planes réside dans la détection d'ondes de plus grande amplitude, et de plus faible coefficient d'atténuation.

Enfin, Behroozi *et al.* (2001,2003,2010,2011) [7, 8, 11, 12] ont développé une technique plus originale reposant sur la génération d'ondes stationnaires entre deux lames séparées d'une distance égale à un multiple d'une demi-longueur d'onde. Les mesures de phase et d'amplitude sont rendues possibles par interférométrie laser.

Nous choisissons, par souci de concision, de résumer ces différentes approches expérimentales dans un tableau (Tab. 2.1).

### 2.3.3 Montage expérimental

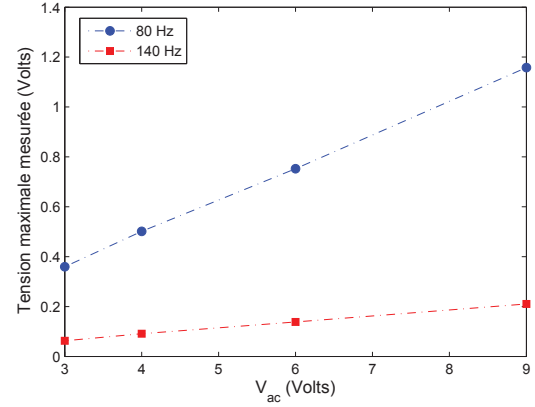
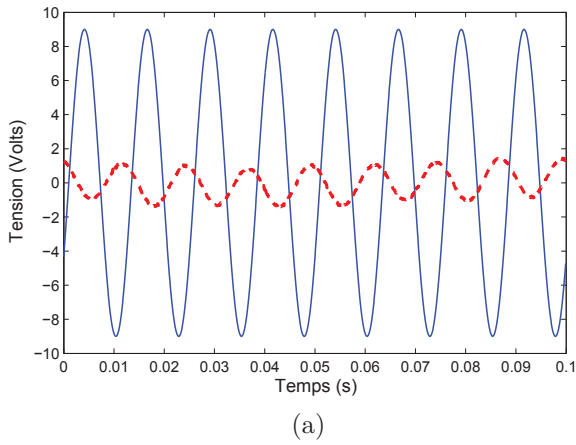
Par souci de simplicité, nous ferons le choix d'adopter un montage expérimental proche de celui proposé par Sohl *et al.* (1978) [79]. Des ondes supposées planes sont générées par l'intermédiaire d'une lame de rasoir commerciale d'environ 5cm de large. La solution considérée est contenue dans une cuve en verre transparent de 38cm de long, 35cm de large, la profondeur moyenne étant de l'ordre de 25cm.

Dans nos expériences, nous faisons en sorte de positionner la lame métallique au centre de la cuve, le plus près de la surface libre ( $< 1mm$ ). Nous appliquons une différence de potentiel entre la lame et une électrode métallique immergée au sein du fluide. Cette différence de potentiel se compose d'une haute tension continue  $V_{dc} = 270Volts$  à laquelle on superpose une faible tension sinusoïdale ( $V_{ac} = 1 - 10Volts$ ;  $f = 50 - 250Hz$ ).

Pour une fréquence d'excitation donnée, l'application du champ électrique va induire la déformation de l'interface (Fig. 2.3.1) : le fluide va localement tendre à s'élever au niveau de la lame et les forces opposées à ce mouvement seront généralement les forces de tension de surface et la gravité (Sohl *et al.* (1978) [79], Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9]). Etant donné que la force locale  $F_{elec}$  exercée sur la surface libre est proportionnelle au carré de la tension appliquée  $V_{elec}$  (Sohl *et al.* (1978) [79]), deux types d'ondes seront ainsi générées : des ondes répondant à la

| Comment générer les ondes ?                                                                       | Technique expérimentale proposée                                                                                      | Descriptif                                                                                                                          | Avantages                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | Inconvénients                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Ondes générées à fréquence fixée                                                                  | Electrocapillarité<br>- Mann & Hansen (1963)<br>- Sohl et al. (1978)<br>- Ito et al. (1990)<br>- Dechoz & Rozé (2004) | . Déformation de l'interface à la même fréquence que celle du champ électrique injecté                                              | . Méthode optique quasi non-intrusive<br>.<br>Simplicité du protocole                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | . Basse plage de fréquence ( $f \sim 100 - 1\text{ kHz}$ ) pour la plupart des cas, nécessité d'un matériel pointu en termes d'optique pour aller au-delà                                                     |
|                                                                                                   | Excitation mécanique<br>- Saylor et al. (2000)                                                                        | . Vibrations d'un réservoir suivant la verticale                                                                                    | . Diversité des procédés de visualisation : en réflexion, réflexion par le fond, par-dessus la surface libre                                                                                                                                                                                                                                                                            | . Limitation à $\lambda \sim 1\text{ mm}$ . Les effets dispersifs, observables surtout à $f \gg 100\text{ Hz}$ , ne sont pas toujours clairement mis en évidence                                              |
|                                                                                                   | Excitation acoustique<br><br>- Tasi et al. (2010)                                                                     | . Excitation d'une couche de fluide par un transducteur à SAW's (Surface Acoustic Waves) par le biais d'un substrat piézoélectrique | . Avantage en faveur de l'électrocapillarité : validation sur des mesures réalisées sur un fluide de viscosité connue                                                                                                                                                                                                                                                                   | . Domaines d'étude souvent de grande dimension $\Rightarrow$ dégradation de la surface libre                                                                                                                  |
| Ondes générées à longueur d'onde fixée                                                            | SLS (Surface Light Scattering)<br><br>Depuis Langevin (1990)                                                          | . Etude du temps d'évolution d'une onde capillaire pour une longueur d'onde sélectionnée – mesure de la fréquence associée          | . Méthode optique non-intrusive<br>.<br>Détermination des propriétés viscoélastiques lors de procédés d'adsorption par exemple<br>.<br>Possibilité de travailler sur des domaines petits, de dimension de l'ordre de $1\text{ cm}$<br>.<br>Mise en évidence du caractère dispersif pour des fluides visqueux à $f \sim 1 - 10\text{ kHz}$ et $\lambda \sim 10 - 100\text{ }\mu\text{m}$ | . Absence de mesures sur des fluides de viscosité connue<br>.<br>Coût de l'installation<br>.<br>Coût du traitement de données                                                                                 |
| Ondes stationnaires                                                                               | Interférométrie Laser<br><br>Travaux de Behroozi et al. depuis 2001                                                   | . Des ondes stationnaires sont générées entre deux lames séparées par une distance égale à un multiple d'une demi-longueur d'onde   | . Permet une étude spatiale avec les mêmes atouts que la SLS<br>.<br>Mesures réalisées dans le cas de fluides de viscosité connue                                                                                                                                                                                                                                                       | . Coût de l'installation<br>.<br>Coût du traitement de données                                                                                                                                                |
| Ondes planes<br><br>- Mann & Hansen (1963)<br>- Sohl et al. (1978)<br>- Dechoz & Rozé (2004)      |                                                                                                                       | . On génère un train d'ondes planes par le biais d'une lame de rasoir                                                               | . A fréquence fixée, détection d'un déplacement de grande amplitude<br>.<br>Les ondes planes s'atténuent moins fort que les ondes cylindriques                                                                                                                                                                                                                                          | . L'axe de la lame n'est pas toujours parfaitement tangent à l'interface $\Rightarrow$ risque d'effets de bord                                                                                                |
| Ondes cylindriques<br><br>- Ito et al. (1990)<br>- Jiang & Chiew (1992)<br>- Saylor et al. (2000) |                                                                                                                       | . On génère un train d'ondes cylindriques par le biais d'une aiguille métallique                                                    | . Disposition plus simple et plus optimale le plus près de la surface libre                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | . Les ondes cylindriques se propagent par définition en $1/r$ , en plus de s'atténuer par effets visqueux<br>.<br>Réglage aiguille-laser-direction du moteur plus fastidieux que pour le cas des ondes planes |

TABLE 2.1 : Résumé des principales techniques expérimentales trouvées dans la littérature employées pour générer des ondes capillaires. En rouge les principales références bibliographiques, en vert le type de modèle pour lequel nous avons opté.



(b) L'amplitude du signal mesuré évolue linéairement avec l'amplitude de la tension sinusoïdale appliquée.

FIGURE 2.3.1 : Exemple de mesure de signal local oscillant pour une solution de 0.075% de CMC. (a) Signal mesuré (*tirets rouges*) en réponse à un signal électrique de référence (*traits pleins bleus*) de tension  $V_{ac} = 9\text{Volts}$  et  $f = 80\text{Hz}$ , (b) pour une série de plusieurs amplitudes d'excitation.

fréquence fondamentale et d'autres à la seconde harmonique (Eq. (2.3.1)). Puisque dans notre configuration  $\left(\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\right)^2 \ll 1$ , nous détectons ainsi des ondes répondant à une fréquence égale à la fréquence d'excitation (Fig. 2.3.1a). A noter aussi qu'à  $V_{dc}$  fixée, l'amplitude des ondes détectées est linéaire avec  $V_{ac}$  (Fig. 2.3.1b).

$$F_{elec} \propto V_{elec}^2 = (V_{dc} + V_{ac}e^{i\omega t})^2 = V_{dc}^2 \left( 1 + 2\frac{V_{ac}}{V_{dc}}e^{i\omega t} + \left(\frac{V_{ac}}{V_{dc}}\right)^2 e^{2i\omega t} \right). \quad (2.3.1)$$

Des solutions de glycérine sont considérées dans un premier temps durant la phase de validation dans le cas Newtonien, puis des solutions de CMC et de gomme Xanthane sont utilisées dans le cas des fluides rhéofluidifiants (la figure 2.2 et de façon plus détaillée les annexes D-E résument la nature et les propriétés chimiques des différentes solutions employées). De l'eau déminéralisée est utilisée pour la préparation des solutions<sup>2</sup>, l'ensemble du protocole étant soumis à un certain nombre de précautions : *i*) faire en sorte que toutes les bulles d'air soient évacuées ; *ii*) faire en sorte que la dissolution soit parfaite afin d'éviter une répartition non-uniforme du soluté - stratification - qui peut dégrader la qualité de la surface libre ; *iii*) essayer de débarrasser au maximum la surface libre des fines particules de poussière qui peuvent s'y déposer ; *iv*) surtout s'assurer qu'il n'y ait aucune onde réfléchie au niveau des parois, en faisant en sorte de minimiser la longueur d'atténuation par rapport à celle de l'aquarium : ceci est possible en jouant sur la dimension de l'aquarium, sur la viscosité du fluide considéré, et/ou sur le régime fréquentiel d'excitation.

Une façon de détecter les ondes consiste à les scanner localement par réfraction de faisceau laser en raison de la différence d'indice de réfraction à l'interface liquide/air (Saylor *et al.*

2. Nous laissons tremper la poudre de polymère toute une nuit dans notre cuve d'une trentaine de litres.

| Solution            | Concentration   | Fabricant   | Température (°C) | Densité ( $Kg/m^3$ ) |
|---------------------|-----------------|-------------|------------------|----------------------|
| Glycérine naturelle | 45% en volume   | Oleon       | 26.5             | 1104                 |
| CMC                 | 0.075% en masse | Cekol 2000S | 24               | 982                  |
| CMC                 | 0.1% en masse   | Cekol 2000S | 24               | 985                  |
| CMC                 | 0.125% en masse | Cekol 2000S | 25               | 980                  |
| Gomme Xanthane      | 0.08‰           | Keltrol     | 23               | 981                  |

TABLE 2.2 : Caractéristiques des solutions utilisées durant notre travail expérimental. Des informations plus précises sur les propriétés physico-chimiques du CMC et de la gomme Xanthane sont données en Annexe D-E.

(2000) [75], Dechoz & Rozé (2004) [23]). Lorsque, comme nous, l'on s'intéresse à des ondes de très faible amplitude, l'approche par réflexion de faisceau laser présente toutefois l'avantage d'un plus grand déplacement lu sur le capteur optique ; cela nous affranchit de le disposer très haut au-dessus de l'interface comme dans le cas d'une approche par réfraction (Fig. 2.3.8).

Dans le cas de mesures par réfraction, le miroir est orienté à  $45^\circ$  vers le haut de sorte que le faisceau lumineux sortant du laser et le faisceau réfléchi par le miroir décrivent un plan vertical. Dans le cas de mesures par réflexion, nous dévions légèrement le miroir en plus de l'orienter à  $45^\circ$  vers le haut. Le faisceau réfléchi par le miroir, qui se retrouve ainsi légèrement dévié par rapport à la verticale, traverse une première fois la couche de fluide par la paroi du bas, se réfléchit au niveau de la surface libre, puis parcourt de nouveau la solution avant d'être détecté (Figs. 2.3.3 & 2.3.4). Au repos, lorsque la surface libre est plane, les chemins optiques des faisceaux lumineux mis en jeu décrivent ainsi un plan perpendiculaire à la direction de propagation. Localement, la déformation périodique de la surface libre entraîne l'oscillation du faisceau laser recueilli au niveau d'un capteur optique (Position Sensing Device PSD, calibration :  $1\text{mm} = 1\text{Volt}$ ) : la détection des ondes est de cette façon rendue possible en utilisant les ondes elles-mêmes comme des miroirs<sup>3</sup>. A partir du signal quasi-sinusoïdal mesuré, concrètement avec notre capteur positionné à une distance de 75cm de la surface libre, on détecte des déplacements de l'ordre de  $0.1 - 2.5\text{mm}$  ; cela correspond à des angles d'incidence  $0.002 - 0.1^\circ$ , et donc à des amplitudes comprises sur une plage de  $0.01 - 1\mu\text{m}$  (Fig. 2.3.8).

Le traitement du signal local oscillant est réalisé par une méthode de démodulation synchrone (G. Travin (1978) [85]) plutôt que par les algorithmes classiques FFT. Cette méthode fournit l'amplitude et la phase d'un signal périodique de fréquence connue même s'il est très bruité (Annexe G). Elle présente l'avantage d'éliminer rigoureusement les composantes fréquentielles du bruit (G. Travin (1978) [85]), mais son inconvénient demeure toutefois la nécessité d'entrer la valeur exacte de la fréquence fondamentale du signal.

Enfin, la détermination des caractéristiques ondulatoires (*i.e.* coefficient d'atténuation spatiale et longueur d'onde) requiert un plus grand nombre de mesures locales, suivant la direction de propagation. Nous imposons un pas régulier de 0.2 mm à 0.5 mm suivant la viscosité du fluide considéré et la gamme de fréquence d'excitation. Le déphasage en fonction de  $x$  entre le signal électrique de référence et le signal local oscillant détermine la longueur d'onde, tandis que

---

3. Nous utilisons le même montage optique pour l'étude d'ondes à la surface libre d'un écoulement de film sur plan incliné (Fig. 3.1.1a, Chapitre 3).

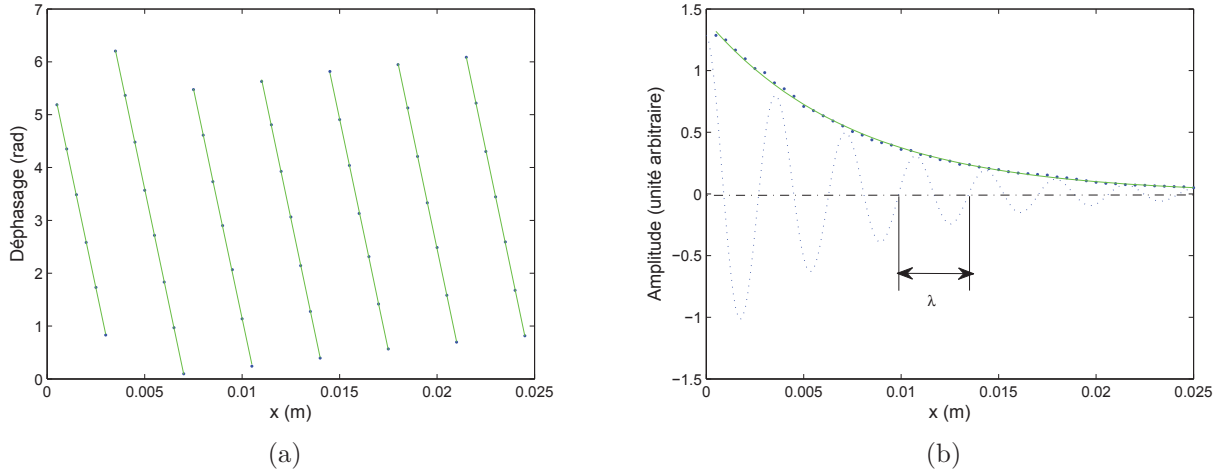


FIGURE 2.3.2 : (a) Déphasage entre le signal électrique de référence et le signal mesuré en fonction de la distance de propagation (*points bleus*), dont on tire la longueur d'onde, (b) Décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde en fonction de la distance de propagation (*points bleus*), dont on tire le coefficient d'atténuation spatiale. L'interface de l'onde n'est pas un résultat de mesures, mais a été reconstruite conformément à Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9] (*pointillés*). Résultats expérimentaux obtenus pour une solution de 0.1% en masse de CMC à  $f = 90\text{Hz}$ . Les *traits pleins verts* représentent un ajustement linéaire en (a) et exponentiel en (b).

les mesures d'amplitude en fonction de  $x$  fournissent directement le coefficient d'atténuation (Fig. 2.3.2).

## 2.3.4 Théorie des ondes capillaires avec dissipation visqueuse - validation en fluide Newtonien

### 2.3.4.1 Discussions sur le choix du modèle

Nous considérons dans notre étude des ondes capillaires avec dissipation visqueuse, qui constituent un ensemble d'ondes de surface dont la longueur d'onde est de l'ordre du millimètre. Dans le cas d'un fluide Newtonien, plusieurs modèles théoriques ont été proposés pour décrire la propagation de ces ondes au niveau d'une interface liquide/air. L'approche la plus généralement choisie revient à écrire la relation de dispersion en projetant les équations linéarisées de la dynamique des fluides au niveau de la surface libre d'un fluide de densité  $\rho$ , viscosité  $\eta$ , et tension de surface  $\sigma$ . Cette relation se présente sous une forme généralement complexe reliant

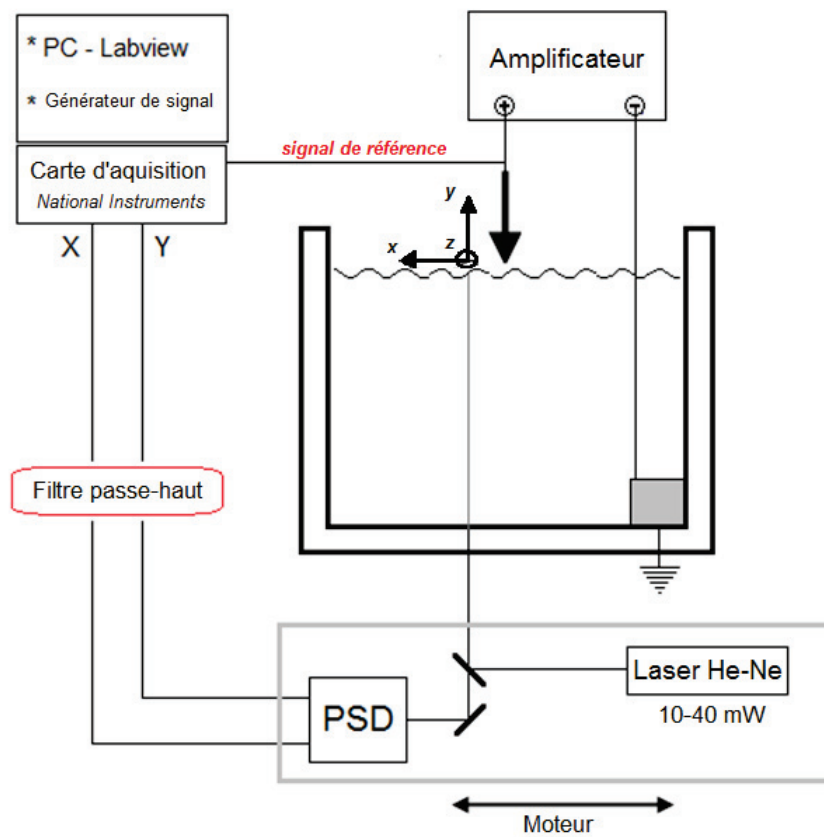


FIGURE 2.3.3 : Schéma du montage expérimental.

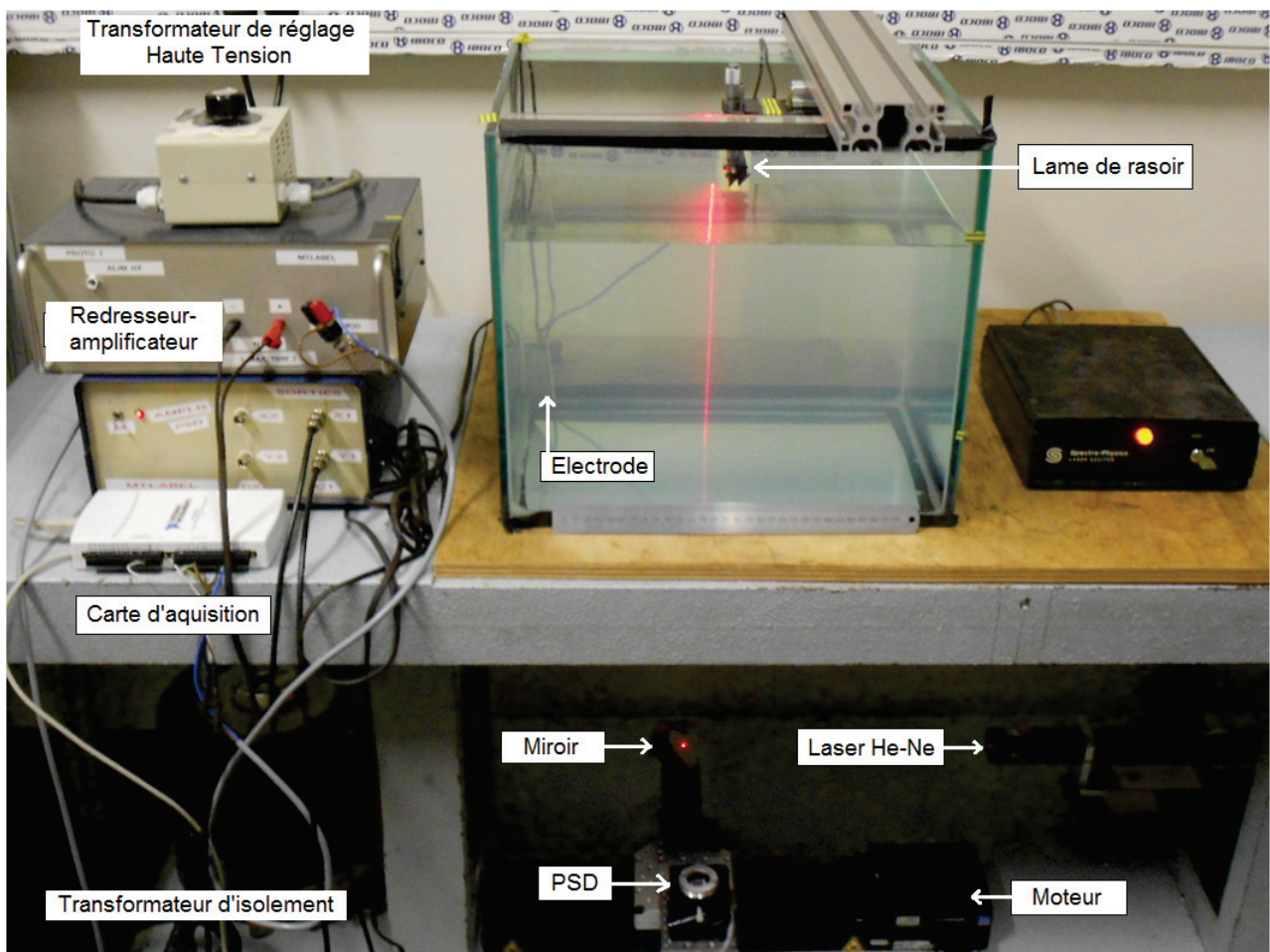


FIGURE 2.3.4 : Photo d'ensemble du montage expérimental.

| Type de modèle                                                                                               | Descriptif                                                                                                                                                                        | Définitions et hypothèses                                                                                                                                                                                              | Avantages                                                                                                                                             | Inconvénients                                                                                                                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Modèle couplé</b><br><b>2 équations en <math>(\eta, \sigma)</math></b><br><br><b>Depuis Lamb (1945)</b>   | <b>Forme dimensionnelle</b><br><br>$\omega = \omega(q, \rho, \sigma, \eta, g) = 0$<br>Relation de dispersion complexe                                                             | . Nombre d'onde complexe<br>$q = k \pm i\alpha$<br><br>. Fluide infiniment profond                                                                                                                                     | . Relation simple à établir                                                                                                                           | . Souvent, introduction d'un second nombre complexe<br>$m = (q^2 \pm i\omega\rho/\eta)^{1/2}$<br><br>. Pas de validation sur un fluide de viscosité connue                            |
|                                                                                                              | <b>Modèle asymptotique</b><br><br>$\begin{cases} k^2 = \rho\omega^2/\sigma \\ \alpha = \frac{4\eta\omega}{3\sigma} \end{cases}$<br><br><b>- Sohl &amp; Miyano (1979)</b>          | . Critère sur le régime capillaire (basse fréquence, faible viscosité)<br>$\frac{\omega\rho}{k^2\eta} \gg 1$<br>. Gravité négligée<br><br>. $\lambda$ petite devant la longueur d'atténuation<br>$o(\alpha/k)^2 \ll 1$ | . Expression simple                                                                                                                                   | . Rapidement imprécise pour les fluides bien plus visqueux que l'eau, notamment si $f \sim 1kHz$<br><br>. Pas de validation sur un fluide de viscosité connue                         |
|                                                                                                              | <b>Forme adimensionnelle</b><br><br>$Q=Q(P)$<br>Polynôme complexe pouvant atteindre l'ordre 7 en Q<br><br><b>- Sohl &amp; Miyano (1979)</b>                                       | $Q = q/(\omega\rho/\eta)^{1/2}$<br>$P = (\omega\eta^3/\rho\sigma^2)^{1/2}$<br><br>. Gravité négligée                                                                                                                   | . Approche élégante permettant une résolution graphique simple                                                                                        | . Difficulté néanmoins dans la résolution numérique d'un polynôme d'ordre aussi élevé<br><br>. Pas de validation sur un fluide de viscosité connue<br><br><b>- Sohl et al. (1978)</b> |
| <b>Modèle découplé</b><br><b>1 équation en <math>\eta</math></b><br><b>1 équation en <math>\sigma</math></b> | <b>Modèle pour <math>\sigma</math></b><br>Traduit physiquement qu'à $f$ fixée, $\lambda$ est entièrement déterminée par $\sigma$<br><br><b>- Behroozi &amp; Podolefsky (2001)</b> | Quasiment le même modèle avec ou sans viscosité<br><br>ou $\begin{cases} \eta = 0 \\ \frac{\omega\rho}{k^2\eta} \gg 1 \end{cases}$<br><br><b>- Behroozi et al. (2001)</b>                                              | . Relation de dispersion réelle<br><br>. Validée expérimentalement (mesures sur l'eau, solutions de glycérine)<br><br><b>- Behroozi et al. (2001)</b> |                                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                              | <b>Modèle pour <math>\eta</math></b><br>Traduit physiquement qu'à $f$ fixée, $\alpha$ est entièrement déterminée par $\eta$<br><br><b>- Behroozi (2004)</b>                       | . Ecoulement irrotationnel                                                                                                                                                                                             | . Validée expérimentalement (mesures sur l'eau, solutions de glycérine)<br><br><b>- Behroozi et al. (2001, 2003, 2010, 2011)</b>                      |                                                                                                                                                                                       |
| <b>Modèle à deux couches de fluides</b>                                                                      | Variante du modèle couplé mais en tenant compte des propriétés du fluide au dessus de l'interface<br><br><b>- Langevin (1990)</b>                                                 | . Nécessité de définir deux autres nombres d'onde complexes                                                                                                                                                            | . Une expression asymptotique est proposée qui s'ajuste bien aux mesures expérimentales<br><br><b>- Hansen et al. (1968)</b>                          | . L'expression asymptotique a été impossible à retrouver<br><br>. Pas de validation sur un fluide de viscosité connue                                                                 |
| <b>Résolution analytique</b><br><br><b>- Debnath et al. (1977)</b><br><b>- Leblond &amp; Mainardi (1987)</b> | . Résolution complète de la relation de dispersion                                                                                                                                | . Pour des profondeurs finies ou infinies<br><br>. Pour les ondes longues et courtes                                                                                                                                   | . Offre un certain nombre de solutions asymptotiques intéressantes                                                                                    | . Pas d'exploitation expérimentale sur un fluide de viscosité connue                                                                                                                  |

TABLE 2.3 : Résumé des principaux modèles théoriques trouvés dans la littérature. En rouge les principales références bibliographiques, en vert le type de modèle pour lequel nous avons opté.

les différentes propriétés physiques du fluide aux caractéristiques de l'onde, *i.e.* la fréquence angulaire  $\omega = 2\pi f$ , le nombre d'onde réel  $k = 2\pi/\lambda$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde, et  $\alpha_{att}$  l'atténuation spatiale.

Lamb (1945) [48] est l'un des premiers à avoir recherché une expression harmonique pour le champ de vitesse, de façon à vérifier à la fois l'équation de Laplace portant sur le potentiel de vitesse, et les équations de Navier-Stokes. Plus tard, Debnath *et al.* (1977) [22] et Leblond & Mainardi (1987) [50] ont recherché des solutions analytiques plus complètes et ont proposé des solutions asymptotiques intéressantes : *i)* en considérant que l'atténuation spatiale est négligeable devant le nombre d'onde réel à partir du second ordre ; *ii)* pour des liquides de profondeur finie ou infinie ; *iii)* pour les ondes courtes ou les ondes longues. Hansen *et al.* (1968) [37] et Langevin (1990) [49] ont affiné ce modèle de relation de dispersion en prenant aussi en compte les propriétés physiques du fluide au-dessus de l'interface (généralement de l'air) et par conséquent en réécrivant l'équilibre cinématique et dynamique à l'interface. Langevin (1990) [49] a montré que ce modèle bi-couche n'apporte pas d'écart significatif par rapport au modèle mono-couche dans le cas où la couche de fluide au-dessus de l'interface est de nature gazeuse. Sohl & Miyano (1979) [80] ont proposé une démarche élégante pour extraire viscosité et tension de surface à partir des mesures des caractéristiques ondulatoires écrites sous forme adimensionnelle. Ils suggèrent également une solution asymptotique pour un régime basses fréquences et faibles viscosités.

Les travaux expérimentaux cités ci-dessus n'ont toutefois pas été réalisés sur des liquides Newtoniens de viscosité connue, mais seulement sur des liquides de type hydrocarbure, des suspensions colloïdales ou des solutions de surfactant (mis à part Maloy *et al.* (1989) [54] qui ont publié des résultats sur de l'eau mais à de hautes fréquences, de l'ordre de  $f \sim 1\text{kHz}$  qui sont hors de portée de notre dispositif expérimental). Etant donné aussi la difficulté dans la résolution numérique de la relation de dispersion qui se présente souvent sous la forme d'un polynôme de degré 7, nous choisirons la théorie énergétique présentée par Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9] et Behroozi (2004) [6] qui ont par ailleurs abouti à une validation expérimentale sur de l'eau et des solutions Newtoniennes de concentration connue en glycérine (Behroozi *et al.* (2001,2003,2010,2011) [7, 8, 11, 12]).

La figure 2.3 résume les caractéristiques des principaux modèles retrouvés dans la littérature.

Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9] et Behroozi (2004) [6] présentent une approche différente, dans laquelle l'atténuation spatiale ne figure pas explicitement dans l'écriture harmonique du champ de vitesse (Annexe F). En effet, depuis Lamb (1945) [48], le coefficient d'atténuation apparaît quasi-systématiquement comme la partie imaginaire (positive ou négative) d'un nombre d'onde complexe. La relation de dispersion présente, par conséquent, une forme complexe dans la plupart des cas.

L'approche que nous présentons ici diffère en ce point, puisque le nombre d'onde sera défini comme un nombre d'onde réel, et aucune grandeur complexe ne sera considérée. Elle présente un certain nombre d'avantages : *i)* physiquement ceci revient à considérer les forces de tension de surface (dominantes) et de gravité (secondaires) comme étant pratiquement les uniques responsables de la déformation de l'interface, en d'autres termes que la longueur d'onde est presque entièrement déterminée par la tension de surface ; *ii)* en écrivant le théorème de l'énergie cinétique localement au niveau de la surface libre, le problème est découplé et une expression plus simple reliant proportionnellement la viscosité à l'atténuation spatiale est proposée. Nous présenterons succinctement l'essentiel de cette théorie dans les deux paragraphes qui suivent, dans le cas d'un fluide Newtonien, en choisissant le repère de l'étude de façon à ce que l'interface

soit tangente au plan  $(x, z)$ , l'axe  $y$  étant normal à ce plan, orienté vers l'extérieur du fluide. Les ondes sont supposées planes et se propageant suivant l'axe  $x$ .

### Modèle retenu pour la tension de surface

Sans tenir compte de la définition du nombre d'onde ( $k$  complexe ou réel), la relation de dispersion familière pour des ondes capillaires sans dissipation visqueuse (Eq. (2.3.2)) est obtenue en projetant les équations linéarisées de Navier-Stokes au niveau de la surface libre d'un fluide infiniment profond (depuis Lamb (1945) [48]), ou en notant que l'énergie potentielle de l'onde consiste en deux composantes, l'une gravitationnelle, l'autre de surface (Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9], Annexe F).

$$\omega^2 = kg + \sigma k^3 / \rho. \quad (2.3.2)$$

Il est toutefois nécessaire de corriger l'équation (2.3.2) pour y faire apparaître les effets visqueux et notamment pour les hautes fréquences (Behroozi *et al.* (2010,2011) [11, 12]). On écrit alors :

$$\omega^2 = kg + \sigma_{eff} k^3 / \rho, \quad (2.3.3)$$

$$\sigma_{eff} \equiv \sigma - (8\eta^3 \omega / \rho)^{1/2} + 4k\eta^2 / \rho. \quad (2.3.4)$$

Les expressions (2.3.3)-(2.3.4) sont obtenues en supposant physiquement que l'atténuation spatiale est très faible par rapport au nombre d'onde au delà de l'ordre 1 ( $(\alpha_{att}/k)^2 \ll 1$ ). Expérimentalement, le terme non visqueux dans l'expression de la tension de surface Eq. (2.3.4) est largement dominant et la correction itérative due aux termes visqueux n'est pas tellement significative ( $\sim 1\%$ ). Pour chaque valeur de la fréquence d'excitation, la valeur de la tension de surface est soit directement extraite à partir des équations (2.3.3)-(2.3.4), soit déterminée en ajustant les mesures expérimentales de la vitesse de phase  $v_\varphi = \omega/k = \lambda f$  suivant l'équation (2.3.5). Nous présenterons par la suite les résultats suivant ces deux façons de faire le post-traitement (Fig. 2.3.6) pour s'assurer qu'il n'y a pas d'écart significatif.

$$v_\varphi = \omega/k = (g/k + \sigma_{eff} k / \rho)^{1/2}. \quad (2.3.5)$$

### Modèle retenu pour la viscosité

En invoquant simplement la conservation de l'énergie, il ressort que localement au niveau de l'interface la puissance moyenne dissipée par unité de surface et due aux contraintes visqueuses  $\langle dP_{ext}/dS \rangle$  s'équilibre avec la variation par rapport à un temps  $dt$  de l'énergie de l'onde, exprimée par sa décroissance exponentielle ( $\langle . \rangle$  décrit une moyenne spatio-temporelle à la fois le long d'une longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  et pendant une période  $T = 2\pi/\omega$ ). Par ailleurs, le principe d'équipartition de l'énergie mène à ce que l'énergie totale d'une onde progressive se divise de manière égale entre une forme cinétique et une forme potentielle (Behroozi (2004) [6], Annexe F). La conclusion est que dans le cas d'un fluide Newtonien, la viscosité finit par s'écrire comme une fonction linéaire de l'atténuation spatiale donnée par :

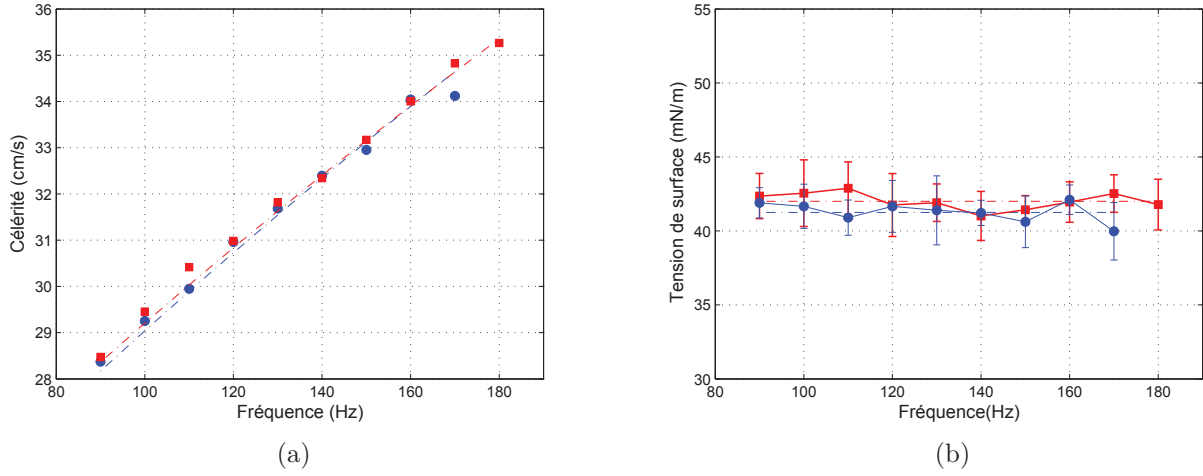


FIGURE 2.3.5 : Validation dans le cas Newtonien des mesures de célérité (a) et de tension de surface (b) pour une solution aqueuse à 45% en volume de glycérine. Ces résultats ont été obtenus pour deux valeurs différentes de l'amplitude, près de la source estimée à 90Hz suivant l'Eq. (2.3.8) :  $a_0 = 0.39 \mu m$  (cercles bleus) ;  $a_0 = 0.85 \mu m$  (carrés rouges). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les *tirets* représentent un ajustement des mesures de célérité suivant l'Eq. (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre à déterminer. Sont aussi représentées les *barres d'erreurs* collectées durant toute la série de mesures.

$$\eta = \frac{\rho v_g \alpha_{att}}{2k^2}, \quad (2.3.6)$$

où  $v_g = \frac{d\omega}{dk}$  représente la vitesse de groupe qui intervient physiquement dans l'expression de l'énergie cinétique du paquet d'onde.

Comme pour la tension de surface, la valeur de la viscosité est soit directement extraite de l'équation (2.3.6) soit déterminée à partir d'un ajustement des mesures d'atténuation spatiale sur l'expression analytique donnée par :

$$\alpha_{att} = \frac{2k^2 \eta}{\rho v_g}. \quad (2.3.7)$$

La figure 2.3.6 résume les principales étapes de l'ensemble du processus de post-traitement.

### 2.3.4.2 Estimation de l'amplitude de l'onde détectée et du cisaillement appliqué

Il apparaît crucial à l'issue des mesures expérimentales, et pour ne pas s'éloigner du contexte des liquides rhéofluidifiants, de vérifier que le taux de cisaillement appliqué est très faible en

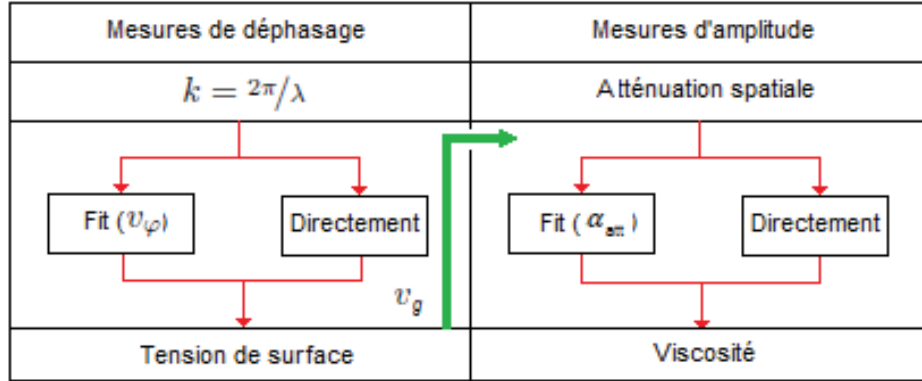


FIGURE 2.3.6 : Illustration des différentes étapes du post-traitement.

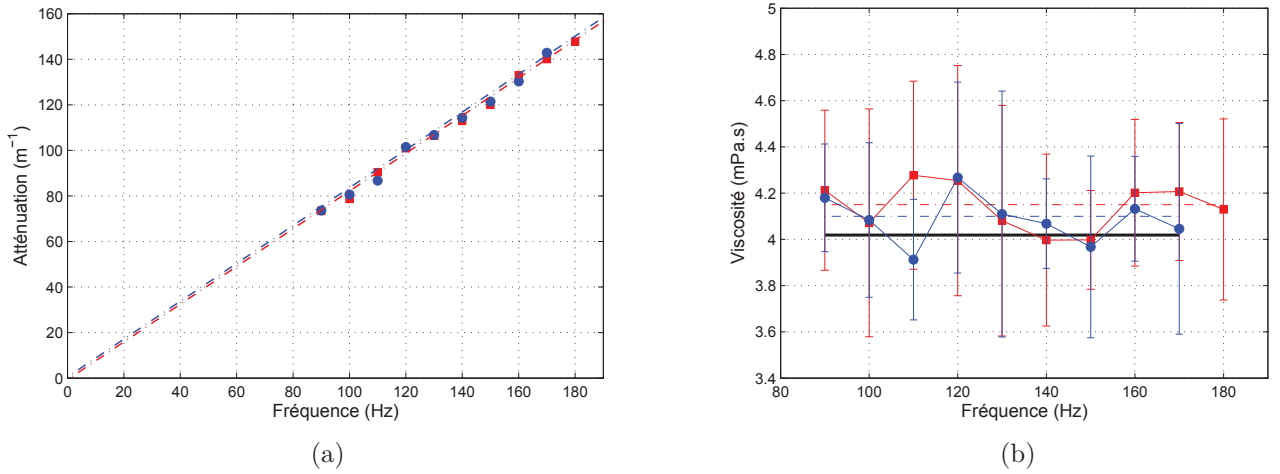


FIGURE 2.3.7 : Validation dans le cas Newtonien des mesures d'atténuation spatiale (a) et de viscosité (b) pour une solution aqueuse à 45% en volume de glycérine. Ces résultats ont été obtenus pour deux valeurs de l'amplitude  $a(x)$  estimées au voisinage de la source à 90Hz, suivant l'équation (2.3.8) :  $a_0 = 0.39\mu m$  (cercles bleus);  $a_0 = 0.85\mu m$  (carrés rouges). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les *tirets* représentent un ajustement des mesures d'atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre à déterminer. Le *trait noir* correspond à la valeur de viscosité mesurée par rhéométrie. Sont aussi représentées les *barres d'erreurs* collectées durant toute la série de mesures.

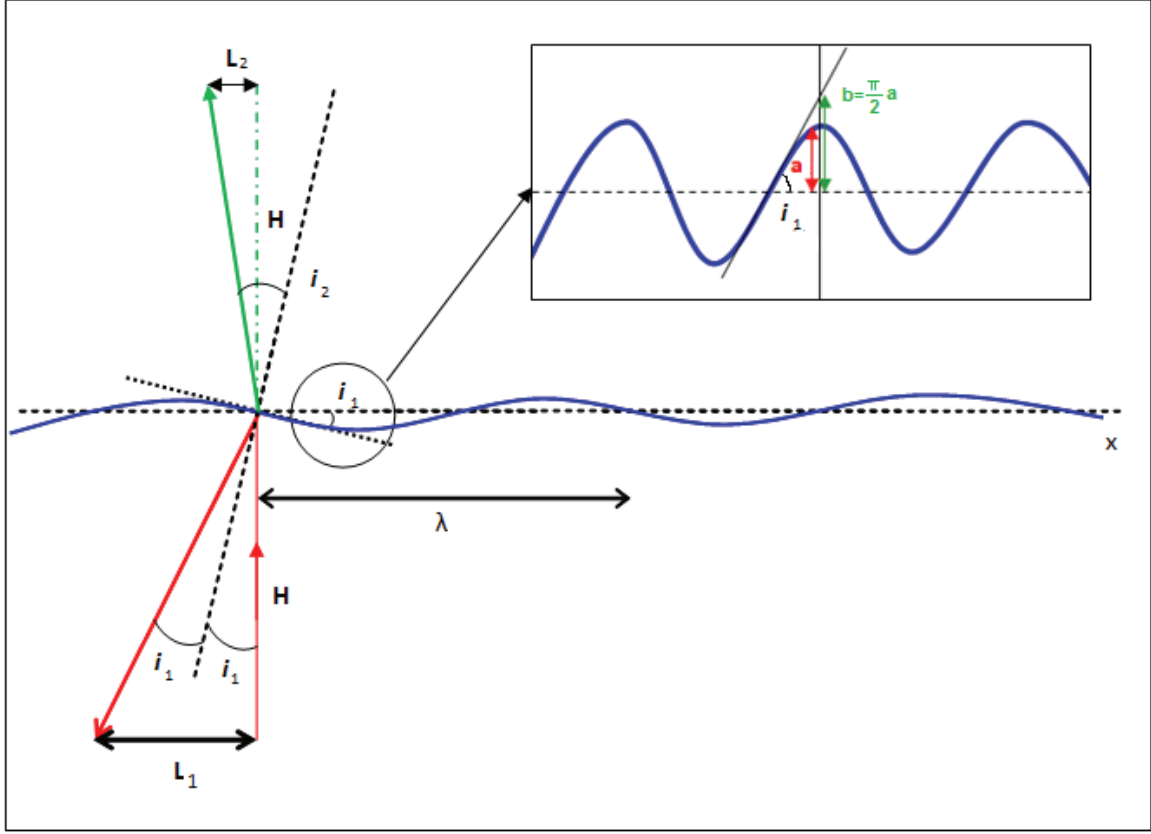


FIGURE 2.3.8 : Représentation graphique de l'amplitude  $a$  de l'onde détectée localement à  $x$  donné dans le cas simplifié d'une seule interface liquide/air. Ici sont superposés en rouge (*resp.* en vert) les faisceaux laser mis en jeu dans une démarche optique par réflexion (*resp.* par réfraction). Dans ce travail, et dans le cadre de l'approximation faibles angles, nous avons eu recours à des mesures par réflexion de faisceau laser, pour lesquelles l'angle détecté vaut le double de la pente locale de la surface libre. Pour le cas illustré il s'agit de la mesure du maximum de cette pente (angle  $i_1$ ) ce qui correspond à un déplacement lu sur le capteur optique ayant pour valeur  $L_1 \simeq 2H.i_1$ , avec  $H$  étant la distance entre la surface libre et le capteur. Dans ce cas simplifié, l'amplitude de l'onde détectée localement se réduit à  $a = \frac{\lambda L_1}{4\pi H}$ . A noter que pour une même onde, l'inconvénient des mesures par réfraction de faisceau laser par rapport aux mesures par réflexion s'explique par un déplacement plus faible valant  $L_2 \simeq H.(i_2 - i_1)$  et  $L_2 \simeq 0.33H.i_1$  dans le cas d'une interface eau/air.

ordre de grandeur, du moins suffisamment faible pour décrire le supposé plateau Newtonien. Nous nous consacrons dans cette partie à l'estimation de l'amplitude des ondes détectées, ce qui nous permettra ensuite d'estimer le cisaillement à partir de la définition harmonique du champ de vitesse. Nous choisissons d'adopter le même formalisme et les mêmes notations que Behroozi & Podolefsky (2001) [10, 9] et Behroozi (2004) [6]. La Fig. 2.3.8 explique comment l'amplitude de l'onde détectée est estimée à partir des mesures de la pente de la surface libre contenues dans le signal local oscillant. Dans le cas de notre configuration expérimentale, en négligeant l'épaisseur des parois de la cuve en verre, nous avons affaire à deux interfaces liquide/air, l'une au fond de la cuve et l'autre au niveau de la surface libre : dans ce cas l'amplitude de l'onde subit une correction par rapport au cas simplifié schématisé Fig. 2.3.8 et s'écrit localement :

$$a = \frac{\lambda L_1}{4\pi(n_{liq}H_{air} + n_{air}H_{liq})}. \quad (2.3.8)$$

L'expression Eq. (2.3.8) fait apparaître les indices optiques du liquide et de l'air, ainsi que les épaisseurs des couches de liquide et d'air traversées par le faisceau laser.

Nous considérons un champ de vitesse sous forme harmonique :

$$\begin{cases} \vec{v} = a(x)\omega e^{ky} [\sin(\omega t - kx)\vec{i} + \cos(\omega t - kx)\vec{j}] \\ a(x) = a_0 e^{-\alpha_{att}x}, \end{cases}, \quad (2.3.9)$$

où  $(\vec{i}, \vec{j})$  constitue un système de coordonnées 2D dans lequel l'axe  $x$  est tangent à la surface libre, et l'axe  $y$  lui est normal.

Le cisaillement  $\dot{\gamma}$  appliqué au niveau de la surface libre (à  $y = 0$ ) peut être estimé à partir de la composante verticale de la vitesse :

$$\dot{\gamma} \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x}|_{y=0} = a(x)\omega [-\alpha_{att}\cos(\omega t - kx) + k\sin(\omega t - kx)]. \quad (2.3.10)$$

Nous pouvons borner cette valeur afin de faire apparaître non pas une valeur déterminée mais une gamme de cisaillement appliqué physiquement, en notant que les valeurs d'amplitude et de fréquence varient tout au long du processus expérimental (Figs. 2.3.11 & 2.3.12). Pour cela, *i*) nous remarquons que l'amplitude de l'onde atténuée étudiée est maximale (*resp.* minimale) au premier point (*resp.* au dernier point) des mesures locales ; *ii*) nous prenons en compte la large gamme de fréquence ; *iii*) nous majorons le terme harmonique en *cos* et *sin*. Nous obtenons ainsi une expression nous fournissant un ordre de grandeur du cisaillement appliqué par l'onde détectée :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\min(a\omega).(\alpha_{att} + k) \leq |\dot{\gamma}| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\max(a\omega).(\alpha_{att} + k). \quad (2.3.11)$$

### 2.3.4.3 Analyse des résultats dans le cas Newtonien

La viscosité est indépendante du cisaillement dans le cas Newtonien. L'estimation du cisaillement appliqué Eq. 2.3.10 signifie que ni l'amplitude ni la fréquence ne sont censées influencer la viscosité dans ce cas. Les figures 2.3.5-2.3.7 donnent les résultats pour une solution Newtonienne à 45% en volume de glycérine (Fig. 2.2). Malgré la dispersion observée, ces résultats expérimentaux montrent que la tension de surface et la viscosité gardent une valeur constante sur la gamme de fréquence utilisée ( $f = 80 - 180\text{Hz}$ ), ainsi qu'en doublant l'ordre de grandeur

de l'amplitude de l'onde générée (pour  $V_{ac} = 5\text{Volts}$  puis  $V_{ac} = 10\text{Volts}$ ). Les valeurs de tension de surface et de viscosité issues de l'ajustement suivant l'équation (2.3.5) pour la célérité et l'équation (2.3.7) pour l'atténuation spatiale se superposent bien à la valeur moyenne des valeurs de tension de surface et de viscosité obtenues respectivement par les équations (2.3.3)-(2.3.4) & (2.3.6) pour chaque valeur de la fréquence d'excitation. La déviation des valeurs de viscosité par rapport aux mesures par un rhéomètre de Couette est de l'ordre de 2%. La largeur des barres d'erreurs durant tout le processus de mesure varie entre  $\pm 2\%$  et  $\pm 4\%$  pour la tension de surface, et  $\pm 5\%$  et  $\pm 10\%$  pour la viscosité.

Nous considérons donc notre configuration expérimentale comme validée; elle fournit une estimation correcte de la tension de surface et de la viscosité du liquide considéré.

### 2.3.5 Résultats en fluide rhéofluidifiant

Nous nous intéressons maintenant à l'objectif de notre travail : caractériser dans la limite des très faibles valeurs du cisaillement, la viscosité des solutions des deux fluides rhéofluidifiants retenus dans notre étude : le CMC et la gomme Xanthane.

Nous effectuerons nos mesures sur 3 solutions de concentration différente pour le CMC. Pour la gomme Xanthane, une seule concentration sera considérée car, pour une concentration supérieure à 0.01% en masse, les solutions de cette gomme présentent l'inconvénient de devenir rapidement troubles, ce qui rend plus difficile la détection des ondes.

Nous finirons comme pour le cas de la solution de glycérine, par analyser les résultats en faisant varier la gamme du taux de cisaillement appliqué, dans le but final de mieux comprendre le comportement rhéologique dans la limite des faibles valeurs du cisaillement.

#### 2.3.5.1 CMC

##### Influence de la concentration

Commençons par remarquer sur le tableau 2.2 que la densité des trois solutions différentes de CMC demeure pratiquement constante, et qu'elle est d'environ 10% plus faible que celle de la solution de glycérine. L'équation (2.3.2) montre que les ondes se propagent comme des ondes longues de gravité pour  $k \rightarrow 0$ , et comme des ondes courtes capillaires pour  $k \rightarrow \infty$ . La seconde asymptote à grands nombres d'ondes est proportionnelle au rapport  $\sigma_{eff}/\rho$  dans l'équation (2.3.3) ce qui signifie qu'à fréquence fixée, plus grand est ce rapport, plus vite se propagera l'onde. La figure 2.3.9 représente les mesures des caractéristiques de propagation (vitesse de phase, tension de surface) et les caractéristiques de l'atténuation (coefficient d'atténuation, viscosité) concernant les trois solutions de CMC. La figure 2.3.9a montre que sur notre plage de fréquence d'excitation, les valeurs de célérité évoluent de façon quasi-linéaire, signe que les ondes ne se dispersent quasiment pas dans notre gamme de fréquence et de longueur d'onde ( $f = 70 - 170\text{Hz}$ ;  $\lambda = 2 - 4\text{mm}$ ).

De plus, à fréquence fixée les valeurs de célérité (Fig. 2.3.9a) et de tension de surface (Fig. 2.3.9b) augmentent graduellement avec la concentration en CMC, et sont supérieures à celles de la solution Newtonienne de glycérine. Ceci est essentiellement dû au rapport  $\frac{\sigma_{eff}}{\rho}$  qui est d'environ 50% plus grand entre la solution la plus concentrée en CMC et la solution de glycérine. En se restreignant maintenant aux seules solutions de CMC, nous observons expérimentalement

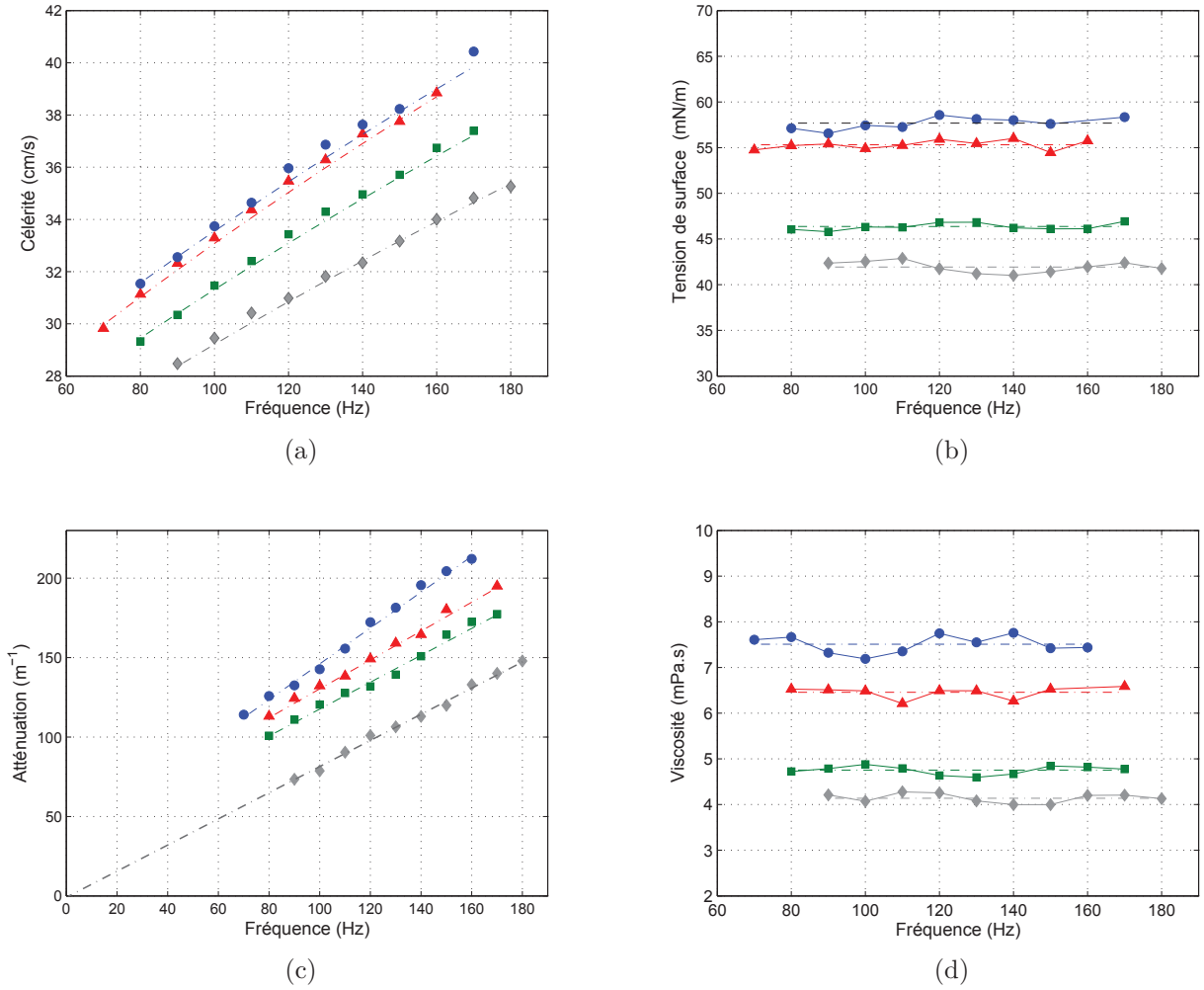


FIGURE 2.3.9 : Mesures de célérité (a), de tension de surface (b), d'atténuation spatiale (c), et de viscosité (d) en fonction de la fréquence d'excitation pour trois solutions de concentration différente en CMC : 0.075% *pds* (carrés verts), 0.1% *pds* (triangles rouges), 0.125% *pds* (cercles bleus). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les tirets représentent sur les figures (a) et (b) un ajustement des mesures de célérité suivant l'équation (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre, et sur les figures (c) et (d) un ajustement des mesures atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre. Sont aussi reportées les mesures réalisées pour la solution Newtonienne de glycérine (losanges gris).

que l'augmentation du rapport  $\frac{\sigma_{eff}}{\rho}$  est essentiellement due au fait de l'augmentation de la tension de surface, alors que la densité reste pratiquement inchangée (Fig. 2.2). Ceci se comprend en observant qu'en augmentant graduellement la concentration, et à fréquence fixée, les longueurs d'ondes sont de plus en plus grandes car il faut davantage d'énergie pour déformer l'interface. Cela se traduit physiquement par une augmentation graduelle de la tension de surface<sup>4</sup> (Fig. 2.3.9b), ce qui explique que les ondes capillaires de grande longueur d'onde (*resp.* basse fréquence) se propagent plus vite que les ondes de courte longueur d'onde (*resp.* haute fréquence).

Tout comme l'huile qui est plus visqueuse mais moins dense que l'eau, la figure 2.3.9d montre que les valeurs de viscosité pour les trois solutions de CMC sont plus grandes que celles de la solution Newtonienne de glycérine, bien que le CMC est 10% moins dense. Augmenter la concentration en polymère a donc pour effet d'augmenter la dissipation visqueuse, et donc l'atténuation spatiale des ondes (Fig. 2.3.9c). A noter tout de même que contrairement au cas de la glycérine, les valeurs d'atténuation évoluant linéairement avec la fréquence (Fig. 2.3.9c), ne passent toutefois pas par zéro comme dans le cas Newtonien. Une correction de la théorie visqueuse (2.3.7) de Behroozi (2004) [6] dans le cas d'un fluide rhéofluidifiant dont la viscosité est modélisée par la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)) a été réalisée, mais elle n'apporte rien de significatif. Lors du traitement des mesures, nous avons donc choisi de considérer à chaque fois la pente réelle des points correspondant aux valeurs d'atténuation spatiale.

Ici aussi, la largeur des barres d'erreurs durant tout le processus de mesure varie entre  $\pm 2\%$  et  $\pm 3\%$  pour la tension de surface, et  $\pm 5\%$  et  $\pm 10\%$  pour la viscosité.

#### Influence du cisaillement

L'équation (2.3.10) nous montre que le cisaillement appliqué lors des mesures dépend à la fois de la fréquence et de l'amplitude de l'onde. Dans un premier temps, nous avons fait évoluer le cisaillement à travers la gamme de fréquences. Nous faisons varier dans un deuxième temps le cisaillement appliqué pour chaque série de mesures à fréquence fixée, en jouant sur l'amplitude des ondes par le biais de la tension sinusoïdale injectée  $V_{ac}$ . Pour une concentration fixée en CMC, nous avons effectué nos mesures sur la même gamme de fréquence que celle présentée Fig. 2.3.9 pour une série de quatre valeurs de l'amplitude des ondes (Fig. 2.3.10). Nous constatons que les résultats se superposent très bien les uns aux autres. En d'autres termes les valeurs mesurées de viscosité et de tension de surface ne sont influencées ni par la fréquence ni par l'amplitude, ce qui indique qu'elles ne sont pas influencées par le cisaillement appliqué. L'équation (2.3.11) appliquée à notre solution de 0.075% de CMC donne la plage de cisaillement physiquement appliqué par la propagation des ondes, plage qui peut être estimée entre un minimum de  $10^{-3} s^{-1}$  et un maximum de  $10^{-1} s^{-1}$ . Sur cette plage de cisaillement, la solution de CMC a le même comportement que la solution de glycérine, à savoir un comportement Newtonien pour lequel la viscosité ne dépend pas du cisaillement.

4. A noter qu'une tension de surface nulle représente physiquement la rupture d'une interface comme pour le cas d'un changement de phase liquide/gaz, une tension de surface infinie correspondant à une interface rigide.

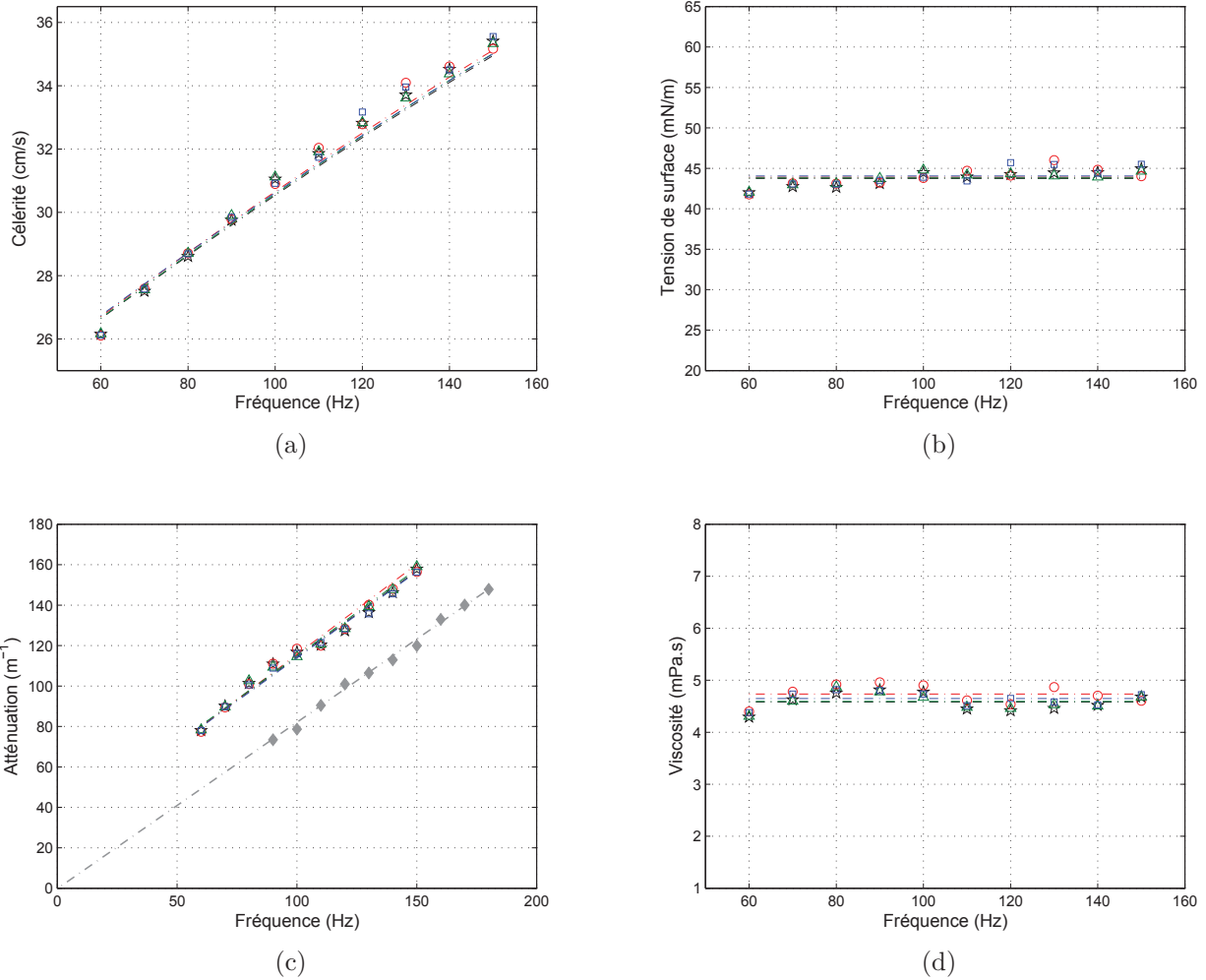


FIGURE 2.3.10 : Mesures de célérité (a), de tension de surface (b), d'atténuation spatiale (c), et de viscosité (d) en fonction de la fréquence d'excitation pour une solution à 0.075% en masse de CMC. Ces résultats ont été obtenus pour quatre valeurs différentes de la tension électrique injectée donnant naissance à des ondes capillaires d'amplitude estimée, au voisinage de la source et à la fréquence la plus basse, suivant l'équation (2.3.8) à :  $a_0 = 0.61\mu m$  (étoiles noires),  $a_0 = 0.4\mu m$  (cercles rouges),  $a_0 = 0.27\mu m$  (triangles verts),  $a_0 = 0.19\mu m$  (carrés noirs). Les marqueurs pleins représentent les résultats obtenus pour chaque fréquence. Les *tirets* représentent sur les figures (a) et (b) un ajustement des mesures de célérité suivant l'équation (2.3.5) avec la tension de surface comme paramètre, et sur les figures (c) et (d) un ajustement des mesures atténuation spatiale suivant l'équation (2.3.7) avec la viscosité comme paramètre. Sont aussi reportées les mesures réalisées pour la solution Newtonienne de glycérine (losanges gris).

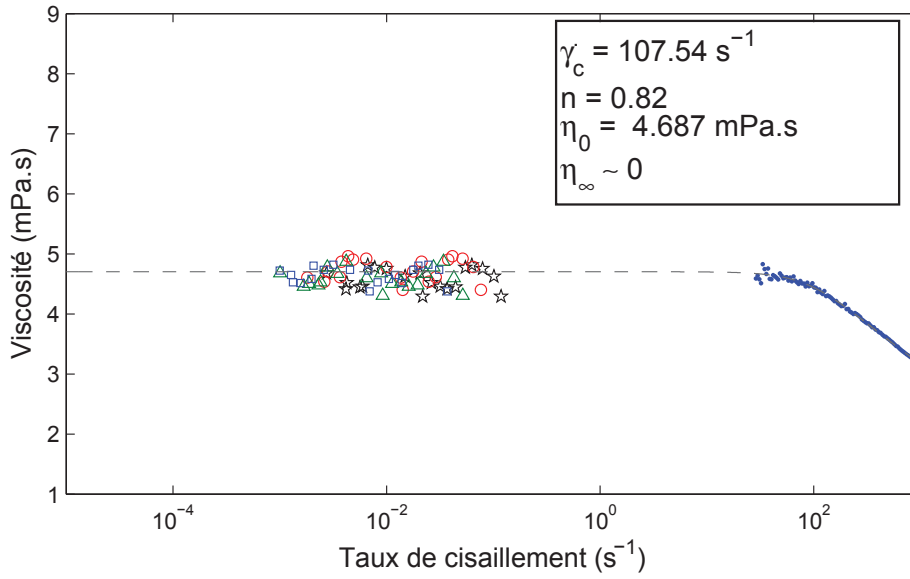


FIGURE 2.3.11 : Rhéogramme final de la solution à 0.075% en masse de CMC. Projection des mesures de viscosité (Fig. 2.3.10d) au sein des mesures réalisées par rhéométrie (points bleus). Les *tirets* représentent un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)). Dans ce cas, les seules mesures issues du rhéomètre suffisent pour caractériser le plateau Newtonien sans tenir compte des mesures tirées de l'électrocapillarité (marqueurs vides).

### Rhéogramme pour la solution à 0.075% en CMC

La dernière étape d'analyse revient à exporter les mesures de viscosité pour une concentration donnée en CMC au sein du rhéogramme obtenu pour la même solution par un rhéomètre rotatif de Couette. La figure 2.3.11 représente un tracé semi-logarithmique de la viscosité en fonction du cisaillement pour la solution à 0.075% de CMC. Les marqueurs vides donnent les résultats obtenus par électrocapillarité (Fig. 2.3.10d) et les points bleus correspondent à ceux obtenus par rhéométrie. Ce fluide se comporte clairement comme un fluide Newtonien pour la gamme de cisaillement correspondant à l'électrocapillarité. Ce comportement Newtonien reste même valable pour de plus grandes valeurs du cisaillement, pratiquement jusqu'aux valeurs minimum de cisaillement atteintes à l'aide du rhéomètre (quelques  $10^1 s^{-1}$ ), les résultats obtenus par rhéométrie étant dans la continuité de ceux obtenus par électrocapillarité. Cette observation conforte l'idée que les solutions de CMC, du moins pour les faibles concentrations, possèdent des propriétés rhéofluidifiantes plutôt faibles, caractérisées par un plateau Newtonien relativement large (Ghannam & Esmail (1997)[31]). En ajustant dans le sens des moindres carrés la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)) sur les résultats issus du rhéomètre, nous obtenons les paramètres rhéologiques de la solution de 0.075% de CMC :  $\eta_0 = 4.687 mPa.s$ ,  $n = 0.82$ ,  $\dot{\gamma}_c = 107.54 s^{-1}$  et  $\eta_\infty \sim 0$ , avec  $\eta_0$  la viscosité limite à taux de cisaillement nul,  $n$  l'indice de loi en puissance,  $\dot{\gamma}_c$  la limite supérieure du cisaillement en deçà duquel le fluide se comporte comme un fluide Newtonien, et  $\eta_\infty$  la viscosité limite à taux de cisaillement infini.

Il est à remarquer que l'ajustement suivant la loi de Carreau a été réalisé sans tenir compte des résultats issus de l'électrocapillarité. La courbe obtenue est en bon accord avec les résultats issus de l'électrocapillarité (marqueurs vides), ce qui constitue une seconde validation de notre

dispositif expérimental. En fait, pour ce cas particulier, les résultats issus du rhéomètre suffisent pour mettre en évidence une partie du plateau Newtonien, et ceci vient du fait que la plus faible valeur de cisaillement atteinte par le rhéomètre est plus petite que  $\dot{\gamma}_c$ . Les mesures par électrocapillarité n'apportent par conséquent pas d'information nouvelle pour cette solution à 0.075% de CMC dans la mesure où le comportement rhéologique est supposé *a priori* suivre une loi de Carreau. Néanmoins, ces mesures confirment l'existence du plateau Newtonien pour des valeurs de cisaillement aussi faibles que  $10^{-3} \text{s}^{-1}$  et semblent donc exclure un comportement rhéologique atypique à faible cisaillement.

Nous verrons ci-dessous l'intérêt de cette technique d'électrocapillarité lorsque le plateau Newtonien est "hors de portée" du rhéomètre dans le cas de la gomme Xanthane.

### 2.3.5.2 Gomme Xanthane

Dans ce paragraphe, nous ne présentons que les résultats obtenus pour une seule concentration de 0.08‰ en gomme Xanthane car les solutions de concentration supérieure à 0.01% deviennent rapidement troubles dans notre configuration expérimentale étant donné la profondeur de l'ordre de 25cm. Les mesures ont été réalisées pour différentes fréquences et quatre valeurs de l'amplitude des ondes.

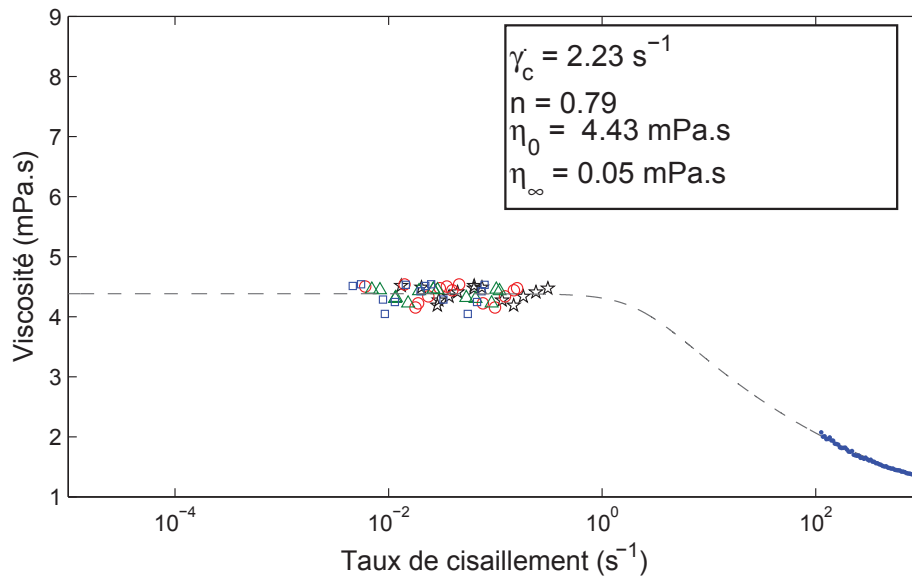


FIGURE 2.3.12 : Rhéogramme final de la solution à 0.08‰ en masse de gomme Xanthane. Par souci de concision, nous projetons directement les mesures de viscosité tirées de l'électrocapillarité au sein des mesures réalisées par rhéométrie (points bleus). Les *tirets* représentent un ajustement suivant la loi de Carreau (Eq. (2.1.2)). Dans ce cas, les seules mesures issues du rhéomètre ne suffisent plus à caractériser le plateau Newtonien, et nous devons absolument tenir compte des mesures tirées de l'électrocapillarité (marqueurs vides) pour obtenir une valeur de  $\eta_0$ .

Sur la Fig. 2.3.12 présentant le rhéogramme obtenu, nous voyons bien que contrairement à la solution à 0.075% de CMC, les mesures de viscosité tirées de l'électrocapillarité s'écartent des mesures issues du rhéomètre dans la mesure où le plateau Newtonien (limité par  $\dot{\gamma}_c$ ) est dans ce cas très petit par rapport à la plus faible valeur du cisaillement atteinte par le rhéomètre. L'ajustement avec une loi de Carreau se fait dans ce cas en tenant compte des résultats obtenus par l'électrocapillarité, et il fournit, pour cette solution de 0.08% en gomme Xanthane, un plateau Newtonien ( $\dot{\gamma}_c \simeq 2s^{-1}$ ) environ 50 fois plus étroit que pour la solution de CMC équivalente en terme de viscosité à cisaillement nul  $\eta_0$  ( $\dot{\gamma}_c \simeq 100s^{-1}$ ). La plage de cisaillement appliqué ( $\dot{\gamma} \simeq 10^{-3} - 10^{-1}s^{-1}$ ) nous permet ainsi d'avoir accès à plus d'informations sur le caractère rhéofluidifiant des solutions de gomme Xanthane. L'indice  $n$  de la loi en puissance diminue aussi, passant de  $n = 0.82$  pour la solution de CMC à  $n = 0.79$ , signe qu'au delà du plateau Newtonien à faible cisaillement la viscosité chute plus vite avec le cisaillement pour la solution de gomme Xanthane que pour la solution de CMC. Cette observation est en accord avec les conclusions de Ghannam & Esmail (1997)[31] et Rodd *et al.* (2000)[71] qui montrent qu'en terme de concentration équivalente en polymère, les solutions de gomme Xanthane sont toujours plus rhéofluidifiantes que les solutions de CMC. Les figures 2.2.2 & 2.2.1 illustrent cette affirmation en comparant les propriétés rhéofluidifiantes des différents polymères disponibles en laboratoire.

Notons que l'ajustement réalisé sur les seuls résultats obtenus par rhéométrie ne donnerait pour la solution de gomme Xanthane aucune valeur fiable ni pour  $\dot{\gamma}_c$  ni pour  $\eta_0$  car la connaissance du plateau Newtonien est "hors de portée" du rhéomètre. Par conséquent notre technique d'électrocapillarité se révèle très utile puisqu'elle fournit plus d'informations sur la rhéologie des fluides possédant de fortes propriétés rhéofluidifiantes. Elle permet de manière plus globale de caractériser, à des valeurs de cisaillement aussi faibles que  $10^{-3}s^{-1}$ , des fluides purement visqueux présentant des faibles valeurs de viscosité, ce qui est d'une importance cruciale lors d'écoulements présentant une interface ou une symétrie vis à vis d'un axe ou d'un plan.

## 2.4 Conclusion

Nous avons caractérisé la viscosité de solutions rhéofluidifiantes faiblement concentrées de CMC et de gomme Xanthane. Nous avons présenté nos résultats obtenus par l'application de la technique d'électrocapillarité sur ces fluides rhéofluidifiants. Cette méthode a auparavant été validée sur des fluides Newtoniens, permettant de montrer la possibilité de déterminer leur viscosité et tension de surface par étude de la propagation d'ondes capillaires avec dissipation visqueuse. L'intérêt de cette méthode est que la propagation des ondes sur l'interface engendre physiquement un cisaillement très faible donnant accès à des mesures de viscosité qui auraient été hors de portée d'un rhéomètre classique de Couette. Il est ainsi possible de connaître plus précisément la rhéologie de fluides présentant un comportement rhéofluidifiant. Le post-traitement est basé sur une méthode de démodulation synchrone, et la formulation théorique du problème s'appuie essentiellement sur les travaux de Behroozi (2004)[6] dans le cas Newtonien. La valeur de la viscosité pour la solution Newtonienne de glycérine se superpose à quelques pourcents près à la valeur obtenue par un rhéomètre de Couette, ce qui correspond à nos exigences.

Nous avons donc appliqué la technique dans le cas de deux solutions rhéofluidifiantes différentes (Allouche *et al.* (2015) [2]). Pour ces solutions, l'électrocapillarité nous renseigne davantage sur la rhéologie du fluide pour des valeurs du cisaillement aussi faibles que  $10^{-3}s^{-1}$ .

L'intérêt de cette méthode apparaît surtout lorsque le plateau Newtonien est très court, pour une faible valeur de viscosité. Pour la solution de CMC, nous avons montré que le plateau obtenu par notre technique s'ajustait bien aux résultats obtenus par un rhéomètre de Couette. L'autre solution de gomme Xanthane a été choisie de façon à ce que son plateau Newtonien soit "hors de portée" du rhéomètre. Nous pensons donc que cette approche peut être utile pour caractériser la rhéologie de fluides purement visqueux de faible viscosité que l'on retrouve dans le cas d'écoulements présentant une interface ou une symétrie vis à vis d'un axe ou d'un plan, le cisaillement s'annulant à ces endroits.

Notre technique se limite toutefois aux faibles concentrations. Pour des concentrations supérieures (*i.e*  $\eta_0 > 20 \text{ mPa.s}$ ), les longueurs d'onde peuvent devenir très courtes ( $\lambda < 1 \text{ mm}$ ), et leurs mesures deviennent d'autant plus difficiles compte tenu de l'atténuation sévère des ondes par dissipation visqueuse. Dans ce cas, une des solutions est de focaliser le faisceau laser, mais d'autres techniques (surface light-scattering, ondes stationnaires scannées par interférométrie laser) montrent leur efficacité à très hautes fréquences ( $f = 1 - 10 \text{ kHz}$ ) et permettent de détecter des ondes se propageant sur de très courtes longueurs d'ondes ( $\lambda = 10 - 100 \mu\text{m}$ ) ce qui permet de mettre en évidence de façon plus claire la dispersion des ondes par effets visqueux (Behroozi *et al.* (2011) [12]). Des mesures dans le vide, ou sur des dispositifs expérimentaux de quelques centimètres de dimension, permettent de faire des mesures de tension de surface (sur de l'eau pure par exemple) et/ou de propriétés viscoélastiques de films interfaciaux dans des conditions idéales.

## **Chapitre 3**

# **Etude d'instabilités de films rhéofluidifiants sur plan incliné**

Durant notre travail de thèse, nous nous sommes intéressés essentiellement aux ondes primaires, c'est-à-dire des ondes sinusoïdales qu'on observe tant que le régime linéaire est maintenu. Dans ce chapitre, nous commencerons par valider notre dispositif expérimental dans le cas Newtonien à l'instar de Liu *et al.* (1993) [52] qui ont déterminé par les mesures l'évolution du seuil critique linéaire suivant l'angle d'inclinaison. Après caractérisation rhéologique des fluides rhéofluidifiants utilisés, nous présenterons nos résultats expérimentaux de carte de stabilité marginale à angle fixé en parallèle avec les résultats numériques obtenus que ce soit par résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée (S. Millet (2007) [56], Millet *et al.* (2008) [58]), ou à partir des expressions asymptotiques du nombre de Reynolds critique trouvées dans la littérature (Annexe H).

## 3.1 Installation expérimentale et déroulement des mesures

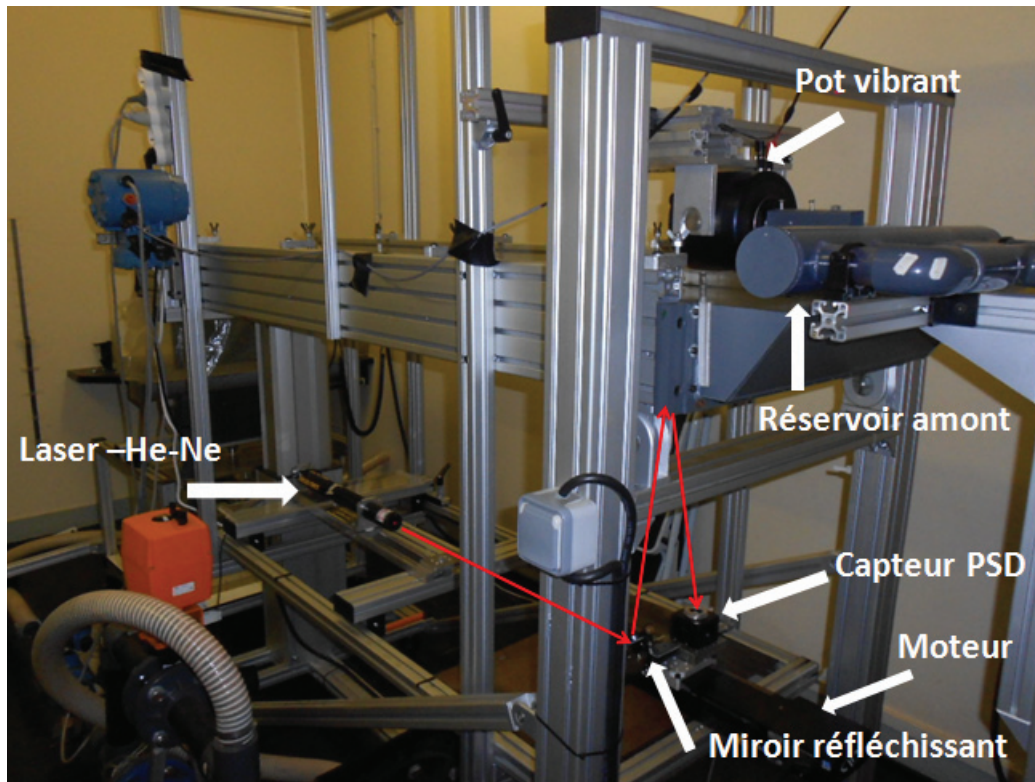
L'écoulement s'effectue le long d'une plaque plane de verre de 2m de long pour 46.4cm de large<sup>1</sup>; l'angle d'inclinaison est réglable jusqu'à 15° avec une précision de 0.035° par l'intermédiaire d'un pied télescopique motorisé. Le fluide est acheminé du réservoir vers le système d'injection grâce à une pompe volumétrique à rotor hélicoïdal, et nous disposons d'un débitmètre électromagnétique pour les mesures de débit (nous restons dans une gamme comprise entre 20 et 250ml/s). La détection des ondes est rendue possible par réfraction (Fig. 3.1.2) ou réflexion (Fig. 3.1.1a) de faisceau laser. La démarche employée est analogue à celle présentée dans les travaux de Liu *et al.* (1993) [52], ainsi que, plus récemment, Forterre & Pouliquen (2003) [29] dans le cas particulier des écoulements granulaires. Les ondes de surface sont créées en amont de l'écoulement par un pot vibrant piloté en fréquence et amplitude (Fig. 3.1.1b). Compte tenu du caractère convectif très sensible vis à vis des perturbations extérieures des instabilités de surface (Liu *et al.* (1993) [52]), il est nécessaire de dissiper les fréquences parasites (généralement un bruit à 5Hz dû à l'action de la pompe) en amont de l'écoulement. L'amplitude des ondes mesurées est estimée au millimètre, pour des longueurs d'onde de l'ordre de plusieurs centimètres. Le dispositif d'excitation est piloté par *Labview-National Instruments*<sup>TM</sup>, ce qui permet typiquement de parcourir une gamme de fréquence bien définie. Nous disposons de deux techniques expérimentales, l'une locale et l'autre globale (voir Chapitre 1), dont nous vérifions la complémentarité. La caractérisation rhéologique expérimentale des fluides utilisés est traitée au chapitre précédent.

### 3.1.1 Mesures locales

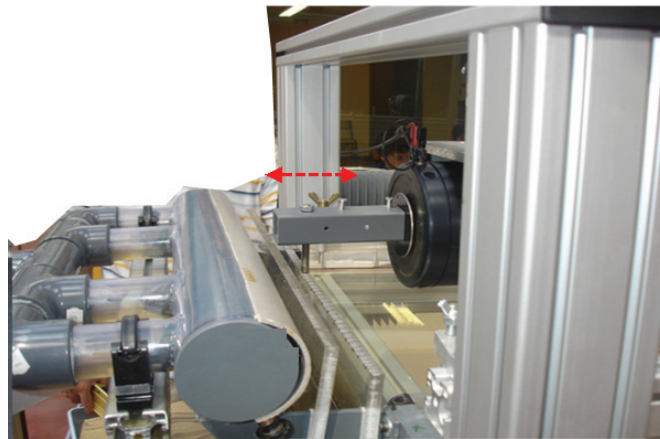
La première technique proposée, qui est aussi la plus simple, permet des mesures en deux points de la pente longitudinale de la surface libre au niveau de l'axe central de l'écoulement grâce à un jeu de miroirs et un laser He-Ne (Fig. 3.1.2). Les oscillations du faisceau laser réfracté par l'interface liquide/air suite au passage du train d'ondes sont recueillies par deux capteurs de position (PSD) du point d'impact du faisceau laser (calibration : 1mm = 1Volt).

---

1. A noter que lorsque la largeur du plan diminue, ceci a pour effet de stabiliser l'écoulement dans le cas Newtonien (travaux expérimentaux de Vlachogiannis *et al.* (2010) [86]).



(a)



(b)

FIGURE 3.1.1 : (a) Photo du montage optique utilisé dans une approche par réflexion de faisceau laser. (b) Zoom sur le dispositif d'excitation. Le pot vibrant noir se déplace suivant l'horizontale, entraînant avec lui une plaque immergée dans le petit réservoir amont, ce qui se manifeste par de faibles variations temporelles de profondeur du film, à la même fréquence que celle du pot vibrant.

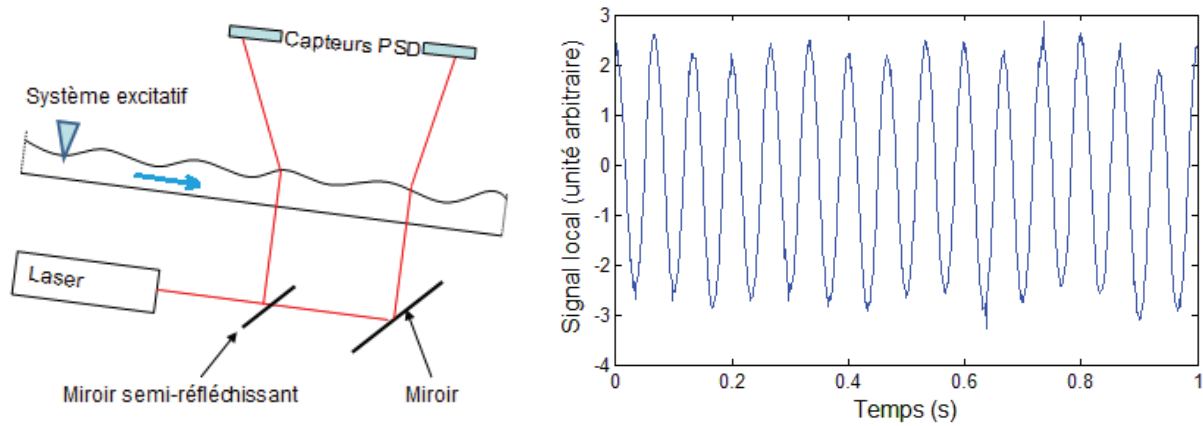


FIGURE 3.1.2 : (a) Détection d'ondes de surface par réfraction de faisceau laser à partir de mesures locales de la pente longitudinale de la surface libre. (b) Signal oscillant répondant à une fréquence d'excitation de 15Hz. Cas d'une solution aqueuse de glycérine à 60% ,  $Re = 23$ ,  $\gamma = 1^\circ$ .

Pour ce qui est du traitement du signal temporel obtenu, nous utilisons une méthode de démodulation synchrone (Annexe F) qui permet d'extraire amplitude et phase connaissant la fréquence, et présente l'avantage de s'affranchir du bruit et des composantes fréquentielles indésirables, et ce à travers un traitement relativement simple. Il est tout aussi possible de recourir à des méthodes plus classiques d'analyse spectrale. Nous mesurons donc en particulier le taux d'amplification des ondes comme étant le rapport des amplitudes mesurées aux deux points considérés. Cette méthode présente une bonne résolution temporelle mais elle est localisée dans l'espace. Le dispositif expérimental a été validé dans le cas Newtonien sur les résultats de Liu *et al.* (1993) [52], à partir de mesures d'amplitude en deux points réalisées par réfraction de faisceau laser (Fig. 3.1.2).

Enfin, la détermination de la longueur d'onde requiert un plus grand nombre de mesures locales, suivant la direction de propagation. Pour ce faire, nous effectuons nos mesures par une approche par réflexion, de la même manière que dans le chapitre précédent, en solidarissant le miroir réfléchissant et le capteur PSD sur le même moteur utilisé pour la détection des ondes capillaires (Fig. 3.1.1a). Nous étudions la propagation des ondes de surface sur une distance comprise entre 12.5cm et 25cm en imposant un pas régulier de 5 mm à 10 mm suivant la viscosité du fluide considéré et la gamme de fréquence d'excitation ( $f = 1 - 15Hz$ ). Le déphasage en fonction de  $x$  entre le signal permanent de référence à la fréquence imposée et le signal local oscillant détermine la longueur d'onde, tandis que les mesures d'amplitude en fonction de  $x$  fournissent directement le coefficient d'atténuation.

### 3.1.2 Mesures globales

La deuxième technique employée consiste en une application des techniques de *Schlieren* pour la mesure d'une élévation de surface. Cette technique appelée FS-SS (*Free Surface Synthetic Schlieren*) et développée par Moisy *et al.* (2009) [59] consiste en une méthode optique non intrusive basée sur la réfraction d'un motif de points à travers une interface (voir Chapitre 1). En appliquant cette technique au cas de l'écoulement de film sur plan incliné, nous venons

disposer cet ensemble de points à 70cm sous la plaque de verre qui constitue le support du plan incliné. Lors du passage d'un train d'ondes, et par l'intermédiaire d'une caméra CCD (résolution : 1280\*1024 pixels) située à 1.7m au-dessus de l'interface, nous visualisons un domaine rectangulaire situé à partir d'une distance de 40cm de l'amont. Notre domaine est d'environ 37cm de long et balaie toute la largeur du plan incliné (46.4cm). Il est donc possible de mesurer le déplacement apparent de l'ensemble des points du motif résultant de la déformation de la surface libre.

Nous générons sur *Matlab*<sup>TM</sup> un motif de 116000 points aléatoires noirs de diamètre 0.76mm (Moisy *et al.* (2009) [59]) que nous imprimons sur du papier blanc de format A2. Selon la qualité de l'imprimante, nous faisons en sorte qu'au niveau de la caméra nous puissions observer des points dont le diamètre apparent n'excède pas 3 pixels ( $\sim 1.5mm$  avec notre choix de résolution). Il est préférable d'éclairer intensément et de façon homogène le domaine d'étude (sans toutefois produire d'échauffement du liquide), de fermer au maximum l'ouverture afin de se focaliser sur le centre de la lentille et éviter par conséquent les déformations dues à sa périphérie. Une autre précaution est de diminuer au maximum le temps d'exposition de la caméra (jusqu'à 1.5ms) pour que nos prises d'images soient bien nettes et qu'aucun effet de flou n'apparaisse.

Concernant les conditions de mesure, nous adoptons les mêmes préconisations que celles exigées par la PIV (*Vélocimétrie par Image de Particules*), à savoir au moins 5 particules (5 points) par fenêtre d'interrogation et un déplacement maximal suffisamment important de l'ordre de 5 pixels. Ceci dit, il ne faut pas oublier que nous étudions des ondes de surface caractérisées entre autres par leur longueur d'onde, qu'il faut tout aussi bien être capable de mesurer de façon précise. C'est pourquoi, suivant la fréquence d'excitation imposée, nous devons avoir suffisamment de fenêtres d'interrogation dans une longueur d'onde de manière à être le plus représentatif de la réalité. Concernant la discrétisation spatiale, le critère de Shannon doit être respecté au maximum, nous faisons en sorte de choisir pour chaque série de mesures des fenêtres d'au plus un quart de longueur d'onde dans le sens de l'écoulement. Pour maximiser l'amplitude des déplacements apparents observés, nous utilisons l'astuce de synchroniser la caméra avec l'excitation : une image est prise toutes les demi-périodes de sorte que les maxima de l'onde sur une image correspondent aux minima de l'onde sur la suivante. En corrélant ces images l'une relativement à sa précédente, l'amplitude du déplacement apparent mesuré est de cette façon doublée par rapport au cas où l'on corrèle l'ensemble des images relativement à une image de référence, lorsque l'interface est plane par exemple (Moisy *et al.* (2009) [59]).

Pour ce qui est du calcul, nous utilisons une corrélation croisée adaptative avec un overlap des fenêtres d'interrogation à 75% grâce au logiciel de PIV *DaVis*, *LaVision*<sup>TM</sup>. Etant donné le caractère fortement unidimensionnel de l'écoulement, le déplacement apparent des points imprimés est dominé par sa composante longitudinale. Il est donc préférable d'utiliser des fenêtres de calcul non pas de forme carrée ou sphérique, mais de forme elliptique de façon à ce que les deux diamètres de l'ellipse soient dans un rapport de 2. Il est inutile généralement de recourir à un postprocessing du champ de déplacement, les vecteurs calculés étant de bonne qualité; on peut toutefois procéder à un filtrage spatial surtout pour des fluides peu visqueux et pour des grands angles d'inclinaison.

## 3.2 Premiers résultats et validation dans le cas Newtonien

Les résultats présentés dans cette section ont été obtenus avec des liquides visqueux de comportement Newtonien, de manière à retrouver les résultats de stabilité linéaire de Liu *et*

*al.* (1993) [52] : on utilisera dans ces cas un mélange eau/glycérol et/ou du sirop de glucose stabilisé.

Nous avons appliqué les deux techniques expérimentales, locales et globales, présentées au chapitre 1, en vue de détecter et d'étudier l'évolution spatiale d'ondes se manifestant à la surface libre du film liquide en écoulement. Les premiers résultats présentés ont été réalisés dans le cas Newtonien, afin de valider les techniques de mesures en question ; le cas rhéofluidifiant est traité par la suite, en s'appuyant sur les solutions de CMC et/ou de gomme Xanthane dont la rhéologie a été caractérisée au chapitre précédent. Il s'agit essentiellement de mesures de coefficients d'amplification et de longueurs d'onde, qui permettent, suivant la théorie retenue, de retrouver expérimentalement les seuils de stabilité linéaire propres à notre configuration d'écoulement. Suivant l'angle d'inclinaison, le nombre de Reynolds, et la gamme de fréquence d'excitation, nous remarquons que le régime linéaire est soit maintenu sur une bonne partie le long de notre plan incliné, soit il est confiné très près de l'amont. Pour des raisons pratiques, la méthode globale FS-SS ne peut être exploitée qu'à partir d'une distance d'environ 40cm de l'amont : ceci en raison du dispositif d'excitation qui empêche toute visualisation par caméra vue de dessus. Par conséquent, et pour éviter que les mesures soient trop bruitées, nous préférons avoir recours aux mesures locales laser et ainsi étudier nos ondes plus en amont par réflexion de faisceau laser vue de dessous (Fig. 3.1.1a).

### 3.2.1 Complémentarité des deux techniques

Il est essentiel de pouvoir retrouver la même pente longitudinale de la surface libre mesurée par les deux techniques expérimentales présentées auparavant. Les mesures laser sont locales alors que la méthode FS-SS conduit à des mesures du champ de gradient de profondeur en tout point  $(x, z)$  du domaine de visualisation. Afin d'être le plus quantitatif possible, et étant donné que le laser est disposé au niveau de l'axe central de l'écoulement, nous nous sommes proposés de comparer les mesures à ce niveau. Nous avons ainsi retenu un ensemble de points répartis le long de l'axe central, sur lesquels nous avons effectué les mesures locales par réfraction de faisceau laser. Pour déterminer la longueur d'onde et l'atténuation spatiale, nous ajustons dans le sens des moindres carrés les mesures par méthode FS-SS de la pente de la surface libre au niveau de l'axe central suivant l'équation (3.2.1). La figure 3.2.2 représente ces résultats auxquels nous superposons une série de mesures locales par réfraction laser. La figure 3.2.1 représente enfin la reconstitution de l'élévation de surface due au passage des ondes, après inversion numérique du gradient d'épaisseur déterminé à partir des mesures de champ de déplacement (Eq. (1.3.1)).

Nous avons considéré dans l'exemple Fig. 3.2.1 un écoulement de nature stable afin de bien caractériser l'enveloppe exponentielle décroissante de l'amplitude des ondes de surface. L'idée étant par la suite de déterminer les caractéristiques de l'onde considérée par ajustement dans le sens des moindres carrés des mesures FS-SS suivant l'expression modale (Eq. (3.2.1)) faisant apparaître la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ , l'atténuation spatiale  $\alpha_{att}$ ,  $\varphi$  désignant une phase :

$$\frac{dh}{dx} \propto e^{-\alpha_{att}x} \cos(kx - \varphi). \quad (3.2.1)$$

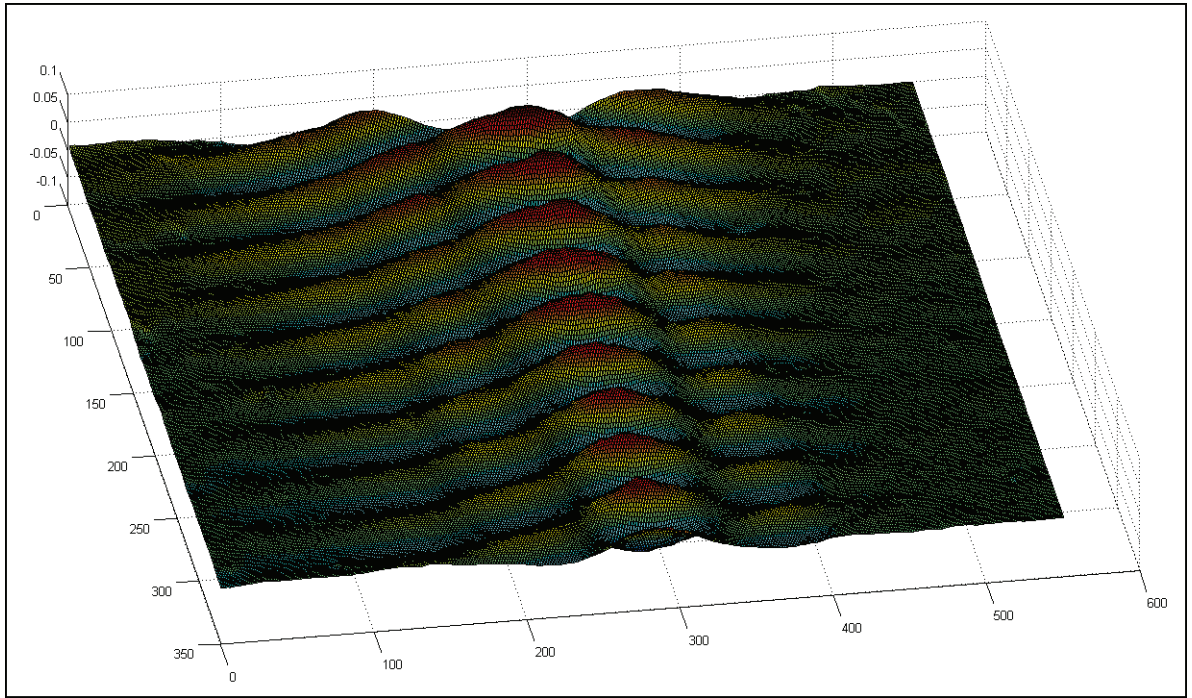


FIGURE 3.2.1 : Champ d'épaisseur reconstitué après intégration numérique. Ne sont représentées que les variations autour d'une épaisseur moyenne non déterminée expérimentalement et ramenée à zéro. Cas stable pour une solution aqueuse de glycérine à 60% ,  $f=15\text{Hz}$ ,  $Re=23$ ,  $\gamma = 1^\circ$ .

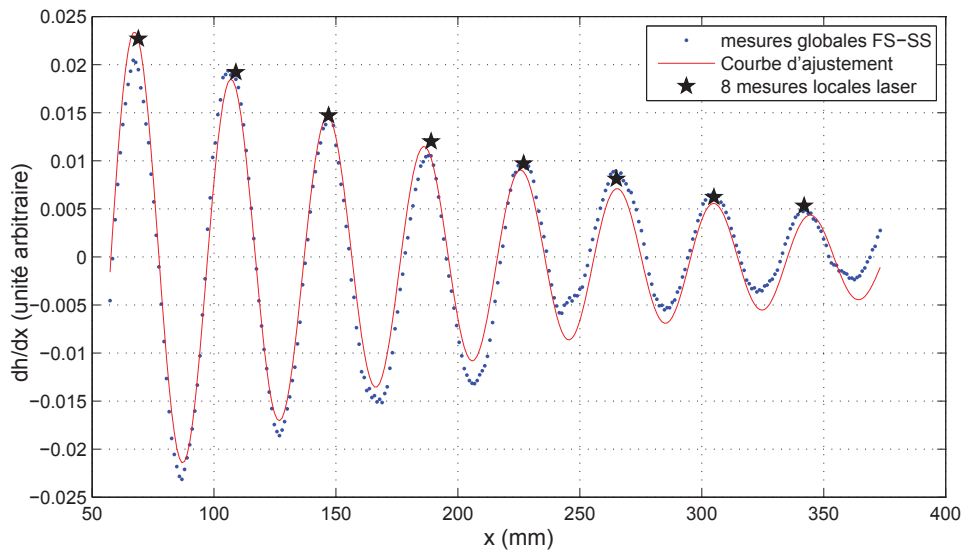


FIGURE 3.2.2 : Superposition des mesures locales (*étoiles noires*) et globales (*points bleus*) de la pente longitudinale de la surface libre, effectuées au niveau de l'axe central de l'écoulement, sous les mêmes conditions expérimentales. Longueur d'onde et coefficient d'amplification sont déterminés à partir d'un ajustement dans le sens des moindres carrés du nuage de points sur l'Eq. (3.2.1). Cas stable pour une solution aqueuse de glycérine à 60% ,  $f=15\text{Hz}$ ,  $Re=23$ ,  $\gamma = 1^\circ$ .

### 3.2.2 Seuil linéaire de stabilité

Le nombre de Reynolds est basé sur le débit par unité de largeur  $q$  et la viscosité cinématique à cisaillement nul  $\eta_0$  de la loi de Carreau (Annexe A,B), et est défini par  $Re = \rho q / \eta_0$ . Il apparaît en effet intuitif que plus la pente sera raide et plus le nombre de Reynolds sera grand, plus les chances qu'auront les instabilités de se former et/ou de s'amplifier dans l'espace seront grandes.

A angle et nombre de Reynolds fixés, la fréquence de coupure est la fréquence pour laquelle le taux d'amplification spatial est égal à l'unité, valeur pour laquelle l'écoulement est marginalement stable (Fig. 3.2.3a). Pour plusieurs valeurs du nombre de Reynolds et à inclinaison toujours fixée, nous obtenons un nuage de points dans le plan  $(Re, f)$  séparant les zones linéairement stable et instable : la figure 3.2.3b représente ainsi la carte de stabilité pour un angle d'inclinaison tel que  $\gamma = 3.2^\circ$ . Dans la limite des grandes longueurs d'ondes et en fluide Newtonien (Liu *et al.* (1993) [52]), on observe que la fréquence de coupure  $f_c$  évolue comme une fonction du nombre de Reynolds  $Re$  en faisant apparaître le nombre de Reynolds critique  $Re_c$  :

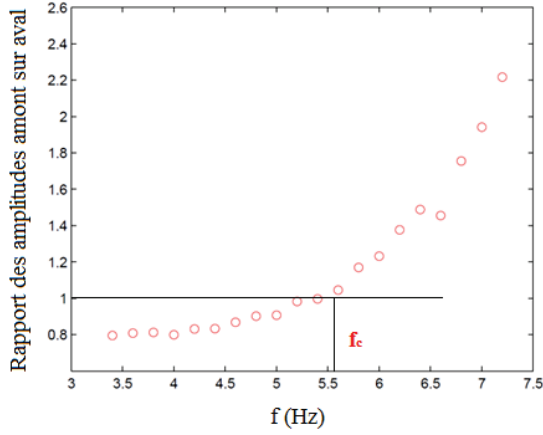
$$f_c \propto (Re - Re_c)^{1/2}. \quad (3.2.2)$$

Cependant, il est difficile d'obtenir des mesures fiables à fréquence quasi-nulle, c'est la raison pour laquelle nous ajustons cet ensemble de points dans le sens des moindres carrés de façon à ce qu'ils décrivent la fonction ci-dessus puis nous relevons le nombre de Reynolds qui correspond à son extrapolation suivant l'approximation très grandes longueurs d'onde, c'est-à-dire pour des fréquences nulles (Fig. 3.2.3b). On obtient ainsi le nombre de Reynolds critique relatif à la valeur de l'angle d'inclinaison considéré,  $Re_c$ .

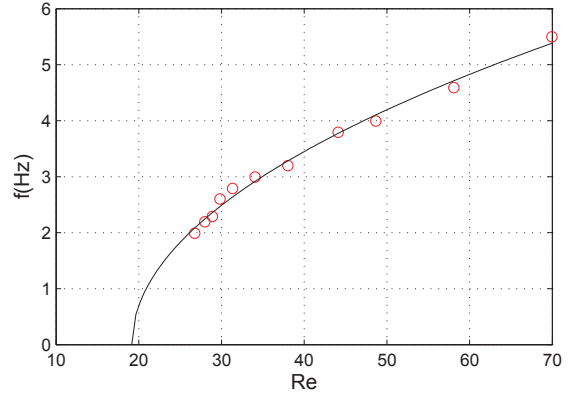
En répétant la même démarche pour plusieurs valeurs de l'angle d'inclinaison, nous finissons par obtenir la courbe donnant l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle (Fig. 3.2.3c). Cette courbe évolue proportionnellement à la cotangente de l'angle d'inclinaison, et possède une allure proche de la courbe théorique dont l'expression dans le cas Newtonien s'écrit suivant nos grandeurs caractéristiques choisies pour l'adimensionnement :

$$Re_c = \frac{5}{6} \cot \gamma. \quad (3.2.3)$$

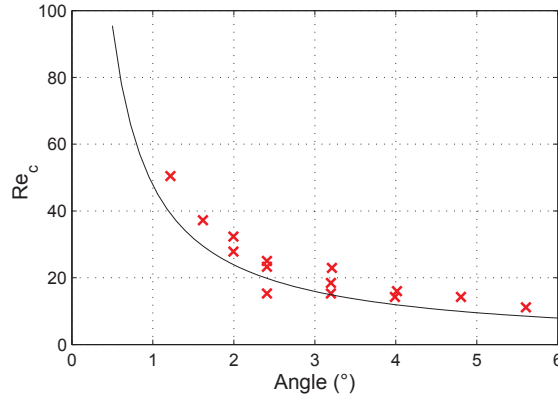
Nous remarquons toutefois que les résultats expérimentaux (Fig. 3.2.3c) sont globalement tous légèrement au dessus des valeurs théoriques. En effet, l'expression analytique du nombre de Reynolds critique dans le cas Newtonien (Eq. (3.2.3)) repose sur l'hypothèse d'un plan de largeur infinie. Les résultats expérimentaux de Liu *et al.* (1993) [52], réalisés pour une largeur du plan de 50cm, sont en très bon accord avec l'expression théorique. Nos résultats, obtenus pour un plan légèrement moins large (46.4cm), se situent globalement au-dessus de la courbe théorique, ce qui se traduit par une stabilisation du film d'après Vlachogiannis *et al.* (2010) [86]. Ces derniers ont étudié expérimentalement l'influence de la largeur du plan dans la stabilité de l'écoulement de film Newtonien sur plan incliné, et prédisent que le seuil critique observé en terme de nombre de Reynolds, doit être plus élevé dans un dispositif de largeur finie qu'infinie. Sur leurs gammes d'angle d'inclinaison et pour des largeurs de 250mm, 166mm, et 83mm, la figure 3.2.4 représente l'évolution de l'écart entre résultats expérimentaux et théoriques sous la forme du rapport entre le nombre de Reynolds critique expérimental, et sa valeur théorique (Eq.



(a) A angle  $\gamma = 3.2^\circ$  et nombre de Reynolds  $Re = 70.4$  fixés,  $f_c$  est la fréquence de coupure pour laquelle nous obtenons une onde marginale (ni amplifiée, ni amortie).



(b) Courbe de stabilité marginale dans le plan  $(Re, f)$  pour  $\gamma = 3.2^\circ$ . Le nombre de Reynolds critique expérimental est obtenu par ajustement du nuage de points sur l'Eq. (3.2.2) (traits pleins), puis par extrapolation aux fréquences nulles.



(c) Nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle, les *traits pleins* représentent le tracé de la courbe théorique donnant l'évolution du nombre de Reynolds critique en fonction de l'angle (Eq. (3.2.3)). Chaque *croix* correspond au nombre de Reynolds critique déduit pour  $f = 0$  d'une courbe similaire à celle de la figure (b).

FIGURE 3.2.3 : Résultats expérimentaux de stabilité linéaire spatiale pour des solutions aqueuses de glycérine - validation dans le cas Newtonien. Ces résultats ont été obtenus par des mesures en deux points réalisées par réfraction de faisceau laser.

(3.2.3)), en fonction de la largeur du plan incliné adimensionnée par la longueur capillaire. Nous observons que les résultats expérimentaux s'écartent rapidement des valeurs théoriques pour les valeurs les plus faibles de la largeur adimensionnée ; nous représentons aussi nos résultats expérimentaux issus de la figure 3.2.3c, et nous observons que nos mesures de nombre de Reynolds critique ne dépassent les valeurs théoriques que de 25% en moyenne.

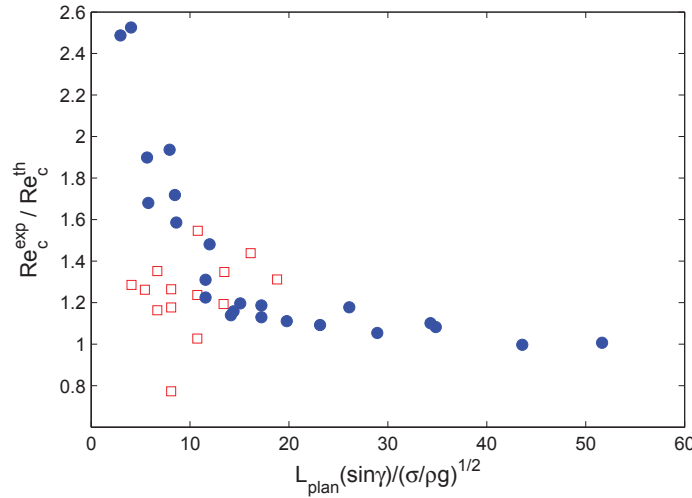


FIGURE 3.2.4 : Nombre de Reynolds critique expérimental, normalisé par sa valeur théorique (Eq. (3.2.3)), en fonction de la largeur du plan incliné  $L_{plan}$  adimensionnée par la longueur capillaire. Les *marqueurs pleins* correspondent aux résultats expérimentaux de Vlachogiannis *et al.* (2010) [86] sur une gamme d'angle d'inclinaison telle que  $\gamma = [5^\circ - 30^\circ]$ , et pour des largeurs du plan incliné telles que  $L_{plan} = \{83mm, 166mm, 250mm\}$ . Les *marqueurs vides* correspondent à nos résultats expérimentaux représentés en (c) sur une gamme d'angle d'inclinaison telle que  $\gamma = [1.2^\circ - 5.6^\circ]$ , et pour une largeur du plan incliné telle que  $L_{plan} = 464mm$ .

Par conséquent, ces résultats sont suffisamment cohérents avec le comportement théorique attendu pour que l'on considère notre dispositif expérimental et nos méthodes de mesures comme validés.

### 3.3 Stabilité linéaire de film rhéofluidifiant à angle fixé

Dans cette partie nous nous intéressons à la stabilité linéaire de films de fluide rhéofluidifiant à angle d'inclinaison fixé. La détection des ondes est réalisée par réflexion de faisceau laser (Fig. 3.1.1a). A l'instar de Liu *et al.* (1993) [52] dans le cas Newtonien, nous présenterons nos résultats expérimentaux de courbe marginale dans le plan  $(Re, f)$  en déterminant le nombre de Reynolds critique par un ajustement des mesures de fréquence de coupure suivant l'expression Eq. (3.2.2). Nous comparons dans un premier temps nos résultats aux valeurs de nombre de Reynolds critique obtenues asymptotiquement par Ng & Mei (1994) [60] qui décrivent la

viscosité par une loi de puissance, et Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] qui la décrivent par une loi de puissance régularisée par un plateau Newtonien (les expressions asymptotiques à grandes longueurs d'ondes sont données en annexe H). Nous effectuons simultanément des mesures de la longueur de l'onde marginale associée, ce qui nous permet dans un deuxième temps de comparer nos résultats expérimentaux aux résultats numériques de courbe marginale sur les plans  $(Re, k)$  et  $(Re, c)$ , qui sont obtenus par résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée (S. Millet (2007) [56], Millet *et al.* (2008) [58]).

Les deux fluides rhéofluidifiants caractérisés par électrocapillarité dans le chapitre précédent seront utilisés dans le cadre d'une étude de stabilité, d'autres fluides rhéofluidifiants de plus importante concentration en polymère seront aussi étudiés. Pour ces fluides-là, nous considérons que le plateau Newtonien à bas cisaillement est suffisamment bien mis en évidence par rhéométrie, sans qu'il soit nécessaire de les caractériser par électrocapillarité.

### 3.3.1 Estimation de la gamme de cisaillement appliqué sur la couche de film

A angle et nombre de Reynolds fixés, la couche de film uniforme produit en théorie un cisaillement maximal au fond, et qui doit s'annuler à la surface libre. Avant le lancement des mesures, la première étape consiste à vérifier que la rhéofluidification est bien significative dans notre écoulement de base, c'est-à-dire que ce dernier engendre une plage de cisaillement suffisante pour que sa valeur maximale au fond  $\dot{\gamma}_{max}$  se situe au delà du plateau Newtonien apparaissant dans la loi de Carreau (*i.e.*  $\dot{\gamma}_{max} > \dot{\gamma}_c$ ). Dans le cas contraire, ( $\dot{\gamma}_{max} < \dot{\gamma}_c$ ) les résultats de seuil critique coïncideraient avec ceux du cas Newtonien, ce qui n'est pas l'objet de notre étude.

Sur notre gamme de débit expérimental à angle fixé, nous pouvons estimer le cisaillement maximum de l'écoulement uniforme par :

$$\dot{\gamma}_{max} \equiv \frac{q}{d_s^2}. \quad (3.3.1)$$

Nous choisirons de l'estimer à l'aide de la grandeur caractéristique  $d_s = \left(\frac{\eta_0 q}{\rho g \sin \gamma}\right)^{1/3}$  de l'épaisseur du film uniforme qui est celle qu'on aurait eue si l'on avait considéré un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$  (voir Chapitre 4). En faisant ce choix, nous sous-estimons le cisaillement et on se place donc sciemment dans le cas le plus défavorable. Cette valeur du cisaillement maximal dépendra donc de l'angle d'inclinaison, de la nature physique et rhéologique du fluide, ainsi que de l'écoulement.

Pour un fluide donné étudié à angle fixé, l'expression du cisaillement maximal Eq. (3.3.1) montre que  $\dot{\gamma}_{max} \propto q^{1/3}$ , autrement dit sa valeur variera suivant la gamme de débit sur laquelle nous effectuons les mesures de fréquence de coupure.

Nous commençons par vérifier dans quelle mesure les deux fluides rhéofluidifiants caractérisés par électrocapillarité dans le chapitre précédent (Figs. 2.3.11 & 2.3.12) obéissent à cette condition. Nous comparons ainsi le cisaillement maximal  $\dot{\gamma}_{max}$ , au plateau Newtonien ( $\gamma = \dot{\gamma}_c$ ) en introduisant le paramètre adimensionnel  $L = \frac{q}{\dot{\gamma}_c d_s^2}$  apparaissant dans la loi adimensionnelle de Carreau (voir Chapitre 4), et en lui attribuant une valeur expérimentale sur laquelle on se basera aussi lors de la comparaison avec les résultats numériques. Suivant la nature rhéologique du fluide, nous verrons que ce paramètre peut atteindre des valeurs élevées ( $L \gg 1$ ), ce qui rend difficile la résolution numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld ; nous chercherons alors

à étudier des fluides dans une gamme intermédiaire telle que  $L$  soit supérieur à 1, pour que les effets rhéofluidifiants soient significatifs, mais pas trop grand par rapport à 1 pour pouvoir disposer d'une solution numérique à l'équation d'Orr-Sommerfeld.

### 3.3.2 Résultats et discussions

#### 3.3.2.1 Solution de CMC à 0.075%

Cette première solution présente la propriété d'avoir un large plateau Newtonien ( $\dot{\gamma}_c \sim 100s^{-1}$ ) et sur la gamme de débit expérimental considérée, la condition  $\dot{\gamma}_{max} > \dot{\gamma}_c$  n'est respectée que pour des angles relativement grands ( $\gamma > 4^\circ$ ). En outre, la détection d'ondes primaires au delà de cet angle d'inclinaison devient très difficile compte tenu de la très faible valeur de  $\eta_0$  et de la nature convective des instabilités (Liu *et al.* (1993) [52]) : la surface libre est très bruitée. Le régime linéaire reste alors confiné à quelques dizaines de centimètres de l'entrée du fait de forts taux d'amplification, les ondes se développant de façon non linéaire plus loin en aval.

Ceci nous amène à privilégier l'emploi de la seconde solution faiblement concentrée en gomme Xanthane qui présente des propriétés rhéofluidifiantes plus fortes, et notamment un plateau Newtonien environ 50 fois plus étroit, favorisant ainsi un comportement rhéofluidifiant significatif.

#### 3.3.2.2 Solution de gomme Xanthane à 0.08‰

Pour ce fluide très faiblement concentré en polymère mais bien plus rhéofluidifiant ( $\dot{\gamma}_c \sim 2s^{-1}$ ), nous remarquons que même pour les très faibles angles d'inclinaison la couche de film est quasi entièrement rhéofluidifiante, la mince couche Newtonienne restant confinée très près de la surface libre où le cisaillement doit s'annuler. Etant donné l'aspect très dilué de cette solution, nous pouvons nous permettre de choisir un faible angle de  $1^\circ$ , et la condition  $\dot{\gamma}_{max} > \dot{\gamma}_c$  (*i.e.*  $L > 1$ ) reste vérifiée sur la gamme de débit au travers de laquelle nous étudions le régime linéaire en mesurant la fréquence de coupure des ondes primaires (Fig. 3.3.1). Nous obtenons pour ce fluide une gamme expérimentale de  $L$  comprise entre  $L = 29$  et  $L = 35$ . Nous n'arrivons toutefois pas à obtenir des résultats numériques de courbe marginale de stabilité linéaire à angle fixé dans le plan  $(Re, k)$  pour ces valeurs de  $L^2$ ; seuls sont représentés les résultats expérimentaux dans le plan  $(Re, f)$  sur la Fig. 3.3.1a ainsi que les mesures de longueurs d'ondes marginales associées (Fig. 3.3.1b). Nous affichons aussi les valeurs du nombre de Reynolds critique obtenu asymptotiquement pour  $k \rightarrow 0$  par les approches de Ng & Mei (1994) [60] et Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73], ainsi que celui attendu pour un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$  (les expressions asymptotiques sont données en annexe H). Pour estimer  $Re_c$  correspondant à notre définition dans les approches de Ng & Mei (1994) [60] et Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73], basées sur des fluides en loi de puissance et en loi de puissance régularisée, on considérera que  $q = V.h_N$  et on utilisera la relation  $\eta_0 = m\dot{\gamma}_c^{n-1}$  (§ 1.2.2).

---

2. Pour un angle de  $1^\circ$ , la courbe marginale numérique présente une allure déformée par rapport au cas classique d'une racine, et fournit un nombre de Reynolds critique très faible ( $Re_c < 1$ ) qui est signe d'un comportement quasiment toujours linéairement instable, alors que ceci n'est pas conforme aux observations expérimentales. Le calcul de la solution du champ de base est certes un peu fastidieux, mais finit pourtant par fournir des résultats cohérents, tout en respectant la condition de cisaillement nul à la surface libre.

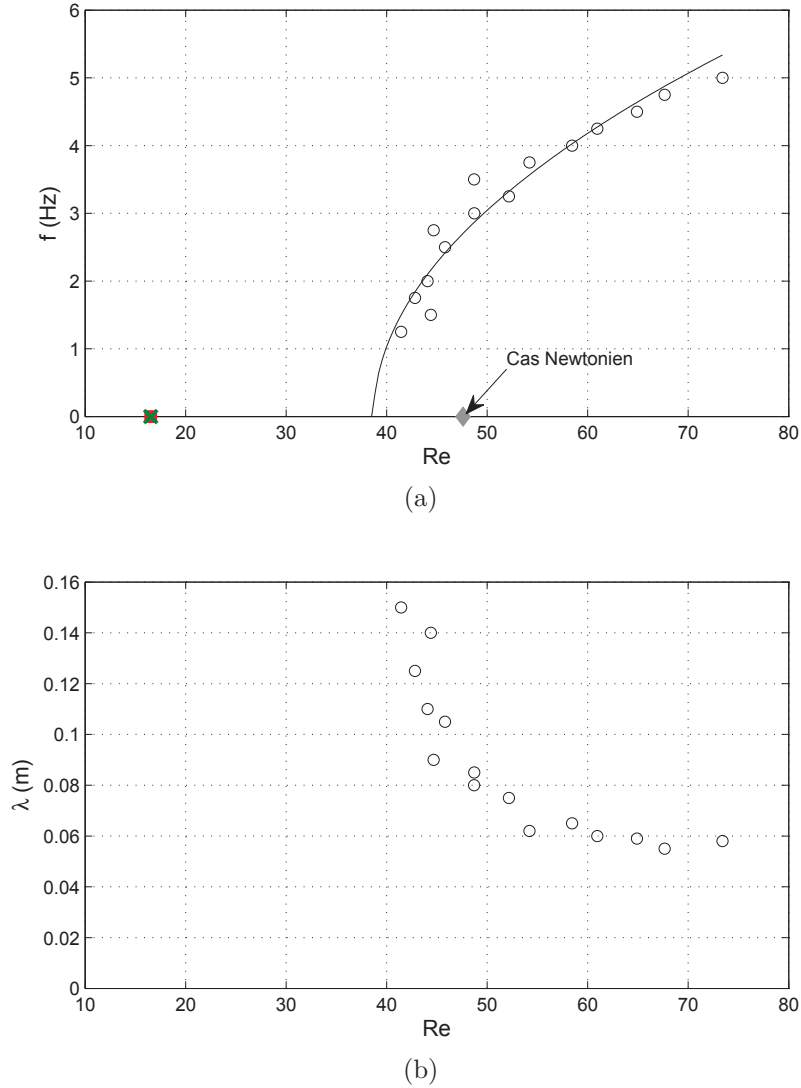


FIGURE 3.3.1 : (a) Courbe marginale de stabilité dans le plan  $(Re, f)$  pour la solution de gomme Xanthane à 0.08‰ étudiée à  $1^\circ$  d’inclinaison. Les cercles correspondent aux mesures de fréquence de coupure au nombre de Reynolds considéré, le marqueur en croix verte désigne le nombre de Reynolds critique déterminé par Ng & Mei (1994) [60] et le marqueur en carré rouge celui déterminé par Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]. Le trait plein correspond à un ajustement des mesures expérimentales suivant l’équation (3.2.2), et l’extrapolation de cette courbe aux fréquences nulles fournit un nombre de Reynolds critique expérimental tel que  $Re_c = 38.5$ . Le nombre de Reynolds critique obtenu dans le cas Newtonien est affiché en losange gris. (b) Mesures de longueurs d’ondes marginales. Nous rappelons les valeurs utilisées pour tracer ces courbes, qui sont les mêmes que celles déterminées par électrocapillarité (Tab. 2.2 & Fig. 2.3.12) :  $\rho = 981 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\eta_0 = 4.43 \text{ mPa.s}$ ,  $n = 0.79$ ,  $\dot{\gamma}_c = 2.23 \text{ s}^{-1}$ .

On constate par ailleurs que le nombre de Reynolds critique expérimental ( $Re_c = 38.5$ ) est inférieur de quelques 20% au nombre de Reynolds critique attendu pour un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$  ; cela confirme les résultats théoriques antérieurs prédisant que le nombre de Reynolds critique doit être plus faible pour un écoulement rhéofluidifiant. Il est néanmoins largement supérieur au seuil critique prédit par les approches de Ng & Mei (1994) [60] et Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]. La figure 3.3.1b montre l'évolution de la longueur des ondes marginales étudiées. Remarquons que l'approximation grandes longueurs d'ondes (*long wave expansion*) est vérifiée, puisque les longueurs d'ondes observées varient dans la gamme  $[60mm - 150mm]$  pour un film dont l'épaisseur est de l'ordre du millimètre (la gamme  $d_s = 1.7mm - 2.1mm$  en est, en effet, une surestimation).

On se tourne dans ce qui suit vers l'utilisation des fluides n°3 et 4 développés pour pouvoir explorer la gamme intermédiaire du paramètre  $L \in [1; 1.43]$ .

### 3.3.2.3 Choix d'autres solutions

A ce stade nous avons donc écarté la solution à 0.1% en masse de CMC car elle ne mettrait pas en évidence des effets significatifs de la rhéologie. La solution à 0.08% en masse de gomme Xanthane paraît adaptée à l'étude expérimentale que l'on veut mener. Il s'avère néanmoins que lorsque l'on a voulu résoudre numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée (S. Millet (2007) [56]) avec les paramètres correspondant à cette solution, il n'a pas été possible d'obtenir une solution convergée.

Nous choisissons donc de nous orienter vers d'autres types de solutions rhéofluidifiantes qui ne présentent ni l'inconvénient d'un très large plateau Newtonien, même à grande concentration en polymère, ni celui d'un fluide de très fortes propriétés rhéofluidifiantes se traduisant par  $L \gg 1$ . Etant donné l'absence d'autres polymères rhéofluidifiants mis à part le Polyacrylamide *Zetag* dont les propriétés viscoélastiques sont évidentes, nous tenterons de mélanger des solutions aqueuses de CMC et de gomme Xanthane afin de conférer à ces nouvelles solutions les propriétés rhéofluidifiantes que l'on souhaite suivant l'angle d'inclinaison choisi.

Nous avons ainsi développé deux solutions aqueuses issues d'un mélange de CMC et de gomme Xanthane. Nous appellerons fluide n°3 (*resp.* fluide n°4) la solution de plus faible (*resp.* plus forte) concentration. La figure 3.3.2 représente la courbe de viscosité en fonction du cisaillement obtenue par rhéométrie pour ces deux nouvelles solutions. La première utilité dans cette opération réside dans le fait que nous avons pu obtenir des solutions dont les indices de loi en puissance sont relativement similaires aux solutions considérées précédemment et qui ont été caractérisées par électrocapillarité ( $n \sim 0.8$ ). Etant donné que ces deux fluides issus de mélanges (fluide n°3 et n°4) sont plus visqueux, car de concentration en polymère supérieure ( $\eta_0 \sim 8.5mPa.s$  et  $\eta_0 \sim 16mPa.s$  respectivement), nous avons pu les étudier pour des grandes valeurs de l'angle d'inclinaison ( $3.5^\circ$  et  $7^\circ$  respectivement). Un autre atout de ces fluides consiste enfin en un plateau Newtonien dans une gamme intermédiaire ( $\dot{\gamma}_c = 77.8s^{-1}$  et  $\dot{\gamma}_c = 74.1s^{-1}$  respectivement) propre aux fluides faiblement rhéofluidifiants relativement à l'écoulement considéré ( $L = 1.02 - 1.29$  et  $L = 1.09 - 1.43$  respectivement). Ils nous permettront, à travers les résultats qui suivent, de comparer les résultats issus de simulations Orr-Sommerfeld aux résultats expérimentaux dans une gamme de paramètres où les effets rhéofluidifiants ne sont pas négligeables.

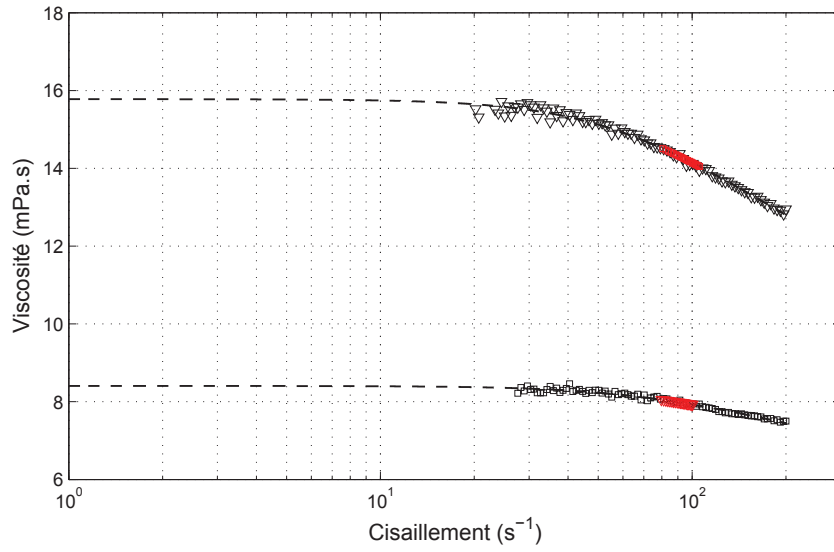


FIGURE 3.3.2 : Courbes de viscosité des fluides n°3 (*carrés*) et n°4 (*triangles*) faiblement rhéofluidifiants obtenus par mélange de CMC et de gomme Xanthane. Les marqueurs vides représentent les mesures obtenues par un rhéomètre de Couette, les marqueurs pleins rouges correspondent au cisaillement maximal  $\dot{\gamma}_{max}$  estimé pour l'écoulement uniforme sur la tranche de débit expérimental que nous étudions. L'ajustement des mesures de viscosité suivant la loi de Carreau apparaît en *tirets*. Les ajustements donnent les valeurs de paramètres suivant :  $\eta_0 = 8.41 mPa.s$ ,  $\dot{\gamma}_c = 77.8 s^{-1}$ ,  $n = 0.881$  pour le fluide n°3 ( $\rho = 993 Kg.m^{-3}$ ,  $\sigma = 45 mN.m^{-1}$ ); et  $\eta_0 = 16 mPa.s$ ,  $\dot{\gamma}_c = 74.1 s^{-1}$ ,  $n = 0.804$  pour le fluide n°4 ( $\rho = 1004 Kg.m^{-3}$ ,  $\sigma = 100 mN.m^{-1}$ )

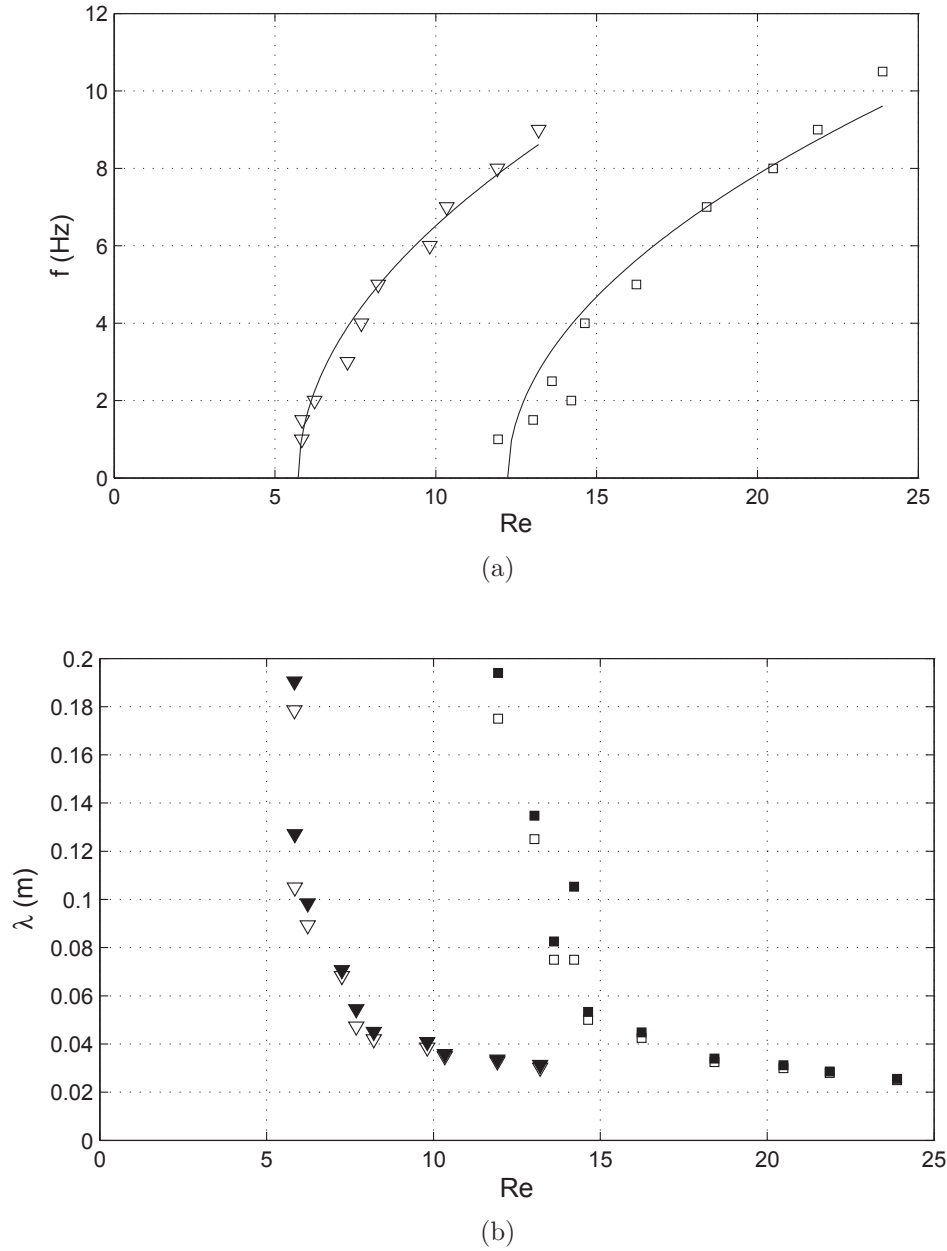


FIGURE 3.3.3 : (a) Courbe marginale de stabilité dans le plan  $(Re, f)$  pour les fluides 3 (*car-rés*) et 4 (*triangles*) étudiés respectivement à un angle d'inclinaison de  $3.5^\circ$  et  $7^\circ$ . Les marqueurs vides correspondent aux mesures de fréquence de coupure au nombre de Reynolds considéré. Les *traits pleins* correspondent à un ajustement des mesures expérimentales suivant l'équation (3.2.2), et l'extrapolation de cette courbe aux fréquences nulles fournit un nombre de Reynolds critique expérimental  $Re_c = 12.23$  et  $Re_c = 5.725$  respectivement. (b) Longueur des ondes marginales mesurée (*marqueurs vides*) superposée aux valeurs issues des résultats numériques (*marqueurs pleins*) obtenues *via* : *i*) la partie réelle de la célérité de l'onde marginale au nombre de Reynolds considéré, pour laquelle on a  $c_i(Re) = 0$ ; *ii*) les mesures de fréquence de coupure représentées en (a). Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2.

Nous effectuons sur ces deux fluides des mesures de fréquence de coupure ainsi que de longueur d'ondes marginales sur une gamme de nombre de Reynolds  $Re = 12 - 24$  et  $Re = 5 - 14$  pour respectivement les fluides 3 et 4. La figure 3.3.3a donne les mesures de fréquence de coupure dans le plan  $(Re, f)$  pour ces deux fluides. La figure 3.3.3b donne les mesures de la longueur des ondes marginales, superposées aux valeurs prédites numériquement. En rappelant qu'une onde marginale a un taux d'amplification temporelle nul ( $c_i = 0$ ), les résultats numériques de la longueur des ondes marginales, affichés en marqueurs pleins sur la figure 3.3.3b, sont obtenus à partir de la célérité réelle calculée après résolution de  $c_i = 0$  par la méthode de continuation à nombre de Reynolds fixé (voir Chapitre 4, § 4.4.2). En réalité, à angle d'inclinaison fixé et pour un fluide donné, le paramètre adimensionnel  $L$  n'est pas le seul à dépendre du débit - et de ce fait du nombre de Reynolds -, mais aussi le nombre de capillarité (compris sur une plage  $Ca^{-1} = 37.6 - 59.7$  et  $Ca^{-1} = 42.0 - 72.3$  pour respectivement les fluides 3 et 4) tel que  $Ca \propto q^{2/3}$ . En rappelant la définition du nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho q}{\eta_0}$  et en observant que  $L \propto q^{1/3}$ , nous obtenons, à angle d'inclinaison fixé et pour un fluide donné, une loi du type :

$$Re \propto L.Ca. \quad (3.3.2)$$

Ceci signifie qu'à angle d'inclinaison fixé et pour un fluide de Carreau donné (de paramètres  $(\eta_0, n, \dot{\gamma}_c, \eta_\infty)$  et de tension de surface  $\sigma$  fixés), il existe toujours un couple distinct  $(L, Ca)$  agissant sur la stabilité de l'écoulement, et ce pour chaque valeur distincte du nombre de Reynolds. Nous comprenons mieux par le biais de cette loi que même si pour un fluide donné nous avons une plage de paramètre adimensionnel  $L$  et de nombre de capillarité  $Ca$  dépendant de l'écoulement, il est possible de régulariser  $L$  et  $Ca$  pour chaque valeur du nombre de Reynolds lors de la détermination numérique de la courbe marginale de stabilité à angle fixé<sup>3</sup>. Nous obtenons ainsi sur la figure 3.3.4, pour ces deux fluides, les résultats numériques de nombre d'onde critique dans le plan  $(Re, k)$  superposés aux valeurs expérimentales adimensionnées de nombre d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda} d_s$  via les mesures de longueur d'onde (Fig. 3.3.3b). Puisqu'on travaille avec un fluide donné (de paramètres  $(\eta_0, n, \dot{\gamma}_c, \eta_\infty)$  imposés), la valeur de  $L$  varie le long des courbes Fig. 3.3.3. En effet, l'expression de  $L$  mêle caractéristiques du fluide (constantes) et de l'écoulement (variable). On est donc amené à tracer des courbes  $k = k(Re)$  à  $L$  variable, ce qui se prête mal à une comparaison directe avec les approches théoriques de la littérature où le nombre sans dimension  $L^4$  est supposé constant lorsque les autres nombres  $(Re, \gamma, n)$  sont variés.

Nos résultats de nombre de Reynolds critique expérimental s'accordent bien aux résultats numériques (Fig. 3.3.4) quelle que soit l'approche théorique sur laquelle les auteurs se basent pour décrire la viscosité. La figure 3.3.5a présente les résultats expérimentaux de célérité des ondes marginales à partir des mesures de longueurs des ondes marginales (Fig. 3.3.3), superposés

3. Le nombre de capillarité influera sur la forme de la courbe marginale en étendant la zone linéairement stable pour les  $Ca$  décroissants (Georgantaki *et al.* (2011) [30], Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]), mais seul le paramètre  $L$  en plus de l'angle et de l'indice en loi de puissance  $n$  commandera le seuil critique.

4. Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] introduisent un nombre adimensionnel équivalent, défini par  $s = \frac{h_N \dot{\gamma}_c}{V}$ , avec  $h_N$  l'épaisseur de Nusselt et  $V$  une vitesse caractéristique (voir Chapitre 1, § 1.2.2), qui est aussi variable suivant l'écoulement, à angle et fluide donnés.

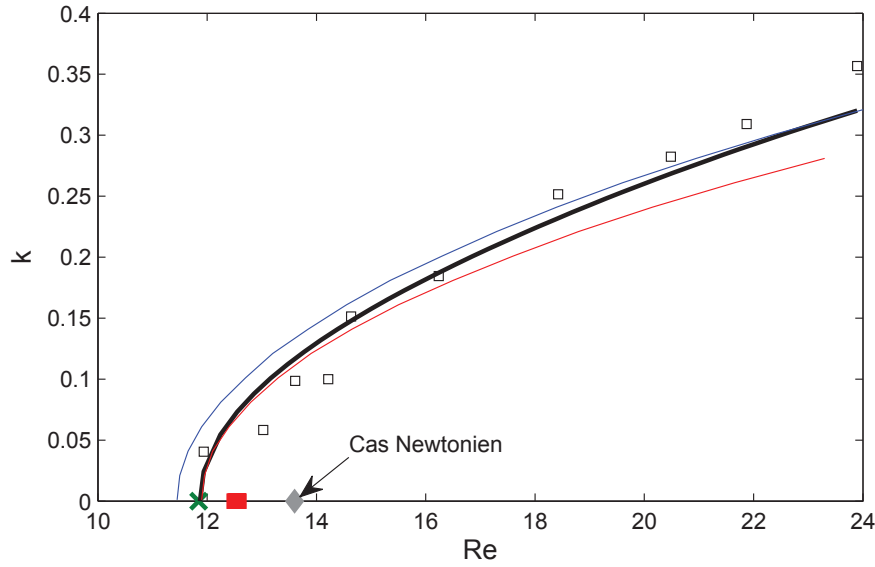
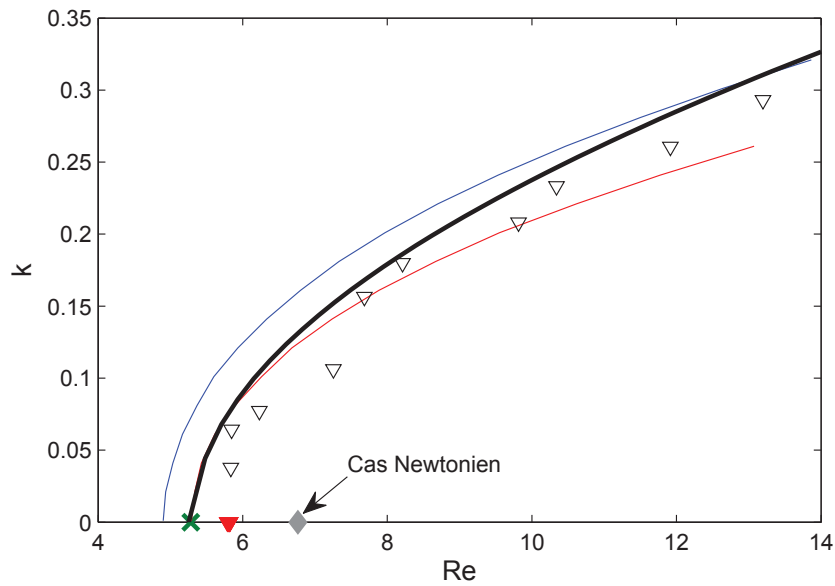

 (a) Fluide 3,  $\gamma = 3.5^\circ$ .

 (b) Fluide 4,  $\gamma = 7^\circ$ .

FIGURE 3.3.4 : Courbe marginale de stabilité dans le plan  $(Re, k)$  pour les fluides 3 (a) et 4 (b) étudiés respectivement à un angle d'inclinaison de  $3.5^\circ$  et  $7^\circ$ . Les marqueurs vides correspondent aux valeurs adimensionnées des mesures de nombre d'onde de coupure au nombre de Reynolds considéré. Les résultats numériques de courbe neutre sont représentés en *trait noir épais* en faisant varier la valeur de  $L$  et de  $Ca$  en fonction de l'écoulement (*i.e.* du nombre de Reynolds). Cette courbe est enveloppée par deux courbes numériques obtenues dans les deux situations extrêmes où on fixe soit le couple  $(L_{max} - Ca_{min}^{-1})$  (courbe bleue représentant le cas le plus instable) soit le couple  $(L_{min} - Ca_{max}^{-1})$  (courbe rouge représentant le cas le plus stable). Numériquement on obtient respectivement un nombre de Reynolds critique  $Re_c = 11.9$  et  $Re_c = 5.28$ . Nous affichons aussi les valeurs de seuil critique obtenu par Ng & Mei (1994) [60] (*croix verte*) et par Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] (*triangle plein rouge*), ainsi que le cas Newtonien en *losange gris*. Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2.

aux résultats numériques obtenus par notre code de stabilité après avoir extrait la partie réelle de la célérité des ondes marginales pour chaque nombre de Reynolds. La célérité des ondes marginales est adimensionnée par une estimation de la vitesse de l'écoulement à la surface libre ( $\sim \frac{q}{d_s}$ ). À noter que  $\frac{q}{d_s}$  représente en réalité un ordre de grandeur de la vitesse moyenne qu'aurait eu l'écoulement si l'on avait considéré un fluide Newtonien de viscosité  $\eta_0$ . De ce fait,  $\frac{q}{d_s}$  sous-estime la vitesse de l'écoulement à la surface libre par rapport au cas rhéofluidifiant, et donc les valeurs de célérité adimensionnée représentées Fig. 3.3.5a sont surestimées. En particulier au voisinage du seuil critique ( $k \rightarrow 0$ ), nous voyons que les valeurs mesurées de célérité adimensionnée des ondes de plus grande longueur d'onde avoisinent la valeur de 2 (qui est celle du cas Newtonien, Millet *et al.* (2008) [58]). Dans le cas des fluides n°3 et n°4, la célérité adimensionnée des ondes au voisinage du seuil dépasse légèrement la valeur Newtonienne (signe d'un comportement faiblement rhéofluidifiant), puis décroît suivant le nombre de Reynolds. Cette décroissance s'explique par le fait que les valeurs de nombre de Reynolds plus fortes correspondent à des ondes de fréquences plus élevées et donc des longueurs d'ondes plus faibles pour lesquelles la célérité est toujours plus faible.

D'un autre côté, la figure 3.3.5b permet de comprendre le critère de stabilité suivant l'approche de Whitham (1974) [89], en terme de compétition entre les ondes cinématiques résultant de l'unique conservation de la masse et les ondes dynamiques qui traduisent la réponse du film en termes de variation d'inertie, de pression hydrostatique et de tension de surface (voir Chapitre 1). Le critère de stabilité linéaire s'exprime par  $c_{d-} \leq c_k \leq c_{d+}$ . Tant que l'onde cinématique est encadrée par les ondes dynamiques ascendante et descendante, le film répond à la perturbation interfaciale par des variations de quantité de mouvement, de manière à limiter la croissance de l'onde cinématique. Lorsque cette dernière atteint, à nombre de Reynolds fixé, la vitesse de l'onde dynamique descendante  $c_{d+}$ , nous assistons à un équilibre dans la concurrence entre  $c_k$  et  $c_{d+}$  : l'onde est marginalement stable, par conséquent le critère marginal de stabilité se traduit par  $c_k(k) = c_{d+}(k)$  (Fig. 1.2.3). En particulier au niveau du seuil critique, la célérité de l'onde critique est celle de plus grande longueur d'onde ( $k \rightarrow 0$ ). Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73] ont développé les expressions de  $c_k$  et  $c_{d+}$ , qui ont été calculées connaissant l'écoulement de base ainsi que les mesures de longueur d'onde effectuées pour chacun des fluides 3 et 4. Les résultats de  $c_k$  (Fig. 3.3.5b) montrent que les ondes cinématiques gardent à peu près la même vitesse qu'au voisinage du seuil critique ( $c_k(k) \sim 1$ ) quel que soit le couple  $(Re, k)$ , avec une très légère baisse en allant vers les grandes valeurs du nombre de Reynolds (*i.e.* vers les faibles longueurs d'onde). Ces résultats montrent aussi que le critère de stabilité marginale est correctement respecté puisque les valeurs de  $c_k$  ne s'écartent expérimentalement que de moins de 10% des valeurs de  $c_{d+}$ . Ces résultats fournissent une approche relativement différente pour comprendre les mécanismes physiques d'instabilité, en exprimant que l'onde de surface naît cinématiquement et se développe dynamiquement. À noter en outre les difficultés des mesures de longueur d'onde, qui sont difficiles près du seuil critique, se répercutent sur les résultats de célérité, ce qui explique l'écart grandissant en allant vers les faibles valeurs du nombre de Reynolds entre résultats numériques et expérimentaux. Enfin, la figure 3.3.6 montre la proportionnalité de  $Re_c$  par rapport à la cotangente de l'angle d'inclinaison, et illustre la propriété du nombre de Froude critique, qui, tel qu'il apparaît Eq. 1.2.1, ne dépend pas de l'angle d'inclinaison. Avec cette représentation, l'ensemble des résultats de nombre de Reynolds critique normalisé se confondent en une courbe, quel que soit l'angle d'inclinaison (Rousset *et al.* (2007) [72], Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]).

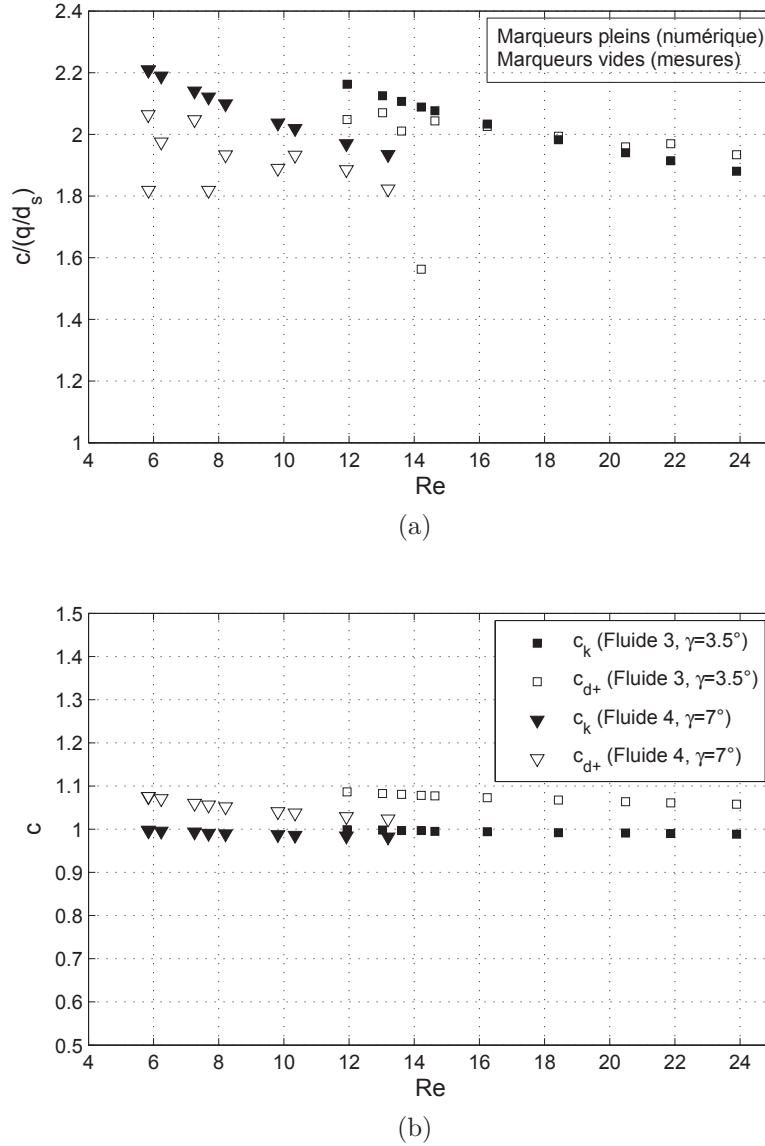


FIGURE 3.3.5 : (a) Célérité des ondes marginales adimensionnée par l'estimation  $q/d_s$  de la vitesse de l'écoulement à la surface libre pour les fluides 3 (carrés) et 4 (triangles). Les marqueurs vides (resp. pleins) correspondent aux résultats expérimentaux (resp. numériques). (b) Célérité des ondes cinématiques  $c_k$  (marqueurs pleins) et dynamiques descendantes  $c_{d+}$  (marqueurs vides) calculées aux conditions expérimentales de stabilité marginale pour les fluides 3 (carrés) et 4 (triangles) via les mesures de longueur d'ondes (Fig. 3.3.3b). Les propriétés physiques et rhéologiques des fluides utilisés sont données Fig. 3.3.2.

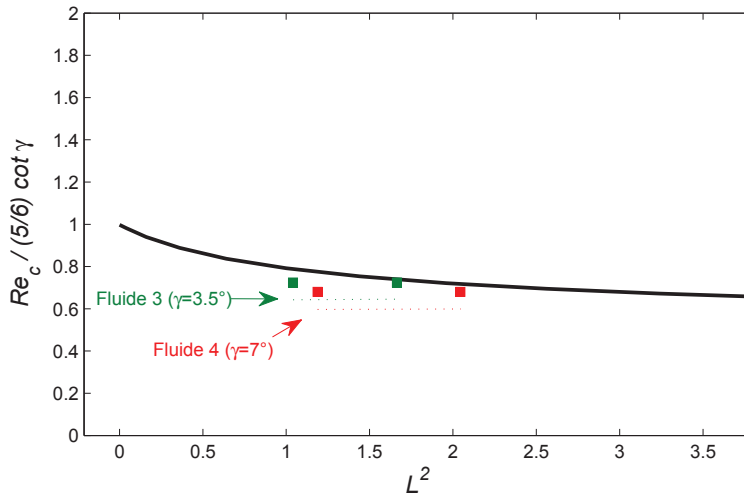


FIGURE 3.3.6 : Nombre de Reynolds critique expérimental normalisé par sa valeur théorique Newtonienne (*trait plein*) en fonction du paramètre rhéofluidifiant, avec  $n \sim 0.8$ , pour plusieurs angles d'inclinaison. Nous rappelons les propriétés des fluides utilisés :  $\eta_0 = 8.41 \text{ mPa.s}$ ,  $\dot{\gamma}_c = 77.8 \text{ s}^{-1}$ ,  $n = 0.881$  pour le fluide n°3 ( $\rho = 993 \text{ Kg.m}^{-3}$ ,  $\sigma = 45 \text{ mN.m}^{-1}$ ); et  $\eta_0 = 16 \text{ mPa.s}$ ,  $\dot{\gamma}_c = 74.1 \text{ s}^{-1}$ ,  $n = 0.804$  pour le fluide n°4 ( $\rho = 1004 \text{ Kg.m}^{-3}$ ,  $\sigma = 100 \text{ mN.m}^{-1}$ )

### 3.4 Conclusion

Après caractérisation rhéologique des fluides utilisés, nous avons mené des études expérimentales de stabilité linéaire à angle fixé. Nous avons choisi nos fluides de façon à ce que l'écoulement uniforme produise un cisaillement de base dont l'étendue dépasse la largeur du plateau Newtonien, dans le but de garantir un comportement significativement rhéofluidifiant de notre film. La détection d'ondes primaires reste difficile au voisinage du seuil critique ( $f < 1 \text{ Hz}$ ,  $\lambda > 18 \text{ cm}$ ) tout comme l'avaient observé Liu *et al.* (1993) [52] et Forterre & Pouliquen (2003) [29]. Les valeurs de nombre de Reynolds critique expérimental sont nettement plus faibles que celles du cas Newtonien pour le même angle d'inclinaison. Il s'agit là, à notre connaissance, de la première observation expérimentale de cette déstabilisation du film lorsque le fluide devient rhéofluidifiant (pseudoplastique). Cette observation confirme les prédictions théoriques de la littérature (S. Millet (2007) [56], Millet *et al.* (2008) [58], Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73], Ng & Mei (1994) [60]). Les résultats expérimentaux s'accordent très bien aux résultats numériques, à l'exception d'une solution très faiblement concentrée en gomme Xanthane pour laquelle le paramètre adimensionnel rhéofluidifiant  $L$  atteint des valeurs largement supérieures à l'unité, et pour laquelle nous n'arrivons pas à obtenir de solution numérique convergée à l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée. Dans la gamme des  $L$  modérés dans laquelle nous avons pu obtenir des résultats expérimentaux et numériques, le comportement faiblement rhéofluidifiant de nos fluides fait que numériquement nous obtenons des valeurs proches du nombre de Reynolds critique à angle d'inclinaison donné, quelle que soit la modélisation de la viscosité, qu'elle soit décrite suivant une simple loi en puissance (Ng & Mei (1994) [60]), une loi en puissance régularisée par un plateau Newtonien aux faibles valeurs du cisaillement local (Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]), ou

suivant une loi de Carreau (S. Millet (2007) [56]). Les mesures de longueurs d'ondes marginales (jusqu'à  $15 - 20\text{cm}$  près du seuil critique) s'ajustent bien à celles obtenues numériquement, en délimitant correctement la courbe de stabilité marginale sur les plans  $(Re, k)$  et  $(Re, c)$ . Pour ces fluides de faibles propriétés rhéofluidifiantes, on observe que le rapport entre la célérité critique des ondes, et l'estimation Newtonienne  $\frac{q}{ds}$  de la vitesse de l'écoulement à la surface libre, est légèrement plus grand que dans le cas Newtonien, ce qui est conforme aux prédictions numériques obtenues par Millet *et al.* (2008) [58]. L'analyse de Whitham (1974) [89] appliquée à nos écoulements de film rhéofluidifiant sur plan incliné, montre que le critère de stabilité ( $c_k = c_{d+}$ ) est expérimentalement vérifié avec quelques 10% d'écart entre la célérité des ondes cinématiques et dynamiques. Les valeurs calculées pour  $c_k$  (Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]) *via* les mesures de longueurs d'onde dans les conditions marginales, ne s'écartent que légèrement de  $c_k = 1$ , signe que nos mesures ont été réalisées près du seuil. Le critère de stabilité marginale est compris par une approche différente, exprimant que lorsque l'onde cinématique de célérité  $c_k$  atteint la célérité de l'onde dynamique descendante  $c_{d+}$  sans la dépasser, l'onde de surface correspondante est marginalement stable. L'interprétation de  $c_k$ , qui est une conséquence directe de la conservation de la masse, est similaire à l'approximation à l'ordre zéro dans la phase de naissance des instabilités à grandes longueurs d'onde proposée par Smith (1990) [78] dans le cas Newtonien, et appliquée par Rousset *et al.* (2007) [72] dans le cas rhéofluidifiant. Les ondes dynamiques, quant à elles, sont la réponse du film aux variations de quantité de mouvement, et s'interprètent pareillement que les termes d'ordre supérieur dans le développement asymptotique à grandes longueurs d'ondes ; elles décrivent l'effet des termes de quantité de mouvement, de pression hydrostatique (amplitude des ondes) et éventuellement de tension de surface ( $Ca$ ), et influencent ainsi la frontière de stabilité suivant le signe et le poids de chacun de ces termes.

## **Chapitre 4**

# **Instabilités 3D et relations de Squire**

## 4.1 Introduction et bibliographie

D'un point de vue physique, les observations expérimentales (voir Chapitre 1) montrent que les “premières” ondes de surface qui apparaissent sont des ondes quasi-planes.

D'un point de vue théorique, Squire (1933) [82] fut le premier à proposer une analogie entre les ondes 2D et les ondes 3D<sup>1</sup>; il montra dans un cas particulier, qu'en vue d'étudier des instabilités 3D, une simple étude 2D suffisait. Il avait considéré le cas d'un écoulement de Poiseuille de fluide Newtonien sur canal plan. Dans ce cas simple, le changement de paramètre proposé pour obtenir une formulation 2D du problème de stabilité avec perturbations 3D, aussi désigné par “les relations de Squire”, permet de montrer que les instabilités 2D sont les plus dangereuses : il s'agit communément de ce qu'on appelle le théorème de Squire. Le théorème de Squire exprime dans ce cas, **où seul le nombre de Reynolds influe sur le seuil de stabilité**, que les ondes planes présentent **toujours** le seuil critique le plus bas en terme de nombre de Reynolds ( $Re_{c2D} < Re_{c3D}$ )<sup>2</sup>.

Plusieurs auteurs se sont penchés, dans leur étude de stabilité 3D, sur la validité du théorème de Squire. Dans le cas Newtonien, on cite principalement Orszag & Kells (1980) [64] qui ont mené une étude numérique dans le cas d'un écoulement plan de Poiseuille, Pearlstein (1985), Hesla *et al.* (1986) et Schaflinger (1994) [66, 38, 76] qui se sont penchés sur le cas d'un écoulement stratifié, toujours sur canal plan, et Floryan (2007) [26] qui a considéré le cas particulier d'un canal rugueux. Des études similaires incluant l'équation de l'énergie (parois chauffées) et l'effet Soret furent menées dans le cas de la stabilité d'un écoulement de Poiseuille-plan et sur plan incliné (Hu *et al.* (2007-2008) [39, 40]).

Dans le cas non Newtonien, Renardy & Renardy (1986) [69] se sont intéressés à la stabilité d'un écoulement plan de Couette pour un fluide de Maxwell (Annexe B). Concernant les écoulements de fluides rhéofluidifiants, nous citerons principalement Chikkadi *et al.* (2005) et Nouar *et al.* (2007) [19, 63] qui ont traité le cas de l'écoulement plan de Poiseuille. A noter que dans le cas viscoélastique, l'étude menée par Gupta & Rai (1968) [34] ont montré que l'écoulement de film sur plan incliné est plus instable vis-à-vis des ondes obliques que des ondes planes, et plus récemment Rafiki & Hifdi (2012) [68] ont considéré des perturbations 2D dans leur étude de l'écoulement plan de Poiseuille soumis à un champ magnétique transversal.

Dans notre configuration d'écoulement, une interprétation analogue serait d'établir que faire une étude 2D suffit à caractériser la stabilité du problème. La question est donc : « est-il suffisant de faire une étude des seuils de stabilité 2D » dans les cas où *i)* il y a une surface libre ; *ii)* le fluide est non Newtonien ?

A l'instar de ces auteurs, et en se basant sur une analyse temporelle de stabilité linéaire, nous nous proposons dans ce chapitre d'écrire et de résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée aux ondes 3D dans le cas d'un film non Newtonien purement visqueux<sup>3</sup> s'écoulant sur plan incliné. Dans la continuité des travaux de thèse de S. Millet (UCBL/LMFA), et en collaboration avec F. Rousset (Insa de Lyon/CETHIL), nous avons repris le code de stabilité 2D dont le résultat clé est l'évolution du nombre de Reynolds critique 2D en fonction de l'angle d'inclinaison (Fig. 1.4.1, Rousset *et al.* (2007) [72] ), que nous avons étendu aux ondes 3D, et

---

1. Contrairement aux ondes 3D (obliques), les ondes 2D (planes) ne se propagent que suivant une seule direction, ici la direction de l'écoulement (Fig. 4.2.2a).

2. Pour des configurations d'écoulement relativement plus complexes, il se peut que le théorème de Squire ne soit pas vérifié, dans le sens où le seuil 3D est plus bas que le seuil 2D.

3. Un fluide purement visqueux désigne un fluide pour lequel les contraintes s'écrivent toujours comme une fonction scalaire du taux de cisaillement (voir Chapitre 2).

auquel nous avons implémenté un algorithme de continuation qui permet de manière efficace de déterminer le seuil 3D et de tracer des cartes de stabilité marginale sur le plan  $(Re, \alpha)$  à angle d'inclinaison donné. La résolution numérique se fera par collocation spectrale basée sur des polynômes de Tchebychev. Nous établirons analytiquement les hypothèses sous lesquelles les relations de Squire peuvent être formulées, et nous vérifierons numériquement si des conclusions similaires à celle du théorème de Squire peuvent être formulées.

## 4.2 Equation d'Orr-Sommerfeld généralisée à un fluide purement visqueux - ondes 3D

Rappelons brièvement les étapes successives habituelles de la démarche analytique, depuis les équations de bilan (continuité et équations de Navier-Stokes) jusqu'à l'équation d'Orr-Sommerfeld :

1. Ecriture des équations de Navier-Stokes et de l'équation de continuité.
2. Stabilité linéaire : On décompose le champ de vitesse et de pression en champ de base et perturbations, et on introduit cette décomposition dans le système obtenu à l'étape 1.
3. On obtient le système d'équations aux perturbations.
4. On écrit les perturbations sous forme de modes normaux, et comme on étudie la stabilité temporelle du problème, on exprime les perturbations sous forme d'ondes atténuées ou amplifiées exponentiellement dans le temps.
5. Par un jeu de combinaisons judicieusement choisies, on élimine les termes en perturbations de pression, de vitesse longitudinale et transverse.
6. On obtient une seule équation en perturbation de la composante de vitesse dans la direction normale à la paroi, qui est d'ordre 4 et équivalente à l'ensemble du système d'équations aux perturbations.
7. On définit les conditions aux limites relatives au problème considéré.

Les relations de Squire se dégagent alors si l'équation d'Orr-Sommerfeld pour une perturbation 3D, munie de ses conditions aux limites, peut être ramenée à l'équation pour une perturbation 2D, moyennant un ensemble de changements de paramètres.

### 4.2.1 Etude du champ de base

Nous étudions un fluide non Newtonien purement visqueux (Annexe B) s'écoulant par gravité le long d'un plan incliné d'un angle  $\gamma$  par rapport à l'horizontale. Le schéma de l'écoulement est représenté Fig. (4.2.1). L'axe  $x$  représente la direction de l'écoulement, l'axe  $y$  la direction normale et l'axe  $z$  la direction transverse. Pour alléger les calculs, nous choisirons de disposer l'origine du repère au niveau de la surface libre non perturbée, avec l'axe  $y$  orienté vers le fluide.

Commençons par écrire les équations de bilan dimensionnelles :

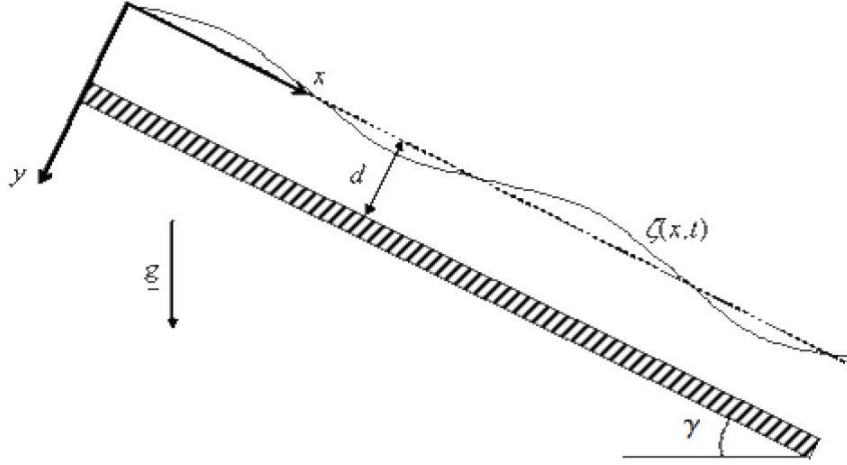


FIGURE 4.2.1 : Schéma de l'écoulement.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) + \rho g \sin \gamma \\ \rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) + \rho g \cos \gamma \\ \rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \end{cases}, \quad (4.2.1)$$

où  $u$ ,  $v$  et  $w$  représentent respectivement les composantes du champ de vitesse suivant les directions  $x$ ,  $y$  et  $z$ ,  $p$  la pression,  $g$  l'accélération gravitationnelle,  $\rho$  la densité et  $\sigma_{ij}$  le tenseur des contraintes visqueuses. La viscosité est modélisée par la loi de Carreau (Annexe A) qui définit la viscosité  $\eta$  suivant l'équation :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = [1 + (\delta |\dot{\gamma}|)^2]^{n-1/2}, \quad (4.2.2)$$

avec  $|\dot{\gamma}| = (D_{ij}D_{ij})^{1/2}$  la norme du tenseur de taux de déformations  $D_{ij}$ ,  $\eta_0$  et  $\eta_\infty$  respectivement les viscosités à faible et fort taux de cisaillement,  $\delta$  un temps caractéristique<sup>4</sup> égal à  $\frac{1}{\dot{\gamma}_c}$  et  $n$  l'indice de loi en puissance.

Dans le but d'utiliser une grandeur directement exploitable par un expérimentateur, et à l'instar de Weinstein (1990) [87] et Rousset *et al.* (2007) [72], le nombre de Reynolds est défini relativement au débit volumique par unité de largeur  $q$  plutôt que de le baser sur une vitesse caractéristique et une échelle de longueur (Yih (1963) [90], Chang & Demekhin (2002) [18], Ruyer-Quil (2012) [73]). En considérant que l'écoulement uniforme est un résultat de l'équilibre entre la composante longitudinale du poids et le frottement visqueux (voir Chapitre 1), nous faisons intervenir une longueur caractéristique  $d_s = \left( \frac{\eta_0 q}{\rho g \sin \gamma} \right)^{1/3}$  pour construire les grandeurs adimensionnelles telles que :

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{d_s}(x, y, z); (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}) = \frac{d_s}{q}(u, v, w); \bar{p} = \frac{p d_s^2}{\rho q^2}; \bar{t} = \frac{t q}{d_s^2}; (\bar{\eta}, \bar{\theta}) = \frac{1}{\eta_0}(\eta, \theta). \quad (4.2.3)$$

4. Certains auteurs définissent la loi de Carreau *via*  $\dot{\gamma}_c$  (Eq. (2.1.2)) et d'autres *via* un temps caractéristique  $\delta = \frac{1}{\dot{\gamma}_c}$  (Eq. (4.2.2)). Pour un fluide rhéofluidifiant soumis à un cisaillement  $\dot{\gamma}$  donné, plus  $\delta$  sera grand ( $\dot{\gamma}_c$  petit) plus court sera son plateau Newtonien. Ceci conduit à ce que les contraintes visqueuses ressenties seront plus faibles et que la viscosité apparente du fluide diminuera.

En omettant dès à présent les barres dans les notations, le système d'équations (4.2.1) adimensionné s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ Re(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}) = -Re\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}) + 1 \\ Re(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}) = -Re\frac{\partial p}{\partial y} + (\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}) + \cot\gamma \\ Re(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}) = -Re\frac{\partial p}{\partial z} + (\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}) \end{cases}, \quad (4.2.4)$$

le nombre de Reynolds étant défini par  $Re = \frac{\rho q}{\eta_0}$ .

### 4.2.2 Analyse de stabilité linéaire

Le système (4.2.4), appliqué au régime uniforme, donne les équations pour le champ de base :

$$\begin{cases} \frac{d\sigma_{xy}^b}{dy} = \frac{d}{dy} \left( \eta \frac{dU_b}{dy} \right) = -1 \\ \frac{dP_b}{dy} = \frac{\cot\gamma}{Re} \end{cases}. \quad (4.2.5)$$

Les conditions aux limites de non glissement au fond et de contraintes tangentielles nulles à la surface libre s'écrivent :

$$\begin{cases} U_b(y=d) = 0 \\ \sigma_{xy}^b(y=0) = 0 \end{cases}, \quad (4.2.6)$$

où  $\sigma_{xy}^b = \eta \frac{dU_b}{dy}$  représente la seule composante non nulle du tenseur des contraintes visqueuses du champ de base.

L'écoulement de base adimensionné est alors perturbé en vitesse, pression, et déplacement de l'interface  $\xi$ . Nous écrivons donc :

$$\begin{cases} u = U_b(y) + u'(x, y, z, t) \\ v = v'(x, y, z, t) \\ w = w'(x, y, z, t) \\ p = P_b(y) + p'(x, y, z, t) \\ \xi = \xi'(x, z, t) \\ \sigma_{xy} = \sigma_{xy}^b(y) + \sigma'_{xy}(x, y, z, t) \end{cases}. \quad (4.2.7)$$

Les équations aux perturbations deviennent après linéarisation :

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ Re(\frac{\partial u'}{\partial t} + U_b \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU_b}{dy}) = -Re\frac{\partial p'}{\partial x} + (\frac{\partial \sigma'_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{xz}}{\partial z}) \\ Re(\frac{\partial v'}{\partial t} + U_b \frac{\partial v'}{\partial x}) = -Re\frac{\partial p'}{\partial y} + (\frac{\partial \sigma'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{yz}}{\partial z}) \\ Re(\frac{\partial w'}{\partial t} + U_b \frac{\partial w'}{\partial x}) = -Re\frac{\partial p'}{\partial z} + (\frac{\partial \sigma'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z}) \end{cases}, \quad (4.2.8)$$

où les perturbations de contraintes s'écrivent :

$$\begin{cases} \sigma'_{xx} = 2\eta \frac{\partial u'}{\partial x}; \sigma'_{yy} = 2\eta \frac{\partial v'}{\partial y}; \sigma'_{zz} = 2\eta \frac{\partial w'}{\partial z} \\ \sigma'_{xz} = \eta(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}); \sigma'_{yz} = \eta(\frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}); \sigma'_{xy} = \eta(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}) \end{cases}. \quad (4.2.9)$$

Etant donné que les perturbations de vitesse induisent des perturbations de viscosité, nous voyons l'apparition d'une autre viscosité  $\theta$  (Rousset *et al.* (2007) [72], Thèse de S. Millet [56], p38) appelée aussi viscosité tangente (Nouar *et al.* (2007) [63]) qui n'affecte que les contraintes visqueuses sur le plan  $(x, y)$ . En effet, la linéarisation des équations fait que le cisaillement dû au champ de base est non nul uniquement dans ce plan. L'expression adimensionnée de  $\eta$  et  $\theta$  est donnée par :

$$\begin{cases} \eta = I + (1 - I) \left[ 1 + \left( L \frac{dU_b}{dy} \right)^2 \right]^{n-1/2} \\ \theta = I + (1 - I) \left[ 1 + n \left( L \frac{dU_b}{dy} \right)^2 \right] \left[ 1 + \left( L \frac{dU_b}{dy} \right)^2 \right]^{n-3/2} \end{cases}, \quad (4.2.10)$$

avec  $I = \eta_\infty / \eta_0$  et  $L = \delta q / d_s^2$  le paramètre adimensionné de temps (Rousset *et al.* (2007) [72]).

### 4.2.3 Conditions aux limites

Au niveau du fond, la condition aux limites de non glissement s'écrit :

$$u' = v' = w' = 0 \text{ à } y = d. \quad (4.2.11)$$

La condition cinématique à la surface libre s'écrit :

$$v' = \frac{\partial \xi'}{\partial t} + U_b \frac{\partial \xi'}{\partial x} = 0 \text{ à } y = 0. \quad (4.2.12)$$

Les conditions d'annulation des contraintes visqueuses à la surface libre perturbée s'écrivent :

$$\begin{cases} \eta \frac{dU_b}{dy} + \sigma'_{xy} = 0 & (1) \\ \sigma'_{yz} = 0 & (2) \text{ à } y = \xi'. \\ \sigma'_{xz} = 0 & (3) \end{cases} \quad (4.2.13)$$

En développant, puis linéarisant la contrainte tangentielle du champ de base  $\sigma_{xy}^b = \eta \frac{dU_b}{dy}$  autour de l'interface non perturbée en  $y=0$ , c'est-à-dire à  $y = \xi'$  près, et en s'aidant des équations du champ de base sur la vitesse Eq. (4.2.5), les contraintes visqueuses à la surface libre (Eq. (4.2.13)) deviennent :

$$\begin{cases} \sigma'_{xy} - \xi' = 0 & (1) \\ \sigma'_{yz} = 0 & (2) \text{ à } y = 0. \\ \sigma'_{xz} = 0 & (3) \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Enfin, à la surface libre, la contrainte normale s'équilibre avec la pression et les effets induits par la tension de surface. En développant la pression de base  $P_b$  autour de  $y = 0$  de manière analogue à ce qui est fait dans l'équation (4.2.14-1), on obtient :

$$\xi' \cot \gamma + Re.p' - 2\eta \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{1}{Ca} \left( \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial z^2} \right) = 0 \text{ à } y = 0, \quad (4.2.15)$$

en notant  $Ca = \frac{\eta_0 q}{\sigma d_s}$  le nombre de capillarité avec  $\sigma$  la tension de surface.

#### 4.2.4 Perturbations périodiques

Dans le cadre de la stabilité linéaire temporelle, nous nous intéressons à présent au comportement périodique des perturbations en temps long et nous les écrivons sous forme de modes normaux :

$$\begin{cases} [u', v', w', p'](x, y, z, t) = [\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{p}](y) \cdot e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha c t)} & (1) \\ \xi'(x, z, t) = \hat{\xi} e^{i(\alpha x + \beta z - \alpha c t)} & (2) \end{cases} \quad (4.2.16)$$

avec  $(\alpha, 0, \beta)^5$  étant le vecteur d'onde et  $c$  la célérité complexe et adimensionnée de l'onde. Sa partie réelle  $c_r$  désigne la vitesse de phase adimensionnée et sa partie imaginaire  $c_i$  son taux d'amplification temporelle. L'écoulement est respectivement stable et instable suivant que  $c_i$  est négatif ou positif. On parle de perturbation 2D lorsque  $\beta = 0$ , et 3D lorsque  $\beta \neq 0$ .

##### 4.2.4.1 Formulation du problème

Le système d'équations aux perturbations (4.2.8) s'écrit, en notant  $D = \partial/\partial y$  et  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$  :

$$\begin{cases} \alpha \hat{u} - iD\hat{v} + \beta \hat{w} = 0 & (1) \\ i\alpha Re(U_b - c)\hat{u} + Re\hat{v}DU_b = -i\alpha Re\hat{p} + [-k^2\eta\hat{u} - i\alpha\eta D\hat{v} + D(\theta D\hat{u}) + i\alpha D(\theta\hat{v})] & (2) \\ i\alpha Re(U_b - c)\hat{v} = -ReD\hat{p} + [i\alpha\theta D\hat{u} - \alpha^2\theta\hat{v} + 2D(\eta D\hat{v}) - \beta^2\eta\hat{v} + i\beta\eta D\hat{w}] & (3) \\ i\alpha Re(U_b - c)\hat{w} = -i\beta Re\hat{p} + [-k^2\eta\hat{w} - i\beta\eta D\hat{v} + D(\eta D\hat{w}) + i\beta D(\eta\hat{v})] & (4) \end{cases} \quad (4.2.17)$$

En multipliant l'équation (4.2.17-2) par  $-i\alpha$  et l'équation (4.2.17-4) par  $-i\beta$ , et en combinant les 2 équations en s'aidant de l'équation de continuité (4.2.17-1), on élimine  $\hat{p}$  et  $\hat{u}$  et on obtient :

$$i\alpha Re[(U_b - c)D - DU_b]\hat{v} = -k^2 Re\hat{p} - 2k^2\eta D\hat{v} + D[\theta(D^2 + k^2)\hat{v}] + i\beta D[(\theta - \eta)(D\hat{w} + i\beta\hat{v})]. \quad (4.2.18)$$

En dérivant l'équation (4.2.18) par rapport à  $y$  et en la combinant avec l'équation (4.2.17-3), que l'on aura au préalable multipliée par  $k^2$ , nous obtenons l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée à un fluide non Newtonien purement visqueux :

$$\begin{aligned} i\alpha Re[(U_b - c)(D^2 - k^2) - D^2U_b]\hat{v} &= -4k^2 D(\eta D\hat{v}) + (D^2 + k^2)[\theta(D^2 + k^2)\hat{v}] \\ &+ i\beta(D^2 + k^2)[(\theta - \eta)(D\hat{w} + i\beta\hat{v})], \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

qui se réécrit :

$$\begin{aligned} i\alpha Re[(U_b - c)(D^2 - k^2) - D^2U_b]\hat{v} &= -4k^2 D(\eta D\hat{v}) + [D^2\theta + 2D\theta D + \theta(D^2 + k^2)](D^2 + k^2)\hat{v} \\ &+ i\beta(D^2 + k^2)[(\theta - \eta)(D\hat{w} + i\beta\hat{v})]. \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

---

5. Les 2 nombres d'onde  $\alpha$  et  $\beta$  sont des réels positifs.

Le dernier terme, souligné dans l'équation (4.2.20), empêche tout changement de paramètre de type « relations de Squire », qui ramènerait le problème 3D à une formulation 2D (*i.e.* à un seul nombre d'onde). En effet il fait apparaître explicitement le nombre d'onde transverse  $\beta$  ainsi que l'inconnue  $\hat{w}$  en plus de l'inconnue  $\hat{v}$ <sup>6</sup>. Le problème n'est pas fermé et il manque une équation ; Nouar *et al.* (2007) [63] proposent d'éliminer artificiellement ce terme en imposant  $\beta = 0$  ou  $\theta = \eta$ . Imposer  $\beta = 0$  revient à traiter le problème 2D ( $k = \alpha$ ) et imposer  $\theta = \eta$  revient à considérer qu'il n'y a pas de perturbation de viscosité (Chikkadi *et al.* (2005) [19]), ce qui amène à s'éloigner de la réalité du problème<sup>7</sup>, comme nous le verrons par la suite.

Il est possible de rechercher une autre équation à coupler avec l'équation (4.2.20), en vue de former un problème matriciel aux valeurs propres (Nouar *et al.* (2007) [63]). Nous proposons de combiner l'équation (4.2.17-3) multipliée par  $i\beta$  avec l'équation (4.2.17-4) que l'on aura au préalable dérivée par rapport à  $y$ . En s'aidant également de l'équation de continuité (4.2.17-1), il devient possible d'éliminer le terme en perturbation de pression et nous finissons par obtenir une seconde équation portant uniquement sur  $\hat{v}$  et  $\hat{w}$  :

$$\begin{aligned} i\alpha Re(U_b - c)(i\beta\hat{v} - D\hat{w}) - i\alpha ReDU_b\hat{w} &= \beta^2\theta D\hat{w} + k^2D(\eta\hat{w}) - i\beta\theta(D^2 + \alpha^2)\hat{v} \\ &+ 3i\beta D(\eta D\hat{v}) - i\beta(D^2 + \beta^2)(\eta\hat{v}) - (D^2 + \beta^2)(\eta D\hat{w}). \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

Nous obtenons à ce stade un système linéaire portant sur les inconnues  $(\hat{v}, \hat{w})$ , et couplant les deux équations (4.2.20)-(4.2.21) :

$$\begin{cases} i\alpha Re [(U_b - c)(D^2 - k^2) - D^2U_b] \hat{v} = -4k^2D(\eta D\hat{v}) \\ + [D^2\theta + 2D\theta D + \theta(D^2 + k^2)] (D^2 + k^2) \hat{v} + i\beta(D^2 + k^2) [(\theta - \eta)(D\hat{w} + i\beta\hat{v})] \\ i\alpha Re(U_b - c)(i\beta\hat{v} - D\hat{w}) - i\alpha ReDU_b\hat{w} = \beta^2\theta D\hat{w} + k^2D(\eta\hat{w}) - i\beta\theta(D^2 + \alpha^2)\hat{v} \\ + 3i\beta D(\eta D\hat{v}) - i\beta(D^2 + \beta^2)(\eta\hat{v}) - (D^2 + \beta^2)(\eta D\hat{w}) \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (4.2.22)$$

où, comme pour l'équation (4.2.20), le terme empêchant de formuler des relations de Squire est souligné.

Le problème généralisé aux valeurs propres peut être réécrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} L_{os} & C_1 \\ C_2 & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v} \\ \hat{w} \end{pmatrix} = -Re \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Delta\hat{v} \\ i\beta\hat{v} - D\hat{w} \end{pmatrix}, \quad (4.2.23)$$

où  $\Delta = D^2 - k^2$  et les opérateurs  $L_{os}$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  et  $S$  sont définis de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \bullet L_{os} &= i\alpha Re [U_b\Delta - D^2U_b] + 4k^2(D\eta D + \eta D^2) - [D^2\theta + 2D\theta D + \theta(D^2 + k^2)] (D^2 + k^2) \\ &+ \beta^2 [(D^2 + k^2)(\theta - \eta) + (\theta - \eta)D^2 + 2D(\theta - \eta)D], \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

$$\bullet C_1 = -i\beta(D^2 + k^2)(\theta - \eta)D - i\beta(\theta - \eta)D^3 - 2i\beta D(\theta - \eta)D^2, \quad (4.2.25)$$

$$\bullet C_2 = -\alpha\beta ReU_b + i\beta\theta(D^2 + \alpha^2) - i\beta D\eta D - 2i\beta\eta D^2 + i\beta(D^2 + \beta^2)\eta, \quad (4.2.26)$$

6. A noter que dans le cas Newtonien, où on a  $\eta = \theta = 1$ , le dernier terme de l'équation (4.2.20) n'apparaît plus, et les relations de Squire peuvent être analytiquement écrites.

7. A noter que l'on a  $\theta = 1$  au niveau de la surface libre.

$$\bullet S = -i\alpha Re(U_b D + D U_b) - \beta^2 \theta D + (D^2 + \beta^2) \eta D + 2D\eta D^2 + \eta(D^2 + k^2)D - k^2 D\eta. \quad (4.2.27)$$

Formulé de cette façon, le problème 3D est à présent fermé et peut être résolu, à condition d'introduire les conditions aux limites associées. Nous vérifions aussi aisément que nous retrouvons les équations du problème 2D en faisant  $\beta = 0$  (Rousset *et al.* (2007) [72]).

### Conditions aux limites

Au niveau de la surface libre, le cisaillement dû au champ de base s'annule ( $D U_b = 0$ ), impliquant de ce fait  $\eta = \theta = 1$  et  $D\eta = D\theta = 0$ . Combinées ensemble, les conditions aux limites (4.2.11)-(4.2.15) deviennent :

$$\bullet \hat{v} = D\hat{v} = \hat{w} = 0 \text{ à } y = d, \quad (4.2.28)$$

$$\bullet \left[1 + (U_b - c)(D^2 + k^2)\right] \hat{v} = 0 \text{ à } y = 0, \quad (4.2.29)$$

$$\bullet i\beta \hat{v} + D\hat{w} = 0 \text{ à } y = 0, \quad (4.2.30)$$

$$\bullet -\beta D\hat{v} + i(\alpha^2 - \beta^2)\hat{w} = 0 \text{ à } y = 0, \quad (4.2.31)$$

$$\bullet -ik^2(D^2 + k^2) \left[ \frac{\cot\gamma}{\alpha} + \frac{k^2}{\alpha Ca} \right] \hat{v} + 4k^2 D\hat{v} + i\alpha Re(U_b - c)D\hat{v} - D[(D^2 + k^2)\hat{v}] = 0 \text{ à } y = 0. \quad (4.2.32)$$

#### 4.2.4.2 Relations de Squire

Il apparaît ainsi, d'un point de vue analytique, que des relations de Squire ne peuvent pas être écrites en raison des termes explicites en  $\beta$  contenus dans le problème aux valeurs propres (4.2.23), ainsi que dans les conditions aux limites (4.2.30)-(4.2.31). Elles ne peuvent être formulées, d'après Nouar *et al.* (2007) [63], que si on annule les termes en  $\beta$  n'apparaissant pas implicitement dans  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . Ceci revient à ne considérer que l'équation (4.2.20) amputée du dernier terme explicitement proportionnel à  $\beta$  et les conditions aux limites portant seulement sur  $\hat{v}$ . Nous obtenons ainsi le problème suivant, que nous appellerons par la suite problème 3D réduit :

$$\bullet i\alpha Re \left[ (U_b - c)(D^2 - k^2) - D^2 U_b \right] \hat{v} = -4k^2 D(\eta D\hat{v}) + [D^2 \theta + 2D\theta D + \theta(D^2 + k^2)] (D^2 + k^2) \hat{v}, \quad (4.2.33)$$

$$\bullet \hat{v} = D\hat{v} = 0 \text{ à } y = d, \quad (4.2.34)$$

$$\bullet \left[1 + (U_b - c)(D^2 + k^2)\right] \hat{v} = 0 \text{ à } y = 0, \quad (4.2.35)$$

$$\bullet -ik^2(D^2 + k^2) \left[ \frac{\cot\gamma}{\alpha} + \frac{k^2}{\alpha Ca} \right] \hat{v} + 4k^2 D\hat{v} + i\alpha Re(U_b - c)D\hat{v} - D[(D^2 + k^2)\hat{v}] = 0 \text{ à } y = 0. \quad (4.2.36)$$

Ce problème est équivalent au problème 2D formulé par Rousset *et al.* (2007)[72] en posant  $k = \alpha$  (*i.e.*  $\beta = 0$ ).

Des relations de Squire peuvent être formulées dans ce cas particulier où les termes en  $\beta$  sont uniquement contenus implicitement dans  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ . A l'instar de Chang & Demekhin (2002) [18] dans le cas Newtonien, la différence par rapport à un écoulement en canal plan traité par Squire (1933) [82], est que l'analogie 3D-2D mise en évidence n'est pas soumise uniquement à une condition sur les termes inertiels; en observant ici la condition normale à la surface libre (4.2.36), nous voyons que deux autres conditions doivent être respectées, l'une sur l'angle d'inclinaison et l'autre sur le nombre de capillarité. Il faut donc, en fait, un ensemble de quatre changements de paramètres appelés relations de Squire :

$$\begin{cases} k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \\ \cot\gamma_{2D} = \frac{k}{\alpha} \cot\gamma_{3D} \\ Re_{2D} = \frac{\alpha Re_{3D}}{k} \\ Ca_{2D} = \frac{\alpha Ca_{3D}}{k} \end{cases} \quad (4.2.37)$$

Ces relations traduisent le fait que si l'on souhaite étudier une onde oblique 3D de vecteur d'onde  $\vec{k} = (\alpha, 0, \beta)$ , à la surface libre d'un film de fluide non Newtonien purement visqueux (à  $n$  et  $L$  fixés) s'écoulant sous un angle d'inclinaison,  $\gamma_{3D}$ , à nombre de Reynolds,  $Re_{3D}$ , et nombre de capillarité,  $Ca_{3D}$ , il est équivalent de recourir à l'étude d'une onde 2D caractérisée par un vecteur d'onde normalisé  $(k, 0, 0)$  tel que  $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$ , sous trois nouvelles conditions portant à la fois sur l'angle d'inclinaison,  $\gamma_{2D}$ , le nombre de Reynolds,  $Re_{2D}$ , et le nombre de capillarité,  $Ca_{2D}$ .

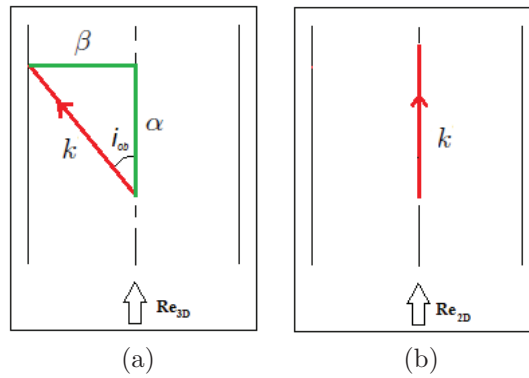


FIGURE 4.2.2 : (a) Schéma représentatif d'une onde 3D d'angle d'obliquité  $i_{ob}$  de nombre d'onde  $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  à  $(Re_{3D}, \gamma_{3D}, Ca_{3D})$  donnés, et (b) celui de l'onde 2D équivalente à  $(Re_{2D}, \gamma_{2D}, Ca_{2D})$  donnés, après transformations de Squire (Eq. (4.2.37)).

Il est à remarquer que le caractère non Newtonien du fluide n'intervient pas dans ces relations (4.2.37).

En particulier au niveau de chaque seuil 3D<sup>8</sup>, l'analogie sur les nombres de Reynolds stipule que le seuil 3D peut directement être déterminé à partir de la seule connaissance du seuil critique 2D. La question est donc de savoir si le dernier terme souligné, omis dans le problème réduit est réellement négligeable. Afin de le vérifier, nous nous proposons de comparer cette valeur du seuil prédite par les relations de Squire à :

- celle obtenue par la résolution du problème 3D réduit (4.2.33-4.2.36) et qui est rigoureusement la même puisque nous avons vu que dans ce cas les relations de Squire sont clairement établies,
- celle obtenue par la résolution du problème 3D complet (4.2.23-4.2.32) qui sera différente si ce terme n'est pas négligeable.

### 4.3 Résultats à angle d'inclinaison fixé

L'étude d'une onde 3D (à angle  $\gamma_{3D}$ ) à partir d'une onde 2D (à angle  $\gamma_{2D}$ ) équivalente par les relations de Squire, ne peut se faire, dans le cas des écoulements de films, qu'après transformation de l'angle d'inclinaison. Il n'existe donc pas d'onde 2D, équivalente à une onde 3D par relations de Squire, si l'on considère que l'angle d'inclinaison est inchangé. Par contre, il est intéressant de vérifier si les ondes 2D sont plus dangereuses que les ondes 3D, à angle d'inclinaison fixé.

Considérons le problème d'un film purement visqueux sur plan incliné, pour lequel les relations de Squire sont utilisables, comme c'est le cas pour le problème 3D réduit (4.2.33-4.2.36). Etant donné que  $k > \alpha$ , et que la fonction cotangente est positive et décroissante pour  $\gamma = [0, \pi/2]$ , les relations de Squire permettent de déduire du seuil  $Re_{c2D}$  obtenu à un angle d'inclinaison  $\gamma_{2D}$ , le seuil  $Re_{c3D}$  obtenu pour un autre angle  $\gamma_{3D}$ . On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \gamma_{2D} < \gamma_{3D} & (1) \\ Re_{c2D}(\gamma_{2D}) < Re_{c3D}(\gamma_{3D}) & (2) \\ Ca_{2D} < Ca_{3D} & (3) \end{cases} \quad (4.3.1)$$

Les études 2D montrent que le nombre de Reynolds critique  $Re_{c2D}$  est une fonction positive décroissante de l'angle d'inclinaison (Liu *et al.* (1993) [52] dans le cas Newtonien, Rousset *et al.* (2007) [72] dans le cas rhéofluidifiant, Fig. 1.4.1). De cette façon, le nombre de Reynolds critique pour l'onde 2D obtenu à l'angle  $\gamma_{3D}$  est tel que :  $Re_{c2D}(\gamma_{3D}) < Re_{c2D}(\gamma_{2D})$  (Fig. 4.3.1). Cette dernière inégalité, combinée à la relation de Squire (4.3.1-(2)), donne :  $Re_{c2D}(\gamma_{3D}) < Re_{c3D}(\gamma_{3D})$ .

**Ceci conduit à ce que les seuils 3D, en terme de nombre de Reynolds, sont toujours plus grands que le seuil 2D, à angle d'inclinaison fixé.**

Cette démarche s'applique sans problème dans le cas Newtonien, ce qui constitue un résultat exploitable d'un point de vue expérimental ; dans le cas purement visqueux, elle est soumise à l'équivalence des problèmes 3D réduit et complet, qui sera étudiée dans ce qui suit.

8. Nous distinguons le seuil critique 2D (*i.e.*  $\beta = 0$ ) du seuil 3D à  $\beta$  non nul.

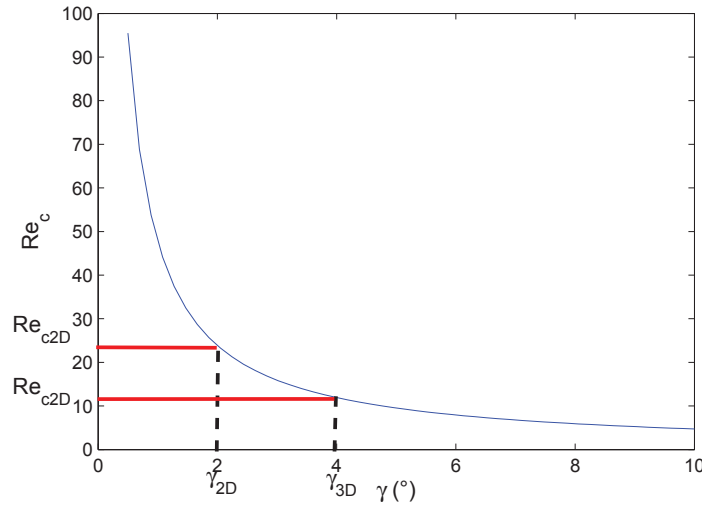


FIGURE 4.3.1 : Effet déstabilisant de l'angle d'inclinaison dans une étude 2D.

## 4.4 Etude numérique - analyse temporelle de stabilité linéaire

Il est donc intéressant, par le biais d'une étude numérique, d'évaluer le poids des termes en  $\beta$  dans la stabilité du problème suivant que l'on considère le problème 3D complet ou le problème 3D réduit.

La résolution du problème aux valeurs propres permet de déterminer la vitesse complexe  $c$  et par conséquent la stabilité du système.

### 4.4.1 Résolution par méthode spectrale

Une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Tchebychev est choisie pour la discrétisation (Rousset *et al.* (2007) [72], Millet *et al.* (2008-2013) [58, 57]). Ces auteurs ont mené une étude temporelle de stabilité linéaire dans le cas d'ondes 2D (chapitre 1), que nous avons reprise pour la généraliser aux ondes 3D et y incorporer un algorithme de continuation qui permet de manière efficace à la fois de tracer des courbes marginales sur le plan  $(Re, \alpha)$  et de déterminer le seuil associé à  $\beta$  fixé.

Notre code de stabilité a été validé par rapport aux travaux sur plan incliné de Yih (1963) [90] et de Floryan *et al.* (1987) [27] dans le cas Newtonien, puis relativement aux travaux en écoulement de Poiseuille-plan de Nouar *et al.* (2007) [63] et Chikkadi *et al.* (2005) [19] dans le cas d'un fluide de Carreau<sup>9</sup>.

### 4.4.2 Recherche de seuil - méthode de continuation

Nous présentons dans cette partie l'algorithme de la méthode sur laquelle nous nous appuyons pour tracer des cartes de stabilité sur le plan  $(Re, \alpha)$ .

9. Nous avons validé notre modèle visqueux sur Nouar *et al.* (2007) [63], et la problématique du théorème de Squire dans le cas de la stabilité linéaire d'un écoulement rhéofluidifiant en canal plan a été traitée de la même façon que dans ce travail (Annexe I).

#### 4.4.2.1 Description de l'algorithme

Donnons-nous une fonction à deux variables  $c_i = c_i(\alpha, Re)$  dont on souhaite tracer la frontière et trouver un extremum local. Cette fonction peut représenter dans notre contexte la partie imaginaire de la célérité, décrivant donc la stabilité de l'écoulement. Tracer la frontière entre les zones stable et instable, revient à résoudre  $c_i = 0$  ; trouver l'extremum revient à rechercher le seuil  $(\alpha_c, Re_c)$  tel que  $\frac{\partial c_i}{\partial \alpha} = 0$  en ce point (Fig. 4.4.1). Si l'objectif défini est de longer la courbe à la recherche de l'extremum, nous devons être capable de résoudre le système (4.4.1), en partant si possible d'un voisinage proche de l'extremum recherché :

$$\begin{cases} c_i = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} = 0 \end{cases} \quad (4.4.1)$$

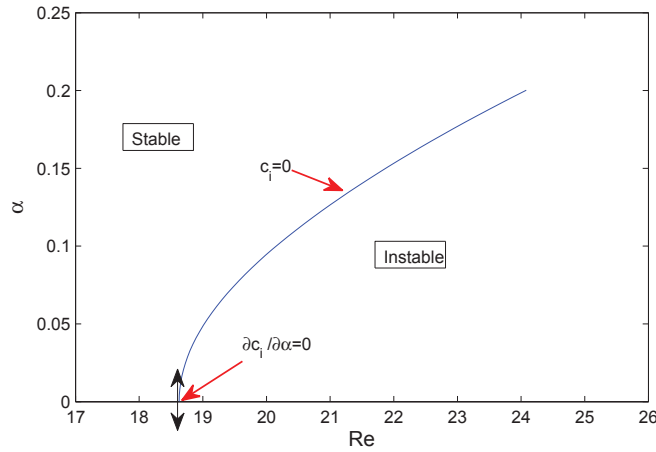


FIGURE 4.4.1 : Carte de stabilité marginale dans le cas rhéofluidifiant à angle d'inclinaison de  $\gamma = 2^\circ$  et seuil critique 2D ( $\beta = 0$ ) avec  $L = 0.5$ ,  $n = 0.5$ ,  $Ca = 10$  et  $I = 5.10^{-5}$ . Sont représentés ici la courbe neutre ( $c_i = 0$ ) et le seuil critique 2D ( $\partial c_i / \partial \alpha = 0$ ). Chaque point de la courbe correspond à la situation où l'onde est marginalement stable, et est déterminé en appliquant la méthode de continuation à nombre d'onde fixé. La courbe sépare le plan  $(Re, \alpha)$  en zone linéairement stable et zone linéairement instable.

Comme toute méthode itérative, nous partons d'un point  $M_0 = (\alpha_0, Re_0)$ , et nous cherchons le seuil par corrections successives  $(d\alpha, dRe)$ . Commençons par développer à l'ordre 1 les expressions de  $c_i$  et de  $\frac{\partial c_i}{\partial \alpha}$  autour d'un point quelconque  $M = (\alpha, Re)$  et imposons-leur de vérifier le système (4.4.1) :

$$\begin{cases} c_i(\alpha + d\alpha, Re + dRe) = c_i(\alpha, Re) + \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial c_i}{\partial Re} dRe = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}(\alpha + d\alpha, Re + dRe) = \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}(\alpha, Re) + \frac{\partial^2 c_i}{\partial \alpha^2} d\alpha + \frac{\partial^2 c_i}{\partial \alpha \partial Re} dRe = 0 \end{cases} \quad (4.4.2)$$

Le système (4.4.2), qui correspond à une étape de la méthode de Newton, peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} & \frac{\partial c_i}{\partial Re} \\ \frac{\partial^2 c_i}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 c_i}{\partial \alpha \partial Re} \end{pmatrix}_{(\alpha, Re)} \begin{pmatrix} d\alpha \\ dRe \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} \end{pmatrix}_{(\alpha, Re)} \text{ avec } \begin{cases} \alpha \rightarrow \alpha + d\alpha \\ Re \rightarrow Re + dRe \end{cases} \quad (4.4.3)$$

Il ne reste plus qu'à expliciter les composantes matricielles de (4.4.3). Nous choisissons d'approximer les dérivées de  $c_i(\alpha, Re)$  par la méthode des différences finies. Nous utiliserons par la suite les notations compactes suivantes :

$$c_i(\alpha, Re) = c_{j,k} \implies c_i(\alpha \pm d\alpha, Re \pm dRe) = c_{j\pm 1, k\pm 1}. \quad (4.4.4)$$

Le système matriciel de Newton (4.4.3) se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{c_{j+1,k} - c_{j,k}}{d\alpha} & \frac{c_{j,k+1} - c_{j,k}}{dRe} \\ \frac{c_{j+1,k} - 2c_{j,k} + c_{j-1,k}}{d\alpha^2} & \frac{c_{j+1,k+1} - c_{j,k+1} - c_{j+1,k} + c_{j,k}}{d\alpha dRe} \end{pmatrix}_{(j,k)} \begin{pmatrix} d\alpha \\ dRe \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_i \\ \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} \end{pmatrix}_{(j,k)} \quad (4.4.5)$$

A chaque étape de Newton, nous pouvons résoudre le système (4.4.5) par inversion matricielle, puis nous réitérons le processus après correction de la solution estimée par  $(d\alpha, dRe)$ , jusqu'à convergence.

Ce processus peut être adapté à nombre d'onde fixé (ce qui revient à résoudre uniquement  $c_i = 0$ ) et permet ainsi de tracer des courbes marginales dans le plan  $(Re, \alpha)$  (Fig 4.4.1). Nous l'avons aussi généralisé dans l'espace  $(Re, \alpha, \beta)$ <sup>10</sup> pour rechercher des nombres de Reynolds critiques 3D.

#### 4.4.2.2 Seuil critique 2D

Nous commençons par appliquer cette méthode dans le but de rechercher le seuil critique 2D ( $\beta = 0$ ) en faisant varier certains paramètres introduits dans le problème, tels que l'angle d'inclinaison ou le paramètre rhéofluidifiant  $L$  (Fig. 4.4.2) et ainsi retrouver les résultats de la littérature (Thèse S. Millet p59 (2007) [56]) pour valider notre outil numérique. Des résultats excluant les perturbations de viscosité sont obtenus en posant  $\theta = \eta$  dans le système (4.2.33-4.2.36), ils sont aussi représentés sur la figure 4.4.2 afin de mesurer l'effet de ces termes.

On peut noter qu'à l'instar de ce qu'a souligné Yih (1963) [90] dans le cas Newtonien, ici aussi les instabilités apparaissent à très grande longueur d'onde, ceci avait été confirmé sous une certaine limite par l'approche asymptotique ( $\alpha \sim 0$ ) dans le cas rhéofluidifiant (Rousset *et al.* (2007) [72]).

A noter aussi le caractère déstabilisant du paramètre rhéofluidifiant  $L$ , dont l'effet est d'avancer le nombre de Reynolds critique de façon similaire au cas de la stabilité d'un écoulement plan de Poiseuille (Nouar *et al.* (2007)[63]).

On constate par ailleurs que les résultats excluant les perturbations de viscosité sont très différents de ceux qui les incluent : les nombres de Reynolds critiques obtenus sont beaucoup plus élevés. Il est donc nécessaire de prendre en compte les perturbations de viscosité contenues dans la viscosité tangente  $\theta$  : on ne peut pas choisir  $\theta = \eta$ .

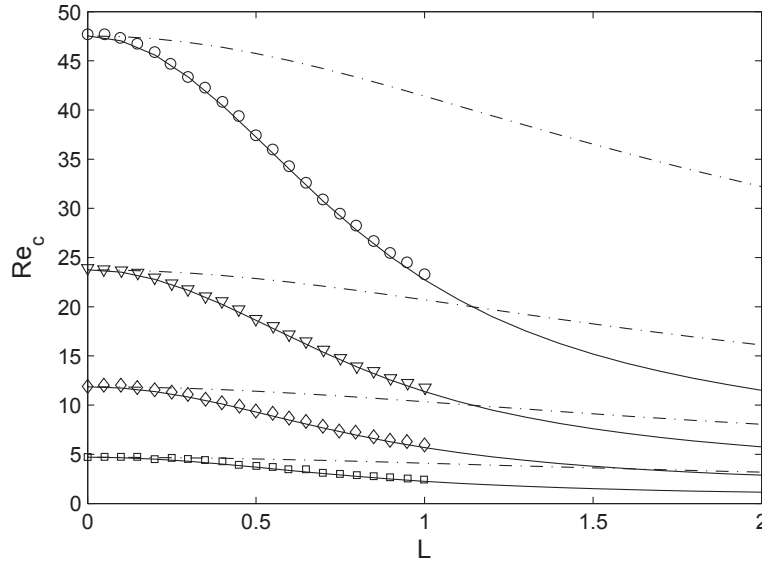


FIGURE 4.4.2 : Seuils critiques 2D de stabilité selon  $L$  pour un angle d'inclinaison de  $1^\circ$  (*cercles*),  $2^\circ$  (*triangles*),  $4^\circ$  (*losanges*) et  $10^\circ$  (*carrés*), avec  $n = 0.5$ ,  $Ca = 0$  et  $I = 10^{-3}$ . Les traits pleins (*resp.* tirets) représentent nos résultats numériques correspondant au cas incluant (*resp.* excluant) les perturbations de viscosité. Les marqueurs vides correspondent aux résultats issus de la thèse de S. Millet p59 (2007) [56].

#### 4.4.2.3 Seuils 3D : comparaison des problèmes réduit et complet

Les deux transformations d'angle et de nombre de capillarité, déduites des relations de Squire (Eq. (4.2.37)), se réécrivent :

$$\begin{cases} \gamma_{3D} = \arccot(\alpha/k \cot \gamma_{2D}) \\ Ca_{3D} = \frac{Ca_{2D}}{\alpha/k} \end{cases}, \quad (4.4.6)$$

où le rapport  $\alpha/k$  désigne le cosinus de l'angle d'obliquité  $i_{ob}$  de l'onde 3D considérée (Fig. 4.2.2).

Pour plusieurs valeurs du paramètre rhéofluidifiant  $L$ , nous présenterons, dans cette partie, les résultats de seuil 3D qu'on notera  $Re_{c3D}$ , déterminés par : *i*) la résolution du problème réduit, *ii*) la résolution du problème complet, *iii*) la seule connaissance du seuil critique 2D équivalent, à partir de la relation de Squire portant sur les nombres de Reynolds, qui s'écrit au niveau des seuils :

$$Re_{c3D} = \frac{Re_{c2D}}{\alpha/k}. \quad (4.4.7)$$

---

10. Ceci revient à résoudre :  $\begin{cases} c_i = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial c_i}{\partial \beta} = 0 \end{cases}$  .

Pour chaque valeur de  $L$ , la méthode de continuation fournit, pour les problèmes réduit et complet, le seuil 3D à angle d'oblicité fixé. En étudiant ainsi une onde 3D d'oblicité donnée, il est essentiel, à chaque étape du calcul, que la valeur de  $\beta$  suive la valeur de  $\alpha$ , de façon à ce que  $\beta = \alpha \tan(i_{ob})$  (Fig. 4.2.2). Le tableau Tab. 4.1 donne les transformations d'angle et de nombre de capillarité pour l'étude de trois ondes obliques, à partir du seuil 2D obtenu pour un angle d'inclinaison  $\gamma_{2D} = 1^\circ$ , et un nombre de capillarité  $Ca_{2D} = 0.1$ .

| Oblicité |  | $\gamma_{3D}$ | $Ca_{3D}$ |
|----------|--|---------------|-----------|
| 20°      |  | 1.06°         | 0.11      |
| 30°      |  | 1.15°         | 0.12      |
| 40°      |  | 1.31°         | 0.13      |

TABLE 4.1 : Valeurs des transformations d'angle d'inclinaison et de nombre de capillarité équivalents d'après les équations (4.4.6), pour l'étude de stabilité de trois ondes obliques à partir du seuil 2D,  $Re_{c2D}$  obtenu pour un angle d'inclinaison,  $\gamma_{2D} = 1^\circ$  et un nombre de capillarité,  $Ca_{2D} = 0.1$ .

La figure 4.4.3 montre dans un premier temps les résultats de seuil 3D en terme de nombre de Reynolds,  $Re_{c3D}$  déterminés par : *i)* la résolution du problème réduit (*marqueurs vides*), *ii)* la résolution du problème complet (*marqueurs pleins*), *iii)* la seule connaissance du seuil critique 2D équivalent, à partir de la relation de Squire Eq. (4.4.7) (*traits pleins*)

Concernant la résolution du problème réduit, les valeurs de  $Re_{c3D}$  calculées numériquement<sup>11</sup> sont en très bon accord avec les valeurs prédites par les relations de Squire, ce qui est naturel puisque ces dernières sont analytiquement établies dans ce cas (Eqs. (4.2.33-4.2.36)). La résolution du problème complet montre que les valeurs calculées de  $Re_{c3D}$  sont nettement différentes de celles déduites des relations de Squire (et de celles obtenues après résolution du problème réduit par la même occasion), en notant que l'écart augmente avec  $L$  : ceci signifie que le terme en  $\beta(\theta - \eta)$ , qui a été souligné Eq. (4.2.20), et qui a été supprimé pour obtenir le problème réduit, ne peut pas être négligé, et que son poids augmente avec  $L$ .

Les résultats du problème complet donnent en particulier  $Re_{c3D}(\gamma_{c3D}) < Re_{c2D}(\gamma_{2D})$  pour les grandes valeurs de  $L$  ; ceci ne signifie pas que les instabilités 3D deviennent plus dangereuses, puisque l'angle d'inclinaison a changé. Pour les faibles valeurs de  $L$ , pour lesquelles nous obtenons  $Re_{c3D}(\gamma_{c3D}) > Re_{c2D}(\gamma_{2D})$ , le même raisonnement opéré § 4.3 peut être reconduit, et il est possible d'affirmer dans ce cas particulier, compte tenu par ailleurs que  $Re_{c2D}(\gamma_{c2D}) > Re_{c2D}(\gamma_{3D})$ , que ce sont les ondes planes qui sont les plus dangereuses à angle d'inclinaison fixé. Dans le cas général cependant, cette démarche ne peut plus être menée, on obtient  $Re_{c3D}(\gamma_{c3D}) < Re_{c2D}(\gamma_{2D})$ , et on observe un écart notable entre les résultats du problème réduit et ceux du problème complet ; **seul le cas Newtonien fournit les mêmes**

11. Les valeurs calculées de seuil en terme de nombre d'onde sont telles que  $\alpha_{c3D} \sim \epsilon$ , avec  $\epsilon \ll 1$  puisqu'au niveau du seuil, l'instabilité naît à grande longueur d'onde.

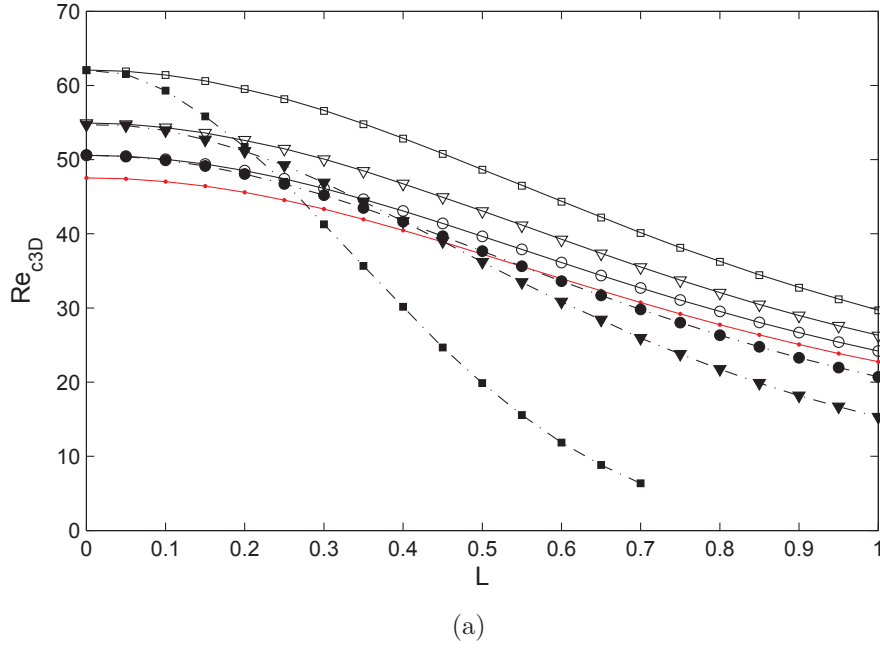


FIGURE 4.4.3 : Seuils en terme de nombre de Reynolds pour une perturbation 3D, en fonction de  $L$ . Les marqueurs vides (*resp.* pleins) correspondent aux résultats numériques de seuil 3D obtenus après résolution du problème réduit (4.2.33-4.2.36) (*resp.* complet (4.2.23-4.2.32)). Nous avons considéré des ondes obliques de  $20^\circ$  (*cercles*),  $30^\circ$  (*triangles*) et  $40^\circ$  (*carrés*), par rapport à l'onde critique 2D. Les *traits pleins* correspondent, pour chaque valeur de  $L$ , à l'application de la relation de Squire Eq. (4.4.7), à partir de la seule connaissance du seuil critique 2D (*points rouges*) obtenu pour un angle d'inclinaison  $\gamma_{2D} = 1^\circ$ , et pour un fluide tel que  $n = 0.5$ ,  $I = 10^{-5}$  et  $Ca_{2D} = 0.1$ . Les *tirets* ne figurent que pour mettre en évidence les résultats du problème complet (marqueurs pleins). Les valeurs de  $\gamma_{3D}$  et  $Ca_{3D}$  sont données Tab. 4.1.

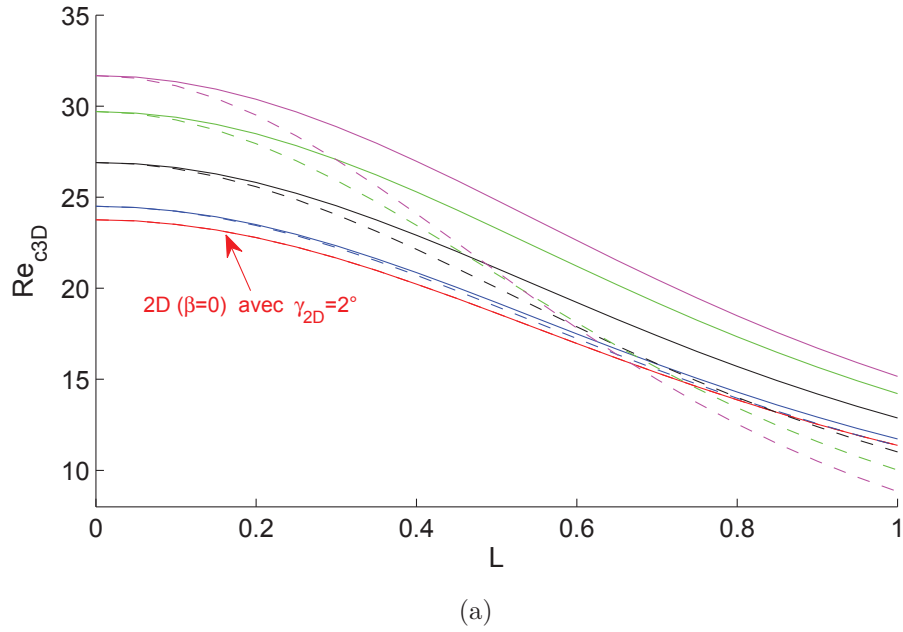


FIGURE 4.4.4 : Seuils en terme de nombre de Reynolds pour une perturbation 3D, en fonction de  $L$ . Les traits pleins (*resp.* tirets) correspondent aux résultats numériques de seuil 3D obtenus après résolution du problème réduit (4.2.33-4.2.36) (*resp.* complet (4.2.23-4.2.32)). Nous avons considéré des ondes obliques de  $10^\circ$  (*bleu*),  $20^\circ$  (*noir*),  $26.565^\circ$  (*vert*) et  $30^\circ$  (*magenta*), par rapport à l'onde critique 2D, en maintenant l'angle d'inclinaison tel que  $\gamma = 2^\circ$ , et pour un fluide tel que  $n = 0.5$ ,  $I = 10^{-5}$  et  $Ca_{2D} = 0.1$ . Le seuil critique 2D est représenté en rouge.

**résultats de seuil 3D, indépendamment des trois approches.** Mais en pratique, pour un expérimentateur, il est essentiel de pouvoir déterminer le seuil 3D à partir du seuil critique 2D **pour le même angle d'inclinaison**. La figure 4.4.4 arrive aux mêmes conclusions que la figure 4.4.3, en soulignant que les instabilités 3D deviennent rapidement les plus dangereuses pour l'écoulement de film fortement rhéofluidifiant ( $L \gg 1$ ).

Les relations de Squire sont établies à partir du problème 3D réduit. Les résultats numériques montrent que les problèmes 3D réduit et complet ne peuvent pas être considérés comme équivalents, nous ne pouvons donc pas utiliser les relations de Squire pour obtenir des indications sur la stabilité 3D de film purement visqueux, elles ne sont utilisables que dans le cas Newtonien. Dans certains cas particuliers (faibles valeurs de  $L$  en l'occurrence) où on obtient  $Re_{c3D}(\gamma_{c3D}) > Re_{c2D}(\gamma_{3D})$ , nous pouvons affirmer que les ondes 2D sont les plus dangereuses à angle d'inclinaison fixé. À noter enfin que lorsque l'oblicité est trop forte ( $\beta \sim \alpha$ ;  $i_{ob} \sim 45^\circ$ ), nous obtenons difficilement des résultats convergés, et en particulier les valeurs de  $Re_{c3D}$  peuvent rapidement atteindre zéro sur une gamme modérée du paramètre rhéofluidifiant,  $L$ .

## 4.5 Conclusion

Nous avons écrit l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée aux ondes 3D à la surface libre d'un film rhéofluidifiant s'écoulant sur plan incliné. Cette équation se présente sous sa forme complète comme un problème matriciel portant sur les inconnues perturbation normale et transverse de vitesse. Sous sa forme réduite, les termes faisant apparaître le nombre d'onde transverse en dehors d'un groupement ( $\alpha^2 + \beta^2$ ) sont éliminés. Etablir des relations de Squire n'est possible qu'à ce prix.

Nous avons souhaité comparer les résultats de seuil 3D en terme de nombre de Reynolds fournis par la résolution des problèmes réduit et complet; nous avons mené une étude de stabilité 3D, où le choix de discrétisation s'appuie sur une méthode spectrale de collocation basée sur les polynômes de Tchebychev, et une méthode de continuation est implémentée pour la recherche du seuil et tracer des cartes de stabilité. Nous avons validé notre modèle de Carreau pour la viscosité (Nouar *et al.* (2007) [63]), et nous avons retrouvé les seuils critiques 2D donnés dans la littérature.

Dans le cas d'ondes 3D, nous avons pris en compte les transformations d'angle et de nombre de capillarité lors de la recherche de seuil 3D, et nous trouvons un écart significatif entre les résultats obtenus par la résolution des problèmes réduit (pour lequel les relations de Squire sont analytiquement vérifiées) et complet (pour lequel les relations de Squire ne sont pas analytiquement vérifiées), signe que les termes éliminés lors de l'établissement du problème réduit ne peuvent pas être négligés. Nous en déduisons que nous ne pouvons utiliser les relations de Squire dans le cas d'un écoulement de film sur plan incliné que dans le cas Newtonien. Nous avons même pu montrer que, à angle d'inclinaison donné, les seuils 3D peuvent se situer en dessous des seuils 2D pour un écoulement sur plan incliné de film rhéofluidifiant. Ceci est particulièrement vérifié pour les fortes valeurs de  $L$  et pour des ondes à fort angle d'oblicité.



# Conclusion et perspectives

Nous avons mené une étude globale du problème de stabilité linéaire de films rhéofluidifiants s'écoulant sur plan incliné. Dans la continuité des travaux théoriques et numériques à une couche de fluide de Rousset *et al.* (2007) [72] et Millet *et al.* (2008) [58], notre objectif principal a été de retrouver expérimentalement les valeurs de seuil critique en terme de nombre de Reynolds  $Re_c$ , et de comparer les résultats des mesures lorsque les ondes sont marginalement stables, aux résultats numériques de carte marginale de stabilité à angle d'inclinaison fixé.

Dans ce contexte, Rousset *et al.* (2007) [72] ont résolu le problème d'Orr-Sommerfeld dans le cadre d'une étude temporelle de stabilité, en décrivant la viscosité suivant la loi de Carreau qui a l'avantage de présenter une zone de comportement Newtonien aux très faibles valeurs du taux de cisaillement. Ils ont en particulier étudié l'influence de ce plateau Newtonien sur la stabilité de l'écoulement en terme de nombre de Reynolds critique, en introduisant un nombre adimensionnel  $L = \frac{q}{\dot{\gamma}_c d_s^2}$  comparant le plateau Newtonien atteint tant que  $\dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c$ , au cisaillement maximal  $\dot{\gamma}_{max} \equiv \frac{q}{d_s^2}$  de l'écoulement au fond, avec  $q$ , le débit par unité de largeur, et  $d_s$ , l'échelle caractéristique de longueur de l'écoulement uniforme, choisie de façon à décrire l'équilibre entre la composante longitudinale du poids et le frottement visqueux qu'on aurait eu dans le cas Newtonien. Millet *et al.* (2008) [58] ont montré que le rapport entre la célérité des ondes critiques et la vitesse de l'écoulement à la surface libre est plus grand que dans le cas Newtonien.

D'un point de vue expérimental, nous utilisons des solutions aqueuses rhéofluidifiantes faiblement concentrées en polymère. Ces concentrations ont une viscosité relativement faible, ce qui rend plus difficile une détermination précise du plateau Newtonien aux très faibles valeurs du cisaillement local, compte tenu de la rareté des rhéomètres capables d'atteindre des valeurs de cisaillement aussi basses. La connaissance, néanmoins, de l'ensemble des paramètres rhéologiques apparaissant dans le modèle de Carreau est cruciale dans le cadre de notre étude de stabilité. Etant donné que l'écoulement présente une surface libre, où la contrainte de cisaillement est quasi-nulle, la définition du nombre de Reynolds fait explicitement apparaître l'un d'eux : la viscosité limite à taux de cisaillement nul  $\eta_0$ . Ceci a motivé notre intérêt porté à la propagation d'ondes capillaires en produisant un cisaillement de l'ordre de  $10^{-3} s^{-1}$ , et à la détermination de  $\eta_0$  à partir des mesures d'atténuation spatiale et de longueur d'onde.

Dans ce contexte, nous avons appliqué une technique appelée *électrocapillarité* au cas de solutions faiblement concentrées de deux polymères rhéofluidifiants (Allouche *et al.* (2015) [2]) : le Carboxyméthylcellulose (CMC, *E466*) et la gomme Xanthane (*E415*). Des solutions faiblement concentrées en CMC ont été choisies de façon à ce que le plateau Newtonien soit correctement mis en évidence par rhéométrie ; les résultats des mesures par électrocapillarité constituant une deuxième validation de notre dispositif expérimental après celles réalisées sur des solutions Newtoniennes de glycérine. Une solution très faiblement concentrée en gomme Xanthane a été étudiée de la même façon et a été choisie de façon à ce que son plateau Newtonien soit beaucoup plus étroit, suffisamment pour qu'il soit hors de portée des plus faibles valeurs

de cisaillement atteintes par un rhéomètre de Couette. Pour cette solution, les mesures de viscosité à des valeurs de cisaillement aussi faibles que  $10^{-3}s^{-1}$ , pour des viscosités d'environ  $4 - 8mPa.s$ , enrichissent de manière considérable la caractérisation rhéologique des fluides rhéofluidifiants faiblement concentrés en polymère. Les mesures issues de rhéométrie, combinées à celles tirées de l'électrocapillarité, constituent la courbe d'évolution de la viscosité comme fonction du cisaillement ; la courbe analytique qui s'ajuste le mieux à notre set de mesures expérimentales, renseigne sur la valeur de l'ensemble des paramètres rhéologiques apparaissant dans le modèle de Carreau.

Après caractérisation rhéologique, nous avons choisi trois fluides rhéofluidifiants que nous avons étudiés dans le cadre de la stabilité linéaire de l'écoulement de film sur plan incliné à des angles de  $1^\circ$ ,  $3.5^\circ$  et  $7^\circ$ . Nous avons trouvé pour chacun de ces trois fluides que le nombre de Reynolds critique expérimental était significativement plus bas que dans le cas Newtonien, et que le rapport entre la célérité des ondes au niveau du seuil critique et la vitesse de l'écoulement à la surface libre ( $\sim \frac{q}{d_s}$ ) est plus grand.

A partir des mesures de longueurs d'ondes marginales, nous avons trouvé que les résultats numériques et expérimentaux exprimés dans le plan  $(Re, k)$  sont proches. Nous avons aussi comparé le nombre de Reynolds critique expérimental au nombre de Reynolds critique déterminé suivant l'approximation grandes longueurs d'ondes suivant que la viscosité soit décrite par une loi en puissance (Ng & Mei (1994) [60]) ou par une loi en puissance régularisée par un plateau Newtonien aux très faibles valeurs de cisaillement (Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73]). Etant donné le caractère faiblement rhéofluidifiant de nos solutions ( $n \sim 0.8$ ,  $L \sim 1$ ), les différentes valeurs du nombre de Reynolds critique sont très proches, y compris celle obtenue numériquement par notre approche où la viscosité est décrite suivant la loi de Carreau.

Nous obtenons par ailleurs les mesures de fréquence de coupure pour chaque valeur du nombre de Reynolds, qui nous permettent, *via* les mesures de longueurs d'ondes marginales, de remonter aux valeurs de célérité sur le plan  $(Re, c)$ . Toujours en s'appuyant sur les mesures de longueurs d'ondes marginales, les valeurs de célérité des ondes cinématiques restent approximativement égales à 1, avec une légère baisse en allant vers les grandes valeurs du nombre de Reynolds (ou du nombre d'onde  $k$ ), ce qui signifie que nos mesures ont été réalisées près du seuil critique. La célérité des ondes critiques adimensionnée par une estimation de la vitesse de l'écoulement à la surface libre, est, expérimentalement, légèrement supérieure à sa valeur lorsque le fluide est Newtonien, signe que nos fluides sont faiblement rhéofluidifiants. L'analyse de Whitham (1974) [89] appliquée à nos écoulements de film rhéofluidifiant sur plan incliné, montre que le critère de stabilité ( $c_k = c_{d+}$ ) est expérimentalement vérifié avec quelques 10% d'écart entre la célérité des ondes cinématiques et dynamiques. Il s'agit, à notre connaissance, de la première fois que l'on observe expérimentalement le caractère déstabilisant des paramètres rhéologiques ( $n$ ,  $L$ ) pour un écoulement de film.

Nous avons aussi mené une réflexion sur les relations et le théorème de Squire : dans le cas d'un écoulement de film de fluide purement visqueux, une étude de stabilité 2D suffit-elle pour étudier la stabilité des ondes 3D ? Nous avons écrit et résolu l'équation d'Orr-Sommerfeld généralisée aux ondes 3D, dans le cas de l'écoulement d'un fluide de Carreau sur plan incliné. Analytiquement, les relations de Squire ne sont pas utilisables, du fait de termes explicitement proportionnels à  $\beta$  dans l'équation d'Orr-Sommerfeld sous sa forme complète ; les résultats numériques en terme de seuil 3D indiquent que ces termes ne peuvent pas être négligés, et les relations de Squire ne sont par conséquent utilisables dans le cas d'un écoulement de film sur plan incliné que dans le cas Newtonien.

---

Comme perspectives d'étude, il serait intéressant de compléter les mesures de champ d'épaisseur par FS-SS avec des mesures de champ de vitesse à la surface libre qui permettraient de vérifier la solution du champ de base pour un débit donné. La présence d'ondes conditionnellement stables, détectées numériquement par Ruyer-Quil *et al.* (2012) [73], n'a pas été observée expérimentalement pour des solutions moyennement concentrées de gomme Xanthane ( $n \sim 0.75$ ). Il serait utile de rechercher leur présence pour des solutions plus concentrées. Enfin, des études en fluide visco-plastique (ex : Carbopol, Kaolin) pourraient par ailleurs expliquer l'organisation sous forme de paquet de boue dans les écoulements géophysiques de type lave torrentielle.



# **Annexes**



# Annexe A

## Les asymptotes de la loi de Carreau

On souhaite rechercher les asymptotes de la loi de Carreau dans le cas rhéofluidifiant où  $0 < n < 1$  :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^2\right]^{(n-1)/2}. \quad (\text{A.0.1})$$

En isolant  $\eta$ , on obtient :

$$\eta = \eta_\infty \left\{1 + \left(\frac{\eta_0}{\eta_\infty} - 1\right) \left[1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^2\right]^{(n-1)/2}\right\}.$$

En prenant le logarithme, et en supposant aussi que  $\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \gg 1$ , on obtient :

$$\log \eta = \log \eta_\infty + \log \left\{1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \left[1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^2\right]^{(n-1)/2}\right\}.$$

**1. Si  $\dot{\gamma} \ll \dot{\gamma}_c$  :**

$$\log \eta \sim \log \eta_\infty + \log \left(1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty}\right) \sim \log \eta_\infty + \log \frac{\eta_0}{\eta_\infty},$$

d'où la première asymptote horizontale à cisaillement nul :

$$\log \eta \sim \log \eta_0. \quad (\text{A.0.2})$$

**2. Si  $\dot{\gamma} \gg \dot{\gamma}_c$  :**

$$\log \eta = \log \eta_\infty + \log \left\{1 + \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1}\right\}.$$

– 1<sup>er</sup> cas :  $\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} \gg 1$  :  
d'où l'asymptote oblique :

$$\log \eta \sim \log \eta_0 + (n-1) \log \dot{\gamma} - (n-1) \log \dot{\gamma}_c. \quad (\text{A.0.3})$$

– 2<sup>ème</sup> cas :  $\frac{\eta_0}{\eta_\infty} \left(\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_c}\right)^{n-1} \ll 1$  :

d'où la seconde asymptote horizontale à cisaillement infini :

$$\log \eta \sim \log \eta_\infty. \quad (\text{A.0.4})$$

Nous réunissons les trois asymptotes (A.0.2-A.0.3-A.0.4) et nous les résumons Fig. A.1 :

$$\begin{cases} \log \eta \sim \log \eta_0 & \text{si } \dot{\gamma} \ll \dot{\gamma}_c \\ \log \eta \sim \log \eta_0 + (n-1) \log \dot{\gamma} - (n-1) \log \dot{\gamma}_c & \text{si } \dot{\gamma}_c \ll \dot{\gamma} \ll \dot{\gamma}_c \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{n-1} \\ \log \eta \sim \log \eta_\infty & \text{si } \dot{\gamma} \gg \dot{\gamma}_c \left( \frac{\eta_0}{\eta_\infty} \right)^{n-1} \end{cases} \quad (\text{A.0.5})$$

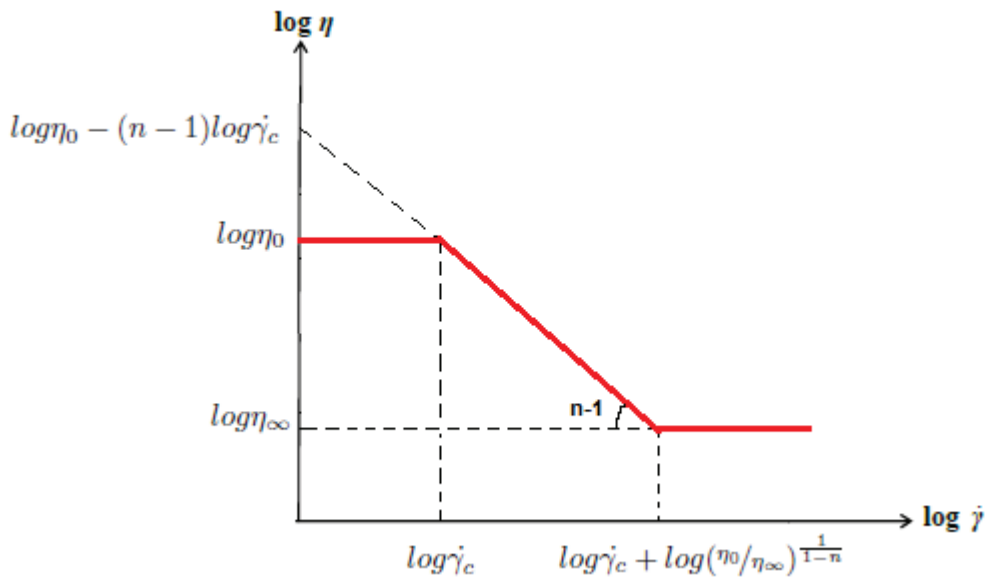


FIGURE A.1 : Asymptotes de la loi de Carreau.

# Annexe B

## Rhéologie des fluides complexes

### B.1 Liquides purement visqueux

Les liquides purement visqueux désignent un type de liquides pour lesquels les contraintes visqueuses s'écrivent toujours comme une fonction scalaire du taux de cisaillement local, *via* une viscosité effective qu'il est possible de déterminer expérimentalement. Cette définition inclut le cas Newtonien ; dans le cas non Newtonien, plusieurs modèles semi-analytiques issus de mesures empiriques sont proposés pour décrire l'évolution de la viscosité en fonction du cisaillement, parmi eux :

- la loi en puissance (ou loi d'Ostwald-de-Waele) :

$$\eta = m\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (\text{B.1.1})$$

- la loi de Cross :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta - \eta_0} = \frac{1}{1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^{1-n}}, \quad (\text{B.1.2})$$

- la loi de Carreau-Yasuda :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta - \eta_0} = [1 + (\dot{\gamma}/\dot{\gamma}_c)^a]^{\frac{n-1}{a}}, \quad (\text{B.1.3})$$

- la loi de Carreau, qui correspond à une loi de Carreau-Yasuda avec  $a = 2$ .

Pour un fluide rhéofluidifiant ou pseudoplastique ( $0 < n < 1$ ), la viscosité diminue avec le cisaillement (ex : boues, sang, solutions de polymère), alors que pour un fluide rhéoépaississant ou dilatant ( $n > 1$ ) la viscosité augmente avec le cisaillement (ex : solutions de fécule de maïs, sable mouillé).

### B.2 Liquides viscoplastiques

La figure B.1 fait aussi apparaître les liquides visqueux de comportement plastique, qui sont des liquides qui ont besoin d'un seuil minimal pour qu'il y ait écoulement. Pour les liquides plastiques de Bingham (*resp.* de Herschel-Bulkley), une fois la contrainte seuil dépassée le fluide se comporte comme un fluide Newtonien (*resp.* rhéofluidifiant). La mayonnaise, le dentifrice ou la peinture qui s'étale sans couler sur un mur, sont des exemples de ces fluides aussi appelés fluides à seuil. On cite principalement comme modèle empirique :

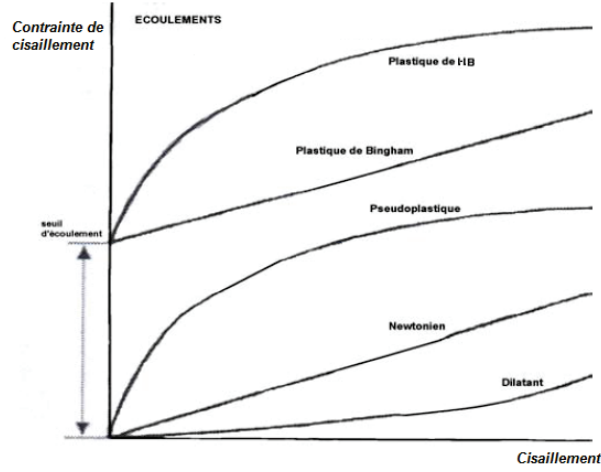


FIGURE B.1 : Contraintes visqueuses en fonction du cisaillement pour quelques modèles de fluides complexes.

- le modèle de Bingham :

$$\sigma - \sigma_0 = \eta \dot{\gamma}, \quad (\text{B.2.1})$$

- le modèle de Hurschel-Bulkley :

$$\sigma - \sigma_0 = m \dot{\gamma}^n, \text{ avec } 0 < n < 1. \quad (\text{B.2.2})$$

### B.3 Liquides viscoélastiques

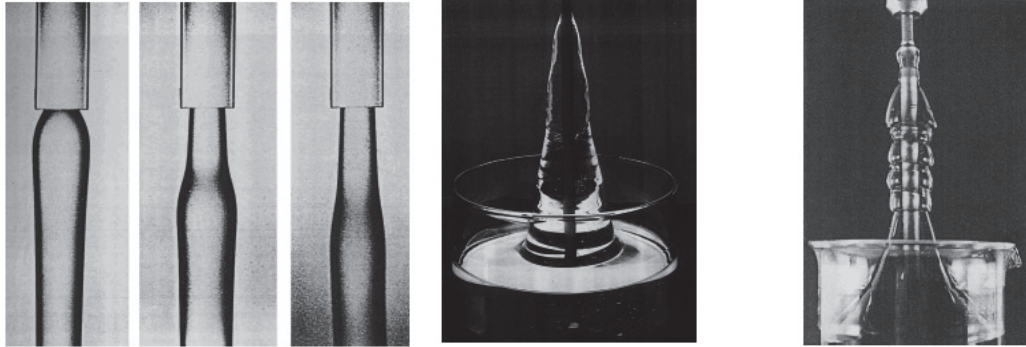
Les effets viscoélastiques sont mis en évidence lors de :

- l'effet Barus, où le cisaillement engendre des contraintes normales, ce qui se manifeste par un gonflement du jet (Fig. B.1a).
- l'effet Weissenberg, où le cisaillement donne naissance à une tension élastique le long des lignes de courant, faisant en sorte que le liquide remonte le long de la tige (Fig. B.1b).

Par définition, un matériau élastique parfait est un matériau pour lequel la contrainte  $\sigma(t)$  dépend d'une déformation  $\gamma(t)$  de nature uniquement élastique. D'un autre côté, le rôle purement dissipatif de la viscosité conduit à ce que les contraintes dépendent de la vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(t)$  (*i.e.* le cisaillement), et non pas de la déformation (Fig. B.2).

La figure B.2 montre que dans le cas du matériau parfaitement élastique, ce dernier se souvient de l'histoire de la déformation sinusoïdale, si bien que déformation et contrainte sont en phase. Par contre, dans le cas du liquide visqueux  $\sigma$  ne dépend que de  $\dot{\gamma}$  : contrainte et déformation sont en opposition de phase.

En écrivant que les effets viscoélastiques sont donc une combinaison des effets élastiques et des effets visqueux, la contrainte peut se modéliser comme étant un système raideur/amortisseur, et s'écrit généralement suivant l'équation (B.3.1) :



(a) Solution de 5% de PAA. De gauche à droite, le nombre de Reynolds augmente, montrant la compétition entre élasticité et inertie. (b) Effet Weissenberg (à gauche) et instabilité due à la remontée du liquide (à droite).

FIGURE B.1 : Exemples de manifestation d'effets viscoélastiques. Source : Boger & Walters (1993) [16].

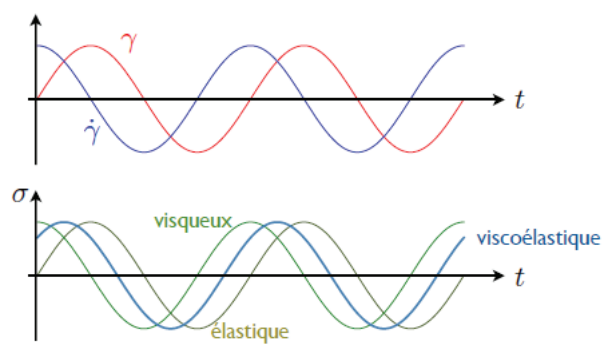


FIGURE B.2 : Réponse d'un liquide viscoélastique à une déformation sinusoidale  $\gamma(t)$  dans le cas élastique, et réponse à une vitesse de déformation  $\dot{\gamma}(t)$  dans le cas purement visqueux.

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 e^{i(\omega t + \phi)} \\ \sigma = (G' + iG'')\gamma \end{cases}, \text{ avec } \tan\phi = \frac{G''}{G'} \quad (\text{B.3.1})$$

avec  $G'$  représentant le module de conservation élastique, et  $G''$  le module de perte visqueuse.

Cette décomposition fait apparaître une phase  $\phi$  qui représente physiquement une propriété viscoélastique essentielle, et qu'il est possible de mesurer expérimentalement.

La mesure de ces deux modules lors d'essais dynamiques (Fig. B.3) indique un point d'intersection entre les deux courbes, signe que les effets élastiques et visqueux sont du même ordre de grandeur à cette fréquence d'oscillation.

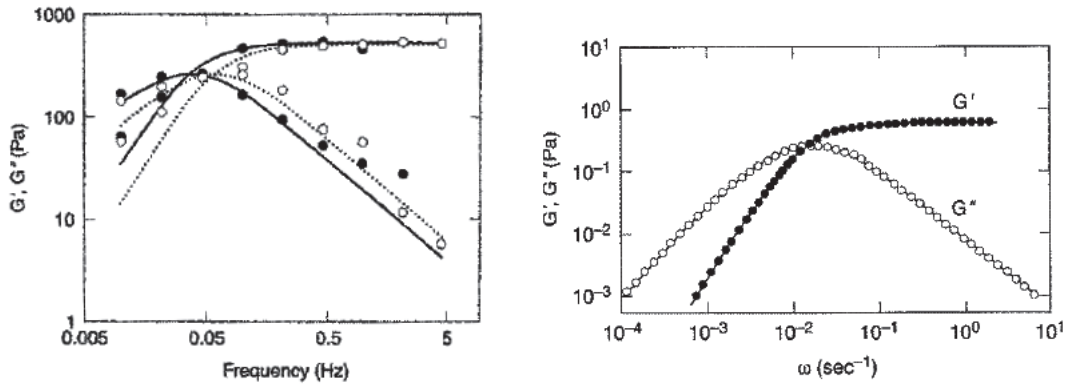


FIGURE B.3 : Modules élastique et visqueux pour une émulsion eau-huile (à gauche), et pour une solution concentrée de surfactants (à droite).

En constatant l'analogie physique entre le rôle dissipatif de la viscosité et celui de la résistance électrique, ainsi que celle existant entre la raideur élastique et la capacité, certains modèles physiques faisant l'analogie avec les circuits RC en électronique (Fig. B.4) sont proposés et on peut citer :

- le modèle de Maxwell, inspiré du circuit RC série.
- le modèle de Kelvin-Voigt, inspiré du circuit RC parallèle.

## B.4 Comportement dépendant du temps

Nous citons enfin certains liquides dont la rhéologie varie en fonction du temps. A taux de cisaillement fixé, il s'agit de liquides dont la viscosité aura tendance à varier du fait d'une variation temporelle dans la contrainte visqueuse. Si on trace la contrainte en fonction du cisaillement (Fig. B.1), on voit apparaître un cycle d'hystérésis entre les phases de montée et de descente lors d'essais de rhéométrie. Un comportement thixotropique (*resp.* antithixotropique) désigne le comportement d'un liquide pour lequel la viscosité va diminuer (*resp.* augmenter) temporellement à cisaillement donné.

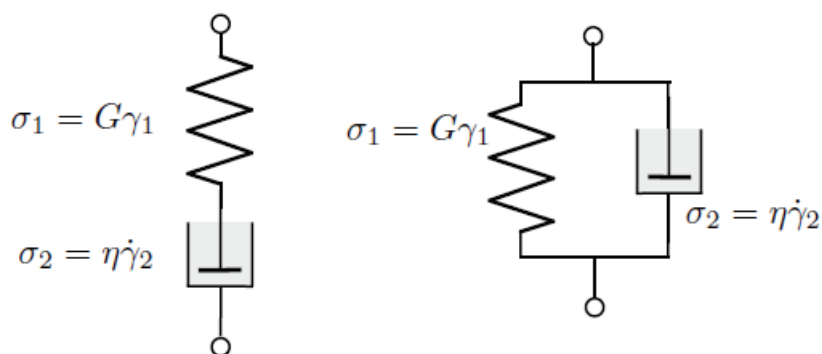


FIGURE B.4 : Modèle de Maxwell (à gauche), Modèle de Kelvin-Voigt (à droite).

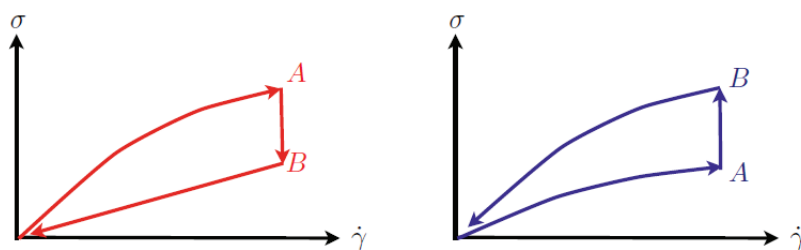


FIGURE B.1 : Comportement thixotropique (à gauche), antithixotropique (à droite).



# Annexe C

## Aspects de rhéométrie

Nous distinguons les viscosimètres des rhéomètres :

- Les viscosimètres sont suffisants pour caractériser les liquides Newtoniens de viscosité constante quel que soit le cisaillement appliqué. Nous citons principalement les viscosimètres à chute de bille, les viscosimètres capillaires et les viscosimètres rotatifs. En réalité, le cisaillement imposé durant les essais n'est pas maîtrisé avec précision, en raison de la géométrie non renseignée de façon précise dans la formulation du problème.
- Les rhéomètres se distinguent des viscosimètres puisqu'ils disposent d'un entrefer qui permet de façon précise de tenir compte des conditions aux limites du problème, et donc d'imposer un taux de cisaillement connu, et ainsi de mesurer la contrainte visqueuse associée avec précision.

### C.1 Rhéomètres de Couette

Le principe de fonctionnement du rhéomètre est une application directe de l'étude en régime laminaire de la dissipation d'énergie par frottements visqueux, dans le cas de la réponse hydrodynamique d'un liquide de viscosité effective  $\eta_{eff}$ , à l'action d'un mouvement de cisaillement de type Couette. Le cisaillement engendré est de type Taylor-Couette pour les rhéomètres rotatifs, et de type Couette-plan pour les rhéomètres plan-plan et cône-plan (Fig. C.1). Ce type de rhéomètres permet, dans certains cas, soit la mesure du couple connaissant la vitesse de rotation, soit l'inverse. En régime laminaire, les expressions reliant les contraintes  $\sigma$  au couple  $\Gamma$  d'un côté, et le cisaillement  $\dot{\gamma}$  en fonction de la vitesse de rotation  $\Omega$  d'un autre côté, sont données ci-dessous :

- Rhéomètre cône-plan :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{3\Gamma}{2\pi R^3} \\ \dot{\gamma} = \frac{\Omega}{\theta_0} \\ \eta_{eff} = \frac{3\theta_0\Gamma}{2\pi R^3\Omega} \end{cases} . \quad (C.1.1)$$

- Rhéomètre rotatif :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{3\Gamma}{2\pi h R_1^2} \\ \dot{\gamma} = \frac{2\Omega}{1-(R_1/R_2)^2} \\ \eta_{eff} = \frac{(R_2-R_1)\Gamma}{2\pi h R_1^3\Omega} \end{cases} . \quad (C.1.2)$$

- Rhéomètre plan-plan :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{3\Gamma}{2\pi R^3} \\ \dot{\gamma} = \frac{R\Omega}{h} \\ \eta_{eff} = \frac{3h\Gamma}{2\pi R^4\Omega} \end{cases} \quad (C.1.3)$$

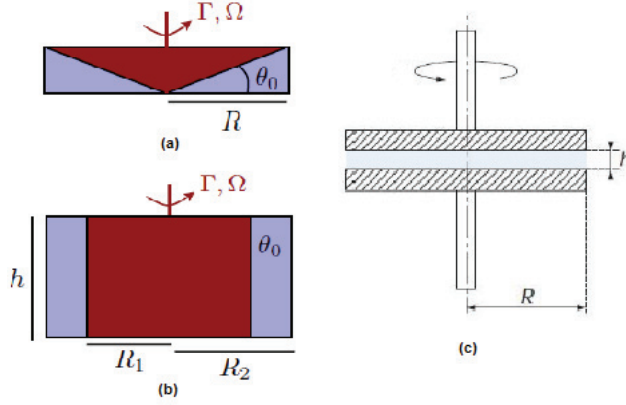


FIGURE C.1 : Schéma d'un rhéomètre cône-plan (a), rhéomètre rotatif (b) et rhéomètre plan-plan (c).

## C.2 Rhéomètres oscillants

Lors d'essais dynamiques oscillants, il est possible d'imposer une vitesse de déformation sinusoïdale, et par la suite de mesurer les modules complexes élastiques et visqueux en fonction de la fréquence dans le cas d'un liquide de comportement viscoélastique (Annexe B).

## Annexe D

# Propriétés du CMC

| <b>CEKOL<sup>®</sup> 2000 Cellulose Gum</b> |                                                                                                                           |                      |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|
| <b>Specifications</b>                       | <b>Characteristic</b>                                                                                                     | <b>Specification</b> |
|                                             | NaCMC content (dry basis)                                                                                                 | min. 99.5%           |
|                                             | Moisture as packed                                                                                                        | max. 10%             |
|                                             | Sodium chloride content (dry basis)                                                                                       | max. 0.5%            |
|                                             | Sodium glycolate content (dry basis)                                                                                      | max. 0.4%            |
|                                             | Degree of substitution                                                                                                    | 0.75 – 0.85          |
|                                             | Sodium content                                                                                                            | 7.5 – 9.0            |
|                                             | Sulphated ash content                                                                                                     | 23.0 – 27.0          |
|                                             | pH (1% solution)                                                                                                          | 6.5 – 8.0            |
|                                             | Viscosity, 2%, 25°C                                                                                                       | 1500 – 2500 mPa.s    |
|                                             | Brookfield LVT                                                                                                            |                      |
| <b>Other characteristics</b>                | White to cream powder<br>Odourless<br>Neutral taste<br>Typical particle size:    > 0.075 mm : 40-75%<br>> 0.5 mm : max 2% |                      |

FIGURE D.1 : Propriétés physico-chimiques du polymère de CMC utilisé au laboratoire.



## Annexe E

# Propriétés de la gomme Xanthane

| <b>Product Name: KELTROL</b><br><b>Product Description: XANTHAN GUM</b><br><b>Material Number: 10040281</b>                                                                                                                                                                                                                 |             |                      |             |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|----------------------|-------------|
| Characteristic                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Test Result | Specification        | Test Method |
| Particle Size, % thru 60 mesh (250 µm)                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 100         | Not less than 100    | KTM004      |
| Particle Size, % thru 80 mesh (180 µm)                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 99          | Not less than 95     | KTM004      |
| Loss on Drying, %                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 13          | 6 - 14               | KTM003      |
| Powder Color, %                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 87          | Not less than 77     | KTM006      |
| Viscosity (1% KCl solution), cP                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 1415        | 1200 - 1600          | KTM017      |
| pH (1% Solution)                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 7,3         | For Information Only | KTM005      |
| pH (0.25% solution, STW)                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 6,9         | For Information Only | KTM005      |
| Isopropyl Alcohol, ppm (NMT 500 for EC)                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 221         | Not more than 750    | KTM520      |
| Bacteria (Viable Mesophilic), cfu/g                                                                                                                                                                                                                                                                                         | < 100       | Not more than 2000   | KTM800      |
| Yeast, cfu/g                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | < 50        | Not more than 100    | KTM803      |
| Mold, cfu/g                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | < 50        | Not more than 100    | KTM803      |
| Coliform                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Negative    | Negative by MPN      | KTM801      |
| The Company guarantees that, at the time of shipment, the lot of product meets specification # 100-X and conforms to the requirement of the current edition of the Food Chemical Codex (FCC) and defined in the current EC Directives. Where a guaranteed parameter has been tested on this lot, the result is shown below. |             |                      |             |
| E. coli                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | Absent      | Absent in 25g        | KTM802      |
| Salmonella spp.                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | Absent      | Absent in 25g        | KTM804      |

FIGURE E.1 : Propriétés physico-chimiques du polymère de gomme Xanthane utilisé au laboratoire.



## Annexe F

# Démodulation synchrone

La méthode de démodulation synchrone est une méthode de traitement de signal périodique échantillonné, différente des méthodes spectrales et des algorithmes FFT (G. Travin (1978) [85]).

Dans le contexte de la détection d'ondes sinusoïdales, nous recueillons localement, pour chaque point de mesure, un échantillon de signal temporel quasi-sinusoïdal  $s_{mes}(t) = s_{out}e^{i(\omega t + \phi_{out})}$  de même fréquence que le signal excitatif de référence  $s_{ref}(t) = s_{in}e^{i(\omega t + \phi_{in})}$ . Par un traitement relativement simple, il est possible de calculer les quatre inconnues du problème, à savoir l'amplitude des deux signaux  $s_{in}$  et  $s_{out}$  ainsi que leur phase  $\phi_{in}$  et  $\phi_{out}$ . En notant  $s'_{out}$  et  $s''_{out}$  les composantes respectivement en phase et en opposition de phase du signal mesuré, et par  $s'_{in}$  et  $s''_{in}$  celles du signal de référence, le principe de superposition conduit à redéfinir les deux signaux sous forme de combinaison de signaux en phase et en quadrature :

$$\begin{cases} s_{ref}(t) = s_{in}e^{i(\omega t + \phi_{in})} = s'_{in}e^{i\omega t} + s''_{in}e^{i(\omega t + \pi/2)} \\ s_{mes}(t) = s_{out}e^{i(\omega t + \phi_{out})} = s'_{out}e^{i\omega t} + s''_{out}e^{i(\omega t + \pi/2)} \end{cases} \quad (F.0.1)$$

En effectuant par la suite une série de calculs d'intégrales sur un nombre entier  $N$  d'intervalles temporels de période  $T$ , et en s'aidant de l'équation (F.0.1), on écrit :

$$\begin{cases} \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2e^{i\omega t} s_{ref}(t) dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2s'_{in}e^{2i\omega t} dt + \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2is''_{in}e^{2i\omega t} dt \\ \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2e^{i\omega t} s_{mes}(t) dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2s'_{out}e^{2i\omega t} dt + \frac{1}{NT} \int_0^{NT} 2is''_{out}e^{2i\omega t} dt \end{cases} \quad (F.0.2)$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, il nous est à présent possible de résoudre le problème :

$$\begin{cases} s_{in}e^{i\phi_{in}} = s'_{in} + is''_{in} \Rightarrow s_{in} = \sqrt{s'^2_{in} + s''^2_{in}} \\ s_{out}e^{i\phi_{out}} = s'_{out} + is''_{out} \Rightarrow s_{out} = \sqrt{s'^2_{out} + s''^2_{out}} \\ \phi_{in} = \arg(s'_{in} + is''_{in}) = \arctan\left(\frac{s''_{in}}{s'_{in}}\right) \\ \phi_{out} = \arg(s'_{out} + is''_{out}) = \arctan\left(\frac{s''_{out}}{s'_{out}}\right) \end{cases} \quad (F.0.3)$$

Nous pouvons enfin reprendre le processus de traitement pour deux ou plusieurs points de mesures locales. Dans le cadre de notre travail, l'application de cette méthode sur un ensemble de points le long de la direction de propagation d'une onde plane primaire, permet de fournir :

- le déphasage  $\Delta\phi = \phi_{out} - \phi_{in}$ , déterminé point par point entre le signal mesuré et le signal de référence, qui permet de remonter à la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ,

- le coefficient d'amplification spatiale  $\frac{s_{out}(x_2)}{s_{out}(x_1)}$ , défini par le rapport des amplitudes du signal mesuré entre deux points de mesure successifs.

# Annexe G

## Théorie des ondes capillaires avec dissipation visqueuse

Nous allons citer ici uniquement l'approche énergétique proposée par Behroozi & Podolefsky (2001) pour comprendre la propagation des ondes capillaires, et celle proposée par Behroozi (2004) pour comprendre leur atténuation par dissipation visqueuse. La première étape consiste à trouver une expression harmonique pour le champ de vitesse, de façon à ce qu'il vérifie à la fois l'équation de Laplace, et les équations de Navier-Stokes. Behroozi & Podolefsky (2001) proposent :

$$\begin{cases} \vec{v} = a(x)\omega e^{ky} \left[ \sin(\omega t - kx)\vec{i} + \cos(\omega t - kx)\vec{j} \right] \\ a(x) = a_0 e^{-\alpha_{att}x} \end{cases} . \quad (\text{G.0.1})$$

### G.1 Modèle de propagation

D'un point de vue théorique, Behroozi & Podolefsky (2001) ont noté qu'en première approximation ( $\frac{\alpha_{att}}{k} \ll 1$ ), l'élévation périodique de la surface libre par effets capillaires est compensée par la gravité (*capillary-gravity waves*). D'un point de vue expérimental, Behroozi *et al.* (2001) [7] ont observé dans le cas Newtonien que pour une plage de fréquences d'excitation, la longueur d'onde est commandée quasi-entièrement par la tension de surface. En écrivant la conservation de l'énergie totale  $E_{tot} = \rho a^2 \omega^2 / k$  sur un quart de période, et en notant que l'énergie potentielle se répartit de façon égale entre énergie de pesanteur  $E_g = \rho a^2 g$ , et énergie de surface  $E_s = a^2 k^2 \sigma$ , on se ramène à la même relation de dispersion en l'absence de termes visqueux :

$$\omega^2 = kg + \sigma k^3 / \rho. \quad (\text{G.1.1})$$

### G.2 Modèle d'atténuation

Behroozi (2004) propose d'écrire le théorème de l'énergie cinétique localement au niveau de la surface libre, le long de la distance de propagation. En écrivant que la variation de puissance  $dP_{ext}$ , dissipée par unité de surface  $dS$  due aux contraintes visqueuses (Eq. (G.2.1)), est compensée par la variation par unité de temps et de surface de l'énergie mécanique de l'onde due à son atténuation spatiale  $\frac{dE_{tot}}{dt}$ , nous obtenons dans un premier temps :

$$\frac{dP_{ext}}{dS}|_{y=0} = (\sigma_{xy}u + \sigma_{yy}v)|_{y=0} = -2\eta k a^2(x)\omega^2 + \rho(g + \frac{\sigma k^2}{\rho} + \frac{\eta\omega\alpha_{att}}{\rho})\omega a^2(x)\sin(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx). \quad (G.2.1)$$

En moyennant l'équation (G.2.1) doublement sur une période temporelle  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et sur une longueur d'onde spatiale  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ , et en considérant que l'amplitude  $a(x)$  y reste constante, Behroozi (2004) montre dans le cas Newtonien ( $\eta = cste$ ) que :

$$\left\langle \frac{dP_{ext}}{dS}|_{y=0} \right\rangle = -2\eta k a^2 \omega^2. \quad (G.2.2)$$

Par ailleurs, l'équipartition de l'énergie pour une onde progressive conduit à :

$$E_{tot} = 2 \int_0^{-\infty} \frac{1}{2} \rho v^2 dy = \frac{\rho \omega^2 a_0^2 e^{-2\alpha_{att}x}}{2k}. \quad (G.2.3)$$

En remarquant que  $dE_{tot}/dx = -2\alpha_{att}E_{tot}$ , alors  $dE_{tot}/dt = -2\alpha_{att}E_{tot}dx/dt$ . De ce fait, nous obtenons une expression reliant directement  $dE_{tot}/dt$  aux propriétés de l'onde *via* la vitesse de groupe  $v_g$  :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = -\frac{\alpha_{att}\rho a^2 \omega^2 v_g}{k}. \quad (G.2.4)$$

La conservation de l'énergie stipule que  $\left\langle \frac{dP_{ext}}{dS}|_{y=0} \right\rangle = \frac{dE_{tot}}{dt}$ ; en combinant les équations (G.2.2) et (G.2.4), on aboutit à une expression reliant la viscosité à l'atténuation spatiale  $\alpha_{att}$  :

$$\eta = \frac{\alpha_{att}\rho v_g}{2k^2}. \quad (G.2.5)$$

## Annexe H

# Expressions asymptotiques $\alpha \rightarrow 0$ du nombre de Reynolds critique

Nous présentons ci-dessous les expressions trouvées dans la littérature du nombre de Reynolds critique à angle fixé, déterminées à partir d'un développement asymptotique à grandes longueurs d'ondes. Nous présentons ces expressions suivant la définition du nombre de Reynolds choisie par les auteurs :

– **Ng & Mei (1994)**

La viscosité est modélisée par une loi en puissance et on obtient :

$$Re_c = \frac{3n+2}{2} \cot \gamma. \quad (\text{H.0.1})$$

– **Ruyer-Quil *et al.* (2012)**

Afin de palier à la divergence de la viscosité à cisaillement nul au niveau de la surface libre, la loi en puissance est ici régularisée par un plateau Newtonien défini par  $s = \frac{h_N \gamma_c}{V}$ , qui vaut zéro dans le cas de la loi en puissance non régularisée, avec  $h_N$  l'épaisseur de Nusselt,  $\gamma_c$  la limite supérieure du cisaillement dans la loi de Carreau et  $V$  une vitesse caractéristique. En désignant par  $\bar{\eta}_c = s^n$  la fraction de la couche de film correspondant à un comportement Newtonien dans le modèle basé sur les équations de Saint-Venant linéarisées, le nombre de Reynolds critique est donné par :

$$Re_c = \frac{n\tilde{I}\cot\gamma}{(n+1)(1-\tilde{F})-n\tilde{G}}, \quad (\text{H.0.2})$$

avec  $\tilde{F} = \tilde{F}_a/\tilde{F}_b$ ,  $\tilde{G} = \tilde{G}_a/\tilde{G}_b$  et  $\tilde{I} = \tilde{I}_a/\tilde{I}_b$  tels que :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_a = & 630n((n+1)^2(7n+3)) + (n-1)\bar{\eta}_c^{2+1/n}\{105n(4n+3)[n(34n+35)+8] \\ & +14(4n+3)\bar{\eta}_c^{1+1/n}[3(2n+1)(n(9n(n-4)-4)+6) \\ & +10(n-1)(n+1)^2(3n+2)\bar{\eta}_c] \\ & +(2n+1)\bar{\eta}_c^{2+2/n}[-15(n-6)(2n+1)(3n+2)(4n-3) \\ & +28(n-1)(n+1)^2(3n-7)(4n+3)\bar{\eta}_c]\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{F}_b = 42(n+1)(2n+1)(4n+3)[15(n+1) + (n-1)\bar{\eta}_c^{1+1/n}(30n+20 + (2n+1)(3n-7)\bar{\eta}_c^{1+1/n})],$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}_a = & 630n^3(n+1) + (n-1)\bar{\eta}_c^{2+1/n}\{105n^2(4n+3)(10n+7) + 14(4n+3)\bar{\eta}_c^{1+1/n} \\ & * [3(2n+1)\{n[n(3n-25)+3]+6\} + 10(n-1)(n+1)^2(3n+2)\bar{\eta}_c] \\ & + (2n-1)\bar{\eta}_c^{2+2/n}[28\bar{\eta}_c(4n+3)(3n-7)(n+1)^2(n-1) \\ & - 15(4n-3)(3n+2)(2n+1)(n-6)]\}, \end{aligned}$$

$$\tilde{G}_b = \frac{n}{n+1}\tilde{F}_b,$$

$$\tilde{I}_a = 5(n+1)(3n+2) [3 + 2(n-1)\bar{\eta}_c^{2+1/n}],$$

$$\tilde{I}_b = \frac{1}{21(2n+1)(4n+3)}\tilde{G}_b.$$

## Annexe I

# Théorème de Squire en canal plan

Nous validons notre modèle de viscosité sur Nouar *et al.* (2007), et nous retrouvons leurs résultats de seuil critique 2D (Fig. I.1). Ceux-ci sont présentés suivant le paramètre rhéofluidifiant défini par Nouar *et al.* (2007) [63], que l'on notera  $L^*$ . Il est à noter que l'équation d'Orr-Sommerfeld est la même entre l'écoulement en canal plan et l'écoulement sur plan incliné ; en effet, la seule différence se situe au niveau du champ de base et des conditions aux limites.

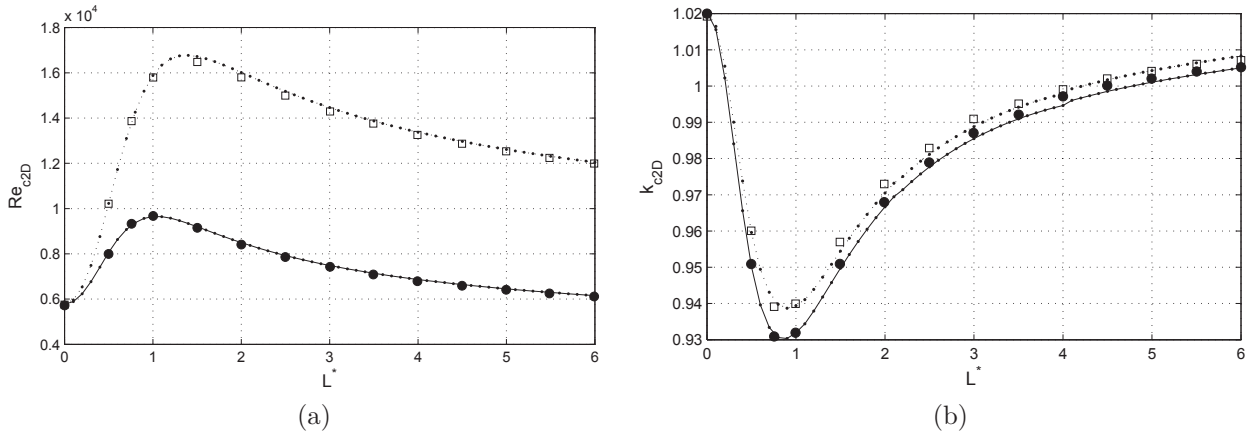


FIGURE I.1 : Seuils critiques 2D en terme de nombre de Reynolds (a), et de nombre d'onde (b), avec  $n = 0.5$  et  $I = 0$ , tracés en traits pleins (*resp.* pointillés) dans le cas incluant (*resp.* excluant) les perturbations de viscosité. Les résultats de Nouar *et al.* (2007) [63] sont représentés par les marqueurs pleins (*resp.* vides) dans le cas incluant (*resp.* excluant) les perturbations de viscosité.

Pour chaque valeur du nombre d'onde transverse, nous effectuons les mêmes calculs de seuil 3D que dans le cas du plan incliné (voir Chapitre 4), à la différence qu'on a une seule relation de Squire portant sur les nombres de Reynolds. La figure I.2a montre que ce sont les ondes planes 2D qui sont les plus dangereuses et le théorème de Squire est validé. A noter cependant que les calculs n'ont fourni de résultats convergés que pour des ondes déviées jusqu'à un maximum de

45° par rapport à la direction de l'écoulement, qui représente la valeur limite  $\beta = kc_{2D}$ . Nous représentons les résultats de  $Re_{c3D}$  pour toute valeur de  $L$  tel que nous l'avons défini suivant notre choix de grandeurs caractéristiques (Rousset *et al.* (2007) [72]).

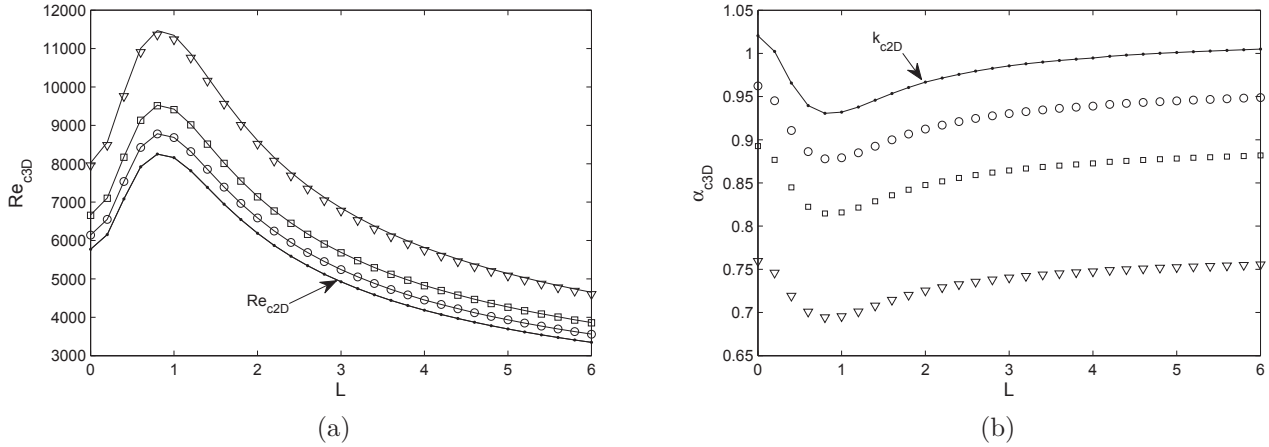


FIGURE I.2 : Résultats de seuils 3D en terme de nombre de Reynolds (a), et de nombre d'onde (b), dans le cas incluant les perturbations de viscosité. Les marqueurs correspondent aux résultats numériques de seuils 3D obtenus après résolution du problème complet (voir Chapitre 4), muni des conditions aux limites propres à l'écoulement de Poiseuille-plan, et en considérant des ondes obliques de 20° (*cercles*), 30° (*carrés*) et 44° (*triangles*) par rapport à la direction longitudinale. Les *traits pleins* correspondent, en (a), pour chaque valeur de  $L$ , à l'application de la relation de Squire portant sur les nombres de Reynolds  $Re_{c3D} = Re_{c2D} / \sqrt{1 - (\beta/k_{c2D})^2}$ , à partir de la seule connaissance du seuil critique 2D (*points noirs*), obtenu pour un fluide tel que  $n = 0.5$  et  $I = 10^{-3}$ .

Rappelons que la relation de Squire n'est valable que pour le problème 3D réduit. Ces résultats montrent donc que les problèmes 3D complet et réduit donnent des seuils 3D très voisins, et que les instabilités 2D semblent toujours rester les plus dangereuses.

# Bibliographie

- [1] S. V. Alekseenko, V. E. Nakoryakov, and B. G. Pokusaev. Wave formation on vertical falling liquid films. *International Journal of Multiphase Flow*, 11(5) :607–627, September 1985.
- [2] M. H. Allouche, V. Botton, D. Henry, S. Millet, R. Usha, and H. Ben Hadid. Experimental determination of the viscosity at very low shear rate for shear thinning fluids by electrocapillarity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 215 :60–69, January 2015.
- [3] Mustapha Amaouche, Amar Djema, and L. Bourdache. A modified shkadox’s model for thin film flow of a power law fluid over an inclined surface. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(1) :48–52, January 2009.
- [4] Christophe Ancey. *Notes de cours. Hydraulique à surface libre. Phénomènes de propagation : ondes et ruptures de barrage Bases mathématiques , outils de simulations , applications*. 2010.
- [5] Anjalaiah, R. Usha, and S. Millet. Thin film flow down a porous substrate in the presence of an insoluble surfactant : Stability analysis. *Physics of Fluids (1994-present)*, 25(2) :022101, February 2013.
- [6] F Behroozi. Fluid viscosity and the attenuation of surface waves : a derivation based on conservation of energy. *European Journal of Physics*, 25(1) :115–122, January 2004.
- [7] F. Behroozi, B. Lambert, and B. Buhrow. Direct measurement of the attenuation of capillary waves by laser interferometry : Noncontact determination of viscosity. *Applied Physics Letters*, 78(16) :2399, 2001.
- [8] F. Behroozi, B. Lambert, and B. Buhrow. Noninvasive measurement of viscosity from damping of capillary waves. *ISA transactions*, 42(1) :3–8, January 2003.
- [9] F Behroozi and N Podolefsky. Capillary gravity waves and the Navier Stokes equation. *European Journal of Physics*, 22 :587–593, 2001.
- [10] F Behroozi and N Podolefsky. Dispersion of capillary-gravity waves : a derivation based on conservation of energy. *European Journal of Physics*, 22(3) :225–231, May 2001.
- [11] F. Behroozi, J. Smith, and W. Even. Stokes dream : Measurement of fluid viscosity from the attenuation of capillary waves. *American Journal of Physics*, 78(11) :1165–1169, 2010.
- [12] F. Behroozi, J. Smith, and W. Even. Effect of viscosity on dispersion of capillary-gravity waves. *Wave Motion*, 48(2) :176–183, March 2011.
- [13] Adel Benchabane and Karim Bekkour. Rheological properties of carboxymethyl cellulose (CMC) solutions. *Colloid and Polymer Science*, 286(10) :1173–1180, May 2008.
- [14] T. Brooke Benjamin. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 2(06) :554–573, 1957.

- [15] Abdelhakim Benslimane, Pierre François, and Karim Bekkour. Comportement mécanique des boues biologiques en écoulement. *La Houille Blanche*, (5) :34–39, November 2011.
- [16] D. V. Boger and K. Walters. *Rheological Phenomena in Focus*. Elsevier, July 1993.
- [17] G. Chambon, a. Ghemmour, and D. Laigle. Gravity-driven surges of a viscoplastic fluid : An experimental study. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1-3) :54–62, May 2009.
- [18] H.C. Chang and E.A. Demekhin. *Complex wave dynamics on thin films*. Elsevier edition, 2002.
- [19] Vijayakumar Chikkadi, A. Sameen, and Rama Govindarajan. Preventing transition to turbulence : A viscosity stratification does not always help. *Physical Review Letters*, 95(26) :264504, December 2005.
- [20] B. S. Dandapat and A. Mukhopadhyay. Waves on the surface of a falling power-law fluid film. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 38(1) :21–38, January 2003.
- [21] Bhabani Shankar Dandapat and Asim Mukhopadhyay. Waves on a film of power-law fluid flowing down an inclined plane at moderate reynolds number. *Fluid Dynamics Research*, 29(3) :199–220, September 2001.
- [22] L Debnath, North Carolina, K K Bagchi, and S Mukherjee. Capillary-gravity waves in a viscous fluid. *Acta Mechanica*, 28 :313–319, 1977.
- [23] Jérôme Dechoz and Claude Rozé. Surface tension measurement of fuels and alkanes at high pressure under different atmospheres. *Applied Surface Science*, 229(1-4) :175–182, May 2004.
- [24] M.P. Escudier, I.W. Gouldson, A.S. Pereira, F.T. Pinho, and R.J. Poole. On the reproducibility of the rheology of shear-thinning liquids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 97 :99–124, 2001.
- [25] Enrique D. Fernández-Nieto, Pascal Noble, and Jean-Paul Vila. Shallow water equations for non-newtonian fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165(13-14) :712–732, July 2010.
- [26] J M Floryan. Three-dimensional instabilities of laminar flow in a rough channel and the concept of hydraulically smooth wall. *Journal Of Mechanics*, 26 :305–329, 2007.
- [27] J. M. Floryan, S. H. Davis, and R. E. Kelly. Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Physics of Fluids (1958-1988)*, 30(4) :983–989, April 1987.
- [28] Yoël Forterre. *Instabilités dans les écoulements granulaires*. PhD thesis, Université de Provence, 2002.
- [29] Yoël Forterre and Olivier Pouliquen. Long-surface-wave instability in dense granular flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 486 :21–50, June 2003.
- [30] A. Georgantaki, J. Vatteville, M. Vlachogiannis, and V. Bontozoglou. Measurements of liquid film flow as a function of fluid properties and channel width : Evidence for surface-tension-induced long-range transverse coherence. *Physical Review E*, 84(2) :026325, August 2011.
- [31] Mamdouh T Ghannam and M Nabil Esmail. Rheological Properties of Carboxymethyl Cellulose. *Journal Of Applied Polymer Science*, 64(2) :289–301, 1997.

- 
- [32] F Gibouin, S Jarny, P Monnet, J Dupré, V Valle, Département Génie, and Institut Pprime. Mesures couplées de PIV et de photoélasticimétrie dans un écoulement de fluide thixotrope à seuil. In *13ème colloque international francophone sur les Méthodes et Techniques Optiques pour l'Industrie*, number 1, pages 1–2, 2013.
  - [33] Diego Gomez-Diaz and José M. Navaza. Rheology of aqueous solutions of food additives Effect of concentration , temperature and blending. *Journal of Food Engineering*, 56 :387–392, 2003.
  - [34] A. S. Gupta and Lajpat Rai. Note on the stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 33(01) :87–91, 1968.
  - [35] A. Haas, T. Pollak, and N. Aksel. Side wall effects in thin gravity-driven film flow - steady and draining flow. *Physics of Fluids*, 23(6) :062107, 2011.
  - [36] Thomas Hagemeyer, Michael Hartmann, Martin Kühle, Dominique Thévenin, and Katharina Zähringer. Experimental characterization of thin films, droplets and rivulets using LED fluorescence. *Experiments in Fluids*, 52(2) :361–374, November 2011.
  - [37] Robert S Hansen, J Lucassen, Raymond L Bendure, and Gordon P Bierwagen. Propagation characteristics of interfacial ripples. *Journal of Colloid and Interface Science*, 26(2) :198–208, February 1968.
  - [38] Todd I. Hesla, Ferdinand R. Pranckh, and Luigi Preziosi. Squire’s theorem for two stratified fluids. *Physics of Fluids*, 29(9) :2808–2811, 1986.
  - [39] J. Hu, H. Ben Hadid, and D. Henry. Linear stability analysis of Poiseuille-Rayleigh-Benard flows in binary fluids with Soret effect. *Physics of Fluids*, 19(3) :034101, 2007.
  - [40] Jun Hu, Hamda Ben Hadid, Daniel Henry, and Abdelkader Mojtabi. Linear temporal and spatio-temporal stability analysis of a binary liquid film flowing down an inclined uniformly heated plate. *Journal of Fluid Mechanics*, 599 :269–298, March 2008.
  - [41] Kenichi Ito, Masahito Sano, and Hyuk Yu. Dynamic Interfacial Properties of Poly (ethylene oxide) and Polystyrene at Toluene/Water Interface. *Solutions*, (9) :1379–1388, 1990.
  - [42] Qiang Jiang, Yee C Chiew, Jose E Valentini, and North Carolina. Damping of Cylindrical Propagating Capillary Waves on Monolayer-Covered Surfaces. *Langmuir*, 8(11) :2747–2752, 1992.
  - [43] M. F. G. Johnson, R. A. Schluter, M. J. Miksis, and S. G. Bankoff. Experimental study of rivulet formation on an inclined plate by fluorescent imaging. *Journal of Fluid Mechanics*, 394 :339–354, September 1999.
  - [44] G. Jovet, M. Picasso, J. Rappaz, M. Huss, and M. Funk. Modelling and Numerical Simulation of the Dynamics of Glaciers Including Local Damage Effects. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, 6(5) :263–280, August 2011.
  - [45] S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, and M.G. Velarde. *Falling Liquid Films*. Springer, 2012.
  - [46] P.L. Kapitza and S.P. Kapitza. Wave flow of thin liquid layers. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 19 :105–120, 1949.
  - [47] I. L. Kliakhandler, S. H. Davis, and S. G. Bankoff. Viscous beads on vertical fibre. *Journal of Fluid Mechanics*, 429 :381–390, February 2001.
  - [48] H Lamb. *Hydrodynamics*. Dover, 6th edition, 1945.

- [49] D Langevin. Capillary-Wave Techniques for the Measurement of Surface Tension and Surface Viscoelasticity. *Colloids and surfaces*, 43 :121–131, 1990.
- [50] P H Leblond, British Columbia, and F Mainardi. The Viscous Damping of Capillary – Gravity Waves. *Acta Mechanica*, 68 :203–222, 1987.
- [51] Cheng-Xian Lin and Shao-Yen Ko. Effects of temperature and concentration on the steady shear properties of aqueous of Carbopol and CMC. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 22(2) :157–166, 1995.
- [52] J. Liu, J.D. Paul, and J.P. Gollub. Measurements of the primary instabilities of film flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 250 :69–101, 1993.
- [53] Jun Liu, J Schneider, and J P Gollub. Three-dimensional instabilities of film flows. *Physics of Fluids*, 7(May 2006), 1995.
- [54] Knut Jorgen Maloy, Jens Feder, and Torstein Jossang. An experimental technique for measurements of capillary waves. *Review of Scientific Instruments*, 60(3) :481, 1989.
- [55] J. Adin Mann Jr. and R. S Hansen. Propagation characteristics of capillary ripples. II. instrumentation for measurement of ripple velocity and amplitude. *Journal of Colloid Science*, 18(8) :757–771, October 1963.
- [56] S. Millet. *Stabilité de l ’ écoulement multicouche de films non newtoniens sur un plan incliné*. PhD thesis, Insa de Lyon, 2007.
- [57] S. Millet, V. Botton, H. Ben Hadid, D. Henry, and F. Rousset. Stability of two-layer shear-thinning film flows. *Physical Review E*, 88(4) :043004, October 2013.
- [58] S. Millet, V. Botton, F. Rousset, and H. Ben Hadid. Wave celerity on a shear-thinning fluid film flowing down an incline. *Physics of Fluids*, 20(3) :031701, 2008.
- [59] Frédéric Moisy, Marc Rabaud, and Kévin Salsac. A synthetic Schlieren method for the measurement of the topography of a liquid interface. *Experiments in Fluids*, 46(6) :1021–1036, January 2009.
- [60] Chiu-On Ng and Chiang C. Mei. Roll waves on a shallow layer of mud modelled as a power-law fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 263 :151–184, 1994.
- [61] Pascal Noble and Jean-Paul Vila. Thin power-law film flow down an inclined plane : consistent shallow-water models and stability under large-scale perturbations. *Journal of Fluid Mechanics*, 735 :29–60, 2013.
- [62] T. Nosoko and A. Miyara. The evolution and subsequent dynamics of waves on a vertically falling liquid film. *Physics of Fluids (1994-present)*, 16(4) :1118–1126, April 2004.
- [63] C. Nouar, A. Bottaro, and J. P. Brancher. Delaying transition to turbulence in channel flow : revisiting the stability of shear-thinning fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 592 :177–194, November 2007.
- [64] Steven A. Orszag and Lawrence C. Kells. Transition to turbulence in plane poiseuille and plane couette flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 96(01) :159–205, 1980.
- [65] C. D. Park and T. Nosoko. Three-dimensional wave dynamics on a falling film and associated mass transfer. *AIChE Journal*, 49(11) :2715–2727, November 2003.
- [66] Arne J. Pearlstein. On the two-dimensionality of the critical disturbances for stratified viscous plane parallel shear flows. *Physics of Fluids*, 28(2) :751–753, 1985.

- 
- [67] A. Prasadka, B. Cabane, V. Pagneux, A. Maurel, and P. Petitjeans. Fourier transform profilometry for water waves : how to achieve clean water attenuation with diffusive reflection at the water surface ? *Experiments in Fluids*, 52(2) :519–527, December 2011.
  - [68] Abdessamade Rafiki and Ahmed Hifdi. Stability of plane poiseuille flow of viscoelastic fluids in the presence of a transverse magnetic field. *MATEC Web of Conferences*, 1 :06006, 2012.
  - [69] Michael Renardy and Yuri Renardy. Linear stability of plane Couette flow of an upper convected Maxwell fluid. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 22 :23–33, 1986.
  - [70] H Richard and M Raffel. Principle and applications of the background oriented schlieren (BOS) method. *Measurement Science and Technology*, 12(9) :1576–1585, September 2001.
  - [71] A B Rodd, D E Dunstan, and D V Boger. Characterisation of xanthan gum solutions using dynamic light scattering and rheology. *Polymer*, 42 :159–174, 2000.
  - [72] F. Rousset, S. Millet, V. Botton, and H. Ben Hadid. Temporal Stability of Carreau Fluid Flow Down an Incline. *Journal of Fluids Engineering*, 129(7) :913, 2007.
  - [73] C. Ruyer-Quil, S. Chakraborty, and B. S. Dandapat. Wavy regime of a power-law film flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 692 :220–256, January 2012.
  - [74] A. Samanta, C. Ruyer-Quil, and B. Goyeau. A falling film down a slippery inclined plane. *Journal of Fluid Mechanics*, 684 :353–383, 2011.
  - [75] J. R. Saylor, A. J. Szeri, and G. P. Foulks. Measurement of surfactant properties using a circular capillary wave field. *Experiments in Fluids*, 29(6) :509–518, December 2000.
  - [76] Uwe Schafflinger. A short note on Squire’s theorem for interfacial instabilities in a stratified flow of two superposed fluids. *Fluid Dynamics Research*, 14 :223–227, 1994.
  - [77] Grigori M. Sisoiev, Bhabani S. Dandapat, Konstantin S. Matveyev, and Asim Mukhopadhyay. Bifurcation analysis of the travelling waves on a falling power-law fluid film. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141(2-3) :128–137, February 2007.
  - [78] Marc K. Smith. The mechanism for the long-wave instability in thin liquid films. *Journal of Fluid Mechanics*, 217 :469–485, 1990.
  - [79] C.H. Sohl and K. Miyano. Novel technique for dynamic surface tension and viscosity measurements at liquid-gas interfaces. *Rev. Sci. Instrum.*, 49(10) :1464–1469, 1978.
  - [80] C.H. Sohl and K. Miyano. Surface-wave propagation on isotropic liquids : A study of two-mode structure. *Physical review A*, 20(2) :616–620, 1979.
  - [81] Ki-Won Song, Hoa-Youn Kuk, and Gap-shik Chang. Rheology of concentrated xanthan gum solutions : Oscillatory shear flow behavior. *Korea-Australia Rheology Journal*, 18(2) :67–81, 2006.
  - [82] H. B. Squire. On the Stability for Three-Dimensional Disturbances of Viscous Fluid Flow between Parallel Walls. In *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 142, pages 621–628, November 1933.
  - [83] M Takeda and K Mutoh. Fourier transform profilometry for the automatic measurement of 3-D object shapes. *Applied optics*, 22(24) :3977, December 1983.
  - [84] Ming K. Tan, James R. Friend, Omar K. Matar, and Leslie Y. Yeo. Capillary wave motion excited by high frequency surface acoustic waves. *Physics of Fluids*, 22(11) :112112, 2010.

- [85] G Travin. *Adaptation d'un transféromètre et d'un calculateur numérique à la mesure d'impédances complexes à l'aide d'un microprocesseur*. PhD thesis, Insa de Lyon, 1978.
- [86] M Vlachogiannis, A Samandas, V Leontidis, and V Bontozoglou. Effect of channel width on the primary instability of inclined film flow. *Physics of Fluids*, pages 1–9, 2010.
- [87] Steven J. Weinstein. Wave propagation in the flow of shear-thinning fluids down an incline. *AIChE Journal*, 36(12) :1873–1889, December 1990.
- [88] P J Whitcomb and CW Macosko. Rheology of Xanthan gum. *Journal of Rheology*, 22 :493–505, 1978.
- [89] G. B. Whitham. *Linear and Nonlinear Waves*. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, June 1974.
- [90] C.S. Yih. Stability of Liquid flow down an Inclined Plane. *Physics of Fluids*, 6(3), 1963.